МГЗПИ

А. А. Кочева

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО АЛГЕБРЕ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Часть III

Московский государственный заочный
педагогический институт

МГЗПИ

А. А. Кочева

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО АЛГЕБРЕ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Часть III

Рекомендовано Главным управлением высших и средних педагогических учебных заведений Министерства просвещения РСФСР

Учебное пособие
для студентов-заочников II курса
физико-математических факультетов
педагогических институтов

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1984

ББК 22.14
К75

Рецензенты: кандидат физ.-мат. наук, доцент *Полянский А. А.* (Куйбышевский пединститут), кандидат физ.-мат. наук, доцент *Федулова Т. М.* (Куйбышевский пединститут), доцент *Казачек Н. А.* (Калужский пединститут).

Редактор МГЗПИ *Павлович О. А.*

Кочева А. А.

К75 Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. Ч. III. Для студентов-заочников II курса физ.-мат. фак. пед. ин-тов. — М.: Просвещение, 1984. — 41 с. — Моск. гос. заоч. пед. ин-т.

К $\frac{4309020400-705}{103\ (03)-84}$ заказное

ББК22.14
517.1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий задачник-практикум, предназначаемый для студентов-заочников физико-математических факультетов педагогических институтов, составлен в соответствии с программой курса «Алгебра и теория чисел» и охватывает разделы: «Делимость целых чисел», «Делимость в кольцах», «Теория сравнений». В целом он ориентирован на учебное пособие «Алгебра и теория чисел»*.

С учетом специфики заочного обучения многие примеры даются с подробными решениями. Большое количество однотипных упражнений по всем узловым темам позволяет выработать у студентов необходимые практические навыки, дает возможность преподавателям составлять межсессионные задания и проводить контрольные работы, примерные варианты которых, включающие соответствующие номера упражнений из задачника, приводятся в приложении. Здесь же дается образец решения нулевого варианта. Задачник снабжен также таблицами простых чисел и индексов.

---

* См.: Алгебра и теория чисел: Учебное пособие для студентов-заочников физико-математических факультетов педагогических институтов /Н. А. Казачек, Г. Н. Перлатов, Н. Я. Виленкин, А. И. Бородин. 2-е изд. — М.: Просвещение, 1984.

Глава I.

ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

§ 1. НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ. АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА. ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА

П р и м е р 1. Найдем НОД и НОК для чисел 2346, 646.

Р е ш е н и е. *1-й способ.* Применим способ последовательного деления, называемый алгоритмом Евклида. В данном случае будем иметь:

$$-\begin{array}{r|l} 2346 & 646 \\ \underline{1938} & \overline{3} \end{array}$$

$$-\begin{array}{r|l} 646 & 408 \\ \underline{408} & \overline{1} \end{array}$$

$$-\begin{array}{r|l} 408 & 238 \\ \underline{238} & \overline{1} \end{array}$$

$$-\begin{array}{r|l} 238 & 170 \\ \underline{170} & \overline{1} \end{array}$$

$$-\begin{array}{r|l} 170 & 68 \\ \underline{136} & \overline{2} \end{array}$$

$$-\begin{array}{r|l} 68 & 34 \\ \underline{68} & \overline{2} \\ 0 & \end{array}$$

Последний отличный от нуля остаток равен 34, следовательно, $(2346,\ 646) = 34$.

НОК находим по формуле $[a,\ b] = \frac{a \cdot b}{(a,\ b)}$. В данном случае

$$[2346,\ 646] = \frac{2346 \cdot 646}{34} = 44\,574.$$

2-й способ. Используем разложение данных чисел на простые множители:

$$2346 = 2 \cdot 1173 = 2 \cdot 3 \cdot 391 = 2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 23,$$

$$646 = 2 \cdot 323 = 2 \cdot 17 \cdot 19,$$

$$(2346,\ 646) = 2 \cdot 17 = 34,$$

$$[2346,\ 646] = 2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 19 = 44\,574.$$

Упражнения для самостоятельного решения

Найдите НОД и НОК следующих чисел:

1. 1232, 1672.
2. 132, 21.
3. 135, 8211.
4. 549, 387.
5. 589, 343.
6. 12 606, 6494.
7. 29 719, 76 501.
8. 162 891, 32 176.
9. 469 459, 519 203.
10. 738 089, 3 082 607.
11. 179 370 199, 4 345 121.
12. 3 327 449, 6 314 153.
13. 12 870, 7650.
14. 41 382, 103 818.
15. 3640, 14 300.
16. 24 700, 33 250.
17. 7650, 25 245.
18. 56 595, 82 467.
19. 35 574, 192 423.
20. 25 245, 129 591.
21. 10 140, 92 274.
22. 36 372, 147 220.
23. 46 550, 37 730.
24. 1403, 1058.

Найдите НОД для следующих трех чисел:

25. 420, 126, 525.
26. 529, 1541, 1817.
27. 67 283, 122 433, 221 703.
28. 549 493, 863 489, 2 133 125.
29. 738 089, 3 082 607, 28303937.
30. 1767, 2223, 11 913.
31. 476, 1258, 21 114.
32. 3445, 4225, 5915.
33. 572, 5746, 1118.
34. 19 074, 13 566, 8211.
35. 1073, 3683, 34 481.
36. 1012, 1474, 4598.
37. 988, 2014, 42 598.
38. 2585, 7975, 13 915.
39. 874, 1518, 20 142.
40. 2227, 9911, 952.
41. 1253, 252, 406.
42. 2743, 3587, 6963.

Сократите следующие дроби:

43. $\frac{17501}{11137}$. 44. $\frac{1491}{2247}$. 45. $\frac{237419}{294817}$. 46. $\frac{1253}{406}$.

47. $\frac{438875}{747843}$. 48. $\frac{127936}{161919}$. 49. $\frac{2227}{9911}$. 50. $\frac{22243}{23777}$.

51. $\frac{2405}{4433}$. 52. $\frac{3587}{2743}$. 53. $\frac{3653}{3107}$.

§ 2. СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА. СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ ДРОБИ

Пример 1. Запишем числа $a = 6467_8$, $b = 101_3$ в системе счисления с основанием $g = 5$ и разделим большее на меньшее с остатком.

Решение. $5 = 12_3$.

1) $$\begin{array}{r|l} 6467_8 & 5 \\ \underline{5} & 1244 \\ 14 & \\ \underline{12} & \\ 26 & \\ \underline{24} & \\ 27 & \\ \underline{24} & \\ 3 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 1244 & 5 \\ \underline{12} & 207 \\ 44 & \\ \underline{43} & \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 207 & 5 \\ \underline{17} & 33 \\ 17 & \\ \underline{17} & \\ 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 33 & 5 \\ \underline{31} & 5 \\ 2 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ \underline{5} & 1 \\ 0 & \end{array}$$

$a = 6467_8 = 102\,013_5$.

2) $$\begin{array}{r|l} 101_3 & 12_3 \\ \underline{101} & 2 \\ 0 & \end{array}$$

$b = 101_3 = 20_5$.

3) $$\begin{array}{r|l} 102013_5 & 20_5 \\ \underline{40} & 2323_5 \\ 120 & \\ \underline{110} & \\ 101 & \\ \underline{40} & \\ 113 & \\ \underline{110} & \\ 3 & \end{array} \quad \Rightarrow 102\,013_5 = 20_5 \cdot 2323_5 + 3.$$

Ответ. $a = 102\,013_5$, $b = 20_5$, $102\,013_5 = 20_5 \cdot 2323_5 + 3_5$.

Пример 2. Выразим систематические дроби в виде обыкновенных дробей, числители и знаменатели которых записаны в десятичной системе: а) $2{,}3_4$; б) $0{,}04_5$; в) $2{,}012_3$.

Решение. а) $2{,}3_4 = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$;

б) $0{,}04_5 = 0 + \frac{0}{5} + \frac{4}{5^2} = \frac{4}{25}$;

в) $2{,}012_3 = 2 + \frac{0}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} = \frac{54+0+3+2}{27} = \frac{59}{27}$.

Пример 3. Запишем данные систематические дроби в виде обыкновенных в той же системе счисления: а) $0{,}04_6$; б) $2{,}3_4$; в) $2{,}012_3$.

Решение. а) $0{,}04_6 = \left(\frac{4}{100}\right)_6 = \left(\frac{1}{13}\right)_6$;

б) $2{,}3_4 = \left(\frac{23}{10}\right)_4$; в) $2{,}012_3 = \left(\frac{2012}{1000}\right)_3$.

Пример 4. Запишем данные систематические дроби в виде обыкновенных в той же системе счисления: а) $0{,}0(2)_4$; б) $0{,}1(4)_7$; в) $0{,}(23)_6$.

Решение. а) $0{,}0(2)_4 = \left(\frac{2}{3 \cdot 10}\right)_4 = \left(\frac{1}{3 \cdot 2}\right)_4 = \left(\frac{1}{12}\right)_4$;

б) $0{,}1(4)_7 = \left(\frac{14-1}{6 \cdot 10}\right)_7 = \left(\frac{13}{6 \cdot 10}\right)_7 = \left(\frac{5}{30}\right)_7$;

в) $0{,}(23)_6 = \left(\frac{23}{55}\right)_6 = \left(\frac{3}{11}\right)_6$.

Пример 5. Представим обыкновенные дроби в виде систематических в той же системе счисления: а) $\frac{137}{40}$; б) $\left(\frac{17}{40}\right)_8$; в) $\left(\frac{10}{8}\right)_{12}$.

Решение.

а)
$$\begin{array}{r|l}
137 & 40 \\
-\,120 & \overline{3{,}425} \\
\hline
170 & \\
-\,160 & \\
\hline
100 & \\
-\,80 & \\
\hline
200 & \\
-\,200 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

$\frac{137}{40} = 3{,}425$.

б)
$$\begin{array}{r|l}
17_8 & 40 \\
170 & \overline{0{,}36_8} \\
-\,140 & \\
\hline
300 & \\
-\,300 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

$\left(\frac{17}{40}\right)_8 = 0{,}36_8$.

в)
$$\begin{array}{r|l}
10_{12} & 8 \\
-\,8 & \overline{1{,}6_{12}} \\
\hline
40 & \\
-\,40 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

$\left(\frac{10}{8}\right)_{12} = 1{,}6_{12}$.

Пример 6. Разложим обыкновенные дроби в систематические в той же системе счисления: а) $\left(\frac{3}{5}\right)_{11}$; б) $\left(\frac{11}{12}\right)_4$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)_3$.

Решение. а) Дробь $\left(\frac{3}{5}\right)_{11}$ нельзя разложить в конечную систематическую, так как число 5 не входит в качестве множителя в состав числа 11 — основания системы счисления. Поскольку $(5, 11) = 1$, то получится чисто периодическая систематическая дробь:

$$\begin{array}{r|l}
3_{11} & 5 \\
30 & \overline{0{,}66\ldots} \\
-\,28 & \\
\hline
30 &
\end{array}$$

т. е. $\left(\frac{3}{5}\right)_{11} = 0{,}(6)_{11}$.

б) Так как $12_4 = 3_4 \cdot 2_4$, $(3, 4) = 1$, $(2, 4) = 2$, то при разложении данной дроби получится смешанная периодическая систематическая дробь:

$$\begin{array}{r|l}
11_4 & 12_4 \\
110 & \overline{0{,}311\ldots} \\
-\,102 & \\
\hline
20 & \\
-\,12 & \\
\hline
20 &
\end{array}$$

т. е. $\left(\frac{11}{12}\right)_4 = 0{,}3(1)_4$.

в) Так как $(2, 3) = 1$, то при разложении данной дроби получится чисто периодическая систематическая дробь:

$$\begin{array}{r|l} 1_3 & 2_3 \\ \cline{2-2} -\,10 & 0{,}11\ldots \\ 2 & \\ \hline 10 & \end{array} \qquad \text{т. е. } \left(\frac{1}{2}\right)_3 = 0{,}(1)_3.$$

Упражнения для самостоятельного решения

Запишите числа a и b в системе счисления с основанием g и разделите большее на меньшее:

54. $a = 18\,536$, $b = 430$, $g = 7$. **55.** $a = 121_3$, $b = 4731_9$, $g=8$.
56. $a = 101_2$, $b = 14\,320_5$, $g = 3$. **57.** $a = 121_3$, $b = 5378$, $g = 12$.
58. $a = 1653_7$, $b = 201$, $g = 4$. **59.** $a = 3745_9$, $b = 40_5$, $g = 6$.
60. $a = 15$, $b = 3571_8$, $g = 11$. **61.** $a = 132_4$, $b = 1643_7$, $g = 5$.
62. $a = 132_4$, $b = 443_5$, $g = 2$. **63.** $a = 4321_5$, $b = 13$, $g = 8$.
64. $a = 201_3$, $b = 6514_7$, $g = 5$. **65.** $a = 7356_8$, $b = 24_4$, $g = 5$.
66. $a = 136$, $b = 2632$, $g = 7$. **67.** $a = 101_2$, $b = 3542_6$, $g = 3$.
68. $a = 111_2$, $b = 3546_7$, $g = 4$. **69.** $a = 201_3$, $b = 13\,765_8$, $g = 4$.

