ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Фридман Л. М., Виноградова А. А.,
Есипова И. С., Панин И. С.

ЗАДАЧНИК—ПРАКТИКУМ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ АЛГЕБРЕ

УЧПЕДГИЗ · 1962

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Московский государственный заочный педагогический институт

ФРИДМАН Л. М., ВИНОГРАДОВА А. А.,
ЕСИПОВА И. С., ПАНИН И. С.

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ АЛГЕБРЕ

Под общей редакцией
Л. М. ФРИДМАНА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва 1962

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий задачник-практикум предназначен для студентов-заочников математических отделений физико-математических факультетов педагогических институтов.

Задачник-практикум составлен в соответствии с программой курса элементарной математики издания 1957 г., однако расположение материала в задачнике несколько иное, как нам кажется, более естественное. Кроме того, мы решили изъять из курса последний раздел «Тригонометрические уравнения в действительной области», который в практике многих институтов изучается в курсе тригонометрии.

Основная цель, которую ставили перед собой авторы данного задачника-практикума, — помочь студентам-заочникам приобрести прочные знания и навыки в решении задач элементарной алгебры, причем не только школьных (т. е. таких задач, которые встречаются в принятых в настоящее время задачниках по алгебре для средней школы), но и более сложных, предусмотренных программой курса элементарной алгебры для педагогических институтов.

Приступая к самостоятельному решению задач из данного задачника, студент-заочник должен предварительно очень тщательно проработать соответствующий теоретический материал. В начале каждого параграфа данного задачника мы указываем, какие параграфы учебника С. И. Новоселова «Специальный курс элементарной алгебры» [1] следует проработать для того, чтобы

---

[1] Имеется в виду 4-е издание 1956 г. этого учебника, который мы в дальнейшем будем кратко называть «учебник С. И. Новоселова».

можно было приступить к решению задач этого параграфа.

В тех случаях, когда в учебнике С. И. Новоселова нет необходимого материала или он изложен недостаточно полно, в тексте задачника даются необходимые теоретические сведения. Кроме того, в разобранных задачах даются также некоторые теоретические сведения. Очень желательно, чтобы студент-заочник познакомился с изложением рассматриваемых вопросов и по какому-либо другому учебнику, в частности по школьному учебнику.

Более конкретные указания об использовании задачника-практикума должны быть даны студентам-заочникам преподавателями институтов.

Авторы выражают большую благодарность Н. Г. Федину, М. Т. Стародубцеву и З. Г. Кулапиной, обстоятельные рецензии которых помогли авторам значительно улучшить задачник. Авторы также очень признательны С. Е. Ляпину, советы которого были использованы ими с благодарностью.

Конечно, авторы понимают, что данный задачник-практикум не лишен существенных недостатков; возможны и просмотры.

Некоторым оправданием нам может служить лишь то, что это первый опыт по созданию задачника-практикума по элементарной алгебре. Поэтому авторы будут признательны за всякие указания, способствующие дальнейшему улучшению задачника.

Свои замечания и пожелания просьба посылать по адресу: г. Москва, пл. Революции, 3/1, МГЗПИ.

Авторы

Глава I. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НАД НИМИ

§ 1. Алгебраические выражения и их классификация

Предварительно проработайте по учебнику С. И. Новоселова § 8, 10, 11, 12, 13 и 14.

1. Выясните, какие буквы в следующих равенствах являются параметрами и какие аргументами:

а) уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;

б) формула длины окружности: $c=2\pi r$;

в) уравнение прямой: $Ax+By+C=0$;

г) формула пути $s=v_0t+\frac{gt^2}{2}$.

2. Определите, какие из данных аналитических выражений: 1) алгебраические; 2) трансцендентные; затем среди алгебраических выражений выделите рациональные и иррациональные:

а) $\frac{x^2+\lg x}{x+3}$; б) $0{,}8\,x^4+5x^{-3}+\sqrt{2}\,x$; в) $\frac{x\sqrt{3}-2}{\sqrt{x+4}}$;

г) $\sqrt{x^2+2x-4}+x-10$; д) 3^x+2x-1;

е) $\frac{x^2+\sqrt{x-7}}{\lg(x^2+4)}$; ж) $x^3-3x+4\sqrt[5]{30x^7}$; з) $\frac{a+\lg 4}{\sqrt{6}-2a}$;

и) $\frac{z^3+\sin 90^\circ\cdot z+2}{z\sqrt{5}-9}$; к) $\sqrt[x]{x+12}$; л) $(x+3)^x$;

м) $x^{\sqrt{2}}+x^3$; н) $\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}-\frac{x+y}{x^4-y^4}$.

Решение. а) Над аргументом данного аналитического выражения, кроме алгебраических операций (сложение, возвышение в целую степень и деление), производится еще и логарифмирование. Значит, это выражение является трансцендентным.

б) Над аргументом аналитического выражения производятся действия сложения, умножения, возведения в целую положительную и отрицательную степень.

Извлечение корня в данном выражении производится не из аргумента, а из постоянного числа, поэтому данное выражение является алгебраическим рациональным выражением.

в) Над аргументом данного выражения производятся рациональные действия и извлечение корня. По определению, такое выражение является алгебраическим иррациональным.

3. Определите, какие из данных рациональных выражений целые и какие дробные:

$$\text{а) } \frac{4x^2-5x+1}{3};\ \text{б) } 0{,}3x^4-2x^3+0{,}1x+\frac{3}{2};$$

$$\text{в) } 2x^{-4}+x^2-5x^{-1};\ \text{г) } \frac{ax^3+bx^2+c}{a+b};\ \text{д) } \frac{6x^2-7x+2}{x+3};$$

$$\text{е) } \frac{12abc}{5d^3};\ \text{ж) } \frac{(m+n)^2}{2}-\frac{(m-n)^2}{3}-mn;$$

$$\text{з) } 15mn^2\cdot\frac{2}{3}m^2n^3\cdot 4n^2;\ \text{и) } \frac{2}{a^3+a^2b};\ \text{к) } \frac{x^2-2x+1}{\sqrt{2}}.$$

Решение. а) В данном выражении не производится деления на аргумент, поэтому выражение является целым.

в) В данном выражении производится возвышение аргумента в отрицательную степень, а это равносильно делению на аргумент.

Значит, это выражение является дробным.

4. Определите, какие из следующих выражений являются многочленами:

$$\text{а) } (6a^2b-ab^2)(a+b)^2;\ \text{б) } 2(m+n)^3;\ \text{в) } \frac{5x^2-2x+4}{3};$$

$$\text{г) } \frac{(x+y)^3+4}{x+y};\ \text{д) } \frac{8mn\cdot 6m^2n^4\cdot\frac{2}{5}m^3n}{2};$$

$$\text{е) } 2^x+3x^2-8;\ \text{ж) } 2x^{-1}-5x+0{,}2;\ \text{з) } (a+b)^2x^2;$$

и) $2x^2y^7 \cdot \frac{3}{10}x^5y^3 \cdot 5x$; к) $\sqrt{6}\,x^3 + 2x^2 - \sqrt{2}\,x + 5$.

Примечание. В учебнике С. И. Новоселова многочлен отождествляется с любым целым рациональным выражением. В ряде других учебников (в частности, в школьном учебнике алгебры А. Н. Барсукова) многочлен рассматривается как алгебраическая сумма одночленов.

Это различие в понятии многочлена будет ясно из следующего примера.

Возьмем целое выражение $(2x+3)^2(x-2)$.

По С. И. Новоселову, это выражение есть многочлен, а по определению А. Н. Барсукова, данное выражение не является многочленом, но может быть преобразовано к виду многочлена.

В данном пособии мы будем придерживаться классификации С. И. Новоселова.

5. Выясните, какие из указанных ниже алгебраических выражений являются многочленами, а какие не являются:

а) $\frac{x^2+2xy+y^2-7z^3}{4}$; б) $3mnx^5$; в) $(a+b)^3$; г) $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}$;

д) $(3mn+5n^2)(5n^2-3mn)$; е) $\frac{6}{ab}+\frac{2a}{b}-7$;

ж) $0{,}5yz^2-3z^3+0{,}25z^2u$; з) $\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}+\frac{x+y}{3}$;

и) $\frac{m^2+2nm-n^2}{xy}$; к) 3^x+2x-5^{-x}; л) $x^{-2}+3x^2-0{,}7x$;

м) $\frac{a\sqrt{3}+3b\sqrt{2}-12bc^2}{6}$.

6. В выражениях $2x-5$; $\frac{3}{2x-5}$ и $\sqrt{2x-5}$ найти область допустимых значений для аргумента.

Решение. Выражение $2x-5$ определено при всех действительных значениях x. Выражение $\frac{3}{2x-5}$ определено при тех значениях x, при которых $2x-5 \neq 0$, т. е. при всех $x \neq 2{,}5$. Выражение $\sqrt{2x-5}$ определено при значениях x, при которых $2x-5 \geqslant 0$, т. е. при всех $x \geqslant 2{,}5$.

7. Найти область допустимых значений для аргументов следующих алгебраических выражений:

а) $5a-(a+b)^2+a^2$; б) $3x+\frac{2}{x-7}$; в) $\frac{x}{x-1}+\frac{1}{x^2-4}$;

г) $\frac{2}{x-y}+\frac{3}{x+y}$; д) $\sqrt{5-x}+2x-3$; е) $x+6+$
$+\sqrt{16-x^2}$; ж) $\frac{m^2+6}{m^2-m}$; з) $\sqrt{x-9}-\sqrt{17-2x}$;

и) $\frac{x+3}{x^2-6x+8}$; к) $\frac{2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1}}$; л) $\frac{0,5}{\sqrt[3]{2x-3}}$;

м) $(3x-7)^2+4$; н) $\frac{2x}{(x+3)^2-x^2-6x-9}$;

о) $\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$; п) $\sqrt{\frac{x-3}{x}}$.

Решение. г) Выражение определено при тех значениях x и y, при которых знаменатели отличны от нуля, т. е. при любых $x \neq \pm y$.

е) Выражение $x+6$ определено при любом действительном значении x, а $\sqrt{16-x^2}$ имеет действительные значения только тогда, когда подкоренное выражение $16-x^2 \geqslant 0$. Решив это неравенство, найдем допустимые значения для $x: -4 \leqslant x \leqslant 4$.

з) Областью допустимых значений для аргумента данного выражения является общая часть областей определения выражений $\sqrt{x-9}$ и $\sqrt{17-2x}$.

Выражение $\sqrt{x-9}$ определено при всех $x \geqslant 9$, а выражение $\sqrt{17-2x}$ определено при $x \leqslant 8,5$. Области $x \geqslant 9$ и $x \leqslant 8,5$ не имеют общей части, поэтому областью допустимых значений для аргумента данного выражения является пустое множество.

о) $\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ имеет действительные значения тогда, когда одновременно выполняются следующие два условия: $x+2 \neq 0$ и $\frac{x-1}{x+2} \geqslant 0$. Из первого условия имеем $x \neq -2$. Дробь $\frac{x-1}{x+2} \geqslant 0$, если числитель и знаменатель одновременно имеют одинаковые знаки, т. е. если

$$\left.\begin{array}{l} x-1 \geqslant 0, \\ x+2 \geqslant 0 \end{array}\right\} \text{ или } \left.\begin{array}{l} x-1 \leqslant 0, \\ x+2 \leqslant 0. \end{array}\right\}$$

Решая первую систему, получим $x \geqslant 1$, а из второй системы имеем $x \leqslant -2$. Учитывая первое условие ($x \neq -2$), найдем область допустимых значений для аргумента данного выражения:

$$x \geqslant 1 \text{ и } x < -2.$$

8. Найдите степени следующих одночленов и многочленов:

а) $-5x^3y^2z$; б) $\frac{7}{12}a^nbx^2y^k$; в) $(a^3-b^2)^4$; г) $m^3bc^2-nb^2c^5$;

д) ax^4+bx^3-cx+d; е) $3a^{2n}b-8a^{2n}c^3+6a^{n-1}+$ $+2a^{n+1}(b^nc)^2$.

9. Какие из нижеследующих многочленов однородные относительно переменных (x, y, z):

а) $ax^2y^2+bxy^3+cx^3y+dy^4$; б) $2x^3+4xy^2-2yz^2+$ $+3x^3z+2xyz$; в) $3x^2y+0{,}5x^2z+2xz^2-1$;

г) $4x^4-5xy^3+8x^2y^2-2(x^2-y^2)^2$.

10. Напишите в общем виде однородный многочлен первой степени с четырьмя аргументами, второй степени с тремя аргументами, третьей степени с двумя, тремя и четырьмя аргументами.

11. Многочлен

$$[3a^2bc^3-4(ab-c)^2]\,5a^3b+(8a^2b-c)(b^2c+2a^2)$$

привести к каноническому виду.

Решение. Чтобы привести многочлен к каноническому виду, надо: 1) раскрыть все скобки, 2) привести подобные члены и 3) расположить члены многочлена в лексикографическом порядке. В данном случае получим:

$$[3a^2bc^3-4(ab-c)^2]\,5a^3b+(8a^2b-c)(b^2c+2a^2)=$$
$$=15a^5b^2c^3-20a^5b^3+40a^4b^2c-20a^3bc^2+8a^2b^3c+16a^4b-$$
$$-b^2c^2-2a^2c=-20a^5b^3+15a^5b^2c^3+40a^4b^2c+16a^4b-$$
$$-20a^3bc^2+8a^2b^3c-2a^2c-b^2c^2.$$

12. Выясните, какие из нижеследующих многочленов представлены в каноническом виде. Многочлены, заданные не в каноническом виде, надо привести к каноническому.

а) $4x^4-13ax^3-26a^2x^2+5a^3x+9a^4$; б) x^5-3ax^3+ $+1{,}5a^2x^2+2a^2x^3-a^3x+a+5$; в) $3mn^2x^3y^nm^5\cdot 4x^k$;

г) $2a^2b\cdot 4cd^2-a^3b$; д) $(x+y)^3$; е) $(x+3)^2+2(x+3)-6$;

ж) $a^3b-2a^2c+3a^3c-5abc+4a^2b-a+2b-4$;

з) $[3a^2bc^3-2a(ab-c)^2](6a^2b-5c^2)+(3a^3b^2+bc)(abc-6)$.

§ 2. Тождественность многочленов

Метод неопределенных коэффициентов

Предварительно по учебнику С. И. Новоселова проработайте § 15, 16 и 22.

13. В многочлене $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 31x - 22y + 35$ заменим y через $5 - 3x$. Тогда получим многочлен $\varphi(x)$ относительно x. Найти такие значения коэффициентов A, B и C, чтобы многочлен $\varphi(x)$ был тождественно равен нулю.

14. Определить значения буквенных коэффициентов многочлена $\varphi(x)$ таким образом, чтобы он был тождественно равен многочлену $f(x)$:

а) $f(x) = 3x - 7$ и $\varphi(x) = a(x-1)^2 + b(x-2) + c$;
б) $f(x) = x - 12$ и $\varphi(x) = a(2x-3)^2 + b(x-3) - c(2x^2 + 3x - 9)$; в) $f(x) = 2x^2 - 10x + 6$ и $\varphi(x) = ax(x-5) + b(x-2)(x+3) + cx(x+1)$; г) $f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 7$ и $\varphi(x) = a(x^2 - 2x + 1)^2 + (bx - c)x + dx(2 + c) + c$.

Решение примера в). Для того чтобы определить значения a, b, и c многочлена $\varphi(x)$, в последнем раскроем скобки и сгруппируем члены, содержащие одну и ту же степень аргумента, тогда получим:

$$\varphi(x) = (a + b + c)x^2 + (b + c - 5a)x - 6b.$$

Так как $\varphi(x) \equiv f(x)$, то, приравняв коэффициенты одинаковых членов этих многочленов, получаем следующую систему уравнений относительно a, b и c:

$$\left.\begin{aligned} a + b + c &= 2, \\ b + c - 5a &= -10, \\ -6b &= 6. \end{aligned}\right\}$$

Решив ее, найдем искомые значения для параметров:

$$a = 2,\ b = -1 \text{ и } c = 1.$$

15. Найти коэффициенты A, B и C, при которых многочлен

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$$

будет полным квадратом многочлена $\varphi(x) = Ax^2 + Bx + C$.

Решение. По условию

$$x^4+4x^3-2x^2-12x+9=(Ax^2+Bx+C)^2.$$

Раскрыв скобки, получим:

$$x^4+4x^3-2x^2-12x+9=A^2x^4+B^2x^2+C^2+2ABx^3+$$
$$+2ACx^2+2BCx.$$

На основании теоремы о тождественности двух многочленов получим:

$$\left.\begin{aligned} A^2&=1,\\ 2AB&=4,\\ B^2+2AC&=-2,\\ 2BC&=-12,\\ C^2&=9.\end{aligned}\right\}\qquad (1)$$

Получили систему пяти уравнений с тремя неизвестными. Решим ее методом подбора. Из первого уравнения имеем $A=\pm 1$, а из пятого $C=\pm 3$.

Из второго уравнения видим, что A и B — одинаковых знаков, из четвертого уравнения замечаем, что B и C — разных знаков. Поэтому ясно, что A и C должны быть разных знаков.

Возьмем $A=1$, тогда $C=-3$. Из второго уравнения найдем $B=2$. Подставив найденные значения A, B и C в 3 и 4 уравнения, убеждаемся в том, что они удовлетворяют системе (1). Следовательно, искомый многочлен Ax^2+Bx+C есть x^2+2x-3.

Теперь возьмем $A=-1$, тогда $C=3$. Найдем, что $B=-2$. Произведя проверку путем подстановки найденных значений A, B и C в 3 и 4 уравнения, убеждаемся в том, что и эти значения параметров удовлетворяют системе (1). Тогда искомый многочлен имеет вид: $-x^2-$ $-2x+3$. Итак, многочлен $f(x)$ будет полным квадратом двух многочленов:

$$x^2+2x-3 \quad \text{и} \quad -x^2-2x+3.$$

16. Найти коэффициенты A, B, C и D, при которых многочлен

$$f(x)=9x^4+30x^3+19x^2-10x+A$$

будет полным квадратом многочлена $\varphi(x)=Bx^2+Cx+D$.

17. Найти коэффициенты A, B, C и D, при которых многочлен

$$f(x)=x^4-6x^3+Ax^2+Bx+16$$

будет полным квадратом многочлена $\varphi(x)=x^2+Cx+D$.

§ 3. Тождественные преобразования многочленов

Предварительно по учебнику С. И. Новоселова проработайте § 19, 20, 28 и 29.

18. Выполните тождественные преобразования в следующем выражении, указывая каждый раз, на основании каких законов арифметических действий произведено данное преобразование:

$$3x(2y-5z)-[4z(2x-3y)-6y(3x+2z)].$$

Решение.

$$3x(2y-5z)-[4z(2x-3y)-6y(3x+2z)]=$$

переместительный закон умножения)

$$=(2y-5z)3x-[(2x-3y)4z-(3x+2z)6y]=$$

(распределительный закон)

$$=2y(3x)-5z(3x)-[2x(4z)-3y(4z)-3x(6y)-2z(6y)=$$

(сочетательный закон умножения)

$$=2y\cdot 3x-5z\cdot 3x-(2x\cdot 4z-3y\cdot 4z-3x\cdot 6y-2z\cdot 6y)=$$

(переместительный закон умножения)

$$=2\cdot 3xy-5\cdot 3xz-(2\cdot 4xz-3\cdot 4yz-3\cdot 6xy-2\cdot 6yz)=$$

(сочетательный закон умножения)

$$=6xy-15xz-(8xz-12yz-18xy-12yz)=$$

(правило вычитания суммы)

$$=6xy-15xz-8xz+12yz+18xy+12yz=$$

(переместительный и сочетательный законы сложения)

$$=(6xy+18xy)+(-15xz-8xz)+(12yz+12yz)=$$

(распределительный закон)

$$=(6+18)xy+(-15-8)xz+(12+12)yz=$$
$$=24xy-23xz+24yz.$$

19. Выполните тождественные преобразования в следующих выражениях, указывая каждый раз, на основании каких законов арифметических действий произведено данное преобразование:

а) $(2m^2-5n^2)(3m^2+4n^2)+13m^2n;$

б) $(x^3+2x^2+3x-1)(x^2-x+1);$

в) $2x(3x-2)-3[1-(2-x)(2x+3)-(x+3)].$

20. Показать, что формула квадрата разности двух чисел может быть получена как следствие формулы квадрата суммы.

Решение. Для этого достаточно в формуле

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

заменить y на $-y$. Тогда получим:

$$(x-y)^2 = x^2 + 2x(-y) + (-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

21. а) Показать, что формула куба разности двух чисел может быть получена как следствие формулы куба суммы двух чисел.

б) Показать, что формула разности кубов двух чисел может быть получена как следствие формулы суммы кубов двух чисел.

22. Доказать тождество:

$$(x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3)(x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3) = x^6 - y^6.$$

Решение.

I способ. Раскроем скобки и сделаем приведение подобных членов в левой части, тогда получим многочлен, одинаковый с многочленом, стоящим в правой части, тем самым тождество будет доказано.

II способ. Разложим на множители выражения, стоящие в левой части:

$$x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3 = (x^3 + x^2y) + (x^2y + xy^2) + (xy^2 + y^3) = (x+y)(x^2 + xy + y^2);$$

$$x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3 = (x^3 - x^2y) - (x^2y - xy^2) + (xy^2 - y^3) = (x-y)(x^2 - xy + y^2).$$

Тогда

$$(x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3)(x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3) = (x+y)(x^2 + xy + y^2)(x-y)(x^2 - xy + y^2) = (x+y)(x^2 - xy + y^2)(x-y)(x^2 + xy + y^2) = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3) = x^6 - y^6.$$

23. Доказать тождество:

$$(a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4 = 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)^2.$$

Решение. Для доказательства этого тождества преобразуем каждую часть предполагаемого тождества и сравним полученные выражения.

$$(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+ \\ +b^4+b^4-4b^3c+6b^2c^2-4bc^3+c^4+c^4-4c^3a+ \\ +6c^2a^2-4ca^3+a^4=2(a^4+b^4+c^4+3a^2b^2+ \\ +3b^2c^2+3c^2a^2-2a^3b-2ab^3-2bc^3-2b^3c- \\ -2c^3a-2ca^3);$$

$$2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)^2=2(a^4+b^4+c^4+a^2b^2+ \\ +b^2c^2+c^2a^2+2a^2b^2+2a^2c^2-2a^3b-2a^2bc-2ca^3+ \\ +2b^2c^2-2ab^3-2b^3c-2b^2ca-2c^2ab-2bc^2-2c^3a+ \\ +2ab^2c+2a^2bc+2bc^2a)=2(a^4+b^4+c^4+3a^2b^2+ \\ +3b^2c^2+3a^2c^2-2a^3b-2ab^3-2b^3c-2bc^3-2ca^3- \\ -2c^3a).$$

Видим, что полученные выражения одинаковы, следовательно, данное в условии задачи равенство есть действительно тождество.

24. Доказать тождества:

а) $(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2$;

б) $(6a^2-4ab+4b^2)^3=(3a^2+5ab-5b^2)^3+(4a^2-$
$-4ab+6b^2)^3+(5a^2-5ab-3b^2)^3$;

в) $(a+b+c+d)^2+(a+b-c-d)^2+(a-b+c-d)^2+$
$+(a-b-c+d)^2=4(a^2+b^2+c^2+d^2)$;

г) $(a^2-c^2+2bd)^2+(d^2-b^2+2ac)^2=(a^2-b^2+c^2-$
$-d^2)^2+2(ab-bc+dc+ad)^2$;

д) $(b+c-a)^3+(a+c-b)^3+(a+b-c)^3-$
$-3(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)=$
$=4(a^3+b^3+c^3-3abc)$.

25. Упростить следующие выражения:

а) $a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2+$
$+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$;

б) $(2a^2+3ab-b^2)^2-4(a^2-b^2)(a^2+3ab+2b^2)$.

26. Укажите, какие из следующих ниже многочленов неприводимы над полем комплексных чисел. А какие из них неприводимы над полем действительных чисел? Какие из них неприводимы над полем рациональных чисел?

1) $2x+1$; 2) x^2-16; 3) x^2+1; 4) x^2-6; 5) x^2-x+1; 6) x^2+x+1; 7) x^2-3x+4; 8) x^3-2x+1; 9) x^6-1; 10) x^3-4; 11) x^2-3x+2; 12) x^2+2x+3; 13) x^2+x-1; 14) $3x-7$; 15) x^2-6x+7; 16) x^4+1; 17) $x^2+10x-24$.

27. Разложить многочлен

$$6a^4-6a^3c+2a^3x^2-2a^2cx^2+6a^3x+2a^2x^3$$

на множитель над полем рациональных чисел.

Решение. Как известно, не существует общего элементарного способа разложения многочленов на множители над полем рациональных чисел. Для разложения многочленов применяют способ вынесения общего множителя за скобку, формулы сокращенного умножения, способ группировки, разложение одного из членов многочлена на слагаемые и некоторые другие способы.

Когда какой-либо многочлен нужно разложить на множитель, то в первую очередь надо посмотреть, не имеют ли все его члены общего множителя.

В данном случае действительно все члены имеют множитель $2a^2$, вынесем его за скобку:

$$6a^4-6a^3c+2a^3x^2-2a^2cx^2+6a^3x+2a^2x^3=2a^2(3a^2-3ac+ax^2-cx^2+3ax+x^3).$$

После этого надо посмотреть, нельзя ли применить какую-либо формулу сокращенного умножения или способ группировки.

В данном случае к многочлену, стоящему в скобках, применяем способ группировки. Получим:

$$3a^2-3ac+ax^2-cx^2+3ax+x^3=(3a^2-3ac+3ax)+(ax^2-cx^2+x^3)=3a(a-c+x)+x^2(a-c+x)=(a-c+x)(3a+x^2).$$

Итак, данный многочлен разлагается на следующие множители:

$$2a^2(a-c+x)(3a+x^2).$$

28. Разложить на множители над полем рациональных чисел многочлен

$$a^8+a^4+1.$$

Решение. В данном случае у членов многочлена нет общих множителей, применить какую-либо формулу сокращенного умножения тоже нельзя; ничего не дает в данном случае и метод группировки, ибо как можно 3 члена сгруппировать?

