ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Е. С. КУНИЦКАЯ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ
I—III КУРСОВ

УЧПЕДГИЗ · 1958

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

..чий государственный заочный педагогический институт

Е. С. КУНИЦКАЯ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ I—III КУРСОВ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

Москва 1958

Утверждено Ученым советом Научно-методического кабинета по заочному обучению учителей

ПРЕДИСЛОВИЕ

Раздел „Элементарные функции“ изучается в педагогических институтах после разделов „Введение в анализ“ и „Дифференциальное исчисление“. В связи с этим в настоящем пособии используются многие из основных положений двух указанных разделов как известные студентам-заочникам I курса физико-математического факультета педагогического института. В частности, считается, что студенты знакомы с определением понятия функции, с различными видами задания функций (формулой, таблицей, графиком и т. п.), с классификацией функций, с понятием области определения функции, с понятиями функции ограниченной, монотонной, четной и нечетной, периодической, сложной, обратной. Определение всех этих понятий можно найти в любом учебнике математического анализа.

Приступая к разделу „Элементарные функции“, студент должен уметь использовать основные определения и теоремы введения в анализ и дифференциального исчисления для исследования свойств элементарных функций.

При изучении раздела „Элементарные функции“ рекомендуется пользоваться следующими учебниками и учебными пособиями:

С. И. Новоселов, Алгебра и элементарные функции, 1952.

С. И. Новоселов, Специальный курс элементарной алгебры, 1956.

С. И. Новоселов, Специальный курс тригонометрии, 1954.

С. И. Новоселов, Обратные тригонометрические функции, 1950.

Энциклопедия элементарной математики, кн. 3, 1952.

А. Ф. Бермант и Л. А. Люстерник, Тригонометрия, 1956.

Г. М. Фихтенгольц, Основы математического анализа, т. I, 1955.

А. Я. Хинчин, Краткий курс математического анализа, 1955.

А. Ф. Бермант, Курс математического анализа, т. I, 1954.

Н. А. Фролов, Дифференциальное и интегральное исчисление, 1955.

Студент-заочник должен: 1) уметь определять любую из основных элементарных функций, 2) знать свойства этих функций, 3) уметь исследовать различные элементарные функции и строить их графики.

Рассмотрению этих вопросов и посвящается настоящее пособие.

Считаю своей приятной обязанностью выразить глубокую признательность за ценные указания и советы по настоящему пособию профессору Д. А. Райкову и доценту Н. Г. Алимову.

I. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Будем называть основными элементарными функциями следующие функции, особенно часто применяемые при решении разнообразных математических задач и рассматриваемые в элементарной математике: $y=a$, (a — const), $y=x^n$, $y=\sqrt[n]{x}$ (n — в обоих случаях натуральное число), $y=a^x$, $y=\log_a x$, $y=x^\alpha$ (α — иррациональное число), $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arc\,tg} x$, $y=\operatorname{arc\,ctg} x$.

Функции, полученные из основных элементарных функций при помощи конечного числа арифметических операций и суперпозиций (образования сложных функций), производимых также при помощи основных элементарных функций, будем называть *элементарными функциями*[1].

Примерами элементарных функций могут служить:

$$y=2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}},\ y=\arcsin\frac{x+5}{3x-2},\ y=\cos\ln(1+\sqrt[3]{x^2+2})\ \text{и т.п.}$$

Необходимо отметить, что число указанных выше основных элементарных функций может быть несколько уменьшено, так как некоторые из них ($y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arc\,ctg} x$) можно получить из

[1] Некоторые авторы курсов математического анализа и алгебры называют „элементарными функциями" перечисленные выше функции, названные нами основными элементарными функциями (например, А. Я. Хинчин, Краткий курс математического анализа); однако другие авторы (например, С. И. Новоселов, Алгебра и элементарные функции) придерживаются терминологии, принятой в настоящем пособии.

остальных основных элементарных функций при помощи конечного числа арифметических операций и суперпозиций.

Мы рассмотрим, однако, все указанные основные элементарные функции, каждая из которых играет важную роль при составлении других элементарных функций, не отказываясь одновременно с этим и от рассмотрения взаимной связи между этими основными элементарными фукциями.

§ 2. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ С ЦЕЛЫМ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Определение. Степенной функцией с целым положительным показателем называется функция $y=x^n$, представляющая собой произведение n функций, каждая из которых в своих значениях равна независимой переменной.

Областью определения степенной функции с натуральным показателем является вся числовая ось.

Свойства. 1. При n четном функция $f(x)=x^n$ является четной:

$$f(-x)=(-x)^{2k}=x^{2k}=f(x).$$

Как известно из раздела „Введение в анализ“, график четной функции расположен симметрично относительно оси ординат.

При n нечетном функция $f(x)=x^n$ является нечетной:

$$f(-x)=(-x)^{2k+1}=-x^{2k+1}=-f(x).$$

Как известно из раздела „Введение в анализ“, график нечетной функции расположен симметрично относительно начала координат.

2. Функция $y=x^n$ непрерывна (по теореме о непрерывности произведения конечного числа непрерывных функций).

3. Функция $y=x^n$ монотонна на каждом из интервалов $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$.

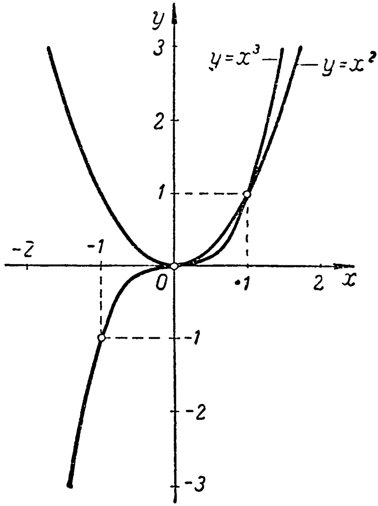
В самом деле, по свойству монотонности умножения, большему значению $x>0$ соответствует большее значение x^n и, следовательно, из $x_1<x_2$ следует: $x_1^n<x_2^n$.

Если $x<0$, то для n четных $(n=2k)$ из неравенств $x_1<x_2<0$ следуют неравенства $x_1^{2k}>x_2^{2k}>0$, т. е. функция $y=x^{2k}$ в интервале $(-\infty, 0)$ монотонно убывает.

Если $x<0$, то для n нечетных $(n=2k+1)$ из неравенств $x_1<x_2<0$ следуют неравенства $x_1^{2k+1}<x_2^{2k+1}<0$, т. е. функция $y=x^{2k+1}$ в интервале $(-\infty, 0)$ монотонно возрастает.

Итак, функция $f(x)=x^n$ при n нечетном возрастает всюду, а при n четном возрастает лишь для $x>0$.

Следует отметить, что монотонность функции $y=x^n$ легко можно показать, пользуясь методами дифференциального исчисления. В самом деле, производная $y'=nx^{n-1}\geqslant 0$ для $x\geqslant 0$ и, следовательно, функция $y=x^n$ монотонно возрастает в полуинтервале $[0, \infty)$.



Черт. 1.

Направление выпуклости графика функции $y=x^n$ установим при помощи знака второй производной. Так как при $n>1$ будет $y''=n(n-1)x^{n-2}>0$ для $x>0$, то кривая для $x>0$ обращена выпуклостью вниз.

Пусть $x<0$, тогда для $n=2k$ будет $y''>0$ и, следовательно, кривая обращена выпуклостью вниз, для $n=2k+1$ будет $y''<0$ и, следовательно, кривая обращена выпуклостью вверх.

Исследуем поведение функции на бесконечности:

$$\lim_{x\to+\infty} x^n=\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x^n=\begin{cases} -\infty, \text{ для } n=2k+1 \\ +\infty, \text{ для } n=2k. \end{cases}$$

4. Все кривые $y=x^n$ проходят через точки $(0; 0)$ и $(1; 1)$, так как $y(0)=0$ и $y(1)=1$.

5. Для натуральных значений $m<n$ и значений $x>1$ большему показателю соответствует и большее значение степени.

Пусть $y_1=x^n$, $y_2=x^m$. Рассмотрим отношение

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{x^n}{x^m}=x^{n-m}.$$

Очевидно, что для $x>1$ и $n>m$ будет $x^{n-m}>1$, т. е. $y_1>y_2$. Для $x<1$ и $n>m$ будет $x^{n-m}<1$, т. е. $y_1<y_2$.

Сказанное должно учитываться, в частности, при построении графиков функций (черт. 1).

6. Основные свойства степенной функции с натуральным показателем: а) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$, б) $(x^m)^n = x^{mn}$.

§ 3. ЦЕЛЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Функция $y = f(x)$ называется рациональной, если она получена из переменной x и данных постоянных чисел в результате применения к ним конечного числа раз четырех действий: сложения, вычитания, умножения, деления.

Замечание. Возведение в целую положительную степень есть повторное умножение.

Если над переменной x производятся только действия сложения, вычитания, умножения, то функция $y = f(x)$, полученная в результате этих операций, называется **целой рациональной** (целой, так как здесь отсутствует операция деления).

В курсе элементарной алгебры доказывается, что каждая целая рациональная функция может быть представлена в виде полинома:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

(a_0, a_1, a_2, ..., a_n—действительные числа, $a_0 \neq 0$, n — натуральное число).

Целая рациональная функция определена на всей числовой оси и всюду непрерывна как сумма непрерывных функций. Функция будет четной или нечетной, если все показатели степени переменной x будут одновременно четные или нечетные.

При помощи несложного преобразования легко установить поведение целой рациональной функции $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = x^n \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right)$ на бесконечности: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, если $a_0 > 0$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, если $a_0 < 0$.

Если $a_0 > 0$, то $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, \text{ для } n = 2k \\ -\infty, \text{ для } n = 2k+1 \end{cases}$

и если $a_0 < 0$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty, \text{ для } n = 2k \\ +\infty, \text{ для } n = 2k+1. \end{cases}$

Пример. $y = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$.

Данная функция определена и непрерывна на всей числовой оси. Установим поведение данной функции на бесконечности:

$$\lim_{x \to -\infty} y = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} y = +\infty.$$

Найдем интервалы, в которых функция сохраняет знак (ее значения или только положительны, или только отрицательны, и, следовательно, график функции в этих интервалах будет расположен соответственно или над осью абсцисс, или под ней). Рассмотрение коэффициентов многочлена позволяет сразу же установить один действительный корень $x=1$. Согласно теореме Безу многочлен должен нацело разделиться на $(x-1)$. Это позволит без труда найти и два других корня многочлена, которые оказываются действительными: $x=-2$, $x=5$. Теперь многочлен можно записать в другой, более удобной для исследования знака форме:

$$y=(x-1)(x+2)(x-5).$$

Заметим, что график данной функции с осью ox пересекается в точках $x=-2$, $x=1$, $x=5$, а с осью oy — в точке $y=10$.

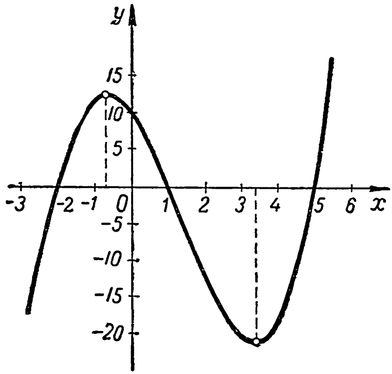
Корни функции разобьют всю числовую ось на интервалы, в каждом из которых каждый из сомножителей сохраняет знак. За знаками функции на отдельных интервалах проследим по таблице:

	$x-1$	$x+2$	$x-5$	y
$(-\infty, -2)$	$-$	$-$	$-$	$-$
$(-2, 1)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$(1, 5)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$(5, \infty)$	$+$	$+$	$+$	$+$

Для построения эскиза графика исследуем функцию на экстремум: $y' = 3x^2 - 8x - 7$; $x_1 \approx 3{,}4$; $x_2 \approx -0{,}7$. Характер экстремума определим по второй производной: $y'' = 6x - 8$; $y''(3{,}4) > 0$, следовательно, в точке $x \approx 3{,}4$ функция имеет минимум; $y''(-0{,}7) < 0$, следовательно, в точке $x \approx -0{,}7$ функция имеет максимум. Найдем значения функции в этих точках:

x	$-0{,}7$	$3{,}4$
y	$12{,}5$	$-20{,}8$

Приведенного исследования достаточно для построения эскиза графика (черт. 2).



Черт. 2.

§ 4. БИНОМ НЬЮТОНА

Известная из школьного курса формула бинома Ньютона легко выводится при помощи производной.

Рассмотрим n-ю степень двучлена $(1+x)$, где n — натуральное число. Двучлен $(1+x)$ после возведения в степень n дает многочлен степени n, который можно записать с неопределенными пока действительными коэффициентами $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$(1+x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n. \qquad (1)$$

Пользуясь возможностью дифференцирования, выведем формулы, по которым можно вычислять значения коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$. С этой целью продифференцируем последовательно n раз обе части равенства (1):

1) $n(1+x)^{n-1} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1};$

2) $n(n-1)(1+x)^{n-2} = 2a_2 + 2\cdot 3a_3x + \ldots +$
$+ n(n-1)a_nx^{n-2};$

3) $n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3} = 2\cdot 3a_3 + \ldots +$
$+ n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3};$

. . . .

n) $n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!a_n.$

Для нахождения коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ в каждом равенстве положим $x=0$. Из сравнения обеих частей соответствующих равенств получим:

$$a_0 = 1,\ a_1 = n,\ a_2 = \frac{n(n-1)}{2!},\ a_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}, \ldots, a_n = 1.$$

Подставив найденные значения для коэффициентов в формулу (1), окончательно будем иметь:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$
$$+ nx^{n-1} + x^n \text{ или } (1+x)^n = 1 + C_n^1x + C_n^2x^2 +$$
$$+ C_n^3x^3 + \ldots + x^n. \quad (1')$$

Полученная формула носит название формулы бинома Ньютона. Она является частным случаем более общей формулы:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \ldots +$$
$$+ C_n^ka^{n-k}b^k + \ldots + b^n. \quad (2)$$

Для получения формулы (2), заметив, что $(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$, применим к биному $\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$ формулу (1'):

$$(a+b)^n = a^n\left[1 + C_n^1\cdot\frac{b}{a} + C_n^2\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^2 + C_n^3\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{b}{a}\right)^n\right]$$

или

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + C_n^3a^{n-3}b^3 + \ldots + b^n.$$

§ 5. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ПОЛИНОМА

Используя тот же метод последовательного дифференцирования, который применялся при выводе формулы бинома Ньютона, получим формулу Тейлора для полинома. В формуле Тейлора действительные коэффициенты a_0, a_1, $a_2, \ldots, a_n$ полинома $f(x)$ выражаются через значения функции $f(x)$ и ее производных в некоторой точке $x=a$.

