МГЗПИ

Б. И. Аргунов
И. Н. Демидова
В. Н. Литвиненко

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО ГЕОМЕТРИИ

Часть I

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЗАОЧНЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Б. И. Аргунов,
И. Н. Демидова,
В. Н. Литвиненко

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО ГЕОМЕТРИИ

Часть I

*Учебное пособие
для студентов-заочников I курса
физико-математических факультетов
педагогических институтов*

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1979

Рекомендовано к печати Главным управлением высших и средних педагогических учебных заведений Министерства просвещения РСФСР

Редактор МГЗПИ **Павлович О. А.**

Р е ц е н з е н т ы:
доктор физико-математических наук *Г. Б. Гуревич*,
доктор физико-математических наук *З. А. Скопец*,
кандидат физико-математических наук *И. В. Парнасский*

А $\dfrac{60602-483}{103(03)-79}$ заказное 4309020400

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий задачник-практикум написан в соответствии с действующей программой курса «Геометрия» и предназначается для студентов-заочников физико-математических факультетов педагогических институтов. Он содержит задачи по следующим разделам: элементы векторной алгебры, метод координат на плоскости, преобразования плоскости, линии второго порядка.

Задачник состоит из четырех глав, разбитых на параграфы, в каждом из которых приводятся подробно разобранные примеры, предлагаются задачи для самостоятельного решения.

Прежде чем приступить к разбору и решению задач, следует ознакомиться с необходимым теоретическим материалом (ссылки на который приводятся в начале каждого параграфа) по одному из следующих учебных пособий:

1. Базылев В. Т., Дуничев К. И., Иваницкая В. П. Геометрия. М., Просвещение, 1974. Ч. 1.

2. Атанасян Л. С. Аналитическая геометрия. М., Просвещение, 1967. Ч. 1.

3. Атанасян Л. С. Геометрия. М., Просвещение, 1973. Ч. 1.

4. Аргунов Б. И., Балк М. Б. Элементарная геометрия. М., Просвещение, 1966.

5. Четверухин Н. Ф. Проективная геометрия. М., Просвещение, 1969.

6. Майоров В. М., Скопец З. А. Векторное решение геометрических задач. М., Просвещение, 1968.

7. Саранцев Г. И. Сборник задач на геометрические преобразования. Пособие для учителей. М., Просвещение, 1975.

8. Аргунов Б. И. Преобразования плоскости. М., Просвещение, 1976.

Для задач и примеров принята сквозная нумерация. Ссылки, приводимые по ходу решения примеров, относятся к пособиям, указанным в начале соответствующих параграфов.

Главы I, II и IV подготовлены Б. И. Аргуновым при участии В. Н. Литвиненко. Глава III написана В. Н. Литвиненко совместно с И. Н. Демидовой. Приложение подготовлено В. Н. Литвиненко.

Авторы будут благодарны читателям за критические замечания и советы, которые просим присылать по адресу: «109004, Москва, В. Радищевская, 18, МГЗПИ, Редакционно-издательский отдел».

Глава I
ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Литература: [1], гл. I; [2], § 1—3, § 6; [3], § 1—3, § 6.

Пример 1. Докажем, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из медиан в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Решение. *1-й способ.* Пусть ABC — произвольный треугольник (рис. 1) и пусть медиана BB' пересекает медиану AA' в точке M.

Обозначим вектор $\overrightarrow{AB}$ через $\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}$ через $\vec{c}$. Выразим вектор $\overrightarrow{AM}$ двумя способами:

1) $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AA'} = \lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'}) = \lambda\left(\vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b})\right) = \frac{\lambda}{2}\vec{b} + \frac{\lambda}{2}\vec{c};$

2) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{b} + \mu\overrightarrow{BB'} = \vec{b} + \mu\left(\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b}\right) = (1-\mu)\vec{b} + \frac{\mu}{2}\vec{c},$

где $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{AA'}}$, $\mu = \dfrac{\overrightarrow{BM}}{\overrightarrow{BB'}}$.

Таким образом, $\frac{\lambda}{2}\vec{b} + \frac{\lambda}{2}\vec{c} = (1-\mu)\vec{b} + \frac{\mu}{2}\vec{c},$

т. е. $\left(\frac{\lambda}{2} - 1 + \mu\right)\vec{b} + \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\mu}{2}\right)\vec{c} = \vec{0}.$

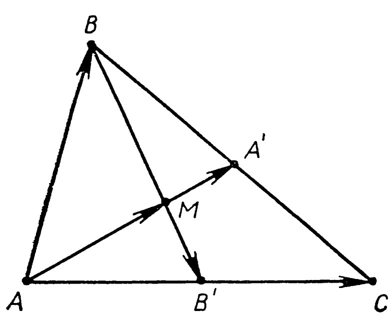


Рис. 1

Но так как векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны, то

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{2} - 1 + \mu = 0, \\ \frac{\lambda}{2} - \frac{\mu}{2} = 0, \end{cases}$$

откуда: $\lambda = \mu = \frac{2}{3}.$

Значит, медиана BB' пересекает медиану AA' в такой точке M, что $|\overrightarrow{AM}| = \frac{2}{3}\,|\overrightarrow{AA'}|$ и $|\overrightarrow{BM}| = \frac{2}{3}\,|\overrightarrow{BB'}|$. Таким образом $|\overrightarrow{AM}| : |\overrightarrow{MA'}| = 2 : 1$ и $|\overrightarrow{BM}| : |\overrightarrow{MB'}| = 2 : 1$.

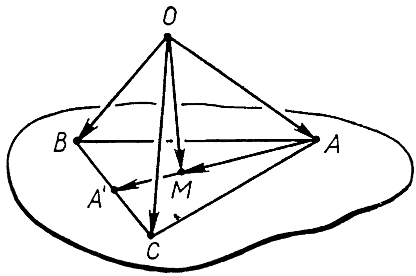


Рис. 2

Вершины B и C равноправны, поэтому такое же заключение можно сделать и для медианы CC' (она пройдет через ту же точку M медианы AA', и будет выполняться равенство $|\overrightarrow{CM}| : |\overrightarrow{MC'}| = 2 : 1$).

2-й способ. Пусть O — произвольная точка в пространстве (рис. 2), $[AA']$ — медиана треугольника ABC и $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AA'}$.

Обозначая $\overrightarrow{OA}$ через $\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}$ через $\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}$ через $\vec{c}$, получим:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} = \vec{a} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA'}) = \vec{a} +$$

$$+ \frac{2}{3}\left(\vec{c} - \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{c})\right) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$$

Возьмем теперь точку M', лежащую на медиане BB', такую, что $\overrightarrow{BM'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$. Тогда аналогично получим, что $\overrightarrow{OM'} = \frac{1}{3}\,(\vec{c} + \vec{a} + \vec{b})$. Таким образом $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM}$, т. е. точки M' и M совпадают (аналогично для медианы CC'). Следовательно, M — общая точка всех трех медиан треугольника, отстоящая при этом от каждой вершины треугольника на $\frac{2}{3}$ длины соответствующей медианы.

П р и м е р 2. Докажем, что во всяком треугольнике

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2\,|AB| \cdot |AC| \cdot \cos\widehat{A}$$

(теорема косинусов).

Р е ш е н и е. По определению разности векторов имеем:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.$$

Возведем обе части этого векторного равенства в квадрат:

$$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2,$$

откуда:

$$|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

или $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2\,|AB| \cdot |AC| \cdot \cos\widehat{A}$, что и требовалось доказать.

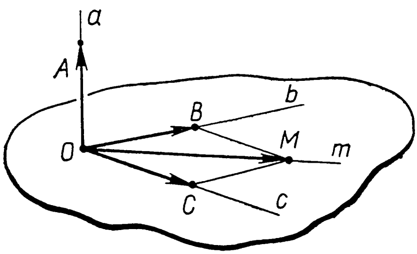


Рис. 3

Пример 3. Докажем, что если прямая a перпендикулярна к каждой из двух пересекающихся прямых b и c, то она перпендикулярна к любой прямой m, проведенной в плоскости, определяемой прямыми b и c.

Решение. Пусть прямые b и c пересекаются в точке O. Выберем произвольно точки A, B, C и M на прямых a, b, c и m. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OM}$ (рис. 3). Разложим вектор $\overrightarrow{OM}$ по векторам $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$:

$$\overrightarrow{OM} = \alpha \cdot \overrightarrow{OB} + \beta \cdot \overrightarrow{OC}.$$

Рассмотрим скалярное произведение $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM}$: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA}\,(\alpha \cdot \overrightarrow{OB} + \beta \cdot \overrightarrow{OC}) = \alpha \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \beta \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$. По условию $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}$, так что $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ и $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$. Значит, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = 0$, а это означает, что $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OM}$, т. е. $a \perp m$.

Пример 4. Дан треугольник ABC и произвольная точка M. Докажем, что необходимым и достаточным условием того, чтобы точка G была центроидом треугольника ABC, является равенство:

$$3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

Решение. *Необходимость*. Пусть точка G — центроид треугольника ABC; D, E, F — основания медиан (рис. 4). Тогда:

$$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BE},\ \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CF}.$$

Складывая эти равенства почленно и замечая, что

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}),\ \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}),\ \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}),$$

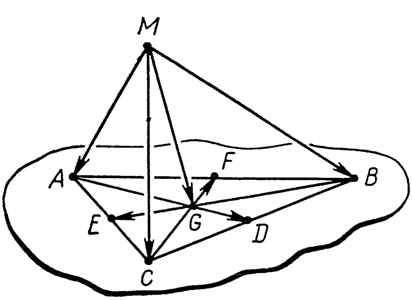


Рис. 4

получаем:

$$3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\right).$$

В скобках получается нулевой вектор, поэтому

$$3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ и пусть G' — центроид треугольника ABC. Тогда по доказанному $3\overrightarrow{MG'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ и, следовательно, $3(\overrightarrow{MG'} - \overrightarrow{MG}) = \vec{0}$, т.е. $\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$. Следовательно, $G \equiv G'$ и точка G — центроид треугольника ABC.

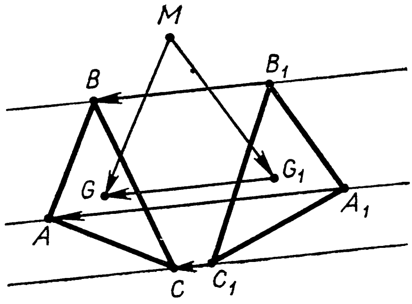


Рис. 5

Пример 5. Заданы два треугольника: ABC и $A_1B_1C_1$, причем $A \neq A_1$, $B \neq B_1$, $C \neq C_1$, а прямые AA_1, BB_1 и CC_1 параллельны. Докажем, что если центроиды G и G_1 данных треугольников не совпадают, то $(GG_1) \parallel (AA_1)$.

Решение. Пусть M — произвольно выбранная точка (рис. 5). Тогда, как показано в предыдущем примере,

$$3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC},\ 3\overrightarrow{MG_1} = \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1},$$

откуда:

$$3(\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MG_1}) = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA_1}) + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MB_1}) + (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MC_1}),$$

или

$$\overrightarrow{G_1G} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{C_1C}).$$

Но по условию векторы $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{B_1B}$, $\overrightarrow{C_1C}$ коллинеарны. Пусть $\overrightarrow{B_1B} = \beta\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{C_1C} = \gamma\overrightarrow{A_1A}$. Тогда:

$$\overrightarrow{G_1G} = \frac{1}{3}(1 + \beta + \gamma)\,\overrightarrow{A_1A}.$$

Это означает, что ненулевые векторы $\overrightarrow{G_1G}$ и $\overrightarrow{A_1A}$ коллинеарны, т. е. прямые GG_1 и AA_1 параллельны.

Пример 6. Прямая проходит через точки P и Q — середины противоположных сторон BC и AD четырехугольника $ABCD$ и через точку M — пересечение его диагоналей. Докажем, что $ABCD$ — трапеция (или параллелограмм).

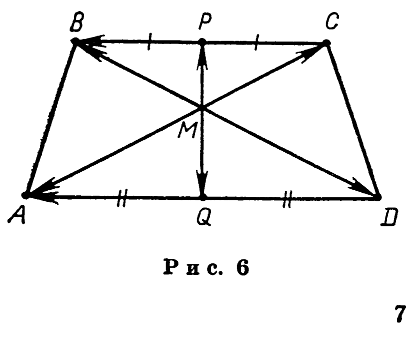


Рис. 6

Решение. Пусть $\overrightarrow{MC} = \alpha\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MD} = \beta\overrightarrow{MB}$ (рис. 6). Так как P и Q—середины сторон четырехугольника,

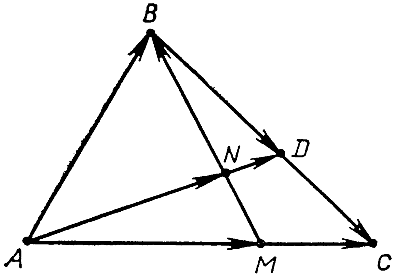


Рис. 7

то $\overrightarrow{MP}=\frac{\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}{2}=\frac{\overrightarrow{MB}+\alpha\overrightarrow{MA}}{2}$

и $\overrightarrow{MQ}=\frac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}}{2}=\frac{\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}}{2}$.

По условию векторы $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{MQ}$ коллинеарны, так что $\overrightarrow{MP}=\lambda\overrightarrow{MQ}$. Подставляя сюда полученные выражения для $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{MQ}$, получим:

$$\overrightarrow{MB}+\alpha\overrightarrow{MA}=\lambda\,(\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}),$$

откуда следует, что

$$\overrightarrow{MB}\,(1-\beta\lambda)+\overrightarrow{MA}\,(\alpha-\lambda)=\vec{0}.$$

Но векторы $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MA}$ не коллинеарны, поэтому последнее равенство выполняется лишь при $\begin{cases}1-\beta\lambda=0,\\ \alpha-\lambda=0.\end{cases}$

Так как $\alpha\neq 0$, то получаем $\beta=\frac{1}{\alpha}$. Далее имеем:

$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}-\alpha\overrightarrow{MA},\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}-\beta\overrightarrow{MB}$.

А так как $\beta=\frac{1}{\alpha}$, то

$$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{MA}-\frac{1}{\alpha}\overrightarrow{MB}=-\frac{1}{\alpha}(\overrightarrow{MB}-\alpha\overrightarrow{MA})=-\frac{1}{\alpha}(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=$$
$$=-\frac{1}{\alpha}\overrightarrow{CB}.$$

Значит, векторы $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{CB}$ коллинеарны. Таким образом, четырехугольник $ABCD$ — трапеция. В частности, если $\alpha=-1$, то $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$ и четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Пример 7. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты точки M и D, такие, что $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{p}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{m}\overrightarrow{BC}$, а на прямой AD — точка N, такая, что $\overrightarrow{AN}=\frac{m}{p+m-1}\overrightarrow{AD}$. Докажем, что точки M, N и B лежат на одной прямой.

Решение. По определению разности векторов $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{p}\overrightarrow{AC}$ (рис. 7). С другой стороны,

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{m}{p+m-1}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{p}\overrightarrow{AC}=\frac{m}{p+m-1}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})-$$

$-\frac{1}{p}\overrightarrow{AC} = \frac{m}{p+m-1}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{m}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})\right) - \frac{1}{p}\overrightarrow{AC} = \frac{m-1}{p+m-1}\left(\overrightarrow{AB} - \right.$
$\left. - \frac{1}{p}\overrightarrow{AC}\right).$

Но $\overrightarrow{AB} - \frac{1}{p}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Таким образом, $\overrightarrow{MN} = \frac{m-1}{p+m-1}\overrightarrow{MB}$, т. е. ненулевые векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MB}$ коллинеарны, а точки M, N и B лежат на одной прямой.

Задачи

1. Изобразите на плоскости некоторый вектор $\vec{v}$, а затем постройте векторы $2\vec{v}$, $-\vec{v}$, $\vec{v}\sqrt{2}$, $-\vec{v}\sqrt{3}$.

2. Даны три точки A, B и C. Точка D — середина $[BC]$. Докажите, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$.

3. Постройте на плоскости правильный шестиугольник $ABCDEF$, длина стороны которого равна единице. Какие из шести векторов, начала и концы которых лежат в вершинах шестиугольника, будут коллинеарными, какие равными? Постройте вектор $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD} - 3\overrightarrow{EF}$. Выразите векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EC}$ и $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$.

4. Найдите равнодействующую трех сил, приложенных к точке M и изображенных векторами $\overrightarrow{MA_1}$, $\overrightarrow{MA_2}$ и $\overrightarrow{MA_3}$, если точки A_1, A_2 и A_3 являются вершинами правильного треугольника, вписанного в окружность с центром в точке C.

5. $ABCD$ — произвольный четырехугольник. Точки M, N — середины сторон BC и DA соответственно. Докажите, что

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}).$$

6. Дан параллелограмм $ABCD$, M — точка пересечения его диагоналей. Выразите векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MD}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

7. Каким условиям должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ для того, чтобы имели место соотношения:

а) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$;   б) $\vec{a} + \vec{b} = \lambda(\vec{a} - \vec{b})$;

в) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$;   г) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$?

8. Докажите, что сумма векторов, начала которых находятся в центре правильного многоугольника, а концы — в его вершинах, равна нулевому вектору.

9. Пусть $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, длина стороны которого равна единице. Вычислите:

а) проекции векторов $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FA}$ и $\overrightarrow{AE}$ на ось (AD);

б) скалярные произведения:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE};\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED};\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE};\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}.$$

10. Применяя векторы, докажите следующие утверждения:

а) если диагонали четырехугольника делятся в точке пересечения пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм;

б) сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон;

в) средняя линия треугольника параллельна основанию, длина ее равна половине длины основания;

г) средняя линия трапеции параллельна основаниям, а длина ее равна полусумме длин оснований;

д) диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

11. Докажите, что всегда можно построить треугольник, стороны которого соответственно конгруэнтны и параллельны медианам данного треугольника.

12. В каком случае $\dfrac{\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|} = \dfrac{\vec{v}_2}{|\vec{v}_2|}$?

13. Докажите, что вектор $\vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$ ортогонален вектору $\vec{c}$.

14. Зная, что $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \dfrac{2\pi}{3}$, найдите значение α, при котором векторы $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 17\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ ортогональны.

15. Вычислите величину угла, образованного единичными векторами $\vec{s}$ и $\vec{t}$, если известно, что векторы $\vec{p} = \vec{s} + 2\vec{t}$ и $\vec{q} = 5\vec{s} - 4\vec{t}$ ортогональны.

16. В равностороннем треугольнике ABC с длиной стороны, равной единице, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$. Вычислите $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$.

17. Найдите величину угла α при вершине равнобедренного треугольника, если известно, что его конгруэнтные медианы взаимно перпендикулярны.

18. $[AA']$ — высота треугольника ABC. Выразите вектор $\overrightarrow{AA'}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

19. Докажите, что если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна и самой наклонной.

20. Докажите, что скрещивающиеся ребра правильного тетраэдра взаимно перпендикулярны.

21. Докажите, что прямые, соединяющие середины скрещивающихся ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке.

22. Выясните, сколько решений имеет уравнение $\vec{a}\,\vec{x} = |\vec{a}|^2$. Постройте эти решения, считая вектор $\vec{a}$ заданным.

23. На плоскости даны четырехугольник и некоторая точка M. Докажите, что точки, симметричные точке M относительно середин сторон четырехугольника, являются вершинами параллелограмма.

24. Стороны BC, CA и AB треугольника ABC разделены точками A_1, B_1, C_1 в равных отношениях (при этом выбрано некоторое направление обхода треугольника). Докажите, что центроиды треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают.

25. Через вершины треугольника ABC и его центроид G проведены (в плоскости треугольника) параллельные прямые, пересекающие некоторую прямую g в точках A_1, B_1, C_1, G_1. Докажите, что

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = 3\overrightarrow{GG_1}.$$

26. Пусть G и G_1 — центроиды треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = 3\overrightarrow{GG_1}$.

27. Докажите, что если точки P и Q — середины отрезков AB и CD, то $2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

28. Точки M и N являются серединами сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$. Докажите, что середины диагоналей четырехугольников $AMND$ и $BMNC$ либо являются вершинами некоторого параллелограмма, либо лежат на одной прямой.

29. На стороне AB треугольника ABC дана точка P, через которую проведена прямая a, параллельная медиане CD. Докажите, что

$$\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PB_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC},$$

где $A_1 = a \cap (BC)$ и $B_1 = a \cap (AC)$.

30. Средняя линия четырехугольника $ABCD$ пересекает его диагонали в различных точках P и Q. Докажите, что если $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{QN}$, где M и N — середины сторон AD и BC, то четырехугольник $ABCD$ — трапеция.

Глава II	МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

Глава II. МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Координаты вектора и точки

Литература: [1], 7—8, § 10—11; [2], § 4—5, § 7—10, § 25—26; [3], § 4, § 9, § 12.

Пример 8. Пусть ABC — произвольный треугольник, AA', BB' и CC' — его медианы. Принимая векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ соответственно за базисные $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, найдем координаты векторов $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$.

Решение. По условию $\overrightarrow{AB} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{AC} = \vec{e}_2$. Тогда (рис. 8) $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$. Согласно определению суммы векторов

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \vec{e}_2 + \frac{1}{2}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2.$$

Отсюда следует, что $\overrightarrow{AA'} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Далее также по определению суммы векторов

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2.$$

Следовательно, $\overrightarrow{BB'} = \left(-1; \frac{1}{2}\right)$. Аналогично можно показать, что $\overrightarrow{CC'} = \left(\frac{1}{2}; -1\right)$.

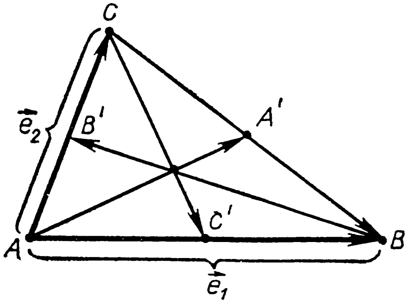


Рис. 8

Пример 9. Найдем аффинные координаты точки, симметричной точке $A(x_1; y_1)$ относительно точки $B(x_2; y_2)$.

Решение. Пусть $C(x; y)$ — искомая точка. По условию точки A, B и C лежат на одной прямой, причем $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$. Следовательно, $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{CB} = -2\overrightarrow{BA}$. Но $\overrightarrow{BA} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$, поэтому $\overrightarrow{AC} = (2x_2 - 2x_1;$

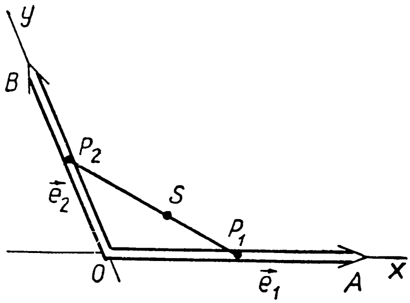


Рис. 9

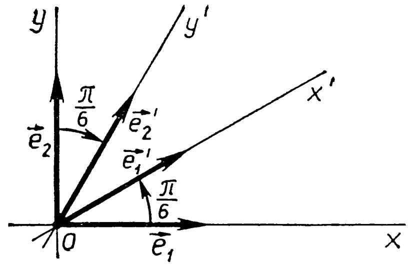


Рис. 10

$2y_2 - 2y_1$) и точка C имеет координаты $C\,(2x_2 - 2x_1 + x_1;\ 2y_2 - 2y_1 + y_1)$, т. е. $C\,(2x_2 - x_1;\ 2y_2 - y_1)$.

Для решения можно было воспользоваться общими формулами (3) (см. [2], с. 67). Так как $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{CB}$, то $\lambda = -2$, отсюда $x = 2x_2 - x_1$, $y = 2y_2 - y_1$.

Пример 10. Определим положение центра тяжести однородного стержня, согнутого под некоторым углом, если длины его частей равны соответственно a и b.

Решение. Удобнее всего обратиться к аффинной системе координат, в которой векторы базиса совпадают со звеньями стержня (рис. 9): $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OB}$.

Для отыскания центра тяжести можно заменить каждое звено материальной точкой, расположенной в его середине, причем массы этих материальных точек пропорциональны длинам соответствующих звеньев.

При этих условиях масса $m_1 = ka$ сосредоточена в точке $P_1\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$, масса $m_2 = kb$ сосредоточена в точке $P_2\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$. По формулам (6) (см. [2], с. 69) получаем:

$$x = \frac{ka \cdot \frac{1}{2} + kb \cdot 0}{ka + kb} = \frac{a}{2\,(a+b)},$$

$$y = \frac{ka \cdot 0 + kb\frac{1}{2}}{ka + kb} = \frac{b}{2\,(a+b)}.$$

Пример 11. Каждая из осей прямоугольной декартовой системы координат поворачивается около начала внутрь первого квадранта на $\frac{\pi}{6}$ радиан (рис. 10). Составьте формулы преобразования координат.

Решение. Воспользуемся формулами (7) (см. [2], с. 214). В данном случае:

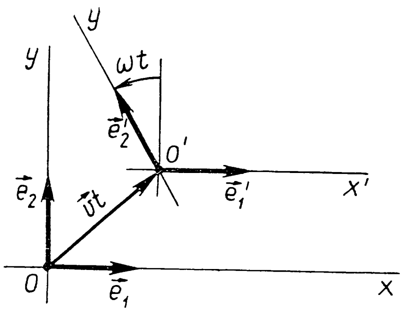


Рис. 11

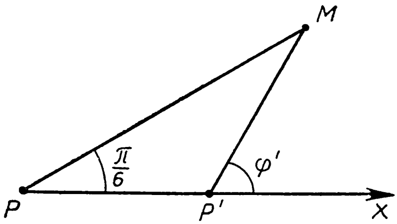


Рис. 12

$$\alpha_1 = |\vec{e}_1'| \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha_2 = |\vec{e}_2'| \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\beta_1 = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \beta_2 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, $x = \frac{\sqrt{3}}{2} x' + \frac{1}{2} y'$, $y = \frac{1}{2} x' + \frac{\sqrt{3}}{2} y'$,

Пример 12. Начало координат прямоугольной декартовой системы равномерно перемещается по биссектрисе первого координатного угла со скоростью $\vec{v}$. В то же время ось Oy поворачивается против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω, а ось Ox сохраняет первоначальное направление. Найдем формулы преобразования координат в произвольный момент времени t.

Решение. Воспользуемся формулами (3) (см. [2], с. 212). Рассмотрим положение $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$ базиса в момент времени t (рис. 11). По условию задачи $\overrightarrow{OO'} = \vec{v}t$, $\vec{e}_1' = \vec{e}_1$, ось $O'y'$ составляет с осью Ox угол $\frac{\pi}{2} + \omega t$. Следовательно, имеем:

$$x_0 = y_0 = |\vec{v}|\, t \cos\frac{\pi}{4} = \frac{|\vec{v}|\, t\sqrt{2}}{2}, \quad \alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = 0,$$

$$\alpha_2 = |\vec{e}_2'| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right) = -\sin \omega t, \quad \beta_2 = \cos \omega t.$$

Итак,

$$x = x' - y' \sin \omega t + \frac{|\vec{v}|\, t\sqrt{2}}{2},$$

$$y = y' \cos \omega t + \frac{|\vec{v}|\, t\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 13. Точка M имеет полярные координаты $r = 6$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Каковы будут ее координаты r', φ', если перенести полюс P в точку P' $(2\sqrt{3}; 0)$ и сохранить направление полярной оси?

Решение. Обратимся к рисунку 12. В треугольнике $PP'M$ по теореме косинусов имеем:

$$|P'M|^2 = |PM|^2 + |PP'|^2 - 2\,|PM| \cdot |PP'| \cos \varphi,$$

т. е. $r'^2 = 6^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} = 12$. Следовательно, $r' = 2\sqrt{3}$.

С другой стороны, по теореме синусов,

$$\frac{|PM|}{\sin \widehat{PP'M}} = \frac{|P'M|}{\sin \widehat{MPP'}}, \text{ т. е. } \frac{6}{\sin (\pi - \varphi')} = \frac{r'}{\sin \frac{\pi}{6}}.$$

Тогда $\sin \varphi' = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда следует, что $\varphi' = \frac{\pi}{3}$. Итак, в новой системе координат точка M имеет координаты $r' = 2\sqrt{3}$, $\varphi' = \frac{\pi}{3}$.

Задачи

31. Выберите на плоскости некоторый базис и постройте точки с координатами A (1; 1), B (1; 0), C (0; —1), D (—2; 3); E (2; 5).

32. Выберите на плоскости некоторый базис и постройте вектор $\overrightarrow{AB} = (3; -2)$ с началом в точке A (2; —1).

33. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OE_2}$, $\overrightarrow{E_1E_2}$ относительно базиса $(\overrightarrow{OE_1}; \overrightarrow{OE_2})$.

34. Вектор $\vec{a} = (5; 4)$ имеет начало в точке A (—2; 3). Найдите координаты его конца.

35. Даны векторы: $\vec{a} = (1; -2)$, $\vec{b} = (-0{,}5; 1)$, $\vec{c} = (2; 0)$. Найдите координаты векторов $\frac{\vec{c} - 2\vec{b}}{2}$ и $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \vec{c}$.

36. Дан параллелограмм $ABCD$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ относительно базиса $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$.

37. Найдите координаты всех вершин квадрата $ABCD$, если начало координат O находится в середине стороны AB и векторами базиса являются соответственно векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$.

38. В трапеции $ABCD$ нижнее основание AB в три раза больше верхнего основания CD. За начало координат взята точка A, а за векторы базиса соответственно векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$. Найдите координаты вершин трапеции, точки O — пересечения ее диагоналей, точки S — пересечения ее боковых сторон.

39. В каком отношении точка C (3; 2) делит отрезок AB, если A (0; 5), B (—1; 6)?

40. Определите положение центра тяжести однородного стержня, согнутого в виде буквы Г, если длины его частей равны соответственно 30, 20 и 10 см.

41. Как выражаются через аффинные координаты вершин треугольника координаты центра тяжести:

а) однородной треугольной пластинки;

б) треугольника, согнутого из проволоки?

42. Отрезок AB перемещается так, что его конец A скользит по прямой $y = 3$, а конец B — по прямой $x = -2$. Найдите координаты концов отрезка в тот момент, когда его середина находится в точке (3; 1).

43. При каком значении λ векторы $\vec{a} = (\lambda; 1)$ и $\vec{b} = (3; -2)$, заданные в прямоугольной декартовой системе координат, коллинеарны и при каком — ортогональны?

44. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами в прямоугольной декартовой системе координат:

а) $\vec{a} = (5; 2)$, $\vec{b} = (-3; 6)$, б) $\vec{a} = (3; -5)$, $\vec{b} = (-1; -4)$.

45. В прямоугольной декартовой системе координат заданы два вектора: $\vec{a} = (5; 2)$ и $\vec{b} = (7; -3)$. Найдите вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий одновременно двум условиям:
$\vec{a}\vec{x} = 38$, $\vec{b}\vec{x} = 30$.

46. В прямоугольной декартовой системе координат заданы векторы: $\vec{a} = (3; 1)$, $\vec{b} = (-2; 7)$, $\vec{c} = (-3; 4)$. Найдите координаты вектора $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

47. В прямоугольной декартовой системе координат заданы координаты двух вершин треугольника: A (1; —2) и B (3; 4). Найдите координаты третьей его вершины C, зная, что эта вершина лежит на оси Ox и что $\widehat{ACB} = 90°$.

48. В прямоугольной декартовой системе координат найдите на оси Ox точку, равноудаленную от начала координат и от точки A (9; 3).

49. На прямой, проходящей через точки (4; 2) и (0; —1) (в прямоугольной декартовой системе координат), найдите точки, отстоящие от точки (—4; —4) на расстоянии, равном 5 единицам.

50. Найдите величины углов треугольника ABC, зная прямоугольные декартовы координаты его вершин: A (2; 1), B (—3; 2), C (0; 4).

51. Даны прямоугольные декартовы координаты вершин треугольника A (2; 0), B (1; 1), C (5; 4). Найдите длину высоты этого треугольника, проведенной из вершины A.

52. Зная прямоугольные декартовы координаты вершин треугольника A (1; —2), B (1; 1), C (5; —2), найдите длины его медиан и биссектрис.

53. Известны прямоугольные декартовы координаты двух смежных вершин правильного шестиугольника: A (10; 2) и B (1; 2). Найдите координаты центра этого шестиугольника.

54. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, зная прямоугольные декартовы координаты его вершин: $A\ (0;\ 0)$, $B\ (3;\ 0)$, $C\ (4;\ 5)$, $D\ (0;\ 3)$.

55. Две вершины треугольника находятся в точках $(5;\ 1)$ и $(-2;\ 2)$. Третья вершина — на оси Ox прямоугольной декартовой системы координат. Зная, что площадь треугольника равна 5, найдите координаты третьей его вершины.

56. Зная прямоугольные декартовы координаты двух противоположных вершин ромба $A\ (3;\ -3)$ и $C\ (10;\ 11)$ и длину его стороны AB ($|AB| = 10$), найдите координаты двух других вершин ромба.

57. Докажите, что в прямоугольной декартовой системе координат треугольник с вершинами $A\ (0;\ 0)$, $B\ (3;\ 1)$ и $C\ (1;\ 7)$ — прямоугольный.

58. Каковы координаты вектора $\vec{c} = (9;\ 1)$ относительно базиса, образуемого векторами $\vec{a} = (2;\ 1)$ и $\vec{b} = (1;\ 0)$?

59. Дан базис $(\vec{u};\ \vec{v})$. Вводится новый базис $(\vec{u}';\ \vec{v}')$, связанный с прежним равенствами: $\vec{u}' = 2\vec{u} + 3\vec{v}$, $\vec{v}' = 3\vec{u} - 2\vec{v}$. Найдите в базисе $(\vec{u}';\ \vec{v}')$ координаты следующих векторов: $\vec{a}=(1;\ 1)$; $\vec{b}=(1;\ 0)$, $\vec{c} = (5;\ -3)$.

60. Дана система координат Ouv. Начало новой системы координат помещено в точку $O'\ (1;\ 0)$, а в качестве новых координатных взяты векторы $\vec{u}' = (1;\ 2)$ и $\vec{v}' = (-3;\ 0)$. Напишите формулы преобразования координат произвольной точки.

61. В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза больше основания BC; O — точка пересечения боковых сторон; O' — точка пересечения диагоналей. Составьте формулы преобразования координат, при котором базис $(\overrightarrow{OB};\ \overrightarrow{OC})$ заменяется базисом $(\overrightarrow{O'B};\ \overrightarrow{O'C})$.

62. Как преобразуются декартовы координаты точки $M\ (x;\ y)$, если:

а) ось абсцисс оставить без изменения, а направление оси ординат изменить на противоположное;

б) за новую ось абсцисс принять ось ординат, а за новую ось ординат — ось абсцисс?

63. Как нужно преобразовать аффинную систему координат, чтобы абсциссы всех точек уменьшились на 3 единицы, а ординаты увеличились на 3 единицы?

64. Точка M относительно двух аффинных систем координат, получающихся одна из другой параллельным переносом, имеет координаты соответственно $(2;\ 5)$ и $(-3;\ 6)$. Определите координаты начала каждой из этих систем относительно другой.

65. Составьте формулы преобразования аффинной системы координат, при котором точки $O\ (0;\ 0)$, $A\ (1;\ 0)$ и $B\ (0;\ 1)$ преобразуются в точки $O'\ (1;\ 0)$, $A'\ (0;\ 1)$ и $B'\ (0;\ 0)$.

66. Найдите величину угла, на который необходимо повернуть оси прямоугольной декартовой системы координат, чтобы точка $(-4; 2)$ перешла в точку $(-\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$.

67. Постройте следующие точки по их полярным координатам:

$$A(1; 0),\ B\left(3; \frac{\pi}{6}\right),\ C(4; \pi),\ D\left(1; \frac{\pi}{2}\right),\ E\left(2; -\frac{3}{4}\pi\right).$$

68. Постройте следующие точки по их обобщенным полярным координатам:

$$A(1; 3\pi),\ B(1; -3\pi),\ C\left(-2; \frac{\pi}{6}\right),\ D(0; 10\pi).$$

69. Определите полярные координаты вершин квадрата, помещая полюс в одну из вершин этого квадрата и принимая за орт полярной оси вектор с началом в этой вершине и концом — в противоположной вершине квадрата (диагональ квадрата).

70. Дан правильный шестиугольник, сторона которого равна a. Приняв за полюс одну из его вершин, а за полярную ось — сторону, через нее проходящую, найдите полярные координаты остальных пяти вершин шестиугольника.

71. Найдите прямоугольные декартовы координаты точек, заданных своими полярными координатами:

$$A\left(2; \frac{\pi}{3}\right),\ B\left(\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right),\ C\left(3; -\frac{\pi}{6}\right),\ D(4; 3\pi),\ E(-1; -\pi).$$

72. Зная прямоугольные декартовы координаты точек: $A(3; -4)$, $B(-1; 1)$, $C(5; 0)$, $D(-3; 4)$, найдите полярные координаты этих же точек.

§ 2. Геометрический смысл уравнений и неравенств

Литература: [1], § 13—23; [2], § 11—13, § 26; [3], § 13—14.

Пример 14. Выясним, какое множество точек задано в аффинной системе координат уравнением

$$\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} = 2.$$

Решение. При любых положительных значениях x и y данное уравнение удовлетворяется, так как для таких значений $|x| = x$, $|y| = y$.

При $x = 0$ или $y = 0$ уравнение не имеет смысла.

Если $x > 0$ и $y < 0$ или $x < 0$ и $y > 0$, то $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} = 0$, т. е. эти значения не удовлетворяют уравнению.

Если $x < 0$ и $y < 0$, то $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} = -2$, т. е. эти значения x и y тоже уравнению не удовлетворяют.

Итак, данное уравнение определяет множество всех точек, обе координаты которых положительны, т. е. множество всех точек, лежащих в первом квадранте.

Пример 15. Составим в прямоугольных координатах уравнение, определяющее отрезок OP, где O (0; 0), P (1; 0).

Решение. Данный отрезок можно рассматривать как множество точек, для которых сумма расстояний от точек O и P равна единице, т. е. для любой точки M (x; y) этого отрезка и только для его точек справедливо соотношение $|OM| + |MP| = 1$. Переходя к координатам, получим:

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(1 - x)^2 + y^2} = 1.$$

Пример 16. Напишем уравнение, определяющее круг радиуса 1 с центром в начале прямоугольной декартовой системы координат.

Решение. Для точек круга выполняется неравенство $x^2 + y^2 - 1 \leqslant 0$. При выполнении этого неравенства справедливо соотношение: $|x^2 + y^2 - 1| = -(x^2 + y^2 - 1)$. Из последнего соотношения следует, что $x^2 + y^2 - 1 \leqslant 0$. Таким образом неравенство $x^2 + y^2 - 1 \leqslant 0$ равносильно уравнению $|x^2 + y^2 - 1| + x^2 + y^2 - 1 = 0$, которое и является искомым уравнением.

Пример 17. Построим (в прямоугольной декартовой системе координат) фигуру, определяемую системой неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 1, \\ y \geqslant 0{,}5. \end{cases}$$

Решение. Как отмечено в примере 16, первое из этих неравенств определяет круг радиуса 1 с центром в начале координат.