Применим способ разложения члена многочлена на слагаемые, а именно, член a^4 представим как $2a^4-a^4$. Тогда получим:

$$a^8+a^4+1=(a^8+2a^4+1)-a^4=(a^4+1)^2-a^4=$$
$$=(a^4+1-a^2)(a^4+1+a^2).$$

К многочлену a^4+1+a^2 применим тот же прием:

$$a^4+1+a^2=(a^4+2a^2+1)-a^2=(a^2+1)^2-a^2=$$
$$=(a^2+1-a)(a^2+1+a).$$

Окончательно получаем:

$$a^8+a^4+1=(a^4-a^2+1)(a^2-a+1)(a^2+a+1).$$

29. Разложить на множители над полем рациональных чисел многочлены:

а) $a^{11}-a^9+a^8-a^6-a^5+a^3-a^2+1$;
б) $27m^4+3n^4p^6-18m^2n^2p^3$;
в) $(a+b)(a^2-c^2)-(a-c)(a^2-b^2)$;
г) $x^3-12x^2+47x-60$;
д) $2x^4-x^3-9x^2+13x-5$;
е) $x^4+9x^3+23x^2+15x$;
ж) $8x^{m+2}-4x^{m+1}y-2x^2y+20x^{m+1}z-xy^2-5xyz$;
з) $4x^4+12x^2+5$;
и) $25m^2n^2+3m^3n+0{,}08m^4$.

30. Воспользовавшись формулой $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$, разложить следующие многочлены на множители над полем рациональных чисел:

а) x^2+5x+6;
б) $x^2-7x+12$;
в) x^2+x-6;
г) x^4-12x^2+32;
д) x^4+4x^2-32;
е) $x^2-5xy+6y^2$;
ж) $x^2+8xy-20y^2$.

§ 4. Тождественные преобразования иррациональных алгебраических выражений

Предварительно проработайте по учебнику С. И. Новоселова § 39, 40, 41.

Решение задач на тождественное преобразование иррациональных выражений с буквенными данными (параметрами) можно производить на трех ступенях.

1 ступень. Преобразование производится при общем для всех задач условии, что все параметры обозначают лишь положительные числа, причем такие, при которых встречающиеся в подкоренных выражениях многочлены (в частности. разности вида $a-b$) принимают также лишь положительные значения.

Пример. Упростить выражение:

$$A=\sqrt{a^2-2a+1}+\sqrt{a^2+2a+1}+\sqrt{b^3}-$$
$$-\sqrt{b^3-2b^2+b}.$$

Решение. $A=\sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{(a+1)^2}+b\sqrt{b}-$
$-\sqrt{b(b-1)^2}=(a-1)+(a+1)+b\sqrt{b}-(b-1)\sqrt{b}=$
$$=2a+\sqrt{b}.$$

2 ступень. На этой ступени преобразования иррациональных выражений производятся в заданной в условии задачи области изменения параметров. При этом, конечно, эта заданная область не может быть шире, а, как правило, у́же естественной области допустимых значений для букв и параметров.

Решим тот же пример при условии: $-1<a<1$, $0<b<1$.

Решение.

$$A=\sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{(a+1)^2}+b\sqrt{b}-\sqrt{b(b-1)^2}=$$
$$=|a-1|+|a+1|+b\sqrt{b}-|b-1|\sqrt{b}.$$

Так как в заданной области изменения a и b

$$a-1<0,\ a+1>0 \text{ и } b-1<0,$$

то получим:

$$A=1-a+a+1+b\sqrt{b}-(1-b)\sqrt{b}=2+$$
$$+(2b-1)\sqrt{b}.$$

3 ступень. На этой ступени преобразования иррациональных выражений производятся во всей области допустимых значений букв-параметров.

Так как мы всюду рассматриваем лишь арифметические корни, то область допустимых значений букв-параметров для иррациональных выражений есть множество значений этих букв, при которых подкоренные выражения всех имеющихся корней четной степени неотрицательны, а знаменатели имеющихся дробей не равны нулю.

При решении примеров на этой ступени в первую очередь определяется область допустимых значений для букв заданного выражения, а затем в соответствии с найденной областью рассматриваются все случаи, которые могут быть в этой области.

Решим тот же пример на этой ступени.

Решение. Область допустимых значений для a и b в данном случае будет такая: a — любое, а $b \geqslant 0$.

Так как $A = |a-1| + |a+1| + b\sqrt{b} - |b-1|\sqrt{b}$, то придется рассмотреть такие случаи:

1) $a < -1,\quad 0 \leqslant b \leqslant 1;$
2) $a < -1,\quad b > 1;$
3) $-1 \leqslant a \leqslant 1,\quad 0 \leqslant b \leqslant 1;$
4) $-1 \leqslant a \leqslant 1,\quad b > 1;$
5) $a > 1,\quad 0 \leqslant b \leqslant 1;$
6) $a > 1,\quad b > 1.$

В этих случаях получим такие решения:

1) $$A = (1-a) - (a+1) + b\sqrt{b} - (1-b)\sqrt{b} = -2a + (2b-1)\sqrt{b};$$

2) $$A = (1-a) - (a+1) + b\sqrt{b} - (b-1)\sqrt{b} = -2a + \sqrt{b};$$

3) $$A = (1-a) + (a+1) + b\sqrt{b} + (b-1)\sqrt{b} = 2 + (2b-1)\sqrt{b};$$

4) $$A = (1-a) + (a+1) + b\sqrt{b} - (b-1)\sqrt{b} = 2 + \sqrt{b};$$

5) $A=(a-1)+(a+1)+b\sqrt{b}+(b-1)\sqrt{b}=$
$$=2a+(2b-1)\sqrt{b};$$

6) $A=(a-1)+(a+1)+b\sqrt{b}-(b-1)\sqrt{b}=2a+\sqrt{b}.$

В данном задачнике мы всюду будем преобразования иррациональных выражений производить на 3-й ступени, если только в условии задачи не будет оговорено противное.

31. Упростить следующее иррациональное выражение:

$$\sqrt{b\left(\sqrt{a}+\sqrt{a-b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{a-b}\right)}.$$

Решение. Область допустимых значений параметров a и b определяется следующей системой неравенств:

$$\left.\begin{array}{c} a\geqslant 0, \\ a-b\geqslant 0, \\ b\left(\sqrt{a}-\sqrt{a-b}\right)\geqslant 0. \end{array}\right\}$$

Эта система, очевидно, равносильна совокупности следующих двух:

$$1)\ a\geqslant b\geqslant 0 \text{ или } 2)\ a\geqslant 0,\ b\leqslant 0.$$

Преобразуя при этих условиях данное выражение, получим:

$$\sqrt{b\left(\sqrt{a}+\sqrt{a-b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{a-b}\right)}=$$
$$=\sqrt{b\left[\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{a-b}\right)^2\right]}=\sqrt{b\left[a-(a-b)\right]}=$$
$$=\sqrt{b^2}=\begin{cases} b, & \text{если } a\geqslant b\geqslant 0, \\ -b, & \text{если } a\geqslant 0,\ b\leqslant 0. \end{cases}$$

Упростить иррациональные выражения:

32. $\dfrac{a^2+1}{a\sqrt{\left(\dfrac{a-1}{2a}\right)^2+1}}$. **33.** $\dfrac{a-b}{\sqrt{a^3-2a^2b+ab^2}}$.

Произвести указанные действия с корнями:

34. $2\sqrt{a^3}+\sqrt{a(a-4)^2}$.

35. $\sqrt[4]{x^2(x-4)^4}-3\sqrt[12]{x^6}$.

36. Вычислить значение

$$Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$$

$$\text{при } x = \frac{a^2+b^2}{2ab}, \text{ где } ab > 0.$$

37. Показать, что $a^3 + 3ab + 2c$ обращается в нуль, если

$$a = \sqrt[3]{-c+\sqrt{b^3+c^2}} + \sqrt[3]{-c-\sqrt{b^3+c^2}}.$$

38. Доказать, что $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} = 3.$

Решение. Так как $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}\ \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} = \sqrt[3]{81-80} = 1,$

то

$$\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}}.$$

Рассмотрим $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}$.

Попытаемся представить подкоренное выражение как куб суммы двух чисел:

$$9+4\sqrt{5} = \frac{1}{8}(72+32\sqrt{5}) = \frac{1}{8}(27+27\sqrt{5}+45+ +5\sqrt{5}) = \frac{1}{8}[3^3+3\cdot 3^2\sqrt{5}+3\cdot 3(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^3] = \frac{1}{8}(3+\sqrt{5})^3.$$

Итак, $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, тогда

$$\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} = 1 : \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} = \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{2(3-\sqrt{5})}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Значит, $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}}{2} = 3.$

Освободиться от иррациональнсстей в знаменателе следующих выражений:

39.

$$A=\frac{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}.$$

Решение. Числитель $\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4}$ можно легко разложить на множители. Действительно,

$$\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4}=(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^2-\sqrt[3]{a^2b^2}=$$
$$=(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{ab}).$$

Тогда

$$\frac{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{ab})}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=$$
$$=\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{ab}.$$

40. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+2}$ **41.** $\dfrac{6}{\sqrt[3]{11}-\sqrt[3]{5}}$.

Упростить следующие радикалы:

42. $2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}}}$.

Решение.

I способ. По формуле сложного радикала (см. учебник Новоселова С. И., стр. 121—122) преобразуем сначала

$$\sqrt{13+4\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{13+\sqrt{169-48}}{2}}+$$
$$+\sqrt{\frac{13-\sqrt{169-48}}{2}}=\sqrt{12}+1,$$

затем упростим:

$$\sqrt{5-\sqrt{12}-1}=\sqrt{4-\sqrt{12}}=\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-12}}{2}}-$$
$$-\sqrt{\frac{4-\sqrt{16-12}}{2}}=\sqrt{3}-1$$

и, наконец, упростим

$$2\sqrt{3+\sqrt{3-1}}=2\sqrt{2+\sqrt{3}}=$$

$$=2\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{4-3}}{2}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{4-3}}{2}}\right)=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1)=\sqrt{6}+\sqrt{2}.$$

II способ. Этот же пример можно решить без использования формулы сложного радикала.

Рассмотрим выражение: $13+4\sqrt{3}=1+4\sqrt{2}+(2\sqrt{3})^2=(1+2\sqrt{3})^2$, следовательно, $\sqrt{13+4\sqrt{3}}=1+2\sqrt{3}$, тогда $5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}=4-2\sqrt{3}$, а это выражение снова представим как квадрат разности двух чисел:

$$4-2\sqrt{3}=3-2\sqrt{3}+1=(\sqrt{3}-1)^2,$$

и окончательно получим:

$$2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}}}=2\sqrt{3+\sqrt{3}-1}=$$

$$=2\sqrt{2+\sqrt{3}}=2\sqrt{\frac{3+2\sqrt{3}+1}{2}}=2\sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}}=$$

$$=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}.$$

43. $\sqrt{17+12\sqrt{2}}$.

Упростить выражения со степенями с дробными показателями.

44. $\dfrac{x-y}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$.

Решение. Можно записать, что

$$x-y=\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right),\ \text{ибо } x>0 \text{ и } y>0,$$

$$x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}=x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right),$$

$$x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right).$$

Тогда данное выражение примет вид:

$$\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)x^{\frac{1}{4}}\ y^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)}.$$

Сократим дробь на произведение

$$x^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right),$$

получим:

$$\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}},\text{ или }\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)x^{-\frac{1}{4}}\ y^{\frac{1}{4}},\text{ или, наконец,}$$

$$x^{\frac{1}{4}}\ y^{\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{4}}\ y^{\frac{3}{4}}.$$

Итак, данное выражение равно $x^{\frac{1}{4}}\ y^{\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{4}}\ y^{\frac{3}{4}}$.

45. $$\left[x^{-\frac{1}{2}}\sqrt{a^{-\frac{3}{4}}\,x^{3}\left(a^{\frac{1}{4}}\ x^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}\,\right]^{\frac{1}{2}}:\left[x^{-1}\sqrt{a^{-1}\,x^{-\frac{3}{2}}\left(a^{-1}\,x^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}}\,\right]^{\frac{1}{3}}.$$

46. $$\sqrt{\frac{4}{9}\,a^{-\frac{1}{4}}\,b+a^{-\frac{1}{2}}\ x^{\frac{1}{2}}+\frac{4}{81}\,b^{2}\,x^{-\frac{1}{2}}}.$$

Глава II. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

§ 5. Область допустимых значений Равносильность уравнений

Предварительно проработайте § 47, 48, 49 и 50 учебника С. И. Новоселова (вопросы, относящиеся к системам уравнений, следует опустить).

Приступая к решению какого-либо уравнения, очень часто полезно предварительно определить область допустимых значений для неизвестного. Покажем, как это делается.

47. Определить область допустимых значений для неизвестного в следующем уравнении:

$$\frac{2(x^2-2)}{x-2}-(x+2)=x+\sqrt{1+x}+\frac{1+x}{x-\sqrt{1+x}}.$$

Решение. Область допустимых значений для неизвестного данного уравнения есть общая часть областей определения всех функций, входящих в это уравнение. Функции x и $x+2$ определены при всех значениях x. Функция $\frac{2(x^2-2)}{x-2}$ определена при значениях x, при которых $x-2\neq 0$, т. е. при всех $x\neq 2$. Функция $\sqrt{x+1}$ определена при значениях x, при которых $x+1\geqslant 0$, т. е. при $x\geqslant -1$. Наконец, функция $\frac{1+x}{x-\sqrt{1+x}}$ определена при тех значениях x, при которых одновременно выполняются следующие два неравенства: $1+x\geqslant 0$ и $x-\sqrt{1+x}\neq 0$. Из первого неравенства имеем: $x\geqslant -1$, а из второго получаем: $x^2 \neq 1 + x$ или $x^2 - x - 1 \neq 0$. Трехчлен $x^2 - x - 1 = 0$ при $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Поэтому для выполнения последнего неравенства достаточно, чтобы $x \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Итак, область допустимых значений для неизвестного рассматриваемого уравнения есть общее решение следующей системы неравенств:

$$\left.\begin{array}{c} x \neq 2, \\ x \geqslant -1, \\ x \neq \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{array}\right\}$$

Отсюда окончательно получаем, что область допустимых значений для x такова: $x \geqslant -1$, но $x \neq 2$ и $x \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Примечание. Мы видим, что определение области допустимых значений для неизвестного данного уравнения весьма сложно. Поэтому при решении этого уравнения более целесообразно решить его без нахождения области допустимых значений для неизвестного, а потом проверить подстановкой в исходное уравнение, не являются ли найденные корни посторонними.

Покажем это. Для этого приведем к общему знаменателю отдельно и левую и правую части уравнения, получим:

$$\frac{2(x^2 - 2) - (x^2 - 4)}{x - 2} = \frac{x^2 - 1 - x + 1 + x}{x - \sqrt{1 + x}},$$

откуда после некоторых преобразований в числителях имеем:

$$\frac{x^2}{x - 2} = \frac{x^2}{x - \sqrt{1 + x}}.$$

Из последнего уравнения найдем: $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$.

Преобразования, проводимые нами при решении данного уравнения, не приводят к потере корней, возможно только появление посторонних корней. Подстановкой найденных значений $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$ в данное уравнение легко убеждаемся, что они являются корнями этого уравнения.

48. Найти область допустимых значений для неизвестного в следующих уравнениях:

а) $(x-1)(2x+7)=0$; б) $\frac{4}{x+2}+\frac{7}{\sqrt{x+3}}=\frac{37}{x^2+5x+6}$;

в) $\sqrt{x-9}-\sqrt{18-x}=1$; г) $x+\sqrt{x^2+16}=\frac{40}{\sqrt{x^2+16}}$;

д) $\frac{1}{x^3-x^2+x-1}-\frac{4}{x+1}=\frac{x^2+10x}{x^4-1}-\frac{4x^2+21}{x^3+x^2+x+1}$;

е) $\sqrt[3]{10-x}-\sqrt[3]{3-x}=1$; ж) $\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}=$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{1-x}}; \text{ з) } \sqrt{x-5}=2+\sqrt{1-x}.$$

При решении уравнений используются понятия следствия уравнения и равносильности уравнений. Рассмотрим некоторые уравнения, связанные с этими понятиями.

49. Установить, будут ли равносильны уравнения

$$x-2=4-x \text{ и } x-2+\frac{5}{x-3}=4-x+\frac{5}{x-3}.$$

Решение. Нетрудно заметить, что второе уравнение получено из первого прибавлением к обеим частям уравнения одного и того же выражения $\frac{5}{x-3}$, которое теряет числовой смысл при $x=3$. Значит, $x=3$ не может быть корнем второго уравнения, но $x=3$ является корнем первого уравнения, т. е. получаем, что корень первого уравнения не является корнем второго. Следовательно, уравнения неравносильны.

50. Равносильны ли уравнения

$$3x-1=2x+1 \text{ и } (3x-1)\sqrt{2x^2+5}=(2x+1)\sqrt{2x^2+5}$$

в области действительных чисел?

51. Равносильны ли уравнения

$$x-3=2x-8 \text{ и } (x-3)(x^2-4)=(2x-8)(x^2-4)?$$

Если нет, то какое из них является следствием другого?

52. Равносильны ли следующие пары уравнений:

а) $x+7=3\frac{1}{3}x$ и $x+7+x^2=3\frac{1}{3}x+x^2$;

б) $3x-1=4x-2$ и $3x-1-\frac{1}{x^2-1}=4x-2-\frac{1}{x^2-1}$;

в) $x-2=7-2x$ и $(x-2)^2=(7-2x)^2$;

г) $2x-3=5-2x$ и $\frac{2x-3}{x-1}=\frac{5-2x}{x-1}$;

д) $3-x=x+2$ и $(3-x)(x-1)=(x+2)(x-1)$;

е) $(5x-1)^2=(3x+5)^2$ и $5x-1=3x+5$?

53. Равносильны ли уравнения

$$\frac{1}{2}x+6=3x-4 \text{ и } \left(\frac{1}{2}x+6\right)(x^2+7)=(3x-4)(x^2+7)$$

в поле действительных чисел? А в поле комплексных чисел?

§ 6. Квадратный трехчлен и квадратные уравнения

Предварительно проработайте § 79, 80 и 82 учебника С. И. Новоселова.

54. Выделить полный квадрат в трехчлене $10x^2-3x-2$.

Решение. Коэффициент у x^2 число 10 не является квадратом целого числа, поэтому удобнее сначала вынести этот коэффициент за скобки, получим $10(x^2-0{,}3x-0{,}2)$. Рассматривая $-0{,}3x$ как удвоенное произведение первого члена на второй член, пока нам неизвестный, найдем, что он равен $-0{,}15$. Тогда, прибавив и вычтя квадрат второго члена, т. е. $0{,}0225$, мы окончательно получим:

$$10x^2-3x-2=10[(x-0{,}15)^2-0{,}2225].$$

Тем самым мы выделили полный квадрат в данном трехчлене.

55. Выделить полный квадрат в следующих многочленах: а) $x^2+8x-35$; б) $5x^2-7x+3$.

56. Решить квадратное уравнение $5x^2-8x+3=0$ путем выделения полного квадрата.

Решение. Сначала выделим квадрат в трехчлене, стоящем в левой части уравнения.

$$5x^2-8x+3=5\left(x^2-\frac{8}{5}x+\frac{3}{5}\right)=$$

$$=5\left[\left(x^2-2\cdot\frac{4}{5}x+\frac{16}{25}\right)-\frac{16}{25}+\frac{3}{5}\right]=5\left[\left(x-\frac{4}{5}\right)^2-\frac{1}{25}\right].$$

Тогда наше уравнение примет вид:

$$5\left[\left(x-\frac{4}{5}\right)^2-\frac{1}{25}\right]=0,$$

откуда $\left(x-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{1}{25}$, или $x-\frac{4}{5}=\pm\frac{1}{5}$. Отсюда найдем два корня уравнения: $x_1=1$ и $x_2=\frac{3}{5}$.

57. Следующие квадратные уравнения решить путем выделения полного квадрата:

а) $2x^2+6x-9=0$; б) $x^2-3\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}=0$;

в) $x-6+(2x+10)^2=(3x+4)^2$; г) $ax^2-(a^2+1)x+a^2+a=0$.

58. Не решая уравнения, определить, какие из них имеют равные корни:

а) $x^2-x+\frac{1}{4}=0$; б) $2x^2+9x=5$; в) $-x^2+2x-4=0$;

г) $x^2-10x+25=0$.

59. В тех уравнениях, корни которых имеют разные знаки, определить, какой знак имеет корень, абсолютная величина которого больше:

а) $x^2-3x-28=0$; б) $3x^2+2x-8=0$; в) $4x^2-17x+15=0$.

60. В данных уравнениях вместо точек проставить значения коэффициентов и корней:

а) $x^2-4x=\ldots$, если $x_1=7$; $x_2=\ldots$;

б) $x^2+\ldots x-15=0$, если $x_1=3$, $x_2=\ldots$.

61. Не решая уравнения $3x^2+17x-14=0$, вычислить выражение

$$\frac{3x_1^2+5x_1x_2+3x_2^2}{4x_1x_2^2+4x_1^2x_2}. \qquad (1)$$

Решение. На основании теоремы Виета запишем соотношения между корнями данного уравнения: $x_1+x_2=-\frac{17}{3}$ и $x_1x_2=-\frac{14}{3}$. Зная эти соотношения, преобразуем выражение (1) так, чтобы оно содержало сумму и произведение корней уравнения:

$$\frac{3x_1^2+5x_1x_2+3x_2^2}{4x_1x_2^2+4x_1^2x_2}=\frac{3(x_1+x_2)^2-x_1x_2}{4x_1x_2(x_1+x_2)}.$$

В полученном выражении вместо суммы и произведения корней подставим их значения, получим:

$$\frac{3\left(-\frac{17}{3}\right)^2-\left(-\frac{14}{3}\right)}{4\left(-\frac{14}{3}\right)\left(-\frac{17}{3}\right)}=\frac{\left(\frac{289}{3}+\frac{14}{3}\right)\cdot 9}{4\cdot 14\cdot 17}=\frac{909}{952}.$$

62. Не решая уравнения $x^2-3x-2=0$, вычислить $x_1^3+x_2^3$ и x_1-x_2, где $x_1>x_2$.

Указание. Для нахождения x_1-x_2 найдите сначала $(x_1-x_2)^2$.

63. Не решая уравнения $mnx^2-(m+n)x+1=0$ $(m>n>0)$, определить отношение суммы его корней к их разности x_1-x_2, где $x_1>x_2$.

§ 7. Двучленные и трехчленные уравнения

Предварительно проработайте § 85 и § 86 учебника С. И. Новоселова.

64. Решить двучленные уравнения:

а) $x^3-1=0$; б) $x^3+1=0$; в) $x^3-8=0$; г) $3x^3-81=0$;

д) $x^3+4^{-3}=0$; е) $x^3-\sqrt{2}=0$.

Решение. а) Двучленное уравнение $x^3-1=0$ можно решить двумя способами.

I способ. Из данного уравнения найдем $x=\sqrt[3]{1}$. В области комплексных чисел $\sqrt[3]{1}$ имеет три значения. Для того чтобы найти эти значения, данное число 1 представим в тригонометрической форме по формуле:

$$a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

(см. учебник по алгебре А. П. Киселева, ч. II, § 140).

Здесь $a=1$; $b=0$; $r=\sqrt{a^2+b^2}=1$; $\cos\varphi=\frac{a}{r}=1$;

$\sin\varphi=\frac{b}{r}=0,$

откуда $\varphi = 0$. Тогда $1 = \cos 0° + i \sin 0°$ и $x = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0° + i \sin 0°}$.

Применяя правило извлечения корня из комплексного числа, записанного в тригонометрической форме, получим:

$$x = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3},$$

где $k = 0,\ 1,\ 2$.

Подставляя в эту формулу вместо «k» его значения, получим три значения для x:

$$x_1 = \cos 0° + i \sin 0° = 1;$$

$$x_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2};$$

$$x_3 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2},$$

которые являются корнями данного уравнения.

II способ. Левую часть уравнения (а) разложим на множители: $(x-1)(x^2+x+1) = 0$ (2), откуда видим, что уравнение (а) равносильно совокупности двух уравнений:

$$x - 1 = 0 \text{ и } x^2 + x + 1 = 0 \qquad (1).$$

Решая каждое уравнение совокупности (1), найдем их корни: $x_1 = 1$; $x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, которые являются корнями уравнения (а).

в) Данное уравнение можно решить двумя способами.

I способ. Приведем данное уравнение к виду $y^3 - 1 = 0$. Для этого положим $x = 2y$. Подставим это значение в данное уравнение, получим: $8y^3 - 8 = 0$ или $y^3 - 1 = 0$. Решение уравнения такого вида показано в примере а). Поэтому можем сразу написать значения $y : y_1 = 1$,

$$y_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}. \text{ Тогда } x_1 = 2, \quad x_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}.$$

II способ. Левую часть данного уравнения разложим на множители: $(x-2)(x^2+2x+4) = 0$, откуда видим, что данное уравнение равносильно совокупности 2-х уравнений:

$$x - 2 = 0 \text{ и } x^2 + 2x + 4 = 0.$$

Решая каждое уравнение этой совокупности, найдем их корни: $x_1 = 2$, $x_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}$, которые являются корнями данного уравнения.

65. Решить двучленные уравнения:

а) $(x-2)^3 = 27$; б) $(x-1)^3 = 1$; в) $(x+2)^3 = 8$.

Трехчленные уравнения, сводимые к квадратным, имеют вид:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0. \qquad (1)$$

Они легко решаются введением вспомогательного неизвестного:

$$x^n = z. \qquad (2)$$

Тем самым наше уравнение сводится к квадратному: $az^2 + bz + c = 0$. Решая полученное квадратное уравнение, находим два значения для z и, подставляя их последовательно в выражение (2), получим два двучленных уравнения степени n, корни которых и являются корнями данного уравнения (1).

66. Доказать, что сумма всех корней биквадратного уравнения $x^4 + px^2 + q = 0$ равна нулю, а произведение корней равно q.

67. Составить биквадратное уравнение, корнями которого будут числа $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$.

68. Решить уравнения:

а) $(x-2)^6 - 19(x-2)^3 = 216$; б) $(x-5)^3 - 3(x-5)^{\frac{3}{2}} = 40$.

§ 8. Возвратные уравнения

Предварительно проработайте по учебнику С. И. Новоселова в § 87 соответствующий раздел.

69. Могут ли числа $2, \frac{1}{2}, 3$ и 5 быть корнями возвратного уравнения четвертой степени?

70. В числе корней возвратного уравнения были следующие числа:

а) -5, $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, -1, $2i$; в) $\frac{1}{3}$, -5, -1, 3.

Найти остальные корни этих уравнений, считая степень уравнения наименьшей из возможных.