Рассмотрим полином:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n, \tag{1}$$

где все коэффициенты a_0, a_1, $a_2, \ldots, a_n$ — некоторые действительные числа. Выразим эти коэффициенты через значения функции $f(x)$ и ее производных в точке $x=0$. Для этого найдем производные данной функции $f(x)$ до n-го порядка включительно:

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1};$$
$$f''(x)=2a_2+2\cdot 3a_3x+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2};$$
$$f^{(n)}(x)=n!a_n.$$

Найдем значения функции $f(x)$ и ее производных в точке $x=0$:

$$f(0)=a_0,\ f'(0)=a_1,\ f''(0)=2a_2, \ldots, f^{(n)}(0)=n!a_n.$$

Отсюда:

$$a_0=f(0),\ a_1=f'(0),\ a_2=\frac{f''(0)}{2!}, \ldots,\ a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов a_k в (1), получим:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{2}$$

Это — формула Тейлора для полинома. Она называется разложением полинома $f(x)$ в окрестности нуля.

Часто бывает необходимо, зная значение полинома и его производных в некоторой точке $x=a$, вычислить значение полинома в другой точке x, сколь угодно близкой к точке a.

Положим, $x=a+h$ и, следовательно, $h=x-a$.

Тогда $f(x)=f(a+h)=\varphi(h)$.

Если $f(x)$ есть полином n-й степени относительно переменной x, то $\varphi(h)$ есть полином той же степени относительно h.

Пользуясь полученной формулой Тейлора, запишем полином $\varphi(h)$ в следующем виде:

$$\varphi(h)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1!}h+\frac{\varphi''(0)}{2!}h^2+\ldots+\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}h^n.$$

Поставленная выше задача вычисления значения полинома в точке $x=a+h$ требует разложения полинома $f(x)$ по степеням разности $(x-a)$. Для того чтобы получить такое разложение, продифференцируем равенство $f(x)=$ $=\varphi(h)$ последовательно n раз:

$$f'(x)=\varphi'(h),\ f''(x)=\varphi''(h),\ldots,\ f^{(n)}(x)=\varphi^{(n)}(h).$$

Так как при $h=0$ будет $x=a$ и $\varphi(0)=f(a)$, получим:

$$\varphi'(0)=f'(a),\ \varphi''(0)=f''(a),\ldots,\ \varphi^{(n)}(0)=f^{(n)}(a).$$

Подставляя найденные значения коэффициентов при степенях переменной h в формулу для $\varphi(h)$, получим:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \qquad (3)$$

Полученная формула Тейлора называется разложением полинома в окрестности точки $x=a$.

Заметим, что формула (2) является частным случаем формулы (3) и получается из нее при $a=0$.

П р и м е р. Вычислить с точностью до 10^{-4} значение полинома $f(x)=x^{10}+8x^5-1$ при $x=0{,}998$.

Р е ш е н и е. Учитывая, что данное значение x мало отличается от 1 и что значение данной функции и ее производных легко можно подсчитать при значении $x=1$, воспользуемся для решения задачи формулой Тейлора. Для требуемой точности достаточно вести вычисления с пятью десятичными знаками. Вычислим все необходимые элементы, входящие в формулу (3).

Для данной задачи $x=0{,}998$; $a=1$; $x-a=-0{,}002$.

$$f(x)=x^{10}+8x^5-1; \qquad f(a)=8;$$
$$f'(x)=10x^9+40x^4; \qquad f'(a)=50;$$
$$f''(x)=90x^8+160x^3; \qquad f''(a)=250;$$
$$f'''(x)=720x^7+480x^2; \qquad f'''(a)=1200.$$
$$f(x)\approx 8-50\cdot 0{,}002+125\cdot 0{,}002^2-200\cdot 0{,}002^3+\ldots$$

Так как $200 \cdot 0{,}002^3 = 0{,}0000016$, то этим членом, а тем более и всеми последующими, можно пренебречь без ущерба требуемой точности.

Итак, значение многочлена при данном значении $x = 0{,}998$ будет: $f(0{,}998) = 8 - 0{,}1 + 0{,}00050 = 7{,}9005$.

§ 6. ДРОБНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Определение. Рациональная функция $y = f(x)$, не являющаяся целой, называется дробной рациональной функцией.

В курсе элементарной алгебры доказывается, что всякая дробная рациональная функция может быть представлена в виде несократимого отношения двух полиномов:

$$f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_m}.$$

Дробная рациональная функция определена на всей числовой оси, кроме тех точек, в которых знаменатель обращается в нуль. Если при $x = x_1, x_2, \ldots, x_k$ знаменатель обращается в нуль, то точки $x_1, x_2, \ldots, x_k$ являются точками бесконечного разрыва функции, а прямые $x = x_1$, $x = x_2, \ldots, x = x_k$ — вертикальными асимптотами для графика функции $f(x)$.

Дробная рациональная функция непрерывна в области определения, как частное двух непрерывных функций (точки, в которых знаменатель равен нулю, не принадлежат области определения функции).

1. Если $n = m$, то $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \frac{a_0}{b_0}$, и, следовательно, график функции имеет горизонтальную асимптоту: $y = \frac{a_0}{b_0}$.

В самом деле, при $n = m$ имеем:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_m}{x^m}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}} = \frac{a_0}{b_0}.$$

2. Если $n = m + 1$, то

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_0x^{m+1} + a_1x^m + \ldots + a_{m+1}}{x(b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b^m)} = \frac{a_0}{b_0}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-\frac{a_0}{b_0}x\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_0x^{m+1}+a_1x^m+\ldots+a_{m+1}}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}-\frac{a_0x}{b_0}\right)=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a_1b_0-a_0b_1)\,x^m+(a_2b_0-a_0b_2)\,x^{m-1}+\ldots}{b_0\,(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m)}=\frac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0^2}.$$

Итак, если степень числителя на единицу больше степени знаменателя, то график функции $f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y=\frac{a_0}{b_0}x+\frac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0^2}$.

3. Если $m>n$, то $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}=0.$$

В этом случае график функции $f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту $y=0$ (ось ox).

Пример 1. $y=\frac{(x-2)^2}{x+1}$.

Данная функция определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x=-1$, в которой функция имеет бесконечный разрыв. В самом деле, односторонние пределы данной функции в точке $x=-1$ бесконечны:

$$f(-1-0)=\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{(x-2)^2}{x+1}=-\infty,\quad f(-1+0)=$$
$$=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\frac{(x-2)^2}{x+1}=+\infty.$$

График функции имеет вертикальную асимптоту $x=-1$. Найдем точки пересечения графика с осями координат.

$$ox:y=0,\ x=2;$$
$$oy:x=0,\ y=4.$$

Так как многочлен, стоящий в числителе данной дробной рациональной функции, имеет степень на единицу выше степени многочлена, стоящего в знаменателе, то имеется наклонная асимптота. Найдем ее, выделив целую часть рациональной дроби:

$$\frac{(x-2)^2}{x+1}=x-5+\frac{9}{x+1}.$$

Уравнение наклонной асимптоты:

$$y = x - 5.$$

В данном случае график функции при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$ асимптотически приближается к прямой $y = x - 5$.

Исследуем функцию на экстремум:

$$y' = 1 - \frac{9}{(x+1)^2}.$$

Приравняв производную нулю, получим $(x+1)^2 = 9$, откуда $x = -1 \pm 3$ и, следовательно, $x_1 = -4$, $x_2 = 2$.

Характер стационарных точек определим по знаку второй производной:

$$y'' = \frac{18}{(x+1)^3}.$$

Так как $y''(-4) < 0$, то точка $x_1 = -4$ есть точка максимума функции; так как $y''(2) > 0$, то точка $x_2 = 2$ есть точка минимума функции.

Так как $y'' = \frac{18}{(x+1)^3} < 0$ при $x < -1$, то для $x < -1$ график функции обращен выпуклостью вверх. Так как

$$y'' = \frac{18}{(x+1)^3} > 0 \text{ при } x > -1,$$

то для $x > -1$ график функции обращен выпуклостью вниз.

Проведенных исследований достаточно для построения эскиза графика (черт. 3).

Пример 2. $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$.

Данная функция определена на всей числовой оси, кроме точек $x = \pm 1$. Всюду в области определения функция непрерывна, как частное двух непрерывных функций (при $x \neq \pm 1$ знаменатель отличен от нуля). В точках $x = -1$, $x = +1$ функция имеет бесконечный разрыв:

$$f(1-0) = -\infty,\ f(1+0) = +\infty,\ f(-1-0) = +\infty,$$
$$f(-1+0) = -\infty,$$

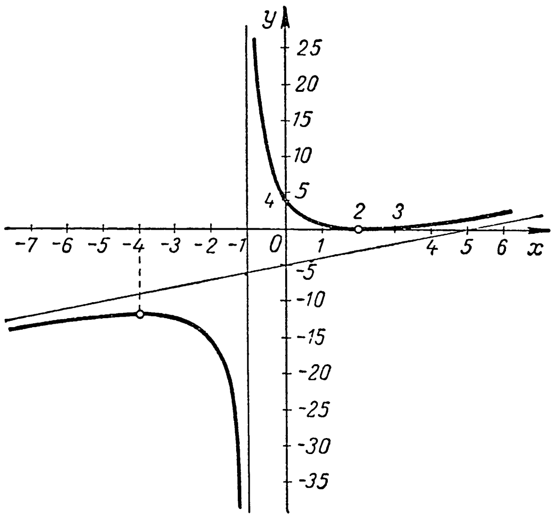
следовательно, имеются вертикальные асимптоты $x = -1$ и $x = +1$.

Так как многочлены, стоящие в числителе и знаменателе, одной и той же степени, то существует горизонтальная асимптота:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2-1}=1,$$

следовательно, прямая $y=1$ — горизонтальная асимптота.

Заметим, что числитель $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ для всех x. Так как $x^2-1>0$ для $|x|>1$, то значения функции положительны для $|x|>1$ и, следовательно, для $|x|>1$ график функции лежит над осью ox. Так как



Черт. 3.

$x^2-1<0$ для $|x|<1$, то значения функции отрицательны для $|x|<1$ и, следовательно, в интервале $(-1, +1)$ график функции лежит под осью ox.

Найдем возможные точки экстремума:

$$y'=-\frac{x^2+4x+1}{(x^2-1)^2};\ x_1\approx-3{,}7;\ x_2\approx-0{,}3.$$

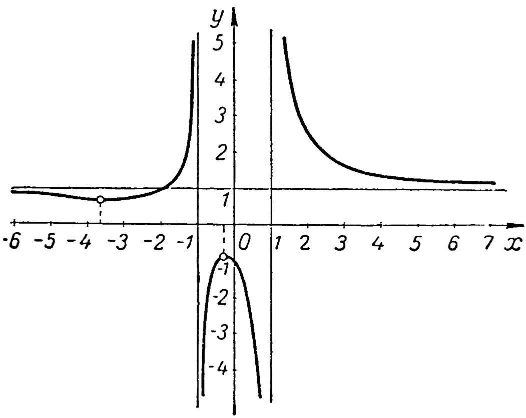
Исследуем найденные стационарные точки, пользуясь первой производной:

$$y'\approx-\frac{(x+3{,}7)(x+0{,}3)}{(x^2-1)^2}.$$

Результаты исследования занесем в таблицу:

x	$-3{,}7$	$-0{,}3$
y'	$-0+$	$+0-$
y	$m\approx 0{,}9$	$M\approx -0{,}9$

Учитывая, что кривая не пересекается ни в одной точке с осью ox, а ось oy пересекает в точке $y=-1$, и используя проведенные исследования, построим эскиз графика данной дробной рациональной функции (черт. 4):



Черт. 4.

§ 7. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ С ЦЕЛЫМ ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Определение. Степенной функцией с целым отрицательным показателем называется функция вида $y=x^{-n}=$ $=\frac{1}{x^n}\,(n>0)$.

Областью определения такой функции является вся числовая ось, кроме точки $x=0$, в которой функция не определена.

Свойства. 1. Функция $y = x^{-n}$ является четной при n четном и нечетной при n нечетном. Так как график четной функции расположен симметрично относительно оси ординат, а график нечетной функции расположен симметрично относительно начала координат, то, учитывая это, будем исследовать степенную функцию с целым отрицательным показателем только для $x > 0$.

2. Функция $y = \frac{1}{x^n}$ непрерывна как частное двух непрерывных функций (функция $y = x^n$ непрерывна для $x > 0$ и отлична от нуля).

3. Функция $y = x^{-n}$ монотонно убывающая, так как

$$y' = -nx^{-n-1} < 0 \text{ для } x > 0.$$

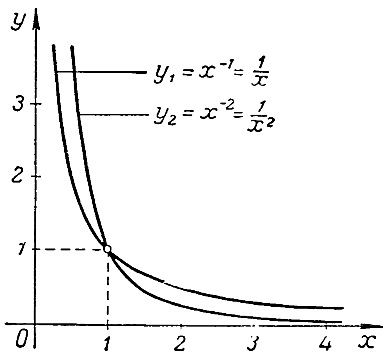
$\lim\limits_{x \to \infty} x^{-n} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$, следовательно, ось ox является горизонтальной асимптотой;

$\lim\limits_{x \to 0} x^{-n} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = \infty$, следовательно, ось oy является вертикальной асимптотой.

Направление выпуклости определим по второй производной: $y'' = n(n+1)\, x^{-(n+2)} > 0$ для $x > 0$, следовательно, на положительной части оси ox график функции обращен выпуклостью вниз.

4. Все графики проходят через точку $(1;1)$, так как $y(1) = 1$.

5. Исследуем взаимное расположение графиков функций $y_1 = x^{-m}$ и $y_2 = x^{-n}$, где $m > 0$, $n > 0$ и $m < n$.



Черт. 5.

Рассмотрим отношение

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x^{-m}}{x^{-n}} = \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}.$$

Так как для $x > 1$ отношение $\frac{y_1}{y_2} = x^{n-m} > 1$, то $y_1 > y_2$, следовательно, график функции $y_1 = x^{-m}$ лежит выше графика функции $y_2 = x^{-n}$.

Так как для $x<1$ отношение $\frac{y_1}{y_2}=x^{n-m}<1$, то $y_1<y_2$, следовательно, график функции $y_1=x^{-m}$ лежит ниже графика функции $y_2=x^{-n}$ (черт. 5).

6. Основные свойства степенной функции с целым отрицательным показателем:

а) $x^{-m}\cdot x^{-n}=x^{-m-n}$;

б) $(x^{-m})^{-n}=x^{mn}$.

