ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
ВЫСШИХ и СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

М. М. ГЛУХОВ

ОБЗОРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЕ

ПОСОБИЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФАКУЛЬТЕТОВ ПЕДИНСТИТУТОВ

ПРОСВЕЩЕНИЕ · 1964

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Московский государственный заочный педагогический институт

М. М. ГЛУХОВ

ОБЗОРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЕ

ПОСОБИЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФАКУЛЬТЕТОВ ПЕДИНСТИТУТОВ

под редакцией *А. С. Солодовникова*

Издательство «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
Москва 1964

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный курс лекций предназначается в качестве пособия для студентов-заочников физико-математических факультетов педагогических институтов, готовящихся к сдаче государственного экзамена. В связи с этим он содержит все вопросы раздела алгебры, предусмотренные программой государственных экзаменов по математике (специальность — математика), утвержденной Министерством просвещения РСФСР. Вместе с тем, учитывая характер обзорных лекций, мы включили в данный курс некоторые вопросы, не вошедшие в указанную программу, но которые являются важными или для понимания других вопросов, или для практической деятельности учителя математики. К таким вопросам относятся, например, вопросы, связанные с равносильностью уравнений и систем уравнений, а также с решением алгебраических неравенств.

При изложении материала мы руководствовались объяснительной запиской к программе, в которой в частности сказано: «Ответ студента по каждому вопросу должен включать наряду с полным освещением всех пунктов вопроса и их взаимосвязи также и доказательство по крайней мере одного из формулируемых им предложений». В соответствии с этим при рассмотрении каждого вопроса часть утверждений приводили с полными доказательствами, а некоторые утверждения лишь формулировали и выясняли их значения.

Мы старались давать определения подавляющего большинства возникавших понятий и во многих случаях иллюстрировать их примерами.

В заключение автор приносит глубокую благодарность Н. Я. Виленкину, А. С. Солодовникову и Ю. И. Соркину за ряд ценных советов и замечаний.

ВВЕДЕНИЕ

Исторически алгебра возникла как наука о решении уравнений. В этих рамках она развивалась в основном до середины XIX века. В начале XIX века, в связи с задачей о разрешимости алгебраических уравнений выше четвертой степени с одним неизвестным в радикалах, появилось важнейшее в современной алгебре понятие группы. Термин «группа» впервые был введен французским математиком Эваристом Галуа (1811—1832) в 1830 году. Галуа указал для каждого уравнения некоторую группу подстановок, по которой можно узнать наиболее существенные свойства уравнения, и в частности о его разрешимости в радикалах.

Хотя понятие группы и было введено в алгебру в связи с теорией уравнений, однако это понятие позволило в дальнейшем алгебре перерасти рамки науки об уравнениях и превратиться в науку об алгебраических операциях над элементами множеств любой природы, в которой теория уравнений занимает весьма скромное место.

Появление в алгебре понятия группы можно сравнить с таким поистине революционным событием в математике, как «открытие» *буквенной символики*, связанное с именем французского математика Виета (1540—1603). Изучение множества независимо от природы его элементов, лишь с точки зрения операций над его элементами, дает возможность алгебре находить приложения не только к числовым множествам, но и к объектам самых различных областей естествознания.

Наряду с теорией групп, изучающей множества с одной ассоциативной и обратимой алгебраической операцией, в современной алгебре большое место занимают теория колец и теория полей, изучающие множества с двумя алгебраическими операциями, удовлетворяющими определенным требованиям.

Переход от изучения конкретных числовых множеств к изучению числовых колец и полей и тем более вообще колец и полей является переходом на новую, более высокую ступень абстракции, а потому, естественно, связан с некоторыми трудностями психологического характера. Этот факт является одной из причин, по которым школьная математика до сих пор остается в основном на уровне XVII века.

Курс высшей алгебры, преподаваемый в педагогическом институте, является продолжением школьного курса алгебры и, к сожалению, лишь вскользь знакомит студентов с основными направлениями в развитии современной алгебры. Заключая алгебру в основном в рамках теории уравнений, программа педвузов развивает идеи школьной алгебры в двух направлениях. Одна ветвь — линейная алгебра — идет от систем уравнений первой степени с двумя и тремя неизвестными; другая — алгебра многочленов — от уравнений с одним неизвестным первой и второй степени. Основными результатами здесь являются: для первого направления — критерий совместности произвольной системы линейных уравнений, для второго — теорема существования корня для произвольного многочлена над полем комплексных чисел (называемая иногда в силу традиции основной теоремой алгебры).

Программа государственных экзаменов по алгебре составлена с тем расчетом, чтобы охватить оба эти основных результата.

В связи с тем, что понятия кольца и поля, а также равносильности уравнений и систем уравнений являются общими для обоих указанных направлений, с этих понятий мы и начнем изложение.

Вопрос о решении алгебраических неравенств, который непосредственно не входит ни в одно из этих направлений, но примыкает к алгебре многочленов, будет изложен в самом конце.

§ 1. Числовые кольца и поля

В процессе изучения арифметики и алгебры в средней школе учащиеся знакомятся с основными числовыми множествами. Таковыми являются:

1^0. Множество натуральных чисел:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

2^0. Множество целых чисел:

$$\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

3^0. Множество рациональных чисел, т. е. всевозможных дробей вида $\frac{m}{n}$, где m, n — любые целые числа и $n \neq 0$.

4^0. Множество действительных чисел, состоящее из множества всех рациональных и множества всех иррациональных чисел.

5^0. Множество комплексных чисел, т. е. чисел вида $a+bi$, где a, b — любые действительные числа, а i — мнимая единица, т. е. такое число, что $i^2=-1$.

В дальнейшем эти числовые множества будем обозначать соответственно буквами N, C, R, D, K.

Наряду с этими множествами чисел в различных разделах математики и ее приложениях встречаются и другие числовые системы. Так, например, можно говорить о множестве простых чисел, о множестве всех четных целых чисел, о множестве всех положительных рациональных чисел, о множестве чисел вида $a+bi$, где a, b — целые числа (такие числа называют целыми гауссовыми числами), о множестве чисел вида $a+b\sqrt{2}$, где a и b — любые рациональные числа, и т. д.

При решении каждой конкретной задачи мы находимся в той или иной числовой области и бываем вынуждены учитывать ее свойства. Так, находясь в области натуральных чисел, мы должны весьма осторожно пользоваться операцией вычитания, ибо она в этой области не всегда выполнима. Аналогично, находясь в области действительных чисел, мы должны помнить, что в ней не всегда выполнима операция извлечения квадратного корня, и т. п.

В связи с тем что различных числовых систем существует чрезвычайно много (бесконечное множество), изучить каждое числовое множество отдельно не представляется возможным, к тому же это и нецелесообразно, так как многие числовые системы обладают целым рядом общих свойств. В связи с этим, естественно, возникает задача о классификации числовых множеств по некоторым наиболее важным свойствам. Алгебра изучает различные объекты, связанные с числовыми множествами, в основном с точки зрения операций сложения, вычитания, умножения и деления. Поэтому в основе алгебраической классификации числовых множеств лежит свойство замкнутости числовой системы относительно тех или иных операций. Так получаются важнейшие классы числовых множеств: класс колец и класс полей, определяемые следующим образом.

Числовым кольцом называется любое непустое подмножество M множества всех комплексных чисел, замкнутое относительно операций сложения, вычитания и умножения.

Следовательно, чтобы убедиться в том, что числовое множество M является кольцом, достаточно показать, что для любых чисел a и b из M числа $a+b$, $a-b$ и ab принадлежат множеству M.

Числовое кольцо, содержащее более одного элемента, в котором выполнима операция деления (кроме деления на нуль), называется *полем*.

Свойства, положенные в основу определения числовых колец и полей, являются основными свойствами соответствующих классов чисел. Опираясь на них, можно доказать много других свойств. При этом если в доказательстве того или иного свойства мы опираемся лишь на определение кольца (поля), то это свойство верно для всех числовых колец (полей). Таким образом, происходит изучение не отдельного числового множества, а целого класса множеств.

Заметим, что классификация чисел имеет большое значение не только для изучения самих числовых систем, но и для исследования различных нечисловых объектов, в определении которых участвуют числа. Так, в параграфе 5 мы будем изучать некоторые свойства многочленов с коэффициентами из любого фиксированного числового поля. Без выделения класса полей эти свойства многочленов пришлось бы изучать для многих числовых систем отдельно.

Приведем примеры числовых колец и полей, а также числовых систем, не являющихся кольцами или полями.

Пример 1. Из основных числовых множеств полями являются множество R рациональных чисел, множество D действительных чисел и множество K комплексных чисел.

Пример 2. Множество C целых чисел является кольцом, но не является полем, так как в нем не всегда выполнима операция деления. Так, например $1,\ 2 \in C$, однако $1:2 = \frac{1}{2} \notin C$.

Пример 3. Множество натуральных чисел не является кольцом, так как оно не замкнуто относительно вычитания.

Пример 4. Множество, состоящее из одного числа нуль, есть кольцо. В самом деле, это множество замкнуто относительно операций сложения, вычитания и умножения: $0+0=0,\ 0-0=0,\ 0\cdot 0=0$. Заметим, что полем это множество не является, так как по определению поле должно содержать более одного элемента.

Пример 5. Множество целых чисел, кратных некоторому фиксированному целому числу n, является кольцом, но не является полем.

Пример 6. Множество целых гауссовых чисел, т. е. чисел вида $a+bi$, где a и b — любые целые числа, является кольцом, но не является полем.

Пример 7. Множество чисел вида $a+bi$, где a и b — любые рациональные числа, является полем (поле гауссовых чисел).

Пример 8. Множество чисел вида $a+b\sqrt[3]{2}$, где a и b — любые рациональные числа, не является кольцом.

(Утверждения, сделанные в примерах 5 — 8, проверьте в качестве упражнений.)

Пример 9. Множество M чисел вида $a+b\sqrt{m}$, где a и b — любые рациональные числа, а m — фиксированное положительное рациональное число, не являющееся квадратом, является полем. Чтобы убедиться в этом, надо проверить выполнимость во множестве M операций сложения, вычитания, умножения и деления на число, отличное от нуля. Сделаем это.

Пусть $a+b\sqrt{m}$ и $c+d\sqrt{m}$ — любые числа из M. Тогда очевидно, что числа

$$(a+b\sqrt{m})\pm(c+d\sqrt{m})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{m} \text{ и}$$

$$(a+b\sqrt{m})(c+d\sqrt{m})=(ac+bdm)+(ad+bc)\sqrt{m}$$

принадлежат множеству M, т. е. в M выполнимы первые три операции.

Положим теперь $c+d\sqrt{m}\neq 0$. Ясно, что это будет выполняться лишь тогда, когда хотя бы одно из чисел c, d отлично от нуля.

$$\frac{a+b\sqrt{m}}{c+d\sqrt{m}}=\frac{(a+b\sqrt{m})(c-d\sqrt{m})}{(c+d\sqrt{m})(c-d\sqrt{m})}=$$

$$=\frac{(ac-bdm)+(bc-ad)\sqrt{m}}{c^2-md^2}=\frac{ac-bdm}{c^2-md^2}+\frac{bc-ad}{c^2-md^2}\sqrt{m}=$$

$=A+B\sqrt{m}$, где A и B — числа рациональные, если, конечно, $c^2-md^2\neq 0$. Покажем, что это так. Допустим, что $c^2-md^2=0$. Если здесь $d^2\neq 0$, то имеем: $\frac{c^2}{d^2}=m$, или $\left(\frac{c}{d}\right)^2=m$, что противоречит тому, что число m не является квадратом. Если же $d^2=0$, т. е. $d=0$, то $c^2-md^2=c^2\neq 0$, ибо по условию хотя бы одно из чисел c, d отлично от нуля.

Таким образом, если $c+d\sqrt{m}\neq 0$, то деление на число $c+d\sqrt{m}$ возможно, т. е. в частном получается число $A+B\sqrt{m}$ из множества M. Следовательно, множество M есть поле.

Придавая m различные значения, мы сможем получить бесчисленное множество различных числовых полей. Для каждого из них имеем: $R\subset M\subset D$*.

Если числовое поле P_1 содержится в числовом поле P_2, но не совпадает с $P_2(P_1\subset P_2)$, то говорят, что P_2 есть расширение поля P_1, а P_1 есть подполе поля P_2.

Следовательно, можно сказать, что всякое числовое поле примера 7 является расширением поля R и подполем поля K.

* Здесь, как и всюду ниже, $A\subset B$ означает, что A есть собственное подмножество множества B.

Заметим, что из самого определения числового поля следует, что всякое числовое поле является подполем поля комплексных чисел.

Естественно, возникают вопросы:

1. Существуют ли промежуточные поля для полей D и K?
2. Существуют ли подполя поля R?

На оба эти вопроса ответы отрицательны, а именно:

1. Не существует числового поля P, такого, что

$$D \subset P \subset K.$$

2. Не существует числового поля P, такого, что

$$P \subset R.$$

Докажем эти утверждения:

1) Пусть P — такое поле, что $D \subset P \subseteq K$. Так как $D \subset P$, то P содержит все действительные числа и хотя бы одно недействительное, т. е. мнимое число, например $a+bi$, где a, b — некоторые действительные числа, причем $b \neq 0$. По определению поле замкнуто относительно вычитания и деления на отличное от нуля число. Следовательно, $\frac{(a+bi)-a}{b} = i \in P$. Таким образом, P содержит все действительные числа и число i (мнимую единицу). А так как поле замкнуто относительно операций сложения и умножения, то P содержит любое число вида

$$a+bi,$$

где a, b — любые действительные числа. Следовательно, P содержит все комплексные числа, т. е. $P = K$. Этим утверждение 1) доказано.

2) Пусть P — произвольное числовое поле. По определению поле содержит более одного элемента. Следовательно, в P существует число $a \neq 0$. Отсюда и из замкнутости поля относительно операций сложения, вычитания и деления следует, что поле P содержит числа:

$$a - a = 0, \quad a : a = 1, \quad \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n} = n,$$

т. е. любое целое число. Пусть теперь m и n — любые целые числа, причем $n \neq 0$. Так как в поле выполнимо деление, то $\frac{m}{n} \in P$, т. е. поле P содержит любое рациональное число: $R \subset P$.

Таким образом, поле R содержится во всяком другом числовом поле, т. е. является минимальным числовым полем. Следовательно, не существует никакого числового поля P, такого, что $P \subset R$, что и доказывает утверждение 2.

В алгебре наряду с числами приходится иметь дело и с другими, нечисловыми, объектами, как-то: матрицами; многочленами, векторами и т. д. При этом для объектов одного множества определяются некоторые операции, сопоставляющие любым двум элементам множества (взятым в определенном порядке) вполне определенный третий элемент того же множества. Эти операции зачастую обладают свойствами, сходными со свойствами операций над числами. Поэтому их обычно по аналогии с числовыми операциями называют сложением, умножением, вычитанием и делением. В зависимости от числа операций и их свойств множества разбиваются на отдельные классы. Наиболее хорошо изученными классами в настоящее время являются классы групп, колец и полей.

Напомним определения кольца и поля в общем случае и укажем некоторые их простейшие свойства.

Определение 1. *Кольцом* называется любое множество M, для элементов которого определены две алгебраические операции, называемые обычно сложением и умножением, удовлетворяющие требованиям:

1) ассоциативность сложения, т. е.

$$(a+b)+c = a+(b+c);$$

2) коммутативность сложения, т. е.

$$a+b=b+a;$$

3) обратимость сложения, т. е. уравнение

$$a+x=b$$

разрешимо для любых a и b из M (иначе, возможность вычитания);

4) ассоциативность умножения, т. е.

$$(ab)c=a(bc);$$

5) дистрибутивность умножения относительно сложения, т. е.

$$(a+b)c=ac+bc \text{ и } a(b+c)=ab+ac.$$

Последние два равенства выражают соответственно правую и левую дистрибутивность.

Если, кроме требований 1 — 5, выполняется еще требование 6 — коммутативность умножения, т. е.

$$ab = ba,$$

то кольцо называется коммутативным*.

Можно указать следующие примеры колец:

Пример 10. Множество квадратных матриц порядка n, элементами которых служат любые комплексные числа.

Пример 11. Множество классов вычетов целых чисел по любому модулю m.

Пример 12. Множество линейных преобразований n-мерного векторного пространства.

Пример 13. Множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

где a и b — любые целые числа.

Пример 14. Множество многочленов от одного переменного. И т. д.

Требования 1—5 называют аксиомами кольца. Они являются основными, определяющими свойствами кольца. Из этих свойств чисто логическим путем можно вывести много других. Перечислим некоторые простейшие из них:

а) Во всяком кольце M существует единственный элемент θ, такой, что

$$a + \theta = a$$

для любого a из M. Такой элемент называется нулевым элементом кольца.

б) В произвольном кольце для любого элемента a существует единственный элемент a', такой, что

$$a + a' = \theta.$$

Этот элемент называется противоположным для элемента a и обозначается через $-a$.

в) Для любых элементов a и b из кольца уравнение $a + x = b$ имеет единственное решение. Таковым является элемент $b + (-a)$. Он обозначается через $b - a$ и называется разностью элементов b и a.

---

* Свойства 1—2, 4—6 не включались в определение числового кольца по той причине, что они выполняются для любых комплексных чисел.

г) Умножение дистрибутивно относительно вычитания, т. е.

$$a(b-c)=ab-ac \text{ и } (a-b)c=ac-bc.$$

д) $\theta-a=-a$, $a-\theta=a$, где θ — нулевой элемент кольца.

е) $a(-b)=-ab$, $(-a)b=-ab$, $(-a)(-b)=ab$ [правило знаков] и т. д.

Уже из этих примеров видно, что многие свойства колец похожи на известные свойства чисел. Однако из приведенных примеров колец видно, что кольца бывают и не числовые. Значит, теория колец может осуществлять одновременное изучение очень многих множеств независимо от природы их элементов, лишь бы для них выполнялись аксиомы кольца. Не следует, конечно, думать, что все кольца обладают одними и теми же свойствами. Общими для всех колец являются лишь те свойства, которые можно вывести из аксиом кольца. Наряду с этим каждое кольцо может обладать некоторыми специфическими свойствами. Так, например, кольцо из примера 11 является конечным, оно содержит ровно m элементов, тогда как кольца, приведенные в остальных примерах, бесконечны. Для всех числовых колец имеет место следующее свойство: если $ab=0$, то по крайней мере одно из чисел a, b равно 0. Этим свойством не обладает кольцо из примера 13 и кольца из примера 11 с составным модулем m. В самом деле, матрицы

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

из кольца примера 13 не нулевые, а их произведение равно нулевой матрице

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Для примера 11 в случае, когда $m=6$, имеем $\bar{2}$ и $\bar{3}$ не нулевые, тогда как их произведение есть нулевой класс $\bar{0}$. (Здесь через $\bar{r}$ обозначен класс целых чисел, дающих при делении на m остаток r.)

Такие элементы a и b кольца, которые сами не являются нулевыми, а в произведении дают нулевой элемент, называются *делителями нуля*. Таким образом, существуют кольца как с делителями нуля, так и без них.

Такого рода перечень свойств, которыми одни кольца обладают, а другие нет, можно было бы продолжить как угодно далеко. Это значит, что наряду с изучением общих свойств колец приходится изучать специально каждое отдельное кольцо или отдельные классы колец. Так, в теории колец специально изучаются коммутативные кольца, кольца без делителей нуля, кольца с единичным элементом и т. д. Наиболее «хорошим», а потому и наиболее изученным является класс колец, называемых полями.

Определение 2. *Полем* называется всякое коммутативное кольцо, содержащее более одного элемента и удовлетворяющее следующему требованию:

7) Для любого b и $a \neq \theta$ разрешимо уравнение $ax = b$.

Иначе говоря, требование 7 означает возможность деления на любой элемент, отличный от нулевого.

Всякое поле, являясь кольцом, обладает всеми общими свойствами колец. Но, помимо этого, имеются такие общие свойства полей, которыми не всякое кольцо обладает. Рассмотрим примеры:

а) В любом поле P существует единственный элемент e, называемый единичным, такой, что $ae = ea = a$ для любого элемента a из поля P. Этим свойством обладают не все кольца. Так, в кольце примера 1 единичного элемента нет.

б) Для любого ненулевого элемента поля P существует обратный элемент, т. е. такой элемент a^{-1}, что

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e.$$

в) В поле не существует делителей нуля и т. д.

Нетрудно проверить, что из колец, приведенных в примерах 10—14, полями являются лишь кольца примера 11 и то лишь для тех случаев, когда модуль m есть простое число.

Заметим, что в практических приложениях большое значение имеет поле классов вычетов по модулю $m = 2$. Оно состоит из двух элементов: класса чисел, делящихся на 2, т. е. класса четных чисел, и класса чисел, дающих при делении на 2 остаток 1, т. е. класса нечетных чисел. Если эти классы обозначить соответственно через $\overline{0}$ и $\overline{1}$, то таблицы сложения и умножения для этого поля [оно обозначается обычно через GF (2)] будут выглядеть следующим образом:

$\overline{0} + \overline{0} = \overline{0}$, $\overline{0} + \overline{1} = \overline{1} + \overline{0} = \overline{1}$, $\overline{1} + \overline{1} = \overline{0}$. $\overline{0} \cdot \overline{0} = \overline{0}$, $\overline{0} \cdot \overline{1} = \overline{1} \cdot \overline{0} = \overline{0}$, $\overline{1} \cdot \overline{1} = \overline{1}$. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь числовые кольца и поля.

§ 2. Вопросы равносильности уравнений и систем уравнений

Пусть $F(x, y, \ldots, z)$ — элементарная функция, т. е. функция, заданная некоторым аналитическим (алгебраическим) выражением, составленным из чисел и символов $x, y, \ldots, z$ (переменных). Если числа, входящие в это аналитическое выражение, принадлежат некоторому числовому полю P, то говорят о функции над полем P. Тогда под областью определения функции понимают множество таких систем значений переменных $x, y, \ldots, z$ из поля P, для которых функция $F(x, y, \ldots, z)$ определена, т. е. имеет вполне определенное значение (или значения, если она многозначна).

Пример 1. а) $F(x, y) = \frac{x^2+1}{3} + \frac{3}{7}y + \sqrt{x-y}$

есть функция над полем рациональных чисел;

$$\text{б)}\ F(x, y, z) = x^2 + \sqrt{2}\,y + z$$

есть функция над полем действительных чисел;

$$\text{в)}\ F(x) = (1-i)\,x^2 + x + i$$

есть функция над полем комплексных чисел.

Если $F(x, y, \ldots, z)$ есть функция над некоторым полем P, то ее можно рассматривать и над любым расширением поля P. В частности, всякую числовую функцию можно рассматривать над полем комплексных чисел. Однако из практических соображений часто приходится рассматривать функции над числовыми полями, более узкими, чем поле комплексных чисел, например: над полем действительных чисел, рациональных чисел и т. д., а иногда даже над кольцом целых чисел.

В зависимости от того, над каким полем рассматривается данная функция, область ее определения меняется.

Пример 2. Функция $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ имеет своей областью определения множество всех отличных от нуля рациональных чисел, если ее рассматривать над полем R; множество всех отличных от нуля действительных чисел, если ее рассматривать над полем D; множество всех отличных от нуля комплексных чисел, если ее рассматривать над полем K, и т. д.