71. Решить возвратные уравнения четной степени:

а) $5x^4-12x^3+11x^2-12x+5=0$;

б) $x^4-5x^3-17x^2-5x+1=0$;

в) $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0$;

г) $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$;

д) $2x^8-7x^6+7x^4-7x^2+2=0$.

Решение. а) $5x^4-12x^3+11x^2-12x+5=0$.

Делим обе части уравнения на неизвестное в степени с показателем в два раза меньше степени уравнения, в данном случае на x^2. После деления получим:

$$5x^2-12x+11-12\frac{1}{x}+5\cdot\frac{1}{x^2}=0. \qquad (1)$$

Сгруппируем члены с одинаковыми коэффициентами:

$$5\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-12\left(x+\frac{1}{x}\right)+11=0. \qquad (2)$$

Обозначим $x+\frac{1}{x}=y$, тогда $y^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$, откуда $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$. После подстановки $x+\frac{1}{x}$ и $x^2+\frac{1}{x^2}$ их значений через y уравнение (2) примет вид:

$$5y^2-12y+1=0,$$

корни которого равны:

$$y_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{31}}{5}.$$

Из того, что $x+\frac{1}{x}=y$, имеем $x^2-xy+1=0$, откуда

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2}. \qquad (3)$$

Подставляя в формулы (3) последовательно значения y_1 и y_2, найдем 4 значения x:

$$x_{1,2}=\frac{\frac{6+\sqrt{31}}{5}\pm\sqrt{\left(\frac{6+\sqrt{31}}{5}\right)^2-4}}{2}=$$

$$= \frac{6+\sqrt{31} \pm \sqrt{12\sqrt{31}-33}}{10} \text{ и}$$

$$x_{3,4} = \frac{\frac{6-\sqrt{31}}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{6-\sqrt{31}}{5}\right)^2 - 4}}{2} =$$

$$= \frac{6-\sqrt{31} \pm i\sqrt{12\sqrt{31}+33}}{10},$$

которые являются корнями данного уравнения.

72. Решить возвратные уравнения нечетной степени:

а) $2x^5+3x^4-5x^3-5x^2+3x+2=0$;

б) $x^3-3x^2-3x+1=0$; в) $3x^3-7x^2-7x+3=0$;

г) $12x^5+18x^4-45x^3-45x^2+18x+12=0$.

Решение. а) $2x^5+3x^4-5x^3-5x^2+3x+2=0$. (1)

Как известно, возвратное уравнение нечетной степени всегда имеет корень $x_1=-1$. Следовательно, левая часть уравнения делится на $x+1$. После деления получим уравнение:

$$2x^4+x^3-6x^2+x+2=0. \qquad (2)$$

Для нахождения остальных корней уравнения (1) надо решить уравнение (2); оно является возвратным четной степени. Решив его, найдем остальные корни нашего уравнения

$$x_{2,3} = \frac{-1+\sqrt{66} \pm \sqrt{50-2\sqrt{65}}}{8}$$

и

$$x_{4,5} = \frac{-1-\sqrt{65} \pm \sqrt{50+2\sqrt{65}}}{8}.$$

§ 9. Частные элементарные методы решения целых алгебраических уравнений

В практике часто пользуются некоторыми частными элементарными приемами решения уравнений, например разложением левой части уравнения на множители (этот прием удобно использовать тогда, когда в правой части стоит 0), введением вспомогательного неизвестного и др.

Для знакомства с сущностью названных частных приемов проработайте по учебнику С. И. Новоселова § 86.

73. Решить уравнение:

$$x^5 - 6x^4 + 9x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \qquad (1)$$

Решение. Разложим левую часть уравнения (1) на множители. Во-первых, мы видим, что все члены левой части имеют общий множитель x, значит, его можно вынести за скобку. Тогда получим $x(x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 6x + 8) = 0$.

Разложим теперь на множители многочлен, стоящий в скобках. Заметим, что в нем целесообразно сгруппировать члены $-6x^3 - 6x = -6x(x^2 + 1)$, в результате чего выделяется множитель $x^2 + 1$. У оставшихся членов $x^4 + 9x^2 + 8$ коэффициент при x^2 равен сумме коэффициента при x^4 и свободного члена, поэтому член $9x^2$ можно разбить на два слагаемых $x^2 + 8x^2$. Тогда в выражении $x^4 + 9x^2 + 8 = x^4 + x^2 + 8x^2 + 8$ после группирования первого и второго, третьего и четвертого членов выделяется тот же общий множитель $x^2 + 1$. Поэтому многочлен, стоящий в скобках, можно разложить на множители, сгруппировав члены его следующим образом:

$$x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 6x + 8 = (x^4 + x^2) - (6x^3 + 6x) +$$
$$+ (8x^2 + 8) = x^2(x^2 + 1) - 6x(x^2 + 1) + 8(x^2 + 1) =$$
$$= (x^2 + 1)(x^2 - 6x + 8).$$

Итак, окончательно уравнение (1) примет вид:

$$x(x^2 + 1)(x^2 - 6x + 8) = 0.$$

Отсюда: $x_1 = 0$,

$$x^2 + 1 = 0, \; x_{2,3} = \pm i,$$
$$x^2 - 6x + 8 = 0, \; x_4 = 4, \; x_5 = 2.$$

74. Решить следующие уравнения разложением левой части на множители:

а) $x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 2 = 0$; б) $x^4 + 2x^3 + x^2 - 4 = 0$;

в) $12x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 1 = 0$; г) $2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = 0$.

75. Решить уравнение:

$$(x^2 + 3x + 6)^2 + 2x(x^2 + 3x + 6) - 3x^2 = 0. \qquad (1)$$

Решение. Данное уравнение можно решить так: раскрыть скобки, привести подобные члены, после чего получается уравнение четвертой степени. Решить такое уравнение элементарно удается не всегда легко. Гораздо целесообразнее решать данное уравнение следующим способом. Обозначим $x^2+3x+6=y$ (2), тогда уравнение (1) можно записать таким образом:

$$y^2+2xy-3x^2=0. \tag{3}$$

В левой части уравнения (3) получили квадратный трехчлен, разложим его на множители, после чего получим:

$$(y-x)(y+3x)=0.$$

Отсюда или $y=x$, или $y=-3x$. Учитывая (2), получим совокупность двух уравнений:

$$x^2+2x+6=0 \text{ и } x^2+6x+6=0,$$

решив каждое из которых, найдем корни исходного уравнения:

$$x_{1,2}=-1\pm i\sqrt{5} \text{ и } x_{3,4}=-3\pm\sqrt{3}.$$

Можно указать еще другой способ решения данного уравнения путем разложения левой части его на множители. Для этого $(x^2+3x+6)^2$ будем считать квадратом первого члена; $2x(x^2+3x+6)$ будем рассматривать как удвоенное произведение первого числа на второе x. Чтобы иметь квадрат суммы, недостает квадрата второго члена, т. е. x^2. Прибавим и вычтем x^2, получим:

$$(x^2+3x+6)^2+2x(x^2+3x+6)+x^2-4x^2=(x^2+3x+6+x)^2-$$
$$-4x^2=(x^2+4x+6)^2-(2x)^2=(x^2+4x+6+2x)(x^2+4x+$$
$$+6-2x)=(x^2+6x+6)(x^2+2x+6).$$

Следовательно, уравнение (1) можно записать так:

$$(x^2+6x+6)(x^2+2x+6)=0,$$

откуда видим, что оно равносильно совокупности двух уравнений:

$$x^2+6x+6=0 \text{ и } x^2+2x+6=0. \tag{4}$$

Решая каждое уравнение этой совокупности, найдем их корни: $x_{1,2}=-3\pm\sqrt{3}$ и $x_{3,4}=-1\pm i\sqrt{5}$, которые являются корнями данного уравнения.

76. Решить следующие уравнения способом введения вспомогательного неизвестного:

а) $(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+15x^2=0$;

б) $(x+5)^4-13(x+5)^2x^2+36x^4=0$;

в) $(x^2+x)^2-10x^2-10x+24=0$;

г) $8(x+5)^2-9(x+5)(x-4)-92(x-4)^2=0$.

§ 10. Дробно-рациональные уравнения

По учебнику С. И. Новоселова проработайте § 87.

77. Решить уравнение:

$$\frac{3}{x^2+x-2}=\frac{1}{x(x-1)^2}+\frac{3}{x(x-3)}. \qquad (1)$$

Решение. Прежде всего установим область допустимых значений неизвестного—ОДЗ: $x\neq 0$, $x\neq 1$, $x\neq 3$, $x\neq -2$.

Затем перенесем все члены в левую часть, приведем дроби к общему знаменателю и сделаем приведение подобных членов, после чего получим:

$$\frac{-13x^2+19x}{x(x+2)(x-1)^2(x-3)}=0. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) имеем:

$$-13x^2+19x=0, \qquad (3)$$

корни которого $x_1=0$ и $x_2=\frac{19}{13}$. Проверим, принадлежат ли найденные корни уравнения (3) области допустимых значений. Так как $x_1=0$ ОДЗ не принадлежит, то этот корень является посторонним корнем для уравнения (1). Следовательно, уравнение (1) имеет лишь один корень $x=\frac{19}{13}$.

78. Решить следующие дробные уравнения:

а) $\frac{3+2x}{1+2x}-\frac{5+2x}{7+2x}=1-\frac{4x^2-2}{7+16x+4x^2}$;

б) $\frac{x^2-4x+5}{x^2+6x+10}=\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2$.

79. Решить уравнение:

$$\frac{1}{x^2+7x}-\frac{1}{x^2+7x+6}+\frac{1}{x^2+7x+18}-\frac{1}{x^2+7x+12}=0. \qquad (1)$$

Решение. В этом уравнении целесообразно не определять предварительно ОДЗ, так как это довольно сложно, а, решив уравнение, проверить потом, не обращают ли найденные значения неизвестного какой-либо из знаменателей в нуль. Решить это уравнение можно точно так же, как и уравнение задачи 77. Но можно решить его несколько проще. Для этого обозначим $x^2+7x=y$, тогда уравнение (1) примет вид:

$$\frac{1}{y}-\frac{1}{y+6}+\frac{1}{y+18}-\frac{1}{y+12}=0.$$

Сгруппируем первую и четвертую дроби и вторую и третью дроби, ибо разности их знаменателей равны. Тогда получим:

$$\frac{12}{y(y+12)}-\frac{12}{(y+6)(y+18)}=0.$$

Отсюда после сокращения на 12 и приведения к общему знаменателю получим:

$$\frac{12y+108}{y(y+12)(y+6)(y+18)}=0.$$

Значит, $12y+108=0$, $y=-9$.
Но так как $y=x^2+7x$, то $x^2+7x+9=0$, отсюда $x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{13}}{2}$.

Легко видеть, что найденные значения x не обращают в нуль ни один из знаменателей дробей, стоящих в левой части уравнения (1). Действительно, при найденных значениях x

$$x^2+7x=-9$$

Следовательно, при этих значениях x

$$x^2+7x\neq 0,\quad x^2+7x+6\neq 0.$$
$$x^2+7x+18\neq 0 \text{ и } x^2+7x+12\neq 0.$$

Итак, уравнение (1) имеет два корня: $x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{13}}{2}$.

80. Решить уравнение:

$$\frac{1}{x^2+2x+3}+\frac{18}{x^2+2x+2}-\frac{18}{x^2+2x+1}=0.$$

81. Решить уравнение:

$$\frac{|x-2|}{|x-3|}+\frac{|x-3|}{|x-2|}=3.$$

Решение. Обозначим

$$\frac{|x-2|}{|x-3|}=t \qquad (1).$$

Тогда данное уравнение примет вид: $t+\frac{1}{t}=3$. Отсюда $t^2-3t+1=0$; $t=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, при этом оба значения $t>0$ и, следовательно, оба они пригодны (ибо левая часть (1) всегда неотрицательна). Получаем:

$$\frac{|x-2|}{|x-3|}=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad (2) \quad \text{и} \quad \frac{|x-2|}{|x-3|}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}. \qquad (3)$$

Так как абсолютная величина дроби равна частному от деления абсолютных величин числителя и знаменателя и обратно, то уравнения (2) и (3) можно представить в виде:

$$\left|\frac{x-2}{x-3}\right|=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad \left|\frac{x-2}{x-3}\right|=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Чтобы избавиться от знака абсолютной величины в этих уравнениях, установим знак дроби $\frac{x-2}{x-3}$. Эта дробь будет положительна при $x<2$ или при $x>3$ и будет отрицательна при $2<x<3$. Тогда при $x<2$ или при $x>3$ эти уравнения примут вид:

$$\frac{x-2}{x-3}=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-2}{x-3}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Отсюда найдем: $x_1=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ и $x_2=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$.

Так как $x_1=\frac{5+\sqrt{5}}{2}>3$ и $x_2=\frac{5-\sqrt{5}}{2}<2$, то x_1 и x_2 принадлежат к рассматриваемому интервалу.

При $2<x<3$ уравнения примут вид:

$$-\frac{x-2}{x-3}=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad -\frac{x-2}{x-3}=\frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

отсюда $x_3=\frac{25+\sqrt{5}}{10}\approx 2,72$ и $x_4=\frac{25-\sqrt{5}}{10}\approx 2,28$.

Так как оба найденных значения x принадлежат к рассматриваемому промежутку, то они оба являются корнями исходного уравнения.

Итак, исходное уравнение имеет четыре корня:

$x_1=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$; $x_2=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$; $x_3=\frac{25+\sqrt{5}}{10}$ и $x_4=\frac{25-\sqrt{5}}{10}$.

82. Решить уравнение:

$$\frac{|2x-1|}{|x+1|}+\frac{2|x+1|}{|2x-1|}=4.$$

§ 11. Иррациональные уравнения

Предварительно проработайте по учебнику С. И. Новоселова § 93.

83. Не решая следующих уравнений, объяснить, почему каждое из них не может иметь решений:

$$\text{а) } \sqrt{2x+3}+\sqrt{x-3}=0.$$

Решение. Уравнение не может иметь решений, так как сумма двух неотрицательных чисел (т. е. $\sqrt{2x+3}\geqslant 0$ и $\sqrt{x-3}\geqslant 0$), не равных одновременно нулю, не может быть равна нулю.

$$\text{б) } \sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}=-2.$$

Решение. Уравнение не может иметь действительных корней, так как сумма двух неотрицательных чисел не может быть равна отрицательному числу.

$$\text{в) } \sqrt{4-x}-\sqrt{x-6}=2.$$

Решение. Уравнение не имеет корней, так как для того, чтобы левая часть уравнения имела смысл, надо, чтобы $4-x\geqslant 0$ и $x-6\geqslant 0$. Но эта система неравенства противоречива.

$$\text{г) } \sqrt{x-3}-\sqrt{x+9}=\sqrt{x-2}.$$

Решение. Уравнение не имеет корней, ибо при любом x, $x-3<x+9$. Тогда и $\sqrt{x-3}<\sqrt{x+9}$, значит, разность $\sqrt{x-3}-\sqrt{x+9}$ при любом x отрицательна и не может быть равна неотрицательному числу $\sqrt{x-2}$.

$$\text{д) } \sqrt{x}+\sqrt{x+9}=2.$$

Решение. Для существования первого корня x должно быть числом неотрицательным. При этом условии $\sqrt{x+9}$

будет во всяком случае больше 3 и, следовательно, левая часть ни при каких значениях x не может быть равна 2.

84. Не решая следующих уравнений, объяснить, почему каждое из них не может иметь корней:

а) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}+1=0$; г) $\sqrt{x}-\sqrt{x+\sqrt{18+12x}}=2$.

б) $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2+4}=-2$; д) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=1$;

в) $\sqrt{2x-5}+\sqrt{1-x}=3$; е) $\sqrt{x-4}-\sqrt{2-x}=0$.

85. Решить уравнение: $\sqrt{x+16}=x-4$ (1).

Решение.

I способ. На основании определения корня имеем:

$$x+16=(x-4)^2, \quad \text{или} \quad x^2-9x=0.$$

Отсюда $x_1=0$; $x_2=9$. Непосредственной подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что $x_1=0$ есть посторонний корень, а $x_2=9$ удовлетворяет ему. Значит, уравнение (1) имеет единственный корень $x=9$.

II способ. Возвысим обе части уравнения в квадрат, получим $x+16=(x-4)^2$. Дальше решение, как и в первом способе.

III способ. Перенесем все члены уравнения в левую часть. Получим:

$$\sqrt{x+16}-(x-4)=0. \qquad (2)$$

Умножим обе части уравнения (2) на выражение, сопряженное с левой частью, т. е. на $\sqrt{x+16}+(x-4)$. Тогда получим:

$$[\sqrt{x+16}-(x-4)]\,[\sqrt{x+16}+(x-4)]=0,$$

или

$$(\sqrt{x+16})^2-(x-4)^2=0,$$
$$x+16=(x-4)^2.$$

Дальше решение идет так же, как и в первом способе.

IV способ. Во всех трех предыдущих способах мы не следили за равносильностью уравнений, получаемых в результате производимых преобразований. Поэтому проверка решения составляла органическую и обязательную часть решения. Но можно решить данное уравнение и пользуясь понятием о равносильности уравнений.

Покажем, как это сделать. При любом допустимом значении x левая часть уравнения неотрицательна, поэтому если это уравнение имеет действительные решения, то во всяком случае $x-4 \geqslant 0$, отсюда $x \geqslant 4$ (2). При этом условии подкоренное выражение корня, стоящего в левой части уравнения, будет неотрицательно.

При выполнении условия (2) мы можем, например, возвысить обе части уравнения в квадрат (или, что, собственно говоря, то же самое, умножить на сопряженное выражение), и тогда мы получим уравнение $x^2-9x=0$ (3), равносильное исходному уравнению (1) в области $x \geqslant 4$.

Из двух решений уравнения (3) $x_1=0$ и $x_2=9$ первое не принадлежит этой области и, следовательно, не может быть решением уравнения (1), а второе — принадлежит. Значит, $x=9$ и есть решение уравнения (1).

При таком способе решения проверка решения принципиально не нужна.

86. Решить уравнение:

$$\sqrt{2x+8}+\sqrt{x+5}=7. \qquad (1)$$

Решение.

I способ. Уединим один из корней:

$$\sqrt{2x+8}=7-\sqrt{x+5}.$$

Возвысим теперь обе части уравнения в квадрат:

$$2x+8=49-14\sqrt{x+5}+x+5,$$

или

$$14\sqrt{x+5}=46-x.$$

Полученное уравнение возвысим еще раз в квадрат:

$$196x+980=2116-92x+x^2,$$

$$x^2-288x+1136=0,$$

$$x_1=284, \ x_2=4.$$

Проверим подстановкой, удовлетворяют ли найденные корни уравнению (1). Убеждаемся, что $x_1=284$ есть посторонний корень, а $x_2=4$ удовлетворяет уравнению.

II способ. Сначала установим, при каких значениях оба радикала левой части уравнений (1) имеют смысл. Для этого необходимо, чтобы $2x+8 \geqslant 0$ и $x+5 \geqslant 0$, отсюда $x \geqslant -4$ (2).

Уединив корень, получим уравнение:

$$\sqrt{2x+8}=7-\sqrt{x+5}. \qquad (3)$$

Так как левая часть неотрицательна, то должна быть неотрицательна и правая часть, а для этого достаточно, чтобы $x+5 \leqslant 49$, т. е. $x \leqslant 44$. Итак, $-4 \leqslant x \leqslant 44$. (4)

При условии (4) можно обе части уравнения (3) возвысить в квадрат, при этом получим равносильное уравнение: $14\sqrt{x+5}=46-x$ (5). Обе части уравнения (5) при условии (4) имеют один и тот же знак, следовательно, возвысив обе части этого уравнения в квадрат, получим уравнение, равносильное исходному в области, определяемой уравнением (4). Получим уравнение: $x^2-288x+$ $+1136=0$.

Из двух корней этого уравнения $x_1=284$ и $x_2=4$ только второй корень удовлетворяет условию (4). Значит, $x=4$ и есть единственный корень исходного уравнения (1). Проверка при этом не нужна.

Решить следующие уравнения:

87. $\sqrt{5+x}+\sqrt{3+x}=2$.

88. $\sqrt{x-2}-\sqrt{6x-11}+\sqrt{x+3}=0$.

89. Решить уравнение: $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+$ $+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

Решение. Из уравнения сразу видно, что $x \geqslant 1$, тогда представим наше уравнение в следующем виде:

$$\sqrt{(x-1)-4\sqrt{x-1}+4}+\sqrt{(x-1)-6\sqrt{x-1}+9}=1,$$

или

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2}=1.$$

Отсюда получим:

$$|\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3|=1. \qquad (1)$$

Так как под знаками абсолютных величин мы имеем разности между $\sqrt{x-1}$ и 2 и между тем же корнем и 3, то нам нужно сравнить этот корень с числами 2 и 3.

Возможны 3 случая:

1) $\sqrt{x-1}<2$. Тогда уравнение (1) равносильно уравнению:

$$\left(2-\sqrt{x-1}\right)+\left(3-\sqrt{x-1}\right)=1. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) следует, что

$$2\sqrt{x-1}=4,$$

откуда $x=5$; но при $x=5$ получим $\sqrt{x-1}=2$, что противоречит условию $\sqrt{x-1}<2$.

2) $2\leqslant\sqrt{x-1}\leqslant 3$. Тогда уравнение (1) равносильно уравнению:

$$\left(\sqrt{x-1}-2\right)+\left(3-\sqrt{x-1}\right)=1 \text{ или } 1=1.$$

Это значит, что любое значение x, удовлетворяющее условию $2\leqslant\sqrt{x-1}\leqslant 3$ (4), удовлетворяет и уравнению (1), а значит, и исходному уравнению.

Из неравенства (4) легко получить, что исходное уравнение удовлетворяется тождественно при

$$4\leqslant x-1\leqslant 9, \text{ или } 5\leqslant x\leqslant 10.$$

3) $\sqrt{x-1}>3$. Тогда получим уравнение, равносильное уравнению (1):

$$\left(\sqrt{x-1}-2\right)+\left(\sqrt{x-1}-3\right)=1. \qquad (5)$$

Отсюда:

$$2\sqrt{x-1}=6, \text{ или } \sqrt{x-1}=3,$$

а по условию $\sqrt{x-1}>3$. Итак, исходное уравнение имеет бесконечное множество корней, а именно все действительные числа сегмента [5, 10].

Решить уравнения:

90. $\sqrt{x+\sqrt{6x-9}}+\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}=\sqrt{6}$.

91. $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$ (1).

Решение. Обозначим $\sqrt[4]{97-x}=y$ и $\sqrt[4]{x}=z$ (2)
Очевидно, что $y>0$ и $z>0$.

Данное уравнение примет тогда вид: $y+z=5$. (3)
Из равенств (2) имеем: $\left.\begin{matrix}97-x=y^4\\ x=z^4\end{matrix}\right\}$ Исключая x, получим $y^4+z^4=97$ (4). Возвысим теперь обе части уравне-

ния (3) в квадрат, после преобразования $y^2+z^2=25-2yz$. Обе части полученного уравнения еще раз возвысим в квадрат. Имеем:

$$y^4+z^4+2y^2z^2=625-100\ yz+4y^2z^2.$$

Учитывая уравнение (4), получим:

$$97=625-100yz+2y^2z^2,$$

или

$$(yz)^2-50(yz)+264=0.$$

Решив это квадратное уравнение, найдем, что $yz=6$ или $yz=44$. Но $y+z=5$ и так как y и z оба положительные, то очевидно, что yz не может быть равен 55. Остается лишь одна система:

$$\begin{cases} yz=6, \\ y+z=5. \end{cases}$$

Отсюда найдем, что $z_1=2$ и $z_2=3$ (а $y_1=3$, $y_2=2$). Тогда $x_1=16$, $x_2=81$.

92. $\sqrt[4]{41+x}+\sqrt[4]{41-x}=2.$

§ 12. Графический способ решения уравнений

Предварительно проработайте по учебнику С. И. Новоселова § 66.

93. Решить графически уравнение:

$$2x^2+3x-1=0. \qquad (1)$$

Решение.

I способ. Построим график функции $y=2x^2+3x-1$ (черт. 1). Для этого составим таблицу значений функции:

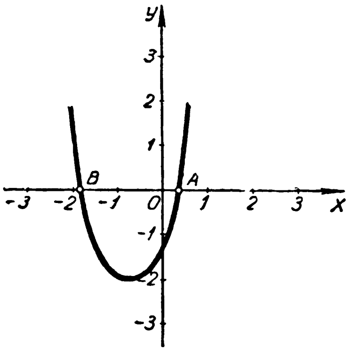
x	-2	-1	0	1
y	1	-2	-1	4

Мы видим, что график данной функции пересекает ось X в двух точках A и B, абсциссы которых $x_1\approx 0{,}3$ и $x_2\approx-1{,}8$ являются корнями данного уравнения.

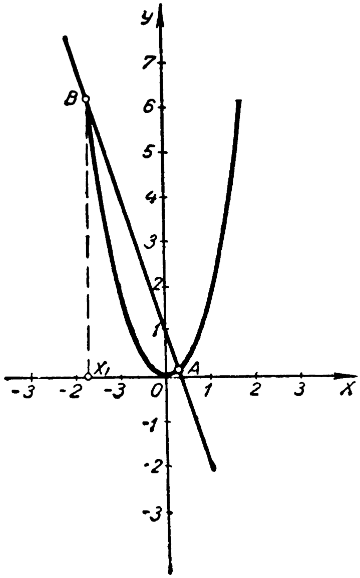
II способ. Перепишем данное уравнение так:

$$2x^2=1-3x.$$

Построим графики функций $y_1 = 2x^2$ и $y_2 = 1 - 3x$ на одном и том же чертеже (черт. 2). Мы видим, что графики указанных функций пересекаются в двух точках A и B, абсциссы этих точек и являются корнями уравнения (1). Значит,



Черт. 1.



Черт. 2.

$$x_1 \approx -1{,}8 \text{ и } x_2 \approx 0{,}3.$$

94. Решить графически следующие уравнения:

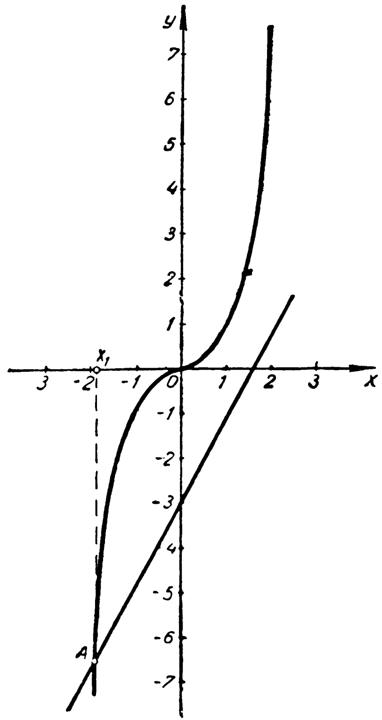
а) $x^2 + 2x - 3 = 0$; б) $x^2 - 4x + 4 = 0$;

в) $2x^2 + 6x + 7 = 0$.