Доказательство:

а) $x^{-m}\cdot x^{-n}=\frac{1}{x^m}\cdot\frac{1}{x^n}=\frac{1}{x^{m+n}}=x^{-(m+n)}=x^{-m-n}$;

б) $(x^{-m})^{-n}=\left(\frac{1}{x^m}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{1}{x^m}\right)^n}=\frac{1}{\frac{1}{x^{mn}}}=x^{mn}$.

Предлагается студентам в качестве упражнения показать, что свойства $x^a\cdot x^b=x^{a+b}$ и $(x^a)^b=x^{ab}$, доказанные для целых a и b одинакового знака, справедливы и для целых a и b любых знаков.

§ 8. ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

Определение. Дробно-линейной функцией называется функция вида:

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d},\quad c\neq 0.$$

Замечания. 1. Дробно-линейная функция является частным случаем рассмотренной ранее дробной рациональной функции.

2. Если $c=0$, то функция $f(x)$ — целая линейная рациональная функция $f(x)=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$.

Дробно-линейная функция определена на всей числовой оси, кроме точки $x=-\frac{d}{c}$, в которой функция имеет бесконечный разрыв: $\lim\limits_{x\to-\frac{d}{c}}\frac{ax+b}{cx+d}=\pm\infty$. Прямая $x=-\frac{d}{c}$ является вертикальной асимптотой.

Так как числитель и знаменатель — многочлены одной и той же степени, то существует горизонтальная асимптота $y = \frac{a}{c}$;

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}.$$

Функция непрерывна в области определения как частное двух непрерывных функций (для всех значений $x \neq -\frac{d}{c}$ знаменатель отличен от нуля).

Пользуясь производной, легко показать, что дробно-линейная функция монотонна на каждом бесконечном интервале $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right), \left(-\frac{d}{c}, \infty\right)$.

В самом деле, производная на каждом из указанных бесконечных интервалов имеет один и тот же знак:

$$f'(x) = \frac{d-b}{(cx+d)^2}.$$

Если производная положительна на некотором интервале, то, как известно из курса дифференциального исчисления, функция на этом интервале монотонно возрастает, если же производная отрицательна на некотором интервале, то функция на этом интервале монотонно убывает (смотри подробнее об этом в курсе дифференциального исчисления).

Графиком дробно-линейной функции является равносторонняя гипербола с центром в точке $\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$. Покажем это.

Запишем дробно-линейную функцию в виде:

$$y = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x+\frac{d}{c}}.$$

Введем новые координаты X и Y, положив $x + \frac{d}{c} = X$, $y - \frac{a}{c} = Y$. Тогда $XY = m$, где $m = \frac{bc-ad}{c^2}$.

А это есть уравнение равносторонней гиперболы с центром в точке $x = -\frac{d}{c}$, $y = \frac{a}{c}$ и с асимптотами, являющимися новыми осями координат.

Пример. $y = \frac{x-1}{x+2}$.

Данная функция определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x = -2$, в которой функция имеет бесконечный разрыв. Прямая $x = -2$ является вертикальной асимптотой. Выделив целую часть данной функции $y = \frac{x-1}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2}$, видим, что при возрастании x функция будет монотонно возрастать на каждом бесконечном интервале $(-\infty, -2)$, $(-2, \infty)$.

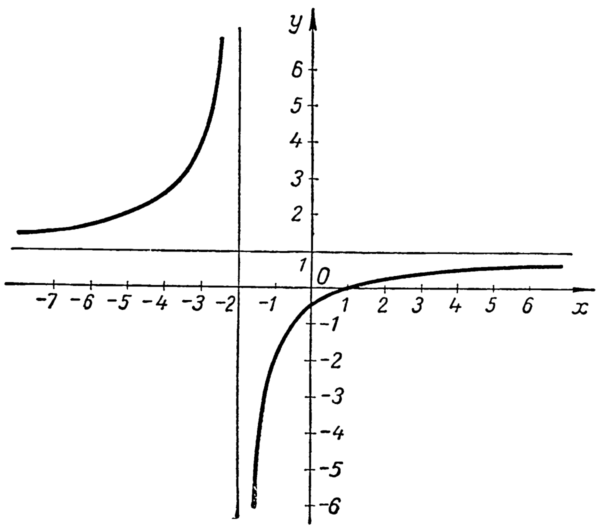
Это легко видеть и по знаку производной:

$$y' = \frac{3}{(x+2)^2} > 0 \quad \text{для всех } x \neq -2.$$

График функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x-1}{x+2} = 1.$$

Отметив точки пересечения графика функции с осями координат, можно построить эскиз графика данной дробно-линейной функции (равносторонней гиперболы):



Черт. 6.

§ 9. РАЗЛОЖЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ НА ПРОСТЕЙШИЕ ДРОБИ

Простейшими дробями называют дроби следующих типов:

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{B}{(x-a)^k}, \quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^m},$$

где a, p, q, A, B, M, N, P, Q — действительные числа и квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

Для решения разнообразных задач часто бывает полезно разложить дробную рациональную функцию на простейшие дроби. С задачей такого рода мы встречались, например, при нахождении производной n-го порядка от дробной рациональной функции. В дальнейшем, например в курсе интегрального исчисления, мы встретимся с указанной задачей при интегрировании рациональных функций.

Пусть дробь $R(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены, не имеющие общих корней, — правильная рациональная дробь (степень числителя меньше степени знаменателя).

Из курса высшей алгебры известно, что если многочлен $g(x)$ (с коэффициентом при старшей степени x, равным 1) степени n имеет различные и притом только действительные корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то его можно представить в виде $g(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$.

Если среди действительных корней многочлена $g(x)$ имеются кратные $x_1=x_2=\ldots=x_k$, то вместо произведения k первых сомножителей в разложение многочлена $g(x)$ войдет множитель $(x-x_k)^k$ и многочлен $g(x)$ будет представлен в виде:

$$g(x)=(x-x_k)^k(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n).$$

Известно также, что если многочлен $g(x)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $x_1=\alpha+\beta i$, то он обязательно имеет и сопряженный корень $\bar{x}_1=\alpha-\beta i$. Тогда $(x-x_1)(x-\bar{x}_1)=[x-(\alpha+\beta i)\times$ $\times[x-(\alpha-\beta i)]=[(x-\alpha)-\beta i]\cdot[(x-\alpha)+\beta i]=(x-\alpha)^2-$ $-(\beta i)^2=x^2-2\alpha x+(\alpha^2+\beta^2)=x^2+px+q$ (p, q — действительные числа, трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней!). В этом случае в состав разложения $g(x)$ войдет множитель x^2+px+q.

Если среди комплексных корней имеются кратные (пусть кратность равна k) $x_1 = x_2 = \ldots = x_k$ и, следовательно, $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \ldots = \bar{x}_k$, то в разложении $g(x)$ им будет соответствовать множитель $(x^2 + px + q)^k$.

Пусть коэффициент при старшей степени x многочлена $g(x)$ с действительными коэффициентами равен 1. Учитывая сказанное, многочлен можно представить в виде

$$g(x) = (x - x_1)^\gamma \cdot (x - x_2)^\delta \ldots (x^2 + px + q)^\mu \cdot (x^2 + rx + s)^\nu,$$

причем квадратные трехчлены не имеют действительных корней и $\gamma + \delta + \ldots + 2\mu + 2\nu = n$ (степени многочлена $g(x)$).

Докажем, что всякая правильная дробная рациональная функция $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ может быть представлена суммой простейших дробей.

Теорема. Если знаменатель $g(x)$ дробной рациональной функции $\frac{f(x)}{g(x)}$ представлен в виде

$$g(x) = (x - x_1)^\gamma \cdot (x - x_2)^\delta \cdot (x - x_3)^\varepsilon \ldots (x^2 + px + q)^\mu \times \times (x^2 + rx + s)^\nu,$$

то

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x - x_1)^\gamma} + \frac{A_2}{(x - x_1)^{\gamma - 1}} + \ldots + \frac{A_\gamma}{x - x_1} + \frac{B_1}{(x - x_2)^\delta} + \frac{B_2}{(x - x_2)^{\delta - 1}} + \ldots + \frac{B_\delta}{x - x_2} + \ldots + \frac{M_1 x + N_1}{(x^2 + rx + s)^\nu} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + rx + s)^{\nu - 1}} + \ldots + \frac{M_\nu x + N_\nu}{x^2 + rx + s},$$

где $x_1, x_2, \ldots, r, s$ — действительные числа, $A_1, A_2, \ldots, A_\gamma$, $B_1, B_2, \ldots, M_1, N_1, \ldots, M_\nu, N_\nu$ — некоторые постоянные действительные числа.

Для доказательства теоремы рассмотрим две леммы.

Лемма 1. Если $x = a$ есть корень кратности $k \geqslant 1$ знаменателя $g(x)$ (и, следовательно, по теореме Безу $g(x) = (x - a)^k \cdot g_1(x)$, причем $g_1(a) \neq 0$), то правильная рациональная дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$ может быть представлена в виде суммы правильных рациональных дробей:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x - a)^k \cdot g_1(x)} = \frac{A}{(x - a)^k} + \frac{\varphi_1(x)}{(x - a)^{k-1} \cdot g_1(x)},$$

где $A = \text{const}$.

Доказательство. Составим разность:

$$\frac{f(x)}{(x-a)^k\cdot g_1(x)}-\frac{A}{(x-a)^k}=\frac{f(x)-A\cdot g_1(x)}{(x-a)^k\cdot g_1(x)}.$$

Выберем A так, чтобы $f(a)-A\cdot g_1(a)=0$ [это значит, что $f(x)-A\cdot g_1(x)$ делится на $(x-a)$], тогда $A=\frac{f(a)}{g_1(a)}$. При таком выборе числа A дробь $\frac{f(x)-A\cdot g_1(x)}{(x-a)^k\cdot g_1(x)}$ можно сократить на $(x-a)$, после чего она примет вид: $\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{k-1}\cdot g_1(x)}$ и, следовательно, будет:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{k-1}\cdot g_1(x)}, \tag{1}$$

где дробь $\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{k-1}\cdot g_1(x)}$ — правильная. В самом деле дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$ — правильная (по условию), дробь $\frac{A}{(x-a)^k}$ тоже, правильная, следовательно, при неограниченном возрастании x обе эти дроби стремятся к нулю, но тогда должна (в силу имеющегося тождества) стремиться к нулю и дробь $\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{k-1}\cdot g_1(x)}$. А это означает, что она правильная. Лемма доказана.

Следствие 1. Полученное равенство (1) показывает, что, выделяя простейшую дробь, мы понижаем показатель k степени $(x-a)^k$, входящей в знаменатель, на единицу. Выделяя точно так же из полученной дроби $\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{k-1}\cdot g_1(x)}$ простейшую дробь $\frac{B}{(x-a)^{k-1}}$ и продолжая этот процесс дальше до тех пор, пока знаменатель последней дроби в правой части еще содержит двучлен $x-a$ в какой-либо положительной степени, мы придем к равенству

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_k}{x-a}+\frac{\Psi(x)}{g_1(x)},$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_k$ — некоторые постоянные действительные числа, а $\Psi(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами.

Лемма 2. Если $a=\alpha+\beta i$ и $\bar{a}=\alpha-\beta i$ — сопряженные комплексные корни кратности $m \geqslant 1$ знаменателя $g(x)$ (и, следовательно, $g(x)=(x^2+px+q)^m \cdot g_1(x)$, причем $g_1(\alpha+\beta i) \neq 0$, $g_1(\alpha-\beta i) \neq 0$), то правильная рациональная дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$ может быть представлена в виде суммы правильных рациональных дробей:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^m}+\frac{\varphi_1(x)}{(x^2+px+q)^{m-1} \cdot g_1(x)},$$

где P и Q — некоторые постоянные действительные числа, а $\varphi_1(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами, не имеющий общих корней с $g_1(x)$.

Доказательство. Покажем, что числа P и Q, удовлетворяющие равенству леммы 2, существуют.

Составим разность:

$$\frac{f(x)}{(x^2+px+q)^m \cdot g_1(x)}-\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^m}=\frac{f(x)-(Px+Q) \cdot g_1(x)}{(x^2+px+q)^m \cdot g_1(x)}.$$

Так как по условию $a=\alpha+\beta i$ и $\bar{a}=\alpha-\beta i$ — сопряженные корни трехчлена x^2+px+q, то для того чтобы числитель $f(x)-(Px+Q) \cdot g_1(x)$ делился на x^2+px+q, необходимо и достаточно, чтобы число a было корнем числителя (следовательно, и $\bar{a}$ будет корнем числителя, и, следовательно, числитель разделится на (x^2+px+q); $f(a)-(Pa+Q) \cdot g_1(a)=0$, откуда $Pa+Q=\frac{f(a)}{g_1(a)}$ или $P(\alpha+\beta i)+Q=\frac{f(\alpha+\beta i)}{g_1(\alpha+\beta i)}$.

Записав дробь, стоящую в правой части, в виде суммы действительной и мнимой части $K+Li$ и сравнивая соответствующие коэффициенты, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными: $P\alpha+Q=K$, $P\beta=L$, из которой находим: $P=\frac{L}{\beta}$, $Q=K-\frac{L\alpha}{\beta}$.

При таком выборе P и Q разность $f(x)-(Px+Q) \times g_1(x)$ делится на x^2+px+q и дает частное $\varphi_1(x)$. Следовательно, $f(x)-(Px+Q) \cdot g_1(x)=(x^2+px+q) \cdot \varphi_1(x)$ и, следовательно,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^m}+\frac{\varphi_1(x)}{(x^2+px+q)^{m-1} \cdot g_1(x)}, \tag{2}$$

где корни многочлена $g_1(x)$ отличны от $\alpha+\beta i$ и $\alpha-\beta i$, а $\varphi_1(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами. Дробь $\frac{\varphi_1(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}\cdot g_1(x)}$ — правильная. В этом легко убедиться, если предположить, что x неограниченно возрастает (см. стр. 25). Лемма доказана.

Следствие 2. Полученное равенство (2) показывает, что, выделяя простейшую дробь, мы тем самым понижаем показатель m степени $(x^2+px+q)^m$, входящей в знаменатель, на единицу. Выделяя из полученной дроби $\frac{\varphi_1(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}\cdot g_1(x)}$ простейшую дробь $\frac{P_2x+Q_2}{(x^2+px+q)^{m-1}}$ и продолжая этот процесс дальше, приходим к равенству:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{P_1x+Q_1}{(x^2+px+q)^m}+\frac{P_2x+Q_2}{(x^2+px+q)^{m-1}}+\ldots+\frac{P_mx+Q_m}{x^2+px+q}+\frac{\Psi_1(x)}{g_1(x)},$$

где корни полинома $g_1(x)$ отличны от a и $\bar{a}$.