70. Выразите систематические дроби в виде обыкновенных дробей, числители и знаменатели которых записаны в десятичной системе:

а) $2{,}114_8$; б) $35{,}13_7$; в) $2{,}224_6$; г) $3{,}201_5$;
д) $5{,}442_7$; е) $4{,}521_8$; ж) $7{,}742_9$; з) $4{,}234_6$;
и) $74{,}13_8$; к) $0{,}6467_8$.

71. Запишите данные систематические дроби в виде обыкновенных дробей в той же системе счисления:
а) $2{,}114_8$; б) $35{,}13_7$; в) $2{,}224_6$; г) $3{,}201_5$;
д) $5{,}442_7$; е) $4{,}521_8$; ж) $7{,}742_9$; з) $4{,}234_6$;
и) $74{,}13_8$; к) $0{,}6467_8$.

72. а) $1{,}1(6)$; б) $4{,}2(3)_5$; в) $2{,}1\,(2)_7$; г) $1{,}1(2)_3$;
д) $0{,}3(2)_4$; е) $32{,}14(2)_5$; ж) $2{,}10\,(3)_6$; з) $0{,}7(4)_8$;
и) $3{,}1(42)_5$; к) $5{,}01(3)_6$.

Представьте обыкновенные дроби в виде систематических в той же системе счисления:

73. а) $\left(\frac{112}{100}\right)_3$; б) $\left(\frac{311}{1000}\right)_5$; в) $\frac{43}{80}$; г) $\left(\frac{1}{122}\right)_4$;
д) $\left(\frac{151}{30}\right)_6$; е) $\left(\frac{31}{120}\right)_6$; ж) $\left(\frac{27}{30}\right)_9$; з) $\left(\frac{17}{40}\right)_9$;
и) $\left(\frac{103}{10}\right)_7$; к) $\frac{13}{20}$.

74. а) $\left(\frac{101}{20}\right)_3$; б) $\left(\frac{64}{30}\right)_7$; в) $\left(\frac{331}{40}\right)_5$; г) $\left(\frac{1}{3}\right)_6$;

д) $\left(\frac{23}{33}\right)_4$; е) $\left(\frac{24}{5}\right)_6$; ж) $\left(\frac{2012}{1000}\right)_3$; з) $\left(\frac{12}{37}\right)_{14}$;
и) $\left(\frac{125}{6}\right)_8$; к) $\left(\frac{204}{11}\right)_9$.

§ 3. ЦЕПНЫЕ ДРОБИ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Пример 1. Представим в виде цепной дроби следующее действительное число: $\frac{539}{103}$.

Решение. Всякое рациональное число можно представить в виде конечной цепной дроби. В данном примере имеем:

$$\begin{array}{r|l} -\,539 & 103 \\ 515 & 5 \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} -\,103 & 24 \\ 96 & 4 \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} -\,24 & 7 \\ 21 & 3 \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} -\,7 & 3 \\ 6 & 2 \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} -\,3 & 1 \\ 3 & 3 \\ \hline 0 & \end{array}$$

т. е. $\frac{539}{103} = 5 + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}} = [5;\ 4,3,\ 2,\ 3]$.

При решении практических задач часто требуется заменить иррациональное число рациональной дробью с определенной степенью точности или одну рациональную дробь другой, более простой. Для этих целей удобны подходящие дроби.

Если число α разложено в цепную дробь $[a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots]$, а $\frac{P_k}{Q_k}$ и $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ — две соседние подходящие дроби, то верно следующее неравенство:

$$\left|\alpha - \frac{P_k}{Q_k}\right| \leqslant \frac{1}{Q_k Q_{k+1}}.$$

Пример 2. Разложим в цепную дробь и заменим подходящей дробью с точностью до 0,001 число $\frac{2517}{773}$.

Решение. Представим $\frac{2517}{773}$ в виде цепной дроби: $\frac{2517}{773} = [3;\ 3,\ 1,\ 9,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2]$.

Составим таблицу значений числителей и знаменателей подходящих дробей:

$$\frac{P_0}{Q_0}=\frac{a_0}{1}=\frac{3}{1};\ \frac{P_1}{Q_1}=\frac{a_1a_0+1}{a_1}=\frac{10}{3};\ \ldots\frac{P_k}{Q_k}=\frac{a_kP_{k-1}+P_{k-2}}{a_kQ_{k-1}+Q_{k-2}}.$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7
a_k	3	3	1	9	2	2	1	2
P_k	3	10	13	127	267	661	928	2517
Q_k	1	3	4	39	82	203	285	773

$$\frac{2517}{773}\approx\frac{127}{39},\ \left|\frac{2517}{773}-\frac{127}{39}\right|<\frac{1}{39\cdot 82}=\frac{1}{3198}.$$

Ответ. $\frac{2517}{773}=[3;\ 3,\ 1,\ 9,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2];\ \frac{2517}{773}\approx\frac{127}{39}.$

Пример 3. Разложим в цепную дробь и заменим подходящей дробью с точностью до 0,001 число $\sqrt{5}$.

Решение. По теореме Лагранжа всякая квадратичная иррациональность разлагается в периодическую цепную дробь. Нахождение неполных частных a_0, a_1, ... цепной дроби $[a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots]$ связано с процессом выделения целой части числа. Получаем:

$$\sqrt{5}=2+\frac{1}{\alpha_1},\ \alpha_1=\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\frac{\sqrt{5}+2}{1}=\sqrt{5}+2.$$

$$\alpha_1=4+\frac{1}{\alpha_2},\ \alpha_2=\frac{1}{\alpha_1-4}=\frac{1}{(\sqrt{5}+2)-4}=\sqrt{5}+2.$$

Замечаем, что $\alpha_1=\alpha_2$, следовательно, неполные частные, начиная с a_1, будут повторяться и $\sqrt{5}=[2;\ (4)]$ (число 4 в периоде). В развернутом виде полученная цепная дробь имеет вид:

$$\sqrt{5}=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ldots}}}}}$$

Составим таблицу подходящих дробей:

N	0	1	2	3	...
a_k	2	4	4	4	...
P_k	2	9	38	...	
Q_k	1	4	17	72	...

В частности, $\frac{P_2}{Q_2}=\frac{38}{17}$, $17\cdot 72>1000$, $\sqrt{5}\approx\frac{38}{17}$.

Ответ. $\sqrt{5}=[2;\ (4)]$; $\sqrt{5}\approx\frac{38}{17}$.

Пример 4. Найдем действительное число α, которое обращается в цепную дробь $[2;\ 3,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2]$.

Решение. $[2;\ 3,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2]$ — конечная цепная дробь, следовательно, ее значение есть рациональное число α.

Составим таблицу подходящих дробей:

N	0	1	2	3	4	5
a_k	2	3	2	2	1	2
P_k	2	7	16	39	55	149
Q_k	1	3	7	17	24	65

Последняя подходящая дробь совпадает со значением цепной дроби.

Ответ. $\alpha=\frac{149}{65}$.

Пример 5. Найдем действительное число α, которое обращается в цепную дробь $[(1;\ 3)]$.

Решение. $[(1;\ 3)]$ — чисто периодическая цепная дробь:

$$\alpha=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\ldots}}}$$

Так как выражение, начинающееся с третьего неполного частного 1, имеет тот же вид:

$$1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\ldots}}}$$

то мы, очевидно, можем записать:

$$\alpha=[1;\ 3,\ \alpha]=1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\alpha}}=1+\frac{\alpha}{3\alpha+1},$$

после чего приходим к квадратному уравнению относительно искомого α:

$$3\alpha^2-3\alpha-1=0,\ \alpha_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{21}}{4}.$$

Положительное решение и есть искомое α.

Ответ. $[(1;\ 3)]=\frac{3+\sqrt{21}}{6}$.

Пример 6. Найдем действительное число α, которое обращается в цепную дробь $[5;\ (1,\ 3)]$.

Решение. $[5;\ (1,\ 3)]$ — смешанная периодическая цепная дробь.

$$\alpha=5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\ldots}}}}$$

т. е. $\alpha=5+\frac{1}{x}$, где $x=[(1,\ 3)]$. Из предыдущей задачи $x=\frac{3+\sqrt{21}}{6}$, следовательно,

$$\alpha=5+\frac{1}{\frac{3+\sqrt{21}}{6}}=5+\frac{6}{3+\sqrt{21}}=\frac{21+5\sqrt{21}}{3+\sqrt{21}}=\frac{7+\sqrt{21}}{2}.$$

Ответ. $\alpha=\frac{7+\sqrt{21}}{2}$.

Пример 7. Решим в целых числах уравнение $142x+82y=6$.

Решение. $(142,82)=2;\ 6\ \vdots\ 2$, следовательно, уравнение имеет решение.

Данное уравнение равносильно уравнению

$$71x+41y=3.$$

Разложим $\frac{71}{41}$ в цепную дробь:

$$\frac{71}{41}=[1;\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2].$$

Составим все подходящие дроби:

$$\frac{P_0}{Q_0}=\frac{1}{1};\ \frac{P_1}{Q_1}=\frac{2}{1};\ \frac{P_2}{Q_2}=\frac{5}{3};\ \frac{P_3}{Q_3}=\frac{7}{4};\ \frac{P_4}{Q_4}=\frac{19}{11};\ \frac{P_5}{Q_5}=\frac{26}{15};\ \frac{P_6}{Q_6}=\frac{71}{41}.$$

На основании свойства подходящих дробей

$$P_{k-1}Q_k-P_kQ_{k-1}=(-1)^k$$

получим:

$$26\cdot 41-71\cdot 15=(-1)^6 \text{ или } 71\cdot(-15)+41\cdot 26=1.$$

Умножив обе части равенства на 3, находим:

$$71\cdot(-45)+41\cdot(78)=3,$$

т. е. $x_0=-45$, $y_0=78$ — частное решение данного уравнения.

Все решения могут быть найдены по формулам:

$$\begin{aligned} x &= -45 + 41t, \\ y &= 78 - 71t, \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} x &= -4 + 41t, \\ y &= 7 - 71t, \end{aligned}$$

где t принимает любые целые значения.

Пример 8. Транспортной организации, имеющей грузовые автомашины грузоподъемностью 3,5 и 4,5 т, предложено перевезти 53 т груза. Определим, сколько грузовых автомашин того и другого типа должен выделить диспетчер транспортной организации для перевозки указанного груза одним рейсом при условии полного использования грузоподъемности всех выделенных автомашин.

Решение. Пусть x — число выделяемых машин грузоподъемностью 3,5 т, y — число выделяемых машин грузоподъемностью 4,5 т. Для получения ответа нужно решить уравнение

$$3{,}5x + 4{,}5y = 53,$$

т. е.

$$35x + 45y = 530,$$

в целых числах с учетом того, что $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Уравнение (1) равносильно уравнению $7x + 9y = 106$.

$$\frac{7}{9} = [0;\ 1,\ 3,\ 2].$$

Подсчитаем подходящие дроби (см. пример 2):

N	0	1	2	3
a_i	0	1	3	2
P_i	0	1	3	7
Q_i	1	1	4	9

По свойству 2 подходящих дробей

$$3 \cdot 9 - 4 \cdot 7 = -1 \Rightarrow 7 \cdot 4 - 9 \cdot 3 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7 \cdot (4 \cdot 106) + 9\,(-3 \cdot 106) = 106 \Rightarrow \begin{aligned} x_0 &= 4 \cdot 106, \\ y_0 &= -3 \cdot 106. \end{aligned}$$

Решениями уравнения будут:

$$x = 4 \cdot 106 + 9t,\quad y = -3 \cdot 106 - 7t,$$

где t — любое целое число.

Теперь из всех решений выберем неотрицательные:

$$\begin{cases} 4 \cdot 106 + 9t \geqslant 0, \\ -3 \cdot 106 - 7t \geqslant 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} t \geqslant -47\frac{1}{9}, \\ t \leqslant -45\frac{3}{7}. \end{cases}$$

Учитывая, что t — целое число, получим: $t_1 = -46$, $t_2 = -47$. При t_1 $x_1 = 10$, $y_1 = 4$; при t_2 $x_2 = 1$, $y_2 = 11$.

Ответ. Автомашины можно выделить двумя способами: 1) 10 автомашин грузоподъемностью 3,5 т, 4 автомашины грузоподъемностью 4,5 т или 2) 1 автомашину грузоподъемностью 3,5 т и 11 автомашин грузоподъемностью 4,5 т.

Упражнения для самостоятельного решения

Представьте в виде цепных дробей:

75. $\frac{323}{17}$. **76.** $\frac{135}{279}$. **77.** $-\frac{187}{63}$. **78.** $\frac{96}{67}$.

79. $\frac{30}{37}$. **80.** $-\frac{12}{5}$. **81.** $\frac{127}{52}$. **82.** $\frac{24}{35}$.

83. 1,23. **84.** $\frac{71}{41}$. **85.** $\frac{157}{225}$. **86.** $\frac{507}{1001}$.

87. $\frac{375}{824}$. **88.** 0,459. **89.** $\frac{990}{577}$. **90.** $\frac{875}{576}$.

91. 0,75. **92.** $\frac{13}{30}$. **93.** $-\frac{55}{117}$. **94.** 7,11.

95. 0,455. **96.** $-\frac{251}{764}$. **97.** $\frac{151}{121}$. **98.** 0,907.

