ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

И. И. ЛИХОЛЕТОВ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ I—III КУРСОВ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФАКУЛЬТЕТОВ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ

УЧПЕДГИЗ · 1960

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

Московский государственный заочный педагогический институт

И. И. ЛИХОЛЕТОВ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ I—III КУРСОВ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФАКУЛЬТЕТОВ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ

Под редакцией
Е. Г. ГОНИНА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва 1960

ПРЕДИСЛОВИЕ

Раздел по математическому анализу «Элементарные функции» изучается на I курсе педагогических институтов после изучения разделов «Введение в анализ» и «Дифференциальное исчисление». Поэтому предполагается, что студенты-заочники уже знакомы с этими двумя разделами математического анализа. В изложении раздела «Элементарные функции» использованы некоторые теоремы первых двух разделов, и исследование функций проводится с помощью производных, т. е. методом математического анализа. Цель настоящего пособия — облегчить студентам-заочникам изучение этого раздела. Для работы рекомендуется следующая литература:

С. И. Новоселов, Специальный курс элементарной алгебры, 1956.
С. И. Новоселов, Алгебра и элементарные функции, 1956.
С. И. Новоселов, Специальный курс тригонометрии, 1954.
С. И. Новоселов, Обратные тригонометрические функции, 1950.
«Энциклопедия элементарной математики», кн. 3, 1952.
Статья В. Л. Гончарова «Элементарные функции действительного переменного. Пределы последовательностей и функций. Общее понятие функции».
А. Ф. Бермант и Л. А. Люстерник, Тригонометрия, 1956.
Г. М. Фихтенгольц, Основы математического анализа, т. 1, 1955.
А. Я. Хинчин, Краткий курс математического анализа, 1955.
А. Ф. Бермант, Курс математического анализа, т. 1, 1954.
Н. А. Фролов, Дифференциальное и интегральное исчисление, 1955.
И. М. Уваренков и М. З. Маллер, Введение в анализ, 1951.

Считаю своим приятным долгом поблагодарить профессора Л. И. Волковыского за просмотр рукописи в первом варианте и сделанные им полезные указания.

Приношу глубокую благодарность редактору методического пособия доценту Е. Г. Гонину за ценные указания и советы, способствующие устранению многих недостатков этого пособия.

Автор.

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Элементарные функции

В общем курсе математического анализа и даже в школьном курсе математики обычно рассматриваются сложные функции (функции от функций), образованные из небольшого числа простейших функций, называемых основными элементарными функциями.

Определение. Основными элементарными функциями называются следующие:

1. Степенная функция, т. е. функция вида

$$y = x^{\alpha},$$

где α — любое действительное число.

2. Показательная функция, т. е. функция вида

$$y = a^{x},$$

где a — положительное число, отличное от единицы.

3. Логарифмическая функция, т. е. функция вида

$$y = \log_a x,$$

где a — положительное число, отличное от единицы.

4. Тригонометрические функции:

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x,$$

а также сравнительно редко употребляемые $y = \sec x$, $y = \csc x$.

5. Обратные тригонометрические функции:

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \operatorname{arctg} x, \quad y = \operatorname{arcctg} x,$$

а также

$$y = \operatorname{arcsec} x, \quad y = \operatorname{arccsc} x.$$

В школьном курсе математики математические действия (операции), носящие название элементарных, делятся на алгебраические (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень с целым показателем и извлечение корня) и трансцендентные (возведение в степень с иррациональным показателем, логарифмирование, тригонометрические и обратные тригонометрические операции — переход от углов к их тригонометрическим величинам и обратно, см. 4 и 5).

Определение. *Функция y от x называется элементарной, если ее можно задать одной формулой вида $y=f(x)$ так, что каждое ее значение может быть получено из постоянных чисел и значения независимой переменной при помощи конечного числа элементарных операций.*

Предполагается, что число операций и порядок их выполнения не зависят от значения аргумента.

К классу элементарных функций относятся прежде всего все основные элементарные функции, перечисленные выше, а также функции, полученные из основных элементарных функций при помощи конечного числа элементарных операций.

Примеры. Значение элементарной функции (в данном случае сложной функции)

$$y=\lg(x^2+5x-4) \text{ при } x=2$$

равно 1. Это значение найдено при помощи пяти операций. Значение функции $y=\sin x$ при $x=\frac{\pi}{6}$ равно $\frac{1}{2}$. Здесь потребовалась только одна операция. Функция натурального аргумента $y=1+3+3^2+\ldots+3^{n-1}$ также элементарная, так как она может быть задана одной формулой $y=\frac{3^n-1}{2}$, и каждое ее значение можно найти из постоянных и значения аргумента при помощи трех операций (число операций от n не зависит). Примерами неэлементарных функций могут служить следующие:

$$1)\ y=n!,\quad 2)\ y=x\cos\frac{1}{x}\ (x\neq 0),\quad f(0)=0.$$

Нетрудно видеть, что потребное количество операций, необходимых для определения значений первой функции, неограниченно возрастает с возрастанием аргумента n. Вторая функция определена на всей числовой оси двумя формулами и не может быть задана одной формулой с ограниченным числом элементарных действий.

Элементарные функции делятся на алгебраические и трансцендентные.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 2. Классификация алгебраических функций

Определение. *Элементарная функция $y=f(x)$ называется элементарной алгебраической, если над независимой переменной x и промежуточными выражениями, зависящими от x, производятся только алгебраические операции.*

Примеры алгебраических функций:

1) $y=x^4+3x-2$, 2) $y=\frac{\sqrt{x}+1}{x+2}$, 3) $y=\sqrt[3]{(x^2+5x-3)^2+2x}$*).

Алгебраические функции делятся на рациональные и иррациональные.

Определение. *Элементарная алгебраическая функция называется рациональной, если над независимой переменной производится конечное число сложений, вычитаний, умножений и делений.*

Примеры рациональных функций:

$$y=2x^3-x+1;\ y=\sqrt{5}x^3-x^2+\sqrt{3}x+1;\ y=\frac{2-x}{1+x^2};$$

$$y=\frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{7}};$$

$y=x^2\ln 3+4x+\sqrt{6}$ и см. пример 1).

---

*) Существует и другое более общее определение алгебраической функции, принятое в математике. Функция $y=f(x)$ называется алгебраической, если она в некотором промежутке удовлетворяет тождественно относительно x алгебраическому уравнению $P(x, y)=0$ (1), где $P(x, y)$ есть многочлен относительно переменных x и y, который можно расположить по убывающим степеням переменной y и записать его в таком виде:

$$P_n(x)y^n+P_{n-1}(x)y^{n-1}+\ldots+P_1(x)y+P_0(x)=0, \qquad (2)$$

где $P_i(x)\,(i=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$ — многочлены относительно переменной x с действительными коэффициентами. Следовательно, можно сказать и так, что функция $y=f(x)$ называется алгебраической, если она является корнем алгебраического уравнения (2). Это определение шире. Можно показать, что явная алгебраическая функция будет алгебраической и в смысле более общего определения. Приведенные выше примеры явных алгебраических функций 1), 2) и 3) будут корнями уравнения, соответственно:

$$y-(x^4+3x-2)=0,\quad (x^2+4x+4)y^2-2(x+2)y+(1-x)=0,$$
$$y^3-6xy^2+12x^2y-[8x^3+(x^2+5x-3)^2]=0.$$

Но не всегда значения функции $y=f(x)$, удовлетворяющей уравнению (2), можно найти при помощи конечного числа алгебраических операций. Может оказаться, что функция $y=f(x)$ существует и удовлетворяет уравнению (2), т. е. она по второму определению будет алгебраической, но не будет элементарной алгебраической. Например, уравнение $y^5+y^3+y-x=0$ (x — произвольное число) нельзя разрешить в радикалах относительно y, тем не менее существует функция $y=f(x)$, удовлетворяющая этому уравнению. В самом деле, пусть y будет аргумент, тогда $x=y^5+y^3+y$, т. е. $x=\varphi(y)\ {-\infty<y<+\infty \atop -\infty<x<+\infty}$.
Функция монотонно возрастает в строгом смысле и непрерывна, стало быть, существует обратная функция $y=f(x)\ {-\infty<x<+\infty \atop -\infty<y<+\infty,}$ которая тоже однозначна, непрерывна и монотонно возрастает в строгом смысле. Следовательно, уравнение $y^5+y^3+y-x=0$ определяет алгебраическую функцию $y=f(x)$, некоторые свойства ее мы знаем, но значения ее не можем получить при помощи конечного числа алгебраических действий, т. е. функция $y=f(x)$ есть алгебраическая по второму определению, но не будет элементарной алгебраической функцией, т. е. является неэлементарной алгебраической.

Определение. *Алгебраические функции, не являющиеся рациональными, называются иррациональными алгебраическими функциями.*

Примеры. $y=\sqrt{x}$; $y=\frac{\sqrt{2x+\sqrt[3]{x}}}{x+1}$; $y=5x^3-3x^2+$ $+\sqrt{x}-\sqrt{3}$ и см. примеры 2) и 3).

§ 3. Степенная функция с натуральным показателем

Степенной функцией с целым положительным показателем называется функция вида

$$y=x^n \text{ } (n \text{ — натуральное число}).$$

Функция определена в интервале $(-\infty, +\infty)$ и непрерывна в этом интервале как произведение конечного числа непрерывных функций $y=\underbrace{x\cdot x\cdots x}_{n \text{ раз}}=x^n$. График функции называется параболой n-го порядка.

Если показатель степени есть число четное $n=2k$ $(k=1, 2, \ldots)$, то функция $f(x)=x^{2k}$ четна, так как выполняется условие:

$$f(-x)=f(x), \text{ т. е. } (-x)^{2k}=x^{2k}.$$

Функция кусочно-монотонна, ибо $f'(x)=2kx^{2k-1}\leqslant 0$ при $x\leqslant 0$ и $f'(x)\geqslant 0$ при $x\geqslant 0$, т. е. при $x\leqslant 0$ функция убывает, а при $x\geqslant 0$ возрастает.

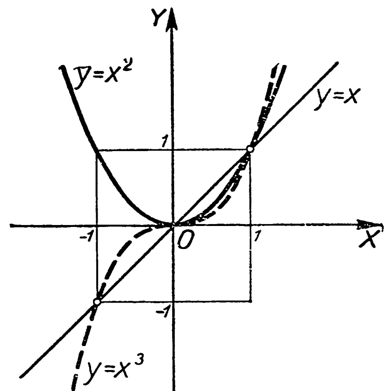
Если показатель степени число нечетное $n=2k-1$, то функция $f(x)=x^{2k-1}$ нечетна, так как имеет место:

$$f(-x)=-f(x), \text{ т. е. } (-x)^{2k-1}=-x^{2k-1}.$$

Функция в промежутке $(-\infty, +\infty)$ монотонно возрастает, ибо $f'(x)=(2k-1)x^{2k-2}\geqslant 0$ в этом промежутке. При n четном график функции расположен симметрично относительно оси OY, при нечетном n — симметрично относительно начала координат, как это известно из «Введения в анализ». Все параболы проходят через точки (0; 0) и (1; 1), так как $y(0)=0$ и $y(1)=1$.

При построении графика следует учитывать, что при $n>1$ в интервале (0; 1) $x^n<x$ и в интервале $(1, +\infty)$ $x^n>x$, т. е. в первом случае график функции $y=x^n$ $(n>1)$ расположен ниже биссектрисы $y=x$, а во втором случае выше этой биссектрисы. График функции лучше сначала построить в интервале $(0; +\infty)$, а затем построить такой же график в интервале $(-\infty; 0)$, расположенном симметрично построенному относительно оси OY, если $n=2k$, либо симметрично относительно начала координат, если $n=2k-1$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$. О вогнутости и выпуклости графиков можно судить по вторым производным данных функций. В самом деле, график степенной функции $y=x^{2k}$ с четным показателем будет направлен вогнутостью вверх, так как $y''=2k(2k-1)x^{2k-2}>0$

при всех $x \neq 0$. График функции $y = x^{2k-1}$ с нечетным показателем степени при $x < 0$ вогнутостью направлен вниз ($y'' = (2k-1)(2k-2)x^{2k-3} < 0$) и при $x > 0$ вогнутостью направлен вверх ($y'' > 0$), точка $(0, 0)$ есть точка перегиба, так как вторая производная при $x = 0$ обращается в нуль и при прохождении через эту точку меняет свой знак (черт. 1).



Черт. 1.

§ 4. Целая рациональная функция

Определение. *Целой рациональной функцией называется функция вида*

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n, \quad (1)$$

где n — неотрицательное целое число, называемое степенью многочлена, a_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) — действительные числа, причем $a_0 \neq 0$ *).

Нетрудно видеть, что над независимой переменной x производится ограниченное число сложений, вычитаний и умножений (операция деления отсутствует). Наоборот, можно показать, что любая функция, значения которой получаются из значений аргумента и постоянных чисел при помощи конечного числа сложений, вычитаний и умножений, является целой рациональной функцией в смысле нашего определения. Функция определена в промежутке $(-\infty, +\infty)$ и непрерывна в этом промежутке, как сумма непрерывных функций. Функция по абсолютной величине неограниченно возрастает с возрастанием $|x|$. Это видно из следующего преобразования: $y = x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right)$. Пусть $a_0 > 0$ и n — четное, тогда при $x \to +\infty\, (-\infty)$ и $y \to +\infty$; если n — нечетное, то при $x \to -\infty$ и $y \to -\infty$, а при $x \to +\infty$ и $y \to +\infty$. Многочлен (1) есть функция четная, если он содержит лишь четные степени x, и нечетная — если содержит только нечетные степени x.

При $n = 1$ имеем многочлен первой степени (линейная функция).

При $n = 2$ — многочлен второй степени (квадратичная функция).

При $n = 3$ — многочлен третьей степени и т. д.

Пример. Провести полное исследование функции $y = x^3 - 3x^2 + 4$ и начертить ее график.

*) Если $n = 0$, то в этом случае будем называть (1) «многочленом» нулевой степени, полагая $y = a_0$.

Решение. Функция определена и непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$. График функции пересекает ось OY в точке $(0; 4)$. Точки пересечения графика с осью OX найдем из уравнения:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0, \text{ или } (x^3 + x^2) - (4x^2 - 4) = 0,$$

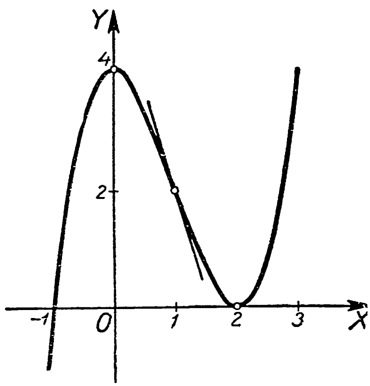
т. е. $(x+1)(x^2 - 4x + 4) = 0$, откуда получим: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Теперь найдем первую и вторую производные:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2),$$
$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1).$$

Найдем критические точки:

$$3x(x-2) = 0,$$
$$x_3 = 0, \quad x_4 = 2.$$

Исследуем знак второй производной в этих точках. $f''(0) = -6 < 0$, значит, имеем максимум, равный $f(0) = 4$; $f''(2) = 6 > 0$, следовательно, имеем минимум, равный $f(2) = 0$. Приравняем вторую производную нулю и найдем точки, в которых может быть перегиб.



Черт. 2.

$$6(x-1) = 0, \quad x = 1.$$

Исследуем поведение второй производной в окрестности этой точки.

$$f''(1-\varepsilon) < 0, \quad f''(1+\varepsilon) > 0.$$

При прохождении через точку $x = 1$ вторая производная меняет свой знак, это означает, что точка $(1; 2)$ есть точка перегиба графика функции. Составим таблицу и построим график (черт. 2).

x	0	2	1	-1	$-\infty$	$+\infty$
y	4	0	2	0	$-\infty$	$+\infty$
y'	0 $+\ -$	0 $-\ +$				
Вывод	макс.	мин.	перегиб			

Из таблицы видно, что в интервале $(-\infty, 0)$ функция возрастает $(y' > 0)$, в интервале $(0; 2)$ убывает $(y' < 0)$ и в интервале $(2, +\infty)$ возрастает $(y'>0)$. В интервале $(-\infty, 1)$ вторая производная

$$f''(x)=6(x-1)<0,$$

стало быть, в этом интервале вогнутость графика направлена вниз, т. е. в сторону отрицательных y (выпуклость). В интервале $(1, +\infty)$ вторая производная $f''(x)>0$ — вогнутость графика направлена вверх, т. е. в сторону положительных y (вогнутость). При $x \to -\infty$ и функция $y \to -\infty$, а при $x \to +\infty$ и $y \to +\infty$ $(a_0=1>0)$. Теперь уже легко построить график данной функции.

§ 5. Бином Ньютона

Рассмотрим важный частный случай целой рациональной функции $f(x)=(a+x)^n$, где n есть натуральное число.

Пользуясь дифференциальным исчислением, получим формулу бинома Ньютона:

$$(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{k!}a^{n-k}x^k+\ldots+nax^{n-1}+x^n. \quad (1)$$

По известным правилам умножения многочленов получим:

$$(a+x)^2=(a+x)(a+x)=a^2+2ax+x^2,$$
$$(a+x)^3=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3.$$

Что же касается разложения

$$(a+x)^n=\underbrace{(a+x)(a+x)\ \ldots\ (a+x)}_{n\text{ раз}},$$

то напишем его сначала по возрастающим степеням буквы x с неопределенными коэффициентами. При этом в разложении наибольший показатель степени буквы x равен n.

$$f(x)=(a+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_kx^k+\ldots+$$
$$+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n. \quad (2)$$

Теперь определим неизвестные коэффициенты a_i $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$.

Найдем производные функции (2):

$$f'(x)=n(a+x)^{n-1}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+$$
$$+ka_kx^{k-1}+\ldots+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+na_nx^{n-1},$$
$$f''(x)=n(n-1)(a+x)^{n-2}=2\cdot 1a_2+3\cdot 2a_3x+\ldots+$$
$$+k(k-1)a_kx^{k-2}+\ldots+(n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3}+$$
$$+n(n-1)a_nx^{n-2}.$$

Учитывая, что $(a_k x^k)^{(k)} = k! a_k$ и $(a_{k-1} x^{k-1})^{(k)} = 0$, получим: $f^{(k)}(x) = n(n-1)\ldots[n-(k-1)](a+x)^{n-k} = k!a_k + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-k} x^{n-k}$ (коэффициенты при x обозначили сокращенно через $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_{n-k}$).

Полагая $x=0$, получим:

$$f(0) = a^n = a_0, \qquad a_0 = f(0) = a^n;$$

$$f'(0) = na^{n-1} = a_1, \qquad a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{n}{1!} a^{n-1};$$

$$f''(0) = n(n-1)a^{n-2} = 2!a_2, \qquad a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2};$$

. . . .

$$f^{(k)}(0) = n(n-1)\ \ldots\ [n-(k-1)]\, a^{n-k} = k!a_k,$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n(n-1)\ \ldots\ [n-(k-1)]}{k!} a^{n-k}\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n). \qquad (3)$$

При этом, как обычно, полагают: $0! = 1$, $f^{(0)}(x) = f(x)$ и, в частности, $f^{(0)}(0) = f(0)$ ($f^{(0)}(x)$ — производная нулевого порядка). Подставив в (2) найденные по формуле (3) коэффициенты, получим формулу (1). Свойства разложения бинома Ньютона рассмотрите самостоятельно.

