МГЗПИ

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

(с элементами аналитической геометрии)

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЗАОЧНЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

(с элементами аналитической геометрии)

для студентов-заочников I курса
физико-математических факультетов
педагогических институтов

Под редакцией
В. К. Егерева

МОСКВА ПРОСВЕЩЕНИЕ 1981

Рекомендовано к печати Главным управлением высших и средних педагогических учебных заведений Министерства просвещения РСФСР

Авторы: В. К. Егерев, Г. А. Несененко,
В. А. Козлова, З. Т. Диканова, О. С. Корсакова.

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук, профессор Баврин И. И., кандидат пед. наук, старший методист-инспектор Министерства просвещения СССР Гусев В. А.

Редактор МГЗПИ Павлович О. А.

З $\frac{60602-492}{103(03)-81}$ заказное 4309020400

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый задачник-практикум предназначен для использования на практических занятиях по курсу математического анализа в системе заочных отделений педагогических институтов.

Небольшое количество часов, отводимых по плану на проведение этих занятий, заставляет искать более эффективные формы преподавания. В связи с этим нами сделана попытка разработать новую форму задачника. Отличие этого пособия от других, ему аналогичных, изданных ранее, в том, что оно содержит элементы программированного обучения и предназначено прежде всего для использования на практических занятиях.

Несколько слов о структуре задачника. Он содержит 23 параграфа по основным темам курса математического анализа (с элементами аналитической геометрии). В начале каждого параграфа даются основные сведения из теории, причем теоретический материал предлагается в виде заданий. Студент должен устно или путем записи необходимых ответов в тетради восстановить обозначенные многоточием пропуски в формулировках теоретических утверждений. Это позволяет сравнительно быстро повторить основные определения и теоремы по теме. Далее предлагаются примеры и упражнения, рассчитанные на выработку необходимых умений и навыков, и наконец, упражнения, решение которых предполагается в межсессионный период. К упражнениям для самостоятельного решения даются ответы.

Как показал опыт работы кафедр математического анализа МГЗПИ и ЛГПИ им. А. И. Герцена, предлагаемая форма задачника позволяет более эффективно проводить занятия, что способствует повышению качества подготовки специалистов.

Пособие может быть использовано как студентами-заочниками физико-математических факультетов (специальности № 2104 и № 2105), так и студентами-заочниками биолого-химических факультетов.

Авторы будут благодарны читателям за критические замечания и советы, которые просим присылать по адресу: «109004, Москва, В. Радищевская, 18, МГЗПИ, Редакционно-издательский отдел».

Авторы

§ 1. МЕТОД КООРДИНАТ. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

I. Основные сведения из теории

1^0. Закончите утверждения:

1. Если на плоскости даны две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, то расстояние d между ними определяется формулой $d = \ldots$.

2. Если точка $M(x; y)$ лежит на прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, а отношение, в котором точка M делит отрезок M_1M_2, определяется равенством $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$, то координаты точки M определяются по формулам

$$x = \ldots, \quad y = \ldots .$$

3. Если точка M — середина отрезка M_1M_2, то ее координатами являются числа

$$x = \ldots, \quad y = \ldots .$$

4. Площадь треугольника ABC, где $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и $C(x_3; y_3)$, определяется формулой $S = \ldots$, причем знак $+$ соответствует обходу точек A, B и C ... часовой стрелк..., а знак — соответствует обходу точек ... часовой стрелк... .

2^0. Напишите уравнение прямой:

1) с угловым коэффициентом;
2) проходящей через точку $A(x_0; y_0)$ и имеющей угловой коэффициент k;
3) проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$,
4) отсекающей на осях координат отрезки a и b;
5) общее;
6) нормальное.

3^0. В соответствии с правилом поэтапного приведения общего уравнения прямой к нормальному виду:

1) напишите общее уравнение прямой;
2) составьте нормирующий множитель;
3) выберите знак нормирующего множителя;
4) напишите нормальное уравнение прямой.

4^0. Напишите формулу для вычисления отклонения δ точки $M^*(x^*; y^*)$ от прямой $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$.

5^0. Вставьте знаки неравенства в утверждения:

1. Если данная точка $M^*(x^*; y^*)$ и начало координат лежат по разные стороны от данной прямой, то отклонение δ ... 0.

2. Если данная точка $M^*(x^*; y^*)$ и начало координат расположены по одну сторону от данной прямой, то δ ... 0.

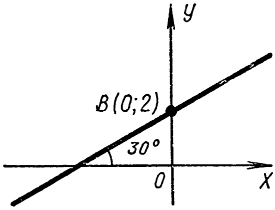


Рис. 1

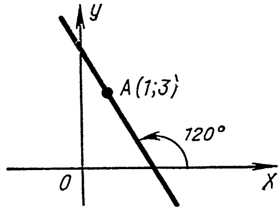


Рис. 2

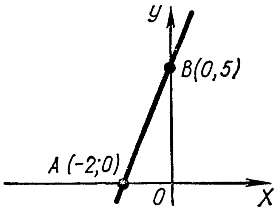


Рис. 3

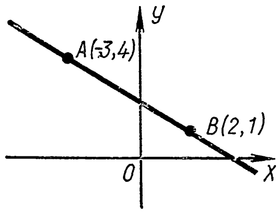


Рис. 4

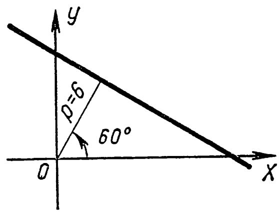


Рис. 5

6⁰. Закончите утверждение:

Чтобы найти расстояние d от точки до прямой, достаточно вычислить отклонение δ и взять ... .

II. Примеры и упражнения

1. Напишите уравнения прямых, изображенных на рисунках 1—5.

2. Постройте прямые, заданные следующими уравнениями:

а) $y = 2x + 3$; б) $y - 2 = 3(x + 1)$;

в) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$; г) $\frac{x+1}{3+1} = \frac{y-2}{1-2}$;

д) $x \cos 45° + y \sin 45° - 2 = 0$.

3. Для треугольника ABC, заданного координатами своих вершин $A(-4;\ 0)$, $B(4;\ 6)$, $C(-1;\ -4)$:

1) составьте уравнение высоты, проведенной из вершины A;
2) найдите длину этой высоты;
3) вычислите длину медианы AD, проведенной к стороне BC;
4) определите координаты центра тяжести треугольника;
5) найдите тангенс внутреннего угла C.

Решение.

1. а) Уравнение прямой BC: ...;
   б) угловой коэффициент (BC): ...;
   в) условие перпендикулярности двух прямых: ...;
   г) угловой коэффициент искомой высоты: ... ;
   д) уравнение высоты: ... .
2. а) Нормальное уравнение прямой: ...;
   б) отклонение δ точки A от прямой BC: ...;
   в) расстояние d точки A от прямой BC: ...;

г) отрицательный знак ... указывает на то, что точка A ... .

3. а) Координаты точки D: ...;

б) $|AD| =$ ... .

4. а) Отношение, в котором центр тяжести треугольника — точка P делит каждую медиану, начиная от вершины: ...;

б) координаты точки P: ... .

5. а) Внутренний угол C — это угол между прямыми ... и ..., определяемый вращением прямой ... ... часовой стрелк...;

б) выберем одно из соотношений:

$$\operatorname{tg}\widehat{C} = \frac{k_{BC} - k_{AC}}{1 + k_{BC} \cdot k_{AC}} \text{ или } \operatorname{tg}\widehat{C} = \frac{k_{AC} - k_{BC}}{1 + k_{AC} \cdot k_{BC}};$$

в) уравнение прямой AC: ...;

г) угловой коэффициент (AC): ...;

д) угловой коэффициент (BC): ...;

е) тангенс внутреннего угла C: ... .

4. Для прямых, заданных уравнениями $4x + 3y - 18 = 0$ и $7x + 24y + 156 = 0$:

1) составьте уравнения биссектрис углов, образованных этими прямыми;

2) докажите, что биссектрисы перпендикулярны друг другу.

Решение.

1. а) Нормальные уравнения прямых $4x + 3y - 18 = 0$ и $7x + 24y + 156 = 0$: ... и ...;

б) искомые биссектрисы являются множеством точек, равноудаленных от: ...;

в) уравнения биссектрис: ... .

2. а) Угловые коэффициенты биссектрис: ...;

б) произведение угловых коэффициентов биссектрис: ... .

5. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $8x - 3y - 1 = 0$ и $4x + y - 13 = 0$ и через точку A (—1; 2).

Решение.

1. Уравнение пучка (совокупности) прямых, проходящих через точку пересечения двух данных прямых: $(...) + q\,(...) = 0$.

2. Для того чтобы прямая пучка проходила через точку A (—1; 2), необходимо, чтобы координаты этой точки удовлетворяли уравнению прямой пучка: ... .

3. Значение параметра q: ... .

4. Уравнение искомой прямой: ... .

III. Упражнения для самостоятельного решения

1. На прямую, проходящую через точки A (1; —2) и B (0; —7), опущен перпендикуляр из точки D (—3; 4). Вычислите отношение, в котором основание этого перпендикуляра делит отрезок AB.

2. Составьте уравнения сторон квадрата, одна из вершин которого A (2; —4), а точка пересечения диагоналей M (5; 2).

3. Определите угол φ между прямыми:
а) $5x - y + 7 = 0$ и $3x + 2y = 0$;
б) $3x - 2y + 7 = 0$ и $2x + 3y - 3 = 0$;
в) $x - 2y - 4 = 0$ и $2x - 4y + 3 = 0$;
г) $3x + 2y - 1 = 0$ и $2x - 4y + 3 = 0$.

4. Луч света направлен по прямой $x - 2y + 5 = 0$. Дойдя до прямой $3x - 2y + 7 = 0$, луч отразился от нее. Составьте уравнение прямой, которой принадлежит отраженный луч.

5. Установите, какие из следующих пар прямых перпендикулярны, а какие параллельны:
а) $3x - y + 5 = 0$ и $x + 3y - 1 = 0$; б) $3x + 4y + 1 = 0$ и $4x - 3y + 8 = 0$;
в) $6x - 15y + 3 = 0$ и $10x + 4y - 2 = 0$; г) $9x - 12y + 1 = 0$ и $8x + 6y - 13 = 0$;
д) $6x - 2y + 1 = 0$ и $3x - y + 7 = 0$; е) $3x - 4y + 7 = 0$ и $6x - 8y + 1 = 0$.

6. Определите, при каких значениях m и n две прямые $mx + 8y + n = 0$ и $2x + my - 1 = 0$: а) параллельны; б) совпадают; в) перпендикулярны.

7. Определите, при каком значении m две прямые $mx + (2m + 3)y + m + 6 = 0$ и $(2m + 1)x + (m - 1)y + m - 2 = 0$ пересекаются в точке, лежащей на оси ординат.

8. Определите, при каком значении a три прямые $2x - y + 3 = 0$, $x + y + 3 = 0$, $ax + y - 13 = 0$ будут пересекаться в одной точке.

9. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $P(8; 6)$ и отсекающей от координатного угла треугольник, площадь которого равна 12.

10. Площадь треугольника равна 8. Двумя его вершинами являются точки $A(1; -2)$ и $B(2; 3)$, а третья вершина C лежит на прямой $2x + y - 2 = 0$. Определите координаты вершины C.

11. Найдите длину перпендикуляра, опущенного из точки $P(4; -1)$ на прямую $12x - 5y - 27 = 0$.

12. Напишите уравнение биссектрис углов, образованных прямыми $x + 7y - 6 = 0$ и $5x - 5y + 1 = 0$.

13. Дано уравнение пучка прямых $(5x + 3y + 6) + q(3x - 4y - 37) = 0$. Докажите, что прямая $7x + 2y - 15 = 0$ не принадлежит этому пучку.

14. Найдите уравнение прямой, принадлежащей пучку прямых $(x + 2y - 5) + q(3x - 2y + 1) = 0$ и а) проходящей через точку $A(3; -1)$; б) проходящей через начало координат; в) параллельной оси абсцисс; г) параллельной оси ординат; д) параллельной прямой $4x + 3y - 5 = 0$; е) перпендикулярной к прямой $2x + 3y - 1 = 0$.

15. Установите, какие линии определяются в полярных координатах следующими уравнениями:

а) $\rho = 5$; б) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; в) $\rho\cos\varphi = 1$; г) $\rho\sin\varphi = 2$; д) $\rho = 10\cos\varphi$;

е) $\rho = 6\sin\varphi$; ж) $\sin\varphi = \frac{1}{2}$; з) $\sin\varphi = 1$; и) $\rho = a\sin 2\varphi$.

Сделайте схематические чертежи.

§ 2. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

I. Основные сведения из теории

1⁰. Закончите утверждения:

1. Уравнение $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ определяет ... радиуса... с центром в точке ... .

2. Уравнение окружности с центром в начале координат принимает следующий вид: ... .

2⁰. Закончите определение:

Эллипсом называется множество точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух фиксированных точек, называемых ..., есть ... .

3⁰. Сделайте схематический чертеж эллипса, заданного каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,

где a — ...,

$b=\sqrt{a^2-c^2}$ — ...,

c — ... $(c \dots a)$,

$\varepsilon=\frac{c}{a}$ — ...,

причем для любого эллипса $\varepsilon \dots 1$.

4⁰. Закончите определение:

Гиперболой называется множество точек плоскости, для каждой из которых разность расстояний до двух фиксированных точек, называемых ..., есть ... .

5⁰. Сделайте схематический чертеж гиперболы, заданной каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,

где a — ...,

$b=\sqrt{c^2-a^2}$ — ...,

c — ... $(c \dots a)$,

$\varepsilon=\frac{c}{a}$ — ...,

причем для любой гиперболы $\varepsilon \dots 1$.

Уравнения асимптот гиперболы: $y=\pm \dots$.

6⁰. Закончите определение:

Параболой называется множество точек плоскости, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки, называемой ..., ... до некоторой фиксированной прямой, называемой... .

7⁰. Сделайте схематический чертеж параболы, заданной уравнением $y^2=2px$,

где p — ...,

$c=\frac{p}{2}$ — ... .

Уравнение директрисы параболы $x=\dots$.

Для любой параболы $\varepsilon \dots 1$.

8⁰. Дано полярное уравнение конического сечения $\rho=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$, где ρ, φ — ... произвольной точки сечения, p — фокальный... (поло-

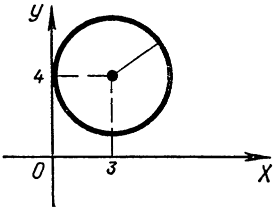


Рис. 6

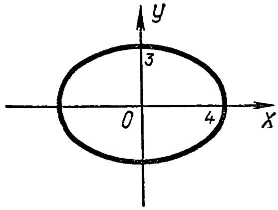


Рис. 7

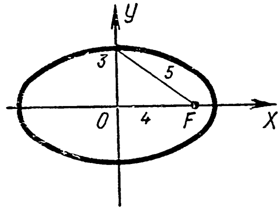


Рис. 8

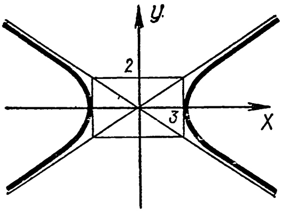


Рис. 9

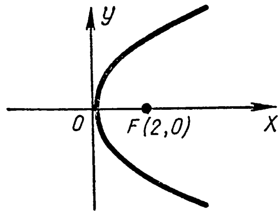


Рис. 10

вина фокальной хорды сечения, перпендикулярной к его оси). Укажите величину эксцентриситета ε для: 1) окружности, 2) параболы, 3) эллипса, 4) одной ветви гиперболы.

II. Примеры и упражнения

1. Напишите канонические уравнения кривых второго порядка, изображенных на рисунках 6—10.

2. Окружность задана уравнением $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$. Найдите путем выделения полного квадрата координаты ее центра и радиус. Сделайте схематический чертеж.

3. Эллипс задан уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Найдите величины a, b, c и ε. Сделайте схематический чертеж.

4. Гипербола задана уравнением $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Найдите величины a, b, c, ε и составьте уравнения асимптот. Сделайте схематический чертеж.

5. Парабола задана уравнением $y^2 = 12x$. Найдите координаты фокуса параболы и составьте уравнение ее директрисы. Сделайте схематический чертеж.

6. Установите, какие геометрические фигуры определяются следующими уравнениями:

а) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$;
б) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 14 = 0$;
в) $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 29 = 0$; г) $y = \sqrt{16 - x^2}$;
д) $y = -\sqrt{9 - x^2}$; е) $y = -2 - \sqrt{9 - x^2}$; ж) $x = -2 + \sqrt{4 - y^2}$;
з) $9x^2 + 16y^2 = 1$; и) $4x^2 + 9y^2 = 36$;

к) $y = -\frac{1}{7}\sqrt{49 - x^2}$; л) $9x^2 - 25y^2 = 1$; м) $4x^2 - y^2 = 16$;

н) $y = -3\sqrt{x^2 + 1}$; о) $y^2 = -4x$; п) $y = -3\sqrt{2x}$;

р) $x = 4\sqrt{-y}$.

7. Напишите уравнения касательных, проведенных из начала координат к окружности $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$.

Решение.

1. Уравнение прямой, проходящей через начало координат: ... .

2. Найдем точки пересечения прямой и окружности, решив совместно систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0, \\ y = \dots . \end{cases}$$

3. В случае касания две точки пересечения сливаются в одну, поэтому корни полученного уравнения должны быть действительными и равными, а значит, дискриминант уравнения $D = \dots$. Составив дискриминант и приравняв его ... , решим полученное уравнение и найдем значение параметра: ... и ... .

4. Уравнение искомых касательных: ... .

8. Определите, какие линии заданы следующими уравнениями в полярных координатах:

а) $\rho = \dfrac{3}{1 - \frac{1}{3}\cos\varphi}$; б) $\rho = \dfrac{2}{1 - \cos\varphi}$;

в) $\rho = \dfrac{5}{1 - \frac{4}{3}\cos\varphi}$; г) $\rho = \dfrac{6}{3 - \cos\varphi}$;

д) $\rho = \dfrac{1}{2 - 3\cos\varphi}$; е) $\rho = \dfrac{1}{2 - 2\cos\varphi}$.

III. Упражнения для самостоятельного решения

1. Составьте уравнение окружности в каждом из следующих случаев:

а) центр окружности совпадает с началом координат и прямая $3x - 4y + 20 = 0$ является касательной к окружности;

б) окружность проходит через точки $A\,(3;\ 1)$ и $B\,(-1;\ 3)$, а ее центр лежит на прямой $3x - y - 2 = 0$;

в) окружность проходит через три точки $A\,(1;\ 1)$, $B\,(1;\ -1)$, $C\,(2;\ 0)$.

2. Составьте уравнения окружностей, которые, имея центр на прямой $4x - 5y - 3 = 0$, касаются прямых $2x - 3y - 10 = 0$ и $3x - 2y + 5 = 0$.

3. Составьте каноническое уравнение эллипса, если: а) $2a = 12$, $2c = 10$; б) $2c = 6$, $\varepsilon = \frac{3}{5}$; в) $2b = 16$, $\varepsilon = \frac{3}{5}$; г) расстояние между его директрисами равно 32, а $\varepsilon = \frac{1}{2}$; д) расстояние между его директрисами равно 13, а $2b = 6$.

4. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найдите: а) его полуоси; б) фокусы; в) эксцентриситет; г) уравнения директрис.

5. Докажите, что точка M (—4; 2,4) лежит на эллипсе $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Определите ее фокальные радиусы.

6. Составьте каноническое уравнение гиперболы, если: а) $2c = 10$, $2b = 8$; б) $2c = 10$, $\varepsilon = \frac{5}{3}$; в) уравнения асимптот $y = \pm \frac{5}{12}x$, а расстояние между вершинами равно 48; г) расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$, а $\varepsilon = \frac{3}{2}$; д) уравнение директрис $x = \pm \frac{4}{3}$, а точка $M\left(-3; \frac{5}{2}\right)$ принадлежит гиперболе.

7. Определите, при каких m прямая $y = \frac{5}{2}x + m$: а) пересекает гиперболу $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$; б) касается ее; в) не имеет общих точек с гиперболой.

8. Составьте каноническое уравнение параболы, зная, что: а) парабола симметрична относительно оси Ox, расположена в левой полуплоскости, а ее параметр $p = 2$; б) парабола расположена симметрично относительно оси Oy и проходит через точку C (1; 1); в) фокус параболы F (—7; 0), а уравнение директрисы $x - 7 = 0$.

9. Из фокуса параболы $y^2 = 12x$ под острым углом α к оси Ox направлен луч света. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$. Дойдя до параболы, луч от нее отразился. Составьте уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

10. Определите, какие линии заданы следующими уравнениями в полярных координатах:

а) $\rho = \dfrac{15}{1 - \frac{1}{2}\cos\varphi}$; б) $\rho = \dfrac{16}{1 - \cos\varphi}$;

в) $\rho = \dfrac{1}{1 - \frac{3}{2}\cos\varphi}$; г) $\rho = \dfrac{4}{2 - \cos\varphi}$;

д) $\rho = \dfrac{5}{3 - 4\cos\varphi}$; е) $\rho = \dfrac{1}{3 - 3\cos\varphi}$;

ж) $\rho = 4$; з) $\rho = \dfrac{1}{3 - 0\cos\varphi}$.

§ 3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

I. Основные сведения из теории

1⁰. Какие из нижеперечисленных величин являются векторными: а) объем; б) скорость; в) давление; г) ускорение; д) плотность; е) масса; ж) сила; з) температура; и) потенциал?

2⁰. Закончите определения:

1. Вектором называется ... .
2. Скаляром называется ... .
3. Длиной вектора $\overrightarrow{AB}$ называется ... .

3⁰. Закончите предложения:

1. Запись $\vec{a} = \{x; y; z\}$ означает, что числа x, y, z являются ... .
2. Если даны две точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ определяются следующим образом: $\overrightarrow{AB} = \{...\}$.
3. Модуль вектора $\vec{a} = \{x; y; z\}$ определяется по формуле $|\vec{a}| = ...$.
4. Если даны вектор $\vec{a} = \{x; y; z\}$ и координатный базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то вектор $\vec{a}$ может быть разложен по базису: $\vec{a} = ...$.

4⁰. Закончите определения линейных операций над векторами:

1. Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a} + \vec{b}$ ... .
2. Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектор $\vec{a} - \vec{b}$ ... .
3. Произведением вектора $\vec{a}$ на число α называется вектор ... .

5⁰. Закончите определения скалярного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \ ...$;

2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{Пр.} \ ... = |\vec{b}| \cdot \text{Пр.} \ ...$.

6⁰. Продолжите формулировку основных свойств скалярного произведения:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \ ...$;

2) $\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda \vec{a} \cdot \ ...$;

3) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \ ...$;

4) $(\vec{a} \perp \vec{b}) \Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \ ...$;

5) $(\vec{a} \parallel \vec{b}) \Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \ ...$;

6) $\vec{a}^2 = \ ...$.

7⁰. Закончите определение:

Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор ..., имеющий направление ... и численно равный ... .

8⁰. Изобразите вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ (рис. 11).

9⁰. Продолжите формулировку основных свойств векторного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = \ ...$;

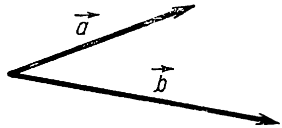


Рис. 11

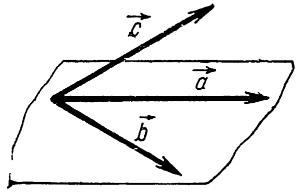


Рис. 12

2) $\vec a \times \lambda \vec b = \ldots$;

3) $\vec a \times \vec 0 = \ldots$;

4) $\vec a \times (\vec b + \vec c) = \ldots$;

5) $(\vec a \perp \vec b) \Rightarrow |\vec a \times \vec b| = \ldots$;

6) $(\vec a \parallel \vec b) \Rightarrow (\vec a \times \vec b) = \ldots$.