Докажем основную теорему. По условию

$$g(x)=(x-x_1)^{\gamma}(x-x_2)^{\delta}(x-x_3)^{\varepsilon}\ldots(x^2+px+q)^{\mu}\times\times(x^2+rx+s)^{\nu}.$$

Рассматриваемая правильная дробная рациональная функция может быть представлена в виде:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{(x-x_1)^{\gamma}\cdot g_1(x)},$$

где $g_1(x)=(x-x_2)^{\delta}(x-x_3)^{\varepsilon}\ldots(x^2+px+q)^{\mu}\times\times(x^2+rx+s)^{\nu}$.

Тогда в силу следствия 1 будет иметь место равенство:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{(x-x_1)^{\gamma}}+\frac{A_2}{(x-x_1)^{\gamma-1}}+\ldots+\frac{A_{\gamma}}{x-x_1}+\frac{\Psi_1(x)}{g_1(x)},$$

Так как $g_1(x)=(x-x_2)^{\delta}\cdot g_2(x)$, где $g_2(x)=(x-x_3)^{\varepsilon}\ldots\ldots(x^2+rx+s)^{\nu}$, то

$$\frac{\Psi_1(x)}{g_1(x)}=\frac{\Psi_1(x)}{(x-x_2)^{\delta}\cdot g_2(x)},$$

и в силу того же следствия 1 получим:

$$\frac{\Psi_1(x)}{g_1(x)}=\frac{B_1}{(x-x_2)^{\delta}}+\frac{B_2}{(x-x_2)^{\delta-1}}+\ldots+\frac{B_{\delta}}{x-x_2}+\frac{\Psi_2(x)}{g_2(x)}.$$

Выделив подобным образом из рациональной функции $\frac{f(x)}{g(x)}$ простейшие дроби, соответствующие всем действительным корням знаменателя $g(x)$, мы получим разложение:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{(x-x_1)^{\gamma}}+\ldots+\frac{A_{\gamma}}{x-x_1}+\frac{B_1}{(x-x_2)^{\delta}}+\ldots+$$
$$+\frac{B_{\delta}}{x-x_2}+\ldots+\frac{\Psi_i(x)}{g_i(x)},$$

в котором знаменатель $g_i(x)$ не имеет действительных корней и представляет собой произведение квадратных трехчленов:

$$g_i(x)=(x^2+px+q)^{\mu}\ldots(x^2+rx+s)^{\nu}.$$

В силу следствия 2 получим:

$$\frac{\Psi_i(x)}{g_i(x)}=\frac{\Psi_i(x)}{(x^2+px+q)^{\mu}\cdot g_{i+1}(x)}=\frac{P_1x+Q_1}{(x^2+px+q)^{\mu}}+\ldots+$$
$$+\frac{P_{\mu}x+Q_{\mu}}{x^2+px+q}+\frac{\Psi_{i+1}(x)}{g_{i+1}(x)}.$$

Выделив подобным образом из рациональной функции $\frac{\Psi_{i+1}(x)}{g_{i+1}(x)}$ простейшие дроби, соответствующие всем комплексным корням знаменателя $g_{i+1}(x)$, и подставляя каждое следующее разложение дроби в предыдущее, будем иметь:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{(x-x_1)^{\gamma}}+\ldots+\frac{A_{\gamma}}{x-x_1}+\frac{B_1}{(x-x_2)^{\delta}}+\ldots+\frac{B_{\delta}}{x-x_2}+$$
$$+\ldots+\frac{P_1x+Q_1}{(x^2+px+q)^{\mu}}+\ldots+\frac{P_{\mu}x+Q_{\mu}}{x^2+px+q}+\ldots+$$
$$+\frac{M_{\nu}x+N_{\nu}}{x^2+rx+s}, \tag{3}$$

что и требовалось доказать.

Разложение правильной рациональной дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ на сумму простейших дробей единственно: процесс последовательного отыскания чисел $A_1, \ldots, A_{\nu}, B_1, \ldots, B_{\delta}, \ldots, P_1, \ldots, P_{\mu}, \ldots, Q_1, \ldots, Q_{\mu}, \ldots, M_{\nu}, N_{\nu}$ однозначно их определяет.

Следует отметить, что для нахождения коэффициентов $A_1, A_2, \ldots, B_1, \ldots, M_{\nu}, N_{\nu}$ может быть использован способ, содержащийся в доказательстве теоремы. Однако практически такой способ мало удобен. Чаще эти коэффициенты находят одним из двух методов: методом произвольных значений или методом сравнения коэффициентов.

Записав разложение правильной рациональной дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами [разложение (3)], приводят в правой части все дроби к общему знаменателю. В результате из равенства двух полученных дробей (при равных знаменателях) следует равенство числителей этих дробей, что может иметь место лишь при равенстве коэффициентов при одинаковых степенях x. Такое сравнение коэффициентов приведет к системе уравнений, из которой и находятся искомые коэффициенты $A_1, \ldots, N_\nu$.

Указанный метод нахождения коэффициентов называется методом сравнения коэффициентов.

Пользуясь методом произвольных значений, полагают x равным каким-либо (произвольным) действительным числам. Тогда из сравнения числителей обеих дробей при каждом фиксированном произвольном значении x получают систему уравнений, из которой находят искомые коэффициенты $A_1, \ldots, N_\nu$.

Однако в ряде случаев коэффициенты могут быть найдены без приведения дробей к общему знаменателю.

Метод произвольных значений оказывается рациональным в тех случаях, когда знаменатель имеет действительные корни. В остальных случаях в равной степени можно пользоваться как методом сравнения коэффициентов, так и методом произвольных значений.

Рассмотрим каждый из указанных методов на примерах.

1. Разложить рациональную функцию $\frac{2x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-3)}$ на простейшие дроби.

Решение. Так как многочлен, стоящий в знаменателе, имеет действительные различные корни, то данная рациональная функция может быть представлена в виде суммы трех простейших дробей:

$$\frac{2x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}. \qquad (1)$$

Для нахождения не определенных пока коэффициентов A, B, C умножим сначала обе части равенства (1) на $(x-1)$; предполагая, что $x \neq 1$, а $x \to 1$, получим:

$$\frac{2x^2+1}{(x+2)(x-3)}=A+\frac{B(x-1)}{x+2}+\frac{C(x-1)}{x-3}.$$

В силу непрерывности обеих частей в точке $x=1$ положим $x=1$, что сразу даст значение для A: $A=\frac{3}{3\cdot(-2)}=-\frac{1}{2}$.

Для определения коэффициентов B и C поступаем так же:

а) умножим обе части равенства (1) на $(x+2)$ и затем (в силу непрерывности обеих частей полученного равенства в точке $x=-2$) положим $x=-2$. Получим $B=\frac{3}{5}$;

б) умножим обе части равенства (1) на $(x-3)$ и затем положим $x=3$.

Получим $C=\frac{19}{10}$.

Подставив найденные значения коэффициентов в равенство (1), получим разложение данной рациональной функции на простейшие дроби:

$$\frac{2x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-3)}=-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{3}{5(x+2)}+\frac{19}{10(x-3)}.$$

2. Разложить рациональную функцию $\frac{x^4+2x^2+8x+5}{(x^2+2)(x-1)^2(x+2)}$ на простейшие дроби.

Решение. Знаменатель данной рациональной функции имеет два сопряженных мнимых корня $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}\,i$, два равных действительных корня $x_{3,4}=1$ и простой действительный корень $x_5=-2$. Согласно теории рациональная функция может быть представлена в виде суммы четырех дробей:

$$\frac{x^4+2x^2+8x+5}{(x^2+2)(x-1)^2(x+2)}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}+\frac{E}{x+2}. \quad (1)$$

Предполагая, что $x\neq 1$, а $x\to 1$, умножим обе части равенства (1) на $(x-1)^2$:

$$\frac{x^4+2x^2+8x+5}{(x^2+2)(x+2)}=\frac{(Ax+B)(x-1)^2}{x^2+2}+C+D(x-1)+\frac{E(x-1)^2}{x+2}.$$

В силу непрерывности обеих частей в точке $x=1$ положим $x=1$, тогда $C=\frac{16}{9}$. Предполагая, что $x\neq -2$, а $x\to -2$, умножим обе части равенства (1) на $(x+2)$:

$$\frac{x^4+2x^2+8x+5}{(x^2+2)(x-1)^2}=\frac{(Ax+B)(x+2)}{x^2+2}\frac{C(x+2)}{(x-1)^2}++\frac{D(x+2)}{x-1}+E.$$

Пользуясь непрерывностью обеих частей в точке $x = -2$, положим $x = -2$. Тогда $E = \frac{13}{54}$. Таким образом, коэффициенты C и E найдены.

Для нахождения коэффициентов A, B, D воспользуемся методом сравнения коэффициентов. Умножив обе части равенства (1) на произведение $(x^2+2)(x-1)^2(x+2)$, получим $x^4+2x^2+8x+5 = (Ax+B)(x-1)^2(x+2) + C(x^2+2)(x+2) + D(x^2+2)(x-1)(x+2) + E(x^2+2)(x-1)^2$ или $x^4+2x^2+8x+5 = (A+D+E)x^4 + (B+C+D-2E)x^3 + (-3A+2C+3E)x^2 + (2A-3B+2C+2D-4E)x + (2B+4C-4D+2E)$.

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях переменной x. Коэффициенты при

$$x^2: -3A+2C+3E=2,$$

„ „ x^4: $A+D+E=1$,

„ „ x^3: $B+C+D-2E=0$.

Решая полученную систему уравнений, находим:

$$A = \frac{41}{54}, \quad D = 0, \quad B = -\frac{35}{27}.$$

Подставив найденные значения коэффициентов в равенство (1), получим требуемое разложение:

$$\frac{x^4+2x^2+8x+5}{(x^2+2)(x-1)^2(x+2)} = \frac{\frac{41}{54}x - \frac{35}{27}}{x^2+2} + \frac{\frac{16}{9}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{13}{54}}{x+2} =$$

$$= \frac{1}{54}\left[\frac{41x-70}{x^4+2} + \frac{96}{(x-1)^2} + \frac{13}{x+2}\right].$$

§ 10. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть имеем некоторое соотношение $F(x, y) = 0$ между переменными x и y. Уравнение $F(x, y) = 0$ можно рассматривать как неявное задание плоской кривой. Предположим, что в некоторой части плоскости каждая прямая, параллельная оси oy, пересекает график уравнения $F(x, y) = 0$ только в одной точке и каждая прямая, параллельная оси ox, также пересекает график уравнения $F(x, y) = 0$ только в одной точке. Это значит, что в пределах рассматриваемой части плоскости уравнение $F(x, y) = 0$ может быть разрешено как относительно переменной $y: y=f(x)$, так и относительно переменной $x: x=\varphi(y)$.

Заметим, что при сделанном предположении уравнения $F(x, y)=0$, $y=f(x)$, $x=\varphi(y)$ равносильны.

Будем считать, что для определения значения y по данному значению x или значения x по данному значению y достаточно элементарных операций.

Если функции $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ устанавливают одно и то же соответствие между множествами значений x и y, то их называют взаимно обратными.

Будем считать функцию $y=f(x)$ исходной (прямой) функцией, а функцию $x=\varphi(y)$ — обратной функцией.

Для дальнейшего изложения нам понадобятся некоторые свойства обратной функции. Напомним их:

1. Область определения обратной функции есть множество значений исходной функции. Множество значений обратной функции является множеством, на котором определена исходная функция.

2. Если исходной функцией является функция $y=f(x)$, а обратной ей — функция $x=\varphi(y)$, то графики обеих этих функций совпадают. Если обозначить аргумент обратной функции через x, а ее значения — саму функцию — через y, то обратная функция будет иметь вид: $y=\varphi(x)$. Переменные x и y поменялись ролями. Геометрически это означает, что поменялись местами оси x и y. Тогда график функции $y=\varphi(x)$, обратной для функции $y=f(x)$, может быть получен из графика последней путем зеркального отражения его относительно биссектрисы $y=x$.

3. Теорема. *Пусть функция $y=f(x)$ определена, монотонно возрастает (убывает) и непрерывна в некотором промежутке X. Тогда в соответствующем промежутке Y значений этой функции существует однозначная обратная функция $x=\varphi(y)$, также монотонно возрастающая (убывающая) и непрерывная.*

4. Если прямая функция нечетная, то обратная ей функция тоже нечетная.

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывная, монотонная и нечетная. Покажем, что обратная ей функция $x=\varphi(y)$ есть функция нечетная.

Пусть $\varphi(-y)=z$ (1). Тогда $-y=f(z)$, или $y=-f(z)=f(-z)$, откуда $-z=\varphi(y)$ и, следовательно,

$$z=-\varphi(y). \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует: $\varphi(-y)=-\varphi(y)$, что и доказывает нечетность функции $\varphi(y)$.

§ 11. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ С ПОКАЗАТЕЛЕМ $\frac{1}{n}$

Определение. Степенной функцией с показателем $\frac{1}{n}$ называется функция, обратная степенной функции с показателем n.

Замечание. Для функции $y=x^n$ обратной будет функция $x=y^{\frac{1}{n}}$. Однако, сохраняя для аргумента привычное обозначение x, а для функции — обозначение y, будем с учетом сказанного выше в п. 2 рассматривать функцию $y=x^{\frac{1}{n}}$, обратную функции $y=x^n$. Принято также обратную функцию записывать в виде $y=\sqrt[n]{x}$.

Рассмотрим подробнее степенную функцию $y=x^{\frac{1}{n}}=$ $=\sqrt[n]{x}$, которая согласно определению является обратной для функции $y=x^n$.

Все свойства функции $y=\sqrt[n]{x}$ могут быть получены из свойств исходной функции $y=x^n$.

Так как исходная функция $y=x^n$ при n четном принимает все значения от 0 до $+\infty$, а при n нечетном — все значения от $-\infty$ до $+\infty$, то обратная функция $y=\sqrt[n]{x}$ при n четном определена на полупрямой $[0, \infty)$, при n нечетном она определена на всей числовой оси. В случае четных n из двух возможных для функции $y=\pm\sqrt[n]{x}$ значений берется положительное значение корня.

Из непрерывности и монотонности прямой функции $y=x^n$ по теореме о существовании обратной функции сразу же следует, что функция $y=\sqrt[n]{x}$ всюду в области определения непрерывна и монотонна: монотонно возрастает, принимая для n четных все значения от 0 до $+\infty$, а для n нечетных — все значения от $-\infty$ до $+\infty$ (см. стр. 7).