§ 6. Дробные рациональные функции

Определение. *Рациональная функция называется дробной рациональной функцией, если ее можно представить в виде отношения двух целых рациональных функций, но нельзя представить в форме многочлена, т. е. дробная рациональная функция есть функция вида*

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_n}. \qquad (1)$$

Можно доказать, что любая рациональная функция, не являющаяся целой, есть дробная. Из выражения (1) видно, что над независимой переменной x производится ограниченное число сложений, вычитаний, умножений и делений. Функция определена и непрерывна, как отношение двух непрерывных функций, для всех значений x, за исключением тех, при которых знаменатель обращается в нуль. Нетрудно видеть, что $Q(x)$ не может быть многочленом нулевой степени, так как в противном случае (1) была бы целой рациональной функцией.

Замечание. При построении графика функции, как известно из дифференциального исчисления, полезно определить асимптоты кривой при условии, конечно, что они существуют. Напомним правило нахождения асимптот.

Если график функции $y=f(x)$ имеет наклонную асимптоту $Y=kx+b$, то существует

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0 \text{ или } \lim_{x\to-\infty}[f(x)-(kx+b)]=0.$$

Для определения коэффициента k надо найти

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k \quad \text{или} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k.$$

Для определения коэффициента b следует найти

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b \text{ или } \lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=b.$$

Если $k=0$, то кривая имеет горизонтальную асимптоту

$$Y=b,$$

где $b=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ или $b=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

Кроме наклонных и горизонтальных асимптот могут быть и вертикальные асимптоты. Так, если прямая $x=x_0$ есть вертикальная асимптота графика функции $y=f(x)$, то в точке x_0 хотя бы один из односторонних пределов функции равен бесконечности.

Для дробной рациональной функции может оказаться:

1) Показатель степени числителя на единицу больше показателя степени знаменателя, т. е. $m=n+1$. В этом случае функция

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^{n+1}+a_1x^n+a_2x^{n-1}+\ldots+a_{n+1}}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\ldots+b_n} \tag{2}$$

имеет наклонную асимптоту $Y=kx+b$.

Нетрудно проверить, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{a_0}{b_0}, \text{ т. е. коэффициент } k=\frac{a_0}{b_0}.$$

Для вычисления коэффициента b надо определить

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-\frac{a_0}{b_0}x\right]=b.$$

Впрочем, для дробной рациональной функции наклонная асимптота может быть найдена проще, а именно: выделив целую часть рациональной дроби (2), получим:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=kx+b+\frac{P_1(x)}{Q(x)}, \tag{3}$$

где $P_1(x)$ есть полином, показатель степени которого меньше показателя степени полинома знаменателя $Q(x)$. Из (3) следует, что

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=\lim_{x\to\infty}\frac{P_1(x)}{Q(x)}=0.$$

Это означает, что

$$Y = kx + b$$

есть искомая наклонная асимптота.

2) а) Показатель степени числителя равен показателю степени знаменателя, т. е. $m = n$. В этом случае

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \text{ т. е. } k = 0 \text{ и}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_n}{x^n}} = \frac{a_0}{b_0}.$$

Таким образом, имеем горизонтальную асимптоту

$$Y = b, \text{ где } b = \frac{a_0}{b_0}.$$

б) Если $m < n$, тогда

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n} = 0,$$

т. е. имеем горизонтальную асимптоту

$$Y = 0.$$

3) Для определения вертикальных асимптот надо найти действительные корни $x_1, x_2, \ldots, x_k$ $(k \leqslant n)$ знаменателя $Q(x)$ и убедиться, что при $x \longrightarrow x_k$ $f(x) \longrightarrow \infty$.

Пример. Провести полное исследование функции

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

и начертить ее график.

Решение. Функция определена и непрерывна, как отношение двух непрерывных функций, на всем множестве действительных чисел за исключением $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$. В этих точках функция имеет разрыв второго рода. Найдем первую и вторую производные:

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2},$$

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}.$$

Определим стационарные точки, для чего приравняем первую производную нулю.

$$\frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} = 0, \text{ откуда } x_1 = 0, \ x_2 = \sqrt{3}, \ \ x_3 = -\sqrt{3}.$$

Других критических точек нет. Исследование на экстремум проведем по второй производной.

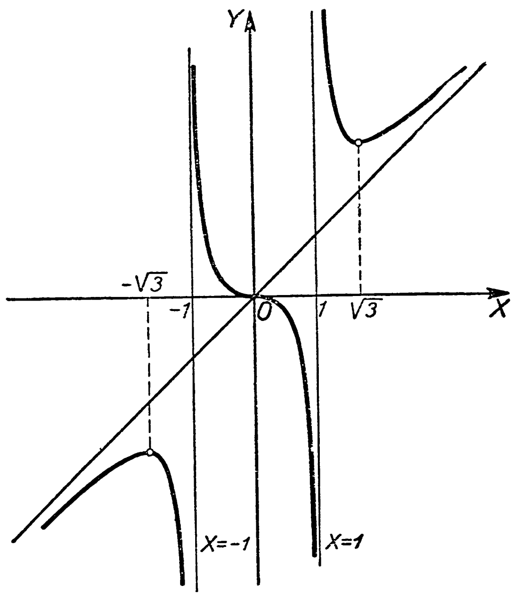
$f''(\sqrt{3})>0$, значит, имеем минимум, равный $f(\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$f''(-\sqrt{3})<0$, а поэтому имеем максимум, равный $f(-\sqrt{3})=$

$$=-\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Легко убедиться по первой производной, что в точке $x=0$ экстремума нет. В этой точке вторая производная $f''(0)=0$. Исследуем на перегиб в точке $x=0$.

$f''(-\varepsilon)>0$, $f''(\varepsilon)<0$. Вторая производная при прохождении через точку $x=0$ меняет свой знак, поэтому точка (0, 0) есть точка перегиба графика функции. График пересекает ось OX в точке $x=0$ и расположен симметрично относительно начала координат, так как функция нечетна. Найдем асимптоты. В рассматриваемом примере имеем первый случай, т. е. показатель степени числителя ($m=3$) на единицу больше показателя степени знаменателя ($n=2$), поэтому существует наклонная асимптота. Найдем эту асимптоту, для чего выделим целую часть рациональной дроби:



Черт. 3.

$$y=\frac{x^3}{x^2-1}=x+\frac{x}{x^2-1}.$$

Искомая асимптота $Y=x$. Имеются две вертикальные асимптоты $x=1$ и $x=-1$. Теперь составим таблицу и построим график (черт. 3).

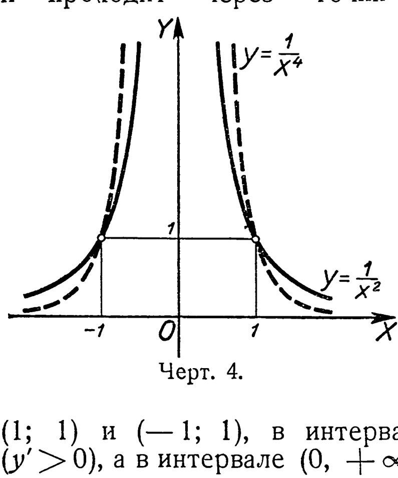
Из таблицы и графика видно, что функция в интервале $(-\infty, -\sqrt{3})$ монотонно возрастает ($y'>0$), в интервале $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ при $x\neq\pm1$ — убывает ($y'<0$) и в интервале

x	$-1{,}73$	0	1,73	$+\infty$	$-\infty$
y	$-2{,}60$	0	2,60	$+\infty$	$-\infty$
y'	$\overset{0}{+\,-}$	0	$\overset{0}{-\,+}$		
вывод	макс.	перег.	мин.		

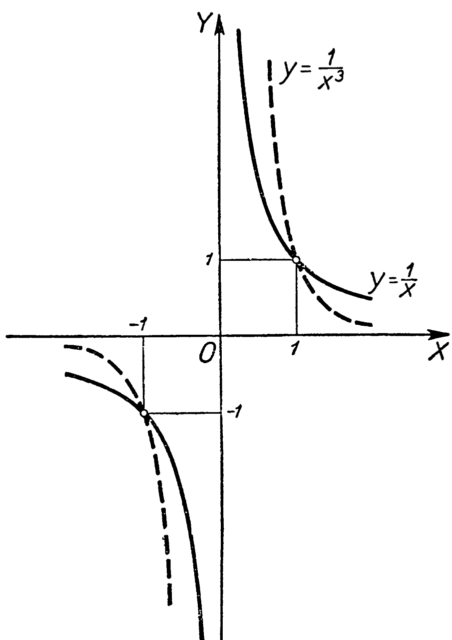
$(\sqrt{3}, +\infty)$ — возрастает $(y' > 0)$. Интервалы вогнутости и выпуклости графика можно установить по знаку второй производной.

§ 7. Степенная функция с целым отрицательным показателем

Частным случаем дробной рациональной функции является функция вида $y = \frac{1}{x^n}$, или $y = x^{-n}$, где n — натуральное число. Функция определена и непрерывна, как отношение двух непрерывных функций, при всех значениях $x \neq 0$. В точке $x = 0$ функция имеет разрыв второго рода. При четном $n = 2k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ функция четна, график ее расположен симметрично относительно оси OY и проходит через точки



Черт. 4.



Черт. 5.

(1; 1) и $(-1; 1)$, в интервале $(-\infty, 0)$ функция возрастает $(y' > 0)$, а в интервале $(0, +\infty)$ убывает $(y' < 0)$. Во всем промежутке определения вогнутость графика направлена вверх, так как

$y'' = (-2k)\ (-2k-1)\ x^{-(2k+2)} > 0$ (черт. 4). При нечетном $n = 2k - 1$ функция нечетна, график ее расположен симметрично относительно начала координат и проходит через точки (1; 1) и (— 1; — 1), на обоих интервалах функция убывает ($y' < 0$). В интервале $(-\infty, 0)$ график имеет выпуклость, так как $y'' = (-2k+1)(-2k)\,x^{-(2k+1)} < 0$, и в интервале $(0, +\infty)$ — вогнутость, так как $y'' > 0$ (черт. 5).

График функции $y = \frac{1}{x^n}$ имеет две асимптоты, горизонтальную $Y = 0$ (ось OX), потому что $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ и вертикальную $x = 0$ (ось OY), потому что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = \infty$.

§ 8. Дробно-линейная функция

Другим частным случаем дробной рациональной функции является функция вида

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \tag{1}$$

где a, b, c, d — постоянные числа, $c \neq 0$ и $ad - bc \neq 0$.

Если $c = 0$, то получается линейная функция $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$. Если $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \lambda = \text{const}$, то $a = c\lambda$, $b = d\lambda$, и мы получаем функцию вида $y = \frac{\lambda(cx+d)}{cx+d} = \lambda = \text{const}$ $\left(x \neq -\frac{d}{c}\right)$. Функция непрерывна, за исключением точки $x = -\frac{d}{c}$, в которой она имеет разрыв второго рода.

Из (1) делением числителя на знаменатель получим:

$$y = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2\left(x + \frac{d}{c}\right)}. \tag{2}$$

Вычислим производную:

$$y' = \frac{ad - bc}{c^2\left(x + \frac{d}{c}\right)^2}. \tag{3}$$

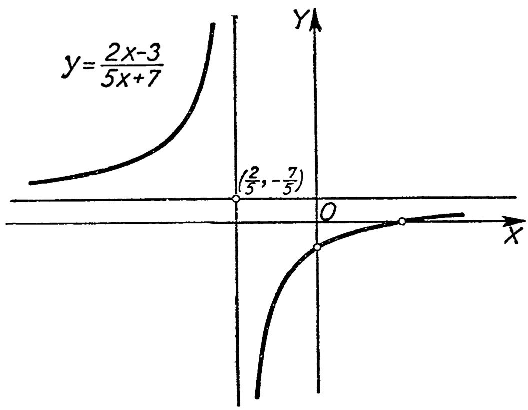
Из (3) видно, что если $ad - bc > 0$, то функция в интервалах $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ и $\left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$, в которых она определена, возрастает ($y' > 0$). Если $ad - bc < 0$, то функция в этих же интервалах убывает ($y' < 0$). Найдем асимптоты графика функции $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}$, т. е. $Y=\frac{a}{c}$ (горизонтальная асимптота).

$x=-\frac{d}{c}$ (вертикальная асимптота).

Обозначив в (2) $\frac{a}{c}=\beta$, $\frac{bc-ad}{c^2}=m$, $\frac{d}{c}=-\alpha$, получим: $y-\beta=$ $=\frac{m}{x-\alpha}$ или, полагая $y-\beta=y'$, $x-\alpha=x'$, получим:

$$y'=\frac{m}{x'}. \tag{4}$$

Уравнение (4) есть уравнение равносторонней гиперболы с новым началом координат (α, β), или $\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$. Таким образом, график дробно-линейной функции есть равносторонняя гипербола с асимптотами $Y=\frac{a}{c}$ и $x=-\frac{d}{c}$, являющимися новыми осями координат.



Черт. 6.

Пример 1. $y=\frac{2x-3}{5x+7}$. Функция определена и непрерывна как отношение двух непрерывных функций при всех значениях x, за исключением точки $x=-\frac{7}{5}$, где она имеет разрыв второго рода. В области определения функция монотонно возрастает, так как $y'=\frac{29}{(5x+7)^2}>0$, или $ad-bc=2\cdot7-(-3)5=$ $=29>0$, что является равносильным условием. Существует горизонтальная асимптота $Y=\frac{2}{5}$, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{5x+7}=\frac{2}{5}$ и вертикальная асимптота $x=-\frac{7}{5}$. Точки пересечения графика с осями координат: $\left(\frac{3}{2};\ 0\right)$ и $\left(0;\ -\frac{3}{7}\right)$ (черт. 6).

§ 9. Разложение рациональной функции на простейшие дроби

Всякую рациональную функцию $R(x)$ можно представить в виде отношения двух взаимно простых многочленов

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Если знаменатель $Q(x)$ есть константа, то функция $R(x)$ будет целой рациональной функцией.

Рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя, если же степень числителя больше или равна степени знаменателя, то дробь называется неправильной. Если степень полинома $P(x)$ равна m, а степень полинома $Q(x)$ равна n, то при $m<n$ рациональная дробь правильна, а при $m \geqslant n$ — дробь неправильна. Например, рациональная дробь $\frac{2x+1}{x^3+x^2+5}$ — правильная, а дроби $\frac{2x^2-3}{x^2+2}$ и $\frac{3x^2+2x+1}{x+1}$ — неправильные. При помощи деления (по правилу деления многочленов) неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы целой рациональной функции и правильной рациональной дроби. Так, пусть $m \geqslant n$, тогда $\frac{P(x)}{Q(x)} = u(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$, где $u(x)$ — целая рациональная функция, а $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь.

Определение. *Дроби вида* $\frac{A}{(x-a)^k}$ *и* $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$, *где* A, M, N, a, p, q — *действительные числа,* k *и* m — *натуральные числа, и трехчлен* x^2+px+q *имеет мнимые корни* $\left(\frac{p^2}{4}-q<0\right)$, *называются простейшими (элементарными) дробями.*

Наша ближайшая задача — доказать, что всякую рациональную правильную дробь можно представить в виде суммы простейших дробей.

Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь и коэффициент старшего члена в знаменателе равен единице (если бы в знаменателе коэффициент старшего члена оказался отличным от единицы, то мы могли бы разделить числитель и знаменатель на этот коэффициент).

В алгебре доказывается основная теорема, утверждающая, что всякое алгебраическое уравнение n-й степени

$$Q(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n = 0$$

имеет n корней (действительных или мнимых). Если коэффициенты уравнения $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — действительные числа, то мнимые корни попарно сопряжены*). Из этой теоремы следует, что любой многочлен n-й степени с действительными коэффициентами может быть представлен в виде произведения линейных множителей:

$$x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n),$$

где $a_i (i=1, 2, \ldots, n)$ — корни уравнения. Может оказаться, что

*) Если имеется корень $e+hi$, то ему соответствует другой корень, с ним сопряженный, $e-hi$ и они имеют одинаковую кратность.

$a_1 = a_2 = \ldots = a_k = a$, тогда корень a является корнем k-й кратности и $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k)=(x-a)^k$. Если имеем мнимые корни $e+hi$ и $e-hi$, то произведение

$$[x-(e+hi)][x-(e-hi)]=[(x-e)-hi][(x-e)+hi]=$$
$$=(x-e)^2+h^2=x^2-2ex+e^2+h^2=x^2+px+q,$$

где $p=-2e$ и $q=e^2+h^2$.

Следовательно, произведение двух сомножителей, соответствующих сопряженным мнимым корням, можно заменить трехчленом x^2+px+q с действительными коэффициентами. Если же сопряженные мнимые корни имеют кратность γ, то произведение 2γ сомножителей заменится трехчленом в степени γ, т. е. выражением $(x^2+px+q)^\gamma$. Таким образом, если уравнение имеет действительные корни $a, b, \ldots, l$ кратности $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ и мнимые корни $e+hi$ и $e-hi, \ldots, e'+h'i$ и $e'-h'i$ кратности $\gamma, \ldots, \mu$, то

$$x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n=$$
$$=(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x^2+px+q)^\gamma\ldots(x^2+rx+s)^\mu,$$
$$\text{где } \alpha+\beta+\ldots+\lambda+2(\gamma+\ldots+\mu)=n.$$

Мы будем в дальнейшем рассматривать правильные рациональные дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ только с действительными коэффициентами в числителе и в знаменателе.

Лемма I. *Правильная рациональная дробь* $\frac{P(x)}{Q(x)}$, *знаменатель которой* $Q(x)=(x-a)^\alpha Q_1(x)$, *где* $Q_1(x)$ *не делится на* $x-a$, *может быть представлена в виде суммы двух правильных дробей*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}Q_1(x)},$$

где A — *числовой коэффициент, а* $P_1(x)$ *и* $Q_1(x)$ — *полиномы.*

Доказательство. Так как по условию $Q_1(x)$ на $x-a$ не делится, то $Q_1(a)\neq 0$ и, следовательно, $x=a$ есть корень многочлена $Q(x)$ кратности α.

Напишем тождество:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^\alpha Q_1(x)}=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{P(x)}{(x-a)^\alpha Q_1(x)}-\frac{A}{(x-a)^\alpha}$$

или

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{P(x)-AQ_1(x)}{(x-a)^\alpha Q_1(x)}.$$

Подберем A так, чтобы $P(x)-AQ_1(x)$ разделилось на $x-a$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы a было корнем этого многочлена (теорема Безу), т. е. $P(a)-AQ_1(a)=0$, откуда

$$A=\frac{P(a)}{Q_1(a)} \quad (Q_1(a)\neq 0). \tag{1}$$

Выбрав A по формуле (1), можно написать, что

$$P(x)-AQ_1(x)=(x-a)P_1(x),$$

следовательно,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{(x-a)P_1(x)}{(x-a)^{\alpha}Q_1(x)},$$

или

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}Q_1(x)}.$$

Дробь $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}Q_1(x)}$ — правильная, так как она получена в результате сокращения правильной дроби на $x-a$.