10⁰. Закончите определение:

Смешанным произведением трех векторов $\vec a$, $\vec b$ и $\vec c$ называется число, равное векторному произведению $\vec a \times \vec b$, умноженному ... на вектор $\vec c$: ... .

11⁰. Используя рисунок 12, выпишите произведения, численно равные объему параллелепипеда, построенного на этих векторах-сомножителях: $\vec b\vec a\vec c$, $\vec b\vec c\vec a$, $\vec a\vec b\vec c$, $\vec a\vec c\vec b$, $\vec c\vec b\vec a$, $\vec c\vec a\vec b$.

12⁰. Закончите утверждение:

Пусть вектор $\vec a$ умножается векторно на вектор $\vec b$, а полученный результат снова векторно умножается на вектор $\vec c$. В итоге получается двойное ..., обозначаемое ... .

13⁰. Даны два равенства:

а) $\vec a \times (\vec b \times \vec c) = \vec b \cdot (\vec a \cdot \vec c) - \vec c \cdot (\vec a \cdot \vec b)$;

б) $(\vec a \times \vec b) \times \vec c = \vec b \cdot (\vec a \cdot \vec c) - \vec c \cdot (\vec a \cdot \vec b)$.

Укажите верное.

14⁰. Пусть $\vec a = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec b = \{x_2; y_2; z_2\}$, $\vec c = \{x_3; y_3; z_3\}$. Заполните таблицу по указанному образцу:

$\vec a \pm \vec b$	$\{x_1 \pm x_2;\quad y_1 \pm y_2;\quad z_1 \pm z_2\}$
$\lambda \cdot \vec a$	
$\vec a \cdot \vec b$	
$\vec a \times \vec b$	
$\vec a \cdot (\vec b \times \vec c)$	
$\vec a \times (\vec b \times \vec c)$	

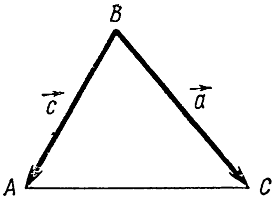


Рис. 13

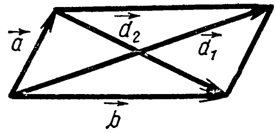


Рис. 14

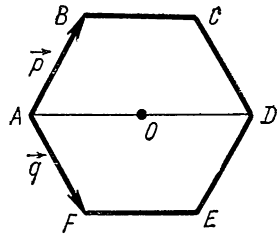


Рис. 15

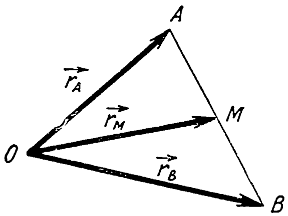


Рис. 16

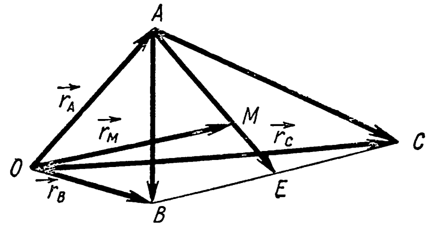


Рис. 17

II. Примеры и упражнения

1. Выразите вектор $\overrightarrow{AC}$ через $\vec{a}$ и $\vec{c}$ (рис. 13).

2. Выразите векторы $\vec{d}_1$ и $\vec{d}_2$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 14).

3. В правильном шестиугольнике (рис. 15) выразите через векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$:

а) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EF}$;

б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA}$;

в) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$.

4. Докажите (рис. 16), что $\vec{r}_M = \dfrac{\vec{r}_A + \vec{r}_B}{2}$, зная, что M — центр тяжести однородного стержня.

Доказательство.

Достраиваем параллелограмм на векторах $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$, тогда ... .

5. Докажите (рис. 17), что $\vec{r}_M = \dfrac{\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C}{3}$, зная, что M— центр тяжести однородной пластины ABC.

Доказательство:

Запишем последовательно:

$$\overrightarrow{AB} = \ldots; \quad \overrightarrow{AC} = \ldots; \quad \overrightarrow{AE} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} = \ldots; \quad \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} = \ldots; \quad \vec{r}_M = \ldots .$$

6. Тетраэдр задан своими вершинами: A_1 (2; 3; 1), A_2 (4; 1; —2), A_3 (6; 3; 7), A_4 (—5; —4; 8). Найдите:

1) величину угла между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

2) площадь грани $A_1A_2A_3$;

3) проекцию $\overrightarrow{A_1A_3}$ на $\overrightarrow{A_1A_4}$;

4) объем тетраэдра.

Решение.

1. а) Координаты векторов $\overrightarrow{A_1A_2} = \ldots$ и $\overrightarrow{A_1A_4} \ldots$;

б) скалярное произведение двух векторов, заданных своими координатами: $\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \ldots$;

в) $|\overrightarrow{A_1A_2}| = \ldots$ и $|\overrightarrow{A_1A_4}| = \ldots$;

г) косинус угла φ между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 : ... .

2. а) Координаты векторов $\overrightarrow{A_1A_2} = \ldots$ и $\overrightarrow{A_1A_3} = \ldots$;

б) векторное произведение двух векторов: $\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \ldots$;

в) модуль векторного произведения: $|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}| = \ldots$;

г) площадь грани $A_1A_2A_3$: $S = \frac{1}{2} \ldots$.

3. а) Координаты векторов $\overrightarrow{A_1A_3} = \ldots$ и $\overrightarrow{A_1A_4} = \ldots$;

б) скалярное произведение двух векторов: $\overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \ldots$;

в) выберем верную формулу:

$$\text{Пр.}_{\overrightarrow{A_1A_4}} \overrightarrow{A_1A_3} = \frac{\overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{|\overrightarrow{A_1A_3}|} \text{ или } \text{Пр.}_{\overrightarrow{A_1A_4}} \overrightarrow{A_1A_3} = \frac{\overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{|\overrightarrow{A_1A_4}|};$$

г) $|\overrightarrow{A_1A_4}| = \ldots$;

д) $\text{Пр.}_{\overrightarrow{A_1A_4}} \overrightarrow{A_1A_3} = \ldots$.

4. а) Координаты векторов $\overrightarrow{A_1A_2} = \ldots$, $\overrightarrow{A_1A_3} = \ldots$, $\overrightarrow{A_1A_4} = \ldots$;

б) объем параллелепипеда, построенного на этих векторах: $V = \ldots$;

в) объем данного тетраэдра $V_1 = \ldots$.

III. Упражнения для самостоятельного решения

1. Даны векторы $\vec{a} = \{4; -2; -4\}$, $\vec{b} = \{6; -3; 2\}$. Вычислите: а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $\sqrt{\vec{a}^2}$; в) $\sqrt{\vec{b}^2}$; г) $(2\vec{a} \cdot 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$; д) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; е) $(\vec{a} - \vec{b})^2$.

2. Вычислите, какую работу производит сила $\vec{f} = \{3; 2; -5\}$, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A (2; —3; 5} в положение B (3; —2; —1). Сделайте схематический чертеж.

3. Определите, при каком α векторы $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ взаимно перпендикулярны.

4. Вычислите косинус угла, образованного векторами $\vec{a} = \{2; -4; 4\}$ и $\vec{b} = \{-3; 2; 6\}$.

5. Вычислите проекцию вектора $\vec{a} = \{5; 2; 5\}$ на ось вектора $\vec{b} = \{2; -1; 2\}$.

6. Даны три вектора $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 5\vec{j}$ и $\vec{c} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$. Вычислите $\text{Пр.}_{\vec{c}}\,(3\vec{a} \cdot 2\vec{b})$.

7. Даны точки $A(-2; 3; -4)$, $B(3; 2; 5)$, $C(1; -1; 2)$ и $D(3; 2; -4)$. Вычислите $\text{Пр.}_{\overrightarrow{CD}}\,\overrightarrow{AB}$.

8. Даны $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ и $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$. Вычислите $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

9. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Зная, что $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, вычислите: а) $(\vec{a} \times \vec{b})^2$; б) $((2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b}))^2$; в) $((\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} - \vec{b}))^2$.

10. Докажите тождество: $(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$.

11. Даны точки $A(2; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$ и $C(3; 2; 1)$. Найдите координаты векторных произведений: а) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$; б) $(\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}) \times \overrightarrow{CB}$.

12. Сила $\vec{F} = \{2; -4; 5\}$ приложена к точке $M_0(4; -2; 3)$. Определите момент этой силы относительно точки $A(3; 2; -1)$.

Указание. Если вектор $\vec{f}$ изображает силу, приложенную к какой-нибудь точке M, а вектор $\vec{a}$ отображает некоторую точку O на точку M, то вектор $\vec{a} \times \vec{f}$ представляет собой момент силы относительно точки O.

13. Даны точки $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$ и $C(5; 2; 6)$. Вычислите площадь треугольника ABC.

14. Даны вершины треугольника $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$ и $C(1; 3; -1)$. Вычислите длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

15. Определите, правой или левой является тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, если: а) $\vec{a} = \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i}$, $\vec{c} = \vec{j}$; б) $\vec{a} = \vec{i}$, $\vec{b} = \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{j}$; в) $\vec{a} = \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i}$, $\vec{c} = \vec{k}$; г) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{k}$; д) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{j}$.

16. Установите, компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, если:

а) $\vec{a} = \{2; 3; -1\}$; $\vec{b} = \{1; -1; 3)$; $\vec{c} = \{1; 9; -11\}$;

б) $\vec{a} = \{3; -2; 1\}$; $\vec{b} = \{2; 1; 2\}$; $\vec{c} = \{3; -1; -2\}$;

в) $\vec{a} = \{2; -1; 2\}$; $\vec{b} = \{1; 2; -3\}$; $\vec{c} = \{3; -4; 7\}$.

17. Даны вершины тетраэдра $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$ и $D(-5; -4; -8)$. Найдите длину высоты тетраэдра, опущенной из вершины D.

18. Докажите тождество: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$.

§ 4. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

I. Основные сведения из теории

1^0. Напишите общее уравнение плоскости.

2^0. Закончите утверждение:

Уравнение $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ определяет плоскость, проходящую через точку $M_0(...)$ и имеющую нормальный вектор $\vec{n}=\{...\}$.

3^0. Плоскости заданы уравнениями $Ax+By+Cz+D=0$ и $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$.

1. Напишите формулу, определяющую угол φ между ними: $\cos\varphi = \pm \ldots$.

2. Сформулируйте: а) условие параллельности; б) условие перпендикулярности этих плоскостей.

4^0. Напишите уравнение плоскости в отрезках.

5^0. Закончите утверждения:

1. Если $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора нормали плоскости, а p — расстояние от начала координат до плоскости, то нормальное уравнение плоскости имеет следующий вид: ... .

2. Общее уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ приводится к нормальному виду умножением на нормирующий множитель $\mu = \pm \ldots$, где знак нормирующего множителя берется ... .

3. Отклонение δ точки $M^*(x^*; y^*; z^*)$ от плоскости $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ определяется формулой $\delta = \ldots$, причем:

а) $\delta \ldots 0$, если точка M^* и начало координат лежат по разные стороны от данной плоскости;

б) $\delta \ldots 0$, если они лежат по одну сторону от нее.

4. Расстояние d от точки M^* до данной плоскости определяется соотношением $d = \ldots$.

6^0. Напишите каноническое уравнение прямой в пространстве, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, если направляющий вектор прямой $\vec{a}=\{l; m; n\}$.

7^0. Прямые заданы уравнениями

$$\frac{x-a_1}{l_1}=\frac{y-b_1}{m_1}=\frac{z-c_1}{n_1} \text{ и } \frac{x-a_2}{l_2}=\frac{y-b_2}{m_2}=\frac{z-c_2}{n_2}.$$

1. Напишите формулу, позволяющую найти угол φ между ними: $\cos\varphi = \ldots$.

2. Сформулируйте: а) условие параллельности; б) условие перпендикулярности этих прямых.

8^0. Закончите утверждение:

Параметрические уравнения прямой с направляющим вектором $\vec{a}=\{l; m; n\}$, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, имеют следующий вид: ... .

9^0. Даны прямая $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ и плоскость $Ax+By+Cz+D=0$.

1. Укажите верную формулу для вычисления величины угла между ними:

а) $\cos\varphi = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$;

б) $\sin\varphi = \pm \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$.

2. Сформулируйте: а) условие параллельности; б) условие перпендикулярности этих прямой и плоскости.

II. Примеры и упражнения

1. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $A\ (1;\ 2;\ 3)$ перпендикулярно:

1) вектору $\vec{a} = \{3;\ 4;\ 5\}$;
2) прямой KM, где $K\ (-1;\ 2;\ 1)$ и $M\ (1;\ -2;\ -1)$;
3) горизонтальной плоскости;
4) фронтальной плоскости;
5) профильной плоскости.

2. Какие из нижеперечисленных векторов перпендикулярны плоскости $3x + 2y - 5z + 17 = 0$: 1) $\vec{a} = \{3;\ 2;\ 5\}$; 2) $\vec{b} = \{3;\ 2;\ -5\}$; 3) $\vec{c} = \{6;\ 4;\ -10\}$; 4) $\vec{d} = \{-1{,}5;\ -1{,}2;\ 2{,}5\}$; 5) $\vec{e} = \{6;\ 2;\ -5\}$?

3. Вычислите косинус угла между плоскостью $4x - 5y + 3z - 1 = 0$ и плоскостью $x - 4y - z + 9 = 0$.

4. Дана плоскость $2x + 3y - z - 3 = 0$. Какие из плоскостей:

а) $x + 2y + 6z - 1 = 0$; г) $4x + 6y - 2z + 1 = 0$;
б) $x - y - z + 2 = 0$; д) $x + 3y - z + 1 = 0$;
в) $x - 2y + 8z + 1 = 0$; е) $x + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z + 5 = 0$

1) параллельны данной плоскости;
2) перпендикулярны ей?

5. Найдите отрезки, отсекаемые плоскостью $x - 3y + 2z - 6 = 0$ на координатных осях.

6. Найдите отклонение точки $Q\ (2;\ -1;\ 1)$ от плоскости: а) $5x - 3y + z - 18 = 0$; б) $x + 5y + 12z - 1 = 0$; в) $x + 4y + z + 1 = 0$.

7. Напишите уравнение прямой, если она проходит:

1) через точку $M\ (3;\ 2;\ 1)$ и коллинеарна вектору $\vec{a} = \{4;\ -1;\ 0\}$;
2) через начало координат и коллинеарна вектору $\vec{a} = \{4;\ -1;\ 0\}$;
3) через точку $M\ (3;\ 2;\ 1)$ и параллельна оси Ox. (Какой смысл имеет 0, стоящий в знаменателе?)

8. Какие из нижеперечисленных векторов коллинеарны данной прямой $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$:

$\vec{a} = \{-3;\ 2;\ -1\}$; $\vec{b} = \{6;\ -2;\ 4\}$; $\vec{c} = \{-2;\ 1;\ 0\}$; $\vec{d} = (9;\ -6;\ 3\}$

9. Определите угол между прямыми

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1} \text{ и } \frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-1}.$$

Решение.

1. Координаты направляющего вектора первой прямой: ... .
2. Координаты направляющего вектора второй прямой: ... .
3. Выпишем формулу

$$\cos\varphi = \pm\frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

или

$$\cos\varphi = \pm\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

для вычисления косинуса угла φ между прямыми

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

4. Величина угла между прямыми: $\varphi = \ldots$ или $\varphi = \ldots$.

10. Докажите параллельность прямых

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z+3}{9} \text{ и } \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+1}{3}.$$

11. Докажите перпендикулярность прямых

$$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+1}{1} \text{ и } \frac{x-2}{5}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{2}.$$

12. Найдите точку пересечения двух прямых

$$\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4} \text{ и } \frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}.$$

Решение.

1. Параметрические уравнения первой прямой: ... .
2. Параметрические уравнения второй прямой: ... .
3. Значения параметров, соответствующих точке пересечения прямых: ... .
4. Координаты точки пересечения данных прямых: ... .

13. Найдите точку пересечения прямой $\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$ и плоскости $3x+5y-z-2=0$.

Решение.

1. Параметрические уравнения прямой: ... .
2. Значение параметра, соответствующего точке пересечения данной прямой и данной плоскости: ... .
3. Координаты искомой точки: ... .

14. При каком значении коэффициента A плоскость $Ax-2y+3z-1=0$ будет параллельна прямой $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{1}$?

15. При каких значениях коэффициентов A и B плоскость $Ax + By - 3z - 7 = 0$ перпендикулярна прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-3}{6}$?

16. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{3}$ и точку $A(4;\ 5;\ 1)$.

Решение.

1. Уравнение плоскости, проходящей через точку A (4; 5; 1): ... ,
2. Условие параллельности данной прямой и искомой плоскости: ... .
3. Условие принадлежности точки, через которую проходит прямая, плоскости: ... .
4. Выразим два коэффициента из двух уравнений с тремя неизвестными через третий коэффициент: ... .
5. Подставим найденные значения ... в уравнение искомой плоскости: ... .
6. Уравнение искомой плоскости: ... .

III. Упражнения для самостоятельного решения

1. Составьте уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и имеет нормальный вектор $\vec{n} = \{1; 2; -3\}$.

2. Составьте уравнение плоскости, которая проходит через точку M (3; 4; —5) параллельно двум векторам $\vec{a}_1 = \{3;\ 1; -1\}$ и $\vec{a}_2 = \{1; -2; 1\}$.

3. Какие из нижеперечисленных плоскостей взаимно перпендикулярны, а какие взаимно параллельны:

а) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$; г) $x - y - z + 5 = 0$;
б) $2x - 3y + 5z + 3 = 0$; д) $x - 3z + 1 = 0$;
в) $2x + 3y - z - 3 = 0$; е) $2x - 6z - 1 = 0$?

4. Вычислите объем пирамиды, ограниченной плоскостью $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ и координатными плоскостями.

5. Приведите к нормальному виду каждое из следующих уравнений: а) $4x - 6y - 12z - 11 = 0$; б) $\frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z + 3 = 0$; в) $-4x - 4y + 2z + 1 = 0$.

6. Определите, по одну или по разные стороны относительно каждой из перечисленных плоскостей лежат точка Q (2; —1; 1) и начало координат: а) $5x - 3y + z - 18 = 0$; б) $x + 5y + 12z - 1 = 0$.

7. Вычислите расстояние между плоскостями

$$x - 2y - 2z - 12 = 0 \text{ и } x - 2y - 2z - 6 = 0.$$

8. Составьте уравнение плоскостей, параллельных плоскости $2x - 2y - z - 3 = 0$ и отстоящих от нее на расстоянии $d = 5$.

9. Вычислите углы между плоскостями $4x - 5y + 3z - 1 = 0$ и $x - 4y - z + 9 = 0$.

10. Через точку $Q\ (2;\ -5;\ 3)$ проведите прямую: а) параллельную оси Oz; б) параллельную прямой $\frac{x-3}{4}=\frac{y+2}{-6}=\frac{z-3}{9}$; в) параллельную прямой $\begin{cases}2x-y+3z-1=0,\\5x+4y-z-7=0.\end{cases}$

11. Докажите параллельность прямых $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$ и $\begin{cases}x+y-z=0,\\x-y-5z+8=0.\end{cases}$

12. Докажите перпендикулярность прямых $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{3}$ и $\begin{cases}3x+y-5z+1=0,\\2x+3y-8z+3=0.\end{cases}$

13. Найдите величину острого угла между прямыми

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{\sqrt{2}}\ \text{и}\ \frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-5}{\sqrt{2}}.$$

14. Даны уравнения движения точки $M\ (x;\ y;\ z)$: $x=5-2t$, $y=-3+2t$, $z=5-t$. Определите расстояние d, которое пройдет точка M за промежуток времени от $t_1=0$ до $t_2=7$.

15. Составьте уравнения движения точки $M\ (x;\ y;\ z)$, которая, имея начальное положение $M_0\ (3;\ -1;\ -5)$, движется прямолинейно и равномерно в направлении вектора $\vec{s}=\{-2;\ 6;\ 3\}$ со скоростью $v=21$.

16. Составьте уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $Q\ (3;\ -2;\ 4)$ на плоскость $5x+3y-7z+1=0$.

17. Найдите проекцию точки $Q\ (4;\ -3;\ 1)$ на плоскость $x+2y-z-3=0$.

18. При каком значении m прямая $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{m}=\frac{z-1}{-2}$ параллельна плоскости $x-3y+6z+7=0$?

19. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0\ (1;\ -2;\ 1)$ перпендикулярно прямой $\begin{cases}x-2y+z-3=0,\\x+y-z+2=0.\end{cases}$

20. Найдите расстояние от точки $P\ (2;\ 3;\ -1)$ до прямой $\begin{cases}2x-2y+z+3=0,\\3x-2y+2z+17=0.\end{cases}$

Указания. Прямую, определенную пересечением двух плоскостей, приведите к каноническому виду $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$:

а) полагая $z_0=0$, из системы $\begin{cases}2x-2y+3=0,\\3x-2y+17=0\end{cases}$ найдите x_0 и y_0;

б) вектор $\vec{a}=\{l;\ m;\ n\}$, коллинеарный прямой, вычислите как векторное произведение нормалей $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ к плоскостям, определяющим прямую;

в) выберите на прямой произвольную точку, например $M_0\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$, и считайте, что направляющий вектор $\vec{a}=\{l;\ m;\ n\}$ прямой приложен в этой точке.

Модуль векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\overrightarrow{M_0P}$ определяет площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

Высота этого параллелограмма, проведенная из вершины P, и будет искомым расстоянием d:

$$d = \frac{|\vec{a} \times \overrightarrow{M_0P}|}{|\vec{a}|}.$$

§ 5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГРАФИКОВ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

I. Основные сведения из теории

Закончите утверждения:

1⁰. Пусть известен вид графика функции $y = f(x)$. Для того чтобы построить график функции:

1) $y = f(x) + m$. надо без деформации ...;

2) $y = f(x + n)$, надо кривую $y = f(x)$ без деформации ...;

3) $y = f(x + n) + m$, надо без деформации ...;

4) $y = -f(x)$, надо построить изображение, симметричное графику функции $y = f(x)$ относительно ...;

5) $y = f(-x)$, надо построить изображение, симметричное графику функции $y = f(x)$ относительно ... .

2⁰. Функции $y = f(x)$ и $x = f(y)$ называются ... .

3⁰. Функция $y = f(x)$ имеет на $[a; b]$ обратную функцию, если ... .

4⁰. Для того чтобы построить график обратной функции, надо построить кривую, симметричную графику прямой функции относительно ... .

5⁰. Для того чтобы построить график функции $y = A f(x)$, надо график известной функции $y = f(x)$: 1) при $A > 1$ ... ; 2) при $0 < A < 1$ ... вдоль оси ... .

6⁰. Для того чтобы построить график функции $y = f(\omega x)$, надо график известной функции $y = f(x)$: 1) при $\omega > 1$ ... ; 2) при $0 < \omega < 1$ ... вдоль оси ... .

7⁰. Уравнение гармонического колебания имеет следующий вид: ... или ... .

8⁰. Модуль действительного числа a: $|a| = \begin{cases} \ldots, & \text{если } a \ldots 0, \\ \ldots, & \text{если } a \ldots 0. \end{cases}$

9⁰. Для того чтобы построить график функции $y = |f(x)|$, надо ... те участки графика функции $y = f(x)$, где $f(x) \geqslant 0$, и ... те участки графика, где $f(x) < 0$.

10⁰. Для того чтобы построить график функции $y = f(|x|)$, надо построить график функции $y = f(x)$ при $x \geqslant 0$, а для $x < 0$ достроить график, симметричный графику функции $y = f(x)$ относительно ... .

II. Примеры и упражнения

1. Построить графики функций:

1) $y = x^2$, $y = x^2 - 1$ и $y = x^2 + 2$;

2) $y = 2^x$, $y = 2^x - 1$ и $y = 2^x + 1$;

3) $y = \cos x$, $y = \cos x - 1$ и $y = \cos x + 2$;
4) $y = \lg x$, $y = \lg x - 1$ и $y = \lg x + 2$;
5) $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{tg} x + 1$ и $y = \operatorname{tg} x - 1$.