Второе неравенство определяет полуплоскость, ограниченную снизу прямой $y = 0{,}5$.

Система данных неравенств определяет пересечение этих фигур, т. е. изображенный на рисунке 13 круговой сегмент (вместе с его границей).

Пример 18. Составим уравнение полосы, содержащей свои границы $x = 0$ и $x = 1$ (система координат прямоугольная декартова).

Решение (рис. 14). Указанная полоса определяется системой неравенств:

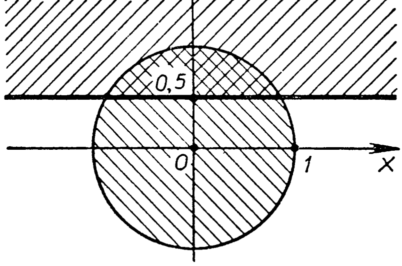


Рис. 13

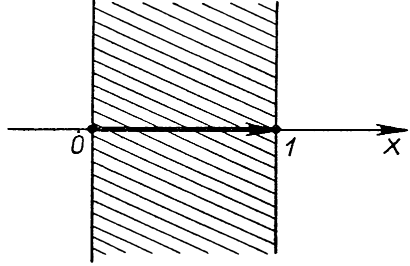


Рис. 14

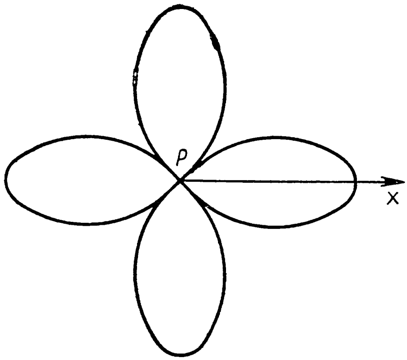


Рис. 15

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x - 1 \leqslant 0. \end{cases}$$

Неравенство $x \geqslant 0$ равносильно уравнению $x = |x|$ или уравнению $|x| - x = 0$, а неравенство $x - 1 \leqslant 0$ равносильно уравнению $x - 1 = -|x - 1|$ или $|x - 1| + x - 1 = 0$, поэтому систему неравенств, определяющих полосу, можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} |x| - x = 0, \\ |x - 1| + x - 1 = 0. \end{cases}$$

Складывая почленно уравнения этой системы, получаем искомое уравнение заданной полосы:

$$|x| + |x - 1| - 1 = 0.$$

Пример 19. В обобщенной полярной системе координат построим график функции $\rho = a \cos 2\varphi$.

Решение. При $\varphi = 0$ находим: $\rho = a$. При увеличении φ от 0 до $\frac{\pi}{4}$ полярный радиус ρ убывает от a до 0. В частности, $\rho = \frac{a}{2}$ при $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Полученные данные позволяют построить (рис. 15) часть графика, лежащую внутри угла между полярной осью и прямой $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

При $\frac{\pi}{4} < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, т. е. при $\frac{\pi}{2} < 2\varphi \leqslant \pi$, полярный радиус отрицателен, так что откладывается на продолжении соответствующих лучей. При этом он возрастает по абсолютной величине от 0 до a, принимая, в частности, значение $-\frac{a}{2}$ при $\varphi = \frac{\pi}{3}$. По этим данным намечаем дальнейший ход графика.

Аналогично строится график в интервале $\left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right[$ и т. д.

Пример 20. Напишем в полярных координатах уравнение прямой, параллельной полярной оси и отстоящей от нее на расстоянии a, как показано на рисунке 16.

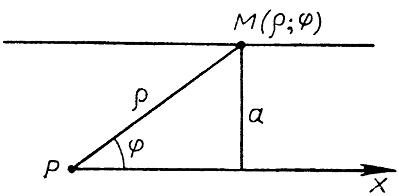


Рис. 16

Решение. Пусть $M(\rho; \varphi)$ — текущая точка прямой. Опустим из нее перпендикуляр на полярную ось (или на ее продолжение). Тогда в получившемся прямоугольном треугольнике против катета, длина которого равна a, лежит угол, величина которого равна φ (или $180° - \varphi$). Поэтому $a = \rho \sin \varphi$ (или $a = \rho \sin (180° - \varphi)$, т. е. $a = \rho \sin \varphi$, откуда $\rho = \frac{a}{\sin \varphi}$. Нетрудно убедиться в том, что верно и обратное утверждение, т. е. что множество точек, координаты которых $(\rho; \varphi)$, удовлетворяют уравнению $\rho = \frac{a}{\sin \varphi}$, принадлежат прямой, параллельной полярной оси. (Убедитесь в этом самостоятельно.) Таким образом, $\rho = \frac{a}{\sin \varphi}$ — искомое уравнение.

Задачи

73. В прямоугольной системе координат постройте линии, определяемые следующими уравнениями:

а) $x - y = 0$;
б) $x = 3$;
в) $x^2 - y^2 = 0$;
г) $xy = 0$;
д) $xy = 4$;
е) $x^2 + y^2 = 4$;
ж) $xy + x^2 = 0$;
з) $(x - 1)(y + 2) = 0$;
и) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 0$;
к) $|x| = 2$;
л) $xy - 3x + 2y = 6$;
м) $y = \frac{8}{1 + x^2}$;
н) $x^2 - \sin y + 1 = 0$;
о) $\sin^2 x - \cos y + 1 = 0$.

74. В полярной системе координат постройте линии, определяемые следующими уравнениями:

а) $\rho \sin \varphi = 1$;
б) $\rho - 5 = 0$;
в) $\varphi = -\frac{\pi}{4}$;
г) $\rho = \frac{\varphi}{2}$;
д) $\rho = \frac{4}{1 - \cos \varphi}$;
е) $\rho = a \cos \varphi$;
ж) $\rho = a \cos 3\varphi$.

75. Лежат ли точки $(3; -2)$, $(0; -3)$, $(1; -1)$ на линии, определяемой уравнением $x^2 - xy = y + 3$?

76. На линии, определяемой уравнением $ax + by + c = 0$, укажите какие-либо три точки.

77. Составьте уравнение, определяющее множество центров окружностей, касающихся оси Ox и проходящих через точку $(3; 4)$.

78. Дана прямая g и на расстоянии a от нее точка A. Через эту точку проводятся всевозможные прямые и на каждой из них от точки пересечения ее с данной прямой откладываются в обе стороны отрезки постоянной длины b. Линия, образуемая концами этих отрезков, называется конхоидой. Составьте уравнение конхоиды в полярных и в прямоугольных декартовых координатах, выбирая подходящим образом системы координат. Постройте эту кривую, рассматривая три случая: $a > b$, $a = b$, $a < b$.

79. Докажите, что множество точек, для которых разность квадратов расстояний от двух данных точек A, B постоянна, есть прямая, перпендикулярная к прямой AB.

80. Определите, какую линию описывает середина отрезка, концы которого движутся по сторонам прямого угла.

81. Стержень AB скользит в муфте, находящейся в точке O. Некоторая точка P стержня описывает окружность диаметра d, проходящую через точку O. Найдите уравнение линии, которую описывает какая-либо другая точка M подвижного стержня (в полярных и прямоугольных координатах).

82. Траектория какой-либо точки окружности, катящейся без скольжения по прямой, называется циклоидой. Составьте параметрические уравнения циклоиды, принимая за параметр угол φ поворота радиуса, соединяющего центр катящегося круга с подвижной точкой.

83. Найдите параметрические уравнения развертки круга, т. е. траектории конца натянутой нити, сматываемой с неподвижной круглой катушки.

84. Центр окружности находится в начале декартовой прямоугольной системы координат. Как записать уравнение той ее полуокружности, которая лежит в области положительных ординат?

85. Изобразите фигуры, определяемые следующими системами неравенств в прямоугольных координатах:

1) $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ 0 < y < 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -1 < y < 1, \\ 1 < x^2 + y^2; \end{cases}$ 3) $1 < x^2 + y^2 < 4$.

86. Как представить в полярных координатах круг радиуса R с центром в полюсе O:

а) неравенством; б) уравнением?

87. Изобразите фигуры, определяемые следующими системами неравенств в полярных координатах:

а) $1 < \rho < 2$; б) $\begin{cases} \rho < 1, \\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \rho < 1, \\ \rho \sin \varphi > 0{,}5. \end{cases}$

§ 3. Прямая линия

Литература: [2], § 14—18; [3], § 16—20.

Пример 21. Составим уравнение прямой, проходящей через точку P $(a; b)$ и пересекающей ось Ox в точке Q $(c; 0)$.

Решение. 1) Если $a \neq c$ и $b \neq 0$, то точки P и Q различные, причем прямая PQ не параллельна координатной оси. В этом случае можно воспользоваться уравнением $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ (см. [2], с. 117 формула (5)).

Полагая здесь $x_1 = a$, $y_1 = b$, $x_2 = c$, $y_2 = 0$, получим:

$$\frac{x-a}{c-a}=\frac{y-b}{0-b}.$$

После очевидных упрощений это уравнение приводится к виду:

$$bx+(c-a)\cdot y-bc=0.$$

2) Если $a=c$ и $b\neq 0$, то точки P и Q различны, причем прямая PQ параллельна оси Oy. Все точки прямой будут иметь одну и ту же абсциссу a, и уравнение прямой получит вид: $x=a$.

3) Если $a\neq c$ и $b=0$, то точки P и Q различны и обе лежат на оси Ox. Искомая прямая совпадает с осью Ox и запишется уравнением $y=0$.

4) Если $a=c$ и $b=0$, то точка P совпадает с точкой Q $(a; 0)$. Через эту точку можно провести бесконечное множество (пучок) прямых. Каждая из них за исключением прямой $x=a$ определяется уравнением вида $y=k(x-a)$, где угловой коэффициент k может принимать любое значение.

Пример 22. Запишем уравнение прямой $ax+by+c=0$, где $a\neq 0$, в параметрической форме.

Решение. 1) Пусть $b\neq 0$. Положим $x=mt+x_0$, где m и x_0 можно выбрать произвольно, t — параметр. Выразим y через x:

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}.$$

Подставляя теперь вместо x его параметрическое выражение, получим:

$$y=-\frac{am}{b}t-\frac{ax_0+c}{b}.$$

Итак,

$$\begin{cases} x=mt+x_0, \\ y=-\dfrac{am}{b}t-\dfrac{ax_0+c}{b} \end{cases}$$ —

параметрические уравнения данной прямой.

2) Пусть $b=0$. Уравнение прямой в этом случае имеет вид:

$$ax+c=0 \text{ или } x=-\frac{c}{a}.$$

Заметив еще, что при $b=0$ независимо от выбранных значений y будет $by=0$, положим $y=t$. Таким образом, мы получим следующую систему уравнений: $\begin{cases} x=-\dfrac{c}{a}, \\ y=t. \end{cases}$

Пример 23. Дано уравнение прямой в прямоугольной декартовой системе координат:

$$x\cos\frac{\pi}{6}-y\sin\frac{\pi}{6}+2=0.$$

Запишем это уравнение в нормальном виде и построим заданную прямую.

Решение. По формуле (5) (см. [2], с. 134) получим:

$$-x\cos\frac{\pi}{6}+y\sin\frac{\pi}{6}-2=0.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}\cos\alpha=-\cos\dfrac{\pi}{6},\\ \sin\alpha=\sin\dfrac{\pi}{6},\\ p=2.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $\alpha=\frac{5\pi}{6}$.

Следовательно, данное уравнение можно переписать так:

$$x\cos\frac{5\pi}{6}+y\sin\frac{5\pi}{6}-2=0.$$

Для построения прямой достаточно провести через начало координат луч (нормаль) под углом $\frac{5\pi}{6}$ к оси Ox, отложить на нем отрезок длины, равной 2, и провести прямую через конец этого отрезка перпендикулярно к нормали.

Пример 24. Запишем уравнение прямой $x-y+5=0$ в новой аффинной системе координат, в которой ось $O'x'$ совпадает с прямой $x+y-4=0$, ось $O'y'$ — с прямой $2x-y+7=0$, а точка, для которой $x'=1$, $y'=1$, находится в начале старой системы координат.

Решение. Координаты начала новой системы можно получить как точку пересечения осей $O'x'$ и $O'y'$: $O'(-1; 5)$.

При $x'=1$, $y'=1$ должно быть $x=0$, $y=0$. Следовательно, если

$$\begin{cases}x=\alpha_1x'+\alpha_2y'+x_0,\\ y=\beta_1x'+\beta_2y'+y_0\end{cases}$$

(см. формулу (3), [2], с. 212), то $\alpha_1+\alpha_2-1=0$, $\beta_1+\beta_2+5=0$.

По условию угловой коэффициент оси $O'x'$ равен -1, а угловой коэффициент оси $O'y'$ равен 2. Но угловой коэффициент прямой можно рассматривать как отношение ординаты к абсциссе направляющего вектора (см. [2], с. 38), а для прямых $O'x'$ и соответственно $O'y'$ в качестве направляющих векторов можно выбрать векторы нового базиса. Таким образом, $\frac{\beta_1}{\alpha_1}=-1$, $\frac{\beta_2}{\alpha_2}=2$.

Решая систему: $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - 1 = 0, \\ \beta_1 + \beta_2 + 5 = 0, \\ \alpha_1 + \beta_1 = 0, \\ \beta_2 - 2\alpha_2 = 0, \end{cases}$

получим: $\alpha_1 = \frac{7}{3}$, $\beta_1 = -\frac{7}{3}$, $\alpha_2 = -\frac{4}{3}$, $\beta_2 = -\frac{8}{3}$.

Следовательно, формулы преобразования координат имеют вид:

$$\begin{cases} x = \frac{7}{3}x' - \frac{4}{3}y' - 1, \\ y = -\frac{7}{3}x' - \frac{8}{3}y' + 5. \end{cases}$$

Уравнение $x - y + 5 = 0$ преобразуется при этом в уравнение:

$$14x' + 4y' - 3 = 0.$$

Пример 25. Составим уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ и параллельной прямой $a_3x + b_3y + c_3 = 0$.

Решение. По формуле (4) (см. [2], с. 143) пучок прямых, проходящих через указанную точку, задается уравнением:

$$\alpha (a_1x + b_1y + c_1) + \beta (a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

или

$$(a_1\alpha + a_2\beta) x + (b_1\alpha + b_2\beta) y + (c_1\alpha + c_2\beta) = 0.$$

Согласно условию параллельности (см. [2], с. 141, теорема [17.3]) должны выполняться соотношения:

$$\frac{a_1\alpha + a_2\beta}{a_3} = \frac{b_1\alpha + b_2\beta}{b_3} \neq \frac{c_1\alpha + c_2\beta}{c_3}.$$

Пропорция

$$\frac{a_1\alpha + a_2\beta}{a_3} = \frac{b_1\alpha + b_2\beta}{b_3}$$

приводит к соотношению:

$$\alpha = \frac{a_3b_2 - a_2b_3}{a_1b_3 - a_3b_1}\beta.$$

Производя подстановку этого значения α в уравнение пучка, получим:

$$a_3 (a_1b_2 - a_2b_1) x + b_3 (a_1b_2 - a_2b_1) y + (a_3 (b_2c_1 - b_1c_2) + \\ + b_3 (a_1c_2 - a_2c_1)) = 0.$$

Если окажется, что $\frac{b_1\alpha + b_2\beta}{b_3} = \frac{c_1\alpha + c_2\beta}{c_3}$,

то искомая прямая совпадет с прямой $a_3x + b_3y + c_3 = 0$. Нетрудно проверить, что последнее равенство приводится к соотношению

$$\begin{vmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

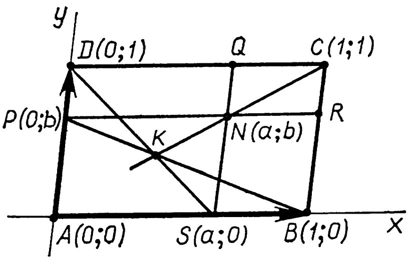


Рис. 17

А это и означает принадлежность всех трех данных прямых одному пучку (см. [2], с. 146, теорема [17.8]).

Пример 26. На сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ (или на их продолжениях) взяты соответственно точки S и P, отличные от точек A, B, D. Через эти точки проведены прямые $PR \parallel AB$ и $SQ \parallel AD$, где $R \in BC$, $Q \in CD$. Докажем, что прямые BP, SD и CN, где $N = (PR) \cap (SQ)$, либо пересекаются в одной точке, либо параллельны.

Решение. Примем стороны AB и AD за оси Ox и Oy аффинной системы координат, а векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ — за векторы базиса (рис. 17).

Пусть абсцисса точки S равна a, а ордината точки P равна b, тогда точки A, B, C, D, S, N, P будут иметь такие координаты:

$$A\ (0;\ 0),\ B\ (1;\ 0),\ C\ (1;\ 1),\ D\ (0;\ 1),\ S\ (a;\ 0), N\ (a;\ b),\ P\ (0;\ b).$$

Найдем теперь координаты точки $K = (BP) \cap (SD)$.
Находим уравнение прямой BP:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{b} = 1, \text{ или } bx + y = b.$$

Далее находим уравнение прямой SD: $x + ay = a$. Если $ab \neq 1$, то, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} bx + y = b, \\ x + ay = a, \end{cases}$$

находим координаты точки K:

$$x = \frac{ab - a}{ab - 1},\ y = \frac{ab - b}{ab - 1}.$$

Подстановкой убеждаемся, что эти координаты удовлетворяют уравнению прямой CN, т. е. уравнению $\frac{x - a}{1 - a} = \frac{y - b}{1 - b}$. Это означает, что прямые BP, SD и CN имеют общую точку K. (При составлении уравнения прямой CN важно отметить, что $a \neq 1$ и $b \neq 1$, потому что при $a = 1$ точка S совпадала бы с точкой B, а при $b = 1$ точка P совпадала бы с точкой D, что противоречит условию задачи.)

Остается рассмотреть случай, когда $ab = 1$. В этом случае $b = \frac{1}{a}$, так что уравнением прямой BP будет уравнение: $x + ay - 1 = 0$, а уравнением прямой CN — уравнение $x + ay - (a + 1) = 0$. Учитывая, что уравнение прямой SD нами уже получено: $x + ay - a = 0$, замечаем, что прямые BP, CN и SD параллельны.

Рисунок, иллюстрирующий последний случай, рекомендуем выполнить самостоятельно.

Пример 27. Найдем площадь четырехугольника $ABCD$, вершины которого в прямоугольной декартовой системе имеют координаты

$$A\ (1;\ 2),\ B\ (-3;\ 4),\ C\ (0;\ 0)\ \text{и}\ D\ (5;\ -6).$$

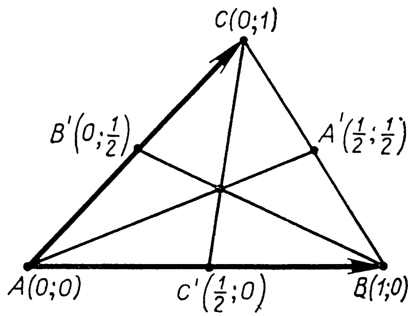


Рис. 18

Решение. По формуле (12) (см. [2], с. 74)

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ -3 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=5,\quad S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 5 & -6 & 1\end{vmatrix}=8.$$

Выясним положение точек B и D относительно прямой AC, определяемой уравнением $2x-y=0$. Рассматриваем функцию

$$F\ (x,\ y)=2x-y:$$
$$F\ (-3,\ 4)=-10<0,\quad F\ (5,\ -6)=16>0.$$

Отсюда следует, что точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC, поэтому $S_{ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=13$.

Пример 28. Докажем, что медианы треугольника пересекаются в одной точке. (В примере 1 мы доказали эту теорему, применяя векторы.)

Решение. Рассмотрим произвольный треугольник ABC (рис. 18). В качестве векторов базиса возьмем векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Тогда вершины треугольника получат координаты $A\ (0;\ 0)$, $B\ (1;\ 0)$, $C\ (0;\ 1)$. Середина стороны AB — точка $C'\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$, середина стороны AC — точка $B'\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$, середина стороны BC — точка $A'\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$.

Составим уравнения медиан. Уравнением медианы AA' будет уравнение: $x-y=0$; медианы CC': $2x+y-1=0$, медианы BB': $x+2y-1=0$. Проверяем, что

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=0,$$

отсюда согласно теореме [17.8] (см. [2], с. 146) медианы пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

Пример 29. Определим и изобразим область, определяемую системой неравенств:

$$\begin{cases}x>0,\\ x+y-1>0.\end{cases}$$

Решение. Неравенство $x>0$ определяет полуплоскость, расположенную правее оси Oy. Чтобы выяснить, какую полупло-

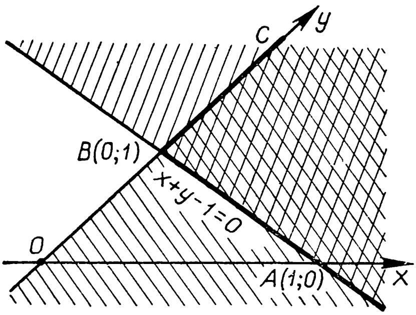


Рис. 19

скость определяет неравенство $x + y - 1 > 0$, построим прямую AB, определяемую уравнением $x + y - 1 = 0$. Так как при $x = y = 0$ левая часть последнего уравнения отрицательна, то неравенство $x + y - 1 > 0$ определяет ту полуплоскость относительно прямой $x + y - 1 = 0$, которая не содержит начала координат (см. [2], с. 125, теорема [15.3]). Таким образом данная система неравенств определяет внутреннюю область угла ABC (рис. 19).

Пример 30. Изобразим в прямоугольной системе координат область, определяемую системой неравенств:

$$\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ x + y - 1 > 0, \\ x + y - 2 < 0. \end{cases}$$

Решение. Первые два неравенства определяют первый квадрант, третье — ту полуплоскость, границей которой является прямая $x + y - 1 = 0$ и которая не содержит начала координат; четвертое — ту полуплоскость, границей которой является прямая $x + y - 2 = 0$ и которая содержит начало координат. Искомая область — внутренняя область равнобочной трапеции $ABCD$ (рис. 20).

Пример 31. Найдем множество всех точек плоскости, координаты каждой из которых удовлетворяют по крайней мере одному из неравенств:

$$2x + y - 4 \leqslant 0; \; x + y - 3 \geqslant 0.$$

Решение. Заданные неравенства по смыслу задачи образуют совокупность неравенств. Поэтому искомое множество точек найдем как объединение множеств точек, координаты которых удовлетворяют этим неравенствам. Из первого неравенства следует, что $y \leqslant -2x + 4$. Построим на плоскости прямую $y = -2x + 4$, (рис. 21). Эта прямая делит плоскость на две полуплоскости. Так как координаты точки O удовлетворяют неравенству $y \leqslant -2x + 4$, то множеством точек, координаты которых удовлетворяют этому неравенству, будет та из двух полуплоскостей, ограниченных прямой $y = -2x + 4$, которая содержит точку O. Аналогично получаем полуплоскость, ограниченную прямой $y = -x + 3$ и не содержащую точку O. Искомое множество точек заполняет ту часть плоскости, которая принадлежит по крайней мере одной из найденных полуплоскостей (на рисунке 21 эти полуплоскости выделены штриховкой).

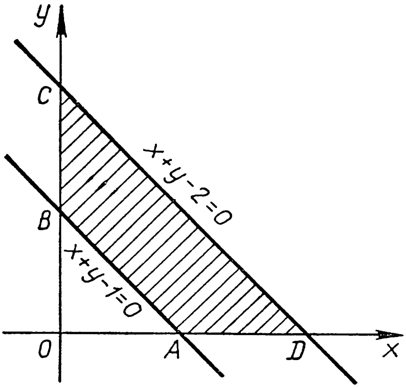


Рис. 20

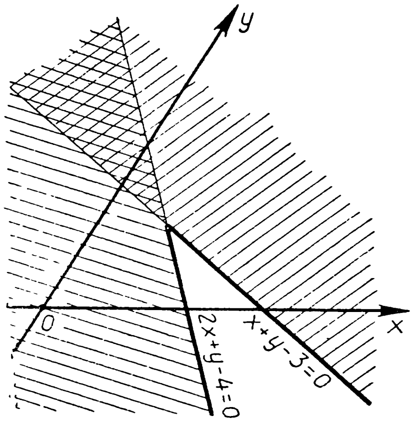


Рис. 21

Задачи

88. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $M\ (a;\ b)$ параллельно прямой $ax + by + c = 0$.

89. Напишите уравнение прямой, коллинеарной вектору $\vec{a} = (1;\ -4)$ и проходящей через точку $M\ (2;\ 3)$:

а) в канонической форме;

б) в общей форме;

в) в явной форме.

90. Напишите канонические уравнения прямой, заданной уравнением общего вида $Ax + By + C = 0$ $(AB \neq 0)$.

91. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $M\ (a;\ b)$ и $K\ (c;\ d)$.

92. На прямой $Ax + By + C = 0$ найдите точку, абсцисса которой равна a.

93. Постройте линии, заданные следующими уравнениями:

а) $y = 3x - 1$;

б) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{4}$;

в) $y - 1 = 2(x + 3)$;

г) $\dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 1$;

д) $5x - 4y - 20 = 0$;

е) $x \cos \dfrac{\pi}{3} + y \sin \dfrac{\pi}{3} - 3 = 0$;

ж) $\begin{cases} x = 3t - 2, \\ y = 5t + 1. \end{cases}$

94. Приведите следующие уравнения прямых к нормальному виду:

а) $3x - 4y - 10 = 0$;

б) $x + y - 1 = 0$;

в) $x\dfrac{\sqrt{2}}{2} + y\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 0$;

г) $x \cos 10° + y \sin 10° + 4 = 0$.

95. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x + 3y - 8 = 0$ и $5x - y - 3 = 0$ и точку пересечения прямых $4x - 3y + 3 = 0$ и $x + y - 1 = 0$.

96. Выразите угловой коэффициент прямой через параметры a и b ее уравнения в отрезках.

97. Найдите угловой коэффициент прямой из ее нормального уравнения. Выясните геометрический смысл результата.

98. Даны точки A (3; —1) и B (2; —1). В какой точке прямая AB пересекает ось Ox?

99. Через точку M (4; —3) проведена прямая так, что площадь треугольника, образуемого ею и осями прямоугольной декартовой системы координат, равна трем квадратным единицам. Найдите уравнение этой прямой.

100. Исследуйте взаимное расположение прямых $x + 2y - 1 = 0$ и $\lambda x + y + 3 = 0$ в зависимости от значения параметра λ.

101. При каких значениях параметра μ уравнения $3\mu x + 8y + 1 = 0$ и $(1 + \mu)x + 2\mu y = 0$ определяют параллельные прямые?

102. Через точку пересечения прямых $3x - y = 0$ и $x + 4y - 2 = 0$ проведена прямая, перпендикулярная к прямой $2x + 7y = 0$. Найдите уравнение этой прямой в прямоугольной декартовой системе координат.

103. В прямоугольной декартовой системе координат даны вершины A (3; —1) и B (5; 7) треугольника ABC и точка M (4; —1) пересечения его высот. Составьте уравнения прямых, на которых лежат стороны этого треугольника.

104. В пучке прямых $a(x - 1) + b(y + 2) = 0$ найдите прямую, параллельную вектору $\vec{v} = (3; -4)$.

105. Напишите уравнение прямой в прямоугольных декартовых координатах, зная, что точка P $(a; b)$ служит основанием нормали этой прямой.

106. Не вычисляя координат вершин треугольника, стороны которого заданы уравнениями:

$$5x - 2y + 6 = 0, \quad 4x - y + 3 = 0, \quad x + 3y - 7 = 0,$$

напишите уравнения прямых, проходящих через вершины параллельно противоположным сторонам.

107. В прямоугольной декартовой системе координат найдите проекцию точки M $(a; b)$ на прямую $ax + by + c = 0$.

108. Найдите, при каких значениях a и c прямые $ax + y + c = 0$ и $3x - 2y - 1 = 0$:

а) имеют одну общую точку;

б) не имеют общих точек;

в) совпадают.

109. В прямоугольной декартовой системе координат найдите уравнения прямых, проходящих через начало координат и образующих с прямой $5x - 6y + 2 = 0$ угол, равный $\frac{\pi}{4}$.

110. В прямоугольной декартовой системе координат составьте

уравнения биссектрис углов, образуемых прямыми $3x - y + 5 = 0$ и $3x + y - 4 = 0$.

111. Вычислите величины углов треугольника, стороны которого в прямоугольной декартовой системе координат заданы уравнениями:

$18x + 6y - 17 = 0$, $14x + 7y + 15 = 0$, $5x + 10y - 9 = 0$.

112. Запишите в нормальном виде уравнение прямой, проходящей через точку $M\ (0; -p)$ параллельно оси Ox в прямоугольной декартовой системе координат.

113. При каком значении a прямая $ax + y + c = 0$ параллельна прямой

$$\begin{cases} x = t + x_0, \\ y = 2t + y_0? \end{cases}$$

114. В прямоугольной декартовой системе координат напишите уравнение прямой, проходящей через точку $M\ (a; b)$ перпендикулярно прямой

$$\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0. \end{cases}$$

115. На прямой, проходящей через точки $M\ (a; a)$ и $K\ (1; 1)$, найдите точку, абсцисса которой равна b.

116. Составьте уравнение прямой, параллельной прямой $ax + by + c = 0$ и пересекающей ось Oy в точке $(O; b)$.

117. На прямой $ax + by + c = 0$ найдите точки, удаленные от оси Oy прямоугольной декартовой системы координат на расстояние, равное d.

118. В прямоугольной декартовой системе координат найдите координаты центров вписанной и вневписанных в треугольник ABC окружностей, если вершины треугольника находятся в точках $A\ (1; -1)$, $B\ (-2; 3)$ и $C\ (1; 3)$.

119. На прямой $x - 2y + 3 = 0$, заданной в прямоугольной декартовой системе координат, найдите точку, для которой сумма расстояний от точек $M_1\ (-1; -1)$ и $M_2\ (11; 5)$ имеет наименьшее значение.

120. В прямоугольной декартовой системе координат по координатам $(1; -2)$ и $(4; 2)$ двух вершин квадрата найдите координаты двух других его вершин.

121. Луч света, направленный по прямой $x + y = 1$, отражается от оси Ox прямоугольной декартовой системы координат. Пройдет ли отраженный луч через точку $A\ (3; 2)$?

122. Напишите уравнение прямой в полярных координатах, зная, что эта прямая отсекает на полярной оси отрезок длины a и нормаль к ней образует с полярной осью угол α.

123. Используя геометрические соображения, найдите, сколько действительных корней имеет система уравнений:

$$\begin{cases} y = \sin x, \\ y = 0{,}1x. \end{cases}$$

124. Составьте уравнение, определяющее множество середин отрезков, отсекаемых осями координат на прямых, проходящих через данную точку M $(a; b)$.

125. Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения боковых сторон трапеции и точку пересечения диагоналей трапеции, делит основания трапеции пополам.

126. Диагонали ромба равны соответственно $2a$ и $2b$. Найдите расстояние между противоположными сторонами ромба.

127. Докажите, что во всяком четырехугольнике точка пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон, лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей.

128. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

129. Изобразите в прямоугольной системе координат области, определяемые следующими системами неравенств:

а) $\begin{cases} 2x - y > 0, \\ x - 2y < 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y > 0, \\ x + y < 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y - 1 < 0, \\ 2x + 2y - 3 > 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y \geqslant 0, \\ x + y \leqslant 0, \\ x - y \geqslant 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x + 3y + 3 < 0, \\ x + 3y + 4 < 0, \\ x + 3y - 17 < 0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2x - 3y + 4 > 0, \\ 6x - y - 4 < 0, \\ 7x + 5y - 35 < 0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ x - y \geqslant 0, \\ x + y - 4 \leqslant 0. \end{cases}$

130. а) Изобразите в прямоугольной системе координат область, определяемую системой неравенств:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 19 < 0, \\ 3x - 4y + 13 < 0, \\ 5x + 3y + 12 < 0. \end{cases}$$

б) Как с помощью этих же трехчленов задать пустое множество?

131. Найдите неравенства, задающие внутреннюю область треугольника ABC, где A $(-1; 4)$, B $(5; 2)$, C $(1; -3)$.

132. Найдите неравенства, задающие внутреннюю область треугольника, ограниченного прямыми $a_ix + b_iy + c_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$.

133. Является ли выпуклым четырехугольник, вершины которого находятся в точках A $(-1; 4)$, B $(2; 1)$, C $(5; 2)$, D $(-2; -6)$?

134. Определите положение отрезка с концами в точках M_1 $(1; -4)$, M_2 $(-7; 3)$ относительно треугольника, стороны которого заданы уравнениями (BC): $x - 2y = 0$; (AC): $5x - 3y = 0$; (AB): $3x + y - 14 = 0$.

135. В прямоугольной декартовой системе координат составьте уравнение биссектрисы того угла между прямыми $2x - y + 1 = 0$, $x - 3y + 3 = 0$, в котором лежит начало координат.

136. В прямоугольной декартовой системе координат найдите косинус того угла между прямыми $x - y - 1 = 0$, $x - 4y + 12 = 0$, в котором лежит точка M (8; 6).

137. Найдите множество точек плоскости, координаты каждой из которых удовлетворяют по крайней мере одному из неравенств:

$$x \leqslant -1; \quad x \leqslant 2; \quad x \geqslant 3.$$

138. Составьте в прямоугольной декартовой системе координат уравнения прямых, на которых лежат стороны квадрата, зная, что эти прямые проходят по одной через каждую из следующих точек:

$$A\ (2;\ 1),\ B\ (0;\ 1),\ C\ (3;\ 5) \text{ и } D\ (-3;\ -1).$$

Глава III	ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

Глава III. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

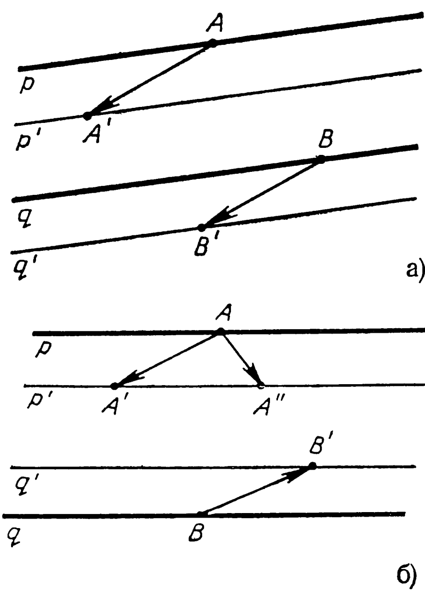
§ 1. Параллельный перенос

Литература: [1], § 26; [3], гл. IV; [4], § 43; [7], § 3; [8], § 2.

Пример 32. Существует ли параллельный перенос, при котором прямые p и q отображаются соответственно на прямые p' и q', если $p \parallel p'$ и $q \parallel q'$?

Решение. 1) Пусть $p \parallel q$ и расстояние между прямыми p и p' равно расстоянию между прямыми q и q'. Выберем произвольно на прямых p и p' соответственно точки A и A'. Через произвольную точку B прямой q проведем прямую, параллельную (AA'); точку ее пересечения с прямой q' обозначим через B'. Из равенства расстояний между прямыми p и p' и прямыми q и q' следует, что $|AA'| = |BB'|$. При этом возможны два случая:

а) $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ (рис. 22а). Тогда при параллельном переносе $\overrightarrow{AA'}$ прямая p отображается на прямую p', а прямая q — на прямую q'.



а)

б)

б) $\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{BB'}$ (рис. 22б). Ясно, что в этом случае параллельный перенос $\overrightarrow{AA'}$ не удовлетворяет условиям задачи. Допустим, что существует какой-либо другой параллельный перенос, удовлетворяющий условиям задачи. Этот параллельный перенос должен отобразить точку $A \in p$ на некоторую точку $A'' \in p'$, $A'' \neq A'$. Пусть B'' — образ точки B при этом параллельном переносе, причем $B'' \in q$. Тогда $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{BB''}$. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{AA''} - \overrightarrow{AA'}$ и $\overrightarrow{B'B''} = \overrightarrow{BB''} - \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA''} + \overrightarrow{AA'}$.

Векторы $\overrightarrow{A'A''}$ и $\overrightarrow{B'B''}$ не коллинеарны, так как представляют соответственно разность и сумму двух неколлинеарных векторов $\overrightarrow{AA''}$ и $\overrightarrow{AA'}$ (подробное доказательство проведите самостоятельно). Но так как p' — носитель $\overrightarrow{A'A''}$, а q' — носитель $\overrightarrow{B'B''}$, то $p' \nparallel q'$. Из условия же следует, что $p' \parallel q'$. Полученное противоречие означает, что в этом случае не существует параллельного переноса, отображающего прямые p и q соответственно на прямые p' и q'.

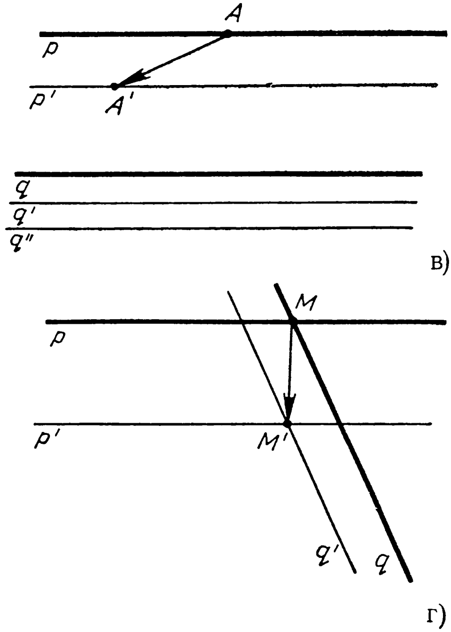


Рис. 22

2) Пусть $p \parallel q$, но расстояние между прямыми p и p' не равно расстоянию между прямыми q и q' (рис. 22 в). Всякий параллельный перенос $\overrightarrow{AA'}$, где A — произвольная точка прямой p, A' — произвольная точка прямой p', отображает прямую p на прямую p', а прямую q — на прямую q'', такую, что расстояние между прямыми p и p' равно расстоянию между прямыми q и q''. Из этого следует, что прямая q'' не совпадает с прямой q' и, значит, искомого параллельного переноса в рассматриваемом случае не существует.

3) Пусть прямые p и q пересекаются (рис. 22 г). Обозначим точку их пересечения через M, а точку пересечения прямых p' и q' через M' Параллельный перенос $\overrightarrow{MM'}$ отображает прямую p на прямую p' и прямую q — на прямую q'. В рассматриваемом случае этот параллельный перенос единственный, потому что общая точка прямых p и q при параллельном переносе должна отобразиться на общую точку прямых p' и q', а каждая пара непараллельных прямых обладает только одной общей точкой.

Пример 33. В трапеции $ABCD$ дано отношение оснований: $|AD| : |BC| = a : b$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Найдем отношение площади треугольника AOD к площади трапеции.