Так как коэффициенты функции $f(x)$ — рациональные числа, а поле R принадлежит любому числовому полю, то можно сказать короче: функция $f(x)$ над полем P имеет своей областью определения множество всех отличных от нуля чисел поля P.

Пример 3. Функция $y=\sqrt{x^2-1}$ над полем D имеет в качестве области определения множество чисел, состоящее из двух отрезков: $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$. Эта же функция над полем K имеет своей областью все множество K.

Напомним, что две функции $F_1(x, y, \ldots, z)$ и $F_2(x, y, \ldots, z)$ над полем P называются равными или тождественно равными, если они имеют одинаковые области определения над полем P и если их значения совпадают при любых значениях переменных из области определения.

Пример 4. Функции $F_1(x)=\lg x^2$ и $F_2(x)=2\lg x$ над полем D не равны, так как имеют различные области определения. Эти же функции (как известно из теории функций комплексного переменного) над полем K равны.

Пример 5. Функции $F_1(x)=x^2$ и $F_2(x)=|x|^2$ над полем D равны, тогда как над полем K они различны, ибо при всевозможных комплексных значениях x функция $F_1(x)$ принимает всевозможные комплексные значения, а функция $F_2(x)$ — лишь действительные неотрицательные значения.

Из рассмотренных примеров следует, что как область определения функций, так и равенство функций — понятия относительные. Они зависят от того, над каким полем рассматриваются данные функции.

Если функции $F_1(x, y, \ldots, z)$ и $F_2(x, y, \ldots, z)$ равны, то пишут:

$$F_1(x, y, \ldots, z) \equiv F_2(x, y, \ldots, z), \tag{1}$$

причем иногда вместо знака $\equiv$ употребляют знак $=$.

Преобразование функции $F(x, y, \ldots, z)$ над полем P называется *тождественным*, если в результате его применения получается функция, равная данной.

Пример 6. Пусть $F(x, y)=\frac{x+3y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}-\frac{4y^2}{x^2-y^2}$.

Произведя сложение дробей $\frac{x+3y}{x-y}$, $\frac{x-y}{x+y}$ и $\frac{4y^2}{x^2-y^2}$, получим: $F_1(x, y)=\frac{2x(x+y)}{(x-y)(x+y)}$.

Очевидно, что $F_1(x, y) = F(x, y)$. Следовательно, сложение дробей является тождественным преобразованием. Если же последнюю дробь сократить на $x+y$, то получим функцию

$$F_2(x, y) = \frac{2x}{x-y},$$

не равную функции $F(x, y)$, так как $F(x, y)$ и $F_2(x, y)$ имеют различные области определения. Следовательно, сокращение дроби на некоторое выражение, вообще говоря, не является тождественным преобразованием.

Рассмотренные выше функции

$$F(x, y) = \frac{x+3y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} - \frac{4y}{x^2-y^2} \quad \text{и} \quad F_2(x, y) = \frac{2x}{x-y}$$

не являются тождественно равными. Однако при всех системах значений x, y, таких, что $x \neq y$, $x \neq -y$, эти функции имеют равные значения. В связи с этим естественно ввести понятие равенства функций на множестве M.

Две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ называются *равными на множестве* M, если для любого значения переменного x из M данные функции определены и имеют равные значения.

Это определение годится и для функций от нескольких переменных. Только в последнем случае под M следует понимать не множество чисел, а множество n-членных последовательностей чисел (n-мерных векторов), или, как говорят, множество систем значений переменных.

Пример 7. Функции $f(x) = (\sqrt{x-2}+1)(\sqrt{x-2}-1)$ и $\varphi(x) = x-3$ не равны ни над одним из полей R, D, K. Однако они являются равными, например, на множестве M действительных чисел отрезка $(2, +\infty)$.

Пример 8. Функции $F_1(x, y) = \lg x + \lg y$ и $F_2(x, y) = \lg xy$ равны на множестве M всевозможных пар положительных действительных чисел.

Заметим, что множество M, на котором рассматриваемые функции равны, может выбираться не однозначно. Так в последнем примере в качестве M можно было взять множество пар целых положительных чисел, множество пар действительных чисел, больших 5, и т. д. На практике множество M стремятся выбирать по возможности самым «широким». Тогда оно зачастую совпадает с общей частью областей определения рассматриваемых функций (см. рассмотренные выше примеры 1—2); однако последнее не обязательно. Так функции $F_1(x) = |x|$ и $F_2(x) = x$ определены на множестве всех комплексных чисел. Однако самым широким множеством, на котором они равны, является множество неотрицательных действительных чисел.

Пусть теперь $F_1(x, y, \ldots, z)$ и $F_2(x, y, \ldots, z)$ — любые функции над полем P (не обязательно равные). Тогда равенство

$$F_1(x, y, \ldots, z) = F_2(x, y, \ldots, z) \tag{2}$$

называется *уравнением* над полем P от неизвестных $x, y, \ldots, z$. При этом функции F_1 и F_2 называют соответственно левой и правой частями уравнения.

Равенство (2), похожее внешне на равенство (1), имеет совершенно другую природу. Равенство (1) является «утвердительным», ибо оно утверждает, что функции F_1 и F_2 равны.

Равенство же (2) является «вопросительным». Оно выражает вопрос: при каких значениях переменных $x, y, \ldots, z$ из поля P функции F_1 и F_2 имеют одинаковые значения? Или над каким множеством M равны функции F_1 и F_2? Поэтому уравнение (2) иногда записывают в виде:

$$F_1(x, y, \ldots, z) \overset{?}{=} F_2(x, y, \ldots, z).$$

Система значений переменных $x = \alpha$, $y = \beta$, ..., $z = \gamma$ из поля P называется *решением уравнения* (2), если значения функций F_1 и F_2 при этих значениях переменных равны, т. е. если равны числа $F_1(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$ и $F_2(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$. В этом случае говорят также, что система чисел $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ удовлетворяет уравнению (2).

Общая часть областей определения функций F_1 и F_2 называется *областью определения* уравнения (2).

Не следует путать область определения уравнения и множество его решений.

Пример 9. Уравнение $5 - x = \frac{6}{x}$ над полем D имеет область определения $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. Решениями же этого уравнения являются лишь два числа: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Два уравнения над полем P называются *равносильными*, если они имеют одно и то же множество решений, т. е. всякое решение одного из них является решением другого.

Заметим, что равносильность уравнений существенно зависит от того поля, над которым они рассматриваются.

Пример 10. Уравнения $x-1=0$ и $(x-1)(x^2+1)=0$ над полем D равносильны, так как оба имеют единственное решение $x_1=1$.

Над полем K эти уравнения не равносильны, так как второе уравнение имеет решения: $x_2=i$, $x_3=-i$, которые не являются решениями первого.

Очевидно, что если в уравнении (2) каждую из функций F_1, F_2 заменить тождественно равной ей функцией, то получится уравнение, равносильное данному.

Однако при решении уравнения к его левой и правой частям приходится применять различные, зачастую не тождественные преобразования. При этом важно знать: не изменяется ли от этих преобразований множество решений данного уравнения, т. е. будет ли полученное в результате преобразований уравнение равносильно данному?

Некоторую помощь в этом отношении могут оказать так называемые теоремы о равносильности уравнений. При этом, учитывая, что рассматриваемые нами теоремы справедливы для любого числового поля P, мы в их формулировках будем опускать слова «над полем P». Кроме того, ради простоты мы будем рассматривать лишь уравнения с одним неизвестным, хотя все рассуждения сохраняются и для случая любого конечного числа неизвестных.

Теорема 1. *Если функция $\varphi(x)$ определена в области определения уравнения*

$$f_1(x)=f_2(x), \tag{3}$$

то это уравнение равносильно уравнению

$$f_1(x)+\varphi(x)=f_2(x)+\varphi(x). \tag{4}$$

Иначе: *Если к обеим частям уравнения прибавить функцию, не теряющую смысла (определенную) в области определения данного уравнения, то получим уравнение, равносильное данному.*

Доказательство. Пусть α есть решение уравнения (3). Тогда значения $f_1(\alpha)$ и $f_2(\alpha)$ функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ равны, т. е. $f_1(\alpha)=f_2(\alpha)$ — числовое тождество. Кроме того, так как α входит в область определения уравнения (3), то функция $\varphi(x)$ при $x=\alpha$ определена, т. е. $\varphi(\alpha)$ — вполне определенное число. Следовательно,

$$f_1(\alpha)+\varphi(\alpha)=f_2(\alpha)+\varphi(\alpha) \tag{5}$$

есть числовое тождество. Из этого следует, что α является решением уравнения (4).

Обратно, если α есть решение уравнения (4), то равенство (5) является числовым тождеством. Вычтя из обеих его частей по числу $\varphi(\alpha)$, получим числовое тождество $f_1(\alpha) = f_2(\alpha)$, которое говорит о том, что α является решением уравнения (3). Таким образом, всякое решение уравнения (3) является решением уравнения (4), и обратно. Следовательно, уравнения (3) и (4) равносильны.

Доказанная теорема утверждает лишь равносильность уравнений (3) и (4) для того случая, когда функция $\varphi(\alpha)$ определена в области определения уравнения (3). Однако она ничего не говорит о том случае, когда последнее условие не соблюдается (что часто бывает). Рассмотрим этот случай.

Пусть α — корень уравнения (3) и функция $\varphi(x)$ в точке α определена. Тогда наши рассуждения в доказательстве сохраняются и α есть корень уравнения (4). Если же $\varphi(x)$ в точке α не определена, то α не будет корнем уравнения (4), так как α не входит в область определения уравнения (4). Если α — корень уравнения (4), то $\varphi(x)$ при $x=\alpha$ необходимо определена и, следовательно, α есть корень уравнения (3). Таким образом, если функция $\varphi(x)$ не теряет смысла лишь при тех значениях x, которые являются корнями уравнения (3), то уравнения (3) и (4) равносильны. В противном случае при переходе от уравнения (3) к уравнению (4) происходит потеря тех корней, при которых функция $\varphi(x)$ теряет смысл.

Пример 11. Уравнения $2x+1=x$ и $2x+1+\frac{1}{x+1}=x+\frac{1}{x+1}$ не равносильны, так как первое имеет корень $x=-1$, тогда как второе не имеет корней. Число -1 не является его корнем, так как не входит в область его определения. Таким образом, при переходе от первого уравнения ко второму произошла потеря корня. Это случилось потому, что прибавляемая функция $\frac{1}{x+1}$ не определена при $x=-1$, являющемся корнем первого уравнения.

Пример 12. Уравнения $2x+1=x$ и $2x+1+\frac{1}{x-1}=x+\frac{1}{x-1}$ равносильны. Каждое из них имеет единственный корень -1. Дело в том, что здесь прибавляемая функция $\frac{1}{x-1}$ хотя и не определена на всей области определения первого уравнения, однако она теряет смысл лишь в точке $x=1$, не являющейся корнем первого уравнения.

Из теоремы 1 следует, что члены уравнения можно переносить из одной части в другую с изменением знака на противоположный.

Теорема 2. *Если функция $\varphi(x)$ определена и не принимает значения, равного нулю, в области определения уравнения*

$$f_1(x)=f_2(x), \tag{3}$$

то уравнение (3) равносильно уравнению

$$f_1(x)\varphi(x)=f_2(x)\varphi(x). \tag{6}$$

Иначе: *Если обе части уравнения умножить на функцию, не теряющую смысл и не обращающуюся в нуль в области определения данного уравнения, то получим уравнение, равносильное данному.*

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1, и мы его опустим. Рассмотрим случаи, когда условия теоремы 2 не выполняются.

1) Функция $\varphi(x)$ в области определения уравнения (3) может обращаться в нуль. Пусть $\varphi(\alpha)=0$. Тогда очевидно, что α будет корнем уравнения (6). Если α не было корнем уравнения (3), то при переходе от уравнения (3) к уравнению (6) налицо приобретение нового корня. Если же α было корнем уравнения (3), то приобретения нового корня не произойдет (увеличится лишь «кратность» корня α, что при определении равносильности уравнений не учитывается).

2) Функция $\varphi(x)$ определена не во всей области определения уравнения (3). Пусть, например, число α входит в область определения уравнения (3) и $\varphi(\alpha)$ не определена. Тогда α может не быть корнем уравнения (6). Если число α являлось корнем уравнения (3), то при переходе от уравнения (3) к уравнению (6) может произойти потеря корня α.

Таким образом, в случае, когда условия теоремы 2 не соблюдаются, при переходе от уравнения (3) к уравнению (6) может произойти как приобретение, так и потеря корней. Приобретаются те корни, которые обращают в нуль функцию $\varphi(x)$ и не являются корнями уравнения (3); теряться могут те корни уравнения (3), в которых функция $\varphi(x)$ не определена.

Пример 13. Пусть дано уравнение

$$\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x+1}=\frac{1-x}{x^2-1}.$$

Пользуясь теоремой 1, перенесем член $\frac{1-x}{x^2-1}$ в левую часть. Получим уравнение $\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x+1}-\frac{1-x}{x^2-1}=0$, равносильное данному.

Произведя над левой частью полученного уравнения тождественные преобразования (сложение дробей), получим: $\frac{x^2+x}{x^2-1}=0$. Последнее уравнение, а следовательно, и данное уравнение, имеет единственный корень: $x_1=0$.

Если же умножить данное уравнение на функцию x^2-1 (т. е., приведя члены уравнения к общему знаменателю, отбросить последний), то получим уравнение $x^2+x=0$, которое имеет корни: $x_1=0$, $x_2=-1$. Появление нового корня -1 вызвано тем, что функция x^2-1 обращается в нуль при $x=-1$, не являющемся корнем данного уравнения. Следовательно, при решении дробных уравнений, отбрасывая знаменатель, нужно предварительно определить значения переменных, при которых он обращается в нуль, с тем чтобы эти значения впоследствии не счесть за решения данного уравнения.

Пример 13. Уравнение $x^2-x=0$ имеет два решения: $x_1=0$; $x_2=1$. Если же разделить обе его части на x, т. е. умножить на функцию $\frac{1}{x}$, то получим уравнение $x-1=0$, имеющее один корень: $x=1$. Потеря корня произошла потому, что функция $\frac{1}{x}$ теряет смысл при $x=0$, являющемся корнем данного уравнения.

Следовательно, деля обе части уравнения на некоторую функцию, следует предварительно определить, при каких значениях переменных она обращается в нуль, с тем чтобы впоследствии записать их в решения данного уравнения, если они входят в его область определения.

Из теоремы 2, в частности, следует, что обе части уравнения над полем P можно умножить на любое, отличное от нуля число из поля P.

Уравнение (2) называется *алгебраическим*, если $F(x, y, \ldots, z)$ и $F_2(x, y, \ldots, z)$ являются целыми рациональными функциями, т. е. алгебраическими выражениями, составленными из чисел и переменных $x, y, \ldots, z$ с помощью конечного числа действий сложения и умножения.

Пользуясь теоремой 1 и свойствами сложения и умножения чисел, можно всякое алгебраическое уравнение с одним неизвестным над полем P привести к виду: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n \in P$, если при этом $a_0 \neq 0$, то n называется *степенью* уравнения.

Очевидно, что для алгебраического уравнения над полем P областью определения является все множество P.

При решении алгебраических уравнений наряду с теоремами 1, 2 часто используется следующая теорема, справедливая для любого числового поля.

Теорема 3. *Если* $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \ldots f_k(x)$, где $f(x)$, $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ — *целые рациональные функции, то уравнение*

$$f(x) = 0 \tag{7}$$

равносильно совокупности уравнений;

$$f_1(x) = 0,\ f_2(x) = 0,\ \ldots,\ f_k(x) = 0, \tag{8}$$

т. е. множество решений уравнения (7) *равно объединению множеств решений уравнений* (8).

Заметим, что теорема 3 остается в силе и в том случае, когда f и f_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ являются целыми рациональными функциями от нескольких переменных.

Справедливость теоремы 3 следует из того, что в числовых множествах отсутствуют делители нуля, т.е. произведение двух и более чисел равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю.

Так как для решения алгебраических уравнений первой и второй степени известны простые формулы, то из теоремы 3 следует, что для решения алгебраического уравнения (7) достаточно его левую часть разложить на множители первой и второй степени.

Пусть теперь дана система уравнений над полем P:

$$\begin{cases} f_1(x, y, \ldots, z) = \varphi_1(x, y, \ldots, z), \\ f_2(x, y, \ldots, z) = \varphi_2(x, y, \ldots, z), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_k(x, y, \ldots, z) = \varphi_k(x, y, \ldots, z). \end{cases} \tag{9}$$

Решением системы уравнений над полем P называется такая система значений неизвестных $x, y, \ldots, z$ из поля P, которая удовлетворяет каждому уравнению данной системы.

Если система уравнений имеет хотя бы одно решение, то она называется *совместной*. В противном случае система называется *несовместной или противоречивой*.

Система уравнений называется *определенной*, если она имеет точно одно решение. Если же система имеет более одного решения, то она называется *неопределенной*.

Исследовать систему уравнений — значит выяснить: 1) совместна она или несовместна; 2) в случае совместности определенна или неопределенна.

Решить систему уравнений — значит найти все ее решения, если таковые существуют.

Так же, как и для одного уравнения, для системы уравнений, естественно, определяются понятия области определения системы уравнений и равносильности двух систем уравнений.

При решении систем уравнений часто используется теорема.

Теорема 4. *Если c_1, c_2 — любые числа из поля P, причем $c_2 \neq 0$, то система уравнений (9) над полем P равносильна системе уравнений:*

$$\left\{\begin{array}{c} f_1(x, y, \ldots, z) = \varphi_1(x, y, \ldots, z), \\ c_2 f_2(x, y, \ldots, z) + c_1 f_1(x, y, \ldots, z) = c_2 \varphi_2(x, y, \ldots, z) + \\ + c_1 \varphi_1(x, y, \ldots, z), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_k(x, y, \ldots, z) = \varphi_k(x, y, \ldots, z). \end{array}\right. \qquad (10)$$

Здесь система уравнений (10) отличается от системы (9) лишь одним (вторым) уравнением, которое получено из первого и второго уравнений данной системы умножением соответственно на числа c_1 и c_2 и почленным сложением полученных уравнений. Заметим, что вместо первого и второго уравнений можно было взять два любых других ее различных уравнения. Поэтому теореме 4 можно было бы дать такую формулировку:

«Если к какому-либо уравнению системы, умноженному на некоторое отличное от нуля число, прибавить некоторое другое уравнение этой системы, умноженное на любое число, то получим систему уравнений, равносильную данной».

Доказательство. Так как системы (9) и (10) отличаются только вторыми уравнениями, то достаточно лишь доказать, что всякое решение системы (9) удовлетворяет второму уравнению системы (10) и всякое решение системы (10) удовлетворяет второму уравнению системы (9).

Пусть система чисел $x = \alpha$, $y = \beta$, $\ldots$, $z = \gamma$ есть решение системы уравнений (9). Тогда имеем числовые тождества:

а) $f_1(\alpha, \beta, \ldots, \gamma) = \varphi_1(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$;

б) $f_2(\alpha, \beta, \ldots, \gamma) = \varphi_2(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$.

Умножив эти тождества соответственно на числа c_1, c_2, получим снова числовые тождества; сложив их почленно, получим тождество

$$\text{в)}\quad c_1 f_1(\alpha, \beta, \ldots, \gamma) + c_2 f_2(\alpha, \beta, \ldots, \gamma) = \\ = c_1\varphi_1(\alpha, \beta, \ldots, \gamma) + c_2\varphi_2(\alpha, \beta, \ldots, \gamma),$$

которое говорит о том, что $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ удовлетворяют второму уравнению системы (10).

Обратно, если $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ есть решение системы (10), то имеем числовые тождества а) и в).
Умножив тождество а) на число c_1 и вычтя полученное при этом тождество из в), получим тождество $c_2 f_2(\alpha, \beta, \ldots, \gamma) = c_2\varphi_2(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$. Разделив обе его части на c_2 ($c_2 \neq 0$!), получим числовое тождество $f_2(\alpha, \beta, \ldots, \gamma) = \varphi_2(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$, которое говорит о том, что $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ удовлетворяют второму уравнению системы (9). Этим теорема доказана.

Иногда при решении системы уравнений вместо умножения на числа c_1, c_2 приходится умножать уравнения на функции $\psi_1(x, y, \ldots, z)$ и $\psi_2(x, y, \ldots, z)$. Легко видеть что при этом получим равносильную ей систему уравнений, если функции ψ_1 и ψ_2 не теряют смысла ни при каких системах значений переменных, которые являются решениями данной системы уравнений и функция ψ_2 не обращается в нуль ни при каких значениях неизвестных из области определения системы уравнений.

Заметим, что доказанная нами теорема применяется в школе при решении систем уравнений так называемым способом алгебраического сложения.

Если всякое решение некоторой системы уравнений удовлетворяет уравнению $f(x, y, \ldots, z) = \varphi(x, y, \ldots, z)$, то последнее называется следствием данной системы уравнений.

Имеет место следующая очевидная теорема.

Теорема 5. *Если из данной системы уравнений удалить уравнение*, являющееся следствием системы остальных ее уравнений, то получим систему уравнений, равносильную данной.

Эта теорема часто применяется при решении систем линейных уравнений (§ 4).

§ 3. Матрицы и определители.

Прямоугольная таблица чисел

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}, \end{matrix}$$

состоящая из m строк и n столбцов, называется *матрицей*.

Существуют различные виды обозначений матриц:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ или } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ или}$$

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Мы будем пользоваться первым из указанных обозначений. Кроме этого, будем также обозначать матрицы или прописными латинскими буквами A, B, C, ..., или символом (a_{ij}).

Если хотят подчеркнуть, что матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

состоит из m строк и n столбцов, то называют ее $(m \times n)$-матрицей (читается: эм-эн-матрица).

Числа, из которых составлена матрица, называются ее *элементами*. Они занумерованы двумя индексами: первый указывает номер строки, а второй — номер столбца, на пересечении которых находится рассматриваемый элемент.

Если элементы матрицы принадлежат полю P, то говорят о матрице над полем P. Мы будем рассматривать матрицы над полем комплексных чисел.

Две матрицы: $(m \times n)$-матрица A и $(m^1 \times n^1)$-матрица B — называются *однотипными* в том и только в том случае, когда $m = m^1$ и $n = n^1$.

Две однотипные матрицы называются *равными*, если каждый элемент одной из них равен соответствующему элементу (элементу с теми же индексами) другой.

Матрица, в которой число строк равно числу столбцов и равно n, называется *квадратной* матрицей порядка n.

Квадратные матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

называются соответственно *нулевой* и *единичной.*

Каждой квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число, называемое ее определителем. Это производится следующим образом.