2. Постройте графики функций:
1) $y = x^2$, $y = (x - 1)^2$, $y = (x + 2)^2$, $y = (x + 2)^2 + 4$;
2) $y = 2^x$, $y = 2^{x-1}$, $y = 2^{x+1}$, $y = 2^{x+1} + 3$;
3) $y = \lg x$, $y = \lg (x - 1)$, $y = \lg (x + 2)$, $y = \lg (x + 2) + 2$.

3. Путем выделения полного квадрата постройте график функции $y = x^2 - 4x + 5$.

4. Постройте графики функций:
1) $y = 2^x$, $y = -2^x$;
2) $y = \lg x$, $y = -\lg x$;
3) $y = (x - 1)^2 + 2$, $y = -(x - 1)^2 - 2$;
4) $y = \operatorname{tg} x$, $y = -\operatorname{tg} x$.

5. Постройте графики функций:
1) $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$;
2) $y = \lg x$, $y = \lg (-x)$;
3) $y = \sin x$, $y = \sin (-x)$;
4) $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{tg} (-x)$.

6. Укажите вид функции, обратной данной (по образцу: $y = 2x+1$, $x = 2y + 1$, $y = \dfrac{x-1}{2}$):
1) $y = 2^x$; 2) $y = \dfrac{x-1}{x+2}$.

7. Постройте графики функций, обратных следующим функциям:
1) $y = \sin x$ на промежутке $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$;
2) $y = \cos x$ на промежутке $[0; \pi]$;
3) $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$;
4) $y = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $]0; \pi[$.

8. Постройте графики функций:
1) $y = \arcsin x$, $y = 2 \arcsin x$, $y = \dfrac{1}{2}\arcsin x$;
2) $y = \operatorname{arctg} x$, $y = 2 \operatorname{arctg} x$, $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x$;
3) $y = \cos x$, $y = \cos 2x$, $y = \cos \dfrac{x}{2}$;
4) $y = \arccos x$, $y = \arccos 2x$.

9. Постройте график гармонического колебания $y = 3 \sin \left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ в следующей последовательности:

а) $y = \sin x$; б) $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$; в) $y = \sin 2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$;

г) $y = 3 \sin \left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, выделив неподвижную точку преобразования.

10. Постройте графики функций:

1) $y = |2x - 1|$; 2) $y = |x^2 - 1|$; 3) $y = |\lg x|$; 4) $y = |\cos x|$; 5) $y = |x|$; 6) $y = 2^{|x|}$; 7) $y = 2|x| - 1$; 8) $y = \lg 0{,}5\,|x|$.

11. Постройте график функции $y = |\lg |x||$.

III. Упражнения для самостоятельного решения

Постройте графики функций:

1. $y = x^3 - 1$. **2.** $y = (x-1)^3$. **3.** $y = \sqrt{x}$. **4.** $y = \sqrt{x-1}$. **5.** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$. **6.** $y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. **7.** $y = |x^2 - 6x + 5|$. **8.** $y = x^2 - 6|x| + 5$. **9.** $y = |\log_2(x-2)|$. **10.** $y = \log_2|x-2|$. **11.** $y = \log_2(|x| - 2)$. **12.** $y = |\log_2||x| - 2||$. **13.** $y = |\arcsin x|$. **14.** $y = \arcsin|x|$. **15.** $y = |\arcsin|x||$. **16.** $y = \arccos|x|$. **17.** $y = \operatorname{arctg}|x|$. **18.** $y = |\operatorname{arctg}|x||$. **19.** $y = \operatorname{arcctg}|x|$. **20.** $y = \frac{|x|}{x}$. **21.** $y = \frac{|\sin x|}{\sin x}$. **22.** $y = \frac{x+1}{x-1}$. **23.** $y = \left|\frac{x-1}{x+2}\right|$. **24.** $y = \frac{|x|-1}{|x|+2}$. **25.** $y = |\operatorname{arcctg} x|$.

§ 6. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

I. Основные сведения из теории

1^0. Закончите определение:

Постоянное число A называется пределом числовой последовательности a_n при n, стремящемся к бесконечности, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε можно указать такой номер N члена последовательности, что для всех $n \geqslant N$ будет выполняться неравенство ... или

$$(\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\, N) : (n \geqslant N \Rightarrow \ldots).$$

Для ε, выбранного на рисунке 18, номер $N = \ldots$.

2^0. Закончите утверждения:

1. Если точка x принадлежит интервалу $]x_0 - \delta;\ x_0 + \delta[$, т. е. если выполняется неравенство $|x - x_0| \ldots \delta$, то говорят, что x принадлежит непроколотой δ-окрестности точки x_0, или $x \ldots U_\delta(x_0)$ (рис. 19).

2. Если точка x принимает все значения из интервала $]x_0 - \delta;\ x_0 + \delta[$, кроме x_0, т. е. выполняется неравенство $0 \ldots |x - x_0| \ldots \delta$, то говорят, что x принадлежит проколотой δ-окрестности точки x_0, или $x \ldots \widetilde{U}_\delta(x_0)$ (рис. 20).

3. Если точка x принимает все значения из полуинтервала $[x_0;\ x_0 + \delta[$, т. е. если выполняется неравенство $x - x_0 \ldots \delta$ (рис. 21), то говорят, что x принадлежит непроколотой правой δ-полуокрестности точки x_0, или $x \ldots U_\delta^+(x_0)$.

4. Если точка x принимает все значения из интервала $]x_0;\ x_0 + \delta[$, т. е. если выполняется неравенство $0 \ldots x - x_0 \ldots \delta$ (рис. 22), то говорят, что x принадлежит проколотой правой δ-полуокрестности точки x_0, или $x \ldots \widetilde{U}_\delta^+(x_0)$.

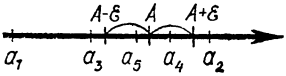


Рис. 18

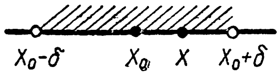


Рис. 19

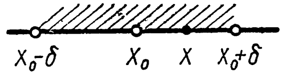


Рис. 20

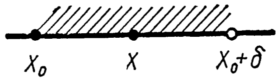


Рис. 21

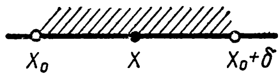


Рис. 22

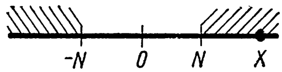


Рис. 23

5. Если точка x принимает все значения, по абсолютной величине превосходящие некоторое положительное число N, т. е. если выполняется неравенство ..., то говорят, что x принадлежит проколотой N-окрестности бесконечности, или x ... $\widetilde{U}_N$ (∞) (рис. 23).

3⁰. Сформулируйте в неравенствах и сделайте схематические чертежи:

1) $x \in \widetilde{U}_\delta^-(x_0)$ — это значит, что ...;

2) $x \in U_\delta^-(x_0)$ — это значит, что ...;

3) $x \in \widetilde{U}_N(+\infty)$ — это значит, что ...;

4) $x \in \widetilde{U}_N(-\infty)$ — это значит, что ... .

4⁰. Закончите определения и сделайте схематические чертежи:

1. Число y_0 называется пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к x_0 (в точке x_0), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ, что $|f(x) - y_0|$ ... ε, как только 0 ... $|x - x_0|$ ... δ, или $(\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\, \delta > 0) : (x \in \widetilde{U}_\delta(x_0) \Rightarrow$ $\Rightarrow$ ...), т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$.

2. Пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к $+\infty$, является $-\infty$, т. е. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, если для любого положительного числа N найдется положительное число M такое, что $f(x)$ ... $-M$, как только x ... N, или $(\forall\, N > 0)\ (\exists\, M > 0) : (x \in \widetilde{U}_N(+\infty) \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x)$ ... $-M)$.

3. Число y_0 является пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к x_0 слева, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = y_0$, если ..., или $(\forall$ ... $> 0)$ $(\exists$ ... $> 0)$: $(x \in$ ... $\Rightarrow |f(x) - y_0| <$ ...$)$.

5⁰. Сформулируйте основные теоремы о пределах:

1) $\lim\limits_{x \to a} (f_1(x) \pm f_2(x)) =$ ... ;

2) $\lim\limits_{x \to a} (f_1(x) \cdot f_2(x)) =$ ... ;

3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} =$ ... .

6⁰. Напишите равенство:

1) выражающее сущность первого замечательного предела;

2) определяющее трансцендентное число e.

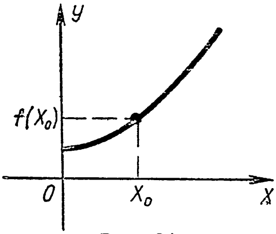


Рис. 24

7^0. Докажите, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k$.

Доказательство.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}}\right)^k = \ldots .$$

8^0. Закончите определения:

1. Функция $\alpha(x)$, имеющая своим пределом число 0, называется … .

2. Функция $\beta(x)$, имеющая своим пределом $-\infty$ или $+\infty$, называется … .

3. Две функции $\alpha(x)$ и $\gamma(x)$ называются эквивалентными ($\alpha(x) \sim \gamma(x)$) бесконечно малыми, если … .

9^0. Закончите утверждение:

Если бесконечно малые α и α_1, β и β_1 попарно эквивалентны, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a} \ldots$.

10^0. Напишите «цепочку» эквивалентных бесконечно малых $x \sim \sin x \sim \ldots \sim \ldots \sim \ldots \sim \ldots \sim \ldots \sim$.

11^0. Закончите определение:

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если …, или $(\forall \ldots > 0)(\exists \ldots > 0) : (x \in \ldots \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \ldots)$ (рис. 24).

II. Примеры и упражнения

1. Вычислите $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)$.

Решение.

Элементарная функция $y = 2x + 1$ непрерывна в любой точке области определения, поэтому $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1) = 2\cdot \ldots + 1 = \ldots$.

2. Вычислите пределы, требующие раскрытия неопределенности типа $\left[\frac{0}{0}\right]$:

1) $$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-10x-11}{x^2-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to -1}\frac{(x-11)(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \ldots .$$

Замечание. Сокращение на $(x+1)$ возможно, так как … .

2) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \left|\begin{array}{l} \sqrt[12]{x} = t \\ \sqrt[3]{x} = t^4 \\ \sqrt[4]{x} = t^3 \\ x\to 1;\ t\to 1 \end{array}\right| = \lim_{t\to 1} \ldots;$$

3) $$\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} = \lim_{x\to 4}\frac{(3-\sqrt{5+x})(1+\sqrt{5-x})(3+\sqrt{5+x})}{(1-\sqrt{5-x})(1+\sqrt{5-x})(3+\sqrt{5+x})} = \ldots .$$

3. Вычислите пределы, требующие раскрытия неопределенности типа $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2 - x + 7}{x^3 - 8x + 1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^3} - \frac{x}{x^3} + \frac{7}{x^3}}{1 - \frac{8x}{x^3} + \frac{1}{x^3}} = \ldots;$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^5 - 3x^2 + 2}{x^3 + 7x^2 + 4} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4 - \frac{3x^2}{x^5} + \frac{2}{x^5}}{\frac{1}{x^2} + \frac{7x^2}{x^5} + \frac{4}{x^5}} = \ldots;$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 1}{1 - 2x + 3x^2 - 7x^4} = \ldots;$

4) закончите обобщение:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{если } \ldots, \\ 0, & \text{если } \ldots, \\ \infty, & \text{если } \ldots \end{cases}.$$

4. Вычислите пределы, требующие применения первого замечательного предела:

1) а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{10x} = \ldots;$

б) закончите обобщение: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \ldots;$

2) а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{2x} = \ldots;$

б) закончите обобщение: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{bx} = \ldots;$

3) а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x}{3x} = \left| \begin{array}{l} \arcsin 2x = t \\ \sin t = 2x \\ x \to 0;\ t \to 0 \end{array} \right| = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{3\frac{\sin t}{2}} = \ldots;$

б) закончите обобщение: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin ax}{bx} = \ldots;$

4) а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{5x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{arctg} 3x = t \\ \operatorname{tg} t = 3x \\ x \to 0;\ t \to 0 \end{array} \right| = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{5\frac{\operatorname{tg} t}{3}} = \ldots;$

б) закончите обобщение: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} ax}{bx} = \ldots;$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \ldots;$

6) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin x - \sin 2}{x-2} = \dots$.

5. Вычислите пределы, требующие применения второго замечательного предела:

1) а) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{3x-5} = \dots;$

б) закончите обобщение: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{k}{x}\right)^{mx+n} = \dots;$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^{2x-5} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3-1}{x+3}\right)^{2x-5} = \dots;$

3) $\lim\limits_{y\to\infty}(1+y)^{\frac{1}{y}} = \left|\begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \\ y\to 0 \\ x\to\infty \end{array}\right| = \dots;$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x) = \dots;$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = \left|\begin{array}{c} e^x - 1 = y \\ x\to 0 \\ y\to 0 \end{array}\right| = \dots;$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \left|\begin{array}{c} 1+x = e^t \\ x\to 0 \\ y\to 0 \end{array}\right| = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{\alpha t}-1}{e^t-1} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{\alpha t}-1}{\alpha t}\times$

$\times\dfrac{t}{e^t-1}\cdot\alpha = \dots$.

6. Вычислите пределы, используя теоремы и «цепочку» эквивалентных бесконечно малых:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)\operatorname{arctg}7x}{\sin 5x\,(e^{4x}-1)} = \dots;$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{10}-1}{x} = \dots;$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\arcsin 5x} = \dots;$

4) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1-2\sin^2 x)^{\frac{1}{x}} = \dots$.

7. Напишите приближенные равенства для малых $|x|$, используя вычисляемые в скобках пределы:

1) $\sqrt{1+x} \approx \ldots \left(\text{так как } \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\dfrac{x}{2}} = \ldots\right);$

2) $\dfrac{1}{1+x} \approx \ldots \left(\text{так как } \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{1+x}-1}{x} = \ldots\right);$

3) $\ln(1+x) \approx \ldots \left(\text{так как } \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \ldots\right);$

4) $(1+x)^n \approx \ldots \left(\text{так как } \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n-1}{nx} = \ldots\right),$

n — натуральное число.

8. Используя полученные равенства, вычислите приближенно: а) $\sqrt{1{,}06} \approx \ldots$; б) $\dfrac{1}{1{,}02} \approx \ldots$; в) $\ln 1{,}1 \approx \ldots$; г) $0{,}93^4 \approx \ldots$.

III. Упражнения для самостоятельного решения

Вычислите:

1. $\lim\limits_{x\to -1} (6x^2-1)$.

2. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2-2x-3}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

5. $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$.

6. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

8. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{4x^2-3x+8}{6x^3-5x^2+1}$.

9. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1-2x^2+x^3}{4-3x+x^2}$.

10. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1-7x-5x^3}{x^3+x^2+1}$.

11. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(1-2x)^5(1+3x)^3}{(6x^2-1)^2(1-x)^4}$.

12. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(1-3x)^2(2x-1)^3}{(1-x)^3(2x+1)^2}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \pi x}{\sin 11x}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 10x}{\operatorname{tg} 8x}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 5x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x}{\sin 2x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 7x}{2x}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x \cdot \arcsin 3x \cdot \sin 5x}{\operatorname{tg} 7x \cdot \arcsin 11x \cdot \operatorname{tg} 4x}$.

19. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{1-\operatorname{tg} x}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)^x$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$.

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^{3x-4}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+10x)}{x}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(x+1)-\ln x)$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{\sin x}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{14}-1}{x}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot \operatorname{arctg} 7x}{\ln(1+2x)\cdot(e^{3x}-1)}$.

31. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{1+x}-1}{\ln(1-2x)}$.

32. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^5-1}{e^{3x}-1}$

Вычислите приближенно:

33. $\sqrt[3]{1{,}09}$. 34. $\sqrt[3]{0{,}97}$. 35. $\frac{1}{1{,}03}$. 36. $\frac{1}{0{,}98}$.

37. $\ln 1{,}05$. 38. $\ln 0{,}99$. 39. $1{,}02^3$. 40. $0{,}98^5$.

§ 7. ТЕХНИКА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

I. Основные сведения из теории

1⁰. Закончите определение:
Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется число, ...

2⁰. Заполните таблицу:

Правила дифференцирования	Формулы дифференцирования	
1. $(c)' = \ldots$.	1. $(x^n)' = \ldots$.	8. $(\arcsin x)' = \ldots$.
2. $(x)' = \ldots$.	2. $(\sqrt{x})' = \ldots$.	9. $(\arccos x)' = \ldots$.
3. $(u(x)+v(x))' = \ldots$.	3. $(\sin x)' = \ldots$.	10. $(\operatorname{arctg} x)' = \ldots$.
4. $(cu(x))' = \ldots$.	4. $(\cos x)' = \ldots$.	11. $(\operatorname{arcctg} x)' = \ldots$.
5. $(u(x)\,v(x))' = \ldots$.	5. $(\operatorname{tg} x)' = \ldots$.	12. $(a^x)' = \ldots$.
6. $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \ldots$.	6. $(\operatorname{ctg} x)' = \ldots$.	13. $(e^x)' = \ldots$.
7. $\left(\frac{c}{v(x)}\right)' = \ldots$.	7. $(\ln x)' = \ldots$.	14. $(\log_a x)' = \ldots$.
8. $(f(\varphi(x)))' = \ldots$.		

3⁰. Закончите формулировку правила:
Производная сложной функции $f(\varphi(x))$ равна произведению ...:

$$f(\varphi(x))'_x = \ldots .$$

4^0. Функция $y = f(x)$ задана в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$\left(\dot{y} = \dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt};\ \dot{x} = \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\right).$$

Укажите верные формулы:

а) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$; б) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\ddot{y}}{\ddot{x}}$;

в) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\frac{d}{dt}(\dot{y})}{\dot{x}}$; г) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dt}(\dot{y})$;

д) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)}{\dot{x}}$.

II. Примеры и упражнения

1. Пользуясь определением, найдите производную функции $y = 3x^2 + 2$ в произвольной точке x.

Решение.

1. Дадим независимой переменной x приращение Δx.
2. Наращенное значение $y + \Delta y$ функции $y(x)$: ... .
3. Приращение Δy функции $y(x)$: ... .
4. Отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \dots .$$

5. $y' = \dots$.

2. Найдите производные функций:

1) $y = 3x^2 + 2x + 5$; 5) $y = 20 \sin x - 7 \cos x + 1$;

2) $y = \dfrac{1}{x^2}$; 6) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$;

3) $y = 3^x$; 7) $y = \dfrac{x}{\arccos x}$.

4) $y = \lg_2 x$;

3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите производные функций:

1) $y = 2^{5x}$; $y' = 2^{5x} \cdot \ln 2 \cdot (5x)' = \dots$;
2) $y = \ln(x^2 - 3x)$;
3) $y = \sin(3x + 2)$;
4) $y = \sin^2 6x$.

4. Вычислите $y'(x)$, предварительно прологарифмировав функции:

1) $y = \dfrac{(x+2)^5 \sqrt[11]{x}}{(x^2+3)^{10}}$; 2) $y = x^{\sqrt{x}}$; 3) $y = (\sin x)^{\cos x}$.

Решение.

1. а) $\ln y = 5\ln(x+2) + \frac{1}{11}\ln x - 10\ln(x^2+3)$;

б) $\frac{y'}{y} = \frac{5}{x+2} + \frac{1}{11x} - \frac{10 \cdot 2x}{x^2+3}$; в) $y' = \dots$.

5. Найдите а) $\frac{dy}{dx}$; б) $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функций, заданных параметрически:

1) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = e^{3t}. \end{cases}$

Решение.

1. а) $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot y}{\dot x}$; $\dot y = \frac{dy}{dt} = \dots$; $\dot x = \frac{dx}{dt} = \dots$; $\frac{dy}{dx} = \dots$;

б) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$; $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \dots$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \dots$.

6. Используя формулу дифференцирования сложной функции, найдите а) $y'(x)$; б) $y''(x)$ для неявно заданных функций:

1) $\operatorname{ctg} y = \frac{x}{y}$; 3) $\ln y + e^{\frac{x}{y}} = 10$;

2) $ye^y = e^{x^2}$; 4) $\cos^2 x + \sin(y^2) = 7$.

Решение.

1. а) $(\operatorname{ctg} y)'_x = \left(\frac{x}{y}\right)'_x$; $\frac{-y'}{\sin^2 y} = \frac{y - xy'}{y^2}$; $y' = \dots$.

7. Найдите производные а) $\vec{r}'(t)$; б) $\vec{r}''(t)$ от вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ скалярного аргумента t:

1) $\vec{r}(t) = t^3\vec{i} + \cos^2 t\,\vec{j} - (t^2 - 1)\vec{k}$;

2) $\vec{r}(t) = \ln(t^2+1)\,\vec{i} + e^{-t}\,\vec{j} - \operatorname{ctg} t \cdot \vec{k}$;

3) $\vec{r}(t) = \cos^2 t \cdot \vec{i} - \sin 6t \cdot \vec{j} + \frac{1}{t^2} \cdot \vec{k}$.

Решение.

1. а) $\vec{r}'(t) = \frac{d}{dt}(t^3)\vec{i} + \frac{d}{dt}(\cos t^2)\vec{j} - \frac{d}{dt}(t^2 - 1)\vec{k} = \dots$.

III. Упражнения для самостоятельного решения

Найдите производные следующих функций (для функций, заданных параметрически, найдите и первую, и вторую производные):

1. $y(x) = \frac{x^3}{e^x}$. **2.** $y(x) = \ln x \cdot \lg x$.

3. $y(x) = \sqrt[3]{a + bx^2}$. **4.** $y(x) = e^{x^2} + 5\cos^3 x$.

5. $y(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x}$. **6.** $y(x) = \ln\cos x$.

7. $y(x)=x^{\sin x}$. 8. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

9. $\begin{cases} x=\dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}, \\ y=\dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t+1}, \\ y=\left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2. \end{cases}$

11. $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{y^3}=\sqrt[10]{a^7}$. 12. $x^y=y^x$.

13. $\vec{r}(t)=\sqrt[5]{t^3}\cdot\vec{i}+e^{\frac{1}{t}}\cdot\vec{j}+\ln(6t+\operatorname{arctg} t^2)\,\vec{k}$.

14. $\vec{r}(t)=e^{t^2}\cdot\vec{i}+\cos^2\sqrt{t}\cdot\vec{j}+3^{2t}\cdot\vec{k}$.

15. $\vec{r}(t)=\sin t^2\cdot\vec{i}+\cos(\operatorname{tg} t)\cdot\vec{j}+\arcsin\sqrt{t}\cdot\vec{k}$.

16. $y(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-3})$. 17. $y(x)=e^x(\cos x+\operatorname{tg} x)$.

18. $y(x)=\ln\ln x$. 19. $y(x)=e^{\cos\sqrt{x}}$.

20. $y(x)=\dfrac{\cos(\log_5 x)-\operatorname{tg}(\ln x)}{e^{\arcsin\sqrt{x}}}$.

21. $y(x)=\ln^3\arccos\sqrt{x}$. 22. $y(x)=(x^2+1)^{3x}$.

23. $y(x)=\operatorname{arcctg}\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+10}$. 24. $y(x)=x^{x^4}$.

25. $y(x)=\operatorname{ctg}\ln x^2\cdot\operatorname{tg}(2\ln x)$.

§ 8. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

I. Основные сведения из теории

1°. Закончите определения:

1. Функция $y=f(x)$ называется возрастающей на промежутке $]a; b[$, если для любых $x_1, x_2 \in]a; b[$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \ldots f(x_2)$.

2. Функция $y=f(x)$ называется убывающей на промежутке $]a; b[$, если … .

3. Точка x_0 называется точкой минимума (min) функции $y=f(x)$, если $(\forall x)\,(x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \ldots f(x_0))$.

Число $f(x_0)$ называется … .

4. Точка x_0 называется точкой максимума (max) функции $y=f(x)$ если … .

Число $f(x_0)$ называется … .

5. Точками экстремума функции $y=f(x)$ называются такие ее точки … .

2°. Закончите формулировки утверждений:

1. Для того чтобы функция $y=f(x)$, имеющая на некотором промежутке $]a; b[$ производную $f'(x)$, возрастала на этом промежутке, необходимо и достаточно, чтобы для всех $x \in]a; b[$ выполнялось неравенство $f'(x) \ldots 0$.

