ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
ВЫСШИХ и СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В. Н. ЛИТВИНЕНКО

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ПРОСВЕЩЕНИЕ • 1964

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

Московский государственный заочный педагогический институт

В. Н. ЛИТВИНЕНКО

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
Москва 1964

СОДЕРЖАНИЕ

Виктор Николаевич Литвиненко

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ
ПО НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Редакторы *Н. Т. Цветков* и *З. А. Родионова*
Художественный редактор *В. С. Эрденко*
Технический редактор *М. И. Смирнова*
Корректор *Р. К. Куркина*

Сдано в набор 21/XI 1963 г. Подписано к печати 19/III 1964 г. $84\times108^1/_{32}$. Печ. л. 4,25 (3,48). Уч.-изд. л. 3,21. Тираж 10 тыс. экз. (Тем. план 1964 г. № 1323). Заказ № 467.

Издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по печати. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский полиграфический комбинат Государственного комитета Совета Министров РСФСР по печати, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Цена 10 коп.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задачник-практикум по начертательной геометрии предназначен для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов.

Цель задачника — помочь студенту в усвоении практической части курса начертательной геометрии, научить его специфическим методам решения задач на построение и привить определенные навыки при построении чертежей.

В сборнике помещено минимальное число задач, которые должен прорешать студент при прохождении курса. Примерно одна пятая часть всех задач снабжена подробными решениями, ряд задач имеет указания к решению.

В начале каждого параграфа указана литература, которую студент должен изучить, прежде чем приступит к решению задач.

Решая задачу, следует самостоятельно попытаться найти решение, затем, если можно, сравнить свое решение с тем, которое имеется в сборнике. Если же после попытки решить задачу встретятся непреодолимые трудности, а задача окажется без решения и указаний, то следует еще раз возвратиться к литературе, которая указана в начале параграфа, или обратиться за консультацией к преподавателю института.

Известно, что одна и та же задача по начертательной геометрии, да и вообще по математике, часто допускает различные способы решения, и поэтому применение того или иного метода является часто условным.

Автор избегал включать в задачник-практикум сложные и искусственные задачи.

При составлении настоящего задачника автором использована следующая литература:

[1] Панкратов А. А., Начертательная геометрия, Учпедгиз, 1959.

[2] Четверухин Н. Ф., Изображения фигур в курсе геометрии, Учпедгиз, 1958.
[3] Глаголев Н. А., Начертательная геометрия, Гостехиздат, 1953.
[4] Бабушкин Л. И., Учебно-методическое пособие и контрольные работы по начертательной геометрии, Учпедгиз, 1958.
[5] Скопец З. А., Жаров Б. А., Задачи и теоремы по геометрии, Учпедгиз, 1962.
[6] Гуревич Г. Б., Проективная геометрия, Физматгиз, 1960.
[7] Рыбкин Н., Сборник задач по геометрии, Учпедгиз, 1962.
[8] Лидский В. Б., Овсянников Л. В., Тулайков А. Н., Шабунин М. И., Задачи по элементарной математике, Физматгиз, 1962.
[9] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М., Избранные задачи и теоремы элементарной математики, часть III, Гостехиздат, 1954.

Первые четыре из девяти перечисленных книг рекомендуются студенту при изучении курса начертательной геометрии. Ряд задач составлен автором.

Здесь не приведен список обязательных задач, так как каждый преподаватель может это сделать сам в зависимости от конкретных условий.

Автор считает своим долгом выразить глубокую благодарность доцентам Бабушкину Л. И. и Шоластеру Н. Н. за полезные советы.

Все пожелания и замечания просьба направлять по адресу: Москва, К-25, площадь Революции, д. $^3/_1$, МГЗПИ, научно-издательская часть.

Автор

Часть I

МЕТОД ПРОЕКЦИЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

I. ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ

§ 1. Центральное проектирование в расширенном евклидовом пространстве

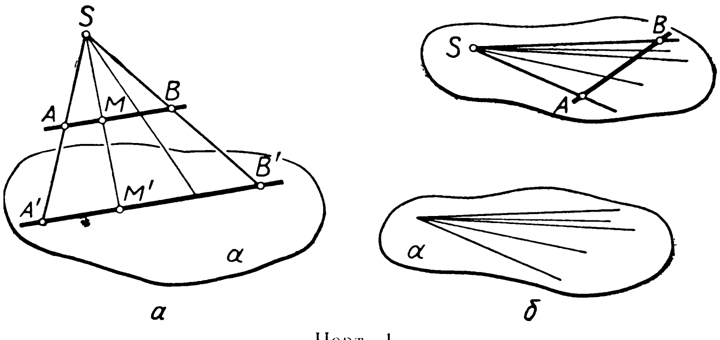
Перед решением задач этого параграфа рекомендуется изучить соответствующий материал по одной из следующих книг:

[1] гл. I, § 1; [2] гл. II, § 3; [3] гл. I, § 3, 4; [4] гл. I, § 1.

1. Какие фигуры могут быть образами отрезка AB в евклидовом пространстве, если спроектировать его из точки S, не лежащей на прямой AB, на плоскость α, не проходящую ни через точку S, ни через прямую AB?

Решение. Очевидно, при указанном способе проектирования могут представиться два случая, а именно, когда $AB \parallel \alpha$ и когда $AB \nparallel \alpha$.

Случай 1. $AB \parallel \alpha$. Прямая AB и точка S определяют некоторую плоскость SAB.



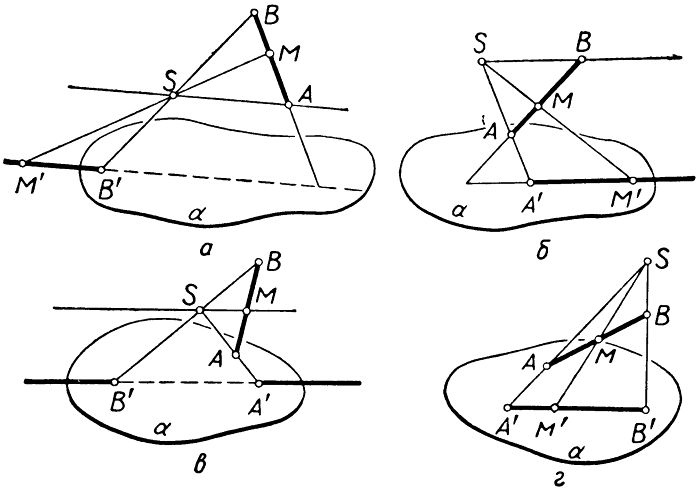
Черт. 1.

а) Если плоскость SAB пересекает плоскость α (черт. 1, *а*), то образом отрезка AB будет отрезок $A'B'$, принадлежащий плоскости α. Действительно, так как $AB \parallel \alpha$, то AB параллелен линии пересечения плоскостей SAB и α, а так как точка S не лежит на прямой AB, то $SA \nparallel AB$, и, следовательно, SA не параллельна линии пересечения плоскостей SAB и α, т. е. SA пересекает плоскость α в некоторой точке A', которая и будет образом точки A.

Аналогично получим M' — образ текущей точки M отрезка AB и точки B'. Таким образом, отрезок AB проектируется в отрезок $A'B'$.

б) Если же плоскость SAB параллельна плоскости α (черт. 1, *б*), то образа отрезка AB не существует.

Случай 2. $AB \nparallel \alpha$. Пусть точка M — некоторая точка отрезка AB.



Черт. 2.

а) Если $SA \parallel \alpha$ (черт. 2, *а*), то точки A' не существует и отрезок AB проектируется в луч с началом в точке B'.

б) Если $SB \parallel \alpha$ (черт. 2, *б*), то получаем случай, аналогичный приведенному на чертеже 2, *а*. Только теперь началом луча, в который проектируется отрезок AB, будет точка A'.

в) Если $SM \parallel \alpha$ (черт. 2, *в*), то точки A' и B' существуют, но точка M' не существует. Следовательно, отрезок AB проектируется в ту часть прямой $A'B'$, которая не содержит точек отрезка $A'B'$, другими словами, отрезок AB проектируется в совокупность двух лучей, лежащих на одной прямой, но не имеющих общих точек. Начало одного из этих лучей — точка A', другого — точка B'.

г) Если $SA \nparallel \alpha$, $SM \nparallel \alpha$, $SB \nparallel \alpha$ (черт. 2, *г*), то образом отрезка AB будет отрезок $A'B'$.

Обобщая все возможные случаи, видим, что отрезок AB может спроектироваться в отрезок $A'B'$, в луч с началом в точке A' или в точке B', в совокупность двух лучей, принадлежащих одной прямой и не имеющих общих точек, причем точка A' — начало одного луча, точка B' — другого, и, наконец, образа отрезка AB может не быть вообще.

2. Какие фигуры могут быть получены при центральном проектировании в евклидовом пространстве двух пересекающихся прямых, если центр проектирования не лежит в плоскости, определяемой данными пересекающимися прямыми и ни одна из данных прямых не лежит в плоскости проекций α?

3. Какие фигуры могут быть получены при центральном проектировании в евклидовом пространстве:

1) луча, 2) угла, 3) треугольника, 4) параллелограмма, 5) квадрата, 6) окружности, 7) эллипса, 8) параболы, 9) гиперболы, если центр проектирования не лежит на прямой, содержащей луч, а также не лежит в плоскости, содержащей другие заданные фигуры; плоскость проекций не проходит через луч, а также отлична от плоскости, содержащей другие заданные фигуры.

4. Что представляют собой в евклидовом пространстве поверхности, которые в расширенном евклидовом пространстве являются:

1) конусом с несобственной вершиной,

2) пирамидой с несобственной вершиной.

5. Дана прямая p в плоскости α и точка S, не принадлежащая плоскости α. Построить прямую, проектирующую несобственную точку прямой p из точки S в расширенном евклидовом пространстве.

6. Даны две плоскости α и α' и точка S, им не принадлежащая.

1) Спроектировать несобственную прямую плоскости α из точки S на плоскость α' в расширенном евклидовом пространстве.

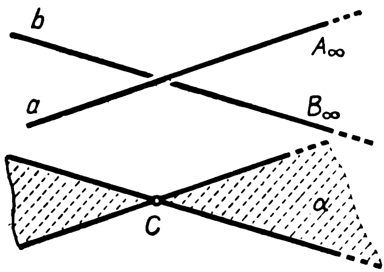
2) Построить ту прямую плоскости α, которая является проекцией несобственной прямой плоскости α' при проектировании из точки S.

7. Что представляют собой в расширенном евклидовом пространстве две прямые, которые в евклидовом пространстве называются скрещивающимися, если:

1) одна из прямых несобственная,

2) обе прямые несобственные.

8. Даны две несобственные точки расширенного евклидова пространства A_∞ и B_∞ (они заданы непересекающимися прямыми a и b) и собственная точка C. Построить плоскость, принадлежащую точкам A_∞, B_∞, C.



Черт. 3.

Решение. Проведем через точку C прямые CA_∞ и CB_∞ (в евклидовом пространстве это прямые, параллельные соответственно прямым a и b) (черт. 3).

Так как по построению прямые CA_∞ и CB_∞ пересекаются, то они определяют некоторую плоскость α, а так как точки A_∞ и B_∞ принадлежат соответственно прямым a и b, которые, в свою очередь, принадлежат плоскости α, то точки A_∞ и B_∞ принадлежат и плоскости α. Этой же плоскости принадлежит и точка C; таким образом, плоскость α искомая.

9. В расширенном евклидовом пространстве через несобственную точку прямой a провести прямую, пересекающую две данные непересекающиеся прямые b и c.

Указание. Построим две плоскости, каждая из которых определяется данной точкой и одной из данных прямых. Линия пересечения этих плоскостей — искомая прямая.

10. В расширенном евклидовом пространстве даны плоскости α, α' и точка S, не лежащая ни в одной из данных плоскостей. Найти геометрическое место проекций несобственных точек плоскости α на плоскость α' из центра S.

§ 2. Позиционные задачи линейной перспективы

Литература: [3] гл. IV, § 1—7; [4] гл. I, § 2—7.

Замечание. В задачах этого и следующего параграфов употреблены следующие обозначения:

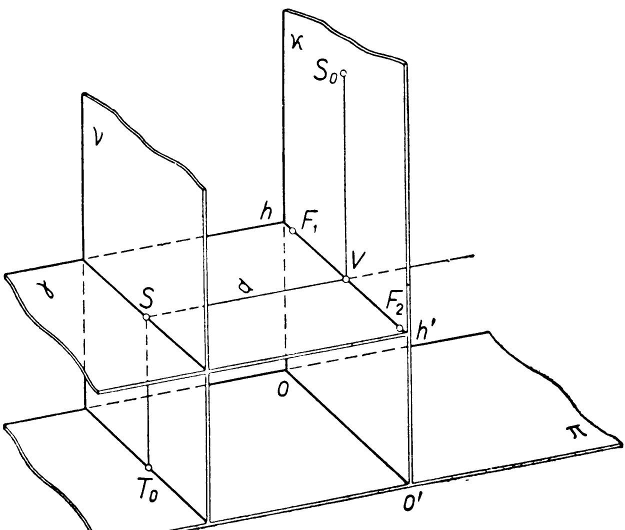
A_0, B_0,..., a_0, b_0,... — точки и прямые в предметном пространстве;

A_0', B_0',..., a_0', b_0',... — основания точек A_0, B_0,... и прямых a_0, b_0,...;

A, B, ..., a, b,... — перспективы точек A_0, B_0,... и прямых a_0, b_0,...;

A', B',..., a', b',...— перспективы оснований точек A_0, B_0,... и прямых a_0, b_0... .

Остальные обозначения и названия приведены на чертеже 4.



π - Предметная плоскость
V - Нейтральная плоскость
γ - Горизонтальная плоскость
S - Точка зрения
hh' - Линия горизонта
SV - Главный луч
S_0 - Постоянная точка картины ($S_0V = d$)

K - Картинная плоскость (картина)
V - Главная точка картины
T_0 - Точка стояния
OO' - Основание картины
SV=d - Главное расстояние
F_1, F_2 - Фокальные точки картины ($F_1V=F_2V= d$)

Черт. 4.

11. Укажите условия, при которых перспектива A точки A_0 вместе с перспективой A' основания A'_0 той же точки определяют положение точки A_0 в пространстве.

12. В каком случае перспектива A точки A_0 совпадает с перспективой A' основания A'_0 той же точки?

13. В каком случае перспектива a прямой a_0 совпадает с перспективой a' основания a'_0 той же прямой?

14. Если перспектива a' основания a'_0 прямой a_0 перпендикулярна к линии горизонта или же совпадает с несобственной прямой картинной плоскости $\varkappa$, то a' совпадает с перспективой a прямой a_0. Доказать.

Определено ли положение прямой a_0 в пространстве при указанных условиях?

15. Дать необходимые и достаточные признаки для следующих положений прямой a_0 в пространстве:

1) прямая a_0 параллельна картинной плоскости $\varkappa$;

2) прямая a_0 лежит в плоскости $\varkappa$;

3) прямая a_0 лежит в плоскости, перпендикулярной к основанию oo' картины;

4) прямая a_0 перпендикулярна к плоскости $\varkappa$ и не проходит через точку зрения S;

5) прямая a_0 проходит через точку S.

16. В каком случае точка схода прямой a_0 несобственная?

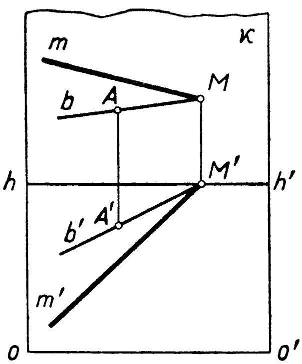
17. Какое соответствие устанавливается между перспективами A точек A_0 плоскости α и перспективами A' оснований A'_0 точек A_0, если:

1) плоскость α совпадает с предметной плоскостью π;

2) плоскость α перпендикулярна к плоскости π.

Существует ли такое положение плоскости α, при котором соответствие будет симметрией с осью hh'?

18. Через данную точку (A, A') провести прямую (b, b'), параллельную данной прямой (m, m').



Черт. 5.

Решение. Так как прямая (b, b') должна проходить через точку (A, A') (черт. 5), то на картинной плоскости, в которой мы проводим построение, прямая b должна пройти через точку A, а прямая b' —

через точку A'. Кроме того, прямая (b, b') должна быть параллельной прямой (m, m'), т. е. на картинной плоскости они должны иметь общую точку схода. Найдем точку схода прямой (m, m'). Для этого через точку $M' \equiv m' \times hh'$ проведем прямую, перпендикулярную hh'; точка M пересечения этой прямой с прямой m и будет искомой точкой схода. Теперь, проведя прямые AM и $A'M'$, имеем искомую прямую (b, b'), где $b \equiv AM$.

19. Задать какие-нибудь две скрещивающиеся прямые (p, p') и (q, q').

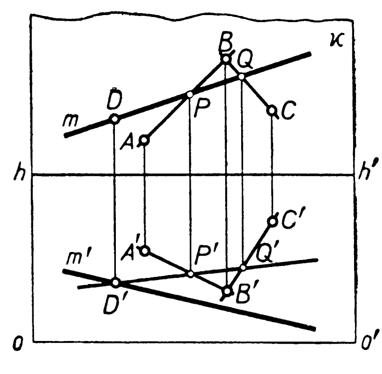
20. Через данную точку (A, A') провести плоскость, параллельную двум данным скрещивающимся прямым (p, p') и (q, q'), не проходящим через точку (A, A').

Указание. Построим прямые (b, b') и (c, c'), проходящие через точку (A, A') и параллельные соответственно прямым (p, p') и (q, q'), тогда плоскость, определяемая прямыми (b, b') и (c, c'), будет искомой. Построение прямой, проходящей через данную точку и параллельную другой данной прямой, рассмотрено в задаче 18.

21. Построить перспективу M точки, лежащей в плоскости, заданной тремя точками (A, A'), (B, B') и (C, C'), если перспектива M' основания этой точки известна.

22. Построить точку (D, D') пересечения данной прямой (m, m') с плоскостью, заданной тремя точками (A, A'), (B, B'), (C, C').