Теорема I. *Пусть дана правильная рациональная дробь* $\frac{P(x)}{Q(x)}$, *знаменатель которой имеет только действительные корни* a, b, ..., l *кратности* α, β, ..., λ.

В этом случае имеет место разложение вида:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_0}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\frac{B_0}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+$$
$$+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}+\ldots+\frac{L_0}{(x-l)^{\lambda}}+\frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}}+\ldots+\frac{L_{\lambda-1}}{x-l}, \quad \text{(I)}$$

где A_0, A_1, ..., $L_{\lambda-1}$ — *действительные числа.*

Доказательство состоит в последовательном применении леммы I. По условию

$$Q(x)=(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}=(x-a)^{\alpha}\cdot Q_1(x).$$

Применив лемму I α раз, получим:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^{\alpha}Q_1(x)}=\frac{A_0}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}Q_1(x)}=\frac{A_0}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+$$
$$+\frac{P_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}Q_1(x)}=\ldots=\frac{A_0}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+$$
$$+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\frac{P_{\alpha}(x)}{Q_1(x)},$$

где $Q_1(x)=(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}$.

Если мы к правильной дроби $\frac{P_{\alpha}(x)}{Q_1(x)}$ применим лемму I еще $\beta+\ldots+\lambda$ раз, то получим разложение (I). Коэффициенты A_0, A_1, A_2, ..., $L_{\lambda-1}$ разложения (I) — действительные числа. Это утверждение следует из того, что полиномы $P(x)$ и $Q(x)$ — с действительными коэффициентами, корни полинома $Q(x)$ — действительные, а также из способа получения вышеуказанных коэффициентов $\left(A=\frac{P(a)}{Q(a)}\right.$ см. лемму I$\left.\right)$.

Теперь докажем единственность разложения.

Теорема II. *Разложение* (I) *возможно произвести единственным образом.*

Доказательство. Допустим, что существует другое разложение

$$\frac{P(x)}{(x-a)^{\alpha}\cdot(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}}=\frac{A'_0}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A'_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A'_{\alpha-1}}{x-a}+$$
$$+\frac{B'_0}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B'_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{L'_{\lambda-1}}{x-l}. \qquad (\mathrm{I}')$$

В (I) и (I′) левые части равны, следовательно, и правые части должны быть равны, т. е.

$$\frac{A'_0}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A'_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A'_{\alpha-1}}{x-a}+\frac{B'_0}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B'_1}{(x-b)^{\beta-1}}+$$
$$+\ldots+\frac{L'_{\lambda-1}}{x-l}=\frac{A_0}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+$$
$$+\frac{B_0}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{L_{\lambda-1}}{x-l}. \qquad (2)$$

Умножим левую и правые части (2) на $(x-a)^{\alpha}$ и, положив $x=a$, найдем, что $A'_0=A_0$. Отбрасывая в левой и правой частях равенства (2) первые равные слагаемые $\frac{A'_0}{(x-a)^{\alpha}}$ и $\frac{A_0}{(x-a)^{\alpha}}$ и умножая полученное равенство на $(x-a)^{\alpha-1}$, получим при $x=$ $=a$, $A'_1=A_1$ и т. д. Итак, при любом способе получения разложения (I) всегда будем иметь в разложении одни и те же числовые коэффициенты.

Лемма II. *Пусть дана правильная рациональная дробь* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *и пусть* $e+hi$ *и* $e-hi$ — *два сопряженных мнимых корня знаменателя* $Q(x)$ *кратности* m, *т. е.*

$$Q(x)=(x^2+px+q)^m Q_1(x), \text{ где}$$

p, q *и коэффициенты полинома* $Q_1(x)$ — *действительные числа,* $e+hi$ и $e-hi$ — *корни трехчлена* x^2+px+q.

Тогда имеет место разложение вида:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}+\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}Q_1(x)}.$$

Доказательство. По условию $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$ где $x_1=e+hi$, $x_2=e-hi$. Напишем тождество:

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^m Q_1(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}+\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^m Q_1(x)}-\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m},$$

или

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}+\frac{P(x)-(Mx+N)Q_1(x)}{(x^2+px+q)^m Q_1(x)}. \qquad (3)$$

Коэффициенты M и N подберем так, чтобы числитель последней дроби разделился на трехчлен x^2+px+q. Для этого необходимо и достаточно, чтобы x_1 и x_2 были корнями этого многочлена (по теореме Безу), т. е.

$$\begin{cases} P(x_1)-(Mx_1+N)\,Q_1(x_1)=0, \\ P(x_2)-(Mx_2+N)\,Q_1(x_2)=0, \end{cases} \tag{4}$$

где $Q_1(x_1)\neq 0$ и $Q_1(x_2)\neq 0$, так как x_1 и x_2 — корни кратности m полинома $Q(x)$. Из (4) имеем:

$$\begin{cases} Mx_1+N=\dfrac{P(x_1)}{Q_1(x_1)}, \\ Mx_2+N=\dfrac{P(x_2)}{Q_1(x_2)}. \end{cases} \tag{5}$$

А так как $x_1=e+hi$ и $x_2=e-hi$ сопряжены и данные полиномы $P(x)$ и $Q(x)$ имеют действительные коэффициенты, то очевидно, что правые части уравнений (5) будут также сопряженными комплексными числами, т. е.

$$\begin{cases} Mx_1+N=E+Hi, \\ Mx_2+N=E-Hi, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} M(e+hi)+N=E+Hi, \\ M(e-hi)+N=E-Hi \end{cases} \tag{6}$$

(полиномы $P(x)$ и $Q(x)$ даны, поэтому коэффициенты E и H нам известны). Из (6) получим:

$$\begin{cases} Me+N=E, \\ Mh=H, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} M=\dfrac{H}{h}, \\ N=E-H\dfrac{e}{h}\ (h\neq 0). \end{cases}$$

Таким образом, из системы уравнений (5) определили такие действительные коэффициенты M и N, что числитель дроби (3) при найденных значениях M и N делится на трехчлен x^2+px+q. Поэтому из (3) получим:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}+\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}\,Q_1(x)}.$$

Дробь $\dfrac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}\,Q_1(x)}$ — правильная, так как она получена в результате сокращения правильной дроби на x^2+px+q.

Теорема III. *Если* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ — *правильная рациональная дробь и* $Q(x)=(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x^2+px+q)^m$, *то имеет место разложение вида:*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_0}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\frac{B_0}{(x-b)^\beta}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+$$
$$+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}+\ldots+\frac{M_0x+N_0}{(x^2+px+q)^m}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{m-1}}+$$
$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{m-2}}+\ldots+\frac{M_{m-1}x+N_{m-1}}{x^2+px+q}. \tag{II}$$

Доказательство состоит в последовательном применении теоремы I и леммы II. Единственность разложения (II) доказывается так же, как и в предыдущем случае.

Итак, мы доказали, что любую рациональную функцию $\frac{P(x)}{Q(x)}$ с действительными коэффициентами в числителе и знаменателе можно представить в виде суммы целой рациональной функции $u(x)=a_0x^r+a_1x^{r-1}+a_2x^{r-2}+\ldots+a_r$ и конечного числа слагаемых простых дробей вида:

$$1)\ \frac{A}{x-a}, \qquad 2)\ \frac{A}{(x-a)^k}\ (k\geqslant 2),$$

$$3)\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \qquad 4)\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+N)^m}\ (m\geqslant 2),$$

где все коэффициенты также действительные числа, а корни трехчлена x^2+px+q — мнимые.

§ 10. Вычисление коэффициентов разложения

Для фактического вычисления коэффициентов в разложении (I) или (II) обычно применяют метод неопределенных коэффициентов (способ сравнения коэффициентов).

Этот способ состоит в следующем. По виду правильной рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, вернее, по виду ее знаменателя, пишем для этой дроби разложение с неопределенными коэффициентами вида (I), если знаменатель $Q(x)$ имеет только действительные корни, и разложение вида (II), если знаменатель имеет действительные и мнимые корни, либо только мнимые. В правой части разложения приводим простые дроби к общему знаменателю, которым будет $Q(x)$, складываем их и получаем правильную дробь*), после чего знаменатель $Q(x)$ в левой и правой частях отбрасываем. Получим тождество (1), в левой части которого полином $P(x)$, а в правой части — полином $(n-1)$-й степени с неопределенными (буквенными) коэффициентами

$$P(x)=a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}. \qquad (1)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества (1), получим систему из n уравнений с n неизвестными. Полученная система уравнений должна иметь единственное решение в силу ранее доказанных предложений о существовании и единственности разложений (I) и (II). Решив ее, найдем искомые коэффициенты. Часто для определения коэффициентов применяют *способ произвольных значений*, состоящий в том, что в тождестве (1) дают n произвольных значений независимой переменной x и получают систему из n

* Сумма правильных рациональных дробей есть также правильная дробь.

уравнений с n неизвестными. Следует заметить, что особенно выгодно брать значения x, равные действительным корням полинома $Q(x)$. Решая полученную систему уравнений, находим искомые коэффициенты. Обычно для определения коэффициентов разложения указанные оба способа комбинируют, что нами будет разъяснено на примерах.

Примеры. Разложить на простейшие дроби следующие рациональные функции:

$$1)\quad \frac{-7x^3+6x^2+6x-12}{3x^3(x-2)}.$$

Решение. Знаменатель имеет только действительные корни $x=0$ и $x=2$. Применяем разложение (I), т. е.

$$\frac{1}{3}\,\frac{-7x^3+6x^2+6x-12}{x^3(x-2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{A}{x^3}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x-2}\right). \qquad \text{(I)}$$

Корень $x=0$ имеет кратность, равную трем, поэтому ему и соответствует в разложении (I) три слагаемых. Корень $x=2$ кратности, равной единице, значит, ему соответствует одно слагаемое. Приведем (I) к общему знаменателю и, освободившись от него, получим:

$$-7x^3+6x^2+6x-12=A(x-2)+Bx(x-2)+$$
$$+Cx^2(x-2)+Dx^3.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества, получим систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & C+D=-7, \\ x^2 & B-2C=6, \\ x & A-2B=6, \\ x^0 & -2A=-12. \end{array}$$

Из четвертого уравнения $A=6$, из третьего $B=\frac{A-6}{2}=0$, из второго $C=-3$ и из первого $D=-7-C=-4$. Подставляя найденные коэффициенты в (I), получим искомое разложение:

$$\frac{-7x^3+6x^2+6x-12}{3x^3(x-2)}=\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x}-\frac{4}{3(x-2)}.$$

Это разложение единственно по доказанной выше теореме о единственности разложения.

$$2)\quad \frac{2x-5}{x^3-3x^2+4}.$$

Решение. Сначала разложим знаменатель дроби на множители:

$$x^3-3x^2+4=(x^3-2x^2)-(x^2-4)=(x-2)(x^2-x-2).$$

Нетрудно видеть, что корни трехчлена x^2-x-2 есть -1 и 2, поэтому окончательно имеем:

$$x^3-3x^2+4=(x-2)^2\cdot(x+1).$$

Все корни знаменателя действительные, поэтому применяем разложение (I), т. е.

$$\frac{2x-5}{(x-2)^2(x+1)}=\frac{A}{(x-2)^2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}. \qquad (1)$$

Корень $x=2$ имеет кратность, равную двум, поэтому ему и соответствуют в разложении (1) два слагаемых. Теперь (1) приведем к общему знаменателю, а затем, освободившись от него, получим:

$$2x-5=A(x+1)+B(x-2)(x+1)+C(x-2)^2. \qquad (2)$$

Из этого тождества определяем коэффициенты A, B, C. Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получим систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & B+C=0, \\ x & A-B-4C=2, \\ x^0 & A-2B+4C=-5. \end{array}$$

(слева коэффициент при x^2 равен 0)

Отсюда $A=-\frac{1}{3}$, $B=\frac{7}{9}$, $C=-\frac{7}{9}$ и окончательно имеем:

$$\frac{2x-5}{x^3-3x^2+4}=-\frac{1}{3(x-2)^2}+\frac{7}{9(x-2)}-\frac{7}{9(x+1)}. \qquad (3)$$

В силу доказанной теоремы о единственности разложения получили разложение (3), единственное.

Для определения коэффициентов A, B, C часто применяют, как уже говорилось выше, способ произвольных значений. Разъясним этот способ также на примерах. В тождестве (2) дадим x прежде всего значения, равные корням знаменателя, т. е. пусть в (2) $x=-1$, тогда $-7=9C$, откуда $C=-\frac{7}{9}$. Пусть $x=2$, тогда $-1=3A$ и $A=-\frac{1}{3}$. Теперь дадим любое значение x, например равное нулю, получим $-5=A-2B+4C$ и, учитывая, что A и C уже известны, найдем $B=\frac{7}{9}$.

3) $\frac{x^4+x^3+1}{x^4+x^3-x-1}$.

Данная дробь — неправильная, разделив числитель на знаменатель (исключим целое), получим:

$$\frac{x^4+x^3+1}{x^4+x^3-x-1}=1+\frac{x+2}{x^4+x^3-x-1}.$$

Разложим знаменатель на множители:

$$x^4+x^3-x-1=x^3(x+1)-(x+1)=(x+1)(x^3-1).$$

Знаменатель имеет действительные и мнимые корни, поэтому следует применить разложение (II).

$$\frac{x+2}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}\text{, откуда}$$

$$x+2=A(x^3-1)+B(x+1)(x^2+x+1)+(Cx+D)(x^2-1). \quad (4)$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & A+B+C=0, \\ x^2 & 2B+D=0, \\ x & 2B-C=1, \\ x^0 & -A+B-D=2. \end{array}$$

Чтобы облегчить решение системы, применим способ произвольных значений. Пусть в (4) $x=-1$, тогда $1=-2A$, или $A=-\frac{1}{2}$, если $x=1$, то $3=6B$, или $B=\frac{1}{2}$. Действительных корней больше нет. Теперь систему решить совсем легко, так как два неизвестных A и B мы уже определили. Нетрудно видеть, что $C=0$, $D=-1$. Итак,

$$\frac{x^4+x^3+1}{x^4+x^3-x-1}=1-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{x^2+x+1}.$$

4) $\dfrac{x-4}{(x-2)(x^2+1)^2}$.

Так как знаменатель имеет мнимые корни, применим разложение (II):

$$\frac{x-4}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1},$$

$$x-4=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x-2)+$$
$$+(Dx+E)(x-2)(x^2+1). \quad (5)$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 & A+D=0, \\ x^3 & -2D+E=0, \\ x^2 & 2A+B+D-2E=0, \\ x & -2B+C-2D+E=1, \\ x^0 & A-2C-2E=-4. \end{array}$$

Пусть в (5) $x=2$, тогда $-2=25A$, или $A=-\frac{2}{25}=-0{,}08$. Действительных корней больше нет. Решаем систему.
Из первого уравнения $D=-A$, т. е. $D=0{,}08$.
Из второго уравнения $E=2D$, т. е. $E=0{,}16$.
Из третьего $B=2E-2A-D$, т. е. $B=0{,}4$.
Из пятого уравнения $2C=A-2E+4$, откуда $C=1{,}8$.
Итак:

$$\frac{x-4}{(x-2)(x^2+1)^2}=-\frac{0{,}08}{x-2}+\frac{0{,}4x+1{,}8}{(x^2+1)^2}+\frac{0{,}08x+0{,}16}{x^2+1}.$$

Следует заметить, что если корни знаменателя все действительные кратности, равной единице, то при определении коэффициентов разложения можно обойтись без системы уравнений, применив способ произвольных значений. Если же корни знаменателя действительные и мнимые, то рекомендуется также воспользоваться способом произвольных значений с целью определения некоторых коэффициентов, что значительно облегчит решение системы уравнений (см. приведенные примеры). Если же все корни знаменателя окажутся мнимыми, то для определения коэффициентов целесообразно применить способ сравнения коэффициентов, получить систему уравнений и решить ее.

§ 11. Существование корня с целым положительным показателем

Определение 1°. *Корнем m-й степени из числа a называется такое число x, что $x^m = a$.*

Определение 2°. *Арифметическим корнем m-й степени из положительного числа a называется такое положительное число b, что*

$$b^m = a.$$

Арифметический корень m-й степени обозначается символом $\sqrt[m]{a}$ или $a^{\frac{1}{m}}$. В множестве рациональных чисел действие извлечения корня не всегда возможно, так, например, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, $\sqrt[4]{81} = 3$, но $\sqrt{2}$ в области рациональных чисел не существует, так как нет рационального числа, квадрат которого равнялся бы 2 *).

Теорема. *Для каждого числа $a > 0$ существует арифметический корень любой натуральной степени.*

Надо доказать, что $\sqrt[m]{a}$ существует ($a > 0$), т. е. существует число $b > 0$, m-я степень которого равна a, или $b^m = a$.

Пусть $a > 0$, подберем такое целое число $N \geqslant 0$, что $N^m \leqslant a < (N+1)^m$. Если $N^m = a$, то теорема доказана. Пусть $N^m < a$. Отрезок от N до $N+1$ (черт. 7) разделим на десять равных частей и возьмем те точки деления (т. е. значения

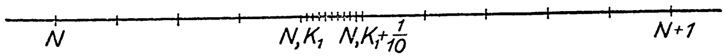
---

*) Это предложение легко доказать. Предположим, что в области рациональных чисел существует несократимая рациональная дробь $\frac{p}{q}$, квадрат которой равен 2 (p и q — натуральные числа). $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, или $\frac{p^2}{q^2} = 2$, откуда $p^2 = 2q^2$, т. е. число p есть четное. Пусть $p = 2k$, тогда $4k^2 = 2q^2$, откуда $q^2 = 2k^2$, т. е. число q тоже четное. Получили, что дробь $\frac{p}{q}$ сократимая, а это противоречит условию. Полученное противоречие доказывает наше предложение.

чисел N, k_1 и $N, k_1+\frac{1}{10}\Big)$, для которых имеет место двойное неравенство

$$(N,\ k_1)^m \leqslant a < \left(N,\ k_1+\frac{1}{10}\right)^m.$$

Если $(N, k_1)^m = a$, то теорема доказана. Пусть $(N,\ k_1)^m < a$. Отрезок от N, k_1 до $N, k_1+\frac{1}{10}$ делим еще на десять равных частей и т. д.



Черт. 7.

Каждый раз берем такие точки деления, что для любого n имеет место двойное неравенство

$$(N,\ k_1k_2\ldots k_n)^m \leqslant a < \left(N,\ k_1k_2\ldots k_n+\frac{1}{10^n}\right)^m, \tag{1}$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — десятичные знаки, т. е. можно было бы написать и так: $N,\ k_1 = N+\frac{k_1}{10}$; $N,\ k_1k_2 = N+\frac{k_1}{10}+\frac{k_2}{100}$; $\ldots$;

$$N,\ k_1k_2\ldots k_n = N+\frac{k_1}{10}+\frac{k_2}{10^2}+\ldots+\frac{k_n}{10^n};$$

$$N,\ k_1k_2\ldots k_n+\frac{1}{10^n} = N+\frac{k_1}{10}+\frac{k_2}{10^2}+\ldots+\frac{k_n+1}{10^n}.$$

Процесс деления продолжаем неограниченно. Введем обозначения:

$$\alpha_n = N,\ k_1k_2\ldots k_n,$$

$$\beta_n = N,\ k_1k_2\ldots k_n+\frac{1}{10^n};$$

α_n — последовательность, монотонно возрастающая и ограниченная сверху, например числом $N+1$; β_n — последовательность, монотонно убывающая и ограниченная снизу числом N.