2. Для того чтобы функция $y=f(x)$, имеющая на некотором промежутке $]a; b[$ производную $f'(x)$, убывала на этом промежутке, необходимо и достаточно, чтобы … .

3. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0. Если x_0 — точ-

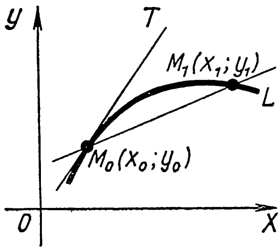


Рис. 25

ка экстремума функции $y = f(x)$, то в этой точке необходимо выполняется одно из следующих условий:

а) либо y' ...; б) либо y' ... .

Точки x_0, в которых либо y' ..., либо y' ..., называются ... точками.

4. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на некотором промежутке $]a; b[$, содержащем критическую точку x_0, и дифференцируема на $]a; x_0[$, $]x_0; b[$, тогда:

1) для того чтобы x_0 была точкой минимума, достаточно выполнения следующих условий: а) $f'(x)$ ... 0 при $x \in]a; x_0[$ и б) $f'(x)$ ...0 при $x \in]x_0; b[$;

2) для того чтобы точка x_0 была точкой максимума, достаточно выполнения следующих условий: а) $f'(x)$ ...0 при $x \in]a; x_0[$ и б) $f'(x)$ ...0 при $x \in]x_0; b[$.

3^0. Раскройте геометрический смысл производной функции $y = f(x)$: значение производной $f'(x)$ при данном значении аргумента x равняется ..., образованного касательной к графику функции $f(x)$ в соответствующей точке M (...) с положительным направлением оси Ox.

4^0. Закончите определения:

1. Пусть дана кривая L (рис. 25) и на ней точка M_0 $(x_0; y_0)$. Возьмем на L точку M_1 $(x_1; y_1)$ и проведем секущую M_0M_1 (точка M_1 может быть расположена по любую сторону от точки M_0). Если при неограниченном приближении точки M_1 по кривой L к точке M_0 (с любой стороны!) секущая M_0M_1 стремится занять положение определенной прямой M_0T, то прямая M_0T называется ..., а ее уравнение имеет вид: $y - y_0 =$ ... .

2. Нормалью к кривой в данной точке называется прямая, проходящая через эту точку ... .

Уравнение нормали имеет следующий вид: ... .

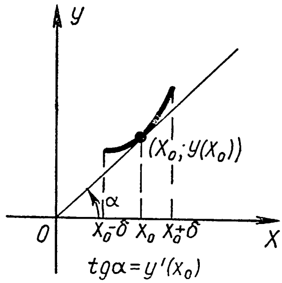
II. Примеры и упражнения

1. На рисунке 26 дан график функции $y = f(x)$. Заполните таблицу, указав знаки $y'(x)$ и $y''(x)$ в отмеченных точках:

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$y'(x)$								
$y''(x)$								

2. Нижеприведенная таблица определяет поведение ряда функций $y = f(x)$ в некоторой U_δ (x_0). Сделайте схематические наброски графиков по образцу, приведенному в первом столбце таблицы:

	1	2	3	4	5	6	7
$y(x_0)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$y'(x_0)$	$+$	$+$	$-$	$-$	0	0	0
$y''(x_0)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	0



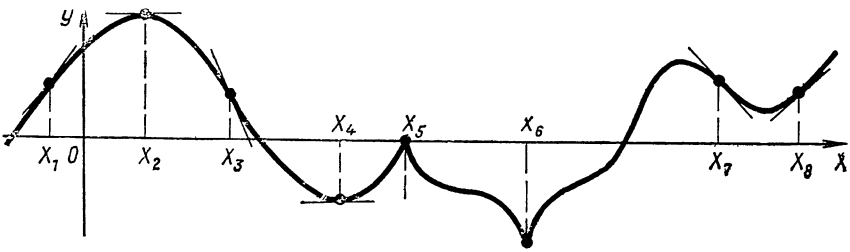


Рис. 26

3. Для нижеприведенных функций $y = f(x)$ найдите точки экстремума и интервалы монотонности. Заполните таблицы и сделайте схематические чертежи, следуя указанной схеме:

1. Найдите $y'(x)$.
2. Определите критические (стационарные) точки.
3. Определите знаки $y'(x)$ в достаточно малых окрестностях найденных критических точек и точек разрыва функции $y = y(x)$.
4. Заполните таблицу:

x			
y'			
y			

5. Сделайте чертеж:

1) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; 2) $y = 3\sqrt[3]{x^2} - 2x$; 3) $y = xe^{-x}$.

4. Напишите уравнения а) касательных и б) нормалей к графикам нижеприведенных функций в точке $M_0(x_0; y_0)$:

1) $y = \sqrt{x}$, $M_0(4; 2)$; 2) $y = \ln x$, $M_0(1; 0)$;
3) $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$, $M_0(x_0; 6)$; 4) $\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t^3}, \\ y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{1}{2t}. \end{cases}$ $M_0(2; 2)$,

III. Упражнения для самостоятельного решения

1. Нижеприводимая таблица определяет поведение ряда функций $y = f(x)$ в $U_\delta(x_0)$. Сделайте схематические наброски графиков по образцу, приведенному в примере 2 (см. примеры):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$y(x_0)$	—	—	—	—	—	—	—	0	0	0	0	0	0	0
$y'(x_0)$	+	+	—	—	0	0	0	+	+	—	—	0	0	0
$y''(x_0)$	+	—	+	—	+	—	0	+	—	+	—	+	—	0

2. Для нижеприводимых функций $y(x)$ выполните задание, предлагаемое в примере 3:

а) $y(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2(x+4)$; б) $y(x) = \frac{x}{\ln x}$;
в) $y(x) = (x-1)e^{3x+1}$; г) $y(x) = \ln \sin x$;
д) $y(x) = x(x-2)$.

3. Напишите уравнения касательной и нормали к кривой, заданной уравнением $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, в точке $M_0(-2; 5)$.

4. Напишите уравнения касательной и нормали к параболе $y = \sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x = 4$.

5. Под каким углом кривая $y = e^{0,5x}$ пересекает прямую $x = 2$?

6. Под каким углом пересекаются параболы $y = x^2$ и $y = x^3$?

У к а з а н и е. Углом между пересекающимися кривыми в точке их пересечения называют угол между касательными к ним, проведенными через эту точку.

§ 9. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ПО ОБЩЕЙ СХЕМЕ

I. Основные сведения из теории

1°. Закончите определения:

1. Корнем (нулем) функции $y = f(x)$ называется такое число x_0, для которого справедливо равенство: ... .

2. Пусть функция $y = f(x)$ определена на симметричном множестве X:

1) если выполнено соотношение $f(x) = f(-x)$, то функция $y = f(x)$ называется ...;

2) если справедливо соотношение $f(x) = -f(x)$, то функция $y = f(x)$ называется ...;

3) если же не выполнено ни одно из этих соотношений, то функция $y = f(x)$ ... .

3. Пусть область определения функции $y = f(x)$ вместе с каждым x содержит числа $x + l$ и $x - l$, где $l \neq 0$ — некоторое число. Функция $y = f(x)$ называется периодической с периодом l, если справедливо соотношение: ... .

4. Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, причем $f'(x)$ существует, тогда:

1) если все точки кривой лежат ... любой ее касательной на этом

промежутке, то кривая называется выпуклой вверх на промежутке $[a; b]$ или просто выпуклой;

2) если все точки кривой лежат ... любой ее касательной на этом промежутке, то кривая называется выпуклой вниз или вогнутой.

5. Точкой перегиба кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, называется точка с координатами ..., отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой.

2^0. Закончите формулировку достаточных условий выпуклости и вогнутости функции $y = f(x)$:

1) если во всех точках промежутка $[a; b]$ $f''(x) < 0$, то кривая $y = f(x)$ ... на $[a; b]$;

2) если во всех точках промежутка $[a; b]$ $f''(x) > 0$, то кривая $y = f(x)$ ... на $[a; b]$.

3^0. Закончите утверждение:

Если $f''(x_0)$ ... или $f''(x_0)$ ... и при переходе через значение $x = x_0$ производная $f''(x_0)$ ... знак, то точка $M(x_0; f(x_0))$ — точка перегиба.

4^0. Закончите определение:

Прямая AB называется асимптотой кривой L, если ... .

5^0. Допишите формулы:

Пусть $y = kx + b$ — асимптота графика функции $y = f(x)$. Тогда параметры k и b определяются по следующим формулам:

а) $k = \lim\limits_{x\to\infty} ...$; б) $b = \lim\limits_{x\to\infty} ...$.

II. Примеры и упражнения

1. Укажите области определения функций:

1) $y = \dfrac{1}{x^2 - 9}$; 3) $y = \lg(x - 1)$;

2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$; 4) $y = \arcsin 2x$;

5) $y = \sin 2x$.

2. Найдите нули (корни) функций:

1) $y = \ln(x - 1)$; 4) $y = 2^x$;

2) $y = x^3 - 9x$; 5) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}$.

3) $y = \sin 2x$;

3. Определите промежутки знакопостоянства функций:

1) $y = x^3 - 5x^2 + 6x$;

2) $y = \ln\dfrac{x+1}{1-x}$; 4) $y = \dfrac{2^x}{x^2 - 9}$;

3) $y = \sin\dfrac{x}{2}$; 5) $y = \ln|x|$.

4. Укажите, какие из нижеприведенных функций являются: а) четными; б) нечетными:

1) $y = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$; 3) $y = \sin\left(\dfrac{\pi n}{e}x\right)\cos\left(\dfrac{e}{\pi n}x\right)$;

2) $y = \dfrac{a^{-x} + a^x}{2}$; 4) $y = x^3 - 9x$;

5) $y = \ln|x|$.

5. Найдите периоды функций:

1) $y=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$;

2) $y=25\cos\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{12}\right)$;

3) $y=15\,\mathrm{tg}\left(\frac{7}{10}x-\frac{\pi}{4}\right)$.

6. Исследуйте поведение нижеприведенных функций $y=f(x)$ в окрестности точек разрыва и на бесконечности. Сделайте схематические чертежи:

1. $y=2^{\frac{1}{x}}$.

Решение.

При $x\to 0+0$ $\frac{1}{x}\to \ldots,\ y\to \ldots$;

при $x\to 0-0$ $\frac{1}{x}\to \ldots,\ y\to \ldots$;

при $x\to +\infty$ $\frac{1}{x}\to \ldots,\ y\to \ldots$;

при $x\to -\infty$ $\frac{1}{x}\to \ldots,\ y\to \ldots$.

2. $y=\frac{x^2+x-1}{(2-x)^2}$.

Решение.

При $x\to 2+0$ $\frac{1}{(2-x)^2}\to \ldots,\ y\to \ldots$;

при $x\to 2-0$ $\frac{1}{(2-x)^2}\to \ldots,\ y\to \ldots$;

при $x\to +\infty$ $y\to \ldots$;

при $x\to -\infty$ $y\to \ldots$.

7. Следуя схеме, приведенной в примере 3 § 8, найдите промежутки монотонности и точки экстремума нижеприведенных функций:

1) $y=\frac{6x^2-x^4}{9}$;

2) $y=(x-1)e^{3x+1}$.

8. Найдите промежутки выпуклости (вогнутости) и координаты точек перегиба нижеприведенных функций $y=y(x)$ по схеме:

1) найдите $y''(x)$;

2) определите абсциссы точек, подозрительных на перегиб;

3) определите знаки $y''(x)$ в достаточно малых окрестностях найденных точек и точек разрыва функции $y=y(x)$;

4) заполните таблицу:

x	
y''	
y	

1. $y = (x - 3)^2 (2 - x)$.

2. $y = \dfrac{7x^2}{(x-1)^3}$.

9. Найдите асимптоты графиков функций:

1) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 40}{2x^2 + 70x - 100}$;

2) $y = \dfrac{1}{9} \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

10. Укажите множество значений функций:

1) $y = \arcsin 2x$;

2) $y = \dfrac{1}{x^2 - 9}$;

3) $y = \ln|x|$;

4) $y = 25 \cos\left(\dfrac{3}{2}x - \dfrac{\pi}{12}\right)$;

5) $y = \dfrac{7x^2}{(x-1)^3}$.

III. Упражнения для самостоятельного решения

Последовательно выполняя требования пунктов 1—10 предыдущего раздела, исследуйте нижеприведенные функции, а затем постройте их графики:

1. $y = \dfrac{1}{4}(x-2)^2(x+4)$.

2. $y = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$.

3. $y = \dfrac{x^2}{2} \ln \dfrac{x}{2}$.

4. $y = x^2 - e^{-x}$.

5. $y = (2 + x^2) e^{-x^2}$.

6. $y = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$.

7. $y = \sqrt{2x - x^2 + 2}$.

§ 10. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

I. Основные сведения из теории

1⁰. Закончите определения:

1. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, если $\forall x \in [a; b]$ справедливо равенство ... .

2. Если $F(x)$ — первообразная $f(x)$, то ..., причем: а) выражение $F(x) + C$ называется ... функции ... и б) обозначается символом ... .

2⁰. Заполните таблицу:

Правила интегрирования	Простейшие интегралы	
1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = \dots$.	1. $\int x^{\alpha}\,dx = \dots\ (\alpha \neq -1)$	7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \dots$.
2. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = \dots$.	2. $\int \frac{dx}{x} = \dots$.	8. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \dots$.
3. $\int dF(x) = \dots$.	3. $\int a^x\,dx = \dots$.	9. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \dots$.
4. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \dots$.	4. $\int \sin x\,dx = \dots$.	10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \dots$.
5. $\int (c f_1(x))\,dx = \dots$.	5. $\int \cos x\,dx = \dots$.	11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \dots$.
6. $\int f(x)\,dx = F(x) + C \Rightarrow$ $\Rightarrow \int f(ax+b)\,dx = \dots$.	6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \dots$.	

3⁰. Закончите формулировку одного из важнейших правил интегрирования:

Пусть известно, что $\int f(x)dx = F(x) + C$. Тогда $\int f(u)du = \dots$, где $u = \varphi(x)$. Например:

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow \int \sin x\,d(\sin x) = \dots .$$

4⁰. Закончите запись формулы интегрирования по частям:

$$\int u(x)\,dv(x) = \dots .$$

II. Примеры и упражнения

1. Используя правило 3⁰, вычислите интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x+k}$;

2) $\int \cos(kx)\,dx$;

3) $\int a^{kx}\,dx$;

4) $\int \frac{dx}{\cos^2(kx)}$;

5) $\int \frac{\sqrt[3]{(\arcsin x)^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

6) $\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$;

7) $\int (3+2x)^4\,dx$.

2. Найдите неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$;

2) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$;

3) $\int x\,5^{x^2}\,dx$;

4) $\int \operatorname{tg} x\,dx$;

5) $\int \operatorname{ctg} x\,dx$;

6) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^4}}$;

7) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$;

8) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x^2}$;

9) $\int \cos x\, e^{\sin x}\,dx$;

10) $\int e^{-x^2-1}\,x\,dx$.

3. Вычислите интегралы, пользуясь указанной подстановкой:

1) $\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}\,dx}{x^2} = \left| x = a \operatorname{tg} t \ \ldots; \right.$

2) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \left| x = 2\sin t \ \ldots; \right.$

3) $\int \frac{dx}{e^x+1} = \left| x = -\ln t \ \ldots . \right.$

4. Используя интегрирование по частям, найдите неопределенные интегралы:

1) $\int x\sin x\,dx$; 2) $\int x^2 \sin x\,dx$; 3) $\int e^x \sin x\,dx$; 4) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$;

5) $\int \sqrt{a^2+x^2}dx$; 6) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$; 7) $\int \ln x\,dx$; 8) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$;

9) $\int \arcsin x\,dx$; 10) $\int \arccos x\,dx$.

Решение.

4) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int x \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \ldots .$

III. Упражнения для самостоятельного решения

Вычислите интегралы:

1. $\int (5+7x)^{17}\,dx$. **2.** $\int \frac{dx}{2+21x}$. **3.** $\int \cos \pi k x\,dx$. **4.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3+4x^2}}$.

5. $\int \frac{e^t\,dt}{\sqrt{1-e^{2t}}}$. **6.** $\int \frac{e^x}{1-e^x}\,dx$. **7.** $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x^2}$. **8.** $\int \frac{dx}{x^2-4x+4}$. **9.** $\int \frac{5^{\sqrt{x}}\,dx}{\sqrt{x}}$.

10. $\int \sin(\operatorname{tg} x)\frac{dx}{\cos^2 x}$. **11.** $\int \frac{x^3-1}{x+1}\,dx$. **12.** $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$. **13.** $\int x \operatorname{arctg} x\,dx$.

14. $\int x \arcsin x\,dx$. **15.** $\int x^2 \ln x\,dx$. **16.** $\int 3^x \cos x\,dx$. **17.** $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$.

18. $\int \sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x^2}$.

§ 11. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОТ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

I. Основные сведения из теории

Закончите формулировку правил:

1°. Для того чтобы вычисление интеграла вида $I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ привести к вычислению одного из табличных интегралов вида $\frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+k^2}$ или $\frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2-k^2}$, необходимо предварительно преобразовать квадратный трехчлен, стоящий в знаменателе, выделив из него полный квадрат: $ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = \ldots$, а затем сделать замену переменной, положив ... .

2^0. Чтобы вычисление интеграла вида $I_2 = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$ свести к вычислению суммы интегралов вида $\lambda \int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx$ и $\mu \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, необходимо провести следующие тождественные преобразования подынтегральной функции:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} = \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)}{ax^2+bx+c} + \ldots .$$

Это позволяет искомый неопределенный интеграл I_2 представить в виде

$$I_2 = \lambda \int \frac{\ldots}{ax^2+bx+c} dx + \mu \int \frac{\ldots}{ax^2+bx+c} dx = I_2^{(1)} + I_2^{(2)}.$$

Вычисление интеграла $I_2^{(2)}$ производится с помощью формулы, указанной в п. 1^0, а чтобы вычислить интеграл $I_2^{(1)}$, надо сделать замену переменной, положив $ax^2+bx+c = \ldots$. Поэтому можно записать $\left(\lambda = \frac{A}{2a}\right)$:

$$I_2^{(1)} = \frac{A}{2a} \int \frac{\ldots}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{2a} \int \ldots .$$

Возвращаясь к интегралу I_2, окончательно получаем:

$$I_2 = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx = I_2^{(1)} + I_2^{(2)} = \ \ldots \ .$$

3^0. Для того чтобы интеграл вида $I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ свести (в зависимости от знака числа a) к вычислению одного из табличных интегралов вида $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}$ или $\int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}$, поступают так же, как и в случае ..., полагая

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = \ldots$$

и делая замену переменной: ... . В итоге получают: ... .

4^0. Для того чтобы интеграл вида $I_4 = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ свести к вычислению суммы интегралов вида $\lambda \int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ и $\mu \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, необходимо, как и в случае ..., провести следующие тождественные преобразования подынтегральной функции:

$$\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) + \ldots}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \ \ldots \ .$$

Это позволяет искомый интеграл I_4 представить в виде

$$I_4 = \lambda \int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx + \mu \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = I_4^{(1)} + I_4^{(2)}.$$

Вычисление интеграла $I_4^{(2)}$ производится с помощью формулы, указанной в п. 3^0, а для вычисления интеграла $I_4^{(1)}$ надо сделать замену переменной, положив $ax^2+bx+c = \ldots$. В результате получаем $\left(\lambda = \frac{A}{2a}\right)$:

$$I_4^{(1)} = \frac{A}{2a}\int \frac{\ldots}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \frac{A}{2a}\int \ldots \,.$$

Возвращаясь к вычислению интеграла I_4, окончательно получаем:

$$I_4 = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = I_4^{(1)} + I_4^{(2)} = \ldots \,.$$

II. Примеры и упражнения

1. Продолжите вычисление неопределенных интегралов:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int \frac{(x+a)-(x-a)}{(x+a)(x-a)}\,dx = \ldots;$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \ldots;$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-6x+9} = \int \frac{dx}{(x-3)^2} = \ldots;$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-8x+15} = \int \frac{dx}{(x-3)(x-5)} = \ldots \,.$

2. Продифференцировав обе части приведенного равенства, найдите λ и μ, затем вычислите интегралы:

1) $\displaystyle\int \frac{(3x+1)\,dx}{x^2-4x+5} = \lambda \ln|x^2-4x+5| + \mu \int \frac{dx}{x^2-4x+5} = \ldots;$

2) $\displaystyle\int \frac{(3x-2)\,dx}{x^2-3x-4} = \lambda \ln|x^2-3x-4| + \mu \int \frac{dx}{x^2-3x-4} = \ldots;$

3) $\displaystyle\int \frac{(7x+4)\,dx}{x^2-10x+25} = \lambda \ln|x^2-10x+25| + \mu \int \frac{dx}{x^2-10x+25} = \ldots \,.$

3. Закончите вычисление неопределенных интегралов, содержащих $\sqrt{ax^2+bx+c}$:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+1}} = \ldots;$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x-4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-4}} = \ldots;$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2+\frac{9}{8}-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}} = \ldots;$

4) $\int \frac{(3x-6)\,dx}{\sqrt{x^2-4x+5}} = \int \frac{3(x-2)\,dx}{\sqrt{(x-2)^2+1}} = \ldots;$

5) $\int \frac{(2x-8)\,dx}{\sqrt{1-x-x^2}} = \int \frac{-(-2x-1+9)\,dx}{\sqrt{1+\frac{1}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}} = \ldots;$

6) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5x^2-2x+1}} = \int \frac{\frac{1}{10}(10x-2+2)\,dx}{\sqrt{5\left(x-\frac{1}{5}\right)^2-\frac{1}{5}+1}} = \ldots .$

III. Упражнения для самостоятельного решения

Найдите интегралы:

1. $\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$. 2. $\int \frac{dx}{1-2x-x^2}$. 3. $\int \frac{dx}{x^2+3x+0{,}25}$.
4. $\int \frac{dx}{2x^2-3x+3}$. 5. $\int \frac{dz}{3z^2-3z+1}$. 6. $\int \frac{(4x+5)\,dx}{2x^2+5x+20}$.
7. $\int \frac{7x\,dx}{x^2+x+1}$. 8. $\int \frac{(3x-8)\,dx}{x^2+x-1}$. 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+10}}$.
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$. 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+0{,}25}}$. 12. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-3x+3}}$.
13. $\int \frac{dz}{\sqrt{3z^2-3z+1}}$. 14. $\int \frac{(3x-8)\,dx}{\sqrt{2x^2+5x+20}}$. 15. $\int \frac{(4x-5)\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.
16. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+x-1}}$.

§ 12. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ И ПРОСТЕЙШИХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ

I. Основные сведения из теории

1^0. Закончите утверждение:

Всякую рациональную функцию можно представить в виде рациональной дроби, т. е. в виде отношения двух ... .

2^0. Заполните таблицу следующих интегралов от простейших дробей:

1) $\int \frac{A}{x-a}\,dx = \ldots;$ 2) $\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = \ldots$, если $n \geqslant 2$;

3)[1] $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx = \ldots;$ 4)[2] $\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx = \ldots .$

3^0. Закончите утверждения:

1. Всякую правильную рациональную дробь можно представить в

[1] Хотя формула справедлива для любого знака дискриминанта квадратного трехчлена, простейшей дроби соответствует $D < 0$.

[2] Нахождение интеграла этого типа предоставляется студентам для самостоятельного рассмотрения дома. См.: Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., 1972, т. 1.