Разложите в цепную дробь и замените подходящей дробью с точностью до 0,001 следующие числа:

99. $\sqrt{3}$. **100.** $\sqrt{27}$. **101.** $\sqrt{111}$. **102.** $\sqrt{44}$.

103. $\sqrt{123}$. **104.** $\sqrt{150}$. **105.** $\sqrt{21}$. **106.** $\sqrt{99}$.

107. $\sqrt{29}$. **108.** $\sqrt{32}$. **109.** $\sqrt{73}$. **110.** $\sqrt{75}$.

111. $\sqrt{48}$. **112.** $\sqrt{59}$. **113.** $\sqrt{80}$. **114.** $\frac{1321}{382}$.

115. $\frac{679}{220}$. **116.** $\frac{2614}{855}$. **117.** $\sqrt{7}$. **118.** $\sqrt{41}$.

119. $\sqrt{59}$. **120.** $\sqrt{15}$. **121.** $\sqrt{11}$. **122.** $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

123. $5-\sqrt{15}$. **124.** $\frac{2+\sqrt{5}}{3}$.

Найдите действительные числа, которые обращаются в данные цепные дроби:

125. [2; 1, 3, 4, 1, 2]. **126.** [0; 3, 1, 2, 7].
127. [2; 1, 1, 6, 8]. **128.** [—1; 1, 2, 4, 5].
129. [0; 1, 4, 3, 2]. **130.** [—3; 1, 1, 2].

131. [—2; 1, 3, 4, 2].
132. [3; 1, 4, 2, 5].
133. [0; 4, 1, 3, 2, 5].
134. [2; 3, 1, 4].
135. [—2; 1, 30, 2].
136. [1; 2, 3, 4, 2].
137. [4; (3, 2, 1)].
138. [(1; 2, 3)].
139. [(2; 1)].
140. [4; (2, 8)]
141. [3; (3,6)].
142. [(1, 2)].
143. [1; (1, 2)].
144. [1; (2, 2, 2, 1, 12, 1)].
145. [1; 7, (1, 6)].
146. [3; (5, 2, 1, 2)].
147. [(2, 3)].
148. [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2].
149. [0; 1, (2)].
150. [2; 4 (1)].
151. [2; 1, (3)].
152. [1; 1, (2, 3)].
153. [5; (2, 1)].
154. [4; (3, 1)].
155. [(7, 2, 3)].
156. [1; (3, 2)].
157. [3; (3, 2)].
158. [5; (6, 1)].
159. [—2; (3, 2)].
160. [—1; (1, 2)].
161. [3; (1, 3)].
162. [0; (4, 2)].

Решите в целых числах следующие уравнения:

163. $143x + 169y = 5$.
164. $237x + 44y = 1$.
165. $275x + 145y = 10$.
166. $439x + 118y = 3$.
167. $1256x + 847y = 119$.
168. $3x + 8y = 5$.
169. $2x + 5y = 7$.
170. $42x + 31y = 67$.
171. $23x + 49y = 53$.
172. $5x + 28y = 59$.
173. $12x + 7y = 41$.
174. $9x + 17y = 105$.
175. $35x - 37y = 12$.
176. $4x - 14y = 7$.
177. $7x - 12y = 15$.
178. $12x - 7y = 29$.
179. $8x - 13y = 63$.
180. $7x - 19y = 23$.
181. $39x - 22y = 10$.
182. $43x + 37y = 21$.
183. $122x + 129y = 2$.
184. $258x - 172y = 56$.
185. $3x + 4y = 13$.
186. $26x + 34y = 13$.
187. $45x - 37y = 25$.
188. $17x - 25y = 117$.
189. $81x - 48y = 33$.
190. $53x + 47y = 11$.
191. $70x + 33y = 1$.
192. $60x - 91y = 2$.

Решите задачи

193. Для перевозки зерна имеются мешки по 60 и 80 кг. Сколько нужно тех и других мешков для перевозки 440 кг зерна?

194. Сколько билетов стоимостью 30 и 50 коп. можно купить на 14 руб. 90 коп.?

195. Детский сад выделил 33 руб. для приобретения стульев стоимостью по 1 руб. 40 коп. и табуреток по 60 коп. Сколько следует купить стульев и табуреток, чтобы полностью израсходовать отпущенную сумму денег?

196. Туристское бюро, имеющее в своем распоряжении двадцатитрехместные автобусы и шестиместные легковые автомобили, организует экскурсионную поездку для 310 туристов. Сколько машин того и другого типа следует выделить для экскурсантов при условии, что в выделенных автомашинах не должно оставаться свободных мест?

197. Шахматная база парка культуры и отдыха приобрела некоторое количество комплектов шахмат и шашек на 62 руб. Комплект шахмат стоит 4 руб. 60 коп, а шашек — 1 руб. 90 коп. Сколько комплектов шахмат и шашек было закуплено базой?

198. Требуется найти два натуральных числа, каждое из которых не превышает 200, причем таких, что разность между ними равна 11, уменьшаемое кратно 9, а вычитаемое кратно 17.

199. Сколько потребуется сосудов емкостью по 0,5 и по 0,8 л для разлива 12 л жидкости так, чтобы все взятые сосуды были наполнены?

200. Для проведения эстафеты по бегу требуется разделить дистанцию в 6,7 км на участки размером по 175 м для женщин и по 300 м для мужчин. Из скольких спортсменов, как мужчин, так и женщин, должны состоять команды, участвующие в эстафете?

201. В населенный пункт, с которым установлено лишь авиационное сообщение, требуется доставить 150 контейнеров груза. В распоряжении отправителей имеются транспортные самолеты грузоподъемностью соответственно в 8 и 13 контейнеров. Сколько понадобится самолетов того и другого типа для того, чтобы перевезти указанный груз одним рейсом? Грузоподъемность каждого самолета должна быть использована полностью.

202. На обработку каждой из деталей типов *А* и *Б* токарь затрачивает соответственно 43 и 12,5 мин. Сколько деталей типа *А* и *Б* обработает токарь в течение семичасового рабочего дня? Рабочее время должно быть использовано полностью.

203. При каких целых числах выражение $\frac{7-11x}{10}$ равно такому целому положительному числу, при делении которого на 4 получается остаток, равный 3?

204. Найдите общий вид чисел, кратных 8, которые при делении на 5 дают в остатке 3.

205. Разложите число 150 на два положительных слагаемых, одно из которых кратно 11, а второе — 17.

206. Товарные вагоны с грузом типов *А* и *Б* весят соответственно 27 и 43 т. Сколько вагонов, груженных товарами *А* и *Б*, потребуется для формирования товарного состава весом 1800 т?

207. Из имеющихся резисторов сопротивлением по 1,2 и 1,7 Ом требуется составить последовательным соединением цепь сопротивлением 11,1 Ом. Сколько резисторов того и другого типа потребуется?

208. Сколькими способами можно уплатить 200 руб., имея денежные купюры по 3 и 5 руб.?

Глава II.

КОЛЬЦА И ИДЕАЛЫ

Отметим некоторые обозначения, используемые в этой главе: $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ — множества соответственно натуральных, целых, рациональных, действительных, комплексных чисел.

$A \times B$ — декартово произведение множеств A и B, т. е. множество всех упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$. $f: A \to B$ — отображение множества A в множество B. $F[x]$ — кольцо многочленов от переменной x с коэффициентами из F.

$F[x, y]$ — кольцо многочленов от двух переменных x и y с коэффициентами из F.

$n\mathbf{Z}$ — множество целых чисел, кратных n.

$\mathbf{Z}_n$ — кольцо классов вычетов по модулю n.

§ 1. КОЛЬЦА

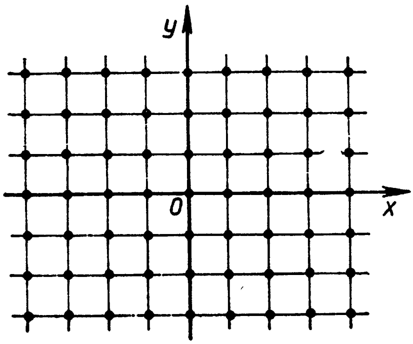
Пример 1. Кольцом или полем является множество комплексных чисел вида $a + bi$, где $a \in \mathbf{Z}$, $b \in \mathbf{Z}$ ($\mathbf{Z}[i]$)?

Решение. $(a + bi) \pm (a_1 + b_1 i) = (a \pm a_1) + (b \pm b_1) i$,
$(a + bi) \cdot (a_1 + b_1 i) = (aa_1 - bb_1) + (ab_1 + a_1 b) i$.

При целых рациональных a, b, a_1, b_1 правые части написанных формул, очевидно, являются целыми комплексными числами, чего нельзя сказать о частном:
$\frac{a+bi}{a_1+b_1 i} = \frac{(a+bi)(a_1-b_1 i)}{a_1^2+b_1^2} = \frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2} + \frac{a_1 b - ab_1}{a_1^2+b_1^2} i$, так как при целых рациональных a, b, a_1, b_1 выражения $\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}$, $\frac{a_1 b - ab_1}{a_1^2+b_1^2}$ (или хотя бы одно из них) могут оказаться и не целыми рациональными числами, т. е. результат деления не обязательно является целым комплексным числом.

Итак, совокупность целых комплексных чисел замкнута относительно трех арифметических действий: сложения, вычитания и умножения, причем сложение и умножение подчиняются законам коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности, так как эти законы верны для всех комплексных чисел. Следовательно, рассматриваемое множество является кольцом, но не полем. Его обозначают $\mathbf{Z}[i]$ и называют *кольцом целых гауссовых чисел*.

Геометрически целые гауссовы числа в координатной плоскости xOy — это точки с целыми рациональными координатами a и b. Они образуют так называемую точечную решетку (см. рис.).



Пример 2. Выясним, какие из множеств $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ являются кольцами, а какие — полями относительно операций $\oplus$ и $\odot$, определяемых равенствами $a \oplus b = a + b + 1$; $a \odot b = a + b + ab$.

Решение. Ясно, что $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ замкнуты относительно этих операций. Так как

$$a \oplus b = a + b + 1 = b + a + 1 = b \oplus a,$$
$$a \odot b = a + b + ab = b + a + ba = b \odot a,$$

то обе операции коммутативны.

Точно так же проверяются ассоциативность обеих операций и дистрибутивность второй операции $\odot$ относительно первой $\oplus$. Из равенств

$$a \oplus (-1) = a + (-1) + 1 = a, \quad a \odot 0 = a + 0 + a \cdot 0 = a$$

заключаем, что число (-1) является нейтральным элементом относительно операции $\oplus$, а число 0 — нейтральным относительно операции $\odot$.

Решением уравнения $a + x = -1$ (или $a + x + 1 = -1$) является число $x = -a - 2$.

Таким образом, противоположным для a является элемент $-(a + 2)$.

Решением уравнения $a \odot x = 0$ (или $a + x + ax = 0$) является $x = -\frac{a}{a+1}$. Это означает, что в каждом из множеств $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ любой элемент $a \neq -1$ обратим, т. е. $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ являются даже полями относительно рассматриваемых операций $\oplus$ и $\odot$.

Упражнения для самостоятельного решения

Выясните, какие из нижеприведенных множеств являются кольцами и какие — полями:

209. Целые числа ($\mathbf{Z}$).

210. Четные числа ($2\mathbf{Z}$).

211. Целые числа, кратные данному числу n ($n\mathbf{Z}$).

212. Числа вида $a + b\sqrt{2}$ с целыми a и b ($\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$).

213. Числа вида $a + b\sqrt{3}$ с рациональными a и b ($\mathbf{Q}[\sqrt{3}]$).

214. Матрицы порядка n с целыми элементами относительно сложения и умножения матриц M_n ($\mathbf{Z}$).

215. Многочлены от одного неизвестного x с целыми коэффициентами относительно обычных операций сложения и умножения многочленов ($\mathbf{Z}[x]$).

216. Пары (a, b) целых чисел с операциями, заданными равенствами:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$
$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2), \ (\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}).$$

Найдите делители нуля этого кольца.

217. Множество классов вычетов по модулю 5 ($\mathbf{Z}_5$).

218. Множество классов вычетов по модулю 6 ($\mathbf{Z}_6$).

§ 2. ПОДКОЛЬЦА. ИДЕАЛЫ

Пример 1. Будет ли множество J чисел $a + bi$ с четными a и b подкольцом или идеалом в кольце $\mathbf{Z}[i]$?

Решение.

1) $\forall a_1 + b_1i, \ a_2 + b_2i \in J_1 \ (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) =$ $= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i \in J$;

2) $\forall \ a + bi \in J, \forall c + di \in \mathbf{Z}[i], \ (a + bi)(c + di) = (ac - bd) +$ $+ (bc + ad) i \in J$.

Следовательно, J есть идеал в $\mathbf{Z}[i]$ (по определению идеала коммутативного кольца).

Пример 2. Будет ли пересечение подколец кольца K подкольцом или идеалом в этом кольце?

Решение. Пусть $K^* = K_1 \cap K_2$, где K_1 и K_2 — подкольца кольца K. Тогда:

1) $a \in K^*$, $b \in K^*$, следовательно,
$a_1b \in K_1, a_1b \in K_2; \ a - b \in K_1, \ a - b \in K_2; \ a - b \in K^*$;

2) $a_1b \in K^*$, следовательно,
$a_1b \in K_1, a_1b \in K_2; \ a \cdot b \in K_1, \ a \cdot b \in K_2; a \cdot b \ \in K^*$.