Разность

$$\beta_n-\alpha_n = \frac{1}{10^n}\to 0 \quad (n\to\infty).$$

Следовательно, согласно лемме о вложенных промежутках, известной из «Введения в анализ»,

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n = \lim_{n\to\infty}\alpha_n. \tag{2}$$

Общее значение пределов (2) обозначим через b и докажем, что $b^m = a$ *).

---

*) α_n — называется n-ым десятичным приближением числа b по недостатку, а β_n — n-ым десятичным приближением числа b по избытку. Эти приближения имеют общим своим пределом число b.

Двойное неравенство (1) перепишем так:

$$\alpha_n^m \leqslant a < \beta_n^m. \qquad (1')$$

Переходя к пределу в (1′) при $n \to \infty$, получим:

$$b^m = a.$$

Итак, арифметический корень $\sqrt[m]{a}$ $(a > 0)$ существует (m — натуральное число).

Условимся любой корень из любого числа a в отличие от арифметического корня обозначать символом $\sqrt[m]{\ } a$. Тогда, исходя из общего определения корня (определение 1°), имеем:

1) если $a = 0$, то $\sqrt{\ } a = 0$;

2) если $a > 0$, то $\sqrt[2m]{\ } a = \pm\sqrt[2m]{a}$ (здесь символ $\sqrt[2m]{a}$ обозначает арифметический корень);

3) если $a < 0$, то $\sqrt[2m+1]{\ } a = -\sqrt[2m+1]{|a|}$.

Доказательство.

1) Очевидно, если $a = 0$, то $0^m = 0 = a$.

2) Пусть $a > 0$ и $\sqrt[2m]{a} = x$,
тогда $x^{2m} = a$ и $(-x)^{2m} = a$.

3) Пусть $a < 0$ и $\sqrt[2m+1]{|a|} = x$,
тогда $x^{2m+1} = |a|$ и $(-x)^{2m+1} = -|a|$,
т. е. $(-x)^{2m+1} = a$ *).

Определение 3°. $a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}}$, где $a > 0$, $\frac{p}{q}$ — несократимая рациональная дробь и $q > 0$.

Напомним основные свойства степени:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \qquad (I)$$

$$(a^n)^m = a^{nm}, \qquad (II)$$

где m и n — целые числа.

Этими свойствами мы воспользуемся при доказательстве последующих теорем:

1) $a^{\frac{1}{qq_1}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{q_1}}$. (3)

Доказательство. Введем обозначение

$$y = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{q_1}}, \qquad (4)$$

---

*) Согласно общему определению корня, если $x = \sqrt[m]{\ } a$, то $x^m = a$. Известно, что уравнение $x^m = a$ имеет m корней (в комплексной области). Выше мы ограничились рассмотрением только действительных корней.

откуда $y^{q_1}=a^{\frac{1}{q}}$ или $(y^{q_1})^q=y^{qq_1}=a$, поэтому

$$y=a^{\frac{1}{qq_1}}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует (3).

Мы воспользовались определением корня и свойством (II).

2) $a^{\frac{p}{q}}=\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$.

Доказательство.

$$(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{1}{p}}=[(a^p)^{\frac{1}{q}}]^{\frac{1}{p}}=[(a^p)^{\frac{1}{p}}]^{\frac{1}{q}}=a^{\frac{1}{q}},$$

откуда $a^{\frac{p}{q}}=(a^{\frac{1}{q}})^p$, отсюда и из 3° следует, что

$$a^{\frac{p}{q}}=(a^p)^{\frac{1}{q}}=(a^{\frac{1}{q}})^p.$$

При доказательстве 2) воспользовались определением 3°, теоремой 1) и определением корня.

3) $a^{\frac{p\lambda}{q\lambda}}=a^{\frac{p}{q}}$, где λ — натуральное число.

Доказательство.

$$a^{\frac{p\lambda}{q\lambda}}=(a^{p\lambda})^{\frac{1}{q\lambda}}=[(a^p)^\lambda]^{\frac{1}{q\lambda}}=\{[(a^p)^\lambda]^{\frac{1}{\lambda}}\}^{\frac{1}{q}}=(a^p)^{\frac{1}{q}}=a^{\frac{p}{q}}.$$

При доказательстве 3) воспользовались определением 3°, свойством (II), теоремой 1) и определением корня.

4) $a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{p_1}{q_1}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{p_1}{q_1}}$.

Доказательство.

$$a^{\frac{p}{q}}a^{\frac{p_1}{q_1}}=a^{\frac{pq_1}{qq_1}}\cdot a^{\frac{p_1q}{qq_1}}=(a^{\frac{1}{qq_1}})^{pq_1}\cdot(a^{\frac{1}{qq_1}})^{p_1q}=(a^{\frac{1}{qq_1}})^{pq_1+p_1q}=$$

$$=a^{\frac{pq_1+p_1q}{qq_1}}=a^{\frac{p}{q_i}+\frac{p_1}{q_1}}.$$

При доказательстве 4) воспользовались теоремами 3), 2) и свойством (I).

5) $(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{p_1}{q_1}}=a^{\frac{pp_1}{qq_1}}$.

Доказательство.

$$(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{p_1}{q_1}}=[(a^p)^{\frac{1}{q}}]^{\frac{p_1}{q_1}}=\{[(a^p)^{\frac{1}{q}}]^{p_1}\}^{\frac{1}{q_1}}=\{[(a^p)^{p_1}]^{\frac{1}{q}}\}^{\frac{1}{q_1}}=(a^{pp_1})^{\frac{1}{qq_1}}=a^{\frac{pp_1}{qq_1}}.$$

Мы воспользовались определением 3°, теоремой 2), свойством (II) и теоремой 1).

Таким образом, свойства (I) и (II) степени с целыми показателями распространяются и на степень с рациональными показателями.

§ 12. Степенная функция с дробным показателем

Определение. *Степенной функцией с дробным показателем называется функция вида*

$$y = x^{\frac{p}{q}},$$

где p и q — целые числа, не имеющие общих делителей, отличных от 1, и $q \neq 0$.

а) Пусть $\frac{p}{q} > 0$.

Рассмотрим несколько случаев:

1) p — четное число, q — нечетное. Функция $y = \sqrt[q]{x^p}$ определена на всем множестве действительных чисел.

В самом деле, $x^p \geqslant 0$ при любых x, а по доказанному в § 11 корень q-й степени из неотрицательного числа существует. Функция непрерывна, что следует из теоремы о непрерывности сложной функции, четна, так как выполняется условие $f(-x) = f(x)$, т. е. $\sqrt[q]{(-x)^p} = \sqrt[q]{x^p}$. График функции расположен симметрично относительно оси OY. Функция в промежутке $(-\infty, 0]$ монотонно убывает ($y' \leqslant 0$) и в промежутке $[0, +\infty)$ монотонно возрастает ($y' \geqslant 0$). О вогнутости и выпуклости графика следует судить по знаку второй производной.

2) p — нечетное число, q — четное. Функция $y = x^{\frac{p}{q}}$ определена при $x \geqslant 0$, непрерывна, монотонно возрастает, так как

$$y' = \frac{p}{a} x^{\frac{p}{q} - 1} \geqslant 0.$$

3) p и q — нечетные числа.

Функция $y = x^{\frac{p}{q}}$ определена и непрерывна на всем множестве действительных чисел, нечетна, так как выполняется условие

$$f(-x) = -f(x), \text{ т. е. } \sqrt[q]{(-x)^p} = -\sqrt[q]{x^p}.$$

График функции расположен симметрично относительно начала координат. В промежутке $(-\infty, +\infty)$ функция монотонно возрастает, так как $y' = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q} - 1} = \frac{p}{q} \sqrt[q]{x^{p-q}} \geqslant 0$. О вогнутости и выпуклости графика, как уже неоднократно говорилось, следует судить по знаку второй производной.

Исследуем графики функций вблизи точки 0, во втором случае только справа. Найдем производную функции $y = x^{\frac{p}{q}}$

$$y' = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q} - 1}.$$

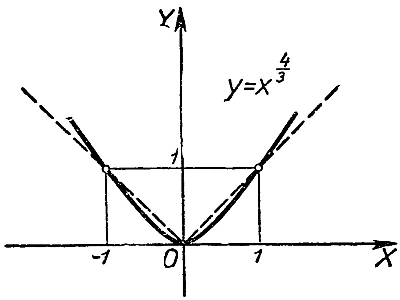
Если $\frac{p}{q} > 1$, то во всех трех случаях при $x \to 0$, $y' \to 0$.

Если $\frac{p}{q}<1$, то в первом случае при $x \to -0$, $y' \to -\infty$ и при $x \to +0$, $y' \to +\infty$; во втором — при $x \to +0$, $y' \to +\infty$; в третьем — при $x \to 0$, $y' \to +\infty$.

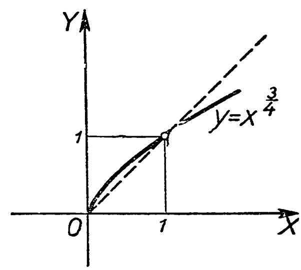
Следовательно, если $\frac{p}{q}>1$, то в точке $x=0$ касательная к кривой совпадает с осью OX. Если $\frac{p}{q}<1$, то касательной к кривой в точке $x=0$ будет ось OY. При построении графиков функций вида $y=x^r\left(r=\frac{p}{q}>0\right)$ это следует постоянно учитывать.

Пример 1. $y=x^{\frac{4}{3}}$.

Функция определена и непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$, четна, график ее расположен симметрично относительно оси OY



Черт. 8.



Черт. 9.

и вогнутостью направлен вверх, так как $y''=\frac{4}{9\sqrt[3]{x^2}}>0$. В точке $x=0$ производная $f'(0)=0$, т. е. касательная в этой точке есть ось OX. В промежутке $(-\infty, 0]$ функция монотонно убывает $(y' \leqslant 0)$ от $+\infty$ до 0, а в промежутке $[0, +\infty)$ монотонно возрастает $(y' \geqslant 0)$ от 0 до $+\infty$ (черт. 8).

Пример 2. $y=x^{\frac{3}{4}}$.

Функция определена и непрерывна в промежутке $[0, +\infty)$, монотонно возрастает в этом промежутке $(y'>0)$. График функции расположен в первом квадранте и вогнутостью направлен вниз $(y''<0)$. Касательная в точке $x=0$ справа совпадает с осью OY, так как $y' \to +\infty$ при $x \to +0$ (черт. 9).

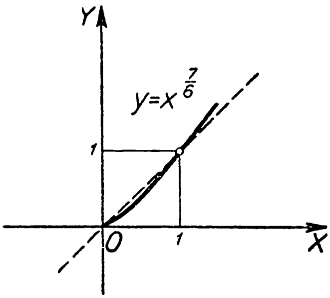
Пример 3. $y=x^{\frac{7}{6}}$.

Функция определена и непрерывна в промежутке $[0, +\infty)$, монотонно возрастает в этом промежутке $(y' \geqslant 0)$. График функции вогнутостью направлен вверх $(y''>0)$. Касательная в точке

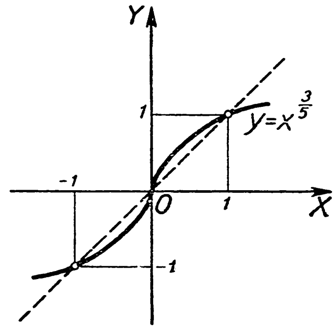
$x=0$ справа совпадает с осью OX, так как $y'\to 0$ при $x\to +0$ (черт. 10).

Пример 4. $y=x^{\frac{3}{5}}$.

Функция определена и непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$, монотонно возрастает в этом интервале ($y'>0$), нечетна, ее график расположен симметрично относительно начала координат.



Черт. 10.



Черт. 11.

Касательной в точке $x=0$ является ось OY. В интервале $(-\infty, 0)$ кривая вогнута ($y''>0$), в интервале $(0, +\infty)$ — выпукла ($y''<0$), точка (0; 0) есть точка перегиба (черт. 11).

Пример 5. $y=x^{\frac{7}{5}}$.

Функция определена и непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$, нечетна, монотонно возрастает в этом промежутке. Касательной в точке $x=0$ является ось OX $(f'(0)=0)$. Кривая слева от нуля выпукла ($y''<0$), а справа вогнута ($y''>0$), точка (0; 0) есть точка перегиба (черт. 12).

б) Пусть $\frac{p}{q}>0$ и $y=x^{-\frac{p}{q}}$,

тогда $y=\frac{1}{x^{\frac{p}{q}}}$.

Рассмотрим также три случая:

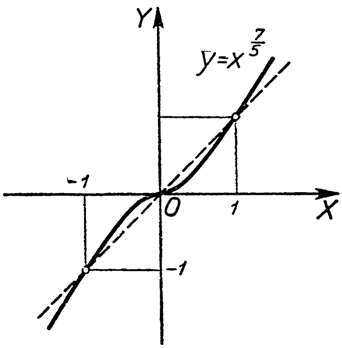
1) p — четное, q — нечетное.

Функция определена и непрерывна при всех значениях $x\neq 0$, четна, график ее расположен симметрично относительно оси OY.

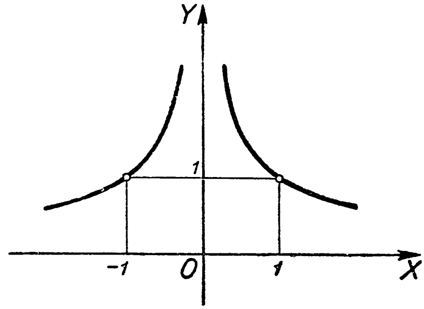
В точке $x=0$ функция имеет разрыв второго рода. В интервале $(-\infty, 0)$ функция возрастает $\left(y'=-\frac{p}{q}x^{-\frac{p+q}{q}}>0\right)$, а в интервале $(0, +\infty)$ — убывает ($y'<0$). График в области определения функции вогнутостью направлен вверх ($y''>0$). Горизонтальной асимптотой графика является ось OX $(Y=0)$, а вертикальной — ось OY $(X=0)$ (черт. 13).

2) p — нечетное число, q — четное.

Функция определена и непрерывна в интервале $(0, +\infty)$, монотонно убывает в этом интервале ($y' < 0$), график функции

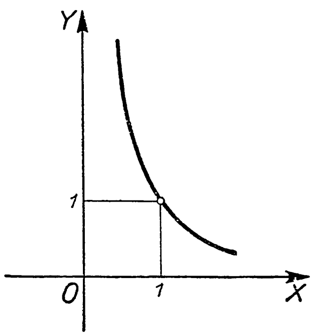


Черт. 12.

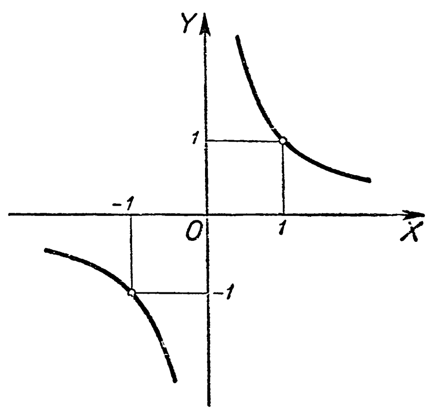


Черт. 13.

вогнутостью направлен вверх ($y'' > 0$). Горизонтальной и вертикальной асимптотами являются оси координат $Y = 0$ и $X = 0$ (черт. 14).



Черт. 14.



Черт. 15.

3) p и q — нечетные числа.

Функция определена и непрерывна при всех значениях $x \neq 0$, нечетна, поэтому график ее расположен симметрично относительно начала координат, в интервале $(-\infty, 0)$ график имеет выпуклость, а в интервале $(0, +\infty)$ — вогнутость. В точке $x = 0$ функция имеет разрыв второго рода. В области определения функция всюду убывает ($y' < 0$). Горизонтальной и вертикальной асимптотами являются оси координат $Y = 0$ и $X = 0$ (черт. 15).

Вопросы для самопроверки к главе I.

1. Перечислите основные элементарные функции.
2. Дайте определение элементарной функции.
3. Какая функция называется алгебраической?
4. Сформулируйте определения рациональной и иррациональной функций.
5. Каковы основные свойства степенной функции с целым положительным (отрицательным) показателем?
6. Докажите формулу бинома Ньютона и рассмотрите ее свойства.
7. Какая функция называется дробно-линейной и каковы ее основные свойства?
8. Какие дроби называются простейшими?
9. Докажите, что всякую правильную рациональную дробь можно разложить на простейшие дроби.
10. Докажите теорему о существовании корня с целым показателем.
11. Каковы основные свойства степенной функции с дробным показателем? (Рассмотрите все случаи.)

Упражнение к главе I.

Провести исследование функций и построить их графики:

1) $y=x^3-6x^2+11x-6$,

2) $y=x^3+5x+2$,

3) $y=3x^4+2x^2-3$,

4) $y=3x-x^3$,

5) $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$,

6) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$,

7) $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$,

8) $y=\dfrac{x^2-2x-7}{x+2}$,

9) $y=\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$,

10) $y=\dfrac{4x^2+10x+3}{2x+3}$,

11) $y=\dfrac{2x}{x-1}$,

12) $y=\dfrac{3x-5}{2x+1}$,

13) $y=\dfrac{2x+3}{5x-4}$,

14) $y=x^{\frac{8}{3}}$,

15) $y=x^{\frac{5}{2}}+2$,

16) $y=-x^{\frac{2}{3}}$,

17) $y=x^{\frac{5}{6}}$,

18) $y=x^{\frac{7}{9}}-1$,

19) $y=-x^{\frac{9}{5}}$,

20) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$,

21) $y=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$,

22) $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^5}}$.

Разложить на простейшие дроби следующие рациональные функции:

23) $\dfrac{x-5}{x^3-3x^2+4}$,

24) $\dfrac{x^2+1}{x^3+1}$,

25) $\dfrac{x^4}{x^3+8}$,

26) $\dfrac{x^2+1}{x^3-x}$,

27) $\frac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$,

28) $\frac{x^5-x^3-x^2}{x^2-1}$,

29) $\frac{x^4+1}{x^3(x^2+1)}$.

30) $\frac{3x^3+15x+6}{x^4+x^3+3x^2+2x+2}$,

31) $\frac{2x^3+4x}{x^4+x^2+4}$.

ГЛАВА ВТОРАЯ
ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 13. Определение элементарной трансцендентной функции

Определение. *Элементарные функции, не являющиеся алгебраическими, называются элементарными трансцендентными функциями.*

Примерами трансцендентных функций могут служить следующие функции:

1) $f(x)=3x^2+5\sin(x+1)+4$, 2) $f(x)=e^{3x}-2x+5$, 3) $f(x)=x^2\sin x+6x-\ln x$. А вот функция $f(x)=x^2\sin\frac{\pi}{7}+6x-\ln 3$ не будет трансцендентной функцией, так как это функция вида: $f(x)=ax^2+bx+c$, где коэффициенты a, b, c есть действительные числа, т. е. она является целой рациональной функцией второй степени.

В курсе средней школы из числа трансцендентных функций изучаются: показательные, тригонометрические, логарифмические и обратные тригонометрические функции и частично их комбинации.