виде ... простейших дробей, т. е. справедливо следующее соотношение:

$$\frac{P_t(x)}{Q(x)}=\frac{P_t(x)}{(x-a)^k(x-b)^l(x^2+px+q)^m(x^2+rx+s)^n}=\|t<k+l+2m+$$
$$+2n\|=\frac{A_1}{(x-a)}\ldots\frac{A_2}{(x-a)^2}\ldots\frac{A_k}{(x-a)^k}\ldots\frac{B_1}{(x-b)}\ldots\frac{B_2}{(x-b)^2}\ldots$$
$$\ldots\frac{B_l}{(x-b)^l}\ldots\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}\ldots\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}\ldots\frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m}\ldots$$
$$\ldots\frac{D_1x+\varepsilon_1}{x^2+rx+s}\ldots\frac{D_2x+\varepsilon_2}{(x^2+rx+s)^2}\ldots\frac{D_nx+\varepsilon_n}{(x^2+rx+s)^n}.$$

2. Правильную рациональную дробь, знаменатель которой разлагается лишь на неповторяющиеся множители первой степени, можно представить в виде суммы простейших дробей, в знаменателях которых стоят ...:

$$\frac{P_t(x)}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}=\ldots.$$

3. Если знаменатель правильной рациональной дроби содержит лишь множители первой степени, среди которых имеются повторяющиеся, то справедливо соотношение

$$\frac{P_t(x)}{(x-a_1)(x-a_2)^k(x-b_1)(x-b_2)^l}=\frac{A_1}{x-a_1}\ldots\frac{A_2}{x-a_2}\ldots\frac{A_3}{(x-a_2)^2}\ldots$$
$$\ldots\frac{A_{k+1}}{(x-a_2)^k}+\frac{B_1}{x-b_1}\ldots\frac{B_2}{x-b_2}\ldots\frac{B_3}{(x-b_2)^2}\ldots\frac{B_{l+1}}{(x-b_2)^l}.$$

4. Правильную рациональную дробь, знаменатель которой разлагается лишь на неповторяющиеся множители второй степени с отрицательными дискриминантами, можно представить в виде суммы простейших дробей, в знаменателях которых стоят...:

$$\frac{P_t(x)}{(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)\ldots(x^2+p_nx+q_n)}=\ldots.$$

5. Если знаменатель правильной рациональной дроби содержит лишь множители второй степени с отрицательными дискриминантами, среди которых есть повторяющиеся множители, то справедливо соотношение

$$\frac{P_t(x)}{(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)^k(x^2+p_3x+q_3)(x^2+p_4x+q_4)^l}=\ldots.$$

4^0. Закончите формулировку правил:

1. Для того чтобы интеграл вида $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right)dx$[1] преобразовать к виду $\int R(t)dt$, надо ввести новую переменную t, положив $t^k=x$, где k ... .

2. Для того чтобы интеграл вида $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$

[1] $R(\ldots)$ — символ рациональной дроби своих аргументов.

свести к интегралу от рациональной функции, надо сделать замену

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^k, \text{ где } k \ldots .$$

II. Примеры и упражнения

1. Какие из нижеприведенных дробей являются правильными и какие — неправильными:

1) $\frac{3}{x-2}$; 2) $\frac{x+1}{x+7}$; 3) $\frac{A}{(x-a)^n}$; 4) $\frac{x^2+5x+6}{(x-2)(x+3)}$;

5) $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$; 6) $\frac{4x+13}{(x^2+5x+6)^2}$; 7) $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$?

2. Выделите целую часть неправильной дроби: а) путем деления многочлена на многочлен или б) путем формирования в числителе выражения, равного знаменателю. Представьте рациональную дробь в виде выделенной целой части и правильной остаточной дроби:

1) $\frac{x+1}{x+7}=\frac{x+1+6-6}{x+7}=1-\frac{\ldots}{\ldots}$;

2) $\frac{x^5-x^3+4}{x^3+2x^2+3x+6}\Rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} -\ x^5-x^3+4 & x^3+2x^2+3x+6 \\ \underline{x^5+2x^4+3x^3+6x^2} & \overline{x^2-2x\ldots} \\ -\ -2x^4-4x^3-6x^2+4 & \\ \underline{-2x^4-4x^3-6x^2-12x} & \\ \ldots & \end{array};$$

3) $\frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}=\ldots$; 4) $\frac{x^6+2x^5-1}{x^3+2x^2+2x}=\ldots$.

3. Вычислите нижеприведенные интегралы, используя таблицу интегралов от простейших дробей:

1) $\int\frac{dx}{7-x}$; 2) $\int\frac{dx}{(2x+3)^3}$; 3) $\int\frac{(x+5)\,dx}{2x^2+2x+3}$;

4) $\int\frac{(3x+5)\,dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

4. Проинтегрируйте рациональную дробь, знаменатель которой разлагается лишь на неповторяющиеся множители первой степени:

$$\int\frac{3x^2+2x-5}{(x+1)(x-1)(x-2)}\,dx.$$

Решение.

1. Выясним, является ли подынтегральная дробь правильной рациональной дробью. Если нет, то выделим ее целую часть: ... .

2. Запишем подынтегральную дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{3x^2+2x-5}{(x+1)(x-1)(x-2)}=\frac{A}{\ldots}+\frac{B}{\ldots}+\frac{C}{\ldots}.$$

3. Методом подстановки найдем неопределенные коэффициенты

A, B и C: $3x^2 + 2x - 5 = A(x-1)(x-2) + B(x+1)(x-2) + C(x-1)(x+1)$.

а) $x = 2 \Rightarrow \ldots$; б) $x = 1 \Rightarrow \ldots$; в) $x = -1 \Rightarrow \ldots$.

(Чем руководствовались, полагая последовательно $x = 2$, $x = 1$, $x = -1$?)

4. Искомый интеграл

$$\int \frac{3x^2 + 2x - 5}{(x+1)(x-1)(x-2)}\,dx = \ldots .$$

5. Проинтегрируйте рациональную дробь, знаменатель которой разлагается лишь на множители первой степени, среди которых имеются повторяющиеся:

$$\int \frac{x^3\,dx}{(x+2)^2(x-1)} = \ldots .$$

Решение.

1. Выясним, является ли подынтегральная дробь правильной рациональной дробью. Если нет, то выделим ее целую часть... .

2. Запишем правильную часть подынтегральной дроби в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x^3}{(x+2)^2(x-1)} = \ldots + \frac{\ldots}{(x+2)^2(x-1)} =$$

$$= \ldots + \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x-1}.$$

3. Найдем неопределенные коэффициенты A, B и C методом приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x: ... .

4. Искомый интеграл

$$\int \frac{x^3\,dx}{(x+2)^2(x-1)} = \ldots .$$

6. Проинтегрируйте правильную рациональную дробь, знаменатель которой разлагается лишь на неповторяющиеся множители второй степени с отрицательными дискриминантами и, возможно, на множители первой степени:

$$\int \frac{(2x-1)\,dx}{(x^2+x+2)(x-1)}.$$

Решение.

1. Запишем правильную подынтегральную дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{2x-1}{(x^2+x+2)(x-1)} = \frac{A}{\ldots} + \frac{Mx+N}{\ldots}.$$

2. Найдем неопределенные коэффициенты A, M и N путем комбинирования метода подстановки (полагая $x = 1$) и метода приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x:

$$2x - 1 = A(x^2 + x + 2) + (Mx + N)(x - 1),$$

$$x = 1 \Rightarrow \ldots .$$

3. Искомый интеграл

$$\int \frac{(2x-1)\,dx}{(x^2+x+2)(x-1)} = \dots .$$

7. Проинтегрируйте правильную рациональную дробь, знаменатель которой разлагается на множители второй степени, имеющие отрицательные дискриминанты, среди которых есть повторяющиеся множители:

$$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^2}.$$

Решение.

1. Запишем правильную подынтегральную дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{M_1x+N_1}{\dots} + \frac{M_2x+N_2}{\dots}.$$

2. Найдем неопределенные коэффициенты M_1, M_2, N_1, N_2: ... .

3. Искомый интеграл

$$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^2} = \dots .$$

8. Используя правило нахождения интегралов вида $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}\right)dx$, вычислите интегралы:

1) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{3}}} = \left\| t = x^{\frac{1}{6}};\ dx = \dots \right\| = \dots;$$

2) $$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{4}}}\,dx = \left\| t = x^{\frac{1}{4}};\ dx = \dots \right\| = \dots .$$

9. Используя правило нахождения интегралов вида

$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$, вычислите интегралы:

1) $$\int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}}\,dx = \| 3x+4 = t^3;\ dx = \dots \| = \dots ;$$

2) $$\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,dx = \| 1+x = t^2;\ dx = \dots \| = \dots .$$

III. Упражнения для самостоятельного решения

Вычислите интегралы:

1. $\int \frac{x^2+5x+6}{(x+2)(x+3)}dx$.
2. $\int \frac{x^5-x^3+4}{x^3+2x^2+3x+6}dx$.
3. $\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx$.
4. $\int \frac{dx}{(3-5x)^3}$.
5. $\int \frac{xdx}{x^3-1}$.
6. $\int \frac{dx}{x^2(x+1)^3}$.
7. $\int \frac{dx}{(x^2+4)(x-1)}$.
8. $\int \frac{dx}{(x^2+3)(x^2-4x+13)}$.
9. $\int \frac{3xdx}{(x^2+2x+2)^2}$.
10. $\int \frac{x^2dx}{(x^3+8)^2}$.
11. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+1}$.
12. $\int \frac{\sqrt[3]{x}-16}{\sqrt[4]{x}+8}dx$.
13. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.
14. $\int \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}dx$.
15. $\int \frac{1-\sqrt{x-1}}{1+\sqrt[3]{x-1}}dx$.

§ 13. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

I. Основные сведения из теории

1⁰. Заполните таблицу простейших тригонометрических подстановок:

Интеграл	Подстановка	dt
$\int R(\sin x)\cos x\,dx = \ldots$.	$t = \ldots$.	$dt = \ldots$.
$\int R(\cos x)\sin x\,dx = \ldots$.	$t = \ldots$.	$dt = \ldots$.
$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \ldots$. $\cos x = \ldots$, $\sin x = \ldots$.	$t = \ldots$.	$dt = \ldots$.

2⁰. Закончите формулировку правил:

1. Если n — четное число ($n = 2k$), то вычисление интегралов вида $\int\cos^n x\,dx$, $\int\sin^n x\,dx$ осуществляется с использованием формул тригонометрии:

$$\sin^2 x = \frac{\ldots\cos 2x}{\ldots},\quad \cos^2 x = \frac{\ldots}{\ldots}.$$

2. Если m и n — четные неотрицательные числа, то вычисление интегралов вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$ осуществляется... .

3. Интегралы вида $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$ и $\int \cos mx \cos nx dx$ вычисляются при помощи следующих тригонометрических равенств:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x);$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x);$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x).$$

II. Примеры к упражнениям

1. Используя табличные интегралы и вводя надлежащие замены, вычислите интегралы:

1) $\int \sin^3 x dx = -\int \sin^2 x d(\cos x) = -\int (1-\cos^2 x) d\cos x =$ $= \ldots;$

2) $\int \cos^3 x dx = \ldots$.

2. Найдите интегралы:

1) $$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x - 5} dx = \left\| \begin{matrix} \cos x = t, & x = \ldots \\ \sin x = \ldots, & dx = \ldots \end{matrix} \right\| = \ldots;$$

2) $$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x} dx = \ldots .$$

3. Используя универсальную подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, найдите интегралы:

1) $$\int \frac{dx}{\sin x} = \left\| \begin{matrix} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, & \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, & dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{matrix} \right\| = \ldots;$$

2) $$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \ldots;$$

3) $$\int \frac{dx}{5 + 4\sin x} = \left\| \begin{matrix} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, & \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, & dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{matrix} \right\| = \ldots;$$

4) $$\int \frac{dx}{5 + \sin x + 3\cos x} = \ldots; \quad 5) \int \frac{dx}{\sin^3 x} = \ldots .$$

4. Используя тригонометрические формулы $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ и $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, понизьте степень подынтегрального выражения и вычислите интегралы:

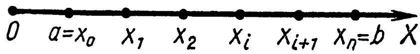


Рис. 27

1) $\int \sin^2 x\,dx = \ldots$; 3) $\int \cos^4 x\,dx = \ldots$;

2) $\int \cos^2 x\,dx = \ldots$; 4) $\int \cos^2 x \sin^2 x\,dx = \ldots$.

5. Вычислите интегралы:

1) $\int \mathrm{tg}^2 x\,dx = \|\mathrm{tg}^2 x = \sec^2 x - 1\| = \int \sec^2 x\,dx - \int dx = \ldots$;

2) $\int \mathrm{tg}^3 x\,dx = \int \mathrm{tg}\, x\, \mathrm{tg}^2 x\,dx = \ldots$.

6. Используя соответствующие тригонометрические формулы, вычислите интегралы:

1) $\int \sin 10x \sin 15x\,dx$;

2) $\int \sin 3x \cos 5x\,dx$;

3) $\int \cos\frac{x}{2} \cos\frac{x}{3}dx$.

III. Упражнения для самостоятельного решения

1. $\int \cos^3 x dx$. **2.** $\int \sin^5 x dx$. **3.** $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$. **4.** $\int \cos^4 6x dx$.

5. $\int \frac{\sin x \cos x}{(4 + \cos x)^2} dx$. **6.** $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$. **7.** $\int \frac{\sin x}{1 - \sin x} dx$.

8. $\int \mathrm{ctg}^4 x dx$. **9.** $\int \left(\mathrm{tg}^3 \frac{x}{3} + \mathrm{tg}^4 \frac{x}{3}\right) dx$. **10.** $\int \cos\frac{x}{4} \sin\frac{x}{3}\,dx$.

11. $\int \sin\frac{x}{3} \sin\frac{x}{2}\,dx$. **12.** $\int \cos 4x \cos 7x dx$.

§ 14. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ФИЗИКИ

I. Основные сведения из теории

1^0. Закончите определения:

1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, который разбит произвольным образом на n элементарных непересекающихся отрезков $[x_i; x_{i+1}]$, таких, что $\bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i; x_{i+1}] = [a; b]$, $x_0 = a$, $x_n = b$.

Пусть на каждом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ произвольным образом выбрана точка ξ_i и для каждого значения i вычислено $f(\xi_i)$ (рис. 27). Тогда интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется … .

Замечание. На рисунке 27 рассмотрен случай $0 < a$. Из определения следует, что знаки чисел a и b могут быть … .

2. Если при любых разбиениях отрезка $[a; b]$, таких, что $\max\Delta x_i \to 0$, и при любом выборе точки ξ_i из отрезка $[x_i; x_{i+1}]$ … к одному и тому же пределу, то этот предел называют определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначают…, причем:

число a называют ...,
число b — ...,
функцию $f(x)$ — ...,
отрезок $[a; b]$ — ...,
x — ... .

2⁰. Закончите формулировку теоремы существования определенного интеграла:

Если функция $f(x)$ ... на отрезке $[a; b]$, то она интегрируется на этом отрезке, т. е. ...существует.

3⁰. Перечислите свойства определенного интеграла, вытекающие из общих свойств предельного перехода:

1) $\int\limits_a^b Af(x)dx = \ldots,\ A = \mathrm{const};$

2) $\int\limits_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \ldots;$

3) $\forall x \in [a; b]:\ f(x) \leqslant \varphi(x) \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \ \ldots \int\limits_a^b \varphi(x)dx;$

4) $\forall a,\ b,\ c:\ \int\limits_a^b f(x)dx \ \ldots \int\limits_a^c f(x)dx \ \ldots \int\limits_c^b f(x)dx$, если эти три интеграла существуют;

5) $\int\limits_a^b f(x)dx \ \ldots \int\limits_b^a f(x)\,dx.$

4⁰. Закончите формулировку теоремы Ньютона — Лейбница:

Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная непрерывной функции $f(x)$, то справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \ldots .$$

5⁰. Найдите путь, пройденный точкой, движущейся по прямой с известной скоростью, являющейся функцией времени t.

Решение.

1. Выделим достаточно малый промежуток времени $[t; t + dt]$, на котором скорость $v(t)$ можно приближенно считать постоянной.
2. Определим «элемент пути» — путь, пройденный точкой за указанный промежуток времени: $ds = v(t) \ldots$.
3. Проинтегрируем «элемент пути» от начального момента времени t_0 до конечного момента t_k. Получаем искомый путь:

$$s = \int\limits_{t_0}^{t_k} \quad \ldots .$$

6⁰. Определите работу A, совершаемую материальной точкой, движущейся по прямолинейному пути (вдоль оси Ox) под действием переменной силы $\vec{F}(x)$, при условии, что направление $\vec{F}(x)$ совпадает с направлением движения.

Решение.

1. Выделим достаточно малое перемещение $[x; x + dx]$, на котором приложенную силу $\vec{F}(x)$ можно приближенно считать постоянной.

2. Определим «элемент работы» — работу, совершаемую силой $F(x)$ на указанном перемещении $(F(x) = |\vec{F}(x)|)$: $dA = F(x) \ldots$.

3. Проинтегрируем «элемент работы» от начальной точки $x = a$ до конечной точки $x = b$. Получим искомую работу:

$$A = \int_a^b \ldots .$$

7⁰. Закончите определение:

Пусть на плоскости с введенной декартовой прямоугольной системой координат дана система материальных точек $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$,..., ..., $P_n(x_n; y_n)$ с массами соответственно $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Тогда:

1) произведение $x_i m_i$ называется... массы m_i относительно...;

2) произведение $y_i m_i$ называется ... массы m_i относительно оси...;

3) если x_c и y_c — координаты центра тяжести данной системы $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$, ..., $P_n(x_n; y_n)$, то они определяются по следующим формулам:

$$\begin{cases} x_c = \ldots, \\ y_c = \ldots . \end{cases}$$

8⁰. Найдите центр тяжести плоской криволинейной пластинки (плотность известна) (рис. 28).

Решение.

1. Возьмем элементарный отрезок $[x; x + dx]$ оси Ox. В криволинейной трапеции выделится элементарная полоска, которую при достаточно малом... можно приближенно считать прямоугольником.

2. Массу полоски $dm = \rho y dx$ будем считать сосредоточенной в ее центре тяжести, т. е. в точке $P\left(x; \frac{y}{2}\right)$. Тогда «элемент» статического момента dM_x криволинейной трапеции относительно оси Ox найдется как произведение массы dm на ординату точки P: $dM_x = dm \ldots$.

3. Аналогично определим «элемент» статического момента dM_y той же криволинейной трапеции относительно оси Oy: $dM_y = dm \ldots$.

4. Для нахождения M_x и M_y проинтегрируем dM_x, dM_y по отрезку $[a; b]$: $M_x = \ldots$, $M_y = \ldots$.

5. Используя соотношения $x_c m = M_y$, $y_c m = M_x$, в итоге находим: $x_c = \ldots$, $y_c = \ldots$.

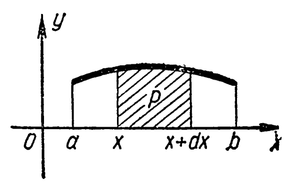


Рис. 28

9⁰. Определите количество электричества Q, протекающего через поперечное сечение проводника за промежуток времени $[t_1; t_2]$.

Решение.

1. Выделим элементарный отрезок времени $[t; t + dt]$, такой, в пределах которого силу тока I можно приближенно считать постоянной. Тогда «элемент» количества

электричества dQ определяется формулой $dQ = I(t) \ldots$.

2. Для того чтобы найти Q, проинтегрируем dQ в промежутке $[t_1; t_2]$:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} \ldots .$$

II. Примеры и упражнения

1. Найдите путь, пройденный за первые 10 с движения телом, свободно падающим в пустоте, если известно, что скорость v свободного падения в пустоте определяется формулой $v = v_0 + gt$, где v_0 — начальная скорость, g — ускорение силы тяжести, t — протекшее время.

Решение.

1. Воспользуемся формулой, приведенной в 5^0 данного параграфа. Учитывая, что $t_0 = 0$, $t_k = 10$, $v_0 = 0$, $g = 9{,}8$ м/с^2, находим искомое расстояние:

$$s = \int_0^{10} \ldots .$$

2. Какую работу A_h надо затратить, чтобы тело массой m поднять с поверхности Земли на высоту h? Чему равна эта работа, если тело должно быть удалено в бесконечность?

Решение.

1. Используем формулу $F = F(r) = k\dfrac{mM}{r^2}$, где m — масса тела, M — масса Земли, r — расстояние от тела до центра Земли, k — постоянная, определяемая из условия, что на поверхности Земли ($r = R$) $F = mg$:

$$mg = k\frac{mM}{R^2}, \text{ откуда } k = \frac{gR^2}{M}.$$

2. Сила $F(r)$ направлена по радиусу от центра Земли, и в том же направлении происходит перемещение тела из начальной точки $a = R$ до конечной точки $b = R + h$. Искомая работа: $A_h = \int\limits_R^{R+h} \ldots$.

3. $A_\infty = \lim\limits_{h\to\infty} A_h = \lim\limits_{h\to\infty} \ldots$.

3. Два электрических заряда $e_1 = e_2 = \dfrac{1}{4}10^{-7}$ Кл находятся на расстоянии 40 см друг от друга. Разделяющей их средой служит парафин. Сначала оба заряда закреплены неподвижно, а затем заряд e_1 освобождается и под действием силы отталкивания удаляется от заряда e_2 на расстояние, равное 1 м. Какая работа при этом будет произведена силой отталкивания?

Решение.

1. По закону Кулона сила $F(x)$ взаимодействия зарядов e_1 и e_2 равна: $F(x) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{e_1e_2}{\varepsilon x^2}$, где $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — диэлектриче-

ская проницаемость вакуума, $\varepsilon = 2$ — диэлектрическая проницаемость парафина.

2. Искомая работа: $A = \int\limits_{...}^{...} \dots$.

4. Определите координаты центра тяжести плоской однородной ($\rho = 1$) фигуры, ограниченной синусоидой $y = \sin x$ и отрезком оси Ox от $x = 0$ до $x = \pi$.

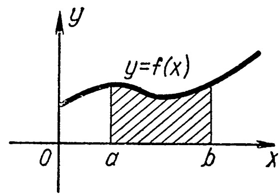


Рис.29

Решение.

Для рассматриваемой задачи $a = 0$, $b = \pi$, $y(x) = \sin x$. Следовательно,

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{\int\limits_0^{\pi} x \sin x dx}{\int\limits_0^{\pi} \sin dx} = \dots, \\ y_c = \dfrac{\int\limits_0^{\pi} \dots}{\int\limits_0^{\pi} \dots} = \dots . \end{cases}$$

III. Упражнения для самостоятельного решения

1. Скорость движения задается формулой $v = \sqrt{1 + 4t}$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой за первые 10 с от начала движения.

2. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 6 см, если сила в 1 Н растягивает ее на 1 см?

3. Найдите координаты центра тяжести треугольника, ограниченного прямыми $x + y = 3$, $x = 0$, $y = 0$. Плотность $\rho = 1$.

4. Найдите координаты центра тяжести фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$.

5. Сила тока I в проводнике меняется во времени по закону $I = 2 + 3t^2$ (А). Найдите количество электричества, протекшее через поперечное сечение проводника за время от $t_1 = 3$ до $t_2 = 6$ с.

6. Сила тока (городского), имеющего 50 колебаний в минуту, изменяется по закону $I = A_0 \sin \pi t$ (А), где A_0 — его амплитуда. Найдите количество электричества, протекшего через поперечное сечение проводника за время от $t_1 = 0$ до $t_2 = 0{,}02$ с.

§ 15. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

I. Основные сведения из теории

Закончите утверждения:

1°. Если плоская непрерывная кривая задана в декартовой системе координат уравнением $y = f(x) \geqslant 0$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox (рис. 29), определяется формулой $S = \dots$.

2°. Если плоская непрерывная кривая задана уравнениями в параметрической форме $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t) \geqslant 0$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox, определяется формулой $S = \ldots$, где значения верхнего и нижнего пределов интегрирования определяются из уравнений $a = \varphi(\ldots)$ и $b = \psi(\ldots)$.

3°. Если плоская непрерывная кривая задана в полярных координатах (рис. 30) уравнением $r = f(\varphi)$, то площадь сектора, ограниченного этой кривой и двумя полярными радиусами, соответствующими значениям $\varphi_1 = \alpha$ и $\varphi_2 = \beta$, определяется формулой $S = \ldots$.