Решение. Для нахождения точки (D, D') используем перспективно-аффинное соответствие, которое устанавливается в картинной плоскости $\varkappa$ заданием трех пар точек A и A', B и B', C и C', лежащих на параллельных прямых $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ (черт. 6). Задача сводится, таким образом, к нахождению на прямых m и m' пары точек D и D', соответственных в установленном соответствии (следует заметить, что прямые m и m' в этом соответствии не являются соответственными).



Черт. 6.

Решим задачу, не находя оси перспективно-аффинного соответствия.

1) Найдем точки P и Q — пересечения прямой m соответственно с прямыми AB и BC.

2) Найдем точки P' и Q', соответственные точкам P и Q.

3) Проведем прямую $P'Q'$.

4) Найдем точку пересечения прямых $P'Q'$ и m', которая является точкой D'.

5) Найдем на прямой m точку D, соответственную точке D'.

Пара точек D и D' (в обозначениях перспективно-аффинного соответствия), или точка (D, D') (в обозначениях линейной перспективы), является искомой. Действительно, она принадлежит прямой $(PQ, P'Q')$, которая, в свою очередь, принадлежит плоскости $(ABC, A'B'C')$, т. е. точка (D, D') принадлежит заданной плоскости. Кроме того, точка (D, D') принадлежит и прямой (m, m').

23. Построить линию (a, a') пересечения двух данных плоскостей, каждая из которых задана парой пересекающихся прямых:

$$(m, m'), (l, l') \text{ и } (p, p'), (q, q').$$

Указание. Найти точку пересечения прямых, принадлежащих одной плоскости, с другой плоскостью (см. задачу 22).

24. Построить точку пересечения трех данных плоскостей.

25. Построить прямую, проходящую через данную точку и параллельную двум данным плоскостям.

Указание. Очевидно, прямая, параллельная двум данным плоскостям, будет параллельна их линии пересечения (в частности, эта линия может оказаться общей линией схода данных плоскостей). Таким образом, задача сводится:

1) к нахождению линии пересечения двух данных плоскостей (см. задачу 23) и

2) к проведению прямой, параллельной данной прямой и проходящей через данную точку (см. задачу 18).

26. Построить линию схода плоскости данного треугольника.

27. Дана линия схода некоторой плоскости и перспектива одной из точек, на ней лежащих, вместе с перспективой ее основания. Построить перспективу какого-либо треугольника, лежащего в этой плоскости.

28. Построить геометрическое место прямых, проходящих через данную точку и параллельных данной плоскости.

29. Построить плоскость, проходящую через данную прямую и параллельную данной плоскости.

Р е ш е н и е. Пусть дана прямая (a, a') и плоскость задана парой пересекающихся прямых (c, c') и (d, d'). Очевидно, если данная прямая пересекает данную плоскость, задача решения не имеет.

Рассмотрим случай, когда прямая (a, a') параллельна данной плоскости. Выберем на прямой (a, a') некоторую точку (M, M') и проведем через эту точку прямую (b, b'), параллельную одной из прямых (c, c') или (d, d') (см. задачу 18). Тогда прямые (a, a') и (b, b') определяют искомую плоскость.

30. Построить плоскость, проходящую через данную прямую и параллельную другой данной прямой.

31. Построить линию схода плоскости, проходящей через одну из двух скрещивающихся прямых и параллельной другой из них.

32. Построить прямую, пересекающую данную прямую и параллельную данной плоскости. (Задача может иметь бесчисленное множество решений.)

33. Построить прямую, проходящую через данную точку и пересекающую две данные скрещивающиеся прямые.

34. Построить прямую, пересекающую три данные скрещивающиеся прямые.

У к а з а н и е. Выберем на одной из прямых какую-нибудь точку и через нее проведем прямую, пересекающую две другие данные скрещивающиеся прямые (см. задачу 33). Очевидно, решений бесчисленное множество.

§ 3. Метрические задачи линейной перспективы

Л и т е р а т у р а: [3] гл. IV, §8—14; [4] гл. I, §8, 9.

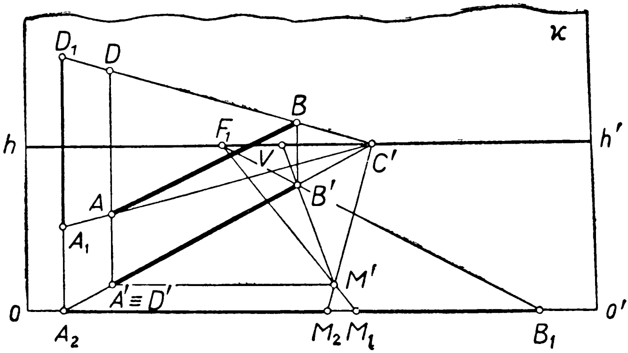
35. Даны перспектива a прямой a_0, а также перспектива K точки K_0, принадлежащей прямой a_0. Построить перспективу L — конца отрезка K_0L_0, лежащего на прямой a_0 и имеющего заданную длину d, если прямая a_0 лежит в предметной плоскости и:

1) параллельна картинной плоскости,
2) перпендикулярна картинной плоскости,
3) образует с плоскостью $\varkappa$ угол, отличный от 0 и 90°.

36. Определить натуральную величину данного отрезка $(AB, A'B')$, не лежащего ни в предметной, ни в картинной плоскости.

Решение. Рассмотрим случай, когда данный отрезок не параллелен и не перпендикулярен ни предметной, ни картинной плоскости.

Пусть $(AB,\ A'B')$ — данный отрезок (черт. 7). Найдем точку C' пересечения прямой $A'B'$ с линией горизонта hh', затем найдем точку D пересечения прямых BC' и AA'. Очевидно, что треугольник ABD представляет перспективу прямоугольного треугольника $A_0B_0D_0$. Действительно, во-первых, $AD \perp hh'$, так как $AA' \perp hh'$ (причем прямая AA' не является перспективой прямой,



Черт. 7.

лежащей в предметной плоскости, так как точка A не тождественна точке A'). Поэтому $A_0D_0 \perp \pi$. Во-вторых, прямые BD и $A'B'$ пересекаются в точке C', лежащей на hh', т. е. прямые BD и $A'B'$ — перспективы прямых, параллельных B_0D_0 и $A'_0B'_0$. Но прямая $A'_0B'_0$ лежит в предметной плоскости π, следовательно, $B_0D_0 \parallel \pi$. Таким образом, $A_0D_0 \perp B_0D_0$. Итак, треугольник $A_0B_0D_0$ прямоугольный, с катетами A_0D_0 и B_0D_0 и гипотенузой A_0B_0. Зная перспективы катетов AD и BD, мы можем найти их натуральную величину, а затем, построив вспомогательный прямоугольный треугольник с катетами, равными AD и BD, получить натуральную величину отрезка A_0B_0, равного гипотенузе вспомогательного треугольника.

1) Определим натуральную величину отрезка A_0D_0 по его перспективам AD и $A'D'$ ($A' \equiv D'$, так как $A_0D_0 \perp \pi$). Для этого в картинной плоскости $\varkappa$ найдем точку A_2 пересечения прямой $C'A'$ и основания картины oo', а затем

найдем точки A_1 и D_1 пересечения прямых $C'A$ и $C'D$ с прямой, проходящей через точку A_2 и перпендикулярной oo'. A_1D_1 — натуральная величина отрезка A_0D_0.

2) Определим натуральную величину отрезка B_0D_0. Так как отрезки B_0D_0 и $A'_0B'_0$ равны ($B_0D_0A'_0B'_0$ — прямоугольник), то будем искать натуральную величину отрезка $A'_0B'_0$, что сделать удобней, потому что этот отрезок лежит в предметной плоскости.

Для этого через точку V — главную точку картины — и точку B' проведем прямую и найдем точку M' пересечения ее с прямой, проходящей через точку A' и параллельной основанию картины. Рассмотрим треугольник $A'B'M'$. Он является перспективой прямоугольного треугольника $A'_0B'_0M'_0$, лежащего в предметной плоскости и имеющего катет $B'_0M'_0$, перпендикулярный основанию картины, и катет $A'_0M'_0$, параллельный основанию картины. Действительно, $B'M'$ проходит через точку P, т. е. $B'_0M'_0 \perp oo'$, $A'M' \parallel oo'$, поэтому и $A'_0M'_0 \parallel oo'$.

Таким образом, задача нахождения натуральной величины отрезка B_0D_0 сведена к задачам нахождения натуральной величины двух отрезков $A'_0M'_0$ и $B'_0M'_0$. Найдя величины этих катетов, мы найдем затем и величину гипотенузы $A'_0B'_0$, построив вспомогательный треугольник по двум катетам, равным соответственно $A'_0M'_0$ и $B'_0M'_0$.

На чертеже 7 A_2M_2 — натуральная величина отрезка $A'_0M'_0$ и B_1M_1 — натуральная величина отрезка $B'_0M'_0$ (F_1 — одна из фокальных точек картины).

37. Разделить на n равных частей данный отрезок (AB, $A'B'$), не лежащий ни в предметной, ни в картинной плоскости.

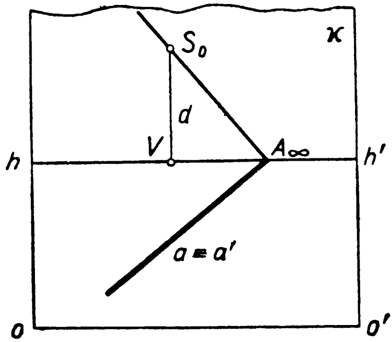
38. Построить перспективу данного треугольника и перспективу основания его центра тяжести.

39. Даны перспективы двух прямых, лежащих в предметной плоскости. Определить натуральную величину угла α между ними, пользуясь данными их перспективами, если:

1) одна из прямых несобственная,

2) обе прямые собственные.

Р е ш е н и е. С л у ч а й 1. Пусть перспективой собственной прямой a_0, лежащей в предметной плоскости, будет прямая a (черт. 8) (очевидно, $a_0 \equiv a'_0$ и $a \equiv a'$). Перспективой несобственной прямой h_0 предметной плоскости является линия горизонта hh'. Таким образом, перспективой угла, величину которого требу-



Черт. 8.

ется определить, будет угол между прямыми a и hh'. Пусть прямая a пересекает hh' в точке A_∞. Проведем через точку S_0 — постоянную точку картины — и точку A_∞ прямую S_0A_∞. Тогда величина угла между прямыми S_0A_∞ и hh' и есть искомая натуральная величина угла между двумя данными прямыми a_0 и h_0.

У к а з а н и е к решению в т о р о г о с л у ч а я. Пусть данные прямые — это прямые a_0 и b_0. Определив натуральную величину угла между прямыми a_0 и h_0, а затем b_0 и h_0 и вычтя сумму найденных углов из 180° (если каждый из углов $\angle a_0h_0$ и $\angle b_0h_0$ меньше 90°), получим натуральную величину искомого угла.

40. Через данную точку, принадлежащую предметной плоскости, провести прямую, образующую с данной прямой, лежащей в предметной плоскости, угол:

1) 45°, 2) 30°, 3) 120°.

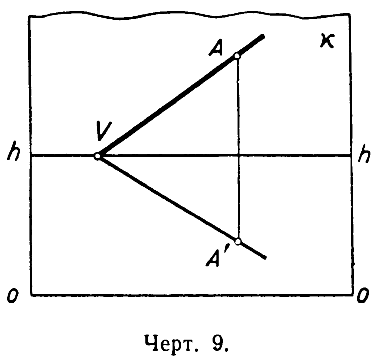
41. Определить натуральную величину угла между данными прямыми (a, a') и (b, b'), не лежащими ни в предметной, ни в картинной плоскости.

42. Из данной точки (A, A'), где $A \not\equiv A'$, опустить перпендикуляр:

1) на плоскость π,
2) на плоскость $\varkappa$,
3) на прямую hh'.

Р е ш е н и е. С л у ч а й 1. Так как $A_0A_0' \perp \pi$, то AA' и есть перспектива искомого перпендикуляра на плоскость π.

Р е ш е н и е. С л у ч а й 2. Так как $SV \perp \varkappa$, то прямая SV параллельна искомому перпендикуляру (черт. 9), т. е. точка V — главная точка картины —



Черт. 9.

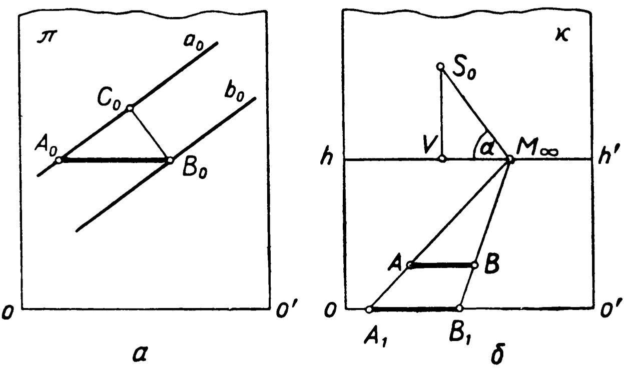
является точкой схода этого перпендикуляра. Таким образом, прямая VA' — это перспектива проекции перпендикуляра на плоскость $\varkappa$. А так как перпендикуляр на плоскость $\varkappa$ параллелен своему основанию, то перспектива самого перпендикуляра имеет общую точку схода с точкой схода перспективы основания перпендикуляра. Поэтому прямая VA будет перспективой искомого перпендикуляра.

Указание к решению случая 3. Воспользоваться тем, что VA' — перспектива проекции на предметную плоскость искомого перпендикуляра.

43. Определить натуральную величину угла наклона данной прямой (a, a') к предметной плоскости.

44. Даны перспективы A, B, C вершин A_0, B_0, C_0 треугольника, лежащего в предметной плоскости. Построить перспективу центра окружности:

1) вписанной в треугольник $A_0B_0C_0$,
2) описанной около треугольника $A_0B_0C_0$.



Черт. 10.

45. Определить натуральную величину расстояния между двумя данными параллельными прямыми, лежащими в предметной плоскости.

Указание. Пусть прямые a_0 и b_0, лежащие в предметной плоскости, параллельны. Проведем прямую A_0B_0, параллельную oo' — основанию картины (черт. 10, a), и из точки B_0 опустим на a_0 перпендикуляр B_0C_0. Тогда треугольник $A_0B_0C_0$ будет прямоугольным с гипотенузой A_0B_0 и острым углом α. Но угол α —

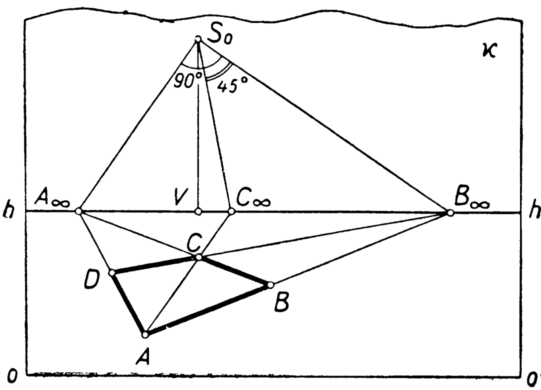
это, очевидно, угол, образуемый прямой a_0 с картинной плоскостью, который легко определить (см. задачу 39, *1*). Истинную величину отрезка A_0B_0 (черт. 10, *б*) также легко определить (см. задачу 36, *2*) по его перспективе (так как $A_0B_0 \parallel oo'$, то $AB \parallel oo'$, где AB — перспектива отрезка A_0B_0).

Построив затем прямоугольный треугольник, равный треугольнику $A_0B_0C_0$ (по гипотенузе и острому углу), найдем натуральную величину искомого отрезка как катет, лежащий против острого угла α.

46. Построить геометрическое место точек, принадлежащих предметной плоскости и удаленных от данной прямой на данное расстояние.

47. Построить перспективу квадрата, лежащего в предметной плоскости, если дана перспектива одной из его сторон.

Решение. Пусть AB (черт. 11) — перспектива стороны A_0B_0 квадрата $A_0B_0C_0D_0$, лежащего в предметной плоскости. Продолжим AB до пересечения с hh' и полу-



Черт. 11.

ченную точку B_∞ — точку схода прямой AB — соединим с точкой S_0 ($S_0V \perp hh'$, $S_0V = d$), затем проведем прямые S_0A_∞ и S_0C_∞, образующие с S_0B_∞ углы, соответственно равные 90° и 45°. Точку A_∞ соединим с точками A и B, точку C_∞ соединим с точкой A. Пусть прямая AC_∞ пересекла прямую BA_∞ в точке C. Проведем прямую $B_\infty C$ и точку ее пересечения с AA_∞ обозначим через D. Тогда $ABCD$ — перспектива квадрата (точнее, одного из квадратов), построенного на стороне AB. Действительно, углы $A_\infty AB$ и $A_\infty BA$ по построению — перспективы прямых углов; $DC \parallel AB$, так как по построению у них общая точка схода B_∞. Таким образом, $ABCD$ — перспектива прямоугольника. Но AC — его диагональ — это перспектива прямой, делящей угол DAB пополам. Прямоугольник же, диагональ которого делит его угол пополам, есть квадрат. Следовательно, $ABCD$ — перспектива квадрата.

48. Построить перспективу какой-либо правильной треугольной (четырехугольной) пирамиды, основание которой лежит в предметной плоскости. Определить натуральную величину:

1) основания этой пирамиды,
2) высоты пирамиды,
3) боковой грани.

49. Построить перспективу правильной четырехугольной пирамиды, основание которой лежит в предметной плоскости, если дана перспектива одной из сторон ее основания, а высота равна данному отрезку d.

50. Построить перспективу куба, имеющего ребро данной длины l и стоящего на предметной плоскости, если дана перспектива одного из его ребер, принадлежащих предметной плоскости.

51. Плоскость α_0 проходит через точки A_0 и B_0, перспективы A, B и перспективы A', B', основания которых даны. Дана также точка схода Q_∞ прямой a_0, лежащей в плоскости α_0, причем a_0 не параллельна A_0B_0.

Построить перспективу основания правильного треугольника $A_0B_0C_0$, лежащего в плоскости α, и перспективу ее основания.

52. Дана перспектива пятиугольника и перспективы оснований трех его вершин:

1) построить перспективы оснований остальных вершин;
2) найти натуральную величину этого пятиугольника.

53. Построить перспективу основания прямоугольника, не лежащего в предметной плоскости, и перспективу его основания. Определить натуральную величину этого прямоугольника.

II. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ

§ 4. Косоугольное параллельное проектирование

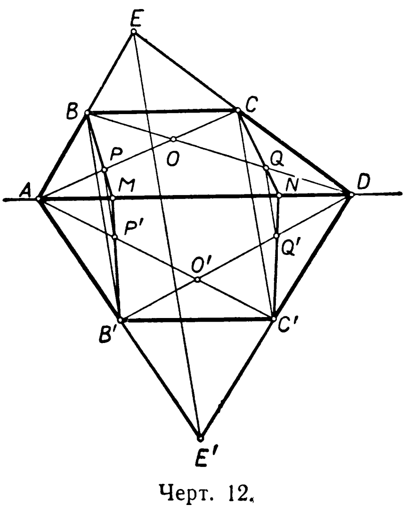
Литература: [1] § 2—6; [2] § 4—11; [3] § 10—16, 18, 21; [4] § 10—12.

54. На стороне треугольника отложены два равных отрезка, считая от соответствующих вершин этой стороны. Через полученные точки проведены прямые, параллельные двум другим сторонам треугольника. Доказать, что точка пересечения этих прямых лежит на медиане треугольника, проведенной к первой стороне треугольника.

55. Прямая проведена параллельно основаниям трапеции. Доказать, что отрезок этой прямой, заключенный между одной боковой стороной и одной диагональю (или их продолжениями), равен отрезку этой прямой, заключенному между второй боковой стороной и второй диагональю (или их продолжениями).

Указание. Для доказательства достаточно показать выполнимость равенства указанных отрезков в равнобочной трапеции, так как последнюю можно рассматривать как параллельную проекцию трапеции, подобной данной.

56. На диагонали AC трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$) отложен отрезок AP, равный OC, а на диагонали DB — отрезок DQ, равный OB (O — точка пересечения диагоналей). Доказать, что прямые, проведенные через точки B и P, C и Q, отсекают на основании AD равные отрезки AM и DN.



Черт. 12.

Решение. Продолжим стороны AB и DC трапеции $ABCD$ до пересечения в некоторой точке E (черт. 12). Построим равнобедренный треугольник ADE'. Выберем AD в качестве оси перспективно-аффинного соответствия, а точки E и E' — за пару соответственных точек.

В установленном соответствии строим точки B' и C'. Фигура $AB'C'D$— равнобочная трапеция, так как из $BC \parallel AD$ следует, что $B'C' \parallel AD$, но треугольник ADE' равнобедренный по построению, следовательно, $AB' = DC'$.

Проведя в трапеции $AB'C'D$ диагонали AC', $B'D$ и прямые $B'M$, $C'N$, получим точки P' и Q', как точки пересечения прямых, соответственных прямым AC, BD и BM, CN. Таким образом, точка P' соответствует точке P, а точка Q' — точке Q. Очевидно также, что точке O соответствует точка O' — пересечение диагоналей AC' и $B'D$. Тогда, так как $AP = OC$ и $DQ = OB$, то $AP' = O'C'$ и $DQ' = O'B'$.

Так как $AB'C'D$ — равнобочная трапеция, то $O'C' = O'B'$, поэтому и $AP' = DQ'$. Тогда, ввиду того что $AB' = DC'$ и $\angle C'AB' = \angle B'DC'$, будут равны и треугольники $AP'B'$ и $DQ'C'$. Поэтому $\angle AP'B' = \angle DQ'C'$, как углы, лежащие в равных треугольниках против равных сторон. Следовательно, и $\angle AP'M = \angle DQ'N$. Переходя к треугольникам $AP'M$ и $DQ'N$, видим, что они равны по стороне и двум прилежащим к ней углам ($\angle MAP' = \angle NDQ'$), откуда и заключаем, что $AM = ND$, так как это стороны равных треугольников, лежащие против равных углов.

57. Найти отношение площади параллелограмма, описанного около эллипса, к площади эллипса.

58. Для данного треугольника ABC найти такую точку S, чтобы площади треугольников SAB, SBC и SAC были равны.

59. Точка P, взятая внутри треугольника ABC, соединена с вершинами A, B, C и полученные треугольники APB, BPC, CPA достроены до параллелограммов $APBQ$, $BPCR$, $CPAS$. Доказать, что прямые AR, BS и CQ пересекаются в одной точке.

Указание. Полученную конструкцию можно рассматривать как параллельную проекцию параллелепипеда.

60. Дана параллельная проекция n-угольной звезды с вырезанным в ней круглым отверстием (представленным на чертеже эллипсом). Определить действительную форму этой звезды ($n = 5$; 6; 10).

61. Найти геометрическое место середин хорд эллипса, проходящих через данную точку (три случая).

62. Построить параллельную проекцию трапеции, отношение оснований которой равно 3 : 2.

63. Построить параллельную проекцию окружности:

1) описанной около равнобедренного, около прямоугольного треугольника,

2) вписанной в равнобедренный, в прямоугольный треугольник,

3) описанной около правильного n-угольника ($n = 3; 4; 5; 6$),

4) вписанной в правильный n-угольник ($n = 3; 4; 5; 6$).

64. Построить окружность, описанную около боковой грани правильной n-угольной пирамиды. (Плоскость грани не параллельна плоскости чертежа.)

65. Построить правильную треугольную (четырехугольную) призму, вписанную в конус.

66. Провести плоскости через каждые три вершины куба, лежащие в концах каждой тройки ребер, сходящихся в одной вершине. Какое тело ограничивают эти плоскости?

67. В правильном тетраэдре $SABC$ построить три плоскости, каждая из которых проходит через одну из вершин основания ABC тетраэдра и середины K, L, N боковых ребер SA, SB, SC. Выяснить, какая часть тетраэдра расположена над всеми секущими плоскостями.

68. Над плоским потолком зала, имеющего форму квадрата со стороной a, сделана крыша, построенная следующим образом: каждая пара смежных вершин квадрата, образующего потолок зала, соединена прямыми с серединой противолежащей стороны; на каждом из получившихся четырех треугольников как на основании построена пирамида, вершина которой проектируется в середину соответствующей стороны квадрата. Расположенные выше других части граней этих четырех пирамид образуют крышу. Высота каждой из пирамид $2a$. Построить крышу.

69. Построить шар, вписанный в прямую призму, основание которой — прямоугольный треугольник.

70. Построить шар, вписанный в правильную треугольную (четырехугольную) пирамиду.

71. Построить шар, описанный около правильной n-угольной пирамиды ($n = 3; 4; 5; 6$).

72. Построить правильный тетраэдр, вписанный в шар, а затем шар, вписанный в построенный правильный тетраэдр.

73. Взяты две противоположные вершины куба и через середины ребер, не проходящих через эти вершины, прове-

дена секущая плоскость, которая делит куб на две части. В каждую из этих частей вписать шар, касающийся трех граней куба и секущей плоскости.

§ 5. Ортогональное проектирование

Литература: [1] гл. III, § 15—18, 22—24; [3] гл. II, § 1—12, 15; [4] гл. II, § 21—25, 28, 31, 32.

74. Построить эпюры канонических проекций следующих тел:

1) большей части куба, полученной сечением его плоскостью, перпендикулярной диагонали боковой грани, если эта плоскость проходит через точку, делящую диагональ в отношении 3 : 1;

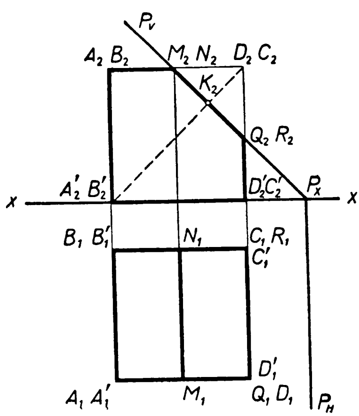
2) правильной треугольной пирамиды, усеченной плоскостью, проходящей через одну из вершин основания и перпендикулярной к противолежащей боковой грани;

3) конуса, усеченного плоскостью, параллельной основанию;

4) цилиндра, усеченного плоскостью, непараллельной образующей;

5) правильной четырехугольной пирамиды, усеченной плоскостью, проходящей через одно из ребер основания и делящей противоположную грань на две равновеликие фигуры.

Решение (1). Рассмотрим проекции куба на горизонтальную (H) и вертикальную (V) плоскости (черт. 13). Поместим куб на плоскость H, тогда на этой плоскости мы получим квадрат — каноническую проекцию куба. Чтобы вторая его проекция была канонической, поместим куб так, чтобы одна из его граней была параллельна плоскости V.



Черт. 13.

Проведем теперь в одной из двух параллельных плоскости V граней куба, например в грани $A'ADD'$, диагональ $A'D$ (ее проекцией на горизонатальную плоскость будет $A_1'D_1$, а на вертикальную — $A_2'D_2$). Если некоторая точка K делит диагональ $A'D$ в отношении 3 : 1 (считая, например, от вершины A'), то по свойству параллельного проектирования и точка K_2 — вертикальная проекция точки K — будет делить $A_2'D_2$ в том же отношении.

Рассечем куб плоскостью P, проходящей через точку K и перпендикулярной $A'D$. Так как $A'D \parallel V$ и $P \perp A'D$, то $P \perp V$, поэтому P_V — вертикальная проекция плоскости P—на чертеже изобразится в виде прямой, причем $P_V \perp A_2'D_2$, а линия P_H пересечения плоскостей P и H будет перпендикулярна к плоскости V, и, следовательно, на нашем эпюре $P_H \perp xx'$ (xx' — линия пересечения плоскостей V и H). Отметим точки M_2, N_2, Q_2, R_2 — вертикальные проекции точек пересечения P_V— следа плоскости P — с проекциями A_2D_2, B_2C_2, D_2D_2', C_2C_2' ребер куба. Построим теперь проекции точек M, N, Q, R на горизонтальную плоскость. Мы получим точки M_1, N_1, Q_1, R_1. Вертикальная каноническая проекция усеченного куба будет $A_2'A_2M_2Q_2D_2'$, а горизонтальная — квадрат $A_1B_1C_1D_1$ с проведенным на нем отрезком M_1N_1.

75. Построить эпюры канонических проекций комбинаций следующих тел:

1) конуса, вписанного в шар;

2) конуса, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду;

3) шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду;

4) цилиндра, вписанного в конус;

5) куба, вписанного в конус.

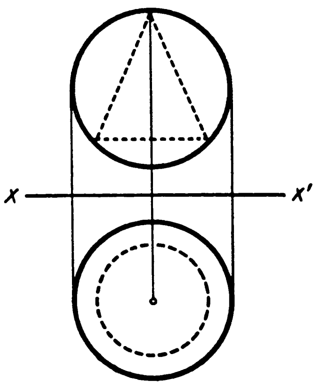
Р е ш е н и е (1). Построим канонические проекции конуса, вписанного в шар, на плоскости H и V. При этом конус расположим так, чтобы проекцией его основания на плоскость H был круг, а на плоскость V — отрезок (в этом случае основание конуса параллельно плоскости H). Тогда проекцией конуса на плоскость V будет равнобедренный треугольник, основание которого параллельно xx'.

Канонической же проекцией шара является всегда окружность.

Эпюр канонических проекций представлен на чертеже 14.

При решении задач 76—87 воспользоваться каноническими проекциями.

76. Радиусы двух шаров 25 *дм* и 29 *дм*, а расстояние между их центрами 36 *дм*. Определить длину линии, по которой пересекаются поверхности шаров.



Черт. 14.

77. Стороны треугольника 13 *см*, 14 *см* и 15 *см*. Найти расстояние от плоскости треугольника до центра шара, касающегося сторон треугольника. Радиус шара 5 *см*.

78. Радиус шара 7 *см*. На его поверхности даны две равные окружности, пересекающиеся по хорде, длина которой 2 *см*. Найти радиусы этих окружностей, зная, что плоскости их перпендикулярны.

79. Радиусы оснований усеченного конуса 3 *см* и 4 *см*, а высота 7 *см*. Найти радиус описанного шара.

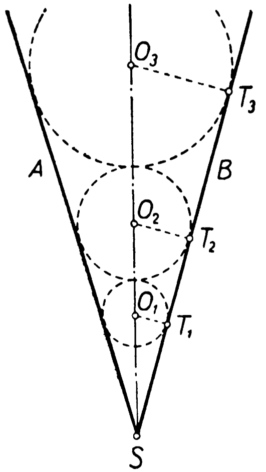
80. Радиус шара 10 *см*. В него вписан усеченный конус, радиусы оснований которого 6 *см* и 8 *см*. Найти высоту конуса (два случая).

81. В конус вписан шар. Площадь поверхности шара относится к площади основания конуса, как 4 : 3. Найти угол при вершине конуса.

82. В конус вписана полусфера, большой круг которой лежит на основании конуса. Определить угол при вершине конуса, зная, что боковая поверхность конуса относится к поверхности полусферы, как 18 : 5.

83. В коническую поверхность вращения, в осевом сечении которой угол 60°, вложены шары, центры которых лежат на оси конуса. Радиус первого шара равен 1 *см*; второй шар касается первого, третий — второго и т. д. Если радиусы второго, третьего и т. д. шаров максимально возможные, то какой радиус должен иметь третий шар? пятый? n-й?

Решение. Решим задачу, пользуясь одной из канонических проекций, а именно проекцией на плоскость, параллельную оси конической поверхности (черт. 15). В этой проекции мы получим угол ASB, в который вписана



Черт. 15.

последовательность окружностей O_1, $O_2, \ldots$, радиусов $R_1 = 1$ *см*, R_2, $R_3, \ldots$, каждая из которых касается сторон угла в точках T_1, $T_2, \ldots$, так как шары выбираются максимально возможного радиуса, а также каждая последующая касается предыдущей. Так как центры всех шаров лежат на оси конической поверхности, то и точки касания соседних шаров лежат на этой оси.

Соединим точки касания T_1, T_2, ... с центрами соответствующих окружностей. Тогда $O_1T_1 \perp SB$, $O_2T_2 \perp SB$, ... и $O_1T_1 = 1$ *см*, $O_2T_2 = R_2, \ldots$.

Из прямоугольного треугольника O_1ST_1, где угол O_1ST_1 равен, очевидно, 30°, имеем, что $O_1S = 2$ *см*. Затем из подобия треугольников O_1ST_1 и O_2ST_2 получим: $\frac{R_2}{R_1} = \frac{O_2S}{O_1S}$, или $\frac{R_2}{1} = \frac{R_2 + 3}{2}$, откуда $R_2 = 3$ *см*. Из подобия треугольников O_1ST_1 и O_3ST_3 получим: $\frac{R_3}{R_1} = \frac{O_3S}{O_1S}$, или $\frac{R_3}{1} = \frac{R_3 + 9}{2}$, откуда $R_3 = 9$ *см*.

Таким же образом, составляя пропорции, как это сделано для нахождения R_2 и R_3, мы можем определить R_4, $R_5, \ldots$. Однако, нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} O_1S &= 2R_1, \\ O_2S &= 2R_2, \\ O_3S &= 2R_3, \end{aligned} \tag{1}$$

. . . . и, кроме того,

$$\begin{aligned} O_2S &= R_2 + (O_1S + R_1), \\ O_3S &= R_3 + (O_2S + R_2), \end{aligned} \tag{2}$$

. . . .

Вставляя в равенства (2) значения O_1S, $O_2S, \ldots$ из равенств (1), получим:

$$2R_2 = R_2 + 3R_1,$$
$$2R_3 = R_3 + 3R_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots, \quad \text{или}$$

$R_2 = 3R_1, \quad R_3 = 3R_2, \ \ldots,$ откуда $\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_3}{R_2} = \ \ldots \ = 3,$ т. е. последовательность радиусов $R_1, R_2, R_3, \ldots$ образует геометрическую прогрессию, у которой первый член $R_1 = 1$, а знаменатель $d = 3$. Легко подсчитать, что $R_5 = R_1 d^4 = 81$ (*см*), а $R_n = R_1 d^{n-1} = 3^{n-1}$ (*см*).

84. В равносторонний конус с образующей a вписан шар, а в него куб. Определить ребро куба.

85. В сферу S радиуса R вписаны восемь сфер меньшего радиуса, каждая из которых касается двух соседних, а все вместе касаются сферы S по окружности большого круга. Затем в пространство между сферами вписана еще одна сфера S_1, которая касается всех восьми сфер меньшего радиуса и сферы S. Найти радиус R_1 этой последней сферы.

86. 1) В сферу S радиуса R вписано восемь равных сфер, каждая из которых касается трех соседних сфер и сферы S. Найти радиус вписанных сфер, зная, что их центры лежат в вершинах некоторого куба.

2) На плоскости лежат три равных шара радиуса R, попарно касающихся друг друга. Четвертый шар касается плоскости и каждого из первых трех шаров. Найти радиус четвертого шара.

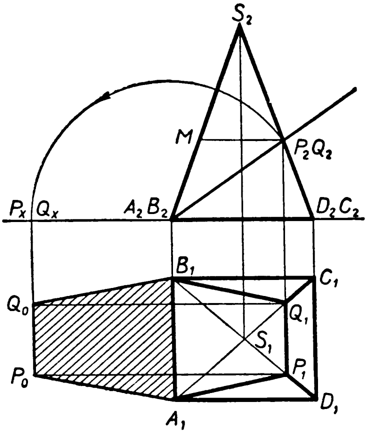
87. Внутри куба, ребро которого a, помещается конус так, что его вершина совпадает с одной из вершин куба, а окружность основания касается трех граней куба, сходящихся в противоположной вершине. Образующая конуса составляет с его осью угол α. Определить радиус основания конуса.

При решении задач 88—95 воспользоваться методом совмещения.

88. Правильную четырехугольную призму пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился ромб с острым углом α. Определить положение секущей плоскости.

89. В правильной треугольной пирамиде даны сторона основания p и двугранный угол при основании α. Определить площадь сечения, проведенного через центр основания параллельно двум непересекающимся ребрам пирамиды.

90. Правильная четырехугольная пирамида со стороной основания, равной a, и двугранным углом при основании, равным 2α, пересечена плоскостью, делящей пополам двугранный угол при основании. Найти истинную величину ее площади сечения.



Черт. 16.