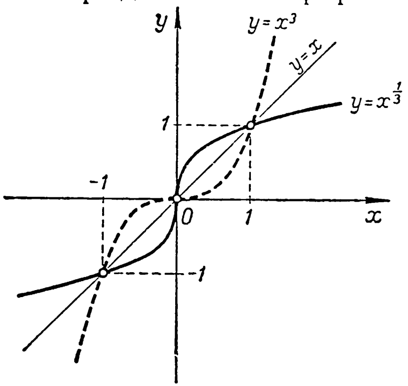
График функции $y=x^{\frac{1}{n}}$ проходит через точки (0; 0) и (1; 1). Согласно указанному свойству 2 он может быть получен из графика функции $y=x^n$ отражением его относительно биссектрисы $y=x$.

Примеры. а) $y = x^{\frac{1}{3}}$ (черт. 7);

б) $y = x^{\frac{1}{2}}$ (черт. 8).

Пусть $\alpha > 0$ — любое вещественное число, n — натуральное число.

Определение. Арифметическим корнем n-й степени из положительного числа α называется такое положительное вещественное число β, что $\beta^n = \alpha$.



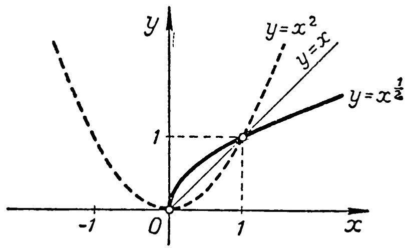
Черт. 7.

Условились обозначать $\beta = \alpha^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\alpha}$.

В дальнейшем под $\alpha^{\frac{1}{n}}$ в том случае, когда n — четное, будем всегда иметь в виду арифметический корень.

Из теоремы о существовании обратной функции следует, что такое положительное вещественное число β для любого положительного числа α всегда существует, и притом только одно.

Покажем, что равенства $\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$ имеют место при n нечетном для любых a и при n четном — для неотрицательных значений a.



Черт. 8.

Пусть $\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}} = y$. Тогда $a^n = y^n$.

Если n нечетное, то для любого a из монотонности степенной функции с натуральным показателем следует: $a = y$.

Пусть $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = z$. Тогда $a^{\frac{1}{n}} = z^{\frac{1}{n}}$ и, следовательно, для n

нечетного из монотонности степенной функции $x^{\frac{1}{n}}$ следует: $a=z$.

Таким образом, для n нечетного:

$$\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n=a.$$

Пусть n четное. Тогда, полагая $\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}}=y$, получим $a^n=y^n$ и, следовательно, так как y при любом a — число неотрицательное, будет иметь место равенство $y=|a|$.

Полагая $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n=z$ и учитывая, что $a^{\frac{1}{n}}$ имеет смысл при n четном только для $a\geqslant 0$, получим $a^{\frac{1}{n}}=z^{\frac{1}{n}}$ и, следовательно, из монотонности степенной функции $x^{\frac{1}{n}}$ следует: $a=z\geqslant 0$.

Итак, для положительных значений a и четных n будут справедливы равенства $\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n=a$.

Докажем, что $\left(x^{\frac{1}{n_1}}\right)^{\frac{1}{n_2}}=x^{\frac{1}{n_1 n_2}}$ (для всех x, если n_1, n_2 — нечетные, и только для $x\geqslant 0$, если по крайней мере одно из чисел n_1 или n_2 — четное). Почему относительно n_1 и n_2 следует делать такое замечание?

Пусть $y=\left(x^{\frac{1}{n_1}}\right)^{\frac{1}{n_2}}$. Тогда $y^{n_2}=x^{\frac{1}{n_1}}$, откуда $y^{n_1 n_2}=x$ и, следовательно, $y=x^{\frac{1}{n_1 n_2}}$, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Выражения $\left(x^m\right)^{\frac{1}{n}}$ и $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$ имеют одно и то же значение при n нечетном для всех x и при n четном только для $x\geqslant 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть m четное и n нечетное. Тогда x можно брать любого знака.

Полагая $\left(x^m\right)^{\frac{1}{n}}=z\geqslant 0$, получим $x^m=z^n$, откуда:

$$\left(z^n\right)^{\frac{1}{m}}=|x|. \tag{1}$$

Полагая $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m=U\geqslant 0$, получим $U^{\frac{1}{m}}=|x^{\frac{1}{n}}|$, откуда:

$$\left(U^{\frac{1}{m}}\right)^n=|x|. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) получаем $\left(z^n\right)^{\frac{1}{m}}=\left(U^{\frac{1}{m}}\right)^n$, откуда: $z^n=\left[\left(U^{\frac{1}{m}}\right)^m\right]^n=U^n$и, следовательно, $z=U$, но это и означает, что $\left(x^m\right)^{\frac{1}{n}}=\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

Предлагается студентам рассмотреть самостоятельно случаи:

а) m, n — нечетные (x можно брать любого знака, почему?);

б) m — нечетное, n — четное (можно брать только $x\geqslant 0$, почему?);

в) m, n — четные (в выражении $\left(x^m\right)^{\frac{1}{n}}$ можно брать x любого знака, а в выражении $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$ можно брать только $x\geqslant 0$. Тогда при $x\geqslant 0$ будет иметь место равенство $\left(x^m\right)^{\frac{1}{n}}=\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$, почему?).

§ 12. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ С ДРОБНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Определение. Степенной функцией с дробным положительным показателем $\frac{m}{n}$ называется функция вида $f(x)=x^{\frac{m}{n}}=\left(x^m\right)^{\frac{1}{n}}$, где m, n — любые натуральные числа.

Учитывая сделанное выше замечание, в дальнейшем следует помнить, в каких случаях можно пользоваться равенством:

$$x^{\frac{m}{n}}=\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m.$$

Если показатель степени — число отрицательное (дробное), то условились считать $x^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$.

При исследовании функций с дробным отрицательным показателем полезно использовать свойства степенной функции с дробным положительным показателем.

Рассмотрим свойства степенной функции с дробным положительным показателем.

1. При n нечетном функция $f(x)=x^{\frac{m}{n}}$ определена на

всей числовой оси, при n четном — лишь на неотрицательной части оси ox.

2. Функция $f(x)=x^{\frac{m}{n}}=\left(x^m\right)^{\frac{1}{n}}$ является сложной функцией своего аргумента x. Из теоремы о непрерывности сложной функции следует непрерывность рассматриваемой функции $f(x)=x^{\frac{m}{n}}$.

3. Пусть n нечетно. Тогда для m нечетного функция $x^{\frac{m}{n}}$ будет нечетной как нечетная функция от нечетной функции. В этом случае график ее расположен симметрично относительно начала координат. Если же m четное, то функция $x^{\frac{m}{n}}$ четная как нечетная функция от четной функции. В этом случае график ее расположен симметрично относительно оси ординат.

4. Функция $f(x)=x^{\frac{m}{n}}=\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$ монотонно возрастает для $x>0$ как функция монотонно возрастающая от функции монотонно возрастающей.

Характер выпуклости кривой в каждом отдельном случае легко устанавливать при помощи знака второй производной. Поведение функции на бесконечности устанавливается путем вычисления соответствующих пределов.

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{m}{n}}=+\infty \text{ при любых } m \text{ и } n,$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^{\frac{m}{n}}=\begin{cases} -\infty, & \text{если } m,\ n \text{ — нечетные} \\ +\infty, & \text{если } m \text{ четное, } n \text{ — нечетное.}\end{cases}$$

5. Основные свойства степени с целым положительным показателем сохраняются с учетом сделанного на странице 34 замечания и в случае степени с дробным показателем.

а) $\left(x^{\frac{m_1}{n_1}}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}=x^{\frac{m_1m_2}{n_1n_2}}$.

Доказательство. $\left(x^{\frac{m_1}{n_1}}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}=\left\{\left[\left(x^{\frac{1}{n_1}}\right)^{m_1}\right]^{m_2}\right\}^{\frac{1}{n_2}}=$

$$=\left[\left(x^{\frac{1}{n_1}}\right)^{m_1m_2}\right]^{\frac{1}{n_2}}=\left[\left(x^{m_1m_2}\right)^{\frac{1}{n_1}}\right]^{\frac{1}{n_2}}=\left(x^{m_1m_2}\right)^{\frac{1}{n_1n_2}}=x^{\frac{m_1m_2}{n_1n_2}}.$$

б) $x^{\frac{m_1}{n_1}}\cdot x^{\frac{m_2}{n_2}}=x^{\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}}$.

Доказательство. $x^{\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}}=x^{\frac{m_1n_2+n_1m_2}{n_1n_2}}=$

$$=\left(x^{\frac{1}{n_1n_2}}\right)^{m_1n_2+n_1m_2}=\left(x^{\frac{1}{n_1n_2}}\right)^{m_1n_2}\cdot\left(x^{\frac{1}{n_1n_2}}\right)^{n_1m_2}=x^{\frac{m_1n_2}{n_1n_2}}\cdot x^{\frac{n_1m_2}{n_1n_2}}=$$
$$=x^{\frac{m_1}{n_1}}\cdot x^{\frac{m_2}{n_2}}.$$

6. При $x>1$ и $\frac{m_1}{n_1}>\frac{m_2}{n_2}$ будет иметь место неравенство $x^{\frac{m_1}{n_1}}>x^{\frac{m_2}{n_2}}$. Это неравенство легко получается из рассмотрения отношения $\frac{x^{\frac{m_1}{n_1}}}{x^{\frac{m_2}{n_2}}}$ как произведения функций $x^{\frac{m_1}{n_1}}\cdot x^{-\frac{m_2}{n_2}}$.

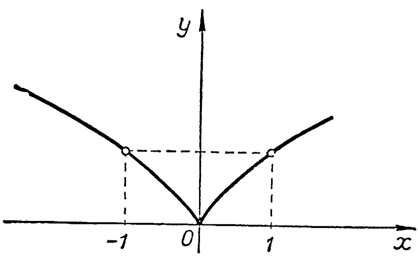
Докажите утверждение пункта 6 самостоятельно.

Пример. $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$.

Из приведенных исследований пунктов 1—4 видно, что данная функция определена и непрерывна на всей числовой оси, четная (следовательно, достаточно исследовать функцию и построить ее график лишь для $x\geqslant 0$, далее использовать симметрию), монотонно возрастает.

Исследуем характер выпуклости кривой:

$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$; при $x=0$ производной не существует, касательная вертикальна. Так как $f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}<0$, то кривая всюду обращена выпуклостью вверх (черт. 9).



Черт. 9.

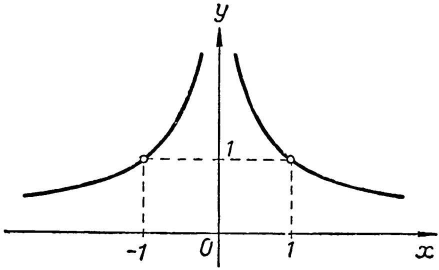
Пример. $f(x)=x^{-\frac{2}{3}}$.

Данная функция определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x=0$, четная, монотонно убывает для $x>0$.

(Почему?)

$$\lim_{x \to \infty} x^{-\frac{2}{3}} = 0, \quad \lim_{x \to 0} x^{-\frac{2}{3}} = \infty.$$

$f''(x) = \frac{10}{9} x^{-\frac{8}{3}} > 0$, следовательно, кривая всюду выпукла вниз (черт. 10).



Черт. 10.

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать функции и построить их графики:

1) $y = x^4 - 5x^2 + 4$;

2) $y = x^{\frac{3}{2}} + 1$;

3) $y = x^{\frac{2}{3}} + 1$;

4) $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}$;

5) $y = \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 + 5x + 7}$;

6) $y = \frac{2x^3 - x^2 - 2x + 1}{x^2 - x - 6}$;

7) $y = \frac{5x - 2}{3x + 2}$;

8) $y = \frac{2x + 1}{5x - 3}$.

Разложить на простейшие дроби следующие рациональные функции:

9) $\frac{x^2 + 3}{x^3 - x^2 - 6x}$;

10) $\frac{x^2 - 2x + 2}{x(x-1)(x+2)(x-3)}$;

11) $\frac{3x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2 (x-2)}$;

12) $\frac{2x^3 + 3x - 5}{(x+1)^2 (x^2+1)}$;

13) $\frac{x^2 + 9}{(x^2 + 2x + 3)(x + 3)}$;

14) $\frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}$;

15) $\frac{3x^4 + 2x + 1}{x^2 (x^2 + 4)(x - 3)}$.

II. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 13. СТЕПЕНЬ С ИРРАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Пусть α, β — вещественные числа, r и r' — любые рациональные числа, такие, что

$$r<\beta<r'. \tag{1}$$

Определение. Степенью числа $\alpha>1$ с иррациональным показателем β называют (и обозначают символом α^β) вещественное число γ, содержащееся между степенями α^r и $\alpha^{r'}$: $\alpha^r<\gamma<\alpha^{r'}$, где r и r' — любые рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам (1).

Докажем, что такое число γ всегда существует и притом — одно.

Из свойства 6 (стр. 38) следует, что любая степень $\alpha^{r'}$ есть верхняя граница множества $\{\alpha^r\}$, следовательно, множество степеней α^r ограничено сверху, и, следовательно, по теореме существования точной верхней границы ограниченного числового множества, оно имеет точную верхнюю границу $\gamma>0$: $\gamma=\sup\{\alpha^r\}$. Тогда

$$\alpha^r\leqslant\gamma\leqslant\alpha^{r'}. \tag{2}$$

Ввиду того что возможно увеличивать r и уменьшать r', знак равенства необходимо исключить, а тогда $\alpha^r<\gamma<\alpha^{r'}$, что и требовалось доказать.

Докажем, что число γ, определяемое из условий $\alpha^r<<\gamma<\alpha^{r'}$, единственное.

Предположим, что существует другое число γ', удовлетворяющее неравенствам $\alpha^r<\gamma'<\alpha^{r'}$. Пусть $\alpha^r<\gamma<<\gamma'<\alpha^{r'}$. Тогда $0<\gamma'-\gamma<\alpha^{r'}-\alpha^r$ и, следовательно, при сделанном предположении $\gamma\neq\gamma'$ разность $\alpha^{r'}-\alpha'$ не может быть сделана меньше некоторого числа $\gamma'-\gamma$. В действительности же разность $\alpha^{r'}-\alpha^r$ может быть сделана меньше любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon>0$. Покажем это.

Пусть $n>\frac{(\alpha-1)\gamma}{\varepsilon}$. Тогда $1<\alpha<1+n\cdot\frac{\varepsilon}{\gamma}<\left(1+\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^n$.

Отсюда $1<\alpha^{\frac{1}{n}}<1+\frac{\varepsilon}{\gamma}$, откуда $0<\alpha^{\frac{1}{n}}-1<\frac{\varepsilon}{\gamma}$.