4°. Длина дуги плоской гладкой кривой, заданной в декартовой системе координат уравнением $y = f(x)$ и ограниченной точками с абсциссами $x = a$ и $x = b$, определяется формулой $l = \ldots$.

5°. Если плоская гладкая кривая задана в параметрической форме уравнениями $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$, а значения параметра, соответствующие началу и концу дуги, равны t_1 и t_2, то длина дуги определяется формулой $l = \ldots$.

6°. Если плоская гладкая кривая задана в полярных координатах уравнением $r = f(\varphi)$, где $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, то длина дуги определяется формулой $l = \ldots$.

7°. Формулой $V_x = \pi\int\limits_a^b y^2\,dx$ определяется объем тела, образованного вращением вокруг оси... криволинейной трапеции, ограниченной кривой..., осью... и двумя прямыми... и ... .

8°. Формулой $V_y = \pi\int\limits_a^b xy\,dx$ определяется... .

9°. Формулой $S_x = 2\pi\int\limits_a^b y\,dl = 2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ определяется площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси ... дуги плоской гладкой кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, где $a \leqslant x \leqslant b$.

II. Примеры и упражнения

1. Вычислите площадь параболического сектора, образованного параболой $y = x^2$ и прямой $y = 1$. Сделайте чертеж.

Решение.

1. Абсциссы точек пересечения параболы и прямой: ... .

2. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y = x^2$, осью Ox, а также прямыми...: $S_1 = \ldots$.

3. Площадь квадрата со стороной, длина которой равна ...: $S_2 = \ldots$.

4. Площадь параболического сектора: $S = \ldots$.

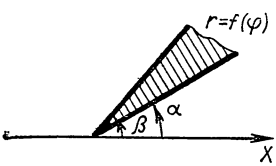


Рис. 30

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды $y = \sin x$ и осью абсцисс. Сделайте чертеж.

Решение.

1. Заметим, что одна полуволна синусо-

иды соответствует значениям x, меняющимся в пределах от $x = \ldots$ до $x = \ldots$.

2. Искомая площадь: $S = \ldots$.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y^2 = x$. Сделайте чертеж.

Решение.

1. Абсциссы точек пересечения данных парабол: ... .
2. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной: а) кривой ...; б) осью...; в) прямыми ... и ...: $S_1 = \ldots$.
3. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной: а) кривой ...; б) осью...; в) прямыми ... и...: $S_2 = \ldots$.
4. Искомая площадь: $S = \ldots$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$. Сделайте чертеж.

Решение.

1. Значения параметра t, соответствующие началу и концу арки: $t = \ldots$ и $t = \ldots$.
2. Вычислим dx: ... .
3. Искомая площадь: $S = \ldots$.

5. Вычислите площадь одного лепестка лемнискаты Бернулли $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$. Сделайте чертеж.

Решение.

1. Заметим, что один лепесток лемнискаты Бернулли заключен между значениями полярного угла $\alpha = \varphi_1 = \ldots$ и $\beta = \varphi_2 = \ldots$.
2. Искомая площадь: $S = \ldots$.

6. Вычислите длину дуги окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

Решение.

1. Запишем формулу, позволяющую найти l_1 — длину одной четвертой части окружности, соответствующей изменению координаты x от 0 до R:

а) запишем уравнение окружности в виде $y = \ldots$;

б) вычислим y': ...; в) составим $\sqrt{1 + y'^2}$: ...;

г) вычислим l_1: ... .

2. Длина искомой окружности: $C = 4l_1 = \ldots$.

7. Вычислите длину астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$. Сделайте чертеж.

Решение.

1. Найдем $\dot{x}$ и $\dot{y}$: ... .
2. Вычислим $\sqrt{\dot{y}^2 + \dot{x}^2}$: ... .
3. Значения параметра t, соответствующие концам дуги четвертой части астроиды: $t = \ldots$ и $t = \ldots$.
4. Длина дуги четвертой части астроиды: $l_1 = \ldots$.
5. Длина астроиды: $l = 4l_1 = \ldots$.

8. Вычислите длину кардиоиды $r = a\,(1 + \cos \varphi)$. Сделайте чертеж.

Решение.

1. Заметим, что вся кривая описывается точкой $(r; \varphi)$ при изменении φ от ... до ... .

2. Найдем r': ... .

3. Вычислим $\sqrt{r^2 + r'^2}$: ... .

4. Искомая длина: $l = ...$.

9. Найдите объем тела, образуемого вращением фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды $y = \sin x$ и осью абсцисс вокруг: 1) оси Ox; 2) оси Oy.

10. Вычислите площадь поверхности (катеноида), образованной вращением цепной линии $y = ach\frac{x}{a}$ вокруг оси Ox в пределах от $x = 0$ до $x = a$. Сделайте чертеж.

Решение.

1. Выразим $y = ach\,\frac{x}{a} = ...$.

2. Вычислим y': ... .

3. Найдем $\sqrt{1 + y'^2}$: ... .

4. Площадь поверхности катеноида: $S_x = ...$.

11. Вычислите площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ вокруг оси абсцисс.

Решение.

1. Заметим, что крайним точкам арки циклоиды соответствуют следующие значения параметра: $t = ...$ и $t = ...$.

2. Найдем dx и dy: ... .

3. Вычислим $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$: ... .

4. Искомая площадь поверхности: $S_x = ...$.

III. Упражнения для самостоятельного решения

1. Вычислите площадь:

а) фигуры, ограниченной кривой $y = \ln x$, осью Ox и прямой $x = e$;

б) фигуры, ограниченной параболой $y = 2x - x^2$ и прямой $y = -x$;

в) фигуры, ограниченной параболой $y^2 = x$, гиперболой $xy = 8$ и отрезком прямой, соединяющим точку $(8; 1)$ гиперболы с точкой $(8; -\sqrt{8})$ параболы;

г) эллипса, заданного уравнениями $x = a\cos t$, $y = b\sin t$;

д) фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$;

е) фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos\varphi)$;

ж) фигуры, ограниченной улиткой Паскаля $r = 2a(2 + \cos\varphi)$.

2. Вычислите длину:

а) дуги кривой $y = 1 - \ln\cos x$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{4}$;

б) дуги развертки окружности $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ от $t = 0$ до $t = \pi$;

в) дуги кривой $y = \ln x$ от точки $(\sqrt{3}; \ln\sqrt{3})$ до точки $(\sqrt{8}; \ln\sqrt{8})$;

г) первого витка архимедовой спирали $r = a\varphi$;

д) окружности $r = 2a \sin \varphi$.

3. Докажите, что длина эллипса $x = \sqrt{2} \sin t$, $y = \cos t$ равна длине одной волны синусоиды $y = \sin x$.

4. Вычислите объем:

а) тела, образованного вращением фигуры, ограниченной полукубической параболой $y^2 = x^3$, осью Ox и прямой $x = 1$, вокруг оси Ox;

б) усеченного кругового конуса с радиусами оснований R и r $(r < R)$ и высотой h;

в) тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$;

г) тела, ограниченного поверхностью, образованной вращением кривой $y = \frac{1}{1+x^2}$ вокруг ее асимптоты.

5. Вычислите площадь поверхности:

а) образованной вращением вокруг оси Ox тангенсоиды $y = \operatorname{tg} x$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{4}$;

б) шара радиуса r;

в) образованной вращением вокруг оси Ox трактрисы $x = a\left(-\cos t + \ln \frac{1+\cos t}{\sin t}\right)$, $y = a \sin t$.

§ 16. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

I. Основные сведения из теории

1^0. Закончите определения:

1. Дифференциальным уравнением называется соотношение, в которое входят независимая переменная, неизвестная функция и ... .

2. Наивысший порядок входящих в дифференциальное уравнение производных или дифференциалов искомой функции называется его ... .

3. Дифференциальное уравнение называется уравнением первого порядка, если в него входят... . Уравнение первого порядка всегда можно представить в виде $F(...) = 0$.

2^0. Подставляя функцию $y = 2 \sin x$ и ее производную в дифференциальное уравнение $y' \operatorname{tg} x = y$, докажите, что она служит решением этого уравнения.

Доказательство.

1. Найдем производную функции $y = 2 \sin x$: ... .

2. Подставим эту функцию и ее производную в левую и правую части данного уравнения: $y' \operatorname{tg} x = ...$, $y = 2 \sin x$.

3. Получим тождество: ... .

3^0. Закончите определения:

1. Функция $f(x)$ называется решением дифференциального уравнения первого порядка, если ... .

2. Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется... .

3. Дифференциальное уравнение вида $f_1(x) f_2(y)\, dx + g_1(x) g_2(y)\, dy = 0$ называется ... .

4. Дифференциальное уравнение, которое можно представить в виде $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, называется ... .

5. Линейным уравнением первого порядка называется дифференциальное уравнение, которое представимо в виде ... .

II. Примеры и упражнения

1. Докажите, что при любом значении C функция $y = \sqrt{e^{2x} + C}$ служит решением уравнения $yy' - e^{2x} = 0$. Подберите число C так, чтобы решение удовлетворяло начальному условию $y\big|_{x=0} = 2$.

2. Составьте дифференциальное уравнение семейства окружностей $(a - x)^2 + y^2 = 1$.

Указание. Продифференцируйте обе части данного уравнения и исключите параметр a.

3. Какие из нижеприведенных уравнений являются уравнениями: 1) первого порядка; 2) второго порядка:

а) $(x - 1)y' = y^2$; б) $y' = 2xy + x^3$; в) $y = xe^{y'}$; г) $\operatorname{tg} x \sin^2 y\, dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y\, dy = 0$; д) $y'' = x$; е) $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$; ж) $y' = e^{2x} - y$; з) $yy'' + (y')^2 = 1$; и) $y' = \frac{10x + 8y}{7x + 5y}$; к) $x^2\,dy - (2xy + 3)\,dx = 0$; л) $x^2 y' = xy + (x^2 + y^2) \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; м) $y' \operatorname{tg} x = y$.

4. Какие из уравнений, приведенных в примере 3, являются: 1) уравнениями с разделяющимися переменными; 2) однородными уравнениями; 3) линейными уравнениями (первого порядка)?

5. Определите, однородно ли уравнение $(y - x)\,dx + (x + 2y)\,dy = 0$, не приводя его к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Указание. Для того чтобы определить, однородно ли уравнение вида $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$, не обязательно приводить его к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Можно воспользоваться следующим легко выводимым правилом: если при умножении обоих аргументов функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ на произвольное число t вид уравнения не изменится, то оно однородно. Обычно такую проверку делают устно. Например, умножив на t аргументы x и y функций $y - x$ и $x + 2y$, получим: $(ty - tx)\,dx + (tx + 2ty)\,dy = 0$ или $(y - x)\,dx + (x + 2y)\,dy = 0$. Уравнение не изменилось, следовательно, оно однородно.

6. Проверьте, однородны ли уравнения:

а) $(x + y)\,dx + (y - x)\,dy = 0$; б) $y\,dx + (x - y^2)\,dy = 0$; в) $\sin x\,dx + y\,dy = 0$.

7. Проинтегрируйте уравнение $\cos x\, dx = \frac{dy}{y+1}$, в котором переменные разделены.

8. Решите уравнение $\sqrt{y^2+1}\, dx - x^2 y\, dy = 0$ с разделяющимися переменными. Найдите частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=1} = \sqrt{3}$.

9. Частица падает в среде, сопротивление которой пропорционально квадрату ее скорости. Докажите, что уравнение движения частицы будет иметь следующий вид: $\frac{dv}{dt} = g - kv^2$, где k — постоянная, g — ускорение свободного падения. Проинтегрируйте это уравнение.

Доказательство.

1. По второму закону Ньютона $ma = F$, где m — масса частицы, a — ее ускорение в момент времени t, а F — сумма сил, действующих в этот момент на частицу.

2. Ускорение $a = \dots$.

3. Частица движется под действием своего веса и сила сопротивления направлена в сторону, противоположную смещению. Следовательно, $F = P - f_{\text{сопр}}$; $P = \dots, f_{\text{сопр}} = \dots$.

4. Уравнение движения частицы: ... .

10. Определите, в каком из приведенных в примере 3 уравнений переменные не разделяются.

11. Решите уравнение $\left(1 - \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dx + \cos\frac{y}{x}\, dy = 0$.

Решение.

1. Это уравнение ... .

2. Положим $\frac{y}{x} = z$, тогда $y = xz$, $dy = \dots$.

12. Решите уравнение $(x^2 + xy + y^2)\, dx - x^2\, dy = 0$. Найдите частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=1} = 1$.

13. Составьте уравнение линии, обладающей таким свойством, что площадь трапеции, образованной осями координат, ординатой ее произвольной точки и касательной к ней в этой точке, равна половине квадрата абсциссы выбранной точки.

Решение.

1. Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка искомой кривой, (MA) — касательная к этой кривой в точке M, а $OAMB$ — трапеция, удовлетворяющая условиям задачи (рис. 31).

С одной стороны, $S_{OAMB} = \frac{1}{2}x^2$ по условию. С другой — $S_{OAMB} = \frac{\dots}{2}$.

2. Для нахождения $|OA|$ используем уравнение касательной MA: $Y - y = y'(X - x)$, где X, Y — координаты произвольной точки касательной, а x, y — ... .

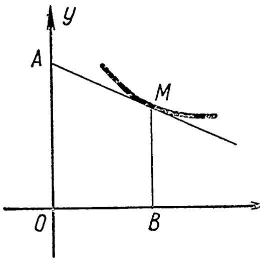


Рис. 31

Так как точка A принадлежит и касательной MA, и оси Oy, то $X_A = 0$, а $Y_A = \dots$.

3. Площадь трапеции: $S_{OAMB} = \dots$.

4. Искомое дифференциальное уравнение: ... .

14. Определите, какие из приведенных в примере 3 уравнений не являются однородными.

15. Решите уравнение $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$.

Решение.

1. Это уравнение — ... .

2. Положим $y = uv$, где u и v — функции переменной x, имеющие непрерывные производные. Получим: ... .

16. Найдите частное решение уравнения $xy' + y - e^x = 0$, удовлетворяющее начальному условию: $y|_{x=a} = b$.

17. На тело массой m действует сила, пропорциональная времени (коэффициент пропорциональности равен k_1). Кроме того, тело испытывает противодействие среды, пропорциональное скорости его движения (коэффициент пропорциональности равен k_2). Найдите закон движения тела (зависимость пути от времени).

Решение.

1. По второму закону Ньютона $m\frac{dv}{dt} = F$.

2. По условию $F = f - f_{\text{сопр}}$ (сила сопротивления направлена в сторону, противоположную смещению). При этом:

а) $f = \dots$; б) $f_{\text{сопр}} = \dots$.

3. Дифференциальное уравнение движения тела:

$$m\frac{dv}{dt} = \dots .$$

18. Решите уравнение $y' = \frac{1}{2x - y^2}$.

Решение.

Определим вид данного уравнения:

а) Можно ли в нем разделить переменные? ... .

б) Однородно ли оно? ... .

в) Является ли оно линейным? ... .

III. Упражнения для самостоятельного решения

1. Из числа уравнений, приведенных в примере 3, решите уравнения а), б), г), е), ж), и), к), л), м).

2. Найдите решения нижеприведенных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

а) $y' \sin x = y \ln y, \ y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$;

б) $y' - y \operatorname{tg} x = \sec x, \ y\Big|_{x=0} = 0$;

в) $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2x\frac{dy}{dx}-y=0,\quad y\Big|_{x=0}=\sqrt{5};$

г) $t(1+t^2)\,dx=(x+xt^2-t^2)\,dt,\quad x\Big|_{t=1}=-\frac{\pi}{4}.$

3. Диск, начавший вращаться в жидкости с угловой скоростью 3 об/с, через минуту стал вращаться со скоростью 2 об/с. Сила трения, замедляющая вращение диска, пропорциональна угловой скорости вращения. Определите скорость вращения диска через три минуты после начала его вращения.

4. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью $v=10$ км/ч. После выключения на полном ходу мотора лодки скорость ее движения уменьшилась через 20 с до $v_1=6$ км/ч. Считая, что сила сопротивления воды движению лодки пропорциональна ее скорости, найдите скорость движения лодки через 2 мин после остановки мотора и расстояние, пройденное лодкой в течение 1 мин после остановки мотора.

§ 17. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

I. Основные сведения из теории

1^0. Докажите, что при любых значениях C_1 и C_2 функция $y=C_1x+\frac{C_2}{x}$ служит решением уравнения $y''+\frac{1}{x}y'=\frac{y}{x^2}$.

Подберите числа C_1 и C_2 так, чтобы решение удовлетворяло начальным условиям: а) $y\Big|_{x=-2}=2$; б) $y'\Big|_{x=-2}=-1$.

2^0. Закончите утверждение.

Общее решение уравнения $F(x,y,y',y'')=0$ содержит ... произвольных постоянных.

II. Примеры и упражнения

1. Найдите общее решение уравнения $y''=\frac{1}{x}$.

2. Найдите частное решение уравнения $y'''=\sin x$, удовлетворяющее начальным условиям: а) $y\Big|_{x=0}=1$; б) $y'\Big|_{x=0}=2$; в) $y''\Big|_{x=0}=0$.

3. Если в уравнении третьего порядка отсутствует неизвестная функция y, то можно принять y' за новую неизвестную функцию z. Запишите, как выразятся тогда: 1) y''; 2) y'''.

4. Найдите общее решение уравнения $y''(x^2+1)=2xy'$.

Р е ш е н и е.

Положим $y' = z$. Тогда $y'' = \dots$.

5. Найдите частное решение уравнения $xy'' = y' \ln\frac{y'}{x}$, удовлетворяющее начальным условиям: а) $y\Big|_{x=1} = -2$; б) $y'\Big|_{x=1} = 1$.

6. Если в уравнении второго порядка отсутствует переменная x, т. е. если оно имеет вид $F(y, y', y'') = 0$, то можно принять y за независимую переменную, а неизвестной функцией z считать y' $\left(y' = \frac{dy}{dx} = z\right)$. Запишите, как выразится тогда y''.

7. Найдите общее решение уравнения $2(y')^2 = y''(y-1)$.

Р е ш е н и е.

Положим $y' = z$, тогда $y'' = \dots$.

8. Найдите частное решение уравнения $\frac{y''}{y'} - y' = 2e^{-y}$, удовлетворяющее начальным условиям: а) $y\Big|_{x=0} = 0$; б) $y'\Big|_{x=0} = -1$.

9. Силу сопротивления воздуха при падении тела можно считать пропорциональной квадрату скорости. Найдите закон движения, если начальная скорость равна нулю.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь вторым законом Ньютона.

10. Даны уравнения: а) $y'' + 2y' - y = 0$; б) $xy'' + y' = 1 + x$; в) $xy''' = (y'')^2$.

1. Понизьте порядок уравнений. (Что удобно принять за новую неизвестную?)

2. Определите тип полученных уравнений первого порядка.

III. Упражнения для самостоятельного решения

1. Решите уравнения:

а) $x^2y'' + xy' = 1$; б) $yy'' - y'(1 + y') = 0$; в) $y'' = -\frac{x}{y}$; г) $y'(1 + y'^2) = ay''$; д) $y'^2 - yy'' = y^2 \cdot y'$; е) $xy''' + y'' = 1 + x$; ж) $y'''^2 = 4y''$.

2. Найдите удовлетворяющие заданным начальным условиям частные решения уравнений:

а) $1 + y'^2 = 2yy''$; $y\Big|_{x=1} = 1$, $y'\Big|_{x=1} = 1$;

б) $yy'' + y'^2 = y'^3$; $y\Big|_{x=0} = 1$, $y'\Big|_{x=0} = 1$;

в) $xy'' = \sqrt{1 + y'^2}$; $y'\Big|_{x=1} = 0$, $y\Big|_{x=1} = \frac{5}{4}$;

г) $y'''^2 + y''^2 = 1$; $y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2}$, $y'\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = -1$, $y''\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1$.

§ 18. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

I. Основные сведения из теории

1⁰. Закончите определения:

1. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка $y'' + A_1(x)\,y' + A_2(x)\,y = f(x)$ называется а) однородным, если $f(x)$ ..., и б) неоднородным, если $f(x)$ ... .

2. Линейным однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами называется уравнение вида $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = \ldots$, где a_1, a_2, ..., a_n — ... .

2⁰. Составьте характеристические уравнения для линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

а) $y'' - 3y' + 2y = 0$: ...; в) $y' + 4y = 0$: ...;

б) $y'' + 3y' + \frac{y}{2} = 0$: ...; г) $y'' + py' + qy = 0$: ... .

3⁰. Каково общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае, когда характеристическое уравнение имеет:

а) различные действительные корни k_1, k_2;

б) равные действительные корни $k_1 = k_2 = k$;

в) комплексные корни $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$?

II. Примеры и упражнения

1. Какие из нижеприведенных уравнений являются: 1) линейными; 2) линейными неоднородными; 3) линейными однородными; 4) линейными однородными с постоянными коэффициентами: а) $y'' + 2y' + \sqrt{y} = 0$; б) $yy'' + \operatorname{tg} x = 0$; в) $xy'' + y' = 1 + x$; г) $y'' + 2y' - xy = 0$; д) $y'' + 2y = y' \operatorname{tg} x$; е) $\sin x = y'' - y'$; ж) $x^2y''' = (y'')^2$?

2. Решите уравнения:

а) $y'' + 2y' - y = 0$; б) $y'' + 4y' + 4y = 0$;

в) $y'' - 5y' = 0$; г) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Решение.

1. Составим характеристическое уравнение: ... .
2. Найдем его корни k_1, k_2: ... .
3. Общее решение уравнения: ... .

Для уравнения г) найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=0} = 2$, $y'\big|_{x=0} = 0$: ... .

3. Решите линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и проверьте ответы:

а) $y' - 4y = 0$; б) $y''' - 8y = 0$.

4. Решите линейное уравнение $xy'' - y' = 0$.

5. Цепь длиной 6 м скользит вниз с подставки без трения. За сколько времени соскользнет вся цепь, если движение начинается с момента, когда свисает 1 м цепи?

Решение

1. Обозначим через $h(t)$ длину той части цепи, которая свисает с подставки в момент времени t. По условию $h(0) = \dots$ м.

2. Пусть ρ — линейная плотность металла, из которого сделана цепь. Тогда масса всей цепи $m = \dots$, а масса части цепи, свисающей с подставки в момент времени t, равна … .

3. По второму закону Ньютона $F = mh''$. Цепь скользит под действием веса той части цепи, которая свисает с подставки, поэтому $F = \dots$.

4. Получим следующее уравнение движения цепи: … .

5. Решим дифференциальное уравнение движения цепи, где C_1 и C_2 — … :

а) примем во внимание начальные условия задачи:

$$h\Big|_{t=0} = \dots \text{ и } h'\Big|_{t=0} = \dots ;$$

б) уравнение движения цепи примет следующий вид:

$$h = \frac{1}{2} e^{\sqrt{\frac{g}{6}}\, t} + \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\frac{g}{6}}\, t};$$

в) находим время, в течение которого вся цепь соскользнет с подставки (учитывая, что $e^{\sqrt{\frac{g}{6}}\, t} > 1$, так как $t > 0$): … .

III. Упражнения для самостоятельного решения

1. Решите следующие линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

а) $y'' + 2y' = 0$; б) $y'' + 9y = 0$; в) $y'' - 6y' + 9y = 0$;

г) $4\frac{d^2x}{dt^2} - 20\frac{dx}{dt} + 25x = 0$; д) $25z'' - 10z' + 17z = 0$.

2. Найдите решения следующих уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

а) $y'' + 4y' + 29y = 0$; $y\Big|_{x=0} = 0$, $y'\Big|_{x=0} = 15$;

б) $4y'' + 4y' + y = 0$; $y\Big|_{x=0} = 2$, $y'\Big|_{x=0} = 0$.

3. Найдите общие решения уравнений:

а) $y''' - 4y'' + 3y' = 0$; б) $y''' - 8y' - 3y = 0$; в) $y^{(4)} + y'' - 2y = 0$.