§ 14. Степень с иррациональным показателем

Предварительно рассмотрим теоремы:

1) Справедлива формула

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1, \tag{1}$$

где n — натуральное число, $a>0$ и корень берется арифметический.

1-й случай. $a>1$.

Пусть $n>1$, тогда

$$\sqrt[n]{a}=1+\gamma_n,\quad \gamma_n>0. \tag{2}$$

Возвысив (2) в n-ю степень, получим:

$$a=(1+\gamma_n)^n=1+n\gamma_n+\frac{n(n-1)}{2}\gamma_n^2+\ldots,$$

откуда $a>1+n\gamma_n$,

или $a-1>n\gamma_n$, откуда $\gamma_n<\frac{a-1}{n}$. Итак, $0<\gamma_n<\frac{a-1}{n}$, переходя к пределу при $n\to\infty$, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_n=0.$$

Следовательно, если в (2) перейти к пределу при $n\to\infty$, то получим (1).

2-й случай. $0<a<1$.

Положив $a=\frac{1}{b}$ $(b>1)$, по доказанному выше будем иметь:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{b}}=\frac{1}{1}=1.$$

Если $a=1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$.

2) Докажем, что если $r_2>r_1$, то

$$a^{r_2}>a^{r_1}, \quad (3)$$

где r_1 и r_2 — рациональные числа и $a>1$. В самом деле, пусть $r_2=\frac{p_2}{q}$ и $r_1=\frac{p_1}{q}$ $(p_2>p_1)$, тогда $a^{\frac{1}{q}}>1$ и, следовательно,

$$(a^{\frac{1}{q}})^{p_2}>(a^{\frac{1}{q}})^{p_1}, \text{ т. е. } a^{r_2}>a^{r_1}.$$

Если $0<a<1$, то из условия $r_2>r_1$ следует неравенство $a^{r_2}<a^{r_1}$. Этот случай доказывается аналогично.

3) Докажем, что

$$\lim_{r\to 0}a^r=1 \quad (a>0), \tag{4}$$

где r есть переменная, принимающая рациональные значения и стремящаяся к нулю. Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty}a^{-\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}=1. \tag{1'}$$

Поэтому, учитывая формулы (1) и (1') при $a>1$, имеем: для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое натуральное число N, что

$$|a^{\frac{1}{N}}-1|<\varepsilon, \text{ или } 1-\varepsilon<a^{\frac{1}{N}}<1+\varepsilon,$$

$$|a^{-\frac{1}{N}}-1|<\varepsilon, \text{ или } 1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{N}}<1+\varepsilon.$$

Откуда $1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{N}}<a^{\frac{1}{N}}<1+\varepsilon$. Если $|r|<\frac{1}{N}$, или $-\frac{1}{N}<r<\frac{1}{N}$, то согласно (3)

$$a^{-\frac{1}{N}}<a^r<a^{\frac{1}{N}},$$

откуда $1-\varepsilon<a^r<1+\varepsilon$, или $|a^r-1|<\varepsilon$. Это и означает, что

$$\lim_{r\to 0} a^r=1.$$

Для случая, когда $0<a<1$, доказательство проводится аналогично.

Теперь введем понятие степени с иррациональным показателем a^α, где $a>0$ и α — иррациональное число. Сначала докажем, что для любой последовательности рациональных чисел

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots,\ r_n,\ \ldots,$$

сходящейся к α, соответствующая последовательность

$$a^{r_1},\ a^{r_2},\ a^{r_3},\ \ldots,\ a^{r_n},\ \ldots$$

сходится к одному и тому же пределу. Этот предел и принимается за a^α.

В самом деле, в любой окрестности точки α имеются рациональные точки, поэтому можно образовать монотонно возрастающую последовательность

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots,\ r_n,\ \ldots, \tag{5}$$

сходящуюся к α (например, можно взять монотонно возрастающую последовательность десятичных приближений для числа α по недостатку). Тогда соответствующая последовательность

$$a^{r_1},\ a^{r_2},\ a^{r_3},\ \ldots,\ a^{r_n},\ \ldots \tag{6}$$

при $a>1$ будет также монотонно возрастающей, см. (3), и ограниченной сверху, например числом a^r, где r — какое-нибудь рациональное число, большее α. Следовательно, последовательность (6) имеет конечный предел, обозначим его через A. Итак,

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n}=A. \tag{7}$$

Теперь возьмем произвольную последовательность рациональных чисел r'_n, стремящуюся к числу α, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} r'_n=\alpha, \tag{8}$$

и докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r'_n}=A$.

Учитывая (5) и (8), получим:

$$\lim_{n\to\infty}(r'_n-r_n)=0,$$

а поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r'_n-r_n}=1$ (см. (4)).

Воспользовавшись теоремой о произведении степеней с одним и тем же основанием (см. § 11, теорема 4)), получим:

$$a^{r'_n}=a^{r'_n-r_n}\cdot a^{r_n}. \tag{9}$$

Перейдя в (9) к пределу при $n \to \infty$, получим:

$$\lim_{n\to\infty} a^{r'_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r'_n - r_n} \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = 1 \cdot A = A. \quad (10)$$

Из (7) и (10) следует $\lim a^{r_n} = \lim a^{r'_n} = A$, следовательно, $\lim a^{r_n} = A$ существует, где r_n — любая последовательность рациональных чисел, сходящаяся к α.

Для случая, когда $0 < a < 1$, существование $\lim\limits_{r_n \to \alpha} a^{r_n}$ доказывается аналогично.

Определение. *Степенью a^α положительного числа a с иррациональным показателем α называется*

$$\lim a^{r_n} = a^\alpha, \quad (11)$$

где r_n — любая последовательность рациональных чисел, сходящаяся к α.

Если $a < 0$, то a^α в области действительного переменного не определяется, так как определение (11) теряет смысл, ибо для $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ с четным q_n и нечетным p_n, a^{r_n} для $a < 0$ в действительной области не существует.

Теорема. *Если $a > 0$ и α — любое действительное число, то*

$$a^\alpha > 0.$$

Доказательство.

1) Если $\alpha = n$, где n — натуральное число, то $a^\alpha = a^n$ есть положительное число, и в случае $\alpha = -n$ имеем $a^\alpha = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ — тоже положительное число.

2) При $\alpha = 0$, $a^0 = 1$.

3) Если $\alpha = \frac{p}{q}$ — рациональное число, где p и q—целые числа и $q > 0$, то при $\frac{p}{q} > 0$, $a^\alpha = \sqrt[q]{a^p}$ есть положительное число (см. в § 11 теорему существования корня) и $a^{-\alpha} = a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}} \left(\frac{p}{q} > 0\right)$ также есть положительное число.

Если α — иррациональное число, то всегда можно найти такие рациональные числа $r_1 < r_2$, что $r_1 < \alpha < r_2$, тогда при $a > 1$ $a^{r_1} < a^\alpha < a^{r_2}$, откуда $a^\alpha > a^{r_1} > 0$. Если $0 < a < 1$, то $a^{r_1} > a^\alpha > a^{r_2}$, откуда

$$a^\alpha > a^{r_2} > 0.$$

Если $a = 1$, то $a^\alpha = 1$. Итак, $a^\alpha > 0$ $(a > 0)$ при любых действительных значениях α.

Замечание. Теорема о произведении степеней с одинаковыми основаниями с рациональными показателями распространяется и на степени с иррациональными показателями, т. е.

$$a^{\alpha}a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}, \qquad (12)$$

где α и β — иррациональные числа и $a>0$.

Действительно, по доказанной теореме 4), § 11

$$a^{\alpha_n}a^{\beta_n}=a^{\alpha_n+\beta_n},$$

где α_n и β_n — рациональные числа. Будем теперь рассматривать α_n и β_n как рациональные последовательности, сходящиеся соответственно к числам α и β, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\beta_n=\beta, \text{ тогда}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n+\beta_n)=\alpha+\beta$$

и, учитывая равенство $\lim\limits_{n\to\infty}a^{r_n}=a^{\alpha}\,(a>0)$, доказанное в § 14, получим:

$$a^{\alpha}a^{\beta}=\lim_{n\to\infty}a^{\alpha_n}\cdot\lim_{n\to\infty}a^{\beta_n}=\lim_{n\to\infty}a^{\alpha_n+\beta_n}=a^{\alpha+\beta}.$$

Таким образом, теорема имеет место при любых действительных α и β.

§ 15. Показательная функция

Определение. *Показательной функцией называется функция вида*

$$y=a^x \quad (a>0). \qquad (1)$$

Согласно предыдущему имеем:

1) если $x=n$ (n — натуральное число), то

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\ldots a}_{n \text{ раз}},$$

2) если $x=\frac{p}{q}$ — число рациональное, то

$$a^{\frac{p}{q}}=(a^p)^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{a^p},$$

3) если $x=0$, то $a^0=1$ и

4) если $x=\alpha$ есть иррациональное число, то a^{α} определяется так, как было дано выше (см. § 14, (11)).

Таким образом, функция (1) определена на всем множестве действительных чисел. Из определения функции (1) также следует, что при любых значениях независимой переменной x показательная функция принимает только положительные значения (см. теорему § 14), т. е.

$$a^x>0.$$

Условимся в дальнейшем основание $a>0$ брать отличным от единицы, так как случай $a=1$ не представляет интереса ввиду того, что функция с таким основанием тождественно равна единице при любых значениях x. Теперь докажем непрерывность показательной функции

$$y=a^x \quad (a>0;\ a\neq 1).$$

Найдем приращение функции Δy в произвольной фиксированной точке x.

$$y+\Delta y=a^{x+\Delta x}, \quad \Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x\cdot(a^{\Delta x}-1).$$

Отсюда видно, что если $\Delta x\to 0$, то $\Delta y\to 0$ *), т. е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}a^x(a^{\Delta x}-1)=a^x\lim_{\Delta x\to 0}(a^{\Delta x}-1)=a^x\cdot 0=0.$$

Это и означает, что функция непрерывна в указанной точке. А так как точка x была взята произвольно из промежутка определения функции, то этим самым доказана непрерывность функции в любой точке промежутка, т. е. непрерывность функции во всем промежутке $(-\infty, +\infty)$. Впрочем, о непрерывности показательной функции нам уже было известно из «Введения в анализ». Больше того, мы также знаем, что производная показательной функции существует

$$y'=a^x\ln a.$$

Воспользуемся этим. Функция (1) при $a>1$ возрастающая ($y'>0$), а при $0<a<1$ убывающая ($y'<0$).

Рассмотрим поведение функции при $x\to\infty$. Докажем, что

$$\lim_{x\to+\infty}a^x=+\infty \quad (a>1). \tag{2}$$

Воспользовавшись определением предела функции, покажем, что для любого числа $E>0$ найдется такое число $\Delta>0$, что для всех значений $x>\Delta$ будет выполняться неравенство $a^x>E$. Логарифмируя последнее неравенство, получим $x>\log_a E$, отсюда следует, что $\Delta=\log_a E$.

Докажем теперь, что

$$\lim_{x\to-\infty}a^x=0 \quad (a>1). \tag{5}$$

Для доказательства равенства (5) произведем замену переменной, положив $x=-t$. Тогда

$$\lim_{x\to-\infty}a^x=\lim_{t\to+\infty}a^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{a^t}=0, \tag{6}$$

a^t при $t\to+\infty$ по доказанному (2) есть бесконечно большая

*) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}a^{\Delta x}=1$ $(a>0)$, где Δx принимает действительные значения. Этот предел можно найти, так же как и (4) § 14. Докажите самостоятельно.

величина, а обратная ей величина $\frac{1}{a^t}$ есть бесконечно малая, т. е. имеет место (6)

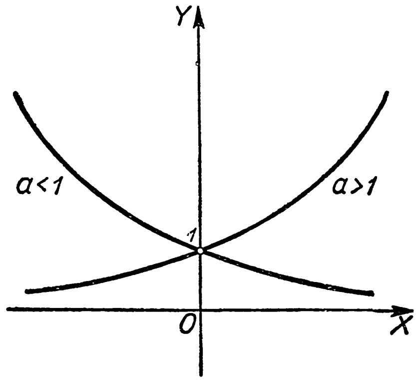
Если $0 < a < 1$, то:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0, \tag{7}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty. \tag{8}$$

(7) и (8) докажите самостоятельно.

Итак, если независимая переменная x изменяется в промежутке $(-\infty, +\infty)$, то функция y изменяется в промежутке $(0, +\infty)$. Функция в интервале $(-\infty, +\infty)$ непрерывна, строго монотонно возрастает в этом интервале, если $a > 1$, и строго монотонно убывает, если $0 < a < 1$. Все графики показательных функций вогнутостью направлены вверх, так как $y'' = a^x (\ln a)^2 > 0$, расположены выше оси OX, проходят через точку (0; 1) и имеют горизонтальную асимптоту $Y = 0$, т. е. ось OX, так как $\lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ (x \to +\infty)}} f(x) = 0$ см. (5) и (7) (черт. 16). В заключение отметим, что известные правила действий с рациональными показателями распространяются и на случай любых действительных показателей, а именно:



Черт. 16.

I. $f(x) f(z) = f(x + z)$ или $a^x a^z = a^{x+z}$, что нами уже было доказано в § 14.

II. $(a^x)^z = a^{xz}$.

III. $(ab)^x = a^x b^x$.

IV. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

V. $\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$, где a и b — положительные числа.

Из доказанной формулы I следует, что

$$a^x a^{-x} = a^{x-x} = a^0 = 1,$$

откуда

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad \text{и} \quad \frac{a^x}{a^z} = a^x a^{-z} = a^{x-z}.$$

Формулы II, III, IV и V доказываются так же, как и формула I. Однако формулы II — V можно доказать иначе, если учесть, что показательная функция $y = a^x$ непрерывна. Докажем формулу II. Мы уже знаем, что формула II верна при рациональных значениях x и z (см. теорему 5), § 11). Пусть x и z имеют иррациональные значения и последовательность рациональных чисел $x_n \longrightarrow x$, $z_n \longrightarrow z$, тогда для рациональных значений x_n и z_n имеет место формула

$$(a^{x_n})^{z_n} = a^{x_n y_n}. \tag{9}$$

Перейдя в (9) к пределу при $n \longrightarrow \infty$, получим в силу непрерывности показательной функции формулу II. Формулы III, IV и V докажите самостоятельно.

Пример. Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^n} (a > 1)$, n — натуральное число.

Решение. Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Воспользовавшись правилом Лопиталя и применив его n раз, получим:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a^x (\ln a)^n}{n!} = +\infty.$$

Таким образом, бесконечно большая величина a^x более высокого порядка, чем бесконечно большая величина x^n (при $x \longrightarrow +\infty$), т. е. показательная функция $y = a^x (a > 1)$ растет быстрее, чем степенная функция $y = x^n$.

§ 16. Существование логарифмов

Определение. *Если между действительными числами a, y и x имеет место соотношение*

$$a^y = x,$$

то число y называют логарифмом числа x по основанию a и пишут $y = \log_a x$. Если $a = e$, то логарифмы называют натуральными и пишут $y = \ln x$, если $a = 10$, то логарифмы называют десятичными, и в этом случае принято писать так: $y = \lg x$.

Известно, что показательная функция (через x обозначили функцию)

$$x = a^y \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$
$$(-\infty < y < +\infty); \quad (0 < x < +\infty)$$

непрерывна и строго монотонна в интервале $(-\infty, +\infty)$. Эти свойства функции дают возможность сформулировать следующее предложение.

Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то для любого положительного числа b существует единственное действительное число α такое, что α-я степень числа a равна b, т. е.

$$a^\alpha = b,$$

отсюда

$$\log_a b = \alpha.$$

Существование такого числа α для любого числа $b>0$ следует из теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции (вторая теорема Больцано-Коши) *), а его единственность — из монотонности в строгом смысле показательной функции.

В самом деле, пусть b любое положительное число $(0<b<+\infty)$, тогда непрерывная функция $x=a^y$, переходя от одного своего значения к другому, проходит хоть раз через каждое промежуточное значение, следовательно, найдется такое значение $y=\alpha$, что $a^\alpha=b$, а в силу строгой монотонности функция $x=a^y$ пройдет через каждое промежуточное значение от 0 до $+\infty$ только один раз, поэтому найдется одно и только одно такое значение $y=\alpha$, что $a^\alpha=b$.

Итак, логарифмы положительных чисел существуют. Логарифмы (действительные) отрицательных чисел по основанию $a>0$ не существуют, так как любая степень положительного числа a положительна, и, следовательно, для $x<0$ равенство $a^y=x$ невозможно. Нуль также логарифма не имеет.

§ 17. Логарифмическая функция

Напомним сначала из «Введения в анализ» теорему о существовании обратной функции и ее непрерывности, которую можно сформулировать так.

Если функция $y=f(x)$ строго монотонно возрастает (убывает) и непрерывна в некотором промежутке X, то в соответствующем промежутке Y существует однозначная обратная функция $x=\varphi(y)$, также строго монотонно возрастающая (убывающая) и непрерывная.

Из теоремы ясно, что если прямая функция определена в промежутке X и область ее изменения есть промежуток Y, то для обратной функции при выполнении условий теоремы областью определения функции будет промежуток Y, а областью изменения функции — промежуток X. Теперь дадим определение.

Функция, обратная показательной функции $x=a^y$ $(a>0$ *и* $a\neq 1)$, *называется логарифмической функцией* $y=\log_a x$ *с тем же основанием.*

Известно, что если основание $a>1$, то показательная функция

$$x=a^y \quad (-\infty<y<+\infty); \quad (0<x<+\infty)$$

однозначна, непрерывна и монотонно возрастает в строгом смысле слова. Стало быть, согласно теореме, сформулированной выше, обратная функция

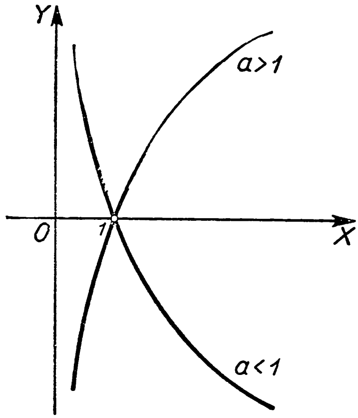
$$y=\log_a x \ (0<x<+\infty); \ (-\infty<y<+\infty)$$

также однозначна, непрерывна и строго монотонно возрастает в соответствующем промежутке $(0, +\infty)$.

*) См. Г. М. Фихтенгольц, Основы математического анализа, т. 1, п. 70 или какой-нибудь другой курс математического анализа.

Если $0 < a < 1$, то функция $x = a^y$ $(-\infty < y < +\infty)$; $(0 < x < +\infty)$ однозначна, непрерывна и строго монотонно убывает, следовательно, обратная функция

$$y = \log_a x \quad (0 < x < +\infty); \quad (-\infty < y < +\infty)$$



Черт. 17.