Если r и r' взять так, чтобы выполнялись неравенства $0<r'-r<\frac{1}{n}$, то будем иметь:

$$0 < \alpha^{r'} - \alpha^{r} = \alpha^{r}(\alpha^{r'-r} - 1) < \gamma\left(\alpha^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \gamma \cdot \frac{\varepsilon}{\gamma} = \varepsilon.$$

Итак, разность $\alpha^{r'} - \alpha^{r}$ будет меньше любого наперед заданного положительного числа. Но отсюда сразу же следует, что числа γ и γ' равны.

Основные свойства степени с натуральным показателем сохраняются и в случае степени с иррациональным показателем.

а) $a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$;

б) $(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta}$.

Доказательство. а) Пусть α и β — иррациональные числа, r, r' R, R' — любые рациональные числа, такие, что

$$r < \alpha < r' \tag{1}$$

и

$$R < \beta < R'. \tag{2}$$

Пусть $a > 1$. Тогда, складывая неравенства (1) и (2), будем иметь:

$$r + R < \alpha + \beta < r' + R'. \tag{3}$$

По определению степени, учитывая неравенства (1), (2), (3):

$$a^{r} < a^{\alpha} < a^{r'}, \tag{1'}$$
$$a^{R} < a^{\beta} < a^{R'}, \tag{2'}$$
$$a^{r+R} < a^{\alpha+\beta} < a^{r'+R'}. \tag{3'}$$

Замечание. Если $\alpha + \beta$ является рациональным числом, то неравенства (3) и (3') могут перейти в равенства.

Так как для рациональных показателей имеет место правило $a^{r} \cdot a^{R} = a^{r+R}$ (стр. 37, свойство 5 б), то, перемножая неравенства (1') и (2'), получим:

$$a^{r+R} < a^{\alpha} \cdot {}^{\beta} a < b^{r'+R'}. \tag{4}$$

Итак, числа $a^{\alpha} \cdot a^{\beta}$ и $a^{\alpha+\beta}$ заключены между одними и теми же границами, разность которых может быть сделана как угодно малой (меньше любого $\varepsilon < 0$), следовательно, будет иметь место равенство $a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$, что и требовалось доказать.

б) Рассмотрим случай, когда $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ (другие случаи рекомендуется рассмотреть самостоятельно). Тогда, если r и r' будут достаточно близки к α, а R и R' будут достаточно близки к β, то r, r', R, R' будут тоже положительны.

Из неравенства (1′) и (2), по определению степени, имеем:

$$(a^r)^R < (a^\alpha)^\beta < (a^{r'})^{R'}. \qquad (5)$$

С другой стороны, умножая неравенства (1) и (2): $rR < \alpha\beta < r'R'$, и используя определение степени $(a > 1)$, будем иметь:

$$a^{rR} < a^{\alpha\beta} < a^{r'R'}. \qquad (6)$$

Так как правило пункта „б“ для рациональных показателей было доказано ранее, то из неравенств (5) и (6) сразу же следует равенство:

$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta},$$

что и требовалось доказать.

§ 14. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Определение. Показательной, или экспоненциальной („экспонент“ по-латыни означает „показатель“), функцией называется функция вида $y = a^x$, где $a = \text{const}$, $a > 0$, $a \neq 1$, x — независимая переменная.

Областью определения показательной функции является вся числовая ось.

Свойства. 1. На всей числовой оси показательная функция положительна: $y = a^x > 0$.

Покажем это.

а) Пусть $x = n$, тогда $y = a^n = a \cdot a \cdots a > 0$ как произведение положительных множителей.

б) Пусть $x = \frac{p}{q}$, тогда $y = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} > 0$, так как в качестве значения функции берется положительное (арифметическое) значение корня.

в) Пусть $x = \alpha$, где α — любое иррациональное число. Тогда $y = a^\alpha$. По определению (стр. 40), степенью с иррациональным показателем α называется число $\gamma = a^\alpha$, удовлетворяющее неравенствам $a^r < \gamma < a^{r'}$, где r и r' — любые рациональные числа, между которыми заключено иррациональное число α: $r < \alpha < r'$. Так как $a^r > 0$ (согласно пункту „б“), то и $\gamma = a^{\alpha} > 0$ как число, превосходящее положительное число.

2. Показательная функция $y = a^x$ при $a > 1$ монотонно возрастает.

а) Пусть $x_1 = \frac{m_1}{n_1}$, $x_2 = \frac{m_2}{n_2}$ и $x_1 < x_2$. Тогда $a^{x_1} < a^{x_2}$ (смотри стр. 38, свойство 6).

б) Пусть $x_1 = r$, $x_2 = \beta$ (β — иррациональное число) и $r < \beta < r'$. Тогда на основании неравенств (2) (стр. 40) из $r < \beta < r'$ вытекают неравенства $a^r < a^{\beta} < a^{r'}$.

в) Пусть $\alpha_1 < \alpha_2$ (α_1, α_2 — иррациональные числа). Покажем, что и в этом случае будет $a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$.

Пусть $\alpha_1 < r < \alpha_2$. По определению степени с иррациональным показателем $a^{\alpha_1} < a^r < a^{\alpha_2}$, отсюда сразу же получаем требуемое неравенство $a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$.

Монотонность функции $y = a^x$ для $a > 1$ легко показать, пользуясь производной. В самом деле, $y' = a^x \ln a > 0$ для $a > 1$ и любых значений x. Следовательно, функция $y = a^x$ монотонно возрастает всюду в области определения.

3. Показательная функция $y = a^x$ непрерывна на всей числовой оси.

Для доказательства этого утверждения покажем, что бесконечно малому приращению аргумента будет соответствовать бесконечно малое приращение функции.

Рассмотрим $|\Delta y| = |a^{x+\Delta x} - a^x| = a^x |a^{\Delta x} - 1|$.

Покажем, что для $a > 0$ будет $\lim\limits_{\Delta x \to 0} a^{\Delta x} = 1$.

Рассмотрим сначала случай, когда $a > 1$.

а) Пусть $0 < \Delta x < \frac{1}{n}$ (n — натуральное число). Тогда $a^{\Delta x} < a^{\frac{1}{n}}$ и, следовательно, $|a^{\Delta x} - 1| < |a^{\frac{1}{n}} - 1| = a^{\frac{1}{n}} - 1$.

Так как для $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$ (смотри стр. 40) будет $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon$, то, следовательно, $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} a^{\Delta x} = 1$.

б) Пусть $\Delta x < 0$. Положим, $\Delta x = -t$, $t > 0$. Так как

$$a^{\Delta x} = a^{-t} = \frac{1}{a^t}, \text{ то } \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} a^{\Delta x} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{1}{a^t} = 1.$$

Итак, для $a > 1$ из существования и совпадения пределов слева и справа (пункты „а“, „б“) следует существование предела:

$$\lim_{\Delta x \to 0} a^{\Delta x} = 1.$$

Пусть теперь $0 < a < 1$. Положим $a = \frac{1}{c}$, $c > 1$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} a^{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{c}\right)^{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{c^{\Delta x}} = 1.$$

Таким образом, при любом $a > 0$ будет $\lim\limits_{\Delta x \to 0} a^{\Delta x} = 1$. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что из $0 < |\Delta x| < \delta$ будет следовать $|a^{\Delta x} - 1| < \varepsilon$, а следовательно, $|\Delta y| = a^x \cdot |a^{\Delta x} - 1| \to 0$ (произведение величины ограниченной на величину бесконечно малую). Но это и означает, что функция $y = a^x$ непрерывна.

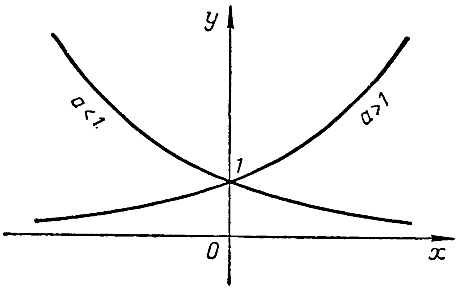
4. График показательной функции $y = a^x$ при любом значении a обращен выпуклостью вниз. Это легко устанавливается при помощи знака второй производной: $y'' = a^x \cdot \ln^2 a > 0$.

5. Поведение функции на бесконечности установим при помощи вычисления соответствующих пределов:

для $a > 1$: $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = \infty$;

для $a < 1$: $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = 0$.

Показательная функция a^x растет (для $a > 1$) или убывает (для $a < 1$) быстрее любой степени x. Рекомендуется показать это самостоятельно, воспользовавшись правилом Лопиталя.

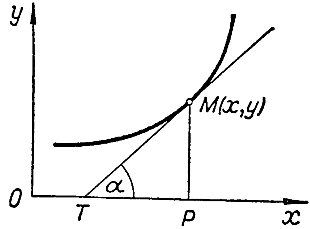


Черт. 11.

При построении графика показательной функции $y = a^x$ ($a > 1$) следует учесть быстрый рост ее при $x \to \infty$. В самом деле, $y' = a^x \ln a$, но $y' = \operatorname{tg} \alpha$ и, следовательно, $\operatorname{tg} \alpha = a^x \ln a$. Легко видеть, что при $x \to \infty$ и $a > 1$ будет $\operatorname{tg} \alpha \to \infty$. Если $a < 1$, то при $x \to \infty$ будет $\operatorname{tg} \alpha \to 0$.

Учитывая проведенное исследование, получим эскизы графиков функций: $y = a^x$ ($a > 1$) и $y = a^x$ ($a < 1$) (черт. 11).

Для графика показательной функции в отличие от графиков других функций характерно то, что показательная кривая в любой точке имеет одну и ту же по величине подкасательную.



Черт. 12.

Известно, что подкасательной TP называется проекция касательной TM на ось x (черт. 12). Обозначая подкасательную через sbt (subtangens), будем иметь:

$$sbt = TP = \frac{y}{y'} = \frac{a^x}{a^x \ln a} = \frac{1}{\ln a} = \text{const}.$$

Это свойство характеризует полностью показательную функцию, и только ее.

§ 15. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ. СУЩЕСТВОВАНИЕ ЛОГАРИФМОВ

Определение. Логарифмической функцией при основании $a > 0$ называется функция $y = \log_a x$, обратная показательной функции $x = a^y$.

Так как множество значений показательной функции $x = a^y$ есть множество, состоящее только из чисел $x > 0$ (стр. 42, свойство 1), то логарифмическая функция $y = \log_a x$ определена лишь для $x > 0$.

Из рассмотрения показательной функции $x = a^y$ и обратной ей логарифмической функции $y = \log_a x$ получаем известное из школьного курса определение логарифма: логарифмом числа x при основании $a > 0$ и $a \neq 1$ называется показатель степени y, в которую надо возвысить основание a, чтобы получить число x:

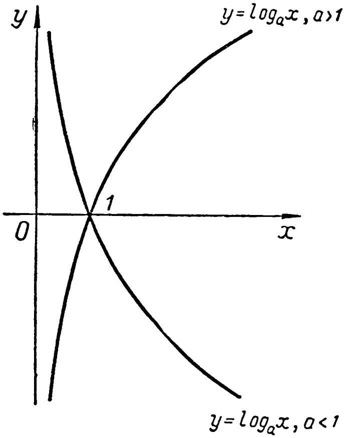
$$a^{\log_a x} = x.$$

Полученное тождество позволяет всякую степенную функцию $y = x^\alpha$ $(x > 0)$ представить в виде:

$$y = (a^{\log_a x})^\alpha = a^{\alpha \log_a x}.$$

Выразив степенную функцию через показательную, можно вывести свойства степенной функции (в частности, с иррациональным показателем) из свойств показательной функции (смотри § 17).

Из непрерывности и монотонности прямой функции $y = a^x$, по теореме о существовании обратной функции (стр. 32) сразу же следует существование логарифмов: логарифмическая функция $y = \log_a x$ в области определения $(0, \infty)$ непрерывна и монотонна (для $a > 1$ она монотонно возрастает, для $a < 1$ она монотонно убываает). Это значит, что для $a > 0$ и любого вещественного числа $x > 0$ существует одно и только одно значение y, при котором $a^y = x$ или $y = \log_a x$.



Черт. 13.

Исследуем поведение логарифмической функции на концах интервала $(0, \infty)$, вычисляя соответствующие пределы.

Докажем, что для $a > 1$ будет $\lim\limits_{x \to \infty} \log_a x = \infty$.

Пусть $\log_a x = t$. Тогда $a^t = x$ и, следовательно, из $x \longrightarrow \infty$ при $a > 1$ следует $t \longrightarrow \infty$, т. е. $\lim\limits_{x \to \infty} \log_a x = \infty$. Точно так же можно показать, что для $a > 1$ будет $\lim\limits_{x \to 0} \log_a x = -\infty$.

Для $a < 1$ будет $\lim\limits_{x \to \infty} \log x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} \log_a x = \infty$. Рекомендуется показать это самостоятельно.

Так как $a^0 = 1$, то $\log_a 1 = 0$.

Эскизы графиков логарифмических функций даны на чертеже 13.

При любом основании a графики логарифмических функций проходят через точку $(1; 0)$.

Пользуясь производной, легко показать медленный рост логарифмической функции $\log_a x$ при $x \longrightarrow \infty$ $(a > 1)$. В самом деле, $\operatorname{tg} \alpha = y' = \frac{1}{x} \log_a e$ и, следовательно, при $x \longrightarrow \infty$ будет $\operatorname{tg} \alpha \longrightarrow 0$.

Сравните графики показательной функции и логарифмической функции при $x \longrightarrow \infty$.

Используя тождество $a^{\log_a x}=x$ и свойства степени, легко доказать следующие теоремы о логарифмах.

1. Если при данном основании два числа имеют один и тот же логарифм, то эти числа равны.

Это утверждение следует из монотонности логарифмической функции.

Замечание. Утверждение пункта 1 можно доказать элементарным путем.

Пусть $\log_a x_1=\log_a x_2$. Тогда

$$x_1=a^{\log_a x_1}=a^{\log_a x_2}=x_2,$$

что и требовалось доказать.

2. Логарифм произведения положительных сомножителей равен сумме логарифмов этих сомножителей.

Доказательство рекомендуется провести самостоятельно.

3. Логарифм частного положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя.

Доказательство. Пусть $x>0$, $y>0$. Так как $x=a^{\log_a x}$, $y=a^{\log_a y}$, то $\frac{x}{y}=a^{\log_a x-\log_a y}$, и, следовательно, $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$.

4. Логарифм степени положительного числа равен показателю степени, умноженному на логарифм данного числа.

Доказательство. Пусть $x>0$ — данное число. Тогда $x=a^{\log_a x}$ и $x^\alpha=a^{\alpha\log_a x}$, следовательно,

$$\log_a x^\alpha=\alpha\log_a x,$$

что и требовалось доказать.

§ 16. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ С РАЗНЫМИ ОСНОВАНИЯМИ

Прологарифмировать тождество — это значит взять от обеих частей его логарифм по заданному основанию.

