ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Н. Я. АВДЕЕВ

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО КУРСУ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СПЕЦИАЛЬНОСТИ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ

УЧПЕДГИЗ · 1959

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Московский государственный заочный педагогический институт

Н. Я. АВДЕЕВ

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО КУРСУ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва 1959

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основное назначение данного задачника-практикума — помочь студенту-заочнику математической специальности в освоении курса теории функций комплексного переменного.

По этой дисциплине существует ряд хороших учебников, например, такие, как: А. И. Маркушевич „Элементы теории аналитических функций“, Н. Г. Фукс и Б. В. Шабат „Курс теории функций комплексного переменного“, В. Л. Гончаров „Теория функций комплексного переменного“ и др., предназначенные для студентов педагогических институтов. Однако из-за слишком большого объема в них зачастую трудно ориентироваться и выбрать нужный материал. Вследствие этого студенты-заочники встречаются с большими трудностями в процессе изучения этого курса.

В предлагаемом пособии на небольшом числе страниц приводятся необходимые сведения из теории и даются краткие указания к решению примеров и задач.

К решению задач рекомендуется приступать после внимательного знакомства с содержанием учебника и основной части данного пособия.

В заключение выражаю искреннюю благодарность доцентам М. Г. Хапланову и М. Л. Смолянскому за ряд ценных советов при подготовке рукописи к печати.

Н. Я. Авдеев

НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Комплексное число $z = x + iy$ изображается точкой плоскости с абсциссой x и ординатой y.

Если $z = x + iy$ есть комплексное число, то под $\bar{z} = x - iy$ понимают сопряженное с z число, под $Rz = R(x + iy) = x$ — вещественную часть числа z, под $Iz = I(x + iy) = y$ — мнимую часть числа z.

Если дано комплексное число $z = x + iy$, то

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{1}$$

где $|z|$ — модуль числа z.

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg}(x + iy) = \arg z + 2k\pi, \tag{2}$$

где $\operatorname{Arg} z$ — аргумент числа z

а) $\arg z = \arg(x + iy) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, если $x > 0$;

б) $\arg z = \arg(x + iy) = \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, если $x < 0$, $y \geqslant 0$;

в) $\arg z = \arg(x + iy) = -\pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, если $x < 0$, $y < 0$;

г) $\arg z = \arg(x + iy) = \frac{\pi}{2}$, если $x = 0$, $y > 0$;

д) $\arg z = \arg(x + iy) = -\frac{\pi}{2}$, если $x = 0$, $y < 0$;

е) $\arg z = \arg(x + iy) = 0$, если $x > 0$, $y = 0$;

ж) $\arg z = \arg(x + iy) = \pi$, если $x < 0$, $y = 0$;

$$-\pi < \arg z \leqslant \pi, \qquad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Обозначив через ρ и φ полярные координаты точки $z = x + iy$, будем иметь:

$$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}. \tag{3}$$

Если $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, то:

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|, \tag{4}$$

$$|z_1 - z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|. \tag{5}$$

Эти неравенства обращаются в равенства тогда и только тогда, когда $\operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2$.

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \text{ и } \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2; \tag{6}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \text{ и } \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} r_2; \tag{7}$$

$$|z^n| = |z|^n \text{ и } \operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z. \tag{8}$$

Если $z = x + iy \neq 0$ и $\varphi = \arg z$, то

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \tag{9}$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$.

§ 1. ОПЕРАЦИИ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Вычислить модуль и главные значения аргументов следующих комплексных чисел:

1. а) $9 + 3i\sqrt{3}$; б) $9 - 3i\sqrt{3}$; в) $-9 + 3i\sqrt{3}$; г) $-9 - 3i\sqrt{3}$.

Решение. Модуль комплексного числа вычисляется по формуле (1)

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

В нашем случае модули всех этих чисел равны между собой

$$|z| = \sqrt{81 + 27} = 6\sqrt{3}.$$

Для вычисления аргументов данных комплексных чисел воспользуемся формулой (2)

а) $\arg(9 + 3i\sqrt{3}) = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$;

б) $\arg(9 - 3i\sqrt{3}) = -\arg(9 + 3i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{6}$;

в) $\arg(-9 + 3i\sqrt{3}) = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{-3} + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5}{6}\pi$;

г) $\arg(-9 - 3i\sqrt{3}) = -\arg(-9 + 3i\sqrt{3}) = -\frac{5}{6}\pi$.

2. Пользуясь теоремами о модуле и аргументе произведения, частного, степени и корня, найти модули и аргументы следующих выражений:

а) $\sqrt{3}+3i$; б) $1-\sqrt{3}i$; в) $-1+i$; г) $-1-i$; д) $(5+7i)(7+5i)$; е) $\frac{\sqrt{3}+i}{2-2i}$; ж) $(1-i\sqrt{3})^3$; з) $\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}$.

Ответ. а) $2\sqrt{3}$, $\frac{\pi}{3}$; б) 2, $-\frac{\pi}{3}$; в) $\sqrt{2}$, $\frac{3}{4}\pi$; г) $\sqrt{2}$, $-\frac{3}{4}\pi$; д) 74, $\frac{\pi}{2}$; е) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{5}{12}\pi$; ж) 8, $-\pi$; з) $\sqrt[4]{2}$, $(12k+1)\frac{\pi}{24}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$.

§ 2. ПОНЯТИЕ ОБЛАСТИ И ЕЕ ГРАНИЦЫ

Множество всех точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству

$$|z-c|<\varepsilon$$

(то есть лежащих внутри круга радиуса ε с центром в точке c), называют *окрестностью точки* c.

Множество D точек комплексной плоскости называют *областью*, если оно удовлетворяет следующим двум условиям:

а) Каждая точка множества D есть внутренняя точка этого множества. (Напомним, что точка z_0 называется *внутренней точкой* области D, если она принадлежит этой области вместе с некоторой своей окрестностью. Точка t_0 называется *внешней* по отношению области, если не только она, но и некоторая ее окрестность не принадлежит области.)

б) Любые две точки множества D можно соединить непрерывной линией так, чтобы все точки этой линии принадлежали самому множеству D. Точка τ_0 называется *граничной* для области, если в любой ее окрестности лежат как точки области, так и точки, не принадлежащие этой области. Множество всех граничных точек области называется *границей* этой области.

Область D с присоединенной к ней границей называют *замкнутой областью* и обозначают символом $\overline{D}$.

Область называется *ограниченной*, если бесконечно далекая точка является для нее внешней точкой, в противном случае область называется *неограниченной*.

Область называется *односвязной*, если любая замкнутая кривая, целиком принадлежащая области, может быть стянута в точку области, не выходя из нее. Если это условие не выполняется, то область называется *многосвязной*. Примером односвязной области является множество точек круга $|z|<R$; примером многосвязной (двусвязной) области служит множество точек кольца $r<|z|<R$.

Примеры.

Какие линии или области в комплексной плоскости определяются следующими условиями:

3. $|z-1|=2|z-i|$.

Решение. Полагая $z = x + iy$, перепишем условия задачи в следующем виде

$$|x + iy - 1| = 2|x + iy - i|$$

или

$$|(x-1) + iy| = 2|x + i(y-1)|.$$

Использовав условия (см. (1), что $\sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy|$, получим:

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2\sqrt{x^2 + (y-1)^2}.$$

После элементарных преобразований получим уравнение окружности

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}.$$

4. $|z - a| < |1 - a\bar{z}|$ (a — вещественное число).

Решение. Полагая $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, запишем $\sqrt{(x-a)^2 + y^2} < \sqrt{(1-ax)^2 + a^2y^2}$.
Сделав элементарные преобразования, получим:

$$(1 - a^2)(x^2 + y^2) < (1 - a^2).$$

Исследуем данное неравенство:

а) При $1 - a^2 > 0$, $x^2 + y^2 < 1$ — ограниченная односвязная круговая область единичного радиуса.

б) При $1 - a^2 < 0$, $x^2 + y^2 > 1$ — неограниченная односвязная область — вся плоскость с круговым отверстием единичного радиуса.

5. $1 \leqslant |z - 2| \leqslant 3$.

Ответ. Замкнутая двусвязная кольцевая область, ограниченная двумя концентрическими окружностями радиусов $r = 1$, $R = 3$ с центром в (0,2).

6. $|z^2 - 1| = 1$.

Ответ. Лемниската $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$.

7. $a \leqslant Rz \leqslant b$.

Ответ. Полоса $a \leqslant x \leqslant b$ — замкнутая неограниченная односвязная область.

8. $\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta$, $0 < a \leqslant Rz \leqslant b$.

Ответ. Замкнутая односвязная область формы трапеции.

9. Записать в комплексной форме уравнения:

а) $x^2+2x+y^2-y=1$; б) $x^2-y^2=1$.

Ответ. а) $z\bar{z}+\left(1+\frac{i}{2}\right)z+\left(1-\frac{i}{2}\right)\bar{z}=1$;

б) $z^2+\bar{z}^2=2$.

Указание. Положить $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$.

§ 3. КОМПЛЕКСНЫЕ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА

Комплексная переменная z называется *комплексной функцией действительного аргумента* t, заданной на интервале (α, β), если каждому значению t из этого интервала поставлено в соответствие комплексное числовое значение z.

Задание комплексной функции действительного аргумента эквивалентно заданию двух действительных функций: $x=\alpha(t)$ и $y=y(t)$ таких, что

$$z=z(t)=x(t)+iy(t).$$

При изменении t на интервале (α, β) точка $z=z(t)$ описывает в комплексной числовой плоскости некоторую кривую, которая в векторном исчислении называется *годографом вектора.* Например, функция

$$z=z(t)=z_0+Re^{it}, \quad (-\pi\leqslant t\leqslant\pi), \tag{1,3}$$

где z_0 — комплексное, а R — постоянное положительное число, определяет окружность радиуса R с центром в точке (x_0, y_0).

В самом деле, полагая в равенстве (1,3)

$$z=x+iy, \qquad z_0=x_0+iy_0, \qquad e^{it}=\cos t+i\sin t$$

и приравнивая действительные и мнимые части, получим:

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+R\cos t\\ y&=y_0+R\sin t\end{aligned}\right\} \quad (-\pi\leqslant t\leqslant\pi). \tag{2,3}$$

Уравнение (2) является параметрическим уравнением окружности радиуса R с центром в точке (x_0, y_0). Исключая из (2) параметр t, получим уравнение окружности в декартовых координатах

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

Примеры.

Какие кривые описываются точкой z плоскости комплексного переменного, когда параметр t пробегает всевозможные вещественные значения, если a, b, w — вещественные постоянные?