Выберем n элементов матрицы с таким условием, чтобы они находились в разных строках (т. е. по одному элементу из каждой строки) и одновременно в разных столбцах (по одному элементу из каждого столбца). Расположим их в таком порядке: сначала — элемент из первой строки, затем — из второй и т. д.:

$$a_{1\alpha_1},\ a_{2\alpha_2},\ \ldots,\ a_{n\alpha_n}.$$

Вторые индексы (номера столбцов) образуют последовательность $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, являющуюся некоторой перестановкой из чисел $1, 2, \ldots, n$. Так как число перестановок из n элементов равно $n!$, то существует $n!$ таких наборов. Обозначим через i число инверсий в перестановке $\{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\}$ и составим произведение

$$(-1)^i\ a_{1\alpha_1}\ a_{2\alpha_2},\ \ldots\ a_{n\alpha_n}. \qquad (1)$$

Определение. *Определителем квадратной матрицы n-го порядка A* (или просто определителем n-го порядка) называется сумма всевозможных произведений (1). Иными словами, определитель есть сумма $n!$ слагаемых; каждое слагаемое есть произведение n элементов матрицы A, расположенных в разных строках и разных столбцах, взятое со знаком плюс или минус в зависимости от четности или нечетности числа инверсий в перестановке из вторых индексов (при условии, что первые индексы следуют в естественном порядке $1, 2, \ldots, n$). Обозначая определитель матрицы A через $|A|$, мы можем записать:

$$|A| = \Sigma(-1)^i\, a_{1\alpha_1}\ a_{2\alpha_2}\ \ldots\ a_{n\alpha_n}.$$

Здесь суммирование производится по всевозможным перестановкам $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ из чисел $1, 2, \ldots, n$.

Обычно определитель матрицы обозначается следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Пример 1. Найти определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Из чисел 1, 2 можно составить только две перестановки: $\{1, 2\}$ и $\{2, 1\}$. Число инверсий в первой из них равно нулю, во второй — единице. Следовательно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}.$$

Пример 2. Найти определитель третьего порядка:

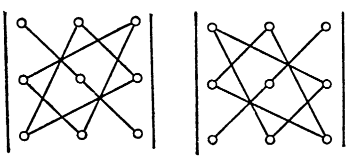
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Из чисел 1, 2, 3 можно составить $3! = 6$ перестановок:

$$\begin{array}{ll} \{1, 2, 3\} & \{1, 3, 2\} \\ \{2, 3, 1\} & \{2, 1, 3\} \\ \{3, 1, 2\} & \{3, 2, 1\} \end{array}$$

Из этих перестановок три, стоящие слева, имеют четное число инверсий (0, 2 и 2 соответственно), а остальные три — нечетное число инверсий (1, 1 и 3 соответственно). Следовательно, определитель будет равен следующей сумме 6 слагаемых:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$



Черт. 1

Приведем удобную для запоминания схему подсчета определителя третьего порядка. На этой схеме элементы соединены по три; в левой части соединены элементы, произведения которых берутся со знаком плюс, в правой части показаны произведения со знаком минус. Это правило называется правилом Саррюса.

Точно так же, как в примерах 4, 5, можно было бы, опираясь лишь на определение определителя четвертого порядка, найти:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Однако это правило будет весьма громоздким, ибо определитель четвертого порядка содержит 4!, или 24 члена. И вообще с ростом порядка определителя число его членов возрастает очень быстро. Так, определитель пятого порядка содержит 120 членов, а определитель десятого порядка 3 628 800 членов. Поэтому возникает необходимость в таких методах вычисления определителей, которые не исходили бы непосредственно из определения определителя, а использовали какие-либо, быть может, более глубокие свойства определителей, но зато технически менее сложные. Чтобы указать практически приемлемые способы вычисления определителей, нам понадобится ряд свойств определителей. Перечислим их, не останавливаясь на доказательствах.

1°. Если в определителе (2) каждую строку заменить столбцом с тем же номером, то определитель не изменится, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Свойство 1° утверждает, что строки и столбцы матрицы по отношению к ее определителю равноправны. Поэтому остальные свойства определителей будем формулировать лишь для строк, хотя, разумеется, они в равной мере будут справедливы и для столбцов.

2°. Если какие-либо два столбца (или строки) определителя поменять местами, то абсолютная величина определителя останется неизменной, а знак изменится на противоположный, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1i} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2i} \dots a_{2j} \dots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} \dots a_{ni} \dots a_{nj} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{1i} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2j} \dots a_{2i} \dots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} \dots a_{nj} \dots a_{ni} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Из свойства 2°, в частности, следует, что определитель, у которого соответствующие элементы двух столбцов (или строк) равны между собой, равен нулю.

3°. Если элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число k, то определитель умножится на k, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & ka_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & ka_{2i} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & ka_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример 3.

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -7 & 8 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -7 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 119 = 238.$$

Из свойства 3° следует, что определитель, у которого элементы каких-либо двух строк (столбцов) соответственно пропорциональны, равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} & \ldots & ka_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i} & \ldots & ka_{2i} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ni} & \ldots & ka_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 4.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -9 \\ 2 & 5 & -6 \\ -1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -3.3 \\ 2 & 5 & -3.2 \\ -1 & 7 & (-3)(-1) \end{vmatrix} = 0.$$

4°. Если в матрице каждый элемент i-й строки (i-го столбца) является суммой двух слагаемых, то определитель такой матрицы равен сумме двух определителей: в первом из них в качестве i-й строки (i-го столбца) берутся первые слагаемые, а во втором берутся вторые слагаемые [остальные строки (столбцы) неизменны].

Пример 5. $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4+3 & 1 \\ 4 & -3+1 & 4 \\ 2 & 1+2 & 5 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -125 - 39 = -164.$$

Из свойств 3° и 4° легко вытекает следующее свойство определителей.

5°. Определитель не изменится, если к элементам какой-либо его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

Свойство 5° является очень важным в практическом отношении. Оно позволяет «делать» нули в определителе, т. е. сводить вычисление одного определителя к вычислению другого, более простого определителя.

Пример 6. Вычислить определитель:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -6 \\ 4 & +19 & +9 \\ -2 & -17 & 24 \end{vmatrix}$$

Этот определитель можно вычислить, пользуясь правилом Саррюса, однако вычисления, которые придется при этом проделать, будут громоздкими. Поэтому вычислим этот определитель, используя свойство 5°.

Прибавим первую строку определителя D, умноженную на -2 и 1, соответственно к второй и третьей строкам. Так как от этого определитель не изменится, то имеем:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -6 \\ 0 & 5 & 21 \\ 0 & -10 & 18 \end{vmatrix}$$

Теперь, прибавив к третьей строке вторую, умноженную на 2, получим:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -6 \\ 0 & -1 & 21 \\ 0 & 0 & 60 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)\cdot 60 = -120.$$

Для вычисления определителей исключительно важным является еще одно свойство — возможность «разлагать» определитель по какой-либо строке или столбцу; это позволяет сводить вычисление определителя n-го порядка к вычислению определителей меньших порядков. Чтобы сформулировать это свойство, необходимо ввести понятия минора и алгебраического дополнения.

Если в $(m \times n)$-матрице A выделить какие-либо k строк и столько же столбцов ($1 \leqslant k \leqslant min\{m, n\}$), то пересечением этих k строк и k столбцов образуется матрица A' (подматрица матрицы A). Определитель матрицы A' называется *минором* (k-го порядка) матрицы A.

Пример 8. Матрица

$$\begin{Vmatrix} 3 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 7 & 8 \\ -2 & 3 & 5 & -1 \end{Vmatrix}$$

имеет 4 минора третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & -3 & 7 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -126, \quad \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 8 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -51,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 7 & 8 \\ -2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -209, \quad \begin{vmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -3 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 178,$$

18 миноров второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -11, \quad \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 5, \quad \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= -9 \text{ и т. д.}$$

и 12 миноров первого порядка. Минорами первого порядка являются сами элементы матрицы. Таким образом, всего исходная матрица имеет 33 минора.

Если дан определитель n-го порядка, то его минорами называют миноры той квадратной матрицы, определителем которой он является. В частности, миноры $(n-1)$-го порядка (всего их в определителе n^2 штук) могут быть получены поочередным удалением (вычеркиванием) какой-либо строки и какого-либо столбца. Минор, получающийся из определителя удалением i-й строки и j-го столбца, называется минором элемента a_{ij}, стоящего на пересечении i-й строки и j-го столбца.

Пример 9. В определителе

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

минором элемента a_{23} будет определитель:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Минор элемента a_{ij} будем обозначать M_{ij}. Минор M_{ij}, взятый со знаком плюс, если сумма $i+j$ четная, и со знаком минус, если сумма $i+j$ нечетная, называется *алгебраическим дополнением элемента* a_{ij}. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} будем обозначать A_{ij}. Таким образом, в соответствии с определением

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Теперь можно сформулировать следующее свойство определителей.

6°. Всякий определитель равен сумме произведений всех элементов любой его строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{l=1}^{n} a_{ki} A_{kl} = \sum_{l=1}^{n} a_{jl} A_{jl}.$$

Здесь записано разложение определителя соответственно по элементам k-й строки и l-го столбца.

Пример 10. Вычислим определитель четвертого порядка разложением по второй строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 8 & 7 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 5 & 8 & 7 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 8 & 7 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 4(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+(-2)(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \\ -2 & 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2)(-76) + (-1)\,46 + (-4)(-32) + (-2)(-48) =$$
$$= 152 - 46 + 128 + 96 = 330.$$

И наконец, сформулируем еще одно свойство определителей.

7°. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki} A_{li} = 0 \quad \text{при} \quad k \neq l.$$

Пример 11. Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Вычислим сумму произведений элементов первой строки на алгебраические дополнения соответствующих элементов второй строки:

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 1(-1)^3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} +$$
$$+ 2(-1)^4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\,5 +$$
$$+ (+2)\cdot 6 + 1\cdot(-7) = -5 + 12 - 7 = 0.$$

Имея в виду приложения к исследованию систем линейных уравнений, введем еще одно важное понятие — понятие ранга матрицы.

Рангом матрицы называется наибольший порядок ее отличных от нуля миноров. Если ранг матрицы A равен r, то пишут: ранг $A = r$.

Пример 12. Найти ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -13 & 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

Данная матрица имеет миноры второго порядка, отличные от нуля. Таковым является, например, минор:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 9,$$

находящийся в ее левом верхнем углу. Вычисляя теперь миноры третьего порядка, мы получим: все 10 миноров третьего порядка данной матрицы равны нулю. Отсюда и из того, что миноров выше третьего порядка матрица A не имеет, следует: наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы A равен двум, т. е. ранг $A = 2$.

Из приведенного примера видно, что вычисление ранга матрицы, основанное на его определении, весьма громоздко (нам пришлось вычислять 10 миноров третьего порядка). Ниже будет дано правило вычисления ранга, более удобное в практическом отношении.

Понятие ранга матрицы тесно связано с понятием линейной зависимости строк и столбцов матрицы. Остановимся кратко на этом вопросе.

Пусть имеем матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Обозначим ее строки соответственно буквами $A_1, A_2, \dots, A_m$. Так,

$$A_i = (a_{i1}\, a_{i2}\, \dots\, a_{in}).$$

Если каждый элемент строки A_k равен сумме соответствующих элементов строк A_i и A_j, то будем говорить, что строка A_k равна сумме строк A_i и A_j, и писать:

$$A_k = A_i + A_j.$$

Если все элементы строки A_r получены из соответствующих элементов строки A_s умножением на одно и то же число c, то будем говорить, что строка A_r равна произведению строки A_s на число c, и писать:

$$A_r = cA_s.$$

Пример 13. В матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 6 & 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

третья строка равна сумме первых двух, а четвертая равна третьей строке, умноженной на 2, т. е.

$$A_3 = A_1 + A_2, \quad A_4 = 2A_3.$$

Пусть

$$A_i, \ A_j, \ \ldots, \ A_k, \ A_l \tag{3}$$

— некоторые строки матрицы A. Если

$$A_l = \alpha A_i + \beta A_j + \ldots + \delta A_k, \tag{4}$$

то говорят, что строка A_l является линейной комбинацией строк A_i, A_j, ..., A_k или что A_l линейно выражается через строки A_i, A_j, ..., A_k. Говорят также, что строки (3) линейно зависимы, если одна из них линейно выражается через остальные, например A_l через A_i, A_j, ..., A_k, как записано в (4). В противном случае, т. е. если ни одна из строк (3) не выражается линейно через остальные строки, мы говорим, что строки (3) линейно независимы.

Вообще говоря, установить линейную зависимость (или независимость) нескольких строк не так просто. Однако если даны всего две строки, то вопрос о их линейной зависимости решается легко. В самом деле, две строки A_i, A_j будут линейно зависимы в том и только в том случае, когда $A_i = \alpha A_j$, т. е. когда эти строки пропорциональны. Отсюда, между прочим, можно заключить, что понятие линейной зависимости является обобщением понятия пропорциональности.

Пример 14. Строки матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

линейно зависимы, так как

$$A_3 = A_1 - A_2.$$

Если ограничиться только строками A_1, A_2, то они будут линейно независимы, так как A_1 не пропорционально A_2.

Теорема. (*О ранге матрицы.*) *Пусть некоторый минор M r-го порядка в матрице A отличен от нуля, а все содержащие его миноры $(r+1)$-го порядка равны нулю, тогда:*

1) r строк матрицы A, на которых расположен минор M, линейно независимы, а любая другая строка матрицы является их линейной комбинацией.

2) Ранг матрицы A равен r.

Теорема о ранге матрицы позволяет упростить процесс нахождения ранга. Если уже найден минор M r-го порядка, отличный от нуля, то мы переходим к вычислению миноров $(r+1)$-го порядка, однако не всевозможных, а только таких, которые содержат внутри себя минор M. Если все такие («окаймляющие») миноры равны нулю, то ранг матрицы равен r. Если же среди них найдется отличный от нуля минор M', то переходим к минорам $(r+2)$-го порядка, содержащим M', и т. д., пока не найдем ранг A. Так, в примере 12 вместо десяти миноров третьего порядка достаточно было бы вычислить лишь три минора:

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -13 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -13 & -5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -13 & 7 \end{vmatrix},$$

содержащие в себе минор второго порядка M (обведенный пунктиром).

При доказательстве теоремы о ранге матрицы наиболее трудным является доказательство утверждения 1. Эту часть доказательства теоремы мы опускаем. Что касается утверждения 2, то оно вытекает из следующего самостоятельного предложения, которое мы докажем.

Лемма. *Если в матрице A имеется r строк, таких, что все остальные строки линейно выражаются через них, то все миноры порядка выше r матрицы A равны нулю. В частности, $\operatorname{rang} A \leqslant r$.*

Доказательство. Пусть, для определенности, все строки линейно выражаются через первые r строк: A_1, $A_2, \ldots, A_r$. Рассмотрим какой-либо минор $\tilde{M}$ матрицы A, порядок которого $> r$; докажем, что $\tilde{M} = 0$. С этой целью оставим в матрице A только те столбцы, в которых расположен минор $\tilde{M}$; получится матрица $\tilde{A}$. Все строки матрицы $\tilde{A}$ по условию линейно выражаются через первые r строк: $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_r$. В частности, все строки минора $\tilde{M}$ линейно выражаются через $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_r$. Записав каждую строку минора $\tilde{M}$ в виде линейной комбинации строк $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_r$ и воспользовавшись свойством 4° определителя, мы представим $\tilde{M}$ в виде суммы определителей, в каждом из которых любая строка пропорциональна одной из строк $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_r$. Так как порядок минора $\tilde{M}$ больше r, то в каждом из этих определителей будут иметься по крайней мере две пропорциональные строки, вследствие чего определитель равен нулю. Отсюда и $\tilde{M}=0$, что и требовалось доказать.

§ 4. Системы линейных уравнений

1. Система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

Определитель

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

составленный из коэффициентов при неизвестных системы (1), называется *определителем системы* (1).

Теорема Крамера. *Если определитель D системы n линейных уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то система имеет единственное решение:*

$$x_1 = \frac{D_1}{D}; \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D}, \tag{2}$$

где D_i — *определитель:*

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} \dots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix},$$

полученный из определителя D заменой в нем i-го столбца столбцом свободных членов.

Доказательство. Пусть система (1) имеет решение:

$$x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ \dots,\ x_n = \alpha_n.$$

Тогда имеем числовые тождества:

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n &= b_1, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n &= b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n &= b_n. \end{aligned} \tag{3}$$

Умножим эти тождества соответственно на алгебраические дополнения $A_{11}, A_{21}, \dots, A_{n1}$ элементов первого столбца определителя D и полученные тождества сложим почленно:

$$\begin{aligned} &(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \dots + a_{n1}A_{n1})\alpha_1 + \\ &+(a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \dots + a_{n2}A_{n1})\alpha_2 + \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+(a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \dots + a_{nn}A_{n1})\alpha_n = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1}. \end{aligned} \tag{4}$$

В силу свойств 6 и 7 определителя (§ 3) находим, что коэффициент при α_1 в тождестве (4) равен D, а коэффициенты при $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ равны нулю. Кроме того, замечаем, что правая часть тождества (4) отличается от определителя

$$D = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \dots + a_{n1}A_{n1}$$

лишь тем, что вместо элементов $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}$ фигурируют соответственно числа $b_1, b_2, \dots, b_n$. Следовательно, в правой части (4) стоит определитель, полученный из D заменой в нем первого столбца столбцом свободных членов, т. е. D_1.

На основании сказанного тождество (4) можно записать в виде

$$D_1\alpha_1 = D.$$

Так как $D \neq 0$, то отсюда имеем:

$$\alpha_1 = \frac{D_1}{D}.$$

Аналогично, умножая тождества (3) последовательно на алгебраические дополнения элементов 2-го, ..., n-го столбцов определителя D, получим:

$$\alpha_2 = \frac{D_2}{D}, \ \ldots, \ \alpha_n = \frac{D_n}{D}.$$

Таким образом, мы доказали, что если система уравнений (1) имеет решение

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_n,$$

то оно единственно и находится по формулам (2). Чтобы закончить доказательство теоремы, нам остается лишь проверить, что числа

$$\frac{D_1}{D}, \ \frac{D_2}{D}, \ \ldots, \ \frac{D_n}{D} \tag{5}$$

действительно удовлетворяют уравнениям системы (1). В том, что это так, мы убедимся непосредственной подстановкой этих чисел в уравнения системы (1) вместо неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Проделаем это лишь для первого уравнения системы (1):

$$a_{11}\frac{D_1}{D} + a_{12}\frac{D_2}{D} + \ldots + a_{1n}\frac{D_n}{D} = b_1,$$

или

$$a_{11}D_1 + a_{12}D_2 + \ldots + a_{1n}D_n = Db_1.$$

Заменив здесь определитель D_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ его разложением по элементам i-го столбца, получим:

$$\begin{aligned}
&a_{11}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1}) + \\
&+ a_{12}(b_1A_{12} + b_2A_{22} + \ldots + b_nA_{n2}) + \\
&\cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\
&+ a_{1n}(b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \ldots + b_nA_{nn}) = Db_1,
\end{aligned}$$

или

$$\begin{gathered}(a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ \dots\ +a_{1n}A_{1n})\,b_1+\\ +(a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+\ \dots\ +a_{1n}A_{2n})\,b_2+\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ +(a_{11}A_{n1}+a_{12}A_{n2}+\ \dots\ +a_{1n}A_{nn})b_n=Db_1.\end{gathered}$$

По свойствам 6 и 7 определителя коэффициент b_1 равен D, а коэффициенты при $b_2, \dots, b_n$ равны нулю. Следовательно, имеем тождество

$$Db_1=Db_1,$$

т. е. числа (5) удовлетворяют (первому) уравнению системы (1). Аналогично убедимся, что они удовлетворяют и всем остальным ее уравнениям.

Таким образом, система уравнений (1) имеет единственное решение, которое находится по формулам (2). Этим теорема доказана. Формулы (2) называют формулами Крамера.

Пример 1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}3x_1-2x_2-2x_3=5,\\ -5x_1\qquad\quad +3x_3=12,\\ 2x_1+4x_2-\ x_3=-31.\end{cases}$$

Так как определитель этой системы

$$D=\begin{vmatrix}3 & -2 & -2\\ -5 & 0 & 0\\ 2 & 4 & -1\end{vmatrix}=2$$

отличен от нуля, то к ней применима теорема Крамера и следовательно, $x_1=\dfrac{D_1}{D}$, $x_2=\dfrac{D_2}{D}$, $x_3=\dfrac{D_3}{D}$,

или $x_1=\dfrac{\begin{vmatrix}5 & -2 & -2\\ 12 & 0 & 3\\ -31 & 4 & -1\end{vmatrix}}{2}=3$; $x_2=\dfrac{\begin{vmatrix}3 & 5 & -2\\ -5 & 12 & 3\\ 2 & -31 & -1\end{vmatrix}}{2}=-7$;

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix}3 & -2 & 5\\ -5 & 0 & 12\\ 2 & 4 & -31\end{vmatrix}}{2}=9.$$

Ответ. $x_1=3$, $x_2=-7$, $x_3=9$.

Заметим, что решение системы уравнений по формулам Крамера при $n>2$ весьма громоздко. Так, уже при $n=3$ нам пришлось вычислить 4 определителя третьего порядка. Поэтому теорема Крамера имеет в основном теоретическое значение. В конце этого параграфа мы приведем более простой в практическом отношении способ решения произвольной системы линейных уравнений (способ Гаусса).

Укажем одно следствие из теоремы Крамера, относящееся к так называемой однородной системе уравнений.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если свободный член каждого из ее уравнений равен нулю.

Ясно, что любая однородная система линейных уравнений с неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет решение:

$$x_1=0,\ x_2=0,\ \ldots,\ x_n=0.$$

Это решение называется нулевым. Представляет интерес следующий вопрос: в каком случае нулевое решение является единственным решением однородной системы? И в каком случае наряду с нулевым решением система имеет и ненулевое решение?

Из теоремы Крамера следует, что однородная система n линейных уравнений с n неизвестными с определителем, отличным от нуля, имеет единственное и, следовательно, только нулевое решение.

Значит, если однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет ненулевое решение, то ее определитель равен нулю.

Пример 2. При каких значениях параметра k система уравнений

$$\begin{cases} kx+y=0, \\ x+ky=0 \end{cases}$$

имеет ненулевое решение?

Как было показано выше, для наличия ненулевого решения необходимо, чтобы определитель

$$D=\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix}=k^2-1$$

был равен нулю. Последнее же имеет место лишь при $k=1$ и $k=-1$.

Рассмотрим эти два случая:

1) $k=1$. Система принимает вид:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=0, \end{cases}$$

т. е. мы имеем фактически одно уравнение с двумя неизвестными. Придавая одному из неизвестных, например y, произвольные значения и находя соответствующие значения другого неизвестного, получим бесконечное множество решений данной системы.

2) Аналогичная ситуация имеет место и в случае, когда $k=-1$.

2. Общий критерий совместности произвольной системы линейных уравнений.

Пусть дана система

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (6)$$

m уравнений с n неизвестными.

Матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

называют соответственно матрицей и расширенной матрицей системы уравнений (6).

Вопрос о совместности системы уравнений (6) решается следующей теоремой.

Теорема Кронекера—Капелли. *Для того чтобы система линейных уравнений* (6) *была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ее матрица и расширенная матрица имели один и тот же ранг.*

Доказательство. Пусть ранг матрицы A равен r. Это означает, что некоторый минор M r-го порядка в матрице A отличен от нуля, а все миноры более высоких порядков равны нулю. Будем считать для определенности, что минор M расположен в левом верхнем углу матрицы, т. е. в первых r строках и первых r столбцах; этого всегда можно добиться подходящей перенумерацией уравнений и неизвестных. Итак,

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{7}$$

По теореме о ранге матрицы первые r строк матрицы A будут линейно независимы, а все остальные строки будут их линейными комбинациями. Следовательно,

$$A_{r+1} = k_1 A_1 + k_2 A_2 + \dots + k_r A_r; \tag{8}$$

аналогичные равенства (с другими коэффициентами) будут справедливы для строк $A_{r+2}, \dots, A_m$.

