МГЗПИ

С. Л. ПЕВЗНЕР,
М. М. ЦАЛЕНКО

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

С. Л. ПЕВЗНЕР, М. М. ЦАЛЕНКО

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ II—III КУРСОВ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФАКУЛЬТЕТОВ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1982

Рекомендовано Главным управлением высших и средних педагогических учебных заведений Министерства просвещения РСФСР

Рецензенты:

кафедра алгебры и геометрии Орловского пединститута (зав. кафедрой кандидат педагогических наук, доцент *В. В. Ветров*),

кандидат физико-математических наук, доцент *М. В. Васильева* (МГПИ им. Ленина)

Редактор МГЗПИ *О. А. Павлович*

Самуил Лейбович Певзнер
Мария Михайловна Цаленко

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ

ПО ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Редактор *Л. В. Туркестанская*
Технический редактор *М. И. Смирнова*
Корректор *А. А. Гусельникова*

Н/К

Сдано в набор 26.10.81. Подписано к печати 3.03.82. $60\times90^1/_{16}$. Бум. типограф. № 2. Гарнит. лит. Печать высокая. Усл. печ. л. 5. Усл. кр. отт. 5,25. Уч.-изд. л. 4,21. Тираж 27 000 экз. Заказ № 223 Цена 15 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

$\text{П}\,\frac{4309020400}{103\,(03)-82}$ заказное

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый задачник-практикум содержит задачи по разделам «Понятие проективного пространства» и «Основные факты проективной геометрии» курса геометрии педагогических институтов. Он ориентирован на учебное пособие [2]: весь материал разбит на пять глав, сохраняющих те же названия, здесь используются те же терминология и основные определения. Кроме того, в задачнике имеются ссылки на необходимый теоретический материал и на решения тех или иных примеров, подробно рассмотренных в пособии. Например, замечание «См. § 12.2» отсылает читателя ко второму пункту параграфа 12 пособия [2].

Задачник-практикум содержит 298 задач, многие из которых даны с подробными решениями или указаниями. Он призван оказать действенную помощь студентам-заочникам в приобретении необходимых практических навыков, в выполнении контрольных работ, призван содействовать более глубокому изучению теоретического материала. Авторы старались избегать включения задач повышенной трудности, которые в достаточном количестве можно найти в книгах [1], [4].

Авторы считают своим приятным долгом выразить глубокую признательность О. Е. и И. В. Парнасским за полезные замечания, позволившие устранить ряд недочетов.

Литература

1. Сборник задач по геометрии /Под ред. Л. С. Атанасяна. М., Просвещение, 1975, ч. II.

2. Певзнер С. Л. Проективная геометрия. М., Просвещение, 1980.

3. Певзнер С. Л., Цаленко М. М. Руководство к решению задач по проективной геометрии. МГЗПИ, 1979.

4. Черняев М. П. Сборник задач по синтетической геометрии. РГУ, 1961.

ГЛАВА I

ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПРЯМОЙ

§ 1. РАСШИРЕННАЯ ЕВКЛИДОВА ПРЯМАЯ. ПРОЕКТИВНАЯ ПРЯМАЯ. ПРОЕКТИВНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Литература: [2], § 1, 2.

1. На евклидовой плоскости дана окружность. Под точкой множества $\boldsymbol{M}$ будем понимать две диаметрально противоположные точки данной окружности. Докажите, что построенное множество $\boldsymbol{M}$ является проективной прямой.

Решение. В соответствии с определением проективной прямой (§ 1. 2)[1] нужно построить биективное отображение множества $\boldsymbol{M}$ на какой-либо пучок прямых евклидовой плоскости. Рассмотрим пучок прямых $\boldsymbol{S}$, центр которого совпадает с центром окружности O. Определим отображение $g: \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{S}$ следующим условием: образом точки $(A, A') \in \boldsymbol{M}$ является прямая $AA' \in \boldsymbol{S}$ (рис. 1). Нетрудно проверить, что построенное отображение $\boldsymbol{M}$ на $\boldsymbol{S}$ биективно.

2. На проективной прямой заданы две системы координат R и R', связанные следующими уравнениями перехода:

$$\begin{cases} \lambda x_1 = x_1' + x_2', \\ \lambda x_2 = 2x_1' - x_2'. \end{cases}$$

Зная координаты точек в системе R': A $(1:-1)$, B $(0:1)$, C $(-3:1)$, найдите их координаты в системе R. Зная координаты точек в системе R: D $(0:1)$, E $(1:-1)$, F $(2:7)$, найдите их координаты в системе R'.

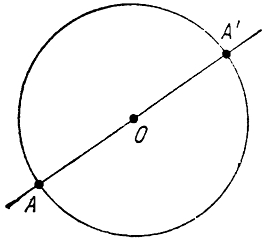

Рис. 1

Указание. Для определения координат точки D в системе R' решите систему

$$\begin{cases} 0 = x_1' + x_2', \\ \lambda = 2x_1' - x_2' \end{cases}$$

и найдите $x_1' : x_2' = \frac{\lambda}{3} : \frac{-\lambda}{3} = 1 : (-1)$.

[1] Ссылки на определения, теоремы и примеры даются по пособию [2].

3. На проективной прямой заданы две системы координат R и R'. Найдите уравнения перехода от одной системы к другой, если известны координаты фундаментальных точек E_0', E_1', E_2' системы R' в системе R:

а) $E_0'(-1:3)$, $E_1'(1:2)$, $E_2'(-2:1)$;

б) $E_0'(1:1)$, $E_1'(1:0)$, $E_2'(1:2)$;

в) $E_0'(1:2)$, $E_1'(1:0)$, $E_2'(0:1)$;

г) $E_0'(0:1)$, $E_1'(1:1)$, $E_2'(-1:1)$.

Указание. См. решение аналогичной задачи в § 2, пример 1.

4. На расширенной евклидовой прямой в однородных аффинных координатах даны точки $A\ (1:1)$, $B\ (2:3)$, $C\ (-3:5)$, $D\ (1:0)$, $E\ (0:1)$. Найдите их координаты в соответствующей неоднородной системе.

Указание. По теореме из § 2.5 собственная точка X прямой, имеющая неоднородную координату x, в соответствующей однородной системе имеет однородные координаты $(x:1)$. Значит, для любой пары однородных координат точки X справедливо соотношение $x = \frac{x_1}{x_2}$. Таким образом, неоднородная координата точки A будет равна $1 = \frac{1}{1}$.

5. На проективной прямой в некоторой системе проективных координат R' даны фундаментальные точки другой системы координат R: $E_0\ (1:0)$, $E_1\ (1:3)$, $E_2\ (1:-3)$. Найдите координаты точек A, B и C в системе R, если известны их координаты в системе R': $A\ (1:1)$, $B\ (2:-3)$, $C\ (0:1)$.

Указание. Найдите уравнения перехода

$$\begin{aligned} \mu x_1' &= x_1 + x_2, \\ \mu x_2' &= 3x_1 - 3x_2, \end{aligned}$$

затем координаты искомых точек.

6. На евклидовой прямой даны своими неоднородными координатами фундаментальные точки проективной системы координат: $E_0\ (0)$, $E_1\ (1)$, $E_2\ (-1)$. Найдите проективные координаты точек $A\ (2)$, $B\ (3)$, $C\ (-2)$, $D\ (-3)$ и несобственной точки K_∞.

Указание. См. пример 3 в § 2.

7. На евклидовой прямой даны фундаментальные точки E_0, E_1, E_2 проективной системы координат. Постройте точки $A\ (1:-1)$, $B\ (2:-1)$, $C\ (3:2)$.

Указание. Рассмотрите пучок прямых с центром в произвольной точке S, не принадлежащей данной прямой, и аффинную систему координат R с началом S, базисные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ которой

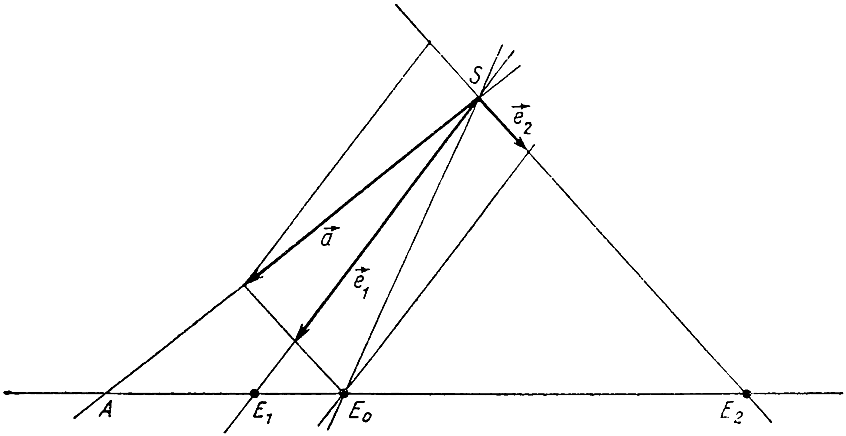

Рис. 2

соответственно параллельны прямым SE_1 и SE_2, причем $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \overrightarrow{SE_0}$ (рис. 2). Затем постройте вектор $\vec{a} = (1;\ -1)_R$. Искомой точкой будет точка пересечения данной прямой и прямой пучка с направляющим вектором $\vec{a}$.

§ 2. ДВОЙНОЕ ОТНОШЕНИЕ ЧЕТЫРЕХ ТОЧЕК. ГАРМОНИЗМ. ДВОЙНОЕ ОТНОШЕНИЕ ТОЧЕК НА РАСШИРЕННОЙ ЕВКЛИДОВОЙ ПРЯМОЙ

Литература: [2], § 3, 4.

8. Найдите двойное отношение $(ABCD)$ следующих четверок точек проективной прямой:

а) $A = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 3 \\ -1 \end{Vmatrix}$, $C = \begin{Vmatrix} 7 \\ -3 \end{Vmatrix}$, $D = \begin{Vmatrix} 5 \\ -3 \end{Vmatrix}$;

б) $A = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 7 \\ -4 \end{Vmatrix}$, $C = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \end{Vmatrix}$, $D = \begin{Vmatrix} 3 \\ -1 \end{Vmatrix}$;

в) $A = \begin{Vmatrix} 1 \\ 3 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} -1 \\ 4 \end{Vmatrix}$, $C = \begin{Vmatrix} -1 \\ 11 \end{Vmatrix}$, $D = \begin{Vmatrix} 3 \\ 2 \end{Vmatrix}$;

г) $A = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 3 \\ -2 \end{Vmatrix}$, $C = \begin{Vmatrix} 3 \\ -2 \end{Vmatrix}$, $D = \begin{Vmatrix} 1 \\ 7 \end{Vmatrix}$;

д) $A = \begin{Vmatrix} 2 \\ -1 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 1 \\ 3 \end{Vmatrix}$, $C = \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$, $D = \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$;

е) $A = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} -1 \\ 3 \end{Vmatrix}$, $C = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix}$, $D = \begin{Vmatrix} -1 \\ 3 \end{Vmatrix}$.

Указание. Сначала проанализируйте решение примера 1 из § 3.

9. Даны три точки и двойное отношение четверки точек проективной прямой. Найдите четвертую точку.

а) $A=\left\|\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\right\|$, $B=\left\|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right\|$, $C=\left\|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\|$, $(ABCD)=\frac{1}{2}$. Найдите D.

б) $A=\left\|\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\right\|$, $B=\left\|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right\|$, $C=\left\|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\|$, $(ABCD)=-1$. Найдите D.

в) $A=\left\|\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\right\|$, $B=\left\|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right\|$, $C=\left\|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\|$, $(ABCD)=1$. Найдите D.

г) $B=\left\|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\|$, $C=\left\|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\|$, $D=\left\|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right\|$, $(ABCD)=-2$. Найдите A.

д) $A=\left\|\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right\|$, $C=\left\|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right\|$, $D=\left\|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right\|$, $(ABCD)=-2$. Найдите B.

е) $A=\left\|\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right\|$, $B=\left\|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right\|$, $D=\left\|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\|$, $(ABCD)=0$. Найдите C.

Указание. Сначала проанализируйте решение примера 2 из § 3.

10. Решите задачу 5, используя теорему 2 из § 3. 3.

Указание. См. пример 3 из § 3.

11. Решите задачу 3а) на основании теоремы 2 § 3. 3.

Решение. Пусть точка M в системе R имеет координатный столбец $\left\|\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\right\|$, а в системе R' — $\left\|\begin{matrix}x_1'\\x_2'\end{matrix}\right\|$. Тогда

$$(E_1E_2E_0M)=\frac{x_1'}{x_2'}.$$

С другой стороны, $(E_1'\,E_2'\,E_0'\,M)=\frac{\beta}{\alpha}:\frac{\beta'}{\alpha'}$,

где

$$\begin{cases} E_0'=\alpha E_1'+\beta E_2',\\ M=\alpha' E_1'+\beta' E_2'.\end{cases}$$

Подставляем сюда координатные столбцы точек E_1', E_2', E_0', M, вычисленные в системе R:

$$\left\|\begin{matrix}-1\\3\end{matrix}\right\|=\alpha\left\|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\|+\beta\left\|\begin{matrix}-2\\1\end{matrix}\right\|,$$

$$\left\|\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\right\|=\alpha'\left\|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\|+\beta'\left\|\begin{matrix}-2\\1\end{matrix}\right\|$$

или

$$\begin{cases}-1=\alpha-2\beta,\\ 3=2\alpha+\beta,\end{cases}\qquad \begin{cases}x_1=\alpha'-2\beta',\\ x_2=2\alpha'+\beta'.\end{cases}$$

Решая эти системы относительно α, β и α', β', находим:

$$\alpha=1,\ \beta=1,\ \alpha'=\frac{1}{5}x_1+\frac{2}{5}x_2,\ \beta'=-\frac{2}{5}x_1+\frac{1}{5}x_2.$$

Поэтому $$\frac{x_1'}{x_2'} = \frac{1}{1} : \frac{-\frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2}{\frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2},$$

откуда $$\frac{x_1'}{x_2'} = \frac{x_1 + 2x_2}{-2x_1 + x_2}$$

и, следовательно, $$\begin{cases} \mu x_1' = x_1 + 2x_2, \\ \mu x_2' = -2x_1 + x_2. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно x_1 и x_2, получаем:

$$\begin{cases} \lambda x_1 = x_1' - 2x_2', \\ \lambda x_2 = 2x_1' + x_2', \end{cases} \text{где } \lambda = \frac{5}{\mu}.$$

12. Решите задачи 3, б—г на основании теоремы 2 из § 3. 3.

13. Среди четверок точек задачи 8 найдите такие, для которых $A, B \div C, D$, и такие, для которых $A, B \doteq C, D$.

14. Четверку точек A (—1 : 2), B (—1: 3), C (—3: 8), D (—4: 11) разбейте на разделенные пары.

15. $(ABCD) = 2$. Найдите $(DCAB)$, $(BACD)$, $(DBCA)$, $(CABD)$, $(ADBC)$.

Указание. Сначала проанализируйте решение примера 2 из § 3.

16. $(ACBD) = -\frac{3}{4}$. Найдите $(ADBC)$, $(BADC)$, $(ABCD)$.

17. Даны точки A (1: 2), B (2: —1), C (1: 0). Найдите точку D такую, чтобы были гармоническими следующие четверки:

а) A, B, C, D; б) A, B, D, C; в) A, D, B, C; г) D, A, B, C.

18. Можно ли из четырех точек A (1: 0), B (1: —1), C (1: 2), D (2: 1) составить гармонически разделенные пары?

19. Даны две пары точек проективной прямой: A (2: —1), A' (0: 1) и B (1: 0), B' (1: 4). Найдите пару точек, гармонически разделяющую каждую из данных пар.

Указание. Пусть X и Y — искомые точки. Положим

$$\begin{cases} X = \alpha A + \alpha' A', \\ Y = \beta A + \beta' A'. \end{cases}$$

Так как $$A = \frac{9}{4}B - \frac{1}{4}B', \quad A' = -\frac{1}{4}B + \frac{1}{4}B',$$

то

$$\begin{cases} X = \left(\frac{9}{4}\alpha - \frac{1}{4}\alpha'\right)B + \left(-\frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{4}\alpha'\right)B', \\ Y = \left(\frac{9}{4}\beta - \frac{1}{4}\beta'\right)B + \left(-\frac{1}{4}\beta + \frac{1}{4}\beta'\right)B'. \end{cases}$$

Учитывая условия гармонизма $(AA'XY) = (BB'XY) = -1$, приходим к системе двух уравнений

$$(*)\begin{cases} \dfrac{\alpha'}{\alpha} : \dfrac{\beta'}{\beta} = -1, \\ \dfrac{-\frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{4}\alpha'}{\frac{9}{4}\alpha - \frac{1}{4}\alpha'} : \dfrac{-\frac{1}{4}\beta + \frac{1}{4}\beta'}{\frac{9}{4}\beta - \frac{1}{4}\beta'} = -1 \end{cases}$$

с двумя неизвестными $\frac{\alpha'}{\alpha}$ и $\frac{\beta'}{\beta}$, решив которую можем затем найти координаты искомых точек.

20. Даны две пары точек проективной прямой: $A\ (2: -1)$, $A'\ (1: 4)$ и $B\ (0: 1)$, $B'\ (1: 0)$. Докажите, что не существует пары точек, гармонически разделяющих каждую из данных пар.

Указание. См. указание к предыдущей задаче. Получив систему, аналогичную системе (*), докажите, что она не имеет действительных решений.

21. Докажите, что если $(ABXY) = \alpha$, то $\alpha\ (ABMX) = (ABMY)$ для любой точки $M \in (AB)$.

22. Даны неоднородные аффинные координаты четырех точек евклидовой прямой. Найдите двойное отношение $(ABCD)$ этих точек.

а) $A\ (-2)$, $B\ (1)$, $C\ (3)$, $D\ (-4)$;

б) $A\ (3)$, $B\ (-1)$, $C\ (1)$, $D\ (0)$;

в) $A\ (-10)$, $B\ (3)$, $C\ (1)$, $D\ (-6)$.

23. Даны неоднородные аффинные координаты четырех точек евклидовой прямой: $A\ (a)$, $B\ (b)$, $C\ (c)$, $D\ (d)$. Найдите $(ABCD)$.

24. Даны неоднородные аффинные координаты трех собственных точек расширенной евклидовой прямой: $A\ (3)$, $B\ (-1)$, $C\ (2)$. Найдите а) $(ABCD_\infty)$; б) $(D_\infty CBA)$; в) $(CBD_\infty A)$, где D_∞ — несобственная точка данной прямой.

25. Даны неоднородные аффинные координаты трех собственных точек расширенной евклидовой прямой: $A\ (a)$, $B\ (b)$, $C\ (c)$.
Найдите: а) $(ABCD_\infty)$; б) $(CD_\infty BA)$; в) $(CAD_\infty B)$, где D_∞ — несобственная точка данной прямой.

26. В треугольнике ABC проведены медиана CM и биссектриса CH. Найдите $(ABMH)$, если известно, что $|AC| = p$, $|BC| = q$.

27. Пусть P — точка пересечения диагоналей трапеции, а Q — точка пересечения боковых сторон. Докажите, что пара точек пересечения прямой PQ с основаниями трапеции гармонически разделяется точками P и Q.

Замечание. Эта задача представляет собой частный случай теоремы о гармонических свойствах полного четырехвершинника (см. § 10).

ГЛАВА II

ПОНЯТИЕ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

§ 3. РАСШИРЕННАЯ ЕВКЛИДОВА ПЛОСКОСТЬ. ПРОЕКТИВНАЯ ПЛОСКОСТЬ

Литература: [2], § 5.

28. В трехмерном евклидовом пространстве дана сфера. Под точкой множества $\boldsymbol{M}$ будем понимать две диаметрально противоположные точки этой сферы. Под прямой — множество пар диаметрально противоположных точек, лежащих на окружности большого круга (рис. 3). Докажите, что построенное множество является проективной плоскостью.

Указание. Решение аналогично решению задачи 1. Рассмотрите связку $\boldsymbol{S}$ прямых и плоскостей с центром в точке O, где O — центр данной сферы, и постройте отображение $f: \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{S}$, определяемое следующими условиями:

а) образом точки $(A, A') \in \boldsymbol{M}$ является прямая AA' связки $\boldsymbol{S}$;

б) образом прямой $a \in \boldsymbol{M}$ является плоскость $\alpha \in \boldsymbol{S}$, содержащая прямую a.

Затем покажите, что f — биективное отображение, сохраняющее инцидентность.

29. Класс пропорциональных ненулевых столбцов $\begin{Vmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{Vmatrix}$ назовем точкой, введя для нее обозначение $\begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Vmatrix}$. Прямой назовем множество точек $\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}$, для которых $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$, причем $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 > 0$. Для прямой используем обозначение $\| u_1u_2u_3 \|$. Точку $\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}$ и прямую $\| u_1u_2u_3 \|$ будем называть инцидентными друг другу, если $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$,

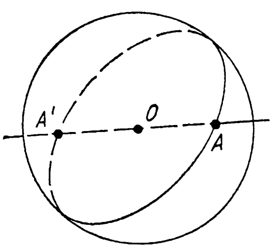

Рис. 3

т. е. если точка принадлежит прямой. Докажите, что множество всех точек $\boldsymbol{K}$ является проективной плоскостью.

Указание. Рассмотрите связку $\boldsymbol{S}$ и аффинный репер, начало которого совпадает с центром связки. Отображение f постройте так, чтобы образом точки $\left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right\|$ была прямая связки, направляющий вектор которой имел бы координаты x_1, x_2, x_3 относительно выбранного репера. Затем проверьте, что $f\colon \boldsymbol{K} \to \boldsymbol{S}$ — биекция, сохраняющая инцидентность.

30. Докажите эквивалентность следующих определений проективной плоскости.

Определение 1 (§ 5. 5). Пусть $\boldsymbol{P}_2$ — множество, состоящее из элементов двух родов, называемых соответственно точками и прямыми, причем точки и прямые связаны отношением, называемым инцидентностью (для каждой данной точки и каждой данной прямой известно, инцидентны они или нет). Если существует биективное отображение $g\colon \boldsymbol{P}_2 \to \boldsymbol{S}$, где $\boldsymbol{S}$ — связка прямых и плоскостей, при котором каждая точка $A \in \boldsymbol{P}_2$ отображается на прямую связки, а каждая прямая $a \in \boldsymbol{P}_2$ — на плоскость связки и сохраняется (в обе стороны) инцидентность, то $\boldsymbol{P}_2$ называется *проективной плоскостью.*

Определение 2[1]. Пусть V_3 — трехмерное векторное пространство. Множество $\Pi_2 \neq \varnothing$ называется *проективной плоскостью*, если задано сюръективное отображение: $\pi\colon (V_3 \setminus \{\vec{0}\}) \to \Pi_2$, удовлетворяющее условию: $\pi(\vec{x}) = \pi(\vec{y}) \Leftrightarrow \vec{y} = \lambda \vec{x}$, где λ — действительное число.

Элементы проективной плоскости называются точками, образы $\pi (V_2 \setminus \{\vec{0}\})$ — прямыми.

Указание. Докажите, что Π_2 удовлетворяет определению 1. Точка X и прямая x плоскости Π_2 называются инцидентными, если точка X принадлежит прямой x (если $X = \pi(\vec{x})$ и $x = \pi (V_2 \setminus \{\vec{0}\})$, то $X \in x \Leftrightarrow \vec{x} \in V_2 \setminus \{\vec{0}\}$). Отображение g постройте так, чтобы образом точки $X = \pi(\vec{x})$ была прямая связки с направляющим вектором $\vec{x}$. Затем докажите, что $\boldsymbol{P}_2$ удовлетворяет определению 2. Для этого постройте отображение f: $V_3 \setminus \{\vec{0}\} \to S$ такое, что образом вектора $\vec{a}$ была бы прямая связки $f(\vec{a})$ с направляющим вектором $\vec{a}$, и рассмотрите $g^{-1} \cdot f$.

31. Сформулируйте определение k-мерного проективного пространства аналогично определениям, данным в задаче 30, и приведите примеры 3-, 4-, ..., k-мерных проективных пространств.

---

[1] См.: Базылев В. Т., Дуничев К. И. Геометрия II. М., Просвещение, 1975, раздел 3, § 1.

32. Какие из следующих предложений справедливы на проективной плоскости и какие — на евклидовой плоскости:

а) существует одна и только одна прямая, инцидентная двум различным точкам;

б) существует одна и только одна точка, инцидентная двум различным прямым?