Решение. Построим эпюр канонических проекций данной пирамиды $SABCD$ и найдем истинную величину $A_1B_1Q_0P_0$ сечения $ABQP$ (черт. 16). Нетрудно убедиться в том, что сечением будет трапеция с основаниями A_1B_1, P_0Q_0 и высотой, равной отрезку A_2P_2 (A_2P_2 — биссектриса угла $S_2A_2C_2$).

По теореме синусов: $\frac{S_2P_2}{S_2A_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha}$; ($\angle S_2P_2A_2 = 180° - [(180° - 4\alpha) + \alpha] = 3\alpha$), а так как $P_2M \parallel A_2C_2$, то $\frac{P_2M}{A_2C_2} = \frac{S_2P_2}{S_2C_2}$.

Но $A_2C_2 = a$, $S_2C_2 = S_2A_2$, поэтому $\frac{P_2M}{a} = \frac{S_2P_2}{S_2A_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha}$, откуда $P_2M = \frac{a\sin\alpha}{\sin 3\alpha}$.

Из треугольника $A_2P_2C_2$ по теореме синусов имеем: $\frac{A_2P_2}{A_2C_2} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin(180° - 3\alpha)}$, откуда $A_2P_2 = \frac{a\sin 2\alpha}{\sin(180° - 3\alpha)}$.

Таким образом, площадь сечения будет:

$$S_{A_1B_1Q_0P_0} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a\sin\alpha}{\sin 3\alpha}\right)\frac{a\sin 2\alpha}{\sin(180° - 3\alpha)} = \frac{a^2\sin^2 2\alpha\cos\alpha}{\sin^2 3\alpha}.$$

91. В правильной четырехугольной пирамиде провести плоскость через сторону основания перпендикулярно к противолежащей боковой грани. Сторона основания равна a, а высота пирамиды $h\,(h > a)$. Определить истинную величину сечения.

92. Через вершину конуса под углом 45° к основанию проведена плоскость, отсекающая четверть окружности основания. Высота конуса 10 *см*. Определить истинную величину и площадь сечения.

93. Через некоторую точку диагонали куба с ребром a перпендикулярно к этой диагонали проведена плоскость.

1) Выяснить, какая фигура получается в сечении;

2) определить истинную величину сечения;

3) найти длины отрезков, получающихся в пересечении плоскости с гранями куба, в зависимости от расстояния секущей плоскости от точки O — центра симметрии куба.

94. В правильной треугольной призме через сторону нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол φ. Площадь полученного сечения равна Q. Найти объем призмы.

95. Радиус основания конуса равен r, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α. В этом конусе проведена плоскость через его вершину под углом β к его высоте. Определить истинную величину и площадь полученного сечения.

96. Основанием прямой четырехугольной призмы служит ромб с острым углом α. Под каким углом к основанию нужно провести плоскость, чтобы в сечении получить квадрат?

97. Рассматривается проекция куба с ребром a на плоскость, перпендикулярную одной из диагоналей куба. Во сколько раз площадь проекции будет больше площади сечения куба плоскостью, проходящей через середину диагонали куба перпендикулярно к ней?

98. Из всех ортогональных проекций правильного тетраэдра на различные плоскости найти ту, которая имеет наибольшую площадь.

99. Доказать, что в кубе можно вырезать сквозное отверстие, через которое можно протащить куб таких же размеров.

§ 6. Аксонометрические проекции

Литература: [1] гл. IV, § 27 — 30; [3] гл. III, § 1—10; [4] гл. II, § 14—20.

100. С учетом соответствующих показателей искажения построить аксонометрические проекции точек:

(15, 20, 30); (—20, 20, 15); (5, — 10, 20), (10, —20, — 15):

1) в ортогональной изометрии,
2) в ортогональной диметрии.

101. Даны два показателя искажения для некоторой прямоугольной аксонометрической проекции: $u = 0{,}75$, $v = 0{,}81$. Определить третий показатель искажения и построить аксонометрические оси.

102. Показать, что аксонометрические и вторичные проекции одной и той же плоской фигуры являются фигурами соответственными в перспективно-аффинном соответствии, осью которого служит след плоскости на соответствующей плоскости координат.

103. Какое соответствие устанавливается между аксонометрическими проекциями точек A плоскости α и их вторичными проекциями A_3, если:

1) плоскость α совпадает с плоскостью $X_0O_0Y_0$;

2) плоскость α параллельна оси O_0Z_0 (или проходит через нее);

3) плоскость α параллельна направлению проектирования?

Позиционные задачи аксонометрии

104. Найти следы прямой на плоскостях координат, если прямая задана:

1) аксонометрической проекцией a и вторичной проекцией a_2;

2) аксонометрической проекцией m и вторичной проекцией m_3.

Решение (1). Так как прямая a_0 задана аксонометрической проекцией a и вторичной проекцией a_2 (черт. 17), то точка a_{zx} пересечения прямых a и a_2 является следом прямой a на плоскости XOZ (точнее говоря, a_{zx} является аксонометрической проекцией следа прямой a_0 на плоскости $X_0O_0Z_0$). Для того чтобы найти следы прямой a на других координатных плоскостях, построим вторичные проекции прямой a_0, а именно: a_1 и a_3. С этой целью выберем на прямой a некоторые точки M и N, и, найдя их проекции M_2 и N_2 на плоскость XOZ, построим затем точки M_1, N_1 и M_3, N_3. Тогда $M_1N_1 \equiv a_1$, $M_3N_3 \equiv a_3$ и искомые следы будут:

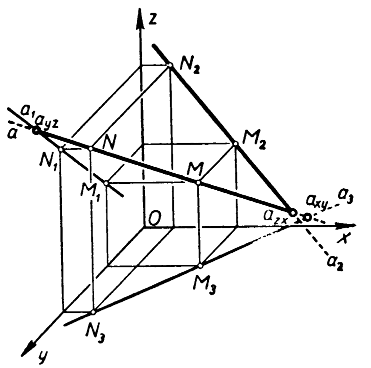
$$a_{yz} \equiv a \times a_1,$$
$$a_{xy} \equiv a \times a_3.$$

105. Заданы два следа прямой, найти ее третий след.

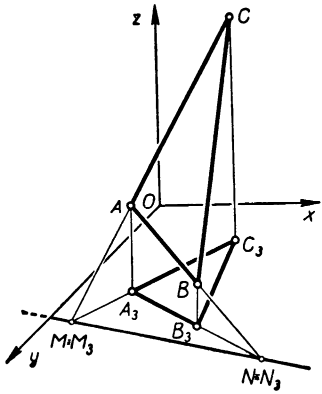
106. Построить следы плоскости на плоскостях координат, если плоскость задана тремя точками:

1) $A, A_3;\ B, B_3;\ C, C_3;$
2) $A, A_2;\ B, B_2;\ C, C_2.$

Решение (1). Между точками плоскости ABC и точками координатной плоскости XOY устанавливается перспективно-аффинное соответствие, ось которого и будет следом плоскости ABC на плоскости XOY (черт. 18). Найдя точки $M_3 \equiv AC \times A_3C_3$ и $N_3 \equiv AB \times A_3B_3$, имеем M_3N_3 — один из искомых следов.



Черт. 17.



Черт. 18.

Найдя затем вторичные проекции A_2, B_2, C_2 точек A_0, B_0, C_0 и используя устанавливаемое между плоскостями ABC и YOZ перспективно-аффинное соответствие, найдем след плоскости ABC на плоскости YOZ. Аналогично можно найти и третий след.

107. Дан один из следов плоскости на плоскостях координат и точка, принадлежащая этой плоскости. Построить два других следа плоскости.

Указание. Воспользоваться перспективно-аффинным соответствием, которое здесь задается осью и парой соответственных точек.

108. Найти следы плоскости заданной двумя пересекающимися прямыми:

1) (m, m_3) и (l, l_3);
2) (a, a_2) и (b, b_2).

Указание. Воспользоваться перспективно-аффинным соответствием.

109. Найти линию пересечения двух плоскостей, из которых каждая задана своими следами.

Изображение многогранников и круглых тел в аксонометрии

В задачах 110—118 выполнить построение в следующих трех проекциях:

1) в кабинетной,
2) в прямоугольной изометрии,
3) в прямоугольной диметрии.

110. Построить изображение прямоугольного параллелепипеда, основание которого лежит в плоскости $X_0O_0Y_0$ и не имеет общих точек с осями координат.

111. Построить изображение правильной шестиугольной призмы, основание которой лежит в плоскости $X_0O_0Z_0$ и ось совпадает с осью O_0Y_0.

112. Построить изображение правильной треугольной (четырехугольной, шестиугольной) пирамиды, основание которой лежит в плоскости $Y_0O_0Z_0$, а высота — на оси O_0X_0.

113. Построить изображение кругового цилиндра, основание которого лежит в плоскости $X_0O_0Y_0$ и касается осей O_0X_0 и O_0Y_0, а высота параллельна оси O_0Z_0.

114. Построить изображение кругового конуса, основание которого лежит в плоскости $Y_0O_0Z_0$, а высота — на оси O_0X_0.

115. Построить изображение шара, центр которого находится в точке с координатами (1, 1, 0), если начало координат лежит на поверхности шара.

116. Построить изображение кругового конуса, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, если стороны основания пирамиды параллельны осям O_0X_0 и O_0Y_0, основание лежит в плоскости $X_0O_0Y_0$, а высота — на оси O_0Z_0.

117. Построить изображение кругового цилиндра, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, основание которой лежит в плоскости $Y_0O_0Z_0$, причем начало координат является одной из вершин основания и высота параллельна оси O_0X_0. (Высоту цилиндра принять равной половине высоты пирамиды.)

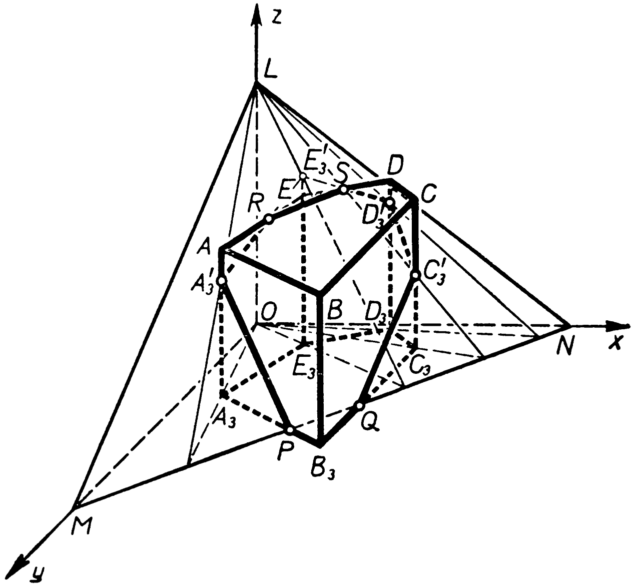
118. Построить чертеж к следующей задаче: «В куб с ребром a поместить три цилиндра, каждый высотой a

и диаметром основания $\frac{a}{2}$, так, чтобы они не могли передвигаться».

119. Дано основание прямой пятиугольной призмы. Найти ее сечение плоскостью, данной своими следами, если основание лежит:

1) в плоскости $X_0O_0У_0$;

2) в плоскости $У_0O_0Z_0$.



Черт. 19.

Решение (1). Пусть призма и секущая плоскость расположены, как указано на чертеже 19. Тогда MN — ось перспективно-аффинного соответствия, устанавливаемого между точками секущей плоскости и плоскости $XOУ$, а пара точек O и L — это пара соответственных точек. Таким образом, соответствие вполне определенно. Найдем точки A_3', E_3', D_3' и C_3', соответственные точкам A_3, E_3, D_3 и C_3. Многоугольник $PA_3'RSD_3'C_3'Q$ — искомое сечение.

120. Построить аксонометрическое изображение какой-либо треугольной пирамиды, имеющей основание в плоскости $X_0O_0У_0$, и найти ее пересечение с прямой, заданной своими вторичными проекциями (l_2, l_3). Определить видимые части прямой, предполагая пирамиду непрозрачной.

121. В данной диметрической проекции $e_x = e_z = 2e_y$ с прямым углом $X_0O_0Z_0$ и углом $Z_0O_0Y_0 = 120°$ построить правильную треугольную пирамиду с основанием, лежащим в плоскости $X_0O_0Y_0$, ребром основания, равным 3 единицам, и боковым ребром, равным 2,5 единицы.

122. В изометрической проекции построить проекцию куба с ребрами, параллельными координатным осям, и найти сечение этого куба плоскостью, проходящей через центр куба и перпендикулярной к одной из его диагоналей.

123. В триметрических ортогональных проекциях, в которых $e_x : e_y : e_z = 5 : 9 : 10$, построить проекцию прямого кругового конуса с радиусом основания 3 единицы и высотой 4 единицы. Основание конуса лежит в плоскости $X_0O_0Y_0$.

Часть II

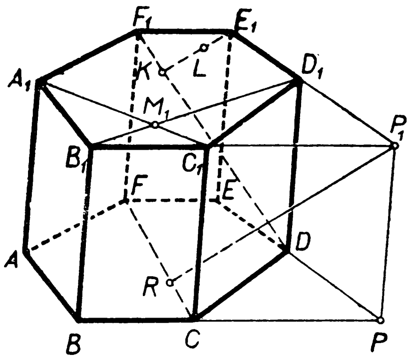
ПОЛНЫЕ И НЕПОЛНЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ

§ 7. Позиционные задачи на полных изображениях

Литература: [2] гл. III, § 12—21; [1] гл. II, § 7—13; [4] гл. IV, § 33—36.

124. Указать, какие из точек, обозначенных на чертеже 20 (шестиугольная призма), являются точками нулевого, первого,... классов, если за основные плоскости принять плоскости:

1) ABC и A_1AB;
2) B_1BC и E_1ED;
3) $A_1B_1C_1$ и F_1FC.



Черт. 20.

Решение (1). Так как плоскость ABC основная, то точки A, B, C, D, E, F, P, R — нулевого класса. Точно так же точки A_1 и B_1 — нулевого класса. Так как $CC_1 \parallel BB_1$, то прямая CC_1 — первого класса, т. е. точка C_1 — первого класса. Аналогично D_1, E_1, F_1 и P_1 — точки первого класса.

Прямые F_1D и P_1R — второго класса (каждая из них определяется точкой первого и точкой нулевого класса). Поэтому и точка K — второго класса (и не построенная на чертеже точка пересечения прямой P_1R с плоскостью C_1CD — тоже точка второго класса).

Далее, очевидно, что прямая KE_1 — третьего класса (так как точка K — второго класса, а точка E_1 — первого). И наконец, нетрудно видеть, что прямые A_1C_1 и B_1D_1 — второго класса и точка M_1 — второго класса.

Итак, точки нулевого класса: A, B, C, D, E, F, P, R, A_1, B_1;

точки первого класса: C_1, D_1, E_1, F_1, P_1;
точки второго класса: M_1, K;
точки третьего класса: L.

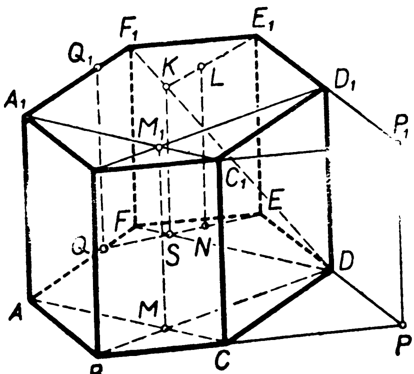
125. При помощи построений сделать точки второго и третьего классов, обозначенные на чертеже 20, точками первого класса; за основные плоскости приняты плоскости:

1) ABC и A_1AB;
2) B_1BC и E_1ED;
3) $A_1B_1C_1$ и F_1FC.

Решение (1). Если плоскости ABC и A_1AB приняты за основные, то, как следует из решения предыдущей задачи, точки M_1 и K — второго класса, а точка L — третьего класса.

Проведем диагонали BD и AC основания призмы. Пусть M — точка их пересечения (черт. 21).

Очевидно, $MM_1 \parallel BB_1$, так как плоскость $ACC_1 \parallel BB_1$ и плоскость BDD_1 проходит через BB_1. Тогда, так как точка M — нулевого класса и плоскость A_1AB — нулевого класса, а $MM_1 \parallel BB_1$, т. е. MM_1 параллельна плоскости A_1AB, то прямая MM_1 — первого класса, поэтому и точка M_1 становится точкой первого класса. Проведем теперь диагональ FD и через точку K в плоскости F_1FD проведем прямую $KS \parallel FF_1$. Тогда $KS \parallel BB_1$. Точка S — нулевого класса, плоскость A_1AB — нулевого класса, следовательно, прямая KS — первого класса, т. е. и точка K становится точкой первого класса.



Черт. 21.

Проведя теперь в плоскости основания прямую ES до пересечения с какой-либо стороной основания, например, как на чертеже 21, со стороной AF в точке Q, построив затем плоскость E_1EQ и проведя в ней $LN \parallel EE_1$, убеждаемся, что точка L становится точкой первого класса.

126. В изображении пирамиды $SABCDEF$ определить класс всех вершин, ребер и граней, приняв за основные плоскости:

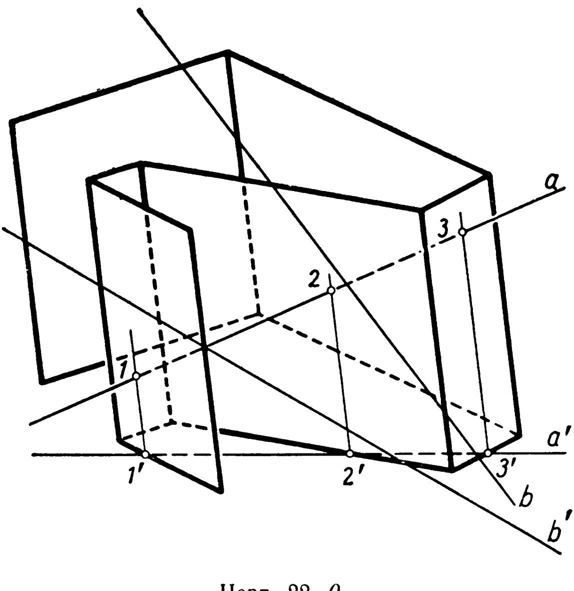
1) SAB и ABC;
2) SAB и SBC;
3) SAD и SAC.