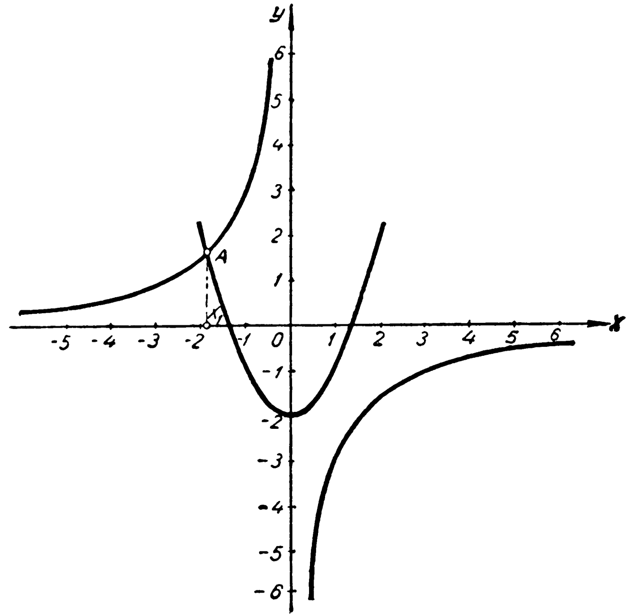
95. Решить графически уравнение: $x^3 - 2x + 3 = 0$.

Решение. Можно построить график функции $y = x^3 - 2x + 3$, найти абсциссы точек пересечения графика с осью OX, которые и будут корнями данного уравнения. Но такое решение является трудоемким, так как построить график указанной функции довольно сложно. Поэтому более целесообразно данное уравнение записать так: $x^3 = 2x - 3$ и построить графики функций $y_1 = x^3$ и $y_2 = 2x - 3$ (черт. 3).

Графики пересекаются в точке A, абсцисса которой $x \approx -1{,}9$. Других точек пересечения нет. Значит, данное уравнение имеет один действительный корень $x \approx -1{,}9$. Но можно решить данное уравнение иначе. Так как $x = 0$


y
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
x
3
-2
-1
1
2
3
x_1
A

Черт. 3.


y
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
x
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
A
x_1

Черт. 4.

не является корнем уравнения, то можно обе части его разделить на x. Получим:

$$x^2-2+\frac{3}{x}=0, \text{ или } x^2-2=-\frac{3}{x}.$$

Построим графики функций $y_1=x^2-2$ и $y_2=-\frac{3}{x}$ (черт. 4). Графики пересекаются в точке A, абсцисса которой $x\approx-1,9$. Этот способ решения, пожалуй, проще первого.

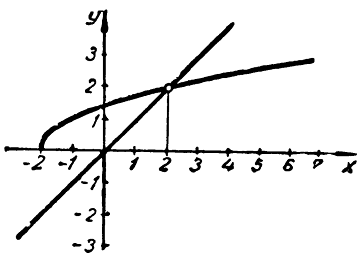
96. Решить графически следующие уравнения:

а) $x^3-x+4=0$; б) $x^3-2x^2+1=0$;

в) $x^3+x^2-2x+3=0$; г) $|x-2|=\frac{1}{x}$.

97. Решить графически уравнение: $\sqrt{x+2}=x$.

Решение. Построим на одном чертеже графики функций $y_1=\sqrt{x+2}$ и $y_2=x$ (черт. 5). График функции $y=\sqrt{x+2}$ можно получить из графика $y=\sqrt{x}$, сдвинув его параллельно самому себе на 2 единицы влево вдоль оси OX. График функции $y_2=x$ есть биссектриса 1-го и 3-го координатных углов.



Черт. 5

Графики пересекаются в точке M (2,2). Абсцисса этой точки пересечения $x=2$ и будет решением данного уравнения.

98. Решить графически уравнение:

$$\sqrt{x-1}=3.$$

§ 13. Решение уравнений с параметрами

Предварительно по учебнику С. И. Новоселова проработайте § 53, 54, 87.

99. Решить уравнение:

$$(m^2+m-2)x^2+(2m^2+m+3)x+m^2-1=0$$

в области действительных чисел.

Решение. Решение любого уравнения с параметрами можно производить по следующей схеме:

1. Определение области допустимых значений (ОДЗ) для неизвестных и параметров, если эта область заранее не задана.

2. Решение уравнения, как правило, в более широкой области.

3. Исследование: установление условий принадлежности каждого из найденных решений к области допустимых значений для неизвестного, рассмотрение особых случаев решения уравнения.

Проверка решения уравнения, если она нужна.

5. Ответ: указание всех решений уравнения при различных допустимых значениях параметров.

Конечно, можно производить решение уравнений с параметрами, придерживаясь какой-либо другой схемы, например определение области допустимых значений производить не в начале решения, а перед исследованием. Точно так же нет надобности разбивать все решение на отдельные этапы согласно приведенной схеме, больше того, отдельные этапы решения будут между собой переплетаться: так, исследование уравнения можно производить попутно с решением уравнения и т. д.

Рассмотрим теперь данное в условии задачи уравнение.

Ясно, что неизвестное x и параметр m могут быть любые действительные числа.

Данное уравнение будет квадратным, если $m^2+m-2 \neq 0$, т. е. $m \neq 1$ и $m \neq 2$. Если $m=1$, то уравнение принимает вид: $6x=0$, отсюда $x=0$. Если $m=-2$, то получается такое уравнение: $9x+3=0$, отсюда $x=-\frac{1}{3}$. Пусть теперь $m \neq 1$ и $m \neq -2$. Тогда найдем дискриминант (различитель) уравнения:

$$D=(2m^2+m+3)^2-4(m^2+m-2)(m^2-1)=(5m+1)^2.$$

Мы видим, что при любых m $D \geqslant 0$, поэтому при всех m (конечно, не равных 1 и -2) данное уравнение имеет два действительных решения:

$$x_{1,2}=\frac{-(2m^2+m+3)\pm\sqrt{(5m+1)^2}}{m^2+m-2}=\frac{-2m^2-m-3\pm(5m+1)}{m^2+m-2};$$

$$x_1=\frac{-2m^2+4m-2}{m^2+m-2}=-\frac{2(m-1)^2}{(m-1)(m+2)}=\frac{2(1-m)}{m+2},$$

$$x_2 = \frac{-2m^2 - 6m - 4}{m^2 + m - 2} = \frac{-2(m+1)(m+2)}{(m-1)(m-2)} = \frac{2(m+1)}{1-m}.$$

Проверку решения в данном случае производить не нужно, ибо мы нигде не нарушили равносильности уравнений.

Ответ: при $m = 1$ $x = 0$,

при $m = -2$ $x = -\frac{1}{3}$;

при $m \neq 1$ и $m \neq -2$ $x_1 = \frac{2(1-m)}{m+2}$ и

$$x_2 = \frac{2(m-1)}{1-m}.$$

100. Решить следующие уравнения в области действительных чисел:

а) $x^2 - 2(a+1)x + 4a = 0$;

б) $a(a+2)x^2 + 2x - a^2 + 1 = 0$.

101. Решить дробное уравнение с параметрами в области действительных чисел:

$$a^2 - \frac{a^2 - b^2}{2x - x^2} = \frac{b^2(x+2)}{x-2}. \qquad (1)$$

Решение: ОДЗ $x \neq 2$, $x \neq 0$, a и b — любые.

Приведем уравнение к целому виду:

$$a^2(2x - x^2) - a^2 + b^2 = b^2(x+2)x.$$

Раскрыв скобки и сгруппировав члены с одинаковыми степенями x, получим:

$$(a^2 - b^2)x^2 - 2(a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2) = 0. \qquad (2)$$

Заметим, что уравнение (2) равносильно уравнению (1) в области допустимых значений неизвестного и параметров.

Решим уравнение (2).

1) Пусть $a^2 \neq b^2$, тогда уравнение (2) является квадратным, корни его будут действительными, если дискриминант $D \geqslant 0$. Поэтому найдем сначала дискриминант уравнения (2):

$$D = (a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2 \geqslant 0.$$

Следовательно, уравнение (2) при указанном условии ($a^2 \neq b^2$) всегда имеет два действительных решения:

$$x_{1,2} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{a^2 - b^2}; \quad x_1 = \frac{a+b}{a-b}, \quad x_2 = \frac{a-b}{a+b}.$$

Найденные решения уравнения (2) будут решениями уравнения (1) только в том случае, если они будут принадлежать области допустимых для них значений. Так как из условия $a^2 \neq b^2$ следует, что $a + b \neq 0$ и $a - b \neq 0$, то $x_1 \neq 0$ и $x_2 \neq 0$. Осталось установить, при каких значениях параметров a и b корни x_1 и x_2 отличны от 2. Допустим, что $x_1 = 2$. Тогда $\frac{a+b}{a-b} = 2$, откуда $a = 3b$. Значит, $x_1 = 2$ при $a = 3b$. Аналогично выясним, что $x_2 = 2$ при $a = -3b$. Следовательно, при $a = 3b$ x_1 — посторонний корень, а $x_2 = \frac{3b-b}{3b+b} = \frac{1}{2}$ есть корень уравнения (1).

При $a = -3b$ x_2 — посторонний корень, а $x_1 = \frac{-3b+b}{-3b-b} = \frac{1}{2}$ есть корень уравнения (1).

Если же $a \neq \pm 3b$, то x_1 и x_2 являются корнями уравнения (1). Теперь рассмотрим особый случай, когда $a^2 = b^2$. При этом условии уравнение (1) примет вид: $a^2 = \frac{b^2(x+2)}{x-2}$, при решении которого возможны два случая:

а) Если $a = 0$, то x — любое, кроме, конечно, $x = 0$ и $x = 2$.

б) Если $a \neq 0$, то получим $x - 2 = x + 2$, откуда видим, что уравнение в этом случае решений не имеет.

Ответ: 1) Если $a = b = 0$, то x — любое, не равное 0 и 2.
2) Если $a = \pm b \neq 0$, то уравнение не имеет решений.
3) Если $a = \pm 3b$, то $x = 0{,}5$.
4) Если $a^2 \neq b^2$ и $a \neq \pm 3b$, то $x_1 = \frac{a+b}{a-b}$ и $x_2 = \frac{a-b}{a+b}$.

102. Решить следующие дробные уравнения в области действительных чисел:

а) $x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$;

б) $\frac{10}{x^2-4ax}-\frac{8}{x^2-4ax+3a^2}-\frac{9}{x^2-4ax+4a^2}=0.$

103. Решить иррациональное уравнение с параметрами:

$$\sqrt{3x-a}=a-2x. \qquad (1)$$

Решение. Для того чтобы левая часть уравнения имела смысл, надо, чтобы $3x-a\geqslant 0$, отсюда $x\geqslant\frac{a}{3}$. (2)

При этом условии левая часть уравнения будет неотрицательна, поэтому надо, чтобы и $a-2x\geqslant 0$, отсюда

$$x\leqslant\frac{a}{2}. \qquad (3)$$

Итак, если уравнение (1) имеет решения, то эти решения должны удовлетворять следующей системе неравенства:

$$\left.\begin{array}{l} x\geqslant\frac{a}{3}, \\ x\leqslant\frac{a}{2}. \end{array}\right\}$$

Но эта система будет иметь общее решение лишь при условии, что $a\geqslant 0$, ибо при $a<0$ противоречива. Итак,

$\frac{a}{3}\leqslant x<\frac{a}{2}$, где $a\geqslant 0$. (4)

При условии (4) можно обе части уравнения (1) возвысить в квадрат, при этом получим уравнение, равносильное исходному в области чисел, определяемых условием (4)

$$4x^2-(4a+3)x+a^2+a=0. \qquad (5)$$

Найдем дискриминант этого уравнения:

$\Delta=9+8a$, так как $a\geqslant 0$, то $\Delta>0$.

Значит, уравнение (5) имеет два корня, ибо $a^2+a>0$, $a-(4a+3)<0$.

$$x_1=\frac{4a+3+\sqrt{9+8a}}{8} \text{ и } x_2=\frac{4a+3-\sqrt{9+8a}}{8}.$$

Проверим, удовлетворяют ли x_1 и x_2 условию (4):

$$x_1=\frac{4a+3+\sqrt{9+8a}}{8}>\frac{4a}{8}=\frac{a}{2},$$

и значит, x_1 условию (4) не удовлетворяет;

$$x_2=\frac{4a+3-\sqrt{9+8a}}{8}<\frac{4a}{8}=\frac{a}{2}$$

и в то же время $x_2 \geqslant \frac{a}{3}$, ибо, действительно, из неравенства

$$\frac{4a+3-\sqrt{9+8a}}{8} \geqslant \frac{a}{3}$$

получаем:

$$12a+9-3\sqrt{9+8a} \geqslant 8a$$

или

$$4a+9 \geqslant 3\sqrt{9+8a}.$$

Возвысив обе части неравенства в квадрат, знак неравенства при этом не изменится, ибо обе части этого неравенства положительны:

$$16a^2+72a+81 \geqslant 81+72a,$$

т. е. $16a^2 \geqslant 0$, что верно.

Итак, уравнение (1) при $a>0$ имеет единственнсе решение

$$x=\frac{4a+3-\sqrt{9+8a}}{8}.$$

При $a<0$ уравнение решений не имеет.

104. Решить и исследовать уравнения с параметрами

$$\sqrt{x^2-a^2}=3a-2x.$$

105. $\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2-x}=a+b,\ a>0,\ b>0.$

§ 14. Решение задач с помощью составления уравнений

Предварительно проработайте по учебнику С. И. Новоселова § 65, 78 и 98.

106. В магазин доставлено несколько стекол одного и того же сорта, стоимостью 90 рублей. При перевозке два стекла оказались разбитыми; остальные были проданы с наценкой по 2 рубля на стекло, причем всего получено 14 рублей прибыли. Сколько стекол было доставлено в магазин?

Решение. При решении задач с помощью составления уравнений (или системы) можно придерживаться следующей схемы.

1) Анализ условия задачи.

Если в задаче есть параметры, то надо установить, зависимы или независимы между собой параметры. Какие значения они могут принимать, какие соотношения между зависимыми параметрами должны быть, чтобы описываемые в задаче явление, процесс, событие могли реально осуществиться? (Установление области допустимых значений для параметров.) Сколько и какие неизвестные имеются в задаче? Зависимы или независимы они между собой? Какие значения могут принимать неизвестные, какие соотношения между неизвестными и параметрами должны быть для того, чтобы описываемое явление могло осуществиться? (Определение области допустимых значений для неизвестных.)

Весь анализ условия задачи проводится устно, а определение области допустимых значений для неизвестного, как правило, проводится попутно с составлением уравнения.

2) Составление уравнения (или системы уравнений).

Выбор и обозначение основного неизвестного для составления уравнений (или основных неизвестных в случае составления системы).

Выражение остальных неизвестных через выбранные параметры. Подробное объяснение составления уравнения (или системы).

3) Решение составленного уравнения (или системы).

4) Исследование.

Установить относительно каждого из найденных решений уравнения (или системы), принадлежит ли оно к области допустимых для него значений или не принадлежит, если принадлежит, то при всех ли допустимых значениях параметров или не при всех; если не при всех, то при каких?

В результате исследования нужно указать, какие из найденных решений уравнения (или системы) и при каких условиях могут быть пригодны для ответа на вопрос задачи.

5) Проверка (не обязательный этап).

6) Ответ.

Всегда придерживаться указанной схемы не обязательно, иногда некоторые этапы целесообразно переставить. Например, в практике часто первый этап выполняют после второго, а иногда даже после третьего. Совершенно не обязательно при решении задач выделять указанные этапы, решение следует давать сплошным текстом, выделив только ответ.

Рассмотрим решение указанной задачи.

Проанализировав условие задачи, нетрудно выяснить, что за главное неизвестное целесообразно выбрать количество стекол, доставленных в магазин. Пусть доставили x стекол, где $x > 0$, тогда цена одного стекла была $\frac{90}{x}$ рублей. При перевозке 2 стекла были разбиты, значит, было продано только $(x-2)$ (отсюда ясно, что $x > 2$) стекла по цене на 2 рубля больше, чем предполагалось, т. е. по $\left(\frac{90}{x}+2\right)$ рублей и было выручено денег $\left(\frac{90}{x}+2\right)(x-2)$ руб. Причем вырученная сумма была на 14 рублей больше стоимости стекол, т. е. была равна 104 руб. Поэтому можно составить такое уравнение:

$$\left(\frac{90}{x}+2\right)(x-2)=104.$$

Решая полученное уравнение, найдем его корни $x_1=15$, $x_2=-6$. Второй корень не принадлежит установленной области допустимых значений $x > 2$, следовательно, не может служить ответом на вопрос задачи. Для проверки решения задачи составим из условия данной задачи новую задачу, приняв количество стекол, доставленных в магазин, за 15 штук, а за неизвестное приняв какую-либо величину, которая в данной задаче была известна, например стоимость стекол. Получим следующую задачу:

В магазин доставлено 15 стекол одного и того же сорта. При перевозке два стекла оказались разбитыми; остальные были проданы с наценкой по 2 рубля за стекло, причем всего получено 14 рублей прибыли. Какова первоначальная стоимость стекол?

Решаем эту задачу.

Было продано 13 стекол, причем за каждое стекло было получено 2 рубля прибыли, всего 26 руб. Но фактически было получено 14 рублей прибыли, т. е. на 12 рублей меньше за счет того, что 2 стекла были разбиты. Значит, первоначальная стоимость одного стекла $12:2=6$ (руб.), а тогда стоимость всех 15 стекол была $6\cdot 15=90$ (руб.).

Найденное значение искомой величины сравниваем с тем значением ее, которое она имела в первоначальной задаче. Если эти значения одинаковы, то данная задача решена верно. В данном случае эти значения совпадают.

Ответ: в магазин доставили 15 стекол.

107. Двое колхозников взялись сжать ржаное поле в течение одного дня, причем каждый обязался сжать половину поля. Первый начал работу на 2 час 16 мин. раньше второго. В полдень, когда ими уже было сжато 0,4 поля, они приостановили работу для обеда и отдыха на $1\frac{1}{2}$ часа. Первый окончил свою часть в 7 час. 54 мин., а второй — в 8 час. 10 мин. вечера. В котором часу начал работать каждый?

Решение. За главное неизвестное удобнее здесь выбрать количество часов работы второго колхозника. Пусть второй колхозник выполнил свою часть работы за x часов (время отдыха не учитывается). Первый колхозник начал работу на 2 часа 16 мин. раньше второго, но зато он окончил работу на 16 мин. раньше, значит, свою часть он выполнил за $x+2$ часа. Тогда за 1 час первый колхозник сжал $\frac{1}{2(x+2)}$ часть поля, а второй — $\frac{1}{2x}$ часть поля. До обеда они оба сжали 0,4 поля.

Первый колхозник после обеда работал 7 час. 54 мин.— — 1 час 30 мин. = 6 час. 24 мин. $=6\frac{2}{5}$ часа, а до обеда $x+2-6\frac{2}{5}$ часа $= x-4\frac{2}{5}$ часа и сжал за это время $\frac{x-4\frac{2}{5}}{2(x+2)}$ часть поля.

Второй колхозник после обеда работал 8 час. 10 мин.— — 1 час 30 мин. $=6\frac{2}{3}$ часа, а до обеда $x-6\frac{2}{3}$ часа и сжал за это время $\frac{x-6\frac{2}{3}}{2x}$ часть поля. В условии задачи сказано, что оба колхозника до обеда сжали 0,4 поля. Поэтому получаем уравнение:

$$\frac{x-4\frac{2}{5}}{2(x+2)}+\frac{x-6\frac{2}{3}}{2x}=0,4.$$

После преобразований получим квадратное уравнение:

$$9x^2 - 80x - 100 = 0,$$

корни которого $x_1 = 10$, $x_2 = -\frac{10}{9}$. Второй корень условию задачи не удовлетворяет, так как количество часов работы не может быть выражено отрицательным числом. Следовательно, второй колхозник свою часть поля сжал за 10 часов, а первый—за 12 часов. Тогда первый колхозник начал работу в 19 час. 54 мин.—12 час.—1 час 30 мин. = =6 час. 24 мин., а второй в 6 час. 24 мин. + 2 час. 16 мин. = = 8 час. 40 мин.

Наиболее распространенной является непосредственная проверка по условию задачи. В этом случае нужно проверить, удовлетворяет ли найденное решение всем условиям задачи. Выполним непосредственную проверку данной задачи. Если первый колхозник начал работу в 6 час. 24 мин., то до обеда он работал 12 час. —6 час. 24 мин. =5 час. 35 мин. = 5,6 часа и сжал $\frac{5,6}{24}$ часть поля. Если второй рабочий начал работу в 8 час. 40 мин., то до обеда он работал 12 час.—8 час. 40 мин. = 3 час. 20 мин. = $3\frac{1}{3}$ часа и сжал за это время $\frac{3\frac{1}{3}}{20}$ часть поля.

Вместе до обеда они сжали

$$\frac{5,6}{24} + \frac{3\frac{1}{3}}{20} = \frac{0,7}{3} + \frac{1}{6} = 0,4$$

часть поля, что соответствует условию задачи. После обеда они начали работу в 13 час. 30 мин.

Первый после обеда работал 12 час.—5,6 часа = 6,4 часа и закончил работу в 13 час. 30 мин. + 6 час. 24 мин. = =19 час. 54 мин., а второй после обеда работал 10 час. — $-3\frac{1}{3}$ часа $= 6\frac{2}{3}$ часа и закончил работу в 13 час. 30 мин. + 6 час. 40 мин. = 20 час. 10 мин., что соответствует условию задачи. Выполняются все условия задачи.

Ответ. Первый начал работу в 6 час. 24 мин., а второй — в 8 час. 40 мин.

108. Сплав из меди и цинка весом в 24 *кг* при погружении в воду потерял в своем весе $2\frac{8}{9}$ *кг.* Определить количество меди и цинка в этом сплаве, если известно, что медь теряет в воде $11\frac{1}{9}$ % своего веса, а цинк — $14\frac{2}{7}$ % своего веса.

Решите эту задачу и сделайте проверку путем составления новой задачи.

109. Сумма цифр трехзначного числа 16, цифра десятков на 1 более цифры сотен. Если из него вычесть число, записанное из тех же цифр, но в обратном порядке, то получится 594. Найти это число.

110. Из Тулы по направлению к Вязьме вышел товарный поезд. Спустя 5 час. 5 мин. по той же дороге вышел из Вязьмы в Тулу пассажирский поезд. Оба поезда встретились на промежуточной станции. От этой станции товарный поезд шел до Вязьмы 12 час. 55 мин. и от той же станции пассажирский поезд шел до Тулы 4 час. 6 мин. Сколько времени употребил каждый поезд на прохождение всего пути между Вязьмой и Тулой?

111. Бассейн наполняется двумя трубами за 6 часов. Одна первая труба заполняет его на 5 час. скорее, чем одна вторая. Во сколько времени каждая труба, работая отдельно, может наполнить бассейн?

112. Моторная лодка прошла по течению реки расстояние S *км* от пункта A до пункта B и повернула обратно в пункт A. Не доходя до A p *км*, лодка остановилась. На весь путь от A до B и обратно до остановки лодка потратила t часов. Определить собственную скорость лодки (скорость в стоячей воде), если скорость течения реки $a\,\frac{км}{час}$.

Решение.

1 способ. По условию задачи моторная лодка прошла по течению реки S *км* от A до B и против течения реки от B до некоторого пункта C, отстоящего от A на p *км*, а значит, от B на $(S - p)$ *км*. Отсюда ясно, что

$$S > p > 0. \qquad (1)$$

Относительно остальных параметров a и t можно лишь установить, что они должны быть положительные:

$$a > 0 \text{ и } t > 0. \tag{2}$$

Пусть собственная скорость лодки x *км* в час. Ясно, что

$$x > a, \tag{3}$$

ибо в противном случае лодка не смогла бы двигаться против течения. Тогда скорость лодки по течению реки $(x+a)$ *км* в час, а путь $AB=S$ *км* она пройдет за $\frac{S}{x+a}$ часов. Скорость ее против течения $(x-a)$ *км* в час и путь $BC=(S-p)$ *км* она пройдет за $\frac{S-p}{x-a}$ часов. Так как на весь путь от A до B и обратно от B до C лодка потратила t часов, то

$$\frac{S}{x+a}+\frac{S-p}{x-a}=t. \tag{4}$$

В силу условия (3) из уравнения (4) получим, после умножения обеих частей на x^2-a^2, равносильное уравнение:

$$2Sx-px-ap=tx^2-ta^2$$

или

$$tx^2-(2S-p)x+ap-a^2t=0. \tag{5}$$

Дискриминант уравнения (5) $D=(2S-p)^2-4apt+4a^2t^2$. Для того чтобы определить знак дискриминанта, преобразуем его:

$$D=4S^2-4Sp+p^2-4apt+4a^2t^2=4S(S-p)+(p-2at)^2. \tag{6}$$

Так как по (1) $S>p>0$, то $D>0$ и поэтому уравнение (5), а значит, и уравнение (4) имеют два вещественных корня:

$$x_1=\frac{2S-p+\sqrt{D}}{2t} \text{ и } x_2=\frac{2S-p-\sqrt{D}}{2t}.$$

Проверим, удовлетворяют ли найденные корни условию (3).

Допустим, что $x_1 > a$.

Тогда

$$\frac{2S-p+\sqrt{D}}{2t}>a, \tag{7}$$

$$2S-p+\sqrt{D}>2at \text{ (ибо } 2t>0),$$

$$\sqrt{D}>2at+p-2S \tag{8}$$

Если правая часть неравенства отрицательна или равна нулю, то (8) справедливо, ибо $\sqrt{D}$, будучи положительным числом, ясно, больше любого неположительного числа. Следовательно, справедливо и неравенство (7), а значит, $x_1 > a$. Если же правая часть неравенства (8) положительная, то мы можем обе части его возвести в квадрат.

Подставляя вместо D его значение из (6), получим:

$$4S^2 - 4Sp + p^2 - 4apt + 4a^2t^2 > 4a^2t^2 + p^2 + 4S^2 + \\ + 4apt - 8atS - 4pS.$$

Откуда $8atS > 8apt$ или $S > p$ (ибо $8at > 0$).