33. Какие из нижеприведенных предложений справедливы в трехмерном проективном пространстве и какие — в евклидовом пространстве:

а) существует одна и только одна прямая, инцидентная двум различным точкам;

б) существует одна и только одна точка, инцидентная двум различным прямым;

в) существует одна и только одна прямая, инцидентная двум различным плоскостям;

г) три различные плоскости имеют по крайней мере одну общую точку;

д) три различные прямые, не лежащие в одной плоскости, но попарно пересекающиеся, имеют одну и только одну общую точку;

е) три различные прямые, попарно не скрещивающиеся и не проходящие через одну общую точку, лежат в одной плоскости?

Замечание. Под проективной плоскостью трехмерного проективного пространства мы понимаем $\pi\ (V_3 \setminus \{\vec{0}\})$, где V_3 — трехмерное векторное подпространство четырехмерного векторного пространства V_4.

34. Объясните, почему в геометрии проективной плоскости не рассматриваются такие понятия, как «параллельность прямых», «перпендикулярность прямых», «биссектриса угла», «середина отрезка», «квадрат», «трапеция».

§ 4. ПРОЕКТИВНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

Литература: [2], § 6.

В задачах 35—68 координаты точек и прямых проективной плоскости даны относительно проективного репера. Напомним, что проективные координаты точки — это класс пропорциональных троек чисел. В дальнейшем вместо $A = \begin{Vmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{Vmatrix}$ будем писать: $A = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}$ или $A\ (x_1 : x_2 : x_3)$. Аналогичное соглашение принимается для проективных координат прямой, для которых будем употреблять обозначение $a = \|u_1 u_2 u_3\|$ или $a\,(u_1 : u_2 : u_3)$.

35. Среди следующих троек точек:

а) $A = \begin{Vmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{Vmatrix}$, $C = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{Vmatrix}$;

б) $D = \begin{Vmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix}$, $E = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{Vmatrix}$, $F = \begin{Vmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{Vmatrix}$;

в) $K = \begin{Vmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{Vmatrix}$, $L = \begin{Vmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}$, $M = \begin{Vmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{Vmatrix}$

найдите коллинеарные.

Решение. Согласно § 6. 2 для того, чтобы точки A, B, C были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы определитель, составленный из координат этих точек, был равен нулю. Вычисляя этот определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix},$$

находим, что он равен нулю. Значит, точки A, B, C коллинеарны.

36. Найдите уравнение прямой, проходящей через точки $M\ (1 : 0 : 1)$ и $N\ (1 : 1 : -1)$.

Решение. Согласно § 6. 2 уравнение прямой MN имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$x_1 - 2x_2 - x_3 = 0.$$

37. Найдите уравнение прямой, проходящей через точки $A\ (1 : 4 : 3)$ и $B\ (2 : 1 : 3)$.

38. Найдите уравнения прямых, проходящих через следующие пары точек:

а) $A\ (2 : -1 : 0)$ и $B\ (0 : 1 : 0)$;
б) $C\ (-2 : 0 : 1)$ и $D\ (3 : -2 : 1)$;
в) $E\ (1 : 1 : -1)$ и $F\ (-1 : 0 : 1)$.

39. Найдите координаты точки пересечения прямых

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ и } 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0.$$

Решение. Точка пересечения заданных прямых удовлетворяет однородной системе линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases}$$

ранг которой равен 2. Из курса алгебры известно, что общее решение этой системы находится по формулам

$$x_1 = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad x_2 = -\lambda \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad x_3 = \lambda \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Поэтому для указанной системы $x_1 = -\lambda$, $x_2 = -\lambda$, $x_3 = 3\lambda$. Значит, искомая точка пересечения имеет координаты $(-1 : -1 : 3)$.

40. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ и $2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0$ и через точку $(4 : -2 : 5)$.

41. Найдите точку пересечения прямой $u : 2x_1 + x_2 + x_3 = 0$ с прямой, проходящей через точки $M\ (1 : 1 : 6)$ и $N\ (2 : -1 : 0)$.

Указание. *1-й способ.* Сначала найдите уравнение прямой MN (см. решение задачи 36), а затем координаты искомой точки пересечения (см. решение задачи 39).

2-й способ. Так как искомая точка $(x_1 : x_2 : x_3)$ лежит на прямой MN, то параметрические уравнения этой прямой (см. § 6. 2, равенство (6. 8)) будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + 2\beta, \\ x_2 = \alpha - \beta, \\ x_3 = 6\alpha. \end{cases}$$

Чтобы найти, при каких α и β искомая точка будет инцидентна прямой u, подставим найденные координаты в уравнение прямой: $2(\alpha + 2\beta) + (\alpha - \beta) + 6\alpha = 0$. Отсюда $3\alpha + \beta = 0$. Взяв какое-либо ненулевое решение последнего уравнения, например $\alpha = 1$, $\beta = -3$, получим из первоначальной системы: $x_1 = -5$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$.

42. Найдите точку пересечения прямой, проходящей через точки $A\ (1 : 4 : 2)$ и $B\ (2 : 6 : 1)$, с прямой $u : 3x_1 - 4x_3 = 0$.

43. Найдите точку пересечения прямой, проходящей через точки $A\ (-4 : -3 : 2)$ и $B\ (2 : 0 : 1)$ с прямой $u : x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$.

44. Даны координаты точек:

$$A = \begin{Vmatrix} 6 \\ 1 \\ 10 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \qquad C = \begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{Vmatrix}, \qquad D = \begin{Vmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{Vmatrix}.$$

Найдите координаты точки пересечения (AB) и (CD).

Указание. Найдите уравнения прямых AB и CD, а затем решите систему этих уравнений. Другой способ основан на использовании параметрических уравнений прямых AB и CD (см. § 6, пример 4).

45. Даны координаты четырех точек A, B, C, D. Найдите координаты точки пересечения M прямых AB и CD, если

$$\text{а)}\ A = \begin{Vmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{Vmatrix}, \qquad C = \begin{Vmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{Vmatrix}, \qquad D = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix};$$

б) $A = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}$, $C = \begin{Vmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{Vmatrix}$, $D = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$.

46. Найдите уравнение прямой u, проходящей через точку пересечения прямых

$$l: 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0, \qquad m: x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

и точку A (2: 1: —1).

Указание. Можно найти координаты точки $B = l \cap m$ и затем по двум точкам составить уравнение искомой прямой. Другой способ основан на использовании условия принадлежности трех прямых одному пучку (см. § 6, пример 5).

47. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых

$$l: 3x_1 - x_2 + 6x_3 = 0, \qquad m: x_2 - 4x_3 = 0$$

и точку A (1 : —2 : 3).

48. Даны четыре прямые:

$$a: 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \quad c: 2x_1 + x_3 = 0,$$
$$b: 4x_1 - x_2 = 0, \quad d: x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

Найдите уравнение прямой, проходящей через точки $a \cap b$ и $c \cap d$.

49. Даны четыре прямые:

$$a: x_1 + x_2 - x_3 = 0, \quad c: x_1 - x_2 - x_3 = 0,$$
$$b: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \quad d: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0.$$

Найдите уравнение прямой, проходящей через точки $a \cap b$ и $c \cap d$.

50. Даны четыре прямые:

$$a: x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \quad c: 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0,$$
$$b: x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad d: 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0.$$

Найдите уравнение прямой, проходящей через точки $a \cap b$ и $c \cap d$.

51. Даны четыре точки:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix}, \quad D = \begin{Vmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Найдите координаты точек $P = (AB) \cap (CD)$, $Q = (AC) \cap (BD)$, $R = (AD) \cap (BC)$. Найдите уравнения прямых PQ, QR и RP.

52. Даны четыре прямые:

$$a : x_1 + x_2 = 0, \quad c : x_1 + x_2 + 2x_3 = 0,$$
$$b : -x_2 + 2x_3 = 0, \quad d : 2x_1 - x_2 = 0.$$

Найдите уравнения прямых AC и BD, где $A = a \cap b$, $B = b \cap c$, $C = c \cap d$, $D = d \cap a$. Найдите координаты точек $P = b \cap d$, $Q = (AC) \cap (BD)$, $R = a \cap c$.

53. Даны три точки:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Vmatrix}, \qquad C = \begin{Vmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{Vmatrix}, \qquad D = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

и прямая $b : x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$. Найдите уравнение прямой, проходящей через точки A и $B = b \cap (CD)$.

54. Даны три точки:

$$A = \begin{Vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}, \qquad C = \begin{Vmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

и две прямые $d : 3x_1 - x_2 + x_3 = 0$ и $e : x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Найдите точку пересечения прямой (AB) с прямой, проходящей через точку C и точку $D = d \cap e$.

55. Даны шесть точек A_i. Докажите, что точки $P = (A_1A_2) \cap (A_4A_5)$, $Q = (A_2A_3) \cap (A_5A_6)$, $R = (A_3A_4) \cap (A_6A_1)$ лежат на одной прямой:

а) $A_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$, $A_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$, $A_3 = \begin{Vmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{Vmatrix}$, $A_4 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix}$,

$A_5 = \begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$, $A_6 = \begin{Vmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{Vmatrix}$;

б) $A_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$, $A_2 = \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$, $A_3 = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$, $A_4 = \begin{Vmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$,

$A_5 = \begin{Vmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{Vmatrix}$, $A_6 = \begin{Vmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$;

в) $A_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$, $A_2 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{Vmatrix}$, $A_3 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix}$, $A_4 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{Vmatrix}$,

$A_5 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{Vmatrix}$, $A_6 = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{Vmatrix}$;

г) $A_1 = \begin{Vmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix}$, $A_2 = \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix}$, $A_3 = \begin{Vmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$, $A_4 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$,

$A_5 = \begin{Vmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{Vmatrix}$, $A_6 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

56. Пусть $P_1 = (A_1A_4) \cap (A_2A_3)$, $Q_1 = (A_4A_5) \cap (A_3A_6)$, $R_1 = (A_2A_5) \cap (A_6A_1)$, где A_i — точки из задачи 55, а — г. Докажите, что точки P_1, Q_1, R_1 лежат на одной прямой.

57. Пусть $P_2 = (A_5A_6) \cap (A_1A_4)$, $Q_2 = (A_6A_3) \cap (A_1A_2)$, $R_2 = (A_3A_4) \cap (A_2A_5)$, где A_i — точки из задачи 55, а — г. Докажите, что точки P_2, Q_2, R_2 лежат на одной прямой.

58. Даны шесть прямых a_i, точки пересечения этих прямых обозначены следующим образом: $B_1 = a_1 \cap a_2$, $B_2 = a_2 \cap a_3$, $B_3 = a_3 \cap a_4$, $B_4 = a_4 \cap a_5$, $B_5 = a_5 \cap a_6$, $B_6 = a_6 \cap a_1$. Докажите, что прямые $p = (B_1B_4)$, $q = (B_2B_5)$, $r = (B_3B_6)$ пересекаются в одной точке:

а) $a_1 : x_1 - x_3 = 0,$
$a_2 : x_2 + x_3 = 0,$
$a_3 : 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0,$
$a_4 : x_1 - x_3 = 0,$
$a_5 : x_2 - x_3 = 0,$
$a_6 : -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0;$

б) $a_1 : x_1 + x_2 + x_3 = 0,$
$a_2 : x_1 - x_2 - x_3 = 0,$
$a_3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0,$
$a_4 : \sqrt{2}\, x_1 + x_3 = 0,$
$a_5 : \sqrt{2} x_2 + x_3 = 0,$
$a_6 : \sqrt{2} x_1 - x_3 = 0;$

в) $a_1 : x_1 + x_2 = 0,$
$a_2 : x_1 + 2x_2 = 0,$
$a_3 : x_1 + x_2 + 2x_3 = 0,$
$a_4 : x_1 + 2x_3 = 0,$
$a_5 : x_1 + x_2 - 2x_3 = 0,$
$a_6 : x_1 - x_2 + 3x_3 = 0;$

г) $a_1 : 2x_1 - x_2 = 0,$
$a_2 : 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0,$
$a_3 : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0,$
$a_4 : x_1 + 2x_3 = 0,$
$a_5 : x_3 = 0,$
$a_6 : x_1 + x_2 + 2x_3 = 0.$

59. Пусть A, B, C, D — четыре произвольные точки, из которых никакие три не коллинеарны. Далее, пусть

$$A_1 = (AD) \cap (BC),\quad B_1 = (BD) \cap (AC),\quad C_1 = (CD) \cap (AB)$$

и

$$P = (BC) \cap (B_1C_1),\quad Q = (AC) \cap (A_1C_1),\quad R = (AB) \cap (A_1B_1)$$

(рис. 4). Докажите, что точки P, Q, R коллинеарны.

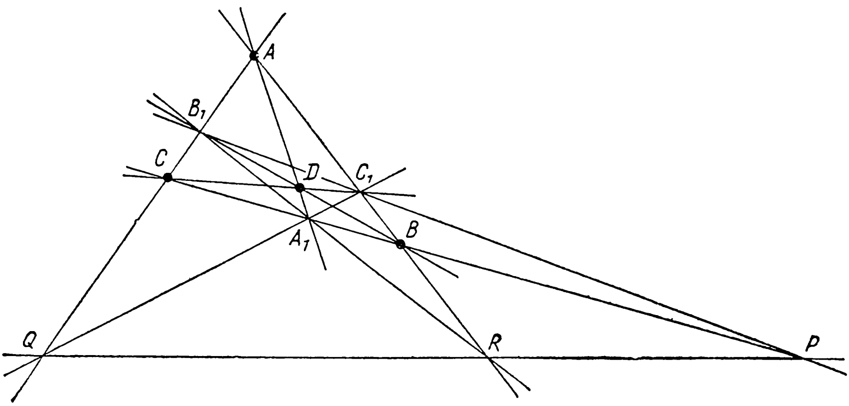

Рис. 4

Решение. Введем систему проективных координат, полагая точки A, B, C, D фундаментальными:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad D = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Найдем координаты точек A_1, B_1, C_1. Имеем:

$$A_1 = \alpha \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + \beta \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix} = \alpha_1 \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + \beta_1 \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Первая координата точки A_1 равна нулю, поэтому можно положить $\alpha = -1$, $\beta = 1$. Получим: $A_1 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$ и аналогично $B_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$, $C_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$. Теперь найдем координаты точек P, Q, R. Имеем:

$$P = \gamma \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} + \delta \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} = \gamma_1 \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + \delta_1 \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Первая координата точки P равна нулю, поэтому можно положить $\gamma = 1$, $\delta = -1$. Получим: $P = \begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$ и аналогично

$$Q = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix}, \quad R = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

столбцами которого являются координаты точек P, Q, R, равен нулю, следовательно, точки P, Q, R коллинеарны.

Замечание. Доказанная здесь теорема — частный случай теоремы Дезарга (см. § 8).

60. На двух различных прямых m и n произвольно взяты различные точки A_1, A_3, A_5 и A_2, A_4, A_6 соответственно (рис. 5). Докажите, что точки $P = (A_1A_2) \cap (A_4A_5)$, $Q = (A_2A_3) \cap (A_5A_6)$, $R = (A_3A_4) \cap (A_6A_1)$ принадлежат одной прямой (теорема Паскаля — Паппа).

Решение. Введем проективную систему координат, приняв четыре из данных точек за фундаментальные:

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad A_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad A_3 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad A_4 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

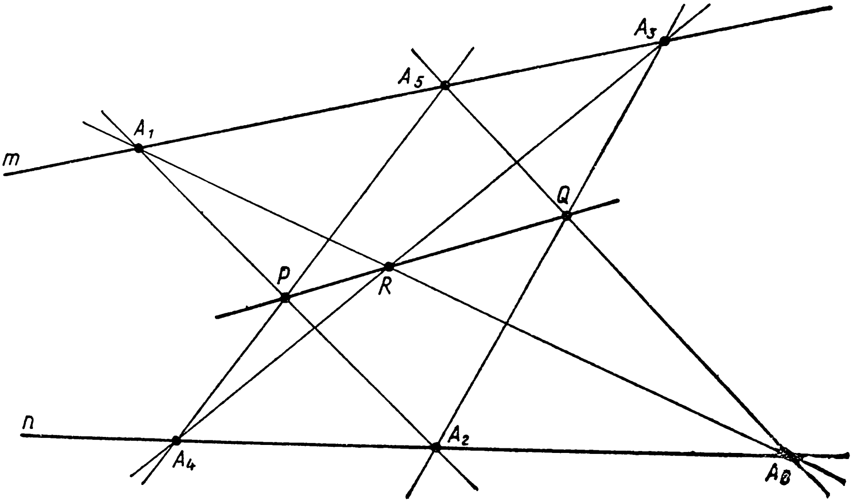

Рис. 5

Тогда $$A_5 = \alpha A_1 + \beta A_3 = \alpha \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + \beta \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Так как $\beta \neq 0$ (в противном случае точки A_5 и A_1 совпали бы), то можно положить $\beta = 1$ и, следовательно,

$$A_5 = \begin{Vmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Аналогично

$$A_6 = \begin{Vmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Находим координаты точек P, Q, R. Для этого можно найти уравнения шести прямых A_1A_2, A_2A_3, ..., A_6A_1 и затем, решая совместно соответствующие уравнения, найти координаты точек P, Q, R. Однако в данном случае, как и при решении предыдущей задачи, есть возможность упростить выкладки.

Так как $P \in (A_1A_2)$, то, используя параметрические уравнения прямой, приходим к выводу, что третья координата точки P равна нулю. Поэтому из $P \in (A_4A_5)$ следует

$$P = A_5 - A_4 = \begin{Vmatrix} \alpha-1 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix}. \text{ Аналогично } Q = \alpha A_6 - A_5 = \begin{Vmatrix} 0 \\ \alpha\lambda \\ \alpha-1 \end{Vmatrix}.$$

Так как $R \in (A_3A_4)$, то у точки R две первые координаты равны между собой. Тогда вследствие того, что $R \in (A_6A_1)$, находим

$$R = A_6 + (\lambda - 1)\ A_1 = \begin{Vmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Подсчитывая определитель

$$\begin{vmatrix} \alpha - 1 & 0 & \lambda \\ -1 & \alpha & \lambda\ \lambda \\ 0\ \alpha & -1 & 1 \end{vmatrix},$$

видим, что он равен нулю и, следовательно, для точек выполнено условие коллинеарности.

61. Через две различные точки M и N произвольно проведены прямые a_1, a_3, a_5 и a_2, a_4, a_6 соответственно. Точки пересечения этих прямых: $B_1 = a_1 \cap a_2$, $B_2 = a_2 \cap a_3$, $B_3 = a_3 \cap a_4$, $B_4 = a_4 \cap a_5$, $B_5 = a_5 \cap a_6$, $B_6 = a_6 \cap a_1$. Докажите, что прямые B_1B_4, B_2B_5, B_3B_6 пересекаются в одной точке.

62. Докажите, что утверждение, сформулированное в условии задачи 61, может быть получено из теоремы Паскаля — Паппа, доказанной в процессе решения задачи 60 как ее прямое следствие.

63. Докажите, что утверждения, сформулированные в условиях задач 55 (в,г), 56 (в,г), 57 (в, г), следуют из теоремы Паскаля — Паппа (задача 60).

64. Докажите, что утверждения, сформулированные в условии задачи 58 (в, г), следуют из утверждения, сформулированного в условии задачи 61.

65. Даны координаты фундаментальных точек E_1' $(1 : 1 : 0)$, E_2' $(1 : -1 : 0)$, E_3' $(1 : 1 : -2)$, E_0' $(1 : -1 : 2)$ проективной системы координат R' относительно проективной системы R. Найдите уравнения перехода от одной системы к другой.

У к а з а н и е. См. решение аналогичной задачи: § 6, пример 6.

66. Точка M в системе R', заданной в условии задачи 65, имеет координаты $(1 : 2 : -1)$. Найдите ее координаты в системе R.

Точка N в системе R, о которой идет речь в условии задачи 65, имеет координаты $(1 : 0: -1)$. Найдите ее координаты в системе R'.

У к а з а н и е . См решение аналогичной задачи: §6, пример 7.

67. Даны формулы перехода от проективной системы координат R к проективной системе координат R':

$$\begin{cases} \lambda x_1 = x_1' - x_3', \\ \lambda x_2 = x_1' + 2x_3', \\ \lambda x_3 = x_1' - x_2' + x_3'. \end{cases}$$

а) Найдите уравнение прямой l в системе R', если известно ее уравнение в системе R:

$$x_1 + 2x_2 = 0.$$

б) Найдите уравнение прямой m в системе R, если известно ее уравнение в системе R':

$$x_1' + 2x_2' = 0.$$

68. В проективной системе координат R даны координаты фундаментальных точек проективной системы координат R':

$$E_1' = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\|, \quad E_2' = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\|, \quad E_3' = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|, \quad E_0' = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\|.$$

Найдите:

а) формулы перехода от одной системы координат к другой;

б) координаты точки A в системе R, если известны ее координаты в системе R':

$$A\ (-4 : 0 : 1);$$

в) координаты точки B в системе R', если известны ее координаты в системе R:

$$B\ (2 : -1 : 3);$$

г) уравнение прямой в системе R', если известно ее уравнение в системе R:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0;$$

д) уравнение прямой в системе R, если известно ее уравнение в системе R':

$$2x_1' - x_2' - x_3' = 0.$$

§ 5. ОДНОРОДНЫЕ АФФИННЫЕ КООРДИНАТЫ НА РАСШИРЕННОЙ ЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Литература: [2], § 7.

69. Найдите однородные аффинные координаты точек евклидовой плоскости, заданных своими неоднородными координатами:

$$O\ (0;\ 0), \quad A\ (1;\ 0), \quad B\ (0;\ 1), \quad C\ (2;\ 5), \quad D\ (-3;\ 1),$$
$$E\ (4;\ -2), \quad F\ (-1;\ 5).$$

Указание. Воспользуйтесь равенствами (7. 2) из § 7. 2.

70. Запишите в однородных аффинных координатах уравнения прямых:

$$x = 0; \quad y = 0; \quad 3x - y + 2 = 0; \quad x + y - 5 = 0;$$
$$2x + 3y - 1 = 0.$$

71. Запишите в однородных аффинных координатах уравнение несобственной прямой расширенной плоскости.

72. Найдите однородные координаты несобственной точки прямой

$$3x - 5y + 1 = 0.$$

Р е ш е н и е . *1-й способ.* Направляющий вектор данной прямой имеет координаты (5; 3), поэтому согласно теореме из § 7. 2 искомая точка имеет координаты (5 : 3 : 0).

2-й способ. Однородное уравнение данной прямой $3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0$ решим совместно с уравнением несобственной прямой $x_3 = 0$. Этой системе удовлетворяют тройки чисел, пропорциональные тройке (5 : 3 : 0).

73. Найдите однородные координаты несобственных точек следующих прямых:

$$x = 0; \quad y = 0; \quad 3x + 2y - 1 = 0; \quad x - y + 3 = 0.$$

74. Найдите уравнение прямой в однородных аффинных координатах, проходящей через точку $A\ (1 : -2 : 3)$ и несобственную точку прямой $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$.

75. В однородных аффинных координатах найдите уравнение прямой, проходящей через несобственные точки прямых

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \quad \text{и} \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0.$$

76. Определите, к каким аффинным классам может принадлежать кривая

$$7x^2 - 12xy - 2y^2 - 20 = 0.$$

У к а з а н и е. Найдите несобственные точки данной кривой и по их числу определите аффинные классы, которым она может принадлежать (см. решение аналогичной задачи § 7, пример 2).

77. Определите, к каким аффинным классам могут принадлежать следующие кривые:

а) $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$;
б) $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$;
в) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 18x + 226y + 209 = 0$;
г) $x^2 - 2xy + y^2 - 12x + 12y - 14 = 0$.

78. Точки $E_1\ (1;\ 0)$, $E_2\ (1;\ 1)$, $E_3\ (0;\ 1)$, $E_0\ (0;\ 0)$ евклидовой плоскости приняты за фундаментальные точки проективной системы координат R (рис. 6). Найдите координаты несобственной точки на оси Oy в этой системе координат.

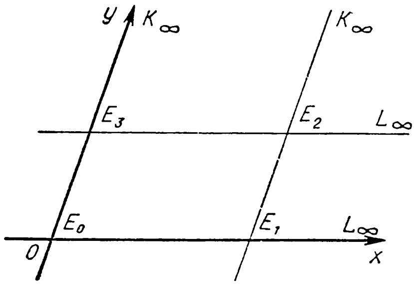

Рис. 6

У к а з а н и е . Искомая точка K_∞ — есть точка пересечения прямых E_0E_3 и E_1E_2.