10. $z = z(t) = ae^{iwt} + be^{-iwt}$. (α)

Решение. Полагая $z = x + iy$ и применяя формулу Эйлера

$$e^{\pm iwt} = \cos wt \pm i \sin wt$$

(отделяя вещественные и мнимые части), получим параметрическое уравнение эллипса

$$\left.\begin{aligned} x &= (a+b)\cos wt \\ y &= (a-b)\sin wt \end{aligned}\right\}, \qquad (\beta)$$

исключив из (β) параметр t, запишем уравнение эллипса в декартовых координатах

$$\frac{x^2}{(a+b)^2} + \frac{y^2}{(a-b)^2} = 1.$$

11. $z = z(t) = e^{(a+ib)t}$.

Ответ. Логарифмическая спираль

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = e^{\frac{a}{b} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}} = e^{\frac{a}{b}\varphi}.$$

12. $z = z(t) = a(1 + e^{it})^{-2}$.

Ответ. Парабола $y^2 = a\left(\frac{a}{4} - x\right)$.

§ 4. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО, ЕЕ ПРЕДЕЛА И НЕПРЕРЫВНОСТИ

Если в комплексной плоскости дана некоторая область D и если каждой точке z этой области ставится в соответствие определенное комплексное число w, то *w называют комплексной функцией от z*, заданной в области D, и пишут

$$w = f(z).$$

Задание комплексной функции $w = f(z)$, очевидно, равносильно заданию двух вещественных функций переменных x и y

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

таких, что, если положить

$$z = x + iy,$$

то

$$w = f(z) = u + iv.$$

Функция $w = f(z)$ называется *однозначной*, если каждому значению z из области определения функции соответствует только одно значение функции w. В противном случае функция называется *многозначной*. Например, функции:

$$w=f(z)=z^3-2z-5 \text{ — однозначная;}$$
$$w=\varphi(z)=\sqrt[7]{z^3-2z+5} \text{ — многозначная.}$$

Число A называется *пределом функции* $f(z)$ в точке z_0, если для всякого произвольно малого положительного числа ε можно определить положительное число $\delta=\delta(\varepsilon)$, такое, что имеет место неравенство

$$|f(z)-A|<\varepsilon$$

для всех z, удовлетворяющих неравенству $|z-z_0|<\delta$. Символически это записывается так:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A.$$

В частности, если $A=f(z_0)$, то функция $f(z)$ называется *непрерывной в точке* z_0. Другими словами: функция $f(z)$ называется непрерывной в точке z_0, если для всякого сколь угодно малого положительного числа ε существует положительное число $\delta=\delta(\varepsilon)$, такое, что выполняется неравенство:

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$$

для всех z, удовлетворяющих неравенству

$$|z-z_0|<\delta.$$

Геометрически определение непрерывности функции означает, что для всех точек z, лежащих внутри круга $|z-z_0|<\delta$ с центром в точке z_0, достаточно малого радиуса δ, соответствующие значения функции $w=f(z)$ изображаются точками, лежащими внутри круга $|w-w_0|<\varepsilon$ с центром в точке $w_0=f(z_0)$ сколь угодно малого радиуса ε. Функция $f(z)$ называется *непрерывной в некоторой области* D, если она непрерывна в каждой точке этой области. Функция $f(z)$ называется *равномерно непрерывной в области* $\overline{D}$, если для всякого сколь угодно малого положительного числа ε существует число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любых двух точек z' и z'' области $\overline{D}$, удовлетворяющих условию $|z''-z'|<\delta$, имеет место неравенство

$$|f(z'')-f(z')|<\varepsilon.$$

Примеры.

Отделить действительную и мнимую часть функций:

13. $f(z)=\dfrac{z+3}{z+5}$.

Решение. Полагая $z=x+iy$ и $f(z)=u+iv$ последовательным преобразованием, имеем:

$$u+iv=\frac{x+3+iy}{x+5+iy}=\frac{(x+3+iy)(x+5-iy)}{(x+5)^2+y^2}=$$
$$=\frac{x^2+y^2+8x+15}{x^2+y^2+10x+25}+i\,\frac{2y}{x^2+y^2+10x+25},$$
$$u=\frac{x^2+y^2+8x+15}{x^2+y^2+10x+25},\quad v=\frac{2y}{x^2+y^2+10x+25}.$$

14. $f(z)=z^3+2z^2+5z+7$.

Ответ. $u=x^3-3xy^2+2x^2-2y^2+5x+7;$

$$v=3x^2y-y^3+4xy+5y.$$

15. Показать, что функция $f(z)=\frac{z+a}{z+b}$ в любой точке $z_0\neq -b$ имеет своим пределом число $A=\frac{z_0+a}{z_0+b}=f(z_0)$.

Решение. Пусть $\varepsilon>0$ — сколь угодно малое число. Полагая $|z_0+b|=2d$ и замечая, что при $|z-z_0|<d$ выполняется неравенство $|z+b|>d$, имеем:

$$|f(z)-A|=\left|\frac{z+a}{z+b}-\frac{z_0+a}{z_0+b}\right|=$$

$$=\frac{|a-b|\,|z-z_0|}{|z+b|\,|z_0+b|}<\frac{|a-b|\,|z-z_0|}{2d^2}<\varepsilon.$$

Отсюда следует, что одновременное выполнение двух неравенств

$$|z-z_0|<d,\quad |z-z_0|<\frac{2d^2\varepsilon}{|a-b|}$$

влечет за собой неравенство $|f(z)-A|<\varepsilon$. Значит, если положить δ равной наименьшему из чисел d и $\frac{2d^2\varepsilon}{|a-b|}$, то при $|z-z_0|<\delta$ справедливо неравенство $|f(z)-A|<\varepsilon$. Следовательно:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{z+a}{z+b}=\frac{z_0+a}{z_0+b}=f(z_0).$$

Примечание. Так как в рассмотренном примере

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0),$$

то по определению данная функция непрерывна во всей плоскости за исключением одной точки $z=-b$.

§ 5. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Приведем примеры некоторых элементарных функций:

а) **Целая линейная функция**

$$w=f(z)=az+b.$$

б) **Дробная линейная функция**

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad - bc \neq 0).$$

в) **Целая рациональная функция**

$$w = f(z) = a_2 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n -_1 z + a_n.$$

г) **Дробная рациональная функция**

$$w = f(z) = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}.$$

д) **Показательная функция. Синус и косинус**

Показательная функция e^z и тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ в комплексной области определяются степенными рядами:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

а) **Формулы Эйлера**

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2};$$

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z; \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

б) **Гиперболические функции и их связь с тригонометрическими**

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \ldots + \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

$\cos z = \operatorname{ch}(iz)$; $\quad \operatorname{ch} z = \cos(iz)$; $\quad \cos^2 z + \sin^2 z = 1$; $\quad i \sin z = \operatorname{sh}(iz)$;
$i \operatorname{sh} z = \sin(iz)$; $\quad \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$; $\quad i \operatorname{tg} z = \operatorname{th}(iz)$; $\quad i \operatorname{tg} z = \operatorname{tg}(iz)$.

в) **Логарифмическая функция**

Логарифмическая функция в комплексной области может быть определена как обратная по отношению к показательной $z = e^w$ и обозначается так:

$$w = \operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi)$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \ldots).$$

г) **Степенная функция с произвольным показателем**

$$w = f(z) = z^n = (e^{\operatorname{Ln} z})^n = e^{n \operatorname{Ln} z} \quad (z \neq 0).$$

д) **Обратные тригонометрические и гиперболические функции и их связь с логарифмом**

$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z \pm \sqrt{z^2-1})$	$\operatorname{Arcch} z = \operatorname{Ln}(z \pm \sqrt{z^2-1})$
$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz \pm \sqrt{1-z^2})$	$\operatorname{Arcsh} z = \operatorname{Ln}(z \pm \sqrt{z^2+1})$
$\operatorname{Arctg} z = \dfrac{1}{2i} \operatorname{Ln} \dfrac{1+iz}{1-iz}$	$\operatorname{Arcth} z = \dfrac{1}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{1+z}{1-z}$.

Пример.

16. Применяя тождество

$$e^{i(z+t)} = e^{iz}e^{it}$$

и формулы Эйлера, вывести формулы:

а) $\cos(z \pm t) = \cos z \cos t \mp \sin z \sin t$;
б) $\sin(z \pm t) = \sin z \cos t \pm \cos z \sin t$.

17. Положив $z = x + iy$, вывести формулы:

а) $\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$;
б) $\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$;
в) $\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y$;
г) $\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y$.

18. Полагая $z = x + iy$, выразить $\operatorname{Ln} z$ через x и y.

Ответ: $\operatorname{Ln} z = \ln \sqrt{x^2+y^2} + i \left[\operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + 2k\pi\right]$.

19. Показать, что $e^{z+2k\pi i} = e^z$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

20. Доказать, что: а) $i^i = e^{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi} = e^{(4k-1)\frac{\pi}{2}}$;

б) $(-1)^{\sqrt{2}} = \cos(2k+1)\pi\sqrt{2} + i \sin(2k+1)\pi\sqrt{2}$;

в) $(1+i)^i = e^{-(8k+1)\frac{\pi}{4}}(\cos \ln \sqrt{2} + i \sin \ln \sqrt{2})$;

г) $(1+i)^{i+1} = \sqrt{2}\, e^{-(8k+1)\frac{\pi}{4}} \left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}\right) + \right.$
$\left. + i \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}\right)\right]$.

21. Показать, что $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$.

22. Показать, что при любом $A \neq 0$ уравнение

$$e^{\frac{1}{z-a}} = A$$

в окрестности точки $z=a$ имеет бесконечное множество корней.

Решение. Логарифмированием данного уравнения получим:

$$\frac{1}{z-a}=\ln A+2k\pi i, \quad z_k=a+\frac{1}{\ln A+2k\pi i}.$$

23. Показать, что при $a>0$ и $z=x+iy$

$$a^z=a^x(\cos y\ln a+i\sin y\ln a).$$

Указание. Воспользоваться тождеством

$$a^z=e^{z\ln a}.$$

§ 6. ПОНЯТИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Функция $f(z)=u+iv$ называется *дифференцируемой в точке* z области D, если существует и конечен предел

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h},$$

который называется *производной* от $f(z)$ и обозначается через $f'(z)$.

Дифференцируемость функции $f(z)$ влечет за собой существование частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ и равенств

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1,6}$$

которые называются условиями *Коши — Римана* или *Даламбера — Эйлера*.

Условия Коши — Римана в декартовых координатах (1,6) выводятся во всех учебниках по теории функций комплексного переменного. Вывод условий Коши — Римана в полярных координатах

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi} \tag{2,6}$$

мы воспроизводим здесь.