Но по условию (1) $S > p$, значит, и в этом случае неравенство (8) справедливо.

Таким образом, при всех допустимых значениях параметров $x_1 > a$ и поэтому x_1 может служить ответом на вопрос задачи.

Допустим теперь, что $x_2 > a$, тогда

$$\frac{2S - p - \sqrt{D}}{2t} > a. \qquad (9)$$

Откуда в силу $2t > 0$ получаем:

$$\sqrt{D} < 2S - p - 2at. \qquad (10)$$

Так как $\sqrt{D} > 0$, то правая часть неравенства (10), если оно справедливо, должна быть положительна. Поэтому мы имеем право возвысить в квадрат обе части неравенства. Получим:

$$4S^2 - 4Sp + p^2 - 4apt + 4a^2t^2 < 4S^2 + p^2 + 4a^2t^2 - 4Sp - \\ - 8atS + 4apt,$$

или

$$8atS < 8apt.$$

Отсюда $S < p$ (ибо $8at > 0$), что противоречит условию (1). Значит, при всех допустимых значениях параметров неравенство (9) несправедливо, и поэтому наше предположение, что $x_2 > 0$, неверно.

Итак, для ответа на вопрос задачи пригоден лишь корень x_1.

II способ исследования.

Аналогично предыдущему $\frac{S}{x + a} + \frac{S - p}{x - a} = t$, где

$$x > a;\ S > p > 0;\quad t > 0.$$

$$tx^2 - (2S - p)\,x + ap - a^2t = 0, \tag{5}$$

$$x = \frac{(2S-p) \pm \sqrt{(2S-p)^2 + 4at\,(at-p)}}{2t}.$$

Теперь нужно выяснить, действительны ли корни квадратного уравнения и удовлетворяют ли они требованию $x > a$. С этой целью рассмотрим квадратный трехчлен:

$$f(x) = tx^2 - (2S - p)\,x - a\,(at - p).$$

Определим знак трехчлена при $x = a$

$$f(a) = -2Sa + 2ap = -2a\,(S - p).$$

Следовательно, $f(a) < 0$ (ибо $S > p$). Старший коэффициент трехчлена положителен. График квадратного трехчлена — парабола — имеет ветви, направленные вверх ($t > 0$), в точке $x = a$ $f(x) < 0$. Следовательно, график квадратного трехчлена пересечет ось Ox в двух точках, т. е. дискриминант трехчлена положителен и число a находится между корнями трехчлена $x_1 < a < x_2$. Больший корень уравнения $x = \dfrac{(2S-p)+\sqrt{(2S-p)^2 + 4at\,(at-p)}}{2t}$ удовлетворяет всем требованиям задачи.

III способ исследования. Имеем уравнение:

$$\frac{S}{x+a} + \frac{S-p}{x-a} = t. \tag{1}$$

По смыслу задачи $S > p > 0$; $t > 0$; $x > a$. Введем новое неизвестное $z = x - a$. Тогда наше уравнение (1) примет вид:

$$\frac{S}{z+2a} + \frac{S-p}{z} = t. \tag{2}$$

Нам надо будет показать, что $z > 0$. Получим уравнение относительно z:

$$tz^2 - (2S - p - 2at)z - 2a(S - p) = 0.$$

Так как $-2a(S - p) < 0$, (ибо $S > p$), то $D > 0$, и задача допускает единственное положительное решение:

$$z_1 = \frac{2S - p - 2at + \sqrt{(2S-p-2at)^2 + 8a(S-p)t}}{2t}$$

и, следовательно,

$$x=\frac{2S-p-2at+\sqrt{(2S-p-2at)^2+8a(S-p)t}}{2t}+a=$$

$$=\frac{2S-p+\sqrt{(2S-p-2at)^2+8a(S-p)t}}{2t}.$$

Так как $z_1>0$, а $z_1=x-a$, то $x-a>0$ и $x>a$.

Ответ:

$$x=\frac{2S-p+\sqrt{(2S-p-2at)^2+8a(S-p)t}}{2t}.$$

113. Два грузовика одновременно выезжают с одного и того же склада в пункт, отстоящий от него на a *км*. Один едет со скоростью, большей на m *км/час*, чем другой, и приходит к месту назначения на n часов раньше. С какой скоростью идет каждый грузовик?

114. Два велосипедиста выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми d *км*, и через час встречаются. Не останавливаясь, они продолжают путь с прежней скоростью, и первый прибывает в пункт B на t часов скорее, чем второй в пункт A. Определить скорость каждого велосипедиста.

Глава III. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

§ 15. Системы уравнений и элементарные методы их решений

Предварительно проработайте по учебнику С. И. Новоселова § 47, 48, 51 и 90 (вопросы, относящиеся к системам уравнений).

115. Даны две системы:

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y&=3,\\ 7x+5y&=16,\end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} (2x+3y)^2&=9,\\ (7x+5y)^2&=256.\end{aligned}\right\}$$

Равносильны ли эти системы? Если нет, то какая из них является следствием другой?

116. Дана система:

$$\left.\begin{aligned} 6x^2-xy-12y^2&=0,\\ x^2+2y^2&=\frac{17}{16}.\end{aligned}\right\}$$

Первое уравнение умножьте на 2, второе на 6 и найдите алгебраическую сумму уравнений. Затем первое уравнение умножьте на 3, второе на 9 и опять найдите их сумму. Рассмотрите систему из вновь полученных уравнений и выясните, будет ли она равносильна данной.

117. Решить систему уравнений.

$$\left.\begin{aligned} x^2-xy+y^2&=21,\\ y^2-2xy+15&=0.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Решение. Перепишем данную систему в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} x^2-xy+y^2&=21,\\ y^2-2xy&=-15.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Мы видим, что левые части уравнений системы (2) представляют собою однородные многочлены и тоже второй степени. Для решения таких систем можно указать следующий прием. Уравняем по абсолютному значению свободные члены уравнений системы (2):

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21 \\ y^2 - 2xy = -15 \end{cases} \left| \begin{matrix} 5 \\ 7 \end{matrix} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ + \begin{array}{l} 5x^2 - 5xy + 5y^2 = 105 \\ \underline{7y^2 - 14xy = -105} \\ 5x^2 + 12y^2 - 19xy = 0. \end{array} \right.$$

Получили однородное уравнение второй степени. Составим новую систему:

$$\begin{cases} 5x^2 + 12y^2 - 19xy = 0, \\ y^2 - 2xy = -15, \end{cases} \tag{3}$$

которая равносильна системе (1), так как

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Решим отдельно первое уравнение системы (3). Для этого введем вспомогательное неизвестное, положив $y = tx$.

Тогда получим:

$$5x^2 - 19tx^2 + 12t^2x^2 = 0 \text{ или } x^2(12t^2 - 19t + 5) = 0,$$

$x \neq 0$, ибо если $x = 0$, то из первого уравнения системы (3) получим, что и $y = 0$.

Но эти значения x и y не удовлетворяют второму уравнению системы (3). Следовательно, $12t^2 - 19t + 5 = 0$, откуда $t_1 = \frac{5}{4}$, $t_2 = \frac{1}{3}$. Тогда $y = \frac{5}{4}x$ и $y = \frac{1}{3}x$. Теперь решение системы (3) сводится к решению совокупности двух систем:

$$\text{а)} \left. \begin{array}{l} y = \frac{5}{4}x, \\ y^2 - 2xy = -15, \end{array} \right\} \qquad \text{б)} \left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{3}x, \\ y^2 - 2xy = -15. \end{array} \right\} \tag{5}$$

Решая каждую систему совокупности (5), получим следующие решения системы (1):

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 4, \\ y_1 = 5, \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x_2 = -4, \\ y_2 = -5, \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x_3 = 3\sqrt{3}, \\ y_3 = \sqrt{3}, \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x_4 = -3\sqrt{3}, \\ y_4 = -\sqrt{3}. \end{array} \right\}$$

118. Решить системы уравнений:

а) $$\left.\begin{aligned} 6x^2 - xy - 12y^2 = 0, \\ x^2 + 2y^2 = \frac{17}{16}, \end{aligned}\right\}$$

б) $$\left.\begin{aligned} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29, \\ 7x^2 - 8xy + 7y^2 = 43, \end{aligned}\right\}$$

в) $$\left.\begin{aligned} 3x^2 + 5xy - 4y^2 = 38, \\ 5x^2 - 9xy - 3y^2 = 15. \end{aligned}\right\}$$

119. Решить следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + 3xy + y^2 = 61, \\ xy = 12. \end{aligned}\right\}$$

120. Решить систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17, \\ x + xy + y = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Решение. Систему целесообразно решать способом введения вспомогательных неизвестных. Обозначим $x+y= u$, а $xy = v$. Тогда $(x + y)^3 = u^3$. Отсюда

$$x^3 + y^3 = u^3 - 3x^2y - 3xy^2 = u^3 - 3xy(x + y) = u^3 - 3uv.$$

Следовательно, из системы (1) получим такую систему относительно новых неизвестных u и v:

$$\left.\begin{aligned} u^3 - 3uv + v^3 = 17, \\ u + v = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Систему (2) решаем способом подстановки и получаем:

$$u_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{17}{3}} \quad \text{и} \quad v_{1,2} = \mp\sqrt{\frac{17}{3}}.$$

Тогда, учитывая введенные обозначения, получаем две системы относительно x и y:

$$\left.\begin{aligned} x + y = \sqrt{\frac{17}{3}}, \\ xy = -\sqrt{\frac{17}{3}}, \end{aligned}\right\} \quad (3) \qquad \left.\begin{aligned} x + y = -\sqrt{\frac{17}{3}}, \\ xy = \sqrt{\frac{17}{3}}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Решая системы (3) и (4), найдем решения исходной системы (1):

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{\sqrt{51}+\sqrt{12\sqrt{51}+51}}{6},\\ y_1 &= \frac{\sqrt{51}-\sqrt{12\sqrt{51}+51}}{6}, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{\sqrt{51}-\sqrt{12\sqrt{51}+51}}{6},\\ y_2 &= \frac{\sqrt{51}+\sqrt{12\sqrt{51}+51}}{6}, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= \frac{-\sqrt{51}+i\sqrt{12\sqrt{51}-51}}{6},\\ y_3 &= \frac{-\sqrt{51}-i\sqrt{12\sqrt{51}-51}}{6}, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x_4 &= \frac{-\sqrt{51}-i\sqrt{12\sqrt{51}-51}}{6},\\ y_4 &= \frac{-\sqrt{51}+i\sqrt{12\sqrt{51}-51}}{6}. \end{aligned}\right\}$$

121. Решить следующие системы уравнений:

а) $\left.\begin{aligned} x+xy-y &= 13,\\ x^2y-xy &= 30, \end{aligned}\right\}$ б) $\left.\begin{aligned} x^2+x-y^2-y &= 6,\\ (x^2-y^2)(xy) &= 16, \end{aligned}\right\}$

в) $\left.\begin{aligned} (2x-5)^2+(3y-2)^2 &= 17,\\ (2x-5)(3y-2) &= 4, \end{aligned}\right\}$ г) $\left.\begin{aligned} x+y+\sqrt{xy} &= 14,\\ x^2+y^2+xy &= 84, \end{aligned}\right\}$

д) $\left.\begin{aligned} x^2+4y^2+x &= 4xy+2y+2,\\ 4x^2+4xy+y^2 &= 2x+y+56. \end{aligned}\right\}$

122. Решить систему уравнений с параметрами:

$$\left.\begin{aligned} (x+a)(y-b)+(x-a)(y+b) &= 2(y^2-b^2),\\ ay+bx &= 2ab, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

в области действительных чисел.

Решение. Раскрыв скобки и приведя подобные члены в первом уравнении, получим:

$$\left.\begin{aligned} y^2-xy+ab-b^2 &= 0,\\ ay+bx &= 2ab. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Систему (2) решим способом подстановки. Предварительно заметим, что если $a=0$, но $b \neq 0$, то из второго уравнения следует, что $x=0$. Тогда из первого уравнения получим, что $y^2=b^2$, $y=\pm b$. Значит, в этом случае система (2), следовательно и система (1), имеют два решения:

$$x_1=0,\ y_1=b \text{ и } x_2=0,\ y_2=-b.$$

Если же $a \neq 0$, а $b=0$, то из второго уравнения имеем, что $y=0$, при этом первое уравнение удовлетворяется тождественно, значит, x может быть любое число.

Если же $a = b = 0$, то второе уравнение удовлетворяется тождественно, а из первого уравнения получаем $y(y - x) = 0$. Отсюда или $y = 0$, x — любое, или $y = x$. Будем теперь считать a и b отличными от нуля. Тогда из второго уравнения найдем $x = \frac{2ab - ay}{b}$ (3). Подставим это выражение x в первое уравнение. После упрощений получим такое уравнение относительно y:

$$(a + b)y^2 - 2aby + ab^2 - b^3 = 0. \qquad (4)$$

Если $a + b = 0$, т. е. $a = -b \neq 0$, то уравнение (4) есть линейное относительно y: $2b^2y - 2b^3 = 0$, отсюда $y = b$, тогда x из (3) найдем, что $x = a$.

Если $a + b \neq 0$, то (4) есть квадратное уравнение, корни которого $y_1 = b$ и $y_2 = \frac{b(a-b)}{a+b}$. Из (3) найдем:

$$x_1 = a \text{ и } x_2 = \frac{a(a+3b)}{a+b}.$$

Ответ: 1) Если $a = 0$, $b \neq 0$, то система имеет два решения: $x_1 = 0$, $y_1 = b$, $x_2 = 0$, $y_2 = -b$.

2) Если $a \neq 0$, $b = 0$, то система имеет бесконечное множество решений; $y = 0$, x — любое число.

3) Если $a = b = 0$, то система имеет два бесконечных множества решений; $y = 0$, x — любое число и $y = x$.

4) Если $a = -b \neq 0$, то система имеет одно решение: $x = a$, $y = b$.

5) Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq -b$, то система имеет два решения:

$$x_1 = a, \quad y_2 = b; \quad x_2 = \frac{a(a+3b)}{a+b}, \quad y_2 = \frac{b(a-b)}{a+b}.$$

123. Решить системы уравнений с параметрами:

$$\left.\begin{aligned} x^2 - xy + ay &= 0, \\ y^2 - xy - 4ax &= 0. \end{aligned}\right\}$$

§ 16. Решение текстовых задач с помощью составления систем уравнений

Предварительно по учебнику С. И. Новоселова проработайте § 78 и 95.

124. Два тела движутся равномерно по окружности, длина которой 180 *м*. Двигаясь в одном направлении, они встречаются через каждые 45 секунд, двигаясь в противоположных направлениях, они встречаются через каждые 9 секунд. Какова скорость каждого тела?

Решение. В данной задаче искомыми являются две величины, связь между которыми непосредственно в условии задачи не дана. Поэтому целесообразнее решать эту задачу составлением системы уравнений.

Обозначим скорость первого тела через $x \frac{м}{сек}$, а скорость второго тела — $y \frac{м}{сек}$.

Если тела двигаются в одном и том же направлении, то за 45 *сек* одно из них проходит на одну полную окружность больше другого. Если допустим, что $x > y$, то тогда $45x$ больше $45y$ на 180 *м*, получаем уравнение $45x - 45y = 180$.

Двигаясь в противоположных направлениях, оба тела проходят всю окружность, т. е. 180 *м* и за 9 *сек*, получаем второе уравнение:

$$9x + 9y = 180.$$

Итак, получаем систему двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 45x - 45y &= 180, \\ 9x + 9y &= 180. \end{aligned}\right\}$$

Решив ее, найдем $x = 12$, $y = 8$.

Проверку решения задачи можно производить теми же способами, какими проверяется решение задач — составлением одного уравнения. Например, для данной задачи удобно провести непосредственную проверку всех условий или составить другую задачу. Используем последний способ проверки. Для этого составим другую задачу:

Два тела движутся равномерно по окружности, длина которой 180 *м*. Скорость первого тела $12 \frac{м}{сек}$, а скорость второго — $8 \frac{м}{сек}$. Через сколько секунд они встретятся, если будут двигаться в одном направлении и в противоположном направлении?

Решение. Если тела двигаются по окружности в одном направлении, то до встречи первое тело проходит на одну полную окружность больше другого, а в каждую секунду первое тело проходит на $12 - 8 = 4$ (*м*) больше второго. Значит, встреча произойдет через $180:4 = 45$ (*сек*).

Если тела двигаются по окружности в противоположных направлениях, то до встречи они пройдут всю окружность, сближаясь каждую секунду на $12 + 8 = 20$ (*м*). Тогда встреча произойдет через $180 : 20 = 9$ (*сек*).

Сравнивая полученные результаты с теми значениями, которые имели эти величины в данной задаче, делаем вывод, что, вероятно, задача решена верно.

Ответ: Скорость первого тела $12 \frac{м}{сек}$, а скорость второго — $8 \frac{м}{сек}$.

Решите следующие задачи и сделайте проверку любым способом.

125. Два лица, находящиеся на расстоянии 96 *км*, должны отправиться друг другу навстречу. Если первый выйдет ранее второго на 5 часов, то они встретятся через 4 часа после отправления второго; если же второй выйдет двумя часами ранее первого, то они встретятся через 6 часов после отправления первого. Какова скорость каждого лица?

126. Сумма цифр двузначного числа на 29 меньше произведения этих цифр и на 72 меньше суммы квадратов цифр. Найти это число.

127. Для буфета купили мандарины и апельсины, всего a *кг*. За все апельсины заплачено 0,4 той суммы, которая была заплачена за мандарины. Если бы мандарины продавали по цене апельсинов, то за них получили бы m руб., а если бы апельсины продавали по цене мандаринов, то за них получили бы n руб.

Сколько килограммов апельсинов и мандаринов в отдельности купили для буфета?

Решение. Пусть купили x *кг* мандаринов и y *кг* апельсинов, тогда по условию $x + y = a$. Отсюда ясно, что $0 < x < a$ и $0 < y < a$, где $a > 0$.

Пусть цена мандаринов u руб. за килограмм, а цена апельсинов t руб. за килограмм. Тогда за мандарины заплатили xu руб., а за апельсины yt руб. По условию вторая сумма yt составляет 0,4 от первой, т. е. $yt = 0,4xu$.

За x *кг* мандаринов по цене апельсинов, т. е. по t руб., получили бы xt руб., что по условию равно m. Значит, $xt=m$. Наконец, за y апельсинов по цене мандаринов получили бы yu руб., что по условию равно n. Значит, $yu=n$,

Итак, получаем такую систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=a, \\ yt=0{,}4xu, \\ xt=m, \\ yu=n, \end{cases}$$

где все параметры a, m и n — положительные числа, а неизвестные x, y, u и t — положительные числа, причем x и y — меньшие a.

Заметим, что неизвестные u и t являются вспомогательными и введены нами для удобства составления системы уравнений.

Перемножим почленно последние три уравнения; после деления обеих частей на $xu \neq 0$ получим:

$$(yt)^2=0{,}4\,mn, \text{ отсюда } yt=\sqrt{0{,}4mn}.$$

Разделим теперь почленно полученное уравнение на 3-е уравнение системы, получим:

$$\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{0{,}4mn}}{m};\quad y=x\sqrt{0{,}4\frac{n}{m}}\,.$$

Подставим найденное значение y в первое уравнение системы:

$$x+x\sqrt{\frac{0{,}4n}{m}}=a, \text{ отсюда } x=\frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{0{,}4n}}\,.$$

Тогда $y=\dfrac{a\sqrt{0{,}4n}}{\sqrt{m}+\sqrt{0{,}4n}}$.

Нетрудно убедиться, что найденные значения x и y удовлетворяют всем условиям задачи, в частности, ясно, что x и y положительны и меньше a.

Ответ: мандаринов купили $\dfrac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{0{,}4n}}$ *кг*, а апельсинов $\dfrac{a\sqrt{0{,}4n}}{\sqrt{m}+\sqrt{0{,}4n}}$ *кг*.

128. Найти катеты прямоугольного треугольника, если гипотенуза его равна C, а высота, опущенная на гипотенузу, равна h_c.

129. Из пунктов A и B выходят одновременно два автомобиля. Если скорость первого автомобиля увеличить на $a \frac{км}{час}$, а скорость второго автомобиля увеличить на $b \frac{км}{час}$, то первый автомобиль догонит второй в том месте, где он догнал второй автомобиль при первоначальной скорости, но на час раньше. Какова была первоначальная скорость каждого автомобиля, если расстояние между пунктами A и B равно d *км*?

Глава IV. НЕРАВЕНСТВА

§ 17. Тождественные неравенства

Предварительно проработать по учебнику С. И. Новоселова § 57, 58.

130. Доказать, что $x^2+2x^3 \leqslant 2x^4+1$.

Решение. Для доказательства этого неравенства определим знак разности $(2x^4+1)-(x^2+2x^3)$:

$$(2x^4+1)-(2x^3+x^2)=2x^4-2x^3-x^2+1=x^4-2x^3+$$
$$+x^2+x^4-2x^2+1=(x^2-x)^2+(x^2-1)^2 \geqslant 0,$$

как сумма квадратов действительных чисел. Следовательно,

$$x^2+2x^3 \leqslant 2x^4+1 \text{ при любом } x.$$

131. Доказать неравенство: $a^2+b^2+c^2+4>2(a+$ $+b+c)$.

132. Доказать, что при положительных x, y, z имеет место неравенство:

$$\frac{x+y}{z}+\frac{x+z}{y}+\frac{y+z}{x} \geqslant 6.$$

133. Доказать, что при всяком целом положительном n справедливо неравенство:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1.$$

Решение. Будем доказывать данное неравенство методом полной математической индукции.

$$\text{При } n=1 \text{ имеем: } \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1 \quad \text{или} \quad \frac{13}{12}>1,$$

значит, при $n=1$ данное неравенство справедливо. Предположим, что данное неравенство справедливо при некотором

$$n=k>1, \text{ т. е. } \frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{3k+1}>1.$$

Докажем тогда справедливость данного неравенства при $n=k+1$; левая часть неравенства при $n=k+1$ примет вид:

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{3k+4}.$$

Но

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{3k+4}=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3k+1}\right)+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}.$$

Сумма, стоящая в скобках в правой части равенства, по предположению больше 1, поэтому, для того чтобы доказать, что левая часть последнего равенства больше 1, достаточно доказать, что

$$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}\geqslant 0.$$

Это неравенство можно преобразовать так:

$$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}\geqslant\frac{1}{k+1}-\frac{1}{3k+3}.$$

Или

$$\frac{6k+6}{9k^2+18k+8}\geqslant\frac{2}{3(k+1)}.$$

Так как k — натуральное число, то можно обе части последнего неравенства умножить на произведение положительных знаменателей дробей, получим:

$$18k^2+36k+18\geqslant 18k^2+36k+16.$$

Или: $2>0$, что верно. Значит, справедливо и исходное неравенство. Итак, из предположения, что наше неравенство справедливо при $n=k$, следует, что оно справедливо и при $n=k+1$. А при $n=1$ наше неравенство, как мы видели, справедливо, значит, оно справедливо при любом натуральном значении n.

134. Доказать методом полной математической индукции справедливость неравенства:

$$(1+a)^n > 1+na, \text{ где } a > -1$$

и $a \neq 0$, n — любое натуральное число.

135. Доказать неравенство:

$$abc \geqslant (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a),$$

где a, b, c — стороны треугольника.

Решение. Воспользуемся очевидными неравенствами:

$$a^2 \geqslant a^2-(b-c)^2, \quad b^2 \geqslant b^2-(a-c)^2, \quad c^2 \geqslant c^2-(a-b)^2.$$

Так как все эти неравенства с положительными членами, то, перемножив их почленно, получим:

$$a^2b^2c^2 \geqslant [a^2-(b-c)^2][b^2-(a-c)^2][c^2-(a-b)^2] =$$
$$=(a+b-c)(a+c-b)(b+a-c)(b+c-a)(c+a-b)\times$$
$$\times(c+b-a)=(a+b-c)^2(a+c-b)^2(b+c-a)^2.$$

Так как a, b и c — стороны треугольника, то $a+b>c$,

$a+c>b$ и $b+c>a$, значит, $(a+b-c)$, $(a+c-b)$ и $(b+c-a)$ — положительны, а поэтому в последнем неравенстве можно извлечь квадратный корень из обеих частей, тогда получим требуемое неравенство:

$$abc \geqslant (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a).$$

136. Доказать, что $\frac{\sqrt{2}}{2}d < c$, где d — сумма катетов прямоугольного треугольника, c — его гипотенуза.

137. Доказать, что

$$a+b+c \geqslant \frac{9abc}{ab+ac+bc} \quad (a,\ b,\ c, > 0).$$

§ 18. Средние величины и неравенства между ними

Предварительно проработайте по учебнику С. И. Новоселова § 59.

138. Показать, что $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Решение. Применим неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим к числам $1, 2, \ldots, n$. Получим:

$$\frac{1+2+\ldots+n}{n} > \sqrt[n]{1.\,2.\,3.\ldots n.}$$

$$\text{Но } 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Тогда

$$\frac{n(n+1)}{2n} > \sqrt[n]{n!}.$$

Или

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!$$

139. Доказать неравенство: $1\cdot3\cdot5\cdot7\ldots(2n-1) < n^n$.

140. Доказать, что $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$, где a, b и c — положительные числа.

141. Доказать неравенство: $(a+1)(b+1)(a+c)^3(b+c)^3 \geqslant 256a^2b^2c^3$ при $a>0$, $b>0$, $c>0$.

142. Доказать, что дробь

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n} = k$$

является средней для дробей

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \ldots,\ \frac{a_n}{b_n},$$

где все $b_i > 0$, т. е.

$$\min\left(\frac{a_i}{b_i}\right) \leqslant k \leqslant \max\left(\frac{a_i}{b_i}\right).$$

143. Доказать, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ имеет место неравенство:

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_1} \geqslant n$$

144. Доказать неравенство:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \geqslant \frac{27}{a^2+b^2+c^2} \quad (a,\,b,\,c>0).$$

145. Доказать, что $a+b+c \leqslant \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$.

146. Если $x+y+z=1$ и $x>0$, $y>0$, $z>0$, то $(1-x)(1-y)(1-z) \geqslant 8xyz$. Доказать.

147. Показать, что $(a^2+b^2+c^2)(a+b+c) \geqslant 9abc$.

§ 19. Приложения неравенств к определению экстремумов функций

Предварительно проработайте по учебнику С. И. Новоселова § 60.