79. Найдите координаты несобственной точки оси Ox относительно системы R из предыдущей задачи.

У к а з а н и е . Искомая точка L_∞ есть точка пересечения прямых F_0E_1 и E_2E_3.

80. Найдите координаты точек $A\ (0;\ 1)$, $B\ (-1;\ 2)$, $C\ (3;\ -1)$ в системе R из задачи 78.

Указание. Координаты фундаментальных точек системы R и данных точек A, B, C заданы в неоднородной аффинной системе координат. Обозначив соответствующую ей однородную систему через R', найдите уравнение перехода от R к R' (см. § 7, пример 3).

81. Найдите координаты несобственных точек прямых:

а) $x - 2y + 1 = 0$;
б) $2x + y - 2 = 0$;
в) (E_1E_3)

в системе R из задачи 78.

82. Найдите уравнение прямой $x - 2y = 0$ в системе R из задачи 78.

83. В прямоугольных декартовых координатах дано уравнение кривой

$$x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0.$$

Найдите:

а) уравнение данной кривой в соответствующих однородных координатах;

б) несобственные точки кривой, доказав при этом, что данная кривая является параболой;

в) направляющий вектор оси параболы;

г) координаты вершины и уравнение оси параболы в неоднородных координатах.

Указание. б) Убедившись, что у кривой лишь одна несобственная точка $K_\infty = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$, заключаем, что это либо парабола, либо пара параллельных прямых (действительных или мнимых) с направляющим вектором $\vec{u}\ (1;\ 1)$. В последнем случае уравнение кривой можно представить в виде

$$(x - y + a)(x - y + b) = 0.$$

Нетрудно показать, что ни при каких a и b это уравнение не совпадает с данным, поэтому данная кривая — парабола.

г) Координаты вершины находятся с учетом двух условий: 1) Они удовлетворяют уравнению параболы. 2) Прямая, проходящая через вершину перпендикулярно направляющему вектору оси, имеет с параболой только одну общую точку.

84. В прямоугольных декартовых координатах дано уравнение невырожденной кривой

$$2x^2 + 3xy + y^2 - 2x + y = 0.$$

Найдите:

а) ее уравнение в соответствующих однородных координатах;

б) несобственные точки кривой, доказав при этом, что данная кривая является гиперболой;

в) направляющие векторы асимптот гиперболы;

г) уравнения асимптот и координаты центра в неоднородных координатах.

Указание. б) См. указание к задаче 83, б.

г) В пучке параллельных прямых асимптотического направления асимптота выделяется тем, что она не имеет с гиперболой общих точек. Центр может быть найден как точка пересечения асимптот.

85. В однородных аффинных координатах дано уравнение кривой

$$3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 - 8x_2x_3 - 8x_1x_3 = 0.$$

Найдите уравнение этой кривой в проективной системе координат R с фундаментальными точками

$$E_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad E_2 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad E_3 = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad E_0 = \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Указание. Сначала найдите формулы перехода от однородной аффинной системы координат к системе R.

ГЛАВА III

ПРОСТЕЙШИЕ ФАКТЫ ГЕОМЕТРИИ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

§ 6. ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ. ТЕОРЕМА ДЕЗАРГА

Литература: [2], § 8.

86. Назвать фигуры, двойственные следующим:

а) трехвершинник, б) две различные прямые, в) три коллинеарные точки, г) четырехвершинник.

87. Даны две прямые l и l_1. Точки A, B, C принадлежат прямой l, точки A_1, B_1, C_1 принадлежат прямой l_1. Докажите коллинеарность точек $Q = l \cap l_1$, $P = (A_1B) \cap (AB_1)$, $R = (BC_1) \cap (B_1C)$, если прямые AA_1, BB_1, CC_1 принадлежат одному пучку. Сформулируйте двойственное утверждение.

Указание. Примените обратную теорему Дезарга к трехвершинникам AA_1P и CC_1R.

88. Докажите, что утверждение, сформулированное в условии задачи 59, является частным случаем теоремы Дезарга.

89. Сформулируйте задачу, двойственную задаче 59. Покажите, что утверждение, содержащееся в двойственной задаче, есть частный случай обратной теоремы Дезарга.

90. Даны прямая a, неколлинеарные точки A, B, C, причем эти точки не инцидентны a. Достройте конфигурацию Дезарга так, чтобы a была дезарговой осью, а трехвершинник ABC — дезарговым трехвершинником. Сформулируйте двойственную задачу.

91. Рассмотрите частные случаи конфигурации Дезарга на расширенной плоскости, когда:

а) дезаргова ось — несобственная прямая;

б) дезаргов центр — несобственная точка.

Сформулируйте соответствующие частные случаи прямой и обратной теорем Дезарга в терминах евклидовой геометрии.

92. Даны четыре точки A, B, C, S, из которых никакие три не коллинеарны, и прямая s, не инцидентная ни одной из них. Постройте конфигурацию Дезарга с центром S, осью s и трехвершинником ABC.

93. В конфигурации Дезарга на расширенной евклидовой плоскости две вершины одного из дезарговых треугольников — несобственные точки. Сделайте чертеж конфигурации Дезарга и сформулируйте соответствующие частные случаи прямой и обратной теорем Дезарга в терминах евклидовой геометрии. Докажите полученные теоремы средствами евклидовой геометрии.

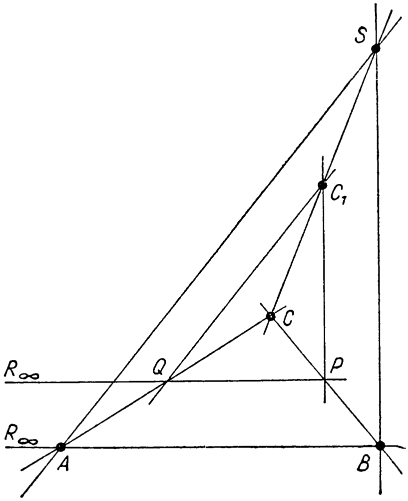

Рис. 7

Указание. Приводим формулировку прямой теоремы.

Пусть ABC — произвольный трехвершинник, S — точка, не принадлежащая его сторонам, и C_1 — произвольная точка прямой SC, отличная от S и C. Если точки P и Q, лежащие соответственно на сторонах BC и AC, таковы, что $(C_1Q) \parallel (AS)$ и $(C_1P) \parallel (BS)$, то прямые AB и PQ параллельны (рис. 7).

Для доказательства теоремы средствами евклидовой геометрии рассмотрите гомотетию с центром в точке C, при которой точка S отображается на C_1. Покажите, что образом прямой AB при этой гомотетии будет прямая QP.

94. Сделайте чертеж конфигурации Дезарга в случае, когда одна из вершин одного из дезарговых трехвершинников несобственная.

95. Сделайте чертеж конфигурации Дезарга в случае, когда пара несоответствующих вершин трехвершинников — несобственные точки.

96. Проверьте, что для любой прямой из конфигурации Дезарга можно подобрать такие два трехвершинника этой же конфигурации, для которых данная прямая будет дезарговой осью.

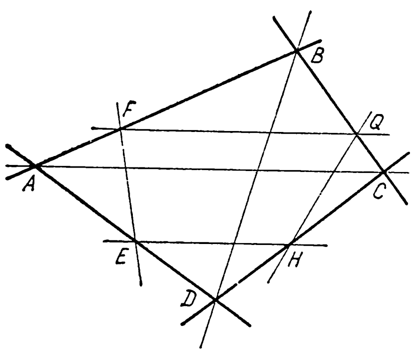

Рис. 8

97. На евклидовой плоскости трапеция вписана в четырехугольник так, что ее параллельные стороны параллельны одной из его диагоналей. Докажите, что непараллельные стороны трапеции пересекаются на другой диагонали (рис. 8).

Решение. Трапеция $EFQH$ вписана в четырехугольник $ABCD$ так, что $(FQ) \parallel (EH) \parallel (AC)$. Прямые FQ и EH, FB и DE, BQ и DH пересекаются на прямой

AC. Следовательно, трехвершинники и FBQ и EDH удовлетворяют обратной теореме Дезарга и прямые FE, QH и BD пересекаются в одной точке.

98. На евклидовой плоскости вершины параллелограмма $ABCD$ лежат на сторонах параллелограмма $A'B'C'D'$ так, что $A \in (A'B')$, $B \in (B'C')$, $C \in (C'D')$, $D \in (D'A')$. Докажите, используя теорему Дезарга, что центр симметрии параллелограмма $ABCD$ совпадает с центром симметрии параллелограмма $A'B'C'D'$.

99. Используя теорему Дезарга, докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

100. На евклидовой плоскости даны две параллельные прямые l и m и точка P, им не принадлежащая. Пользуясь одной линейкой, через точку P проведите прямую, параллельную прямым l и m.

Р е ш е н и е . *Анализ.* Пусть задача решена и прямая n — искомая (рис. 9). Рассмотрим конфигурацию Дезарга, центром которой является несобственная точка, принадлежащая прямым l, m, n. Ось s и точки $R \in l$, $Q \in m$ и $R' \in l$ могут быть выбраны произвольно, но так, чтобы R, Q и P не были коллинеарными. Если $X = (RQ) \cap s$, $Y = (PQ) \cap s$, $Z = (RP) \cap s$, то $Q' = (R'X) \cap m$, $P' = (R'Z) \cap (Q'Y)$.

Построение. 1) Произвольно выберем точки R, Q и R' так, чтобы P, Q и R не принадлежали одной прямой и $(RR') = l$, $Q \in m$.

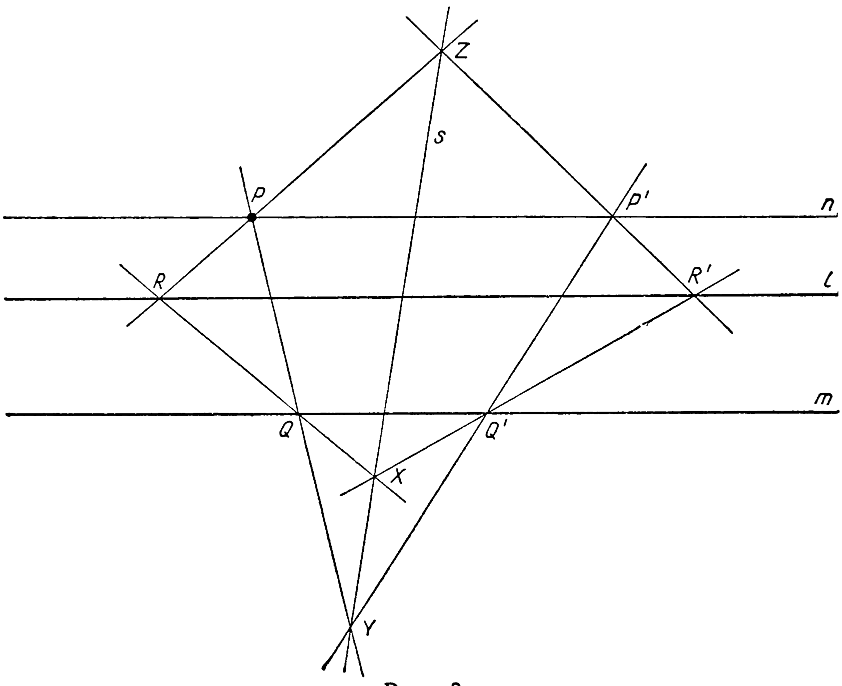

Рис. 9

2) Произвольно построим дезаргову ось s так, чтобы она не была параллельна сторонам треугольника RQP и не проходила ни через одну из точек P, Q, R, R'.

3) Построим $X = (RQ) \cap s$, $Y = (QP) \cap s$, $Z = (RP) \cap s$.

4) Построим $Q' = (XR') \cap m$, $P' = (R'Z) \cap (Q'Y)$.

5) Построим искомую прямую PP'.

Доказательство. Треугольники PQR и $P'Q'R'$ удовлетворяют обратной теореме Дезарга, так как $(RQ) \cap (R'Q') = X$, $(PQ) \cap (P'Q') = Y$, $(RP) \cap (R'P') = Z$, а точки X, Y, Z принадлежат прямой s. Следовательно, прямая $n = (PP')$ должна проходить через общую несобственную точку прямых l и m, т. е. $n \parallel l$, $m \parallel n$.

Исследование. Так как построения пунктов 1—5 всегда выполнимы, то задача всегда имеет решение, причем единственное в силу аксиомы о параллельных.

101. Точку пересечения двух прямых l и m будем называть недоступной, если эти прямые пересекаются за пределами чертежа. Пользуясь одной линейкой, проведите прямую через точку N и недоступную точку пересечения прямых l и m.

Указание. Решение этой задачи аналогично решению задачи 100, только вместо несобственной точки прямых l и m нужно рассматривать недоступную точку пересечения прямых l и m.

102. Даны прямая n и не лежащие на ней точки M и L. Пользуясь одной линейкой, постройте точку пересечения прямой n с прямой ML, не строя прямой ML.

Указание. Конфигурацию Дезарга постройте так, чтобы (ML) была дезарговой осью, а точки M, L и искомая точка N были точками пересечения соответствующих сторон дезарговых треугольников (рис. 10).

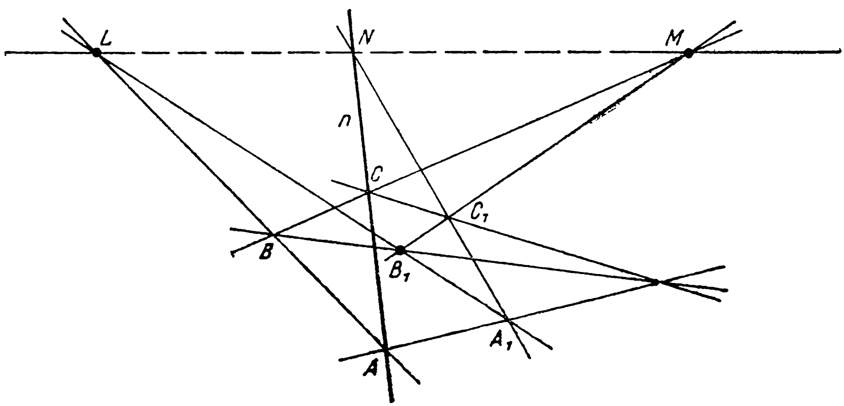

Рис. 10

Для этого вершины A и C одного из дезарговых треугольников следует выбрать на прямой n. Тогда третья вершина B будет точкой пересечения (AL) и (MC). Искомая точка $N=(AC)\cap$ $\cap$ (A_1C_1), где A_1 и C_1 — точки, соответствующие A и C в конфигурации Дезарга.

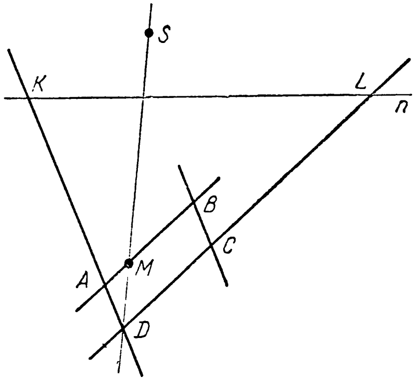

Рис. 11

103. На евклидовой плоскости даны параллелограмм $ABCD$, точка M, принадлежащая одной из сторон параллелограмма, и прямая n (рис. 11). Пользуясь одной линейкой, проведите прямую через точку M параллельно прямой n.

Указание. Если данная прямая параллельна одной из сторон параллелограмма, то задача сводится к задаче 100.

Если же данная прямая пересекает прямые, на которых лежат стороны параллелограмма, то обозначим точки пересечения прямых AD и DC с прямой n через K и L соответственно. Затем нужно рассмотреть конфигурацию Дезарга, осью которой является бесконечно удаленная прямая, одним из дезарговых трехвершинников — трехвершинник DLK, а точка M — вершиной другого. Центр S конфигурации возьмите на прямой DM. При построении воспользуйтесь задачей 100.

104. На евклидовой плоскости даны параллелограмм $ABCD$, прямая n и точка M, не принадлежащая ни прямой n, ни сторонам параллелограмма. Пользуясь одной линейкой, проведите прямую через данную точку параллельно прямой n.

Указание. Используя задачу 100, постройте параллелограмм так, чтобы точка M принадлежала одной из его сторон, а затем воспользуйтесь указанием к задаче 103.

§ 7. ДВОЙНОЕ ОТНОШЕНИЕ ТОЧЕК И ПРЯМЫХ НА ПЛОСКОСТИ

Литература: [2], § 9.

105. Даны точки:

$$A=\begin{Vmatrix}1\\2\\4\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}5\\0\\4\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix}3\\1\\4\end{Vmatrix},\quad D=\begin{Vmatrix}2\\-1\\0\end{Vmatrix}.$$

Докажите их коллинеарность и найдите двойные отношения $(ABCD)$ и $(DBCA)$.

Указание. См решение аналогичной задачи в § 9, пример 1.

Из коллинеарности двух троек A, B, C и A, B, D следует коллинеарность всей четверки. Для нахождения $(ABCD)$ из равенств $C = \alpha A + \beta B$, $D = \alpha' A + \beta' B$ найдите α, β, α', β'. Далее учтите, что $(DBCA) = 1 - (ABCD)$.

106. Даны точки

$$A = \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix}, \quad D = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Убедитесь в их коллинеарности и найдите двойные отношения $(ABCD)$, $(ACBD)$, $(ADBC)$, $(DCBA)$.

107. Даны точки

$$A = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 5 \\ -2 \\ 7 \end{Vmatrix}, \quad D = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Докажите, что эти точки коллинеарны, и найдите двойные отношения:

$$(ABCD), \quad (ABDC), \quad (ACBD), \quad (ACDB), \quad (ADBC), \quad (ADCB),$$
$$(BADC), \quad (CDAB), \quad (CABD), \quad (CBAD).$$

108. Убедитесь в том, что следующие четверки прямых принадлежат одному пучку:

а) $a: x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$;
$b: -x_2 + x_3 = 0$;
$c: x_1 - x_3 = 0$;
$d: x_1 - x_2 = 0$;

б) $a: x_2 = 0$;
$b: x_1 - x_2 = 0$;
$c: 3x_1 - x_2 = 0$;
$d: 5x_1 - x_2 = 0$.

Найдите двойные отношения: $(abcd)$, $(adbc)$, $(dcba)$.

Указание. Решение аналогично решению задачи 105. Используйте координатные строки данных прямых.

109. Даны пять точек:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Vmatrix}, \quad D = \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{Vmatrix}, \quad P = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Убедитесь в том, что точки A, B, C и D коллинеарны, но они не коллинеарны с P. Непосредственной проверкой покажите, что $(ABCD) = (abcd)$, где $a = (PA)$, $b = (PB)$, $C = (PC)$, $d = (PD)$.

110. Даны пять прямых:

$$a: x_1 - 2x_2 + x_3 = 0;$$
$$b: 2x_1 + x_2 + x_3 = 0;$$
$$c: 5x_1 + 3x_3 = 0;$$
$$d: x_1 + 3x_2 = 0;$$
$$p: 3x_1 - x_2 = 0.$$

Убедитесь в том, что прямые a, b, c, d принадлежат одному пучку, но прямая p этому пучку не принадлежит. Путем непосредственной проверки покажите, что $(abcd) = (ABCD)$, где $A = p \cap a$, $B = p \cap b$, $C = p \cap c$, $D = p \cap d$.

111. Даны прямые $a\,(2:1:1)$, $b\,(0:1:3)$ и $c\,(1:0:-1)$. Проверьте, что эти три прямые принадлежат одному пучку, и найдите в этом пучке прямую d такую, чтобы $(abcd) = \dfrac{1}{3}$.

Указание. Выразите координатные строки прямых c и d через координатные строки прямых a и b: $c = \alpha a + \beta b$, $d = \alpha' a + \beta' b$ и найдите α и β. Затем, пользуясь определением двойного отношения $(abcd) = \dfrac{\beta}{\alpha} : \dfrac{\beta'}{\alpha'}$, найдите $\dfrac{\beta'}{\alpha'} = \dfrac{\beta}{\alpha} : \dfrac{1}{3}$ (см. пример 2 из § 9).

112. На расширенной евклидовой плоскости даны четыре прямые: $a: y = 0$, $b: y = x$, $c: y = 3x$, $d: y = 5x$. Убедитесь в том, что эти прямые принадлежат одному пучку, и найдите $(abcd)$.

113. Даны три прямые:

$$\begin{aligned} a &: 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ b &: x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ c &: 5x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{aligned}$$

Убедитесь в их принадлежности одному пучку и найдите уравнение прямой d из условий: а) $(abcd) = -1$, б) $(abcd) = 3$, в) $(dbac) = -2$.

114. Даны три точки:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{Vmatrix}.$$

Убедитесь в их коллинеарности и найдите точку D такую, чтобы: а) $(ABCD) = -1$; б) $(CDBA) = -1$; в) $(CADB) = -1$; г) $(ABCD) = 2$.

Указание. Решение аналогично решению задачи 111. Вместо координатных строк прямых участвуют координатные столбцы точек.

115. Даны три точки:

$$A = \begin{Vmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Убедитесь в их коллинеарности и найдите точку D такую, чтобы:

а) $(ABCD) = 2$; б) $(ABDC) = -1$;
в) $(ADCB) = -5$; г) $(DBAC) = 3$.

116. Даны четыре коллинеарные точки A, B, C, D. Сколько различных упорядоченных четверок можно составить из них? Двойные отношения каких четверок равны? Вычислите все эти двойные отношения, если $(ABCD) = \alpha$.

117. Даны коллинеарные точки

$$A = \begin{Vmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad D = \begin{Vmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Найдите разделенные и неразделенные пары, которые можно составить из них.

Решение. Существуют три способа разбиения данных точек на пары: (AB, CD), (AC, BD), (AD, BC). Надо подсчитать соответствующие двойные отношения. Поскольку $C = -A + 2B$, $D = -2A + 3B$, то $(ABCD) = \frac{2}{-1} : \frac{3}{-2} = \frac{4}{3}$.

Находим остальные двойные отношения:

$$(ACBD) = 1 - (DCBA) = 1 - (BADC) = 1 - (ABCD) = -\frac{1}{3},$$

$$(ADBC) = 1 - (CDBA) = 1 - (BACD) = 1 - \frac{1}{(ABCD)} = \frac{1}{4}.$$

Итак,

$$(ABCD) > 0, \quad (ACBD) < 0, \quad (ADBC) > 0.$$

Следовательно, мы имеем:

$$A, B \mathrel{\dot{\overline{\cdot\cdot}}} C, D; \quad A, C \div B, D; \quad A, D \mathrel{\dot{\overline{\cdot\cdot}}} B, C.$$

118. Коллинеарную четверку точек задачи 106 разбейте на разделенные пары.

119. Четверку различных коллинеарных точек можно разбить на пары тремя способами. Докажите, что в одном из этих случаев получаются разделенные пары, а в двух других неразделенные.

120. Двойное отношение $(ABCD)$ равно -1. Найдите $(DBCA)$.

121. а) Дано $(ABCD) = 3$. Найдите $(CABD)$.

б) Дано $(ABCD) = -2$. Найдите $(DBCA)$, $(CADB)$, $(CABD)$, $(ADBC)$, $(CBAD)$.

в) Дано $(ABCD) = -1$. Найдите $(DBCA)$, $(CADB)$, $(CABD)$, $(ADBC)$, $(CBAD)$.

122. Докажите, что пара несобственных точек гиперболы гармонически делится парой несобственных точек ее осей.

123. Пусть K_∞ и L_∞ — несобственные точки гиперболы $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, A_∞ и B_∞ — несобственные точки прямых $2x - 3y + 1 = 0$ и $x + y = 0$ соответственно. Найдите двойное отношение $(K_\infty L_\infty A_\infty B_\infty)$.

124. В проективной системе координат R даны координаты фундаментальных точек системы R':

$$E_1' = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad E_2' = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad E_3' = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad E_0' = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Пользуясь теоремой из § 9. 2, найдите координаты точки A в системе R', если известны ее координаты в системе $R: A\ (2:-1:3)$.