Доказательство необходимости. Предположим, что система (6) совместна, т. е. обладает хотя бы одним решением:

$$x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2\ , \dots ,\ x_n = \alpha_n.$$

Тогда имеем числовые тождества:

$$\begin{aligned} &a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b_1, \\ &a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = b_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n = b_m. \end{aligned} \tag{9}$$

Наша цель — доказать, что ранг матрицы B равен рангу матрицы A, т. е. r.

Для этой цели достаточно проверить, что все строки матрицы B, начиная с $(r+1)$-й и кончая последней, линейно выражаются через первые r строк. Действительно, тогда ранг $B \leqslant r$ (§ 3), и так как $\operatorname{rang} B \geqslant \operatorname{rang} A = r$, то $\operatorname{rang} B = r$.

Покажем, например, что $(r+1)$-я строка линейно выражается через первые r строк. С этой целью умножим первое из тождеств (9) на k_1, второе — на k_2 и т. д., наконец, r-е на k_r. Мы получим, учитывая (8), что

$$a_{r+1,1}\alpha_1 + a_{r+1,2}\alpha_2 + \dots + a_{r+1,n}\alpha_n = k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_r b_r$$

и, следовательно,

$$b_{r+1} = k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_r b_r.$$

Последнее равенство вместе с (8) показывает, что $(r+1)$-я строка матрицы B равна сумме первых r строк, умноженных соответственно на $k_1, k_2, \ldots, k_r$, что и требовалось доказать.

Доказательство достаточности. Пусть ранг матрицы B равен рангу A, т. е. r. Наша цель — доказать, что система совместна. Мы не только установим сейчас этот факт, но вместе с тем укажем, как найти все решения данной системы.

Очевидно, минор (7) можно рассматривать не только как минор матрицы A, но и как минор матрицы B; по условию этот минор отличен от нуля, а все миноры $(r+1)$-го порядка в матрице B равны нулю (ибо $\operatorname{rang} B = r$). Применяя к матрице B теорему о ранге матрицы, мы находим, что первые r строк этой матрицы линейно независимы, а остальные строки являются их линейными комбинациями. По отношению к системе (6) это означает, что первые r уравнений в ней независимы, а остальные уравнения являются их следствиями. Тогда по теореме 5 § 3 система (6) равносильна следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases} \tag{10}$$

При решении системы (10) может представиться два случая:

1) $r = n$. Тогда система содержит n уравнений с n неизвестными, причем определитель ее [т. е. минор (7)] отличен от нуля. По теореме Крамера система (10), а следовательно, и система (6) имеют единственное решение.

2) $r < n$. В этом случае, перенеся члены с неизвестными $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ (эти неизвестные называют свободными) в правые части соответствующих уравнений, получим систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - b_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \cdot \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots\ a_{rn}x_n, \end{cases} \tag{11}$$

равносильную системе (10).

Систему (11) можно рассматривать как систему r уравнений с r неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_r$ с определителем M, отличным от нуля; свободными членами уравнений системы (11) являются выражения, стоящие в правых частях соответствующих уравнений. Тогда к системе (11) применимы формулы Крамера, по которым мы находим неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}, \ \ldots, \qquad x_r = \frac{D_r}{D}, \tag{12}$$

где $D = M$, а

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1\,i-1}\ b_1 - a_{1\,r+1}\,x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n\ a_{1\,i+1} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2\,i-1}\ b_2 - a_{2\,r+1}\,x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n\ a_{2\,i+1} \ldots a_{2n} \\ \cdot \\ a_{r\,1} \ldots a_{r\,i-1}\ b_r - a_{r\,r+1}\,x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n\ a_{r\,i+1} \ldots a_{rn} \end{vmatrix}$$

Так как в $D_1, D_2, \ldots, D_r$ входят неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$, то по формулам (12) мы первые r неизвестных выразим через $x_{r+1}, \ldots, x_n$, т. е. найдем общее решение системы (6). Придавая неизвестным $x_{r+1}, \ldots, x_n$ произвольные значения, мы получим бесконечное множество частных решений системы (11), а следовательно, и исходной системы (6).

Случай $r > n$ невозможен, так как ранг матрицы A, т. е. наивысший порядок ее отличных от нуля миноров, не может быть больше числа столбцов.

Таким образом, в обоих возможных случаях ($r = n$ и $r < n$) данная система уравнений имеет решения, т. е. совместна. Этим теорема доказана.

Приведенное выше доказательство не только дает критерий совместности, но и указывает путь исследования произвольной системы линейных уравнений, который состоит в следующем.

1. Находим ранги матрицы и расширенной матрицы данной системы. Если они равны, то система совместна, в противном случае несовместна.

2. В случае совместности сравниваем ранг матриц с числом неизвестных. Если эти два числа равны, то система определенна (имеет единственное решение), в противном случае система неопределенна (имеет бесконечное множество решений).

Из доказанного критерия вытекает следующий интересный, хотя и вполне естественный, факт: число решений линейной системы уравнений совершенно не зависит от общего числа уравнений, а зависит лишь от числа неизвестных и ранга матриц, т. е. числа «самостоятельных» (независимых) уравнений.

Пример 3. Исследовать и решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases}$$

Найдем ранги матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & -4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Минор второго порядка матрицы A

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

отличен от нуля, а все окаймляющие его миноры третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

равны нулю. Следовательно,

$$\operatorname{rang} A = 2.$$

В то же время минор третьего порядка матрицы B

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

не равен нулю. Следовательно, $\operatorname{rang} B = 3$.

Таким образом, ранги матриц A и B различны, и данная система не совместна.

С точки зрения линейной зависимости это означает, что левые части наших уравнений связаны некоторой линейной зависимостью, которая не распространяется на правые части уравнений. В самом деле, нетрудно заметить, что левая часть f_3 третьего уравнения может быть получена из левых частей f_1, f_2 первого и второго уравнений: $3f_1 - f_2 = f_3$. Если бы эта зависимость распространялась и на свободные члены уравнений, то в третьем уравнении свободный член равнялся бы $3 \cdot 1-(-3)=6$, тогда как у нас в третьем уравнении свободный член равен 5. Вот почему система оказалась несовместной (противоречивой).

Пример 4. Исследовать и решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=1, \\ 2x_1+3x_2+x_3-2x_4=-3, \\ x_1+3x_2-4x_3+5x_4=6. \end{cases}$$

Эта система отличается от системы предыдущего примера лишь тем, что в третьем уравнении в качестве свободного члена взято число 6 вместо 5. Теперь минор третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix},$$

содержащий последний столбец матрицы B, равен нулю и

$$\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} B=2.$$

Система уравнений совместна и неопределенна. Для решения оставим первые два уравнения, причем члены с неизвестными x_3, x_4 перенесем вправо:

$$\begin{cases} x_1+2x_2=1+x_3-x_4, \\ 2x_1+3x_2=-3-x_3+2x_4. \end{cases}$$

Определитель этой системы

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-1.$$

Применяя формулы Крамера, получим:

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 1+x_3-x_4 & 2 \\ -3-x_3+2x_4 & 3 \end{vmatrix}}{-1}=-(9+5x_3-7x_4);$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+x_3-x_4 \\ 2 & -3-x_3+2x_4 \end{vmatrix}}{-1}=-(-5-3x_3+4x_4).$$

Таким образом, имеем общее решение системы:

$$x_1 = -9 - 5x_3 + 7x_4,$$
$$x_2 = 5 + 3x_3 - 4x_4;$$

x_3, x_4 — произвольные.

Придавая неизвестным x_3, x_4 произвольные значения, получим бесконечное множество частных решений.

3. Системы линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными.

Применим теорему Кронекера—Капелли к исследованию систем уравнений с двумя и тремя неизвестными.

Как известно, уравнение первой степени с двумя неизвестными $ax + by = c$, где хотя бы одно из чисел a, b отлично от нуля, представляет собой уравнение прямой на плоскости. Аналогично уравнение первой степени с тремя неизвестными $ax + by + cz = d$, когда хотя бы одно из чисел a, b, c отлично от нуля, является уравнением плоскости в пространстве.

В том случае, когда все коэффициенты при неизвестных в уравнении равны нулю, а свободный член отличен от нуля, уравнение не имеет решений, а следовательно, система, содержащая такое уравнение, несовместна. Если же наряду с коэффициентами при неизвестных и свободный член уравнения равен нулю, то такому уравнению удовлетворяют любые системы значений неизвестных, и, следовательно, такое уравнение из системы может быть удалено. При этом полученная система будет равносильна исходной. В связи с этим в дальнейшем мы будем рассматривать лишь такие уравнения, в которых хотя бы один из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля.

Произвольная система линейных уравнений с двумя неизвестными после элементарных тождественных преобразований может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = b_m. \end{cases} \qquad (13)$$

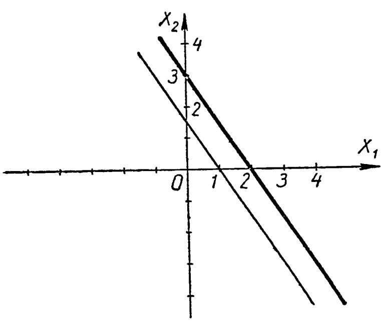
Так как в матрице системы (13) всего два столбца, а в расширенной матрице три столбца, то ранг матрицы (13) (будем обозначать его через r) не превышает 2, а ранг расширенной матрицы системы (13) (обозначим его через r^*) не превышает 3. Так как, далее, ранг расширенной матрицы может либо совпадать с рангом матрицы системы, либо превышать его на единицу (добавляется лишь один столбец), то для системы (13) возможны следующие 4 случая:

$$\begin{array}{lll} 1^0 & r = 1, & r^* = 1; \\ 2^0 & r = 1, & r^* = 2; \\ 3^0 & r = 2, & r^* = 2; \\ 4^0 & r = 2, & r^* = 3. \end{array}$$

Рассмотрим все эти случаи.

1°. $r = 1, r^* = 1$. В этом случае все строки расширенной матрицы пропорциональны одной. Следовательно, мы имеем по существу одно уравнение с двумя неизвестными, которое обладает бесчисленным множеством решений. Геометрически это значит, что все прямые, соответствующие уравнениям нашей системы, сливаются в одну прямую, которая и представляет геометрически множество решений системы (13).

2°. $r = 1, r^* = 2$. В этом случае по теореме Кронекера — Капелли система уравнений несовместна. С точки зрения линейной зависимости это означает, что левые части всех уравнений пропорциональны, однако имеются хотя бы два уравнения, для которых отношение правых частей не равно отношению левых. Геометрически имеем совокупность параллельных прямых, среди которых по крайней мере две не сливаются. Точек, общих для всех прямых, не существует.



Черт. 2

Пример 5. Решить графически систему уравнений:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = 12, \\ 3x_1 + 2x_2 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 = 3. \end{cases}$$

Из чертежа 2 видно, что первые две прямые сливаются, а третья им параллельна.

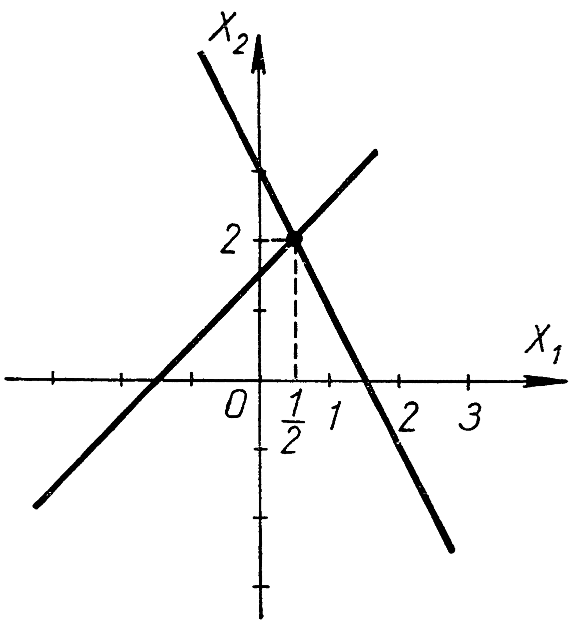
3^0 $r = 2$, $r^* = 2$. Система совместна и имеет единственное решение. Все прямые пересекаются в одной точке, координаты которой и являются решением данной системы.

Пример 6. Решить графически систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 = -3. \end{cases}$$

Прямые пересекаются в точке $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, следовательно, решением системы являются числа: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$.

4°. $r = 2$, $r^* = 3$. Система несовместна. Так как $r = 2$,

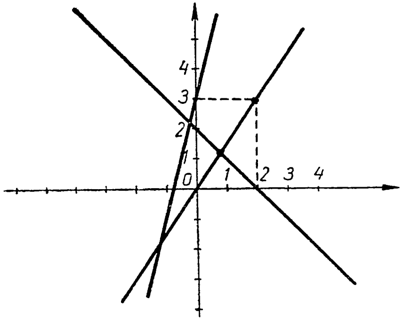


Черт. 3

то среди левых частей уравнений две независимы, а остальные являются их линейными комбинациями. Однако не все зависимости, существующие между левыми частями, распространяются на правые части. Геометрически прямые или все параллельные, или некоторые параллельные, а другие их пересекают, или же каждые две пересекаются, но точки пересечения различны. Во всех случаях общей точки пересечения всех прямых не существует.

Пример 7. Решить графически систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 = 0, \\ 4x_1 - x_2 = -3. \end{cases}$$



Черт. 4

Данная система уравнений не имеет решений.

Теперь рассмотрим кратко случаи, которые могут представиться при исследовании системы линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 = b_m. \end{cases}$$

Если r — ранг матрицы системы,
а r^* — ранг ее расширенной матрицы,
то возможны следующие 6 случаев.

1°. $r = 1$, $r^* = 1$. Система уравнений совместна и имеет бесконечное множество решений. По существу мы имеем дело с одним уравнением с тремя неизвестными, ибо коэффициенты всех уравнений пропорциональны. Геометрически это значит, что все плоскости сливаются в одну плоскость, координаты каждой точки которой удовлетворяют уравнениям данной системы.

2°. $r = 1$, $r^* = 2$. Система несовместна. Геометрически все плоскости параллельны, причем некоторые из них могут сливаться (но не все). Точек, общих всем плоскостям, нет.

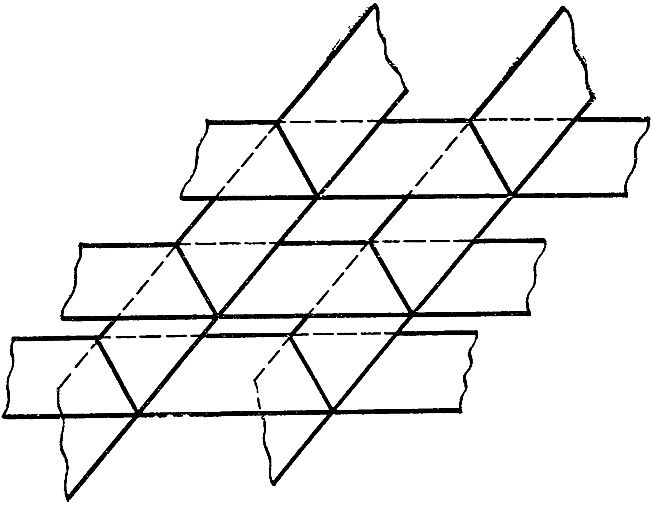
3°. $r = 2$, $r^* = 2$. Система совместна и неопределенна. Геометрически все плоскости пересекаются по одной прямой, координаты точек которой и образуют множество решений данной системы.

4°. $r = 2$, $r^* = 3$. Система несовместна.

В этом случае возможны следующие геометрические интерпретации:

а) Все плоскости разбиваются на два класса взаимно параллельных плоскостей, причем плоскости одного класса пересекаются с плоскостями другого (черт. 5).

б) Две плоскости пересекаются по прямой, а остальные



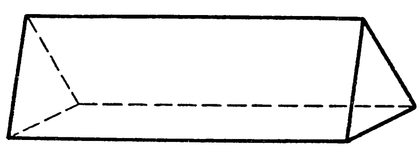
Черт. 5.

параллельны этой линии пересечения (черт. 6).

5°. $r = 3$, $r^* = 3$. Система совместна и имеет единственное решение. Геометрически все плоскости пересекаются в одной точке.

6°. $r = 3$, $r^* = 4$. Система несовместна. Геометрически по крайней мере три плоскости пересекаются в одной точке и существует хотя бы одна плоскость, не проходящая через эту точку.

4. Элементарные методы решения систем линейных уравнений. До сих пор для исследования и решения систем линейных уравнений мы привлекали аппарат матриц и определителей. Этот аппарат не



Черт. 6

только позволил нам доказать ряд общих утверждений относительно систем линейных уравнений, но и помог понять причины совместности или несовместности, определенности или неопределенности системы. Однако для практического решения системы линейных уравнений часто пользуются различными элементарными методами. Так, из школьного курса алгебры известны методы: алгебраического сложения, подстановки, уравнивания неизвестных и др. Мы рассмотрим один простой и в то же время наиболее общий элементарный метод решения систем линейных уравнений, называемый *методом Гаусса* или *треугольной схемой*. Этот метод является основным и при решении систем уравнений на электронных вычислительных машинах.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = d_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = d_m. \end{cases}$$

Для ее решения мы будем применять следующее преобразование: прибавление к одному уравнению какого-либо другого, умноженного на некоторое число. Как известно (теорема 4, § 2), такое преобразование приводит к системе уравнений, равносильной данной системе. Сразу же условимся о следующем. Если в результате указанного преобразования получится уравнение вида:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = a, \tag{14}$$

где $a \neq 0$, то процесс решения системы прекращается, ибо такая система несовместна (противоречива). Если же получится уравнение вида:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0, \tag{15}$$

которое удовлетворяется при любых значениях неизвестных, то такое уравнение удаляется из системы, как следствие остальных уравнений (теорема 5, § 2).

В связи с этим можно считать, что в каждом уравнении данной системы хотя бы один из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля. Будем считать, что $a_{11} \neq 0$; в противном случае этого можно добиться перенумеровыванием неизвестных или уравнений системы.

Умножим первое уравнение на число $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и прибавим ко второму. Тем. самым исключим из второго уравнения системы неизвестное x_1. Аналогично исключим x_1 из остальных уравнений (кроме первого). В итоге получим систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = d'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a'_{p1}x_2 + \ldots + a'_{pn}x_n = d'_p. \end{cases} \tag{16}$$

Заметим, что p может быть и меньше m, так как уравнения вида (15), если таковые оказались, отброшены.

Теперь точно таким же образом с помощью второго уравнения исключим неизвестное x_2 из 3-го, ..., p-го уравнения системы (16). Продолжая этот процесс, мы необходимо придем к одному из следующих случаев:

1. Появится уравнение вида (14). В этом случае, как указывалось ранее, система несовместна.

2. Получим систему «треугольного» вида:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n-1}x_{n-1} + b_{1n}x_n = c_1, \\ \qquad b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n-1}x_{n-1} + b_{2n}x_n = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad b_{n-1}x_{n-1} + b_{n-1n}x_n = c_{n-1}, \\ \qquad\qquad\qquad b_{nn}x_n = c_n, \end{cases}$$

где $b_{ii} \neq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). В этом случае из последнего уравнения находим x_n, затем из предпоследнего x_{n-1} и т. д. и, наконец, из первого уравнения x_1. Система имеет единственное решение.

3. Получим систему вида:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1k}x_k + b_{1k+1}x_{k+1} + \ldots + b_{1n}x_n = c_1, \\ \qquad b_{22}x_2 + \ldots + b_{2k}x_k + b_{2k+1}x_{k+1} + \ldots + b_{2n}x_n = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad b_{kk}x_k + b_{kk+1}x_{k+1} + \ldots + b_{kn}x_n = c_k, \end{cases}$$

где $b_{ii} \neq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, k$). В этом случае члены с неизвестными $x_{k+1}, \ldots, x_n$ перенесем в правые части уравнений, после чего, как и в случае 2. найдем неизвестные x_1, $x_2, \ldots, x_k$. При этом неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_k$ выразим через $x_{k+1}, \ldots, x_n$, т. е. найдем общее решение данной системы Придавая последним неизвестным произвольные значения, получим бесконечное множество частных решений.

Пример 8. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1, \\ 2x_1-x_2+x_3=2, \\ -x_1+2x_2-2x_3=-2. \end{cases}$$

Прибавив первое уравнение, умноженное на числа —2 и 1, соответственно ко второму и третьему уравнениям, получим:

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1, \\ -3x_2+3x_3=0, \\ 3x_2-3x_3=-1. \end{cases}$$

Если теперь, продолжая наш процесс, прибавить второе уравнение к третьему, то получим уравнение $0=-1$, которое не имеет решений. Следовательно, данная система уравнений несовместна.

Пример 9. Решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_2-3x_3-3x_4=-5, \\ 2x_1-x_2-x_3+x_4=-1, \\ x_1-2x_2+4x_3+5x_4=7, \\ x_1-x_2+x_3+2x_4=2. \end{cases}$$

Так как здесь коэффициент при x_1 в первом уравнении равен нулю, то поменяем местами первое уравнение, например, с четвертым. Получим:

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3+2x_4=2, \\ 2x_1-x_2-x_3+x_4=-1, \\ x_1-2x_2+4x_3+5x_4=7, \\ x_2-3x_3-3x_4=-5. \end{cases}$$

Теперь с помощью первого уравнения исключим неизвестное x_1 из всех остальных уравнений. Получим систему:

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3+2x_4=2, \\ x_2-3x_3-3x_4=-5, \\ -x_2+3x_3+3x_4=5, \\ x_2-3x_3-3x_4=-5. \end{cases}$$

Если теперь с помощью второго уравнения будем исключать неизвестное x_2 в третьем и четвертом уравнениях, то получим уравнения вида $0=0$. Следовательно, данная система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ \quad\quad x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -5. \end{cases}$$

Или системе:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 - x_3 - 2x_4, \\ \quad\quad x_2 = -5 + 3x_3 + 3x_4. \end{cases}$$

Отсюда находим общее решение данной системы:

$$x_2 = -5 + 3x_3 + 3x_4,$$
$$x_1 = -3 + 2x_3 + x_4;$$
$$x_3,\ x_4 \text{ — произвольные.}$$

§ 5. Теория делимости многочленов

1. Кольцо многочленов над числовым полем P.

В двух предыдущих параграфах мы научились исследовать и решать произвольную систему линейных уравнений. Другим важным вопросом в теории уравнений является вопрос об исследовании и решении одного алгебраического уравнения с одним неизвестным любой степени n. К этому вопросу мы и переходим.

Как было отмечено в § 2, всякое алгебраическое уравнение может быть записано в следующем виде: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$.

Левая часть этого уравнения, т. е. выражение

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \tag{1}$$

где n — целое неотрицательное число, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — элементы некоторого числового поля P, причем $a_0 \neq 0$, называется многочленом n-й степени от переменного x над полем P.

Элементы $a_0, a_1, \ldots, a_n$ называются коэффициентами многочлена $f(x)$, причем a_0 называется старшим коэффициентом, a_n — свободным членом.