148. Найти наименьшее значение функции:

$$y = 6x^2 + 8x + 5.$$

Решение. $y = 6x^2 + 8x + 5 = 6\left(x + \frac{8}{12}\right)^2 + \frac{7}{3}$.

Теперь очевидно, что данная функция имеет наименьшее значение, равное $\frac{7}{3}$ при $x = -\frac{8}{12}$.

149. Найти наименьшее значение функции:

$$y = x^2 + x + 3.$$

150. Найти наибольшее значение для функции:

$$y = 7 + 5x - 3x^2.$$

151. Найти наименьшее положительное значение дроби: $\frac{3x^2 + 2}{x}$.

Решение. Так как по условию значение данной дроби должно быть положительным, а числитель ее при любых x положителен, то и знаменатель, т. е. $x > 0$

$$\frac{3x^2 + 2}{x} = 3x + \frac{2}{x}.$$

Используя теорему о среднем геометрическом, получим:

$$\frac{3x + \frac{2}{x}}{2} \geqslant \sqrt{3x \cdot \frac{2}{x}} = \sqrt{6}.$$

Значит, $3x + \frac{2}{x} \geqslant 2\sqrt{6}$. Следовательно, наименьшее положительное значение дроби $\frac{3x^2 + 2}{x}$ равно $2\sqrt{6}$. Наименьшего значения данная дробь достигает, когда

$$3x = \frac{2}{x}, \text{ т. е. при } x = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

152. Найти наибольшее значение функции:

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

153. Найти наибольшее значение произведения

$$(x+3)^2 \cdot (2-x)^3.$$

Решение. Так как $(2-x)+(x+3)=5$, то на основании леммы 1° (см. учебник С. И. Новоселова, стр. 213) данное произведение достигает наибольшего значения при $\frac{2-x}{3}=\frac{x+3}{2}$, т. е. при $x=-1$. Но при $x=-1$ данное произведение равно 108.

Итак, произведение $(2-x)^3(x+3)^2$ имеет наибольшее значение, равное 108 при $x=-1$.

154. Найти наибольшее значение дроби:

$$\frac{32x^2}{x^4+16}.$$

§ 20. Неравенства и системы неравенств первой степени с одним неизвестным

Предварительно проработайте по учебнику С. И. Новоселова § 75, 76.

155. Решить неравенство:

$$(a^2+a+1)x-3a > (2+a)x+5a.$$

Решение. После преобразования получим:

$$(a^2-1)x > 8a.$$

Если $a^2-1>0$, отсюда $|a|>1$ (т. е. $a>1$, или $a<-1$), то $x>\frac{8a}{a^2-1}$.

Если $a^2-1<0$, тогда $|a|<1$ (т. е. $-1<a<1$), то $x<\frac{8a}{a^2-1}$.

Если $a^2-1=0$, то или $a=1$, тогда неравенство решений не имеет, ибо 0 не больше 8, или $a=-1$, тогда неравенство выполняется при любом x, ибо $0>-8$.

156. Решить неравенства:

а) $x-2>m-nx$;

б) $a-\frac{(a^2-a+1)x}{2}<\frac{ax}{2}-x-\frac{a^2}{2}$;

в) $-\frac{2}{3}mx-1>-[x(m+1)+m]$.

157. Решить систему неравенств:

$$\left.\begin{aligned} 2x-1&>3,\\ 3x-2&>5,\\ 4x-3&>7,\\ 5x-4&<9,\\ 6x-5&<11,\\ 7x-6&>13,\\ 8x-7&<15. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Решив каждое из данных неравенств системы, получим: $x>2$; $x>2\frac{1}{3}$; $x>2{,}5$; $x<2{,}6$; $x<2\frac{2}{3}$; $x>2\frac{5}{7}$; $x<2\frac{3}{4}$.

Рассмотрим две системы, образованные из неравенств одного и того же смысла:

1) $x>2$; $x>2\frac{1}{3}$; $x>2{,}5$; $x>2\frac{5}{7}$;

2) $x<2{,}6$; $x<2\frac{2}{3}$; $x<2\frac{3}{4}$.

Первая из этих систем имеет решение $x>2\frac{5}{7}$, а вторая $x<2{,}6$. Следовательно, исходная система равносильна системе двух неравенств:

$$\left\{\begin{aligned} x&>2\frac{5}{7},\\ x&<2{,}6. \end{aligned}\right.$$

Но так как $2\frac{5}{7}>2{,}6$, то последняя система противоречива и решений не имеет. Значит, и исходная система не имеет решения.

158. Решить системы неравенств:

$$\left.\begin{aligned} 3x-2&>5x-16,\\ 3x-7&<18-2x,\\ x-\frac{2}{3}&>\frac{11}{5}-\frac{2}{5}x,\\ 4x-5&<\frac{x}{3}+\frac{1}{2},\\ 2x-3&>\frac{x-5}{3}. \end{aligned}\right\}$$

159.

а) $\left.\begin{aligned} 5x-\ \ 7&>2x-\ \ 4,\\ 9x-\ \ 7&<8x+\ \ 2,\\ 7x-\ \ 1&>6x+\ \ 1,\\ 3x-12&<\ \ x+\ \ 4,\\ 6x+\ \ 4&>4x+14,\end{aligned}\right\}$ б) $\left\{\begin{aligned} &\frac{7-x}{2}-3>\frac{3+4x}{5}-4,\\ &\frac{5}{3}x+5(4-x)>2(4-x),\\ &3-\frac{3-7x}{10}+\frac{x+1}{2}>4-\frac{7-3x}{5},\\ &7(3x-6)+4(17-x)>11-\\ &-5(x-3).\end{aligned}\right.$

160. Решить систему неравенств с параметрами:

$$\begin{cases} a(x-2)>x-3,\\ 8(a+1)x>8ax+9.\end{cases}$$

Решение. После очевидных преобразований получим:

$$\begin{cases} (a-1)x>2a-3,\\ \qquad\quad x>\frac{8}{9}.\end{cases}$$

Дальше придется рассмотреть три случая.

1) $a>1$. Тогда исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x>\dfrac{2a-3}{a-1},\\ x>\dfrac{8}{9}.\end{cases} \tag{1}$$

Чтобы найти общее решение этой системы, надо сравнить числа $\frac{2a-3}{a-1}$ и $\frac{8}{9}$ при условии, что $a>1$. Пусть $\frac{2a-3}{a-1}\vee\frac{8}{9}$, где $\vee$ — пока неизвестный знак неравенства. Так как $a-1>0$, то умножим обе части этого неравенства на $9(a-1)$:

$$18a-27\vee 8a-8,$$
$$10a\vee 19,$$
$$a\vee 1{,}9.$$

Следовательно, если $a>1{,}9$, то и $\frac{2a-3}{a-1}>\frac{8}{9}$ и тогда общим решением системы (1) будет $x>\frac{2a-3}{a-1}$. Если же

$1 < a \leqslant 1{,}9$, то $\dfrac{2a-3}{a-1} \leqslant \dfrac{8}{9}$ и тогда общим решением этой системы будет $x > \dfrac{8}{9}$.

2) $a < 1$. Тогда исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x < \dfrac{2a-3}{a-1}, \\ x > \dfrac{8}{9}. \end{cases} \qquad (2)$$

Сравним числа $\dfrac{2a-3}{a-1}$ и $\dfrac{8}{9}$ при условии $a < 1$.

Пусть $\dfrac{2a-3}{a-1} \vee \dfrac{8}{9}$, где $\vee$ — пока неизвестный знак неравенства. Умножим обе части этого неравенства на $9(a-1)$. Так как $a-1<0$, то знак неравенства при этом изменится на противоположный:

$$18a - 27 \wedge 8a - 8,$$
$$10a \wedge 19,$$
$$a \wedge 1{,}9.$$

Так как $a<1$, то тем более $a<1{,}9$, значит, знак $\wedge$ соответствует знаку $<$, а тогда знак $\vee$ соответствует знаку $>$. Следовательно, $\dfrac{2a-3}{a-1} > \dfrac{8}{9}$ и, значит, общее решение системы (2) будет:

$$\frac{8}{9} < x < \frac{2a-3}{a-1}.$$

3) $a = 1$. В этом случае исходная система равносильна такой:

$$\begin{cases} 0 \cdot x > -1, \\ x > \dfrac{8}{9}. \end{cases}$$

Решением этой системы является $x > \dfrac{8}{9}$.

Итак, 1) если $a > 1{,}9$, то $x > \dfrac{2a-3}{a-1}$,

2) если $1 \leqslant a < 1{,}9$, то $x > \dfrac{8}{9}$,

3) если $a < 1$, то $\frac{8}{9} < x < \frac{2a-3}{a-1}$.

161. Решить следующие системы неравенств:

а) $\begin{cases} \frac{ax}{a-2} - \frac{x-1}{3} < \frac{2x+3}{4}, \\ \frac{x(a-10)}{2} + a > \frac{a(x+2)}{2} - 5x - 6, \end{cases}$

б) $\begin{cases} 7 - \left(\frac{15m}{4} - 30\right)x > 10, \\ \frac{x-1}{m-1} - 1 < \frac{m}{1-m} - x. \end{cases}$

§ 21. Неравенства и системы неравенств высших степеней с одним неизвестным

Предварительно проработайте по учебнику С. И. Новоселова § 83 и 91.

162. Решить неравенство:

$$\frac{x^2}{3} > \frac{7}{3}x - 4.$$

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству: $x^2 - 7x + 12 > 0$. Трехчлен $x^2 - 7x + 12$ имеет корни $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, следовательно, данное неравенство выполняется при $x < 3$ и $x > 4$ (см. учебник С. И. Новоселова, стр. 311—312).

163. Решить неравенства:

а) $\frac{x^2}{5} + \frac{8}{3}x > -9$,

б) $\frac{x^2}{7} + \frac{1}{7} > \frac{8x}{5}$.

164. Решить неравенство: $x^2 - 6mx > -25m^2$.

Решение. Преобразовав данное неравенство, получим:

$$x^2 - 6mx + 25m^2 > 0.$$

Дискриминант трехчлена $x^2 - 6mx + 25m^2$, $\Delta = -16m^2 < 0$. Поэтому, если $m \neq 0$, то знак трехчлена при всех значениях x одинаков со знаком коэффициента старшего члена, т. е. наше неравенство выполняется при всех значениях x; если же $m = 0$, то наше неравенство выполняется при всех $x \neq 0$.

165. Решить неравенства:

а) $15a^2 < 8ax - x^2$,

б) $n^2(x^2 + 1) + 6 < a^2 + 2(n^2x + 3)$.

166. При каких значениях a квадратный трехчлен $x^2 + 2ax + 8a - 10$ будет положительным при любом значении аргумента?

167. При каком значении α следующие неравенства выполняются при любых значениях x:

а) $x^2 - (8\alpha - 2)x + 15\alpha^2 - 2\alpha - 7 > 0$;

б) $(\alpha + 1)x^2 - 2(\alpha - 1)x - 3(1 - \alpha) < 0$;

в) $(\alpha - 2)x^2 + 2(\alpha - 3)x + 5\alpha - 6 > 0$.

Решение примера б).

Для того чтобы квадратный трехчлен при всех значениях аргумента был отрицательным, необходимо, чтобы во-первых, коэффициент старшего члена был отрицателен, а, во-вторых, дискриминант трехчлена был отрицателен.

Поэтому получаем такую систему неравенств:

$$\begin{cases} \alpha + 1 < 0, \\ (\alpha - 1)^2 + 3(1 - \alpha)(\alpha + 1) < 0. \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} \alpha < -1, \\ \alpha^2 + \alpha - 2 > 0. \end{cases}$$

Или, наконец,

$$\left.\begin{aligned} \alpha + 1 < 0, \\ (\alpha - 1)(\alpha + 2) > 0. \end{aligned}\right\}$$

Так как второе неравенство системы выполняется при $\alpha > 1$ или при $\alpha < -2$, то получаем две системы:

$$\begin{cases} \alpha < -1, \\ \alpha > 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} \alpha < -1, \\ \alpha < -2. \end{aligned}$$

Первая система противоречивая, а общим решением второй является: $\alpha < -2$.

Это и будет решением задачи.

168. При каких значениях m квадратный трехчлен $x^2 - 3mx + m^2 + 2x - 9m + 1$ имеет действительные корни?

169. При каком значении a трехчлен $(a-1)x^2 - 2ax + a + 3$ имеет положительные корни?

§ 22. Задание различных областей на прямой и на плоскости с помощью неравенств. Решение систем неравенств с двумя неизвестными

Предварительно проработайте по учебнику С. И. Новоселова § 5, 61, 75, 76, 92.

170. На числовой прямой дан интервал $(-2,\ 3)$.

Задать этот интервал в виде:

а) одного неравенства;

б) системы неравенств.

Решение. Данный интервал может служить решением очень многих различных неравенств. Поэтому задача имеет не единственное решение, а вообще бесконечное множество решений. Однако можно указать те простейшие неравенства и системы неравенств, с помощью которых можно задать эту числовую область — интервал $(-2,\ 3)$.

Если задавать этот интервал с помощью одного неравенства с одним неизвестным, то простейшим неравенством будет $(x+2)(x-3) < 0$, или $x^2 - x - 6 < 0$.

Можно задать этот интервал с помощью неравенства с абсолютным значением чисел. Найдем центр интервала, т. е. точку, одинаково отстоящую от его концов. Это будет $x = 0{,}5$. Радиус интервала, т. е. расстояние от центра до концов интервала, равен 2,5.

Тогда неравенство $|x - 0{,}5| < 2{,}5$ может служить заданием указанного интервала.

Если же задавать этот интервал с помощью систем неравенств, то такой простейшей системой будет система:

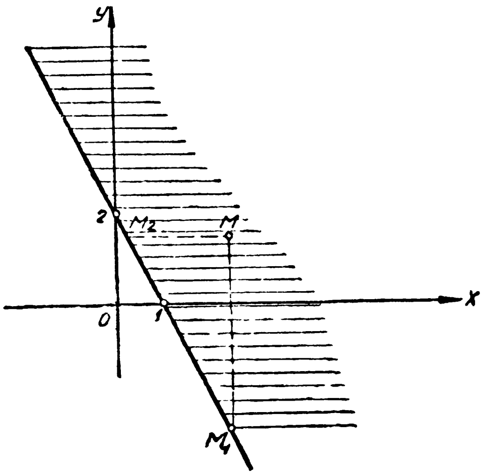
$$\left.\begin{array}{l} x < 3, \\ x > -2 \end{array}\right\} \text{ или } -2 < x < 3.$$

171. Задать с помощью одного неравенства и с помощью систем неравенств следующие области на числовой прямой:

а) бесконечный интервал $(-\infty,\ 2)$;

б) интервал $(-1, +\infty)$;
в) полусегмент $]1, 3]$;
г) сегмент $[-2, 2]$;
д) сегмент $[-3, 4]$.

172. Задать с помощью неравенства правую полуплоскость, ограниченную прямой, уравнение которой $2x + y - 2 = 0$ (черт. 6).



Черт. 6.

Решение. Очевидно, что так как в данном случае заданная область представляет собой часть числовой плоскости, то ее уже нельзя задать с помощью неравенств с одним неизвестным; для задания этой области придется воспользоваться неравенствами с двумя неизвестными.

Чтобы найти такое неравенство, надо установить какое-либо характеристическое свойство точек данной области и это свойство выразить с помощью неравенств. Но ясно, что точки любой области обладают не одним характеристическим свойством (т. е. таким свойством, которое присуще всем точкам этой области и только им), а многими. В зависимости от того, какое характеристическое свойство мы будем рассматривать, в зависимости от этого мы будем получать различные неравенства — задания этой области.

В данном случае можно, например, указать такие характеристические свойства:

1) Если M есть точка указанной полуплоскости, а M_1 — такая точка прямой $2x+y-2=0$, что $MM_1 \parallel Oy$ (черт. 6), то ясно, что ордината точки M больше ординаты точки M_1, между тем как абсциссы у них одинаковы.

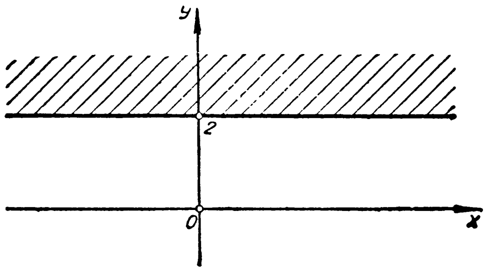
Если y — ордината точки M, а y_0 — ордината точки M_1, то $y > y_0$. Но $y_0 = 2-2x$. Значит, $y > 2-2x$. (1)

Это и будет пример неравенства с двумя неизвестными, с помощью которого может быть задана указанная полуплоскость.

2) Если M — точка указанной полуплоскости, а M_2 — такая точка прямой $2x+y-2=0$, что $MM_2 \parallel Ox$ (черт. 6), то ясно, что абсцисса x точки M больше абсциссы x_0 точки M_2, а ординаты у них одинаковые. Значит, $x > x_0$, но $x_0 = \frac{2-y}{2}$, следовательно, неравенство $x > \frac{2-y}{2}$ (2) может служить другим примером неравенства — задания указанной полуплоскости.

Заметим, что неравенства (1) и (2) тождественны.

173. Задать с помощью неравенства верхнюю полуплоскость, ограниченную прямой $y=2$ (черт. 7).



Черт. 7.

Решение. Характеристическое свойство точек указанной полуплоскости состоит в том, что ордината любой точки этой полуплоскости больше 2, а абсцисса может быть при этом любым числом.

Значит, указанная полуплоскость может быть задана такой системой неравенств

$$\left.\begin{aligned} y &> 2, \\ -\infty < x &< +\infty. \end{aligned}\right\}$$

174. Задать с помощью неравенств с двумя неизвестными следующие области:

а) Левую полуплоскость, ограниченную прямой $3x - 2y + 6 = 0$.

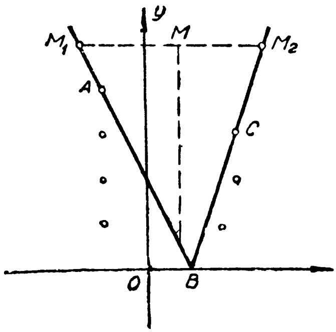
б) Нижнюю полуплоскость, ограниченную прямой $y = 3$.

в) Правую полуплоскость, ограниченную прямой $x = 1$.

г) Левую полуплоскость, ограниченную прямой $x = 0$.

д) Правую полуплоскость, ограниченную прямой, проходящей через точки A $(1,1)$ и B $(-1, 5)$.

175. Задать с помощью неравенств внутреннюю область угла ABC, если координаты точек A $(-1,4)$, B $(1,0)$ и C $(2,3)$ (черт. 8).



Черт. 8.

Решение. Найдем уравнения прямых AB и BC.

Уравнение прямой AB: $y + 2x - 2 = 0$.

Уравнение прямой BC: $3x - y - 3 = 0$.

Дальше решение можно продолжать двумя способами.

1-й способ. Найдем характеристическое свойство точек данной области. Таким свойством может быть, например, следующее:

Если M — точка, лежащая внутри угла ABC, то ордината ее больше ординаты вершины угла, а абсцисса ее больше абсциссы точки M_1 — луча AB и меньше абсциссы точки M_2 — луча CB, где $M_1MM_2 \parallel Ox$.

Тогда получаем такую систему неравенств:

$$\left.\begin{array}{l} y > 0, \\ x_1 < x < x_2, \end{array}\right\}$$ где x_1 — абсцисса точки M_1, а x_2 — абсцисса точки M_2. Но $x_1 = \frac{2-y}{2}$, а $x_2 = \frac{y+3}{3}$.

Следовательно, внутренняя область угла ABC может быть задана такой системой неравенств:

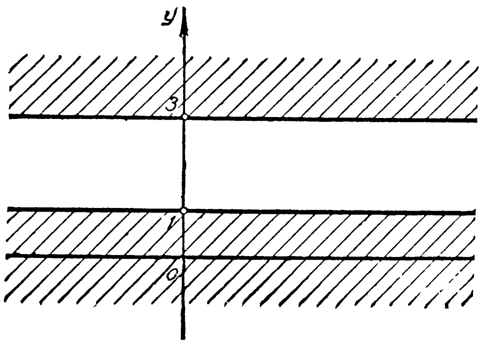
$$\left.\begin{array}{c} y > 0, \\ \frac{2-y}{2} < x < \frac{y+3}{3} \end{array}\right\}$$

2-й способ. Внутреннюю область угла ABC можно рассматривать как общую часть (пересечения) двух областей: правой полуплоскости, ограниченной прямой AB, и левой полуплоскости, ограниченной прямой BC.

Значит, внутренняя область угла ABC может быть задана такой системой неравенств:

$$\left.\begin{array}{r} y+2x-2>0, \\ 3x-y-3<0. \end{array}\right\}$$

176. Задать с помощью неравенств внутреннюю область треугольника, вершины которых $A(-2;\ 1)$, $B(1;\ -2)$ и $C(2;\ 3)$.



Черт. 9.

177. Задать с помощью неравенств внешнюю область треугольника ABC, если $A(-1;\ -1)$, $B(1;\ 1)$ и $C(2;\ -3)$.

178. Задать с помощью неравенств область, находящуюся вне полосы между двумя параллельными прямыми $y=1$ и $y=3$ (черт. 9).

Решение. Характеристическое свойство точек указанной области состоит в том, что абсцисса у них может быть любое число, а ордината y — такая, что $y<1$ или $y>3$. Поэтому указанную область можно задать с помощью совокупности двух систем неравенств:

$$\left.\begin{array}{r} y<1, \\ -\infty<x<+\infty \end{array}\right\} \text{ и } \left.\begin{array}{r} y>3, \\ -\infty<x<+\infty. \end{array}\right\}$$

Но так как совокупность неравенств $y<1$ или $y>3$ можно рассматривать как решение, например, такого неравенства: $(y-1)(y-3)>0$, то указанную область можно задать с помощью такой системы неравенств:

$$\left.\begin{array}{l}(y-1)(y-3)>0,\\ -\infty<x<+\infty.\end{array}\right\}$$

Наконец, так как совокупность неравенств $y<1$ или $y>3$ можно рассматривать как решение неравенства $|y-2|>1$, а неравенство $-\infty<x<+\infty$ можно рассматривать, как решение неравенства $|x|\geqslant 0$, то указанную область можно задать с помощью такой системы неравенств:

$$\left.\begin{array}{l}|x|\geqslant 0,\\ |y-2|>0.\end{array}\right\}$$

179. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} y<x+1,\\ y<9-x,\\ y>\frac{x}{3}-1\end{cases}$$

и показать на чертеже область D, координаты точек которой являются решением системы.

Решение. Отдельно решим каждую пару системы неравенств:

$$\mathrm{I}\quad\begin{cases} y<x+1,\\ y<9-x.\end{cases}$$

Чтобы решить эту систему, сравним между собой правые части $x+1$ и $9-x$. Пусть $x+1\vee 9-x$, отсюда $2x\vee 8$, или $x\vee 4$. Значит, если $x\leqslant 4$, то $x+1\leqslant 9-x$, а если $x>4$, то $x+1>9-x$.

Поэтому из этой системы находим область:

$$D_1\quad\begin{cases} y<x+1 \text{ при } x\leqslant 4,\\ y<9-x \text{ при } x>4.\end{cases}$$

Из системы:

$$\mathrm{II}\quad\begin{cases} y<x+1,\\ y>\frac{1}{3}x-1\end{cases}$$

имеем область:

$$D_2 \left\{ \frac{1}{3}x - 1 < y < x + 1 \text{ при } x > -3. \right.$$

Из системы:

$$\begin{cases} y < 9 - x, \\ y > \dfrac{x}{3} - 1 \end{cases}$$

получим область:

$$D_3 \left\{ \frac{x}{3} - 1 < y < 9 - x \quad \text{при} \quad x < \frac{15}{2}. \right.$$

Для получения окончательного ответа надо определить общую часть областей D_1, D_2, D_3, т. е. пересечение этих областей. При пересечении D_1 и D_2 найдем:

$$\frac{x}{3} - 1 < y < x + 1 \text{ при } -3 < x \leqslant 4.$$

Если же $4 < x < \frac{15}{2}$, то

$$\frac{1}{3}x - 1 < y < \begin{cases} x + 1, \\ 9 - x, \end{cases}$$

но в этой области значение x будет выполняться неравенство $9 - x < x + 1$, следовательно, в этой области будет $\frac{x}{3} - 1 < y < 9 - x$ и окончательно найдем область D:

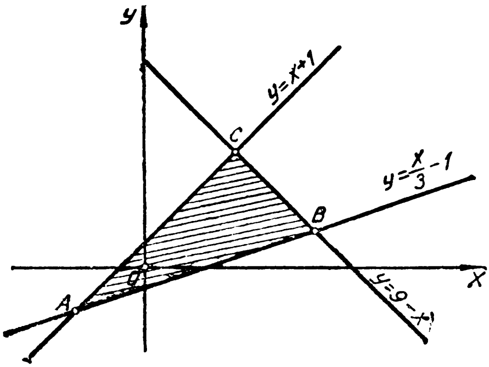
$$D \begin{cases} \dfrac{x}{3} - 1 < y < x + 1 \text{ при } -3 < x \leqslant 4, \\ \dfrac{x}{3} - 1 < y < 9 - x \text{ при } 4 < x < \dfrac{15}{2}. \end{cases}$$

Покажем эту область на чертеже.

Прямые $y = x + 1$, $y = 9 - x$ и $y = \frac{x}{3} - 1$

пересекаются в точках $A(-3;\ -2)$, $B\left(\frac{15}{2};\ \frac{3}{2}\right)$ и $C(4;\ 5)$ (черт. 10)

Решениями системы служат координаты внутренних точек $\triangle ABC$.



Черт. 10.

Решить систему неравенств:

180. $\left.\begin{array}{l} y < x+1, \\ y < 1-x, \\ y > -x-1, \\ y > x-1. \end{array}\right\}$

181. $\left\{\begin{array}{l} y > x^2, \\ x+y < 3, \\ y-x < 3. \end{array}\right.$

Глава V. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

§ 23. Логарифмы

Предварительно проработайте по учебнику С. И. Новоселова § 104, 105.

183. Доказать тождество: $\log_{a^k}(N^k) = \log_a N$.

Решение. Как известно, $N = a^{\log_a N}$. Возведем обе части этого тождества в k-ю степень:

$$N^k = a^{k \log_a N}, \text{ или } N^k = (a^k)^{\log_a N}.$$

Откуда $\log_{a^k} N^k = \log_a N$. Это равенство показывает, что логарифм числа не изменится, если основание и логарифмируемое число возвысить в одну и ту же степень.