4. Найдите удовлетворяющие заданным начальным условиям частные решения уравнений:

а) $y''' = -y'$; $y\Big|_{x=0} = 2$, $y'\Big|_{x=0} = 0$, $y''\Big|_{x=0} = -1$;

б) $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0$; $y\Big|_{x=0} = 1$, $y'\Big|_{x=0} = 4$, $y''\Big|_{x=0} = 4$.

§ 19. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

I. Основные сведения из теории

1°. Закончите утверждения:

1. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид: $y = C_1y_1 + C_2y_2$, где y_1 и y_2 ..., а C_1 и C_2 ... .

2. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид: $y = C_1y_1 + C_2y_2 + y_0$, где y_1 и y_2 — ..., а C_1 и C_2 — ... .

3. Если дано уравнение вида $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ (1), $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — линейно-независимые решения уравнения вида $y''(x) + p(x)y' + q(x)y = 0$ (2), то а) общее решение уравнения вида (2) $y = \ldots$, а б) частное решение уравнения вида (1) (при использовании метода вариации произвольных постоянных) ищется в следующем виде: ... .

2°. Пусть дано уравнение $y'' + py' + qy = f(x)$ (с постоянными коэффициентами) и его частное решение y_0. Заполните таблицу:

$f(x)$		y_0[1]
$P_n(x)e^{\alpha x}$ ($P_n(x)$ — многочлен степени n)	Число α не является корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$	
	Число ... — простой корень характеристического уравнения	
	Число ... — двойной корень характеристического уравнения	
$e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$	Числа $\alpha \pm \beta i$ не являются корнями характеристического уравнения	
($Q_m(x)$ — многочлен степени ...)	Числа $\alpha \pm \beta i$ — корни характеристического уравнения	

II. Примеры и упражнения

1. Пусть дано уравнение $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 4x$ и известно, что функции x и $x \ln x$ — частные решения однородного уравнения $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0$. Найдите общее решение однородного и частное решение неоднородного уравнений (при нахождении частного решения используйте метод вариации произвольных постоянных).

[1] Укажите, в каком виде надо искать y_0 при заданной правой части уравнения.

Решение.

1. Общее решение однородного уравнения: ... .

2. Частное решение будем искать в виде $y_0 = C_1(x)\cdot x + C_2(x) \times \times x \ln x$, где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ — некоторые функции, имеющие непрерывные производные:

а) производная $y_0' = ...$;

б) подберем функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ так, чтобы ..., тогда y_0' ...;

в) найдем y_0'': ...;

г) подставим y_0 и производные y_0', y_0'' в ...;

д) получаем следующую систему для нахождения $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ ...;

е) частное решение $y_0 = ...$.

2. Найдите общее решение неоднородного уравнения

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^3}.$$

Решение.

1. Сначала решим однородное уравнение $y'' - 2y' + y = 0$:

а) составим характеристическое уравнение: ...;

б) найдем корни характеристического уравнения: ...;

в) общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = 0$: ... .

2. Частное решение неоднородного уравнения будем искать методом вариации произвольных постоянных в виде $y_0 = ...$.

3. Решите уравнение $y'' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0$. Подберите C_1 и C_2 так, чтобы решение удовлетворяло начальным условиям

$$y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad y'\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = -1: \ ... \ .$$

4. Решите уравнение $y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{x}$, используя метод вариации произвольных постоянных.

5. В каком виде можно искать частные решения следующих уравнений: 1) $y'' - 2y' + 5y = x^2 e^x$; 2) $y'' - 2y' + y = (1 - x)e^x$?

Решение.

1. а) Здесь $\alpha = ...$, $n = ...$;

б) для однородного уравнения $y'' - 2y' + 5y = 0$ составим характеристическое уравнение и найдем его корни: ...;

в) частное решение можно искать в виде $y_0 = ...$.

6. Решите следующие уравнения: 1) $y'' + 2y' = (x - 2)e^{-2x}$; 2) $y'' + 9y = xe^{-3x}$.

Решение.

1. а) Решим сначала однородное уравнение $y'' + 2y' = 0$: ...;

б) решим данное уравнение: ... .

7. В каком виде можно искать частные решения уравнений: 1) $y'' + 3y' + 2y = x^3$; 2) $y'' + 4y = 5$; 3) $y''' - y' = 2x$?

Решение.

1. Здесь $\alpha = ...$, $n = ...$, $y_0 = ...$.

8. Решите уравнение $y'' + 2y' = 1 - x$. Подберите C_1 и C_2 так, чтобы решение удовлетворяло начальным условиям

$$y\Big|_{x=0} = 1, \quad y'\Big|_{x=0} = -2.$$

9. Решите уравнение $y' - y = e^x$.

10. Материальная точка массы 1 г движется по оси координат в точку $x_0 = 2$ под действием постоянной силы F. Сопротивление среды пропорционально расстоянию от движущейся точки до x_0 (коэффициент пропорциональности равен 4). Найдите закон движения, зная, что начальная скорость точки равна нулю.

11. В каком виде можно искать частное решение уравнения $y'' - 3y' + 2y = x^2 + e^{2x} + 1$?

Указание.

Используйте следующее утверждение, предварительно дополнив его:

если $\varphi_1(x)$ — решение уравнения $y'' + py' + qy = f_1(x)$, а $\varphi_2(x)$ — решение уравнения $y'' + py' + qy = f_2(x)$, то функция ... служит частным решением уравнения $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$.

12. Решите уравнение $y'' - y' = x^2 + 3e^{-x}$.

13. Найдите частное решение уравнения $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + \frac{e^{2x}}{x^3}$, удовлетворяющее начальным условиям $y\Big|_{x=1} = 0$, $y'\Big|_{x=1} = e^2$.

14. В каком виде можно искать частные решения уравнений: 1) $y'' + 4y = x \sin 2x + 3 \cos 2x$; 2) $y'' + 4y' + 5y = e^{-x} \cos x$?

Решение.

а) Здесь $\alpha \pm \beta i = \ldots$, $n = \ldots$, $m = \ldots$.

15. Решите уравнение $y'' + 4y = 4 \cos 2x$.

16. Решите уравнение $y'' - y' = 2(x + 1) \cos x$, найдите частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y\Big|_{x=0} = -1, \quad y'\Big|_{x=0} = 1.$$

17. Решите уравнение $y'' + y = 1 - xe^x + \cos x$.

III. Упражнения для самостоятельного решения

1. Решите уравнения: а) $y'' - 3y' + 2y = e^x(3 - 4x)$; б) $2y'' + 5y' = e^x$; в) $y'' + y = 6 \sin^2 x$; г) $y'' - 4y' + 4y = 2(\sin 2x + x)$; д) $5y'' - 6y' + 5y = e^{\frac{3}{5}x}\left(\cos \frac{4}{5}x + \sin \frac{4}{5}x\right)$; е) $y''' + 4y' = 12x^2 - 2$; ж) $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x+1}$.

2. Найдите частное решение уравнения $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$, удовлетворяющее начальным условиям

$$y\Big|_{x=0} = 1, \quad y'\Big|_{x=0} = 32.$$

3. Найдите частное решение уравнения $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$, удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=0} = 2$, $y'\big|_{x=0} = 2$.

4. Уравнение $y'' - 3y' + 2y = x$ решите двумя способами (с применением метода вариации произвольных постоянных и без него).

§ 20. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ[1]

I. Основные сведения из теории

1⁰. Закончите следующие определения:

1. Частичной суммой ряда называется сумма .. .
2. Ряд называется сходящимся, если .. .
3. Суммой сходящегося ряда называется .. .

2⁰. Закончите следующие утверждения:

1. Если ряд сходится, то последовательность его членов .. . Верно ли обратное утверждение? Приведите пример: .. .

2. Геометрическая прогрессия $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots$ сходится при условии, что .. .

3. Если геометрическая прогрессия сходится, то ее сумма находится по формуле $s =$ .. .

3⁰. Сформулируйте:

а) признак сравнения рядов с положительными членами;

б) признак Даламбера.

4⁰. Закончите формулировку интегрального признака сходимости ряда:

Пусть члены ряда $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ положительны и не возрастают, т. е. u_1 .. u_2 ..., и пусть $f(x)$ — такая непрерывная невозрастающая функция, что $f(1) =$ .., $f(..) =$ .., ..., $f(n) =$ .., ...

Тогда: а) если несобственный интеграл $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ сходится, то ..;

б) если этот интеграл расходится, то .. .

II. Примеры и упражнения

1. Найдите пятую частичную сумму ряда

$$\ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n} + \ldots .$$

Сходится ли этот ряд?

2. В нижеприведенном множестве рядов найдите ряд, расходимость которого следует из нарушения необходимого условия сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{2n+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$;

---

[1] В разделе «Ряды» пропуски в тексте формулировок теоретических утверждений и в решениях примеров обозначаются двумя точками (..).

г) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{\pi}{3n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n(n+1)}$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^n n!}$;

з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$; и) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n^2-2n+5)^2}$; к) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(3n-4)}$.

3. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ расходится.

Доказательство.

Здесь $u_n = ..$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = ..$.

4. Для каких x справедливо равенство:

$$1 + x^3 + x^6 + \dots + x^{3n} + \dots = \frac{1}{1-x^3}?$$

5. Во множестве рядов, приведенном в примере 2, найдите геометрическую прогрессию и вычислите ее сумму.

6. Из множества рядов, приведенного в примере 2, выберите ряды с положительными членами.

7. С помощью признака Даламбера докажите сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$.

Доказательство.

Здесь: а) $u_n = \frac{n}{3^n}$, $u_{n+1} = ..$;

б) $l = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} .. = ..$, $l = ..$, $l .. 1$, т. е. ряд .. .

8. Сходится ли ряд $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + 3\operatorname{tg}\frac{\pi}{16} + \dots$?

9. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n}{n!} = 0$.

10. Попробуйте применить признак Даламбера при исследовании сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$.

Замечание. Легко видеть, что если n-й член ряда — дробно-рациональная функция от n, то всегда $l = 1$ и признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда.

11. Из множества рядов, приведенного в примере 2, выберите ряд с положительными членами, сходимость или расходимость которого может быть установлена с помощью признака Даламбера.

12. Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$. Тогда $f(1) = 1$, $f(2) = \frac{1}{2}$, .., $f(n) = \frac{1}{n}$, .. . В этом случае говорят, что функция $f(x)$ порождает гармонический ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$. Аналогично ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ порождается функцией $g(x) = \frac{x}{2^x}$.

Для нижеприведенных рядов с положительными членами найдите порождающие их функции:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$, $f(x) = ..$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \ln\frac{n+1}{n}$, $f(x) = ..$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{n}{n^4+1}}$, $f(x) = ..$.

13. Найдите $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$.

Решение.

1. По определению $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_2^{b} \frac{dx}{x \ln x} ..$.

2. $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = ..$. Интеграл расходится.

14. Найдите $\int\limits_1^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$.

Решение.

1. По определению $\int\limits_1^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} ..$.

2. $\int\limits_1^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = ..$. Интеграл сходится.

15. Составьте ряд, который можно исследовать на сходимость с помощью интеграла из примера 14. Сходится ли он?

16. С помощью интегрального признака исследуйте вопрос о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$.

17. Из множества рядов, приведенного в примере 2, выберите ряд с положительными членами, сходимость или расходимость которого можно установить с помощью интегрального признака.

18. Обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, где ..— фиксированное положительное число, исследуйте на сходимость с помощью интегрального признака Коши.

Решение.

1. Ряд сходится, если p .. 1

2. Ряд расходится, если p .. 1.

19. Какие из нижеприведенных рядов сходятся, а какие расходятся (используйте признак сходимости Коши):

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$;

3) $1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ldots + .. + \ldots$;

4) $\frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots$?

Решение.

1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится $(p = \frac{1}{2} < 1)$.

2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ .. $(p = ..)$.

3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}$ .. $(p = ..)$.

4. Остаток ряда $\sum_{n=1}^{\infty}$ .. после .. члена. Ряд .. $(p = ..)$. Следовательно, исследуемый ряд .. .

20. Выясните, сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$.

Решение.

В соответствии с замечанием к примеру 10 признак Даламбера здесь неприменим $(l = 1)$. Воспользуемся признаком сравнения рядов с положительными членами.

1. Имеем $\frac{1}{n^3+1}$ .. $\frac{1}{n^3}$.

2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ .. (так как $p = ..$).

3. Следовательно, данный ряд .. .

21. С помощью признака сравнения рядов с положительными членами докажите расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$

22. Выясните, сходится ли ряд:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3})$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$.

23. С помощью признака сравнения рядов с положительными членами докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{5^n}$ сходится.

24. Из множества рядов, приведенного в примере 2, выберите ряд, сходимость которого удобно исследовать с помощью метода сравнения.

III. Упражнения для самостоятельного решения

1. Исследуйте вопрос о сходимости рядов из множества, приведенного в примере 2.

2. Выясните, сходятся ли следующие ряды:

а) $\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^3+\ \ldots;$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right)^2$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2-n+5}$.

§ 21. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ. АБСОЛЮТНАЯ И УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ

I. Основные сведения из теории

1°. Закончите утверждения:

1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ называется абсолютно сходящимся, если .. .
2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ называется условно сходящимся, если .. .
3. В отношении сходимости между рядами $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ существует следующая зависимость: если ряд .. сходится, то ряд .. .

2°. Сформулируйте теорему Лейбница — признак сходимости знакочередующегося ряда.

II. Примеры и упражнения

1. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{\pi}{n}$ абсолютно сходится.

Доказательство.

Здесь $u_n=\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{\pi}{n}$, $|u_n|=$ .. .

2. Выясните: 1) сходится ли абсолютно ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{2^n}$;

2) сходится ли этот ряд.

3. Из множества нижеприведенных рядов выберите:
1) абсолютно сходящийся ряд;
2) условно сходящийся ряд:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^n}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\ln n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^n}{2^n\cdot n!}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2-n+1}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\frac{\pi}{3^n}$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\frac{n+1}{n}$;

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^3+2n+1}}$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

4. Выясните: 1) сходится ли абсолютно знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}};$$

2) сходится ли этот ряд.

5. Установите: 1) сходится ли абсолютно знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln^2 n};$$

2) сходится ли этот ряд.

III. Упражнения для самостоятельного решения

1. Двумя способами (с помощью теоремы Лейбница и без нее) докажите сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$.

2. Какие из рядов во множестве, приведенном в примере 3: 1) сходятся абсолютно; 2) сходятся условно?

§ 22. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

I. Основные сведения из теории

1^0. Закончите следующие определения:

1. Совокупность тех значений x, при которых функциональный ряд $u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ (1) сходится, называется.. .

2. Функциональный ряд (1) называется мажорируемым на некотором множестве $X \subset \boldsymbol{R}$, если существует такой сходящийся числовой ряд $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots$, что для всех $x \in X$ выполняются неравенства: $|u_1(x)| .. \alpha_1$; $|u_2(x)| .. \alpha_2$; ...; $|..| .. \alpha_n$; .. .

3. Ряд (1) называется правильно сходящимся на множестве $X \subset \boldsymbol{R}$, если .. .

4. Интервалом сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ (2) называется .. .

5. Радиусом сходимости степенного ряда (2) называется .. .

2^0. Закончите утверждение:

Если ряд сходится:

а) на всей числовой оси, то радиус сходимости $R = ..$;

б) только в точке x_0, то радиус сходимости $R = ..$.

3^0. Ответьте на вопросы:

1. Что можно сказать о сходимости ряда на концах интервала сходимости?

2. Что вам известно о правильной сходимости степенного ряда?

4⁰. Укажите суммы нижеприведенных степенных рядов и радиусы их сходимости:

1) $1+x+\frac{x^2}{2!}+ \ldots + \ldots + \ldots = e^x$, $R=+\infty$;

2) $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}- \ldots + \ldots + \ldots = \ldots$, $R= \ldots$;

3) $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}- \ldots + \ldots + \ldots = \ldots$, $R= \ldots$;

4) $x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}- \ldots + \ldots + \ldots = \ldots$, $R= \ldots$;

5) $1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)^2}{2!}x+ \ldots + \ldots + \ldots = \ldots$, $R= \ldots$.

II. Примеры и упражнения

1. Найдите все точки $x \in \boldsymbol{R}$, в которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+2)^n}$ сходится.

Решение.

1. При любом $x \neq -2$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+2)^n}$ — геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \ldots$.

2. Исследуемый ряд сходится.. .

2. В каких точках сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$?

Решение.

1. При $x \leqslant 0$ $u_n(x)=\frac{1}{n^x}$ .. 1. Ряд.. .

2. При $0<x\leqslant 1$ .. . Ряд.. .

3. При $x>1$ .. . Ряд.. .

3. Найдите промежутки, на которых правильно сходятся нижеприведенные ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^n x}{2^n}$: ..; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+x)}$: .. .

4. Найдите радиус и интервал сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n}$ $(x_0=0)$.

Решение.

1. Находим $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \ldots = \ldots$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}<1 \Leftrightarrow R = \ldots$.

3. Интервал сходимости ряда .. .

5. Выясните, сходится ли ряд из примера 4 на концах интервала сходимости.

6. Найдите интервал сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{n(n+1)} \quad (x_0 = -1).$$

7. Разложите в степенные ряды следующие функции: а) e^{2x}; б) $\sin 3x$; в) $\ln(1-5x)$ — и определите радиусы сходимости этих степенных рядов.

Решение.

1. В приведенных в 4^0 разложениях функций e^y, $\sin y$, $\ln(1+y)$ положим соответственно $y = 2x$, $y = ..$, $y = ..$.

2. Получаем:

а) $e^{2x} = ..$, $R = ..$; б) $\sin 3x = ..$, $R = ..$; в) $\ln(1-5x) = ..$, $R = ..$.

8. Разложите в степенные ряды следующие нижеприведенные функции, указав радиусы сходимости полученных рядов:

а) $x \cos x$; б) $e^{-x} - 1$; в) $\operatorname{tg} x \cos^2 x$; г) $\sin^2 x$.

9. Вычислите приближенное значение $\cos 10°$, взяв два члена разложения функции $\cos x$ в степенной ряд.

Решение.

1. Радианная мера угла в 1^0 равна $\frac{\pi}{180} \approx ..$.

2. $\cos 10^0 = \cos \frac{\pi}{18} = .. \approx .. + .. + .. + .. \approx .. = ..$.

3. Зная, что для знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, сумма остатка после n членов по модулю не превосходит первого члена остатка ($|z_n| \leqslant |u_{n+1}|$), найдем погрешность, допущенную при вычислении $\cos 10^0$: .. .

10. Вычислите с точностью до 0,0001 интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{x} dx$ $\left(\frac{\pi}{6} = 0{,}52360\right)$.

Решение.

1. $\sin x = ..$.

2. $\frac{\sin x}{x} = .. + .. + .. + ... + .. + ...$.

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{x} dx = ..$.

4. При нахождении числа членов, которые необходимо оставить, чтобы добиться требуемой точности, используем соотношения $|z_n| \leqslant |u_{n+1}|$ (пример 9 (3)). Если взять так, что $|u_{n+1}| < 0{,}0001$, то и абсолютная погрешность $|z_n| < 0{,}0001$: .. .

11. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$ с точностью до 0,001.

12. С помощью степенного ряда найдите решение уравнения $y' = 2y + x - 1$, удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{x=0} = \frac{1}{2}$.

Решение.

1. Будем искать решение уравнения в виде суммы степенного ряда. Полагаем $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$, где a_0, a_1, ..., a_n, ... — неизвестные коэффициенты ряда. Так как $y\big|_{x=0} = \frac{1}{2}$, то $a_0 = \frac{1}{2}$.

2. Найдем производную от неизвестной функции и подставим y и y' в данное уравнение:

$y' = a_1 + 2a_2x + \dots + .. + \dots;$

$a_1 + 2a_2x + \dots + .. + \dots = (2a_1 + 1)x + 2a_2x^2 + \dots + 2a_nx^n + \dots .$

3. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x и получим:

а) $a_1 = 0$; б) $2a_2 = 2a_1 + 1$, $a_2 = \frac{2a_1 + 1}{2} = \frac{1}{2}$;

в) $a_3 = \frac{2}{3} a_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$; ... ; г) $a_n = \frac{2}{n} a_{n-1} = \frac{2}{n} \cdot \frac{2}{n-1} a_{n-2} = \, .. = \frac{2}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \, .. = \frac{2^{n-2}}{n!}$.

4. Разложение неизвестной функции в степенной ряд: $y = \frac{1}{2} + \, .. \, x^2 + \, .. \, x^3 + \dots + \, .. \, x^n + \dots$.

13. С помощью степенного ряда найдите решение уравнения $y'' = \frac{2}{x} y' + y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=0} = 1$, $y'\big|_{x=0} = 0$.

III. Упражнения для самостоятельного решения

1. Найдите интервалы сходимости следующих рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{x^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \operatorname{tg} \frac{x}{3^n}$.

2. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1 + x^2)^{n+1}}$ правильно сходится на отрезке [1; 2].

3. Найдите интервал правильной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$.

4. Найдите радиусы и интервалы сходимости степенных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\,x^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n!}$.

5. Вычислите приближенное значение интеграла $\int\limits_0^{0,1} e^{-x^3}\,dx$. Сколько членов надо взять, чтобы погрешность была меньше 0,0001?

6. Разложите подынтегральную функцию в ряд. Вычислите определенный интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+x^3}dx$ с точностью до 0,0001.

7. С помощью степенного ряда найдите решение уравнения $y' = y + x^2$, удовлетворяющее начальному условию $y\Big|_{x=0} = 2$.

8. С помощью степенного ряда найдите решение уравнения $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y\Big|_{x=0} = 1$, $y'\Big|_{x=0.} = 0$

Исследуйте сходимость полученного решения.

§ 23. РЯДЫ ФУРЬЕ

I. Основные сведения из теории

1⁰. Закончите утверждение:

Функция $f(x)$ порождает ряд Фурье $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin x)$, где коэффициенты a_0, a_n, b_n, вычисленные по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx,$$

называются.. .

2⁰. Сформулируйте теорему Дирихле:

Если функция $f(x)$, имеющая период 2π, кусочно монотонна на промежутке $[-\pi;\ \pi]$ и имеет на нем не более, чем конечное число точек разрыва, то ее ряд Фурье сходится к .. . (Высказанные условия называют условиями Дирихле.)

3⁰. Закончите утверждение:

Ряд Фурье четной функции содержит одни лишь косинусы:

$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$, где

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos nxdx\ (n = 0,\ 1,\ 2,\ ..).$$

Ряд Фурье нечетной функции содержит одни лишь синусы:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \text{ где } b_n = \dots .$$

4°. Продолжите вычисление интегралов, часто употребляемых в разложениях функций в ряд Фурье:

$$\int_0^{\pi} x \sin nxdx = x \frac{-\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{-\cos nx}{n} dx = \dots;$$

$$\int_0^{\pi} x \cos nxdx = x \frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n} dx = \dots .$$

II. Примеры и упражнения

Функцию $f(x) = x$ на промежутке $[0; \pi]$ разложите по косинусам

Решение.

1. График функции: .. .
2. Проверка выполнимости условий Дирихле (устно).
3. Формальная запись ряда Фурье $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, где

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos nxdx \ (n = 0, 1, 2, \dots): \dots .$$

4. Коэффициенты Фурье (по формулам п. 4°): .. .
5. Ряд Фурье, порожденный данной функцией

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)}{(2k-1)^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi: \dots .$$

6. Вывод о сходимости ряда Фурье (по заключению теоремы Дирихле):.. .

III. Упражнения для самостоятельного решения.

Используя план решения примера, предложенный в разделе II:

1. Разложите функцию: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \pi < x < 0, \\ x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$ в полный ряд Фурье.

2. Функцию $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } 0 \leqslant x \leqslant h, \\ 0 & \text{для } h < x \leqslant \pi \end{cases}$ разложите на промежутке $[0; \pi]$ по косинусам.

3. Функцию $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2h} & \text{для } 0 \leqslant x \leqslant 2h, \\ 0 & \text{для } 2h < x \leqslant \pi \end{cases}$ разложите на промежутке $[0; \pi]$ по косинусам.

4. Функцию $f(x) = x$ разложите на промежутке $[0; \pi]$ по синусам.