Указание. Вычислите двойные отношения $(E_2'E_3'E_{10}A_1)$ и $(E_1'E_3'E_{20}A_2)$, где $E_{10} = (E_1'E_0') \cap (E_2'E_3')$, $E_{20} = (E_2'E_0') \cap (E_1'E_3')$, $A_1 = (E_2'E_3') \cap (E_1'A)$, $A_2 = (E_1'E_3') \cap (E_2'A)$, а затем найдите $x_1' : x_2' : x_{30}'$ из равенств $(E_2'E_3'E_{10}A_1) = \frac{x_2'}{x_3'}$ и $(E_1'E_3'E_{20}A_2) = \frac{x_1'}{x_3'}$. Сравните с примером 3 из § 9.

125. Пользуясь теоремой из § 9. 2, найдите формулы преобразования проективных координат, связывающие координаты произвольной точки в системе R и R' из предыдущей задачи.

Указание. Эта задача аналогична задаче 11.

126. Решите, пользуясь теоремой из § 9. 2, задачи 78, 79, 80, 81.

127. C — середина отрезка AB на евклидовой плоскости, D — середина BC. Найдите двойные отношения $(ABCD)$, $(ACBD)$, $(DCBA)$.

128. Пусть A и A' — инверсные точки, K и L — точки пересечения прямой AA' с окружностью инверсии. Докажите, что пары A, A' и K, L гармонически делят друг друга.

129. Используя результаты, полученные при решении задачи 128, найдите способ построения четвертой гармонической точки на евклидовой плоскости.

§ 8. ПОЛНЫЙ ЧЕТЫРЕХВЕРШИННИК И ПОЛНЫЙ ЧЕТЫРЕХСТОРОННИК

Литература: [2], § 10.

130. Пользуясь одной линейкой, постройте точку D, четвертую гармоническую к точкам A, B и C в следующих трех случаях:

а) $(ABCD) = -1$; б) $(ACBD) = -1$; в) $(ADBC) = -1$.

Указание. Воспользуйтесь гармоническими свойствами полного четырехвершинника.

131. а) Вершинами полного четырехвершинника являются несобственные точки и вершины гиперболы $x^2 - y^2 = 1$. Найдите координаты диагональных точек и уравнения диагоналей четырехвершинника.

Указание. См. рис. 12, на котором $ABC_\infty D_\infty$ — данный четырехвершинник, а $P_\infty QR$ — его диагональный трехвершинник.

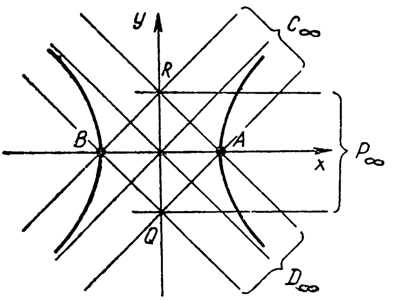

Рис. 12

б) Вершинами полного четырехвершинника являются несобственные точки осей координат и точки (1; 0), (0; 1). Найдите его диагональные точки. Сделайте чертеж.

132. Дана парабола. Изобразите на чертеже диагональный трехвершинник полного четырехвершинника, если известно, что вершины четырехвершинника лежат на параболе, причем одна из них в несобственной точке.

133. Покажите, что утверждение, содержащееся в задаче 27, вытекает из теоремы о гармонических свойствах полного четырехвершинника.

134. На евклидовой плоскости даны две параллельные прямые и отрезок на одной из них. Пользуясь одной линейкой, разделите этот отрезок пополам.

Указание. См. § 10. 4.

135. а) На расширенной евклидовой плоскости дана трапеция $ABCD$, в которой $(AB) \parallel (CD)$; $P = (CB) \cap (AD)$,

$$Q = (AC) \cap (BD);\ X = (AB) \cap (PQ),\ Y = (CD) \cap (PQ),$$
$$K = (AY) \cap (BD), \quad T = (AB) \cap (KP).$$

Докажите, что отрезок AT составляет третью часть отрезка AB (рис. 13).

б) На евклидовой плоскости дана трапеция $ABCD$, в которой $(AB) \parallel (CD)$; $P = (AD) \cap (BC)$. X — точка отрезка AB, отсекающая от него $\frac{1}{n}$ часть, считая от A. Далее: $Y = (XP) \cap (CD), K = (AY) \cap (DB)$, $T = (AB) \cap (KP)$. Докажите, что точка T отсекает от отрезка AB $\frac{1}{1+n}$ часть, считая от A.

в) На евклидовой плоскости дана пара параллельных прямых и на одной из них отрезок AB. Пользуясь одной линейкой, разделите $[AB]$ на 3, 4, 5, ... равных частей.

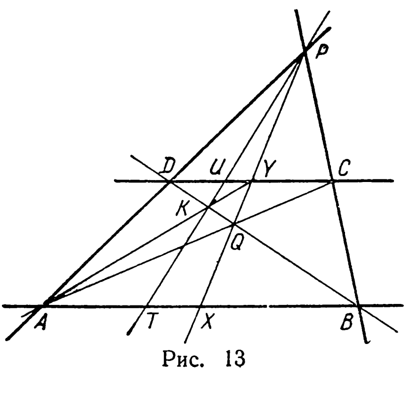

Рис. 13

Указание. а) Рассмотрите полный четырехвершинник $ADYQ$ и докажите гармонизм четверки точек D, Y, C, U, где $U = (KP) \cap (DC)$. Учтите также, что Y — середина $[CD]$ (см. § 10.4).

б) Рассмотрите полный четырехвершинник $ADYQ$, где $Q =$

$=(BD)\cap(PX)$, и докажите гармонизм четверки точек D, Y, U, V, где $U=(CD)\cap(PK)$, $V=(CD)\cap(AQ)$. Примите во внимание, что отрезок YV составляет $\frac{1}{n}$ часть отрезка DV.

136. Какая прямая на евклидовой плоскости будет четвертой гармонической к трем прямым пучка a, b и c, если прямая c делит угол, образованный прямыми a и b, пополам?

137. На плоскости даны три прямые пучка $S : a, b, c$. Пользуясь одной линейкой, постройте четвертую гармоническую прямую к прямым a, b и c : $(abcd)=-1$.

У к а з а н и е. 1) Используйте принцип двойственности и решение задачи 130 или 2) постройте A, B, C — точки пересечения прямых a, b, c с какой-либо прямой. Затем постройте точку D такую, что $(ABCD)=-1$, и прямую $d=(SD)$.

138. На евклидовой плоскости даны прямые a, b и c одного пучка S, причем c перпендикулярна a. Пользуясь одной линейкой, удвойте угол, образованный прямыми a и b.

У к а з а н и е. Искомая прямая d удовлетворяет условию $(acbd)=-1$.

139. На евклидовой плоскости даны три параллельные прямые a, b и c. Пользуясь одной линейкой, постройте прямую d такую, чтобы $(abcd)=-1$.

У к а з а н и е. Используйте указание к задаче 137, считая точку S несобственной.

140. На евклидовой плоскости дан отрезок AB и его середина C. Пользуясь одной линейкой, проведите прямую через данную точку $F\notin(AB)$ параллельно прямой AB.

У к а з а н и е. Постройте полный четырехвершинник $PFQE$ так, чтобы $Q\in(AF)$, $P=(FB)\cap(QC)$, $E=(AP)\cap(QB)$. Тогда (FE) — искомая прямая (рис. 14).

141. На евклидовой плоскости даны две параллельные прямые и на одной их них отрезок AB. Пользуясь одной линейкой, удвойте отрезок AB.

У к а з а н и е. Если D_∞ — несобственная точка данных параллельных прямых, а X — искомая точка, то $(AXBD_\infty)=-1$.

142. На евклидовой плоскости дан параллелограмм. Пользуясь одной линейкой, через точку пересечения его диагоналей проведите прямые, параллельные его сторонам.

143. На прямой даны точки A, B, C. Постройте точку D такую, чтобы $(ABCD)=2$.

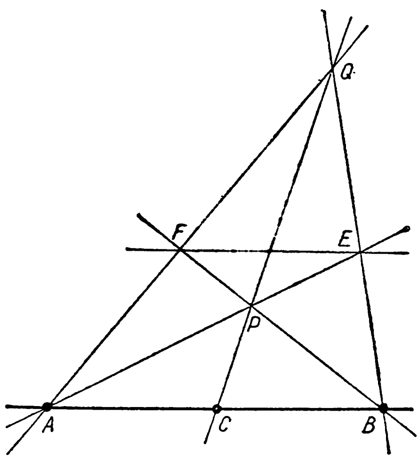

Рис. 14

ГЛАВА IV

ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 9. ПРОЕКТИВНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПРЯМОЙ НА ПРЯМУЮ

Литература: [2], § 11.

144. Проективное отображение прямой на прямую задано двумя тройками коллинеарных точек:

$$A\ (1:-1:2) \to A'\ (2:-1:-1),\quad B\ (0:1:2) \to B'\ (0:1:0),$$
$$C\ (1:0:4) \to C'\ (2:1:-1).$$

Убедитесь в том, что точка D $(2:-1:6)$ лежит на одной прямой с точками A, B, C, и найдите ее образ.

Решение. Коллинеарность точки D с точками A, B, C можно проверить, используя условие коллинеарности трех точек (§ 6. 2). Находим $(ABCD)$. Так как

$$C = A + B,$$
$$D = 2A + B,$$

то

$$(ABCD) = \frac{1}{1} : \frac{1}{2} = 2.$$

По определению проективного отображения $(ABCD)=(A'B'C'D')$, где D' — образ точки D. Значит,

$$(A'B'C'D') = 2,\ \text{ или } \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'} = 2,$$

где

$$C' = \alpha A' + \beta B',$$

$$D' = \alpha' A' + \beta' B'.$$

Непосредственно находим $\alpha = 1$, $\beta = 2$, откуда $\frac{2}{1} : \frac{\beta'}{\alpha'} = 2$ и $\alpha' = \beta' = 1$. Следовательно, $D' = A' + B' = \left\| \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{matrix} \right\|$.

145. Проективное отображение φ прямой l на прямую l' задано двумя тройками точек:

$$A\ (1:1:1) \to A'\ (-1:1:0),\quad B\ (-1:2:-1) \to B'\ (1:-2:2),$$
$$C\ (2:-1:2) \to C'\ (1:1:-4).$$

Убедитесь в том, что точка U коллинеарна точкам A, B, $C \in l$, точка V' коллинеарна точкам A', B', $C' \in l'$. Найдите $\varphi(U)$ образ точки $U \in l$ и $\varphi^{-1}(V')$ прообраз точки $V' \in l'$, если

а) $U(0 : 1 : 0)$, $V'(7 : -11 : 8)$;
б) $U(1 : -5 : 1)$, $V'(5 : -7 : 4)$;
в) $U(1 : 0 : 1)$, $V'(-2 : 1 : 2)$.

146. Найдите образ и прообраз точки пересечения прямых l и l' относительно отображения φ, заданного в предыдущей задаче.

147. Перспективное отображение прямой на прямую задано двумя парами точек:

$$A(0 : 2 : 1) \to A'(-1 : 1 : 1), \quad B(1 : 3 : 0) \to B'(1 : 3 : -1).$$

Найдите M' — образ точки $M(1 : 5 : 1) \in (AB)$.

Указание. Найдите центр перспективы $S = (AA') \cap (BB')$, затем искомую точку $M' = (SM) \cap (A'B')$. Другой способ решения (более громоздкий) основан на том, что данное перспективное отображение представляет собой частный случай проективного, заданного точками $A \to A'$, $B \to B'$, $X \to X$, где $X = (AB) \cap (A'B')$.

148. Перспективное отображение ψ прямой на прямую задано двумя парами точек:

$$A(1 : 0 : 2) \to A'(0 : 1 : 2), \quad B(2 : 0 : -1) \to B'(3 : 1 : 3).$$

Найдите U' — образ точки $U \in (AB)$ и V — прообраз точки $V' \in (A'B')$:

а) $U(4 : 0 : 3)$, $V'(3 : 2 : 5)$;
б) $U(1 : 0 : -3)$, $V'(3 : -1 : -1)$;
в) $U(3 : 0 : 1)$, $V'(3 : 0 : 1)$.

149. Докажите, что проективные отображения прямой на прямую, заданные следующими тройками точек, перспективны:

а) $A(3 : -1 : -1) \to A'(4 : 0 : 3)$, $B(0 : 1 : 2) \to B'(1 : 0 : 2)$, $C(3 : 2 : 5) \to C'(1 : 0 : -3)$;

б) $A(-2 : 1 : 1) \to A'(1 : 2 : 2)$, $B(1 : -2 : 1) \to B'(2 : 3 : 2)$, $C(1 : -1 : 0) \to C'(3 : 5 : 4)$;

в) $A(-1 : 0 : 2) \to A'(-2 : 0 : 1)$, $B(1 : 1 : -1) \to B'(1 : 1 : -2)$, $C(1 : 3 : 1) \to C'(1 : 3 : -5)$.

Указание. См. § 11. 1—2.

150. Проективное отображение φ прямой u_1 на прямую u_2 задано тремя парами соответствующих точек A_1 и $A_2 = \varphi(A_1)$, B_1 и $B_2 = \varphi(B_1)$, C_1 и $C_2 = \varphi(C_1)$. Представьте φ как композицию двух перспективных отображений: $\varphi = \psi_2 \circ \psi_1$.

Указание. См. § 11. 2.

151. В проективном отображении φ, заданном в задаче 150, постройте: а) M_2 — образ произвольной точки $M_1 \in u_1$, б) образ и прообраз точки пересечения прямых u_1 и u_2, если $u_1 \neq u_2$.

Указание. а) Представьте φ как композицию двух перспективных отображений $\psi_2 \circ \psi_1$ и постройте $M' = \psi_1(M_1)$, $M_2 = \psi_2(M')$ (см. задачу 150).

152. Сформулируйте и решите задачи, двойственные задачам 151,а и 151,б.

Указание. Определение проективного отображения пучков и свойства этого отображения двойственны определению и свойствам проективного отображения прямых (см. § 11).

Рассмотрите проективное отображение φ^* пучков, заданное тремя парами соответствующих прямых a_1 и $a_2 = \varphi^*(a_1)$, b_1 и $b_2 = \varphi^*(b_1)$, c_1 и $c_2 = \varphi^*(c_1)$.

§ 10. ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРЯМОЙ. ИНВОЛЮЦИИ

Литература: [2], § 12.

153. Проективное преобразование прямой задано двумя тройками точек. Найдите уравнения преобразования:

а) $A(1:1) \to A'(1:2)$, $B(1:0) \to B'(2:1)$, $C(1:-1) \to C'(1:0)$;
б) $A(1:1) \to A'(2:1)$, $B(0:1) \to B'(1:0)$, $C(2:1) \to C'(3:2)$;
в) $A(2:1) \to A'(3:1)$, $B(1:-1) \to B'(0:1)$, $C(0:1) \to C'(1:-1)$;
г) $A(1:1) \to A'(1:0)$, $B(2:1) \to B'(4:1)$, $C(3:1) \to C'(5:2)$.

Указание. Координаты данных точек должны удовлетворять уравнениям преобразования (§ 12. 2)

$$\begin{cases} \lambda x_1' = q_{11}x_1 + q_{12}x_2, \\ \lambda x_2' = q_{21}x_1 + q_{22}x_2. \end{cases}$$

Следовательно, в случае а) получим три системы уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_1 = q_{11} + q_{12}, \\ 2\lambda_1 = q_{21} + q_{22}, \end{cases} \quad \begin{cases} 2\lambda_2 = q_{11}, \\ \lambda_2 = q_{21}, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_3 = q_{11} - q_{12}, \\ 0 = q_{21} - q_{22}, \end{cases}$$

из которых можно найти q_{ij} (см. пример 2 из § 12).

154. Найдите неподвижные точки проективного преобразования прямой, заданного уравнениями

$$\begin{cases} \lambda x_1' = 2x_1 + x_2, \\ \lambda x_2' = x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

Решение. Координаты x_1, x_2 неподвижных точек, если такие точки существуют, находятся из системы уравнений

$$(*)\begin{cases} \lambda x_1 = 2x_1 + x_2, \\ \lambda x_2 = x_1 + 2x_2, \end{cases}$$

которая может быть переписана в следующем виде:

$$(**)\quad \begin{cases} (2-\lambda)x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + (2-\lambda)x_2 = 0. \end{cases}$$

Относительно неизвестных x_1 и x_2 эта система является линейной, однородной. Как известно из алгебры, она имеет ненулевые решения (а только такие нас и интересуют, так как нулевая пара не имеет геометрического смысла) лишь тогда, когда ее ранг меньше числа неизвестных. В данном случае это означает, что определитель системы равен нулю:

$$\binom{**}{*}\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Это — квадратное уравнение относительно коэффициента пропорциональности λ. Решая его, находим: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Подставляя эти значения в $(**)$, получаем две системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \end{cases}$$

из которых находим координаты неподвижных точек:

$$K(1:-1), \qquad L(1:1).$$

Изложенный здесь способ решения системы $(*)$, связанный с составлением так называемого характеристического уравнения $\binom{**}{*}$, особенно удобен в теории и при изучении проективных пространств более высоких размерностей. В нашем же случае несложно было решить систему $(*)$ как систему с двумя неизвестными λ и $u = \frac{x_1}{x_2}$:

$$\begin{cases} \lambda u = 2u + 1, \\ \lambda = u + 2, \end{cases}$$

которая имеет решения $u_1 = 1$ и $u_2 = -1$ (значения неизвестного λ нам не нужны). Отсюда следует, что неподвижными будут точки $\lambda(1:1)$ и $K(1:-1)$.

155. Найдите неподвижные точки следующих преобразований:

а) $\begin{cases} \lambda x_1' = 2x_1 + x_2, \\ \lambda x_2' = 2x_1 + 3x_2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \lambda x_1' = 2x_1 - x_2, \\ \lambda x_2' = x_1 - 2x_2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \lambda x_1' = 3x_1 + 2x_2, \\ \lambda x_2' = 2x_1 + 3x_2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \lambda x_1' = x_1 - x_2, \\ \lambda x_2' = 2x_1 - x_2. \end{cases}$

156. Какие преобразования из числа заданных в задаче 155 инволюционны? Установите виды инволюций.

Указание. Используйте уравнения инволюции, а также определения эллиптической и гиперболической инволюции (см. § 12. 5—6).

157. Одни из преобразований, заданных в задаче 153, инволюционны, а другие нет. В каких случаях вопрос о принадлежности преобразований к классу инволюций можно решить, не находя уравнений этих преобразований?

Указание. См. § 12. 4.

158. Найдите уравнения инволюций, заданных двумя парами соответствующих точек. Установите виды инволюций:

а) $A\,(1:1) \leftrightarrow A'\,(5:-3)$, $B\,(1:\ \ 0) \leftrightarrow B'\,(2:-1)$;
б) $A\,(1:0) \leftrightarrow A'(1:-1)$, $B\,(0:\ \ 1) \leftrightarrow B'\,(2:1)$;
в) $A\,(1:1) \leftrightarrow A'\,(0:1)$, $B\,(1:-1) \leftrightarrow B'\,(2:3)$;
г) $A\,(1:2) \leftrightarrow A'\,(3:-1)$, $B\,(1:-1) \leftrightarrow B'\,(0:1)$.

Указание. Рассмотрите инволюцию как проективное преобразование, заданное тремя парами соответствующих точек: $A \to A'$, $B \to B'$, $A' \to A$ (см. пример 3 из § 12).

159. Установите виды инволюций, заданных в задаче 158, не находя их уравнений.

Указание. Выясните, разделяют или не разделяют друг друга пары соответствующих точек, а затем примените теорему 1 из § 12. 6.

160. Гиперболическая инволюция задана двумя неподвижными точками K и L. Найдите ее уравнения.

а) $K\,(3:-1)$, $L\,(1:-1)$; б) $K\,(1:1)$, $L\,(1:-1)$.

161. При каких значениях параметра a инволюция

$$\begin{cases} \lambda x_1' = \ ax_1 - x_2, \\ \lambda x_2' = 2x_1 - ax_2 \end{cases}$$

будет эллиптической, а при каких — гиперболической?

162. Докажите, что прямая, не проходящая через вершины полного четырехвершинника, пересекает его противоположные стороны в точках, соответствующих друг другу в одной и той же инволюции (вторая теорема Дезарга).

Указание. 1-*й способ*. Выполните доказательства аналитически, приняв за фундаментальные точки системы координат вершины четырехвершинника. (Этот способ приводит к громоздким, хотя и несложным выкладкам.)

2-*й способ*. Обозначив точки пересечения данной прямой с противоположными сторонами через A и A', B и B', C и C' (рис. 15), докажите сначала соотношение $(AA'BC) = (AA'C'B')$, применив следствие из основного свойства двойных отношений (см. § 9. 5).

163. Проективное преобразование φ прямой u задано тремя парами соответствующих точек A и $A' = \varphi(A)$, B и $B' = \varphi(B)$, C и $C' = \varphi(C)$. Представьте φ в виде композиции трех перспектив.

Указание. См. § 12, пример 1.

164. Постройте M' — образ произвольной точки M относительно проективного преобразования φ, заданного в задаче 163.

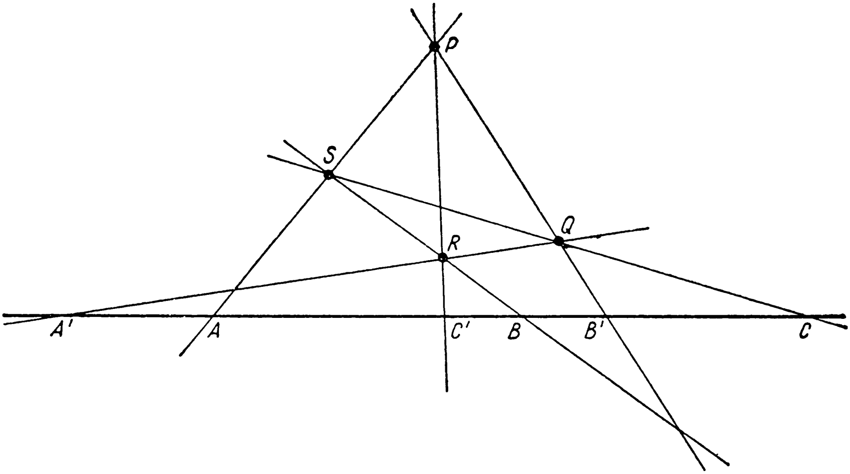

Рис. 15

165. Сформулируйте и решите задачу, двойственную задаче 164.

Указание. Рассмотрите проективное преобразование φ^* пучка прямых, заданное тремя парами соответствующих прямых a и $a' = \varphi^*(a)$, b и $b' = \varphi^*(b)$, c и $c' = \varphi^*(c)$.

166. На прямой u даны две неподвижные точки A и B проективного преобразования φ и пара соответствующих точек C и $C' = \varphi(C)$. Постройте M' — образ произвольной точки M.

167. Докажите, что всякое проективное преобразование φ прямой u может быть представлено как композиция двух инволюций.

Указание. Если φ — тождественное преобразование, то $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \tilde{\varphi}$, где $\tilde{\varphi}$ — произвольная инволюция прямой u. Если φ не является тождественным преобразованием, то рассмотрите инволюцию $\tilde{\varphi}_1$, заданную следующими двумя парами точек: A и $\varphi(\varphi(A))$, $\varphi(A)$ и $\varphi(A)$. Покажите, что преобразование $\tilde{\varphi}_2 = \tilde{\varphi}_1 \circ \varphi$ является инволюцией.

168. Инволюция $\tilde{\varphi}$ прямой u задана двумя парами соответствующих точек A и $A' = \tilde{\varphi}(A)$, B и $B' = \tilde{\varphi}(B)$. Постройте C' — образ произвольной точки $C \in u$.

Указание. Воспользуйтесь решением задачи 162.

169. Инволюция $\tilde{\varphi}$ прямой u задана неподвижной точкой M и парой соответствующих точек A и $A' = \tilde{\varphi}(A)$. Постройте вторую неподвижную точку N этой инволюции.

§ 11. КОЛЛИНЕАЦИИ

Литература: [2], § 13.

170. Дана коллинеация $\varkappa$:

$$\begin{cases} \lambda x_1' = x_1 + 2x_2, \\ \lambda x_2' = x_2 + 2x_3, \\ \lambda x_3' = x_2. \end{cases}$$

Найдите: а) A' — образ точки $A\ (1 : 1 : -2)$; б) B — прообраз точки $B'\ (-2 : -2 : 1)$; в) l' — образ прямой $l : 2x_1 + x_3 = 0$; г) m — прообраз прямой $m' : 2x_1' + x_2' + x_3' = 0$.