также однозначна, непрерывна и убывает. Итак, функция $y = \log_a x$ при $a > 1$ возрастающая, а при $0 < a < 1$ убывающая. Графики логарифмических функций при любом основании $a > 0$ $(a \neq 1)$ проходят через точку (1; 0), так как $a^0 = 1$, т. е. $\log_a 1 = 0$. Отсюда в силу монотонности логарифмической функции следует, что если $a > 1$, то для $x > 1$, $\log_a x > 0$ и для $0 < x < 1$ $\log_a x < 0$. Если же $0 < a < 1$, то для

$$0 < x < 1 - \log_a x > 0, \text{ а для}$$
$$x > 1 - \log_a x < 0.$$

Вертикальной асимптотой графиков логарифмических функций является ось OY, так как при $x \to +0$ $\log_a x \to -\infty$ $(a > 1)$ и $\log_a x \to +\infty$ $(0 < a < 1)$ (черт. 17).

§ 18. Связь между логарифмическими функциями с разными основаниями

Логарифмы чисел при основаниях a и b связаны соотношениями:

$$\log_a x = \frac{1}{\log_b a} \cdot \log_b x, \quad \text{или} \quad \log_b x = \frac{1}{\log_a b} \log_a x.$$

Доказательство. Обозначим $\log_a x = y_1$, $\log_b x = y_2$, откуда

$$x = a^{y_1}, \quad x = a^{y_2}, \text{ т. е. } a^{y_1} = b^{y_2}. \tag{1}$$

Прологарифмировав (1) по основанию a, получим:

$$y_1 = y_2 \log_a b \quad \text{или} \quad \log_a x = \log_b x \cdot \log_a b. \tag{2}$$

Пусть $x = a$, тогда из (2) получим:

$$1 = \log_b a \cdot \log_a b, \quad \text{т. е.} \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) окончательно получим, что

$$\log_a x = \log_b x \cdot \frac{1}{\log_b a}. \tag{4}$$

Так же доказывается и вторая формула

$$\log_b x = \log_a x \cdot \frac{1}{\log_a b}.$$

Итак, чтобы перейти от одной системы логарифмов к другой, надо умножить логарифмы на некоторый постоянный множитель («модуль перехода»).

Примеры. 1) Перейти от натуральных логарифмов к десятичным, и наоборот.

Решение. $\lg x = \ln x \cdot \frac{1}{\ln 10}$, где $e = 2{,}718281828459045...$; число $M = \frac{1}{\ln 10} = \lg e = 0{,}43429...$ называется модулем перехода. Таким образом, $\lg x = \ln x \cdot M$ и $\ln x = \lg x \cdot \frac{1}{M}$.

2) Пусть имеем систему логарифмов по основанию 5, перейдем к системе логарифмов по основанию 7.

Решение. Воспользовавшись соотношением (4), получим

$$\log_7 x = \log_5 x \cdot \frac{1}{\log_5 7}.$$

Мы уже знаем, что логарифмом числа x по основанию $a > 0$ и $a \neq 1$ называется показатель степени y, при возведении в которую основания a получается число x.

$$\log_a x = y, \quad \text{т. е.} \quad x = a^y.$$

Пользуясь этим определением и свойствами степеней, доказать:

I. Два числа, имеющие одинаковые логарифмы по одному и тому же основанию, равны,

II. $\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$,

III. $\log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$,

IV. $\log_a x^n = n \log_a x$,

V. $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$,

где x_1, x_2, x — положительные числа, $a > 0$ и $a \neq 1$.

Докажем I. Если $\log_a x_1 = \log_a x_2 = b$, то $x_1 = x_2$.

Доказательство. По определению логарифма имеем:

$$x_1 = a^b, \quad x_2 = a^b, \tag{5}$$

откуда $x_1 = x_2$.

Заметим, что из (5) следует: $x_1 = a^{\log_a x_1}$, $x_2 = a^{\log_a x_2}$.

Теоремы II, III, IV и V докажите самостоятельно.

§ 19. Степенная функция с иррациональным показателем

Степенной функцией с иррациональным показателем называется функция вида

$$y = x^\alpha, \tag{1}$$

где α — иррациональное число.

Напомним, что степенная функция нами уже рассматривалась для случаев:

1) $\alpha = n$, где n — натуральное число (§ 3 и 7).
$\alpha = -n$

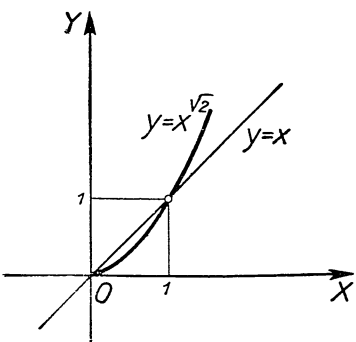
2) $\alpha = \frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ — рациональная несократимая дробь (§ 12).

Были рассмотрены основные свойства степенной функции и, в частности, указывалось, что функция

$$f(x) = x^{\frac{p}{q}}$$

не определена для отрицательных значений x, если p — нечетное число, а q — четное.

3) Если же α есть иррациональное число, то при отрицательном x выражение x^α в действительной области не имеет смысла (§ 14). Следовательно, функция (1) определена только для положительных значений x, т. е. в интервале $(0, +\infty)$*). Заметим, что функция $y = x^\alpha$ для случаев 1) и 2) была алгебраической, для случая 3) можно доказать, что она *трансцендентна*. Для изучения свойств функции (1) в области ее определения при любом действительном α запишем функцию в таком виде



Черт. 18.

$$y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \qquad (2)$$

(можно представить и так: $x^\alpha = a^{\alpha \log_a x}$, где $a > 0$ и $a \neq 1$). Степенную функцию представили в виде сложной функции $y = e^u$, где $u = \alpha \ln x$. Из (2) вытекают следующие свойства функции $y = x^\alpha$.

1. Функция определена в интервале $(0, +\infty)$.

2. Функция непрерывна в интервале $(0, +\infty)$, что следует из теоремы о непрерывности сложной функции ($u = \alpha \ln x$ непрерывна в промежутке $(0, +\infty)$ и e^u непрерывна при любом значении u).

3. Функция (2) принимает только положительные значения.

4. Если $\alpha > 0$, то функция $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ возрастающая.

5. Если $\alpha < 0$, то функция убывающая.

6. Все графики функций $y = x^\alpha$ проходят через точку $(1; 1)$ и расположены в первом квадранте.

Заметим, что степенная функция (1) при любом $\alpha > 0$ возрастает быстрее логарифмической функции $y = \log_a x \; (a > 1)$.

---

*) Если $\alpha > 0$, то функция $y = x^\alpha$ определена на полусегменте $[0, +\infty)$.

В этом легко убедиться, вычислив

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x\ln a}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha\ln a}=0.$$

Пример. Рассмотрим функцию $y=x^{\sqrt{2}}$. Найдем первую и вторую производные: $y'=\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$, $y''=\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}-1)x^{\sqrt{2}-2}$. Функция в промежутке $[0, +\infty)$ возрастает ($y'\geqslant 0$), график ее имеет вогнутость ($y''>0$) и проходит через точку (1;1). На участке (0,1) график функции расположен ниже прямой $y=x$, на участке $(1, +\infty)$ — выше, так как в промежутке (0,1) имеем неравенство $x^{\sqrt{2}}<x$, а в промежутке $(1, +\infty)$ неравенство $x^{\sqrt{2}}>x$ (черт. 18).

§ 20. Тригонометрические функции (краткий обзор)

Из школьного курса известно, что за единицу измерения углов обычно принимают один градус, т. е. $\frac{1}{90}$ часть прямого угла. Дуга, соответствующая центральному углу в один градус, называется дуговым градусом. Угловой градус — величина постоянная, а дуговой есть функция от радиуса. Известно также, что за единицу измерения углов принимают радиан, т. е. центральный угол (в произвольном круге), соответствующий дуге, длина которой равна радиусу круга. Так как длина окружности равна $2\pi r$, то в окружности содержится 2π радиусов, следовательно, полный угол (360°) содержит 2π радианов. Отсюда видно, что радиан равен $\frac{360°}{2\pi}=\frac{180°}{\pi}\approx 57°18'$. В математическом анализе углы измеряют в радианной мере и аргументами тригонометрических функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ ($\sec x$ и $\csc x$) являются действительные числа, означающие количество радианов. Это надо понимать так:

Синусом числа x называется синус угла в x радианов, тангенсом числа x называется тангенс угла в x радианов, также и для $\cos x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$ *и* $\csc x$.

Примеры. 1) Функция $f(x)=\sin\ln x$ определена в интервале $(0, +\infty)$, найдем значение ее в точке $x=e^2$.

$$f(e^2)=\sin\ln e^2=\sin 2\approx\sin 114°36'=\cos 24°36'\approx 0{,}9092.$$

2) Функция $f(x)=\sin 2^x$ определена в интервале $(-\infty, +\infty)$. Найдем значение функции в точке $x=0$.

$$f(0)=\sin 1\approx\sin 57°18'\approx 0{,}8415.$$

3) $f(x)=\operatorname{tg} x$ при $x=\frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\approx\operatorname{tg} 28°39'\approx 0{,}5464$.

Функции $\sin x$ и $\cos x$ определены на всем множестве действительных чисел, являются периодическими с периодом, равным 2π, и непрерывны. Докажем непрерывность функции $f(x)=\sin x$ в произвольной точке x_0. Для этого покажем, что для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$. Преобразуем это неравенство: $|\sin x-\sin x_0|=\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leqslant 2\frac{|x-x_0|}{2}=$ $=|x-x_0|$. Положим $\delta=\varepsilon$, тогда при $|x-x_0|<\delta$ будет выполняться неравенство $|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$.

Непрерывность функции доказана в произвольной точке x_0, и этим самым доказана непрерывность функции $\sin x$ на всей числовой оси. Непрерывность функции $\cos x$ доказывается аналогично. Синус — функция нечетная, так как $\sin(-x)=-\sin x$. Косинус — функция четная, так как $\cos(-x)=\cos x$ (черт. 21 и 23).

Функции $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$ и $\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$ определены и непрерывны (как отношение непрерывных функций) на всей числовой оси, за исключением точек $x=\frac{\pi}{2}(2n+1)$ для $\operatorname{tg} x$ и $x=\pi n$ для $\operatorname{ctg} x$ ($n=0$; ± 1; ± 2; ...), в которых $\cos x$ и $\sin x$ соответственно обращаются в нуль. Функции периодические с периодом, равным π, нечетные, как отношение нечетной функции ($\sin x$) к четной ($\cos x$), и наоборот (черт. 25 и 27).

§ 21. Простые гармонические колебания

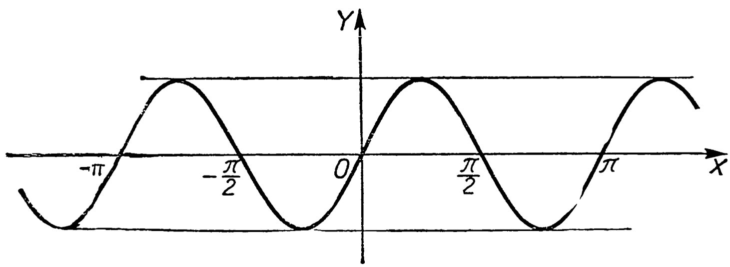
В § 20 мы дали краткий обзор свойств функций $y=\sin x$, $y=\cos x$ с периодом, равным 2π, и $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ с периодом, равным π. Теперь рассмотрим тригонометрические функции вида:

$$y=\sin\omega x,\ y=\cos\omega x,\ y=\operatorname{tg}\omega x \text{ и } y=\operatorname{ctg}\omega x, \qquad (1)$$

где ω — действительное положительное число. Легко определить период каждой из этих функций. Определим, например, период функции $y=\sin\omega x$, зная, что для $\sin x$ период равен 2π. Найдем такое T, что $\sin\omega(x+T)=\sin\omega x$. Отсюда ясно, что $\omega T=2\pi$, откуда $T=\frac{2\pi}{\omega}$. Для $\cos\omega x$ будет тот же период. Для тангенса и котангенса от ωx период равен $\frac{\pi}{\omega}$. Легко видеть, что графики функций (1) можно получить из построенных уже нами графиков 21 и 23; 25 и 27 путем деформации последних в направлении оси OX. При $\omega>1$ произойдет равномерное сжатие в ω раз, а при $\omega<1$ — растяжение в $\frac{1}{\omega}$ раз. Например, построим график функции $y=\sin 2x$. Период этой функции $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. График функции изображен на чертеже 19. Теперь построим график функции

$$y = \sin(\omega x + \alpha). \qquad (2)$$

В этом случае надо сначала построить график функции $y = \sin \omega x$, а затем построенный график необходимо сдвинуть по оси OX на расстояние $\left|\frac{\alpha}{\omega}\right|$ влево, если $\alpha > 0$, и вправо, если $\alpha < 0$. В самом деле, пусть в (2) $\omega = 1$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$, тогда $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$. Отсюда ясно, что график функции $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ получен из графика обычной синусоиды путем сдвига его влево на $\frac{\pi}{2}$. Если же в (2) положить $\omega = 1$, то график функции $y = \sin(x + \alpha)$ будет также получен из синусоиды пу-



Черт. 19.

тем сдвига его по оси OX на $-\alpha$. Положим в (2) $\omega x + \alpha = \omega t$, тогда график функции $y = \sin \omega t$ нам уже известен, так как он получается при помощи деформации по оси OX из графика функции $\sin t$, т. е. $\sin\left(x + \frac{\alpha}{\omega}\right)$. (3) График же функции (3) получен из синусоиды путем сдвига ее по оси OX на $-\frac{\alpha}{\omega}$, следовательно, график функции $y = \sin(\omega x + \alpha)$ получается из обычной синусоиды путем деформации ее по оси OX и последующего сдвига вдоль оси OX на $-\frac{\alpha}{\omega}$, поэтому сначала строим график функции $y = \sin \omega x$, после чего этот график сдвигаем вдоль оси OX на $-\frac{\alpha}{\omega}$. Можно график функции (2) построить и так: сначала построить график функции $y = \sin\left(x + \frac{\alpha}{\omega}\right)$, а затем подвергнуть его деформации (сжатие или растяжение) вдоль оси OX. Далее рассмотрим функцию вида

$$y = A \sin(\omega x + \alpha), \qquad (4)$$

где A, ω и α — действительные числа, причем, как уже говорилось выше, $\omega > 0$, так как в противном случае знак минус можно было бы вынести за знак синуса. Уравнение (4) описывает закон простого гармонического колебания (движения), часто встречающегося в механике, электротехнике, физике и в других точных науках. Функция (4) называется гармоникой с амплитудой $|A|$, периодом $T=\frac{2\pi}{\omega}$, частотой $\frac{\omega}{2\pi}$ и начальной фазой α. Функции

$$y=\sin\omega x,\ y=\sin(\omega x+\alpha),\ y=\cos\omega x,\ y=A\cos(\omega x+\alpha)$$

также называются гармониками с тем же периодом. Из соотношения $T=\frac{2\pi}{\omega}$ получим $\omega=\frac{2\pi}{T}$, означающее количество колебаний за 2π единиц времени (например, секунд). Для построения графика гармоники (4) надо сначала построить график гармоники (2) и ординаты полученного графика умножить на A.

Рассмотрим теперь функцию вида

$$y=a\sin\omega x+b\cos\omega x, \tag{5}$$

где a и b — числовые коэффициенты и $\omega>0$. Функция (5) так же периодическая с периодом, равным $\frac{2\pi}{\omega}$. Для построения графика функции (5) рекомендуется сначала ее преобразовать к гармонике (4), график которой мы уже строить умеем. Преобразование производится следующим образом:

$$a\sin\omega x+b\cos\omega x=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\omega x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\omega x\right)=$$
$$=A(\cos\alpha\sin\omega x+\sin\alpha\cos\omega x)=A\sin(\omega x+\alpha),$$

где положено $A=\sqrt{a^2+b^2}$, $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$, откуда

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{a}\ \text{ и }\ \alpha=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

Из этого преобразования видно, что сумма двух простых гармонических колебаний с одним и тем же периодом есть также простое гармоническое колебание с тем же периодом*).

Пример. Построить график функции $y=2\sin\frac{x}{2}+\sqrt{5}\cos\frac{x}{2}$.

Решение. Данную функцию преобразуем.

$$2\sin\frac{x}{2}+\sqrt{5}\cos\frac{x}{2}=\sqrt{4+5}\left(\frac{2}{3}\sin\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{5}}{3}\cos\frac{x}{2}\right)=$$
$$=3\left(\cos\alpha\sin\frac{x}{2}+\sin\alpha\cos\frac{x}{2}\right)=3\sin\left(\frac{x}{2}+\alpha\right),$$

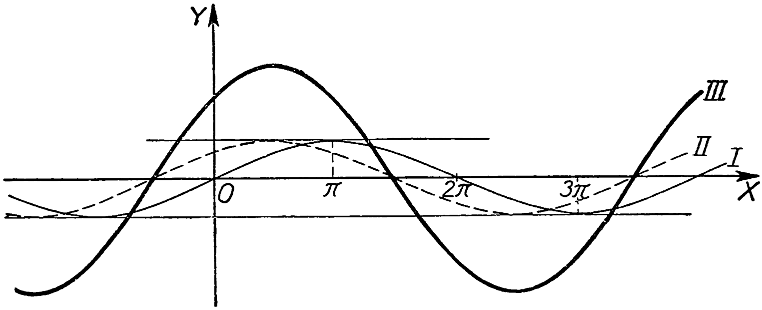
где $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}\approx\frac{4\pi}{15}$. Построим сначала график (I) гармоники $y=\sin\frac{x}{2}$, затем полученный график (I) сдвинем влево вдоль

*) Сумма простых гармонических колебаний с разными периодами уже не будет простым гармоническим колебанием.

оси OX на $\frac{4\pi}{15}:\frac{1}{2}=\frac{8\pi}{15}$, получим график (II) и, наконец, ординаты графика (II) умножим на 3, тогда получим искомый график (III) данной функции (черт. 20).

Мы показали, что от функции вида (5) можно перейти к функции вида (4); легко убедиться, что и наоборот: функцию вида (4) можно преобразовать к функции вида (5). Сделаем такое преобразование:

$A\sin(\omega x+\alpha)=A[\sin\omega x\cos\alpha+\cos\omega x\sin\alpha]=a\sin\omega x+b\cos\omega x$, где $a=A\cos\alpha$ и $b=A\sin\alpha$.



Черт. 20.

§ 22. Обратные тригонометрические функции и их главные ветви

1) Арксинус.

Функция $y=\sin x$, заданная на сегменте $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ (основной сегмент)*) и $-1\leqslant y\leqslant 1$ (черт. 21), есть функция непрерывная и монотонно возрастающая (в строгом смысле слова) в указанном сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, следовательно, существует обратная функция, однозначная, непрерывная и строго монотонно возрастающая

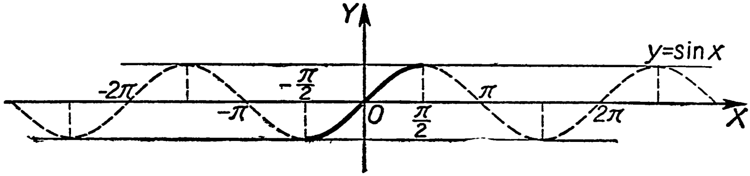
$$x=\arcsin y, \text{ где } -1\leqslant y\leqslant 1 \text{ и } -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Или, меняя обозначения, получим функцию

$$y=\arcsin x, \text{ где } -1\leqslant x\leqslant 1;\ -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

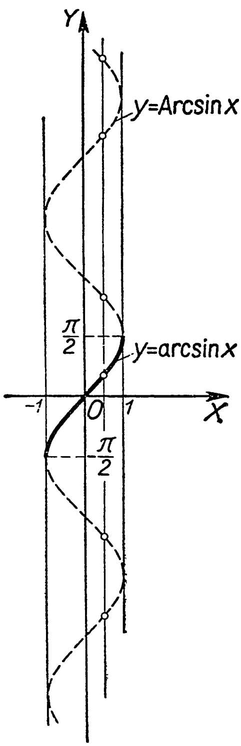
*) Могли бы взять сегмент $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, либо $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ и вообще любой сегмент $\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right]$ ($k=0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$), где функция монотонна, и вести те же рассуждения, что и для сегмента $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Однако условились из всех основных сегментов брать для синуса сегмент $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Соотношение (1) будем понимать так: $y = \arcsin x$ есть число (или угол), синус которого равен x, т. е. $\sin y = x$, или, что то



Черт. 21.