184. Доказать, что $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_{4,5} \pi} < 2$.

185. Вычислить: $\log_3 8 \cdot \log_2 27$.

186. Вычислить: $a^{\log_b c} - c^{\log_b a}$.

Решение. Обозначим $a^{\log_b c} N$, $a = c^{\log_b a} = M$.

Прологарифмируем оба эти неравенства по основанию b:

$$\log_b N = \log_b c \cdot \log_b a; \quad \log_b M = \log_b a \log_b c.$$

Видим, что логарифмы M и N по основанию b равны, следовательно, и сами числа M и N равны, а отсюда $N - M = 0$,

$$\text{т. е. } a^{\log_b c} - c^{\log_b a} = 0.$$

187. Вычислить устно:

а) $25^{\log_5 \left(\frac{9}{2}\right)}$; е) $\log_3 4^2 \cdot \log_2 \sqrt[3]{27^2}$;

б) $m^{\log_{m^p} a}$;

в) $\log_{\frac{1}{2}} \lg \lg 10^{10^8}$; ж) $\dfrac{\log_7 32}{\log_7 4}$;

г) $7^{\log_7 3 + \log_{49} 4}$;

д) $9^{2\log_3 2 + 4\log_{81} 2}$; з) $\lg\operatorname{tg}35° \cdot \lg\operatorname{tg}40° \cdot \lg\operatorname{tg}45° \cdot \lg\operatorname{tg}50°$.

188. Доказать соотношения:

а) $\log_{10}2 = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \ldots \log_9 8 \cdot \log_{10} 9$;

б) $\log_2 10 = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \ldots \log_8 9 \cdot \log_9 10$.

189. Найти $\log_6 16$, если $\log_{12} 27 = a$.

Решение. Чтобы решить задачу, нам нужно выразить и данный и искомый логарифм через логарифмы при одном и том же основании, желательно от одного и того же числа. Но $\log_6 16 = 4\log_6 2$, а по формуле $\log_x y = \dfrac{1}{\log_y x}$, найдем, что

$$\log_6 16 = \frac{4}{\log_2 6} = \frac{4}{\log_2 2 + \log_2 3} = \frac{4}{1+\log_2 3}.$$

Итак, мы выразили искомый логарифм через $\log_2 3$. Но

$$\log_{12} 27 = 3\log_{12} 3 = \frac{3}{\log_3 12} = \frac{3}{\log_3 3 + \log_3 4} = \frac{3}{1+2\log_3 2}.$$

Значит, $a = \dfrac{3}{1+2\log_3 2}$. Отсюда $\log_3 2 = \dfrac{3-a}{2a}$, а тогда $\log_2 3 = \dfrac{2a}{3-a}$. Подставив найденное значение $\log_2 3$ в выражение искомого логарифма, получим:

$$\log_6 16 = \frac{4}{1+\dfrac{2a}{3-a}} = \frac{4(3-a)}{a+3}.$$

190. Зная, что $\lg 2 = 0{,}301$, вычислить $\lg \sqrt{1{,}25}$.

§ 24. Показательные и логарифмические уравнения

Предварительно проработайте по учебнику С. И. Новоселова § 106.

Напомним некоторые теоремы, которые наиболее часто используются при решении показательных и логарифмических уравнений.

Большинство таких уравнений может быть сведено к следующим двум видам:

$$\left.\begin{array}{l} a^{f_1(x)} = a^{f_2(x)} \\ \log_a f_1(x) = \log_a f_2(x), \end{array}\right\} \text{где } a > 0 \text{ и } a \neq 1. \qquad \begin{array}{r}(1)\\(2)\end{array}$$

Эти уравнения заменяют уравнением

$$f_1(x) = f_2(x), \tag{3}$$

при этом справедливы следующие две теоремы:

Теорема 1. Уравнения (1) и (3) равносильны в области тех действительных значений x, при которых $f_1(x)$ и $f_2(x)$ принимают действительные значения.

Теорема 2. Уравнения (2) и (3) равносильны в областях тех действительных значений x, при которых $f_1(x)$ и $f_2(x)$ принимают положительные значения.

191. Решить уравнение:

$$\sqrt[3x-3]{27^{x-1}}\sqrt[2x-2]{3^{2,5x+9,5}} = \sqrt[x-1]{9^{2x-6}}.$$

Решение. Перепишем данное уравнение в виде

$$3^{\frac{3(x-1)}{3(x-1)}} \cdot 3^{\frac{2,5x+9,5}{2(x-1)}} = 3^{\frac{2(2x-6)}{x-1}}$$

или

$$3^{\frac{4,5x+7,5}{2(x-1)}} = 3^{\frac{8x-24}{2(x-1)}}. \tag{1}$$

Уравнение (1) равносильно уравнению (2);

$$\frac{4,5x+7,5}{2(x-1)} = \frac{8x-24}{2(x-1)}. \quad \text{Отсюда } x = 9. \tag{2}$$

192. Решить уравнение:

$$\sqrt[x]{\sqrt[3]{2}} \cdot \sqrt[6]{\sqrt[x]{4}} \cdot \sqrt[12x]{16\sqrt{3^{2x}}} = \sqrt[3x]{6\sqrt{2^x}}.$$

193. Решить уравнение:

$$2^{12x-1} - 4^{6x-1} + 8^{4x-1} - 16^{3x-1} = 1280.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение так, чтобы все члены левой части представляли степени одного основания, например 2:

$$2^{12x-1} - 2^{12x-2} + 2^{12x-3} - 2^{12x-4} = 1280,$$

Вынесем 2^{12x-4} за скобку в левой части уравнения, тогда получим:

$$2^{12x-4}(2^3-2^2+2^1-1)=1280.$$

Отсюда

$$2^{12x-4}\cdot 5=1280.$$

Разделив обе части уравнения на 5, получим:

$$2^{12x-4}=2^8.$$

Отсюда $12x-4=8$, тогда $x=1$.

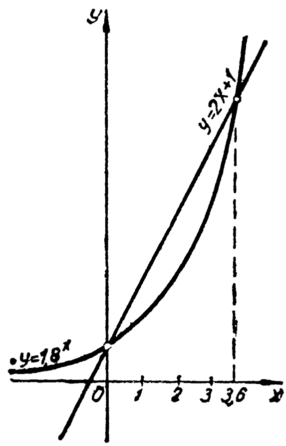
194. $(0,81)^{x-1}-(0,9)^{2x-3}+(0,01)^{x-1,5}-9(0,1)^{2x-2}=0.$

195. $\sqrt{7^{2x+6}}-\sqrt{49^{x+2}}-2^{x+5}+2\cdot 0,25^{-(1+0,5x)}=0.$

196. Решить графически уравнение:

$$1,8^x=2x+1.$$

Решение. Каким-либо известным способом строим график функции $y=1,8^x$, затем на том же чертеже строим график функции $y=2x+1$ (черт. 11). Находим, что точки пересечения графиков функций $y=1,8^x$ и $y=2x+1$ имеют абсциссы $x_1\approx 0$, $x_2\approx 3,6$.



Черт. 11.

197. Графически решить уравнения:

а) $(0,8)^x=3x$; в) $2^x=\frac{1}{x}$;

б) $2^x=x^2$; г) $2^{-x}=x$.

198. Решить уравнение: $c^{\frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}}=b.$

Решение. По определению показательной функции $c>0$ и $c\neq 0$ функция $y=c^z$ при любом z положительна, а потому и b должно быть положительно ($b>0$): $x>0$ и $x\neq a^2$.

Логарифмируя по основанию 10, получим:

$$\frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}\lg c=\lg b$$

или $\sqrt{x}\lg bc=a\lg\frac{b}{c}$,

$$\text{откуда } \sqrt{x}=\frac{a\lg\frac{b}{c}}{\lg bc}.$$

Рассмотрим полученное выражение:

$\sqrt{x}$ — арифметический корень, следовательно, $\sqrt{x}>0$, а потому должно быть и $\frac{a\lg\frac{b}{c}}{\lg bc}>0$.

При выполнении этого условия

$$x=\left[\frac{a\lg\frac{b}{c}}{\lg bc}\right]^2.$$

Ответ: $x=\left[\frac{a\lg\frac{b}{c}}{\lg bc}\right]^2$ при $\frac{a\lg\frac{b}{c}}{\lg bc}>0$, $b>0$, $c>0$, $c\neq 1$.

Решить уравнения с параметрами:

199. $(a+b)^x=(ab)^x$.

200. $\lg 10^{\lg(x^2+21)}-1=\lg x$.

201. Решить уравнение:

$$\lg y+\lg(y^2-4)=\lg 3+\lg(y+2); \qquad (1)$$

Решение. Уравнение (1) можно представить в виде

$$\lg y(y^2-4)=\lg 3(y+2), \qquad (2)$$

откуда

$$y(y^2-4)=3(y+2) \qquad (3)$$

или

$$(y+2)(y^2-2y-3)=0. \qquad (4)$$

Отсюда $y_1=-2$, $y_2=3$ и $y_3=-1$. Из трех найденных корней уравнения (4) уравнению (1) удовлетворяет лишь $y_2=3$.

Почему и когда появились посторонние корни?

Найдем область допустимых значений для неизвестного исходного уравнения (1). Для левой части уравнения имеем: $y^2-4>0$ и $y>0$, отсюда $y>2$. Для правой части уравнения имеем: $y+2>0$, или $y>-2$. Итак, для обеих частей уравнения (1) имеем $y>2$.

Найдем теперь область допустимых значений для неизвестного уравнения (2). Для левой части уравнения (2) область допустимых значений неизвестного определяется условием: $y(y^2-4)>0$ или $y(y-2)(y+2)>0$. Неравенство удовлетворяется при $y>2$ и $-2<y<0$. Для правой части уравнения (2) область допустимых значений неизвестного $y>-2$. Для обеих частей уравнения (2) область допустимых значений неизвестного $y>2$ и $-2<y<0$.

При переходе от уравнения (1) к уравнению (2) область допустимых значений неизвестного расширилась на интервал $(-2,\ 0)$. В этом интервале и содержится посторонний корень $y_3=-1$.

При потенцировании мы переходим к уравнению (3) и снова расширяем область допустимых значений неизвестного, так как никаких оговорок относительно y не делаем, а для уравнения (2) $y>2$ и $-2<y<0$. Второй посторонний корень появился при потенцировании. Итак, посторонние корни появились при переходе от суммы логарифмов к логарифму произведения, т. е. при переходе от уравнения (1) к уравнению (2), и при потенцировании—переходу от уравнения (2) к уравнению (3).

202. Решить уравнение: $\lg(x+\sqrt{3})=-\lg(x-\sqrt{3})$.

203. $\dfrac{\lg 2x}{\lg(4x-15)}=2$.

§ 25. Показательно-логарифмические системы уравнений

Предварительно по учебнику С. И. Новоселова проработайте § 106.

204. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_k x+\log_k y=c, & (1) \\ x^2y+xy^2+xy=d. & (2) \end{cases}$$

Решение. Очевидно, что $x>0$, $y>0$, и $k>0$.

Из уравнения (1) получаем: $\log_k xy=c$, отсюда

$$xy=k^c. \qquad (3)$$

Уравнение (2) можно представить в виде:

$$xy(x+y+1)=d.$$

Подставим вместо xy его значение из уравнения (3), получим:

$$k^c(x+y+1)=d, \text{ откуда}$$

$$x+y=\frac{d}{k^c}-1. \qquad (4)$$

Итак, решение данной нам системы свелось к решению следующей системы:

$$\left.\begin{aligned} xy &= k^c, \\ x+y &= \frac{d}{k^c}-1, \end{aligned}\right\}$$

причем x и y должны быть положительными числами и $k>0$. Тогда $\frac{d}{k^c}-1>0$, отсюда

$$d>k^c. \qquad (5)$$

Тогда x и y должны быть положительными корнями квадратного уравнения:

$$z^2-\left(\frac{d}{k^c}-1\right)z+k^c=0. \qquad (6)$$

Для того чтобы корни уравнения (6) были бы положительными числами, достаточно, чтобы дискриминант этого уравнения был неотрицателен, ибо свободный член $k^c>0$.

$$\Delta=\left(\frac{d}{k^c}-1\right)^2-4k^c=\frac{(d-k^c)^2-4k^{3c}}{k^{2c}}.$$

Так как знаменатель этой дроби положителен, то достаточно, чтобы

$$(d-k^c)^2-4k^{3c}\geqslant 0$$

$$\text{или } (d-k^c)^2\geqslant 4k^{3c}.$$

Но в силу неравенства (5) $d-k^c>0$, поэтому, извлекая квадратный корень из обеих частей последнего неравенства, получим:

$$d-k^c\geqslant 2k^{\frac{3}{2}c}.$$

Отсюда $d\geqslant k^c+2k^{\frac{3}{2}c}$ или

$$d\geqslant k^c\left(1+2k^{\frac{c}{2}}\right). \qquad (7)$$

Заметим, что неравенство (7) сильней неравенства (5), т. е. при его выполнении тем более выполняется неравенство (5).

При выполнении неравенства (7) оба корня уравнения (6) положительны и могут являться решениями исходной системы.

Получаем такие два решения:

$$x_1 = \frac{d - k^c + \sqrt{(d-k^c)^2 - 4k^{3c}}}{2k^c}; \quad y_1 = \frac{d - k^c - \sqrt{(d-k^c)^2 - 4k^{3c}}}{2k^c};$$

$$x_2 = \frac{d - k^c - \sqrt{(d-k^c)^2 - 4k^{3c}}}{2k^c}; \quad y_2 = \frac{d - k^c + \sqrt{(d-k^c)^2 - 4k^{3c}}}{2k^c}.$$

205. Решить систему:

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^a, & (1) \\ y^{x+y} = x^{4a}, & (2) \end{cases}$$

где $a > 0$.

Решение. Из уравнений (1) и (2) видно, что $x > 0$ и из уравнения (1) получим:

$$x = y^{\frac{a}{x+y}}, \qquad (3)$$

а из уравнения (2) получим:

$$x = y^{\frac{x+y}{4a}}. \qquad (4)$$

Отсюда $y^{\frac{a}{x+y}} = y^{\frac{x+y}{4a}}$. Равенство возможно или при $y = 1$, но тогда и $x = 1$. Если же $y \neq 1$, то $\frac{a}{x+y} = \frac{x+y}{4a}$. Отсюда $(x+y)^2 = 4a^2$.

Так как $x > 0$, $y > 0$ и $a > 0$, то из последнего уравнения получим, что

$$x + y = 2a.$$

Отсюда

$$x = 2a - y. \qquad (5)$$

Подставляя полученное выражение x в уравнение (3), получим: $2a - y = y^{\frac{1}{2}}$. Если обозначить $y^{\frac{1}{2}} = z$, то получим квадратное уравнение: $z^2 + z - 2a = 0$. Так как свободный член $-2a < 0$, то это уравнение имеет два действительных корня противоположных знаков. Но так как $z > 0$, ибо $y > 0$, то найдем лишь положительный корень этого уравнения:

$$z = \frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2}, \text{ значит, } y^{\frac{1}{2}} = \frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2},$$

тогда $y = \dfrac{1+4a-\sqrt{1+8a}}{2}$. Из соотношения (5) найдем x.

Получим:

$$x = \frac{\sqrt{1+8a}-1}{2}.$$

Итак, данная система имеет два решения:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ y_1 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} x_2 &= \frac{\sqrt{1+8a}-1}{2}, \\ y_2 &= \frac{1+4a-\sqrt{1+8a}}{2}. \end{aligned}$$

206.

$$\left.\begin{aligned} &4^{0,25x^2-3y-8} = \sqrt{2}, \\ &x - y = 10^{0,(3)+\lg(0,5\sqrt[3]{100})}. \end{aligned}\right\}$$

207.

$$\left.\begin{aligned} (ax)^{\lg a} &= (by)^{\lg b}, \\ b^{\lg(ax)} &= a^{\lg(by)}. \end{aligned}\right\}$$

208.

$$\left.\begin{aligned} &11^{xz} - 2\cdot 5^{y} = 71, \\ &11^{z} + 2\cdot 5^{\frac{y}{2}} = 21, \\ &(11^{x-1})^{z} + 5^{\frac{y}{2}} = 16. \end{aligned}\right\}$$

Глава VI. ТЕОРИЯ СОЕДИНЕНИЙ

§ 26. Соединения без повторяющихся элементов

Предварительно проработайте § 116, 117 и 118 учебника С. И. Новоселова.

209. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр: 1, 2, 3, 4, 9? (Каждая цифра должна входить в каждое число не более одного раза.)

Решение. По условию задачи мы должны получить соединения из пяти элементов по четыре, причем два соединения, состоящие из одних и тех же элементов, но расположенных в различном порядке, будут, очевидно, различными. Такие соединения, как известно, называются размещениями. Поэтому нам надо подсчитать A_5^4;

$$A_5^4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120.$$

210. Сколько различных шестизначных чисел можно написать при помощи цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5? (Цифры в числе не должны повторяться.)

Решение. Из данных 6 элементов (цифр) мы должны составить всевозможные комбинации по шести элементов. Такие соединения называются перестановками. Из шести элементов можно составить $P_6 = 6! = 720$ различных перестановок. Но те перестановки, в которых цифра нуль стоит на первом месте, не будут представлять шестизначного числа, а лишь — пятизначное. Поэтому подсчитаем все перестановки из цифр 1, 2, 3, 4, 5. Очевидно, таких перестановок будет $P_5 = 5! = 120$. И, следовательно, различных шестизначных чисел будет

$$P_6 - P_5 = 720 - 120 = 600.$$

211. В розыгрыше первенства по футболу приняло участие 10 команд. Каждая команда играла с каждой из остальных команд по одному разу. Сколько матчей было сыграно в розыгрыше?

Решение. Всего матчей, очевидно, было сыграно столько, сколько можно составить различных соединений из 10 элементов по два, где каждое соединение отличается от другого хотя бы одним элементом. Такие соединения называются сочетаниями. Поэтому количество матчей равно C_{10}^2:
$$C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45.$$

212. В азбуке для слепых для представления букв употребляются точки числом от 1 до 6, которые помещаются в тех или других из шести мест, указанных на предлагаемой схеме: 

Сколько различных знаков (букв) можно составить в этой азбуке?

Решение. Для составления знаков (букв) можно воспользоваться одной, двумя и т. д., шестью точками. Подсчитаем, сколько букв можно составить, пользуясь одной, двумя, тремя и т. д. и, наконец, шестью точками. Пользуясь одной точкой, очевидно, можно составить 6 знаков, располагая точку в различных местах схемы. Пользуясь двумя точками, можно составить столько знаков, сколько можно составить сочетаний из шести элементов по два и т. д. Следовательно, всего знаков можно составить:
$$C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63.$$

213. Сколько можно составить трехзначных чисел из цифр 2, 3, 4, 5, 0, 8, кратных десяти. (В каждом числе ни одна из цифр не повторяется.)

Решение. Числа, кратные десяти, оканчиваются нулем, следовательно, задачу можно видоизменить так: сколько можно составить трехзначных чисел из цифр 2, 3, 4, 5, 0, 8, оканчивающихся нулем?

Допустим, что мы составили нужные нам числа и зачеркнули у них на конце нуль, тогда мы получим всевозможные двузначные числа, изображенные цифрами 2, 3, 4, 5, 8.

Таких чисел будет $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20.$

Следовательно, столько же будет трехзначных чисел, кратных десяти, изображенных цифрами 0, 2, 3, 4, 5, 8.

214. При розыгрыше первенства по футболу было сыграно 105 партий, причем каждая команда играла с каждой из остальных команд по одному разу. Сколько команд участвовало в розыгрыше?

215. Определить n, если $C_{n+2}^{4} = 11C_n^2$.

216. Сколько треугольников можно получить, соединяя по 3 вершины десятиугольника?

217. Сколько можно составить пятизначных чисел, не делящихся на 5, из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

218. В выпуклом многоугольнике проведены всевозможные диагонали; оказалось, что их всего 14. Определить число сторон многоугольника.

219. Какой многоугольник имеет диагоналей на 12 больше числа его сторон?

220. Число предметов относится к числу размещений из этих предметов по 3, как 1 : 20. Найти число предметов.

§ 27. Соединения с повторениями

Предварительно проработайте по учебнику С. И. Новоселова § 119, 120 и 121.

221. Имеется 8 шаров: 3 красных, 2 белых, 2 синих и 1 черный. Сколькими различными способами можно разложить их в один ряд?

Решение. Здесь имеется 8 элементов (шаров), из которых один шар повторяется трижды и два шара (белый и синий) повторяются дважды. Мы должны получить различные соединения из данных восьми элементов по 8. Такие соединения, как известно, называются перестановками с повторениями.

Очевидно, что нам надо подсчитать $P_{(3+2+2+1)}$.

Имеем:

$$P_{(3+2+2+1)} = \frac{8!}{3!\,2!\,2!\,1!} = 1680.$$

Таким образом, 8 данных шаров можно расположить в ряд 1680 способами.

222. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 2, 3, 7?

223. В магазине имеется 30 различных игрушек (причем каждая игрушка в 10 экземплярах). Сколькими способами можно купить игрушки для детсада?

Решение. В произвольном порядке перенумеруем 30 имеющихся различных игрушек. Если первая (по нашей нумерации) игрушка берется в n_1 экземплярах, вторая в n_2 экземплярах и т. д., тридцатая в n_{30} экземплярах, то указанному выбору, очевидно, соответствует размещение

$$n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{30}$$

из 11 чисел 0, 1, 2, ..., 10, взятых по 30 (среди n_i некоторые могут повторяться).

Поэтому число различных способов, которыми можно купить игрушки, равно числу возможных размещений с повторениями из одиннадцати элементов по 30, т. е. число различных способов равно: $V_{11}^{30} = 11^{30}$.

224. На одной из железнодорожных станций девять пассажиров должны были войти в 3 вагона. Сколькими способами можно провести это размещение?

225. Сколькими способами можно распределить 10 яблок между тремя детьми?

Решение. Пусть первый ребенок получил x яблок, второй ребенок — y яблок и третий — z яблок.

Такое распределение символически можно записать следующим образом:

$$\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{x \text{ раз}}, \quad \underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{y \text{ раз}}, \quad \underbrace{3, 3, \ldots, 3}_{z \text{ раз}}.$$

Здесь $x + y + z = 10$. Если кто-либо из детей не получит яблок, то одна из цифр 1, 2 или 3 не пишется вообще.

Каждое распределение, записанное таким образом, представляет собой, как известно, сочетание с повторениями из трех элементов по 10. Очевидно, что число всевозможных распределений равно числу сочетаний с повторениями из 3-х элементов по 10,

$$\text{т. е. } \Gamma_3^{10} = C_{3+10-1}^{10} = C_{12}^{10};$$

$$C_{12}^{10} = C_{12}^{2} = \frac{12 \quad 11}{1 \cdot 2} = 66.$$

Распределение десяти яблок между тремя детьми можно провести 66 способами.

226. Сколькими различными способами можно набрать n одинаковых или различных пирожных в кондитерской, где имеется m различных сортов пирожных.

Рассмотрите частный случай при $m = 6$ и $n = 11$.

227. Сколько различных девятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9? (Цифры в числе могут повторяться.)

Решение. В задаче, очевидно, идет речь о размещениях с повторениями из 10-ти элементов (цифр) по девяти. Всего таких размещений будет $\overline{V}_{10}^{9}$, но среди этих размещений имеются такие, в которых нуль стоит на первом месте. Всех таких размещений будет $\overline{V}_{10}^{8}$. Следовательно, всех девятизначных чисел будет:

$$\overline{V}_{10}^{9} - \overline{V}_{10}^{8} = 10^9 - 10^8 = 9 \cdot 10^8.$$

228. На железнодорожной сортировочной станции установлено 12 светофоров. Сколько может быть дано различных сигналов, если каждый светофор в любой момент времени показывает один из 3-х сигналов (красный, желтый, зеленый)?

Решение. В любой момент времени светофоры показывают какой-то сигнал. В произвольном порядке занумеруем светофоры и поданный ими сигнал, символически запишем так:

ж к ж з кк зз кк ж к.

Указанному сигналу соответствует размещение с повторениями из 3-х элементов, взятых по 12. Поэтому число различных сигналов будет равно $\overline{V}_3^{12}$.

Имеем: $\overline{V}_3^{12} = 3^{12} = 531\,441.$

Итак, 12 светофоров могут подать 531 441 различный сигнал.

229. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 2, 5, 5, 5, 7?

230. Сколько различных девятизначных чисел можно составить из цифр 2, 3 и 4, но так, чтобы цифра 2 входила не более 2-х раз, цифра 3 — не более 4-х раз?

Глава VII. БИНОМ НЬЮТОНА И ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

§ 28 Бином Ньютона

Предварительно проработайте по учебнику Новоселова С. И. § 123 и 124.

231. Найти произведение биномов:

$$(a-1)(a+2)(a-3)(a+4).$$

Решение. Применим первую теорему § 123 учебника С. И. Новоселова.

Здесь: $P_1 = -1+2-3+4 = 2,$

$$P_2 = (-1)\cdot 2 + (-1)(-3) + (-1)\cdot 4 + \\ + 2(-3)\cdot 2\cdot 4 + 4(-3) = -13,$$

$$P_3 = (-1)\cdot 2\cdot(-3) + (-1)\cdot 2\cdot 4 + (-1)(-3)\cdot 4 + \\ + 2(-2)\cdot 4 = -14,$$

$$P_4 = (-1)\cdot 2\cdot(-3)\cdot 4 = 24.$$

Следовательно,

$$(a-1)(a+2)(a-3)(a+4) = a^4 + 2a^3 - 13a^2 - 14a + 24.$$

232. Найти сокращенным путем произведения биномов:

а) $(x-2)(x-3)(x+4)(x+5)$;

б) $(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha+4)(\alpha+5)$.

233. Доказать, что средний член разложения $(1+x)^{2n}$ равен

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)(2n-1)}{n!}\,2^n x^n.$$

Решение. В этом разложении всего $(2n+1)$ членов. Следовательно, средний член есть $(n+1)$-й.

$$T_{n+1}=C_{2n}^{n}X^{2n-n}=C_{2n}^{n}X^{n}.$$

Но

$$C_{2n}^{n}=\frac{(2n)!}{n!(2n-n)!}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Преобразуем отдельно числитель

$$(2n)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots(2n-1)2n.$$

Представим сомножители так, чтобы вначале стояли все нечетные сомножители, а потом все четные. Тогда

$$(2n)!=1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)\cdot 2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n.$$

Но

$$2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n=2^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots n=2^n n!$$

Значит,

$$(2n)!=1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)2^n n!$$

Итак,

$$C_{2n}^{n}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)2^n n!}{(n!)^2}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)2^n}{n!}.$$

Поэтому окончательно получим:

$$T_{n+1}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{n!}\,2^n x^n.$$

234. Найти 13-й член разложения бинома $\left(9a-\frac{1}{3\sqrt{a}}\right)^{13}$.