При решении задач 126—138 требуется предварительно установить полноту изображения.

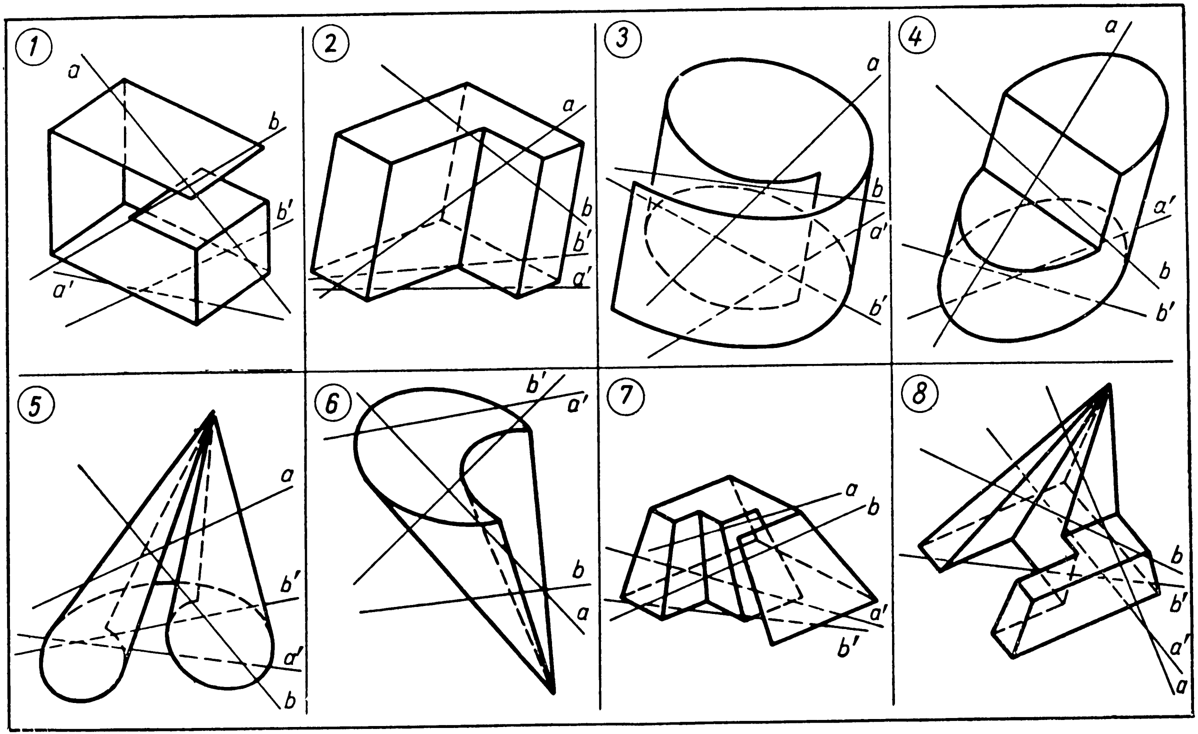
127. На чертежах 22, *0—8* даны изображения различных поверхностей и тел, а также прямых a и b (a' и b' — соответственные проекции прямых a и b на плоскость основания).

Построить точки пересечения прямых a и b с данными поверхностями и телами.

Решение (черт. 22, *0*). Приняв плоскость основания и одну из боковых граней за основные плоскости и учитывая, что все боковые ребра поверхности параллель-



Черт. 22, *0*.



Черт. 22, *1—8*.

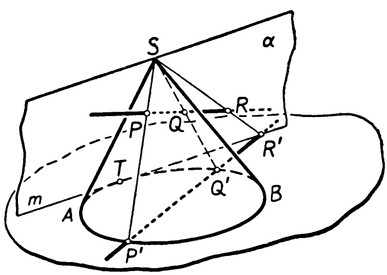
ны боковой грани, выбранной в качестве основной плоскости, заключаем, что изображение данной поверхности полное. Прямая a задана вместе со своей проекцией a' на основную плоскость; таким образом, полным является все изображение, т. е. все инциденции на нем могут быть определены.

Найдем точки пересечения прямой a' с ломаной, лежащей в основании поверхности, пусть это будут точки $1'$, $2'$, $3'$. Через эти точки проведем в соответственных гранях поверхности прямые, параллельные боковому ребру, и найдем точки 1, 2, 3 пересечения этих прямых с прямой a. Очевидно, точки 1, 2, 3 и будут искомыми. Действительно, каждая из них лежит и на прямой a, и в одной из граней данной поверхности.

Указание к задачам 5—8. В отличие от предыдущих четырех задач, где прямые a' и b' являются параллельными проекциями прямых a и b, в задачах 5—8 прямые a' и b' являются центральными проекциями прямых a и b на плоскость основания.

128. На поверхности конуса даны точки P и Q и дана плоскость α, касательная к поверхности конуса. Найти пересечение прямой PQ с плоскостью α.

Решение. Установим сначала, что изображение конуса с касающейся его плоскостью и пересекающей его прямой полное (черт. 23). Примем плоскости SAB и ABT за основные плоскости. Тогда прямые SP и SQ — первого класса (S — нулевого класса, P' и Q' — нулевого класса), следовательно, точки P и Q — первого класса, а прямая PQ — второго класса.

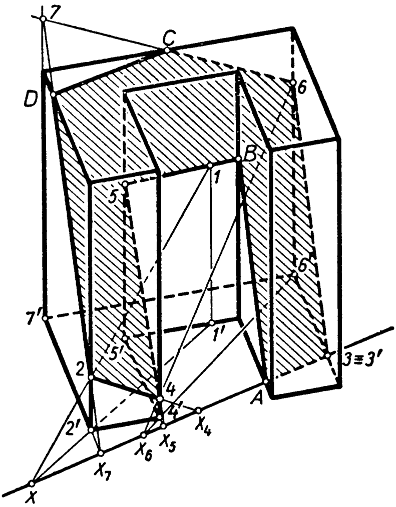


Черт. 23.

Прямая m — пересечение плоскостей α и ABT — нулевого класса и S — точка нулевого класса, поэтому плоскость α — первого класса. Учитывая еще, что изображение конуса полное, заключаем, что все изображение полное, т. е. все инциденции на нем могут быть определены. Искомая инциденция — точка пересечения прямой PQ с плоскостью α. Найдем ее. Через найденные выше точки P' и Q' проведем прямую $P'Q'$ до пересечения с прямой m

в некоторой точке R' и точку R' соединим с точкой S. Пусть прямая PQ не параллельна прямой SR', тогда точка $R \equiv PQ \times SR'$ искомая. Действительно, $R \in SR'$, следовательно, $R \in \alpha$, кроме того, $R \in PQ$.

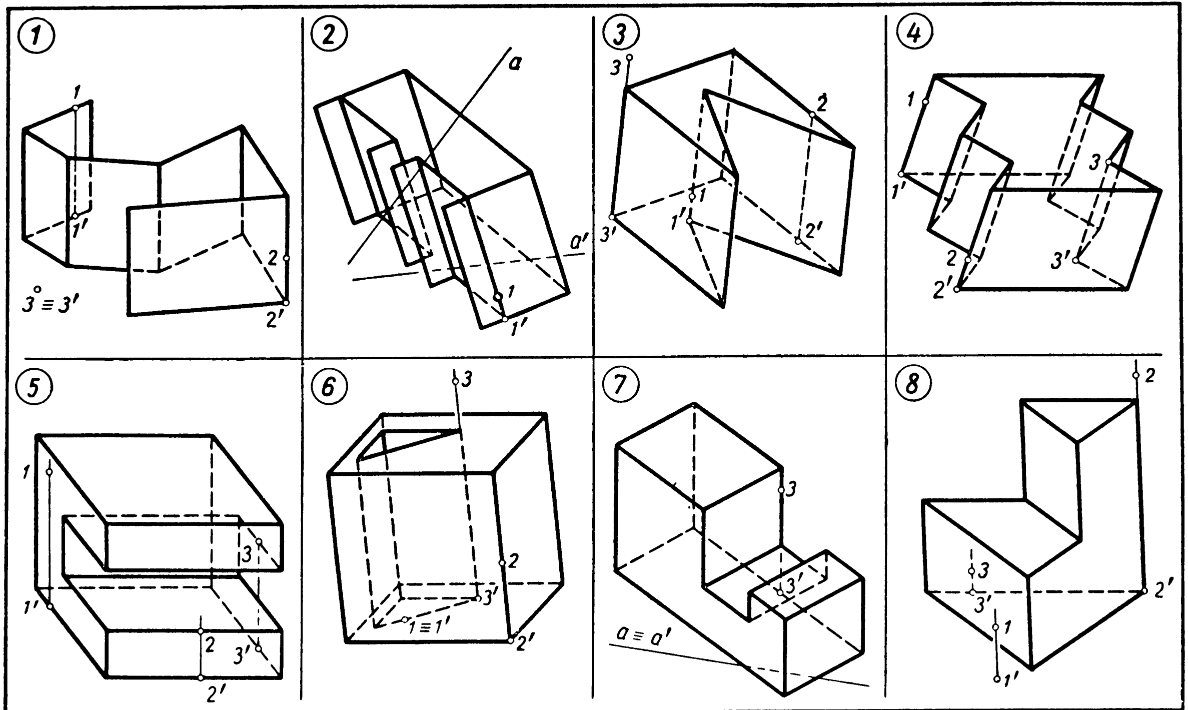
129. На трех различных боковых ребрах четырехугольной пирамиды даны точки и через вершину пирамиды проведена прямая, пересекающая основание пирамиды. Найти пересечение этой прямой с плоскостью, заданной тремя точками, принадлежащими боковым ребрам.



Черт. 24, *0*.

130. На чертежах 24, *0—8* даны изображения призматических поверхностей (незамкнутых) и различных призм (в частности, призмы *5* и *7* поставлены на одну из боковых граней, а призма *8* имеет ступенчатый срез-плоскость которого параллельна плоскости основания). Заданы также секущие плоскости: в задачах *2* и *7* — точкой и прямой, в остальных задачах — тремя точками. Построить сечения данных поверхностей и тел заданными плоскостями.

Р е ш е н и е (черт. 24, *0*). Легко установить, что заданное изображение полное. Для решения воспользуемся перспективно-аффинным соответствием, которое устанавливается между точками секущей плоскости и точками плоскости основания (соответствие определяется здесь тремя парами соответственных точек: *1*, *1'*; *2*, *2'*; *3*, *3'*, лежащих на параллельных прямых: *11'*, *22'* и *33'*). Известно, что на каждой прямой, параллельной направлению проектирования, пара соответственных в данном перспективно-аффинном соответствии точек имеется, причем одна из точек этой пары нам известна (точнее, мы ее выбираем сами), а именно точка, лежащая в основании призмы. Соответственная ей точка будет единственной, и, как нетрудно убедиться, она будет принадлежать секущей плоскости.


1
1
1'
3 ≡ 3'
2
2'
2
a
a'
1
1'
3
3
2
1
1'
3'
2'
4
1
1'
3
2
3'
2'
5
1
1'
3
2
3'
2'
6
3
2
3'
1 ≡ 1'
2'
7
3
3'
a ≡ a'
8
2
3
3'
2'
1
1'

Черт. 24, *1 — 8*.

Выбрав целесообразно точки, лежащие в основании призмы, воспользуемся указанными обстоятельствами для нахождения точек, лежащих на ребрах призмы и в секущей плоскости.

Найдем сначала ось соответствия, для чего построим точку $X \equiv 12 \times 1'2'$. Тогда прямая $3X$ и будет осью. Далее построим точку, соответственную точке $4'$:

$$2'4' \times 3X \equiv X_4, \ 2X_4 \times 44' \equiv 4.$$

(Прямая $44'$ параллельна боковому ребру призмы. Аналогично прямые $55'$, $66'$, $77'$, которые потребуется проводить для нахождения точек 5, 6, 7, также параллельны боковому ребру призмы, т. е. направлению проектирования.) Затем найдем точку 5, соответственную точке $5'$:

$$5'4' \times 3X \equiv X_5, \quad 4X_5 \times 55' \equiv 5.$$

Точки 5 и 1 лежат в одной грани, что позволяет без дополнительных построений найти на следующем ребре точку B, которая вместе с точкой A определяет пересечение секущей плоскости еще с одной гранью призмы. Находим далее точки 6 и 7:

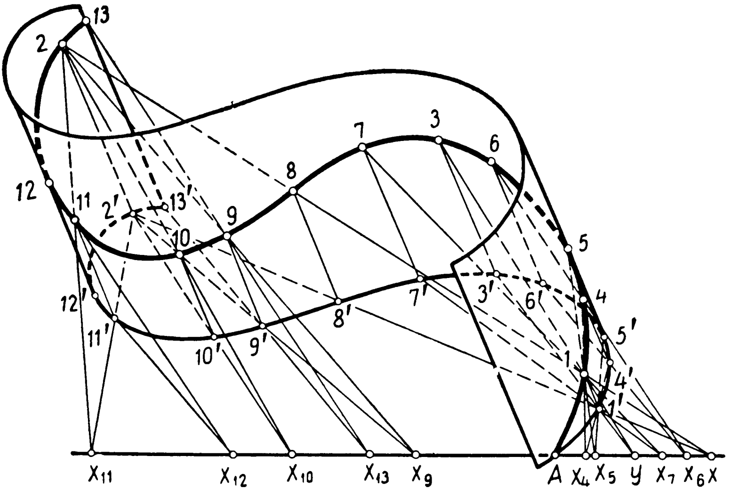
$$6'4' \times 3X \equiv X_6, \quad 4X_6 \times 66' \equiv 6;$$
$$7'2' \times 3X \equiv X_7, \quad 2X_7 \times 77' \equiv 7.$$

Прямые 67 и 27 дают в верхнем основании точки C и D. Таким образом, искомая линия сечения будет:

$$36CD245BA3.$$

131. На чертежах 25, *0—8* даны изображения цилиндрических поверхностей (незамкнутых) и различных цилиндров (в частности, цилиндр *7* имеет ступенчатый срез, плоскость которого параллельна плоскости основания, а цилиндр *8* имеет призматическое сквозное отверстие, ребра которого, не лежащие в основаниях, параллельны образующей цилиндра). Заданы также секущие плоскости: в задаче *5*—прямой и не лежащей на ней точкой, в остальных задачах — тремя точками (не всегда лежащими на заданных поверхностях или поверхностях цилиндров). Построить сечения поверхностей и тел заданными плоскостями.

Решение (черт. 25, *0*). Изображение цилиндрической поверхности всегда полное. Выбрав, например, плоскости $1'2'3'$ и $1'12$ в качестве основных плоскостей, получаем, что точка 3 — первого класса, а плоскость 123—



Черт. 25, *О*.

второго класса. Таким образом, все элементы изображения определены, поэтому оно является полным, значит, на нем можно определить все инциденции. Для определения искомой линии пересечения воспользуемся перспективно-аффинным соответствием, между точками секущей плоскости и точками плоскости основания.

Найдем ось XY этого соответствия ($X \equiv 12 \times 1'2'$, $Y \equiv 13 \times 1'3'$). Проводя ось, получаем на направляющей цилиндрической поверхности точку A. Выберем теперь на направляющей цилиндрической поверхности точки $4'$, $5'$ $6'$,... и найдем им соответственные точки 4, 5, 6, ..., а именно:

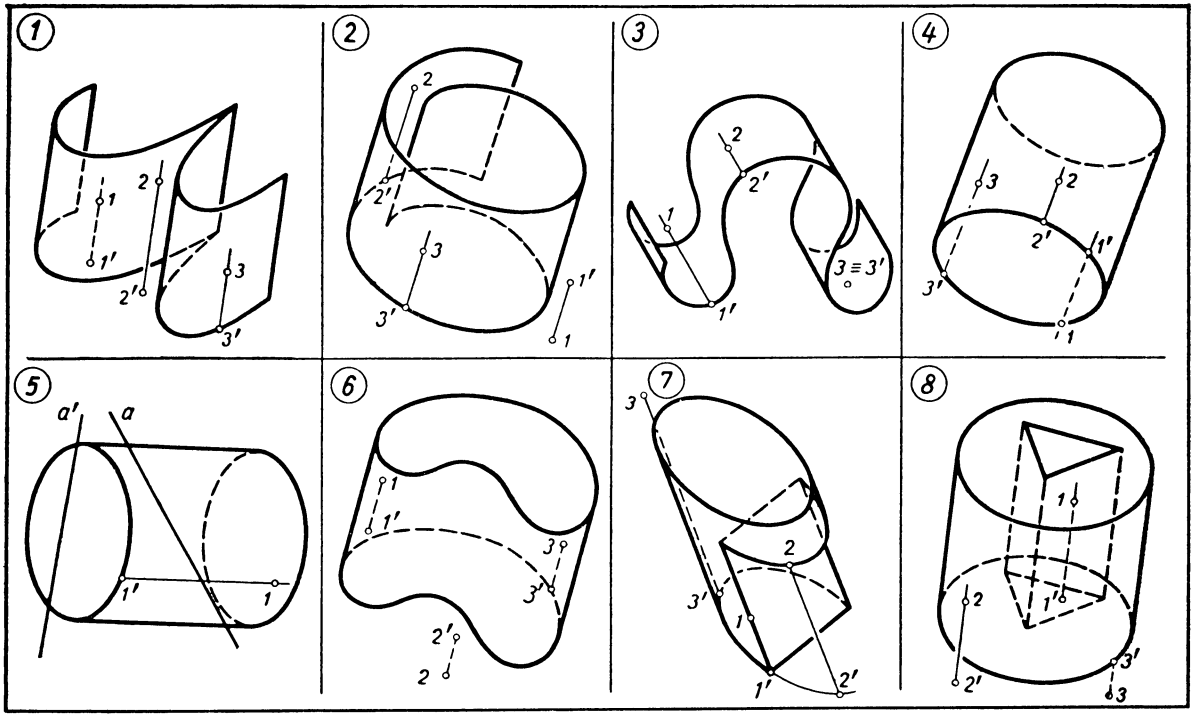
$$
\begin{array}{ll}
4'1' \times XY \equiv X_4, & 1X_4 \times 44' \equiv 4; \\
5'1' \times XY \equiv X_5, & 1X_5 \times 55' \equiv 5; \\
6'4' \times XY \equiv X_6, & 4X_6 \times 66' \equiv 6; \\
\dots\dots, & \dots\dots\dots,
\end{array}
$$

где прямые $44'$, $55'$, $66'$,... параллельны образующей цилиндра.