Решение. Выполним параллельный перенос $\overrightarrow{BC}$ диагонали BD (рис. 23). При этом точка D отобразится на точку E, такую, что $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$. Площади треугольников ABC и DCE равны, так как у этих треугольников стороны BC и DE, а также высоты, опущенные на эти стороны, конгруэнтны, поэтому

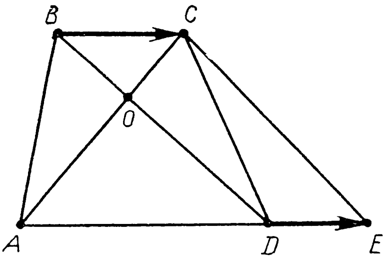


Рис. 23

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ACD} + S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACD} + S_{\Delta DCE} = S_{\Delta ACE}$$

и, следовательно,

$$S_{\Delta AOD} : S_{ABCD} = S_{\Delta AOD} : S_{\Delta ACE}.$$

Последнее отношение легко найти, так как $\triangle AOD \sim \triangle ACE$, а площади подобных треугольников относятся как квадраты сходственных сторон:

$$S_{\Delta AOD} : S_{\Delta\ ACE} = |AD|^2 : |AE|^2 = a^2 : (a+b)^2.$$

Итак,

$$S_{\Delta AOD} : S_{\Delta\ BCD} = a^2 : (a+b)^2.$$

Пример 34. Две конгруэнтные окружности $\omega_1 = (O_1, |O_1A|)$ и $\omega_2 = (O_2, |O_2A|)$ пересекаются в точках A и B. Прямые p_i, параллельные их линии центров и пересекающие отрезок AB, пересекают первую окружность в точках M_i и N_i, а вторую в точках K_i и L_i. Докажем, что $\widehat{N_iBL_i}$ не зависит от выбора секущей.

Решение. Пусть p_1 и p_2 — две секущие, удовлетворяющие условиям задачи (рис. 24). Выполним параллельный перенос $\overrightarrow{O_1O_2}$ окружности ω_1, а также секущих p_1 и p_2. Тогда, так как окружности ω_1 и ω_2 конгруэнтны, то ω_1 отобразится на ω_2, прямая p_1 отобразится сама на себя и таким образом точки M_1, N_1 отобразятся соответственно на точки K_1, L_1. Следовательно, $\overrightarrow{M_1K_1} = \overrightarrow{N_1L_1} = \overrightarrow{O_1O_2}$.

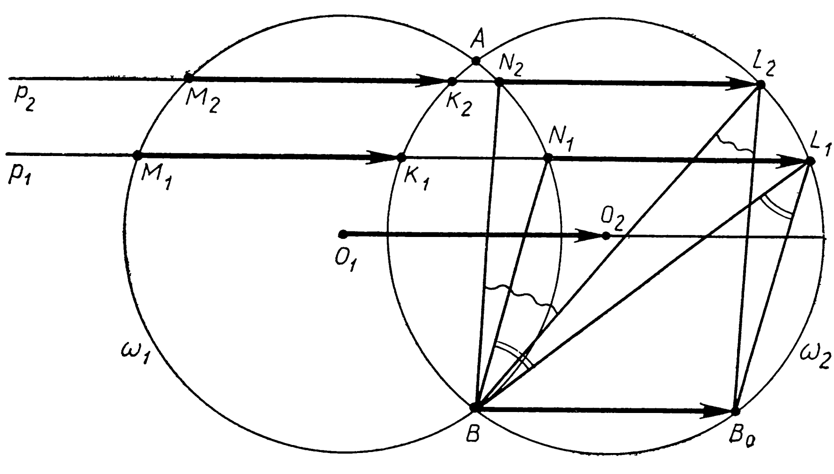


Рис. 24

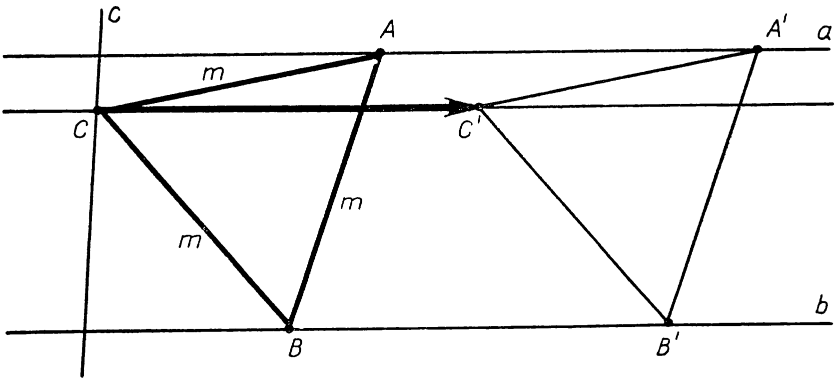


Рис. 25

Аналогично точки M_2, N_2 отобразятся на точки K_2, L_2, так, что $\overrightarrow{M_2K_2} = \overrightarrow{N_2L_2} = \overrightarrow{O_1O_2}$. При выбранном параллельном переносе точка B отобразится на точку $B_0 \in \omega_2$, так как $\overrightarrow{BB_0} = \overrightarrow{O_1O_2}$.

Итак, $\overrightarrow{N_1L_1} = \overrightarrow{BB_0}$, т. е. четырехугольник $BN_1L_1B_0$ — параллелограмм, и потому $\widehat{N_1BL_1} = \widehat{BL_1B_0}$. Точно так же $\overrightarrow{N_2L_2} = \overrightarrow{BB_0}$, т. е. четырехугольник $BN_2L_2B_0$ — параллелограмм и $\widehat{N_2BL_2} = \widehat{BL_2B_0}$. Но $\widehat{BL_1B_0} = \widehat{BL_2B_0}$, так как $\angle BL_1B_0$ и $\angle BL_2B_0$ опираются на одну и ту же дугу BB_0 окружности ω_2, а поэтому и $\widehat{N_2BL_2} = \widehat{N_1BL_1}$. Таким образом, от выбора секущей p_i величина угла N_iBL_i не зависит.

П р и м е р 35. Даны параллельные прямые a и b, пересекающая их прямая c и отрезок длины m. Построим равносторонний треугольник со стороной данной длины m, так, чтобы его вершины лежали соответственно на данных прямых.

Р е ш е н и е. *Анализ.* Пусть искомый треугольник ABC построен: $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ и $|AB| = |AC| = |BC| = m$ (рис. 25). Выполним параллельный перенос $\overrightarrow{CC'}$ треугольника ABC, причем $\overrightarrow{CC'} \parallel a$. Получим треугольник $A'B'C'$ со сторонами данной длины m, причем $A' \in a$, $B' \in b$.

Так как треугольник $A'B'C'$, две вершины которого лежат на прямых a и b, построить нетрудно, то на этом анализ можно закончить. Таким образом, задачу можно свести к построению равностороннего треугольника $A'B'C'$ со стороной длины m, причем $A' \in a$, $B' \in b$, а затем к последующему параллельному переносу $\overrightarrow{C'C}$ треугольника $A'B'C'$, причем конец C вектора $\overrightarrow{C'C}$ определяется как точка пересечения прямой $CC' \parallel a$ с данной прямой c.

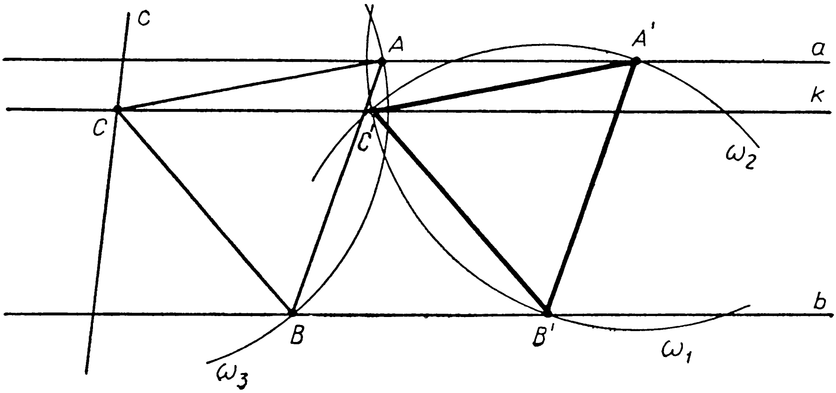


Рис. 26

Построение (рис. 26). Выбираем произвольную точку $A' \in a$. Описываем окружность $\omega_1 = (A', m)$. Находим точку $B' = \omega_1 \cap \cap b$. Описываем окружность $\omega_2 = (B', m)$. Находим точку $C' = = \omega_1 \cap \omega_2$. Через точку C' проводим прямую $k \parallel a$ и находим точку $C = k \cap c$. Откладываем $\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{C'C}$ и получаем треугольник ABC.

Доказательство. По построению треугольник $A'B'C'$ удовлетворяет всем поставленным условиям, кроме условия $C' \in c$. После параллельного переноса $\overrightarrow{C'C}$ удовлетворяется и это условие. Таким образом, $\triangle ABC$ — искомый.

Исследование. При выбранном способе построения число решений задачи зависит прежде всего от числа точек $B' = \omega_1 \cap b$.

Если радиус m окружности ω_1 больше расстояния h между прямыми a и b, то таких точек две.

Если $m = h$, то окружность ω_1 касается прямой b, и тогда точка пересечения одна.

Если же $m < h$, то окружность ω_1 и прямая b не пересекаются. Окружности ω_1 и ω_2 всегда имеют общие точки, так как по построению $B' \in \omega_1$, $A' \in \omega_2$. Значит, при любом выборе точки A' образуются две точки пересечения окружностей ω_1 и ω_2.

Итак, возможны три следующих случая:

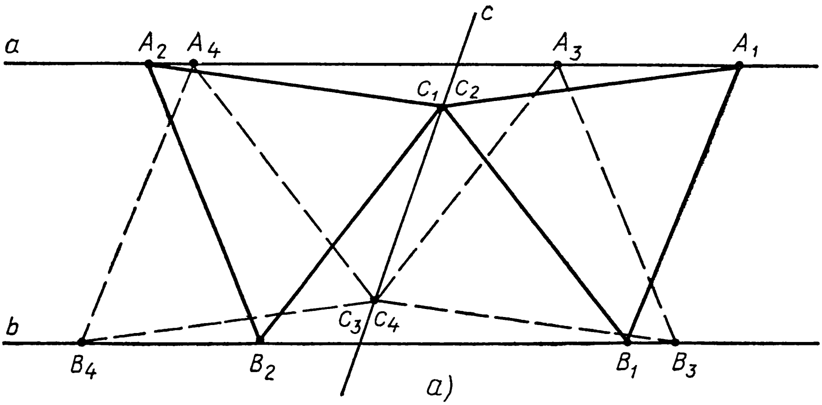
1) если $m > h$, то задача имеет четыре решения (рис. 27 а),

2) если $m = h$, то задача имеет два решения (рис. 27 б),

3) если $m < h$, то задача не имеет решений.

П р и м е р 36. Даны две окружности ω_1 и ω_2 и прямая l. Параллельно l необходимо построить прямую p, на которой окружности высекают конгруэнтные хорды.

Р е ш е н и е. *Анализ.* Пусть искомая прямая p построена (рис. 28). Окружность ω_1 высекает на прямой p хорду AB, окружность ω_2 — хорду CD, причем $|AB| = |CD|$. Из центров O_1 и O_2



окружностей ω_1 и ω_2 опустим перпендикуляры O_1F_1 и O_2F_2 на прямую l. Выполним параллельный перенос $\overrightarrow{F_2F_1}$ окружности ω_2. Окружность ω_2 отобразится на окружность ω_2', O_2 — центр окружности ω_2 отобразится на O_2' — центр окружности ω_2', причем $\overrightarrow{O_2O_2'} = \overrightarrow{F_2F_1}$.

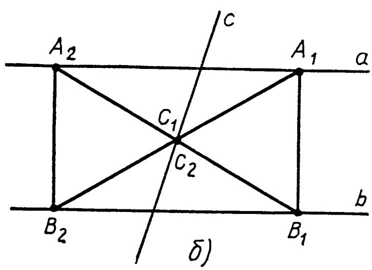


Рис. 27

Докажем, что $A \in \omega_2'$ и $B \in \omega_2'$. Пусть $K_1 = (O_1F_1) \cap (AB)$ и $K_2 = (O_2F_2) \cap (AB)$. Тогда $|K_2K_1| = |F_2F_1|$ и $|K_1A| = \frac{1}{2}|AB|$, $|K_2C| = \frac{1}{2}|CD|$, а так как $|AB| = |CD|$, то и $|AK_1| = |CK_2|$, поэтому $|CA| = |K_2K_1| = |F_2F_1|$ $(|CA| = |CK_1| + |K_1A| = |CK_1| + |K_2C| = |K_2K_1|)$. Следовательно, при параллельном переносе $\overrightarrow{F_2F_1}$ точка C отобразится на точку A. А так как $C \in \omega_2$, то $A \in \omega_2'$.

Точно так же можно показать, что $B \in \omega_2'$. Итак, точки A и B — точки пересечения окружностей ω_1 и ω_2'.

Таким образом, эту задачу можно свести к построению окружности ω_2' — образа окружности ω_2 при параллельном переносе $\overrightarrow{F_2F_1}$.

Построение. Опускаем перпендикуляры O_1F_1 и O_2F_2 из точек O_1 и O_2 на прямую l. Строим ω_2' параллельным переносом $\overrightarrow{F_2F_1}$ окружности ω_2. Далее находим точки A и B — точки пересечения окружностей ω_1 и ω_2'. И, наконец, проводим прямую p через точки A и B.

Доказательство. При параллельном переносе $\overrightarrow{F_2F_1}$ точка O_2

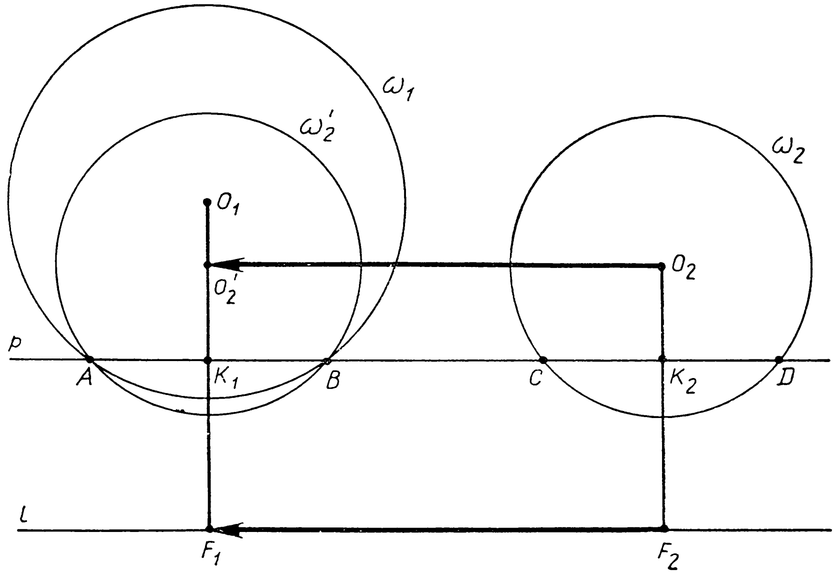


Рис. 28

отображается на точку $O_2' \in (O_1F_1)$. Прямая O_1F_1 проходит через центры окружностей ω_1 и ω_2', следовательно, $p \perp (O_1F_1)$, и тогда $p \parallel l$, $(O_2O_2') \parallel l$, $(O_2O_2') \parallel p$.

Значит, центры O_2 и O_2' конгруэнтных окружностей ω_2 и ω_2' равноудалены от прямой p, и, следовательно, окружность ω_2 высекает на прямой p хорду CD, конгруэнтную хорде AB, т. е. $|AB| = |CD|$. Итак, прямая p — искомая.

Исследование. При выбранном способе построения число решений зависит от того, во скольких точках пересекаются окружности ω_1 и ω_2':

1) если ω_1 и ω_2' пересекаются в двух точках, то решение одно;
2) если ω_1 и ω_2' касаются, то решений нет;
3) если ω_1 и ω_2' не имеют общих точек, то решений нет;
4) если ω_1 и ω_2' совпадают, то решений бесконечное множество.

Замечание. В проведенном исследовании число решений задачи определялось на основании взаимного расположения окружностей ω_1 и ω_2'. Можно указать зависимость числа решений от расположения и размеров фигур, данных в условии.

Пусть $|O_1O_2| = d$, $(\widehat{\overrightarrow{O_2O_1}, \overrightarrow{O_2O_2'}}) = \alpha$, R_1 и R_2 — радиусы окружностей ω_1 и ω_2. Тогда

1) если $|R_1 - R_2| < d \sin \alpha < R_1 + R_2$, то задача имеет одно решение;

2) если $d \sin \alpha = |R_1 - R_2| \neq 0$ или $d \sin \alpha = R_1 + R_2$, то задача не имеет решений;

3) если $d \sin \alpha = |R_1 - R_2| = 0$, то задача имеет бесконечное множество решений;

4) если $d \sin \alpha < |R_1 - R_2|$ или если $d \sin \alpha > R_1 + R_2$, то решений нет.

Задачи

139. Постройте образ трапеции $ABCD$ при параллельном переносе $\overrightarrow{AO}$, где O — точка пересечения диагоналей трапеции. Докажите, что общей частью данной трапеции и ее образа является трапеция, подобная данной.

140. Пусть F, D, E — середины сторон AB, BC и CA треугольника ABC. Обозначим центры окружностей, описанных вокруг треугольников AEF, BDF и CDE, через O_1, O_2 и O_3, а центры окружностей, вписанных в те же треугольники, — через P_1, P_2 и P_3. Докажите, что $\triangle O_1O_2O_3 \cong \triangle P_1P_2P_3$.

141. Докажите, что если отрезок EF, соединяющий середины оснований трапеции $ABCD$, образует с ее боковыми сторонами AB и CD конгруэнтные углы, то трапеция равнобочная.

142. Докажите, что в трапеции сумма длин оснований меньше суммы длин диагоналей, но больше их разности.

143. Докажите, что в трапеции разность длин оснований больше разности длин боковых сторон.

144. Докажите, что две трапеции конгруэнтны, если основания и диагонали одной из них соответственно конгруэнтны основаниям и диагоналям второй.

145. На стороне AB прямоугольника $ABCD$ построен треугольник ABS. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точки D на (BS) и из точки C на (AS), пересекаются на высоте треугольника ABS или на ее продолжении.

146. Две конгруэнтные окружности касаются в точке K. Секущая, параллельная линии центров, пересекает эти окружности последовательно в точках A, B, C и D. Докажите, что $\widehat{AKC}$ не зависит от выбора секущей.

147. Даны две конгруэнтные пересекающиеся окружности. Секущая, параллельная линии центров, пересекает первую окружность в точках A и B, вторую — в точках C и D (векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены). Найдите $|AC|$, зная, что расстояние между центрами равно m.

148. Постройте трапецию, зная длины ее оснований и боковых сторон.

149. Постройте четырехугольник $ABCD$, зная длины всех его сторон и величину угла между продолжениями сторон AB и CD.

150. Постройте треугольник, зная длины трех его медиан: m_a, m_b и m_c.

151. Постройте параллелограмм, основанием которого является данный отрезок, а две другие вершины параллелограмма лежат на двух данных окружностях.

152. Даны прямая l и две точки A и B по разные стороны от l. На прямой l найдите отрезок MN, такой, что $|MN| = a$, и длина ломаной $AMNB$ — наименьшая.

§ 2. Поворот

Литература: [1], § 26; [3], гл. IV — V; [4], § 43; [7], § 4; [8], § 2.

Пример 37. Даны две пары взаимно перпендикулярных прямых: $a \perp b$, $a' \perp b'$, причем $a \nparallel a'$. Докажем, что существует поворот, отображающий прямые a и b соответственно на прямые a' и b'. Найдем центр и угол этого поворота.

Решение. Пусть $a \cap b = O$, $a' \cap b' = O'$, P — некоторая точка прямой a, отличная от O, P' — такая точка прямой a', что $|O'P'| = |OP|$. Известно, что существует одно перемещение первого рода, переводящее $[OP]$ в $[O'P']$, причем по теореме Шаля это перемещение должно быть либо поворотом, либо параллельным переносом. Поскольку по условию a' — образ a, причем $a \nparallel a'$, то перемещение, отображающее $[OP]$ на $[O'P']$, не может быть параллельным переносом, и, следовательно, оно является поворотом.

Найдем центр и угол этого поворота.

1) Если O совпадает с O' (или P совпадает с P'), то центром поворота будет точка O (или P), угол поворота будет равен углу между лучами OP и $O'P'$ (или углу между лучами PO и $P'O'$).

2) Пусть O не совпадает с O' и P не совпадает с P' (рис. 29). Поскольку точка O отображается на точку O', а точка P на точку P', то центр поворота должен быть равноудален как от точек O и O', так и от точек P и P'. Следовательно, центр поворота должен лежать на перпендикулярах m и n, восставленных в серединах отрезков OO' и PP' соответственно, т. е. m и n должны либо пересекаться, либо совпадать. Если $m \cap n = S$, то S — центр поворота, а угол OSO' — угол поворота, отображающего $[OP]$ на $[O'P']$, а тем самым и прямую a на прямую a'. Так как O отображается на O', а поворот сохраняет величину угла, то прямая b отображается на прямую b', причем поскольку $b \perp a$, то и $b' \perp a'$.

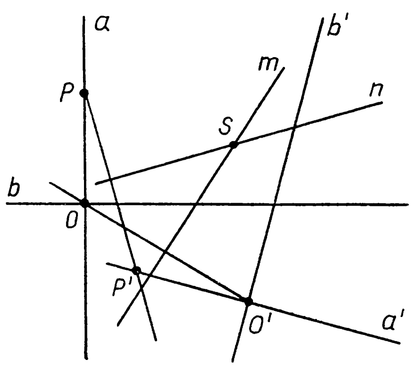


Рис. 29

Если перпендикуляры m и n совпадают (рис. 30), то искомым поворотом будет поворот вокруг точки $S = (OP) \cap (O'P')$ на угол OSO'. Действительно, точки O' и P' симметричны точкам O и P относительно прямой m, совпадающей с n, значит, $S \in m$, и потому $|SP| = |SP'|$, $|SO| = |SO'|$. При этом повороте точка O отображается на O', P — на P', прямая a — на a', причем поскольку $b \perp a$, то и $b' \perp a'$.

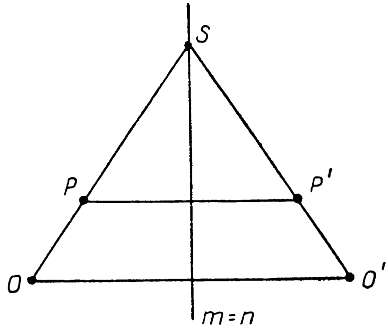


Рис. 30

Итак, поворот, отображающий прямые a и b соответственно на прямые a' и b', существует всегда.

Если при проведении предыдущих рассуждений точку P' заменить точкой P'', лежащей на луче, дополнительном к лучу $O'P'$, причем такой, что $|O'P''| = |OP|$, то получим второй поворот, удовлетворяющий условию задачи. Его центр и угол находятся так же, как это было сделано для первого поворота.

Итак, существуют два поворота, удовлетворяющие условию задачи.

Пример 38. Преобразование задано в декартовых прямоугольных координатах формулами:

$$\begin{cases} x' = \frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y + \frac{2}{13}, \\ y' = -\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - \frac{16}{13}. \end{cases}$$

Определим вид этого преобразования.

Решение. Перепишем заданные формулы следующим образом:

$$\begin{cases} x' = \frac{12}{13}x - \left(-\frac{5}{13}\right)y + \frac{2}{13}, \\ y' = \left(-\frac{5}{13}\right)x + \frac{12}{13}y - \frac{16}{13}. \end{cases}$$

Из равенства

$$\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1$$

следует, что эти формулы определяют перемещение первого рода. Выясним, есть ли у этого преобразования двойные точки. Поскольку для двойной точки $x' = x$ и $y' = y$, то получаем:

$$\begin{cases} x = \frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y + \frac{2}{13}, \\ y = -\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - \frac{16}{13}. \end{cases}$$

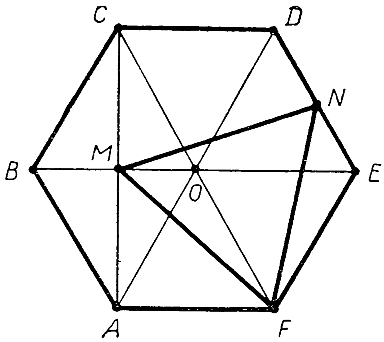


Рис. 31

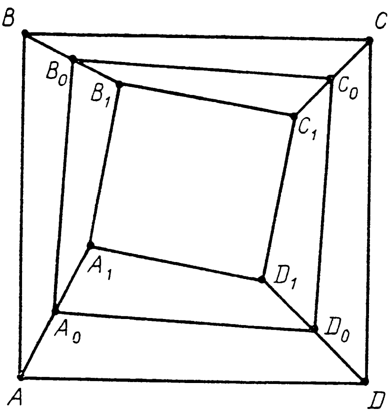


Рис. 32

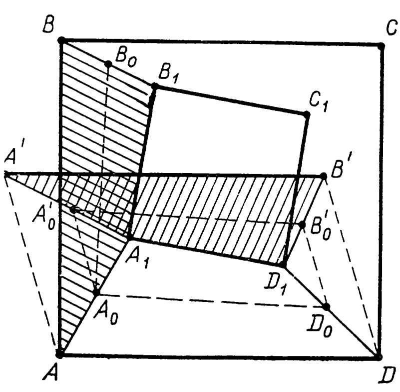


Рис. 33

Решая эту систему, находим: $x = -3$, $y = -1$. Таким образом, заданное преобразование имеет одну двойную точку $(-3; -1)$.

По теореме Шаля всякое перемещение первого рода является либо поворотом (и тогда существует только одна двойная точка — центр поворота), либо параллельным переносом (в этом случае двойных точек нет). Следовательно, рассмотренное нами преобразование — поворот. Точка $(-3; -1)$ является центром поворота, а угол поворота $\alpha = \arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)$, так как $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$.

Пример 39. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$, M — середина диагонали AC, N — середина стороны DE. Докажем, что треугольник MNF правильный.

Решение. Так как шестиугольник $ABCDEF$ правильный, то его диагонали AD, BE и CF пересекаются в точке O — центроиде этого шестиугольника и делят его на шесть конгруэнтных правильных треугольников (рис. 31).

Таким образом, четырехугольник $AOCB$ — ромб, поэтому точка M — середина отрезка AC — будет и серединой отрезка OB. Повернем сторону DE вокруг точки F на угол 60°. Тогда из равенств $\widehat{BFD} = 60°$ и $|DF| = |BF|$ (убедитесь в этом самостоятельно) следует, что при этом повороте точка D отображается на точку B, а так как $\widehat{OFE} = 60°$, то точка E отображается на точку O, и поэтому $[DE]$ отображается на $[BO]$, а середина отрезка DE — точка N — на середину отрезка BO — точку M.

Итак, $|MF| = |NF|$ и $\widehat{NFM} = 60^\circ$, следовательно, треугольник MNF правильный.

Пример 40. Внутри данного квадрата $ABCD$ расположен другой квадрат $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 32). Докажем, что точки A_0, B_0, C_0, D_0 — середины соответственно отрезков AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — также являются вершинами некоторого квадрата.

Решение. Повернем четырехугольник ABB_1A_1 вокруг точки A_1 на угол $\frac{\pi}{2}$ (рис. 33). Так как $|A_1B_1| = |A_1D_1|$, то точка B_1 отобразится на точку D_1. Пусть при этом повороте точка A отобразится на точку A', тогда точка A_0 — середина отрезка AA_1 — отобразится на точку A_0', которая будет серединой отрезка A_1A'. Аналогично точка B_0 — середина отрезка BB_1 — отобразится на точку B_0', которая будет серединой отрезка $B'D_1$.

Так как $|AB| = |AD|$ и $(AB) \perp (AD)$, а также $|A'B'| = |AB|$ и $(A'B') \perp (AB)$, то $|A'B'| = |AD|$ и $(A'B') \parallel (AD)$. Следовательно, четырехугольник $AA'B'D$ — параллелограмм, $|AA'| = |B'D|$ и $(AA') \parallel (B'D)$. Но тогда $|A_0A_0'| = |D_0B_0'|$ и $(A_0A_0') \parallel (D_0B_0')$ (так как $[A_0A_0']$ и $[D_0B_0']$ — средние линии треугольников AA_1A' и DD_1B'), поэтому четырехугольник $A_0A_0'B_0'D_0$ — параллелограмм, т. е. $|A_0D_0| = |A_0'B_0'|$ и $(A_0D_0) \parallel (A_0'B_0')$. Как уже отмечалось, точка A_0 при повороте отображается на точку A_0', а точка B_0 — на точку B_0', откуда следует, что $|A_0'B_0'| = |A_0B_0|$ и $(A_0'B_0') \perp (A_0B_0)$. Таким образом, $|A_0D_0| = |A_0B_0|$ и $(A_0D_0) \perp (A_0B_0)$. Точно так же доказывается, что $|B_0C_0| = |A_0B_0|$ и $(B_0C_0) \perp (A_0B_0)$. Следовательно, четырехугольник $A_0B_0C_0D_0$ — квадрат.

Пример 41. Даны три концентрические окружности α, β, γ и точка A на окружности α. Построим равносторонний треугольник ABC, так, чтобы его вершины B и C лежали соответственно на окружностях β и γ.

Решение. *Анализ.* Пусть треугольник ABC (рис. 34) удовлетворяет заданным условиям. Повернем окружность β вокруг точки A на $\widehat{OAO'} = 60^\circ$. Тогда окружность β отобразится на окружность β', точка $B \in \beta$ — на точку $B' \in \beta'$. Так как $\widehat{BAC} = 60^\circ$ и $|AB| = |AC|$, то вершина B отобразится на вершину C, т. е. $B' = C$.

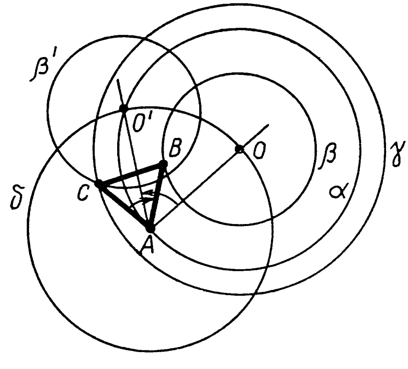


Рис. 34

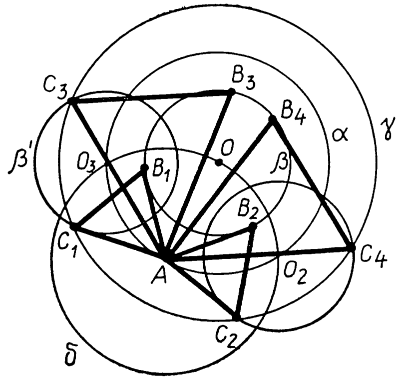


Рис. 35

Но вершина $C \in \gamma$, следовательно, $C = \gamma \cap \beta'$. Зная положение вершин A и C треугольника ABC, нетрудно построить и сам треугольник ABC. Таким образом, задачу можно свести к построению точки $C = \gamma \cap \beta'$, причем радиус окружности β' известен (он равен радиусу окружности β), а центр O' окружности β', как ясно из рисунка 34, удален от точки A на расстояние, равное $|OA|$, и лежит на окружности α.

Построение (рис. 34). Строим $O' \in \alpha$, строим окружность β' путем поворота окружности β вокруг точки A на угол, равный 60°. Точку $C = \gamma \cap \beta'$ поворачиваем вокруг точки A на угол, равный —60°, получая прообраз точки C, — это и будет вершина B треугольника ABC.

Доказательство. По построению $|AC| = |AB|$ и $\widehat{CAB} = 60°$, откуда следует, что $|AB| = |AC| = |BC|$. Таким образом, $\triangle ABC$ — искомый.

Исследование. При выбранном способе построения треугольника ABC количество решений зависит от числа точек пересечения окружности δ с центром в точке A радиуса $|OA|$ с окружностью α и от числа точек пересечения окружности β' с окружностью γ. Но так как точек пересечения окружностей δ и α всегда две (помимо поворота вокруг точки A на угол 60°, можно осуществить и поворот на угол —60°), то возможны следующие случаи:

1) если окружности β' и γ пересекаются в двух точках, то задача имеет 4 решения (рис. 35);

2) если окружности β' и γ касаются, то задача имеет два решения;

3) если окружности β' и γ не имеют общих точек, то решений нет.

Задачи

153. Даны две пересекающиеся прямые a и b и точка O, не лежащая на них. Постройте образы данных прямых при повороте $R_O^{\frac{\pi}{3}}$.

154. Дан треугольник ABC и вневписанная в него окружность ω, лежащая внутри угла ABC. Постройте образы треугольника ABC и окружности ω при повороте вокруг точки B на $\widehat{ABC}$.

155. Даны четыре окружности: $\omega_1 = (O_1, r)$, $\omega_2 = (O_2, r)$, $\omega_3 = (O_3, r)$ и $\omega_4 = (O_4, r)$. Существует ли поворот, отображающий окружность ω_1 на ω_2 и окружность ω_3 на окружность ω_4?

156. Являются ли группами следующие множества преобразований:

а) множество всех поворотов плоскости вокруг данной точки;

б) множество всех поворотов плоскости;

в) множество всех поворотов и всех параллельных переносов плоскости?

157. Напишите формулы преобразования координат при повороте плоскости вокруг точки O (2; 3) на угол $\frac{\pi}{4}$.

158. Известны координаты концов A (1; 3), B (2; 5), A' (—3; 3), B' (0; 4) двух конгруэнтных отрезков AB и $A'B'$. Найдите формулы преобразования координат при повороте плоскости, отображающем $[AB]$ на $[A'B']$.

159. На двух смежных сторонах параллелограмма вне этого параллелограмма построены квадраты. Докажите, что их центры одинаково удалены от центра параллелограмма.

160. Дан параллелограмм $ABCD$. Построены отрезок AB_1, конгруэнтный отрезку AB и перпендикулярный ему, и отрезок AD_1, конгруэнтный отрезку AD и перпендикулярный ему, причем так, что углы BAB_1 и DAD_1 противоположно ориентированы. Докажите, что диагонали параллелограмма $AB_1C_1D_1$, построенного на $[AB_1]$ и $[AD_1]$, как на сторонах, соответственно перпендикулярны диагоналям параллелограмма $ABCD$.

161. В данный квадрат впишите равносторонний треугольник, положение одной из вершин которого на стороне квадрата задано.

162. Через точку M пересечения двух данных окружностей ω_1 и ω_2 проведите прямую так, чтобы обе окружности высекали на этой прямой конгруэнтные хорды.

163. Даны три параллельные прямые a, b и c. Постройте равносторонний треугольник так, чтобы его вершины лежали соответственно на данных прямых.

164. Дан острый угол и точка A внутри него. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник, вершиной прямого угла которого является точка A, а две другие вершины принадлежат сторонам данного угла.

165. На сторонах треугольника ABC построены попарно не пересекающиеся правильные треугольники. Докажите, что треугольник с вершинами в центроидах трех построенных треугольников тоже правильный.

§ 3. Симметрия

Литература: [1], § 26, § 28, § 30; [3], гл. IV; [8], § 2.

Пример 42. Докажем, что композиция $S_0 \circ T$ параллельного переноса T и симметрии S_0 относительно точки O есть симметрия относительно некоторой точки O_1.

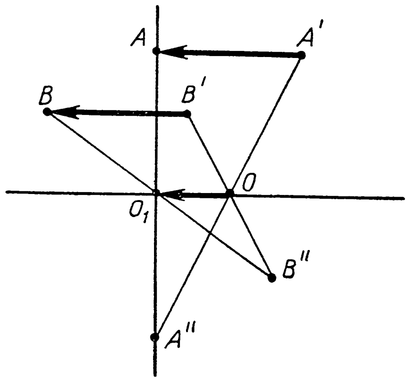


Рис. 36

Решение. 1-*й способ.* Пусть A — некоторая точка плоскости, $T(A) = A'$, $S_0(A') = A''$, так что $S_0 \circ T(A) = A''$. Пусть O_1 — середина отрезка AA'' (рис. 36), так что симметрия S_{O_1} отображает A на A''. Пусть B — любая точка плоскости, отличная от A, и пусть $T(B) = B'$, $S_0(B') = B''$. Докажем, что середина отрезка BB'' — точка O_2 совпадает с точкой O_1.

Так как O — середина $[A'A'']$, а O_1—середина $[AA'']$, то $[OO_1]$— средняя линия треугольника $AA'A''$ и потому $\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A}$. Аналогично, рассматривая треугольник $BB'B''$, находим, что $\overrightarrow{OO_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B'B}$. Но $\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{B'B}$, так что $\overrightarrow{OO_2} = \overrightarrow{OO_1}$, т. е. точки O_2 и O_1 совпадают.

Таким образом, композиция $S_0 \circ T$ преобразований T и S_0 отображает каждую точку плоскости на точку, симметричную ей относительно некоторой фиксированной точки O_1 ,что и требовалось доказать.

2-*й способ.* Выберем в данной плоскости декартову прямоугольную систему координат так, чтобы начало ее совпадало с точкой O. Тогда параллельный перенос T будет аналитически задаваться формулами: $x' = x + a$, $y' = y + b$ (a, b — координаты вектора переноса), а центральная симметрия S_0 с центром O — формулами: $x' = -x$, $y' = -y$. Пусть M $(x; y)$ — произвольная точка плоскости, тогда $T(M) = M'$ $(x'; y')$ и $S_0(M') = M''$ $(x''; y'')$. Так как $x' = x + a$, $y' = y + b$, $x'' = -x$, $y'' = -y'$, то $x'' = -x - a$, $y'' = -y - b$. Последние две формулы представляют собой аналитическое выражение композиции преобразований T и S_0. Исследуя эти формулы, легко показать, что $S_0 \circ T$ — перемещение первого рода с одной неподвижной точкой (докажите это самостоятельно), а значит, является поворотом, причем угол этого поворота равен π, таким образом, $S_0 \circ T$ — это центральная симметрия.

Пример 43. Докажем, что если данная фигура F имеет два центра симметрии, то она имеет бесконечное множество центров симметрии.

Решение. Пусть точки O_1 и O_2 — центры симметрии данной фигуры F. Построим точку O_3, симметричную точке O_1 относительно O_2, и возьмем некоторую точку $M \in F$ (рис. 37).

Покажем, что существует такая точка, которая принадлежит фигуре F и в то же время симметрична точке M относительно центра O_3.

Действительно, так как точка O_2 — центр симметрии фигуры F, то существует точка $M_1 \in F$, симметричная точке M относительно центра O_2. Аналогично существует точка $M_2 \in F$, симметричная точке M_1 относительно центра O_1, и точка $M_3 \in F$, симметричная точке M_2 относительно центра O_2.

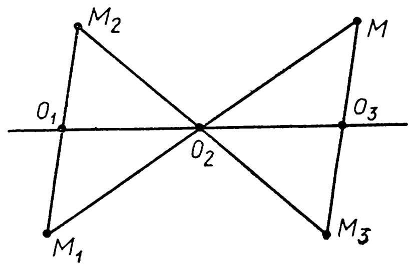


Рис. 37

Итак, точки M_1, M_3 и O_3 симметричны соответственно точкам M, M_2 и O_1 относительно центра O_2. Но центр O_1 — это середина отрезка M_1M_2, который при симметрии с центром O_2 преобразуется в отрезок MM_3. Поэтому и точка O_3 является серединой отрезка MM_3. Другими словами, точки M и M_3 симметричны относительно точки O_3. А так как точка M — произвольная точка фигуры F, то точка O_3 наряду с точками O_1 и O_2 также является центром симметрии фигуры F.