При $n = 0$ многочлен $f(x)$ равен a_0. Таким образом, все числа из поля P, отличные от нуля ($a_0 \neq 0$), по определению являются многочленами нулевой степени. Для общности число нуль также называют многочленом (нуль-многочлен), не приписывая ему никакой определенной степени.

Два многочлена называются равными, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях переменных.

Для многочленов над полем P известным способом определяются операции сложения и умножения, причем результатом каждой из указанных операций является снова многочлен с коэффициентами из поля P.

Отметим, что если многочлен $f(x)$ является произведением многочленов $g(x)$ и $h(x)$, т. е. $f(x) = g(x)\,h(x)$, то его степень равна сумме степеней сомножителей $g(x)$ и $h(x)$.

Сложение и умножение многочленов над полем P удовлетворяет всем требованиям 1 — 6 коммутативного кольца (§ 1).

Следовательно, множество всех многочленов с коэффициентами из заданного поля является коммутативным кольцом. Его называют кольцом многочленов над полем P и обозначают через $P[x]$.

Заметим, что кольцо $P[x]$ не имеет делителей нуля, т. е. если $f(x)\cdot\varphi(x) = 0$, то по крайней мере один из сомножителей $f(x)$, $\varphi(x)$ есть нуль-многочлен. Это легко следует из того, что степень произведения двух многочленов равна сумме степеней сомножителей.

Если многочлен $f(x)$ принадлежит кольцу $P[x]$, то переменное x может принимать любое числовое значение из поля P. При этом если в многочлен $f(x)$ вместо x подставить число α, то получится число

$$a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n,$$

которое называется значением многочлена $f(x)$ при $x = \alpha$ и обозначается через $f(\alpha)$.

Очевидно, что всякий многочлен $f(\alpha)$ над числовым полем является целой рациональной функцией. Обратно, всякую целую рациональную функцию, как было отмечено в § 2, можно тождественными преобразованиями привести к виду (1), или, как говорят, к каноническому виду. Однако определение равенства функций (§ 2) и определение равенства многочленов различны. Естественно, возникает вопрос: будут ли два равных многочлена равняться как функции, и обратно? Иначе говоря: совпадают ли понятия целой рациональной функции и многочлена над числовым полем?

Этот вопрос решается положительно следующей, доказываемой в курсе элементарной алгебры теоремой о тождественности двух многочленов.

Два многочлена над числовым полем P равны тогда и только тогда, когда их значения совпадают при любом значении переменного из поля P.

(В курсе элементарной алгебры эта теорема доказывается для поля комплексных чисел, однако доказательство сохраняет силу и для любого числового поля.)

Таким образом, многочлены над числовыми полями можно изучать как с формальной, так и с функциональной точки зрения. Последняя точка зрения является общепринятой в курсе математического анализа и в теории функций комплексного переменного. В алгебре же стоят на формальной точке зрения, понимая под многочленом выражение вида (1). Это объясняется тем, что в алгебре многочлены изучаются не только над числовыми полями, но и над другими (нечисловыми) полями; в последнем случае сформулированная выше теорема о равенстве многочленов не всегда имеет место.

Пример 1. Если в качестве поля P взять поле $GF(2)$, состоящее из двух элементов $\overline{0}$, $\overline{1}$ (§ 1), то выражения

$$f(x) = x + \overline{1} \quad \text{и} \quad \varphi(x) = x^2 + \overline{1},$$

рассматриваемые как многочлены, различны, а как функции — равны. В самом деле, при $x = \overline{0}$ $f(\overline{0}) = \overline{0} + \overline{1} = \overline{1}$, $\varphi(\overline{0}) = \overline{0}^2 + \overline{1} = \overline{1}$; при $x = \overline{1}$ $f(\overline{1}) = \overline{1} + \overline{1} = \overline{0}$, $\varphi(\overline{1}) = \overline{1}^2 + \overline{1} = \overline{1} + \overline{1} = \overline{0}$.

Хотя мы в дальнейшем будем рассматривать многочлены над числовыми полями, тем не менее мы будем стоять в основном на формальной точке зрения.

Число α называется корнем многочлена $f(x)$, если значение многочлена $f(x)$ при $x = \alpha$ равно нулю, т. е. если $f(\alpha) = 0$.

Отсюда и из определения корня уравнения следует, что корни многочлена $f(x)$ совпадают с корнями уравнения

$$f(x) = 0.$$

Следовательно, изучение алгебраических уравнений над полем P сводится по существу к изучению кольца многочленов $P[x]$.

Еще раз подчеркнем, что многие свойства многочленов существенно зависят от того поля, над которым мы их рассматриваем.

Пример 2. Многочлен x^2+1 над полем D не имеет корней, тогда как над полем K он имеет два корня: $x_1=i$, $x_2=-i$.

Пример 3. Многочлен x^4+1 над полем R нельзя разложить в произведение многочленов меньших степеней, тогда как над полем D

$$x^4+1=(x^2+\sqrt{2}\,x+1)\ (x^2-\sqrt{2}\,x+1).$$

Поэтому некоторые свойства многочленов приходится изучать отдельно для различных числовых полей. Однако можно указать и такие свойства многочленов, которые справедливы для любого числового поля P. В частности, к ним относятся те свойства, которые связаны с общей теорией делимости многочленов.

2. Делимость многочленов. Свойства делимости.

Как было указано в предыдущем пункте, множество многочленов $P[x]$ является кольцом. Естественно, возникает вопрос: является ли это кольцо полем? Ответ на этот вопрос отрицателен, так как операция деления в кольце $P[x]$ не всегда выполнима. Например, нельзя разделить многочлен степени n ни на какой многочлен более высокой степени. В связи с этим возникает ряд вопросов, связанных с делимостью многочленов. В порядке ответов на эти вопросы возник специальный раздел алгебры многочленов — теория делимости.

Теория делимости многочленов во многом напоминает теорию делимости целых чисел. Причина в том, что кольцо многочленов $P[x]$ и кольцо целых чисел C имеют очень много общих свойств.

Ввиду этого многие свойства делимости многочленов будем только формулировать, отсылая за доказательствами, например, к «Обзорным лекциям по арифметике»*.

Мы уже говорили о том, что общие свойства делимости многочленов имеют место для многочленов над любым числовым полем. Начиная с этого момента мы выберем произвольное числовое поле P и все многочлены (включая и многочлены нулевой степени—числа), фигурирующие в этом

---

* М. М. Глухов. Обзорные лекции по арифметике, Учпедгиз, 1963.

параграфе, будем считать многочленами над полем P, не оговаривая этого особо.

Определение 1. Многочлен $f(x)$ делится на многочлен $\varphi(x)$ (символически: $f(x) \vdots \varphi(x)$), если существует такой многочлен $q(x)$, что

$$f(x) = \varphi(x) \cdot q(x);$$

в этом случае говорят также, что многочлен $\varphi(x)$ является делителем многочлена $f(x)$.

Перечислим некоторые основные свойства делимости:

1. $f(x) \vdots a$, где a — любой многочлен нулевой степени.

В самом деле, если $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, то

$$f(x) = aq(x),$$

$$\text{где } q(x) = \frac{a_0}{a} x^n + \frac{a_1}{a} x^{n-1} + \ldots + \frac{a_n}{a}.$$

2. $f(x) \vdots af(x)$, где a — любой многочлен нулевой степени.

В самом деле,

$$f(x) = [a\, f(x)] \cdot q(x),$$

где $q(x) = \dfrac{1}{a}$ — многочлен нулевой степени.

Таким образом, всякий многочлен $f(x)$ делится на любое постоянное число, отличное от нуля, а также на любой многочлен, отличающийся от $f(x)$ постоянным, отличным от нуля множителем.

Такие делители многочлена $f(x)$ называются тривиальными (очевидными, само собой разумеющимися).

Пример 4. $x^2+1 \vdots 2$, так как $x^2+1 = 2\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)$;

$$x^2+1 \vdots \frac{1}{7}, \quad \text{так как } x^2+1 = \frac{1}{7}\,(7x^2+7);$$

$$x^2+1 \vdots 5x^2+5, \text{ так как } x^2+1 = (5x^2+5)\cdot\frac{1}{5};$$

$$x^2+1 \vdots \frac{3}{8}x^2+\frac{3}{8}, \quad \text{так как } x^2+1 = \left(\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{8}{3}$$

и т. д.

Таким образом, у всякого многочлена существует бесчисленное множество тривиальных делителей.

Заметим, что в арифметике (в кольце C) тривиальными делителями числа a являются числа ± 1, $\pm a$, т. е. там роль многочленов нулевой степени играют числа $+1$ и -1. Эта аналогия коренится в том, что как многочлены нулевой степени в кольце $P[x]$, так и числа 1, -1 в кольце C являются единственными элементами, для которых существуют обратные элементы.

3. Если $f(x) \vdots \varphi(x)$ и $\varphi(x) \cdot \psi(x)$, то $f(x) \vdots \psi(x)$.

4. Если $f(x) \vdots q(x)$ и $\varphi(x) \vdots q(x)$, то $f(x) \pm \varphi(x) \vdots q(x)$.

5. Если $f(x) \vdots q(x)$ и $\varphi(x)$ — любой многочлен, то $f(x)\varphi(x) \vdots q(x)$.

6. Если $f(x) \vdots \varphi(x)$ и $\varphi(x) \vdots f(x)$, то $f(x) = a\varphi(x)$, где a — многочлен нулевой степени (число, отличное от нуля).

В самом деле, $f(x) = \varphi(x) q_1(x)$, $\varphi(x) = f(x) q_2(x)$.

Отсюда имеем: $f(x) = f(x)(q_1(x) \cdot q_2(x))$. Следовательно, $q_1(x) \cdot q_2(x) = 1$. А это значит, что $q_1(x)$ и $q_2(x)$ — многочлены нулевой степени, что и доказывает наше утверждение.

7. Теорема. (Алгоритм деления с остатком.) *Всякий многочлен $f(x)$ можно поделить с остатком на любой многочлен $\varphi(x) \neq 0$ и притом единственным образом, т. е. каковы бы ни были многочлены $f(x)$ и $\varphi(x) \neq 0$, существует единственная пара многочленов $q(x)$ (неполное частное) и $r(x)$ (остаток), такая, что:*

1) $f(x) = \varphi(x) q(x) + r(x)$;

2) $r(x) = 0$ *или степень* $r(x)$ *меньше степени* $\varphi(x)$.

Доказательство существования. Если $f(x) = 0$ или степень $f(x)$ меньше степени $\varphi(x)$, то условия 1 и 2 выполняются при $q(x) = 0$ и $r(x) = f(x)$. Пусть степень $f(x)$ больше степени $\varphi(x)$:

$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, $\varphi(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$ и $n \geqslant m$.

Вычтем из $f(x)$ многочлен $\varphi(x)$, умноженный на $\frac{a_0}{b_0} x^{n-m}$. Получим:

$$f(x) - \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} \varphi(x) = f_1(x). \tag{1'}$$

Так как у многочленов $f(x)$ и $\frac{a_0}{b_0} x^{n-m} \varphi(x)$ старшие члены одинаковые, то при вычитании они взаимно уничтожаются и степень многочлена $f_1(x)$ будет меньше n. Пусть старший член многочлена $f_1(x)$ есть $c_1 x^{n_1}$. Тогда, вычитая из $f_1(x)$ многочлен $\frac{c_1}{b_0} x^{n_1-m} \varphi(x)$, получим:

$$\varphi_1(x)-\frac{c_1}{b_0}\;x^{n_1-m}\varphi(x)=f_2(x), \qquad (2')$$

причем степень $f_2(x)$ меньше степени $f_1(x)$.

Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока не получим многочлен $f_k(x)$, равный нулю или степени, меньшей m. Очевидно, что процесс этот конечен и k-й шаг его запишется в виде:

$$f_{k-1}x-\frac{c_{k-1}}{b_0}\;x^{n_{k-1}-m}\varphi(x)=f_k(x). \qquad (k')$$

Сложив почленно равенства (1′), (2′), ..., (k'), получим:

$$f(x)=\varphi(x)\left(\frac{a_0}{b_0}\,x^{n-m}+\frac{c_1}{b_0}\,x^{n_1-m}+\ldots+\frac{c_{k-1}}{b_0}\,x^{n_{k-1}-m}\right)+$$
$$+f_k(x).$$

Обозначим многочлен, стоящий в скобках, через $q(x)$, а $f_k(x)$ — через $r(x)$. Тогда имеем:

1) $f(x)=\varphi(x)\,q(x)+r(x)$;

2) $r(x)=0$ или степень $r(x)$ меньше m.

Заметим, что коэффициенты многочленов $q(x)$ и $r(x)$ получаются с помощью арифметических действий над коэффициентами многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$, а потому $q(x)$ и $r(x)$ принадлежат нашему кольцу многочленов $P[x]$. Этим существование неполного частного и остатка доказано.

Доказательство единственности. Пусть существуют два неполных частных $q_1(x)$ и $q_2(x)$ и два остатка $r_1(x)$ и $r_2(x)$. Тогда

$$f(x)=\varphi(x)q_1(x)+r_1(x) \text{ и } f(x)=\varphi(x)q_2(x)+r_2(x).$$

Отсюда следует, что $r_2(x)-r_1(x)=[q_1(x)-q_2(x)]\,\varphi(x)$, т.е. $r_2(x)-r_1(x) \vdots \varphi(x)$. А так как степени $r_1(x)$ и $r_2(x)$ меньше степени $\varphi(x)$, то это может иметь место лишь тогда, когда $r_2(x)-r_1(x)=0$, т.е. $r_1(x)=r_2(x)$. Но тогда из того, что $\varphi(x)\neq 0$, следует $q_1(x)-q_2(x)=0$*, т. е. $q_1(x)=q_2(x)$. Этим свойство 7 полностью доказано.

Приведенное рассуждение не только доказывает свойство 7, но и дает правило отыскания частного и остатка — алгоритм деления с остатком. (Такие доказательства называются конструктивными.) Если внимательно всмотреться

* Здесь мы использовали также тот факт, что в кольце $P[x]$ отсутствуют делители нуля.

в то, как в ходе доказательства получается частное $q(x)$ и остаток $r(x)$, то легко заметить, что это есть известный из курса средней школы способ деления многочлена на многочлен «углом».

Из определения делимости и свойства 7 следует, что многочлен $f(x)$ тогда и только тогда делится на многочлен $\varphi(x)$, когда остаток от деления $f(x)$ на $\varphi(x)$ равен нулю. Следовательно, алгоритм деления с остатком позволяет также ответить на вопрос: делится $f(x)$ на $\varphi(x)$ или нет?

3. Наибольший общий делитель двух многочленов.

Определение 2. Многочлен $d(x)$ называется *общим делителем многочленов* $f(x)$ и $\varphi(x)$, если $f(x) \vdots d(x)$ и $\varphi(x) \vdots d(x)$. Общий делитель двух многочленов, который делится на всякий другой их общий делитель, называется *наибольшим общим делителем* (кратко НОД) и обозначается через

$$(f(x),\ \varphi(x)).$$

Для отыскания НОД многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ можно применить алгоритм Евклида, который, как и в случае целых чисел, состоит в следующем: делят с остатком $f(x)$ на $\varphi(x)$, затем $\varphi(x)$ на полученный (первый) остаток, затем первый остаток на второй остаток и т. д. до тех пор, пока в остатке не получится нуль-многочлен.

Процесс этот можно записать в виде следующей таблицы:

$$\begin{aligned} f(x) &= \varphi(x) q_1(x) + r_1(x), \\ \varphi(x) &= r_1(x) q_2(x) + r_2(x), \\ r_1(x) &= r_2(x) q_3(x) + r_3(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{n-2}(x) &= r_{n-1}(x) q_n(x) + r_n(x), \\ r_{n-1}(x) &= r_n(x) q_{n+1}(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Так как степень остатка меньше степени делителя, то степени многочленов $\varphi(x)$, $r_1(x)$, $r_2(x), \ldots$ строго убывают, и, следовательно, через конечное число шагов очередной остаток, например r_{n+1}, окажется равным нулю.

Теорема. *Наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ равен последнему неравному нулю остатку в алгоритме Евклида, примененном к многочленам $f(x)$ и $\varphi(x)$.*

Доказательство. Пусть некоторые многочлены $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$ связаны соотношением

$$g_1(x) = g_2(x)\,q(x) + g_3(x).$$

Из этого соотношения и из свойств делимости многочленов следует, что всякий общий делитель многочленов $g_2(x)$ и $g_3(x)$ является общим делителем многочленов $g_1(x)$ и $g_2(x)$, и обратно.

Следовательно,

$$(g_1(x);\ g_2(x)) = (g_2(x);\ g_3(x)).$$

Отсюда и из таблицы (2) следует:

$$(f(x);\ \varphi(x)) = (\varphi(x);\ r_1(x)) = (r_1(x);\ r_2(x)) = \ldots = \\ = (r_{n-1}(x);\ r_n(x)).$$

Кроме того, из последней строки таблицы (2) имеем: $r_{n-1}(x) \vdots r_n(x)$, т. е. $(r_{n-1}(x);\ r_n(x)) = r_n(x)$.

Следовательно,

$$(f(x);\ \varphi(x)) = r_n(x),$$

что и требовалось доказать.

Замечания. 1. Если для нахождения НОД целых чисел наряду с алгоритмом Евклида существует еще способ разложения чисел на простые множители, то для нахождения НОД многочленов алгоритм Евклида является по существу единственным способом, ибо, как мы увидим из дальнейшего, разлагать многочлены на неприводимые (простые) множители мы умеем лишь в самых простейших случаях.

2. Из свойств делимости многочленов вытекает, что если $f(x) \vdots d(x)$, то $f(x) \vdots ad(x)$, где a — любое, отличное от нуля число. Следовательно, если $d(x)$ есть НОД многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$, то и $ad(x)$ также будет их НОД.

Значит, многочлены $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют бесчисленное множество наибольших общих делителей, отличающихся друг от друга лишь постоянными множителями, и, следовательно, НОД двух многочленов определяется лишь с точностью до постоянного множителя. Чтобы избежать указанной многозначности, условимся в дальнейшем выбирать из всех наибольших общих делителей тот, у которого старший коэффициент равен 1.

3. Пусть $f(x) = \varphi(x)\,q(x)$ и c — любой многочлен нулевой степени. Тогда

$$cf(x) = \varphi(x)\cdot[cq(x)] + cr(x) \text{ и}$$
$$f(x) = c\varphi(x)\left[\frac{1}{c}\,q(x)\right] + r(x).$$

Следовательно, если делимое или делитель умножить на некоторое число $c \neq 0$, то остаток может приобрести лишь постоянный множитель c.

Отсюда и из того, что НОД двух многочленов находится лишь с точностью до постоянного множителя, следует: при нахождении двух многочленов с помощью алгоритма Евклида делимые и делители каждый раз можно умножать (а следовательно, и делить) на любые постоянные числа, отличные от нуля. Этим бывает полезно пользоваться, чтобы избежать громоздких вычислений с дробными числами.

Пример 5. Найти НОД многочленов:

$$f(x) = x^5 + x^2 - 4x + 2, \qquad \varphi(x) = 2x^4 - x^3 + 5x^2 - 2x + 2.$$

1. Найдем сначала НОД, не пользуясь замечанием 3:

$$\begin{array}{r|l}
x^5 + x^2 - 4x + 2 & 2x^4 - x^3 + 5x^2 - 2x + 2 \\ \cline{2-2}
-\ x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^3 - x^2 + x & \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = q_1(x) \\ \cline{1-1}
\frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{2}x^3 + 2x^2 - 5x + 2 & \\
-\ \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{3}{2} & \\ \cline{1-1}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
2x^4 - x^3 + 5x^2 - 2x + 2 & -\frac{9}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{3}{2} = r_1(x) \\ \cline{2-2}
-\ 2x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - \frac{4}{3}x & -\frac{8}{9}x + \frac{4}{27} = q_2(x) \\ \cline{1-1}
-\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2 & \\
-\ -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9} & \\ \cline{1-1}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
-\frac{9}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{3}{2} & \frac{8}{9}x^2 + \frac{16}{9} = r_2(x) \\ \cline{2-2}
-\ -\frac{9}{4}x^3 \qquad - \frac{9}{2}x & -\frac{81}{32}x + \frac{27}{32} = q_3(x) \\ \cline{1-1}
\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2} & \\
-\ \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2} & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Таким образом, последний, отличный от нуля остаток равен:

$$r_2 = \frac{8}{9}x^2 + \frac{16}{9}.$$

Умножив его на $\frac{9}{8}$, получим:

$$d(x) = \big(f(x);\ \ \varphi(x)\big) = x^2 + 2.$$

2. Найдем НОД, используя замечание 3:

$$\begin{array}{rl|l}
- & 2x^5 \qquad\qquad\quad +2x^2 - 8x + 4 & 2x^4 - x^3 + 5x^2 - 2x + 2 \\
 & 2x^5 - x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 2x & \overline{x \ \| \ +1} \\
\hline
 & x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 10x + 4 & \\
\hline
- & 2x^4 - 10x^3 + 8x^2 - 20x + 8 & \\
 & 2x^4 - x^3 + 5x^2 - 2x + 2 & \\
\hline
 & -9x^3 + 3x^2 - 18x + 6 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl|l}
- & 6x^4 - 3x^3 + 15x^2 - 6x + 6 & 3x^3 - x^2 + 6x - 2 \\
 & 6x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 4x & \overline{2x \ \| \ +1} \\
\hline
 & -x^3 + 3x^2 - 2x + 6 & \\
\hline
- & 3x^3 - 9x^2 + 6x - 18 & \\
 & 3x^3 - x^2 + 6x - 2 & \\
\hline
 & -8x^2 \qquad -16 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl|l}
- & 3x^3 - x^2 + 6x - 2 & x^2 \qquad + 2 \\
 & 3x^3 \qquad + 6x & \overline{3x - 1} \\
\hline
- & -x^2 \qquad -2 & \\
 & -x^2 \qquad -2 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

Здесь последний, неравный нулю остаток равен $x^2 + 2$. Так как его старший коэффициент равен 1, то

$$(f(x),\ \varphi(x)) = x^2 + 2.$$

(В этом случае частные получаются неверными, а потому между их членами мы ставим знак $\|$.)

Совершенно также, как в арифметике, из алгоритма Евклида получается одно важное следствие.

Если $d(x) = (f(x),\ \varphi(x))$, то существуют такие многочлены $u(x)$ и $v(x)$, что

$$f(x)\, u(x) + \varphi(x)\, v(x) = d(x). \tag{3}$$

Пример 6. Найти $u(x)$ и $v(x)$ для многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ из предыдущего примера.

Запишем для многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ алгоритм Евклида:

$$\begin{aligned} f(x) &= \varphi(x)\, q_1(x) + r_1(x), \\ \varphi(x) &= r_1(x)\, q_2(x) + r_2(x), \end{aligned}$$

где $q_1(x)$, $q_2(x)$, $r_1(x)$, $r_2(x)$— многочлены, полученные в первом способе решения предыдущего примера.