Итак, пересечение двух подколец является подкольцом кольца K. Точно так же доказывается, что пересечение любого числа подколец также является подкольцом.

Пример 3. Будет ли множество M_2 матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbf{Z}$, подкольцом или идеалом в кольце всех матриц 2-го порядка?

Решение. Пусть

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \in M_2,$$

тогда:

1) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ -(b-d) & a-c \end{pmatrix} \in M_2;$

2) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -ad-bc & ac-bd \end{pmatrix} \in M_2.$

Ответ. M_2 является подкольцом в кольце матриц второго порядка.

Пример 4. Будут ли необратимые элементы кольца $\mathbf{Z}_{16}$ подкольцом или идеалом в этом кольце?

Решение. $\mathbf{Z}_{16} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{15}\}$. $\overline{a}$ необратим $\Leftrightarrow (a, 16) \neq 1$. Обозначим множество всех необратимых элементов из $\mathbf{Z}_{16}$ через J:

$$J = \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}\}.$$

J — идеал, так как:

1) $\overline{a_1 - a_2} = \overline{a_1} - \overline{a_2} \in J;$

2) $\forall \overline{a} \in J,\ \forall \overline{x} \in \mathbf{Z}_{16},\ \overline{a} \cdot \overline{x} \in J.$

$J = (\overline{2})$ — главный идеал в кольце $\mathbf{Z}_{16}$.

Пример 5. Будут ли необратимые элементы кольца $\mathbf{Z}_{24}$ подкольцом или идеалом в этом кольце?

Решение. $\mathbf{Z}_{24} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{23}\}$. $\overline{a}$ необратим $\Leftrightarrow (a, 24) \neq 1$.

Пусть $J = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots, \overline{22}\}$. J не является идеалом кольца $\mathbf{Z}_{24}$, так как не выполнено первое условие определения идеала, например: $\overline{3} - \overline{2} \notin J$.

Упражнения для самостоятельного решения

Будут ли нижеприведенные множества подкольцами или идеалами ниже указанных колец?

219. Множество $n\mathbf{Z}$ чисел, кратных числу $n > 1$, в кольце $\mathbf{Z}[x]$.

220. Множество $\mathbf{Z}$ целых чисел в кольце $\mathbf{Z}[x]$ целочисленных многочленов.

221. Множество $n\mathbf{Z}[x]$ чисел, коэффициенты которых кратны числу $n > 1$, в кольце $\mathbf{Z}[x]$.

222. Множество $\mathbf{N}$ натуральных чисел в кольце целых чисел $\mathbf{Z}$.

223. Множество $\mathbf{Z}$ целых чисел в кольце $\mathbf{Z}[i]$.

224. Множество J чисел $a + bi$, где $a = b$ в кольце $\mathbf{Z}[i]$.

225. Множество J чисел вида $x(1+i)$ в $\mathbf{Z}[i]$, где x пробегает все кольцо $\mathbf{Z}[i]$.

226. Множество J многочленов, не содержащих членов с x^k для всех $k < n$, где $n > 1$ в кольце $\mathbf{Z}[x]$ целочисленных многочленов.

227. Множество J многочленов с четными свободными членами в кольце $\mathbf{Z}[x]$.

228. Множество J многочленов с четными старшими коэффициентами в кольце $\mathbf{Z}[x]$.

229. Множество $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ чисел вида $m + n\sqrt{3}$, где $m, n \in \mathbf{Z}$ в кольце действительных чисел $\mathbf{R}$.

230. Множество J чисел вида $m + n\sqrt{3}$, где m, n — четные в кольце $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$.

§ 3. ФАКТОР-КОЛЬЦА. ГОМОМОРФИЗМЫ КОЛЕЦ

Пример 1. Рассмотрим фактор-кольцо по идеалу (3) кольца $\mathbf{Z}[i]$.

Решение. $J = (3) = \{3(a+bi);\ \ a, b \in \mathbf{Z}\}$. Например, $6 + 12i \in J$, $6 + 5i \notin J$.

Числа, сравнимые по идеалу J, попадают в один класс. Перебирая все возможности, получаем:

$$\mathbf{Z}[i]/(3) = \{\overline{0} = J,\ \overline{1},\ \overline{2},\ \overline{i},\ \overline{2i},\ \overline{1+i},\ \overline{1+2i},\ \overline{2+i},\ \overline{2+2i}\}.$$

Например, $7 + 13i = (1+i) + (6+12i) \in \overline{1+i}$, так как $6 + 12i \in J$.

Пример 2. Докажем, что если K— кольцо главных идеалов и p — простой или неприводимый элемент в K, то $K/(p)$ является полем.

Решение. Пусть $\overline{a} \in K/(p)$, $\overline{a} \neq \overline{0} = (p)$, т. е. $\overline{a} = a + (p)$. По условию $a \notin (p)$, следовательно, $(a, p) = 1$, т. е. $ax + py = 1$, $x, y \in K$; $ax = 1 - py \in \overline{1}$; $\overline{a} \cdot \overline{x} = \overline{1}$, или $\overline{x} = \overline{a}^{-1}$, где $\overline{x} \in K/(p)$.

Итак, для каждого элемента из $K/(p)$, отличного от нуля, существует обратный, т. е. $K/(p)$ — поле.

Следствие. Кольцо вычетов по простому модулю $\mathbf{Z}_p$ является полем.

Пример 3. Докажем, что отображение $f : A \times B \to B$, $f(a, b) = b$ является гомоморфизмом. Построим фактор-кольцо по идеалу — ядру этого гомоморфизма.

Решение. $A \times B$ — декартово произведение колец, т. е. множество пар (a, b), для которых сложение и умножение определено покомпонентно:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2),$$
$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2,\ b_1b_2).$$

Покажем, что отображение f сохраняется при сложении и умножении:

$$f((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) = f(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = b_1 + b_2 =$$
$$= f(a_1, b_1) + f(a_2, b_2),$$
$$f((a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)) = f(a_1a_2, b_1b_2) = b_1b_2 = f(a_1, b_1) \cdot f(a_2, b_2).$$

Ядро J_0 содержит все пары с нулевой второй компонентой. Каждый элемент фактор-кольца $A \times B/J_0$— это класс пар (a, b_0) с одной и той же второй компонентой b_0. Естественный гомоморфизм φ: $A \times B \to A \times B/J_0$ каждой упорядоченной паре $(a_0, b_0) \in A \times B$ ставит в соответствие класс упорядоченных пар (a, b_0) с одной и той же второй компонентой b_0.

Изоморфизм σ: $A \times B/J_0 \cong B$ каждому классу таких пар сопоставляет b_0.

Аналогично можно рассмотреть $f : A \times B \to A$, $f(a, b) = a$.

П р и м е р 4. Рассмотрим фактор-кольцо по идеалу $J = (1+i)$ в кольце $\mathbf{Z}[i]$.

Р е ш е н и е. $(1 + i) = \{z(1 + i) \mid z \in \mathbf{Z}[i]\}$.

Пусть $z = c + di$, $(c + di)(1 + i) = (c - d) + (c + d)i \in J$.

$2 \in J$, так как $(1 - i)(1 + i) = 2$. Тогда все кратные 2 тоже входят в J.

О т в е т. $\mathbf{Z}[i]/(1 + i) = \{\overline{0} = (1 + i), \overline{1}\}$.

Например, $\overline{1} \in \overline{1}$, $i \in \overline{1}$ $(\overline{i} = \overline{i + 2} = \overline{(i + 1) + 1} = \overline{1})$,
$7 + 3i = (6 + 2i) + (1 + i) \in J = \overline{0}$.

П р и м е р 5. В кольце $\mathbf{Z}[i]$ построим идеал (i) и фактор-кольцо $\mathbf{Z}[i]/(i)$.

Р е ш е н и е.

$$\mathbf{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{Z}\}.$$

В этом кольце элемент i обратим, так как $i(-i)=1$. Обратимый элемент порождает единичный идеал, т. е.

$$(i) = \mathbf{Z}[i].$$

Тогда фактор-кольцо $Z[i]/(i) = \{\overline{0} = (i)\}$.

П р и м е р 6. Докажем, что если K — кольцо с единицей и J — идеал, то K/J тоже имеет единицу.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$K/J = \{\overline{0} = J, \overline{a} = a + J \mid \forall a \in K\}$. В K/J содержится класс $e + J = \overline{e}$, где e — единица кольца. По определению умножения классов $\overline{e}$ — единица в кольце K/J.

П р и м е р 7. Пусть (5) — идеал, порожденный целым числом 5 в кольце $\mathbf{Z}[x]$. Докажем, что $\mathbf{Z}[x]/(5) \cong \mathbf{Z}_5[x]$, где $\mathbf{Z}_5$ —кольцо классов вычетов по модулю 5.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$(5) = \{a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0 \mid a_n, \ldots, a_0 \in 5\mathbf{Z}\}.$$

Например, $5x - 10 \in (5)$, $x + 17 \notin (5)$.

$\mathbf{Z}_5[x] = \{\bar{b}_n x^n + \bar{b}_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \bar{b}_1 x + \bar{b}_0 \mid \bar{b}_n \bar{b}_{n-1}, \ldots, \bar{b}_0 \in \mathbf{Z}_5\}$,

$\mathbf{Z}[x]/(5) = \{\overline{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0} \mid b_n, \ldots, b_0 \in \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$.

Например,

$$10x^3 + 7x^2 + x + 12 \in \overline{2x^2 + x + 2}.$$

Применяя правила сложения и умножения классов вычетов по идеалу, получим:

$$\mathbf{Z}[x]/(5) \cong \mathbf{Z}_5[x]$$

при

$$\overline{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x_1 + b_0} \leftrightarrow \bar{b}_n x^n + \bar{b}_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \bar{b}_1 x + \bar{b}_0.$$

Например,

$$\overline{3x^2 + x + 2} \leftrightarrow \bar{3}x^2 + \bar{1}x + \bar{2}.$$

Упражнения для самостоятельного решения

231. Докажите, что $\mathbf{Z}[x]/(x) \cong \mathbf{Z}$.

232. Пусть (n) — идеал, порожденный целым числом $n > 1$ в кольце целочисленных многочленов $\mathbf{Z}[x]$. Докажите, что фактор-кольцо $\mathbf{Z}[x]/(n)$ изоморфно кольцу $\mathbf{Z}_n[x]$ многочленов над кольцом вычетов по модулю n: а) $n = 2$; б) $n = 3$; в) $n = 4$; г) $n=6$.

233. Пусть $J = (x, 2)$ — идеал, порожденный множеством из двух элементов x и 2 в кольце целочисленных многочленов $\mathbf{Z}[x]$. Докажите, что: а) идеал J состоит из всех многочленов с четными свободными членами; б) идеал J не является главным; в) фактор-кольцо $\mathbf{Z}[x]/J$ изоморфно полю вычетов по модулю 2.

234. Пусть J — множество всех чисел $a + bi$ с четными a и b. а) Покажите, что J — идеал в $\mathbf{Z}[i]$; б) найдите смежные классы $\mathbf{Z}[i]$ по J; в) в фактор-кольце $\mathbf{Z}[i]/J$ найдите делители нуля и покажите этим, что $\mathbf{Z}[i]/J$ не является полем.

235. Рассмотрите фактор-кольцо $\mathbf{Z}/(n)$. Является ли идеал (n) простым?

а) $n = 2$; б) $n = 3$; в) $n = 5$; г) $n = 6$.

Замечание. Идеал J кольца K называется *простым*, если K/J — область целостности, т. е. если оно не имеет делителей нуля.

236. Пусть E — множество действительных чисел вида $m + n\sqrt{3}$, $m, n \in \mathbf{Z}$.

а) Покажите, что подмножество J чисел $m + n\sqrt{3}$, где m, n — четные, есть идеал в E.

б) Рассмотрите фактор-кольцо E/J. Найдите в фактор-кольце E/J несобственный идеал.

237. Рассмотрите фактор-кольцо $\mathbf{Z}[i]/(1 + i)$.

238. Пусть $\mathbf{Z}$ — кольцо целых чисел, K — любое кольцо с единицей e. Докажите, что отображение $\varphi(z)$, для которого $\varphi(n) =$

$= ne$, есть гомоморфное отображение $\mathbf{Z}$ в K. Найдите образ $\varphi(z)$ при этом гомоморфизме.

239. Составьте таблицы сложения и умножения для элементов фактор-колец: а) $\mathbf{Z}[i]/(3)$; б) $\mathbf{Z}[i]/(2)$.

240. Сколько элементов содержит фактор-кольцо $\mathbf{Z}_2[x]/(x^2+x+1)$?

241. Докажите, что в $\mathbf{Z}$ имеют место утверждения:

а) $(10) \subset (5)$;

б) $(\forall J \subset \mathbf{Z})$ из $(10) \subset J \subset (5)$ следует: $J = (10)$ или $J = (5)$.

242. Составьте таблицу умножения для элементов фактор-кольца $\mathbf{Z}_2[x]/(x^2+x+1)$.

243. Покажите, что отображение $f : \mathbf{Z}[i] \to M_2$ или $f(x+iy) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ есть изоморфизм.