Аналогично приходим к выводу, что центром симметрии фигуры F будет и точка O_4, симметричная точке O_2 относительно центра O_3 и т. д.

Таким образом, мы доказали, что если данная фигура F имеет два центра симметрии, то она имеет бесконечное множество центров симметрии.

Пример 44. Стороны остроугольного треугольника ABC равны a, b, c. Определим периметр треугольника, образованного основаниями высот этого треугольника.

Решение. 1) Покажем, что высота CR данного треугольника ABC является биссектрисой угла QRP. Так как $\widehat{ARC} = \widehat{APC} = \frac{\pi}{2}$, то точки R и P лежат на окружности ω_1, построенной на отрезке AC как на диаметре, и, следовательно, четырехугольник $ARPC$ вписан в эту окружность ω_1 (рис. 38). Тогда $\widehat{ARP} + \widehat{ACP} = \pi$. Так как углы ARP и BRP смежные, то $\widehat{ARP} + \widehat{BRP} = \pi$. Следовательно, $\widehat{ACP} = \pi - \widehat{ARP}$ и $\widehat{BRP} = \pi - \widehat{ARP}$. Значит, $\widehat{ACP} = \widehat{BRP}$.

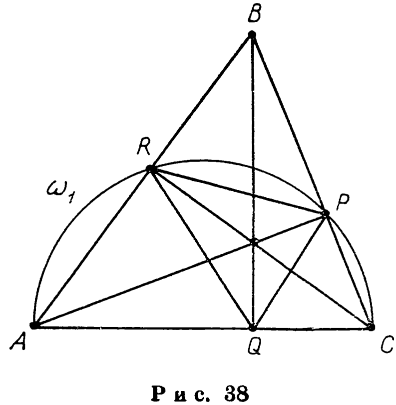


Рис. 38

Точно так же, рассматривая четырехугольник $BRQC$, прихо-

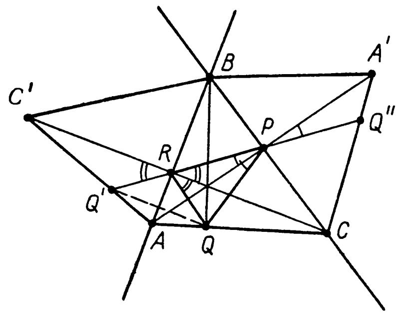


Рис. 39

дим к выводу, что он является вписанным в окружность, построенную на $[BC]$ как на диаметре, и что $\widehat{ACP} = \widehat{ARQ}$.

Таким образом, $\widehat{BRP} = \widehat{ACP} = \widehat{ARQ}$. Далее ясно, что $\widehat{PRC} = \frac{\pi}{2} - \widehat{BRP}$, а $\widehat{QRC} = \frac{\pi}{2} - ARQ$, и, следовательно, $\widehat{PRC} = \widehat{QRC}$, т. е. высота CR является биссектрисой угла PRQ. Аналогично доказывается, что высоты AP и BQ — это биссектрисы соответственно углов QPR и PQR.

2) Выполним преобразование симметрии с осью AB (рис. 39). Точка C при этом отобразится на точку C', точка Q — на точку Q'; точка R преобразуется сама на себя. Таким образом, прямая CR отобразится на прямую $C'R$, совпадающую с CR, а прямая QR — на прямую $Q'R$. Стороны $C'R$ и CR соответственно углов $Q'RC'$ и QRC принадлежат одной прямой CC'. Но $(QQ') \parallel (CC')$, так как $(CC') \perp (AB)$ и $(QQ') \perp (AB)$, поэтому точки Q и Q' лежат по одну сторону от прямой CC'. Поскольку $\triangle ABC$ остроугольный, точки Q и P лежат по разные стороны от прямой CC', то точки P и Q' тоже лежат по разные стороны от прямой CC'.

По свойствам симметрии $\widehat{Q'RC'} = \widehat{QRC}$ и, как было доказано, $\widehat{QRC} = \widehat{PRC}$, значит, $\widehat{Q'RC'} = \widehat{PRC}$. Принимая теперь во внимание, что точки P и Q лежат по разные стороны от прямой CC', заключаем, что точки P, R, Q' лежат на одной прямой. Кроме того, по свойствам симметрии $|QR| = |Q'R|$. Рассматривая симметрию с осью BC, точно так же убедимся, что точки R, P, Q'' лежат на одной прямой и $|PQ| = |PQ''|$. Теперь периметр треугольника PQR можно выразить следующим образом:

$$2p = |QR| + |RP| + |PQ| = |Q'R| + |RP| + |PQ''| = |Q'Q''|.$$

Итак, нахождение периметра $2p$ сводится к нахождению длины отрезка $Q'Q''$.

3) Покажем, что $\triangle Q'BQ'' \sim \triangle C'BC$. Действительно, $|BQ'| = |BQ|$, $|BQ''| = |BQ|$ и, следовательно, $|BQ'| = |BQ''|$, т. е. треугольник $Q'BQ''$ равнобедренный. Так как $|C'B| = |CB|$, то и треугольник $C'BC$ равнобедренный. Далее, так как по свойствам симметрии $\widehat{C'BR} = \widehat{CBR}$, то $\widehat{C'BC} = 2\,\widehat{ABC}$, а $\widehat{Q'BQ''} = \widehat{Q'BR} + \widehat{RBQ} + \widehat{QBP} + \widehat{PBQ''}$, где $\widehat{Q'BR} = \widehat{RBQ}$, а $\widehat{QBP} = \widehat{PBQ''}$ (также по свойствам симметрии), т. е.

$$\widehat{Q'BQ''} = 2\,\widehat{RBQ} + 2\,\widehat{QBP} = 2\,(\widehat{RBQ} + \widehat{QBP}) = 2\,\widehat{ABC}.$$

Итак, треугольники $Q'BQ''$ и $C'BC$ — оба равнобедренные и имеют конгруэнтные углы между соответственно конгруэнтными сторонами, т. е. они подобны. Поэтому $|Q'Q''| : |CC'| = |BQ''| : |BC|$ или $2p : 2h_c = h_b : a$, откуда $p = \frac{h_b h_c}{a}$.

Но $h_b = \frac{2S_{\triangle ABC}}{b}$, $h_c = \frac{2S_{\triangle ABC}}{c}$, где

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}.$$

Таким образом,

$$2p = \frac{2h_b \cdot h_c}{a} = \frac{8 \cdot S^2_{\triangle ABC}}{abc} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{2abc}.$$

Пример 45. Докажем, что точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно его сторон, лежат на окружности ω, описанной около этого треугольника.

Решение. Пусть точки M_1, M_2, M_3 симметричны ортоцентру M относительно сторон треугольника ABC (рис. 40б). Тогда $\angle BM_1C \cong \angle BMC$, поскольку эти углы симметричны относительно прямой BC.

В зависимости от вида треугольника ABC надо рассмотреть три случая.

1) Треугольник ABC прямоугольный (рис. 40 а). Нетрудно видеть, что точка M — ортоцентр треугольника ABC — совпадает с вершиной A прямого угла. С вершиной A совпадают также точки M_2 и M_3, т. е. точки M_2 и M_3 лежат на окружности ω. А так как $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$, то и $\widehat{BM_1C} = \frac{\pi}{2}$, т. е. точка M_1 также лежит на окружности ω.

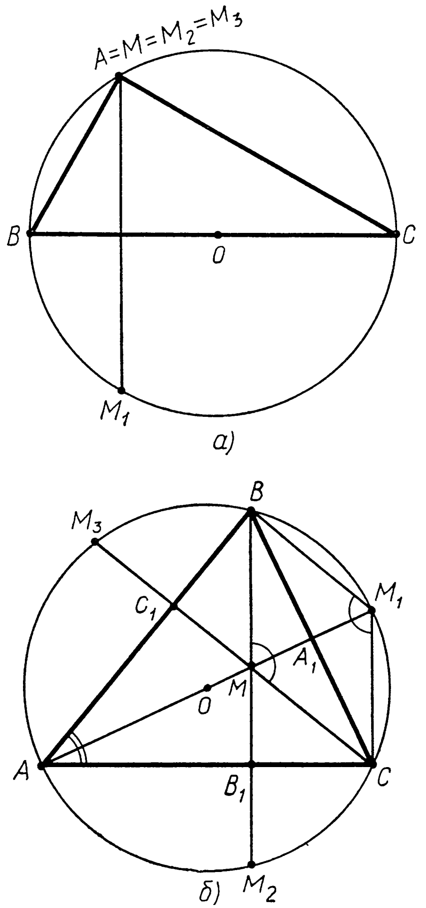


Рис. 40

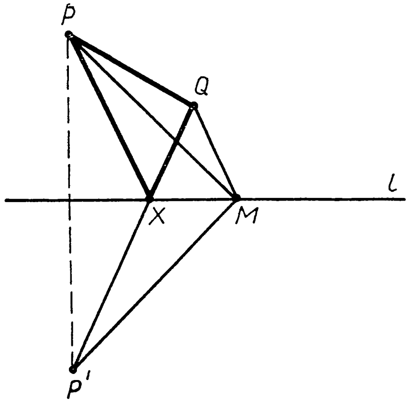


Рис. 41

2) Треугольник ABC остроугольный (рис. 40 б). Тогда так как стороны угла BMC перпендикулярны сторонам угла BAC, то либо величины этих углов равны, либо их сумма равна π. Ясно, что в данном случае $\widehat{BMC} \neq \widehat{BAC}$, так как в окружности ω они опираются на одну дугу, но вершина M первого из них — внутри окружности, а вершина A второго — на окружности. Тогда остается принять, что $\widehat{BMC} + \widehat{BAC} = \pi$, и поэтому $\widehat{BM_1C} + \widehat{BAC} = \pi$, т. е. точки A, B, C и M_1 лежат на одной окружности.

Аналогично доказывается, что на окружности ω лежат точки M_2 и M_3.

3) Треугольник ABC тупоугольный. Доказательство предоставляем читателю.

Пример 46. Даны прямая l и две точки P и Q по одну сторону от l. Найдем на прямой l такую точку X, чтобы периметр треугольника PQX был наименьшим.

Решение. *Анализ.* Пусть точка M — некоторая точка данной прямой l. Построим точку P', симметричную точке P относительно прямой l (рис. 41). Тогда так как $|P'M| = |PM|$, то периметр треугольника PQM равен: $|PQ| + |QM| + |MP| = |PQ| + |QM| + |MP'|$.

Отрезок PQ фиксированный, поэтому минимум периметра треугольника PQM достигается при минимуме суммы $|QM| + |MP'|$, т. е. тогда, когда точки Q, M и P' лежат на одной прямой. Итак, задачу можно свести к нахождению точки пересечения прямых l и QP', где $P' = S_l(P)$.

Построение. Строим точку $P' = S_l(P)$; проводим прямую QP' и находим точку $X = l \cap (QP')$.

Доказательство. Пусть M — некоторая точка прямой l, отличная от X. Так как $|QX| + |XP'| < |QM| + |MP'|$, то $|QX| + |XP| < |QM| + |MP|$, а значит, и $|QX| + |XP| + |PQ| < |QM| + |MP| + |PQ|$. Таким образом, точка X искомая.

Исследование. Если прямая PQ не перпендикулярна прямой l, то задача имеет единственное решение.

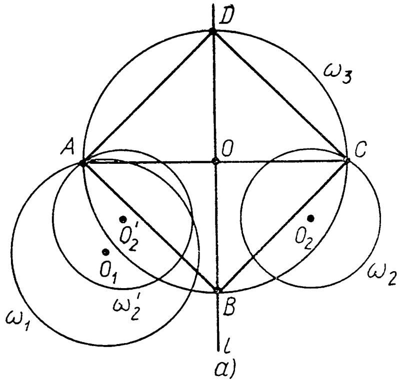
Если $(PQ) \perp l$, то решений нет.

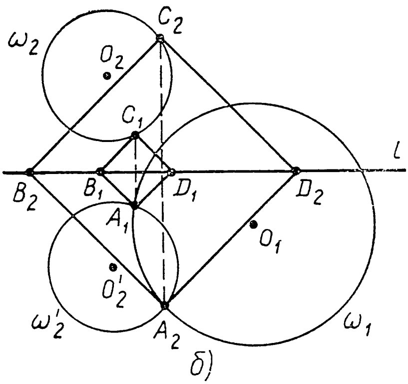
Пример 47. Построим квадрат, две противоположные вершины которого лежат на данной прямой l, а две другие — соответственно на данных окружностях ω_1 и ω_2.

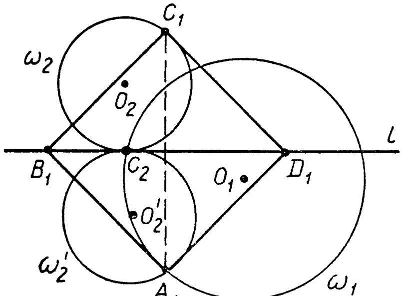
Р е ш е н и е. *Анализ.* Пусть $ABCD$— квадрат, удовлетворяющий условиям, а именно: вершина $A \in \omega_1$, вершина $C \in \omega_2$, вершины B и D лежат на прямой l (рис. 42 а). Построим окружность $\omega_2' = S_l(\omega_2)$. Так как диагональ BD квадрата является его осью симметрии, то вершина C квадрата отобразится на вершину A. Но вершина $C \in \omega_2$, и поэтому вершина $A \in \omega_2'$. Кроме того, вершина $A \in \omega_1$. Таким образом, $A = \omega_1 \cap \omega_2'$, а так как вершина A и ось симметрии l вполне определяют квадрат, то задачу можно свести к построению $A = \omega_1 \cap \omega_2'$.

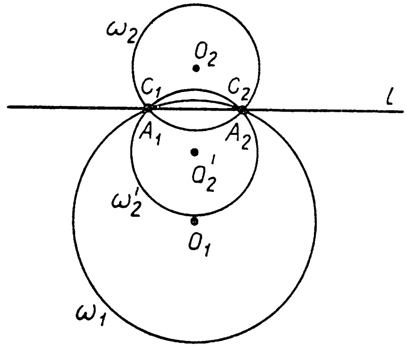
Построение. Строим окружность $\omega_2' = S_l(\omega_2)$, находим точку $A = \omega_1 \cap \omega_2'$, которую отображаем на точку $C = S_l(A)$. На $[AC]$ как на диаметре строим окружность ω_3 и находим точки $B = l \cap \omega_3$ и $D = l \cap \omega_3$.

Доказательство. Так как $(AC) \perp l$, то при симметрии относительно l прямая AC отображается на себя. Кроме того, окружность ω_2 симметрична









Р и с. 42

окружности ω_2'. Тогда точка $C \in \omega_2$. Далее, отрезок AC — диаметр окружности ω_3, точка $O = (AC) \cap l$ — центр окружности ω_3, поэтому $|OA| = |OB| = |OC| = |OD|$. Так как далее $|AC| = |BD|$, $(AC) \perp (BD)$, то $ABCD$ — квадрат. Итак, по построению $A \in \omega_1$, $D \in l$, $B \in l$, а по доказанному $C \in \omega_2$ и четырехугольник $ABCD$ — квадрат.

Таким образом, четырехугольник $ABCD$ удовлетворяет всем поставленным условиям, т. е. является искомым квадратом.

Исследование. При выбранном способе построения количество решений зависит от количества точек пересечения окружностей ω_1 и ω_2' и положения этих точек относительно (AC). Возможны следующие случаи:

1) если окружности ω_1 и ω_2' пересекаются, то задача либо имеет два решения (рис. 42 б), либо имеет одно решение (рис. 42 в), либо не имеет решений (рис. 42 г);

2) если окружности ω_1 и ω_2' касаются, то либо имеется одно решение, либо решений нет;

3) если окружности ω_1 и ω_2' не имеют общих точек, то решений нет;

4) если окружности ω_1 и ω_2' совпадают, то решений бесконечное множество.

(Иллюстрации для случаев 2, 3, 4 сделайте самостоятельно.)

Пример 48. Найдем формулы преобразования координат точек (в декартовой прямоугольной системе) при осевой симметрии относительно прямой l, заданной уравнением $2x + 4y + 5 = 0$.

Решение. *1-й способ.* Пусть при заданной симметрии точка $M\ (x;\ y)$ переходит в точку $M'\ (x';\ y')$. Тогда середина отрезка MM' — точка $C\left(\frac{x+x'}{2};\ \frac{y+y'}{2}\right)$ — будет лежать на оси симметрии, т. е. координаты точки C будут удовлетворять уравнению прямой l:

$$2\,\frac{x+x'}{2} + 4\,\frac{y+y'}{2} + 5 = 0$$

или

$$x' + 2y' = -x - 2y - 5. \tag{1}$$

Кроме того, векторы $\overrightarrow{MM'}\ (x' - x;\ y' - y)$ и $\vec{n} = (2;\ 4)$ коллинеарны (оба они перпендикулярны оси l), а значит, их соответственные координаты пропорциональны, т. е. $\frac{x'-x}{2} = \frac{y'-y}{4}$ или

$$2x' - y' = 2x - y. \tag{2}$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), найдем искомые формулы заданной симметрии:

$$x' = 0{,}6x - 0{,}8y - 1,$$
$$y' = -0{,}8x - 0{,}6y - 2.$$

2-й способ. Осевая симметрия является движением второго рода. Поэтому искомые формулы имеют вид:

$$x' = ax + вy + c,$$
$$y' = bx - ay + d,$$

где $a^2 + b^2 = 1$. Для двойной точки выполняются равенства: $x' = x$, $y' = y$, поэтому $x = ax + by + c$, $y = bx - ay + d$ или

$$(a - 1)\,x + by + c = 0, \qquad (3)$$
$$bx + (-a - 1)\,y + d = 0. \qquad (4)$$

Поскольку при осевой симметрии существует бесконечное множество двойных точек и все они лежат на оси симметрии, то соответствующие коэффициенты уравнения (3) и уравнения оси l, а также уравнения (4) и уравнения оси l должны быть пропорциональны, т. е.:

$$\begin{cases} \dfrac{a-1}{2} = \dfrac{b}{4} = \dfrac{c}{5}, \\ \dfrac{b}{2} = \dfrac{-a-1}{4} = \dfrac{d}{5}. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, находим: $a = 0{,}6$; $b = -0{,}8$; $c = -1$; $d = -2$. Тогда искомые формулы заданной симметрии будут:

$$x' = 0{,}6x - 0{,}8y - 1,$$
$$y' = -0{,}8x - 0{,}6y - 2.$$

Задачи

166. Имеют ли центры симметрии следующие фигуры:
а) правильный n-угольник;
б) параллелограмм;
в) трапеция;
г) синусоида;
д) парабола?

167. Сколько центров симметрии имеет фигура, образованная тремя различными прямыми одной плоскости? (Рассмотреть все возможные случаи расположения данных прямых.)

168. Сколько осей симметрии имеет:
а) правильный n-угольник;
б) прямоугольник;
в) параллелограмм;
г) фигура, состоящая из двух окружностей на плоскости;
д) фигура, состоящая из трех прямых на плоскости?

169. Докажите, что если плоская фигура имеет две оси симметрии l_1 и l_2, то и прямая l_3, симметричная l_1 относительно l_2, также является осью симметрии этой фигуры.

Используя это утверждение, определите, каково наименьшее число осей симметрии у фигуры, две оси симметрии которой образуют угол: а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{4\pi}{9}$; в) 1 (радиан).

170. Является ли группой:

а) множество центральных симметрий плоскости;

б) множество параллельных переносов и центральных симметрий плоскости;

в) множество осевых симметрий плоскости?

171. На плоскости даны четыре точки: A, B, C, D. Найдите произведение симметрий с центрами в этих точках. При каком расположении точек A, B, C, D это произведение будет тождественным преобразованием?

172. На плоскости даны точки O_1, O_2, O_3, O_4, O_5. По данной точке A строится последовательно точка A_1, симметричная A относительно O_1, затем точка A_2, симметричная A_1 относительно O_2, и т. д. Докажите, что середина отрезка AA_5, где A_5 — точка, в которую переходит A после указанных симметрий, не зависит от выбора точки A.

173. Найдите множества перемещений первого и второго рода, каждое из которых отображает на себя:

а) данный ромб;

б) данный квадрат;

в) данный равносторонний треугольник.

Какие из полученных множеств преобразований образуют группу?

174. Центр прямоугольника со сторонами a и b совпадает с началом координат, а стороны его параллельны осям координат. Найдите формулы тех перемещений, которые отображают данный прямоугольник на себя.

175. Известны координаты концов A (1; 3), B (2; 0) и A' (—3; 3), B' (0; 4) двух конгруэнтных отрезков AB и $A'B'$. Найдите аналитическое задание тех перемещений, которые отображают отрезок AB на отрезок $A'B'$. Установите вид каждого из этих перемещений.

176. Докажите, что композиция центральной симметрии с центром O и осевой симметрии с осью l, проходящей через точку O, есть осевая симметрия. Найдите ось этой симметрии. (Решите задачу аналитически и синтетически.)

177. Найдите формулы композиций $S_0 \circ T$ и $T \circ S_0$. Сравните эти композиции, установите их вид в каждом из следующих случаев:

а) осью симметрии является прямая, заданная уравнением $x - y = 0$, а параллельным переносом — вектор $\vec{v} = (1; -1)$;

б) осью симметрии является ось Ox, а параллельным переносом — вектор $\vec{v} = (3; 7)$.

178. Покажите, что преобразование, заданное в декартовых прямоугольных координатах формулами:

$$x' = x + 3,$$

$$y' = -y + 4,$$

является перемещением второго рода. Найдите формулы осевой симметрии и параллельного переноса, композиция которых является заданным перемещением второго рода.

179. Две окружности равных радиусов касаются внешним образом в точке K. В одной из них проведена хорда AK, а в другой — хорда BK и $[BK] \perp [AK]$. Докажите, что прямая AB параллельна линии центров.

180. Докажите, что если диагональ четырехугольника является биссектрисой его угла и делит пополам периметр четырехугольника, то она рассекает четырехугольник на два конгруэнтных треугольника.

181. Дан равнобедренный треугольник ABC, где величина угла B при вершине равна $\frac{2\pi}{g}$, $[BD]$ — высота треугольника. Найдите на сторонах AB и BC соответственно такие точки E и F, чтобы периметр треугольника DEF был минимальным. Найдите величину угла EDF этого треугольника.

182. Постройте треугольник по двум сторонам и разности противолежащих им углов.

183. В четырехугольниках $ABCD$ и $A'B'C'D'$ сходственные стороны конгруэнтны, а диагонали AC и $A'C'$ являются биссектрисами углов A и A'. Докажите, что если $[AB] \cong [AD]$, то эти четырехугольники конгруэнтны.

184. Докажите, что если в четырехугольнике сумма длин средних линий равна половине его периметра, то такой четырехугольник является параллелограммом.

185. Постройте четырехугольник $ABCD$, зная длины его сторон, если известно, что диагональ AC является биссектрисой угла A.

186. Постройте треугольник наименьшего периметра, одна вершина которого находится в данной точке M, а две другие вершины лежат на сторонах данного острого угла ABC.

187. Даны прямая MN и окружности α и β, лежащие по одну сторону от нее. На прямой MN найдите такую точку, чтобы касательные, проведенные из этой точки к окружностям α и β, образовывали с (MN) равные по величине углы.

188. Даны прямая MN и точки A и B по разные стороны от нее. Через точки A и B проведите две прямые так, чтобы угол между ними делился данной прямой MN пополам.

§ 4. Подобие

Литература: [1], § 31—32; [3], § 29; [4], § 49—50, § 52; [8], § 3.

Пример 49. Две окружности ω и ω_1 касаются внутренним образом в точке A. Через произвольную точку K внутренней окружности проведена касательная. Отрезок касательной, заключен-

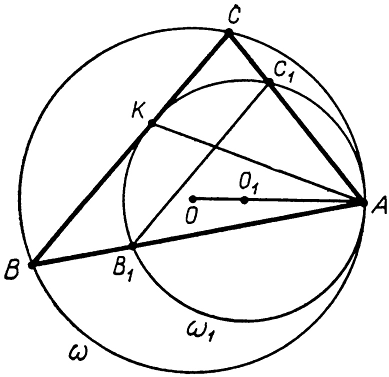


Рис. 43

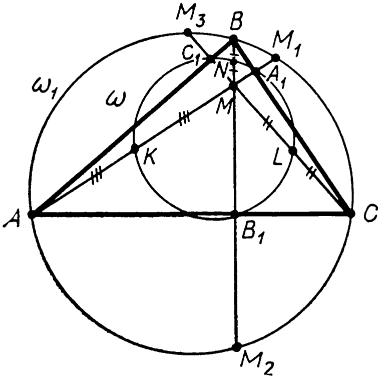


Рис. 44

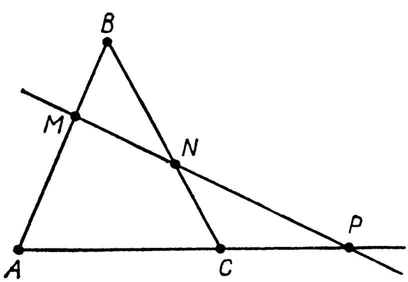


Рис. 45

ный внутри внешней окружности, делится точкой K на два отрезка: BK и CK. Докажем, что $\widehat{CAK}=\widehat{BAK}$.

Решение. Рассмотрим гомотетию $H_A(O)=O_1$ (рис. 43). Тогда по свойствам гомотетии $H_A(\omega)=\omega_1$. Пусть $H_A(B)=B_1$, $H_A(C)=C_1$. Точки B_1 и C_1 лежат соответственно на пересечении прямых AB и AC с окружностью ω_1. Далее, так как $[B_1C_1]=H_A([BC])$, то $[BC]\parallel[B_1C_1]$ и поэтому точка K делит дугу B_1KC_1 пополам. А так как $\smile B_1K\cong\smile KC_1$, то $\widehat{C_1AK}=\widehat{B_1AK}$, или $\widehat{CAK}=\widehat{BAK}$, что и требовалось доказать.

Пример 50. Докажем, что окружность ω, проходящая через основания высот остроугольного треугольника, делит пополам отрезки высот, заключенные между вершинами и ортоцентром.

Решение. Как доказано в примере 45, точки M_1, M_2, M_3, симметричные ортоцентру M треугольника ABC относительно его сторон, лежат на окружности ω_1, описанной около треугольника ABC (рис. 44). Рассмотрим гомотетию $H_{\text{м}}^{\frac{1}{2}}$. Ясно, что $H_{\text{м}}^{\frac{1}{2}}(M_1)=A_1$, $H_{\text{м}}^{\frac{1}{2}}(M_2)=B_1$ и $H_{\text{м}}^{\frac{1}{2}}(M_3)=C_1$, поэтому $H_{\text{м}}^{\frac{1}{2}}(\omega_1)=\omega$.

Далее $H_{\text{м}}^{\frac{1}{2}}(A)=K$, где точка K — середина $[AM]$. Но точка $A\in\omega_1$, поэтому точка $K\in\omega$, т. е. окружность ω делит $[AM]$ пополам. Точно так же доказывается, что окружность ω делит $[BM]$ и $[CM]$ пополам.

Пример 51 (теорема Менелая). Пусть M, N и P — точки, лежащие соответственно на сторонах AB, BC, CA треугольника ABC (или на их продолжениях) и отличные от вершин треугольника (рис. 45). Докажем, что точки M, N и P лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{BM}} \cdot \frac{\overrightarrow{BN}}{\overrightarrow{CN}} \cdot \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{AP}} = 1.$$

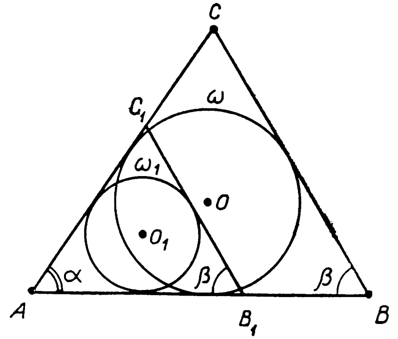


Рис. 46

Решение. Рассмотрим три гомотетии:

$$H_M^{k_1}, \text{ где } k_1 = \overrightarrow{AM} : \overrightarrow{BM},$$

$$H_N^{k_2}, \text{ где } k_2 = \overrightarrow{BN} : \overrightarrow{CN},$$

$$H_P^{k_3}, \text{ где } k_3 = \overrightarrow{CP} : \overrightarrow{AP}.$$

Ясно, что $k_1 \neq 1$, $k_2 \neq 1$, $k_3 \neq 1$. По определению введенных гомотетий $H_M^{k_1}(B) = A$, $H_N^{k_2}(C) = B$, $H_P^{k_3}(A) = C$.

Необходимость. Пусть точки M, N и P лежат на одной прямой. Рассмотрим композицию гомотетий $H_M^{k_1}$, $H_N^{k_2}$, $H_P^{k_3}$. И пусть $H_P^{k_3}(H_N^{k_2}(H_M^{k_1}(A))) = A$, если $k = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \neq 1$, то композиция этих трех гомотетий — гомотетия с центром в точке A и коэффициентом k, т. е. H_A^k. Но тогда центр A гомотетии H_A^k должен лежать на прямой MP, т. е. не в точке A. Полученное противоречие показывает, что $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = 1$.

Достаточность. Пусть $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = 1$. Тогда H_A^k — тождественное преобразование. Но $H_A^k = H_P^{k_3} \circ H_N^{k_2} \circ H_M^{k_1}$, откуда $H_P^{k_3}$ — гомотетия, обратная композиции $H_N^{k_2} \circ H_M^{k_2}$, поэтому центр гомотетии $H_P^{k_3}$ — точка P — лежит на прямой MN, соединяющей центры гомотетий $H_N^{k_2}$ и $H_M^{k_1}$.

Пример 52. Построим треугольник по двум данным его углам α и β и радиусу вписанной окружности r.

Решение. *Анализ.* Пусть треугольник ABC построен, $\widehat{CAB} = \alpha$, $\widehat{CBA} = \beta$ и $\omega = (O, r)$ — вписанная в него окружность (рис. 46). Соединим точку O с вершиной A и на прямой OA выберем некоторую точку O_1 (отличную от точек A и O). Построим окружность $\omega_1 = (O_1, r_1)$, касающуюся сторон AB и AC треугольника ABC. При гомотетии H_A^k, где $k = r_1 : r$, окружность ω отображается на окружность ω_1, а касательная BC к окружности ω — на касательную B_1C_1 к окружности ω_1, причем по свойствам гомотетии $(B_1C_1) \parallel (BC)$, поэтому $\widehat{C_1B_1A} = \widehat{CBA} = \beta$.

Итак, построив треугольник AB_1C_1 с заданными углами и выполнив гомотетию $H_A^{\frac{1}{k}}$, мы сможем найти треугольник ABC, т. е. задачу можно свести к построению треугольника $AB_1C_1 = H_A^k(ABC)$.

Построение. Строим $\triangle AB_1C_1$ по стороне AB_1 (задавая ее произвольно) и двум углам: $\widehat{C_1AB_1} = \alpha$, $\widehat{C_1B_1A} = \beta$. Находим точку O_1— центр окружности ω_1, вписанной в $\triangle AB_1C_1$. Пусть r_1 — радиус окружности ω_1. Выполним гомотетию $H_A^{\frac{1}{k}}$, где $\frac{1}{k} = r : r_1$.

Тогда $H_A^{\frac{1}{k}}(B_1) = B$, $H_A^{\frac{1}{k}}(C_1) = C$. Получим треугольник ABC.

Доказательство. По построению $H_A^{\frac{1}{k}}(\triangle AB_1C_1) = \triangle ABC$, поэтому $\widehat{CAB} = \alpha$ и $\widehat{CBA} = \beta$. Так как коэффициент гомотетии $H_A^{\frac{1}{k}}$ есть $\frac{1}{k} = r : r_1$, то радиус окружности ω (в которую преобразуется окружность ω_1) равен r. Наконец, по построению окружность ω_1 вписана в треугольник AB_1C_1, а тогда по свойствам гомотетии окружность ω вписана в треугольник ABC. Таким образом, треугольник ABC удовлетворяет всем заданным условиям, т. е. является искомым.

Исследование. При выбранном способе построения количество решений зависит от существования треугольника, два угла которого равны по величине соответственно α и β. А именно, если можно построить хотя бы один треугольник AB_1C_1 с углами α, β, то решение — треугольник ABC — одно. Но для построения треугольника AB_1C_1 достаточно условия $\alpha + \beta < \pi$. Итак, если $\alpha + \beta < \pi$, то решение одно, если $\alpha + \beta \geqslant \pi$, то решений нет.

Пример 53. В данный треугольник ABC впишем квадрат, две вершины которого лежат на стороне AC, а две другие — соответственно на сторонах AB и BC.

Решение. *Анализ.* Пусть $DEFM$ — искомый квадрат $D \in [AB]$, $E \in [BC]$, $F \in [AC]$, $M \in [AC]$ (рис. 47). Выберем на прямой AE произвольно точку E', отличную от точек A и E, и, приняв $k = |AE| : |AE'|$ за коэффициент гомотетии, построим $D'E'F'M' = H_A^k(DEFM)$. Тогда $D'E'F'M'$—квадрат, причем $D' \in (AB)$, $F' \in (AC)$ и $M' \in (AC)$. Так как квадрат $D'E'F'M'$ построить нетрудно, то задачу можно свести к построению квадрата $D'E'F'M'$ и к выполнению затем гомотетии $H_A^{\frac{1}{k}}$.

Построение. Выбираем произвольную точку $D' \in (AB)$. Опускаем перпендикуляр $D'M'$ на сторону AC. Откладываем на прямой AC отрезок $M'F'$, такой, что $|M'F'| = |D'M'|$ (точка M' между точками A и F'), и находим точку $E' = (E'F') \cap (E'D')$, где $(E'F') \perp (M'F')$, $(E'D') \perp \perp (D'M')$. Проводим прямую AE' и находим точку $E = (AE') \cap (BC)$. Строим $DEFM = H_A^{\frac{1}{k}} (D'E'F'M')$.

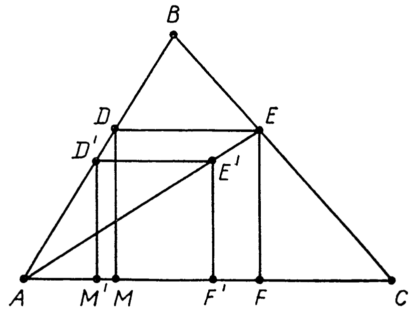


Рис. 47

Доказательство. По построению $D'E'F'M'$ — квадрат. Но четырехугольник $D'E'F'M'$ гомотетичен квадрату $DEFM$, т. е. также является квадратом, причем так как расположение его вершин удовлетворяет условиям задачи, то он является искомым.

Исследование. Задача имеет единственное решение, если один из углов, прилежащих к стороне AC треугольника, острый, а другой не более прямого.

Задачи

189. Постройте образ данного прямоугольника и описанной около него окружности:

а) при гомотетии с центром, лежащим на окружности и отличным от вершин прямоугольника, и коэффициентом $k = 0{,}5$;

б) при гомотетии с центром, лежащим на стороне прямоугольника, и коэффициентом $k = -2$.

190. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, такой, что $(AB) \nparallel (CD)$. Постройте его образ при гомотетии с центром в точке $S = (AB) \cap (CD)$, преобразующей точку E в точку $E' \in (BC)$.

191. Сколько существует гомотетий, преобразующих:

а) одну данную точку в другую данную точку;

б) одну данную прямую в другую данную прямую;

в) один данный угол в другой данный угол, если стороны этих углов соответственно параллельны и сонаправлены?

192. Сколько существует гомотетий, преобразующих одну данную окружность в другую данную окружность?

193. Через точку K касания двух окружностей проведены две прямые, пересекающие первую окружность в точках A и C, вторую — в точках B и D. Докажите, что точки A, B, C и D являются вершинами трапеции.

194. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC проведены диагонали, которые пересекаются в точке O. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AOD и BOC, касаются, а окружности, описанные около треугольников AOB и COD, пересекаются.

195. В треугольнике через середины сторон проведены прямые, параллельные биссектрисам противоположных углов. Докажите, что эти три прямые пересекаются в точке, лежащей на одной прямой, проходящей через центроид данного треугольника и точку пересечения его биссектрис.

196. Докажите, что окружность, проходящая через основания высот непрямоугольного треугольника, проходит и через середины сторон треугольника.

197. Около остроугольного треугольника описана окружность. В точках пересечения этой окружности с продолжениями высот треугольника восставлены перпендикуляры к высотам. Докажите, что точки пересечения этих прямых, центроид данного треугольника и точка пересечения его биссектрис лежат на одной прямой.

198. Две внешние касательные к окружностям ω_1 и ω_2 пересекаются в точке A. Окружность ω касается окружностей ω_1 и ω_2 внешним образом соответственно в точках B и C. Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой.

199. Докажите, что композиция двух гомотетий с двумя различными центрами и взаимно обратными коэффициентами является либо параллельным переносом, либо тождественным преобразованием.

200. Докажите, что композиция осевой симметрии с осью l и гомотетии с центром S коммутативна тогда и только тогда, когда $S \in l$.

201. Постройте треугольник по данным отношениям длин его сторон $a : b : c$ и длине биссектрисы β_a угла A.

202. Постройте треугольник по данному углу B, длине высоты h_b и отношению длин отрезков, на которые сторона b делится высотой.

203. В данный угол AOB впишите окружность, проходящую через данную точку M.

204. Постройте равнобедренный треугольник, зная угол при его вершине и сумму длин основания и высоты.

205. Впишите квадрат в данный круговой сегмент.

206. В данную окружность впишите трапецию, подобную данной равнобедренной трапеции.

207. Найдите формулу, выражающую радиус вневписанной окружности через длины сторон данного треугольника.

§ 5. Инверсия

Литература: [1], гл. III, § 33; [3], § 32; [4], § 51—52; [8], § 5.

Пример 54. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω. Существует ли инверсия, переводящая вершины данного четырехугольника в вершины этого же четырехугольника, но ни одну из вершин не переводящая в себя?

Решение (рис. 48). 1) Если при некоторой инверсии точка A отображается на точку C, а точка B на точку D (или точка D на точку B), то центром этой инверсии должна быть точка $O_1 = (AC) \cap (BD)$, однако точки A и C лежат по разные стороны от точки O_1, т. е. такой инверсии, которая отображает точку A на точку C, не существует.