Рассматривая в $w=f(z)=u+iv$, u и v как сложные функции, в которых x и y промежуточные, а ρ и φ независимые переменные, и замечая, что

$$x=\rho\cos\varphi, \quad y=\rho\sin\varphi, \tag{3,6}$$

получим:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \rho}&=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi\\
\frac{\partial u}{\partial \varphi}&=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}=-\frac{\partial u}{\partial x}\rho\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\rho\cos\varphi\\
\frac{\partial v}{\partial \rho}&=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial v}{\partial y}\sin\varphi\\
\frac{\partial v}{\partial \varphi}&=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}=-\frac{\partial v}{\partial x}\rho\sin\varphi+\frac{\partial v}{\partial y}\rho\cos\varphi
\end{aligned}\right\} \qquad (4,6)$$

Умножая первое и третье равенства из (4,6) на ρ, затем вычитая почленно из первого четвертое, складывая второе с третьим и принимая во внимание (1,6), получим (2,6).

Если функция $w=f(z)=u+iv$ дифференцируема в точке $z=x+iy=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\rho e^{i\varphi}$, то ее производная может быть вычислена по формулам:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad (5,6)$$

$$f'(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}+i\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)(\cos\varphi-i\sin\varphi)=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}-i\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right). \qquad (6,6)$$

Функция комплексного переменного $w=f(z)=u+iv$, имеющая конечную производную в каждой точке некоторой области D, называется *аналитической в этой области.*

Примеры.

Проверить аналитичность и найти производные следующих функций:

24. $w=f(z)=e^z$.

Решение. Полагая $z=x+iy$, $w=u+iv$ и применяя формулу Эйлера, получим:

$$u+iv=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$$

$$\begin{array}{l|l}
u=e^x\cos y & \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y\\
v=e^x\sin y & \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}=-e^x\sin y.
\end{array}$$

Следовательно, функция e^z — аналитическая во всей плоскости.

Применяя формулы (5,6), получим:

$$f'(z)=e^x(\cos y+i\sin y)=e^{x+iy}=e^z.$$

25. $w=f(z)=\bar{z}$.

Решение. Полагая $\bar{z}=x-iy$, $w=u+iv$, имеем:

$$\left.\begin{array}{l} u=x \\ v=y \end{array}\right| \quad \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Следовательно, функция $w=\bar{z}$ недифференцируема ни в какой точке плоскости.

26. $w=f(z)=z^n$ (n — целое).

Решение. Полагая $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $w=u+iv$ и применяя формулу Муавра, последовательно имеем:

$$u+iv=\rho^n(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),$$

$$u=\rho^n\cos n\varphi \qquad \frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho} \qquad \frac{\partial v}{\partial \varphi}=n\rho^{n-1}\cos n\varphi,$$

$$v=\rho^n\sin n\varphi \qquad \frac{\partial v}{\partial \rho}=-\frac{1}{\rho} \qquad \frac{\partial v}{\partial \varphi}=n\rho^{n-1}\sin n\varphi.$$

Применяя формулы (6,6), и после элементарных преобразований получим:

$$(z^n)'=nz^{n-1}.$$

27. $w=f(z)=\ln z=\ln\rho+i\varphi$.

Ответ. $(\ln z)'=\frac{1}{z}$.

28. $w=f(z)=\cos z$.

Решение. Полагая $z=x+iy$, $w=u+iv$ и применяя формулы Эйлера, получим:

$$u+v=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})=\frac{1}{2}(e^{ix-y}+e^{-ix+y})=$$

$$=\frac{1}{2}\Big[(e^{-y}+e^{y})\cos x+i(e^{-y}-e^{y})\sin x\Big];$$

$$u=\frac{1}{2}(e^{-y}+e^{y})\cos x \qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{2}(e^{-y}+e^{y})\sin x;$$

$$v=\frac{1}{2}(e^{-y}-e^{y})\sin x \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{2}(e^{-y}-e^{y})\cos x.$$

Применяя формулы (5,6), и после элементарных преобразований окончательно имеем:

$$(\cos z)'=-\sin z.$$

29. Показать справедливость формул:

$$(\sin z)' = \cos z; \qquad (\operatorname{tg} z)' = \sec^2 z;$$
$$(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z; \qquad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z;$$
$$(\arcsin z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}; \qquad (\arccos z)' = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}};$$
$$(\operatorname{arctg} z)' = \frac{1}{1+z^2}; \qquad (\operatorname{arcctg} z)' = -\frac{1}{1+z^2}.$$

30. Показать, что если функция

$$w = f(z) = u + iv$$

аналитическая в некоторой области D, то функции u и v гармонические в этой области.

Указание. Воспользуемся условиями Коши — Римана (1, 6).

31. Вывести формулу выражения производной аналитической функции в полярных координатах (6, 6).

Указание. Воспользоваться формулой (5, 6) и равенствами (4, 6).

32. Если функция $f(z)$ в каждой точке области удовлетворяет условию: $f'(z) = 0$, то доказать, что $f(z)$ — const в этой области.

33. Показать, что если функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ в области D удовлетворяют условию $f'(z) = \varphi'(z)$, то $f(z) - \varphi(z) = \text{const}$ в этой области.

§ 7. ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПО ЗАДАННОЙ ЕЕ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ИЛИ МНИМОЙ ЧАСТИ

Если функция комплексного переменного

$$w = f(z) = u + iv \tag{1, 7}$$

аналитическая в некоторой области D, то ее вещественная часть $u = u(x, y)$ и мнимая часть $v = v(x, y)$ — *сопряженные гармонические функции в этой области*. Причем, если известна гармоническая функция $u = u(x, y)$, то сопряженная с ней гармоническая функция $v = v(x, y)$ с точностью до постоянного слагаемого определяется формулой:

$$v(x, y) = \int -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy. \tag{2, 7}$$

Если известна гармоническая функция $v = v(x, y)$, то сопряженная с ней гармоническая функция $u = u(x, y)$ с точностью до постоянного слагаемого определяется формулой:

$$u(x, y) = \int \frac{\partial v}{\partial u}\,dx - \frac{\partial v}{\partial x}\,dy. \tag{3, 7}$$

Примеры.

Построить аналитическую функцию (1, 7) по следующим условиям:

34. $u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$, $f(0) = 0$.

Решение. Применяя формулу (2, 7), имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 12xy^2;\ v = \int (12x^2y - 4y^3)\,dx + $$
$$+ (4x^3 - 12xy^2)\,dy =$$
$$= 4x^3y - 4y^3x + \varphi(y);\ \frac{\partial v}{\partial y} = 4x^3 - 12xy^2 +$$
$$+ \varphi'(y) = 4x^3 - 12xy^2;\ \varphi'(y) = 0;\ \varphi(y) = c;$$
$$v = 4x^3y - 4y^3x + c.$$

Подставляя значения u и v в (1, 7), получим:

$$f(z) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 4x^3yi - 4xy^3i + ic =$$
$$= (x + iy)^4 + ic = z^4 + ic.$$

Следовательно, $f(z) = z^4 + ic$, но так как по условию $f(0) = ic = 0$, то окончательно имеем:

$$f(z) = z^4.$$

35. $v = e^x \sin y + 2xy + 5y$, $f(0) = 10$.

Решение. Применяя формулу (3,7), имеем:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y + 2y \qquad u = \int (e^x \cos y + 2x + 5)\,dx +$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y + 2x + 5 \qquad -(e^x \sin y + 2y)\,dy = e^x \cos y +$$
$$+ x^2 + 5x + \varphi(y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y + \varphi'(y) = -e^x \sin y - 2y;$$
$$\varphi'(y) = -2y,\ \varphi(y) = -y^2 + c;$$
$$u = e^x \cos y + x^2 + 5x - y^2 + c.$$

Подставляя значения u и v в (1, 7), получим:

$$f(z) = e^x(\cos y + i \sin y) + x^2 + 2xyi - y^2 +$$
$$+ 5(x + iy) + c = e^z + z^2 + 5z + c,$$

но так как по условию $f(0) = c + 1 = 10$, то окончательно имеем:

$$f(z) = e^z + z^2 + 5z + 9.$$

36. $u = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 6x - 3y^2$, $f(0) = 0$.

Ответ. $f(z) = z^3 + 3z^2 - 6z$.

37. $v = \frac{y}{x^2 + y^2} + y$, $f(1) = 15$.

38. $u = e^x \cos y + x^2 - y^2 + 3x$, $f(0) = 0$.

Ответ. $f(z) = e^z + z^2 + 3z - 1$.

39. $v = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + e^x \sin y + 3y$.

Ответ. $f(z) = \ln z + e^z + 3z + c$.

Примечание 1. Для определения сопряженной гармонической функции по заданной можно воспользоваться известными из анализа формулами в случае

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \tag{4, 7}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_{(x,\ y)} = \int_{x_0}^{x} M(x,\ y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy + c \\ &\text{или} \\ &\Phi_{(x,\ y)} = \int_{y_0}^{y} N(x, y)\,dy + \int_{x_0}^{x} M(x_0, y)\,dx + c \end{aligned}\right\}, \tag{5,7}$$

которые для нашего случая примут вид:

$$\left.\begin{aligned} &v(x, y) = -\int_{x_0}^{x} u'_y\ (x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} u'_x\ (x_0, y)\,dv + c \\ &\text{или} \\ &v(x, y) = \int_{y_0}^{y} u'_x\ (x, y)\,dy - \int_{x_0}^{x} u'_y\ (x_0, y_0)\,dx + c \end{aligned}\right\} \tag{6, 7}$$

$$\left.\begin{aligned} &u(x, y) = \int_{x_0}^{x} v'_y\ (x, y)\,dx - \int_{y_0}^{y} v'_x\ (x_0, y)\,dy + c \\ &\text{или} \\ &u(x, y) = -\int_{y_0}^{y} v'_y\ (x, y)\,dy + \int_{x_0}^{x} v'_y\ (x, y_0)\,dx + c \end{aligned}\right\} \tag{7, 7}$$

Примеры.

Применяя формулы (6, 7) и (7, 7), построить аналитическую функцию (1, 7) по условиям:

40. $u=\frac{x}{x^2+y^2}$, $f(2)=\frac{1}{2}$.

Решение. По первой формуле из (6, 7) при $u=\frac{x}{x^2+y^2}$ имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad v(x,y)=\int_0^x \frac{2xy\,dx}{(x^2+y^2)^2}+\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{y^2}=-\frac{y}{x^2+y^2}+c$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\; f(z)=\frac{x-iy}{x^2+y^2}+ic=\frac{1}{z}+ic,$$ но так как

$$f(2)=\frac{1}{2}+ic=\frac{1}{2},\ \text{то } c=0 \text{ и } f(z)=\frac{1}{z}.$$

41. $v=\frac{y}{x^2+y^2}$, $f(1)=7$.