244. Решите систему уравнений в $\mathbf{Z}_3$ и $\mathbf{Z}_5$:

$$\begin{cases} x + 2z = 1, \\ y + 2z = 2, \\ 2x + z = 1. \end{cases}$$

245. Найдите НОД многочленов $f(x) = x^4 + 1$ и $g(x) = x^3 + x + 1$ над полем вычетов по модулю 3, т. е. над $\mathbf{Z}_3$.

246. Докажите, что поле $\mathbf{R}$ с обычными операциями сложения и умножения изоморфно полю матриц

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; a \in \mathbf{R} \right\}$$

с операциями матричного сложения и умножения.

Указание. Поставьте в соответствие каждому числу b матрицу $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

247. Докажите, что матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$, где a и b — рациональные числа, образуют поле, изоморфное полю, образованному действительными числами вида $a + b\sqrt{2}$, где a и b — рациональные числа.

248. С каким множеством матриц второго порядка изоморфно поле иррациональностей вида $a + b\sqrt{k}$ $(a, b \in \mathbf{Q};\ k \in \mathbf{N};\ k \neq n^2)$?

249. С каким множеством матриц второго порядка изоморфно поле иррациональностей вида $a + b\sqrt{-k}$ $(a, b \in \mathbf{Q};\ k \in \mathbf{N};\ k \neq n^2;\ n \in \mathbf{N})$?

250. Покажите, что $\mathbf{Z}[x]/(x^2+1) \cong \mathbf{Z}[i]$.

251. Покажите, что $\mathbf{Z}[x]/(x) \cong \mathbf{Z}$.

252. Пусть J — множество всех чисел $a + bi$ с четными a и b. а) Покажите, что J — идеал в $\mathbf{Z}[i]$; б) найдите смежные классы $\mathbf{Z}[i]$ по J; в) в фактор-кольце $\mathbf{Z}[i]/J$ найдите делители нуля и покажите, что $\mathbf{Z}[i]/J$ не является полем.

Глава III.

ТЕОРИЯ СРАВНЕНИЙ И ЕЕ АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. СРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Пример 1. Решим сравнение

$$5x \equiv 7 \pmod 8.$$

Решение. 1-й *способ*. Решим сравнение методом проб. Выпишем полную систему вычетов 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и подставим каждый вычет в данное сравнение:

$$5 \cdot 0 \not\equiv 7 \pmod 8,\ 5 \cdot 1 \not\equiv 7 \pmod 8,\ 5 \cdot 2 \not\equiv 7 \pmod 8,$$
$$5 \cdot 3 \equiv 7 \pmod 8 \Rightarrow x \equiv 3 \pmod 8 \text{ — решение.}$$

Дальше проверять не следует, так как поскольку $(5, 8) = 1$, то данное сравнение имеет единственное решение.

2-*й способ*. Прибавив к правой части 8, получим:

$$5x \equiv 7 + 8 \pmod 8,$$
$$5x \equiv 15 \pmod 8.$$

Так как $(5, 8) = 1$, то обе части сравнения можно поделить на 5. Получим:

$$x \equiv 3 \pmod 8.$$

3-*й способ*. Применим теорему Эйлера:

$$5^{\varphi(8)} \equiv 1 \pmod 8,\ \varphi(8) = 4,\ 5^4 \equiv 1 \pmod 8.$$

Умножим обе части сравнения на 5^3:

$$5 \cdot 5^3 \cdot x \equiv 7 \cdot 5^3 \pmod 8,$$
$$5^4 x \equiv 7 \cdot 5^3 \pmod 8,$$
$$x \equiv 7 \cdot 5^3 \pmod 8,$$

или

$$x \equiv (-1)(-3)^3 \pmod 8,$$

или

$$x \equiv 3 \pmod 8.$$

Пример 2. Решим сравнение $78x \equiv 30 \pmod{198}$ с помощью цепных дробей (4-й способ).

Решение. Так как $(78, 198) = 6$, $30 \,\vdots\, 6$, то сравнение имеет 6 решений.

Поделив обе части сравнения и модуль на 6, получим сравнение

$$13x \equiv 5 \pmod{33},\ \frac{33}{13} = [2;\ 1,\ 1,6],\ n = 3.$$

N	0	1	2	3
a_i	2	1	1	6
p_i	2	3	5	33

$$x \equiv (-1)^n p_{n-1} b \pmod{n}.$$

$$x_0 \equiv (-1)^3 \cdot 5 \cdot 5 \pmod{33}, \text{ или}$$
$$x \equiv 8 \pmod{33}.$$

Это решение сравнения по новому, вспомогательному модулю 33.

Все 6 решений по заданному модулю можно теперь записать так: 8; 41; 74; 107; 140; 173 (mod 198).

Упражнения для самостоятельного решения

Решите нижеприведенные сравнения:

253. $15x \equiv 21 \pmod{18}$.
254. $12x \equiv 16 \pmod{28}$.
255. $18x \equiv 12 \pmod{30}$.
256. $5x \equiv 15 \pmod{25}$.
257. $75x \equiv 54 \pmod{21}$.
258. $37x \equiv 16 \pmod{11}$.
259. $39x \equiv 5 \pmod{11}$.
260. $20x \equiv 35 \pmod{45}$.
261. $183x \equiv 93 \pmod{111}$.
262. $42x \equiv 105 \pmod{245}$.
263. $11x \equiv 15 \pmod{24}$.
264. $39x \equiv 19 \pmod{53}$.
265. $45x \equiv 21 \pmod{132}$.
266. $12x \equiv 15 \pmod{35}$.
267. $21x \equiv 10 \pmod{25}$.
268. $15x \equiv 7 \pmod{16}$.
269. $8x \equiv 17 \pmod{23}$.
270. $64x \equiv 5 \pmod{13}$.
271. $98x \equiv 70 \pmod{42}$.
272. $15x \equiv 21 \pmod{6}$.
273. $27x \equiv 11 \pmod{106}$.
274. $64x \equiv 5 \pmod{13}$.
275. $139x \equiv 7 \pmod{8}$.
276. $14x \equiv 9 \pmod{37}$.
277. $1215x \equiv 560 \pmod{2755}$.
278. $2x \equiv 13 \pmod{15}$.
279. $19x \equiv 4 \pmod{25}$.
280. $29x \equiv 35 \pmod{123}$.
281. $27x \equiv 16 \pmod{58}$.
282. $97x \equiv 53 \pmod{169}$.
283. $111x \equiv 49 \pmod{179}$.
284. $73x \equiv 39 \pmod{28}$.

Решите нижеприведенные сравнения с помощью цепных дробей

285. $95x \equiv 59 \pmod{308}$.
286. $91x \equiv 1 \pmod{132}$.
287. $37x \equiv 25 \pmod{107}$.
288. $185x \equiv 125 \pmod{535}$.
289. $7x \equiv 4 \pmod{19}$.
290. $23x \equiv 667 \pmod{693}$.
291. $13x \equiv 1 \pmod{27}$.
292. $143x \equiv 41 \pmod{221}$.
293. $37x \equiv 5 \pmod{217}$.
294. $91x \equiv 143 \pmod{222}$.
295. $113x \equiv 89 \pmod{311}$.
296. $271x \equiv 25 \pmod{119}$.
297. $221x \equiv 111 \pmod{360}$.
298. $13x \equiv 178 \pmod{153}$.
299. $14x \equiv 50 \pmod{62}$.
300. $82x \equiv 14 \pmod{202}$.
301. $41x \equiv 7 \pmod{101}$.
302. $23x \equiv 5 \pmod{71}$.
303. $92x \equiv 20 \pmod{284}$.
304. $243x \equiv 271 \pmod{317}$.

§ 2. СИСТЕМЫ СРАВНЕНИЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Пример 1. Решим систему сравнений:

$$\begin{cases} 2x \equiv 31 \pmod{35}, \\ 4x \equiv 7 \pmod{25}, \\ 5x \equiv 18 \pmod{21}. \end{cases}$$

Решение. Решая каждое сравнение в отдельности, получим следующую систему:

$$\begin{cases} x \equiv -2 \pmod{35}, \\ x \equiv 8 \pmod{25}, \\ x \equiv 12 \pmod{21}. \end{cases}$$

Первому сравнению удовлетворяют $x = -2 + 35t$, t — любое целое. Найдем, при каких значениях t верно второе сравнение

$$-2 + 35t \equiv 8 \pmod{25} \Rightarrow 35t \equiv 10 \pmod{25} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow t = 1 + 5n,$$

n — любое целое число.

Получили, что решениями системы первых двух сравнений являются:

$$x = -2 + 35(1 + 5n) = 33 + 175n.$$

Найдем, при каких значениях n эти значения x удовлетворяют и третьему сравнению:

$$33 + 175n \equiv 12 \pmod{21},\ 175n \equiv -21 \pmod{21},$$
$$7n \equiv 0 \pmod{21} \Rightarrow n \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow n = 3k,$$

где k — любое целое число.

Итак,

$$x = 33 + 175n = 33 + 175(3k) = 33 + 525k,$$

или

$$x = 33 \pmod{525}.$$

Эти значения x являются решением системы.

Упражнения для самостоятельного решения

Решите системы нижеприведенных сравнений:

305. $\begin{cases} x \equiv 12 \pmod{17}, \\ x \equiv 10 \pmod{11}. \end{cases}$

306. $\begin{cases} x \equiv 20 \pmod{23}, \\ x \equiv 21 \pmod{25}. \end{cases}$

307. $\begin{cases} x \equiv 15 \pmod{17}, \\ x \equiv 7 \pmod{20}. \end{cases}$

308. $\begin{cases} x \equiv 9 \pmod{16}, \\ x \equiv 7 \pmod{25}. \end{cases}$

309. $\begin{cases} x \equiv 15 \pmod{23}, \\ x \equiv 12 \pmod{29}. \end{cases}$

310. $\begin{cases} 3x \equiv 5 \pmod{4}, \\ 5x \equiv 2 \pmod{7}. \end{cases}$

311. $\begin{cases} 3x \equiv 2 \pmod{13}, \\ 5x \equiv 11 \pmod{16}, \\ 5x \equiv 2 \pmod{9}. \end{cases}$

312. $\begin{cases} 3x \equiv 5 \pmod{13}, \\ 2x \equiv 17 \pmod{21}, \\ 5x \equiv 31 \pmod{32}. \end{cases}$

313. $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{4}, \\ x \equiv 3 \pmod{5}, \\ x \equiv 2 \pmod{7}. \end{cases}$

314. $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3}, \\ x \equiv 2 \pmod{7}, \\ x \equiv -2 \pmod{11}. \end{cases}$

315. $\begin{cases} 3x \equiv 5 \pmod{14}, \\ 5x \equiv 1 \pmod{9}, \\ 7x \equiv 2 \pmod{25}. \end{cases}$

316. $\begin{cases} 7x \equiv 4 \pmod{15}, \\ 3x \equiv 23 \pmod{28}, \\ 5x \equiv 8 \pmod{11}. \end{cases}$

317. $\begin{cases} 2x \equiv 5 \pmod{21}, \\ 5x \equiv 22 \pmod{31}, \\ 4x \equiv 5 \pmod{29}. \end{cases}$

318. $\begin{cases} 3x \equiv 5 \pmod{12}, \\ 7x \equiv 3 \pmod{25}, \\ 3x \equiv 2 \pmod{17}. \end{cases}$

319. $\begin{cases} x \equiv 8 \pmod{15}, \\ x \equiv 9 \pmod{13}, \\ x \equiv 5 \pmod{14}. \end{cases}$

320. $\begin{cases} x \equiv 10 \pmod{11}, \\ x \equiv 9 \pmod{16}, \\ x \equiv 5 \pmod{7}. \end{cases}$

321. $\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{3}, \\ x \equiv 7 \pmod{10}, \\ x \equiv 2 \pmod{7}. \end{cases}$

322. $\begin{cases} x \equiv 14 \pmod{19}, \\ x \equiv 5 \pmod{7}, \\ x \equiv 9 \pmod{10}. \end{cases}$

323. $\begin{cases} x \equiv 8 \pmod{13}, \\ x \equiv 9 \pmod{17}, \\ x \equiv 5 \pmod{11}. \end{cases}$

324. $\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{9}, \\ x \equiv 3 \pmod{5}, \\ x \equiv 1 \pmod{7}. \end{cases}$

325. $\begin{cases} x \equiv 12 \pmod{13}, \\ x \equiv 10 \pmod{11}, \\ x \equiv 5 \pmod{12}. \end{cases}$

326. $\begin{cases} 5x \equiv 2 \pmod{12}, \\ 7x \equiv 2 \pmod{8}, \\ 3x \equiv 1 \pmod{5}. \end{cases}$

327. $\begin{cases} 3x \equiv 8 \pmod{20}, \\ 5x \equiv 8 \pmod{9}, \\ 4x \equiv 1 \pmod{21}. \end{cases}$

328. $\begin{cases} 2x \equiv 9 \pmod{15}, \\ 5x \equiv 4 \pmod{7}, \\ 7x \equiv 3 \pmod{9}. \end{cases}$

329. $\begin{cases} 8x \equiv 1 \pmod{13}, \\ 5x \equiv 7 \pmod{18}, \\ 2x \equiv 1 \pmod{9}. \end{cases}$

330. $\begin{cases} 3x \equiv 1 \pmod{25}, \\ 6x \equiv 3 \pmod{33}, \\ 4x \equiv 5 \pmod{9}. \end{cases}$

§ 3. Решение двучленных сравнений с помощью индексов

Пример 1. Решим сравнение $23^x \equiv 37 \pmod{41}$ с помощью индексов.