же самое, $\sin(\arcsin x) = x$, и $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. Итак, $y = \arcsin x$, если $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $\sin y = x$.



Черт. 22.

Функция $y = \arcsin x$ — нечетная, т. е.

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

Убедимся в этом. По определению

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin(-x) \leqslant \frac{\pi}{2}. \qquad (2)$$

В этом же сегменте заключена и функция $-\arcsin x$,
что следует из двойного неравенства (1).

$$\frac{\pi}{2} \geqslant -\arcsin x \geqslant -\frac{\pi}{2}.$$

Теперь найдем синусы этих углов $\sin[\arcsin(-x)] = -x$ и $\sin(-\arcsin x) = -x$.

Итак, углы $\arcsin(-x)$ и $-\arcsin x$ находятся на одном и том же сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и синусы их равны, следовательно, $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ *).

Примеры. 1) $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$,

2) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$,

3) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$.

*) На сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ синус монотонно возрастает в строгом смысле слова, поэтому не может быть двух различных углов в указанном сегменте, имеющих равные синусы.

Однозначная функция $y=\arcsin x \left(|x|\leqslant 1;\ |y|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ *называется главной ветвью арксинуса.*

Если не ограничиваться сегментом $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$, то обратной функцией для функции $x=\sin y$ будет многозначная функция, которую принято обозначать так:

$$y=\operatorname{Arcsin} x \quad \text{(черт. 22).}$$

Найдем общий вид углов, синус которых равен данному x ($|x|\leqslant 1$). В пределах одной окружности, как известно из тригонометрии, существуют такие два угла φ_1 и $\pi-\varphi_1$, синусы которых равны. Учитывая период синуса, равный 2π, получим, что значению x соответствуют углы $\varphi_1+2k\pi$ и $\pi-\varphi_1+2k\pi$ ($k=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots$). Обозначая $\varphi_1=\arcsin x$, получим

$$\operatorname{Arcsin} x=\begin{cases}\arcsin x+2k\pi\\ \pi-\arcsin x+2k\pi\end{cases}\quad (k=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots)$$

или $\operatorname{Arcsin} x=(-1)^n\arcsin x+\pi n \quad (n=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots)$

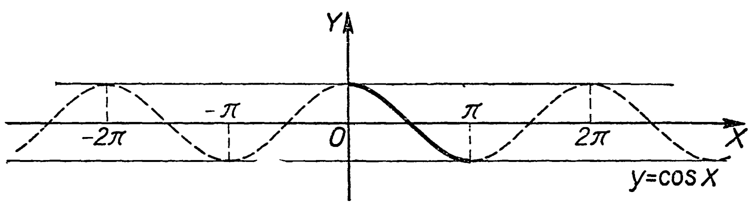
Пример. $\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{3}}{2}=(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi n=(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n.$

2) Арккосинус.

Пусть $y=\cos x$, где $\begin{matrix}0\leqslant x\leqslant\pi\\ -1\leqslant y\leqslant 1\end{matrix}$ (основной сегмент)

(черт. 23). Данная функция непрерывна и монотонно убывает в строгом смысле слова на сегменте $[0,\ \pi]$, следовательно, существует обратная функция, однозначная, непрерывная и строго монотонно убывающая

$$x=\arccos y, \text{ где } -1\leqslant y\leqslant 1 \text{ и } 0\leqslant x\leqslant\pi.$$



Черт. 23.

Меняя обозначения, получим:

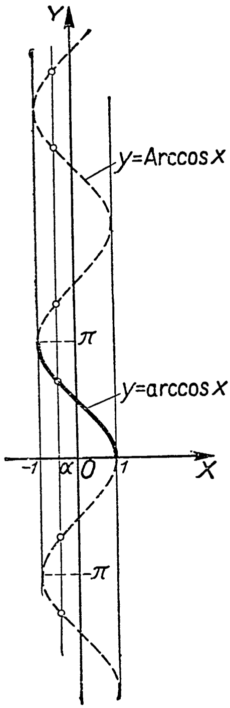
$$y=\arccos x, \text{ где } -1\leqslant x\leqslant 1 \text{ и } 0\leqslant y\leqslant\pi \quad (3) \text{ (черт. 24),}$$

и этот символ будем понимать так:
$y=\arccos x$ есть число (или угол), косинус которого равен x, т. е.

$$\cos y=x, \text{ или } \cos(\arccos x)=x, \text{ и } 0\leqslant y\leqslant\pi.$$

Короче, $y = \arccos x$, если $0 \leqslant y \leqslant \pi$ и $\cos y = x$. Докажем, что имеет место равенство

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$



Черт. 24.

По определению

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi. \tag{4}$$

Угол $\pi - \arccos x$ также содержится в сегменте $[0, \pi]$, что следует из двойного неравенства (4).

$$\cos[\arccos(-x)] = -x, \quad \cos[\pi - \arccos x] = -\cos(\arccos x) = -x.$$

Итак, углы $\arccos(-x)$ и $\pi - \arccos x$ содержатся в одном и том же сегменте $[0, \pi]$ и косинусы их равны, следовательно,

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x\ ^{*)}.$$

Примеры: 1) $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$,

2) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Однозначная функция $y = \arccos x$ $(|x| \leqslant 1;\ 0 \leqslant y \leqslant \pi)$ *называется главной ветвью арккосинуса.*

Если на переменную y ограничений не накладывать, тогда обратная функция $y = \arccos x$ для функции $x = \cos y$ будет многозначной, т. е. каждому значению x $(|x| \leqslant 1)$ будет соответствовать бесконечное множество значений y (черт. 24). Найдем общее выражение углов ($\operatorname{Arccos} x$), косинус которых равен x. В пределах одной окружности данному значению x $(\cos y = x)$ отвечают такие два угла $y_1 = \varphi$ и $y_2 = -\varphi$, что $\cos y_1 = \cos y_2$, и, учитывая период косинуса, равный 2π, получим, что каждому значению x соответствуют углы:

$$\varphi + 2k\pi \quad \text{и} \quad -\varphi + 2k\pi,$$

или, обозначая $\varphi = \arccos x$, получим:

$$\operatorname{Arccos} x = \pm\arccos x + 2k\pi \quad (k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots).$$

Примеры: 1) $\operatorname{Arccos}\frac{1}{2} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$,

---

*) На сегменте $[0, \pi]$ косинус монотонно убывает в строгом смысле слова, поэтому не может быть двух различных углов в указанном сегменте, имеющих равные косинусы.

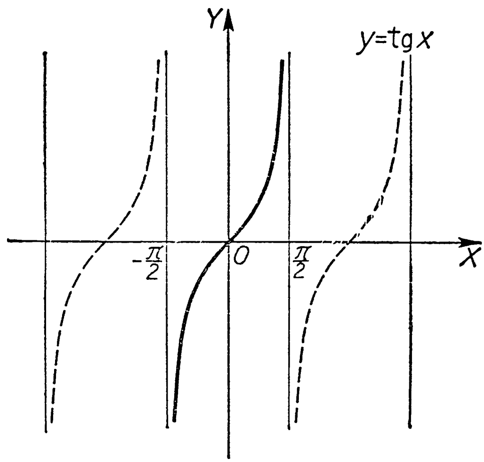
2) $\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2k\pi=$
$=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi,$

3) $\operatorname{Arccos}\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi.$

3) Арктангенс.

Рассмотрим функцию $y=\operatorname{tg} x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2};\quad -\infty<\right.$ $\left.<y<+\infty\right)$ (черт. 25). Данная функция в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ монотонно возрастает в строгом смысле и непрерывна, следовательно, существует обратная функция, однозначная, непрерывная и строго монотонно возрастающая

$$y=\operatorname{arctg} x, \quad \text{где } -\infty<x<+\infty; \quad -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}. \tag{5}$$



Черт. 25.

Соотношение (5) будем понимать так: $y=\operatorname{arctg} x$ есть число (или угол), тангенс которого равен x, т. е. $\operatorname{tg} y=x$ или $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x$, и $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$. Короче, $y=$ $=\operatorname{arctg} x$, если $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg} y=x$. Функция $y=\operatorname{arctg} x$ нечетная, т. е. имеет место равенство

$$\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg} x.$$

Это свойство доказывается так же, как и для арксинуса.

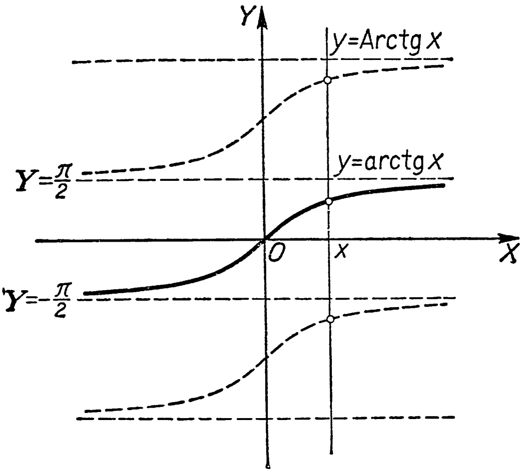
Однозначная функция $y=\operatorname{arctg} x$ $\left(|x|<+\infty;\ |y|<\frac{\pi}{2}\right)$ *называется главной ветвью арктангенса.*

Если же для функции $\operatorname{tg} y=x$ не ограничиваться значениями $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$, то каждому значению x будет отвечать бесконечное множество значений y, и мы в этом случае будем иметь для функции $\operatorname{tg} y=x$ обратную многозначную функцию $y=\operatorname{Arctg} x=\operatorname{arctg} x+k\pi$ $(k=0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$ (черт 26).

Примеры: 1) $\operatorname{Arctg} 1 = \operatorname{arctg} 1 + k\pi = \frac{\pi}{4} + k\pi$,

2) $\operatorname{Arctg}(-1) = \operatorname{arctg}(-1) + k\pi = -\operatorname{arctg} 1 + k\pi = -\frac{\pi}{4} + k\pi$,

3) $\operatorname{Arctg} \sqrt{3} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + k\pi = \frac{\pi}{3} + k\pi$.



Черг. 26.

Найдем для графика функции $y = \operatorname{arctg} x$ горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \text{ т. е. } Y = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}, \text{ т. е. } Y = -\frac{\pi}{2}.$$

Мы ими воспользовались при построении графика функции

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad -\infty < x < +\infty; \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

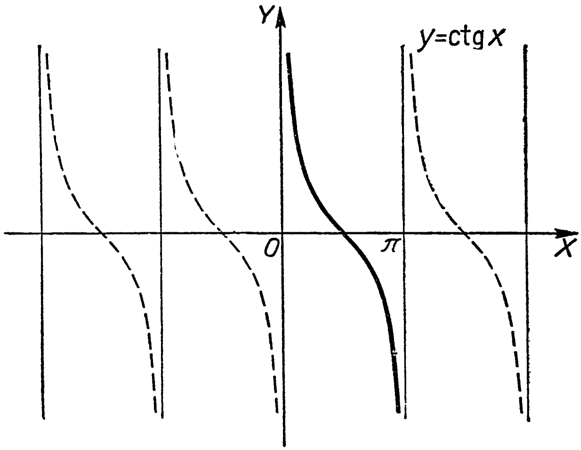
При построении графика функции $y = \operatorname{arctg} x$ также следует пользоваться асимптотами:

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{Arctg} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots).$$

4) Арккотангенс.

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{ctg} x$ $(0 < x < \pi; -\infty < y < +\infty)$ (черт. 27). Данная функция в промежутке $(0, \pi)$ монотонно убывает в строгом смысле слова и непрерывна, следовательно, существует обратная функция, однозначная, непрерывная и строго монотонно убывающая

$$y = \operatorname{arcctg} x, \text{ где } -\infty < x < +\infty; \ 0 < y < \pi. \qquad (6)$$



Черт. 27.

Соотношение (6) надо понимать так: $y = \operatorname{arcctg} x$ есть число (или угол), контангенс которого равен x, т. е. $\operatorname{ctg} y = x$, или $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$, и $0 < y < \pi$. Короче, $y = \operatorname{arc\,ctg} x$, если $0 < y < \pi$ и $\operatorname{ctg} y = x$. Равенство $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$ доказывается так же, как и для арккосинуса.

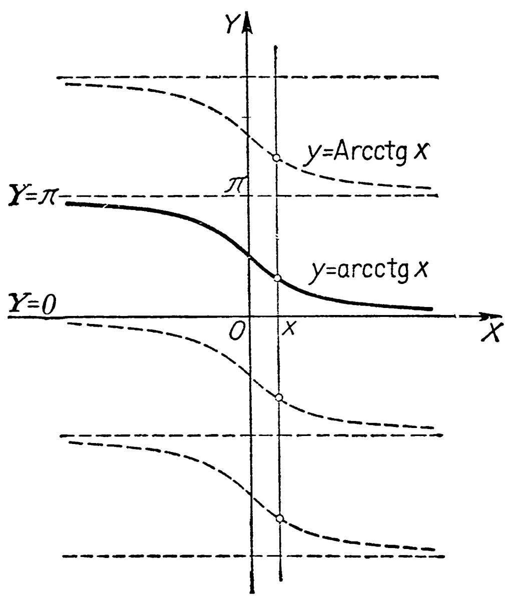
Однозначная функция $y = \operatorname{arcctg} x$ $(|x| < +\infty;\ 0 < y < \pi)$ *называется главной ветвью арккотангенса.*

Общий вид углов, имеющих котангенс, равный данному x, выражается формулой

$\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + k\pi$ $(k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$ (черт. 28).

Примеры:

1) $\operatorname{Arcctg} 0 = \operatorname{arcctg} 0 + k\pi = \frac{\pi}{2} + k\pi.$



Черт. 28.

2) $\operatorname{Arcctg}(-1) = \operatorname{arcctg}(-1) + k\pi = \pi -$
$- \operatorname{arcctg} 1 + k\pi = \pi - \frac{\pi}{4} + k\pi = \frac{3\pi}{4} + k\pi.$

Горизонтальные асимптоты графика функции $y = \operatorname{arcctg} x$ следующие:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arcctg} x = 0$, т. е. $Y = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi$, т. е. $Y = \pi$.

На редко встречающихся функциях $\operatorname{arcsec} x$ и $\operatorname{arccsec} x$ останавливаться не будем.

Итак, мы рассмотрели следующие функции (повторим четыре основные определения):

1) $y = \arcsin x$, если $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$; $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $\sin y = x$.

2) $y = \arccos x$, если $0 \leqslant y \leqslant \pi$; $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $\cos y = x$.

3) $y = \operatorname{arctg} x$, если $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$; $-\infty < x < +\infty$ и $\operatorname{tg} y = x$.

4) $y = \operatorname{arcctg} x$, если $0 < y < \pi$; $-\infty < x < +\infty$ и $\operatorname{ctg} y = x$.

§ 23. Тригонометрические функции от обратных тригонометрических функций

Мы уже знаем, что $\sin(\arcsin x) = x$, $\cos(\arccos x) = x$, где $|x| \leqslant 1$ и $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$, где $|x| < +\infty$. Рассмотрим теперь более сложные преобразования.

1) Доказать, что $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Решение. Положим $\arccos x = y$, тогда по определению следует, что $\cos y = x$, а надо определить $\sin y$.
Учитывая, что $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$, т. е. $0 \leqslant y \leqslant \pi$, имеем $\sin y = +\sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$, или $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$.

2) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$. Решение аналогичное.

3) $\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sin(\arccos x)}{\cos(\arccos x)} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$ $(x \neq 0)$;

x может принимать значения в промежутках $[-1, 0)$ и $(0, 1]$. Из выражения 3) видно, что при $x < 0$ $\operatorname{tg}(\arccos x) < 0$, при $x > 0$ $\operatorname{tg}(\arccos x) > 0$, т. е. знак $\operatorname{tg}(\arccos x)$ определяется знаком x.

Решим еще один пример. Заметим, что метод решения все время один и тот же.

4) $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Решение. Положим $\operatorname{arctg} x = y$, тогда из определения следует, что $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg} y = x$, а надо определить $\sin y$.

Воспользовавшись из тригонометрии формулой $\sin y = \pm\frac{\operatorname{tg} y}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 y}}$, получим:

$$\sin y = \pm\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}} = \pm\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Перед дробью возьмем знак плюс потому, что при $x>0$ $\sin(\operatorname{arctg} x)>0$, а при $x<0$ $\sin(\operatorname{arctg} x)<0$, т. е. знак $\sin(\operatorname{arctg} x)$ определяется знаком переменной x.

Проверьте, что:

$$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \qquad \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x};$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \qquad \operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x};$$

$$\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \qquad \operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}.$$

§ 24. Основные преобразования обратных тригонометрических функций и соотношения между ними

Известно, что $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ и $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, следовательно,

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \arccos\frac{1}{2},$$

т. е. данный угол может быть представлен и как арксинус и как арккосинус разных аргументов.

а) Рассмотрим сначала преобразование в общем виде одной аркфункции*) в другую с соответствующим изменением аргумента для следующих пар функций.

1) $y = \arcsin x$ $(-1<x<1)$ и $y = \operatorname{arctg} x$ $(-\infty<x<+\infty)$.

Значения этих функций содержатся в одном и том же интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, поэтому угол определяется однозначно значением его тангенса или синуса. Стало быть, зная, что $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, имеем $\arcsin x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ и, наоборот, так как $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, то $\operatorname{arctg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

*) В дальнейшем в целях краткости обратные тригонометрические функции будем называть аркфункциями.

2) Возьмем вторую пару функций.

$y=\arccos x \quad (-1<x<1)$ и $y=\operatorname{arcctg} x \quad (-\infty<x<+\infty)$. Значения этих функций содержатся в интервале $(0, \pi)$. Рассуждая так же, как и в 1), будем иметь:

$$\operatorname{ctg}(\arccos x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ откуда } \arccos x=\operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\cos(\operatorname{arcctg} x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ откуда } \operatorname{arcctg} x=\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

б) Если ограничиться изменением y только в первой четверти, т. е. в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то легко получить еще ряд соотношений.

1) $y=\arcsin x$ выразить через все остальные аркфункции при условии, что $0<y<\frac{\pi}{2}$ (в данном случае $0<x<1$).

Решение. $y=\arcsin x$, $\sin y=x$, или $y=\arcsin x$;

$$\cos y=\sqrt{1-x^2}, \text{ или } y=\arccos\sqrt{1-x^2};$$

$$\operatorname{tg} y=\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ или } y=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\operatorname{ctg} y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \text{ или } y=\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Таким образом,

$$\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

2) $y=\arccos x$ $\left(0<x<1;\ 0<y<\frac{\pi}{2}\right)$ выразить через все остальные аркфункции.