Решение. а) Координаты точки $A = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{Vmatrix}$ подставим в уравнения преобразования $\varkappa$ вместо x_1, x_2, x_3 и получим координаты ее образа $A' = \varkappa(A)$:

$$\begin{cases} \lambda x_1' = 1 + 2 \cdot 1, \\ \lambda x_2' = 1 + 2 \cdot (-2), \\ \lambda x_3' = 1, \end{cases}$$

или $A' = \begin{Vmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

б) Даны координаты образа: $x_1' = -2$, $x_2' = -2$, $x_3' = 1$. Требуется найти x_1, x_2, x_3 — координаты точки $\varkappa^{-1}(B)$. Из уравнений преобразований имеем:

$$\begin{cases} \lambda\,(-2) = x_1 + 2x_2, \\ \lambda\,(-2) = x_2 + 2x_3, \\ \lambda\ 1 = x_2. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем координатный столбец точки

$$\varkappa^{-1}(B) = \begin{Vmatrix} 8 \\ -2 \\ 3 \end{Vmatrix}.$$

в) 1-*й способ*. Берем произвольно точки C, $D \in l$ и находим $(C'D')$ — образ прямой CD.

2-*й способ*. Из уравнений преобразования $\varkappa$ выразим x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} \mu x_1 = x_1' - 2 \cdot x_3', \\ \mu x_2 = x_3', \\ \mu x_3 = \frac{1}{2}(x_2' - x_3'). \end{cases}$$

Так как координаты x_1, x_2, x_3 произвольной точки удовлетворяют уравнению прямой l, то , подставив найденные значения в уравнение прямой l, получим уравнение прямой l':

$$4x_1' + x_2' - 9x_3' = 0.$$

г) Для получения уравнения прямой m достаточно в уравнение прямой m' подставить значения x_1', x_2', x_3' из уравнений преобразования $\varkappa$:

$$\frac{2}{\lambda}(x_1 + 2x_2) + \frac{1}{\lambda}(x_2 + 2x_3) + \frac{1}{\lambda}x_2 = 0,$$

или $x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$.

171. Дана коллинеация $\varkappa$:

$$\begin{cases} \lambda x_1' = \ \ x_1 + x_2, \\ \lambda x_2' = \ \ x_1 - x_3, \\ \lambda x_3' = 2x_2 + x_3. \end{cases}$$

Найдите: а) образы A', B', C' точек $A\ (2 : -1 : 0)$, $B\ (1 : 1 : -2)$, $C\ (0 : 0 : 1)$;

б) прообразы D, E, F точек $D'\ (5 : -1 : 1)$, $E'\ (0 : 1 : -1)$, $F'\ (1 : -2 : 3)$;

в) образы a', b', c' прямых $a : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$; $b : 2x_2 + x_3 = 0$; $c : x_1 = 0$;

г) прообразы l, m прямых $l' : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$, $m' : x_2 + x_3 = 0$;

д) образ G' квадрики G: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 = 0$;

е) прообраз H квадрики H': $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$.

172. Докажите, что относительно коллинеации $\varkappa : \lambda X' = PX$ образ прямой u имеет координатную строку $u \cdot P^{-1}$, где u — координатная строка данной прямой.

173. Найдите уравнения коллинеации $\varkappa$, заданной двумя четверками точек:

$$\begin{aligned} &A\ (0 : 0 \ \ : 1) \to A'\ (0 : 0 \ \ : 1), \\ &B\ (2 : 0 \ \ : 1) \to B'\ (2 : 0 \ \ : 1), \\ &C\ (1 : 1 \ \ : 1) \to C'\ (1 : 1 \ \ : 0), \\ &D\ (1 : -1 : 1) \to D'\ (1 : -1 : 0). \end{aligned}$$

Решение. В уравнения преобразования

$$\begin{cases} \lambda x_1' = q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + q_{13}x_3, \\ \lambda x_2' = q_{21}x_1 + q_{22}x_2 + q_{23}x_3, \\ \lambda x_3' = q_{31}x_1 + q_{32}x_2 + q_{33}x_3 \end{cases}$$

подставим координаты данных точек. Получим систему из двенадцати уравнений:

$$\begin{cases} 0 = q_{13}, & \lambda_3 = q_{11} + q_{12} + q_{13}, \\ 0 = q_{23}, & \lambda_3 = q_{21} + q_{22} + q_{23}, \\ \lambda_1 = q_{33}, & 0 = q_{31} + q_{32} + q_{33}, \\ 2\lambda_2 = 2q_{11} + q_{13}, & \lambda_4 = q_{11} - q_{12} + q_{13}, \\ 0 = 2q_{21} + q_{23}, & -\lambda_4 = q_{21} - q_{22} + q_{23}, \\ \lambda_2 = 2q_{31} + q_{33}, & 0 = q_{31} - q_{32} + q_{33}. \end{cases}$$

Из каждой «подсистемы» исключим λ_i:

$$0 = q_{13}, \qquad 0 = 2q_{11} + q_{13} - 4q_{31} - 2q_{33},$$
$$0 = q_{23}; \qquad 0 = 2q_{21} + q_{23};$$
$$0 = q_{11} + q_{12} + q_{13} - q_{21} - q_{22} - q_{23},$$
$$0 = q_{31} + q_{32} + q_{33};$$

$$0 = q_{11} - q_{12} + q_{13} + q_{21} - q_{22} + q_{23},$$
$$0 = q_{31} - q_{32} + q_{33}.$$

Итак, $q_{13} = q_{23} = q_{21} = 0$. Остается пять уравнений:

$$\begin{cases} 2q_{11} - 4q_{31} - 2q_{33} = 0, \\ q_{11} + q_{12} - q_{22} = 0, \\ q_{31} + q_{32} + q_{33} = 0, \\ q_{11} - q_{12} - q_{22} = 0, \\ q_{31} - q_{32} + q_{33} = 0. \end{cases}$$

Из второго и четвертого уравнений находим, что $q_{12} = 0$, $q_{11} = q_{22}$, из третьего и пятого — $q_{32} = 0$, $q_{31} + q_{33} = 0$. Из первого уравнения получаем: $q_{11} = 2q_{31} + q_{33} = q_{31} + (q_{31} + q_{33})$, т. е. $q_{11} = q_{31}$.

Положим $q_{11} = 1$ (коэффициенты уравнений преобразования ищем с точностью до множителя), тогда $q_{11} = q_{22} = q_{31} = -q_{33} = 1$. Поэтому уравнения преобразования $\varkappa$ имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \lambda x_1' = x_1, \\ \lambda x_2' = x_2, \\ \lambda x_3' = x_1 - x_3. \end{cases}$$

174. Найдите уравнения коллинеаций, заданных двумя четверками точек:

а) $A\ (1 : 3 : 0) \to A'\ (3 : 0 : -1)$,
$B\ (2 : -1 : 2) \to B'\ (-1 : 2 : 2)$,
$C\ (1 : 1 : 1) \to C'\ (1 : 1 : -1)$,
$D\ (1 : 0 : 0) \to D'\ (0 : 0 : 1)$;

б) $A\ (1 : 2 : 0) \to A'\ (2 : 0 : 1)$,
$B\ (0 : 3 : 4) \to B'\ (7 : -4 : 0)$,
$C\ (0 : 0 : 1) \to C'\ (-1 : 1 : 0)$,
$D\ (4 : -1 : 1) \to D'\ (0 : 1 : 4)$.

175. Найдите уравнение коллинеации, заданной следующими четверками точек из задачи 174, а):

$$A \to B', \qquad C \to D',$$
$$B \to C', \qquad D \to A'.$$

176. Найдите уравнения коллинеации, которая фундаментальные точки $E_1\ (1 : 0 : 0)$, $E_2\ (0 : 1 : 0)$, $E_3\ (0 : 0 : 1)$ оставляет на месте, а точку $E_0\ (1 : 1 : 1)$ отображает на точку $E_0'\ (a : b : c)$.

177. Найдите неподвижные точки коллинеации, уравнения которой были получены при решении задачи 173.

Решение. Отметим, что две неподвижные точки преобразования даны в условии задачи — это точки A и B. Неподвижная точка характеризуется тем, что она совпадает со своим образом. Следовательно, для неподвижной точки тройки x_1, x_2, x_3 и x_1', x_2', x_3' пропорциональны. Поэтому из уравнений преобразования получаем систему уравнений, позволяющую найти неподвижные точки:

$$\begin{cases} \lambda x_1 = x_1, \\ \lambda x_2 = x_2, \\ \lambda x_3 = x_1 - x_3. \end{cases}$$

Эту систему запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 = 0, \\ (1-\lambda)x_2 = 0, \\ x_1 - (1+\lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

Получилась линейная однородная система относительно x_1, x_2, x_3. коэффициенты которой зависят от параметра λ. Как известно из алгебры, такая система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю, т. е. при условии

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2(1+\lambda) = 0.$$

Таким образом, ненулевые решения будут при $\lambda = -1$ и $\lambda = 1$,

1) $\lambda = -1$. В этом случае из системы находим: $x_1 = x_2 = 0$. x_3 — произвольно. Получаем неподвижную точку $A = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

2) $\lambda = 1$. Система сводится к одному уравнению $x_3 = x_1 - x_3$. В этом случае получается прямая $p : x_1 - 2x_3 = 0$, состоящая из неподвижных точек. Отметим, что $B \in p$, $A \notin p$.

Таким образом, множество неподвижных точек коллинеации состоит из точки A и всех точек прямой p.

178. Найдите неподвижные точки следующих коллинеаций:

а) $\begin{cases} \lambda x_1' = 2x_1 - x_2 + 2x_3, \\ \lambda x_2' = 5x_1 - 3x_2 + 3x_3, \\ \lambda x_3' = -x_1 - 2x_3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \lambda x_1' = 3x_1 + x_2, \\ \lambda x_2' = x_1 + 3x_2, \\ \lambda x_3' = 4x_3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \lambda x_1' = x_1, \\ \lambda x_2' = -x_2, \\ \lambda x_3' = x_1 - x_3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \lambda x_1' = 2x_1 + x_3, \\ \lambda x_2' = x_1 + x_2 + x_3, \\ \lambda x_3' = -x_1. \end{cases}$

179. Найдите неподвижные прямые[1] коллинеации, уравнение которой было получено при решении задачи 173.

Решение. Согласно задаче 172 координатная строка u неподвижной прямой может быть получена из матричного уравнения $\lambda u = P^{-1}u$ или из уравнения $uP = \frac{1}{\lambda}u$, где

$$P = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix} —$$

матрица данной коллинеации. Таким образом, система уравнений для отыскания координатной строки неподвижных прямых будет следующей:

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda}u_1 = u_1 + u_3, \\ \frac{1}{\lambda}u_2 = u_2, \\ \frac{1}{\lambda}u_3 = -u_3, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)u_1 + u_3 = 0, \\ \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)u_2 = 0, \\ \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)u_3 = 0. \end{cases}$$

Исследуя эту систему так же, как исследовалась аналогичная система в задаче 177, находим, что она имеет ненулевые решения при $\lambda = 1$ и $\lambda = -1$.

1. Решая систему при $\lambda = 1$, устанавливаем, что $u_3 = 0$, а u_1 и u_2 произвольны. Следовательно, неподвижными будут все прямые, уравнения которых имеют вид $\alpha x_1 + \beta x_2 = 0$, где α и β — произвольные параметры, не равные одновременно нулю. Легко видеть, что эти прямые образуют пучок с центром A $(0 : 0 : 1)$.

2. Решая систему при $\lambda = -1$, находим $2u_1 + u_3 = 0$ и $u_2 = 0$. Следовательно, $u\,(\alpha : 0 : -2\alpha)$, и потому неподвижна прямая $p : x_1 - 2x_3 = 0$.

180. Найдите неподвижные прямые коллинеаций из задачи 178.

181. Докажите, что если три точки прямой неподвижны при некоторой коллинеации, то неподвижны все точки этой прямой. Сформулируйте двойственное утверждение.

182. Докажите, что всякая коллинеация имеет неподвижную точку и неподвижную прямую.

Указание. См. решения задач 177 и 179.

183. Точка и прямая, неподвижные относительно некоторой коллинеации (см. задачу 182), не инцидентны. Докажите, что уравнения такой коллинеации в подходящей системе координат имеют вид

$$\begin{cases} \lambda x_1' = x_1, \\ \lambda x_2' = ax_2 + bx_3, \\ \lambda x_3' = cx_2 + dx_3. \end{cases}$$

---

[1] Следует различать неподвижную прямую и прямую, состоящую из неподвижных точек (см. § 14. 1).

Указание. Неподвижную точку примите за координатную точку E_1, а координатные точки E_2 и E_3 расположите на неподвижной прямой.

184. Точка и прямая, неподвижные относительно некоторой коллинеации, инцидентны (см. задачу 182). Докажите, что уравнения такой коллинеации в подходящей системе координат имеют вид

$$\begin{cases} \lambda x_1' = x_1 + x_2 + x_3, \\ \lambda x_2' = x_2 + cx_3, \\ \lambda x_3' = dx_3. \end{cases}$$

Указание. Неподвижную точку примите за координатную точку E_1, а координатную точку E_2 расположите на неподвижной прямой.

185. Уравнение коллинеации в матричной форме имеет вид $\lambda X' = PX$. Докажите, что если в матрице P суммы элементов в каждой строке равны, то единичная точка E неподвижна, а если равны суммы элементов в каждом столбце, то неподвижна прямая $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Докажите обратные утверждения.

186. Докажите, что коллинеация

$$\begin{cases} \lambda x_1' = x_1, \\ \lambda x_2' = 2x_2, \\ \lambda x_3' = 3x_3 \end{cases}$$

имеет точно три неподвижные точки. Составьте еще несколько примеров коллинеаций, имеющих точно три неподвижные точки.

187. Докажите, что коллинеация

$$\begin{cases} \lambda x_1' = x_1 + x_3, \\ \lambda x_2' = 2x_2, \\ \lambda x_3' = x_3 \end{cases}$$

имеет точно две неподвижные точки. Составьте еще несколько примеров коллинеаций, имеющих точно две неподвижные точки.

188. Докажите, что коллинеация

$$\begin{cases} \lambda x_1' = x_1 - 2x_2, \\ \lambda x_2' = 2x_1 + x_2, \\ \lambda x_3' = x_3 \end{cases}$$

имеет точно одну неподвижную точку. Составьте еще несколько примеров коллинеаций, имеющих точно одну неподвижную точку.

189. На расширенной евклидовой плоскости в однородных аффинных координатах задана коллинеация φ:

$$\begin{cases} \lambda x_1' = x_1, \\ \lambda x_2' = x_2, \\ \lambda x_3' = x_1 - x_3. \end{cases}$$

Найдите $a' = \varphi(a_\infty)$ образ и $b = \varphi^{-1}(a_\infty)$ прообраз несобственной прямой a_∞.

Решение. 1) Из уравнений преобразования имеем:

$$x_1 = \lambda x_1', \quad x_2 = \lambda x_2', \quad x_3 = \lambda(x_1' - x_3').$$

Поэтому образом прямой $a_\infty : x_3 = 0$ будет прямая $a' = \varphi(a_\infty) : x_1' - x_3' = 0$.

2) Уравнение прямой a_∞, рассматриваемой как образ искомой прямой $b = \varphi^{-1}(a_\infty)$, запишем так: $x_3' = 0$. Используя уравнения преобразования φ, находим уравнение прямой $b : x_1 - x_2 = 0$.

Замечание. В нашем примере получилось $\varphi(a_\infty) = \varphi^{-1}(a_\infty)$. Такое совпадение случайно.

190. На расширенной евклидовой плоскости в однородных аффинных координатах заданы коллинеации

$$\varphi_1: \begin{cases} \lambda x_1' = x_1 + x_3, \\ \lambda x_2' = x_1 - x_3, \\ \lambda x_3' = x_2; \end{cases} \qquad \varphi_2: \begin{cases} \lambda x_1' = 2x_1 + 7x_2 + 3x_3, \\ \lambda x_2' = 3x_1 + 9x_2 + 4x_3, \\ \lambda x_3' = x_1 + 5x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

и прямые

$$l_1 : x_1 + x_2 - x_3 = 0; \qquad l_2 : x_3 = 0.$$

Найдите уравнения следующих прямых:

а) $\varphi_1(l_1)$, $\varphi_1^{-1}(l_1)$; в) $\varphi_2(l_1)$, $\varphi_2^{-1}(l_1)$;

б) $\varphi_1(l_2)$, $\varphi_1^{-1}(l_2)$; г) $\varphi_2(l_2)$, $\varphi_2^{-1}(l_2)$.

191. Считая преобразование

$$\varphi: \begin{cases} \lambda x_1' = x_1 - 2x_2, \\ \lambda x_2' = x_1, \\ \lambda x_3' = x_1 + 2x_3 \end{cases}$$

заданным в однородных прямоугольных декартовых координатах, найдите образ окружности G, уравнение которой имеет вид

$$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 9.$$

Решение. Уравнение окружности записываем в однородных координатах и подставляем в него вместо x_1, x_2, x_3 их выражения через x_1', x_2', x_3' из уравнений преобразования φ. После сокращения на λ^2 получаем уравнение квадрики $G' = \varphi(G)$ в виде $G' : x_3'^2 + \frac{1}{4}(x_3' - x_1')^2 = \frac{9}{4}(x_3' - x_2')^2$.

Возвращаясь вновь к неоднородным координатам, получаем уравнение квадрики

$$G' : \frac{(y'-1)^2}{\frac{4}{9}} - \frac{(x'-1)^2}{4} = 1, \text{ или } \frac{Y^2}{\frac{4}{9}} - \frac{X^2}{4} = 1,$$

где $Y = y' - 1$, $X = x' - 1$. Это — гипербола с асимптотами $Y = \pm\frac{1}{3}X$, причем ось OX мнимая, а OY действительная (рис. 16).

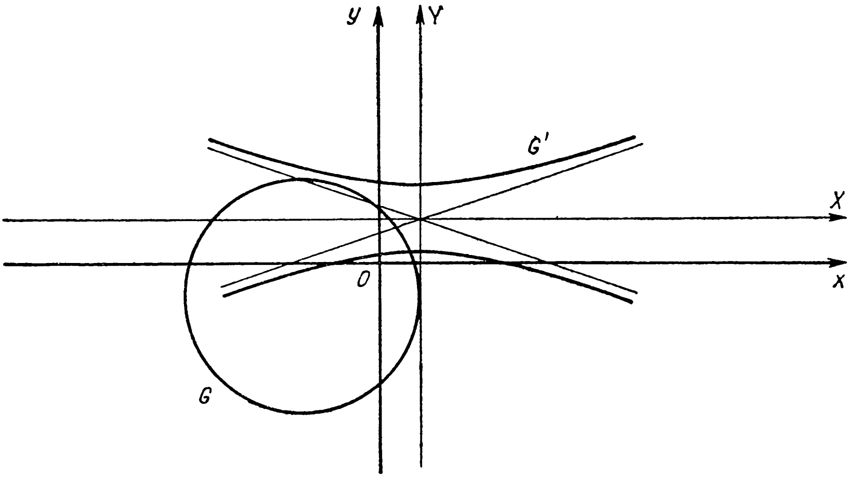

Рис. 16

192. Проективное преобразование φ расширенной евклидовой плоскости задано в однородных прямоугольных декартовых координатах уравнениями:

$$\varphi : \begin{cases} \lambda x_1' = -x_1, \\ \lambda x_2' = x_1 + x_2, \\ \lambda x_3' = x_1 - x_2 - x_3. \end{cases}$$

Найдите образы следующих кривых:

а) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1$,
б) $y = x^2$,
в) $x^2 - y^2 = 1$,
г) $4x^2 + y^2 = 1$,
д) $x^2 - 4y^2 = 0$.

193. На расширенной евклидовой плоскости дана окружность с центром O и с диаметрами AC и BD. В точках A и B к окружности проведены касательные, пересекающиеся в точке K. Коллинеация $\varkappa$ отображает точку A на несобственную точку прямой AC, точку B на несобственную точку прямой BD, а точку O на точку K и точку K на точку O. Определите вид кривой, являющейся образом данной окружности относительно коллинеации $\varkappa$, и изобразите эту кривую на чертеже.

194. На расширенной евклидовой плоскости образом некоторой касательной к данной окружности относительно коллинеации является несобственная прямая. Что можно сказать об образе самой окружности?

§ 12. ГОМОЛОГИИ

Литература: [2], § 14.

195. Докажите, что коллинеация $\varkappa$

$$\begin{cases} \lambda x_1' = x_1, \\ \lambda x_2' = x_2, \\ \lambda x_3' = x_1 - x_3 \end{cases}$$

есть гиперболическая гомология. Найдите ее ось, центр, константу.

Решение. При решении задачи 177 были найдены неподвижные точки коллинеации $\varkappa$. Оказалось, во-первых, что неподвижны все точки прямой $p : x_1 - 2x_3 = 0$. По определению гомологии это означает, что $\varkappa$ есть гомология с осью p. Во-вторых, неподвижна точка A $(0 : 0 : 1)$. Так как $A \notin p$, то рассматриваемая коллинеация является гиперболической гомологией с центром A.

Для того чтобы найти константу гомологии, возьмем произвольно точку M, отличную от центра и не инцидентную оси, например M $(1 : 0 : 0)$. Образ M' точки M находим с помощью уравнений коллинеации: M' $(1 : 0 : 1)$. Далее непосредственно получаем:

$$\begin{aligned} A &= -M + M', \\ U &= M + M', \end{aligned}$$

где $U = p \cap (AM)$, и вычисляем константу гомологии:

$$h = (AUMM') = (MM'AU) = \frac{1}{-1} : \frac{1}{1} = -1.$$

196. Коллинеация задана тремя неколлинеарными неподвижными точками P, Q, R и еще одной парой различных соответственных точек $A \to A'$, не лежащих на сторонах трехвершинника PQR. При каких условиях данная коллинеация является гомологией и каков вид этой гомологии?

197. Какие из коллинеаций, заданных в задаче 178, являются гомологиями? Определите виды гомологий, их оси и центры, а в случае гиперболических гомологий — константу.

198. Найдите уравнения гомологии, осью которой является координатная прямая E_1E_2, центром — координатная точка E_3, если константа гомологии равна 3.

199. Докажите, что уравнение гиперболической гомологии с осью p, центром A и константой h в матричной форме имеет вид

$$\lambda X' = (h - 1)\ (pX)A + (pA)X,$$

или в подробной записи:

$$\begin{cases} \lambda x_1' = (h-1)\ (p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3)a_1 + (p_1a_1 + p_2a_2 + p_3a_3)x_1, \\ \lambda x_2' = (h-1)\ (p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3)a_2 + (p_1a_1 + p_2a_2 + p_3a_3)x_2, \\ \lambda x_3' = (h-1)\ (p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3)a_3 + (p_1a_1 + p_2a_2 + p_3a_3)x_3, \end{cases}$$

где $p = (p_1 p_2 p_3)$ — координатная строка оси, а $A = \begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Vmatrix}$ — координатный столбец центра.

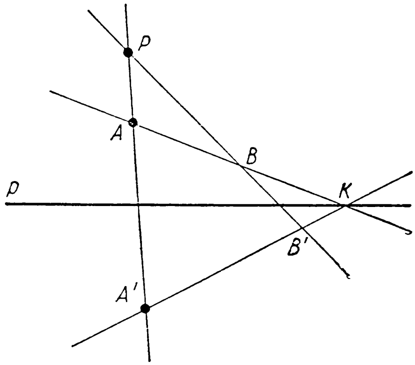

Рис. 17

200. Гиперболическая гомология задана центром P, осью p и парой точек $A \to A'$. Постройте:

а) образ произвольной прямой, проходящей через A;

б) образ произвольной точки, не лежащей на прямой AA';

в) образ произвольной точки, лежащей на прямой AA';

г) образ произвольной прямой;

д) образ и прообраз несобственной прямой, считая, что гомология задана на расширенной евклидовой плоскости.

Решение. в) Образ точки B — точка B' инцидентна прямой PB. Точка $K = p \cap (AB)$ — неподвижная точка, так как она принадлежит оси гомологии p (рис. 17). Прямая AK перейдет в прямую $A'K$. Так как гомология сохраняет инцидентность, то искомая точка $B' = (PB) \cap (A'K)$.

д) Искомые прямые параллельны оси p гомологии и проходят соответственно через образ и прообраз произвольной несобственной точки.