Ответ. $f(z)=8-\frac{1}{z}$.

Примечание 2. Построение аналитической функции по ее вещественной или мнимой части в некоторых случаях может быть значительно упрощено, если воспользоваться следующим известным свойством. Если в аналитической функции

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \tag{α}$$

положить $y=0$, а затем вещественную переменную x заменить комплексной переменной $z=x+iy$, то снова получим первоначальную аналитическую функцию

$$f(z)=u(z,0)+iv(z,0). \tag{β}$$

Пользуясь этим предположением и формулами (6) и (7), получим формулы:

$$f(x)=u\;(x,\;0)-i\int u'_y(x,0)\,dx+ic, \tag{8, 7}$$

$$f(x)=\int v'_y(x,0)\,dx+iv(x,0)+c. \tag{9, 7}$$

Вычисляя интегралы в правых частях (8, 7) и (9, 7), а затем заменяя x комплексной переменной z, получим искомую аналитическую функцию (1, 7).

Примеры.

42. Найти аналитическую функцию, для которой

$$Rf(z)=u=e^x\ln\sqrt{x^2+y^2}\cos y.$$

Решение. Здесь $u(x,y)=e^x\ln\sqrt{x^2+y^2}\cos y$; $u(x,0)=e^x\ln x$; $u'_y(x,0)=0$; $\int u'_y(x,0)\,dx=0$. По (8, 7) $f(x)=e^x\ln x+ic$; $f(z)=e^z\ln z+ic$.

§ 8. ТЕОРЕМА И ИНТЕГРАЛ КОШИ

Криволинейный интеграл в комплексной области от непрерывной на контуре L функции $f(z)$ определяется как предел интегральной суммы:

$$\int_L f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\,\Delta z_k. \qquad (1, 8)$$

Полагая $f(z) = u + iv$, интеграл комплексного переменного (1, 8) можно выразить через вещественные криволинейные интегралы

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L u dx - v dy + i\int_L v dx + u dy. \qquad (2, 8)$$

Если $f(z)$ — однозначная аналитическая в области D функция и L замкнутый контур, целиком лежащий в этой области, то

$$\int_L f(z)\,dz = 0. \text{ (\textit{Теорема Коши.})} \qquad (3, 8)$$

Если $f(t)$ граничные значения функции $f(z)$ аналитической в конечной замкнутой области $\overline{D}$, то значение функции $f(z)$ в любой точке $z \in D$ выражается формулой:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t - z}\,dt. \text{ (\textit{Интеграл Коши.})} \qquad (4, 8)$$

Из интеграла Коши (4, 8) следует, что аналитическая функция имеет производные всех порядков, причем

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{(t - z)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots). \qquad (5, 8)$$

Примеры.

Вычислить интегралы:

43. $\displaystyle\int_L \left(\frac{\sin z}{z - 2} + \frac{z + 5}{(z^2 + 9)(z - 5)}\right) dz$

вдоль контура $z = 4e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Решение. Полагая $z = x + iy$ и применяя формулу Эйлера $e^{it} = \cos t + i \sin t$, находим, что контуром интегрирования служит окружность радиуса $R = 4$ с центром в начале координат, то есть $x^2 + y^2 = 16$.

Подинтегральная функция внутри контура интегрирования имеет особые точки (полюсы первого порядка) $z_1 = 2$, $z_2 = 3i$, $z_3 = -3i$. Особая точка $z_4 = 5$ лежит вне контура.

Разлагая $\sin z$ по степеням $z - 2$, будем иметь:

$$\frac{\sin z}{z - 2} = \frac{\sin 2}{z - 2} + \varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ — аналитическая во всей плоскости.

Разлагая рациональную функцию на простейшие, получим:

$$\frac{z+5}{(z^2+9)(z-5)}=\frac{8+15i}{102i(z-3i)}+\frac{8-15i}{102i(z+3i)}+\frac{17}{5(z-5)}.$$

Применяя теорему Коши и зная, что

$$\int_L \frac{dz}{z-a}=2\pi i,$$

если a находится внутри контура L, окончательно имеем:

$$\int_L \left(\frac{\sin z}{z-2}+\frac{z+5}{(z^2+9)(z-5)}\right)dz=2\pi\left(\frac{8}{51}+\mathrm{i}\sin 2\right).$$

44.

$$\int_L \left(\frac{\ln(z+5)}{z-5}+\frac{z+2}{(z^2+4)(z-3)}\right)dz$$

вдоль контура $|z-2|=2$.

Ответ. $\frac{10\pi i}{13}$.

§ 9. КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

Если $w=f(z)$ есть аналитическая функция и если в некоторой точке z_0 области D производная от $f(z)$ не равна нулю, то достаточно малая окрестность точки z_0 отображается взаимно однозначно и непрерывно на некоторую область плоскости w, содержащую точку $w_0=f(z_0)$. При этом отображении угол между двумя кривыми, проходящими через точку z_0, по величине и направлению совпадает с углом между изображениями этих кривых в плоскости w, а линейный масштаб отображения в точке z_0 одинаков для всех кривых, проходящих через точку z_0. Отображение, при котором имеет место сохранение углов по величине и направлению и постоянство растяжений, принято называть *конформным отображением.*

В основе теории конформного отображения лежат следующие теоремы:

Теорема 1. *Отображение, осуществляемое аналитической функцией $w=f(z)$ во всех точках z, в которых $f'(z)\neq 0$ конформно, причем $\arg f'(z)$ означает угол поворота, а $|f'(z)|$ — коэффициент линейного растяжения при отображении точек z в точки w.*

Теорема 2. *Каждая односвязная область D плоскости z, отличная от полной плоскости или от плоскости с выключенной точкой, может быть бесчисленным множеством способов отображена взаимно однозначно и конформно на единственный круг плоскости w.*

Отображения области D на единственный круг определяются однозначно, если потребовать, чтобы заданная точка z_0 области D и некоторое направление в ней перешли в заданную точку вместе с заданным направлением внутри круга.

Теорема 3. *Если границей односвязной области является непрерывная кривая без двойных точек, то при конформном отображении области на круг соответствие является взаимно однозначным вплоть до границ.*

Теорема 4. *Если функция $w=f(z)$, аналитическая внутри контура C, отображает этот контур взаимно однозначно на некоторый контур C', то она и область D, ограниченную контуром C, отображает взаимно однозначно на область D', ограниченную контуром C'.*

Теорема 5. *Однозначная аналитическая функция отображает область своего определения снова на область (однолистную или многолистную).*

Принцип симметрии. Если в составе границы области D имеется отрезок прямой или дуга окружности α, а в составе границы области D_w — отрезок прямой или дуга окружности β, причем при отображении $w=f(z)$ области D_z на область D_w кусок границы α переходит в β, то в этом случае функцию $f(z)$ можно аналитически продолжить через дугу α. Для получения этого продолжения следует в качестве значения функции w в точке z^*, симметричной точке z относительно α, принять точку w^*, симметричную точке w относительно β.

Принцип симметрии позволяет быстро построить отображающую функцию, если идет речь об отображении круга на круг или на полуплоскость.

Здесь следует иметь в виду, что в этих случаях отображающей функцией является *дробно-линейная функция*

$$w=\frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad-bc\neq 0). \tag{1,9}$$

Например, функция, отображающая верхнюю полуплоскость $Iz>0$ на единичный круг $|w|<1$, при котором точка z_0 ($Iz_0>0$) переходит в точку $w=0$, имеет вид:

$$w=e^{i\varphi}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}, \tag{2,9}$$

где φ — произвольное вещественное число.

В самом деле, так как вещественная ось $I_z=y=0$ переходит в окружность $|w|=1$ и точка z_0 переходит в $w=0$, то симметричная z_0 точка $\bar{z}_0$ перейдет в бесконечно далекую точку плоскости w, а это означает, что

$$w=k\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0},$$

где k — константа. Но так как точка $z=0$ переходит в точку единичной окружности, то поэтому при $z=0$ должно быть $|w|=|k|=1$, откуда $k=e^{i\varphi}$.

Примеры.

45. Показать, что функция, отображающая круг

$$|z|<R$$

на единичный круг

$$|w|<1,$$

при котором точка z_0 ($|z_0|<R$) переходит в точку $w=0$, имеет вид:

$$w=e^{i\theta}\frac{R(z-z_0)}{R^2-\bar{z}_0 z}. \qquad (3,9)$$

46. Для отображения

$$w=f(z)=z^3-3z^2+3z+5$$

найти угол поворота и коэффициент растяжения в точках $z=0$ и $z=i$.

Вдоль каких линий угол поворота один и тот же? Вдоль каких линий коэффициент растяжения один и тот же? В каких точках нарушается конформность отображения?

Решение. Вычисляя производную

$$f'(z)=3z^2-6z+3$$

в точках $z=0$ и $z=i$, получим:

$$f'(0)=3, \quad f'(i)=-6i.$$

Исходя из геометрического смысла аргумента и модуля производной (теорема 1), имеем:

Угол поворота $\alpha=\arg f'(0)$ и коэффициент растяжения $r=|f'(0)|=3$ в точке $z=0$.

Угол поворота $\alpha=\arg f'(i)=-\frac{\pi}{2}$ и коэффициент растяжения $r=|f'(i)|=6$ в точке $z=i$.

Отделяя вещественную и мнимую части производной $f'(z)=3z^2-6z+3$ и затем полагая $\arg f'(z)=\text{const}$ и $|f'(z)|=\text{const}$, получим:
линии $(x-1)^2-y^2-2cy(x-1)=0$ — равного поворота;
линии $(x-1)^2+y^2=c=\text{const}$ — равного растяжения.

Приравнивая нулю производную и решая уравнение $z^2-2z+1=0$, получим точку $z=1$, в которой нарушается конформность отображения.

47. Показать, что из равенства

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} \qquad (4,9)$$

следует, что w выражается как дробно-линейная функция от z, отображающая точки z_1, z_2, z_3 плоскости z в точки w_1, w_2, w_3 плоскости w.

48. Найти функцию, отображающую верхнюю полуплоскость на круг единичного радиуса так, чтобы точки -1, 0, 1 вещественной оси переходили в точки $1, i, -1$ окружности.

Решение. Полагая $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$; $w_1 = 1$, $w_2 = i$, $w_3 = -1$ и применяя формулу (4,9), получим:

$$w = \frac{z - i}{zi - 1}.$$

49. Найти функцию, отображающую круг единичного радиуса на нижнюю полуплоскость так, чтобы точки $1, i, -i$ переходили соответственно в $1, 0, -1$.