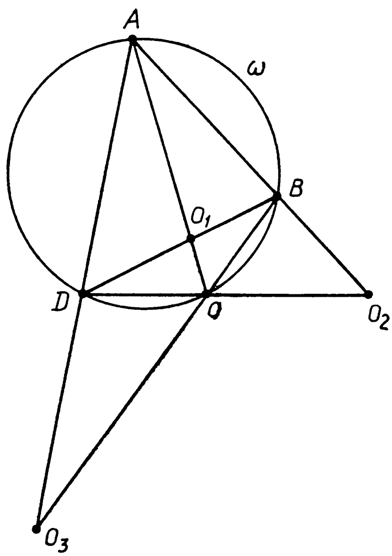


Рис. 48

2) Если некоторая инверсия отображает точку A на точку B, а точку C на точку D (или точку D на точку C), то центром этой инверсии является точка $O_2 = (AB) \cap (CD)$. В этом случае имеет место равенство: $|AO_2| \cdot |BO_2| = |CO_2| \cdot |DO_2|$, т. е. окружность с центром в точке O_2 и радиусом $r = \sqrt{|AO_2| \cdot |BO_2|}$ будет окружностью искомой инверсии. Таким образом, если существует точка $O_2 = (AB) \cap (CD)$, то существует и требуемая инверсия.

3) Аналогично инверсия, отображающая точку A на точку D, а точку B на точку C (или точку C на точку B), существует, если прямые AD и BC пересекаются.

Итак, если в четырехугольнике $ABCD$ $(AB) \nparallel (CD)$ и $(AD) \nparallel (BC)$, то существуют две инверсии, переводящие вершины данного четырехугольника в вершины этого же четырехугольника, но ни одну из вершин не переводящие в себя. Если четырехугольник $ABCD$ — трапеция, то существует одна требуемая инверсия. Если четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник, то требуемой инверсии не существует.

Пример 55. Дана равнобочная трапеция $ABCD$. На ее основании AD взята точка M. Через тройки точек A, B, M и C, D, M проведены соответственно окружности ω_1 и ω_2. Пусть точка N — вторая точка пересечения этих окружностей и $E = (AB) \cap (CD)$. Докажем, что:

1) точки M, N и E лежат на одной прямой;

2) точки N, B, C и точка E лежат на одной окружности.

Решение. 1) Рассмотрим инверсию с центром в точке E и степенью $r^2 = |AE| \cdot |BE| = |DE| \cdot |CE|$ (рис. 49). В этой инверсии точки A и D будут отображаться соответственно на точки B и C. Пусть M' — образ точки M при данной инверсии. Так как две пары инверсных точек лежат на одной окружности, то окружность ω_1, проходящая через точки A, B и M, пройдет и через точку

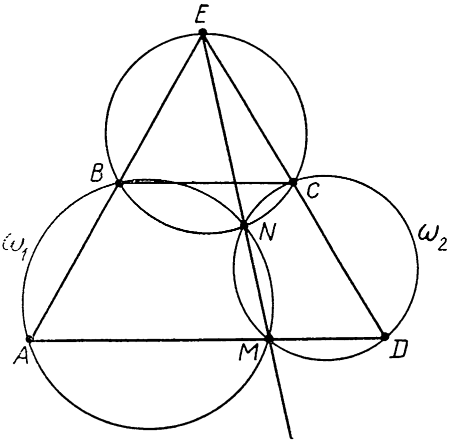


Рис. 49

M'. Аналогично окружность ω_2, проходящая через точки C, D и M, пройдет и через точку M'. По условию окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках M и N, а по доказанному эти окружности пересекаются в точках M и M'. Таким образом, $M' = N$, т. е. точка N инверсна точке M, а значит, точки M, N и центр инверсии E лежат на одной прямой.

2) Так как точки A, M и D лежат на одной прямой, не проходящей через центр E инверсии, то их образы — точки B, N и C — лежат на образе этой прямой, т. е. на окружности, проходящей через центр инверсии E.

Пример 56. Построим окружность, касающуюся трех данных окружностей, проходящих через одну точку.

Решение. *Анализ.* Пусть α, β и γ — данные окружности, проходящие через точку M, причем каждая из этих окружностей пересекает две другие (рис. 50); δ — искомая окружность, касающаяся окружностей α, β и γ. Примем точку M за центр инверсии и построим ω — окружность инверсии с центром в точке M и произвольным радиусом. Данные окружности α, β и γ проходят через центр инверсии, поэтому они преобразуются в прямые α', β' и γ', не проходящие через центр инверсии. Окружность δ не проходит через центр инверсии, поэтому она преобразуется в окружность δ', также не проходящую через центр инверсии. Так как окружность δ касается данных окружностей α, β и γ, то окружность δ касается прямых α', β' и γ'. Таким образом, задача может быть сведена к более простой: построить окружность δ', касающуюся трех прямых α', β', γ'. После этого искомая окружность δ получается инверсией окружности δ'.

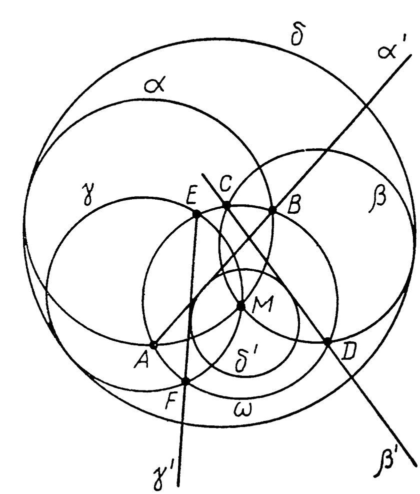


Рис. 50

Построение (рис. 50). Строим ω — окружность инверсии с центром в точке M; радиус окружности ω для упрощения дальнейших построений выберем таким, чтобы окружность ω пересекала все три данные окружности (можно положить этот радиус равным половине наименьшего из радиусов окружностей α, β, γ). Находим пары точек пересечения данных окружностей и окружности инверсии; проводим через каждую такую пару точек пересечения прямую — образ соответствующей окружности. Затем строим окружность δ', касающуюся полученных прямых, и находим окружность δ — образ окружности δ' при инверсии.

Доказательство. Так как по построению окружность δ' касается прямых, α', β' и γ', то окружность δ касается окружностей α, β и γ, т. е. является искомой.

Исследование.

1) Пусть каждая из окружностей α, β и γ пересекает две другие (случай, который предусматривался при проведении анализа). Тогда каждая из прямых α', β' и γ' пересекает две другие прямые (рис. 51). В этом случае существуют четыре окружности δ_1', δ_2', δ_3' и δ_4', касающиеся прямых α', β' и γ' (одна — вписанная в треугольник, образованный этими прямыми, а три другие — вневписанные).

Поэтому существуют

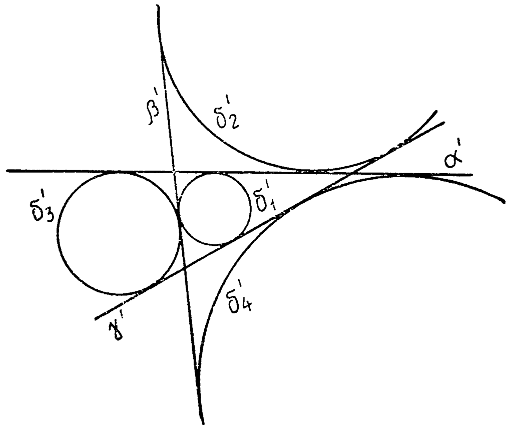


Рис. 51

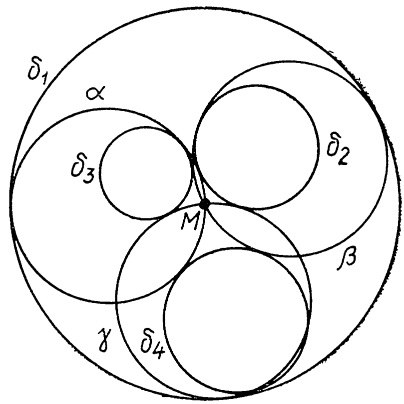


Рис. 52

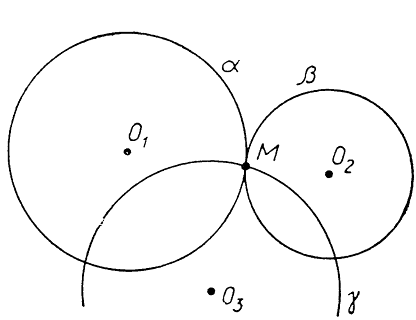


Рис. 53

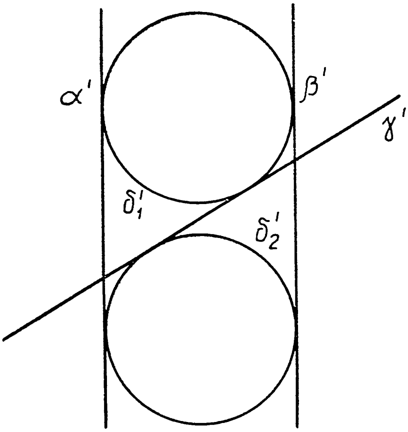


Рис. 54

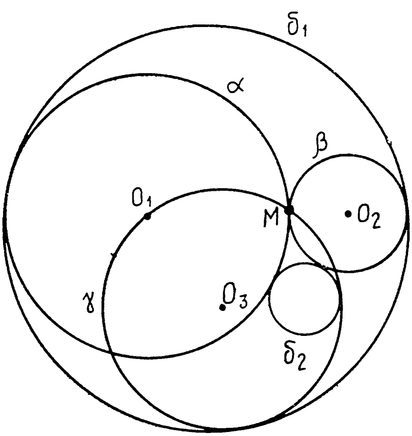


Рис. 55

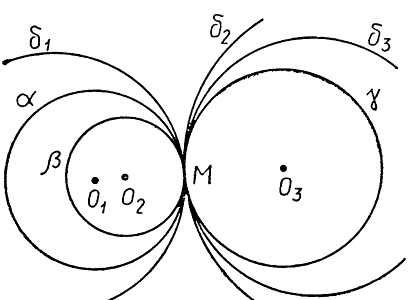


Рис. 56

четыре окружности δ_1, δ_2, δ_3 и δ_4, каждая из которых касается данных окружностей α, β и γ (рис. 52).

2) Пусть две из данных окружностей, например α и β, касаются в точке M внутренним или внешним образом, а третья окружность γ пересекает каждую из них (рис. 53). Тогда инверсия с центром в точке M переводит окружности α и β в параллельные прямые α' и β', а окружность γ — в прямую γ', пересекающую α' и β'. В этом случае существуют две окружности δ_1' и δ_2', каждая из которых касается прямых α', β' и γ' (рис. 54). Тогда существуют две окружности δ_1 и δ_2, касающиеся данных окружностей α, β и γ (рис. 55).

3) Пусть все три данные окружности касаются в точке M (рис. 56). Инверсия с центром M переводит их в параллельные прямые, но окружности, касающейся параллельных прямых, не существует. Однако и в этом случае задача имеет решение, более того, в этом случае имеется бесчисленное множество решений: любая окружность с центром на линии центров данных окружностей, проходящая через точку M, удовлетворяет условиям задачи.

Задачи

208. Дан квадрат, две вершины которого лежат на окружности инверсии, а третья — в центре инверсии. Постройте образ квадрата при этой инверсии.

209. Постройте образ треугольника при инверсии, если этот треугольник описан около окружности инверсии.

210. Одна сторона треугольника является хордой окружности инверсии, а две другие — касательные к ней. Найдите образ треугольника при этой инверсии.

211. Даны окружности ω_1 и ω_2, касающиеся друг друга в точке M. Приняв точку M за центр инверсии, постройте образ данной фигуры.

212. Существует ли инверсия, при которой:

1) одна данная окружность отображается на другую данную окружность;

2) данная прямая отображается на данную окружность;

3) данная окружность отображается на себя и одновременно данная прямая отображается на себя?

213. Точки A, B, C, D лежат на одной прямой, а отрезок CD принят за диаметр окружности инверсии. Докажите, что если точки A и B отображаются друг на друга при этой инверсии, то точки C и D отображаются друг на друга при инверсии относительно окружности с диаметром AB.

214. Докажите, что если окружность ω является окружностью Аполлония* для точек A и B, то точки A и B отображаются друг на друга при инверсии относительно окружности ω. Сформулируйте и докажите обратное предложение.

215. Даны три точки, лежащие на одной прямой. Найдите на этой прямой такую четвертую точку, что инверсия с центром в этой точке переводит три данные точки в три такие точки, из которых одна делит пополам отрезок, образованный двумя другими.

216. Даны непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2. Окружность ω пересекает каждую из них под прямым углом. Центры окружностей ω_1 и ω_2 лежат на луче l с началом в центре окружности ω. Докажите, что при инверсии, центром которой является точка пересечения окружности ω с лучом l, окружности ω_1 и ω_2 отображаются на концентрические окружности.

217. Докажите, что композиция двух инверсий с одним центром является гомотетией.

218. Докажите, что окружность, проходящая через точки A и A', соответственные при инверсии относительно окружности ω, ортогональна окружности ω.

219. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ взята точка M, из которой диагональ AC видна под углом, конгруэнтным углу BAD. Точка M лежит между центром параллелограмма и точкой B. Докажите, что окружность, построенная на $[AC]$ как на диаметре, перпендикулярна любой окружности, проходящей через точки M и B.

220. Окружности $\omega_1 = (O_1, r_1)$ и $\omega_2 = (O_2, r_2)$ не имеют общих

---

* Окружность Аполлония для точек A и B и некоторого числа μ — это множество таких точек P, что $|BP| = \mu\,|AP|$.

точек. Окружность ω_3 касается окружностей ω_1 и ω_2 соответственно в точках A_1 и A_2 внешним образом. Докажите, что точки A_1, A_2 и точки B_1 и B_2 пересечения прямой O_1O_2 соответственно с окружностями ω_1 и ω_2 лежат на одной окружности.

221. Через данную точку A проведите окружность, касающуюся двух данных окружностей α и β.

222. Через данные точки A и B проведите окружность, касающуюся данной окружности ω.

223. Через данную точку P проведите окружность, касающуюся данной прямой l и данной окружности ω.

224. Через данные точки A и B проведите окружность, пересекающую данную прямую l под углом, конгруэнтным данному углу.

225. Через данные точки A и B проведите окружность, перпендикулярную данной окружности.

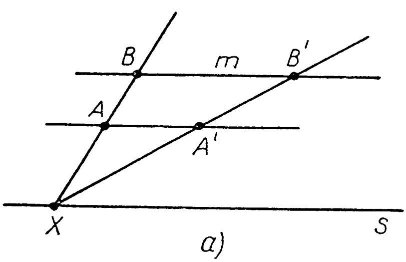
§ 6. Перспективно-аффинное преобразование (преобразование родства)

Литература: [3], гл. IV; [5], § 1—2.

Пример 57. Перспективно-аффинное преобразование задано осью s и парой точек: A и ее образом A', причем $(AA') \parallel s$. Построим образ данной точки B, если:

а) точка B не лежит на прямой AA';

б) точка B совпадает с точкой A'.



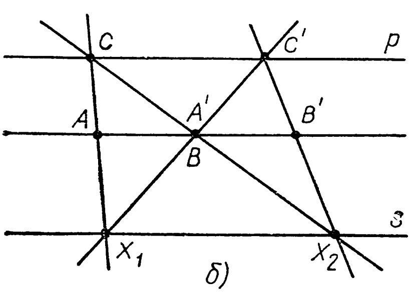


Рис. 57

Решение. Так как при заданном перспективно-аффинном преобразовании $(AA') \parallel s$, то это преобразование является сдвигом.

а) Для построения точки B' — образа данной точки B — достаточно выполнить следующие построения (рис. 57 а): провести прямую AB, найти точку X — точку пересечения (AB) с прямой s; провести прямую $A'X$, затем через точку B провести прямую m, параллельную (AA'). Точка $B' = m \cap (A'X)$ является искомой.

б) Здесь можно выполнить построение следующим образом. Взять вспомогательную точку C (рис. 57 б), не лежащую на прямой AA', и построить ее образ C' (как в случае a)).

Теперь у нас есть пара точек: C и ее образ C', причем так как точка B не лежит на прямой CC', то опять применимо предыдущее построение. Выполнив его для точки B и пары точек C', C, мы получим точку B' — образ точки B.

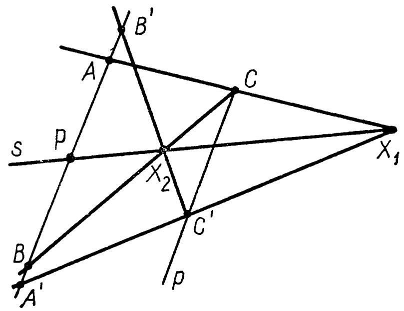


Рис. 58

Пример 58. Перспективно-аффинное преобразование задано осью s и парой точек: A и ее образом A', причем $(AA') \nparallel s$. Построим образ данной точки B, лежащей на прямой AA'.

Решение. Как и в примере 57 (б), выберем некоторую точку C, не лежащую на прямой AA'. Пользуясь теперь точкой A и ее образом A', построим точку C' — образ точки C. Затем воспользуемся точками C и C' для построения искомой точки B' (рис. 58).

Пример 59. Перспективно-аффинное преобразование задано осью s и парой точек: A и ее образом A', причем $(AA') \nparallel s$. Найдите условие, при выполнении которого образ A'' точки A' совпадает с точкой A.

Решение. Найдем сначала точку B', соответственную некоторой вспомогательной точке B, не лежащей на прямой AA' (построения см. в примере 57 (а)). Затем, пользуясь парой точек B и B' как парой соответственных точек, найдем точку A'', соответственную точке A'. Обозначим теперь через P точку пересечения прямой AA' с осью s (рис. 58). Так как точка P является неподвижной точкой преобразования, то отрезку AP соответствует отрезок $A'P$ и отрезку $A'P$ соответствует отрезок $A''P$. При перспективно-аффинном преобразовании отношение длин параллельных отрезков сохраняется, поэтому $|AP| : |A'P| = |A'P| : |A''P|$, или $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{A'P} = \overrightarrow{A'P} : \overrightarrow{A''P}$, откуда в случае $A'' = A$ получаем: $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{A'P} = \overrightarrow{A'P} : \overrightarrow{AP}$ или $\left(\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{A'P}}\right)^2 = 1$, т.е. $(AA'P) = \pm 1$ ($(AA'P)$— простое отношение трех точек, т. е. отношение $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{A'P}$).
Но на прямой AA' не существует точки P, такой, что $(AA'P) = 1$*. Тогда остается $(AA'P) = -1$, откуда следует, что точка P является

* Действительно, если $(AA'P) = 1$, то $\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{A'P}} = 1$, или $\dfrac{\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'P}}{\overrightarrow{A'P}} = 1$, т. е. $\dfrac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{A'P}} + 1 = 1$, и поэтому $\dfrac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{A'P}} = 0$, откуда следует, что $A \equiv A'$, а это противоречит условию.

серединой отрезка AA'. Но из $(AA'P) = -1$ следует, что $\overrightarrow{AP}:\overrightarrow{A'P} = -1$, или $\dfrac{\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'P}}{\overrightarrow{A'P}} = -1$, т. е. $\overrightarrow{AA'} = -2\overrightarrow{A'P}$, откуда $\overrightarrow{A'P} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A}$. Итак, если $A'' = A$, то точка P — середина отрезка AA'.

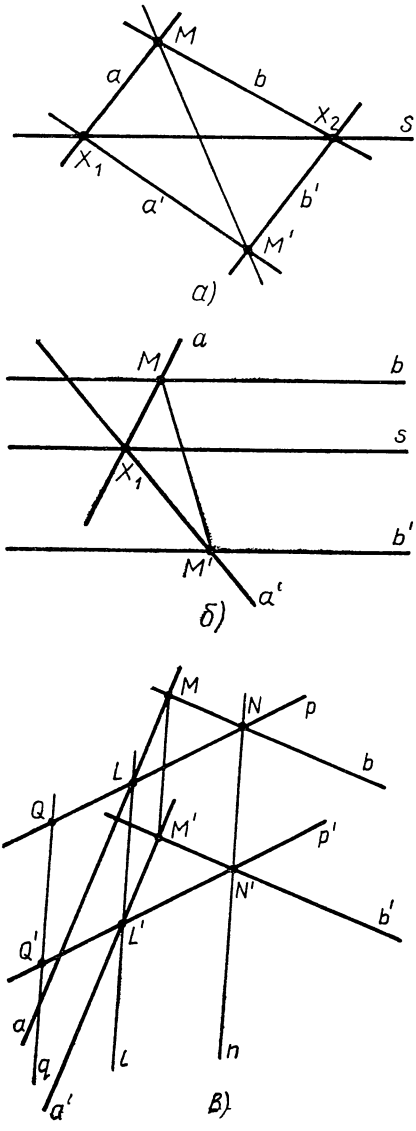


Рис. 59

Справедливо и обратное утверждение: если точка P является серединой отрезка AA', то $A'' = A$.

П р и м е р 60. Докажем, что перспективно-аффинное преобразование вполне определяется заданием двух пересекающихся прямых a и b и их образов a' и b', если точки $M = a \cap b$ и $M' = a' \cap b'$ не совпадают.

Р е ш е н и е. При перспективно-аффинном преобразовании точке $M = a \cap b$ соответствует точка $M' = a' \cap b'$. Таким образом, заданием пар прямых a, a' и b, b' определяется пара точек: M и ее образ M' и, следовательно, определяется направление преобразования.

Рассмотрим теперь возможные случаи взаимного расположения заданных прямых:

а) $a \nparallel a'$, $b \nparallel b'$. Обозначим точки пересечения прямых a и a', b и b' соответственно через X_1 и X_2. Так как при перспективно-аффинном преобразовании точка пересечения прямой с ее образом лежит на оси преобразования, то прямая X_1X_2 будет искомой осью s (рис. 59 а). Итак, в этом случае перспективно-аффинное преобразование определено вполне.

б) $a \nparallel a'$, $b \parallel b'$. Определим точку X_1, как в предыдущем случае: $X_1 = a \cap a'$. Ясно, что ось s следует теперь задать как прямую, проходящую через точку X_1 параллельно прямой b, в противном случае точки $s \cap b$ и $s \cap b'$ будут различными, что будет противоречить условию соответственности прямых b и b' (рис. 59 б). Случай, когда $a \parallel a'$ и $b \nparallel b'$, рассматривается аналогично. Итак, и в данном случае перспективно-аффинное преобразование также вполне определено.

в) $a \parallel a'$, $b \parallel b'$. Так как не существует ни точки $X_1 = a \cap a'$, ни точки $X_2 = b \cap b'$, то ось s перспективно-аффинного преобразования не определена. Однако само перспективно-аффинное преобразование вполне определено и в этом случае. Действительно, пусть точка Q — некоторая точка плоскости, определяемой прямыми a и b (рис. 59 в). Проведем через точку Q прямую p: $p \nparallel a$, $p \nparallel b$. Прямая p пересечет прямые a и b. Пусть $L = p \cap a$ и $N = p \cap b$. Так как направление MM' перспективно-аффинного преобразования определено, то найдем точки L' и N', соответственные точкам L и N: $L' = l \cap a'$, $N' = n \cap b'$, причем $l \parallel (MM')$ и $n \parallel (MM')$. Тогда прямая $p' = (L'N')$ будет образом прямой p. Далее, проведем прямую q: $Q \in q$, $q \parallel (MM')$, и найдем точку Q': $Q' = q \cap p'$. Точка Q' будет образом точки Q. Итак, в рассматриваемом случае для каждой точки Q вполне определена ей соответственная точка Q', т. е. перспективно-аффинное преобразование задано вполне.

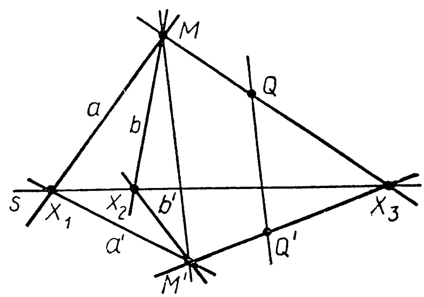


Рис. 60

Замечание. Нетрудно доказать, что этот (безосный) способ задания перспективно-аффинного преобразования определяет параллельный перенос $\overrightarrow{MM'}$. (Докажите это самостоятельно.)

Пример 61. Даны прямые a и b и их образы — прямые a', b', причем $a \nparallel b$. Построим точку Q', соответственную данной точке Q в перспективно-аффинном преобразовании, заданном этими условиями.

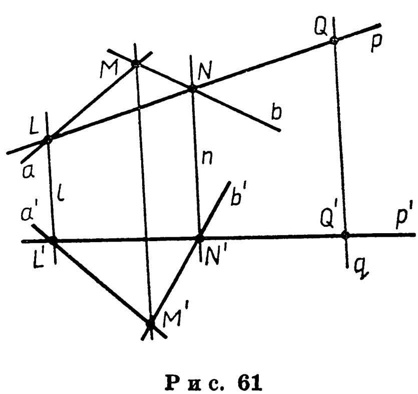


Рис. 61

Решение. *1-й способ.* Построим точку $M = a \cap b$ и точку $M' = a' \cap b'$. Далее построим точки $X_1 = a \cap a'$ и $X_2 = b \cap b'$, а затем и ось $s = (X_1X_2)$ заданного преобразования. Далее, имея ось s и пару соответственных точек M и M',

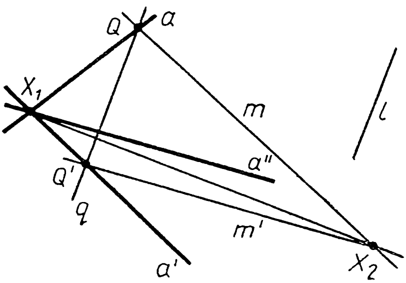


Рис. 62

обычным образом найдем точку Q', соответственную данной точке Q (рис. 60).

2-й способ. Найдем точку Q', не строя оси s заданного преобразования. Для этого проведем через точку Q прямую p, пересекающую прямые a и b в точках L и N соответственно. Далее проведем построение следующим образом (рис. 61): находим образы L' и N' точек L и N (как в примере 60 (в)); прямая $p' = L'N'$ — образ прямой p. Далее находится точка Q' как точка пересечения прямой p' и q, где $q \parallel (MM')$ и $Q \in q$.

Пример 62. Докажем, что перспективно-аффинное преобразование вполне определяется, если заданы его направление — прямая l, прямая a, ее образ — a' и образ прямой a' — прямая a'', причем $a \cap a' = a' \cap a''$, и прямая l не параллельна ни одной из прямых a, a', a''.

Решение. Ясно, что искомое преобразование будет определено, если мы найдем его ось и пару соответственных точек. Заметим, что для определения оси преобразования достаточно определить две точки, лежащие на этой оси. В рассматриваемом случае одна точка, принадлежащая оси, уже имеется, — это точка X_1 пересечения всех трех данных прямых (рис. 62). Для построения точки X_2 — второй точки, принадлежащей оси, построим сбраз m' вспомогательной прямой m, которую для простоты проведем параллельно a'. Тогда $X_2 = m \cap m'$ и прямая X_1X_2 — искомая ось. Итак, построение точки X_2 выполним следующим образом: проведя $m \parallel a'$, найдем точку $Q = m \cap a$. Далее проведем $q \parallel l$, причем $Q \in q$, а затем проведем прямую m', соответственную прямой m, т. е. проведем $m' \parallel a''$. Имея теперь прямые m и m', находим точку $X_2 = m \cap m'$ и далее проводим прямую X_1X_2 — ось перспективно-аффинного преобразования. Так как в процессе построения получены ось преобразования и пара соответственных точек Q и Q', то можно заключить, что заданными условиями перспективно-аффинное преобразование вполне определено.

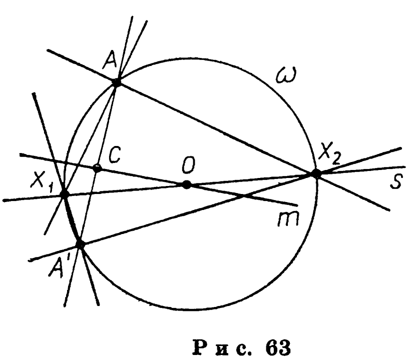


Рис. 63

Пример 63. Перспективно-аффинное преобразование задано осью s и парой точек: A и ее образом A'. Постройте главные направления этого преобразования.

Р е ш е н и е. *1-й случай.* Прямая AA' не перпендикулярна s (рис. 63). Проводим прямую AA' и находим точку C — середину $[AA']$, восставляем в точке C перпендикуляр m к прямой AA' и находим точку $O = m \cap s$. Проводим окружность $\omega = (O|OA|)$. Пусть окружность ω пересекает ось s в точках X_1 и X_2. Две пары прямых AX_1, AX_2 и $A'X_1$, $A'X_2$ —искомые главные направления.

В рассмотренном общем случае существует единственная окружность ω с центром на оси s, проходящая через точки A и A'. Таким образом в общем случае через каждую точку плоскости проходит единственная пара взаимно перпендикулярных прямых, образы которых также взаимно перпендикулярны.

2-й случай. $(AA') \perp s$, но точка C — середина отрезка AA' — не лежит на оси s. В этом случае $m \parallel s$. Через точку A проведем прямую $a \parallel s$ и через точку A' — прямую $a' \parallel s$. Главными направлениями будут две пары прямых AA', a и AA', a'.

3-й случай. $(AA') \perp s$ и точка C — середина отрезка AA' — лежит на оси s. В этом случае прямая m совпадает с осью преобразования. Любая точка оси может быть поэтому принята за центр окружности ω и преобразование имеет бесконечное множество главных направлений. (Нетрудно убедиться, что в этом случае заданное преобразование является осевой симметрией.)

Задачи

226. Перспективно-аффинное преобразование задано осью s и парой точек: A и ее образом A', причем $(AA') \nparallel s$. Постройте образ данной точки B, если: а) $(AB) \parallel s$; б) $(A'B) \parallel s$.

227. Докажите, что прямая, отличная от оси перспективно-аффинного преобразования и параллельная направлению преобразования, при этом преобразовании отображается на себя.

228. Существует ли перспективно-аффинное преобразование, переводящее данные прямые a и b соответственно в данные прямые a' и b' в каждом из следующих случаев:

а) $a \nparallel b$, $a' \nparallel b'$; б) $a \nparallel b$, $a' \parallel b'$; в) $a \parallel b$, $a' \parallel b'$.

229. Перспективно-аффинное преобразование задано осью s и парой точек: A и ее образом A', причем $(AA') \nparallel s$. Постройте прямую m' — образ данной прямой m, если:

а) $m \nparallel s$, $m \nparallel (AA')$; б) $m \parallel s$; в) $m \parallel (AA')$.

230. Перспективно-аффинное преобразование задано осью s и парой точек: A и ее образом A', причем $(AA') \nparallel s$. Постройте треугольник $A'B'C'$ — образ данного треугольника ABC, если:

а) $B \in s$; б) $B \in s$ и $C \in s$; в) $(AB) \parallel s$.

231. Даны две пары прямых: a, a' и b, b' (a', b'— образы a, b), определяющие перспективно-аффинное преобразование. Постройте прямую m' — образ данной прямой m в этом преобразовании. Выполните построение двумя способами:

а) находя ось преобразования;

б) не находя оси преобразования.

232. При условии задачи 230 найдите прообраз данной точки M и прообраз данной прямой m.

233. Перспективно-аффинное преобразование задано тремя парами точек: точками A, B, C и их образами A', B', C', $((AA') \parallel \parallel (BB') \parallel (CC'))$. Постройте:

а) ось s преобразования;

б) точку Q' — образ данной точки Q;

в) образ данного треугольника PQR;

г) прообраз данного треугольника PQR.

(Задачи 233 (б, в, г) решите двумя способами: 1) используя ось преобразования; 2) не пользуясь осью.)

234. Докажите, что перспективно-аффинное преобразование вполне определяется каждым из следующих способов:

а) заданием прямой a и ее образа a', точки M и ее образа — M', причем $M \in a$, $M' \in a'$;

б) заданием прямой l — направления преобразования и двух пар прямых a, b и их образов — a', b', причем $a \parallel b$, $a' \parallel b'$, и прямая l не параллельна ни одной из прямых a, a', b, b'.

В каждом из этих случаев постройте ось преобразования и точку P' — образ данной точки P.

235. Перспективно-аффинное преобразование задано направлением l, прямой a, ее образом a' и прямой a'' — образом прямой a', причем прямые a, a' и a'' пересекаются в одной точке. Выполните следующие построения:

а) на данных несоответственных прямых p и q найдите пару точек M и M', таких, что $M \in p$, $M' \in q$ и точка M' является образом точки M;

б) постройте точку C' — образ данной точки C, если: 1) $C \in a$; 2) $C \in a'$; 3) $C \in a''$;

в) постройте прямую m' — образ прямой m, если: 1) $m' \parallel a$; 2) $m \parallel a'$, 3) $m \parallel a''$;

г) постройте треугольник $A'B'C'$ — образ данного треугольника ABC, если: 1) $A \in a$, $B \in a$; 2) $A \in a$, $B \in a'$.

236. Перспективно-аффинное преобразование Π_1 задано осью s_1 и парой точек: A — прообраз, A' — образ, а перспективно-аффинное преобразование Π_2 задано осью s_2 и парой точек: B — прообраз, B' — образ. Оси этих преобразований пересекаются в точке X. Постройте двойные точки преобразования $\Pi_2 \circ \Pi_1$, если:

а) направления преобразований Π_1 и Π_2 совпадают;

б) направления преобразований Π_1 и Π_2 различны.

237. Каждое из двух перспективно-аффинных преобразований Π_1 и Π_2 задано осью и парой соответственных точек. Найдите условие, при выполнении которого существует по крайней мере одна пара соответственных точек M и M' $(M \neq M')$, таких, что $\Pi_1(M) = M'$, $\Pi_2(M) = M'$.

238. Докажите, что при перспективно-аффинном преобразовании, отличном от осевой симметрии, существует не более одной пары главных направлений.

239. Даны ось перспективно-аффинного преобразования, треугольник ABC и точка M'. Определите преобразование так, чтобы центроид треугольника $A'B'C'$ — образа треугольника ABC — находился в точке M'.

240. Заданы ось s перспективно-аффинного преобразования, точка A и ее образ A', причем $(AA') \nparallel s$. Докажите, что если B' — образ точки B при этом преобразовании, то $(AA'X_1) = (BB'X_2)$, где $X_1 = (AA') \cap s$, $X_2 = (BB') \cap s$.

241. Докажите, что множество, состоящее из тождественного преобразования и всех перспективно-аффинных преобразований плоскости на себя, имеющих общую ось, является группой.

§ 7. Общее аффинное преобразование

Литература: [1], § 34; [3], гл. IV; [5], гл. I; 8, § 4.

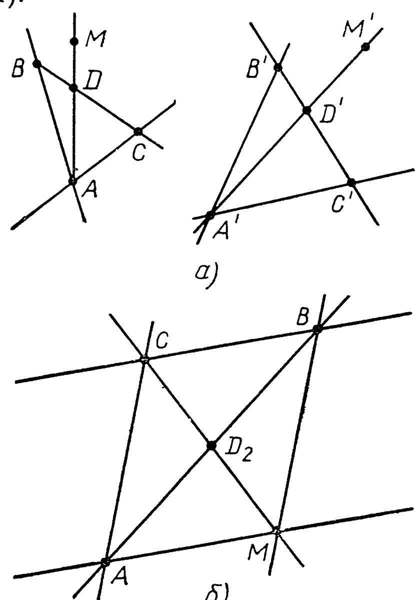
Пример 64. Общее аффинное преобразование плоскости задано тремя парами соответственных точек: A и A', B и B', C и C'. Построим точку M' — образ данной точки M.

Решение. Известно, что аффинное преобразование сохраняет коллинеарность и простое отношение трех точек. Используя эти его свойства, можно построить точку M' следующим образом.

Пусть прямые AM и BC пересекаются в точке D (рис. 64 а). Строим на прямой $B'C'$ образ точки D, т. е. такую точку D', что $(B'C'D') = (BCD)$. Затем строим искомую точку M' на прямой $A'D'$, так, чтобы $(A'D'M') = (ADM)$.

Может оказаться, что $(AM) \parallel (BC)$, но $(BM) \nparallel (AC)$. Пусть тогда D_1 — точка пересечения прямых BM и AC, а точка D_1' — такая точка прямой $A'C'$, что $(A'C'D'_1) = (ACD_1)$. Точка M_1' прямой $B'D_1'$, такая, что $(B'D_1'M_1') = (BD_1M_1)$, будет в этом случае искомой.

Наконец, если $(AM) \parallel (BC)$ и $(BM) \parallel (AC)$ (рис. 64 б), то $(CM) \nparallel (AB)$ (так как $[CM]$ и $[AB]$ — две диагонали параллелограмма). В этом случае нужно сначала найти точку D_2 пересечения прямых CM и AB, затем, зная точки A' и B' и величину простого отношения (AD_2B), построить точку D_2', наконец, имея точки C' и D_2' и (CD_2M), найти точку M'.



а)

б)

Рис. 64

Пример 65. Докажем, что аффинное преобразование плоскости, имеющее три двойные точки, не лежащие на одной прямой, является тождественным преобразованием.

Решение. Пусть аффинное преобразование имеет три двойные точки: $X = X'$, $Y = Y'$, $Z = Z'$ и эти точки не лежат на одной прямой. Возьмем в плоскости (XYZ) произвольную точку M. Тогда прямой XM соответствует некоторая прямая XM', а точке $D = (XM) \cap (YZ)$ соответствует точка D', причем простые отношения (YZD) и (YZD') равны. Следовательно, точка D' совпадает с точкой D. Тогда совпадают и прямые XD и XD'.

Кроме того, равны простые отношения (XDM) и (XDM'). Поэтому точка M' совпадает с точкой M.

Если окажется, что $(XM) \parallel (YZ)$, то для доказательства можно воспользоваться прямыми YM и XZ или прямыми ZM и XY.

Итак, если три двойные точки аффинного преобразования плоскости не лежат на одной прямой, то все точки при этом преобразовании двойные, т. е. это аффинное преобразование — тождественное.

Пример 66. Общее аффинное преобразование плоскости задано треугольником ABC и его образом — треугольником $A'B'C'$. Представим это преобразование в виде композиции перспективно-аффинных преобразований.

Решение. Зададим $П_1$ —первое перспективно-аффинное преобразование произвольной осью s_1, точкой A и ее образом — точкой A'. Пусть треугольник ABC при преобразовании $П_1$ переходит в треугольник $A'B_1C_1$ (рис. 65), причем точка B_1 не совпадает с точкой B', а точка C_1 не совпадает с точкой C'.

Подберем тогда второе перспективно-аффинное преобразование $П_2$ таким образом, чтобы точка A' оказалась двойной точкой в этом преобразовании. С этой целью ось s_2 преобразования $П_2$ проведем через точку A', но так, чтобы точки B' и C' не лежали на s_2, а образом точки B_1 будем считать точку B'. Пусть при преобразовании $П_2$ треугольник $A'B_1C_1$ отображается в треугольник $A'B'C_2$.