201. Гиперболическая гомология задана осью, центром и парой прямых $a \to a'$. Постройте:

а) образ произвольной точки M, не лежащей на a;

б) образ произвольной прямой m, пересекающейся с прямой a на оси.

Указание. Постройте образ прямой MA, где $A \in a$.

202. Гиперболическая гомология на расширенной евклидовой плоскости задана собственной осью, центром и парой точек $A \to A'_\infty$. Постройте:

а) образ произвольной точки M,

б) образ произвольной прямой m,

в) образ несобственной прямой.

203. Гиперболическая гомология задана несобственным центром P_∞, собственной осью p и парой соответствующих точек A и A'. Каким аффинным преобразованием является данная гомология? Постройте:

а) образ произвольной точки M,

б) образ произвольной прямой m.

Указание. См. § 14. 4.

204. Гиперболическая гомология задана собственным центром P, несобственной осью p и парой соответствующих точек A и A'. Каким аффинным преобразованием является данная гомология? Постройте:

а) образ произвольной точки M,

б) образ произвольной прямой m.

Указание. См. § 14. 4.

205. Докажите, что гомология, заданная несобственным центром P_∞ и несобственной осью p_∞, является параллельным переносом.

Указание. Докажите, что $AA'B'B$ — параллелограмм для любых точек A, B и их образов A', B' соответственно.

206. Инволюционная гомология задана осью и центром. Постройте образ произвольной точки.

207. Параболическая гомология задана осью и парой соответствующих точек A и A'. Постройте:

а) образ произвольной точки,

б) образ произвольной прямой,

в) образ и прообраз несобственной прямой, считая, что гомология задана на расширенной евклидовой плоскости.

208. Докажите, что композиция двух гиперболических гомологий с общей осью есть гомология с той же осью, причем центры всех трех гомологий лежат на одной прямой.

Указание. *1-й способ.* Обратите внимание на то, что прямая, проходящая через центры гомологий, неподвижна и относительно композиции этих гомологий.

2-й способ. Используйте задачу 199, приняв за центр одной гомологии точку $P_1\ (0:0:1)$ и за ось двух гомологий прямую $x_3 = 0$.

209. Докажите, что композиция двух гомотетий на евклидовой плоскости есть либо гомотетия, либо параллельный перенос, причем в первом случае центры всех трех гомотетий лежат на одной прямой, а во втором вектор переноса параллелен прямой, соединяющей центры данных гомотетий (теорема о трех центрах подобия).

Указание. Сначала рассмотрите гомотетию как гомологию на расширенной евклидовой плоскости и поэтому ось гомологии считайте несобственной, а затем воспользуйтесь результатом, полученным в задаче 208.

210. Докажите, что композиция параболических гомологий с общей осью есть параболическая гомология с той же осью. Исходя из этого результата, докажите, что композиция двух параллельных переносов на евклидовой плоскости есть параллельный перенос.

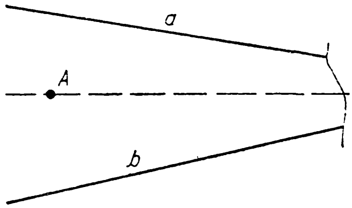

Рис. 18

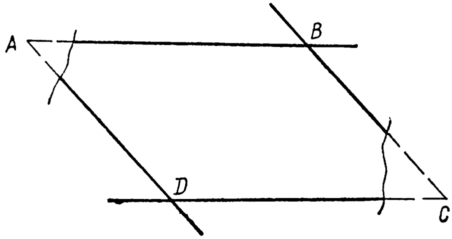

Рис. 19

211. Постройте прямую, проходящую через данную точку A и через недоступную точку, заданную парой прямых a и b (рис. 18).

Указание. Задайте гомологию так, чтобы одна из данных прямых была осью, а другая имела бы своим образом искомую прямую.

212. Дан параллелограмм $ABCD$ своими сторонами, две его вершины A и C — недоступные точки. Постройте прямую AC.

Указание. Рассмотрите гомологию, осью которой является искомая прямая AC, а образом точки B является точка D (рис. 19).

ГЛАВА V

КВАДРИКИ

§ 13. КВАДРИКИ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ. ЗАДАНИЕ КВАДРИКИ ПЯТЬЮ ТОЧКАМИ

Литература: [2], § 15.

213. Приведите к каноническому виду уравнение квадрики

$$4x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$$

и определите ее проективный класс.

Решение. *1-й способ.* Квадратичную форму, стоящую в левой части уравнения, можно привести к каноническому виду способом Лагранжа (см. § 15. 2 и пример 2).

2-й способ. Ранг матрицы квадрики равен 3, так как

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Следовательно, квадрика невырожденная, и потому она принадлежит либо классу мнимых невырожденных квадрик, либо классу овальных квадрик. Так как точка $\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$ принадлежит квадрике (проверяем непосредственно: $4 \cdot 0^2 + 0^2 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$), то данная квадрика является овальной и потому ее каноническое уравнение имеет вид: $x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 = 0$.

214. Уравнения нижеприведенных квадрик приведите к каноническому виду и определите их проективные классы:

а) $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3 = 0$;
б) $x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$;
в) $x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_3 = 0$;
г) $2x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 = 0$;
д) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0$;
е) $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0$;
ж) $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3 = 0$.

215. Найдите уравнение квадрики, проходящей через точки

$$A = \begin{Vmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad D = \begin{Vmatrix} 5 \\ -1 \\ 10 \end{Vmatrix}, \quad E = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Решение. *1-й способ.* Подставим координаты данных точек в общее уравнение квадрики:

$$g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + g_{33}x_3^2 + 2g_{12}x_1x_2 + 2g_{13}x_1x_3 + 2g_{23}x_2x_3 = 0$$

и получим после ряда упрощений систему из пяти уравнений с шестью неизвестными g_{ij}:

$$\begin{cases} g_{11} = 0, \\ g_{13} = 0, \\ g_{33} = 0, \\ g_{22} - 4g_{12} = 0, \\ g_{22} - 10g_{12} - 20g_{23} = 0. \end{cases}$$

По теореме о задании квадрики пятью точками существует единственная квадрика, проходящая через эти точки. Поэтому полученная система имеет единственное (с точностью до множителя) ненулевое решение, которое находим непосредственно:

$$g_{11} = g_{33} = g_{13} = 0, \quad g_{22} : g_{12} : g_{23} = 40 : 10 : -3.$$

Можно положить $g_{22} = 40$, $g_{12} = 10$, $g_{23} = -3$ и, следовательно, уравнение искомой квадрики имеет вид

$$20x_2^2 + 10x_1x_2 - 3x_2x_3 = 0.$$

2-й способ. Заметим, что точки A, B, E коллинеарны (они лежат на прямой $x_2 = 0$). Потому квадрика распадается на пару прямых. Так как прямая CD имеет уравнение $10x_1 + 20x_2 - 3x_3 = 0$, то уравнение квадрики будет иметь следующий вид:

$$x_2 (10x_1 + 20x_2 - 3x_3) = 0.$$

216. Найдите уравнение квадрики, проходящей через точки

а) $A_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad A_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad A_3 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad A_4 = \begin{Vmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad A_5 = \begin{Vmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{Vmatrix};$

б) $B_1 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad B_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad B_3 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Vmatrix}, \quad B_4 = \begin{Vmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{Vmatrix}, \quad B_5 = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix};$

в) $C_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad C_2 = \begin{Vmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad C_3 = \begin{Vmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad C_4 = \begin{Vmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad C_5 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}.$

Указание. Для решения задачи 216,в целесообразно использовать коллинеарность точек C_1, C_2, C_3.

217. Докажите, что многочлен $x_1^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ разлагается на множители, и найдите это разложение.

Решение. *1-й способ.* Данный многочлен является квадратичной формой. Найдем ее ранг:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ранг этой формы равен 2. Следовательно, квадрика $x_1^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ является вырожденной и распадается на пару прямых (вещественных или мнимых). Так как координаты точек $\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{Vmatrix}$ удовлетворяют уравнению квадрики, а пара мнимых прямых имеет лишь одну вещественную точку, то квадрика распадается на пару вещественных прямых, а, значит, данная квадратичная форма разлагается на вещественные множители. Разложение на множители найдем методом неопределенных коэффициентов. Так как коэффициент при x_1^2 равен 1, то множители, на которые разлагается многочлен, можно обозначить так: $x_1 + Ax_2 + Bx_3$ и $x_1 + Cx_2 + Dx_3$, где A, B, C, D — неопределенные коэффициенты. Из уравнения

$$x_1^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = \\ = (x_1 + Ax_2 + Bx_3)(x_1 + Cx_2 + Dx_3)$$

получаем систему относительно неизвестных A, B, C, D:

$$\begin{cases} AC = 0, \\ BD = 3, \\ A + C = -4, \\ B + D = -4, \\ AD + BC = 4. \end{cases}$$

По доказанному система совместна. Решая ее, находим два решения:

$$\begin{cases} A = 0, \\ B = -1, \\ C = -4, \\ D = -3, \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -4, \\ B = -3, \\ C = 0, \\ D = -1. \end{cases}$$

Оба эти решения приводят к одному и тому же разложению многочлена на множители:

$$x_1^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = (x_1 - x_3)(x_1 - 4x_2 - 3x_3).$$

2-й способ. Способом Лагранжа (способ выделения полных квадратов) приведем данную квадратичную форму к сумме (разности) квадратов:

$$x_1^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = x_1^2 - 2x_1(2x_2 + 2x_3) + \\ + (2x_2 + 2x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3 = \\ = (x_1 - 2x_2 - 2x_3)^2 - (x_3^2 + 4x_2x_3 + 4x_2^2) = \\ = (x_1 - 2x_2 - 2x_3)^2 - (2x_2 + x_3)^2.$$

Разлагая получившуюся разность квадратов на множители, имеем:

$$(x_1 - x_3)\,(x_1 - 4x_2 - 3x_3).$$

218. Докажите, что нижеприведенные многочлены разлагаются на множители, и найдите эти разложения:

а) $5x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + 10x_1x_2 + 4x_2x_3$;

б) $4x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 - 4x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3$;

в) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.

219. Докажите, что уравнение квадрики, проходящей через фундаментальные точки проективной системы координат и точку $A\,(a_1 : a_2 : a_3)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x_2x_3 & x_1x_3 & x_1x_2 \\ 1 & 1 & 1 \\ a_2a_3 & a_1a_3 & a_1a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

220. Даны A, B, C_1, C_2, C_3, C_4 — шесть произвольных точек некоторой овальной квадрики. Докажите, что $(a_1a_2a_3a_4) = (b_1b_2b_3b_4)$, где $a_i = (AC_i)$, $b_i = (BC_i)$ (теорема Штейнера).

Указание. Примите четыре из данных точек за фундаментальные точки проективной системы координат и воспользуйтесь результатом задачи 219.

§ 14. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И КВАДРИКИ. ЗАДАНИЕ КВАДРИКИ ТОЧКАМИ И КАСАТЕЛЬНЫМИ. ПОЛЮСЫ И ПОЛЯРЫ

Литература: [2], § 16.

221. Найдите точки пересечения прямой, проходящей через точки

$A\,(1 : 2 : 1)$ и $B\,(1 : 0 : -1)$, с квадрикой $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1x_3 - x_3^2 = 0$.

Решение. Используя параметрическое уравнение $X = \lambda A + \mu B$ прямой AB, находим:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda + \mu, \\ x_2 = 2\lambda, \\ x_3 = \lambda - \mu. \end{cases}$$

А так как координаты точки пересечения прямой с квадрикой удовлетворяют уравнению этой квадрики, то имеет место равенство

$$(\lambda + \mu)^2 - 2(\lambda + \mu)\cdot 2\lambda + (2\lambda)^2 - 3(\lambda + \mu)(\lambda - \mu) - (\lambda - \mu)^2 = 0,$$

или $\lambda^2 - \mu^2 = 0$, откуда $\lambda = \pm\,\mu$.

Следовательно, полагая $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, получим точку $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$;

полагая $\lambda = -\mu = \frac{1}{2}$, получим точку $\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

222. Найдите точки пересечения прямой AB с квадрикой $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, если

а) $A = \begin{Vmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix}$; в) $A = \begin{Vmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{Vmatrix}$;

б) $A = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{Vmatrix}$; г) $A = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 10 \end{Vmatrix}$.

223. Найдите уравнение касательной к квадрике $x_1^2 - x_2^2 + x_1x_3 = 0$ в ее точке $A\ (1:2:3)$.

Решение. Уравнение данной квадрики в матричной форме запишется следующим образом:

$$\| x_1 x_2 x_3 \| \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = 0.$$

Уравнение касательной к данной квадрике в точке A будет иметь вид $A^{\mathrm{T}}GX = 0$ или

$$\| 1\ 2\ 3 \| \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = 0.$$

Перемножив матрицы в левой части последнего уравнения, получим искомое уравнение $5x_1 - 4x_2 + x_3 = 0$.

224. Найдите уравнения касательных к квадрике $x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 - 5x_2x_3 = 0$ в ее точках:

а) $A = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$; б) $B = \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix}$; в) $C = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$.

225. Найдите уравнение и докажите единственность квадрики, проходящей через точки

$$E_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad E_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad E_3 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad E_0 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

и касающейся прямой $x_1 + x_2 = 0$ в точке E_3.

Решение. Подставим координаты точек E_1, E_2, E_3 в уравнение $g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + g_{33}x_3^2 + 2g_{12}x_1x_2 + 2g_{13}x_1x_3 + 2g_{23}x_2x_3 = 0$ квадрики и получим $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 0$. Следовательно, уравнение искомой квадрики имеет вид

$$g_{12}x_1x_2 + g_{13}x_1x_3 + g_{23}x_2x_3 = 0,$$

Так как искомой квадрике принадлежит точка E_0, то $g_{12}+g_{13}+g_{23}=0$. Уравнение касательной к искомой квадрике в точке $E_3=\begin{Vmatrix}0\\0\\1\end{Vmatrix}$ имеет вид

$$\begin{Vmatrix}0 & 0 & 1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}0 & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & 0 & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & 0\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Vmatrix}=0$$

или $g_{31}x_1+g_{32}x_2=0$; оно должно совпадать с уравнением $x_1+x_2=0$. Следовательно,

$$\frac{g_{31}}{1}=\frac{g_{32}}{1},$$

а так как $g_{ij}=g_{ji}$ и $g_{12}+g_{13}+g_{23}=0$, то коэффициенты уравнения квадрики определены с точностью до множителя единственным образом: $g_{12}=2$, $g_{13}=g_{23}=-1$. Итак, искомая квадрика единственна и имеет следующее уравнение:

$$2x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3=0.$$

226. Найдите уравнение и докажите единственность квадрики, проходящей через точки

$$E_1=\begin{Vmatrix}1\\0\\0\end{Vmatrix},\quad E_2=\begin{Vmatrix}1\\-1\\1\end{Vmatrix},\quad E_3=\begin{Vmatrix}0\\0\\1\end{Vmatrix}$$

и касающейся прямых $x_1=0$, $x_3=0$.

227. Найдите уравнение и докажите единственность квадрики, проходящей через точки

$$A=\begin{Vmatrix}1\\1\\0\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}0\\-1\\1\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix}0\\0\\1\end{Vmatrix}$$

и касающейся прямых $2x_1-x_2=0$ и $x_2+x_3=0$.

228. Даны точки A_1, A_2, A_3, A_4, из которых никакие три не коллинеарны, и прямая a, проходящая через точку A_1 и не проходящая ни через одну из остальных точек. Докажите, что существует одна и только одна квадрика G, проходящая через данные точки A_1, A_2, A_3, A_4 и касающаяся прямой a.

Указание. Примите точки A_1, A_2, A_3, A_4 за фундаментальные точки проективного репера

$$A_1=\begin{Vmatrix}1\\0\\0\end{Vmatrix},\quad A_2=\begin{Vmatrix}0\\1\\0\end{Vmatrix},\quad A_3=\begin{Vmatrix}0\\0\\1\end{Vmatrix},\quad A_4=\begin{Vmatrix}1\\1\\1\end{Vmatrix}.$$

Тогда (см. задачу 225) $g_{11}=g_{22}=g_{33}=0$. Оставшиеся три коэффициента g_{12}, g_{13}, g_{23} должны удовлетворять двум условиям:

а) Координаты точки A_4 удовлетворяют уравнению

$$g_{12}x_1x_2+g_{13}x_1x_3+g_{23}x_2x_3=0.$$

б) Данная прямая $a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ является касательной к квадрике $g_{12}x_1x_2 + g_{13}x_1x_3 + g_{23}x_2x_3 = 0$ ($a_1 = 0$, так как прямая a проходит через точку A_1).

229. Даны неколлинеарные точки A, B, C и две прямые a и b, проходящие через точки A и B соответственно, но не проходящие через остальные точки. Докажите, что существует одна и только одна квадрика G, проходящая через данные точки A, B, C и касающаяся прямых a и b.

230. а) Даны три прямые a, b, c, не принадлежащие одному пучку, и точки A и B, принадлежащие прямым a и b соответственно, но не принадлежащие другим данным прямым. Докажите, что существует единственная квадрика, касающаяся данных прямых, причем прямых a и b в данных на них точках.

б) Даны четыре прямые, из которых никакие три не принадлежат одному пучку, и точка на одной из них, не принадлежащая другим прямым. Докажите, что существует единственная квадрика, касающаяся всех данных прямых, причем одной из них в данной на ней точке.

в) Даны пять прямых, из которых никакие три не принадлежат одному пучку. Докажите, что существует единственная квадрика, касающаяся всех данных прямых.

Решение. а) Данные прямые примем за координатные. Тогда

$$a : x_1 = 0, \quad b : x_2 = 0, \quad c : x_3 = 0.$$

Координатные столбцы точек A и B могут быть записаны в следующем виде:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ \beta \end{Vmatrix}.$$

Найдем уравнение касательной в точке A к искомой квадрике по формуле $A^{\mathsf{T}}GX = 0$, где $G = \|g_{ij}\|$ — матрица квадрики:

$$(g_{21} + \alpha g_{31})x_1 + (g_{22} + \alpha g_{32})\, x_2 + (g_{23} + \alpha g_{33})x_3 = 0.$$

Но по условию этой касательной является прямая a. Поэтому

$$(*) \quad \begin{cases} g_{21} + \alpha g_{31} \neq 0, \\ g_{22} + \alpha g_{32} = 0, \\ g_{23} + \alpha g_{33} = 0. \end{cases}$$

Аналогично, исходя из того, что прямая b касается квадрики в точке B, получаем

$$(**) \quad \begin{cases} g_{11} + \beta g_{31} = 0, \\ g_{12} + \beta g_{32} \neq 0, \\ g_{13} + \beta g_{33} = 0. \end{cases}$$

Условие касания прямой $c = (E_1E_2)$ с квадрикой имеет вид

$$(E_1^{\mathsf{T}}GE_2)^2 - (E_1^{\mathsf{T}}GE_1)\,(E_2^{\mathsf{T}}GE_2) = 0$$

(см. § 16. 2), откуда

$$\binom{**}{*} \quad g_{12}^2 - g_{11}g_{22} = 0.$$

Решая систему, состоящую из уравнений и неравенств (*),(**), $\binom{**}{*}$, находим элементы матрицы G. Она определяется единственным образом с точностью до множителя:

$$G = \begin{Vmatrix} \beta^2 & -\alpha\beta & -\beta \\ -\alpha\beta & \alpha^2 & -\alpha \\ -\beta & -\alpha & 1 \end{Vmatrix}.$$

Тем самым существование и единственность квадрики, удовлетворяющей условиям задачи, доказаны.

231. Найдите уравнение поляры точки $A\ (1 : 2 : 1)$ относительно квадрики $G : -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 = 0$.

Решение. Запишем уравнение поляры данной точки A относительно данной квадрики G в матричной форме $A^{\mathrm{T}}GX = 0$, или

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = 0.$$

Перемножив матрицы в левой части уравнения, получим:

$$3x_1 - x_2 - x_3 = 0.$$

232. Найдите уравнения поляр точек:

а) $A = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$; б) $B = \begin{Vmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{Vmatrix}$; в) $C = \begin{Vmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{Vmatrix}$; г) $D = \begin{Vmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}$

относительно квадрики

$$x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 = 0.$$

Какие из этих точек являются внутренними и какие внешними по отношению к данной квадрике?

Указание. Учтите, что поляра внутренней точки не пересекает квадрику, а внешней — пересекает (см. § 16. 2 и § 16. 4).

233. На прямой $4x_1 + x_2 - x_3 = 0$ найдите точку, гармонически сопряженную с точкой $A\ (-3 : 1 : -3)$ относительно квадрики

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 = 0.$$

Указание. Искомая точка является точкой пересечения поляры точки $A\ (-3 : 1 : -3)$ и данной прямой $4x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

234. На прямой $3x_1 + x_2 - x_3 = 0$ найдите точку, гармонически сопряженную с точкой $A\ (1 : 2 : -1)$ относительно квадрики

$$x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 + 6x_1x_3 = 0.$$

235. Найдите полюс прямой $a\ (0 : -1 : 2)$ относительно квадрики $G : x_2^2 + 4x_1x_3 = 0$.

Решение. *1-й способ.* Пусть $A = \begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Vmatrix}$ — полюс данной прямой $a: -x_2 + 2x_3 = 0$. Тогда уравнение этой прямой можно записать в виде $A^{\text{т}}GX = 0$, или

$$\| a_1 a_2 a_3 \| \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = 0.$$

Перемножая матрицы, получим:

$$2a_3x_1 + a_2x_2 + 2a_1x_3 = 0.$$

Сравнивая с уравнением данной прямой $-x_2 + 2x_3 = 0$, получаем: $2a_3 = 0$, $a_2 = -1$, $2a_1 = 2$. Итак, $A = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix}$.

2-й способ. Координаты полюса находим по формуле $\lambda A = G^{-1}a^{\text{т}}$ (см. § 16. 3), полагая $\lambda = 1$:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

236. Найдите полюсы прямых

а) $x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$;
б) $x_1 = 0$;
в) $x_2 + 3x_3 = 0$

относительно квадрики $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 = 0$.

237. Даны квадрика G и точка $A \notin G$. Пользуясь одной линейкой, постройте поляру точки A.

Указание. Для того чтобы построить поляру точки A, достаточно построить две ее точки B_1 и B_2, каждая из которых гармонически сопряжена с точкой A относительно квадрики (см. § 10. 3). Три способа решения этой задачи указаны в § 16, пример 3.

238. Даны квадрика G и точка A. Через точку A проведены три секущие, пересекающие квадрику в точках X и Y, Z и T, U и V. Построены точки $P = (XT) \cap (ZY)$ и $Q = (ZV) \cap (UT)$. Докажите, что прямая PQ есть поляра точки A.

Указание. См. § 16, пример 3.

239. Даны квадрика G и внешняя точка A. Пользуясь одной линейкой, постройте касательные к квадрике G из точки A.

Указание. См. § 16, пример 4.

240. Найдите уравнения касательных к квадрике $x_1^2 + x_2^2 - 10x_1x_3 = 0$, проведенных из точки $A\ (4:7:1)$.

Решение. *1-й способ.* В соответствии с § 16. 2 уравнение пары касательных к квадрике G имеет вид

$$(A^{\mathrm{T}}GX)^2 - (A^{\mathrm{T}}GA)\ (X^{\mathrm{T}}GX) = 0.$$

Так как

$$G = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A = \begin{Vmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix},$$

то

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{T}}GX &= -x_1 + 7x_2 - 20x_3, \\ A^{\mathrm{T}}GA &= 25, \\ X^{\mathrm{T}}GX &= x_1^2 + x_2^2 - 10x_1x_3. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение пары касательных имеет следующий вид:

$$(-x_1 + 7x_2 - 20x_3)^2 - 25\ (x_1^2 + x_2^2 - 10x_1x_3) = 0$$

или после преобразований

$$12x_1^2 - 12x_2^2 - 200x_3^2 + 7x_1x_2 - 145x_1x_3 + 140x_2x_3 = 0.$$

Осталось разложить левую часть уравнения на множители. Здесь лучше всего воспользоваться способом неопределенных коэффициентов (см. решение задачи 217):

$$(3x_1 + Ax_2 + Bx_3)\ (4x_1 + Cx_2 + Dx_3) = 12x_1^2 - 12x_2^2 - 200x_3^2 + 7x_1x_2 - 145x_1x_3 + 140x_2x_3.$$

Откуда

$$\begin{cases} AC = -12, \\ BD = -200, \\ 3C + 4A = 7, \\ 3D + 4B = -145, \\ AD + BC = 140. \end{cases}$$

Достаточно найти хоть одно решение этой системы, так как разложение многочлена на множители единственно (с точностью до числовых множителей и порядка сомножителей). Решая систему, получаем : $A = 4$, $B = -40$, $C = -3$, $D = 5$. Уравнения касательных имеют следующий вид:

$$3x_1 + 4x_2 - 40 = 0, \quad 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0.$$

2-й способ. Находим точки пересечения данной квадрики с полярой точки A, уравнение которой имеет вид

$$-x_1 + 7x_2 - 20x_3 = 0.$$

Решая систему двух уравнений, получаем две точки пересечения:

$K = \begin{Vmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix}$, $L = \begin{Vmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{Vmatrix}$. В соответствии с § 16.4 K и L — точки касания касательных, проведенных к квадрике через точку A. Поэтому прямые AK и AL — искомые касательные. Так как координаты точек известны, то их уравнения легко находятся:

$$(AK) : 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \quad (AL) : 3x_1 + 4x_2 - 40x_3 = 0.$$

241. Найдите уравнения касательных к квадрике $x_3^2 - x_1x_2 = 0$, проведенных через те из нижеприведенных точек, которые принадлежат квадрике или являются внешними:

а) $A = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$; б) $B = \begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$; в) $C = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Vmatrix}$; г) $D = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

Указание. См. указание к задаче 232.