Прологарифмируем тождество $x=a^{\log_a x}$ по основанию b:

$$\log_b x=\log_b (a^{\log_a x})$$

или

$$\log_b x=\log_a x\cdot\log_b a,$$

откуда:

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Полученная формула позволяет выразить логарифм некоторого числа x, взятый по одному основанию, через логарифм того же числа x, взятый по другому основанию. Так, например, зная значения натуральных логарифмов чисел, легко по ним получить значения десятичных логарифмов тех же чисел, и обратно:

$$\log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

Коэффициент $\frac{1}{\ln 10}$, переводящий натуральный логарифм в десятичный, называется модулем перехода и обозначается M:

$$M = \frac{1}{\ln 10} \approx 0{,}4343.$$

Таким образом, $\lg x \approx 0{,}4343 \ln x$.

Имея график логарифмической функции по какому-либо основанию a, можно из него получить график логарифмической функции по другому основанию b посредством растяжения графика первой функции по направлению оси oy.

В частности, если основания логарифмических функций обратны по величине, то их графики будут расположены симметрично относительно оси ox. В самом деле, по формуле перехода от одного основания логарифмов к другому, имеем:

$$\log_{\frac{1}{a}} x = \frac{\log_a x}{\log_a \frac{1}{a}} = \frac{\log_a x}{\log_a 1 - \log_a a} = -\log_a x.$$

§ 17. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ С ИРРАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Определение. Функция вида $y = x^\alpha$, где α — иррациональное число, называется степенной функцией с иррациональным показателем.

Функция определена на полусегменте $(0, \infty)$, если $\alpha > 0$ и на интервале $(0, \infty)$, если $\alpha < 0$.

Для изучения свойств степенной функции с иррациональным показателем представим ее в виде сложной функции, полученной от суперпозиции (наложения) логарифмической и показательной функций $y = a^{\alpha \log_a x}$ (смотри § 15) или при помощи цепочки равенств: $y=a^t$, где $t=\alpha\log_a x$ (считаем $a>1$, $x>0$).

Из непрерывности логарифмической и показательной функций следует (по теореме непрерывности сложной функции, доказанной во введении в анализ) непрерывность степенной функции.

Рассмотрим поведение функции в окрестности нуля и на бесконечности. Имеем:

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha=\begin{cases}+\infty, & \alpha>0,\\ 0, & \alpha<0,\end{cases}$$

так как $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \alpha>0}} t=\infty$, $\lim\limits_{t\to\infty} a^t=\infty$ и

$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ \alpha<0}} t=-\infty$, $\lim\limits_{t\to-\infty} a^t=0$.

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha=\begin{cases}0, & \alpha>0,\\ \infty, & \alpha<0,\end{cases}$$

так как $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \alpha>0}} t=-\infty$, $\lim\limits_{t\to-\infty} a^t=0$ и

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \alpha<0}} t=\infty$, $\lim\limits_{t\to\infty} a^t=\infty$.

Исследуем функцию $y=x^\alpha$ на монотонность: $y'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$.

Так как $y'>0$ для $\alpha>0$, то функция $y=x^\alpha$ монотонно возрастает в области определения. Так как $y'<0$ для $\alpha<0$, то функция $y=x^\alpha$ монотонно убывает в области определения.

З а м е ч а н и е. Монотонность функции $y=x^\alpha$ очевидна, если представить ее в виде $x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$ (смотри стр. 43).

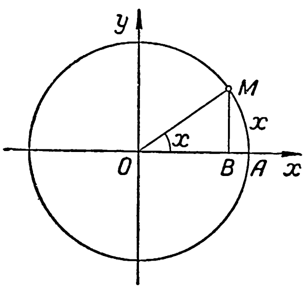
График функции $y=x^\alpha$ проходит через точку (1; 1).

Из свойств показательной функции следует, что для $\alpha_1<\alpha_2$ график функции $f(x)=x^{\alpha_1}$ будет лежать выше графика функции $\varphi(x)=x^{\alpha_2}$, если $0<x<1$, и ниже графика функции $\varphi(x)$, если $x>1$. Графики функций $f(x)=x^\alpha$ и $\varphi(x)=x^{\frac{1}{\alpha}}$ взаимно симметричны относительно биссектрисы $y=x$.

§ 18. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. Основные тригонометрические функции: синус и косинус. Рассмотрим в плоскости XOY „единичный круг" (черт. 14).

Будем начальной точкой считать точку A. Точка M может двигаться по окружности как против часовой стрелки, так и по часовой стрелке. Положительным направлением считают то, когда точка M движется против часовой стрелки. Движение точки M по окружности не ограничивается одним поворотом.



Черт. 14.

Пусть точка M движется по окружности против часовой стрелки. Положение точки M будем определять длиной x дуги AM. Абсцисса X и ордината Y точки M являются функциями величины x, называемыми косинусом и синусом: $X = \cos x = OB$, $Y = \sin x = MB$.

В математическом анализе в качестве независимой переменной тригонометрических функций всегда принимается радианная мера дуги или угла: условились в качестве единицы измерения дуг и углов принимать радиан — центральный угол, которому соответствует дуга окружности, по длине равная радиусу ($57°17'44'',8$). Так, например, $\sin 2 \approx \sin 114°35'29'',6$. Эта мера уже принята в предшествующем тексте.

В радианном измерении формулы математического анализа, относящиеся к тригонометрическим функциям, принимают наиболее простой вид.

Из теоремы Пифагора сразу же следует: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Так как определение основных тригонометрических функций связано с рассмотрением окружности, тригонометрические функции иначе называются круговыми.

Напомним некоторые свойства функций $\sin x$ и $\cos x$.

а) $\sin x$ и $\cos x$ — функции, определенные на всей числовой оси (это сразу же следует из определения этих функций).

б) $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, следовательно, функции $\sin x$ и $\cos x$ являются периодическими,

2π — период функций $\sin x$ и $\cos x$. Рекомендуется самостоятельно показать, что 2π — наименьший положительный период функций $\sin x$ и $\cos x$.

в) $\cos(-x)=\cos x$, $\sin(-x)=-\sin x$, следовательно, $\cos x$ — функция четная, $\sin x$ — функция нечетная.

г) функции $\sin x$ и $\cos x$ непрерывны на всей числовой оси.

Докажем непрерывность функции $\varphi(x)=\sin x$ в точке $x=a$.

Для доказательства покажем, что для любого заданного $\varepsilon>0$ может быть найдено соответствующее значение $\delta(\varepsilon)>0$, удовлетворяющее условию непрерывности функции. Оценим сверху модуль разности:

$$|\varphi(x)-\varphi(a)|=|\sin x-\sin a|=\left|2\cos\frac{a+x}{2}\cdot\sin\frac{x-a}{2}\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|<2\cdot\left|\frac{x-a}{2}\right|=|x-a|<\varepsilon.$$

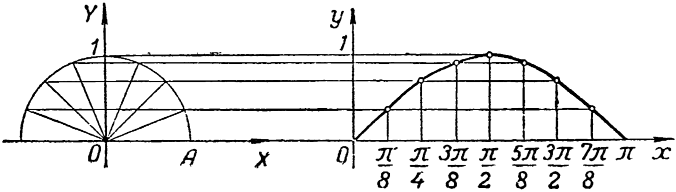
Взяв $\delta\leqslant\varepsilon$, получим, что неравенство $|\sin x-\sin a|<\varepsilon$ имеет место всякий раз, как только $|x-a|<\delta$. Непрерывность функции $\varphi(x)=\sin x$ в точке $x=a$ доказана, а так как точка a — произвольна, то тем самым доказана непрерывность функции $\sin x$ на всей числовой оси.

Точно так же можно доказать непрерывность функции $y=\cos x$. Доказательство рекомендуется провести самостоятельно.

При построении графиков функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$ следует пользоваться свойствами этих функций, позволяющими рационализировать процесс построения графика. Так для построения графика функции $y=\sin x$ достаточно построить график только для половины периода от 0 до π, пользуясь симметрией, получить график на полном периоде от 0 до 2π и, пользуясь периодичностью, продолжить полученный график на всю числовую ось.

Для построения графика функции $y=\sin x$ на отрезке $[0, \pi]$ можно использовать точечный метод (обычно применяемый в школе) или таблицу.

В первом случае поступают так: половину дуги „единичного круга“ делят на равные части, например на 8 частей. Отрезок $[0,\pi]$ оси OX делят тоже на 8 равных частей. Через полученные на оси OX точки деления проводят вертикали до пересечения их с горизонталями, проведенными через соответствующие точки деления дуги круга. Полученные точки пересечения соединяют плавной кривой (черт. 15).



Черт. 15.

Для построения графика функции $y = \sin x$ на всей числовой оси рекомендуется перенести полученную таким построением часть графика синусоиды на миллиметровую бумагу. Использовать далее указания, сделанные выше.

Для построения графика функции $y = \sin x$ можно использовать методы дифференциального исчисления. Достаточно исследовать функцию $y = \sin x$ на $[0, \pi]$.

Найдем экстремум функции на указанном отрезке: $y' = \cos x$.

На этом отрезке $\cos x = 0$ в точке $x = \frac{\pi}{2}$ и так как

$$y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = -1 < 0, \text{ то точка } x = \frac{\pi}{2}$$

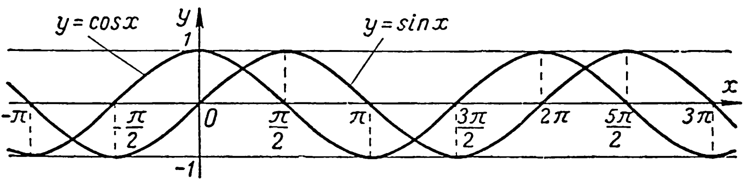
будет точкой максимума функции. Учитывая, что $\sin 0 = 0$ и $\sin\pi = 0$, легко построить эскиз графика функции $y = \sin x$ на $[0, \pi]$. Для построения графика функции $y = \sin x$ на всей числовой оси нужно использовать указания, сделанные выше.

График функции $y = \cos x$ получается из графика функции $y = \sin x$ путем сдвига графика функции $y = \sin x$ влево по оси ox на расстояние $\frac{\pi}{2}$ (это следует из известной из курса тригонометрии формулы приведения: $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$).

Графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ даны на чертеже 16.

2. Тригонометрические функции $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ получаются из основных тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$. По определению, $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$. Таким образом, свойства рассматриваемых функций могут быть получены, исходя из свойств основных тригонометрических функций:

а) $y = \operatorname{tg} x \left(y = \frac{\sin x}{\cos x}\right)$.

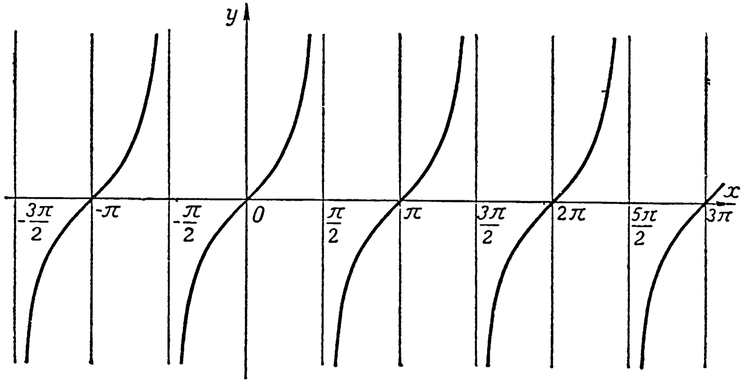


Черт. 16.

Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена и непрерывна (как частное непрерывных функций) на всей числовой оси, кроме тех точек x, в которых знаменатель $\cos x$ обращается в нуль. Это точки $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots, \pm\frac{2n-1}{2}\pi$, где n — натуральное число. В указанных точках функция $y = \operatorname{tg} x$ не существует. Прямая $x = \frac{\pi}{2}$ является вертикальной асимптотой. В этом легко убедиться, вычислив односторонние пределы. Такую работу рекомендуется проделать самостоятельно. Функция $y = \operatorname{tg} x$ нечетная: $y(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x = -y(x)$, периодическая: $\operatorname{tg}(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x$, период ее равен π, монотонна на каждом интервале $\left(\frac{2n-1}{2}\pi, \frac{2n+1}{2}\pi\right)$, в чем легко убедиться, пользуясь производной: $y' = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$.

Так как $y'' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} > 0$ для $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ кривая обращена выпуклостью вниз.

При построении графика функции $y = \operatorname{tg} x$ достаточно построить сначала часть графика функции на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, отразить ее, пользуясь симметрией относительно начала координат, на $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, полученный на полном периоде $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ график, пользуясь периодичностью, продолжить на всю числовую ось (черт. 17):



Черт. 17.

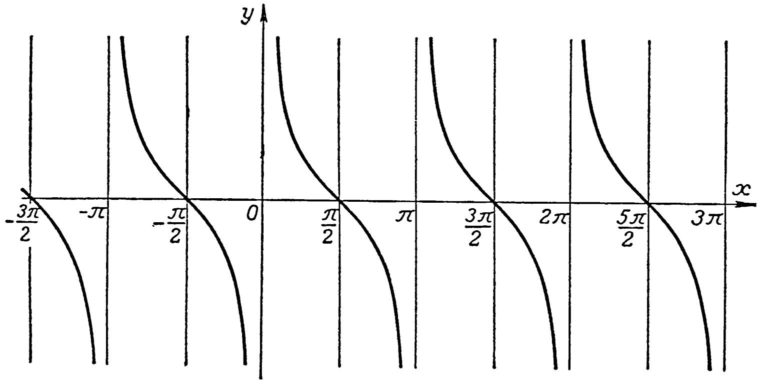
б) $y = \operatorname{ctg} x \left(y = \frac{\cos x}{\sin x}\right)$.

Данная функция определена и непрерывна (как частное непрерывных функций) на всей числовой оси, кроме тех точек x, в которых знаменатель $\sin x$ обращается в нуль. Такими точками являются точки $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots, \pm n\pi$, где n — натуральное число. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \operatorname{ctg} x = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \operatorname{ctg} x = \infty$, следовательно, прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой.

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ нечетная: $y(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\operatorname{ctg} x = -y(x)$, периодическая: $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \frac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)} = \frac{-\cos x}{-\sin x} = \operatorname{ctg} x$, период равен π; монотонна на каждом из интервалов $(n\pi, (n+1)\pi)$, в чем можно убедиться при помощи производной: $y' = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0$.

Так как $y'' = \frac{2\cos x}{\sin^3 x} > 0$ на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то на интервале

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ кривая обращена выпуклостью вниз. Для построения графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ достаточно построить сначала часть графика функции на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, отразить ее, пользуясь симметрией относительно начала координат, на $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, полученный на полном периоде $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ график, пользуясь периодичностью, продолжить на всю числовую ось (черт. 18).