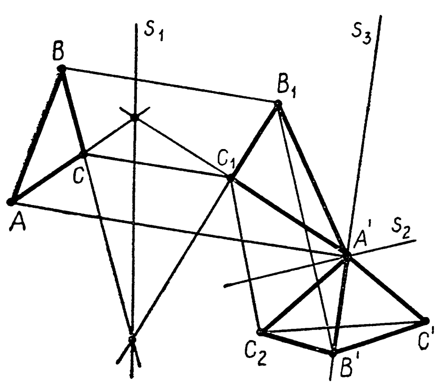


Рис. 65

Если точка C_2 не совпадет с точкой C', то зададим третье перспективно-аффинное преобразование $П_3$, в котором точки A' и B' были бы его двойными точками. С этой целью прямую $A'B'$ примем за ось s_3 преобразования $П_3$, а точку C' будем считать образом точки C_2. Преобразование $П_3$ переводит тогда треугольник $A'B'C_2$ в треугольник $A'B'C'$. Итак, мы подобрали три перспективно-аффинных преобразования, таких, что $\Pi_1(ABC) = A'B_1C_1$, $\Pi_2(A'B_1C_1) = A'B'C_2$, $\Pi_3(A'B'C_2) = A'B'C'$, т. е. $\Pi_3 \circ \Pi_2 \circ \Pi_1 (\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$. Тогда $\Pi_3 \circ \Pi_2 \circ \Pi_1$ — композиция перспективно-аффинных преобразований Π_1, Π_2, Π_3 совпадает с заданным общим аффинным преобразованием (по теореме 2 из [5], с. 24).

Задачи

242. Общее аффинное преобразование плоскости задано невырожденным треугольником ABC и его образом $A'B'C'$. Выполните следующие построения:

а) постройте прообраз данной точки M';

б) постройте прообраз точки A;

в) постройте образ треугольника $A'B'C'$.

243. На плоскости даны два параллелограмма: $ABCD$ и $PQRS$. Найдите все аффинные преобразования плоскости, при которых первый параллелограмм отображается на второй.

244. Докажите, что нетождественное аффинное преобразование плоскости, имеющее две двойные точки, является перспективно-аффинным преобразованием.

245. Два аффинных преобразования плоскости A_1 и A_2 заданы каждое парами соответственных точек. Найдите образы произвольно выбранной точки при композиции:

а) $A_2 \circ A_1$; б) $A_1 \circ A_2$.

246. Заданы три перспективно-аффинных преобразования: Π_1— точкой M и ее образом M' и прямой p и ее образом p'; Π_2 — осью s, точкой N и ее образом N'; Π_3 — точками B, C, D и их образами B', C', D'. Найдите образ произвольной точки A при композиции $\Pi_3 \circ \Pi_2 \circ \Pi_1$.

247. Какие из следующих понятий являются аффинными:

а) прямая, отрезок прямой, середина отрезка, конгруэнтность отрезков, длина отрезка, параллельность прямых, перпендикулярность прямых, отношение длин непараллельных отрезков;

б) треугольник; равнобедренный, равносторонний, прямоугольный треугольник; медиана, биссектриса, высота треугольника;

в) четырехугольник, параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция, диагональ четырехугольника, равенство площадей четырехугольников, отношение площадей двух фигур;

г) прямоугольные, косоугольные декартовы координаты; полярные, аффинные координаты;

д) окружность, эллипс, центр симметрии, диаметр, сопряженные диаметры, ось эллипса;

е) параллельный перенос, поворот вокруг точки, осевая симметрия, центральная симметрия, сжатие к оси, сдвиг вдоль прямой, гомотетия, подобие?

248. Назовите некоторые аффинные свойства следующих фигур:

а) треугольника, параллелограмма, трапеции;

б) прямоугольника, ромба, квадрата;

в) окружности, эллипса.

249. Аффинный ли характер имеют следующие известные из школьного курса геометрии теоремы:

а) о средней линии треугольника;

б) о средней линии трапеции?

250. На какие фигуры отображается при общем аффинном преобразовании плоскости каждая из следующих фигур:

а) правильный треугольник с его центроидом;

б) равнобочная трапеция с отрезком, соединяющим середины ее оснований?

§ 8. Аффинное преобразование в координатах

Литература: [1], § 34; [3], § 25; [5], гл. I; [8], § 4.

Пример 67. Аффинное преобразование плоскости задано формулами

$$x' = -x - y + 2,$$
$$y' = 2x + y - 2. \qquad (1)$$

а) Найдем координаты точки A' — образа точки A $(1; 0)$;

б) найдем координаты точки B — прообраза точки B' $(-1; 2)$;

в) найдем формулы преобразования, обратного преобразованию (1);

г) найдем уравнение прямой, на которую отображается прямая $2x - y + 3 = 0$.

Решение. а) Так как точка A $(x; y)$ — прообраз точки A' $(x'; y')$, причем известны ее координаты: $x = 1$, $y = 0$, то, подставляя эти значения в формулы (1), мы получим искомые координаты точки A' $(x'; y')$: $x' = 1$, $y' = 0$ (в рассматриваемом случае оказалось, что $x' = x$, $y' = y$, т. е. точка A — двойная точка заданного аффинного преобразования).

б) Подставляя в формулы (1) координаты точки B' $(-1; 2)$ и решая полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} -x - y + 2 = -1, \\ \ \ 2x + y - 2 = 2, \end{cases}$$

находим искомые координаты точки B: $x = 1$, $y = 2$.

в) Формулы (1) выражают координаты образов точек через координаты прообразов этих точек. Решая систему уравнений (1) относительно x и y, получим следующие формулы:

$$x = x' + y',$$
$$y = -2x' - y' + 2. \qquad (2)$$

Преобразование, обратное преобразованию (1), переводит точку M' $(x'; y')$ в точку M $(x; y)$, т. е. для него $(x'; y')$ — координаты прообраза в системе координат xOy, обозначаемые через $(x; y)$, а M $(x; y)$ — это образ точки M' $(x'; y')$, поэтому в формулах (2) надо заменить x на x', y на y'. Таким образом, преобразование, обратное преобразованию (1), аналитически задается формулами:

$$\begin{aligned} x' &= x + y, \\ y' &= -2x - y + 2. \end{aligned} \qquad (3)$$

г) Используем полученные выше выражения (2). Подставляя их в уравнение данной прямой, получим:

$$4x' + 3y' + 1 = 0.$$

Это уравнение выражает связь между координатами точек M $(x; y)$, являющихся образами точек M' $(x'; y')$, данной прямой, т. е. это и есть уравнение образа данной прямой. В окончательном результате опустим штрихи (так как все координаты заданы в системе координат xOy) и ответ запишем в виде: $4x + 3y + 1 = 0$.

Пример 68. Аффинное преобразование плоскости на себя задано тремя парами точек и их образов: A (1; 2), B (0; 3), C (1; 0) и A' (2; 3), B' (0; 5), C' (2; —1). Найдем аналитическое задание этого преобразования.

Решение. Подставляя в формулы общего аффинного преобразования:

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2 \end{aligned}$$

координаты $x = 1$, $y = 2$ точки A и координаты $x' = 2$, $y' = 3$ точки A', получим следующие уравнения: $2 = a_1 \cdot 1 + b_1 \cdot 2 + c_1$, $3 = a_1 \cdot 1 + b_1 \cdot 2 + c_2$. Аналогично, подставляя координаты точек B и B', а затем координаты точек C и C', получим еще четыре уравнения: $0 = a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 3 + c_1$, $2 = a_1 \cdot 1 + b_1 \cdot 0 + c_1$, $5 = a_2 \cdot 0 + b_2 \cdot 3 + c_2$, $-1 = a_2 \cdot 1 + b_2 \cdot 0 + c_2$.

Таким образом, для определения шести неизвестных коэффициентов a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 мы получаем следующую систему из шести уравнений:

$$\begin{cases} a_1 + 2b_1 + c_1 = 2, \\ a_2 + 2b_2 + c_2 = 3, \\ 3b_1 + c_1 = 0, \\ 3b_2 + c_2 = 5, \\ a_1 + c_1 = 2, \\ a_2 + c_2 = -1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим: $a_1 = 2$, $a_2 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 2$, $c_1 = 0$, $c_2 = -1$. Следовательно, преобразование задается формулами:

$$\begin{aligned} x' &= 2x, \\ y' &= 2y - 1. \end{aligned}$$

Пример 69. Найдем аналитическое задание перспективно-аффинного преобразования плоскости на себя, переводящего ось Ox в прямую $x + y = 1$, а ось Oy — в прямую $2y - 1 = 0$.

Решение. Как известно, координаты точки $M(x; y)$ и ее образа $M'(x'; y')$ связаны соотношением:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3, \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3. \end{aligned} \tag{4}$$

Ось Ox задается уравнением $y = 0$. Значит, координаты точек образа этой прямой удовлетворяют уравнению:

$$\beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 = 0.$$

По условию образом оси Ox является прямая $x + y - 1 = 0$. Перейдем к обозначениям координат без штрихов и сравним уравнения прямых $\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 = 0$ и $x + y - 1 = 0$. Так как эти прямые должны совпадать, то выполняются соотношения: $\beta_1 : 1 = \beta_2 : 1 = \beta_3 : -1$, откуда

$$\beta_1 = \beta_2 = -\beta_3. \tag{5}$$

Точно так же, сравнивая уравнения прямых $\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 = 0$ и $2y - 1 = 0$, получим:

$$\alpha_1 = 0, \ \alpha_2 = -2\,\alpha_3. \tag{6}$$

Наконец, воспользуемся тем, что искомое преобразование должно иметь ось. Каждая точка оси — это двойная точка преобразования. Координаты двойных точек аффинного преобразования удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} (\alpha_1 - 1)\,x + \alpha_2 y + \alpha_3 = 0, \\ \beta_1 x + (\beta_2 - 1)\,y + \beta_3 = 0. \end{cases}$$

Чтобы эта система имела бесконечно много решений, должны выполняться условия:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - 1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 - 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 - 1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставляя $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -2\alpha_3$, $\beta_1 = \beta_2 = -\beta_3$, получаем:

$$\begin{vmatrix} -1 & -2\alpha_3 \\ -\beta_3 & -\beta_3 - 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & \alpha_3 \\ -\beta_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определители, мы получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\alpha_3\beta_3 - \beta_3 - 1 = 0, \\ \alpha_3\beta_3 - \beta_3 = 0. \end{cases}$$

Решаем эту систему, находим $\alpha_3 = 1$, $\beta_3 = 1$. Тогда из уравнений (5) следует, что $\beta_1 = \beta_2 = -1$, а из уравнений (6) следует, что $\alpha_2 = -2$.

Итак: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = 1$, $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = -1$, $\beta_3 = 1$. Подставляя найденные значения в формулы (4), мы получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x = -2y' + 1, \\ y = -x' - y' + 1, \end{cases}$$

решая которую относительно x' и y', находим, что искомое перспективно-аффинное преобразование аналитически задается формулами:

$$x' = \frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2},$$
$$y' = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Рекомендуем читателю проверить, что это преобразование действительно удовлетворяет всем условиям задачи.

Задачи

251. Аффинное преобразование плоскости задано формулами:

$$x' = x + 5y - 7,$$
$$y' = x - 4y + 1;$$

а) найдите координаты образа точки A (2; 1);
б) найдите координаты прообраза точки A (2; 1);
в) найдите формулы обратного преобразования.

252. Аффинное преобразование плоскости задано формулами:

а) $x' = x + 5y - 7,$
$y' = 2x - 3y + 1;$

б) $x' = 2x - y + 3,$
$y' = x + y + 1.$

В каждом из этих случаев найдите:
1) формулы обратного преобразования;
2) уравнения образов осей Ox и Oy.

253. Аффинное преобразование плоскости задано формулами:

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y, \\ y' &= a_2x + b_2y, \end{aligned} \quad \text{где} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Найдите уравнение прямой, на которую отображается прямая $px + qy + r = 0$.

254. Аффинное преобразование плоскости задано формулами:

$$x' = x + 4y - 7,$$
$$y' = x + 3y + 1.$$

Найдите уравнения:
а) образа прямой $x + 2y - 1 = 0$;
б) прообраза прямой $x + 2y - 1 = 0$.

255. Найдите двойные точки аффинных преобразований плоскости, заданных следующими формулами:

а) $x' = 3x + 2y - 2,$
$y' = x - 4y + 17;$

б) $x' = \frac{1}{2}x - y + \frac{3}{2},$
$y' = 2x + 3y - 1;$

в) $x' = x + y + 1,$
$y' = x - 2y + 1;$

г) $x' = 2x - 3y + 5,$
$y' = x - 2y + 1;$

д) $x' = 3x + y - 5,$
$y' = 2x - y - 2.$

256. Найдите аналитическое задание аффинного преобразования плоскости и координаты неподвижных точек этого преобразования, если точки A, B, C переходят в точки A', B', C' и эти точки имеют координаты:

а) A (0; 1), B (1; 0), C (1; 1), A' (1; 0), B' (0; 1), C' (1; 1),
б) A (1; 2), B (2; 1), C (0; 0), A' (3; 7), B' (4; 6), C' (—1; 2),
в) A (0; 0), B (0; 1), C (—1; 2), A' (0; —3), B'(—2; —3), C'(2;—1).

257. Докажите, что аффинное преобразование плоскости, заданное тремя парами точек и их образов: A (1; 2) и A' (2; 4), B (0; —3) и B' (1; —1), C (2; —1) и C' (3; 1), — это параллельный перенос $\vec{t}$. Найдите вектор $\vec{t}$.

258. Осевая симметрия задана формулами

$$x' = -x - 6,$$
$$y' = y.$$

Найдите уравнение оси симметрии.

259. Найдите аналитическое задание:

а) симметрии с центром в точке (5; —2);
б) симметрии с осью $x = 4$;
в) симметрии с осью $3x + 2y - 6 = 0$.

260. Найдите аналитическое задание:

а) гомотетии с центром в точке (1; 3) и $k = -2$;

б) гомотетии с центром в точке (—2; 0) и образом A' (4; 3) точки A (0; 1);

в) гомотетии, переводящей точки A (1; 2) и B (—3; 0) соответственно в точки A' (2; 1) и B' (—4; —2);

г) подобия, переводящего точки A (1; 0), B (3; 1) и C (3; 2) соответственно в точки A' (—4; 2), B' (0; 0), C' (0; —2).

261. Найдите формулы перспективно-аффинных преобразований плоскости, для которых уравнение оси s преобразования и координаты точки A и ее образа A' заданы следующим образом:

а) $s : x + 2y - 1 = 0$, A (1; 2), A' (2; 2);
б) $s : x + y = 0$, A (—1; 2), A' (1; 1);
в) $s : 2x - 3 = 0$, A (3; 0), A' (—1; 2).

262. Найдите уравнение оси перспективно-аффинного преобразования плоскости, заданного формулами:

а) $x' = 2x - y$, $y' = 3x - 2y$; б) $x' = 3x - y + 4$, $y' = 4x - y$; в) $x' = x$, $y' = 2y$.

263. Выясните, являются ли перспективно-аффинными преобразования плоскости, заданные следующими формулами:

а) $x' = 4x + 2y - 5$,
$y' = 6x + 5y - 10$;

б) $x' = 3x + 4y - 2,$ $\quad$ в) $x' = 3x + 4y + 2,$
$y' = x + 3y - 1;$ $\quad$ $y' = x + 3y + 1.$

264. Аффинное преобразование плоскости задано формулами:

$$x' = a_1x + b_1y + c_1,$$
$$y' = a_2x + b_2y + c_2.$$

Найдите условия, которым должны удовлетворять коэффициенты $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ этого преобразования, чтобы оно было перспективно-аффинным.

265. Перспективно-аффинные преобразования Π_1 и Π_2 заданы следующими формулами:

$$\Pi_1: \begin{matrix} x' = x, \\ y' = 2y; \end{matrix} \qquad \Pi_2: \begin{matrix} x' = 3x + 4y - 2, \\ y' = x + 3y - 1. \end{matrix}$$

Найдите аналитическое задание композиций преобразований: а) $\Pi_2 \circ \Pi_1$; б) $\Pi_1 \circ \Pi_2$.

Будут ли полученные преобразования перспективно-аффинными?

§ 9. Решение геометрических задач с помощью аффинных преобразований плоскости

Литература: [1], § 35; [5], гл. I; [8], § 4.

Пример 70. Докажем, что прямая, проходящая через точку пересечения продолжений боковых сторон трапеции и точку пересечения ее диагоналей, делит основания трапеции пополам (рис. 66 а).

Решение. Так как свойство четырехугольника быть трапецией — аффинное свойство, свойство прямой принадлежать точке— тоже аффинное и свойство точки быть серединой отрезка — аффинное, то рассматриваемая задача — аффинная, и поэтому для ее решения можно применить аффинное преобразование.

Зададим аффинное преобразование так, чтобы треугольник APD, где P — точка пересечения продолжений боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$, перешел в равнобедренный треугольник $A'P'D'$, у которого $[A'P'] \cong [D'P']$ (рис. 66 б). Тогда, как нетрудно убедиться, трапеция $ABCD$ перейдет в равнобочную трапецию $A'B'C'D'$, а диагонали AC и BD — в конгруэнтные между собой диагонали $A'C'$ и $B'D'$. Из конгруэнтности треугольников $A'B'D'$ и $A'C'D'$ (по трем сторонам) следует, что $\widehat{B'D'A'} = \widehat{C'A'D'}$, и поэтому треугольник $A'R'D'$ — равнобедренный, т. е. $[A'R'] \cong [D'R']$.

Итак, точки R' и P' принадлежат множеству точек, равноудаленных от точек A' и D', т. е. $P'R'$ — это срединный перпендикуляр отрезка $A'D'$, и, следовательно, точка $S' = (P'R') \cap (A'D')$ делит

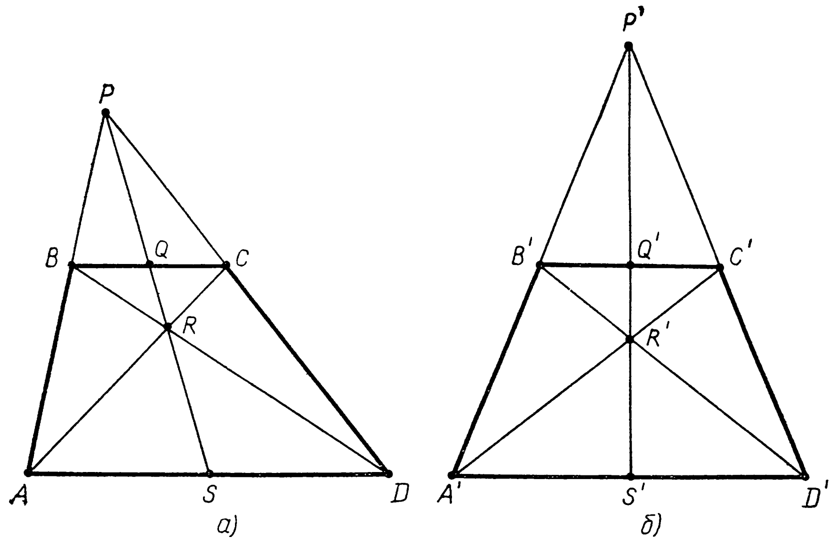


Рис. 66

основание $A'D'$ трапеции $A'B'C'D'$ пополам. Далее, так как $(B'C') \parallel (A'D')$, то $(P'R') \perp (B'C')$ и треугольник $B'P'C'$, как и треугольник $A'P'D'$, равнобедренный. Тогда $(P'R')$ делит его основание $B'C'$ пополам. Итак, мы доказали, что $(P'R')$ делит основания трапеции $A'B'C'D'$ пополам.

Но свойство точки быть серединой отрезка — аффинное свойство, так что в трапеции $ABCD$ прямая PR — прообраз прямой $P'R'$ — также проходит через середины оснований, что и требовалось доказать.

Пример 71. Каждая из сторон треугольника ABC разделена на три конгруэнтные части, и каждая точка деления соединена с противоположной вершиной треугольника. Докажем, что в шестиугольнике, образованном этими шестью прямыми, диагонали, соединяющие его противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

Решение. Убедимся сначала в том, что поставленная задача — аффинная. Действительно, свойство фигуры быть треугольником — аффинное. Далее, стороны треугольника ABC разделены на три конгруэнтные части: пусть, например, $[AC_1] \cong [C_1C_2] \cong$ $\cong [C_2B]$ (рис. 67 а). Это равносильно равенству $\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1C_2}} = \frac{\overrightarrow{C_1C_2}}{\overrightarrow{C_2B}} = 1$, т. е. $(AC_2C_1) = (C_1BC_2) = 1$. Но свойство трех точек одной прямой находиться в определенном простом отношении — аффинное свойство.

Далее, свойство прямых иметь общую точку — аффинное и, наконец, свойство фигуры быть шестиугольником тоже аффинное свойство.

Итак, для решения поставленной задачи можно применить аффинное преобразование. Зададим его так, чтобы данный треугольник ABC перешел в равносторонний треугольник $A'B'C'$ (рис. 67 б). Разделим каждую из сторон треугольника $A'B'C'$ на три конгруэнтные части точками A_1', A_2', B_1', B_2', C_1', C_2' — образами точек A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2. Соединив согласно условию полученные точки деления с вершинами A', B' и C' треугольника $A'B'C'$, получим шестиугольник $P'Q'R'S'M'K'$.

Рассмотрим треугольники $A'C'C_2'$ и $A'C'A_1'$. Так как $[A'C']$ — их общая сторона, $[A_1'C'] \cong [C_2'A']$ и $\widehat{C_2'A'C'} = \widehat{A_1'C'A'}$, то эти треугольники конгруэнтны. Поэтому $\widehat{C_2'C'A'} = \widehat{A_1'A'C'}$. Но тогда треугольник $A'Q'C'$ равнобедренный. Аналогично получаем, что треугольник $A'M'C'$ равнобедренный, т. е. точки Q' и M' одинаково удалены от точек A' и C', а поэтому они лежат на срединном перпендикуляре к отрезку $A'C'$.

Таким же образом получаем, что точки P' и S' лежат на срединном перпендикуляре к отрезку $A'B'$, а точки R' и K' — на срединном перпендикуляре к отрезку $B'C'$. Но срединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. Следовательно, и диагонали $Q'M'$, $P'S'$ и $R'K'$ пересекаются в одной точке.

Истолковывая теперь полученный для треугольника $A'B'C'$ аффинный результат, приходим к выводу, что диагонали шестиугольника $PQRSMK$ пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

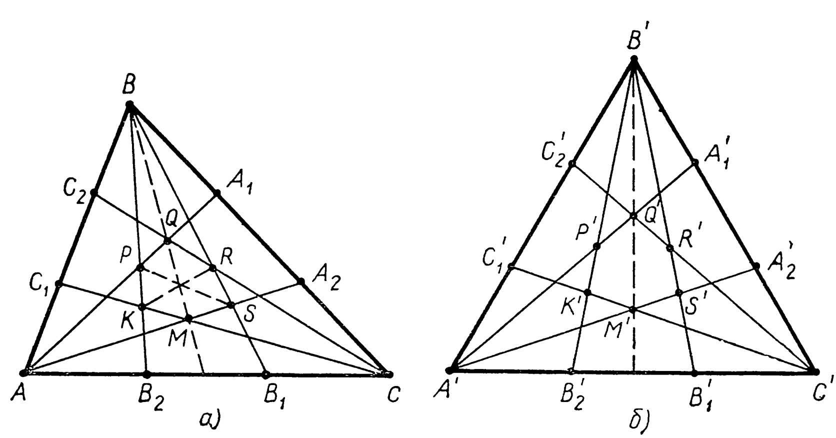


Рис. 67

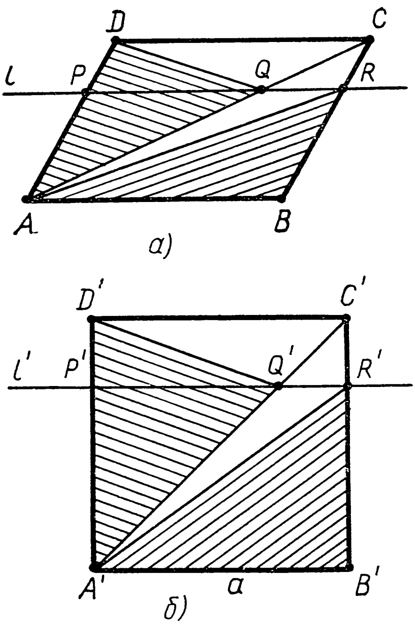


Рис. 68

П р и м е р 72. Через точку Q, лежащую на диагонали AC параллелограмма $ABCD$, проведена прямая l, параллельная (AB). Прямая l пересекает сторону BC в точке R. Докажем, что площади треугольников ABR и ADQ равны (рис. 68 а).

Р е ш е н и е. Поставленная задача — аффинная. Действительно, свойство фигуры быть параллелограммом, свойство прямой быть диагональю четырехугольника, свойство прямой l быть параллельной стороне AB, свойство точки Q лежать на диагонали AC, свойство фигуры ABR и фигуры ADQ быть треугольниками и иметь отношение площадей, равное 1, — все это аффинные свойства.

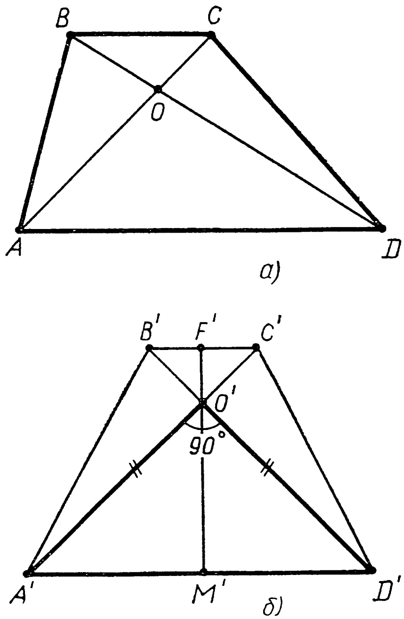
Поэтому для решения данной задачи можно применить аффинное преобразование. Зададим его так, чтобы треугольник ABC перешел в равнобедренный прямоугольный треугольник $A'B'C'$ $([A'B'] \cong [B'C'])$. Тогда вершина D параллелограмма $ABCD$ перейдет в вершину D' квадрата $A'B'C'D'$ (рис. 68 б). Диагональ AC перейдет в диагональ $A'C'$, точка Q, принадлежащая прямой AC, — в точку Q', принадлежащую прямой $A'C'$, прямая l, параллельная (AB), — в прямую l', параллельную $(A'B')$, треугольники ABR и AQD соответственно в треугольники $A'B'R'$ и $A'Q'D'$ и точка P пересечения прямых l и AD — в точку P' пересечения прямых l' и $A'D'$.

Докажем, что площади треугольников $A'B'R'$ и $A'D'Q'$ равны. Положим $|A'B'| = a$, $|A'P'| = b$. Получаем $S_{A'B'R'} = \frac{1}{2}ab$ и $S_{A'Q'D'} = \frac{1}{2}a\,|P'Q'|$. Но из прямоугольного треугольника $A'P'Q'$, где $\widehat{Q'A'P'} = \frac{\pi}{4}$, находим, что $|P'Q'| = |A'P'| = b$. Поэтому $S_{A'Q'D'} = \frac{1}{2}ab$. Итак, площади треугольников $A'B'R'$ и $A'Q'D'$ равны, т. е. отношение этих площадей равно 1. Согласно свойствам аффинных преобразований отношение площадей треугольников ABR и AQD будет также равно 1, т. е. эти площади будут равными.

П р и м е р 73. В трапеции $ABCD$ AD и BC — основания, причем $|AD| : |BC| = a : b$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Найдем отношение площади треугольника AOD к площади трапеции $ABCD$ (рис. 69 а).

Р е ш е н и е. Эта задача была решена нами методом параллельного переноса (см. пример 33). Решим ее теперь, используя аффинное преобразование (убедитесь самостоятельно в том, что рассматриваемая задача — аффинная).

Выберем аффинное преобразование так, чтобы образом треугольника AOD был прямоугольный треугольник $A'O'D'$ с конгруэнтными катетами $A'O'$ и $D'O'$ (рис. 69 б). Тогда треугольник $B'O'C'$ также будет прямоугольным равнобедренным, а трапеция $A'B'C'D'$ равнобочной, причем по свойствам аффинного преобразования $|A'D'|:|B'C'| = a : b$. Положим для упрощения дальнейших выкладок $|A'D'| = ka$, $|B'C'| = kb$ и выполним необходимые вычисления. Из равнобедренных прямоугольных треугольников $A'O'M'$ и $B'O'F'$ находим: $|A'O'| = \frac{1}{2}ka\sqrt{2}$, $|B'O'| = \frac{1}{2}kb\sqrt{2}$. Найдем высоту трапеции $A'B'C'D'$: $|F'M'| = |O'M'| + |O'F'| = |M'D'| + |F'C'| = \frac{k}{2}(a + b)$.



Р и с. 69

Тогда

$$\frac{S_{A'O'D'}}{S_{A'B'C'D'}} = \frac{\frac{1}{2}|A'O'|\cdot|O'D'|}{\frac{1}{2}(|A'D'|+|B'C'|)\,F'M'} = \frac{a^2}{(a+b)^2}.$$

Но $S_{AOD} : S_{ABCD} = S_{A'O'D'} : S_{A'B'C'D'}$. Таким образом, и для заданной трапеции получаем, что $S_{AOD} : S_{ABCD} = a^2 : (a + b)^2$.

П р и м е р 74. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 и C_2, A_1 и A_2, B_1 и B_2 так, что $(A_2B_1) \parallel (AB)$, $(B_2C_1) \parallel (BC)$, $(C_2A_1) \parallel (CA)$ (рис. 70 а). Докажем, что площади треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.

Р е ш е н и е. Нетрудно видеть, что поставленная задача — аффинная. Действительно, свойство фигуры быть треугольником, свойство точек принадлежать прямой, свойство фигур иметь рав-

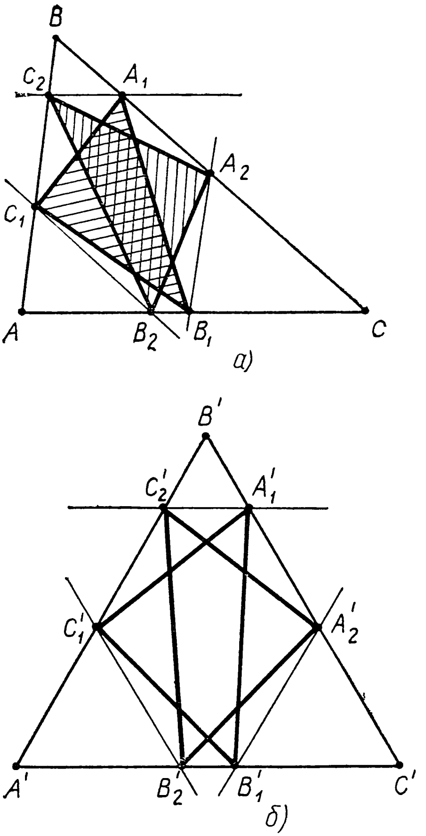


Рис. 70

ные площади (отношение этих площадей равно 1) — все эти свойства аффинные. Итак, для решения поставленной задачи можно применить аффинное преобразование.

Зададим аффинное преобразование так, чтобы образом треугольника ABC был треугольник $A'B'C'$, для которого задача решается легче, а именно: вершины треугольника ABC отобразим на вершины равностороннего треугольника $A'B'C'$ (рис. 70б). При этом точки $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ перейдут в такие точки $A_1', A_2', B_1', B_2', C_1', C_2'$, что $(A_2'B_1') \parallel (A'B')$, $(B_2'C_1') \parallel (B'C')$, $(C_2'A_1') \parallel (C'A')$. Решим задачу для треугольника $A'B'C'$.

Полагая $|A'B'| = 1$, $|A'B_2'| = p$, $|A'C_1'| = q$, $|B'A_2'| = r$ и применяя формулу $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin \widehat{C}$, подсчитаем площади треугольников $A_1'B_1'C_1'$ и $A_2'B_2'C_2'$:

$$S_{A_1'B_1'C_1'} = S_{A'B'C'} - S_{A'B_1'C_1'} - S_{B'C_1'A_1'} - S_{C'B_1'A_1'} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}(1\cdot 1 - pq -$$

$$-(1-p)(1-r) - r(1-q)) = \frac{\sqrt{3}}{4}(p - pr - pq + rq).$$

Аналогично находим, что

$$S_{A_2'B_2'C_2'} = \frac{\sqrt{3}}{4}(p - pr - pq + rq).$$

Таким образом, отношение площадей треугольников $A_1'B_1'C_1'$ и $A_2'B_2'C_2'$ равно 1. А так как отношение площадей при аффинном преобразовании не меняется (является инвариантом аффинного преобразования), то и отношение площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равно 1, т. е. площади треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.

Задачи

266. Используя утверждение примера 70, пользуясь только линейкой, решите следующие задачи на построение:

а) Даны две параллельные прямые. Постройте середину отрезка, лежащего на одной из этих прямых.

б) Дан отрезок AB и его середина — точка C. Через данную точку M, не лежащую на прямой AB, проведите прямую, параллельную прямой AB.

в) Даны две параллельные прямые и точка P, не лежащая ни на одной из этих прямых. Проведите через точку P прямую, параллельную данным прямым.

267. Докажите, что если в четырехугольнике $ABCD$ прямая, проходящая через точку P пересечения сторон AB и CD и точку Q пересечения диагоналей AC и BD, делит стороны AD и BC пополам, то $ABCD$ — трапеция.

268. Докажите, что если точки M и N лежат на сторонах AB и BC треугольника ABC и $(MN) \parallel (AC)$, то точка пересечения прямых AN и CM лежит на медиане треугольника ABC.

269. Дана трапеция $ABCD$, в которой BC и AD — основания, $|AD| > |BC|$ и O — точка пересечения диагоналей. Отложим на диагонали AC отрезок AM, такой, что $|AM| = |OC|$, а на диагонали BD отрезок DN : $|DN| = |OB|$. Пусть точка M_1 — точка пересечения прямых BM и AD, а точка N_1 — точка пересечения прямых CN и AD. Докажите, что $|AM_1| = |DN_1|$.

270. Дана трапеция $ABCD$, у которой BC и AD — основания, l — прямая, параллельная (AD) и пересекающая диагонали AC и BD соответственно в точках P и Q. Пусть P_1 — точка пересечения прямых DP и BC, а Q_1 — точка пересечения прямых AQ и BC. Докажите, что $|CP_1| = |BQ_1|$.

271. Найдите в плоскости данного треугольника ABC такую точку S, чтобы площади треугольников SAB, SBC и SAC были равны.

272. Докажите, что отношение площади данного четырехугольника к площади четырехугольника, вершины которого находятся в серединах сторон данного, равно $2 : 1$.

273. Докажите, что площадь треугольника, вершинами которого являются одна из вершин параллелограмма и середины двух сторон параллелограмма, пересекающихся в противоположной вершине параллелограмма, относится к площади параллелограмма, как $3 : 8$.

274. На сторонах параллелограмма $ABCD$ взяты точки A_1, B_1, C_1 и D_1, так, что $(ABC_1) = (BCD_1) = (CDA_1) = (DAB_1) = -\frac{1}{2}$. Найдите отношение площади четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ к площади параллелограмма $ABCD$.

275. Докажите, что если A_1, B_1, C_1 — точки, взятые соответственно на сторонах BC, AC, AB треугольника ABC так, что $(ABC_1)=$

$= (ACB_1) = (BCA_1)$, и P — произвольная точка в плоскости треугольника ABC, то наибольшая из площадей треугольников PAA_1, PBB_1, PCC_1 равна сумме площадей двух других треугольников.

276. Докажите, что если точки M, N и P лежат соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC, причем $(BCM) = (CAN) = (ABP)$, то центроид треугольника, образованного прямыми AM, BN, CP, совпадает с центроидом треугольника ABC.

277. Докажите, что если прямая, проходящая через середины двух несмежных сторон четырехугольника, проходит также через точку пересечения его диагоналей, то этот четырехугольник — трапеция.

278. Точки M, N и P лежат соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC, причем

$$0 < \frac{BM}{BC} = \frac{CN}{CA} = \frac{AP}{AB} = \lambda < \frac{1}{2}.$$

а) Найдите отношения длин отрезков, на которые каждый из отрезков AM, BN, CP делится двумя другими.

б) Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника, образованного прямыми AM, BN и CP.

279. Дан треугольник ABC. На стороне AB взята точка D, так, что $(ABD) = \beta$. На стороне AC взята точка E, так, что $(ACE) = \alpha$. Проведены прямые BE и CD, такие, что $(BE) \cap (CD) = K$. Найдите отношение площади четырехугольника $ADKE$ к площади треугольника ABC.

280. (Теорема Чевы.) Докажите, что если на сторонах AB, BC, AC (не на их продолжениях) треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1, B_1, то необходимым и достаточным условием пересечения прямых AA_1, BB_1 и CC_1 в одной точке является равенство:

$$(ABC_1) \cdot (BCA_1) \cdot (CAB_1) = -1.$$

281. Найдите множество центроидов треугольников PBQ постоянной площади, отсекаемых подвижной прямой PQ от данного угла ABC.

282. Дан треугольник ABC. Для каждой пары точек A_i и C_i на его основании AC, таких, что $|AA_i| = |CC_i|$, проведены прямые, параллельные сторонам треугольника, и взяты точки пересечения этих прямых. Найдите множество таких точек.

Глава IV

ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Окружность

Литература: [1], § 36; [2], § 12.

Пример 75. Исследуем взаимное расположение двух окружностей, заданных уравнениями $(x-a)^2+y^2=1$ и $x^2+(y-a)^2=1$, при различных значениях параметра a.

Решение. Заметим прежде всего, что если $a=0$, то данные окружности совпадают. Пусть теперь $a\neq 0$. Исключая из системы данных уравнений переменную y, приходим к квадратному уравнению:

$$2x^2-2ax+a^2-1=0.$$

Дискриминант этого уравнения $D=8-4a^2$.

Если $D>0$, т. е. $\begin{cases}-\sqrt{2}<a<\sqrt{2},\\ a\neq 0,\end{cases}$ то окружности пересекаются,

если $D=0$, т. е. $a=\sqrt{2}$ или $a=-\sqrt{2}$, то окружности касаются,

если $D<0$, т. е. $a<-\sqrt{2}$ или $a>\sqrt{2}$, то окружности общих точек не имеют.

Можно решать задачу иначе. Найдем сумму радиусов данных окружностей: $r_1+r_2=2$ и расстояние d между центрами C_1 $(a;\ 0)$ и C_2 $(0;\ a)$ окружностей: $d=|C_1C_2|=|a|\sqrt{2}$. Если $|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$, т. е. $0<|a|\sqrt{2}<2$, откуда $\begin{cases}-\sqrt{2}<a<\sqrt{2},\\ a\neq 0,\end{cases}$

то окружности пересекаются. Если $d=r_1+r_2$, т. е. если $|a|=\sqrt{2}$, то окружности касаются внешним образом. Если $d=r_1-r_2=0$, т. е. если $a=0$, то окружности совпадают.

Если $d>r_1+r_2$, т. е. если $|a|>\sqrt{2}$, то окружности расположены одна вне другой.

Пример 76. Найдем центр окружности, вписанной в треугольник с вершинами A $(0;\ 2)$, B $(3;\ -1)$, C $(2;\ -2)$. Система координат — прямоугольная декартова.

Решение. Будем искать центр вписанной окружности как точку пересечения биссектрис двух углов треугольника, например углов A и B.