Искомая линия сечения будет:

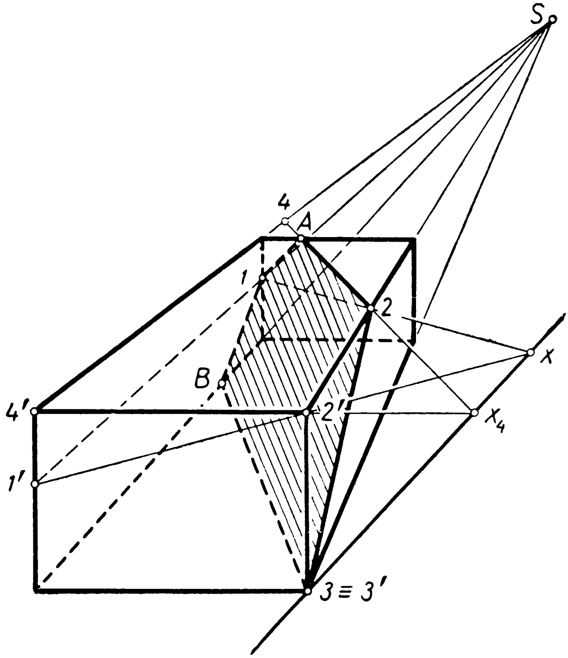
$$A\ 1\ 4\ 5\ 6\ 3\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 2\ 13.$$

Каждая точка этой линии лежит и на цилиндрической поверхности (так как соответственные точки



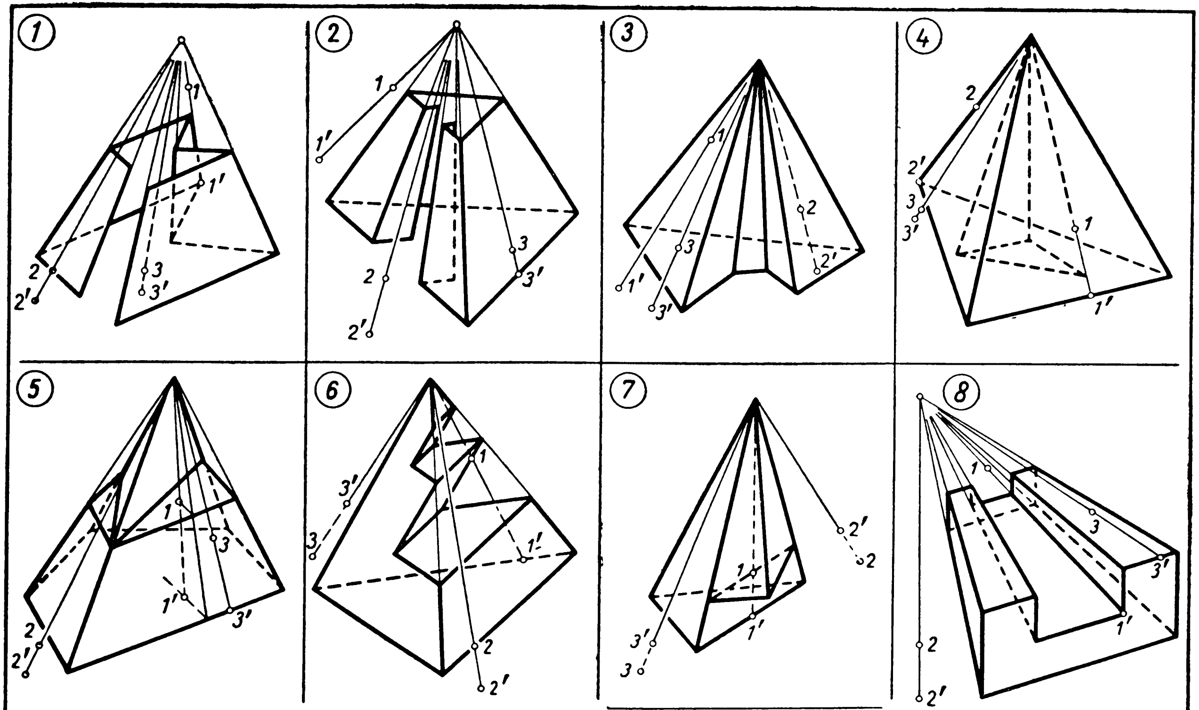
Черт. 25, *1—8*.

1′, *4′*, *5′*,... лежат на направляющей, а прямые *11′*, *44′*, *55′*,... параллельны образующей цилиндрической поверхности), и в секущей плоскости (так как точки *1*, *4*, *5*,... являются соответственными точками *1′*, *4′*, *5′*,... в перспективно-аффинном соответствии, установленном между секущей плоскостью *123* и плоскостью основания *1′2′3′*).



Черт. 26. *0.*

132. На чертежах 26, *0—8* даны изображения незамкнутых поверхностей с плоскими гранями (*1* и *2*), ребра которых пересекаются в одной точке, и различных пирамид (*3—8*), в частности, внутри пирамиды *4* отверстие, имеющее форму треугольной пирамиды; пирамиды *5* и *6* имеют ступенчатые срезы, плоскости которых параллельны плоскости основания, а усеченная пирамида *8* расположена таким образом, что ее основание обращено к наблюдателю (другими словами, она положена на боковую грань). Заданы также секущие плоскости, в каждом случае тремя точками (в частности, в первой задаче точки *2* и *3* не лежат на по-



Черт. 26, *1—8*.

верхности, во второй—точки 1 и 2 не лежат на поверхности, в третьей — все три точки не лежат на поверхности пирамиды и т. д.).

Построить сечения данных поверхностей и тел заданными плоскостями.

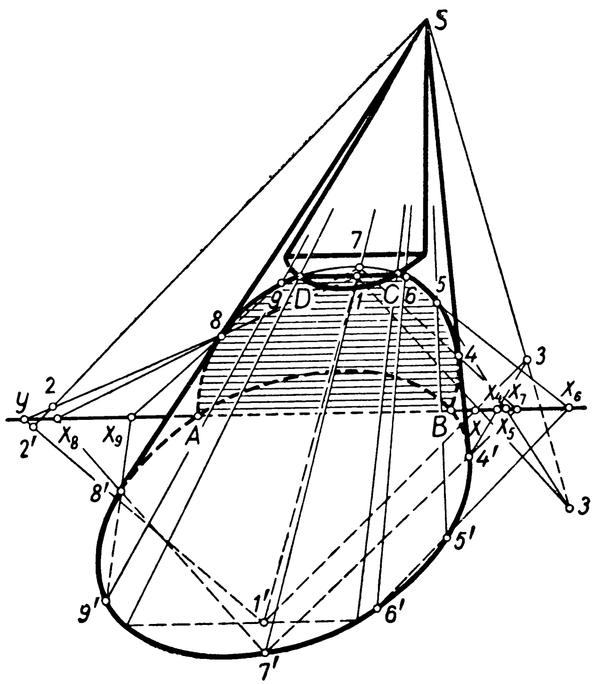
Решение (черт. 26, *0*.) Чтобы обосновать полноту изображения, выберем на нем две плоскости в качестве основных, а именно плоскости $1'2'3'$ и $22'3'$, тогда боковые грани (кроме грани $22'3'$) будут плоскостями первого класса, а верхнее основание — плоскостью второго класса. Секущая плоскость, заданная точками 2 и 3 нулевого класса, и точкой 1 — первого класса, будет также плоскостью второго класса. Таким образом, все изображение полное, т. е. все инциденции на нем могут быть определены. Воспользуемся для их нахождения соответствием гомологии, которое устанавливается между точками секущей плоскости 123 и плоскости основания $1'2'3'$. Найдем ось этой гомологии: $X \equiv 12 \times 1'2'$, и так как $3 \equiv 3'$, то $3X$ — ось. Найдем точку, соответственную точке $4'$:

$$4'2' \times 3X \equiv X_4, \quad 2X_4 \times S4' \equiv 4.$$

После нахождения точки 4 искомое сечение по существу уже определилось. А именно, проведя прямую $2X_4$, мы получаем точку A, а проведя прямую 14 — точку B. Искомое сечение: $32A1B3$.

133. На чертежах 27, *0—8* даны изображения конических поверхностей (чертежи *1* и *2*) и различных конусов (в частности, конус *4* имеет трехгранный выступ; конус *5* имеет серповидное основание и на изображении две его образующие 11 и $22'$ сливаются; конус *0* имеет ступенчатый срез, плоскость которого параллельна плоскости основания; в задаче *6* заданы часть конуса и часть его же боковой поверхности; усеченные конусы *7* и *8* обращены основаниями к наблюдателю). Заданы также секущие плоскости, в каждом случае тремя точками. Построить сечения данных поверхностей и тел заданными плоскостями.

Решение (черт. 27, *0*). Выберем плоскости $1'2'3$ и $11'3'$ в качестве основных. Тогда S — вершина конуса —будет точкой нулевого класса, образующие конуса будут прямыми первого класса, а плоскость срезанной ступеньки — плоскостью второго класса. Секущая плоскость будет, очевидно, плоскостью второго класса, так как точка 2 — первого класса, а точки 1 и 3 — нулевого класса.



Черт. 27, *0.*

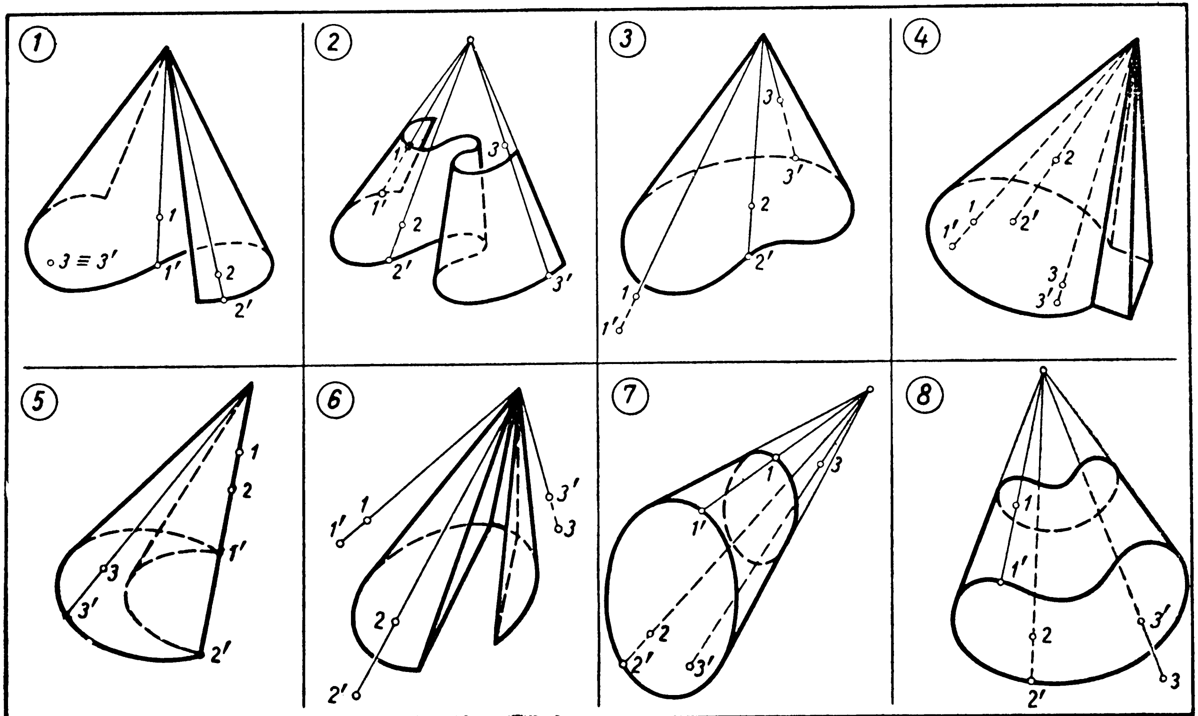
Таким образом, все изображение полное, и, следовательно, все инциденции на нем могут быть определены. Воспользуемся для нахождения искомого сечения соответствием гомологии, которое устанавливается между точками секущей плоскости и плоскости основания. Найдем ось гомологии:

$X \equiv 13 \times 1'3'$, $Y \equiv 12 \times 1'2'$, XY — ось гомологии.

Построим точки 4, 5,..., соответственные точкам $4'$, $5'$,...:

$$4'3' \times XY \equiv X_4; \qquad 3X_4 \times S4' \equiv 4;$$
$$4'5' \times XY \equiv X_5; \qquad 4X_5 \times S5' \equiv 5;$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

Полученные точки определяют на поверхности конуса кривую 456798, которая пересекает ступенчатый срез в точках C и D. Учитывая еще, что ось гомологии лежит в секущей плоскости и в плоскости основания и, следовательно, точ-

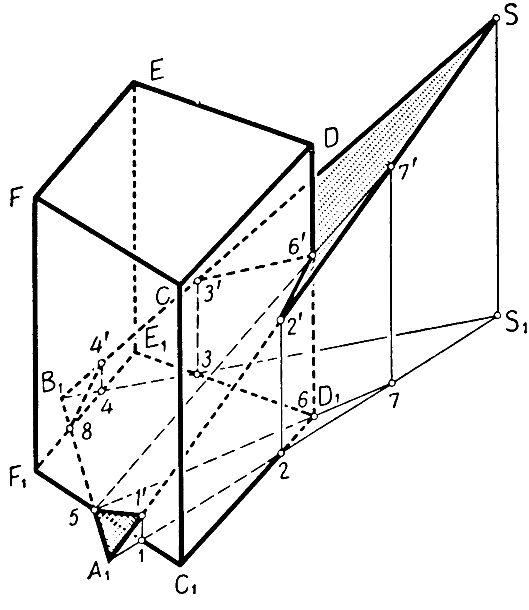

1
3 ≡ 3′
1
1′
2
2′
2
1
1′
2
2′
3
3′
3
3
3′
2
2′
1
1′
4
2
1
1′
2′
3
3′
5
1
2
1′
3
3′
2′
6
1
1′
2
2′
3′
3
7
1
1′
3
2
2′
3′
8
1
1′
2
2′
3′
3

Черт. 27, *1 — 8*.

ки A и B — точки пересечения оси XY с направляющей конуса — принадлежат линии сечения, имеем искомую линию: $B456CD98AB$, где прямая CD проходит через точку 1.

134. Даны четырехугольная призма и треугольная пирамида, расположенные таким образом, что их основания $C_1D_1E_1F_1$ и $A_1B_1S_1$ лежат в одной плоскости и ребро SS_1 пирамиды параллельно боковому ребру призмы. Найти пересечение грани SA_1B_1 с поверхностью призмы.

Решение. Пусть данные призма и пирамида расположены, как указано на чертеже 28. Выберем какую-нибудь пару плоскостей в качестве основных, например



Черт. 28.

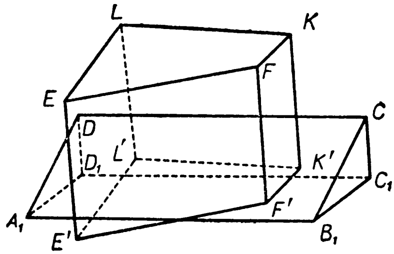
плоскости $A_1B_1S_1$ и CDD_1. Изображение призмы полное. Так как по условию $SS_1 \parallel DD_1$ и, из нашего выбора основных плоскостей, прямая DD_1 — нулевого класса и точка S_1 — нулевого класса, то прямая SS_1 — первого класса и, следовательно, точка S — первого класса. Таким образом, все изображение полное, поэтому все инциденции на нем могут быть определены (если они еще не определены). Нас интересуют в первую очередь инциденции прямых SA_1 и SB_1 с гранями призмы.

Пусть S_1A_1 пересекает F_1C_1 в точке *1*, а C_1D_1 — в точке *2*. Проведя через точки *1* и *2* прямые, параллельные DD_1, найдем на прямой SA_1 точки *1'* и *2'* — точки пересечения SA_1 с гранями CC_1F_1 и CDD_1. Аналогично найдем точки *3'* и *4'*.

Чтобы найти точку пересечения плоскости SA_1B_1 с ребром DD_1 (из чертежа легко видно, что других боковых ребер призмы грань SA_1B_1 не пересекает), через точку *5* ($5 \equiv A_1B_1 \times F_1C_1$) и точку D_1, которую мы обозначим также *6*, проведем прямую *56* и ее пересечение с S_1A_1 обозначим *7*. Рассмотрим плоскость $5D_1D$. Она пересекается с плоскостью SA_1S_1 по прямой, проходящей через точку *7*, причем эта прямая параллельна DD_1. Проведем эту прямую *77'* в плоскости SA_1S_1 и затем соединим точки *5* и *7'*. Прямая *57'* пересекает DD_1 в некоторой точке *6'*, которая и есть точка пересечения грани SA_1B_1 с ребром DD_1. Действительно, точка *6'* лежит и на ребре DD_1, и в грани SA_1B_1, так как она лежит на прямой *57'*, которая в свою очередь лежит в грани SA_1B_1.

Соединив теперь точки *3'* с *6'* и *6'* с *2'*, получим линию пересечения грани SA_1B_1 с поверхностью призмы, а именно: отрезки *51'*, *84'* и ломаную *3'6'2'*.

135. Две призмы, четырехугольная и треугольная, расположены так, что основание четырехугольной призмы и боковая грань треугольной призмы расположены в одной плоскости (черт. 29) и ребро CC_1 треугольной призмы параллельно боковому ребру четырехугольной призмы. Найти пересечение грани CDA_1B_1 с поверхностью четырехугольной призмы.

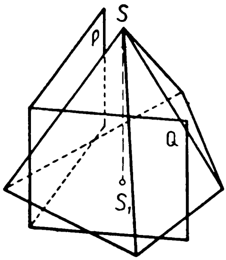


Черт. 29.