Ответ. $w = \dfrac{(1+i)(z-i)}{(1-3i)z + 3i + 1}$.

50. Показать, что степенная функция

$$w = z^n \tag{5,9}$$

отображает угловую область с вершиной в точке $z = 0$ раствора φ на угловую область с вершиной в. $w = 0$ раствора

$$\theta = n\varphi.$$

51. Найти функцию, отображающую круг $|z| < 1$ на плоскости с разрезом вдоль положительной части вещественной оси.

Решение. Выбирая произвольные три точки на окружности круга, например $1, i, -1$, и три точки в плоскости w', например $-1, 0, 1$, и применяя формулу (4,9), получим функцию:

$$w' = \frac{z - i}{zi - 1},$$

отображающую круг на верхнюю полуплоскость. Применяя функцию (5,9) при $n = 2$, получим:

$$w = w'^2 = \left(\frac{z - i}{zi - 1}\right)^2.$$

52. Показать, что функция

$$w = \frac{1+z}{1-z}$$

отображает верхний полукруг $|z| < 1$ на первый квадрант плоскости w.

53. Найти функцию, отображающую круг с разрезом, идущим от центра по радиусу вдоль вещественной оси, на верхнюю полуплоскость.

Ответ. $w=\left(\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)^2$.

54. Найти функцию, отображающую плоскость с разрезом вдоль отрезка $a<z<b$ на верхнюю полуплоскость.

Решение. С помощью функции

$$w_1=-\frac{z-a}{z-b}$$

отобразим данную плоскость на плоскость w_1 с разрезом вдоль положительной вещественной полуоси. Преобразованием с помощью функции (5,9) при $n=\frac{1}{2}$ получим:

$$w=\sqrt{w_1}=\sqrt{\frac{z-a}{b-z}}.$$

55. Найти функцию, отображающую угол между лучами

$$\left.\begin{aligned} z&=z_0+e^{i\varphi_1}t \\ z&=z_0+e^{i\varphi_2}t \end{aligned}\right\} \quad \text{при } t\geqslant 0 \text{ на круг } |w|<1.$$

Решение. а) Преобразованием параллельного переноса

$$w_1=z-z_0 \tag{6,9}$$

вершину угла переведем в точку $w_1=0$.

б) Преобразованием поворота

$$w_2=e^{-i\varphi}w_1 \tag{7,9}$$

повернем угол так, чтобы луч 1 совпал с вещественной осью плоскости w_2.

в) Преобразованием (5,9) при $n=\frac{\pi}{\varphi_1-\varphi_2}$

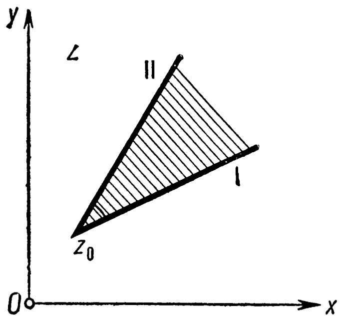
$$w_3=w_2^{\frac{\pi}{\varphi_1-\varphi_2}}$$

отобразим угол на верхнюю полуплоскость.

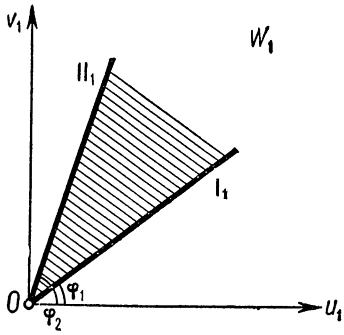
г) Преобразованием (2,9)

$$w=e^{i\varphi}\frac{w_3-\beta}{w_3-\bar{\beta}} \qquad \text{при } I\beta>0$$

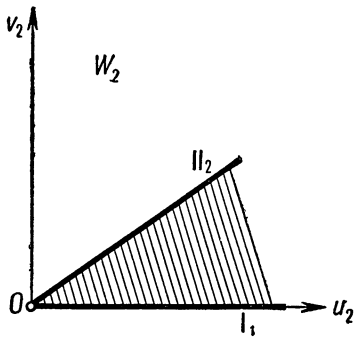
отобразим верхнюю полуплоскость на круг $|w|<1$.



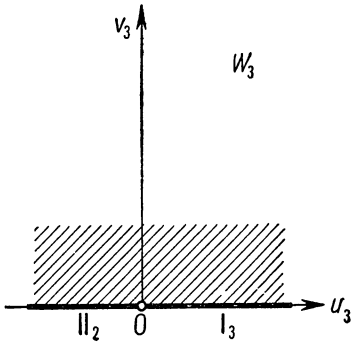
Черт. 1



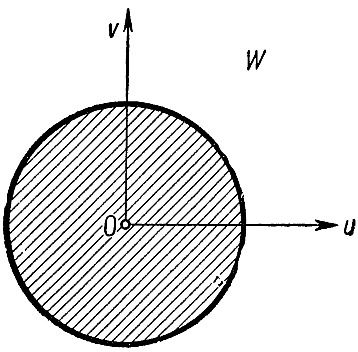
Черт. 2



Черт. 3



Черт. 4



Черт. 5

д) Выражая w через z, получим искомую функцию

$$w=e^{i\varphi}\frac{\left\{e^{-i\varphi_1}(z-z_0)\right\}^{\frac{\pi}{\varphi_2-\varphi_1}}-\beta}{\left\{e^{-i\varphi_1}(z-z_0)\right\}^{\frac{\pi}{\varphi_2-\varphi_1}}-\bar{\beta}}.$$

При $0<\varphi_1<\varphi_2$ весь процесс преобразования будет иметь схему, изображенную на чертежах 1—5.

56. Показать, что функция

$$w=e^z \tag{8,9}$$

отображает полосу $0\leqslant y<2\pi$ на всю плоскость с разрезом вдоль положительной части вещественной оси, а полосу $0\leqslant y\leqslant\pi$ на верхнюю полуплоскость.

57. Показать, что функция

$$w=-e^{-z} \tag{9,9}$$

отображает полуполосу $0\leqslant x<\infty$, $0\leqslant y\leqslant\pi$ на верхний полукруг единичного радиуса.

Указание. В примерах (56) и (57) воспользоваться теоремой (4,9), предварительно отделить вещественную и мнимую части.

58. Найти функцию, отображающую полуполосу примера (57) на верхнюю полуплоскость.

Ответ. $w=\left(\frac{e^{-z}-1}{e^{-z}+1}\right)^2$.

59. Показать, что функция

$$w=\ln z \tag{10,9}$$

отображает криволинейный четырехугольник $r\leqslant\rho\leqslant R$ $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ на обыкновенный четырехугольник

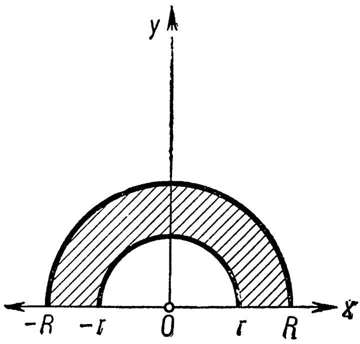
$$\ln z\leqslant x\leqslant\ln R \quad 0\leqslant y\leqslant\pi.$$

Решение. Последовательно имеем (см. чертежи 6 и 7):

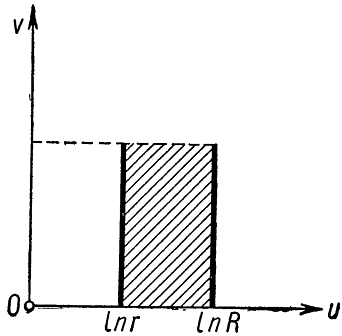
$$z=\rho e^{i\varphi} \quad u+iv=\ln\rho+i\varphi,$$
$$w=u+iv \quad u=\ln\rho,\ v=\varphi.$$

I. Отрезку ($r\leqslant\rho\leqslant R$, $\varphi=0$) соответствует ($\ln r\leqslant u\leqslant$ $\leqslant\ln R$, $v=0$).

II. Дуге ($\rho=R$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$) соответствует ($u\ln R$, $0\leqslant v\leqslant\pi$).



Черт. 6



Черт. 7

III. Отрезку $(0 \leqslant \rho \leqslant R, \quad \varphi = \pi)$ соответствует $(\ln r \leqslant u \leqslant \ln R, \ v = \pi)$.

IV. Дуге $(\rho = r, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$ соответственно $(u = \ln r, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$.

Так как показано, что контур первой области D_z аналитической функцией (10,9) отображается однозначно на контур второй области D_w, то по теореме (4) область D_z отображается на область D_w конформно.

§ 10. РАЗЛОЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ ТЕЙЛОРА И ЛОРАНА

Если $f(z)$ однозначная аналитическая функция в точке $z = a$, то она разлагается в *степенной ряд Тейлора* по положительным степеням

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{1,10}$$

в окрестности этой точки, причем окружность круга сходимости ряда имеет центр в точке a и проходит через ближайшую к точке a особую точку z_n функции $f(z)$.

$$[R = \min | z_n - a |].$$

Коэффициенты ряда Тейлора (1,10) вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{f^n(a)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots). \tag{2,10}$$

Если $f(z)$ однозначная аналитическая функция в кольце

$$r < |z - a| < R, \tag{3,10}$$

то внутри этого кольца она разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n, \tag{4,10}$$

который содержит не только положительные, но и отрицательные степени $z - a$.

Коэффициенты ряда Лорана (4,10) в общем случае вычисляются по формулам:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)\, dz}{(z - a)^{n+1}}, \tag{5,10}$$

где за контур интегрирования L следует взять окружность

$$|z - a| = \rho, \text{ при } r < \rho < R.$$

Примеры.

Написать первые четыре члена ряда Тейлора и определить радиус сходимости для следующих функций.

60. $f(z) = \ln(1 - \sin z)$ по степеням z.

Решение. По формулам (1,10) и (2,10) при $a = 0$ последовательно имеем:

$$f^{\mathrm{I}}(z) = \frac{\cos z}{\sin z - 1}, \quad f^{\mathrm{III}}(z) = -\frac{\cos z}{(\sin z - 1)^2} \quad \Bigg| \; f(0) = 0,\ f^{\mathrm{I}}(0) = f^{\mathrm{II}}(0) =$$

$$f^{\mathrm{II}}(z) = \frac{1}{\sin z - 1}, \quad f^{\mathrm{IV}}(z) = \frac{1 + \cos^2 z - \sin z}{(\sin z - 1)^3} \quad \Bigg| \; = f^{\mathrm{III}}(0) = -1,\ f^{\mathrm{IV}}(0) = -2$$

$$\ln(1 - \sin z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} - \frac{z^4}{12} - \ldots$$

Особые точки рассматриваемой функции, очевидно, определяются уравнением

$$1 - \sin z = 0.$$

Решая это уравнение, получим: $z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$\text{и } R = \min|z - a| = \min\left|\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right| = \frac{\pi}{2},$$

при $k = 0$.