Найдем уравнение прямой AB (проходящей через две данные точки): $x + y - 2 = 0$ — и уравнение прямой $AC : 2x + y - 2 = 0$. Следовательно, (см. [2], с. 135, формула (8)), расстояние от точки с координатами $(x; y)$ до прямой AB равно $\left|\frac{x+y-2}{\sqrt{2}}\right|$.

Аналогично расстояние от той же точки до прямой AC равно $\left|\frac{2x+y-2}{\sqrt{5}}\right|$. Значит, для точек биссектрисы угла A должно выполняться соотношение:

$$\left|\frac{x+y-2}{\sqrt{2}}\right| = \left|\frac{2x+y-2}{\sqrt{5}}\right|.$$

Так как точка O $(x_0; y_0)$ — центр вписанной окружности — лежит по ту же сторону от прямой AB, что и точка C, то при подстановке ее координат в левую часть уравнения прямой AB должно получиться выражение того же знака, что и при подстановке в это уравнение координат точки C. Подставляя координаты точки C в уравнение прямой AB, получаем: $2 + (-2) - 2 = -2$. Таким образом, для координат x_0 и y_0 искомого центра O выражение $x_0 + y_0 - 2$ должно быть отрицательным, т. е. $|x_0 + y_0 - 2| = -(x_0 + y_0 - 2)$.

Аналогично центр вписанной окружности лежит по ту же сторону от прямой AC, что и точка B, т. е. $2x_0 + y_0 - 2 > 0$, и, следовательно, $|2x_0 + y_0 - 2| = 2x_0 + y_0 - 2$. Таким образом, биссектриса угла A задается уравнением:

$$-\frac{x_0 + y_0 - 2}{\sqrt{2}} = \frac{2x_0 + y_0 - 2}{\sqrt{5}}.$$

Аналогично находим уравнение биссектрисы угла B:

$$\frac{x_0 + y_0 - 2}{\sqrt{2}} = \frac{x_0 - y_0 - 4}{\sqrt{2}}.$$

Чтобы найти искомые координаты $(x_0; y_0)$ точки O пересечения двух биссектрис, надо решить систему, составленную из двух последних уравнений.

Произведя необходимые вычисления, найдем координаты центра вписанной окружности: $x_0 = \sqrt{10} - 1$, $y_0 = -1$.

Задачи

В прямоугольной декартовой системе координат решите следующие задачи:

283. Найдите координаты центра и радиус окружности, заданной уравнением $36x^2 + 36y^2 - 72x + 12y - 11 = 0$.

284. Определите расположение точки M (2; 7) относительно окружности

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0.$$

285. Найдите координаты центра и радиус окружности, проходящей через точки A (4; 6), B (—2; —2), C (—2; 6).

286. Найдите центр окружности, радиус которой равен 50, зная, что эта окружность отсекает на оси Ox хорду, длина которой равна 28, и проходит через точку M (0; 8).

287. Составьте уравнение окружности с центром в точке O (5; 2), касающейся прямой $x - 3y + 2 = 0$.

288. Даны координаты вершин треугольника: A (0; 0), B (3; 0), C (0; 4). Составьте уравнения окружностей: 1) описанной; 2) вписанной; 3) вневписанных.

289. Составьте уравнения окружностей, проходящих через точку M (2; 0) и касающихся двух параллельных прямых $x - 2y + 6 = 0$ и $x - 2y - 4 = 0$.

290. Найдите множество точек, сумма квадратов расстояний которых до двух данных точек есть величина постоянная.

291. Найдите множество точек, отношение расстояний которых до двух данных точек есть величина постоянная, отличная от единицы.

292. Точки A и B — концы диаметра окружности, а точка O — центр этой окружности. Найдите множество точек M, расположенных вне данной окружности, удовлетворяющих условию $|PM| = |PB|$, где P — точка пересечения луча OM с окружностью.

293. Определите, при каком значении λ окружность $x^2 + y^2 - 6x - 4y + \lambda = 0$ касается прямой $2x - y + 1 = 0$.

294. Напишите уравнение окружности с центром в точке O (2; —4), касающейся внутренним образом окружности

$$x^2 + y^2 - 4x + 10y + 25 = 0.$$

295. Докажите, что не существует значений параметра a, при которых окружность $x^2 + y^2 - 2ax + 6y - 5 = 0$ касается окружности $x^2 + y^2 = 1$.

296. Найдите уравнение образа окружности $x^2 + y^2 = 1$ при гомотетии H_O^k, где O (2; 3), $k = 5$.

297. Окружность радиуса 1 катится по прямой $x + 2y = 1$. Определите координаты центра окружности в момент ее касания оси Ox.

§ 2. Эллипс

Литература: [1], § 36, § 39—40; [2], § 19—20, § 23—24; [3], § 34.

Пример 77. Докажем, что при равномерном сжатии к диаметру окружность отображается в эллипс.

Решение. Воспользуемся каноническим уравнением окружности: $x^2 + y^2 = r^2$. Будем осуществлять равномерное сжатие окружности по оси Oy (к оси Ox). Это означает, что абсциссы точек окружности остаются без изменения, а все ординаты умножаются на некоторое фиксированное число k. Таким образом, точка с координатами $(x; y)$ переходит в точку с координатами $(x'; y')$, где $x = x'$, $y = ky'$.

Из соотношения $x^2 + y^2 = r^2$ следует, что координаты x' и

y' будут связаны зависимостью: $(x')^2 + k^2 (y')^2 = r^2$, или $\frac{(x')^2}{r^2} + \frac{(y')^2}{\left(\frac{r}{k}\right)^2} = 1$.

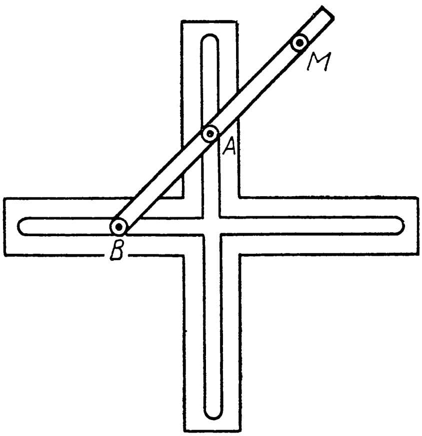


Рис. 71

Как известно, последнее уравнение действительно определяет эллипс с полуосями r и $\frac{r}{k}$.

Пример 78. На рисунке 71 изображен прибор, называемый эллиптическим циркулем. Докажем, что при движении точек A и B в соответствующих прорезях фиксированная точка M стержня AB описывает эллипс.

Решение. Если $(MN) \perp (OA)$ (рис. 72), то при любом положении стержня выполняется соотношение $\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|AN|}{|AM|}$, откуда следует производная пропорция: $\frac{|ON|}{|BM|} = \frac{|AN|}{|AM|}$.

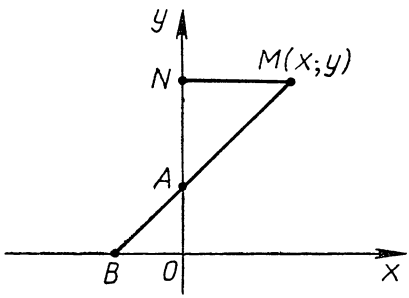


Рис. 72

Выбирая оси координат, как указано на рисунке 72, и обозначая координаты точки M через x и y, а длины отрезков AM и BM соответственно через a и b, перепишем последнюю пропорцию в следующем виде:

$$\frac{|y|}{b} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}.$$

Это уравнение легко приводится к следующему виду: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, т. е. точка M описывает эллипс.

Пример 79. В прямоугольной декартовой системе координат эллипс задан уравнением $\frac{x^2}{2\sqrt{2}} + \frac{y^2}{1} = 1$. Введена новая, косоугольная система координат, начало которой находится в центре этого эллипса, ось абсцисс направлена по биссектрисе первого квадранта первоначальной системы координат, а ось ординат направлена в точку $M(-4; \sqrt{2})$. Найдем уравнение эллипса в новой системе координат.

Решение. Воспользуемся формулами преобразования координат:

$x=\alpha_1 x'+\alpha_2 y'$, $y=\beta_1 x'+\beta_2 y'$,

где $\overrightarrow{OA'} = (\alpha_1;\ \beta_1)$, $\overrightarrow{OB'} = (\alpha_2;\ \beta_2)$ (рис. 73).

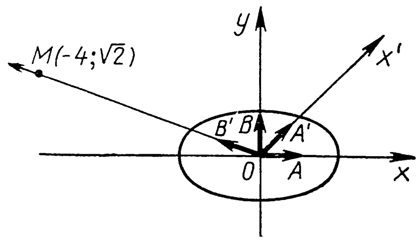


Рис. 73

Ясно, что $\alpha_1 = \beta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Что же касается координат вектора $\overrightarrow{OB'}$, то их можно получить из координат точки M делением на $|OM| = 3\sqrt{2}$.

Следовательно, $\alpha_2 = -\frac{4}{3\sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$ и формулы преобразования координат имеют вид:

$$x = x'\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3}y', \quad y = x'\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{y'}{3}.$$

Подставляя эти выражения в данное уравнение эллипса, получим:

$$\frac{(x')^2}{\frac{16-4\sqrt{2}}{7}} + \frac{(y')^2}{\frac{18\sqrt{2}-9}{7}} = 1.$$

Пример 80. Дано уравнение эллипса в полярных координатах $\rho = \frac{3}{1-0{,}5\cos\varphi}$. Найдем каноническое уравнение этого эллипса.

Решение. Надо найти значения a и b. По формуле (6) (см. [2], с. 201) $p = 3$, $\varepsilon = 0{,}5$.

По определению ρ (см. [2], с. 200) — это абсолютная величина ординаты той точки эллипса, абсцисса которой при каноническом расположении эллипса равна половине фокусного расстояния, т. е. равна c. Подставляя его в уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вместо x, получаем: $\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Отсюда: $y^2 = b^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) = \frac{b^2(a^2-c^2)}{a^2} = \frac{b^4}{a^2}$. Значит, в нашем примере $b^2 = 3a$. С другой стороны (см. [2], с. 166), $\frac{c}{a} = 0{,}5$. А так как $c = \sqrt{a^2-b^2}$, то $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = 0{,}5$, откуда $3a^2 = 4b^2$.

Решая теперь систему уравнений $\begin{cases} 3a = b^2, \\ 3a^2 = 4b^2, \end{cases}$ находим, что $a^2 = 16$, $b^2 = 12$.

Таким образом, искомое каноническое уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

Задачи

298. Составьте каноническое уравнение эллипса, зная, что:

а) длины полуосей его соответственно равны 4 и 2;

б) расстояние между фокусами равно 6, а длина большей полуоси равна 5;

в) длина малой полуоси равна 3, эксцентриситет равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) сумма длин полуосей равна 8 и расстояние между фокусами равно 8;

д) директрисы задаются уравнениями $x = +12$, $x = -12$ и эксцентриситет равен $\frac{1}{3}$.

299. Найдите эксцентриситет эллипса, зная, что расстояние между его директрисами в четыре раза больше расстояния между фокусами.

300. Точка A перемещается так, что периметр треугольника ABC (BC — неподвижное основание) сохраняет постоянную величину. Найдите траекторию вершины, если основание BC равно 24 см, а периметр равен 50 см.

301. Две концентрические окружности расположены одна внутри другой. Найдите множество центров окружностей, касающихся обеих данных окружностей.

302. На эллипсе, фокусы которого расположены в точках F_1 (—5; 0), F_2 (5; 0), найдите точки, которые отстоят в пять раз дальше от директрисы $x = 7{,}2$, чем от директрисы $x = -7{,}2$.

303. На эллипсе, определяемом уравнением $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$, найдите точки, расстояние которых до правого фокуса в четыре раза больше расстояния до левого фокуса.

304. На эллипсе, координаты фокусов которого (3; 0) и (—3; 0), взята точка с координатами (3; 3,2). Найдите расстояния этой точки до директрис эллипса.

305. Центр эллипса, малая ось которого в три раза меньше большой оси, находится в точке C (2; 3). Зная, что одна из директрис определяется уравнением $x = \frac{9\sqrt{2}+8}{4}$, составьте уравнение эллипса.

306. На плоскости даны фокусы F_1 и F_2 эллипса и отрезок AB, длина которого равна длине большой полуоси. Постройте директрисы этого эллипса.

307. Эллипс касается оси ординат в начале координат. Центр эллипса находится в точке C (5; 0). Составьте уравнение этого эллипса, зная, что эксцентриситет его равен 0,8.

308. Какой вид получит уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, если повернуть систему координат вокруг ее начала на угол 45°?

309. В эллипсе, заданном уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $[AB]$ — большая ось, а точка M движется по эллипсу. Определите траекторию, которую опишет при этом центр тяжести треугольника ABM.

310. Даны две окружности с общим центром в начале прямоугольной системы координат и радиусами, равными соответственно a и b ($a > b$). Из начала координат проведен луч l. Пусть он пересекает данные окружности соответственно в точках A и B, M — точка пересечения прямых, проведенных через точки A и B соответственно параллельно осям Ox и Oy. Докажите, что при вращении луча l около начала координат точка M опишет эллипс.

311. Точка P движется по окружности, уравнение которой имеет вид $x^2+y^2=1$. Пусть точка Q — проекция точки P на ось Ox. По какой траектории движется точка M, определяемая соотношением $(PQM)=\lambda$?

312. По данному уравнению эллипса в полярных координатах $\rho=\frac{3\sqrt{2}}{2-\cos\varphi}$ напишите каноническое уравнение этого эллипса.

313. По данному каноническому уравнению эллипса

$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{10}=1$$

напишите уравнение этого эллипса в полярных координатах.

314. Докажите, что во всякий эллипс можно вписать треугольник так, чтобы центроид треугольника совпал с центром эллипса.

315. Докажите, что если два различных эллипса имеют более двух общих точек, то не существует аффинного преобразования, ставящего обоим эллипсам в соответствие окружности.

316. Докажите, что среди пар эллипсов, имеющих по две общие точки, существуют такие пары, для которых можно подобрать аффинное преобразование, ставящее обоим эллипсам в соответствие окружности.

§ 3. Гипербола

Литература: [1], § 37, § 39—40; [2], § 21, § 23—24; [3], § 35.

Пример 81. Даны две окружности: $\omega_1=(O_1, r_1)$ и $\omega_2=(O_2, r_2)$, причем $r_1>r_2$ и $r_1+r_2<|O_1O_2|$. Рассмотрим множество центров O всех таких окружностей ω, которых обе данные окружности касаются внешним образом, и центров O' таких окружностей ω', которых обе данные окружности касаются внутренним образом. Докажем, что это множество точек — две ветви гиперболы.

Решение. Если обе данные окружности касаются окружности и внешним образом, то, как известно, $|O_1O|=r_1+r$, $|O_2O|=r_2+r$, где r — радиус окружности ω, так что $|OO_1|-|OO_2|=r_1-r_2$ (рис. 74).

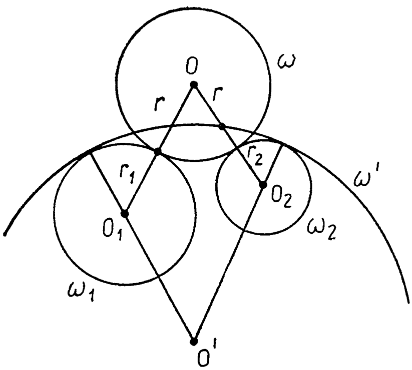


Рис. 74

Обратно: пусть точка O — такая точка плоскости, что $|OO_1| - |OO_2| = r_1 - r_2$. Обозначим $|OO_1| - r_1 = |OO_2| - r_2$ через r. Тогда обе данные окружности будут касаться окружности (O, r) внешним образом, потому что $|OO_1| = r + r_1$, $|OO_2| = r + r_2$.

Если же обе данные окружности касаются внутренним образом окружности $\omega' = (O', r')$, то $|O'O_1| = r' - r_1$, $|O'O_2| = r' - r_2$ и, таким образом, $|O'O_2| - |O'O_1| = r_1 - r_2$.

Обратно: если $|O'O_2| - |O'O_1| = r_1 - r_2$, то, обозначая $|O'O_1| + r_1 = |O'O_2| + r_2$ через r', найдем, что $|O'O_1| = r' - r_1$ и $|O'O_2| = r' - r_2$, так что обе данные окружности будут касаться окружности (O', r') внутренним образом.

Итак, центры окружностей ω и ω' образуют гиперболу, для которой центры данных окружностей служат фокусами, а действительная ось равна абсолютной величине разности радиусов окружностей ω_1 и ω_2.

Пример 82. Составим уравнение гиперболы, зная, что фокусы ее находятся в точках F_1 (2; 3) и F_2 (1; 0) и что гипербола проходит через точку P (2; 0).

Решение. Находим $|PF_1| = 3$ и $|PF_2| = 1$. Тогда $2a = ||PF_1| - |PF_2|| = 2$.

Следовательно, искомая гипербола есть множество точек M $(x;\ y)$, для которых $|MF_1 - MF_2| = 2$. Поэтому ее уравнение запишется так:

$$\left|\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}\right| = 2.$$

Это уравнение после преобразований приводится к виду:

$$3x^2 + 5y^2 - 6xy + 24y - 12 = 0.$$

Пример 83. Даны уравнения асимптот гиперболы $y = \pm 3x$ и уравнения ее директрис $x = \pm 1$. Составим каноническое уравнение гиперболы.

Решение. Так как уравнения асимптот гиперболы записываются в виде $y = \pm \frac{b}{a}x$ (см. [2], с. 180), то в данном случае $\frac{b}{a} = 3$. С другой стороны, директрисы записываются уравнениями $x = \pm \frac{a}{\text{в}}$ или $x = \pm \frac{a^2}{c}$ (см. [2], с. 183). Значит, $\frac{a^2}{c} = 1$.

Итак, $b = 3a$, $c = a^2$. Но по определению $b^2 = c^2 - a^2$. Полученные соотношения позволяют найти a^2 и b^2: $a^4 = 10a^2$, $a^4 - a^2 =$

$= 9a^2$, $a^2 = 10$. Значит, $b^2 = 9a^2 = 90$, и каноническое уравнение данной гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{90} = 1.$$

Пример 84. Найдем длины полуосей гиперболы, заданной в полярных координатах, уравнением $\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\varphi}$.

Решение. Так же как это было сделано для эллипса в примере 80, можно показать, что и для гиперболы $\frac{b^2}{a} = p$, т. е. $\frac{c^2 - a^2}{a} = p$. С другой стороны, $c = a\varepsilon$. Подстановка в предыдущее равенство дает: $\frac{a^2\varepsilon^2 - a^2}{a} = p$ или $a\varepsilon^2 - a = p$, откуда $a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}$. А так как $b^2 = ap$, то $b^2 = \frac{p^2}{\varepsilon^2 - 1}$, откуда $b = \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}$.

Задачи

317. Составьте каноническое уравнение гиперболы по следующим данным:

а) расстояние между фокусами равно 10, расстояние между вершинами равно 8;

б) длина действительной оси равна 6, гипербола проходит через точку M (9; 4);

в) расстояние между фокусами равно 6, эксцентриситет равен 1,5;

г) уравнения асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$, расстояние между фокусами равно 20;

д) расстояние между директрисами равно $22\frac{2}{13}$, расстояние между фокусами равно 26;

е) эксцентриситет равен 1,5, расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$;

ж) уравнения директрис $x = \pm \frac{3}{2}$, расстояние от точки, взятой на гиперболе, до фокуса в два раза больше расстояния от этой точки до соответствующей директрисы.

318. Для гиперболы, заданной уравнением $16x^2 - 9y^2 = 144$, найдите длины полуосей, эксцентриситет, фокусы, уравнения асимптот и директрис.

319. На правой ветви гиперболы, заданной уравнением $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{13} = 1$, найдите точки, фокальные радиусы которых равны 8.

320. Уравнения асимптот гиперболы $y = \pm 0{,}75x$. Найдите эксцентриситет.

321. Составьте уравнение гиперболы, эксцентриситет которой равен 3 и фокусы находятся в точках F_1 (0; —2), F_2 (6; —2).

322. Составьте уравнение гиперболы, эксцентриситет которой равен 5, один из фокусов находится в точке F (3; 3) и уравнение соответствующей директрисы $x + y - 2 = 0$.

323. Найдите уравнение гиперболы, проходящей через точку M (—5; 3) и имеющей общие фокусы с равносторонней гиперболой $x^2 - y^2 = 8$.

324. Найдите уравнения прямых, касающихся гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ и параллельных прямой $2x - y - 1 = 0$.

325. Под каким углом к оси Ox надо провести прямые через точку M (1; 0), чтобы эти прямые касались гиперболы $x^2 - y^2 = 4$?

326. Эксцентриситет гиперболы равен 2, фокальный радиус ее точки M равен 16. Вычислите расстояние точки M до соответствующей этому фокусу директрисы.

327. Найдите угол φ между асимптотами гиперболы, зная ее эксцентриситет ε.

328. Найдите множество центров окружностей, отсекающих на двух перпендикулярных прямых отрезки длиной $2a$ и $2b$.

329. Точки A, B, C — три данные вершины четырехугольника. Найдите множество четвертых вершин D, таких, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

330. Два стержня, вращаясь в одной плоскости в противоположных направлениях около двух неподвижных точек A и B, образуют с прямой AB в каждый момент углы, сумма которых равна $\frac{\pi}{2}$. Определите траекторию точки пересечения этих стержней.

331. Найдите множество центров тяжести треугольников, две вершины которых совпадают с фокусами гиперболы $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$, а третья вершина перемещается по данной гиперболе.

332. Докажите, что директриса гиперболы проходит через основание перпендикуляра, опущенного из соответствующего фокуса на асимптоту гиперболы. Выразите длину этого перпендикуляра через оси гиперболы.

333. Докажите, что произведение расстояний любой точки гиперболы до двух ее асимптот есть для данной гиперболы величина постоянная.

334. Докажите, что отрезок асимптоты от центра гиперболы до точки пересечения асимптоты с директрисой равен действительной полуоси гиперболы.

335. Напишите каноническое уравнение гиперболы, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \frac{4}{3 - \sqrt{13}\cos\varphi}$.

336. Составьте уравнение гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ в полярных координатах.

§ 4. Парабола

Литература: [1], § 38—40; [2], § 22—24; [3], § 36.

Пример 85. Найдем образ параболы, определяемой уравнением $y^2 = 2px$ при гомотетии с центром в фокусе параболы и $k = 2$.

Решение. Обратимся к полярной системе координат. Тогда, согласно формуле (11) (см. [3], с. 234), парабола задается уравнением:

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos\varphi}.$$

При указанном преобразовании подобия фокальный радиус каждой точки кривой увеличивается вдвое. Поэтому уравнение образа параболы в той же системе координат будет иметь вид:

$$\rho = \frac{2p}{1 - \cos\varphi}.$$

Последнее уравнение определяет параболу, параметр которой вдвое больше параметра данной параболы.

Каноническое уравнение полученной параболы имеет вид:

$$y^2 = 4px.$$

Пример 86. Выясним, как расположена парабола

$$y = 3x^2 - 5x + 10$$

относительно системы координат.

Решение. Преобразуем данное уравнение:

$$y = 3\left(x^2 - \frac{5}{3}x\right) + 10 = 3\left(x^2 - 2\cdot\frac{5}{6}x + \frac{25}{36}\right) + \frac{95}{12} =$$
$$= 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{95}{12},$$

или

$$y - \frac{95}{12} = 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2.$$

Обозначим $y - \frac{95}{12}$ через y', а $x - \frac{5}{6}$ через x', получим каноническое уравнение параболы:

$$y' = 3x'^2, \text{ или } x'^2 = \frac{1}{3}y'.$$

Соотношения $y + \frac{95}{12} = y'$, $x + \frac{5}{6} = x'$ показывают, что система координат $O'x'y'$ получена из первоначальной системы Oxy параллельным переносом, причем новое начало O' находится в точке с прежними координатами $\left(\frac{5}{6};\ \frac{95}{12}\right)$.

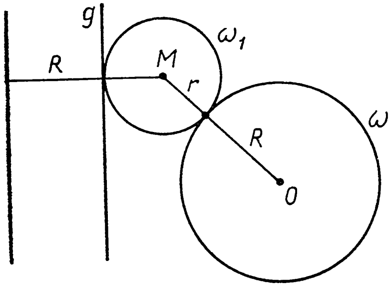


Рис. 75

Парабола $x'^2 = \frac{1}{3} y'$ симметрична относительно оси $O'y'$, вершина ее находится в начале O' новой системы координат, ветви направлены в сторону положительной полуоси $O'y'$.

Пример 87. Прямая g проходит вне окружности $\omega = (O, R)$. Найдем множество центров M всех окружностей, касающихся внешним образом окружности ω и прямой g.

Решение. Пусть (рис. 75) $\omega_1 = (M, r)$ — одна из таких окружностей, тогда $|OM| = r + R$. Проведем прямую l, параллельную прямой g, отстоящую от нее на расстоянии R. Тогда расстояние точки M до прямой l будет равно $r + R$ и равно $|OM|$, т. е. точка M лежит на параболе.

Обратно, для любой точки M этой параболы расстояние $|OM|$ равно расстоянию точки M до прямой l, причем $|OM| > R$ (поскольку для точек N внутри окружности $|NO| < R$, а расстояние до прямой l больше R), и тогда окружность с центром в точке M радиуса $r = |OM| - R$ будет касаться прямой g и окружности ω.

Итак, искомое множество точек M является параболой с фокусом в точке O и директрисой l.

Пример 88. Найдем условие, при котором прямая $y = kx + b$ касается параболы $y^2 = 2px$.

Решение. Решая систему уравнений:

$$\begin{cases} y = kx + b, \\ y^2 = 2px, \end{cases}$$

получаем квадратное уравнение:

$$k^2x^2 + 2(bk - p)x + b^2 = 0, \qquad (*)$$

дискриминант которого $D = 4p^2 - 8bkp$.

Прямая $y = kx + b$ будет касаться параболы $y^2 = 2px$ тогда и только тогда, когда корни уравнения (*) будут действительными и равными (необходимое и достаточное условие касания состоит в том, что $D = 0$, см. [2], § 29). Так как $p \neq 0$, то из уравнения $4p^2 - 8bkp = 0$ следует искомое соотношение $p = 2bk$.

Задачи

337. Составьте каноническое уравнение параболы по следующим данным:

а) $p = 3$;

б) парабола проходит через точку P (1; —4);

в) директриса определяется уравнением $x + 3 = 0$.

338. Составьте уравнение параболы по следующим данным:

а) парабола симметрична относительно оси Oy, фокус помещается в точке F (0; 2), вершина совпадает с началом координат;

б) вершина находится в начале координат, парабола расположена в нижней полуплоскости, симметрична относительно оси Oy и ее параметр $p = 0{,}6$;

в) фокус имеет координаты F (5; 0), а ось ординат служит директрисой;

г) парабола симметрична относительно оси Oy и проходит через начало координат; прямая $y = 2$ пересекает параболу в точках с абсциссами 3 и —3.

339. Вершина параболы находится в точке M (—2; 2), уравнение директрисы $x - 1 = 0$. Составьте уравнение параболы, найдите координаты фокуса и уравнение оси параболы.

340. На параболе $y^2 = 8x$ найдите точки, фокальный радиус которых равен 20.

341. Найдите фокальный радиус точки параболы, ордината которой равна 8, если вершина параболы находится в начале координат, а фокус — в точке F (2; 0). Найдите угловой коэффициент прямой, соединяющей фокус с указанной точкой.

342. Дано уравнение параболы $y^2 = 2x$. Найдите угловые коэффициенты касательных, проходящих через точку M (—2; 0).

343. Найдите множество центров окружностей, проходящих через данную точку и касающихся данной прямой.

344. Докажите, что центры всех окружностей, касающихся данной прямой и данной окружности, центр которой находится на данной прямой, располагаются на двух параболах. Укажите положение директрис и вершин этих парабол.

345. Арка моста имеет форму параболы. Определите параметр параболы, зная, что пролет арки равен 24 м, а высота — 6 м.

346. Камень, брошенный под острым углом к горизонту, описал дугу параболы и упал на расстоянии 16 м от начального положения. Определите параметр параболической траектории, зная, что наибольшая высота, достигнутая камнем, равна 12 м.

347. Струя воды, выбрасываемая фонтаном, принимает форму параболы, параметр которой $p = 0{,}1$. Определите высоту струи, если известно, что она падает в бассейн на расстоянии 2 м от места выхода.

348. Поперечное сечение крыши вагона имеет форму параболы. Ширина крыши 3,6 м. Определите высоту крыши, если на расстоянии 1,44 м от края высота крыши равна 0,48 м.

349. Выясните взаимное расположение параболы $y^2 = 2px$ и окружности $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ в зависимости от значения параметра p (поясните результаты графически).

350. Докажите, что через каждую точку параболы можно провести единственную касательную к этой параболе.

351. Каждый из катетов AC и BC прямоугольного треуголь-

ника делится на 10 конгруэнтных частей. Через точки B_1, B_2, ..., ... ,B_9 деления катета AC проводятся прямые b_1, b_2, b_3, ..., b_9, параллельные BC. Вершина A соединяется с точками A_1, A_2, ..., A_9 деления катета CB прямыми a_1, a_2, a_3, ..., a_9. Докажите, что точки пересечения прямых a_1 и b_1, a_2 и b_2, ..., a_9 и b_9 и точки A и B лежат на одной параболе.

§ 5. Линии второго порядка

Литература: [1], гл. IV; [2], гл. VII; [3], гл. VI.

Пример 89. Найдем, какую линию определяет уравнение:

$$2x^2 - y^2 - xy + 4x - y + 2 = 0.$$

Решение. Приведем данное уравнение к виду:

$$y^2 + (x + 1)\, y - (2x^2 + 4x + 2) = 0$$

и решим его относительно y. Получим:

$$y_1 = x + 1, \quad y_2 = -2x - 2.$$

Этот результат показывает, что данная линия второго порядка распадается на две прямые линии: $y = x + 1$ и $y = -2x - 2$. Объединение этих двух прямых изображено на рисунке 76.

Пример 90. Найдем асимптоты линии второго порядка:

$$x^2 - xy + 1 = 0.$$

Решение. Уравнение асимптоты, не параллельной оси Oy, можно записать в явной форме в виде $y = kx + b$. Подставляя выражение y в уравнение линии, получаем:

$$x^2 - x\,(kx + b) + 1 = 0$$

или, иначе:

$$x^2\,(1 - k) - bx + 1 = 0.$$

Для отыскания уравнения асимптоты надо приравнять нулю коэффициенты при x^2 и при x: $1 - k = 0$, $-b = 0$, откуда $k = 1$, $b = 0$. Итак, $y = x$ — искомая асимптота.

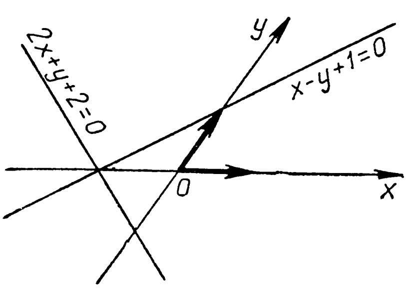


Рис. 76

Посмотрим, нет ли асимптот, параллельных оси Oy. Уравнение прямой, параллельной оси Oy, записывается в виде $x = a$. Подстановка $x = a$ в уравнение кривой дает:

$$-ay + (1 + a^2) = 0.$$

В этом уравнении коэффициент при y^2 равен нулю. Необходимо, чтобы обратился в нуль и коэффициент при y, отсюда $a=0$.

Таким образом, $x = 0$ — вторая асимптота данной линии.

Пример 91. Составим уравнения касательных к линии второго порядка $x^2 + 2y = 0$, проходящих через точку M (3; —4).

Решение. Уравнение искомой касательной имеет вид $y + 4 = k(x - 3)$. Решая это уравнение совместно с уравнением данной линии, получаем квадратное уравнение:

$$x^2 + 2kx - 2(3k + 4) = 0.$$

Прямая, проходящая через точку M (3; —4), касается данной линии тогда и только тогда, когда последнее уравнение имеет кратный корень, т. е. когда дискриминант этого уравнения обращается в нуль:

$$k^2 + 2(3k + 4) = 0.$$

Отсюда находим два значения $k: k_1 = -2$, $k_2 = -4$. Соответственно получаем уравнения двух касательных: $y + 4 = -2(x-3)$ и $y + 4 = -4(x - 3)$, или (в общем виде): $2x + y - 2 = 0$, $4x + y - 8 = 0$.

Пример 92. Найдем уравнение диаметра эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, если сопряженные этому диаметру хорды заданы уравнением:

$$y = kx + m,$$

где k — общий угловой коэффициент хорд, m — параметр.

Решение. Пусть M (X; Y) — середина какой-либо из сопряженных хорд, P_1 и P_2 — концы хорды (рис. 77).

Перейдем от системы координат Oxy к системе $Mx'y'$, производя параллельный перенос системы координат.
Тогда

$$x = x' + X,$$
$$y = y' + Y.$$

В новой системе координат данный эллипс задается уравнением:

$$\frac{(x' + X)^2}{a^2} + \frac{(y' + Y)^2}{b^2} = 1.$$

Что же касается хорды P_1P_2 эллипса, то прямая P_1P_2 задается уравнением $y' = kx'$, потому что теперь она проходит через начало координат, а угловой коэффициент k при параллельном переносе системы координат остается неизменным.

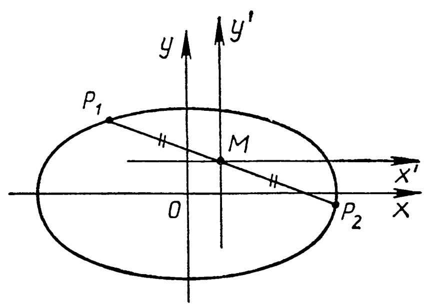


Рис. 77

Решая систему, состоящую из уравнения эллипса и уравнения прямой P_1P_2, методом подстановки, мы получим квадратное уравнение:

$$(b^2 + a^2k^2)\, x'^2 + 2\,(b^2X+a^2kY)\, x' + (b^2X^2 + a^2Y^2 - a^2b) = 0.$$

Пусть x_1' и x_2' — корни этого уравнения, т. е. абсциссы точек P_1 и P_2 в системе координат $Mx'y'$. Так как середина M отрезка P_1P_2 находится в начале координат, то $x_1' + x_2' = 0$. Но $x_1' + x_2' = -\frac{b^2X+akY}{b^2+a^2k^2}$ (по теореме Виета).

Таким образом,

$$b^2X + a^2kY = 0.$$

Это и есть уравнение, связывающее координаты X и Y середины любой из сопряженных хорд, т. е. уравнение искомого диаметра.

Итак, уравнение диаметра эллипса, делящего пополам хорды с угловым коэффициентом k $(k \neq 0)$, можно записать в следующем виде:

$$Y = -\frac{b^2}{a^2k}X.$$

Это уравнение можно также получить из общей теории (см. [3], с. 262, уравнение (4)).

П р и м е р 93. Докажем, что при $a \neq b$ эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ не имеет других осей симметрии, кроме осей координат.

Р е ш е н и е. Ось симметрии эллипса — это главный его диаметр, т. е. диаметр, перпендикулярный сопряженным ему хордам. Если этот диаметр отличен от осей координат Ox и Oy, то его уравнение можно записать в виде: $y = -\frac{b^2}{a^2k}x$ (см. пример 92). Здесь k — угловой коэффициент сопряженных хорд, а $k' = -\frac{b^2}{a^2k}$ — угловой коэффициент диаметра. Диаметр перпендикулярен сопряженным хордам тогда и только тогда, когда $kk' = -1$. А это приводит к соотношению $-\frac{b^2}{a^2} = -1$, т. е. $a = b$, что противоречит условию.

С л е д с т в и е. Если два сопряженных диаметра эллипса равны и перпендикулярны, то этот эллипс — окружность. Действительно, пара перпендикулярных сопряженных диаметров эллипса при $a \neq b$ единственна, причем эти диаметры не равны друг другу. И только при $a = b$ каждые два сопряженных диаметра эллипса равны и перпендикулярны, в этом случае эллипс является окружностью.

П р и м е р 94. Докажем, что эллипс однозначно определяется парой его сопряженных диаметров.

Р е ш е н и е. Задачу можно переформулировать так. Даны два отрезка AB и CD, пересекающиеся в некоторой точке O и делящиеся в этой точке пополам (рис. 78). Надо доказать, что существует и притом единственный эллипс ε, для которого данные отрезки AB и CD служат сопряжёнными диаметрами.

1) Доказательство существования. Построим окружность ω на отрезке AB как на диаметре. Пусть $[C'D']$ — ее диаметр, перпендикулярный $[AB]$. Рассмотрим перспективно-аффинное преобразование P, определяемое осью AB и парой точек: $C' \to C$. Образ окружности ω будет некоторым эллипсом ε, так как аффинный образ окружности — всегда эллипс. Далее: $P(A, B) = (A, B)$, $P(C', D') = (C, D)$. А так как аффинное преобразование ставит сопряженным диаметрам окружности AB и $C'D'$ в соответствие опять сопряженные диаметры ее образа ε, то эллипс ε — искомый.

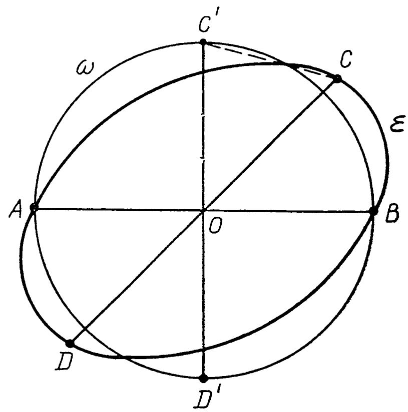


Рис. 78

2) Доказательство единственности. Если бы существовал еще какой-либо эллипс ε' с теми же сопряженными диаметрами AB и CD, то его образ при преобразовании P^{-1} представлял бы некоторый эллипс ε с сопряженными диаметрами AB и $C'D'$. Но, согласно следствию из примера 93, ε — окружность с диаметрами AB и $C'D'$, т. е. $\varepsilon \equiv \omega$. Значит, $P^{-1}(\varepsilon') = \omega$, так что $P(\omega) = \varepsilon'$. А так как также $P(\omega) = \varepsilon$, то $\varepsilon \equiv \varepsilon'$. Единственность доказана.

Пример 95. Эллипс ε задан парой сопряженных диаметров AB и CD (см. пример 94). Построим какую-либо точку M этого эллипса, отличную от точек A, B, C и D.

Решение. Выберем опять перспективно-аффинное преобразование P таким образом, чтобы точки O, C, B перешли соответственно в точки O, C', B', где $(OC') \perp (AB)$, $|OC'| = |OB|$. Тогда, как показано в примере 94, данному эллипсу будет соответствовать окружность $\omega = (O, |OB|)$.

Теперь задача сводится к построению образа точки M', лежащей на окружности ω и отличной от точек A, B, C', D'. Это построение показано на рисунке 79.