Ответы к упражнениям для самостоятельного решения

§ 1.

1. $\lambda = -\frac{1}{2}$. **2.** $3x + y - 2 = 0$, $x - 3y + 16 = 0$, $3x + y - 32 = 0$, $x - 3y - 14 = 0$. **3.** а) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; б) $\varphi = \frac{\pi}{2}$; в) $\varphi = 0$; г) $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{16}{11}$. **4.** $29x - 2y + 33 = 0$. **5.** Перпендикулярны: а), б), в); параллельны: д), е). **6.** а) $m = -4$, $n \neq 2$ или $m = 4$, $n \neq -2$; б) $m = -4$, $n = 2$ или $m = 4$, $n = -2$; в) $m = 0$, n — любое. **7.** $m = 0$ или $m = 6$. **8.** $a = -7$. **9.** $3x - 2y - 12 = 0$ и $3x - 8y + 24 = 0$. **10.** $C(-1; 4)$ или $C\left(\frac{25}{7}; -\frac{36}{7}\right)$. **11.** 2. **12.** $4x - 12y + 7 = 0$ и $6x + 2y - 5 = 0$. **14.** а) $3x + 2y - 7 = 0$; б) $2x - y = 0$; в) $y - 2 = 0$; г) $x - 1 = 0$; д) $4x + 3y - 10 = 0$; е) $3x - 2y + 1 = 0$. **15.** а) Окружность с центром в полюсе и радиусом, равным 5; б) луч с началом в центре полюса, составляющий с полярной осью угол, равный $\frac{\pi}{4}$; в) прямая $x = 1$; г) прямая $y = 2$; д) окружность $(x - 5)^2 + y^2 = 25$; е) окружность $x^2 + (y - 3)^2 = 9$; ж) два луча с началом в центре полюса, составляющие с полярной осью соответственно углы $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$; з) концентрические окружности с центром в полюсе, радиусы которых определяются по формуле $r = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; и) четырехлепестковая роза.

§ 2.

1. а) $x^2 + y^2 = 16$; б) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$; в) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. **2.** $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = \frac{81}{13}$ и $(x + 8)^2 + (y + 7)^2 = \frac{25}{13}$. **3.** а) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$; б) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; в) $\frac{y^2}{100} + \frac{x^2}{64} = 1$; г) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$; д) $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$ или $\frac{x^2}{\frac{117}{4}} + \frac{y^2}{9} = 1$. **4.** а) 5 и 3; б) $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$; в) $\varepsilon = \frac{4}{5}$; г) $x = \pm\frac{25}{4}$. **5.** $r_1 = 2{,}6$; $r_2 = 7{,}4$. **6.** а) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; б) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; в) $\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{100} = 1$; г) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$; д) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ или $\frac{x^2}{\frac{61}{9}} - \frac{y^2}{\frac{305}{16}} = 1$. **7.** а) При $|m| > 4{,}5$; б) при $m = \pm 4{,}5$; в) при $|m| < 4{,}5$. **8.** а) $y^2 = -4x$; б) $y = x^2$; в) $y^2 = -28x$. **9.** $y = 18$. **10.** а) Эллипс; б) парабола; в) ветвь гиперболы; г) эллипс; д) ветвь гиперболы; е) парабола; ж) окружность; з) окружность.

§ 3.

1. а) 22; б) 6; в) 7; г) -200; д) 129; е) 41. **2.** 35. **3.** $\alpha = 10$. **4.** $\frac{5}{21}$. **5.** 6. **6.** -11. **7.** $-6\frac{5}{7}$. **8.** 16. **9.** а) 3; б) 27; в) 300. **11.** а) $\{6; -4; -6\}$; б) $\{-12; 8; 12\}$. **12.** $\{-4; 3; 4\}$. **13.** 14. **14.** 5. **15.** а) Правая; б) левая; в) левая; г) правая; д) векторы компланарны. **16.** а) Да; б) нет; в) да. **17.** 11.

§ 4.

1. $x+2y-3z=0$. **2.** $x+4y+7z+16=0$. **3.** а), б), д), е) Взаимно параллельны; в) и г) взаимно перпендикулярны. **4.** 8. **5.** а) $\frac{2}{7}x-\frac{3}{7}y-\frac{6}{7}z-\frac{11}{14}=0$; б) $-\frac{3}{7}x+\frac{6}{7}y-\frac{2}{7}z-3=0$; в) $\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z-\frac{1}{6}=0$. **6.** а) По одну сторону; б) по разные стороны. **7.** $d=2$. **8.** $2x-2y-z-18=0$ и $2x-2y-z+12=0$. **9.** $\arccos 0{,}7$. **10.** а) $\begin{cases} x-2=0, \\ y+5=0; \end{cases}$ б) $\frac{x-2}{4}=\frac{y+5}{-6}=\frac{z-3}{9}$; в) $\frac{x-2}{-11}=\frac{y+5}{17}=\frac{z-3}{13}$. **13.** 60°. **14.** $d=21$. **15.** $x=3-6t$, $y=-1+18t$, $z=-5+9t$. **16.** $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-7}$. **17.** $\{5; -1; 0\}$. **18.** $m=-3$. **19.** $3x+2y+z=0$. **20.** 15.

§ 6.

1. 5. **2.** $\frac{1}{2}$. **3.** 0. **4.** $\frac{3}{2}$. **5.** 3. **6.** $-\frac{1}{56}$. **7.** 1. **8.** 0. **9.** ∞. **10.** -5. **11.** -24. **12.** -18. **13.** $\frac{\pi}{11}$. **14.** $\frac{5}{4}$. **15.** $\frac{3}{5}$. **16.** $\frac{3}{2}$. **17.** $\frac{7}{2}$. **18.** $\frac{15}{154}$. **19.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **20.** 1. **21.** 1. **22.** e^{-4}. **23.** e^{-15}. **24.** 10. **25.** -1. **26.** 1. **27.** 1. **28.** $\frac{1}{3}$. **29.** 14. **30.** $\frac{7}{2}$. **31.** $-\frac{1}{14}$. **32.** $\frac{5}{3}$. **33.** 1,03. **34.** 0,99. **35.** 0,97. **36.** 1,02. **37.** 0,05. **38.** $-0{,}01$. **39.** 1,06. **40.** 0,9.

§ 7.

1. $x^2\,\frac{3-x}{e^x}$. **2.** $\frac{2\ln x}{x\ln 10}$. **3.** $\frac{2}{3}\,bx\,(a+bx^2)^{-\frac{2}{3}}$. **4.** $2xe^{x^2}-15\sin x\cos^2 x$. **5.** $\frac{2}{3}\cos x\,\sin^{-\frac{1}{3}}x$. **6.** $-\operatorname{tg} x$. **7.** $\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)x^{\sin x}$. **8.** $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\times\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right)$. **9.** $\operatorname{tg} t\,\frac{3-\operatorname{tg}^2 t}{3\operatorname{tg}^2 t-1}$. **10.** $-\frac{2t}{t+1}$. **11.** $-\frac{10}{9}\,x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{5}}$.

12. $\frac{y}{x}\,\frac{x\ln y-y}{y\ln x-x}$. **13.** $\frac{3}{5}t^{-\frac{2}{5}}\vec{i}-\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}\vec{j}+\frac{2(3t^4+t+3)}{(1+t^4)(6t+\operatorname{arctg} t^2)}\vec{k}$. **14.** $2te^{t^2}\vec{i}-\frac{1}{2\sqrt{t}}\sin 2\sqrt{t}\,\vec{j}+(2\ln 3)3^{2t}\vec{k}$. **15.** $2t\cos t^2\vec{i}-\frac{\sin(\operatorname{tg} t)}{\cos^2 t}\vec{j}+\frac{\vec{k}}{2\sqrt{t(1-t)}}$. **16.** $\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}$. **17.** $\left(\cos x-\sin x+\operatorname{tg} x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)e^x$. **18.** $\frac{1}{x\ln x}$. **19.** $-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}y$. **20.** $-e^{-\arcsin\sqrt{x}}\left(\frac{\sin(\log_5 x)}{x\ln 5}+\frac{1}{x\cos^2\ln x}+\frac{\cos(\log_5 x)-\operatorname{tg}\ln x}{2\sqrt{x(1-x)}}\right)$.

21. $-\frac{3}{2}\,\frac{\ln^2\arccos\sqrt{x}}{(\arccos\sqrt{x})\sqrt{x(1-x)}}$. **22.** $3(x^2+1)^{3x}\left(\ln(x^2+1)+\frac{2x^2}{x^2+1}\right)$. **23.** $-\frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+10}\,(11+\operatorname{tg}^2 x)}$. **24.** $x^{x^4+3}(4\ln x+1)$. **25.** 0.

§ 9.

1. Нули функции: $x = 2$, $x = -4$. Функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической. Точек разрыва нет; max $(-2; 8)$, min $(2; 0)$. Точка перегиба $(0; 4)$. Асимптот нет. 2. Нули функции: $x = \pm\sqrt{3}$. Функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической. Точка разрыва второго рода: $x = 2$, max $(1; 2)$; min $(3; 6)$. Точек перегиба нет. Наклонная асимптота: $y = x + 2$. 3. Нуль функции: $x = 2$. Функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической. Точек разрыва нет, min $\left(\frac{2}{\sqrt{e}}; -1\right)$. Точка перегиба $\left(\frac{2}{e\sqrt{e}}; -\frac{6}{e^3}\right)$. Асимптот нет. 4. Нуль функции: $x = 0$. Функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической. Точек разрыва нет, min $(0; 0)$; $-(2; -\sqrt{2})$; max $(2; 4e^{-2})$. Точки перегиба: $(2 - \sqrt{2}; (6 - 4\sqrt{2})\, e^{-(2-\sqrt{2})})$; $(2 + \sqrt{2}; (6 + 4\sqrt{2})\, e^{-(2+\sqrt{2})})$. 5. Нулей функции нет. Функция четная, непериодическая. Точек разрыва нет; max $(0; 2)$. Точки перегиба: $(1; 3e^{-1})$; $(-1; 3e^{-1})$. Горизонтальная асимптота: $y = 0$. 6. Нулей функции нет. Функция не является ни четной, ни нечетной, периодическая с периодом 2π. Точка разрыва второго рода:

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k.$

На интервале $\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{7}{4}\pi\right[$: min $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, max $\left(\frac{5}{4}\pi; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

7. Нули функции: $x = 1 - \sqrt{3}$, $x = 1 + \sqrt{3}$. Функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической. Точек разрыва нет. Точек перегиба нет, max $(1; \sqrt{3})$. Асимптот нет.

§ 10.

1. $\frac{(5+7x)^{18}}{126} + C$. 2. $\frac{1}{21} \ln\left|2 + 2x\right| + C$. 3. $\frac{1}{\pi k} \sin(\pi k x) + C$. 4. $\frac{1}{2} \ln\left|x + \sqrt{\frac{3}{4} + x^2}\right| + C$. 5. $\arcsin e^t + C$. 6. $-\ln|1 - e^x| + C$. 7. $\frac{1}{2} \operatorname{tg} x^2 + C$. 8. $-\frac{1}{x-2} + C$. 9. $\frac{2 \cdot 5^{\sqrt{x}}}{\ln 5} + C$. 10. $-\cos(\operatorname{tg} x) + C$. 11. $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 2\ln|x + 1| + C$. 12. $\ln|\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}| + C$. 13. $\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$. 14. $\frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{4} \arcsin x + \frac{1}{4} x \sqrt{1 - x^2} + C$. 15. $\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C$. 16. $\frac{3^x}{1 + \ln^2 3} (\sin x + \ln 3 \cos x)$. 17. $\ln(\ln(\ln x)) + C$. 18. $\cos\left(\frac{1}{x}\right) + C$.

§ 11.

1. $\operatorname{arctg}(x + 3) + C$. 2. $-\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x + 1 - \sqrt{2}}{x + 1 + \sqrt{2}}\right| + C$. 3. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{2x + 3 - 2\sqrt{2}}{2x + 3 + 2\sqrt{2}}\right| + C$. 4. $\frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg}\left(\frac{4x - 3}{\sqrt{15}}\right) + C$. 5. $\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}((2z - 1)\sqrt{3}) + C$. 6. $\ln(2x^2 + 5x + 20) + C$. 7. $\frac{7}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{7}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right) + C$. 8. $\frac{3}{2} \ln|x^2 + x - 1| - \frac{19}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{2x + 1 - \sqrt{5}}{2x + 1 + \sqrt{5}}\right| + C$. 9. $\ln(x + 3 + \sqrt{x^2 + 6x + 10}) + C$. 10. $\arcsin\left(\frac{x + 1}{\sqrt{2}}\right) + C$. 11. $\ln|x + 1{,}5 + \sqrt{x^2 + 3x + 0{,}25}| + C$. 12. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(x -$

$-0{,}75+\sqrt{x^2-1{,}5x+1{,}5})+C$. 13. $\frac{1}{\sqrt{3}}\left(z-0{,}5+\sqrt{z^2-z+\frac{1}{3}}\right)+C$.

14. $\frac{3}{2}\sqrt{2x^2+5x+20}-\frac{47}{4\sqrt{2}}\ln\left(x+\frac{5}{4}+\sqrt{x^2+2{,}5x+10}\right)+C$.

15. $4\sqrt{x^2+x+1}-7\ln(x+0{,}5+\sqrt{x^2+x+1})+C$.

16. $\sqrt{x^2+x-1}-\frac{1}{2}\ln|x+0{,}5+\sqrt{x^2+x-1}|+C$.

§ 12.

1. $x+C$. 2. $\frac{x^3}{3}-x^2+\frac{1}{7}\ln\frac{(x^2+3)^{16}}{(x+2)^{20}}+\frac{44}{7\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$.

3. $\frac{x^2}{2}-\frac{8}{x-2}-\frac{11}{(x-2)^2}+C$. 4. $\frac{1}{10(3-5x)^2}+C$.

5. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$.

6. $3\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2(x+1)^2}+C$.

7. $\frac{1}{10}\ln\left(\frac{(x-1)^2}{x^2+4}\right)-\frac{1}{10}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+C$. 8. $\frac{1}{74}\ln\frac{x^2+3}{x^2-4x+13}+\frac{5}{74\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}-$ $-\frac{1}{74\cdot 3}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}+C$. 9. $-\frac{3}{2}\left(\frac{x+2}{x^2+2x+2}+\operatorname{arctg}(x+1)\right)+C$. 10. $-\frac{1}{9}\times$ $\times\frac{1}{(x^3+8)^3}+C$. 11. $2\sqrt{x}-2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$. 12. $\frac{12}{13}x^{\frac{13}{12}}-\frac{96}{10}x^{\frac{10}{12}}-\frac{24}{9}x^{\frac{9}{12}}+42x^{\frac{8}{12}}+$ $+\frac{12\cdot 48}{7}\cdot x^{\frac{7}{12}}+32x^{\frac{6}{12}}-12\cdot 32x^{\frac{5}{12}}-3\cdot 384x^{\frac{4}{12}}-4\cdot 128x^{\frac{3}{12}}+6\cdot 1280x^{\frac{2}{12}}+128\times$ $\times 64x^{\frac{1}{12}}-5632\ln|x^{\frac{2}{12}}-2x^{\frac{1}{12}}+4|-\frac{10752}{\sqrt{3}}\ln\frac{x^{\frac{1}{12}}-1-\sqrt{3}}{x^{\frac{1}{12}}+1+\sqrt{3}}+C$. 13. $\sqrt{1-x^2}-$ $-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$. 14. $-3\left(1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)^{-2}+\frac{1}{2}\ln\left|1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right|-$ $-\left(1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)^{-1}+\frac{1}{8}\ln\left|1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right|+C$. 15. $-\frac{1}{7}(x-1)^{\frac{7}{6}}+\frac{1}{5}(x-$ $-1)^{\frac{5}{6}}+\frac{1}{4}(x-1)^{\frac{4}{6}}-\frac{1}{3}(x-1)^{\frac{3}{6}}-\frac{1}{2}(x-1)^{\frac{2}{6}}+(x-1)^{\frac{1}{6}}+\frac{1}{2}\ln|(x-1)^{\frac{1}{3}}+1|-$ $-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}(x-1)^{\frac{1}{6}}+C$.

§ 13.

1. $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C$. 2. $-\cos x+\cos^3 x-\frac{3}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x+C$.

3. $\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C$. 4. $\frac{5}{8}x+\frac{1}{24}\sin 12x+\frac{1}{192}\sin 24x+C$. 5. $\ln|4+\cos x|-$ $-\frac{4}{\cos x+4}+C$. 6. $\frac{2}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C$. 7. $\frac{2}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}-x+C$. 8. $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg} x+$

$+x+C$. **9.** $3\ln\left|\cos\frac{x}{3}\right|+\operatorname{tg}^3\frac{x}{3}+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{3}-3\operatorname{tg}\frac{x}{3}+x+C$. **10.** $-\frac{6}{7}\cos\frac{7}{12}x+$ $+6\cos\frac{x}{12}+C$. **11.** $3\sin\frac{x}{6}-\frac{2}{5}\sin\frac{5}{6}x+C$. **12.** $\frac{1}{6}\cos 3x+\frac{1}{22}\cos 11x+C$.

§ 14.

1. $121\frac{1}{3}$ м. **2.** $18\cdot 10^{-2}$ Дж. **3.** (1; 1). **4.** $\left(\pi a;\ \frac{5}{6}a\right)$. **5.** $195A\cdot c$. **6.** $0A\cdot c$.

§ 15.

1. а) 1; б) 4,5; в) $\frac{16}{3}\left(1+2\sqrt{2}+\frac{3}{2}\ln 2\right)$; г) πab; д) $\frac{3}{8}\pi a^2$; е) $\frac{3}{2}\pi a^2$; ж) $18\pi a^2$.
2. а) $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; б) $\frac{\pi^2 a}{2}$; в) $\ln(1+\sqrt{2})$; г) $a\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$; д) $2\pi\cdot a$. **4.** а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2)$; в) $0{,}3\pi$; г) $\frac{\pi^2}{2}$.
5. а) $\pi(\sqrt{5}-\sqrt{2})+\pi\ln\frac{2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{5}+1}$; б) $4\pi r^2$; в) $2\pi a^2$.

§ 16.

1. а) $y=-\frac{1}{\ln C(x-1)}$; б) $Ce^{x^2}-\frac{1}{2}(x^2+1)$; г) $\sec^2 x-\operatorname{cosec}^2 y=C$; е) $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$; ж) $y=Ce^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x}$; и) $(x+y)^2(2x+y)^3=C$; к) $y=Cx^2-\frac{1}{x^3}$; л) $y=x\operatorname{tg}Cx$; м) $y=C\sin x$. **2.** а) $y=e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$; б) $y=\frac{x}{\cos x}$; в) $y^2=5x\pm 2\sqrt{5}\cdot x$; г) $x=-t\operatorname{arctg}t$.
3. Дифференциальное уравнение движения диска: $mv'=-kv$. Его общее решение: $v=Ce^{-\frac{k}{m}t}$. Учитывая начальное условие $v\big|_{t=0}=3$, получаем: $v=3e^{-\frac{k}{m}t}$. Для нахождения коэффициента $-\frac{k}{m}$ используем условие $v\big|_{t=60}=2$. Угловая скорость диска через 3 мин после начала вращения $v\big|_{t=180}=\frac{8}{9}$ об/с. **4.** 0,467 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, 85,2 м.

§ 17.

1. а) $y=\frac{\ln^2|x|}{2}+C_1\ln|x|+C_2$; б) $y=C_2e^{C_1x}+\frac{1}{C_1}$; в) $y=C_2\pm\frac{1}{2}\left(C_1^2\arcsin\frac{x}{C_1}+x\sqrt{C_1-x^2}\right)$; г) $x+C_1=a\ln\left|\sin\frac{C_2+y}{a}\right|$; д) $x=C_2-\frac{1}{C_1}\ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right|$; е) $y=\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2x\ln|x|+C_3$; ж) $y=\frac{(x+C_1)^4}{12}+C_2x^2+C_3$. **2.** а) $y=\frac{1}{2}(x^2+1)$; б) $y=x+1$; в) $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\ln|x|+1$; г) $y=1-x-\sin x$.

§ 18.

1. а) $y=C_1+C_2e^{-2x}$; б) $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$; в) $y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$; г) $x=(C_1+C_2t)e^{2,5t}$; д) $z=e^{\frac{x}{5}}\left(C_1\cos\frac{4x}{5}+C_2\sin\frac{4x}{5}\right)$. **2.** а) $y=3e^{-2x}\sin 5x$; б) $y=$

$= e^{-\frac{x}{2}}(2+x)$. **3.** а) $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{3x}$; б) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-\frac{\sqrt{5}+3}{2}x} + C_3e^{\frac{\sqrt{5}-3}{2}x}$; в) $y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3\cos\sqrt{2}x + C_4\sin\sqrt{2}x$. **4.** а) $1+\cos x$; б) $y = e^{2x} + \sin 2x$.

§ 19.

1. а) $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + e^x(2x^2+x)$; б) $y = C_1 + C_2e^{-\frac{5}{2}x} + \frac{1}{7}e^x$; в) $y = C_1\cos x + C_2\sin x + 3 + \cos 2x$; г) $y = e^{2x}(C_1 + C_2x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cos 2x$; д) $y = e^{\frac{3}{5}x}\left(C_1\cos\frac{4}{5}x + C_2\sin\frac{4}{5}x - \frac{5}{9}\cos x - \frac{x}{8}\cos\frac{4}{5}x\right)$; е) $y = C_1 + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x + x^3 - 2x$; ж) $y = e^{-2x}(C_1 + C_2x + (x+1)\ln|x+1| - x)$. **2.** $y = e^x(0{,}16\cos 3x + 0{,}28\sin 3x) + x^2 + 2{,}2x + 0{,}84$. **3.** $y = e^x(e^x - x^2 - x + 1)$. **4.** $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$.

§ 20.

1. а) Сходится; б) расходится; г) расходится; д) расходится; е) сходится; ж) расходится; з) расходится; и) сходится; к) сходится. **2.** а) Сходится; б) расходится; в) сходится; г) сходится; д) расходится.

§ 21.

2. а) Всякий сходящийся ряд с положительными членами сходится абсолютно; б) сходится условно; в) абсолютно сходится; г) расходится; д) сходится условно; е) расходится; ж) сходится условно; з) абсолютно сходится; и) условно сходится.

§ 22.

1. а) $]-\infty; -1] \cup]1; +\infty[$; б) $]-\infty; +\infty[$. **3.** $]-\infty; +\infty[$. **4.** а) $R = 1$, $]-1; 1[$; б) $R = +\infty$, $]-\infty; +\infty[$ **5.** 0,0997, надо взять 2 члена. **6.** 0,2505. **7.** $y = -2 - 2x - x^2$. **8.** $y = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} + \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \ldots$ — ряд сходится при $|x| < \infty$.

§ 23.

$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos x + \sin x - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{2}{9}\cos 3x + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} - \ldots$, $-\pi < x < \pi$. **2.** $f(x) = \frac{2h}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{nh}\cos nx\right)$, $0 \leqslant x < h$, $h < x \leqslant \pi$. **3.** $f(x) = \frac{2h}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\cos nx\right)$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$. **4.** $f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$, $0 < x < \pi$.

СОДЕРЖАНИЕ

Виктор Константинович Егерев
Ольга Сергеевна Корсакова
Георгий Алексеевич Несененко
Валерия Александровна Козлова
Зоя Тимофеевна Диканова

ЗАДАЧНИК - ПРАКТИКУМ
по математическому анализу
с элементами
аналитической геометрии

Редактор Л. В. Туркестанская
Технический редактор Н. Н. Бажанова
Корректоры Л.Г. Новожилова, Т. С. Царикова

Сдано в набор 23. 09. 80. Подписано к печати 18. 03. 81. $60\times90^1/_{16}$. Бумага типограф. № 3. Гарнит. лит. Печать высокая. Усл. печ. л. 5,5. Уч.-изд. л. 5,30. Тираж 27000 экз. Заказ 459. Цена 15 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.