Из последнего равенства имеем, $r_2(x)=\varphi(x)-r_1(x)\,q_2(x)$. Подставив в это равенство вместо $r_1(x)$ его выражение, найденное из первого равенства алгоритма Евклида, получим:

$$r_2(x)=\varphi(x)-[f(x)-\varphi(x)\,q_1(x)]\,q_2(x)=$$
$$=f(x)\,[-q_2(x)]+\varphi(x)\,[1+q_1(x)\,q_2(x)].$$

Учитывая, что $d(x)=\frac{9}{8}\,r_2(x)$, имеем:

$$d(x)=f(x)\cdot\frac{-9q_2(x)}{8}+\varphi(x)\;\frac{9\,[1+q_1(x)\,q_2(x)]}{8}.$$

Сравнивая полученное равенство с равенством (3), замечаем, что

$$u(x)=-\frac{9}{8}q_2(x),\qquad v(x)=\frac{9\,[1+q_1(x)\,q_2(x)]}{8}.$$

Отсюда видно, что $u\,(x)$ и $v\,(x)$ выражаются через частные $q_1(x)$, $q_2(x)$. Следовательно, тот произвол, который допускался в алгоритме Евклида при нахождении НОД, недопустим при нахождении $u\,(x)$ и $v\,(x)$ (ибо при этом произволе частные могут искажаться). Поэтому значения $q_1(x)$ и $q_2(x)$ мы возьмем из того алгоритма, который проводился без искажения делимых и делителей:

$$q_1\,(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4},\quad q_2\,(x)=-\frac{8}{9}x+\frac{4}{27}.$$

Тогда

$$u\,(x)=\frac{9\left[1+\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{8}{9}x+\frac{4}{27}\right)\right]}{8}=$$
$$=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x+\frac{7}{6},$$
$$v\,(x)=\frac{-9\left(-\frac{8}{9}x+\frac{4}{27}\right)}{8}=x-\frac{1}{6}.$$

Представление НОД многочленов $f\,(x)$, $\varphi\,(x)$ в виде (3) играет важную роль как в практических, так и в теоретических вопросах. Некоторые примеры его использования будут приведены ниже.

4. Взаимно простые многочлены.

Определение 3. Многочлены $f(x)$, $\varphi(x)$ называются *взаимно простыми*, если их НОД равен 1 (а следовательно, любому многочлену нулевой степени, т.е. отличному от нуля числу из поля P).

Рассмотрим некоторые свойства взаимно простых многочленов, аналогичные соответствующим свойствам целых чисел.

1. $f(x)$ и $\varphi(x)$ взаимно просты тогда и только тогда, когда существуют такие многочлены $u(x)$ и $v(x)$, что

$$f(x)\,u(x)+\varphi(x)\,v(x)=1. \tag{4}$$

Доказательство. Если $(f(x), \varphi(x))=1$, то существование многочленов $u(x)$ и $v(x)$, удовлетворяющих равенству (4), следует из упомянутого выше следствия из алгоритма Евклида. Обратно, пусть многочлены $u(x)$ и $v(x)$, удовлетворяющие равенству (4), существуют. Тогда если допустить, что $(f(x), \varphi(x))=d(x)$, то из равенства (4) будет следовать: $1 \vdots d(x)$, что может выполняться лишь при $d(x)=1$. Следовательно,

$$(f(x), \varphi(x))=1.$$

Последнее свойство позволяет доказать ряд других свойств взаимно простых многочленов.

2. Если $(f(x), g(x))=1$ и $(\varphi(x), g(x))=1$, то

$$(f(x)\,\varphi(x), g(x))=1.$$

Доказательство. Так как $(f(x), g(x))=1$, то по свойству первому существуют многочлены $u(x)$ и $v(x)$, такие, что

$$f(x)\,u(x)+g(x)\,v(x)=1.$$

Умножив обе части этого равенства на $\varphi(x)$, получим

$$[f(x)\,\varphi(x)]\,u(x)+g(x)[\varphi(x)\,v(x)]=\varphi(x). \tag{5}$$

Допустим, что $(f(x)\,\varphi(x), g(x))=d(x)$. Тогда из равенства (5) следует, что $d(x)$ есть общий делитель многочленов $\varphi(x)$ и $g(x)$. Но эти многочлены по условию взаимно просты. Следовательно, $d(x)=1$, т. е. $(f(x)\,\varphi(x), g(x))=$ $=1$.

3. Если $f(x)\,\varphi(x) \vdots g(x)$ и $(f(x), g(x))=1$, то $\varphi(x) \vdots g(x)$.

4. Если $(f(x), \varphi(x))=d(x)$, то многочлены

$\dfrac{f(x)}{d(x)}$ и $\dfrac{\varphi(x)}{d(x)}$ взаимно просты.

Докажите свойства 3 и 4 в качестве упражнений. (В случае затруднений можно воспользоваться доказательствами аналогичных свойств для взаимно простых чисел.)

§ 6. Приводимые и неприводимые многочлены над числовым полем

Определение 1. Многочлен $f(x)$ степени $n \geqslant 1$ называется *приводимым над полем* P, если его можно представить в виде произведения двух многочленов выше нулевой степени с коэффициентами из поля P. В противном случае многочлен называется неприводимым над полем P.

Многочлены нулевой степени и нуль-многочлен не относятся ни к приводимым, ни к неприводимым многочленам.

Замечания. 1. Оговорка «выше нулевой степени» в определении 1 является существенной. В самом деле, если ее отбросить, то приводимым окажется любой многочлен над полем P, так как можно записать:

$$f(x) = c \cdot \left[\frac{1}{c} f(x)\right],$$

где c— любое число поля P, отличное от нуля, т. е. многочлен нулевой степени.

2. Оговорка «над полем P» в определении 1 также существенна, ибо один и тот же многочлен может оказаться неприводимым над одним полем и приводимым над другим, более широким полем.

Пример 1. Многочлен

$$x^2 + 1$$

над полем D неприводим, а над полем K приводим, так как

$$x^2 + 1 = (x + i)(x - i).$$

3. Неприводимые многочлены в кольце $P[x]$ являются аналогами простых чисел в кольце C. При этом многочлены нулевой степени снова играют роль чисел $1, -1$, которые не относятся ни к простым, ни к составным числам. Свойства неприводимых многочленов аналогичны свойствам простых чисел.

Среди свойств приводимых и неприводимых многочленов имеются как свойства зависящие, так и не зависящие от того поля, над которым мы их рассматриваем. В этом параграфе мы будем рассматривать лишь свойства, справедливые для любого числового поля, а потому зафиксируем некоторое поле P и будем рассматривать лишь многочлены над этим полем, не оговаривая этого каждый раз.

1. Всякий многочлен первой степени неприводим. В самом деле, если $f(x)$ приводим, то

$$f(x) = f_1(x)\, f_2(x),$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$ — многочлены выше нулевой степени. А так как степень произведения двух многочленов равна сумме степеней сомножителей, то степень $f(x)$ не меньше двух, что противоречит условию. Следовательно, многочлен первой степени неприводим.

2. Если $p(x)$ — неприводимый многочлен, а $f(x)$ — любой многочлен, то либо $f(x) \vdots\, p(x)$, либо $(f(x), p(x)) = 1$.

Действительно, если $(f(x), p(x)) = d(x)$, то $p(x) \vdots\, d(x)$, а так как $p(x)$ неприводим, то $d(x) = c$ или $d(x) = cp(x)$, где c — многочлен нулевой степени. Если $d(x) = c$, то $f(x)$ и $p(x)$ — взаимно просты, если же $d(x) = cp(x)$, то $f(x) \vdots\, cp(x)$, а следовательно, $f(x) \vdots\, p(x)$.

3. Если произведение нескольких многочленов делится на неприводимый многочлен $p(x)$, то на $p(x)$ делится хотя бы один из сомножителей.

Очевидно, что это свойство достаточно доказать лишь для случая двух сомножителей. Пусть

$$f(x)\,\varphi(x) \vdots\, p(x) \text{ и } f(x) \text{ не} \vdots\, p(x).$$

Тогда по свойству 2 $(f(x), p(x)) = 1$. Отсюда, используя свойство 4 взаимно простых многочленов, получаем:

$$\varphi(x) \vdots\, p(x).$$

Таким образом, или $f(x) \vdots\, p(x)$, или $\varphi(x) \vdots\, p(x)$. (Могут, конечно, делиться на $p(x)$ и оба сомножителя.)

4. Теорема о разложении многочленов на неприводимые множители.

Теорема. *Всякий многочлен выше нулевой степени над полем P или является неприводимым, или разлагается в произведение неприводимых множителей и притом единственным образом с точностью до множителей нулевой степени и порядка множителей.*

Доказательство. Докажем теорему индукцией по степени n многочлена $f(x)$. Если $n = 1$, то $f(x)$ — неприводим по свойству 1, и, следовательно, в этом случае доказываемая теорема верна.

Допустим, что теорема справедлива для всех многочленов степени $k \leqslant n$, и докажем, что тогда она верна для многочленов $(n+1)$ степени.

Пусть $f(x)$ — любой многочлен $(n+1)$ степени. Так как $f(x)$ — многочлен выше нулевой степени, то он или приводим, или неприводим. Если $f(x)$ неприводим, то для него утверждение нашей теоремы верно. Если же $f(x)$ приводим, то можно записать:

$$f(x) = f_1(x) f_2(x), \tag{1}$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$ — многочлены выше нулевой степени, и, следовательно, их степени меньше, чем $n+1$. Тогда по предположению индукции для многочленов $f_1(x)$ и $f_2(x)$ теорема верна, т. е. каждый из них или является неприводимым, или единственным образом разлагается в произведение неприводимых множителей. Но тогда из (1) следует, что и $f(x)$ может быть разложен в произведение неприводимых множителей. Покажем, что в этом случае разложение с точностью до множителей нулевой степени и порядка множителей единственно. Допустим, что имеется два разложения:

$$f(x) = p_1(x) p_2(x) \ldots p_r(x) \text{ и } f(x) = q_1(x) q_2(x) \ldots q_s(x).$$

Тогда имеем:

$$p_1(x) p_2(x) \ldots p_r(x) = q_1(x) q_2(x) \ldots q_s(x). \tag{2}$$

Из равенства (2) следует:

$$p_1(x) p_2(x) \ldots p_r(x) \vdots q_1(x),$$

что на основании свойства 3 возможно только в том случае, когда хотя бы один из сомножителей $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_r(x)$ делился на $q_1(x)$. Так как единственность разложения доказывается с точностью до порядка множителей, то можно считать, что $p_1(x) \vdots q_1(x)$. Отсюда и из неприводимости многочлена $p_1(x)$ следует, что $p_1(x)$ может отличаться от $q_1(x)$ лишь постоянным множителем, т. е. $p_1(x) = cq_1(x)$. Тогда равенство (2) запишется в виде:

$$cq_1(x) p_2(x) \ldots p_r(x) = q_1(x) q_2(x) \ldots q_s(x).$$

Разделив обе части этого равенства на $q_1(x)$, получим два разложения для многочлена степени, меньшей чем $n+1$:

$$cp_2(x) p_3(x) \ldots p_r(x) = q_2(x) q_3(x) \ldots q_s(x), \tag{3}$$

для которого разложение единственно по предположению индукции. Поэтому $r=s$, и множители в правой части равенства (3) отличаются от множителей в левой части возможно лишь постоянными множителями. Этим теорема полностью доказана.

Заметим, что доказанная теорема говорит лишь о существовании для каждого приводимого многочлена его разложения на неприводимые множители, но ничего не говорит о том, как это разложение осуществить практически (иначе говоря, доказательство теоремы неконструктивно). Последний вопрос является весьма трудным и разрешим лишь в самых простейших случаях с помощью различных искусственных приемов. Общего же способа (алгоритма) для разложения многочлена на неприводимые множители не существует.

Доказанная теорема ничего не говорит также и о виде неприводимых сомножителей. Здесь мы можем лишь отметить, что хотя разложение многочлена на неприводимые множители существует над любым полем (если, конечно, многочлен над этим полем приводим), однако сами неприводимые множители существенно зависят от рассматриваемого поля.

Пример 2. Разложение многочлена

$$f(x)=x^5+x^4-x^3-x^2-2x-2$$

на неприводимые множители будет иметь вид:

над полем R: $f(x)=(x+1)(x^2+1)(x^2-2)$,

над полем D: $f(x)=(x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+1)$;

над полем K: $f(x)=(x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x+i)(x-i)$

Некоторые сведения о виде (степени) неприводимых множителей над полями K, D и R будут изложены ниже.

§ 7. Существование корня многочлена в поле комплексных чисел

Теорема. *Всякий многочлен степени $n>0$ над полем комплексных чисел имеет по крайней мере один комплексный корень.*

Доказательство. Пусть $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n\ (a_0\neq 0)$ есть многочлен с комплексными коэффициентами: $a_0=b_0+ic_0,\ a_1=b_1+ic_1,\ \ldots,\ a_n=b_n+ic_n$ Положим также $z=x+iy$ и подставим выражения для $a_0, a_1, \ldots, a_n$, z в $f(z)$. Выполнив все действия, получим:

$f(z)=P(x, y)+i\,Q(x, y)$, где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — два многочлена с действительными коэффициентами от неизвестных x и y.

Например, если $f(z)=z^2+i\,z-1$, то имеем:

$$f(z)=(x+iy)^2+i\,(x+iy)-1=(x^2-y^2-y-1)+\\+(x+2xy)\,i.$$

Здесь $P=x^2-y^2-y-1$, $Q=x+2xy$.

Из курса математического анализа известно, что многочлен есть непрерывная функция. Следовательно, $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, а вместе с ними и $P^2(x, y)+Q^2(x, y)$ будут непрерывными функциями от двух переменных x и y. Причем последняя из этих функций неотрицательна при любых значениях x, y. Следовательно, $\sqrt{P^2+Q^2}$ существует и также является непрерывной функцией. Так как $\sqrt{P^2+Q^2}=$ $=|f(z)|$, то имеем следующий результат.

Модуль многочлена является непрерывной функцией от двух переменных x и y на всей плоскости x, y. Подчеркнем, что здесь и аргументы x, y, и функция $|f(z)|$ принимают только действительные значения.

Относительно функции $|f(z)|$ докажем две леммы.

Л е м м а 1. Функция $|f(z)|$, рассматриваемая на всей плоскости x, y, принимает в некоторой точке (x_0, y_0) свое наименьшее начение. Иными словами, существует такое $z_0=x_0+iy_0$, что $|f(z_0)|\leqslant|f(z)|$ для всех z

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего докажем, что

$$|f(z)|\to\infty \text{ при } |z|\to\infty. \qquad (2)$$

Для этой цели запишем $f(z)$ в виде:

$$f(z)=z^n\left(a_0+\frac{a_1}{z}+\ldots+\frac{a_n}{z^n}\right),$$

откуда следует:

$$|f(z)|=|z|^n\cdot\left|a_0+\frac{a_1}{z}+\ldots+\frac{a_n}{z^n}\right|\leqslant|z|^n\cdot\left\{|a_0|+\frac{|a_1|}{|z|}+\right.\\\left.+\ldots+\frac{|a_n|}{|z|^n}\right\}$$

(мы воспользовались тем, что модуль суммы нескольких слагаемых не превосходит суммы их модулей). При $|z|\to\infty$ первый множитель правой части, т е. $|z|^n$, стремится к бесконечности, а второй множитель (фигурная скобка) к $|a_0|$. Следовательно, все произведение $\to \infty$, что и требовалось доказать.

Из (2) следует, что, каково бы ни было число $M > 0$, при достаточно больших значениях $|z|$ будем иметь: $|f(z)| > M$. Возьмем в качестве M число $|f(0)| = |a_n|$. Итак, существует $R > 0$, такое, что

$$|f(z)| > |f(0)| \text{ при } |z| > R. \tag{3}$$

Рассмотрим на комплексной плоскости окружность $|z| = R$. Она разделяет всю плоскость на две области: область D_1, определяемую неравенством $|z| \leqslant R$ (круг вместе с границей), и область D_2, определяемую неравенством $|z| > R$ (оставшаяся часть плоскости). Область D_1, очевидно, ограничена и замкнута. По известной теореме математического анализа непрерывная функция в ограниченной и замкнутой области принимает свое наименьшее значение. Применяя эту теорему к функции $|f(z)|$ и области D_1, находим, что существует такая точка $z_0 \in D_1$, что

$$|f(z_0)| \leqslant |f(z)| \text{ для всех } z \in D_1. \tag{4}$$

В частности, имеем: $|f(z_0)| \leqslant |f(0)|$. Что же касается области D_2, то в ней имеет место неравенство (3), из которого теперь следует (с учетом неравенства $|f(0)| \geqslant |f(z_0)|$), что

$$|f(z_0)| < |f(z)| \text{ для всех } z \in D_2. \tag{5}$$

Сопоставляя неравенства (4) и (5), мы заключаем, что $|f(z_0)| \leqslant |f(z)|$ для всех z, т. е. z_0 есть точка минимума функции $|f(z)|$.

Лемма 2 (Даламбера). *Если в некоторой точке z_0 значение многочлена $f(z_0)$ отлично от нуля, то найдется такая точка z_1, что $|f(z_1)| < |f(z_0)|$.*

Доказательство. Положим $z_1 = z_0 + h$ и вместо неизвестного z_1 будем искать неизвестное h. Оно должно удовлетворять условию $|f(z_0 + h)| < |f(z_0)|$ или

$$\left| \frac{f(z_0 + h)}{f(z_0)} \right| < 1. \tag{6}$$

Итак, наша цель — найти комплексное число h (хотя бы одно), удовлетворяющее неравенству (6).

Имеем: $f(z_0 + h) = a_0(z_0 + h)^n + a_1(z_0 + h)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(z_0 + h) + a_n = a_0h^n + a_1'h^{n-1} + \ldots + a_{n-1}'h + a_n'$.
Мы раскрыли здесь каждую из степеней $(z_0 + h)^i$ по формуле Бинома Ньютона и затем расположили все выражение

по убывающим степеням h. Первым коэффициентом будет a_0; остальные коэффициенты обозначены $a_1', \ldots a_{n-1}', a_n'$.

Полагая в последнем равенстве $h = 0$, получим $f(z_0) = a_n'$. Поделим далее обе части неравенства на $f(z_0)$:

$$\frac{f(z_0+z)}{f(z_0)} = P_0h^n + P_1h^{n-1} + \ldots + P_{n-1}h + 1.$$

Среди коэффициентов P_i обязательно имеются отличные от нуля, например $P_0 = \frac{a_0}{f(z_0)} \neq 0$. Пусть P_k — последний, отличный от нуля коэффициент, т. е. $P_k \neq 0$, $P_{k+1} = \ldots = P_{n-1} = 0$ (в частности, может быть, $k = n-1$, и тогда $P_{n-1} \neq 0$). Тогда

$$\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)} = (P_0h^n + \ldots + P_{k+1}h^{k+1}) + P_kh^k + 1.$$

Положим $h = \frac{t}{\sqrt[k]{-P_k}}$, где $\sqrt[k]{-P_k}$ — одно из значений корня из P_k (безразлично какое). Таким образом, вместо неизвестного h мы ищем неизвестное t. Будем считать t действительным числом, причем $0 < t < 1$. Преобразуем правую часть последнего равенства так:

$(1 - t^k) + (q_{k+1}t^{k+1} + \ldots + q_0t^n) = (1 - t^k) + t^k(q_{k+1}t + \ldots + q_0t^{n-k})$.

Таким образом, $\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)} = (1 - t^k) + t^k\varphi(t)$, где $\varphi(t) = q_{k+1}t + \ldots + q_0t^{h-k}$. Выражение $\varphi(t)$ есть многочлен, следовательно, по доказанному ранее $|\varphi(t)|$ есть непрерывная функция от t (не следует забывать, что теперь t — действительное число). Воспользуемся непрерывностью этой функции в точке $t = 0$. Так как $|\varphi(0)| = 0$, то найдется такое δ, что для всех $|t| < \delta$ будет $|\varphi(t)| < \frac{1}{2}$.

Тогда имеем: $|(1 - t^k) + t^k\varphi(t)| < |1 - t^k| + \frac{1}{2}t^k = 1 - \frac{1}{2}t^k < 1$, и, следовательно, при соответствующем $h = \frac{t}{\sqrt[k]{-q_k}}$ $\left|\frac{f(z_0+h)}{|f(z_0)|}\right| < 1$, что и требовалось доказать.

Теперь докажем теорему о существовании корня многочлена $f(z)$.

По лемме 1 существует точка z_0, в которой функция $|f(z)|$ принимает минимальное значение

$$|f(z_0)| \leqslant |f(z)| \text{ для всех } z. \tag{1}$$

Покажем, что $f(z_0) = 0$, т. е. что z_0 является корнем многочлена.

Предположим, что это неверно, $f(z_0) \neq 0$. Тогда в силу леммы Даламбера найдется такое z_1, что $|f(z_1)| < |f(z_0)|$, но это противоречит (1). Следовательно, $f(z_0) = 0$, что и требовалось доказать.

Доказанная теорема имеет для математики огромное значение. В частности, из нее легко следует основная теорема алгебры: *всякий многочлен n-й степени над полем комплексных чисел имеет n корней.* (Будет показано в следующем параграфе.) Однако эта теорема, утверждая существование корней многочлена, не дает никаких указаний о нахождении корней.

Многочлен полностью определяется его коэффициентами. Следовательно, и корни его зависят лишь от коэффициентов. Поэтому естественно искать формулы, выражающие корни многочлена $f(x)$, или, что одно и то же, корни уравнения

$$f(x) = 0 \tag{7}$$

через его коэффициенты.

Если корни уравнения (7) выражаются через его коэффициенты с помощью конечного числа действий сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня, то говорят, что уравнение разрешимо в радикалах. Так, уравнения второй, третьей и четвертой степени разрешимы в радикалах, ибо существуют формулы, выражающие их корни через коэффициенты. Заметим, что эти формулы для уравнений третьей и четвертой степени были получены еще в XVI веке. После этого три столетия продолжались безуспешные поиски формул для решения уравнений выше четвертой степени. И лишь в начале XIX века норвежскому математику Абелю (1802—1829) удалось доказать, что для уравнений n-й степени при $n > 4$ такой формулы не существует, т. е. уравнение выше четвертой степени с буквенными коэффициентами неразрешимо в радикалах. Этот результат Абеля был большим достижением, однако он не решал полностью вопроса о разрешимости уравнений в радикалах, так как не исключал существования для каждого конкретного уравнения (или класса уравнений) своей индивидуальной формулы, дающей его решение в радикалах. Этот вопрос впервые был четко сформулирован и решен гениальным французским математиком Галуа (1811—1832), который установил необходимый и достаточный признак разрешимости уравнения в радикалах. Из этого признака следовало, что существуют уравнения любой степени $n > 4$, у которых корни не могут быть выражены через коэффициенты с помощью перечисленных выше действий. Таким, например, является уравнение

$$x^5 - 4x - 2 = 0.$$

Результаты Абеля и Галуа имеют большое теоретическое значение. С практической же точки зрения отрицательное решение вопроса о разрешимости уравнений в радикалах не имеет существенного значения. Дело в том, что хотя для уравнений третьей и четвертой степени существуют формулы их решения, но они настолько громоздки, что практически почти не используются.

§ 8. О разложении многочленов на множители

1. Разложение многочленов на множители над полем комплексных чисел. До сих пор на корень многочлена мы смотрели как на значение переменного, при котором значение многочлена равно нулю. Однако можно дать и другое определение корня многочлена.