61. $f(z) = \ln(1 + e^z)$ по степеням z.

Ответ. $\ln(1 + e^z) = \ln 2 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^4}{192} + \ldots;\ R = \pi.$

62. $f(z)=\frac{1}{\sin z}$ по степеням $z=\frac{\pi}{2}$.

Ответ. $\frac{1}{\sin z}=1+\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}+\frac{5}{24}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^4+\ldots;\ R=\frac{\pi}{2}$.

Разложить в ряд Тейлора и определить радиус сходимости для функций:

63. $f(z)=\frac{1}{5-z}$ по степеням $z-2$.

Решение. Воспользуемся геометрической прогрессией. Замечая, что $R=|5-2|=3$, имеем:

$$f(z)=\frac{1}{5-z}=\frac{1}{3-(z-2)}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z-2}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{3^{n+1}}.$$

64. $f(z)=\operatorname{arctg} z$ по степеням z.

Ответ. $\operatorname{arctg} z=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}+\ldots$

$$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{2n-1}+\ldots;\ R=1.$$

Разложить в ряд Лорана функции:

65. $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ в кольце $1<|z|<2$.

Решение. Последовательно имеем:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)}-$$

$$-\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}.$$

66. $f(z)=\frac{2}{1-z^2}$ в кольце $1<|z+2|<3$.

Ответ. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{3^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+2)^n}$.

67. $f(z)=\frac{1}{(z-2)(z^2+1)}$ в кольце $1<|z|<4$.

Ответ. $f(z) = -\frac{1}{10}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n 2}{z^{2n+0}} + \right.\right.$

$$\left.\left. + \frac{(-1)^n 4}{z^{2n+2}}\right)\right].$$

68. Определить коэффициент при первой отрицательной степени в разложении в ряд Лорана функции

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$$

в окрестности точки $z = 0$.

Решение. Так как по условию $0 < |z| < 1$, то справедливы следующие разложения:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots + \frac{1}{n!z^n} + \cdots$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n + \cdots$$

Из произведения этих разложений надо выбрать член, содержащий z^{-1}, и выписать коэффициент при нем.

$$C_{-1} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = e - 1.$$

69. $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{2-z}$ в окрестности точки $z = 1$.

§ 11. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ ОДНОЗНАЧНОЙ ФУНКЦИИ

Различают три типа *изолированных особых точек* однозначной аналитической функции.

Изолированная особая точка a функции $f(z)$ называется *существенно особой, полюсом* или *устранимой особой точкой,* смотря по тому, содержит ли разложение Лорана (5,10) в окрестности такой точки бесконечно большое, конечное число или совсем не содержит отрицательных степеней $(z - a)$.

Поведение функции в достаточно малой окрестности изолированной особой точки зависит от типа особенности этой точки. В окрестности устранимой особой точки функция ограничена, в окрестности полюса функция не ограничена (по модулю), в окрестности существенно особой точки функция неопределенна. Справедливо и обратное, изолированная особая точка будет устранимой, полюсом или существенно особой точкой, смотря по тому, будет ли в сколь угодно малой окрестности такой точки данная функция ограниченной, бесконечно большой или неопределенной.

Отмеченная связь между характером разложения функции в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки и ее поведением в этой окрестности дает возможность определения типа особенности изолированной точки или по разложению в ряд Лорана или по поведению $f(z)$ в окрестности испытуемой точки. Так, например, функция $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ в точке $z=0$ имеет устранимую особую точку, так как она ограничена во всякой окрестности этой точки. Функция $f(z)=\frac{z+7}{(z-2)(z-5)}$ в точках $z=2$ и $z=5$ имеет полюсы, так как она неограничена по модулю в окрестностях этих и только этих точек. Необходимо заметить, что не всякая особая точка однозначной функции обязательно должна быть изолированной. Это видно хотя бы на примере функции $f(z)=\operatorname{tg}\frac{1}{z}$, для которой не только все точки вида $z=\frac{2}{(2n+1)\pi}$ (где n — целое) являются особыми, но также и их предельная точка $z=0$ также является особой точкой, но эта особая точка не является изолированной. Особые точки могут заполнять непрерывную кривую, например, для функции, определяемой рядом

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$$

каждая точка окружности $|z|=1$ круга сходимости есть особая точка.

Наиболее полную характеристику поведения функции в окрестности существенно особой точки дает *теорема Сохоцкого:* каково бы ни было постоянное число A, конечное или бесконечное, существует последовательность точек $z_1, z_2, z_3, z_n, \cdots$, сходящаяся к существенно особой точке a, такая, что:

$$\lim_{z_n\to a} f(z_n)=A.$$

Если требуется изучить поведение какой-либо функции

$$w=f(z)$$

в окрестности бесконечно далекой точки, то полагают

$$z=\frac{1}{z'}$$

и изучают функцию

$$w=f\left(\frac{1}{z'}\right)=\varphi(z')$$

в окрестности точки $z'=0$. Например, функции e^z, $\sin z$, $\cos z$ в бесконечности имеют существенно особую точку, функция $f(z)=\frac{1}{1-z}$ в бесконечности имеет устранимую особую точку, если положить $f(\infty)=0$; целая рациональная функция степени m имеет бесконечно далекую точку полюсом порядка m.

Примеры.

Указать, какие особые точки и какого типа имеют функции:

70. $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$.

Решение. Данная функция может иметь особую точку только при $z=0$. Разложение Лорана в окрестности этой точки получается, если во всюду сходящемся ряде

$$e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+\cdots$$

положить $t=\frac{1}{z}$

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots$$

Этот ряд сходится в любой окрестности точки $z=0$ (исключая точку $z=0$) и содержит бесконечно много отрицательных степеней z. Отсюда, по определению, следует, что $z=0$ — существенно особая точка для рассматриваемой функции $e^{\frac{1}{z}}$.

71. $f(z)=\frac{1}{e^z-1}$.

Решение. Особыми точками этой функции могут быть только нули знаменателя $z=2k\pi i$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$). Если $z=2k\pi i$ — один из этих нулей, то e^z-1 имеет следующее разложение в его окрестности:

$$e^z-1=(z-2k\pi i)\left[1+\frac{z-2k\pi i}{2!}+\frac{(z-2k\pi i)^2}{3!}+\cdots\right]=$$
$$=(z-2k\pi i)\,\varphi(z), \text{ где } \varphi(2k\pi i)\neq 0.$$

Откуда:

$$f(z)=\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{z-2k\pi i}\cdot\frac{1}{\varphi(z)}=\sum_{n=-1}^{\infty} c_n(z-2k\pi i)^n.$$

Причем $\lim\limits_{z\to 2k\pi i}|f(z)|=\infty$ и $\lim\limits_{z\to 2k\pi i}|f(z)(z-2k\pi i)|=1$.

Следовательно, рассматриваемая функция имеет бесконечно много простых полюсов в точках $z=2k\pi i$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots$).

72. $f(z)=\frac{z^2}{1-\cos z}$.

Решение. Особыми точками здесь будут $z=2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \ldots$). Точка $z=0$ — устранимая особая точка, если положить $f(0)=2$, так как

$$\lim_{z\to 0}\left|\frac{z^2}{1-\cos z}\right|=2.$$

Точки $z=2k\pi$ ($k=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \ldots$) полюсы второго порядка, так как эти точки есть нули функции

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{1-\cos z}{z^2}=(z-2k\pi)^2\varphi(z), \text{ где } \varphi(2k\pi)\neq 0.$$

73. $f(z)=\frac{e^{\sqrt{z}}-e^{-\sqrt{z}}}{\sqrt{z}}$.

Решение. Замечая, что

$$e^{\sqrt{z}}=1+\frac{\sqrt{z}}{1!}+\frac{(\sqrt{z})^2}{2!}+\frac{(\sqrt{z})^3}{3!}+\ldots$$

$$e^{-\sqrt{z}}=1+\frac{(-\sqrt{z})}{1!}+\frac{(-\sqrt{z})^2}{2!}+\frac{(-\sqrt{z})^3}{3!}+\cdots,$$

получим:

$$f(z)=2\left(1+\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{5!}+\cdots\right).$$

Это разложение сходится во всех точках плоскости, а потому все точки плоскости являются правильными точками для данной функции, причем точка $z=0$ есть устранимая особая точка, если положить $f(0)=2$.

74. $f(z)=\frac{z}{e^z-1}$.

Ответ. $z=0$—устранимая особая точка, точки $z=2k\pi i$ ($k=\pm 1, \pm 2, \pm \cdots$) полюсы первого порядка.

75. $f(z)=\frac{e^z-z-1}{z^2}$.

Ответ. $z=0$ — устранимая особая точка.

76. $f(z)=\operatorname{tg} z$.

Ответ. $z=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots$) полюсы первого порядка.

77. $f(z)=\frac{(z+6)\sin(z+5)}{(z^4-z^3)(z^2-25)}e^{\frac{1}{z-3}}$.

Ответ. $z=0$ полюс третьего порядка, $z=1$, $z=5$ полюсы первого порядка, $z=-5$ — устранимая особая точка, $z=3$ — существенно особая точка.

§ 12. ПОНЯТИЕ ВЫЧЕТА ФУНКЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ИЗОЛИРОВАННОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ

Если функция $f(z)$ — аналитическая в некоторой точке, то по *теореме Коши*

$$\int_\gamma f(z)\,dz=0, \qquad (1,12)$$

где γ—произвольно замкнутый контур, содержащий внутри себя точку a и малый настолько, что функция $f(z)$ остается аналитической всюду внутри этого контура, включая точки самого контура.

Если же a — изолированная особая точка функции $f(z)$, то значение интеграла $\int_\gamma f(z)\,dz$, вообще говоря, не равно нулю.

Это значение не зависит от формы контура γ и может быть вычислено посредством разложения подинтегральной функции в ряд Лорана в окрестности точки a $(0<|z-a|<r)$

$$f(z)+c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+c_3(z-a)^3+\cdots$$
$$\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{c_{-3}}{(z-3)^3}+\cdots \qquad (2,12)$$

Интегрируя почленно ряд (2,12) вдоль контура γ и принимая во внимание равенства

$$\int_\gamma (z-a)^m\,dz=\begin{cases}0 & \text{при } m\neq-1\\ 2\pi i & \text{при } m=-1\end{cases},$$

получим:

$$\int_\gamma f(z)\,dz=c_{-1}2\pi i. \qquad (3,12)$$

Значение интеграла $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz$ называют *вычетом* функции относительно особой точки a и обозначают символом $\text{Rés}\,f(z)$.