Черт. 18.

Свойства функций $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$ предлагается рассмотреть самостоятельно, исходя из свойств ранее рассмотренных функций $\sin x$ и $\cos x$. Построить графики функций $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$.

§ 19. ПРОСТЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Пусть требуется построить график функции

$$y = a \sin x + b \cos x. \tag{1}$$

График данной функции может быть получен сложением графиков $y_1 = a \sin x$ и $y_2 = b \cos x$, каждый из которых в свою очередь получается соответственно из графиков $y_3 = \sin x$ и $y_4 = \cos x$ путем растяжения ординат этих графиков (первого — в a раз, второго — в b раз). Однако целесообразно строить график такой функции приведением данной функции к обобщенной синусоиде $y = A \sin(x + \alpha)$, носящей название простой гармоники.

Если $a \sin x + b \cos x = A \sin(x + \alpha)$, то $a \sin x + b \cos x = A(\sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha)$, и, следовательно, угол α и число A определятся из условий $a = A \cos \alpha$, $b = A \sin \alpha$, где a и b — данные числа:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}, \quad A = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Используя все сказанное, получим:

$y = a \sin x + b \cos x = A(\cos \alpha \sin x + \sin \alpha \cos x) = A \sin(x + \alpha)$.

Таким образом, построение графика заданной функции (1) сводится к построению графика функции $y = A \sin(x + \alpha)$. График последней функции получается смещением синусоиды $y = A \sin x$ по оси x влево, если $\alpha > 0$, и вправо, если $\alpha < 0$, на расстояние $|\alpha|$.

Функция $y = A \sin(\omega t + \alpha)$ имеет большое значение в технике, в физике. Теория колебаний, радиотехника, электротехника и другие отрасли науки и техники используют для своих целей гармонические колебания, которые характеризуются уравнением вида $y = A \sin(\omega t + \alpha)$, где A — амплитуда колебания, ω — частота, α — начальная фаза.

Рассмотрим частный случай. Пусть требуется построить график функции $y = 3 \sin x + 4 \cos x$.

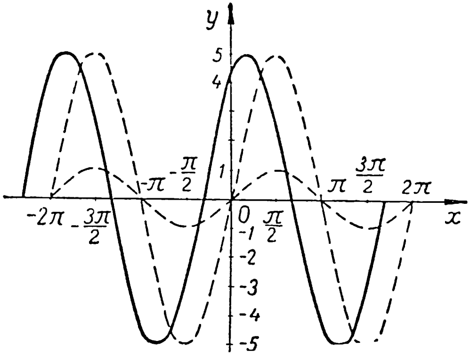
В данном случае имеем: $A = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$;

$\alpha \approx 53° \approx \frac{3\pi}{10}$.

Следовательно, данную функцию можно представить в виде:

$$y \approx 5 \sin\left(x + \frac{3\pi}{10}\right).$$

График такой функции можно получить из графика функции $y_2 = 5 \sin x$ посредством смещения его влево на $\frac{3\pi}{10}$ единиц. График функции $y_2 = 5 \sin x$ получится из графика функции $y_1 = \sin x$ посредством увеличения соответствующих ординат в пять раз. Учитывая все сказанное, построим требуемый график (черт. 19).



Черт. 19.

§ 20. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, как было показано, являются функциями периодическими, принимающими одно и то же значение для бесчисленного множества значений их аргументов. Это значит, что обратная функция для каждой из указанных функций на $-\infty < x < +\infty$ будет многозначной.

Будем рассматривать отдельные интервалы, на которых прямая функция будет монотонной, а следовательно, будет монотонной и обратная функция. Другими словами, будем выбирать однозначные ветви многозначной функции.

Для выделения главных значений обратных тригонометрических функций выдвигаются следующие дополнительные требования: 1) непрерывность, 2) однозначность, 3) область определения обратной функции должна быть совокупностью всех значений прямой функции.

Арксинус

Определение. Функция, обратная функции $x = \sin y$ на отрезке $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, называется арксинусом и обозначается

$$y = \arcsin x \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

Геометрическое определение. $\arcsin x$ есть дуга, взятая в пределах $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$, синус которой равен числу x,

$$-1 \leqslant x \leqslant +1: \ \sin(\arcsin x) = x.$$

Свойства функции $y = \arcsin x$.

1. Функция $y = \arcsin x$ определена на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Значения функции $y = \arcsin x$ при любом значении ее аргумента заполняют отрезок $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.

2. На отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ функция $y = \arcsin x$ монотонно возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ и непрерывна, что следует из теоремы о непрерывности и монотонности обратной функции (смотри стр. 32).

3. Функция $y = \arcsin x$ есть нечетная функция. Докажем, что $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

Пусть

$$\arcsin(-x) = z. \tag{1}$$

Тогда $-x = \sin z$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $x = -\sin z = \sin(-z)$, откуда $-z = \arcsin x$ и, значит,

$$z = -\arcsin x. \tag{2}$$

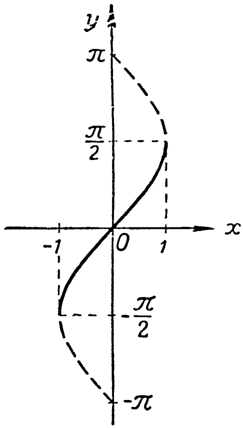
Из равенств (1) и (2) следует $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, что и требовалось доказать.

Приведенное доказательство может быть использовано в средней школе. Заметим, что нечетность функции $y = \arcsin x$ следует из теоремы о нечетности обратной функции (смотри стр. 32, свойство 4).

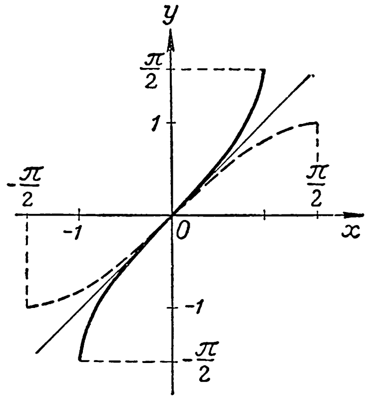
График функции $y = \arcsin x$ может быть получен одним из двух способов:

1. Перейдя к функции $x = \sin y$, строят синусоиду с волнами, расположенными вдоль оси oy, и выделяют дугу, для которой $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ (черт. 20).

2. График функции $y = \sin x$ для $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ отражают симметрично относительно биссектрисы $y = x$ (черт. 21).



Черт. 20.



Черт. 21.

Арккосинус

Определение. Функция, обратная функции $x = \cos y$ на отрезке $0 \leqslant y \leqslant \pi$, называется арккосинусом и обозначается

$$y = \arccos x \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

Геометрическое определение. arccos x есть дуга, взятая в пределах $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$, косинус которой равен числу x, $-1 \leqslant x \leqslant 1$:

$$\cos(\arccos x) = x.$$

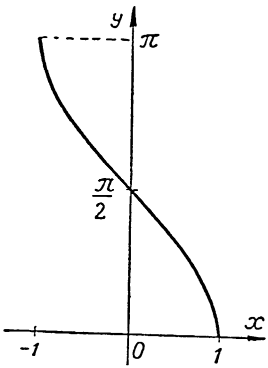


Рис. 22.

Свойства функции
$y = \arccos x$.

1. Функция $y = \arccos x$ определена на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Значения функции $y = \arccos x$ при любом значении ее аргумента заключены на $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

2. На отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ функция $y = \arccos x$ монотонно убывает от π до 0 и непрерывна, что следует из теоремы о монотонности и непрерывности обратной функции (черт. 22).

Арктангенс

Определение. Функция, обратная функции $x = \operatorname{tg} y$ на интервале $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, называется арктангенсом и обозначается $y = \operatorname{arctg} x$ $(-\infty < x < \infty)$.

Геометрическое определение. $\operatorname{arctg} x$ есть дуга, взятая в пределах $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$, тангенс которой равен x: $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$.

Свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$.

1. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ определена на всей числовой оси $-\infty < x < \infty$. Значения функции при любом значении ее аргумента заключены на интервале $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$.

2. В области определения $-\infty < x < \infty$ функция $y = \operatorname{arctg} x$ монотонно возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ и непрерывна, что следует из теоремы о монотонности и непрерывности обратной функции.

3. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ нечетная. Докажем, что

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x.$$

Пусть

$$\operatorname{arctg}(-x) = z. \tag{1}$$

Тогда $-x = \operatorname{tg} z$, $-\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}$, или $x = -\operatorname{tg} z = \operatorname{tg}(-z)$, откуда $-z = \operatorname{arctg} x$ и, следовательно,

$$z = -\operatorname{arctg} x. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) имеем:

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, однако, что нечетность функции $y = \operatorname{arctg} x$ следует из теоремы о нечетности обратной функции (смотри стр. 32, свойство 4). Приведенное же доказательство может быть использовано в средней школе.

График функции $y = \operatorname{arctg} x$ дан на чертеже 23.

Арккотангенс

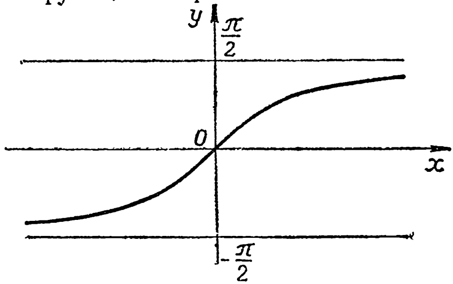
Определение. Функция, обратная функции $x = \operatorname{ctg} y$ на интервале $0 < y < \pi$, называется арккотангенсом и обозначается $y = \operatorname{arcctg} x$ $(-\infty < x < \infty)$.

Геометрическое определение. $\operatorname{arcctg} x$ есть дуга, взятая в пределах $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$, котангенс которой равен x:

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x.$$

Свойства функции $y = \operatorname{arcctg} x$.

1. Данная функция определена на всей числовой оси

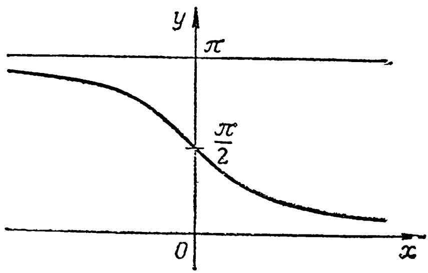


Черт. 23.

$-\infty < x < \infty$. Значения функции при любом значении ее аргумента заключены на интервале $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$.

2. В области определения $-\infty < x < \infty$ функция $y = \operatorname{arcctg} x$ монотонно убывает от π до 0 и непрерывна, что следует из теоремы о монотонности и непрерывности обратной функции.

График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ дан на чертеже 24.



Черт. 24.

§ 21. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОТ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Тригонометрические функции от обратных тригонометрических функций являются алгебраическими функциями. Из определения обратных тригонометрических функций следует, что прямая и обратная ей функции в области определения удовлетворяют тождеству $\sin(\arcsin x)=x$, $\cos(\arccos x)=x$, $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x$, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)=x$.

Вне области определения равенства теряют смысл. Так, например, рассматривая равенство $\sin(\arcsin x)=x$, убеждаемся в том, что его правая часть определена при всех значениях x, а левая не имеет смысла для $|x|>1$.

Рассмотрим тригонометрические функции от произвольных обратных тригонометрических функций.

а) $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$ Действительно, так как по определению $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$ и, следовательно, $\sin(\arccos x)\geqslant 0$, то, воспользовавшись известной формулой $\sin t=\sqrt{1-\cos^2 t}$, получаем $\sin(\arccos x)=$ $=\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}=\sqrt{1-x^2}$.

$$\text{б) } \sin(\operatorname{arctg} x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Так как по определению $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg} x<\frac{\pi}{2}$, то записанная формула годится только для I и IV четверти.

Воспользовавшись формулой $\sin t=\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}$ и учитывая, что $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$, получим:

$$\sin(\operatorname{arctg} x)=\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

где радикал берется с положительным знаком.

в) $\sin(\operatorname{arcctg} x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Так как по определению $0<\operatorname{arcctg} x<\pi$, то $\sin(\operatorname{arcctg} x)>0$.

Воспользовавшись формулой $\sin t=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 t}}$ и учитывая, что $0<t<\pi$, получим:

$$\sin(\operatorname{arcctg} x)=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2(\operatorname{arcctg} x)}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

где радикал берется с положительным знаком.

г) $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$.

Так как по определению $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$, то $\cos(\arcsin x)\geqslant 0$ и, следовательно, $\cos(\arcsin x)=$

$=\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}=\sqrt{1-x^2}$, где радикал берется с положительным знаком.

Рекомендуется, используя подобные рассуждения, в качестве полезных упражнений проверить справедливость остальных формул данной ниже таблицы:

$$\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2} \qquad \operatorname{tg}(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sin(\operatorname{arctg} x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \operatorname{tg}(\arccos x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\sin(\operatorname{arcctg} x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)=\frac{1}{x}$$

$$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2} \qquad \operatorname{ctg}(\arcsin x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \operatorname{ctg}(\arccos x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\cos(\operatorname{arcctg} x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)=\frac{1}{x}.$$

§ 22. НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ОБРАТНЫМИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Теорема 1. Для всех значений x, принадлежащих отрезку $-1 \leqslant x \leqslant 1$, имеет место соотношение:

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

Доказательство. Положим $\arcsin x=t$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\arccos x=z$, $0 \leqslant z \leqslant \pi$. Отсюда $x=\sin t$ и $x=\cos z$, следовательно,

$$\sin t=\cos z=\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right).$$

Так как по условию $0 \leqslant z \leqslant \pi$, то $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}-z \leqslant \frac{\pi}{2}$. Но и $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ (по условию). Это значит, что углы $\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$ и t лежат в первой или четвертой четверти и синусы их равны. Это возможно лишь тогда, когда сами углы равны: $t=\frac{\pi}{2}-z$. Отсюда $t+z=\frac{\pi}{2}$ или

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. Для всех действительных значений x имеет место соотношение $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

Доказательство рекомендуется провести самостоятельно.

Преобразования одних обратных тригонометрических функций в другие и различные действия с ними будут рассмотрены подробно в курсе тригонометрии.

Редактор *Л. Г. Немцова*
Технический редактор *В. Л. Волчек*. Корректор *С. М. Березина*

* * *

Сдано в набор 6/III 1958 г. Подписано к печати 23/V 1958 г. $84 \times 108^1/_{32}$.
Печ. л. 4 (3,28). Уч.-изд. л. 2,75. Тираж 40 000 экз. А05016.

* * *

Учпедгиз. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Московского городского Совнархоза.
Москва, Ж-54, Валовая, 28

Заказ № 1555. Цена 85 коп.