Пусть $f(x)$ есть многочлен над некоторым числовым полем P и a — любое число из P. Разделим с остатком многочлен на двучлен $x - a$

$$f(x) = (x - a)\,q(x) + r(x).$$

По определению деления с остатком (§ 5) имеем: или $r(x) = 0$, или же степень остатка $r(x)$ меньше степени делителя $x - a$, т. е. меньше единицы. В обоих случаях $r(x)$ есть постоянное число из P. Следовательно, можно записать:

$$f(x) = (x - a)\,q(x) + r. \qquad (1)$$

Положив в равенстве (1) $x = a$, получим:

$$f(a) = r,$$

т. е. значение многочлена $f(x)$ при $x = a$ равно остатку от деления $f(x)$ на $x - a$ (теорема Безу). Отсюда следует: число a тогда и только тогда является корнем многочлена $f(x)$, когда $f(x)$ делится на $x - a$ (без остатка). Это есть не что иное, как новое определение корня многочлена. Пользуясь им, можно легко установить, является ли заданное число a корнем многочлена $f(x)$. Для этого достаточно $f(x)$ разделить на $x-a$. При этом деление легко осуществляется с помощью следующей схемы Горнера: если

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

то коэффициенты частного

$$q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$$

и остатки r находятся рекуррентно по схеме:

	a_0	a_1	a_2	$\ldots$	a_{n-1}	a_n
a	b_0	$b_1 = b_0a + a_1$	$b_2 = b_1a + a_2$	$\ldots$	$b_{n-1} =$ $= b_{n-2}\,a + a_{n-1}$	$r =$ $= b_{n-1}a + a_n$

Пример. Выяснить, является ли число $a = 9$ корнем многочлена $f(x) = 2x^5 - 19x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 1$.

Пользуясь схемой Горнера, разделим $f(x)$ на $x-a$.

2	−19	6	7	0	1
2	− 1	−3	− 20	−180	−1619

Получили: частное $q(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 - 20x - 180$,
остаток $r = -1619$.

Так как остаток $r \neq 0$, то число 9 не является корнем данного многочлена.

Если же пользоваться первоначальным определением корня, то придется найти число

$$f(9) = 2\cdot 9^5 - 19\cdot 9^4 + 6\cdot 9^3 + 7\cdot 9^2 + 1 =$$
$$= 118\,098 - 124\,659 + 4374 + 567 + 1 = -1619.$$

Таким образом, новое определение корня во многих случаях позволяет легче установить, является ли число a корнем данного многочлена. Но оно имеет и другое преимущество Исходя из него, можно определить понятие кратности корня.

Число a называется *k-кратным корнем многочлена* $f(x)$, если $f(x) \vdots (x-a)^k$ и $f(x)$ не $\vdots (x-a)^{k+1}$.

Из этого определения следует, что для установления кратности корня a многочлена $f(x)$ надо $f(x)$ делить последовательно на $x-a$, $(x-a)^2$, $(x-a)^3$,... до тех пор, пока не получим остаток, отличный от нуля. Однако очевидно, что можно поступить и так: разделим $f(x)$ на $x-a$, если остаток равен нулю, то полученное частное делим на $x-a$, и т. д. Этот путь практически более прост, так как здесь деление нужно производить лишь на двучлен $x-a$, что делается с помощью схемы Горнера.

Пример 1. Установить кратность корня $x=2$ для многочлена $f(x)=x^6-6x^5+5x^4+33x^3-78x^2+44x+8$.

	1	−6	5	33	−78	44	8
2	1	−4	−3	27	−24	−4	0
2	1	−2	−7	13	2	0	
2	1	0	−7	−1	0		
2	1	2	−3	−7 $\neq$	0		

Таким образом, имеем: $f(x)=(x-2)^3(x^3-7x-1)$, причем многочлен x^3-7x-1 не делится на $x-2$. Значит, число 2 является трехкратным корнем данного многочлена.

Теорема. *Всякий многочлен степени $n \geqslant 1$ над полем комплексных чисел разлагается в произведение n линейных множителей.*

Доказательство. Если $f(x)$ есть многочлен первой степени, то он, как и всякий многочлен первой степени, неприводим. Допустим, что теорема доказана для многочленов степени $n-1$ и пусть $f(x)$ есть многочлен степени n. По теореме, доказанной в предыдущем параграфе, $f(x)$ имеет над полем комплексных чисел по крайней мере один корень α_1. Тогда $f(x)=(x-\alpha_1)q(x)$, где $q(x)$ — многочлен $(n-1)$-й степени.

По предположению индукции $q(x)$ разлагается в произведение $n-1$ линейных множителей.

Пусть $q(x)=c(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n)$, где c — некоторое число. Отсюда имеем:

$$f(x)=c(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ \dots\ (x-\alpha_n), \qquad (2)$$

т. е. многочлен $f(x)$ разлагается в произведение n линейных множителей. В силу принципа полной математической индукции этим теорема доказана.

Заметим, что указанное разложение с точностью до порядка множителей единственно. Это следует из того, что линейные множители $x-\alpha_i$ $(i=1, 2, \dots, n)$ неприводимы, а разложение на неприводимые множители единственно над любым числовым полем (§ 5).

Сравнивая многочлены в левой и правой частях равенства (2), замечаем, что c есть старший коэффициент многочлена $f(x)$.

В разложении (2) некоторые из чисел α_i $(i=1, 2, \dots, n)$ могут оказаться равными друг другу. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ различны, каждое из чисел $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$ равно одному из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Тогда, сгруппировав множители, можно записать: $f(x)=a_0(x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2}\dots(x-\alpha_k)^{n_k}$, где $n_1+n_2+\dots+n_k=n$.

Отсюда следует, что α_i $(i=1, 2, \dots, k)$ является n_i — кратным корнем многочлена $f(x)$. Из единственности разложения (2) следует, что других корней многочлен $f(x)$ не имеет. Этим доказана основная теорема алгебры.

Всякий многочлен n-й степени с числовыми коэффициентами имеет над полем комплексных чисел n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Замечание. Основная теорема не исключает случая $n=0$: многочлен нулевой степени есть постоянное, отличное от нуля число и, следовательно, не имеет корней, т. е. число его корней равно нулю.

2. Разложение многочленов на множители над полем действительных чисел.

Если над полем K всякий многочлен выше первой степени является приводимым (его можно разложить на множители первой степени), то для многочленов над полем D это уже неверно Например, многочлен второй степени $f(x)=x^2+1$ над полем D неприводим. Таким образом, над полем D существуют неприводимые многочлены первой и второй степени. Естественно, возникает вопрос: существуют ли многочлены с действительными коэффициентами выше второй степени, неприводимые над полем D.

Теорема. *Всякий многочлен выше второй степени с действительными коэффициентами над полем D приводим.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ — многочлен степени $n>2$ с действительными коэффициентами. По основной теореме алгебры $f(x)$ над полем K имеет n корней. Если среди них имеется действительный корень α, то

$$f(x)=(x-\alpha)\,q(x),$$

где множители $x-\alpha$ и $q(x)$ являются многочленами с действительными коэффициентами, т. е. $f(x)$ приводим над полем D. Пусть теперь $f(x)$ не имеет действительных корней. Возьмем любой его мнимый корень:

$$\alpha=a+bi \qquad (b\neq 0).$$

Покажем, что тогда число $\bar{\alpha}=a-bi$, сопряженное с α, также является корнем $f(x)$. Для этого установим сначала следующие свойства сопряженных чисел:

$$1)\ \bar{\alpha}+\bar{\beta}=\overline{\alpha+\beta};$$

$$2)\ \bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}=\overline{\alpha\beta}.$$

В самом деле, если $\alpha=a+bi$ и $\beta=c+di$, то $\bar{\alpha}+\bar{\beta}=(a-bi)+(c-di)=\overline{(a+c)-(b+d)i}=\overline{(a+c)+}$ $\overline{+(b+d)i}=\overline{\alpha+\beta}$; $\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}=(a-bi)(c-di)=(ac-bd)-$ $-(ad+bc)i=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}=\overline{(a+bi)(c+di)}=$ $=\overline{\alpha\beta}$.

Так как при нахождении числа $f(\alpha)$ приходится над комплексными числами производить лишь действия сложения и умножения, то, учитывая, что для действительного числа $\bar{a}=a$, имеем: $f(\bar{\alpha})=\overline{f(\alpha)}$, т. е. для многочлена с действительными коэффициентами сопряженным значениям переменного соответствуют сопряженные значения многочлена.

Так как α — корень многочлена $f(x)$, то $f(\alpha)=0$. Но тогда $f(\bar{\alpha})=\overline{f(\alpha)}=\bar{0}=0$, т. е. число $\bar{\alpha}$ есть также корень $f(x)$. Следовательно, многочлен $f(x)$ делится на многочлен

$\varphi(x)=(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})=(x-a-bi)(x-a+bi)=x^2-$ $-2ax+(a^2+b^2)$, т. е. $f(x)=\varphi(x)\,q(x)$.

Так как $\varphi(x)$ есть многочлен второй степени с действительными коэффициентами, а степень $f(x)$ больше двух, то $q(x)$ есть многочлен выше нулевой степени с действительными коэффициентами. Следовательно, и в этом случае $f(x)$ приводим над полем D.

Из доказанной теоремы следует: всякий многочлен выше нулевой степени с действительными коэффициентами можно разложить над полем D в произведение неприводимых множителей первой и второй степени.

В ходе доказательства предыдущей теоремы было установлено, что если $\alpha = a + bi$ $(b \neq 0)$ является корнем многочлена $f(x)$ с действительными коэффициентами, то его корнем является также число $\bar{\alpha} = a - bi$. Этот факт и сам по себе является важным. Из него, например, следует:

Всякий многочлен $f(x)$ с действительными коэффициентами имеет четное число мнимых корней, которые попарно сопряжены; многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один действительный корень.

3. Многочлены над полем рациональных чисел. Отыскание рациональных корней.

Если над полем комплексных чисел неприводимыми являются лишь многочлены первой степени, а над полем действительных чисел — все многочлены первой степени и некоторые многочлены второй степени, то над полем рациональных чисел существуют неприводимые многочлены любой степени.

Для доказательства последнего утверждения мы возьмем многочлен $x^n - 2$ и докажем, что он неприводим над полем рациональных чисел при любом $n \geqslant 1$. Если $n = 1$, то наше утверждение верно. Поэтому будем считать, что $n \geqslant 2$. Допустим, что

$$x^n - 2 = q(x)\,h(x),$$

где

$$q(x) = a_0x^r + a_1x^{r-1} + \ldots + a_r \text{ и}$$

$$h(x) = b_0x^s + b_1x^{s-1} + \ldots + b_s —$$

многочлены с рациональными коэффициентами, причем $r > 0$, $s > 0$ и $r + s = n$. Отсюда по теореме о тождественности двух многочленов (§ 5, п.1) имеем:

$$-2 = a_r \cdot b_s, \text{ или } 2 = |a_r|\,|b_s|.$$

Покажем, что каждое из чисел $|a_r|$, $|b_s|$ целое и больше единицы. Многочлен $x^n - 2$ над полем комплексных чисел имеет n корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, причем все они являются корнями n-й степени из 2, т. е.

$$\alpha_i^n = 2 \, (i = 1, \; 2, \; \ldots, \; n).$$

Из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ какие-то r чисел являются корнями многочлена $q(x)$ и остальные s чисел — корнями многочлена $h(x)$. Пусть

$$\alpha_1, \; \alpha_2, \; \ldots, \; \alpha_r \text{ — корни } q(x).$$

Тогда по теореме Виета

$$\alpha_1 \, \alpha_2 \, \ldots \, \alpha_r = a_r.$$

Возведя обе части этого равенства в n-ю степень, получим:

$$2^r = a^n{}_r, \text{ или } 2^r = |a_r|^n.$$

Отсюда следует, что $|a_r|$ есть целое число, большее единицы. Аналогично докажем, что и $|b_s|$ есть целое число, большее единицы. Итак, имеем: $2 = |a_r| \, |b_s|$, причем $|a_r|$ и $|b_s|$ — отличные от единицы целые числа. Получили явное противоречие. Следовательно, многочлен $x^n - 2$ неприводим.

Таким образом, с вопросом о приводимости многочленов над полем R дело обстоит сложнее, чем над полями D и K. Но зато здесь легко решается вопрос об отыскании корней, а именно: существует вполне определенный алгоритм, позволяющий найти всё рациональные корни многочлена с рациональными коэффициентами.

§ 9. Отыскание рациональных корней многочлена

Пусть $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ есть многочлен с рациональными коэффициентами. Не теряя общности, можно считать, что коэффициенты его являются целыми числами. В самом деле, если бы коэффициенты многочлена $f(x)$ были дробными, то, умножив $f(x)$ на их наименьший общий знаменатель, мы получили бы новый многочлен $\varphi(x)$ с целыми коэффициентами, имеющий те же корни, что и $f(x)$. Исходя из этого, мы будем в дальнейшем рассматривать многочлены только с целыми коэффициентами.

Теорема 1. *Если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами, то p есть делитель свободного члена, а q — делитель старшего коэффициента многочлена $f(x)$.*

Доказательство. Так как $\frac{p}{q}$ — корень $f(x)$, то

$$a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\ \dots\ +a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)+a_n=0,$$

или

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}q+\ \dots\ +a_{n-1}pq^{n-1}+a_nq^n=0.$$

Отсюда имеем: $a_0p^n=q(-a_1p^{n-1}-\dots-a_{n-1}pq^{n-2}-a_nq^{n-1})$, $a_nq^n=p(-a_0p^{n-1}-a_1p^{n-2}q-\ \dots\ -a_{n-1}q^{n-1})$, или $a_0p^n=q\cdot c_1$, $a_nq^n=pc_2$, где c_1, c_2 — целые числа.

По определению делимости это значит, что $a_0p^n \vdots q$ и $a_nq^n \vdots p$, и так как дробь $\frac{p}{q}$ несократима, то $(p^n, q)=1$ и $(q^n, p)=1$. Следовательно,

$$a_0 \vdots q \text{ и } a_n \vdots p, \tag{1}$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1 дает необходимое условие для того, чтобы рациональное число $\frac{p}{q}$ было корнем многочлена. Однако этого условия недостаточно, т. е. условие (1) может выполняться и для такой дроби $\frac{p}{q}$, которая не является корнем многочлена $f(x)$.

Тем не менее теорема 1 позволяет выписать конечное множество чисел, среди которых находятся все рациональные корни данного многочлена. Для нахождения последних достаточно проверить все эти числа, например, непосредственной подстановкой их в многочлен.

Отметим два очевидных следствия теоремы 1:

1) Если старший коэффициент многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами равен 1, то $f(x)$ может иметь лишь целые рациональные корни.

2) Если целое число a является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами, то a есть делитель свободного члена многочлена $f(x)$.

Пример 1. Пусть $f(x)=12x^5-19x^4-x^3-13x^2-13x+6$.

По теореме 1 корни этого многочлена следует искать среди тех несократимых дробей, числители которых являются делителями 6, а знаменатели — делителями 12. Следовательно, если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ есть корень $f(x)$, то p равно одному из чисел: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6 и q равно одному из чисел: ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 12. Составим для таких дробей табличку. При этом, учитывая, что

$$\frac{-p}{-q} = \frac{p}{q} \text{ и } \frac{p}{-q} = \frac{-p}{q},$$

знаменатели дробей будем брать лишь положительными.

Таблица 1

p	± 1	± 2	± 3	± 6	± 1	± 3	± 1	± 2	± 1	± 3	± 1	± 1
q	1	1	1	1	2	2	3	3	4	4	6	12

Мы получили 24 числа, среди которых находятся рациональные корни нашего многочлена, если таковые существуют. Для их отыскания достаточно найти значения нашего многочлена для каждого из этих 24 чисел. Работа эта вполне выполнима, но громоздка. Некоторую помощь в этом отношении может оказать следующая теорема.

Теорема 2. *Если несократимая дробь* $\frac{p}{q}$ *является корнем многочлена* $f(x)$ *с целыми коэффициентами, то при любом целом* m, *отличном от* $\frac{p}{q}$, *число* $f(m)$ *делится на число* $p - qm$, *т.е.* $\frac{f(m)}{p - qm}$ — *целое число.*

Доказательство. Так как $\frac{p}{q}$ — корень $f(x)$, то

$$f(x) \vdots x - \frac{p}{q}, \text{ т.е. } f(x) = \left(x - \frac{p}{q}\right) \varphi(x). \qquad (2)$$

Причем, как непосредственно усматривается из процесса деления по схеме Горнера, коэффициенты многочлена $\varphi(x)$ являются дробными числами со знаменателями q^k, где

$0 \leqslant k \leqslant n-1$. Умножив обе части равенства (2) на q^n, получим:

$$q^n f(x) = (qx - p)\ (\varphi(x)\, q^{n-1}),$$

или

$$q^n f(x) = (p - qx)\ \varphi_1(x), \tag{3}$$

где $\varphi_1(x) = -\varphi(x)\, q^{n-1}$ есть многочлен с целыми коэффициентами. Положив в равенстве (3) $x = m$, получим: $q^n f(m) = (p - mq)\,\varphi_1(m)$, где $\varphi_1(m)$ — целое число. Отсюда следует, что $q^n f(m) \vdots p - mq$.

А так как дробь $\frac{p}{q}$ несократима, т. е. p и q взаимно просты, то q^n и $p - mq$ также взаимно просты и, следовательно, $f(m) \vdots p - mq$, т. е. теорема доказана.

В частности, полагая $m = 1$, а затем $m = -1$, получим: если $\frac{p}{q}$ корень многочлена, не равный ± 1, то $f(1) \vdots p - q$ и $f(-1) \vdots p + q$, или

$$\frac{f(1)}{p-q},\ \frac{f(-1)}{p+q} \text{ — целые числа.} \tag{4}$$

Теорема 2 дает еще одно необходимое условие для рациональных корней многочлена. Это условие ценно ввиду того, что оно легко проверяется практически. Находим сначала $f(1)$ и $f(-1)$, а затем для каждой испытываемой дроби проверяем условие (4). Если хотя бы одно из чисел $\frac{f(1)}{p-q}$, $\frac{f(-1)}{p+q}$ — дробное, то $\frac{p}{q}$ корнем многочлена $f(x)$ не является. Проделаем это для предыдущего примера.

Непосредственной подстановкой в многочлен убеждаемся, что $f(1) = -28$, $f(-1) = -24$. Отсюда, в частности, следует, что 1 и -1 не являются корнями $f(x)$. Теперь для каждой возможной дроби $\frac{p}{q}$ из таблицы 1 будем проверять условия теоремы 2 при $m = 1$, т. е. будем устанавливать, целыми или дробными являются числа:

$$\frac{f(1)}{p-q} = \frac{-28}{p-q} \quad \text{и} \quad \frac{f(-1)}{p+q} = \frac{-24}{p+q}.$$

Результаты оформим в виде таблицы, где буквы *ц* и *д* означают соответственно, целым или дробным является число $\frac{f(1)}{p-q}$ или $\frac{f(-1)}{p+q}$.

Таблица 2

p	2	−2	3	−3	6	−6	1	−1	3	−3	1	−1	2	−2	1	−1	3	−3	1	−1	1	−1
q	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	6	6	12	12
$\frac{-28}{p-q}$	ц	д	ц	ц	д	ц	ц	д	ц	д	ц	ц	ц	д	д	д	ц	ц	д	ц	д	д
$\frac{-24}{p+q}$	ц		ц	ц		д	ц		д		ц	ц	д				д	ц		д		

Из полученной таблицы видно, что числа $\frac{-28}{p-q}$ и $\frac{-24}{p+q}$ являются целыми лишь в тех случаях, когда $\frac{p}{q}$ равно одному из чисел:

$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ -\frac{3}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{3}{4}.$$

Таким образом, из 24 дробей мы отобрали лишь 7 дробей, среди которых следует искать корни нашего многочлена.

Полученное множество иногда удается сузить дальше с помощью следующей теоремы о границах модулей корней многочлена.

Если α — корень многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, то $|\alpha| < 1 + \frac{A}{|a_0|}$, где A — наибольшее из чисел $|a_1|$, $|a_2|, \ldots, |a_n|$.

Так как модуль действительного числа совпадает с абсолютной величиной этого числа, отсюда, в частности, следует: все рациональные корни многочлена $f(x)$ находятся в промежутке

$$\left(-\left(1 + \frac{A}{|a_0|}\right),\ 1 + \frac{A}{|a_0|}\right).$$

Для предыдущего примера $1 + \frac{A}{|a_0|} = 1 + \frac{19}{12} < 3$.

Следовательно, корни многочлена $f(x) = 12x^5 - 19x^4 - x^3 - 13x^2 - 13x + 6$ находятся в промежутке $(-3, 3)$ Так как числа -3 и 3 в этот промежуток не входят, то из выписанных ранее 7 чисел остается проверить только 5 чисел: 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{3}{4}$.

По теореме Безу α — корень $f(x)$ тогда и только тогда, когда $f(x) \vdots x - \alpha$. Следовательно, для проверки оставшихся 5 чисел можно применить схему Горнера деления многочлена на двучлен.

Проверим число 2, для чего $f(x)$ делим на $x - 2$.

	12	−19	−1	−13	−13	6
2	12	5	9	5	−3	0

Так как остаток равен 0, то $f(x) \vdots x - 2$, причем

$$f(x) = (x-2)(12x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 5x - 3).$$

Отсюда имеем: 1) $x = 2$ — корень $f(x)$; 2) остальные корни совпадают с корнями многочлена

$$f_1(x) = 12x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 5x - 3.$$

Следовательно, для проверки следующих чисел вместо $f(x)$ можно использовать $f_1(x)$. Проверим, не является ли 2 корнем $f_1(x)$, т. е. не является ли 2 кратным корнем $f(x)$.

	12	5	9	5	−3
2	12	29	67	139	275

Остаток $275 \neq 0$. Значит, 2 не является корнем $f_1(x)$. Таким образом, число 2 является простым корнем многочлена $f(x)$: $x_1 = 2$.

Аналогично проверим остальные числа.

	12	5	9	5	−3	
$\frac{1}{2}$	12	11	$\frac{29}{2}$	$\frac{49}{4}$	$\frac{25}{8}$	$\frac{1}{2}$ — не корень.
$\frac{1}{3}$	12	9	12	9	0	$\frac{1}{3}$ — корень, причем

$$f_1(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)(12x^3 + 9x^2 + 12x + 9) =$$

$$= (3x - 1)(4x^3 + 3x^2 + 4x + 3).$$

Остальные числа можно проверять с использованием многочлена $f_2(x) = 4x^3 + 3x^2 + 4x + 3$, причем проверке подлежат числа $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{3}{4}$. Непосредственно замечаем, что числа $\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{3}$ не могут быть корнями $f_2(x)$, так как их знаменатель 3 не является делителем старшего коэффициента 4. Таким образом, проверке подлежит лишь число $-\frac{3}{4}$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 3 & 4 & 3 \\ \hline \frac{3}{4} & 4 & 0 & 4 & 0 \end{array} \quad \frac{3}{4} \text{ — корень.}$$

Следовательно,

$$f_2(x) = \left(x + \frac{3}{4}\right)(4x^2 + 4) = (4x + 3)(x^2 + 1).$$

В итоге имеем: многочлен $f(x)$ имеет три рациональных корня: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = -\frac{3}{4}$, причем

$$f(x) = (x - 2)(3x - 1)(4x + 3)(x^2 + 1).$$

§ 10. Решение алгебраических неравенств

Определение. Числовое поле P называется *упорядоченным*, если для некоторых пар его чисел a и b определено отношение $a > b$ (читается: a больше b), удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. Для любых двух чисел a и b из P имеет место одно и только одно из соотношений: $a = b$, $a > b$, $b > a$.
2. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.
3. Если $a > b$, то $a + c > b + c$.
4. Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$.