Из (3,12) следует, что вычет функции $f(z)$ относительно особой точки равен коэффициенту при первой отрицательной степени разложения Лорана (2,12), т. е.

$$\text{Rés}\,f(z)=c_{-1}. \qquad (4,12)$$

Из (4,12) замечаем, что вычет функции относительно устранимой точки равен нулю, так как в этом случае $c_{-1}=0$.

Вычет функции относительно бесконечно удаленной точки равен коэффициенту при первой отрицательной степени в разложении функции в ряд Лорана для бесконечно удаленной точки, взятому с противоположным знаком, т. е.

$$\operatorname*{Rés}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}. \tag{5,12}$$

Если внутри замкнутого контура z функция $f(z)$ имеет особые точки $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, то по основной *теореме о вычетах* следует:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Rés}_{z=a_k} f(z). \tag{6,12}$$

Таким образом, вычисление интеграла $\int f(z)\,dz$ по замкнутому контуру L сводится к нахождению суммы вычетов подинтегральной функции относительно особых точек a_k, лежащих внутри контура интегрирования.

Примеры.

78. Найти вычеты функций:

$$f(z) = e^{z+\frac{1}{z}} \text{ в точке } z=0.$$

Решение. Точка $z=0$ есть существенно особая точка данной функции. Представляя рассматриваемую функцию так:

$$f(z) = e^{z+\frac{1}{z}} = e^z e^{\frac{1}{z}} = \left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots\right)\times$$
$$\times\left(1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots\right)$$

и выделяя коэффициент при z^{-1}, получим:

$$c_{-1} = \operatorname*{Rés}_{z=0} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,(k+1)!} \quad (\text{замечая, что } 0! = 1).$$

79. $f(z) = \dfrac{z^n e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ в точках $z=0$ и $z=1$.

Ответ.

$$\operatorname{Rés} f(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k)!}; \quad \operatorname*{Rés}_{z=1} f(z) = -e.$$

80. Пользуясь разложением функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности полюса первого порядка, вывести формулу:

$$c_{-1} = \lim_{z \to 0} [(z-a) f(z)]. \tag{7,12}$$

81. Пользуясь разложением функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности полюса n-го порядка, вывести формулу:

$$c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{n-1}[(z-a)^n f(z)]}{dz^{n-1}}. \tag{8,12}$$

82. Применяя формулы (7,12) и (8,12), найти вычеты следующих функций:

$$\text{а)}\ f(z) = \frac{z^3+2}{z^4-1}; \quad \text{б)}\ f(z) = \frac{2z+1}{e^z-1};$$

$$\text{в)}\ f(z) = \frac{z}{(z-a)^n (z-b)}.$$

83. Пользуясь понятием о вычете функции и обобщением теоремы Коши на случай многосвязной замкнутой области, доказать основную теорему о вычетах (6,12).

Пользуясь основной теоремой о вычетах (6,12) и формулами (7,12) и (8,12), вычислить интегралы по замкнутым контурам:

84. $$\frac{1}{2\pi i} \oint \left[\frac{z+2}{e^z-1} - \frac{18 \sin z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)\left(z^2+9\right)} \right] dz$$

вдоль контура $|z-2| = 3$.

Решение. Контуром интегрирования здесь служит окружность $(x-2)^2 + y^2 = 9$, внутри которой подинтегральная функция имеет полюсы первого порядка $z=0$ и $z = \frac{\pi}{2}$.

Остальные особые точки $z = 2k\pi i$ $(k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \ldots)$, $z = \pm 3i$ и $z = \infty$ лежат вне контура интегрирования.

По формуле (7,12) находим:

$$\underset{z=0}{\operatorname{Res}} f(z) = 2; \quad \underset{z=\frac{\pi}{2}}{\operatorname{Res}} f(z) = -\frac{72}{\pi^2+36}.$$

Применяя теорему (6,12), окончательно имеем:

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int\left[\frac{z+2}{e^z-1}-\frac{18\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)(z^2+9^2)}\right]dz=\frac{2\pi^2}{\pi^2+36}.$$

85. $I=\int\left[\frac{57+12}{(z-1)^2(z^2+16)}+\frac{\ln(10+z)}{z+2}\right]dz$

вдоль контура $4x^2+9y^2=36$.

Решение. Контуром интегрирования служит эллипс с полуосями $a=3$, $b=2$. Особые точки внутри контура $z=1$ — полюс второго порядка, $z=-2$ — полюс первого порядка. Особые точки $z=\pm 4i$, $z=-10$ и $z=\infty$ лежат вне контура.

Применяя формулы (7,12) и теорему (6,12), получим:

$$\operatorname*{Rés}_{z=1} f(z)=\frac{3}{17};\quad \operatorname*{Rés}_{z=-2} f(z)=\ln 8;\quad I=6\pi i\left(\frac{1}{17}+\ln 2\right).$$

86. $\int\frac{dz}{(z^2-1)(z-3)^2}$

по астроиде $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$.

Ответ. $\frac{3\pi i}{64}$.

87. $\int\left[\frac{z^2+3z+4}{(z-2)^2(z^2+10)}+e^{\frac{1}{z-1}}\right]dz$

вдоль контура $z=3e^{it}$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

Ответ. $\frac{17\pi i}{7}$.

§ 13. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Всякому невихревому и свободному от источников потоку несжимаемой жидкости в односвязной области D соответствует аналитическая функция

$$w=f(z)=u+iv, \tag{1,13}$$

которая называется *характеристической функцией* или *комплексным потенциалом потока*. Обратно, задание любой функции $w=f(z)$ аналитической в односвязной области определяет в этой области невихревой и свободный от источников поток несжимаемой жидкости.

Функции

$$u=u(x,\ y) \text{ и } v=v(x,\ y)$$

называют, соответственно, *потенциалом скоростей* и *функцией тока*.

Кривые

$$u(x, y) = \text{const}$$

называют *линиями уровня* или *эквипотенциальными линиями потока.*

Кривые

$$v(x, y) = \text{const}$$

называют *линиями тока* или *траекториями потока.*

Скорость потока, определяемого функцией (1,13) в любой точке $z = x + iy$, определяется по величине и направлению комплексным числом

$$\overline{f}'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{2,13}$$

то есть числом, сопряженным со значением производной в этой точке. Откуда следует *гидродинамическое истолкование модуля и аргумента производной функции* комплексного переменного, а именно: рассматривая заданную в односвязной области аналитическую функцию как характеристическую функцию соответствующего потока жидкости, можем утверждать, что $|f'(z)|$ равен величине скорости течения в точке z, а $\arg f'(z)$ с обратным знаком определяет направление этой скорости.

Из (2,13) следует, что проекции скорости потока на оси координат равны частным производным $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Величину $N = \int\limits_C \frac{\partial u}{\partial x}\,dy - \frac{\partial u}{\partial y}\,dx$ называют *потоком жидкости* сквозь замкнутый контур C.

Величину $I = \int\limits_C \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = \int\limits_C du(x, y)$

называют *циркуляцией скорости* по тому же контуру C.

Если $w = \frac{N}{2\pi}\ln(z - a)$, то точка a называется *источником обильности* N.

Если $w = \frac{I}{2\pi i}\ln(z - a)$, то точка a называется *вихрем интенсивности* I.

Примечание. Так как

$$I + iN = \int\limits_C \frac{\partial w}{\partial z}\,dz,$$

то N и I можно находить с помощью вычетов.

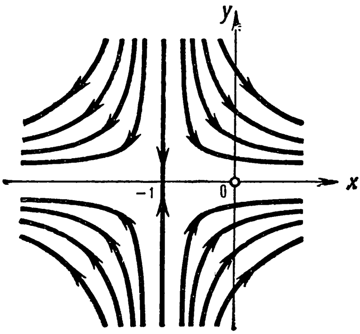
Примеры.

Найти потенциал скоростей, функцию тока, линии уровня, линии тока, величину и направление вектора скорости, проекции скорости на оси координат, если движение жидкости определяется комплексным потенциалом:

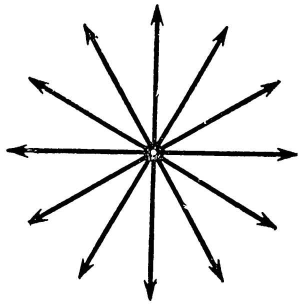
88. $w=f(z)=z^2+2z+3$.

Решение. Полагая $z=x+iy$, $w=u+iv$, получим:

$u(x, y)=x^2-y^2+2x+3$ — потенциал скоростей,
$v(x, y)=2xy+2y$ — функция тока,
$u(x, y)=x^2-y^2+2x+3=\text{const}$ — линии уровня — гиперболы,
$v(x, y)=2xy+2y=\text{const}$ — линии тока — гиперболы,
$v=\bar{f}(z)=2\bar{z}+2$ — вектор скорости,



Черт. 8



Черт. 9

$|v|=|f'(z)|=2\sqrt{(x+1)^2+y^2}$ — величина скорости,

$\alpha=\arg\bar{f}(z)=-\operatorname{arctg}\frac{y}{x+1}$ — направление скорости,

$v_x=\frac{\partial u}{\partial x}=2(x+1)$ — проекция скорости на ось ox,

$v_y=\frac{\partial u}{\partial y}=-2y$ — проекция скорости на ось oy,

$O_1(-1,0)$ — точка покоя жидкости (чертеж 8).

89. $w=f(z)=4\ln(z-2)$.

Ответ. $u(x, y)=2\ln[(x-2)^2+y^2]$ — потенциал скоростей,

$v(x, y)=4\operatorname{arctg}\frac{y}{x-2}$ — функция тока,

$(x-2)^2+y^2=\text{const}$ — линии уровня — окружности,

$y=c(x-2)$ — линии тока — полупрямые (чертеж 9),

$v = f'(z) = \frac{4}{\bar{z} - 2}$ — вектор скорости,

$|v| = |f'(z)| = \frac{4}{\sqrt{(x-2)^2 + y^2}}$ — величина скорости,

$\alpha = \arg \bar{f}'(z) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x-2}$ — направление скорости,

$v_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{4(x-2)}{(x-2)^2 + y^2}$ — проекция скорости на ось ox,

$v_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{4y}{(x-2)^2 + y^2}$ — проекция скорости на ось oy,

$N = 8\pi$ — поток жидкости сквозь контур c,

$z = a = 2$ — источник обильности $N = 8\pi$.