Решение. $x \operatorname{ind} 23 \equiv \operatorname{ind} 37 \pmod{40}$, $4x \equiv 8 \pmod{40}$, $(4,40) = 4$; $8 \,\vdots\, 4 \Rightarrow 4$ решения. $x \equiv 2 \pmod{10}$.

Ответ. $x_1 \equiv 2 \pmod{40}$, $x_2 \equiv 12 \pmod{40}$, $x_3 \equiv 22 \pmod{40}$, $x_4 \equiv 32 \pmod{40}$.

Пример 2. Решим сравнение $7x^4 \equiv 10 \pmod{17}$ с помощью индексов.

Решение. $\operatorname{ind} 7 + 4 \operatorname{ind} x \equiv \operatorname{ind} 10 \pmod{16}$, $11 + 4 \operatorname{ind} x \equiv$ $\equiv 3 \pmod{16}$, $4 \operatorname{ind} x \equiv -8 \pmod{16}$, $(4, 16) = 4$, $-8 \,\vdots\, 4 \Rightarrow 4$ решения; $\operatorname{ind} x \equiv -2 \pmod 4$, $\operatorname{ind} x_1 \equiv -2$, $\operatorname{ind} x_2 \equiv 2$, $\operatorname{ind} x_3 \equiv 6$, $\operatorname{ind} x_4 \equiv 9 \pmod{16}$.

Ответ. $x_1 \equiv 2 \pmod{17}$, $x_2 \equiv 9 \pmod{17}$, $x_3 \equiv 15 \pmod{17}$, $x_4 \equiv 8 \pmod{17}$.

Упражнения для самостоятельного решения

Решите нижеприведенные сравнения с помощью индексов:

331. $25x^7 \equiv -7 \pmod{31}$.
332. $17x^5 + 3 \equiv 0 \pmod{37}$.
333. $8x^9 \equiv -17 \pmod{41}$.
334. $5x^{11} + 19 \equiv 0 \pmod{29}$.
335. $7x^{13} + 23 \equiv 0 \pmod{47}$.
336. $15x^9 + 29 \equiv 0 \pmod{47}$.
337. $9x^{11} + 1 \equiv 0 \pmod{43}$.
338. $6x^7 + 19 \equiv 0 \pmod{23}$.
339. $19x^5 + 13 \equiv 0 \pmod{53}$.
340. $13x^8 + 36 \equiv 0 \pmod{61}$.
341. $32^x \equiv 15 \pmod{37}$.
342. $23^x \equiv 37 \pmod{41}$.
343. $25^{5x} \equiv 47 \pmod{61}$.
344. $7 \cdot 5^x \equiv -1 \pmod{73}$.
345. $8 \cdot 7^x + 4 \equiv 0 \pmod{83}$.
346. $11 \cdot 5^{3x} \equiv -70 \pmod{79}$.
347. $13 \cdot 7^{5x} + 1 \equiv 0 \pmod{67}$.
348. $17 \cdot 13^{3x} + 27 \equiv 0 \pmod{29}$.
349. $22 \cdot 12^{13x} + 6 \equiv 0 \pmod{31}$.
350. $x^2 \equiv 15 \pmod{17}$.
351. $x^2 \equiv 54 \pmod{71}$.
352. $x^2 \equiv 40 \pmod{83}$.
353. $x^2 \equiv 37 \pmod{41}$.
354. $x^2 \equiv 47 \pmod{53}$.
355. $x^2 \equiv 58 \pmod{61}$.
356. $19^{7x} \equiv 15 \pmod{59}$.
357. $12^{7x} \equiv 15 \pmod{31}$.
358. $13^x \equiv 25 \pmod{43}$.
359. $x^{15} \equiv 38 \pmod{59}$.
360. $x^{17} \equiv 31 \pmod{67}$.
361. $x^{11} + 36 \equiv 0 \pmod{71}$.
362. $x^7 + 27 \equiv 0 \pmod{53}$.
363. $x^{12} + 8 \equiv 0 \pmod{73}$.
364. $x^5 + 13 \equiv 0 \pmod{61}$.
365. $3x^8 \equiv 5 \pmod{13}$.
366. $40x^{10} \equiv 3 \pmod{17}$.

§ 4. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ СРАВНЕНИЙ

Пример 1. Найдем остаток от деления 14^{245} на 90.

Решение. Задача сводится к решению сравнения $14^{245} \equiv x \pmod{90}$, $0 \leqslant x < 90$.

$$(14, 90) = 2 \Rightarrow x \,\vdots\, 2 \Rightarrow x = 2x_1$$
$$14 \cdot 14^{244} \equiv 2x_1 \pmod{90},\ 7 \cdot 14^{244} \equiv x_1 \pmod{45},$$
$$x_1 \equiv 7 \cdot x_2 \pmod{45},\ 14^{244} \equiv x_2 \pmod{45},$$

$(14, 45) = 1$, по теореме Эйлера $14^{\varphi(45)} \equiv 1 \pmod{45}$, т. е. $14^{24} \equiv$
$$\equiv 1 \pmod{45},$$

так как $\varphi(45) = 24$. Возведем последнее сравнение в десятую степень. Тогда $14^{240} \equiv 1 \pmod{45}$,

$$14^2 \equiv 16 \pmod{45},\ 14^4 \equiv 31 \pmod{45},$$
$$14^{244} \equiv 31 \pmod{45} \Rightarrow x_2 \equiv 31 \pmod{45},$$
$$x_1 \equiv 7 \cdot 31 \pmod{45},\ x_1 \equiv 217 \pmod{45} \Rightarrow x_1 \equiv 37 \pmod{45},$$
$$x \equiv 2 \cdot x_1 \pmod{90} \Rightarrow x \equiv 2 \cdot 37 \pmod{90} \Rightarrow x \equiv 74 \pmod{90}.$$

О т в е т. 74.

П р и м е р 2. Определим длину периода десятичной дроби, в которую обращаются обыкновенные несократимые дроби со знаменателем $n = 35$.

Р е ш е н и е. Каноническое разложение числа 35 имеет следующий вид: $35 = 5 \cdot 7$. Следовательно, число цифр в периоде будет равно показателю, которому принадлежит число 10 по модулю 7:

$$10^1 \equiv 3 \pmod 7, 10^2 \equiv 2 \pmod 7, 10^3 \equiv -1 \pmod 7, 10^6 \equiv 1 \pmod 7.$$

Показатель равен 6. Это значит, что длина периода десятичной дроби равна 6.

П р и м е р 3. При помощи свойств сравнений выведем признак делимости на $m = 22$.

Р е ш е н и е. $22 = 2 \cdot 11$. Число N тогда и только тогда делится на 22, когда оно делится на 2 и на 11. На 2 делятся все четные числа.

Выведем признак делимости на 11.

Данное число N представим в виде $N = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + + \ldots + a_0$, где $0 \leqslant a_i \leqslant 9$. Справедливо сравнение $10 \equiv -1 \pmod{11}$. Приходим к сравнению $N = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + + (-1)^n a_n \pmod{11}$. Полученное сравнение и выражает признак делимости на 11: *число N делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммой цифр числа N, стоящих на нечетных местах, и суммой цифр того же числа, стоящих на четных местах, делится на 11.*

О т в е т. Четное число делится на 22 тогда и только тогда, когда разность между суммой цифр числа N, стоящих на нечетных местах, и суммой цифр того же числа, стоящих на четных местах, делится на 11.

П р и м е р 4. Проверим результаты действий с помощью чисел 9 и 11: $24\,667 + 18\,265 = 42\,932$.

Р е ш е н и е. Суммы цифр слагаемых соответственно равны 25 и 22; сумма цифр суммы равна 20. Легко заметить, что $25 + 22 \equiv \equiv 20 \pmod 9$. Можно полагать, что сложение выполнено правильно. Проверка с помощью сравнения по модулю 9 может не установить разве что только ошибку, кратную 9.

Теперь осуществим проверку с помощью числа 11.

Суммы цифр, взятых попеременно со знаками $+, -, +, -, \ldots$ справа налево, соответственно равны у слагаемых $-7-6+ +6-4+2 = 5$, $5-6+2-8+1 = -6$; у суммы $-2 - -3+9-2+4 = 10$. Получаем верное сравнение $5-6 \equiv \equiv 10 \pmod{11}$.

Проверка с помощью сравнения по модулю 11 может не установить разве что только ошибку, кратную 11.

Проверка одновременно по двум модулям 9 и 11 может не установить только ошибку, кратную 99.

Упражнения для самостоятельного решения

Найдите остаток от деления:

367. 66^{17} на 7.
368. $2^{100}+3^{100}$ на 5.
369. 11^{802} на 1000.
370. 17^{2001} на 1000.
371. 19^{2402} на 100.
372. 178^{52} на 11.
373. 1967^{1968} на 11.
374. 383^{175} на 45.
375. 109^{345} на 14.
376. 439^{291} на 60.
377. 293^{275} на 48.
378. 66^{17} на 7.
379. 117^{53} на 11.
380. $5^{70}+7^{50}$ на 12.
381. $5^{80}+7^{100}$ на 13.
382. $5^{50}+13^{100}$ на 18.
383. 11^{1841} на 7.
384. 12^{2751} на 5.
385. 22^{2342} на 14.
386. 12^{2751} на 10.
387. 34^{3741} на 26.
388. 178^{2741} на 22.

Определите длину периода десятичной дроби, в которую обращаются обыкновенные несократимые дроби со следующими знаменателями:

389. а) $n=28$; б) $n=7$; в) $n=17$;
г) $n=13$; д) $n=11$; е) $n=23$;
ж) $n=29$; з) $n=43$; и) $n=37$; к) $n=110$.

390. а) $n=208$; б) $n=620$; в) $n=85$;
г) $n=860$; д) $n=210$; е) $n=76$;
ж) $n=260$; з) $n=52$; и) $n=46$; к) $n=116$.

391. а) $n=140$; б) $n=74$; в) $n=34$;
г) $n=150$; д) $n=220$; е) $n=550$.

При помощи свойств сравнений выведите признаки делимости на следующие числа:

392. а) $m=11$; б) $m=3$; в) $m=9$;
г) $m=4$; д) $m=6$; е) $m=8$;
ж) $m=12$; з) $m=15$; и) $m=18$; к) $m=45$.

393. а) $m=22$; б) $m=55$; в) $m=36$;
г) $m=75$; д) $m=7$; е) $m=35$;
ж) $m=14$; з) $m=13$; и) $m=26$; к) $m=65$.

Проверьте результаты действий с помощью чисел 9 и 11:

394. $2\,454\,017+896\,512=3\,350\,529$.
395. $8\,740\,297-561\,245=8\,179\,052$.
396. $25\,045\cdot 1487=37\,240\,915$.
397. $13\,547-9862=3685$.
398. $8264\cdot 5201=42\,981\,064$.
399. $25\,041+91\,382=116\,423$.
400. $3745\cdot 8067=30\,210\,915$.
401. $24\,667+18\,265=42\,932$.
402. $141\,811+17\,128=158\,932$.
403. $37\,918-13\,207=24\,711$.
404. $42\,932-18\,265=24\,667$.
405. $4371\cdot 1243=5\,433\,153$.
406. $1042\cdot 1011=1\,053\,462$.
407. $421\,767:3429=123$.
408. $4237\cdot 27\,925=118\,275\,855$.
409. $42\,981:8264=5201$.
410. $1965^2=3\,761\,225$.
411. $\sqrt[5]{371293}=23$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Примерные варианты контрольных работ

Параграф	Варианты										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Гл. I, § 1	34	33	32	35	36	37	38	39	40	41	42
Гл. I, § 2	65	67	69	64	66	68	59	61	63	55	57
Гл. I, § 3	165	189	191	178	180	182	184	186	188	190	192
Гл. II, § 3	235 (б)	235 (а)	235 (в)	235 (г)	239 (а)	239 (б)	232 (г)	232 (в)	232 (б)	232 (а)	252
Гл. III, § 1	299	286	288	290	292	294	296	298	300	302	304
Гл. III, § 2	316	325	327	329	318	320	322	324	326	328	330
Гл. III, § 3	365, 366	364	362	360	358	356	354	352	350	348	346
Гл. III, § 4	368	370	372	374	376	378	380	382	384	386	388

Приложение 2

Таблица простых чисел, меньших 1000

2	47	109	191	269	353	439	523	617	709	811	907
3	53	113	193	271	359	443	541	619	719	821	911
5	59	127	197	277	367	449	547	631	727	823	919
7	61	131	199	281	373	457	557	641	733	827	929
11	67	137	211	283	379	461	563	643	739	829	937
13	71	139	223	293	383	463	569	647	743	839	941
17	73	149	227	307	389	467	571	653	751	853	947
19	79	151	229	311	397	479	577	659	757	857	953
23	83	157	233	313	401	487	587	661	761	859	967
29	89	163	239	317	409	491	593	673	769	863	971
31	97	167	241	331	419	499	599	677	773	877	977
37	101	173	251	337	421	503	601	683	787	881	983
41	103	179	257	347	431	509	607	691	797	883	991
43	107	181	263	349	433	521	613	701	809	887	997

Решение варианта 0

34. Найдите НОД следующих чисел: 19 074, 13 566, 8211.