235. В разложении $\left(b+\frac{1}{b}\right)^{10}$ найти член, не содержащий b.

236. Найти член разложения бинома $(z^2+1)^{10}$ с наибольшим коэффициентом.

237. При каком значении n коэффициенты 2-го, 3-го и 4-го членов разложения $(x+a)^n$ составляют арифметическую прогрессию?

238. Разность между коэффициентом 3-го и коэффициентом 2-го членов разложения бинома $\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{3}{5}}\right)^n$ равна 90. Найти член, содержащий $x^{9,6}$.

§ 29. Полиномиальная теорема и сумма степеней натуральных чисел

Предварительно проработайте по учебнику С. И. Новоселова § 123, 125.

239. Найти коэффициент при x^4 в разложении

$$(1+x+x^2)^3.$$

Решение. Запишем полиномиальную теорему в общем виде:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n=\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k=n}\frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_k!}x_1^{\alpha_1}\,x_2^{\alpha_2}\ldots x_k^{\alpha_k}.$$

В нашем случае будем иметь:

$$(1+x+x^2)^3=\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3}\frac{3!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!}1^{\alpha_1}\cdot x^{\alpha_2}\cdot x^{2\alpha_3}=$$

$$=\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3}\frac{3!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!}x^{\alpha_2+2\alpha_3}.$$

Так как мы ищем члены, содержащие x^4, то

$$\alpha_2+2\alpha_3=4, \qquad (1)$$

где $0\leqslant\alpha_2\leqslant3$ и $0\leqslant\alpha_3\leqslant3$. Очевидно, что равенство (1) возможно лишь при следующих целых значениях α_2 и α_3:

1) $\alpha_2=2$, $\alpha_3=1$, тогда $\alpha_1=0$, ибо $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3$ и 2) $\alpha_2=0$, $\alpha_3=2$, тогда $\alpha_1=1$.

Найдем соответствующие этим значениям α_1, α_2 и α_3 члены разложения:

$$A_1=\frac{3!}{0!\,2!\,1!}1^0x^2x^2=3x^4,$$

$$A_2=\frac{3!}{1!\,0!\,2!}1^1x^0x^4=3x^4,$$

$$A_1+A_2=6x^4.$$

Следовательно, коэффициент при x^4 в разложении $(1+x+x^2)^3$ равен 6.

240. Найти коэффициент при abc^3 в разложении $(a+b+c)^5$.

241. Найти коэффициент при x^5 в разложении $(1+2x+x^2)^4$.

Решение. $(1+2x+x^2)^4=\sum\limits_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=4}\frac{4!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!}1^{\alpha_1}(2x)^{\alpha_2}(x^2)^{\alpha_3}.$

Нам надо найти коэффициенты членов, в которых $\alpha_2 + 2\alpha_3 = 5$. В то же время $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 4$. Оба эти условия выполняются лишь при следующих целых значениях α_1, α_2 и α_3:

$$1)\ \alpha_1 = 0;\ \alpha_2 = 3;\ \alpha_3 = 1 \quad \text{и}$$

$$2)\ \alpha_1 = 1;\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = 2.$$

Найдем соответствующие этим значениям α_1, α_2 и α_3 члены разложения:

$$A_1 = \frac{4!}{0!\,3!\,1!}\,1^0(2x)^3\cdot(x^2)^1 = 4\cdot 8x^3\cdot x^2 = 32x^5,$$

$$A_2 = \frac{4!}{1!\,1!\,2!}\,1\,(2x)(x^2)^2 = 12\cdot 2x\cdot x^4 = 24x^5,$$

$$A_1 + A_2 = 24x^5 + 32x^5 = 56x^5.$$

Следовательно, коэффициент при x^5 разложения

$$(1 + 2x + x^2)^4$$

будет равен 56.

242. Найти коэффициенты при a^2b^2, bcd^2, $abcd$ в разложении

$$(1 + a + b + c + d)^5.$$

243. Определить рациональные члены разложения

$$(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[5]{5})^{10}.$$

Решение. В нашем примере $n = 10$; чтобы член разложения был рациональным, очевидно, надо взять $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$ и $\alpha_3 = 5$. При других комбинациях α_1, α_2 и α_3 члены разложения будут содержать радикалы. Найдем этот член:

$$A = \frac{10!}{2!\,3!\,5!}(\sqrt{2})^2(\sqrt[3]{3})^3(\sqrt[5]{5})^5 =$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot 2\cdot 3\cdot 5 = 75\,600.$$

244. В разложении $(x^2 + y^2 + z^2)^8$ определить коэффициенты членов, степени которых равны 20.

245. В разложении $(x^2 + y^3 + z^4)^8$ определить член, коэффициент которого будет наименьшим, если сумма показателей этого члена равна 22.

246. В разложении $(x + y + z)^n$ найти сумму всех коэффициентов и число членов разложения.

247. Определить сумму n членов ряда:

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Решение. Общий член ряда имеет вид:

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2},$$

его можно представить в виде:

$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}.$$

Тогда искомая сумма

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2} = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k\right].$$

Но $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, а $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Значит,

$$S = \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{12} =$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

248. Вычислить сумму:

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3.$$

Решение. $1 + 3^3 + 5^3 + (2n-1)^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots$
$\ldots + (2n)^3 - [2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + (2n)^3] = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots$
$\ldots + (2n)^3 - 8(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) = \frac{(2n)^2(2n+1)^2}{4} -$
$$- 8\,\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(см. формулу на стр. 519 учебника С. И. Новоселова). После несложных преобразований получим:

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1).$$

249. Вычислить суммы:

а) $2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2$;

б) $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n+1)^2$;

в) $2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + (2n)^3$;

г) $1^4 + 3^4 + \ldots + (2n+1)^4$.

ОТВЕТЫ

1. а) x, y — аргумент, a и b — параметры; б) π — постоянное число, r — аргумент; в) A, B и C — параметры, x и y — аргументы; г) v_0 и g — параметры, t — аргумент. 2. д), е), к), л), м) — трансцендентные, в), з), и), н) — алгебраические рациональные, ж) — алгебраические иррациональные. 3. б), г), ж), з), к) — целые д), е), и) — дробные. 4. а), б), в), к) д), з), и) — многочлены, г), е) и ж) — не являются многочленами: е) — трансцендентное выражение, а г) и ж) — дробные. 5. а), б), в) г), д), ж), м) — многочлены, а остальные не являются многочленами (е), з), и), л) — дробные выражения, а к) — трансцендентное выражение. Одночлен мы рассматриваем как частный случай многочлена. 7. а) все множество действительных чисел; б) $x \neq 7$; в) $x \neq 1$ и $x \neq \pm 2$; д) $x < 5$; ж) $m \neq 0$, $m \neq 1$; и) $x \neq 2$ и $x \neq 4$, к) $-1 < x < 1$; л) $x \neq \frac{3}{2}$; м) x — любое действительное число; н) выражение не имеет смысла ни при каком x; п) $x < 0$ и $x \geqslant 3$. 8. а) 6; б) Если a и b рассматривать как параметры, то степень одночлена равна $k+2$, если же a и b рассматривать как аргументы, то степень равна $n+k+3$; в) 12; г) 8; д) 4. 9. а) и г) — однородные многочлены. б) и в) — нет. 10. а) $ax + by + cz + du$ — однородный многочлен первой степени с четырьмя аргументами; б) $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$ — однородный многочлен второй степени с тремя аргументами; б) $ax^3 + bx^2y + cx^2z + dxy^2 + exz^2 + fxyz + ky^2z + ly^3 + myz^2 + nz^3$ — однородный многочлен третьей степени с тремя аргументами. 12. а) Канонический вид; б) $x^5 + 2a^2x^3 - 3ax^3 + 1{,}5a^2x^3 - a^3x + a + 5$; в) $12m^6n^5x^{k+3}y^n$; г) $-a^3b + 8a^2bcd^2$; д) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$; е) $x^2 + 8x + 9$; ж) $a^3b + 3a^3c + 4a^2b - 2a^2c - 5abc - a + 2b - 4$; з) $-12a^5a^2 + 3a^4b^3c + 18a^4b^2c^3 + 24a^4b^2c - 18a^3b^2 - 2a^3bc^2 - 15a^2bc^5 - 20a^2bc^3 + ab^2c^2 + 10ac^4 - 6bc$. 13. $A = 6$, $B = 5{,}5$, $C = 3$. 14. а) $a = 0$, $b = 3$, $c = -1$; б) $a = \frac{1}{3}$; $b = 7$; $c = \frac{2}{3}$; г) $a = 2$, $b = -12$,

$c = 5$, $d = -\frac{4}{7}$. **16.** $A = 1$, $B = \pm 3$, $C = \pm 5$, $D = \mp 1$. **17.** $A = 17$, $B = -24$, $C = -3$, $D = 4$ или $A = 1$, $B = 24$, $C = -3$, $D = -4$. 25. а) $4abc$, б) $b^2 (a + 3b)^2$. **26.** 1), 3), 4), 5), 6), 7, 10), 12), 13), 14), 15), 16) — неприводимы над полем рациональных чисел; 1), 3), 5), 6), 7), 12), 14) — неприводимы над полем действительных чисел; 1), 14) — неприводимы над полем комплексных чисел. **29.** а) $(a-1)^2 (a+1)^3 (a^2+a+1)(a^2-a+1)^2$; б) $3(3m^3 - n^2p^3)^2$; в) $(a-c)(a+b)(c+b)$; г) $(x-3)(x-4)(x-5)$; д) $x(x+1)(x+3)(x+5)$; е) $(x-1)^3(2x+5)$; ж) $x(2x-y+5z)(4x^m-y)$; з) $(2x^2+1)(2x^2+5)$; и) $m^2(n+0{,}04m)(25n+2m)$. **30.** а) $(x+2)(x+3)$; б) $(x-3)(x-4)$; в) $(x+3)(x-2)$; г) $(x-2)(x+2)(x^2-8)$; д) $(x^2+8)(x-2)(x+2)$; е) $(x-2y)(x-3y)$; ж) $(x+10y)(x-2y)$. **32.** 2, если $a > 0$ и -2, если $a < 0$. **33.** $\frac{1}{\sqrt{a}}$, если $a > b$ и $-\frac{1}{\sqrt{a}}$, если $a < b$, $a > 0$ в обоих случаях. **34.** $(4 + a)\sqrt{a}$ при $0 \leqslant a \leqslant 4$ и $(3a-4)\sqrt{a}$ при $a > 4$. **35.** $(1-x)\sqrt{-x}$, если $x < 0$, $(1-x)\sqrt{x}$, если $0 \leqslant x \leqslant 4$ и $(x-7)\sqrt{x}$, если $x > 4$. **36.** $\frac{a}{b}$ при $|a| > |b|$ и $\frac{b}{a}$ при $|a| < |b|$. **40.** $\frac{2-\sqrt[3]{4}}{2}$. **41.** $\sqrt[3]{121} + \sqrt[3]{55} + \sqrt[3]{25}$. **43.** $3 + 2\sqrt{2}$. **45.** $x^{\frac{53}{48}} a^{\frac{1}{12}}$. **46.** $\left|\frac{2}{9}bx^{-\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{4}}\right|$. **48.** а) x — любое; б) $x > -3$ и $x \neq -2$; в) $9 \leqslant x \leqslant 18$; г) x — любое; д) $x \neq \pm 1$; е) x — любое; ж) $x < 1$ и $x \neq 0$; з) область допустимых значений — пустое множество. **50.** Равносильны. **51.** Неравносильны. Второе уравнение есть следствие первого. **52.** а) да; б) нет; в) нет; г) да; д) нет; е) нет. **53.** В поле действительных чисел равносильны, а в поле комплексных чисел нет. **55.** а) $(x+4)^2 - 51$. **57.** б) 3 и $\frac{1}{4}$; г) $x_{1,2} = \frac{a^2 + 1 \pm \sqrt{(a^2-1)^2 - 4a^3}}{2a}$. **59.** а) плюс; б) минус. **60.** Так как $x_1 = 7$, то $x^2 - 4x = 21$. Тогда $x_2 = -3$. **62.** $x_1 - x_2 = \sqrt{17}$; $x_1^3 + x_2^3 = 45$. **63.** $\frac{m+n}{m-n}$. **64.** д) $x_1 = -\frac{1}{4}$; $x_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{8}$; е) $x_1 = \sqrt[6]{2}$; $x_{2,3} = \frac{\sqrt[6]{2}}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$. **65.** а) $x_1 = 5$; $x_{2,3} = \frac{1 \pm 3i\sqrt{3}}{2}$; б) $x_1 = 2$; $x_{2,3} = 0{,}5(1 \pm i\sqrt{3})$; в) $x_1 = 0$, $x_{2,3} = -3 \pm i\sqrt{3}$. **67.** $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$. **68.** а) $x_1 = 0$; $x_2 = 5$; $x_{3,4} = 3 \pm i\sqrt{3}$; $x_{5,6} = \frac{1 \pm 3i\sqrt{3}}{2}$. **69.** Нет, так как если бы это уравнение было возвратным, то, имея корень 3, оно обязательно должно было иметь и корень $\frac{1}{3}$. **70.** а) Уравнение 4-й степени, корни его: -5, $-\frac{1}{5}$, 2 и $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) уравнение 5-й степени, корни его: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\sqrt{3} -$

$-\sqrt{2}-1$, $2i$ и $-\frac{i}{2}$; в) уравнение 5-й степени, корни его: $\frac{1}{3}$, 3, -5, $-\frac{1}{5}$, 1.

71. б) $\frac{5+\sqrt{101}\pm\sqrt{110+10\sqrt{101}}}{4}$ и $\frac{5-\sqrt{101}\pm\sqrt{110-10\sqrt{101}}}{4}$; в) $x_{1,2}=\pm i$; $x_{3,4}=1$; г) -3; 2; $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; д) $x_{1-4}=\frac{\pm 5\pm 1}{2}$; $x_{5-8}=\frac{\pm\sqrt{10}\pm\sqrt{6}}{4}$;

72. б) $x_1=-1$, $x_{2,3}=2\pm\sqrt{3}$; в) -1; $\frac{1}{3}$ и 3; г) -1, $\frac{-1+\sqrt{101}\pm\sqrt{38-2\sqrt{101}}}{8}$ и $\frac{-1-\sqrt{101}\pm\sqrt{38+2\sqrt{101}}}{8}$.

74. а) $\sqrt[3]{2}$; $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\sqrt[3]{2}(-1\pm i\sqrt{3})}{2}$; б) -2; 1 и $\frac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}$; в) $x_1=x_2=-\frac{1}{2}$; $x_3=\frac{1}{3}$, $x_4=1$; г) $x_{1,2}=\pm 2$, $x_3=1{,}5$.

76. а) $x_1=x_2=-2$ и $x_{3,4}=-3\pm\sqrt{5}$; б) $-\frac{5}{4}$; $-\frac{5}{3}$; 2,5 и 5; в) -3; 2 и $\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$; г) $1\frac{21}{31}$ и 7. 78. а) $\frac{7}{8}$; б) $-\frac{1}{2}$,

80. $\frac{-2\pm\sqrt{34\pm 2\sqrt{433}}}{2}$. 82. $x_{1,2}=\pm(1-1{,}5\sqrt{2})$; $x_{3,4}=\frac{-2\pm 3\sqrt{2}}{14}$. 84. г) Так как левая часть уравнения при любом допустимом значении x отрицательна; д) так как левая часть уравнения при любом значении, т. е. при $x\geqslant 1$, всегда больше 2. 87. $x=-2\frac{3}{4}$. 88. $x_1=6$; $x_2=2\frac{1}{3}$. 90. x — любое действительное число сегмента [1,5; 3]. 92. Не имеет решений. 94. в) Нет решений. 96. а) $x\approx -1{,}8$; б) $x_1\approx 1$; $x_2\approx 1{,}6$, $x_3\approx -0{,}6$; в) $x\approx -2{,}4$; г) $x_1=1$, $x_2\approx 2{,}4$. 100. а) 2 и $2a$; б) при $a=0$; $x=-\frac{1}{2}$; при $a=-2$, $x=\frac{3}{2}$; при $a\neq 0$ и $a\neq -2$ $x_1=\frac{a-1}{a}$, $x_2=-\frac{a+1}{a+2}$.

102. а) при $a=\pm b$ нет решений; при $a^2\neq b^2$ $x_1=\frac{a+b}{a-b}$ и $x_2=\frac{a-b}{a+b}$; б) при $a\neq 0$; $x_1=-a$; $x_2=5a$; $x_{3,4}=\frac{2a(7\pm\sqrt{7})}{7}$.

104. Если $a>0$, то $x\approx 1{,}18a$. Если $a<0$, то $x\approx 2{,}82a$. 105. $x_1=a^2-b^2$; $x_2=0$. 108. 17 *кг* меди и 7 *кг* цинка. 109. 781.

110. Пассажирский поезд пройдет путь за 9 час. 16 мин., а товарный — за 23 часа 10 мин. **111.** Одна первая труба наполнит бассейн за 10 час.; вторая — за 15 час. **113.** $\frac{\pm mn + \sqrt{m^2n^2 + 4amn}}{2n}\ \frac{км}{час}$; **114.** $\frac{d(t \mp 2 \pm \sqrt{t^2+4})}{2t}\ \frac{км}{час}$. **115.** Системы не равносильны. Вторая является следствием первой. **116.** Не равносильна.

118. а) $\left.\begin{aligned} x_{1,2} &= \pm\frac{3}{4} \\ y_{1,2} &= \pm\frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} x_{3,4} &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y_{3,4} &= \mp\frac{3\sqrt{2}}{8} \end{aligned}\right\}$. б) $\left.\begin{aligned} x_{1,2} &= \pm 3 \\ y_{1,2} &= \pm 2 \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} x_{3,4} &= \pm 2 \\ y_{3,4} &= \pm 3 \end{aligned}\right\}$ в) $\left.\begin{aligned} x_{1,2} &= \pm 3 \\ y_{1,2} &= \pm 1 \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} x_{3,4} &= +\frac{18}{\sqrt{2531}}\,i \\ y_{3,4} &= \pm\frac{145}{\sqrt{2531}}\,i \end{aligned}\right\}$ **119.** $\left.\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ y_1 &= 4 \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} x_2 &= -3 \\ y_2 &= -4 \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} x_3 &= 4 \\ y_3 &= 3 \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} x_4 &= -4 \\ y_4 &= -3 \end{aligned}\right\}$ **121.** а) $\left.\begin{aligned} x_1 &= 5 + 2\sqrt{7} \\ y_1 &= -5 + 2\sqrt{7} \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} x_2 &= 5 - 2\sqrt{7} \\ y_2 &= -5 - 2\sqrt{7} \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} x_3 &= 5 \\ y_3 &= 2 \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} x_4 &= -2 \\ y_4 &= -5 \end{aligned}\right\}$ б) $\left.\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{25 \pm 5i\sqrt{7}}{16} \\ y_{1,2} &= \frac{-23 \pm 11i\sqrt{7}}{16} \end{aligned}\right\}$

в) $\left.\begin{aligned} x_1 &= 4{,}5 \\ y_1 &= 1 \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} x_2 &= 3 \\ y_2 &= 2 \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} x_3 &= 0{,}5 \\ y_3 &= \frac{1}{3} \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} x_4 &= 2 \\ y_4 &= -\frac{2}{3} \end{aligned}\right\}$ г) $\left.\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ y_1 &= 8 \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} x_2 &= 8 \\ y_2 &= 2 \end{aligned}\right\}$

д) $\left.\begin{aligned} x_1 &= -3{,}2 \\ y_1 &= -0{,}6 \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} x_2 &= 2{,}4 \\ y_2 &= 3{,}2 \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} x_3 &= -2{,}6 \\ y_3 &= -1{,}8 \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} x_4 &= 2{,}8 \\ y_4 &= 2{,}4 \end{aligned}\right\}$

123. 1) Если $a = 0$, то система имеет бесчисленное множество решений $x = y$. 2) Если $a \neq 0$, то $\left.\begin{aligned} x_1 &= 2a \\ y_1 &= 4a \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{2a}{3} \\ y_2 &= -\frac{4a}{3} \end{aligned}\right\}$ **125.** $8\ \frac{км}{час}$ и $6\ \frac{км}{час}$. **126.** 67 или 76. **128.** $\frac{\sqrt{c^2 + 2hc} \pm \sqrt{c^2 - 2hc}}{2}$, причем $c > 2h$. **129.** $\frac{1}{2}\left[\sqrt{(a+b)^2 + \frac{4(a+b)d}{t}} \pm (a+b)\right]$.

139. У к а з а н и е. В левой части неравенства сгруппировать сомножители попарно, равноудаленные от концов, и к каждому из полученных произведений применить неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел. При этом

придется рассмотреть два случая, когда n — четно и n — нечетно. 140. Указание. Использовать неравенства: $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$; $b+c \geqslant 2\sqrt{bc}$; $a+c \geqslant 2\sqrt{ac}$. 149. $-4{,}25$. 150. $9\frac{1}{12}$. 152. 0,5. 154. 4. 156. а) При $n=-1$ и $m<-2$ x — любое; при $n=-1$ и $m \geqslant -2$ решений нет; при $n>-1$ $x>\frac{m+2}{n+1}$; при $n<-1$ $x<\frac{m+2}{n+1}$; б) если: 1) $|a|>1$, то $x>\frac{3a}{a^2-1}$; 2) $|a|<1$, то $x<\frac{3a}{a^2-1}$; 3) $a=1$, решений нет; 4) $a=-1$, x — любое число; в) при $m=-3$ неравенство решений не имеет, при $m>-3$, $x>\frac{3(1-m)}{m+3}$; при $m<-3$ $x<\frac{3(1-m)}{m+3}$. 158. Решений нет. 159. а) $5<x<8$; б) $0<x<5$. 161. а) Если: 1) $-10<a<2$, то $x>\frac{5(a-2)}{2(a+10)}$; 2) $a<-10$, то $x<\frac{5(a-2)}{2(a+10)}$; 3) $a=-10$, то x — любое; 4) $a>2$, $x<\frac{5(a-2)}{2(a+10)}$; б) при $0<m<1$ $x>\frac{0{,}8}{8-m}$; при $1<m \leqslant 8$ и $m \leqslant 0$ решений нет; при $m>8$ $x<\frac{0{,}8}{8-m}$. 163. а) x — любое; б) $x>\frac{28+\sqrt{759}}{5}$ и $x<\frac{28-\sqrt{759}}{5}$. 165. а) Если: 1) $a>0$, то $3a<x<5a$; 2) $a<0$, то $5a<x<3a$; 3) $a=0$, то решений нет. б) При $an>0$ $\frac{n-a}{n}<x<\frac{n+a}{n}$; при $an<0$ $\frac{n+a}{n}<x<\frac{n-a}{n}$. При $a=0$ решений нет. При $n=0$ и $a \neq 0$ x — любое. 166. $4-\sqrt{6}<a<4+\sqrt{6}$. 167. а) $2<a<4$. в) $a>\frac{5+\sqrt{13}}{4}$. 168. При $m>0$ и при $m \leqslant -\frac{24}{5}$. 169. $1<a \leqslant 1{,}5$ и $a<-3$. 180. Решением системы служат координаты внутренних точек квадрата $ABCD$ с вершинами: $A(-1;\ 0)$; $B(1;\ 1)$; $C(1;\ 0)$; $D(0;\ -1)$. 185. 9. 187. а) $\frac{81}{4}$; б) $\sqrt[p]{a}$; в) -3; г) 6; д) 64; е) 8; ж) $\frac{5}{2}$ з) Указание. $\lg \operatorname{tg} 45° = \lg 1 = 0$. 190. 0,048. 192. $x=4$. 194. $x=1{,}5$. 195. $x=-2$. 197. а) $x \approx 0{,}3$; б) $x_1 \approx -0{,}8$, $x_2 \approx 2$ $x_3 \approx 4$; в) $x \approx 0{,}6$; г) $x \approx 0{,}5$. 199. $x=0$, если $a(b-1) \neq b$. Если $a=\frac{b}{b-1}$, то x — любое. 200. $x_1=7$; $x_2=3$. 202. $x=2$. 203. $x=4{,}5$. 206. $(9;\ 4)$; $(3;\ -2)$. 207. $x=10^{-\lg a}$; $x=10^{-\lg b}$. 208. $x=2$; $y=2$;

$z=1$. **214.** 15. **215.** $n=10$. **216.** 120. **217.** 96. **218.** Указание. Число диагоналей n-угольника равно $\frac{n(n-3)}{2}$. **219.** Восьмиугольник. **220.** 6. **222.** 60. Указание. Предполагается, что в каждое из этих чисел входят цифры 1, 2, 3, 7, причем цифра 2 — дважды. **224.** $V_3^9=3^9$. **226.** Γ_n^m; $\Gamma_{11}^6=8008$. **229.** 20. **230.** $P_{(2+3+4)}=1260$. **234.** 18 564. **235.** $T_6=252$. **236.** $T_6=252z^{10}$. **237.** $n=7$. **238.** $5005x^{9,6}$. **240.** 20. **242.** 30, 60, 120. **244.** 210; 280; 420. **245.** $28x^4y^{18}$. **246.** 3^n; $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. **249.** а) $\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$;

б) $\frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$; в) $2n^2(n+1)^2$;

г) $\frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)(12n^2+24n+5)}{15}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава V. Показательные и логарифмические уравнения в действительной области

Глава VI. Теория соединений

Глава VII. Бином Ньютона и полиномиальная теорема

Лев Моисеевич Фридман
Анна Алексеевна Виноградова
Ираида Спиридоновна Есипова
Иван Степанович Панин

ЗАДАЧНИК ПРАКТИКУМ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ АЛГЕБРЕ

Редактор *В. Г. Долгополов*
Технический редактор *В. Л. Коваленко*
Корректор *Н. И. Котельникова*

Сдано в набор 4/XI 1961 г. Подписано к печати 3/II 1962. $84 \times 108^1/_{32}$. Печ. л. 7,25 (5,95) Уч.-изд. л. 4,84. Тираж 30 тыс. экз.

Учпедгиз. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.
Полиграфкомбинат Саратовского совнархоза, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.
Заказ № 3115. Цена 15 коп.