Если P — упорядоченное поле, то положим $a < b$ (читается: a меньше b) тогда и только тогда, когда $b > a$.

Соотношения вида $a > b$ и $a < b$ называются неравенствами (или числовыми неравенствами).

Условия 1 — 4 являются основными свойствами неравенств между элементами упорядоченного поля Опираясь на них, можно доказать все другие известные свойства неравенств. Рассмотрим для примера доказательство некоторых из них.

а) $a > b$ тогда и только тогда, когда $a - b > 0$.

В самом деле, если $a > b$, то, прибавив к обеим частям этого неравенства $-b$ (аксиома 3), получим $a - b > 0$. Обратно, прибавив к обеим частям неравенства $a - b > 0$ по b, получим $a > b$.

б) если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

Действительно, так как $a > b$, то по аксиоме 3 $a + c > b + c$. Аналогично из неравенства $c > d$ следует неравенство $b + c > b + d$. Таким образом, имеем:

$$a + c > b + c, \ b + c > b + d.$$

Отсюда, по аксиоме 2 получим: $a + c > b + d$.

в) Если $a > 0$, то $-a < 0$.

Для доказательства достаточно к обеим частям неравенства $a > 0$ прибавить по $-a$.

Из арифметики известно, что поле действительных чисел упорядочено. Упорядоченными являются и все подполя поля действительных чисел. Естественно, возникает вопрос: можно ли упорядочить поле комплексных чисел? Легко показать, что поле комплексных чисел не может быть упорядочено. В самом деле, допустим, что поле K упорядочено. Так как «мнимая единица» $i \in K$ и $i \neq 0$, то по аксиоме 1 должно быть: $i > 0$ или $i < 0$. Пусть $i > 0$. Умножив обе части последнего неравенства на i (аксиома 4), получим $-1 > 0$. Умножив обе части этого неравенства на -1 (аксиома 4), получим $1 > 0$. Сложив почленно неравенства $-1 > 0$ и $1 > 0$, получим $0 > 0$, что противоречит аксиоме 1. Следовательно, наше допущение $i > 0$ неверно.

Пусть $i < 0$. Тогда $-i > 0$. Умножая обе части этого неравенства на $-i$, а затем обе части полученного при этом неравенства $-1 > 0$ на -1, получим: $-1 > 0$ и $1 > 0$. Отсюда следует, что $0 > 0$.

Таким образом, допущения, что $i > 0$ или $i < 0$, ведут к противоречию. А так как $i \neq 0$, то получаем, что между элементами i и 0 не осуществляется ни одно из соотношений, требуемых аксиомой 1. Следовательно, поле K не может быть упорядочено.

В связи с этим рассматривать неравенства над полем комплексных чисел не имеет смысла, и ниже мы будем рассматривать неравенства над полем действительных чисел.

Наряду с числовыми неравенствами, свойства которых мы будем считать известными, в алгебре рассматривают неравенства с переменными (неизвестными) величинами, т. е. неравенства вида:

$$F_1(x, y, \ldots, z) > F_2(x, y, \ldots, z) \tag{1}$$

и

$$F_1(x, y, \ldots, z) < F_2(x, y, \ldots, z), \tag{1'}$$

где F_1, F_2 — некоторые функции над полем действительных чисел.

Система значений неизвестных $x = a$, $y = b$, $\ldots$, $z = c$, для которых значение функции F_1 больше значения функции F_2 называется решением неравенства (1). Аналогично определяется решение неравенства (1′).

Для неравенств, так же как и для уравнений, вводятся понятия области определения и равносильности двух неравенств.

Так как $a < b$ тогда и только тогда, когда $-a > -b$, то неравенство $F_1 < F_2$ равносильно неравенству $-F_1 > -F_2$. Таким образом, решение неравенства вида (1′) сводится к решению неравенства вида (1). Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать лишь неравенства вида (1).

Пользуясь аксиомами 3 и 4 определения упорядоченного поля, легко доказать следующие теоремы о равносильности неравенств.

Теорема 1. *Если функция $\Phi(x, y, \ldots, z)$ определена в области определения неравенства (1), то неравенство (1) равносильно неравенству*

$$F_1(x, y, \ldots, z) + \Phi(x, y, \ldots, z) > F_2(x, y, \ldots, z) + \\ + \Phi(x, y, \ldots, z).$$

Теорема 2. *Если в области определения неравенства (1) функция $\Phi(x, y, \ldots, z)$ принимает лишь положительные значения, то неравенство (1) равносильно неравенству*

$$F_1(x, y, \ldots, z)\,\Phi(x, y, \ldots, z) > \\ > F_2(x, y, \ldots, z)\,\Phi(x, y, \ldots, z).$$

Если же функция $\Phi(x, y, \ldots, z)$ в области определения неравенства (1) принимает лишь отрицательные значения, то неравенство (1) равносильно неравенству

$$F_1(x, y, \ldots, z)\ \Phi(x, y, \ldots, z)$$
$$< F_2(x, y, \ldots, z)\ \Phi(x, y, \ldots, z).$$

Если $F_1(x, y, \ldots, z)$ и $F_2(x, y, \ldots, z)$ являются целыми рациональными функциями (т. е. многочленами) над полем действительных чисел, то неравенство (1) называется *алгебраическим.*

Всякое алгебраическое неравенство с одним неизвестным можно записать в следующем виде:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n > 0, \tag{2}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — действительные числа.

При этом если $a_0 \neq 0$, то n называется степенью неравенства (2).

Рассмотрим сначала случаи, когда:

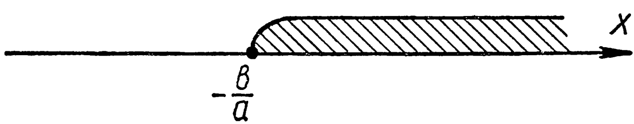
I. $n = 1$. В этом случае неравенство (2) имеет вид:

$$ax + b > 0, \tag{3}$$

где $a \neq 0$.

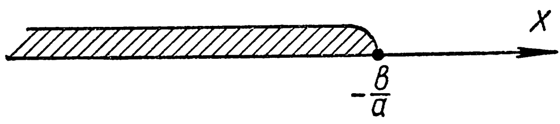
Если $a > 0$, то решением неравенства (3) является любое действительное число $x > -\frac{b}{a}$.

Геометрически множество таких чисел представляется множеством точек действительной оси, лежащих правее точки $x = -\frac{b}{a}$ (черт. 7).



Черт. 7

Если $a < 0$, то решением неравенства (3) является любое действительное число $x < -\frac{b}{a}$.



Черт. 8

Геометрически множество таких чисел представляется множеством точек действительной оси, лежащих левее точки $x = -\frac{b}{a}$ (черт. 8)

II. $n = 2$. Тогда неравенство (2) имеет вид:

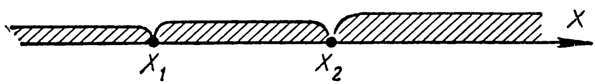
$$ax^2 + bx + c > 0, \tag{4}$$

где $a \neq 0$. Обозначим через Δ дискриминант квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ и рассмотрим три случая:
1. $\Delta > 0$.

В этом случае трехчлен имеет два различных действительных корня x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$ и неравенство (4) можно записать в следующем виде:

$$a(x - x_1)(x - x_2) > 0. \tag{5}$$

Точками x_1 и x_2 числовая ось OX разбивается на три интервала (черт. 9): $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2), (x_2, ∞).



Черт. 9

Если $a > 0$, то неравенству (5) удовлетворяют те и только те значения x, при которых значения обоих сомножителей $x - x_1$ и $x - x_2$ положительны или отрицательны. Это будет иметь место при $x > x_2$, а также при $x < x_1$. Таким образом, в этом случае решениями неравенства (4) служат действительные числа из интервалов $(-\infty, x_1)$ и (x_2, ∞).

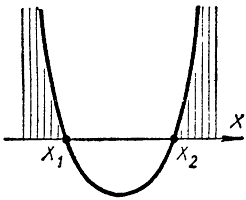
Аналогично, в случае $a < 0$ получим: решениями неравенства (4) являются действительные числа из интервала (x_1, x_2).

Эти же результаты получим, если рассмотрим графики квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ при $a > 0$ и $a < 0$ (черт. 10, 11).

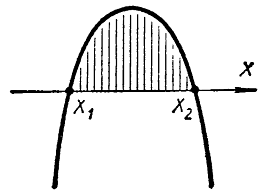
2. $\Delta = 0$. Тогда квадратный трехчлен имеет два равных действительных корня $x_1 = x_2$, и неравенство (4) можно представить в виде $a(x - x_1)^2 > 0$.

Если $a > 0$, то это неравенство удовлетворяется при любом действительном значении x, кроме $x = x_1$, так как в этом случае значение многочлена $a(x - x_1)^2$ равно нулю.

Если же $a < 0$, то произведение $a(x - x_1)^2$ при любых значениях x отрицательно или равно нулю при $x = x_1$. Следовательно, в этом случае неравенство (4) не имеет решений.



Черт. 10



Черт. 11

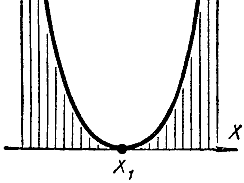
Таким образом, если $\Delta = 0$, то неравенство (4) имеет своим решением любое действительное число, кроме корня трехчлена $y = ax^2 + bx + c$, при $a > 0$ и не имеет решений при $a < 0$. Это можно видеть и из графика трехчлена (черт. 12, 13).

3. $\Delta < 0$. В этом случае квадратный трехчлен не имеет действительных корней. Выделив из него полный квадрат, получим:

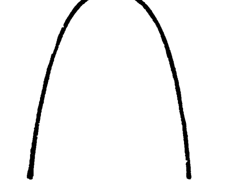
$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

и неравенство (4) примет вид:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0.$$



Черт. 12



Черт. 13

Если $a > 0$, то слагаемое $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ — неотрицательное число при любом значении x. Второе слагаемое

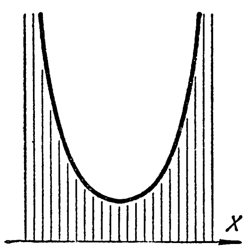
$$-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

не зависит от x и положительно, ибо $b^2-4ac=\Delta<0$. Отсюда видно, что при $\Delta<0$ неравенство (4) удовлетворяется любым действительным значением x, т. е. является тождественным.

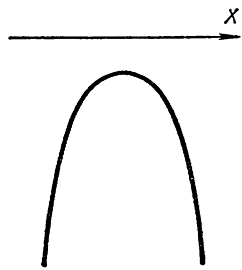
Аналогично получим, что если $a<0$, то неравенство (4) не имеет решений. Таким образом, если $\Delta<0$, то неравенство (4) при $a>0$ является тождественным, а при $a<0$ не имеет решений. Это можно видеть и из графика трехчлена (черт. 14, 15).

Рассмотрим теперь неравенство (2) при любом n.

Как известно (§ 7), любой многочлен над полем действительных чисел можно представить в виде произведения неприводимых многочленов первой и второй степени.



Черт. 14



Черт. 15

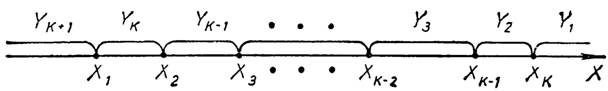
Следовательно, неравенство (2) можно привести к следующему виду:

$$a_0(x-x_1)(x-x_2)\ \dots\ (x-x_k)P_1(x)\cdot P_2(x)\ \dots\ P_l(x)>0, \quad (6)$$

где $P_i(x)$ $(i=1,\ \dots,\ l)$ — неприводимые многочлены второй степени со старшими коэффициентами, равными 1. Для каждого трехчлена $P_i(x)$ дискриминант $\Delta_i<0$ (ввиду неприводимости) и старший коэффициент $a_i=1>0$. Согласно случаю 2 значение трехчлена $P_i(x)$ $(i=1,\ \dots,\ l)$ положительно при всех значениях x. Следовательно, для решения неравенства (6) достаточно решить неравенство

$$a(x-x_1)(x-x_2)\ \dots\ (x-x_k)>0. \quad (7)$$

Заметим еще, что если некоторый множитель $x-x_i$ повторяется m раз, то при четном $m=2m_i$ значение многочлена $(x-x_i)^{2m_1}$ положительно при любом значении x, кроме $x=x_i$, когда оно равно нулю, а при нечетном $m=2m_1+1$ при любом x знак многочлена $(x-x_i)^{2m_1+1}$ совпадает со знаком двучлена $x-x_i$. Отсюда следует, что при решении неравенства (7) можно ограничиться лишь тем случаем, когда все множители $x-x_i$ различны. Занумеруем числа $x_i\,(i=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ в порядке возрастания $x_1<x_2<\ \ldots\ <x_{k-1}<x_k$ и нанесем на числовую ось. Получим $k+1$ интервалов (черт. 16):



Черт. 16

$$Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_k,\ Y_{k+1}.$$

Если $a_0>0$, то очевидно, что в интервале Y_1 все сомножители $x-x_i\,(i=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ положительны и, значит, любое значение x из Y_1 удовлетворяет неравенству (7).

В интервале Y_2 все сомножители $x-x_i$, кроме $x-x_k$, положительны, а сомножитель $x-x_k$ отрицателен и, значит, для любого значения x из Y_2

$$a_0(x-x_1)(x-x_2)\ \ldots\ (x-x_k)\leqslant 0.$$

Значит, значения x из Y_2 не удовлетворяют неравенству (7).

Продолжая эти рассуждения, получим: решением неравенства (7) при $a_0>0$ является множество значений x из интервалов

$$Y_1,\ Y_3,\ Y_5,\ \ldots,$$

т. е. множество интервалов с нечетными номерами.

Аналогично получим: при $a_0<0$ решением неравенства (7) является множество интервалов с четными номерами:

$$Y_2,\ Y_4,\ Y_6,\ \ldots.$$

Заметим, что решение дробно-рациональных неравенств, т. е. неравенств вида:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad \left(\frac{P(x)}{Q(x)} < 0\right),$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, сводится к решению алгебраических неравенств. Такое сведение позволяет осуществить следующая очевидная теорема.

Если $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, то неравенство

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad \left(\frac{P(x)}{Q(x)} < 0\right)$$

равносильно неравенству

$$P(x)\ Q(x) > 0 \quad (P(x)\ Q(x) < 0).$$

Справедливость этого утверждения следует из того, что отношение действительных чисел положительно (отрицательно) тогда и только тогда, когда положительно (отрицательно) их произведение.

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{(x^4-1)\ (2x+3)\ (-x^2+x-5)}{x^2+4x-12} > 0.$$

По сформулированной выше теореме данное неравенство равносильно следующему неравенству:

$$(x^4-1)\ (2x+3)\ (-x^2+x-5)\ (x^2+4x-12) > 0.$$

Представим левую часть в виде произведения множителей первой степени и неприводимых многочленов второй степени:

$x^4-1=(x-1)\ (x+1)\ (x^2+1)$, где x^2+1 — неприводим.

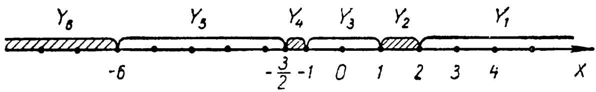
$x^2+4x-12=(x-2)\ (x+6)$, $-x^2+x-5=-(x^2-x+5)$, причем многочлен x^2-x+5 неприводим, так как его дискриминант $\Delta=1-20=-19<0$. Подставив найденные разложения многочленов в последнее неравенство, получим:

$$-2(x-1)\ (x+1)\left(x+\frac{3}{2}\right)(x^2-x+5)\ (x-2)(x+6) > 0.$$

Учитывая, что трехчлены x^2+1 и x^2-x+5 имеют положительные значения при любых значениях x, заменим последнее неравенство равносильным ему неравенством

$$(x+6)\left(x+\frac{3}{2}\right)(x+1)(x-1)(x-2)<0.$$

Корни многочлена, стоящего в левой части этого неравенства, $x_1=-6$, $x_2=-\frac{3}{2}$, $x_3=-1$, $x_4=1$, $x_5=2$ нанесем на числовую ось (черт. 17).



Черт. 17

Точками -6, $-\frac{3}{2}$, -1, 1, 2 числовая ось разбивается на 6 интервалов:

$$Y_1=(2,+\infty),\ Y_2=(1,\ 2),\ Y_3=(-1,\ 1),\ Y_4=\left(-\frac{3}{2},\ -1\right),$$

$$Y_5=\left(-6,\ -\frac{3}{2}\right),\ Y_6=(-\infty,\ -6).$$

Очевидно, что значение многочлена $(x+6)\left(x+\frac{3}{2}\right)\times$ $\times(x+1)(x-1)(x-2)$ в интервалах Y_1, Y_3, Y_5 положительно, в интервалах Y_2, Y_4, Y_6 отрицательно. Следовательно, решениями последнего, а следовательно, и данного неравенства будут служить все значения x из интервалов:

$$Y_2=(1,\ 2),\ Y_4=\left(-\frac{3}{2},\ -1\right),\ Y_6=(-\infty,\ -6).$$

Рассмотрим еще систему алгебраических неравенств первой степени с двумя неизвестными. Всякая такая система может быть приведена к виду:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1>0, \\ a_2x+b_2y+c_2>0, \\ \dots\dots\dots \\ a_mx+b_my+c_m>0. \end{array}\right. \tag{8}$$

Решим сначала одно уравнение с двумя неизвестными:

$$ax + by + c > 0. \tag{9}$$

Если $b \neq 0$, то неравенство (9) равносильно неравенству

$$y > -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \text{ при } b > 0$$

и неравенству $y < -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ при $b < 0$.

Таким образом, достаточно уметь решать неравенства

$$y > kx + b, \tag{10}$$

$$y < kx + b. \tag{11}$$

Рассмотрим уравнение $y = kx + b$. Графиком его является прямая l, которая делит всю плоскость XOY (черт. 18) на две полуплоскости: I (верхняя) и II (нижняя).

Рассмотрим на прямой l некоторую точку A $(x_1\ y_1)$. Ее координаты связаны зависимостью $y_1 = k_1x_1 + b$.

Для точек $B(x_1, y_2)$, находящихся в полуплоскости II, выполняется неравенство $y_2 < y_1$ и, следовательно,

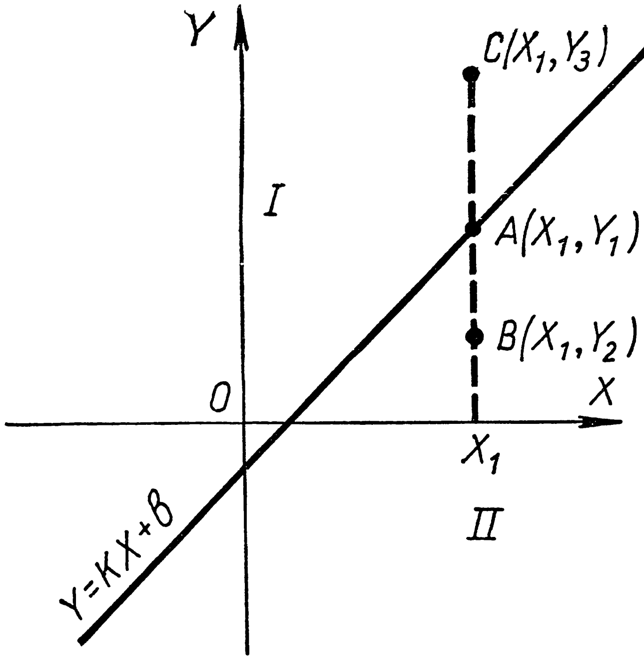
$$y_2 < kx_1 + b;$$

для точек $C(x_1, y_3)$, лежащих в полуплоскости I,

$$y_3 > kx_1 + b.$$

Так как в качестве A была выбрана любая точка прямой l, то отсюда можно сделать следующий вывод: решениями неравенств (10) и (11) являются координаты точек соответственно верхней и нижней полуплоскостей, на которые делит координатную плоскость прямая $y = kx + b$. Если в неравенстве (9) $b = 0$, то неравенство принимает вид: $ax + c > 0$, где $a \neq 0$. В этом случае неравенству удовлетворяют пары чисел x, y, где $x > -\frac{c}{a}$ при $a > 0$ и $x < -\frac{c}{a}$ при $a < 0$, а y — любое действительное число.

Геометрически это значит, что неравенству (9) при $a > 0$ и $a < 0$ удовлетворяют все точки соответственно



Черт. 18.

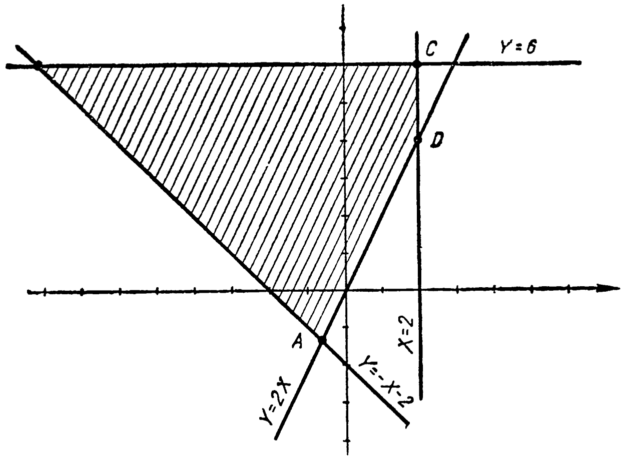
правой и левой полуплоскостей, на которые делит координатную плоскость прямая $x = -\frac{c}{a}$.

Таким образом, во всех случаях геометрическим решением неравенства (9) является множество точек одной из полуплоскостей, на которые координатная плоскость делится прямой

$$ax + by + c = 0.$$

Теперь ясно, что для решения системы неравенств (8), надо найти полуплоскость решений каждого из неравенств, а затем взять общую часть полученных областей.

Если эта общая часть будет пустой, то данная система неравенств не имеет решений. В противном случае множество решений геометрически будет представляться множеством



Черт. 19

точек части плоскости, ограниченной некоторой замкнутой или незамкнутой ломаной линией.

Пример 2. Решить геометрически систему неравенств:

$$\begin{cases} x+y+2>0, \\ 2x-y<0, \\ x-2<0, \\ 6-y>0. \end{cases}$$

Преобразуем данную систему к виду:

$$\begin{cases} y>-x-2, \\ y>2x, \\ x<2, \\ y<6. \end{cases}$$

Из чертежа 19 видно, что решением данной системы неравенств является множество точек четырехугольника $ABCD$, или системе неравенств удовлетворяют координаты тех и только тех точек, которые находятся внутри четырехугольника $ABCD$.

СОДЕРЖАНИЕ

Редактор *И. С. Комиссарова*
Технический редактор *М. С. Дранникова*
Корректор *Н. П. Кононова*

* * *

Сдано в набор 11/XII 1963 г. Подписано к печати 28/IV 1964 г. $84 \times 108^1/_{32}$. Печ. л. 6,5(5,33) Уч.-изд. л. 4,52. Тираж 10 тыс. экз. (пл. 64 г. № 1329/1631)

Издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по печати. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский полиграфкомбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров РСФСР по печати,

г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. Заказ № 481.

Цена 14 к.