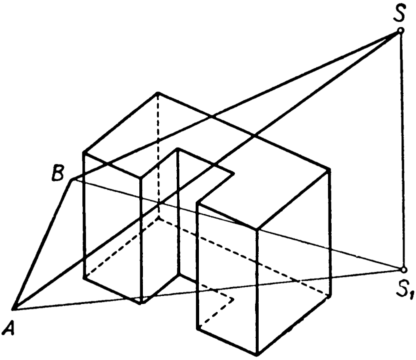
136. Четырехугольная пирамида и двугранный угол расположены, как указано на чертеже 30, причем ребро двугранного угла параллельно высоте пирамиды, основание которой указано. Найти пересечение граней двугранного угла с поверхностью пирамиды.

137. П-образная призма и треугольная пластинка SAB расположены, как указано на чертеже 31.

Вершина S пластинки спроектирована на плоскость основания призмы, в которой лежит и основание пластинки, параллельно боковому ребру призмы. Найти пересечение пластинки с поверхностью призмы.



Черт. 30.

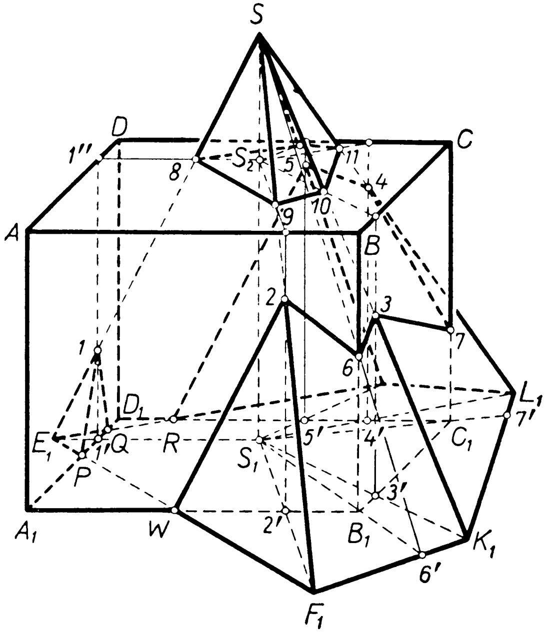


Черт. 31.

138. Построить линии пересечения многогранников, изображения которых даны на чертежах 32, *0—8*.

Решение (черт. 32,*0*). Нетрудно установить, что заданное изображение полное. Действительно, выберем плоскость, в которой лежит основание $A_1B_1C_1D_1$ призмы и основание $E_1F_1K_1L_1M_1$ пирамиды, за одну из основных плоскостей и, например, грань ADD_1A_1 призмы — за вторую основную плоскость. Изображение призмы полное. А так как вершина S пирамиды спроектирована на плоскость основания параллельно боковому ребру призмы, то прямая SS_1 — первого класса и, следовательно, точка S — первого класса. Таким образом, на заданном изображении могут быть определены все инциденции.

Для построения точек пересечения ребер пирамиды с боковыми гранями призмы соединим вершину E_1 основания пирамиды с точкой S_1 и через полученную точку $1' \equiv$ $\equiv E_1S_1 \times A_1D_1$ проведем в грани ADD_1A_1 прямую, параллельную AA_1. Полученная точка $1 \equiv 11' \times E_1S$ будет точкой пересечения ребра E_1S с гранью ADD_1A_1, так как $1 \in E_1S$ и $1 \in 11'$, причем $11' \in$ пл. ADD_1A_1, таким образом, точка 1 принадлежит и ребру E_1S, и грани ADD_1A_1. Аналогично найдем точки: $2' \equiv F_1S_1 \times \times A_1B_1$, $3' \equiv K_1S_1 \times B_1C_1$, $4' \equiv L_1S_1 \times D_1C_1$, $5' \equiv \equiv M_1S_1 \times D_1C_1$, а затем и точки 2, 3, 4, 5. Как видно из чертежа, ребра AA_1 и DD_1 граней пирамиды не пересекают, так как точки A_1 и D_1 лежат вне основания пирамиды, а ребра BB_1 и CC_1 пересекают. Найдем их точки пересечения. Проведем прямую B_1S_1, до пересечения с F_1K_1

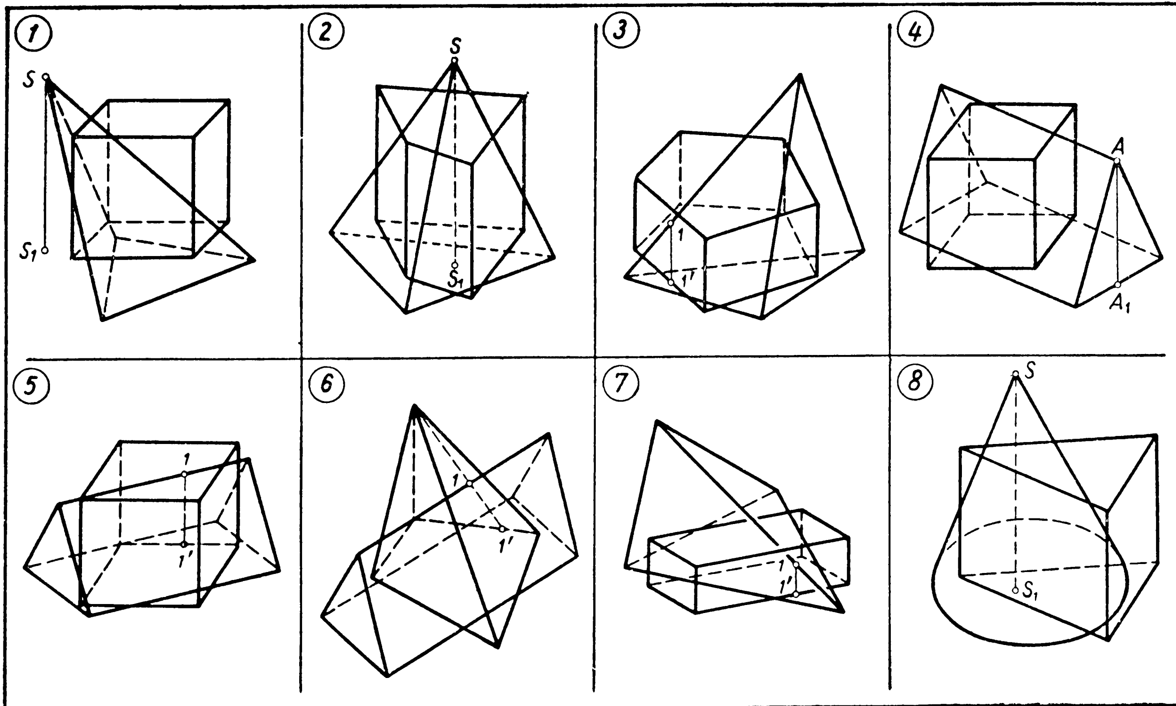


Черт. 32, *0*.

в некоторой точке $6'$. Соединим точку $6'$ с точкой S. Тогда прямые $S6'$ и BB_1 лежат в одной плоскости SS_1B. Пусть прямые B_1S и $S6'$ пересекутся в точке 6. Так как точка $6 \in BB_1$ и $6 \in S6'$, а $S6' \in$ пл. SF_1K_1, то эта точка 6 и есть точка пересечения ребра BB_1 с гранью SF_1K_1.

Аналогично находим точку $7' \equiv C_1S_1 \times K_1L_1$, а затем точку $7 \equiv S7' \times CC'$.

Остается найти еще точки пересечения ребер пирамиды с верхним основанием призмы. Построим для этого точку $S_2 \equiv SS_1 \times$ пл. $ABCD$ следующим образом: найдем точку $1'' \equiv 11' \times AD$ и проведем через точку $1''$ прямую, параллельную E_1S_1. Точка пересечения построенной пря-



Черт. 32, *1 — 8*.

мой с прямой SS_1 и будет S_2. Прямая $S_2 1''$ пересекает SE_1 в точке *8*, которая, очевидно, является точкой пересечения ребра SE_1 с гранью $ABCD$.

Проводя теперь через точку S_2 прямые, параллельные F_1S_1, $K_1S_1, \ldots$, мы найдем на ребрах SF_1, $SK_1, \ldots$ точки *9*, *10*,... . Итак, искомая линия пересечения заданных призмы и пирамиды состоит из трех звеньев: $P1Q$, $W263745R$ и *8 9 10 11 12*.

§ 8. Метрические задачи на полных изображениях

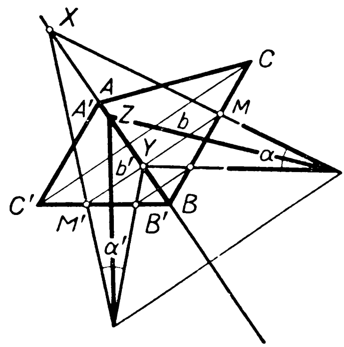
Литература: [1] гл. V, § 31—35; [2] гл. IV, § 22—29; [4] гл. IV, § 37.

Задачи на плоские фигуры

139. Задано изображение равностороннего треугольника и изображение произвольного угла α, лежащего в плоскости этого треугольника.

1) Построить изображение биссектрисы угла α;

2) определить истинную величину угла α.



Черт. 33.

Решение (1). Так как задание изображения равностороннего треугольника (черт. 33) делает плоскость треугольника метрически определенной, то никакие метрические построения в ней не могут быть выполнены произвольно. В частности, изображением биссектрисы данного угла будет вполне определенная прямая. Для ее построения воспользуемся перспективно-аффинным соответствием, а именно: примем одну из прямых AB, BC, CA, например AB, за ось соответствия, построим равносторонний треугольник $A'B'C'$, где $A'B' \equiv AB$, и пару точек C, C' примем за пару соответственных точек. Построим угол α', соответственный углу α в этом соответствии. Построим биссектрису b' угла α' и найдем ей соответственную прямую b. Прямая b и будет изображением искомой биссектрисы.

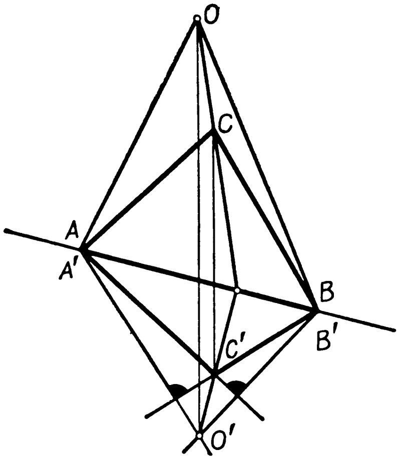
140. Задано изображение равностороннего треугольника и изображение некоторого произвольного треугольника, лежащего в той же плоскости.

1) Построить изображения высот второго треугольника;

2) построить изображения биссектрис второго треугольника;

3) определить истинную форму второго треугольника.

141. Задано изображение треугольника, имеющего отношение сторон $a : b : c = 2 : 3 : 4$. Построить изображения его: 1) высот, 2) биссектрис, 3) ортоцентра.



Черт. 34.

Решение (1). Задание отношения длин трех непараллельных отрезков делает изображение плоскости, в которой лежат эти отрезки, метрически определенной. Поэтому произвол в выполнении дальнейших метрических построений в этой плоскости недопустим. Пусть изображением треугольника, имеющего в оригинале отношение сторон $2 : 3 : 4$, будет треугольник ABC ($BC : CA : AB = 2 : 3 : 4$) (черт. 34). Для построения изображений высот воспользуемся перспективно-аффинным соответствием, осью которого является, например, прямая AB, а парой соответственных точек — точки C и C', где C' — вершина треугольника $A'B'C'$, отношение сторон которого равно $2 : 3 : 4$ и $A'B' \equiv AB$. Построим высоты треугольника $A'B'C'$. Отрезки, соответственные этим высотам в установленном соответствии, и будут изображениями искомых высот.

142. Задано изображение треугольника и изображение двух перпендикуляров к его сторонам.

1) Определить истинную форму этого треугольника;

2) выбрав в плоскости треугольника произвольную прямую и не лежащую на ней точку, построить изображение

перпендикуляра, опущенного из этой точки на выбранную прямую.

143. Дано изображение треугольника и двух его высот.

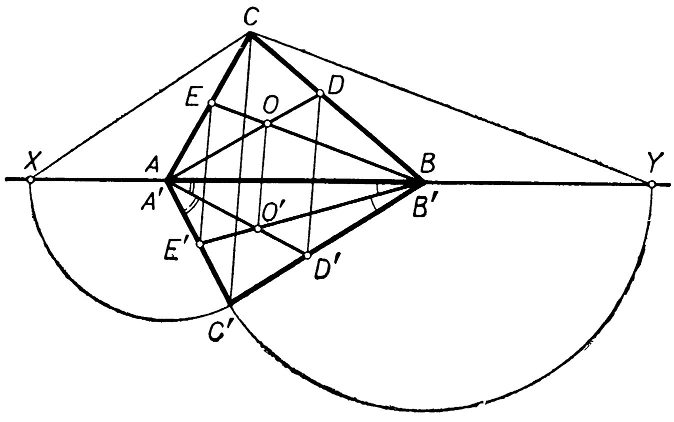
1) Определить истинную форму треугольника;

2) выбрав в плоскости треугольника некоторый угол, построить его биссектрису.

144. Дано изображение треугольника и биссектрис двух его внутренних углов.

1) Определить истинную форму треугольника;

2) построить изображение высот треугольника.



Черт. 35.

Р е ш е н и е (1). Пусть треугольник ABC является изображением треугольника $A_1B_1C_1$ (черт. 35), истинную форму которого требуется определить, а AD и BE — изображения его биссектрис (точка $O \equiv AD \times BE$ должна принадлежать известной области существования). Задание изображений биссектрис делает изображение плоскости ABC метрически определенной.

Для определения истинной формы треугольника $A_1B_1C_1$ по его изображению воспользуемся перспективно-аффинным соответствием.

Для установления этого соответствия выполним следующие построения: через точку C проведем прямые, параллельные AD и BE, и найдем их точки пересечения с прямой AB — точки X и Y; построим треугольник $A'B'C'$, где $A'B' \equiv AB$, $A'C' = AX$ и $B'C' = BY$. Примем теперь прямую AB за ось перспективно-аффинного соответствия, а пару точек C и C' — за пару соответственных точек. Покажем, что треугольник $A'B'C'$ имеет форму треугольника $A_1B_1C_1$ — треугольника-оригинала. Построим точки D' и E', соответственные точкам D и E ($D'D \parallel C'C$ и $E'E \parallel C'C$). Тогда $\frac{C'D'}{B'D'} = \frac{CD}{BD}$, но $\frac{CD}{BD} = \frac{XA}{BA}$, следовательно, $\frac{C'D'}{B'D'} = \frac{XA}{BA}$, или $\frac{C'D'}{B'D'} = \frac{C'A'}{B'A'}$, откуда следует, что $A'D'$ — биссектриса треугольника $A'B'C'$. Аналогично доказывается, что $B'E'$ — биссектриса треугольника $A'B'C'$. Таким образом, треугольник $A'B'C'$ дает форму треугольника-оригинала.

145. Дано изображение квадрата и некоторой прямой, лежащей в его плоскости. Определить истинные величины углов, образованных этой прямой со сторонами квадрата и его диагоналями.

146. Дано изображение квадрата и некоторого отрезка, лежащего в плоскости квадрата и являющегося изображением стороны равностороннего треугольника. Построить изображение этого равностороннего треугольника.

147. Дано изображение окружности и некоторого отрезка, являющегося изображением:

1) стороны равностороннего треугольника,
2) стороны квадрата,
3) диагонали квадрата.

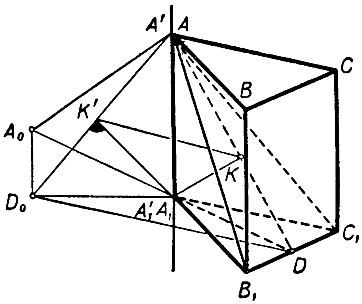
Построить изображения этих фигур.

Задачи на пространственные фигуры

148. Дано изображение правильной треугольной призмы, все ребра которой равны. В призме проведено сечение, проходящее через сторону нижнего основания и диагональ боковой грани. Построить изображение перпендикуляра, опущенного на плоскость сечения:

1) из вершины нижнего основания, не лежащей в плоскости сечения;
2) из произвольной точки, взятой в верхнем основании;
3) из произвольной точки, взятой в той боковой грани, через сторону основания которой проведено сечение.

Решение (1). Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — изображение правильной треугольной призмы, все ребра которой в оригинале равны между собой (черт. 36). Это изображение является метрически определенным, и произвольные метрические построения на нем недопустимы. Пусть секущая плоскость изображена треугольником AB_1C_1, тогда нужно построить изображение перпендикуляра к ней, проходящего через точку A_1.



Черт. 36.

Очевидно, искомое изображение перпендикуляра будет лежать в плоскости AA_1D, где точка D — середина стороны B_1C_1. Определим истинную форму треугольника AA_1D, для чего воспользуемся перспективно-аффинным соответствием, осью которого является прямая AA_1, и тем обстоятельством, что треугольник AA_1D в оригинале прямоугольный, а AA_1 и A_1D— изображения его катетов, причем $A_1D = \frac{AA_1}{2}\sqrt{3}$ (так как $AD = \frac{AB}{2}\sqrt{3}$ и $AB = AA_1$ по условию). Строим равносторонний треугольник $A'A_1'A_0$ по стороне $A'A_1'$ ($A'A_1' \equiv AA_1$), затем на перпендикуляре $A_1'D_0$, проведенном через точку A_1', откладываем отрезок $A_1'D_0$, равный высоте треугольника $A'A_1'A_0$, и точку D_0 соединяем с точкой A'. Треугольник $A'A_1'D_0$ имеет форму оригинала треугольника AA_1D.

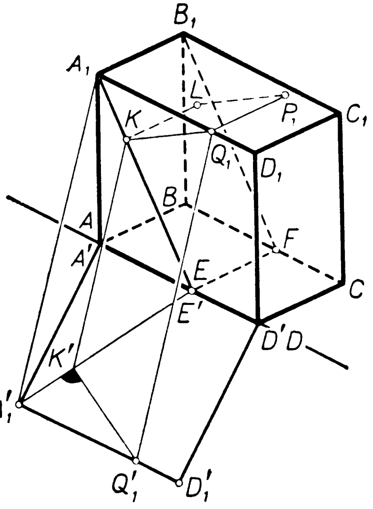
Приняв пару точек D, D_0 за пару соответственных точек (осью выбрана прямая AA_1) и построив в треугольнике $A'A_1'D_0$ перпендикуляр $A_1'K'$ к $A'D_0$, найдем точку K, соответственную точке K' в установленном соответствии. Тогда A_1K — изображение искомого перпендикуляра.