90. Построить комплексный потенциал движения жидкости, если известно уравнение линий уровня

$$x^2 - y^2 + 2xy + x = c \quad (c = \text{const})$$

и дано, что $f(0) = 0$.

Решение. Полагая $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy + x$ и применяя формулу (2, 7) § 7, получим:

$$w = f(z) = (1 - i) z^2 + z.$$

91. Построить комплексный потенциал движения жидкости, если известно уравнение линий тока

$$\cos x \operatorname{sh} y - c = 0.$$

Ответ. $w = f(z) = \sin z + c$.

92. Комплексный потенциал

$$w = f(z) = 5i \ln(z^2 - a^2).$$

Найти циркуляцию по окружностям $|z \pm a| = a$.

Ответ. $I = -10\pi$ по обеим окружностям.

93. Движение жидкости вызывается источником обильности N, помещенным в точке a. Доказать, что поток сквозь простой замкнутый контур c равен нулю, если точка a вне контура, и равен N, если точка a внутри контура.

94. Движение жидкости создается источником N и вихрем I, помещенными в точке a. Доказать, что линии токов — логарифмические спирали.

§ 14. УПРАЖНЕНИЯ

Пользуясь теоремами о модуле и аргументе произведений, частного, степени и корня, найти модули и аргументы следующих выражений:

1. $(5+8i)(8+5i)$. 2. $\frac{3+3i}{2-2i}$. 3. $(\sqrt{3}+i)^3$. 4. $\sqrt[4]{1+i}$.

5. $(-1+i\sqrt{3})(1-i)$. 6. $\frac{-1}{i-1}$. 7. $(2-3i)^3$. 8. $\sqrt[4]{\sqrt{3}-i}$.

Какие линии или области в комплексной плоскости определяются условиями:

9. $|z+1|=2|z-i|$.
10. $1\leqslant|z+2|\leqslant 3$.
11. $|z-2|=|1-2\bar{z}|$.
12. $|z-a|+|z-b|\leqslant R$
(a и b — вещественные постоянные).

Какие кривые описываются точкой z комплексной плоскости, если z выражается через вещественную переменную t следующим образом:

13. $z=z(t)=Re^{2it}$.
14. $z=z(t)=(1-it)e^{3it}$.
15. $z=z(t)=ae^{it}+a^{-1}e^{-it}$.
16. $z=z(t)=(1+it)e^{2it}$.

Отделить действительную и мнимую части следующих функций:

17. ze^z, полагая $z=x+iy$.
18. $\ln\frac{1+z}{1-z}$, полагая $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.
19. $\frac{e^z}{z}$, полагая $z=x+iy$.
20. $\frac{z}{1-z}$, полагая $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

Вычислить следующие выражения:

21. $\sqrt[3]{1-i}$. 22. $\sin\left(\frac{\pi}{3}-i\right)$. 23. $(-1+i)^i$. 24. $\operatorname{arctg} i$.

25. $\frac{1-2i}{3+i}$. 26. $\sin\left(\frac{\pi}{6}-2i\right)$. 27. $(1-i\sqrt{3})^i$. 28. $\operatorname{arctg}(1+i)$.

Построить аналитическую функцию

$$w=f(z)=u+iv$$

по следующим условиям:

29. $u=x^4-8x^3y-6x^2y^2+8xy^3+y^4$, $f(0)=0$.
30. $v=\frac{2y}{x^2+y^2+2x+1}$, $f(1)=0$.
31. $u=\operatorname{arctg}\frac{x}{y+1}$, $f(0)=0$.
32. $v=x^3-3xy^2+4xy$, $f(2)=12$.

33. $u=\frac{x}{x^2+y^2}+2x+3y, \quad f(1)=5i.$

34. $v=y\ln\sqrt{x^2+y^2}+x\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad f(1)=0.$

35. $u=12x^2y-4y^3-3y, \quad f(0)=0.$

36. $v=e^x[(x+1)\sin y+y\cos y], \quad f(0)=5.$

Вычислить интегралы:

37. $\int\left(\frac{\cos z}{z^2+1}+\frac{z+5}{z^2-1}\right)dz$ — вдоль контура $|z-1|=1.$

38. $\int\left[\frac{5z+6}{(z^2-9)(z+1)}+\frac{e^{3z}}{16+z^2}\right]dz$ — вдоль контура $2x^2+y^2=4.$

39. $\int\left(\frac{\cos z}{z+\pi}+\frac{z^4}{z^2+9}\right)dz$ — вдоль контура $4x^2+25y^2=100.$

40. $\int\left(e^{\frac{1}{z-10}}+\frac{z+3}{(z-3)(z^2+1)}\right)dz$ — вдоль контура $z=5e^{2it}, \quad 0\leqslant t\leqslant\pi.$

41. $\int\left(e^{z^2}+\frac{5z+2}{(z^2-1)(z+4)}\right)dz$ — вдоль контура

$$9x^2+4y^2=36.$$

42. $\int\left(\sin 2z+\frac{z+5}{(z^2+1)(z^2-9)}\right)dz$ — вдоль контура

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{2}{3}}.$$

43. $\int\left(\frac{e^z}{z-1}+\frac{\ln(1+z^2)}{z^2-9}\right)dz$ — вдоль контура $x^2+y^2-2x=0.$

44. $\int\left(\frac{\cos 2z}{z^2+20}+\frac{z+5}{(z-3)(z^2+1)}\right)dz$ — вдоль контура

$$z=2e^{2it}, \quad 0\leqslant t\leqslant\pi.$$

Указание. Воспользоваться теоремой Коши и формулой

$$\int\limits_C\frac{dz}{z-a}=2\pi i,$$

если a внутри контура C.

Разложить в ряд Тейлора функции:

45. $f(z)=\sin^2 z$ — по степеням $z-\frac{\pi}{2}.$

46. $f(z)=\frac{3}{z+1}$ — по степеням $z+2.$

47. $f(z)=\arcsin z$ — по степеням $z.$

48. $f(z)=\frac{1}{z+2}$ — по степеням $z-3.$

Найти первые три члена разложения в ряд Тейлора и определить радиус круга сходимости для следующих функций:

49. $f(z)=\frac{1}{e^z+1}$ — по степеням z.

50. $f(z)=\ln z$ — по степеням $z-2$.

51. $f(z)=\frac{1}{1+\sin z}$ — по степеням z.

52. $f(z)=\ln(z+1)$ — по степеням $z-2$.

Разложить в ряд Лорана функции:

53. $f(z)=\frac{1}{(z+2)(z-3)}$ — в кольце $2<|z|<3$.

54. $f(z)=\frac{z+2}{(z-2)(z+4)}$ — в кольце $1<|z+2|<4$.

55. $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+2)}$ — в кольце $1<|z|<2$.

56. $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-3)}$ — в кольце $2<|z+1|<4$.

Указать, какие особые точки и какого типа имеют функции:

57. $\frac{1-\cos z}{z}$. 58. $\frac{2z+3}{z^2-z^6}$. 59. $e^{\frac{3}{z-3}}$. 60. $\ln(z^2-9)$.

61. $\frac{\operatorname{tg} z}{z}$. 62. $\cos\frac{1}{2-z}$. 63. $\frac{\sqrt{z^2+4}+z}{z^2+1}$. 64. $z-\ln\frac{z+i}{z-i}$.

65. $f(z)=\frac{e^z-1}{z}$. 66. $\frac{z+2}{z-z^3}$. 67. $\sin\frac{1}{z+2}$. 68. $\ln(z^2+1)$.

69. Показать, что уравнение

$$\cos\frac{1}{z-7}=A$$

в окрестности точки $z=7$ имеет бесконечное множество корней при любом A.

70. Показать, что при любом $A\neq 0$ уравнение

$$e^{\frac{1}{z-3}}=A$$

в окрестности точки $z=3$ имеет бесконечное множество корней.

71. Для отображения $w=1-z^2$ найти коэффициент растяжения и угол поворота в точках $z=-1$; $z=1-i$. Вдоль каких линий коэффициент растяжения один и тот же? Вдоль каких линий угол поворота один и тот же? В каких точках нарушается конформность отображения?

72. Для отображения $w=\frac{1}{z+1}$ найти коэффициент растяжения и угол поворота в точках $z=0$ и $z=i$. Вдоль каких линий коэффициент растяжения один и тот же? Вдоль каких линий угол поворота

один и тот же? В каких точках нарушается конформность отображения?

73. Найти функцию, отображающую плоскость с разрезом вдоль отрезка $a < z < b$ на нижнюю полуплоскость.

74. Найти функцию, отображающую круг с разрезом, идущим от центра по радиусу вдоль вещественной оси, на верхнюю полуплоскость.

75. Найти функцию, отображающую круг $|z| < 1$ на плоскость с разрезом вдоль положительной части вещественной оси.

76. Показать, что функция

$$w = f(z) = -e^{-z}$$

отображает полуполосу $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$ на верхний полукруг единичного радиуса.

Найти потенциал скоростей, функцию тока, линии уровня, линии тока, величину и направление вектора скорости, проекции скорости на оси координат, если движение жидкости определяется комплексным потенциалом:

77. $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$.

78. $f(z) = 6 \ln (z - 3)$.

79. $f(z) = \dfrac{3+z}{2+z}$.

80. $f(z) = 4 \ln (z^2 - 1)$.

Найти комплексный потенциал движения жидкости $w = f(z) = u + iv$, величину и направление вектора скорости, проекции скорости на координатные оси, потенциал скоростей и функцию тока, если известно:

81. Уравнение эквипотенциальных линий

$$x^2 - y^2 + 3x = C\ (\mathrm{const}).$$

82. Уравнение линий тока

$$\frac{y+1}{x^2 + y^2 + 2y + 1} = C\ (\mathrm{const}).$$

Найти комплексный потенциал $w = f(z) = u + iv$, величину и направление вектора скорости, проекции скорости на координатные оси, потенциал скоростей и функцию тока, если известно:

83. Потенциал скоростей

$$U(x,\ y) = \ln (x^2 + y^2) + 7.$$

84. Уравнение линий тока

$$2xy + 5y = C\ (\mathrm{const}).$$

СОДЕРЖАНИЕ

Редакторы: *М. Л. Смолянский, Л. Г. Немцова*
Технический редактор *В. Л. Волчек*
Корректор *Т. М. Графовская*

* * *

Сдано в набор 2/II 1959 г. Подписано к печати 21/III 1959 г.
84×108 1/32. Печ. л. 3 (2,46). Уч.-изд. л. 2,20.
Заказ № 2728. Тираж 25 тыс. экз. А03028

* * *

Учпедгиз. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Московского городского Совнархоза.
Москва, Ж-54, Валовая, 28.

Цена 65 коп.