Решение. Рассуждая так же, как и в 1), получим:

$$\arccos x=\arcsin\sqrt{1-x^2}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3) $y=\operatorname{arctg} x$, $x>0$ и $0<y<\frac{\pi}{2}$.

4) $y=\operatorname{arcctg} x$, $x>0$ и $0<y<\frac{\pi}{2}$.

3) и 4) выразить через все остальные аркфункции.

Решите самостоятельно.

5) Пусть $y=\arcsin x$ и $-1<x<0$. (1)

Как же в этом случае $\arcsin x$ выразить, например, через арккосинус? Из условия (1) следует, что $-\frac{\pi}{2}<\arcsin x<0$, а значения арккосинуса содержатся всегда в интервале $(0, \pi)$. В этом случае поступаем следующим образом:

$$\arcsin x=-\arcsin(-x), \quad \text{где} \quad 0<-x<1,$$

и теперь применим 1).

Пример. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ выразить через все остальные аркфункции.

Решение. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} =$

$$= -\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = -\operatorname{arcctg}\sqrt{3} \qquad \text{(см. 1).}$$

б) Если имеем $\arccos x$ и $-1 < x < 0$, то

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x), \text{ где } 0 < -x < 1,$$

т. е. задача свелась к ранее решенной 2).

Пример. $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$ выразить через все остальные аркфункции.

Решение. $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) = \pi - \arccos\frac{2}{3} = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{5}}{3} =$

$= \pi - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2} = \pi - \operatorname{arcctg}\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Аналогично поступаем и для функций $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ при $x < 0$.

в) Доказать, что:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1); \tag{I}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} \quad (-\infty < x < +\infty). \tag{II}$$

Доказательство.

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi;$$
$$0 \geqslant -\arccos x \geqslant -\pi;$$

$$\frac{\pi}{2} \geqslant \frac{\pi}{2} - \arccos x \geqslant -\frac{\pi}{2} \text{ и } \frac{\pi}{2} \geqslant \arcsin x \geqslant -\frac{\pi}{2}.$$

Углы $\frac{\pi}{2} - \arccos x$ и $\arcsin x$ содержатся на одном и том же сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Найдем их синусы.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x, \quad \sin(\arcsin x) = x,$$

следовательно, $\frac{\pi}{2} - \arccos x = \arcsin x$, или $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. Вторая формула доказывается аналогично.

г) Формулы сложения и вычитания.

Пусть $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Докажем, что

$$\arcsin x + \arcsin y = \arccos(\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2} - xy), \tag{1}$$

$$\arccos x + \arccos y = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}). \tag{2}$$

Доказательство.

По определению $0 \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$,

$$0 \leqslant \arcsin y \leqslant \frac{\pi}{2},$$

следовательно, $0 \leqslant \arcsin x + \arcsin y \leqslant \pi$.

Естественно, надо взять косинус (а не синус) от суммы арксинусов

$$\cos(\arcsin x + \arcsin y) = \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2} - xy, \text{ откуда}$$

$$\arcsin x + \arcsin y = \arccos(\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2} - xy).$$

Воспользовались известной формулой $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, положив $\alpha = \arcsin x$, $\beta = \arcsin y$.

$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, $\cos(\arcsin y) = \sqrt{1-y^2}$, $\sin(\arcsin x) = x$,

$$\sin(\arcsin y) = y.$$

Вторая формула доказывается аналогично.

Рассмотрим разность $\arcsin x - \arcsin y$ $(0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$

$$0 \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} \geqslant \arcsin y \geqslant 0.$$

Вычитая, получим $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x - \arcsin y \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Возьмем синус от разности арксинусов.

$$\sin(\arcsin x - \arcsin y) = x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}, \text{ откуда}$$

$$\arcsin x - \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}). \tag{3}$$

Здесь воспользовались формулой $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

Так же выводится и формула

$$\arccos x - \arccos y = \arcsin(y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2}); \quad (0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant y \leqslant 1). \tag{4}$$

Далее:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arcctg}\frac{1-xy}{x+y}, \tag{5}$$

$$\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arcctg}\frac{xy-1}{x+y}, \tag{6}$$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}, \tag{7}$$

$$\operatorname{arcctg} x - \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arcctg}\frac{y-x}{1+xy}, \tag{8}$$

при условии $x>0$, $y>0$.
Формулы 5), 6), 7), 8) доказываются аналогичными рассуждениями, что и формулы 1), 2), 3), 4). Докажите эти формулы самостоятельно.

Пример 1. Проверить, что $\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{1}{2}=$
$=\arccos\frac{2\sqrt{6}-1}{6}$.

Решение. $\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{1}{2}=\arccos\left(\sqrt{1-\frac{1}{9}}\times\right.$
$\left.\times\sqrt{1-\frac{1}{4}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)=\arccos\frac{2\sqrt{6}-1}{6}$. Мы воспользовались готовой формулой (1), а могли поступить иначе. Поскольку дана сумма арксинусов, то следует взять косинус от этой суммы, т. е.

$$\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{1}{2}\right)=\frac{2\sqrt{6}-1}{6}, \text{ откуда}$$

$$\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{1}{2}=\arccos\frac{2\sqrt{6}-1}{6}.$$

Пример 2. Доказать, что

$$\arcsin\frac{3}{\sqrt{73}}+\arccos\frac{11}{\sqrt{146}}+\arcsin\frac{1}{2}=\frac{5}{12}\pi.$$

Решение. $\arccos x=\arcsin\sqrt{1-x^2}$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

$$\arccos\frac{11}{\sqrt{146}}=\arcsin\sqrt{1-\frac{121}{146}}=\arcsin\frac{5}{\sqrt{146}},$$

следовательно, надо доказать, что

$$\arcsin\frac{3}{\sqrt{73}}+\arcsin\frac{5}{\sqrt{146}}+\arcsin\frac{1}{2}=\frac{5}{12}\pi.$$

Далее: $\arcsin\frac{3}{\sqrt{73}}+\arcsin\frac{5}{\sqrt{146}}=\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$ [см. п. г) формулу (1)].
Известно, что $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}$ и $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$,
поэтому $\arcsin\frac{3}{\sqrt{73}}+\arcsin\frac{5}{\sqrt{146}}+\arcsin\frac{1}{2}=\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}+$

$$+\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{5}{12}\pi.$$

д) Формулы удвоения.

Полагая в формулах сложения (1), (2), (5), (6) $x=y$, получим:

$$2\arcsin x=\arccos(1-2x^2) \quad 0\leqslant x\leqslant 1, \qquad (1')$$

$$2\arccos x=\arccos(2x^2-1) \quad 0\leqslant x\leqslant 1, \qquad (2')$$

$$2\operatorname{arctg} x=\operatorname{arctg}\frac{1-x^2}{2x} \qquad x>0, \qquad (5')$$

$$2\operatorname{arcctg} x=\operatorname{arcctg}\frac{x^2-1}{2x} \qquad x>0. \qquad (6')$$

Впрочем, формулы удвоения можно доказать, не пользуясь формулами сложения. Например, докажем формулу (1′).

$$0 \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$0 \leqslant 2\arcsin x \leqslant \pi,$$

следовательно, надо взять косинус, т. е.

$$\cos(2\arcsin x) = \cos^2(\arcsin x) - \sin^2(\arcsin x) = (\sqrt{1-x^2})^2 - x^2 = \\ = 1 - 2x^2, \text{ или } 2\arcsin x = \arccos(1-2x^2). \qquad (1')$$

Мы воспользовались формулой $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, где $\alpha = \arcsin x$.

Аналогичным способом можно получить и другие формулы удвоения.

Пример 3. Доказать, что

$$2\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg}\frac{3}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Решение. $2\operatorname{arctg} 2 = \operatorname{arcctg}\frac{1-4}{2\cdot 2} = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{4}\right) = \pi - \operatorname{arcctg}\frac{3}{4}$. Докажем, что $\pi - \operatorname{arcctg}\frac{3}{4} - \operatorname{arctg}\frac{3}{4} = \frac{\pi}{2}$ или

$$\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \operatorname{arcctg}\frac{3}{4} = \frac{\pi}{2} \quad [\text{см. п. в), формулу (II)}].$$

Мы сослались на доказанное тождество, а могли поступить иначе; так, вместо $\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \operatorname{arcctg}\frac{3}{4} = \frac{\pi}{2}$ напишем $\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \operatorname{arctg}\frac{4}{3} = \frac{\pi}{2}$ (1°) и теперь, применяя формулу 5) п. г), получим:

$$\operatorname{arcctg}\frac{1 - \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{4}{3} + \frac{3}{4}} = \frac{\pi}{2} \text{ или } \operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}, \text{ т. е. } \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Справедливость равенства (1°) можно было доказать и так: взять от левой и правой части котангенс

$$\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}, \text{ т. е. } 0 = 0.$$

Могли бы взять и косинус, получили бы тот же результат.

Пример 4. Найти функцию, обратную функции

$$y = 2\sin 3x \quad \left(-\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6}\right),$$

и определить область ее определения.

Решение. $y = 2\sin 3x$; $-\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6}$; $-2 \leqslant y \leqslant 2$.

На сегменте $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ функция $\sin 3x = \frac{y}{2}$ монотонно возрастает в строгом смысле слова и непрерывна, поэтому для данной функции существует обратная функция в соответствующем промежутке, также строго монотонно возрастающая и непрерывная.

$$3x = \arcsin\frac{y}{2}, \quad \text{или} \quad x = \frac{1}{3}\arcsin\frac{y}{2},$$

меняя обозначения, получим

$$y = \frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}, \quad -2 \leqslant x \leqslant 2; \quad -\frac{\pi}{6} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{6}.$$

Пример 5. Найти функцию, обратную функции

$$y = 3\arccos 5x,$$

и определить область ее определения.

Решение. $y = 3\arccos 5x$, $-1 \leqslant 5x \leqslant 1$, т. е. $-\frac{1}{5} \leqslant x \leqslant \frac{1}{5}$, $0 \leqslant y \leqslant 3\pi$. На сегменте $\left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$ функция $\arccos 5x = \frac{y}{3}$ монотонно убывает (в строгом смысле слова) и непрерывна, поэтому в соответствующем промежутке существует обратная функция, однозначная, строго монотонно убывающая и непрерывная.

$$5x = \cos\frac{y}{3}, \quad \text{или} \quad x = \frac{1}{5}\cos\frac{y}{3}.$$

Меняя обозначения, получим:

$$y = \frac{1}{5}\cos\frac{x}{3}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 3\pi; \quad -\frac{1}{5} \leqslant y \leqslant \frac{1}{5}.$$

Вопросы для самопроверки к главе II.

1. Дайте определение элементарной трансцендентной функции.
2. Докажите теорему о существовании степени с иррациональным показателем.
3. Дайте определение показательной функции и укажите ее свойства.
4. Докажите существование и единственность логарифма положительного числа по данному основанию $a > 0$.
5. Какая функция называется логарифмической?
6. Какая существует связь между логарифмическими функциями с разными основаниями?
7. Какими свойствами обладает степенная функция с иррациональным показателем?
8. Какие вы знаете обратные тригонометрические функции и их свойства?
9. Существует ли для функции $y = \sin x$, рассматриваемой на сегменте $[0, \pi]$, обратная функция?
10. Существует ли для функции $y = \operatorname{tg} x$ обратная на сегменте $[0, \pi]$?
11. Какие вы знаете основные зависимости между аркфункциями?

Провести исследование функции и построить их графики:

$$32)\ y=10^x \text{ и } y=\left(\frac{1}{10}\right)^x,$$

$$33)\ y=\lg x \text{ и } y=\log_{\frac{1}{10}} x,$$

$$34)\ y=x^{\sqrt{3}} \text{ и } y=-x^{\sqrt{3}},$$

$$35)\ y=4\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right),\ y=\sin x+\sqrt{3}\cdot\cos x,\ y=3\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right).$$

Найти функцию, обратную данной, и определить ее область определения:

$$36)\ y=3\sin 4x \quad \left(-\frac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant 0\right),$$

$$37)\ y=\frac{1}{2}\cos\frac{3x}{4} \quad \left(0\leqslant x\leqslant\frac{4\pi}{3}\right),$$

$$38)\ y=\frac{3}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{5} \quad \left(-\frac{5\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{2}\right),$$

$$39)\ y=2\operatorname{ctg} 7x \quad \left(0<x<\frac{\pi}{7}\right),$$

$$40)\ y=\frac{2}{3}\arcsin 2x,$$

$$41)\ y=\frac{1}{5}\arccos 3x \quad \left(0\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}\right),$$

$$42)\ y=\operatorname{arctg}\frac{x}{2} \quad x\geqslant 0,$$

$$43)\ y=0{,}1\operatorname{arcctg} 2x.$$

При каких значениях x справедливо тождество:

$$44)\ \arcsin\sqrt{x}+\arccos\sqrt{x}=\frac{\pi}{2},$$

$$45)\ \arccos\sqrt{1-x^2}=\arcsin x,$$

$$46)\ \arccos\sqrt{1-x^2}=-\arcsin x,$$

$$47)\ 2\arcsin x=-\arccos(1-2x^2),$$

$$48)\ 2\operatorname{arctg} x=-\operatorname{arcctg}\frac{1-x^2}{2x}.$$

Доказать, что:

$$49)\ 2\operatorname{arctg} 10+\arcsin\frac{20}{101}=\pi,$$

$$50)\ \arcsin\frac{40}{41}+\arcsin\frac{9}{41}=\frac{\pi}{2},$$

$$51)\ \arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{8}{17}=\arcsin\frac{77}{85},$$

$$52)\ 2\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+2\operatorname{arctg}\frac{1}{5}=\frac{\pi}{4}.$$

Ответы к упражнениям.

1) Максимум $y=\frac{2}{9}\sqrt{3}$ при $x=2-\frac{\sqrt{3}}{3}$; минимум $y=-\frac{2}{9}\sqrt{3}$ при $x=2+\frac{\sqrt{3}}{3}$. 2) Точек экстремума нет. 3) Минимум $y=-3$ при $x=0$. Симметрия относительно оси OY. 4) Симметрия относительно начала координат. Минимум $y=-2$ при $x=-1$; максимум $y=2$ при $x=1$. Точка перегиба (0, 0). 5) Симметрия относительно начала координат. Максимум $y=-3\frac{3}{8}$ при $x=-3$. Точка перегиба (0, 0). Асимптоты: $x=-1$, $y=\frac{1}{2}x-1$. 6) Симметрия относительно оси OY. Максимум $y=0$ при $x=0$. Асимптоты: $x=\pm 1$, $y=1$. 7) Минимум $y=-1$ при $x=0$. Точка перегиба графика $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{8}{9}\right)$. Асимптоты: $x=1$, $y=0$. 8) Максимум $y=-8$ при $x=-3$; минимум $y=-4$ при $x=-1$. Асимптоты: $y=x-4$, $x=-2$. 9) Минимум $y=-\frac{1}{2}$ при $x=-2$; максимум $y=\frac{1}{2}$ при $x=0$. 10) Точек экстремума нет. Асимптоты: $x=-\frac{3}{2}$, $y=2(x+1)$. 11) Асимптоты: $x=1$, $y=2$. 12) Асимптоты: $x=-\frac{1}{2}$, $y=\frac{2}{3}$. 13) Асимптоты: $x=\frac{4}{5}$, $y=\frac{2}{5}$.

23) $-\frac{2}{3(x+1)}-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{2}{3(x-2)}$. 24) $\frac{2}{3(x+1)}+\frac{x+1}{3(x^2-x+1)}$. 25) $x+\frac{4}{x+2}-\frac{4(x+2)}{x^2-2x+4}$. 26) $-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$. 27) $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-3}$. 28) $x^3-1-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2(x+1)}$. 29) $\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}$. 30) $\frac{-5x+4}{x^2+1}+\frac{8x+1}{x^2+x+1}$. 31) $\frac{x}{x^2+x\sqrt{3}+2}+\frac{x}{x^2-x\sqrt{3}+2}$. 36) $y=\frac{1}{4}\arcsin\frac{x}{3}\,(-3\leqslant x\leqslant 0)$. 37) $y=\frac{4}{3}\arccos 2x\left(-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right)$. 38) $y=5\operatorname{arctg}\frac{4x}{3}\,(-\infty<x<+\infty)$. 39) $y=\frac{1}{7}\operatorname{arcctg}\frac{x}{2}\,(-\infty<x<+\infty)$.

40) $y=\frac{1}{2}\sin\frac{3x}{2}\left(-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}\right)$. 41) $y=\frac{1}{3}\cos 5x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{10}\right)$. 42) $y=2\operatorname{tg}x\left(0\leqslant x<\frac{\pi}{2}\right)$. 43) $y=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}10x\left(0<x<\frac{\pi}{10}\right)$. 44) $0\leqslant x\leqslant 1$. 45) $0\leqslant x\leqslant 1$. 46) $-1\leqslant x\leqslant 0$. 47) $-1\leqslant x\leqslant 0$. 48) $x<0$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Элементарные функции 5

ГЛАВА ПЕРВАЯ

Элементарные алгебраические функции

§ 2. Классификация алгебраических функций 6
§ 3. Степенная функция с натуральным показателем 8
§ 4. Целая рациональная функция 9
§ 5. Бином Ньютона 11
§ 6. Дробные рациональные функции 12
§ 7. Степенная функция с целым отрицательным показателем 16
§ 8. Дробно-линейная функция 17
§ 9. Разложение рациональной функции на простейшие дроби 18
§ 10. Вычисление коэффициентов разложения 24
§ 11. Существование корня с целым положительным показателем 28
§ 12. Степенная функция с дробным показателем 32
Вопросы для самопроверки к главе I. 36

ГЛАВА ВТОРАЯ

Элементарные трансцендентные функции

§ 13. Определение элементарной трансцендентной функции 37
§ 14. Степень с иррациональным показателем 37
§ 15. Показательная функция 41
§ 16. Существование логарифмов 44
§ 17. Логарифмическая функция 45
§ 18. Связь между логарифмическими функциями с разными основаниями 46
§ 19. Степенная функция с иррациональным показателем 47
§ 20. Тригонометрические функции (краткий обзор) 49
§ 21. Простые гармонические колебания 50
§ 22. Обратные тригонометрические функции и их главные ветви 53
§ 23. Тригонометрические функции от обратных тригонометрических функций 60
§ 24. Основные преобразования обратных тригонометрических функций и соотношения между ними 61
Вопросы для самопроверки к главе II 67
Ответы к упражнениям 69

Редактор *М. П. Молчанов*
Технический редактор *М. И. Смирнова*
Корректор *А. Тарасова*

* * *

Сдано в набор 5/XI 1959 г. Подписано к печати 22/II 1960 г. $60 \times 92^{1}/_{16}$. Печ. л. 4,5.
Уч.-изд. л. 3,68. Тираж 30 тыс. экз. А 01875.
Заказ 3731. Цена 1 р. 10 к.

Учпедгиз.
Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, д. 41

Первая Образцовая типография
имени А. А. Жданова
Московского городского совнархоза
Москва, Ж-54, Валовая, 28.