149. Дано изображение куба с проведенным в нем сечением, проходящим через одно из его ребер. Построить изображение перпендикуляра, опущенного на плоскость сечения:

1) из точки, лежащей в той грани, где лежит ребро, через которое проведено сечение;

2) из точки, лежащей в той грани, которую сечение не пересекает.

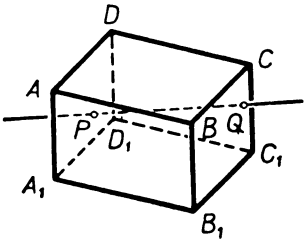
Р е ш е н и е (1). Пусть AC_1 — изображение куба (черт. 37), плоскость A_1B_1FE — изображение секущей плоскости, точка P_1 — изображение точки, из которой нужно опустить перпендикуляр. Изображение куба полное, поэтому никакие метрические построения не могут быть выполнены на этом изображении произвольно. Чтобы построить искомое изображение перпендикуляра к секущей плоскости, проведем через точку P_1 прямую $P_1Q_1 \parallel A_1B_1$ и используем в дальнейшем построении то обстоятельство, что искомое изображение перпендикуляра и изображение перпендикуляра к оригиналу прямой A_1E, проведенное через оригинал точки Q_1, будут параллельны. Таким образом, построение в пространстве мы свели к построению в плоскости, а именно мы должны в грани A_1ADD_1 построить изображение перпендикуляра, причем это изображение должно проходить через точку Q_1 и в оригинале представлять перпендикуляр к оригиналу прямой A_1E. Последнее же легко выполнить, если учесть, что параллелограмм A_1ADD_1 — это изображение квадрата. Построив на стороне AD квадрат $A_1'A'D'D_1'$ ($A'D' \equiv AD$), установим перспективно-аффинное соответствие с осью AD и парой соответственных точек A_1 и A_1'. Построим затем точку Q_1', соответственную точке Q_1, и прямую $A_1'E'$, соответственную A_1E. Опустим из точки Q_1' перпендикуляр на $A_1'E'$ и по полученной точке K' — основанию этого перпендикуляра — построим соответственную точку K. Затем строим точку L ($KL \parallel P_1Q_1$, $P_1L \parallel Q_1K$) и получаем изображение P_1L искомого перпендикуляра.



Черт. 37.

150. Дано изображение куба и прямой PQ, пересекающей боковые грани в точках P и Q (черт. 38). Построить общий перпендикуляр прямой PQ и ребра:

1) BB_1; 2) B_1C_1; 3) A_1B_1.



Черт. 38.

151. Дано изображение правильной четырехугольной пирамиды, высота которой равна стороне основания. Построить изображение плоскости:

1) проходящей через сторону основания перпендикулярно к противолежащей боковой грани;

2) проходящей через вершину основания перпендикулярно к противоположному ребру.

152. Дано изображение куба. Построить изображение:

1) перпендикуляра, опущенного из вершины на диагональ;

2) общего перпендикуляра диагонали и не пересекающего ее ребра.

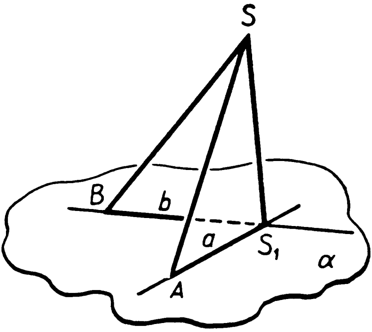
§ 9. Неполные изображения как иллюстративные чертежи

Литература: [1] гл. VI, § 36, 37; [2] гл. III, § 16, 17, 19; гл. V, § 31; гл. VI, § 40; гл. VII, § 41.

К задачам 153—180 построить чертежи и произвести подсчет свободных параметров

153. Из данной точки проведены к данной плоскости две наклонные, каждая из которых равна 2 *см*; угол между ними равен 60°, а угол между их проекциями прямой. Определить расстояние данной точки от плоскости.

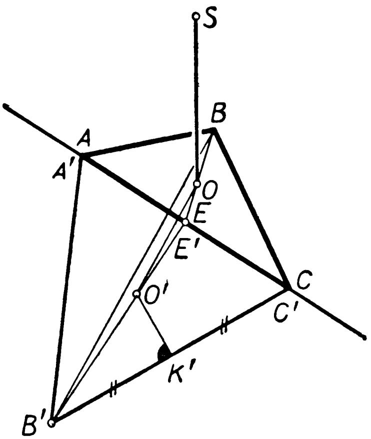
Решение. Проведем в некоторой плоскости α пару прямых (произвольно) a и b (черт. 39), которые будем считать изображением пары взаимно перпендикулярных прямых (это построение влечет за собой расход одного параметра). Через точку $S_1 \equiv a \times b$ проведем произвольную прямую, которую будем



Черт. 39.

считать изображением перпендикуляра к плоскости α (два параметра). Выберем произвольно на прямой b точку B, на прямой a — точку A, на изображении перпендикуляра к плоскости α — точку S. Будем считать угол ASB изображением угла, равного 60° (один параметр), отношение длин данных непараллельных отрезков (наклонных к плоскости α) примем равным единице (один параметр). Таким образом, при построении в соответствии с условиями, наложенными на оригинал, израсходовано 5 параметров, т. е. изображение становится метрически определенным и дальнейшие произвольные построения (метрические) на нем недопустимы.

154. В равнобедренном треугольнике основание и высота содержат по 4 *см*. Данная точка находится на расстоянии 6 *см* от плоскости треугольника и на равном расстоянии от его вершин. Найти это расстояние.



Черт. 40.

Решение (черт. 40). Построим в плоскости α некоторый треугольник ABC, который будем считать изображением равнобедренного (пусть $A_1B_1 = B_1C_1$) в оригинале треугольника $A_1B_1C_1$ (два параметра). Изображение равнобедренного треугольника делает плоскость α метрически определенной. Данная в условии точка в оригинале одинаково удалена от вершин A_1, B_1, C_1 треугольника $A_1B_1C_1$, т. е. она проектируется в некоторую точку O_1 — центр окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$. На нашем изображении плоскость α уже метрически определена, поэтому точку O произвольно брать нельзя. Построим ее следующим образом. Примем прямую AC за ось перспективно-аффинного соответствия, в котором треугольнику ABC поставим в соответствие равнобедренный треугольник $A'B'C'$ ($A' \equiv A$, $C' \equiv C$), имеющий высоту $B'E'$, равную основанию $A'C'$. Через середину K' стороны $B'C'$ проведем прямую, перпендикулярную $B'C'$, и точке $O' \equiv K'O' \times B'E'$ найдем соответственную точку. Точка O и будет изображением центра описанной около треугольника окружности.

Через точку O проведем произвольную прямую (лучше, в целях наглядности отличную от уже имеющихся на чертеже прямых), которую будем считать изображением перпендикуляра к плоскости α (таким образом, израсходованы еще два параметра), и выберем на этой прямой некоторую точку S (один параметр). На этом построение закончено. Оно является верным и свободных параметров в запасе уже не имеет, поэтому дальнейшие метрические (произвольные) построения на нем недопустимы.

155. В плоскости α_1 находится прямая A_1B_1. Из точки B_1 проведены по одну сторону плоскости α_1 перпендикулярные к A_1B_1 прямые B_1C_1 и B_1D_1, отклоненные от плоскости α_1 на 50° и 15°. Определить угол $C_1B_1D_1$.

156. Если в равнобедренном прямоугольном треугольнике один катет находится в плоскости α_1, а другой катет образует с ней угол в 45°, то гипотенуза образует с плоскостью α_1 угол в 30°. Доказать.

157. Если наклонная A_1B_1 составляет с плоскостью α_1 угол в 45°, а прямая A_1C_1, лежащая в плоскости α_1 составляет угол в 45° с проекцией наклонной A_1B_1, то $\angle B_1A_1C_1 = 60°$. Доказать.

158. Если в правильной треугольной пирамиде высота равна стороне основания, то боковые ребра составляют с плоскостью основания угол в 60°. Доказать.

159. A_1B_1 и C_1D_1 — параллельные отрезки, лежащие в двух пересекающихся плоскостях; A_1E_1 и D_1F_1 — перпендикуляры к линии пересечения плоскостей. Расстояние $A_1D_1 = 5$ *см* и отрезок $E_1F_1 = 4$ *см*. Найти расстояние между прямыми A_1B_1 и C_1D_1.

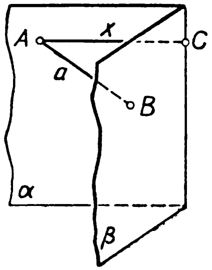
160. Из концов отрезка A_1B_1, параллельного плоскости α_1, проведены к ней перпендикуляр A_1C_1 и наклонная $B_1D_1 \perp A_1B_1$. Определить расстояние C_1D_1, если $A_1B_1 = a$, $A_1C_1 = b$ и $B_1D_1 = c$.

161. Через одну из сторон ромба проведена плоскость на расстоянии 4 *см* от противолежащей стороны. Проекции диагоналей ромба на эту плоскость равны 8 *см* и 2 *см*. Найти проекции сторон.

162. Через вершину прямого угла C_1 прямоугольного треугольника $A_1B_1C_1$ проведена плоскость параллельно гипотенузе на расстоянии 1 *дм* от нее. Проекции катетов на эту плоскость равны 3 *дм* и 5 *дм*. Определить проекцию гипотенузы на эту же плоскость.

163. Двугранный угол равен 45°. На одной грани дана точка на расстоянии a от другой грани. Найти расстояние этой точки от ребра.

Р е ш е н и е. Пусть две произвольные пересекающиеся плоскости α и β — изображения граней двугранного угла, в оригинале равного 45° (один параметр) (черт. 41). Выберем, например, в грани α некоторую точку A и проведем через нее некоторую прямую, пересекающую грань β. Точку пересечения назовем B (точка B не лежит, конечно, на ребре двугранного угла, так как по условию этот угол не равен 90°). Примем прямую AB за изображение перпендикуляра к оригиналу плоскости β (два параметра). Проведем через точку A прямую до пересечения с ребром двугранного угла. Пусть C — точка пересечения. Примем AC за изображение перпендикуляра к оригиналу ребра двугранного угла (один параметр). AC — изображение искомого расстояния. Таким образом, в запасе остается еще один свободный параметр.



Черт. 41.

164. Определить величину двугранного угла, если точка, взятая на одной из граней, отстоит от ребра вдвое дальше, чем от другой грани.

165. Катеты прямоугольного треугольника равны 7 *см* и 24 *см*. Определить расстояние от вершин прямого угла до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет угол в 30° с плоскостью треугольника.

166. Отрезок A_1B_1 упирается своими концами в грани прямого двугранного угла $P_1M_1N_1Q_1$; концы отрезка находятся на одинаковых расстояниях от ребра M_1N_1 двугранного угла. Найти отношение углов, под которыми отрезок наклонен к граням.

167. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб $A_1B_1C_1D_1$, в котором $\angle B_1A_1D_1 = 60°$, боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом в 60° и плоскость $A_1A_0C_0C_1$ перпендикулярна к плоскости основания. Доказать, что площади сечений $B_1B_0D_0D_1$ и $A_1A_0C_0C_1$ относятся как 2 : 3.

168. Основанием параллелепипеда служит квадрат; одна из вершин верхнего основания одинаково отстоит от всех вершин нижнего основания. Сторона основания равна a, боковое ребро равно b. Определить полную поверхность этого параллелепипеда.

169. Определить сторону основания и апофему правильной треугольной пирамиды, если ее боковое ребро и боковая поверхность соответственно равны 10 *см* и 144 *см*^{2}.

170. В правильной четырехугольной пирамиде определить сторону основания, если боковое ребро равно 5 *см*, а полная поверхность 16 *см*^{2}.

171. Определить боковую поверхность правильной шестиугольной пирамиды, если сторона основания равна a, а боковая грань равновелика диагональному сечению, проведенному через диаметр основания.

172. Определить боковую поверхность правильной десятиугольной пирамиды, если радиус основания пирамиды равен R, а высота пирамиды больше радиуса основания на половину стороны основания.

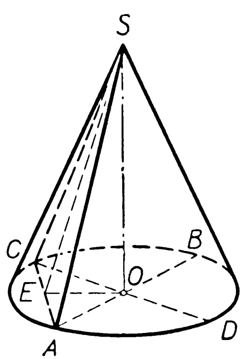
173. Центр верхнего основания куба и середины сторон нижнего основания служат вершинами вписанной в этот куб пирамиды. Определить ее боковую поверхность по данному ребру a куба.

174. Около правильного октаэдра описан цилиндр. Две вершины октаэдра лежат в центрах оснований цилиндра, а остальные четыре — на боковой поверхности его. Ребро октаэдра $a = 10$ *см*. Найти боковую поверхность цилиндра.

175. Через верхний конец образующей цилиндра под углом в 45° к ней проведена касательная к цилиндру. Радиус основания цилиндра 1 *м*, высота 4 *м*. Определить расстояние касательной от центра каждого основания.

176. Через вершину конуса под углом в 45° к основанию проведена плоскость, отсекающая четверть окружности основания. Высота конуса равна 10 *см*. Определить площадь сечения.

Р е ш е н и е. Начертим произвольный эллипс и примем его за изображение окружности — основания прямого кругового конуса в оригинале (два параметра) (черт. 42).



Черт. 42.

Построим в этом эллипсе пару сопряженных диаметров AB и CD (новых параметров это построение не требует, так как, приняв эллипс за изображение окружности, мы сделали плоскость эллипса метрически определенной, т. е. произвольные построения в ней уже невозможны). Диаметры рассекают эллипс (кривую) на четыре части, которые в оригинале будут равны. Проведем через центр эллипса произвольную прямую, которую будем считать изображением перпендикуляра к плоскости эллипса (два параметра). Выберем на этой прямой некоторую точку S в качестве изображения вершины конуса. Соединим точку S с точками A и C и соединим точки A и C. Плоскость SAC — одно из возможных изображений секущей плоскости. Разделим AC пополам и точку E — середину AC — соединим с точками O и S.

Тогда, как нетрудно показать, угол SEO является изображением линейного угла оригинала двугранного угла $SACO$. Будем считать его изображением угла 45° (один параметр).

Построенное изображение является верным и метрически определенным (израсходовано 5 параметров, т. е. свободных параметров нет), поэтому дальнейшие построения на нем уже не могут быть выполнены произвольно.

177. Через середину высоты конуса проведена прямая параллельно образующей l_1. Найти длину отрезка прямой, заключенной внутри конуса.

178. Образующая конуса 13 *см*; высота 12 *см*. Конус пересечен прямой M_1N_1, параллельной основанию; расстояние ее от основания равно 6 *см*, а от высоты 2 *см*. Найти отрезок этой прямой, заключенный внутри конуса.

179. В конусе даны радиус основания R и высота H. Определить ребро вписанного в него куба.

180. В конусе даны радиус основания R и высота H. В него вписана правильная треугольная призма, у которой боковые грани — квадраты. Определить ребро этой призмы.

ОТВЕТЫ

57. $4:\pi$. **66.** Правильный октаэдр. **67.** $3:20$. **76.** 4π *м*. **77.** 3 *см*. **78.** 5 *см*. **79.** 5 *см*. **80.** 2 *см* или 14 *см*. **81.** $\frac{\pi}{3}$. **82.** $2\arcsin\sqrt[3]{\frac{5}{36}}$. **84.** $\frac{a}{3}$. **85.** $\frac{R}{\sqrt{2-\sqrt{2}}+1}$. **86.** 1) $\frac{R}{\sqrt{3}+1}$; 2) $\frac{R}{3}$. **87.** $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\operatorname{ctg}\alpha}$. **88.** Пусть φ — двугранный угол, образуемый плоскостью основания и секущей плоскостью, тогда $\varphi = \arccos \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **89.** $S = \frac{p^2\sqrt{3}}{27}\sqrt{4+\operatorname{tg}^2\alpha}$. **92.** $S = 15\sqrt{2}$ *см*^{2}. **93.** 1) Пусть x — расстояние от точки O — центра симметрии куба — до точки пересечения диагонали с секущей плоскостью.

Если $x \geqslant \frac{a\sqrt{3}}{6}$, то в сечении получаются равносторонние треугольники; если же $\frac{a\sqrt{3}}{6} > x \geqslant 0$, то в сечении получаются шестиугольники; в частности, если $x = 0$, то в сечении будет правильный шестиугольник.

2) Сторона треугольника: $\frac{3a}{2}\sqrt{2} - x\sqrt{6}$, стороны шестиугольника: $\frac{a}{2}\sqrt{2} + x\sqrt{6}$ и $\frac{a}{2}\sqrt{2} - x\sqrt{6}$; в частности, при $x = 0$ сторона (правильного) шестиугольника будет равна $\frac{a}{2}\sqrt{2}$. **94.** $V = Q\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{\frac{Q\sqrt{3}}{\cos\varphi}}$.
95. $S = \frac{r^2\sin\alpha}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$. **96.** $\varphi = \arccos\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.
97. $4:3$. **98.** Наибольшую площадь имеет проекция на плоскость, параллельную любым двум скрещивающимся

ребрам правильного тетраэдра со стороной $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, где a — ребро тетраэдра. **101.** $\sim 0{,}89$. **103.** 1) Тождество; 2) проекции A_3 точек A лежат на одной прямой — линии пересечения плоскости α с плоскостью XOY; 3) точки A лежат на одной прямой — линии пересечения плоскости α с плоскостью XOY, а точки A_3 лежат в плоскости XOY. **155.** Один свободный параметр. **156.** Два свободных параметра. **158.** Изображение метрически определено. **160.** Один свободный параметр. **166.** Один свободный параметр. **171.** Один свободный параметр. **173.** Изображение метрически определено. **177.** Один свободный параметр.