Решение. (19 074, 13 566, 8211) = (19 074, (13 566, 8211)). Сначала по алгоритму Евклида находим НОД двух чисел (13 566 и 8211):

$$\begin{array}{r|l} -\,13566 & 8211 \\ \underline{8211} & 1 \\ 5355 & \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} -\,8211 & 5355 \\ \underline{5355} & 1 \\ 2856 & \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} -\,5355 & 2856 \\ \underline{2856} & 1 \\ 2499 & \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} -\,2856 & 2499 \\ \underline{2499} & 1 \\ 357 & \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} -\,2499 & 357 \\ \underline{2499} & 7 \\ 0 & \end{array}$$

Следовательно, (13 566, 8211) = 357.

Теперь находим (19 074, 357):

$$\begin{array}{r|l} -\,19074 & 357 \\ \underline{1785} & 53 \\ -\,1224 & \\ \underline{1071} & \\ 153 & \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} -\,357 & 153 \\ \underline{306} & 2 \\ 51 & \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} -\,153 & 51 \\ \underline{153} & 3 \\ 0 & \end{array}$$

Таким образом, (19 074, 357) = 51.

Ответ. (19 074, 13 566, 8211) = 51.

65. Запишите числа $a = 7356_8$ и 23_4 в системе счисления с основанием 5 и в этой системе счисления разделите с остатком большее число на меньшее.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} -\,7356_8 & 5 \\ \underline{5} & 1374 \\ -\,23 & \\ \underline{17} & \\ -\,45 & \\ \underline{43} & \\ -\,26 & \\ \underline{24} & \\ 2 & \end{array}\quad \begin{array}{r|l} -\,1374 & 5 \\ \underline{12} & 230 \\ -\,17 & \\ \underline{17} & \\ 4 & \end{array}\quad \begin{array}{r|l} -\,230 & 5 \\ \underline{17} & 36 \\ -\,40 & \\ \underline{36} & \\ 2 & \end{array}\quad \begin{array}{r|l} -\,36 & 5 \\ \underline{36} & 6 \\ 0 & \end{array}\quad \begin{array}{r|l} -\,6 & 5 \\ \underline{5} & 1 \\ 1 & \end{array}\quad \begin{array}{r|l} 1 & 5 \\ & \end{array} \Rightarrow 7356_8 = 110\,242_5.$$

$$\begin{array}{r|l} -\,23_4 & 11 \\ \underline{22} & 2 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 23_4 = 21_5$$

Теперь разделим большее число на меньшее:

$$\begin{array}{r|l}
-110242_5 & 21_5 \\
\underline{42} & \overline{2342_5} \\
-132 & \\
\underline{113} & \\
-144 & \\
\underline{134} & \\
-102 & \\
\underline{42} & \\
10_5 &
\end{array}$$

Ответ. $7356_8 = 110\,242_5$, $23_4 = 21_5$, неполное частное от деления числа $110\,242_5$ на 21_5 равно 2342_5, остаток равен 10_5.

165. Решите в целых числах уравнение $275x + 145y = 10$.

Решение. $(275, 145) = 5$, $10 \vdots 5 \Rightarrow$ решение есть. Поделив все коэффициенты на 5, получим уравнение

$$55x + 29y = 2,$$

равносильное заданному.

$$\frac{55}{29} = [1;\ 1,\ 8,\ 1,\ 2].$$

N	0	1	2	3	4
a_i	1	1	8	1	2
P_i	1	2	17	19	55
Q_i	1	1	9	10	29

$$x_0 = (-1)^5 \cdot 10 \cdot 2 = -20,$$
$$y_0 = (-1)^4 \cdot 19 \cdot 2 = 38,$$
$$x = -20 + 29t,$$
$$y = 38 - 55t,$$

где t — любое целое число.

Ответ. $\begin{array}{l} x = -20 + 29t, \\ y = 38 - 55t \end{array}$ или $\begin{array}{l} x = 9 + 29t, \\ y = -17 - 55t, \end{array}$

где t — любое целое число.

235 (б). Рассмотрите фактор-кольцо $\mathbf{Z}/(3)$. Является ли идеал (3) простым?

Решение. Идеал J в кольце $\mathbf{Z}$ является простым, если $\mathbf{Z}/J$ — область целостности:

$$\mathbf{Z}/(3) = \{J,\ J + 1,\ J + 2\},$$

или

$$\mathbf{Z}/(3) = \{\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2}\}.$$

Докажем, что в $\mathbf{Z}/(3)$ нет делителей нуля:

$$\overline{1} \cdot \overline{1} = \overline{1} \neq \overline{0},\ \overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{1} \neq \overline{0},\ \overline{1} \cdot \overline{2} = \overline{2} \neq \overline{0}.$$

Ответ. $\mathbf{Z}/(3) = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$, $J = (3)$ — простой идеал.

299. Решите сравнение $14x \equiv 50 \pmod{62}$.

Решение. $(14, 62) = 2$; $50 \vdots 2 \Rightarrow$ сравнение имеет два решения.

Сокращаем обе части сравнения и модуль на 2, получаем вспомогательное сравнение $7x \equiv 25 \pmod{31}$,

$$\frac{31}{7} = [4; 2, 3], \quad x \equiv 25 \cdot 9 \equiv 8 \pmod{31}.$$

Ответ. $x_1 \equiv 8 \pmod{62}$,
$x_2 \equiv 39 \pmod{62}$.

316. Решите систему сравнений:

$$\begin{cases} 7x \equiv 4 \pmod{15}, \\ 3x \equiv 23 \pmod{28}, \\ 5x \equiv 8 \pmod{11}. \end{cases}$$

Решение. Решив каждое сравнение в отдельности, получим следующую систему:

$$\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{15}, \\ x \equiv 17 \pmod{28}, \\ x \equiv 6 \pmod{11}. \end{cases}$$

$x = 7 + 15y$, $7 + 15y \equiv 17 \pmod{28}$, $15y \equiv 10 \pmod{28}$, $3y \equiv 2 \pmod{28}$, $3y \equiv 30 \pmod{28}$, $y \equiv 10 \pmod{28}$ или $y = 10 + 28t$. Тогда $x = 7 + 15(10 + 28t)$, $x = 157 + 15 \cdot 28t$. $157 + 15 \cdot 28t \equiv 6 \pmod{11}$, $15 \cdot 28 \cdot t \equiv -151 \pmod{11}$, $4 \cdot 6 \cdot t \equiv -8 \pmod{11}$, $24t \equiv 3 \pmod{11}$, $2t \equiv 3 \pmod{11}$, $t \equiv 7 \pmod{11}$ или $t = 7 + 11u$. Тогда $x = 157 + 15 \cdot 28(7 + 11u)$, $x = 3097 + 4620u$.

Ответ. $x \equiv 3097 \pmod{4620}$.

365. Решите сравнение $3x^8 \equiv 5 \pmod{13}$ с помощью индексов.

Решение.
$$3x^8 \equiv 5 \pmod{13},$$
$$\operatorname{ind} 3 + 8 \operatorname{ind} x \equiv \operatorname{ind} 5 \pmod{12},$$
$$4 + 8 \operatorname{ind} x \equiv 3 \pmod{12},$$
$$8 \operatorname{ind} x \equiv -1 \pmod{12}.$$

$(8, 12) = 4$, -1 не делится на 4, следовательно, сравнение решения не имеет.

366. Решите сравнение $40x^{10} \equiv 3 \pmod{17}$.

Решение.
$40x^{10} \equiv 3 \pmod{17}$, $6x^{10} \equiv 3 \pmod{17}$, $(3, 17) = 1$. $2x^{10} \equiv 1 \pmod{17}$. $\operatorname{ind} 2 + 10 \operatorname{ind} x \equiv \operatorname{ind} 1 \pmod{16}$, $10 \operatorname{ind} x \equiv \operatorname{ind} 1 - \operatorname{ind} 2 \pmod{16}$, $10 \operatorname{ind} x \equiv 0 - 14 \pmod{16}$, $10 \operatorname{ind} x \equiv 2 \pmod{16}$. $(10, 16) = 2$, $2 \vdots 2 \Rightarrow$ сравнение имеет два решения.

$$5 \operatorname{ind} x \equiv 1 \pmod{8},$$
$$5 \operatorname{ind} x \equiv 1 + 24 \pmod{8},$$
$$\operatorname{ind} x \equiv 5 \pmod{8}.$$

$$\begin{matrix} \operatorname{ind} x_1 \equiv 5 \pmod{16}, \\ \operatorname{ind} x_2 \equiv 13 \pmod{16}, \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 \equiv 5 \pmod{17}. \\ x_2 \equiv 12 \pmod{17}. \end{matrix}$$

Ответ. $x_1 \equiv 5 \pmod{17}$,
$x_2 \equiv 12 \pmod{17}$.

368. Найдите остаток от деления $2^{100} + 3^{100}$ на 5.

Решение. Задача сводится к решению сравнения

$$2^{100} + 3^{100} \equiv x \pmod{5}, \quad \text{где } 0 \leqslant x \leqslant 5.$$

Так как $(2,5) = 1$, $(3,5) = 1$, то по теореме Ферма

$$2^4 \equiv 1 \pmod{5}, \quad 3^4 \equiv 1 \pmod{5}.$$
$$2^{100} = (2^4)^{25} \equiv 1 \pmod{5},$$
$$3^{100} = (3^4)^{25} \equiv 1 \pmod{5}.$$

Сложим эти два сравнения:

$$2^{100} + 3^{100} \equiv 2 \pmod{5}.$$

Ответ. Остаток от деления $2^{100} + 3^{100}$ на 5 равен 2.

Таблицы индексов по простым модулям, меньшим 100

Числа	Модули																								Числа
	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	1	3	4	3	7	14	7	12	17	24	11	14	27	18	49	15	31	17	6	8	4	79	16	34	2
3		1	5	4	4	1	1	8	1	1	34	25	1	20	1	54	6	3	26	6	1	30	1	70	3
4		2	2	6	2	12	14	2	6	18	22	28	12	36	46	30	2	34	12	16	8	76	32	68	4
5			1	2	3	5	4	17	10	20	1	18	25	1	15	32	22	57	28	1	62	1	70	1	5
6			3	7	11	15	8	20	18	25	9	39	28	38	50	11	37	20	32	14	5	27	17	8	6
7				1	5	11	6	15	8	28	28	1	35	32	10	38	19	61	1	33	53	58	81	31	7
8				9	9	10	3	14	23	12	33	2	39	8	43	45	33	51	18	24	12	73	48	6	8
9				8	8	2	2	16	2	2	32	10	2	40	2	50	12	6	52	12	2	60	2	44	9
10				5	10	3	11	7	27	14	12	32	10	19	12	47	53	8	34	9	66	80	86	35	10
11					1	7	12	21	5	23	6	37	30	7	34	27	45	13	31	55	68	10	84	6	11
12					6	13	15	10	7	19	20	13	13	10	47	26	8	37	38	22	9	24	33	42	12
13						4	17	18	26	11	13	9	32	11	32	37	40	59	39	59	34	15	23	25	13
14						9	13	5	25	22	3	15	20	4	7	53	50	12	7	41	57	55	9	65	14
15						6	5	3	11	21	35	3	26	21	16	28	28	60	54	7	63	31	71	71	15
16						8	10	4	12	6	8	16	24	26	40	2	4	2	24	32	16	70	64	40	16
17							16	9	21	7	5	7	38	16	22	20	17	32	49	21	21	78	6	89	17
18							9	6	19	26	7	24	29	12	51	7	43	23	58	20	6	57	18	78	18
19								13	13	4	25	31	19	45	45	48	26	38	16	62	32	23	35	81	19
20								19	16	8	23	6	37	37	9	4	24	25	40	17	70	77	14	69	20

Числа	Модули																								Числа
	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	
21								1	9	29	26	26	36	6	11	34	25	64	27	39	54	6	82	5	21
22								11	22	17	17	11	15	25	31	42	16	30	37	63	72	7	12	24	22
23									4	27	21	4	16	5	39	51	27	14	15	46	26	66	57	77	23
24									24	13	31	27	40	28	44	41	39	54	44	30	13	21	49	76	24
25									20	10	2	36	8	2	30	6	44	48	56	2	46	2	52	2	25
26									15	5	24	23	17	29	29	52	11	10	45	67	38	12	39	59	26
27									3	3	30	35	3	14	3	46	18	9	8	18	3	8	3	18	27
28									14	16	14	29	5	22	4	10	21	29	13	49	61	52	25	3	28
29										9	15	33	41	35	18	14	5	22	68	35	11	46	59	13	29
30										15	10	17	11	39	13	43	59	11	60	15	67	28	87	9	30
31											27	12	34	3	5	39	29	7	11	11	56	50	31	46	31
32											19	30	9	44	37	17	35	19	30	40	20	67	80	74	32
33											4	22	31	27	35	23	51	16	57	61	69	40	85	60	33
34											16	21	23	34	19	35	48	49	55	29	25	75	22	27	34
35											29	19	18	33	25	12	41	52	29	34	37	59	63	32	35
36											18	38	14	30	48	22	14	40	64	28	10	54	34	16	36
37												8	7	42	14	13	9	44	20	64	19	22	11	91	37
38												5	4	17	42	5	57	55	22	70	36	20	51	19	38
39												34	33	31	33	33	46	62	65	65	35	45	24	95	39
40												20	22	9	6	19	55	42	46	25	74	74	30	7	40