242. Дана квадрика G и трехвершинник с вершинами A, $B \in G$, $C \notin G$. Пользуясь одной линейкой, постройте трехвершинник, полярный данному.

Указание. Стороны a, b, c полярного трехвершинника — это поляры точек A, B, C (рис. 20).

243. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $(3 : -1 : 1)$ и полюс прямой $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ относительно квадрики $2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 = 0$.

244. Найдите точку пересечения прямой $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$ с полярой точки $(-3 : 1 : 2)$ относительно квадрики $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3 = 0$.

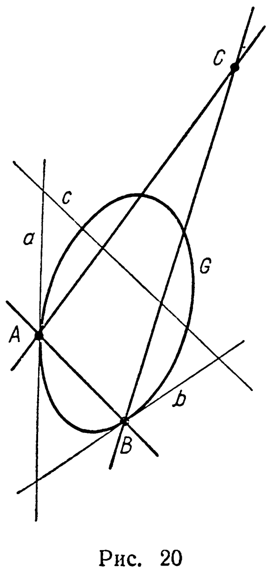

Рис. 20

245. Найдите уравнения поляр a и b точек $A\,(2 : 1 : 0)$ и $B\,(-1 : 1 : 1)$ соответственно, а также поляру точки $C = a \cap b$ относительно квадрики $x_1^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 = 0$; путем непосредственного подсчета убедитесь, что она совпадает с прямой AB.

246. Найдите полюсы A и B прямых $a : x_1 + x_2 + x_3 = 0$ и $b : 2x_1 - x_2 = 0$ соответственно, а также полюс C прямой $c = (AB)$ относительно квадрики $x_1^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 = 0$. Путем непосредственного подсчета убедитесь, что он совпадает с точкой пересечения прямых a и b.

247. На поляре точки $A\,(2 : -1 : -1)$ относительно квадрики $x_1^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 = 0$ возьмите произвольную точку B и найдите точку C такую, чтобы трехвершинник ABC был автополярным относительно данной квадрики (сделайте рисунок).

Указание. Согласно § 16. 5 трехвершинник ABC является автополярным, если A, B, C — полюсы сторон BC, AC и AB соответственно. Для отыскания точки C используйте свойство 1 из § 16. 4.

248. На прямой $a : x_1 - x_2 = 0$ возьмите произвольную точку B и найдите такой автополярный относительно квадрики $2x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_2x_3 = 0$ трехвершинник, чтобы точка B была его вершиной, а прямая a — стороной.

249. Выясните, какие из нижеприведенных пар точек гармонически разделяются квадрикой $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_3 = 0$. В каждом случае гармонического разделения найдите автополярный трехвершинник, двумя вершинами которого являются данные точки A и B:

$$\text{а) } A = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}, \ B = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{Vmatrix}; \quad \text{в) } A = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix}, \ B = \begin{Vmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{Vmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}, \ B = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{Vmatrix}; \quad \text{г) } A = \begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}, \ B = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

250. Выясните, какие из следующих пар прямых могут служить сторонами трехвершинника, автополярного относительно квадрики $x_3^2 - 2x_1x_2 = 0$. Для таких пар найдите третью сторону автополярного трехвершинника:

а) $x_1 - x_2 = 0$ и $x_1 + x_3 = 0$;
б) $x_1 - x_2 = 0$ и $x_1 + x_2 = 0$;
в) $3x_2 + x_3 = 0$ и $x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$.

251. Найдите общий вид уравнений квадрик, относительно которых трехвершинник с вершинами

$$A = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

является автополярным.

Указание. Записав матрицу квадрики в виде

$$\begin{Vmatrix} m & n & p \\ n & q & r \\ p & r & s \end{Vmatrix},$$

найдите уравнения поляр точек A, B, C и сравните их с уравнениями прямых BC, AC, AB соответственно.

§ 15. ТЕОРЕМЫ ПАСКАЛЯ И БРИАНШОНА

Литература: [2], § 17.

252. а) На овальной квадрике даны шесть точек A, B, C, D, E, F. Постройте паскалевы прямые следующих шестивершинников:

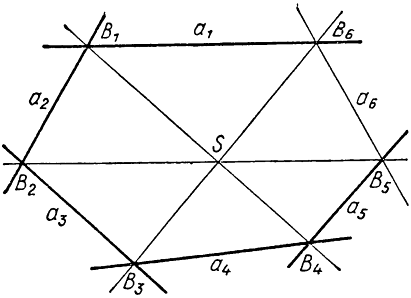

Рис. 21

$ABCDEF$, $DBFECA$,
$ABFDEC$, $FEDCBA$.

б) Даны шесть касательных к овальной квадрике: a, b, c, d, e, f. Постройте точки Брианшона следующих шестисторонников:

$abcdef$, $dbfeca$,
$abfdec$, $fedcba$.

253. Даны пять точек A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 квадрики G, никакие три из которых не коллинеарны. Пользуясь одной линейкой, постройте какую-либо шестую точку квадрики G. Сформулируйте и решите двойственную задачу.

Указание. См. § 17, пример 1.

Двойственная задача получится, если каждую из данных точек заменить ее полярой относительно квадрики G. Эта задача формулируется следующим образом:

Даны пять касательных a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 квадрики G, никакие три из которых не принадлежат одному пучку. Пользуясь одной линейкой, постройте какую-либо шестую касательную квадрики G.

Эта задача решается на основании теоремы Брианшона. Обозначив искомую касательную через a_6, рассмотрим шестисторонник со сторонами a_i, введем также обозначения его вершин: $B_1 = a_1 \cap a_2$, ..., $B_5 = a_5 \cap a_6$, $B_6 = a_6 \cap a_1$ (рис. 21). В нем известны пять сторон a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и четыре вершины B_1, B_2, B_3, B_4. Построение неизвестной стороны $a_6 = (B_5B_6)$ сводится к построению вершин B_5 и B_6.

По теореме Брианшона прямая a_6 касается квадрики G тогда и только тогда, когда прямые B_1B_4, B_2B_5, B_3B_6 пересекаются в одной точке S. Это позволяет, выбрав точку S на прямой B_1B_4 произвольно, найти неизвестные вершины $B_5 = (B_2S) \cap a_5$ и $B_6 = (B_3S) \cap a_1$, а затем построить искомую прямую a_6.

254. Даны пять точек A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 овальной квадрики G. Пользуясь одной линейкой, постройте прямую, касательную к квадрике в одной из данных точек. Сформулируйте и решите двойственную задачу.

Указание. См. § 17, примеры 2 и 3.

255. Даны пять точек A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 овальной квадрики G. Найдите вторую точку пересечения квадрики G с прямой a, проходящей через точку A_1 (рис. 22).

Указание. Искомую точку обозначьте A_6 и рассмотрите шестивершинник Паскаля $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$; прямая a — сторона A_1A_6.

256. Дана дуга MN квадрики G и прямая a, пересекающая дугу MN в точке A. Вторая точка пересечения прямой a с квадрикой G не лежит на дуге MN. Постройте одной линейкой вторую точку пересечения прямой a с квадрикой G.

Указание. Обозначьте $A = A_1$, выберите на дуге MN произвольно точки A_2, A_3, A_4, A_5. Последующий ход решения аналогичен решению задачи 255 (рис. 23).

257. Даны четыре точки A_1, A_2, A_3, A_4 овальной квадрики G и прямая a, касательная к квадрике G в точке A_1. Пользуясь одной линейкой, постройте:

а) касательную в какой-либо из точек A_2, A_3, A_4;

б) какую-либо точку квадрики G, отличную от данных, и касательную в этой точке.

Решение. а) Используем предельный случай теоремы Паскаля для четырехвершинника (см. § 17. 2). Будем считать точки $A_1 = A_6$, $A_4 = A_5$ двойными, тогда $a = (A_1A_6)$, а искомая касательная будет стороной A_4A_5. Построим $P = (A_1A_6) \cap (A_3A_4)$, $Q = (A_2A_3) \cap (A_5A_6)$; тогда (PQ) — паскалева прямая. Находим $R = (PQ) \cap (A_1A_2)$ и $(A_5A_4) = (RA_4)$ (рис. 24).

Указание. б) Используйте предельный случай теоремы Паскаля для пятивершинника. Считая, что $A_1 = A_6$, $a = (A_1A_6)$, A_5 — искомая точка, постройте точку $P = a \cap (A_3A_4)$, произвольную прямую p, проходящую через P. Тогда $Q = (A_1A_2) \cap p$, $R =$

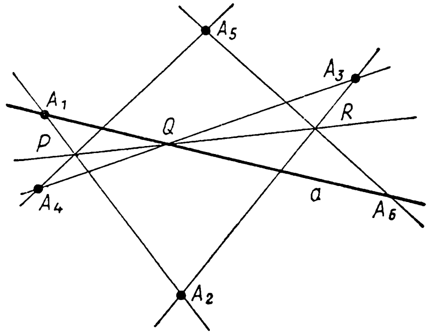

Рис. 22

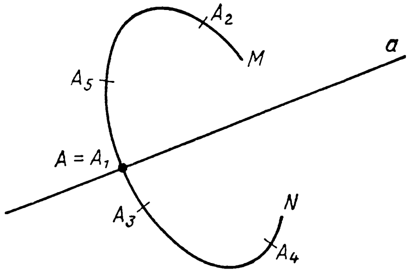

Рис. 23

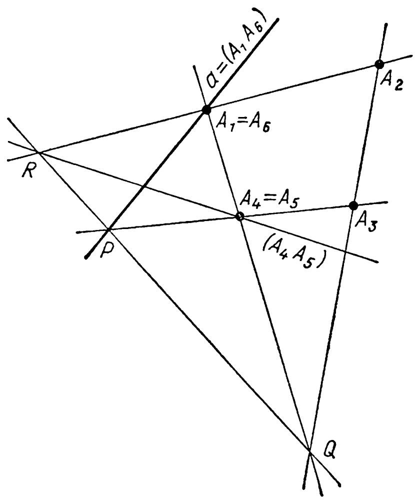

Рис. 24

$(A_2A_3) \cap p$ и $A_5 = (QA_4) \cap (RA_6)$. Для построения касательной используйте решение для случая а) или из § 17 пример 2.

258. Даны три точки овальной квадрики G и две касательные в двух из них. Пользуясь одной линейкой, постройте: а) касательную в третьей точке; б) какую-либо новую точку квадрики G.

Указание. Воспользуйтесь предельными случаями теоремы Паскаля для трехвершинника и четырехвершинника.

259. Даны три касательные овальной квадрики G и точки касания в двух из них. Пользуясь одной линейкой, постройте: а) точку касания третьей касательной; б) новую касательную квадрики G.

Указание. Задача двойственна предыдущей.

260. Докажите, что если два трехвершинника ABC и DEF вписаны в овальную квадрику, то они описаны около некоторой другой квадрики (т. е. существует квадрика, касающаяся всех шести сторон этих трехвершинников).

Указание. Используйте теорему Паскаля для шестивершинника $ABCDEF$ и обратную теорему Брианшона для шестисторонника со сторонами (BC), (CA), (AB), (ED), (DF), (FE) и вершинами C, A, $(AB) \cap (ED)$, D, F, $(BC) \cap (EF)$.

261. Докажите, что если около овальной квадрики описан четырехсторонник $ABCD$, причем X_1, X_2, X_3, X_4 — точки касания прямых AB, BC, CD, DA соответственно, то диагонали AC и BD и прямые X_1X_3 и X_2X_4 пересекаются в одной точке.

Указание. Дважды используйте предельный случай теоремы Брианшона для четырехсторонника $ABCD$, приняв за двойные прямые две противоположные стороны, или предельный случай теоремы Паскаля для четырехвершинников $X_1X_3X_2X_4$ и $X_1X_2X_4X_3$.

§ 16. КВАДРИКИ НА РАСШИРЕННОЙ ЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Литература: [2], § 18.

262. Найдите аффинные классы следующих квадрик, заданных в аффинных координатах на расширенной евклидовой плоскости уравнениями:

а) $x^2 - 6xy + 8y^2 + 2y = 0$,
б) $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$.

Решение. а) Запишем уравнение квадрики в однородных координатах: $x_1^2 - 6x_1x_2 + 8x_2^2 + 2x_2x_3 = 0$. Ранг ее матрицы

$$G = \begin{Vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

равен 3. Значит, квадрика является невырожденной. Для нахождения координат ее несобственных точек решим сначала систему:

$$\begin{cases} x_3 = 0, \\ x_1^2 - 6x_1x_2 + 8x_2^2 + 2x_2x_3 = 0. \end{cases}$$

Получим уравнение $x_1^2 - 6x_1x_2 + 8x_2^2 = 0$, решениями которого будут числа $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)' = 2$ и $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)'' = 4$. Следовательно, квадрика имеет две бесконечно удаленные точки $K_\infty = \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$ и $L_\infty = \begin{Vmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$. Согласно § 18. 1 эта кривая является гиперболой.

б) Решая эту задачу так же, как и предыдущую, находим, что ранг матрицы квадрики равен 3, а несобственных точек она не имеет. Следовательно, данная квадрика — мнимый или действительный эллипс. Чтобы выяснить, какой именно, надо перейти к однородным координатам и определить проективный класс квадрики

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2 = \left(x_1^2 + x_1x_2 + \frac{1}{4}x_2^2\right) - \frac{1}{4}x_2^2 + x_2^2 - x_3^2 =$$

$$= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right)^2 - x_3^2 = 0.$$

После преобразования координат

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{1}{2}x_2, \\ y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_2, \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

получаем:

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0.$$

Квадрика относится к проективному классу овальных квадрик. А так как у нее нет несобственных точек, то кривая является эллипсом.

263. Найдите аффинный класс следующих квадрик, заданных на расширенной евклидовой плоскости в аффинных координатах уравнениями:

а) $2x^2 + 3y^2 - 2xy + 4x + 3y + 4 = 0$;
б) $x^2 + 3y^2 + 4xy + 2x + 2y + 3 = 0$;
в) $x^2 + 2y^2 + 2xy - 1 = 0$;
г) $2x^2 + 4y^2 - 2xy + 14x + 1 = 0$;
д) $x^2 - xy - x - y = 0$;
е) $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 4y + 4 = 0$;
ж) $x^2 - 2xy + 2x - 6y - 3 = 0$.

264. Найдите асимптоты гиперболы из задачи 262.

Р е ш е н и е. Согласно § 18. 4 асимптоты гиперболы являются касательными к ней в несобственных точках K_∞ и L_∞. Их уравнения имеют следующий вид:

$$K_\infty^{\text{т}} GX = 0 \text{ и } L_\infty^{\text{т}} GX = 0.$$

На основании решения задачи 262 имеем:

$$K_\infty = \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \qquad L_\infty = \begin{Vmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Найдем уравнения асимптот:

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = 0$$

и

$$\begin{Vmatrix} 4 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = 0.$$

Перемножая матрицы, получим:

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \text{ и } x_1 - 4x_2 + x_3 = 0.$$

В неоднородных аффинных координатах асимптоты будут иметь следующие уравнения:

$$k : x - 2y - 1 = 0 \text{ и } l : x - 4y + 1 = 0.$$

265. Среди квадрик задачи 263 найдите гиперболы и определите их асимптоты.

266. Найдите центр гиперболы из задачи 262.

Р е ш е н и е. Согласно § 18. 2 центр квадрики — это полюс несобственной прямой $c_\infty : x_3 = 0$. Следовательно, центр C можно найти из соотношения $\lambda C = G^{-1} c_\infty^{\text{т}}$:

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

В неоднородных аффинных координатах $C\,(3;\ 1)$.

З а м е ч а н и е. Центр можно найти и как точку пересечения асимптот, решив систему:

$$\begin{cases} x - 2y - 1 = 0, \\ x - 4y + 1 = 0. \end{cases}$$

267. Среди квадрик задачи 263 найдите эллипсы и гиперболы и определите их центры.

268. Найдите уравнения осей симметрии гипербол из задачи 263, считая, что уравнения кривых даны в прямоугольных декартовых координатах.

Указание. Оси симметрии гиперболы найдите как биссектрисы углов, образованных асимптотами.

269. Среди квадрик задачи 263 найдите параболы и определите их оси.

Указание. На расширенной плоскости найдите несобственную точку P_∞ параболы и какую-либо прямую a, параллельную оси (т. е. какую-либо прямую, проходящую через P_∞). Затем найдите прямую b, перпендикулярную прямой a, и ее несобственную точку Q_∞. Поляра q точки Q_∞ является осью параболы.

270. Найдите оси эллипсов из задачи 263 а), в), г), считая, что уравнения кривых даны в прямоугольных декартовых координатах (см. задачу 267).

Указание. На расширенной плоскости найдите поляру произвольной несобственной точки K_∞ $(a : b : 0)$. Эта поляра будет осью эллипса при таких значениях a и b, при которых она перпендикулярна пучку прямых, проходящих через K_∞.

271. Докажите, что асимптоты гиперболы гармонически разделяют любую пару сопряженных диаметров.

Решение. Пусть K_∞ и L_∞ — несобственные точки гиперболы G, k и l — ее асимптоты, $K_\infty \in k$, $L_\infty \in l$ и $C = k \cap l$ — ее центр (см. рис. 25 а, а также условный рис. 25 б).

Пусть p и q — какая-либо пара сопряженных диаметров гиперболы. Тогда их полюсы P_∞ и Q_∞ находятся на этих диаметрах: $P_\infty \in q$, $Q_\infty \in p$ (см. определение сопряженных диаметров § 18.3). Следовательно, точки P_∞ и Q_∞ гармонически разделены гиперболой, и поэтому $(P_\infty Q_\infty K_\infty L_\infty) = (qpkl) = -1$, что и требовалось доказать.

272. Прямые $y = k_1x$ и $y = k_2x$ являются сопряженными

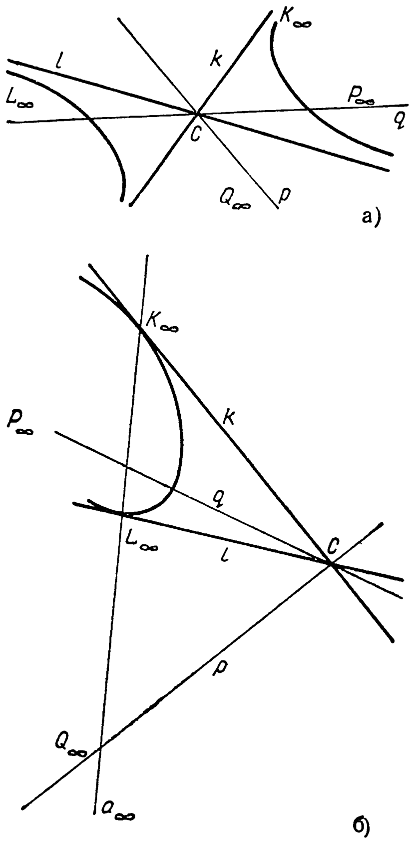

Рис. 25

диаметрами эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Найдите зависимость между k_1 и k_2.

Указание. Несобственная точка каждой из данных прямых является полюсом другой прямой.

273. Прямые $y=k_1x$ и $y=k_2x$ являются сопряженными диаметрами гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Найдите зависимость между k_1 и k_2.

274. Найдите уравнение касательной, проведенной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в его точке $A(x_0;\ y_0)$.

Указание. Запишите уравнение эллипса в однородных координатах и найдите уравнение касательной по формуле $A^{\text{т}}GX=0$.

275. Найдите уравнение касательной, проведенной к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ в ее точке $A\ (x_0;\ y_0)$.

276. Найдите уравнение касательной, проведенной к параболе $y^2=2px$ в ее точке $A\ (x_0;\ y_0)$.

277. Докажите, что отрезок касательной к гиперболе, заключенный между асимптотами, делится точкой касания пополам.

Решение. Пусть A и B — точки пересечения касательной с асимптотами k и l, T — точка касания, q — диаметр, параллельный (AB), и $P_\infty=q\cap(AB)$ (рис. 26). Диаметр p, сопряженный с q, есть поляра точки P_∞. Эта поляра, по свойству 2 из § 16. 4, проходит через точку T.

Согласно задаче 271 $(klpq)=-1$. Следовательно, и $(ABTP_\infty)=-1$, а это значит, что T — середина отрезка AB.

278. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $A\ (1;\ 1)$, если известно, что эллипс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ высекает на ней хорду, которая делится в точке A пополам.

279. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $A\ (2;\ 1)$, если известно, что парабола $y^2=2px$ отсекает от нее хорду, которая делится в точке A пополам.

Указание. Искомая хорда проходит через полюс прямой $y=1$.

280. Найдите уравнения касательных к эллипсу $x^2+\frac{y^2}{4}=1$, параллельных прямой $x-2y+1=0$.

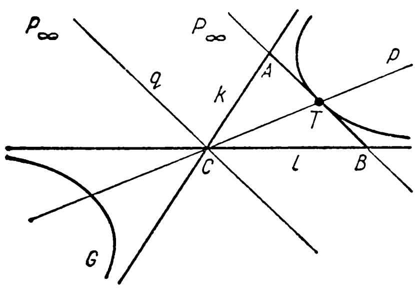

Рис. 26

281. Докажите, что директрисы эллипса, гиперболы и параболы являются полярами соответствующих фокусов.

282. Докажите,что точки A_i из задач 55 а), б) лежат на одной квадрике и что утверждение, содержащееся в этих задачах, следует из теоремы Паскаля.

283. Докажите, что утверждения, содержащиеся в задачах 56 а), б), следуют из теоремы Паскаля.

284. Докажите, что утверждения, содержащиеся в задачах 57 а), б), следуют из теоремы Паскаля.

285. Докажите, что все прямые из задачи 58 а) касаются квадрики $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ и что утверждение этой задачи следует из теоремы Брианшона.

286. Докажите, что все прямые из задачи 58 б) касаются квадрики $2x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 = 0$ и что утверждение этой задачи следует из теоремы Брианшона.

287. На расширенной евклидовой плоскости даны пять точек овальной квадрики, причем одна из этих точек несобственная. Постройте:

а) какую-либо шестую точку квадрики;

б) касательную к квадрике в одной из данных собственных точек.

Если квадрика, определяемая данными пятью точками, является гиперболой, то постройте:

в) касательную в несобственной точке;

г) вторую несобственную точку;

д) центр гиперболы.

Указание. Во всех случаях воспользуйтесь теоремой Паскаля.

а) См. задачу 253. Учтите, что несобственная точка задается на чертеже при помощи собственной прямой, на которой она находится (см. § 5. 4).

г) Искомая точка находится на несобственной прямой и, следовательно, является точкой пересечения этой прямой с квадрикой (см. задачу 255).

д) Центр гиперболы может быть построен как точка пересечения ее асимптот.

288. На евклидовой плоскости даны две пересекающиеся прямые, параллельные асимптотам некоторой гиперболы, и три принадлежащие ей точки. Постройте:

а) какую-либо четвертую точку гиперболы;

б) асимптоты гиперболы и ее центр.

289. На евклидовой плоскости даны асимптоты гиперболы и принадлежащая ей точка. Постройте касательную к гиперболе в этой точке.

Указание. Несобственные точки асимптот и данную точку считайте двойными вершинами шестивершинника Паскаля.