Числа	Модули 3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	Числа
41													6	15	21	36	54	43	25	4	75	44	21	85	41
42													21	24	8	49	56	15	33	47	58	3	10	39	42
43														13	38	31	13	21	48	51	49	33	29	4	43
44														43	28	57	47	47	43	71	76	4	28	58	44
45														41	17	24	34	63	10	13	64	61	72	45	45
46														23	36	8	58	31	21	54	30	63	73	15	46
47															24	55	20	58	9	31	59	13	54	84	47
48															41	56	10	5	50	38	17	18	65	14	48
49															20	18	38	56	2	66	28	34	74	62	49
50															27	21	15	65	62	10	50	81	68	36	50
51															23	16	23	35	5	27	22	26	7	63	51
52															26	9	42	27	51	3	42	9	55	93	52
53																40	3	45	23	53	77	69	78	10	53
54																3	49	26	14	26	7	5	19	52	54
55																1	7	4	59	56	52	11	66	87	55
56																25	52	46	19	57	65	49	41	37	56
57																44	32	41	42	68	33	53	36	55	57
58																29	36	39	4	43	15	43	75	47	58
59																	1	18	3	5	31	62	43	67	59
60																	30	28	66	23	71	25	15	43	60
61																		53	69	58	45	48	69	64	61
62																		24	17	19	60	47	47	80	62
63																		1	53	45	55	36	83	75	63
64																		36	36	48	24	64	8	12	64
65																		50	67	60	18	16	5	26	65
66																		33	63	69	73	37	13	94	66
67																			47	50	48	29	56	57	67

Числа	Модули																								Числа
	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	
68																			61	37	29	72	38	61	68
69																			41	52	27	14	58	51	69
70																			35	42	41	56	79	66	70
71																				44	51	65	62	11	71
72																				36	14	51	50	50	72
73																					44	39	20	28	73
74																					23	19	27	29	74
75																					47	32	53	72	75
76																					40	17	67	53	76
77																					43	68	77	21	77
78																					39	42	40	33	78
79																						35	42	30	79
80																						71	46	41	80
81																						38	4	88	81
82																						41	37	23	82
83																							61	17	83
84																							26	73	84
85																							76	90	85
86																							45	38	86
87																							60	83	87
88																							44	92	88
89																								54	89
90																								79	90
91																								56	91
92																								49	92
93																								20	93
94																								22	94
95																								82	95
96																								48	96

Ответы

1. 88. **2.** 11. **3.** 357. **4.** 9. **5.** 1. **6.** 382. **7.** 113. **8.** 2011. **9.** 3109. **10.** 43 417. **11.** 3911. **12.** 2963. **23.** 490. **24.** 23. **25.** 3. **26.** 23. **27.** 1103. **28.** 3413. **29.** 3947. **43.** $\frac{11}{7}$. **44.** $\frac{71}{107}$. **45.** $\frac{91}{113}$. **46.** $\frac{179}{58}$. **47.** $\frac{125}{213}$. **48.** $\frac{64}{81}$. **49.** $\frac{131}{583}$. **50.** $\frac{29}{31}$. **51.** $\frac{185}{341}$. **52.** $\frac{17}{13}$. **53.** $\frac{281}{239}$. **72.** а) $\frac{7}{6}$; б) $\left(\frac{331}{40}\right)_5$; в) $\left(\frac{64}{30}\right)_7$; г) $\left(\frac{101}{20}\right)_3$. **74.** а) $1,1\,(2)_3$; б) $2,1\,(2)_7$; в) $4,2\,(3)_5$; д) $0,(23)_4$; е) $3,(1)_6$; ж) $2,012_3$; з) $0,48_{14}$. **75.** [1, 9]. **76.** [0; 2, 15]. **77.** [—2; 1, 30, 2]. **78.** [1; 2, 3, 4]. **79.** [0; 1, 4, 3, 2]. **80.** [—3; 1, 1, 2]. **81.** [2; 2, 3, 1, 5]. **82.** [0; 1, 2, 5, 2]. **83.** [1; 4, 2, 1, 7]. **84.** [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2]. **85.** [0; 1, 2, 3, 4, 5]. **86.** [0; 1, 1, 38]. **87.** [0; 2, 5, 14, 14]. **88.** [0; 2, 5, 1, 1, 2, 16]. **89.** [1; 1, 2, 1, 1, 13, 6]. **90.** [1; 1, 1, 12, 1, 1, 2, 4]. **91.** [0; 1, 3]. **92.** [0; 2, 3, 4]. **93.** [—1; 1, 1, 7, 1, 6]. **94.** [7; 9, 11]. **95.** [0; 2, 5, 18]. **96.** [—1; 1, 2, 22, 1, 4, 2]. **97.** [1; 4, 30]. **98.** [0; 1, 9, 1, 3, 23]. **99.** [1; (1, 2)], $\frac{71}{41}$. **100.** [5; (5, 10)]. **101.** [10; (1, 1, 6, 1, 1, 20)]. **102.** [6; (1, 1, 1, 2, 1, 1, 12)]. **106.** [0; (1, 18)]. **108.** [5; (1, 1, 1, 10)]. **114.** [3; 2, 5, 2, 7, 2], $\frac{83}{24}$. **136.** $\frac{96}{67}$. **137.** $\frac{9+2\sqrt{39}}{5}$. **138.** $\frac{4+\sqrt{37}}{7}$. **139.** $1+\sqrt{3}$. **140.** $\sqrt{20}$. **141.** $\sqrt{11}$. **142.** $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$. **143.** $\sqrt{3}$. **144.** $\frac{2+\sqrt{5}}{3}$. **145.** $5-\sqrt{15}$. **146.** $\frac{245-\sqrt{85}}{74}$. **148.** $\frac{71}{41}$. **163.** Нет решений. **164.** $x = 13 + 44t$, $y = -70 - 237t$. **165.** $x = 9 + 29t$, $y = -17 - 55t$. **168.** $x = 7 + 8t$, $y = -2 - 3t$. **169.** $x = 1 + 5t$, $y = 1 - 2t$. **171.** $x = 30 + 49t$, $y = -13 - 23t$. **199.** Четыре решения: 1) 15 сосудов по 0,8 л; 2) 8 сосудов по 0,5 л и 10 по 0,8 л; 3) 16 сосудов по 0,5л и 5 по 0,8 л; 4) 24 сосуда по 0,5 л. **221.** Да. **222.** Нет. **223.** Подкольцо, но не идеал. **248.** $M = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ kb & a \end{pmatrix}\right\}$. **249.** $M = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -kb & a \end{pmatrix}\right\}$. **253.** $x \equiv 5,\ 11,\ 17 \pmod{18}$. **254.** $x \equiv 6,\ 13,\ 20,\ 27 \pmod{28}$. **255.** $x \equiv 4,\ 9,\ 14,\ 19,\ 24,\ 29 \pmod{30}$. **256.** $x \equiv 3,\ 8,\ 13,\ 18,\ 23 \pmod{25}$. **257.** $x \equiv 1,\ 8,\ 15 \pmod{21}$. **258.** $x \equiv 4 \pmod{11}$. **259.** $x \equiv 10 \pmod{11}$. **260.** $x \equiv -14,\ -5,\ 4,\ 12,\ 22 \pmod{45}$. **261.** $x \equiv 9,\ 46,\ 83 \pmod{111}$. **262.** $x \equiv 20,\ 55,\ 90,\ 125,\ 160,\ 195,\ 230 \pmod{245}$. **263.** $x \equiv -3 \pmod{24}$. **264.** $x \equiv 10 \pmod{53}$. **265.** $x \equiv 21,\ 65,\ 109 \pmod{132}$. **266.** $x \equiv 10 \pmod{35}$. **267.** $x \equiv 10 \pmod{25}$. **268.** $x \equiv 9 \pmod{16}$. **269.** $x \equiv 5 \pmod{23}$. **270.** $x \equiv -28,\ -15,\ 2,\ 11 \pmod{52}$. **271.** $x \equiv 2,\ 5,\ 8,\ \ldots,\ 41 \pmod{42}$. **272.** $x \equiv 1,\ 3,\ 5 \pmod{6}$. **273.** $x \equiv 75 \pmod{106}$. **274.** $x \equiv -5 \pmod{13}$. **275.** $x \equiv -3 \pmod{8}$. **276.** $x \equiv 35 \pmod{37}$. **277.** $x \equiv 200,\ 751,\ 1302,\ 1853,\ 2404 \pmod{2755}$. **278.** $x \equiv 14 \pmod{15}$. **279.** $x \equiv 16 \pmod{25}$. **280.** $x \equiv 103 \pmod{123}$. **281.** $x \equiv 50 \pmod{58}$. **282.** $x \equiv 11 \pmod{169}$. **283.** $x \equiv 123 \pmod{179}$. **284.** $x \equiv 27 \pmod{28}$. **285.** $x \equiv 153 \pmod{308}$. **305.** $x \equiv 131 \pmod{187}$. **306.** $x \equiv 296 \pmod{575}$. **307.** $x \equiv 287 \pmod{340}$. **308.** $x \equiv 217 \pmod{240}$. **309.** $x \equiv 360 \pmod{667}$. **310.** $x \equiv -1 \pmod{28}$. **311.** $x \equiv 31 \pmod{1872}$. **312.** $x \equiv 19 \pmod{8736}$. **313.** $x \equiv 93 \pmod{140}$. **314.** $x \equiv 86 \pmod{231}$. **315.** $x \equiv 11 \pmod{3150}$. **316.** $x \equiv 3097 \pmod{4620}$. **323.** $x \equiv 60 \pmod{1231}$. **324.** $x \equiv 113 \pmod{315}$. **325.** $x \equiv 857 \pmod{1716}$. **326.** $x \equiv 22 \pmod{120}$. **327.** $x \equiv 16 \pmod{1260}$. **328.** $x \equiv 12 \pmod{315}$. **329.** $x \equiv 5 \pmod{234}$. **330.** $x \equiv 17 \pmod{2475}$. **331.** $x \equiv 29 \pmod{31}$. **332.** $x \equiv 24 \pmod{37}$. **334.** $x \equiv 10 \pmod{29}$. **335.** $x \equiv 24 \pmod{47}$. **339.** $x \equiv 30 \pmod{53}$. **340.** $x \equiv 10,\ 12,\ 49,\ 51 \pmod{61}$. **341.** $x \equiv 17 \pmod{36}$. **342.** $x \equiv 2,\ 12,\ 22,\ 32 \pmod{40}$. **343.** $x \equiv 2,\ 5, \ldots,\ 59 \pmod{60}$. **344.** $x \equiv 3 \pmod{72}$. **345.** $x \equiv 5, 46 \pmod{82}$. **346.** $x \equiv 3,\ 16,\ 29,\ 42,\ 55,\ 68 \pmod{78}$. **347.** $x \equiv 38 \pmod{66}$. **348.** $x \equiv 10,\ 24 \pmod{28}$. **349.** $x \equiv 29 \pmod{30}$. **352.** $x \equiv 66,\ 17 \pmod{83}$. **353.** $x \equiv 18,\ 23 \pmod{41}$. **354.** $x \equiv 43,\ 10 \pmod{53}$. **355.** $x \equiv 27,\ 34 \pmod{61}$. **356.** $x \equiv 17,\ 46 \pmod{58}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3
Глава I. Делимость целых чисел 4
§ 1. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида. Простые и составные числа 4
§ 2. Систематические числа. Систематические дроби 5
§ 3. Цепные дроби. Неопределенные уравнения первой степени с двумя неизвестными 9
Глава II. Кольца и идеалы 17
§ 1. Кольца 17
§ 2. Подкольца. Идеалы 19
§ 3. Фактор-кольца. Гомоморфизмы колец 21
Глава III. Теория сравнений и ее арифметические приложения 25
§ 1. Сравнения первой степени с одним неизвестным 25
§ 2. Системы сравнений первой степени с одним неизвестным 27
§ 3. Решение двучленных сравнений с помощью индексов 28
§ 4. Арифметические приложения теории сравнений 29
Приложения 32
1. Примерные варианты контрольных работ . . . . . —
2. Таблица простых чисел, меньших 1000 . . . . . —
3. Решение варианта 0 33
4. Таблицы индексов по простым модулям, меньших 100 36
Ответы 40

Александра Афанасьевна Кочева

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО АЛГЕБРЕ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Часть III

Заведующий редакцией Р. А. Хабиб
Редактор Л. В. Антонова
Художественный редактор Е. Н. Карасик
Технический редактор И. Ю. Щукина
Корректор Р. Б. Штутман

Н/К

Сдано в набор 14 12 83 Подписано к печати 23 08 84 Формат $60 \times 90^1/_{16}$ Бум. типограф № 2. Гарнит. лит Печать высокая Усл печ. л 2,5 Усл кр отт 2,69 Уч-изд л. 2,13. Тираж 27 000 экз
Заказ № 745. Цена 5 коп

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
Саратов, ул Чернышевского, 59