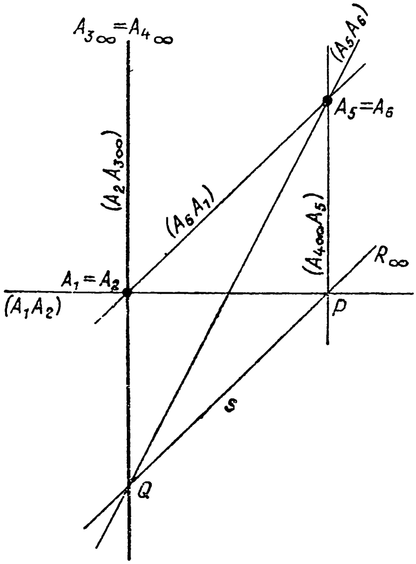

Рис. 27

290. Решите задачу 277 на основании построения, используемого в задаче 289.

291. На евклидовой плоскости даны асимптоты гиперболы и касательная к ней. Постройте точку касания.

Указание. Асимптоты и данную касательную считайте двойными сторонами шестивершинника Брианшона.

292. Решите задачу 277 на основании построения, используемого в задаче 291.

293. На евклидовой плоскости даны ось, вершина и еще одна точка параболы. Постройте касательную к параболе в этой точке.

Решение. Касательная к параболе в ее вершине известна: это перпендикуляр к оси, поэтому вершину параболы считаем двойной вершиной шестивершинника Паскаля и обозначаем ее двумя буквами A_1 и A_2. Касательная в этой точке будет стороной A_1A_2 шестивершинника (рис. 27).

Касательная к параболе в несобственной точке (несобственной точкой параболы является несобственная точка ее оси, см. § 7. 4) тоже известна: это несобственная прямая, поэтому несобственную точку параболы также считаем двойной вершиной шестивершинника Паскаля и обозначаем ее двумя буквами $A_{3\infty}$ и $A_{4\infty}$. Сторона $A_{3\infty}A_{4\infty}$ шестивершинника является несобственной прямой.

Данную точку также обозначаем двумя буквами A_5 и A_6. Сторона шестивершинника A_5A_6 — искомая касательная. Таким образом, в предельном шестивершиннике Паскаля известны все вершины и пять сторон, шестая — искомая.

По точкам $P = (A_1A_2) \cap (A_{4\infty}A_5)$ и $R_\infty = (A_{3\infty}A_{4\infty}) \cap (A_6A_1)$ (точка R несобственная, так как прямая $A_{3\infty}A_{4\infty}$ несобственная) строим паскалеву прямую $s = (PR_\infty)$. Далее находим точку $Q = (A_2A_{3\infty}) \cap s$, где $(A_2A_{3\infty})$ — ось параболы. Пользуясь тем, что $Q = (A_2A_{3\infty}) \cap (A_5A_6)$, строим искомую прямую A_5A_6, она проходит через данную точку и точку Q.

294. Пусть A — точка пересечения касательной, проведенной к параболе в точке T, с осью параболы, а T_1 — ортогональная проекция точки касания T на ось. Докажите, что вершина параболы находится в середине отрезка AT_1.

Указание. Воспользуйтесь построением, используемым в задаче 293.

295. Даны четыре касательные к параболе. Постройте точку касания какой-либо из них.

Указание. Пятая касательная — несобственная прямая.

296. Даны три точки параболы и прямая, параллельная оси. Постройте касательную в какой-либо из данных точек.

Указание. Несобственную точку параболы, заданную при помощи данной прямой, рассматривайте как двойную вершину паскалева предельного шестивершинника.

297. Даны ось и две точки параболы, не симметричные относительно оси. Постройте вершину параболы.

Указание. Ось пересекает параболу в несобственной точке и в вершине. С учетом этого воспользуйтесь построением, используемым в задаче 255.

298. Даны три точки параболы и прямая, параллельная ее оси. Постройте ось и вершину параболы.

Указание. Через одну из данных точек A проведите прямую a, перпендикулярную оси (т. е. данной прямой), и найдите вторую точку пересечения прямой a с параболой. Ось проходит через середину отрезка AB. Далее см. указание к задаче 297.

Если две из трех данных точек лежат на прямой, перпендикулярной к данной прямой, то решение упрощается.

ОТВЕТЫ

2. $A\,(0{:}\ 1)_R$, $B\,(1{:}\ -1)_R$, $C\,(2{:}\ 7)_R$, $D\,(1{:}\ -1)_{R'}$, $E\,(0{:}\ 1)_{R'}$, $F\,(-3{:}\ 1)_{R'}$.
3. а) $\begin{cases}\lambda x_1 = x_1' - 2x_2',\\ \lambda x_2 = 2x_1' + x_2';\end{cases}$ в) $\begin{cases}\lambda x_1 = x_1',\\ \lambda x_2 = 2x_2';\end{cases}$

б) $\begin{cases}\lambda x_1 = x_1' + x_2',\\ \lambda x_2 = 2x_2';\end{cases}$ г) $\begin{cases}\lambda x_1 = x_1' - x_2',\\ \lambda x_2 = x_1' + x_2'.\end{cases}$

4. $A\,(1)$, $B\left(\frac{2}{3}\right)$, $C\left(-\frac{3}{5}\right)$, $E(0)$. Точка D несобственная, и потому она не имеет неоднородной координаты. **5.** $A\,(2{:}\ 1)^R$, $B\,(1{:}\ 3)_R$, $C\,(1 : -1)_R$. **6.** $A\,(3{:}\ -1)$, $B\,(2{:}\ -1)$, $C\,(1{:}\ -3)$, $D\,(1{:}\ -2)$, $K_\infty\,(1{:}\ -1)$. **8.** а) 4; б) $-\frac{5}{3}$; в) -4; г) ∞; д) 1; е) 0. **9.** а) $D\,(5{:}\ 1)$; б) $D\,(1{:}\ 2)$; в) $D\,(1{:}\ 0)$; г) $A\,(3{:}\ 2)$; д) $B\,(3{:}\ -1)$; е) $C\,(1{:}3)$. **13.** $A, B \div C, D$ в случаях б), в); $A, B \doteq C, D$ в случаях а), д); в случаях г), е) отношение разделенности не имеет смысла. **14.** $A, D \div B, C$. **15.** $(DCAB) = (BACD) = (ADBC) = \frac{1}{2}$, $(DBCA) = (CABD) = -1$. **16.** $(ADBC) = \frac{3}{7}$, $(BADC) = (ABCD) = 1\frac{3}{4}$. **17.** а), б) $D\,(-3{:}\ 4)$; в), г) $D\,(9{:}\ -2)$. **18.** Можно, так как $(ACBD) = -1$. **19.** $X\,(1{:}-2)$, $Y\,(1{:}\ 1)$. **22.** а) $6\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $12\frac{3}{8}$. **23.** $\frac{c-a}{b-c} : \frac{d-a}{b-d}$. **24.** а), б) $-\frac{1}{3}$; в) 4. **25.** а) $\frac{a-c}{b-c}$; б) $\frac{b-c}{a-c}$; в) $\frac{b-a}{b-c}$. **26.** $\frac{q}{p}$. **37.** $9x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0$. **38.** а) $x_3 = 0$; б) $2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0$; в) $x_1 + x_3 = 0$. **40.** $4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$. **42.** $(12 : 38 : 9)$. **43.** $(14 : 6 : -1)$. **44.** $(64 : 5 : 50)$. **45.** а) $(-3 : 14 : 8)$; б) $(3 : -2 : 1)$. **46.** $3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0$. **47.** $42x_1 + 9x_2 - 8x_3 = 0$. **48.** $3x_1 + 13x_2 - 5x_3 = 0$. **49.** $x_1 - x_2 - x_3 = 0$. **50.** $17x_1 + 17x_2 + 11x_3 = 0$. **51.** $P\,(5 : 2 : 6)$, $Q\,(1 : 1 : -3)$, $R\,(1 : 2 : 0)$; $(PQ) : 4x_1 - 7x_2 - x_3 = 0$; $(QR) : 6x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$; (RP): $6x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0$. **52.** $(AC) : 5x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0$; $(BD) : x_1 + 2x_2 = 0$; $P\,(1 : 2 : 1)$, $Q\,(-6 : 3 : 4)$, $R\,(1 : -1 : 0)$. **53.** $x_2 + x_3 = 0$. **54.** $(1 : 1 : 1)$. **65.** $\begin{cases}\mu x_1 = x_1' - x_2' - x_3',\\ \mu x_2 = x_1' - x_2' - x_3',\\ \mu x_3 = 2x_3'.\end{cases}$

66. $M\,(-2 : 0 : 1)$, $N\,(0 : -1 : 1)$. **67.** а) $x_1' + x_3' = 0$ в R'; б) $4x_1 + 5x_2 - 6x_3 =$

$= 0$ в R. **68.** а) $\begin{cases} \mu x_1 = x_1' - x_3', \\ \mu x_2 = x_1' - x_2', \\ \mu x_3 = x_1'; \end{cases}$ б) $A\ (5:4:4)$; в) $B\ (3:4:1)$; г) $3x_1' - x_2' - x_3' = 0$; д) $x_1 + x_2 = 0$. **69.** $O\ (0:0:1)$, $A\ (1:0:1)$, $B\ (0:1:1)$, $C\ (2:5:1)$, $D\ (-3:1:1)$, $E\ (4:-2:1)$, $F\ (-1:5:1)$. **70.** $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$, $x_1 + x_2 - 5x_3 = 0$, $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$. **71.** $x_3 = 0$. **73.** $(0:1:0)$, $(1:0:0)$, $(2:-3:0)$, $(1:1:0)$. **74.** $6x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0$. **75.** $x_3 = 0$. **76.** Гипербола или пара пересекающихся прямых. **77.** а) Эллипс, мнимый эллипс или пара мнимых пересекающихся прямых; б) гипербола или пара пересекающихся прямых; в) парабола или пара параллельных прямых (вещественных или мнимых); г) парабола или пара параллельных прямых (вещественных или мнимых). **78.** $(1:1:0)$. **79.** $(0:1:1)$. **80.** $A\ (0:0:1)$, $B\ (1:0:-2)$, $C\ (2:1:-2)$. **81.** а) $(1:3:2)$; б) $(2:1:-1)$; в) $(1:1:0)$. **82.** $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$. **83.** а) $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 8x_3^2 = 0$; б) $(1:1:0)$; в) $(1; 1)$; г) $(1; 1)$, $x = y$. **84.** а) $2x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + x_2x_3 = 0$; б) $(1:-1:0)$ и $(1:-2:0)$; в) $(1; -1)$ и $(1; -2)$; г) $x + y - 3 = 0$; $2x + y + 4 = 0$; $(-7; 10)$. **85.** $8x_1'^2 - 2x_2'^2 - x_3'^2 = 0$. **105.** $(ABCD) = -1$, $(DBCA) = 2$. **106.** $(ABCD) = (DCBA) = 2$, $(ACBD) = -1$, $(ADBC) = \frac{1}{2}$. **107.** $(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = -1\frac{1}{3}$, $(ACDB) = (CABD) = \frac{3}{7}$, $(ADBC) = \frac{7}{4}$; $(ADCB) = (CBAD) = \frac{4}{7}$, $(ABDC) = -\frac{3}{4}$, $(ACBD) = 2\frac{1}{3}$. **108.** а) $(abcd) = (dcba) = 2$; $(adbc) = \frac{1}{2}$; б) $(abcd) = (dcba) = 1\frac{1}{5}$; $(adbc) = \frac{1}{6}$. **111.** $d\ (-1:1:4)$. **112.** $(abcd) = 1\frac{1}{5}$. **113.** а) $3x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0$; б) $13x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0$; в) $7x_1 - 2x_3 = 0$. **114.** а), б) $D(3:-1:1)$; в), г) $D\ (0:-2:5)$. **115.** а) $D\ (11:-4:1)$; б) $D\ (4:1:2)$; в) $D\ (59:-10:13)$, г) $D\ (29:-4:7)$. **116.** $4! = 24$.

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = \alpha;$$
$$(ACBD) = (CADB) = (BDAC) = (DBCA) = 1 - \alpha;$$
$$(ADCB) = (DABC) = (CBAD) = (BCDA) = \frac{\alpha}{\alpha - 1},$$
$$(ADBC) = (DACB) = (BCAD) = (CBDA) = 1 - \frac{1}{\alpha},$$
$$(ABDC) = (BACD) = (DCAB) = (CDBA) = \frac{1}{\alpha},$$
$$(ACDB) = (CABD) = (DBAC) = (BDCA) = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

118. A, $C \div B$, D. **120.** $(DBCA) = 2$. **121.** а) $(CABD) = -\frac{1}{2}$; б) $(DBCA) = (CADB) = 3$, $(CABD) = \frac{1}{3}$, $(ADBC) = \frac{3}{2}$, $(CBAD) = \frac{2}{3}$; в) $(DBCA) = (CADB) = (ADBC) = 2$, $(CABD) = (CBAD) = \frac{1}{2}$. **123.** 21 или $\frac{1}{21}$ в зависимости от обозначений несобственных точек гиперболы. **124.** См. ответ к задаче 68 в). **125.** См. ответ к задаче 68 а). **127.** $(ABCD) = (DCBA) = \frac{1}{3}$, $(ACBD) = \frac{2}{3}$. **131.** а) Диагональные точки $(0; 1)$, $(0; -1)$ и несобственная точка оси абсцисс с однородными координатами $(1:0:0)$. Диагонали $y = 1$, $y = -1$, $x = 0$; б) $(0; 0)$, $(1; 1)$ и точка с однородными координатами $(1:-1:0)$. **136.** Прямая пучка, перпендикулярная прямой c. **145.** а) $\varphi(U)=\begin{Vmatrix}5\\-7\\4\end{Vmatrix}$, $\varphi^{-1}(V')=\begin{Vmatrix}1\\-5\\1\end{Vmatrix}$; б) $\varphi(U)=$ $=\begin{Vmatrix}7\\-11\\8\end{Vmatrix}$, $\varphi^{-1}(V')=\begin{Vmatrix}0\\1\\0\end{Vmatrix}$; в) $\varphi(U)=\begin{Vmatrix}-2\\1\\2\end{Vmatrix}$, $\varphi^{-1}(V')=\begin{Vmatrix}1\\0\\1\end{Vmatrix}$. **146.** $\varphi(X)=$ $=\begin{Vmatrix}7\\-17\\20\end{Vmatrix}$, $\varphi^{-1}(X)=\begin{Vmatrix}1\\-8\\1\end{Vmatrix}$. **147.** $(0:1:0)$. **148.** а) $U'(3:-1:-1)$, $V(1:0:-3)$; б) $U'(3:2:5)$, $V(4:0:3)$; в) $U'=V=U=V'$ $(3:0:1)$.

153. а) $\begin{cases}\lambda x_1'=2x_1-x_2,\\ \lambda x_2'=x_1+x_2;\end{cases}$ в) $\begin{cases}\lambda x_1'=x_1+x_2,\\ \lambda x_2'=x_1-x_2;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\lambda x_1'=x_1+x_2,\\ \lambda x_2'=x_1;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\lambda x_1'=x_1+2x_2,\\ \lambda x_2'=x_1-x_2.\end{cases}$

155. а) $(1:2)$, $(1:-1)$; б) $(1:-1)$, $(1:1)$; в) $(1:(2-\sqrt{3}))$, $(1:(2+\sqrt{3}))$; г) неподвижных точек нет. **156.** а), б) Не инволюции; в) гиперболическая инволюция; г) эллиптическая инволюция.

157. а) Не инволюция, так как $C\to C'$, $C'\to B'$ и $C\neq B'$;
б) не инволюция, так как $A\to A'$, $A'\to C'$ и $A\neq C'$;
в) инволюция, так как $B\to B'$, $B'\to B$.

158. а) $\begin{cases}\lambda x_1'=-2x_1-3x_2,\\ \lambda x_2'=x_1+2x_2;\end{cases}$ гиперболическая инволюция;

б) $\begin{cases}\lambda x_1'=x_1-2x_2,\\ \lambda x_2'=-x_1-x_2;\end{cases}$ гиперболическая инволюция;

в) $\begin{cases}\lambda x_1'=x_1-x_2,\\ \lambda x_2'=2x_1-x_2;\end{cases}$ эллиптическая инволюция;

г) $\begin{cases}\lambda x_1'=x_1+x_2,\\ \lambda x_2'=x_1-x_2;\end{cases}$ гиперболическая инволюция.

160. а) $\begin{cases}\lambda x_1'=-2x_1-3x_2,\\ \lambda x_2'=x_1+2x_2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\lambda x_1'=x_2,\\ \lambda x_2'=x_1.\end{cases}$ **161.** При $a>\sqrt{2}$ — гиперболическая инволюция, при $a<\sqrt{2}$ — эллиптическая инволюция. **171.** а) $A'(1:2:-2)$, $B'(2:3:0)$, $C'(0:-1:1)$; б) $D(10:-5:11)$, $E(0:0:1)$, $H(1:0:3)$; в) $a': 2x_1-3x_2-2x_3=0$, $b': x_3=0$, $c': 2x_1-x_2-x_3=0$; г) $l: 2x_1+$ $+3x_2=0$, $m: x_1+2x_2=0$; д) $5x_1^2+4x_2^2+x_3^2-8x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3=0$; е) $2x_1^2-3x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_3-4x_2x_3=0$.

174. а) $\begin{cases}\lambda x_1'=3x_2,\\ \lambda x_2'=3x_3,\\ \lambda x_3'=9x_1-4x_2-8x_3;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\lambda x_1'=x_2+x_3,\\ \lambda x_2'=-x_3,\\ \lambda x_3'=-x_1.\end{cases}$

175. $\begin{cases}\lambda x_1'=18x_1-4x_2-14x_3,\\ \lambda x_2'=-4x_2+4x_3,\\ \lambda x_3'=-6x_1-2x_2-x_3.\end{cases}$ **176.** $\begin{cases}\lambda x_1'=ax_1,\\ \lambda x_2'=bx_2,\\ \lambda x_3'=cx_3.\end{cases}$ **178.** а) Точка $(1:1:-1)$; б) точка $(1:-1:0)$ и все точки прямой $x_1-x_2=0$; в) точка $(2:0:1)$ и все точки прямой $x_1=0$; г) все точки прямой $x_1+x_3=0$. **180.** а) $2x_1-$ $-x_2+x_3=0$; б) прямая $x_1-x_2=0$ и все прямые пучка с центром в точке $(1:-1:0)$; в) прямая $x_1=0$ и все прямые пучка с центром в точке $(2:0:1)$; г) все прямые пучка с центром в точке $(1:1:-1)$.

190. а) $x_2+x_3=0$, $2x_1-x_2=0$; б) $x_1-x_2=0$, $x_2=0$; в) $4x_1-5x_3=0$, $4x_1+11x_2+4x_3=0$; г) $2x_1-x_2-x_3=0$, $x_1+5x_2+3x_3=0$;

192. а) $(x+y+1)^2+(7x+4y+3)^2=(2x+y+1)^2$;
б) $x^2+(x+y)(2x+y+1)=0$; г) $4x^2+(x+y)^2=(2x+y+1)^2$;
в) $x^2-(x+y)^2=(2x+y+1)^2$; д) $x^2-4(x+y)^2=0$.

193. Гипербола с асимптотами (AC) и (BD), K — внутренняя точка гиперболы. **194.** Парабола. **196.** Гиперболическая гомология, если прямая AA' содержит одну и только одну вершину трехвершинника PQR. **197.** а) Не гомология; б) гиперболическая гомология с осью $x_1-x_2=0$, центром $(1:-1:0)$ и константой $\frac{1}{2}$; в) инволюционная гомология с осью $x_1=0$ и центром $(2:0:1)$; г) параболическая гомология с осью $x_1+x_3=0$ и центром $(1:1:-1)$. **198.** $\begin{cases}\lambda x_1'=x_1,\\ \lambda x_2'=x_2,\\ \lambda x_3'=3x_3.\end{cases}$

214. а — д) овальная квадрика $x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2=0$; е) пара совпавших прямых $x_1'^2=0$; ж) пара пересекающихся прямых $x_1'^2-x_2'^2=0$.

216. а) $3x_1'x_2'-x_1'x_3'-5x_2'x_3'=0$; б) $x_1'^2+x_2'x_3'=0$; в) $x_1'(x_1'+3x_2'+5x_3')=0$.

218. а) $(\sqrt{5}x_1+(\sqrt{5}-\sqrt{2})x_2+\sqrt{2}\,x_3)(\sqrt{5}x_1+(\sqrt{5}+\sqrt{2})x_2-\sqrt{2}\,x_3)$;
б) $(2x_1-x_2+3x_3)^2$; в) $(x_1+x_2i+(-2+i)x_3)(x_1-x_2i+(-2-i)x_3)$.

222. а) Не пересекаются; б) $(1:0:1)$, $(0:1:1)$; в) не пересекаются; г) $(3:4:5)$, $(4:3:-5)$. **224.** а) $x_2=0$; б) $x_1+7x_2-3x_3=0$; в) $x_1-x_2+5x_3=0$.

226. $x_2^2-x_1x_3=0$. **227.** $x_1^2+x_2^2-2x_1x_2-2x_1x_3+x_2x_3=0$. **232.** а) $x_1+x_2+2x_3=0$, точка внешняя; б) $7x_2+8x_3=0$, точка внешняя; в) $4x_1-x_2-4x_3=0$, точка внешняя; г) $x_2=0$, точка внутренняя. **233.** $(1:-4:0)$. **234.** $(9:-8:19)$. **236.** а) $(2:-3:1)$; б) $(1:0:0)$; в) $(0:2:-1)$.

241. а) $x_1=0$, $x_2=0$; б) $x_2=0$, $x_1+x_2-2x_3=0$; в) $x_1+x_2+2x_3=0$; г) точка D внутренняя.

243. $x_1+7x_2+4x_3=0$. **244.** $(2:9:13)$. **245.** $a: 2x_1+x_2-x_3=0$; $b: x_1+x_3=0$; $c: x_1-2x_2+3x_3=0$. **246.** $A(1:2:1)$, $B(-2:1:1)$, $C(1:2:-3)$. **249.** а) Не сопряжены, так как точка B принадлежит квадрике; б) не сопряжены; в) третья вершина $(1:2:0)$; г) третья вершина $(1:1:-2)$. **250.** а) Не могут; б) третья сторона $x_3=0$; в) третья сторона $x_1+8x_2+3x_3=0$. **251.** $mx_1^2+(6n-8m)x_2^2+sx_3^2+2nx_1x_2+2mx_1x_3+2nx_2x_3$, где $n\neq 2m$, $n\neq 4m$, $s\neq m$. **263.** а) Эллипс; б) гипербола; в) эллипс; г) эллипс; д) гипербола; е) парабола; ж) пара прямых. **265.** б) $x+y=0$, $x+3y+2=0$; д) $x+1=0$, $x-y-2=0$. **267.** а) $\left(-1\frac{1}{2};\ -1\right)$; б) $(1;\ -1)$; в) $(0;\ 0)$; г) $(-4;\ -1)$; д) $(-1;\ -3)$.

268. б) $(1+\sqrt{5})x+(3+\sqrt{5})y+2=0$; $(1-\sqrt{5})x+(3-\sqrt{5})y+2=0$;
д) $(\sqrt{2}-1)x+y+2+\sqrt{2}=0$; $(\sqrt{2}+1)x-y-2+\sqrt{2}=0$.

269. е) $2x-2y+3=0$.

270. а) $2(1+\sqrt{5})x+4y+7+3\sqrt{5}=0$, $2(1-\sqrt{5})x+4y+7-3\sqrt{5}=0$,
в) $(1+\sqrt{5})x-2y=0$, $(1-\sqrt{5})x-2y=0$,
г) $(1+\sqrt{2})x+y+5+4\sqrt{2}=0$, $(1-\sqrt{2})x+y+5-4\sqrt{2}=0$,
д) $(\sqrt{2}+1)x-y+\sqrt{2}-2=0$, $(\sqrt{2}-1)x+y+\sqrt{2}+2=0$.

272. $k_1k_2=-\frac{b^2}{a^2}$. **273.** $k_1k_2=\frac{b^2}{a^2}$. **274.** $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$. **275.** $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

276. $yy_0=p(x+x_0)$. **278.** $4x+9y-13=0$. **279.** $px-y-(2p-1)=0$.

280. $x-2y+\sqrt{17}=0$, $x-2y-\sqrt{17}=0$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

15 коп.