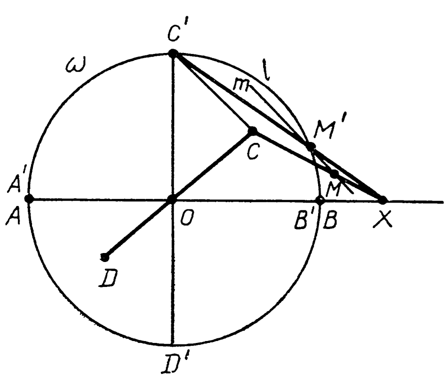


Рис. 79

Пример 96. Эллипс задан парой сопряженных диаметров AB и CD. Дана некоторая прямая p, пересекающая (AB) в точке M и (CD)

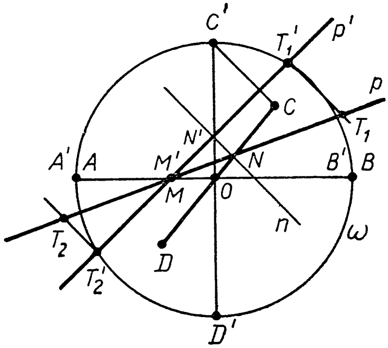


Рис. 80

в точке N. Построим точки пересечения прямой p с эллипсом.

Решение. Применим опять преобразование, описанное в предыдущих примерах. Для выполнения требуемого построения нужно прежде всего найти прямую p' — образ прямой p при этом преобразовании. Сделаем это так (рис. 80):

1) M': $M' = M$, $M = p \cap (AB)$;
2) n: $N \in n$, $n \parallel (CC')$;
3) N': $N' = (O'C') \cap n$, $O' = O$;
4) p': $p' = (M'N')$.

Теперь мы пришли к совсем простой задаче: задана окружность ω (парой сопряженных диаметров) и прямая p'; требуется построить прообразы точек пересечения прямой p' с окружностью ω. Пусть $p' \cap \omega = \{T_1', T_2'\}$. Построим далее точки T_1 и T_2 — прообразы точек T_1' и T_2' в преобразовании P. Это построение выполнено на рисунке 80.

Пример 97. Найдем главные диаметры линии второго порядка

$$x^2 + 6xy + y^2 + 4x - 8y + 1 = 0.$$

Решение. Воспользуемся уравнением (3′) (см. [2], с. 270) для нахождения угловых коэффициентов главных диаметров: $a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0$, т. е. $3k^2 - 3 = 0$. Отсюда получаем для k два значения: $k = +1$ и $k = -1$.

Обращаясь теперь к уравнению (4) ([2], с. 259) и вспоминая, что $k = p_2 : p_1$, положим:

$$p_1 = p_2 = 1 \quad \text{в случае } k = 1;$$
$$p_1 = -p_2 = 1 \quad \text{в случае } k = -1.$$

Тогда для искомых диаметров получим соответственно уравнения $2x + 2y - 1 = 0$ и $x - y - 3 = 0$.

Пример 98. Приведем уравнение $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 6x - 8y + 2 = 0$ к каноническому виду путем преобразования прямоугольной системы координат. Построим кривую, заданную этим уравнением.

Решение. Заметим прежде всего, что $\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$,

т. е. данная кривая — центральная.

Найдем центр этой кривой по формулам (5) (см. [2], с. 261):

$$\begin{cases} 9x - 2y + 3 = 0 \\ -2x + 6y - 4 = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем координаты центра: $x = -0{,}2$; $y = 0{,}6$.

Перенеся начало координат в центр (см. [2], с. 213, формулы (6)), приведем данное уравнение к виду:

$$9x'^2 - 4x'y' + 6y'^2 = 1.$$

Найдем теперь корни характеристического уравнения:

$$s^2 - 15s + 50 = 0$$

(см. формулу (4) [2], с. 236): $s_1 = 5$, $s_2 = 10$, и по формуле (5) (см. [2], с. 237) получим: $k_1 = \operatorname{tg}\alpha = \frac{5-9}{-2} = 2$. Зная тангенс угла поворота, можно найти его синус и косинус:

$$\sin\alpha = \pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Здесь $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ надо брать с одинаковыми знаками, например $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Выполним теперь поворот системы координат на угол α, для этого воспользуемся формулами (2) ([1], с. 135):

$$x' = \frac{X-2Y}{\sqrt{5}}, \quad y' = \frac{2X+Y}{\sqrt{5}}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1), получим каноническое уравнение данной линии: $5X^2 + 10Y^2 = 1$, или, иначе:

$$\frac{X^2}{\frac{1}{5}} + \frac{Y^2}{\frac{1}{10}} = 1.$$

Полученное нами каноническое уравнение — это уравнение эллипса. Построение этого эллипса можно осуществить в такой последовательности (рис. 81):

1) изобразить оси исходной системы координат Oxy;

2) построить центр P (—0,2; 0,6);

3) построить оси системы координат $Px'y'$, отнесенной к центру кривой;

4) построить оси системы координат PXY, в которую преобразуется система $Px'y'$ при повороте на угол $\alpha = \operatorname{arctg} 2$ вокруг начала координат;

5) построить эллипс $\frac{X^2}{0,2} + \frac{Y^2}{0,1} = 1$, отнеся его к системе PXY.

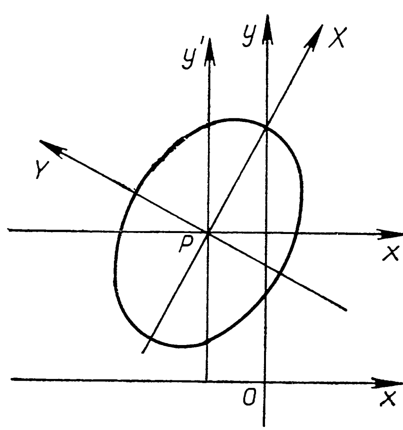


Рис. 81

Пример 99. Приведем уравнение $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + y = 0$ к каноническому виду путем преобразования системы координат. Построим линию, определяемую этим уравнением.

Решение. Так как $\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$

то эта линия — параболического типа. Формула (4) (см. [2], с. 236) дает корни характеристического уравнения: $s_1 = 2$, $s_2 = 0$. Тогда по формуле (5) (см. [2], с. 237) найдем, что $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = 1$. Следовательно, можно положить $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Тогда $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и формулы преобразования координат (при повороте) примут вид:

$$x = (x' - y')\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$y = (x' + y')\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Так как данное уравнение можно записать в виде:

$$(x + y)^2 + 2x + y = 0,$$

то после подстановки получим:

$$2(x')^2 + \frac{3}{2}x'\sqrt{2} - \frac{1}{2}y'\sqrt{2} = 0.$$

Выполним теперь преобразование параллельного переноса:

$$x' = X + a,$$
$$y' = Y + b,$$

получим:

$$2X^2 + X\left(4a + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) - \frac{1}{2}Y\sqrt{2} + \left(2a^2 + \frac{3}{2}a\sqrt{2} - \frac{1}{2}b\sqrt{2}\right) = 0.$$

Полагая $4a + \frac{3}{2}\sqrt{2} = 0$, откуда $a = -\frac{3}{8}\sqrt{2}$.

Потребуем еще, чтобы свободный член последнего уравнения обращался в нуль. Тогда найдем, что $b = -\frac{9\sqrt{2}}{16}$.

После переноса начала координат системы $Ox'y'$ в точку $P\left(-\frac{3}{8}\sqrt{2};\ -\frac{9}{16}\sqrt{2}\right)$ получим каноническое уравнение параболы:

$$X^2 = \frac{1}{4}Y\sqrt{2}.$$

Построение графика выполним в следующем порядке (рис. 82):

1) строим исходную систему Oxy;

2) строим вспомогательную систему $Ox'y'$ путем поворота исходной системы на угол 45°;

3) строим точку $P\left(-\frac{3}{8}\sqrt{2};\ -\frac{9}{16}\sqrt{2}\right)$ в системе $Ox'y'$ (с помощью циркуля и линейки или полагая приближенно $-\frac{3}{8}\sqrt{2}\approx\approx-0{,}5,\ -\frac{9}{16}\sqrt{2}\approx-0{,}8$);

4) строим систему PXY с началом в точке P и осями, соответственно параллельными осям Ox' и Oy';

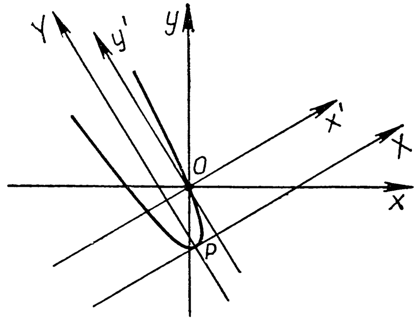


Рис. 82

5) строим параболу по ее каноническому уравнению:

$$X^2=\frac{\sqrt{2}}{4}Y.$$

Пример 100. Приведем к каноническому виду уравнение:

$$3x^2+12y^2-12xy+8x-16y-3=0$$

и построим линию, определяемую этим уравнением.

Решение. Заметим прежде всего, что $\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 12\end{vmatrix}=0$, т. е. данная линия — параболического типа. Решая характеристическое уравнение $s^2-15s=0$, находим $s_1=0$, $s_2=15$. Далее находим угол поворота системы координат:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{s_1-a_{11}}{a_{12}}=\frac{1}{2}.$$

Значит,

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Применяя формулы преобразования координат при повороте прямоугольной системы на угол α, получим:

$$x=\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}},\ y=\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}.$$

Перепишем уравнение данной линии:

$$3(x-2y)^2+8x-16y-3=0.$$

Подставив выражения для x и y в это уравнение, получим:

$$15(y')^2-\frac{40}{\sqrt{5}}y'-3=0.$$

Выполним, наконец, параллельный перенос системы координат: $x'=X,\ y'=Y+a.$

Получим:

$$15Y^2+2\left(15a-\frac{20}{\sqrt{5}}\right)Y+\left(15a^2-\frac{40a}{\sqrt{5}}-3\right)=0.$$

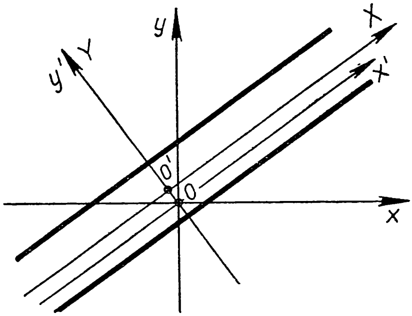


Рис. 83

При условии $15a - \frac{20}{\sqrt{5}} = 0$, т. е. при $a = \frac{4\sqrt{5}}{15}$, получим: $15Y^2 - \frac{25}{3} = 0$, так что каноническое уравнение можно записать в виде $Y^2 = \frac{5}{9}$.

Построение графика (рис. 83) выполним следующим образом:

1) строим исходную систему координат Oxy;

2) поворачиваем систему Oxy на угол $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, получаем систему $Ox'y'$;

3) параллельно переносим систему координат $Ox'y'$, помещая начало новой системы координат в точку O' $(0; \frac{4\sqrt{5}}{15})$;

4) в системе $O'XY$ строим пару прямых, параллельных $O'X$: $Y = \frac{1}{3}\sqrt{5}$ и $Y = -\frac{1}{3}\sqrt{5}$.

Впрочем, в данном случае построение графика можно выполнить проще. Представим данное уравнение в виде:

$$3(x - 2y)^2 + 8(x - 2y) - 3 = 0$$

и решим это уравнение относительно $x - 2y$:

$$x - 2y = \frac{-4 \pm 5}{3}.$$

Получим две прямые:

$x - 2y + 3 = 0$ и $3x - 6y - 1 = 0$.

Задачи

352. Проверьте, что следующие уравнения определяют распадающиеся линии второго порядка, и постройте эти линии:

а) $2xy + y^2 + y = 0$;

б) $y^2 - 4xy - 5x^2 + 5x - y = 0$;

в) $3x^2 - xy - x + y - 2 = 0$.

353. Составьте уравнение линии второго порядка, распадающейся на прямые $x - y = 0$ и $2x + y - 9 = 0$.

354. Найдите общие точки кривой: $x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ и прямой $x + 4y - 1 = 0$.

355. При каком значении параметра λ кривая $x^2 + 2\lambda xy - y^2 + 5x - 9 = 0$ имеет с прямой $2x - y + 7 = 0$ только одну общую точку?

356. При каком значении параметра a линия $5x^2 + 2xy - 2ax + 7 = 0$ касается прямой $y - x + 1 = 0$?

357. Дана линия второго порядка

$$x^2 + 6xy - y^2 - 3x - 2y + 1 = 0.$$

Найдите, при каких значениях параметра a прямая $x = a$:

а) касается данной линии;

б) пересекает линию в двух точках;

в) не имеет общих точек с данной линией и не является ее асимптотой;

г) пересекает линию в одной точке;

д) является асимптотой данной линии?

358. Дано уравнение линии второго порядка:

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 6x + 1 = 0.$$

Найдите, при каких значениях углового коэффициента k прямая $y = kx$:

а) имеет с этой линией одну общую точку;

б) касается этой линии;

в) пересекает эту линию в двух точках;

г) не имеет общих точек с этой линией?

359. Какую линию второго порядка можно провести через точки с координатами: (0; 0), (0; 3), (2; 2), (6; 0), (—2; 1)?

360. Найдите линии второго порядка, проходящие через точки (2; —1) и (—2; 2) и пересекающие каждую из осей координат только в начале.

361. Найдите центры линий, заданных следующими уравнениями:

а) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 11 = 0$;

б) $x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 2y - 11 = 0$;

в) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$.

362. Пользуясь параллельным переносом системы координат, приведите следующие уравнения к виду, не содержащему первых степеней переменных:

а) $x^2 - 2xy + 2x + 2y + 1 = 0$;

б) $5x^2 + 4xy + 2y^2 + 20x + 20y - 18 = 0$;

в) $x^2 - 3xy + 4y^2 + 6x - 16y - 3 = 0$.

363. Докажите, что линии

а) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 36y + 20 = 0$;

б) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 6x - 12y + 1 = 0$

имеют бесконечные множества центров. Для каждой из них составьте уравнение линии центров.

364. При каком значении параметра λ центр линии, заданной уравнением:

$$3x^2 + 2xy - y^2 - 2\lambda y + 1 = 0,$$

находится в точке (1; —3)?

365. При каких значениях параметров m и n уравнение

$$mx^2 + 12xy + 9y^2 + 4x + ny - 3 = 0$$

определяет:

а) центральную кривую;

б) линию без центра;

в) линию, имеющую бесконечное множество центров?

366. Найдите уравнение диаметра линии

$$x^2 + 4xy + 5y^2 - 3x + 6y - 2 = 0,$$

параллельного вектору $\vec{p} = (8; -3)$.

367. Составьте уравнение диаметра линии

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0,$$

параллельного прямой $2x - y + 5 = 0$, и диаметра, ему сопряженного.

368. Дано уравнение кривой второго порядка:

$$3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0$$

и одного из ее диаметров $x + 2y - 2 = 0$. Найдите уравнение диаметра, сопряженного данному.

369. Найдите главные диаметры следующих линий второго порядка:

а) $2xy - 4x + 2y - 3 = 0$;

б) $10x^2 + 6xy + 2y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$.

370. Задана пара сопряженных диаметров эллипса. Постройте еще какую-либо пару сопряженных его диаметров.

371. Найдите множество середин хорд эллипса, проходящих через данную точку.

372. Докажите, что два сопряженных диаметра эллипса делят его на четыре равновеликие части.

373. Эллипс разделен диаметром на два сегмента. Постройте прямые, делящие каждый из этих сегментов на три равновеликие части и проходящие через центр эллипса.

374. Найдите угол между двумя сопряженными диаметрами эллипса

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1,$$

один из которых образует угол $30°$ с осью Ox.

375. Напишите уравнение диаметра параболы $x^2 = 6y$, сопряженного с прямой $4x - y - 5 = 0$.

376. Дано уравнение параболы:

$$x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 14y - 7 = 0.$$

Напишите уравнение диаметра этой параболы:

а) проходящего через начало координат;

б) перпендикулярного к сопряженным хордам;

в) сопряженного хордам, параллельным оси Oy.

377. Составьте уравнение диаметра гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$, зная, что середина одной из параллельных ему хорд имеет координаты (2; —3).

378. Дано уравнение эллипса $3x^2+2xy+5y^2-1=0$. Напишите уравнение двух сопряженных диаметров этого эллипса, зная, что:

а) один из них проходит через точку M (2; —1);

б) диаметры взаимно перпендикулярны;

в) один из них сопряжен хордам, параллельным оси Oy.

379. Найдите уравнения касательных к линии

$$x^2-2y^2-5x+4y+6=0$$

в точках ее пересечения с осью Ox.

380. Напишите уравнения касательных к линии

$$x^2-2xy+3y^2-x+4y+1=0$$

в точках ее пересечения с прямой $x+y=0$.

381. Напишите уравнение тех касательных к линии

$$x^2+2xy-y^2+3x-y+\frac{19}{4}=0,$$

тангенс угла наклона которых к оси Ox равен 2.

382. Найдите уравнения касательных к линии

$$4xy-5y^2+2y-2=0.$$

383. Найдите уравнения тех касательных к линии

$$2x^2-4xy+y^2-2x+6y-3=0,$$

которые проходят через точку M (3; 4).

384. Напишите уравнение касательной к линии

$$4x^2+4xy+y^2-6x+4y+2=0,$$

зная, что касательная параллельна оси Oy.

385. Найдите уравнение касательной к параболе $y^2=12x$, если касательная:

а) параллельна прямой $3x-y+5=0$;

б) перпендикулярна к прямой $2x+y-7=0$.

386. Дано уравнение эллипса: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{15}=1$. Найдите уравнение касательных к эллипсу, перпендикулярных к хордам, сопряженным диаметру $8y+15x=0$.

387. Составьте каноническое уравнение параболы, касающейся прямой

$$9x+2y+18=0.$$

388. Вычислите параметр p параболы $y^2=2px$, зная, что эта парабола касается прямой $x-2y+5=0$.

389. На гиперболе $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} = 1$ найдите точки, касательные в которых наклонены к оси абсцисс под углом 60°.

390. Найдите уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} = 1$, проходящих через точку (—4; 3).

391. Найдите каноническое уравнение эллипса, зная, что он касается прямых $x + y = 5$ и $x - 4y = 10$.

392. Каждое из данных уравнений приведите к каноническому виду путем параллельного переноса декартовой прямоугольной системы координат. Определите вид соответствующих им линий. Постройте эти линии.

а) $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$;
б) $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$;
в) $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 3 = 0$;
г) $2x^2 + 3y^2 + 8x - 6y + 11 = 0$;
д) $3x^2 + 3y^2 - 24x + 12y + 58 = 0$;
е) $5x^2 + y^2 + 10x - 6y - 6 = 0$;
ж) $x^2 - y^2 + 6x + 8 = 0$.

393. Каждое из следующих уравнений приведите к каноническому виду путем поворота прямоугольной декартовой системы координат. Постройте соответствующие им линии.

а) $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 32 = 0$;
б) $5x^2 + 24xy - 5y^2 = 0$;
в) $xy = a$;
г) $y^2 - \sqrt{3}xy - 6 = 0$;
д) $7x^2 - 2y^2 - 12xy - 10 = 0$.

394. Приведите следующие уравнения к каноническому виду путем параллельного переноса начала прямоугольной декартовой системы координат и поворота. Постройте соответствующие им линии.

а) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 6x - 8y + 2 = 0$;
б) $2xy + 3x - y - 2 = 0$;
в) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$.

395. Определите координаты вершин, значения параметров и направления осей парабол, заданных следующими уравнениями:

а) $y^2 + 8x - 16 = 0$;
б) $x^2 - 6x - 4y + 29 = 0$;
в) $x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 2y = 0$.

396. Пользуясь преобразованием координат, приведите к каноническому виду следующие уравнения и постройте соответствующие кривые:

а) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$;
б) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$;
в) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 160x + 120y + 425 = 0$;
г) $x^2 - 2xy + y^2 - 12x + 12y - 14 = 0$;
д) $x^2 + 2xy + y^2 + x + 3y = 0$;
е) $x^2 + 2xy\sqrt{2} + 2y^2 - 8x\sqrt{3} - 8y\sqrt{6} + 45 = 0$.

ПРИМЕРНЫЕ ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Главы, параграфы \ Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Гл. I	10	17	18	23						
Гл. II § 1					61	45	47	56	53	49
Гл. II § 2							87	79	73	73
§ 3	138	137	127	124	122	103				
Гл. III § 1	146									
§ 2		159	158				161		163	
§ 3			166	175	169	174		178		180
§ 4		193		194		195	197	206		
§ 5	216				223				218	221
Гл. III § 6					241	236				
§ 7				245			244			243
§ 8	260а	262а	261а		260б	260г		263а	264	257
§ 9	272	273	270	277			268	267	274	
Гл. IV § 1										297
§ 2				314			316	315	301	
§ 3			334		327	322				
§ 4	347	339								
Гл. IV § 5	352б	374	385	394а	394б	396а	396д	396г	365	389

ПРИЛОЖЕНИЕ

УКАЗАТЕЛЬ ПРИМЕНЯЕМЫХ СИМВОЛОВ

a, (AB)	— прямая a, прямая AB
$[AB)$	— луч AB
$[AB]$	— отрезок AB
$\|AB\|$	— длина отрезка AB, расстояние от точки A до точки B
$\{A, B\}$	— множество с элементами A, B
$\varnothing$	— пустое множество
$A \in \Phi$	— точка A принадлежит фигуре Φ
$A \notin \Phi$	— точка A не принадлежит фигуре Φ
$\Phi_1 \subset \Phi_2$	— фигура Φ_1 принадлежит фигуре Φ_2
$\Phi_1 \cap \Phi_2$	— пересечение фигур Φ_1 и Φ_2
$\Phi_1 \cup \Phi_2$	— объединение фигур Φ_1 и Φ_2
$\Phi_1 = \Phi_2$	— фигуры Φ_1 и Φ_2 совпадают
$\Phi_1 \neq \Phi_2$	— фигуры Φ_1 и Φ_2 не совпадают
$\Phi_1 \cong \Phi_2$	— фигуры Φ_1 и Φ_2 конгруэнтны
$\Phi_1 \sim \Phi_2$	— фигуры Φ_1 и Φ_2 подобны
$\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$	— вектор
$\vec{0}$, $\overrightarrow{AA}$	— нулевой вектор
$\|\vec{a}\|$, $\|\overrightarrow{AB}\|$	— длина вектора $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{AB} = (x; y)$, $\overrightarrow{AB} = (x; y; z)$	— вектор с координатами (на плоскости и в пространстве)
$(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$	— аффинный базис на плоскости
$(\vec{i}; \vec{j})$	— прямоугольный декартов базис на плоскости
$\vec{a} \parallel \vec{b}$	— векторы коллинеарны
$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$	— векторы сонаправлены
$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$	— векторы противоположно направлены
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$	— скалярное произведение векторов

$(AB) \parallel (CD)$, $a \parallel b$	— прямые параллельны
$(AB) \perp (CD)$, $a \perp b$	— прямые перпендикулярны
(ABC), α	— плоскость
$\angle ABC$, $\angle 1$	— угол ABC, угол 1
$\widehat{ABC}$, $\hat{1}$	— величина угла ABC, величина угла 1
$(\widehat{a, b})$	— угол между прямыми a и b
$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$	— угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$
$(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$	— угол между плоскостями α и β
$(O, \lvert OA \rvert)$	— окружность с центром в точке O и радиусом $\lvert OA \rvert$
f	— преобразование
f^{-1}	— обратное преобразование
E	— тождественное преобразование
$f_2 \circ f_1$	— композиция преобразований f_1 и f_2
F	— перемещение
T	— параллельный перенос
S_O	— центральная симметрия с центром в точке O
S_l	— осевая симметрия с осью l
R_O^α	— поворот вокруг точки O на угол α
H_O^k	— гомотетия с центром в точке O и коэффициентом k
Π	— перспективно-аффинное преобразование

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Скалярное произведение двух векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$$

Формулы преобразования аффинной системы координат:

$$\begin{cases} x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + x_0, \\ y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + y_0 \end{cases}$$

Формулы преобразования координат при параллельном переносе системы координат:

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

Уравнение прямой, заданной начальной точкой $(x_0; y_0)$ и направляющим вектором $\vec{p} = (\alpha; \beta)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$$

или $$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}, \text{ если } \alpha\beta \neq 0.$$

Уравнение прямой, заданной точками $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}=0$$

или $$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \text{ если } (x_2-x_1)(y_2-y_1)\neq 0.$$

Уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Общее уравнение прямой:

$$Ax+By+C=0, \text{ где } A^2+B^2\neq 0.$$

Уравнение прямой, заданной начальной точкой $(x_0;\ y_0)$ и нормальным вектором $\vec{n}=(A;\ B)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$

Уравнение прямой, заданной начальной точкой $(x_0;\ y_0)$ и угловым коэффициентом k:

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

Уравнение прямой, заданной угловым коэффициентом k и отрезком b, отсекаемым прямой от оси Oy:

$$y=kx+b$$

Нормальное уравнение прямой:

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi-\rho=0$$

(φ — угол между перпендикуляром к прямой, проведенным из начала координат, и прямой; ρ — длина этого перпендикуляра).

Уравнение пучка пересекающихся прямых с центром в точке $(x_0;\ y_0)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}=0, \text{ где } \alpha^2+\beta^2\neq 0.$$

Уравнение пучка пересекающихся прямых, заданного прямыми $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ (центр пучка — точка пересечения данных прямых):

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0,$$

где $\alpha^2+\beta^2\neq 0$.

Условие принадлежности одному пучку прямых $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ и $A_3x+B_3y+C_3=0$:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0$$

Формула для вычисления площади треугольника, заданного координатами своих вершин:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

или

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Расстояние от точки $(x_0; y_0)$ до прямой, заданной общим уравнением:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом r:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Уравнение окружности с центром в точке $(x_0; y_0)$ и радиусом r:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Каноническое уравнение эллипса с полуосями a и b:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

причем

$$a^2 - b^2 = c^2,$$

где c — расстояние от центра эллипса до его фокусов.

Эксцентриситет эллипса:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

Каноническое уравнение гиперболы с полуосями a и b:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

причем

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

где c — расстояние от центра гиперболы до ее фокусов.

Эксцентриситет гиперболы:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

Уравнения асимптот гиперболы:

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

Каноническое уравнение параболы с параметром p:

$$y^2 = 2px$$

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ

4. $3\,\overrightarrow{MC}$. **6.** $-\frac{1}{2}(\vec a+\vec b)$; $\frac{1}{2}(\vec a-\vec b)$; $\frac{1}{2}(\vec a+\vec b)$; $\frac{1}{2}(\vec b-\vec a)$. **7.** а) $\vec a\perp\vec b$; б) $\vec a\uparrow\uparrow\vec b$; в) $\vec a\parallel\vec b$; г) $\vec a\uparrow\downarrow\vec b$, $|\vec a|\geqslant|\vec b|$. **9.** а) 1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$; б) 0,1, —1,1. **12.** $\vec v_1\uparrow\uparrow\vec v_2$. **14.** $\alpha=40$. **15.** 60°. **16.** $-\frac{3}{2}$. **17.** $\cos\alpha=0{,}8$.

18. $\overrightarrow{AA'}=\vec b-\dfrac{\vec b\,(\vec c-\vec b)}{(\vec c-\vec b)^2}(\vec c-\vec b)$. **33.** $\overrightarrow{OE_1}=(1;\,0)$, $\overrightarrow{OE_2}=(0;\,1)$, $\overrightarrow{E_1E_2}=(-1;\,1)$.

34. (3; 7). **35.** $\left(\frac{3}{2};-1\right)$, $\left(-\frac{7}{4};\ -\frac{1}{2}\right)$. **36.** $\overrightarrow{AC}=(1;\,1)$, $\overrightarrow{BD}=(-1;\,1)$. **37.** $A\,(1;\,0)$, $B(-1;\,0)$, $C\,(0;\,1)$, $D\,(2;\,1)$. **38.** $A\,(0;0)$, $B\,(1;\,0)$, $C\left(\frac{1}{3};\ 1\right)$, $D\,(0;\,1)$, $O\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$, $S\left(0;\ \frac{3}{2}\right)$. **39.** $-\frac{3}{4}$. **42.** (8; 3) и (—2; —1). **43.** $-\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$. **44.** —3; 17. **45.** $\vec x=(6;\,4)$. **46.** (—3; 4). **47.** (5; 0) или (—1; 0). **48.** (5; 0). **49.** (—3; —7). **50.** $\widehat{A}=45°$, $\widehat{B}=45°$, $\widehat{C}=90°$. **51.** 1,4. **52.** $m_A=2{,}5$; $m_B=\sqrt{13}$; $m_C=\frac{1}{2}\sqrt{73}$, $b_A=\frac{20}{7}$; $b_B=\frac{3}{2}\sqrt{5}$, $b_C=\frac{2}{3}\sqrt{10}$. **53.** $(5{,}5;\,2+4{,}5\sqrt{3})$ или $(5{,}5;\,2-4{,}5\sqrt{3})$. **54.** $13\frac{1}{2}$. **55.** (2; 0) или (22; 0). **56.** (2; 5) и (16; 3). **58.** (1; 7). **59.** $\vec a=\left(\frac{5}{13};\ \frac{1}{13}\right)$, $\vec b=\left(\frac{2}{13},\frac{3}{13}\right)$, $\vec c=\left(\frac{1}{13};\ \frac{21}{13}\right)$. **60.** $x=x'-3y'+1$, $y=2x'$. **61.** $x=\frac{1}{3}x'-\frac{2}{3}y'+\frac{2}{3}$, $y=-\frac{2}{3}x'+\frac{1}{3}y'+\frac{2}{3}$. **64.** (5; —1), (—5; 1). **65.** $x=y'$, $y=x'-y'+1$. **66.** 45°. **70.** $(a;\,0)$, $\left(a\sqrt{3};\ \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(2a;\ \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(a\sqrt{3};\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(a;\ \frac{2}{3}\pi\right)$. **71.** $A(1;\,\sqrt{3})$, $B(1;\,1)$, $C\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};\ -\frac{3}{2}\right)$, $D\,(-4;\,0)$, $E\,(-1;\,0)$. **72.** $A\left(5;\ \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)\right)$, $B\left(\sqrt{2};\ \frac{3\pi}{4}\right)$, $C\,(5;\,0)$, $D\left(5;\ \pi+\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)\right)$. **77.** $x^2-6x-8y+25=0$. **78.** Приняв точку A за полюс и направив полярную ось перпендикулярно данной прямой g, получим в обобщенных полярных координатах уравнение $r=\frac{a}{\cos\alpha}\pm$

$\pm b$. Принимая полюс за начало прямоугольной декартовой системы координат и полярную ось — за ось Ox, получим уравнение конхоиды в прямоугольных декартовых координатах: $(x^2+y^2)(x-a)^2=b^2x^2$. **80.** Окружность. **81.** Принимая точку O за полюс и проводя полярную ось через центр окружности, описываемой точкой P, получим уравнение: $r=a\cos\varphi+b$, где $b=|PM|$. В прямоугольных координатах: $(x^2+y^2-ax)^2=b^2(x^2+y^2)$. **82.** $x=r(\varphi-\sin\varphi), y=r(1-\cos\varphi)$. **83.** $x=a(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi)$, $y=a(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)$, где a — радиус окружности, φ — величина угла, образуемого радиусом, проведенным в точку касания нити с окружностью, с осью Ox. Ось Ox проведена из центра окружности в начальное положение конца нити на окружности. **84.** $y=\sqrt{r^2-x^2}$. **88.** $ax+by-(a^2+b^2)=0$. **89.** $x-2=\frac{y-3}{-4}$, $4x+y-11=0$, $y=-4x+11$. **90.** $\frac{x+\frac{C}{A}}{B}=\frac{y}{-A}$. **91.** а) $a\neq c$, $b\neq d: \frac{x-a}{c-a}=\frac{y-b}{d-b}$; б) $a=c$, $b\neq d: x-a=0$, в) $a\neq c$, $b=d: y-b=0$; г) $a=c$, $b=d: y-b=k(x-a)$. **92.** При $B=0$, $Aa+C\neq 0$, решений нет. При $B\neq 0$ одно решение $\left(a; -\frac{Aa+C}{B}\right)$. При $B=0$, $Aa+C=0$ — любая точка прямой. **94.** а) $0{,}6x-0{,}8y-2=0$; б) $x\frac{\sqrt{2}}{2}+y\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$; в) $x\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+y\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-1=0$; г) $x\cos 190^\circ+y\sin 190^\circ-4=0$. **95.** $x-y+1=0$. **96.** $k=-\frac{b}{a}$. **99.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ или $\frac{x}{4}+\frac{y}{\frac{3}{2}}=1$. **100.** При $\lambda\neq\frac{1}{2}$ прямые пересекаются, при $\lambda=\frac{1}{2}$ пересечение прямых пусто. **101.** 2 и $-\frac{2}{3}$. **102.** $91x-26y-2=0$. **103.** $4x-y-13=0$, $x-5=0$, $x+8y+5=0$. **104.** $4x+3y+2=0$. **105.** $ax+by-(a^2+b^2)=0$. **106.** $x+3y-9=0$, $65x-26y+12=0$, $68x-17y+57=0$. **107.** $\left(-\frac{ac}{a^2+b^2}; -\frac{bc}{a^2+b^2}\right)$. **108.** а) $a\neq-\frac{3}{2}$; б) $a=-\frac{3}{2}$, $c\neq\frac{1}{2}$; в) $a=-\frac{3}{2}$, $c=\frac{1}{2}$. **109.** $y=11x$ и $y=-\frac{1}{11}x$. **110.** $6x+1=0$ и $2y-9=0$. **111.** $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$. **113.** $a=-2$. **114.** $mx+ny-(am+bn)=0$. **115.** При $a\neq 1$ искомая точка $(b; b)$. При $a=1$ бесконечное множество решений. **116.** При $b\neq 0: ax+by=b^2$. При $b=0$ решения нет. **117.** При $b\neq 0$ две точки: $\left(d; -\frac{ad+c}{b}\right)$ и $\left(-d; \frac{ad-c}{b}\right)$. При $b=0$ и $\left|\frac{c}{a}\right|=d$ все точки данной прямой. При $b=0$ и $\left|\frac{c}{a}\right|\neq d$ решений нет. **118.** $(0; 2)$, $(4; 0)$, $(-1; 5)$, $(-5; -3)$. **119.** $(4{,}2; 3{,}6)$. **120.** $(5; -5)$ и $(8; -1)$ или $(0; 5)$ и $(-3; 1)$ или $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ и $\left(\frac{9}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. Рассмотрите случаи, когда данные вершины смежные и когда противоположные. **121.** Да. **122.** $p=\frac{a\cos\alpha}{\cos(\varphi-\alpha)}$. **123.** 7. **124.** $2xy-$

$-ay-bx=0$. **126.** $\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **131.** $\begin{cases} x+3y-11<0, \\ 5x-4y-17<0, \\ 7x+2y-1>0. \end{cases}$ **132.** $\mu_i(a_ix+b_iy+c_i)>0$; $i=1,\ 2,\ 3$; $\mu_1=\dfrac{\Delta}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3\end{vmatrix}}$, $\mu_2=\dfrac{\Delta}{\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1\end{vmatrix}}$, $\mu_3=\dfrac{\Delta}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}$, $\Delta=\begin{vmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3\end{vmatrix}$.

133. Невыпуклый. **134.** Отрезок пересекает одну из сторон. **135.** $(2\sqrt{2}-1)x+(3-\sqrt{2})y+(\sqrt{2}-3)=0$. **136.** $\dfrac{5}{\sqrt{34}}$. **138.** $x-3y+1=0$, $3x+y-1=0$, $x-3y+12=0$, $3x+y+10=0$ или $7x+y-15=0$, $x-7y+7=0$, $7x+y-26=0$, $x-7y-4=0$. **251.** а) $(0;-1)$; б) $(4;\ 1)$; в) $x'=\dfrac{4}{9}x+\dfrac{5}{9}y+\dfrac{23}{9}$, $y'=\dfrac{1}{9}x-\dfrac{1}{9}y+\dfrac{8}{9}$. **252.** 1а) $x'=\dfrac{3}{13}x+\dfrac{5}{13}y+\dfrac{16}{13}$; $y'=\dfrac{2}{13}x-\dfrac{1}{13}y+\dfrac{15}{13}$;

2а) $y=0$, $x=0$; $2x'-y'+15=0$, $3x'+5y'+16=0$; 1б) $x'=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}y-\dfrac{4}{3}$, $y'=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}y+\dfrac{1}{3}$;

2б) $y=0$, $x=0$; $x'-2y'-1=0$, $x'+y'-4=0$. **254.** а) $x-2y+10=0$. **255.** а) $(-2;\ 3)$; б) $\left(-2;\ \dfrac{5}{2}\right)$; в) $(-2;\ -1)$; г) двойных точек нет; д) $(2;\ 1)$. **256.** а) $x'=y$, $y'=x$; множество точек, принадлежащих прямой $x-y=0$. б) $x'=2x+y-1$, $y'=x+2y+2$; двойных точек нет. в) $x'=6x-2y$, $y'=-2x-3$; $\left(-\dfrac{2}{3};\ -\dfrac{5}{3}\right)$. **283.** $\left(1;\ -\dfrac{1}{6}\right)$; $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.
285. $(1;\ 2)$; 5. **286.** $(30;\ 48)$ или $(-30;\ 48)$. **287.** $10(x-5)^2+10(y-2)^2=1$.
288. $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2=\dfrac{25}{4}$; $(x-1)^2+(y-1)^2=1$; $(x-6)^2+(y-6)^2=36$, $(x-2)^2+(y+2)^2=4$, $(x+3)^2+(y-3)^2=9$. **289.** $(x-3)^2+(y-2)^2=5$ и $\left(x+\dfrac{1}{5}\right)^2+\left(y-\dfrac{2}{5}\right)^2=5$. **290.** Окружность: действительная, нулевая или мнимая в зависимости от того, будет ли расстояние между данными точками меньше, равно или больше $\sqrt{2S^2}$, где S^2 — фиксированная сумма квадратов расстояний. **291.** Окружность или точка (одна из данных). **292.** Объединение двух дуг окружностей. Если $|AB|=2a$, начало прямоугольной декартовой системы координат помещено в точке A и ось Ox проведена через точку B, то эти дуги задаются уравнениями: $(x-a)^2+(y-a)^2=2a^2$, где $y>0$ и $(x-a)^2+(y+a)^2=2a^2$ при $y<0$. Рекомендуется решить задачу сначала в полярных координатах, принимая точку A за полюс и (AB) — за полярную ось. **293.** $\lambda=8$. **294.** $(x-2)^2+(y+4)^2=1$ или $(x-2)^2+(y+4)^2=9$. **296.** $(x+8)^2+(y+12)^2=25$. **297.** $(\sqrt{5}-1;\ 1)$, $(-\sqrt{5}-1;\ 1)$, $(3+\sqrt{5};\ -1)$, $(3-\sqrt{5};\ -1)$. **298.** а) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$; б) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$; в) $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$; г) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$; д) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{\frac{128}{9}}=1$. **299.** $\varepsilon=0{,}5$. **300.** Эллипс с полуосями 13 и 5 см.

Фокусы эллипса — в вершинах основания треугольника. **301.** Объединение двух эллипсов, фокусы которых расположены в центрах данных окружностей, а большие оси равны соответственно сумме и разности радиусов данных окружностей **302.** $(-4{,}8;\ +0{,}6\sqrt{11})$, $(-4{,}8;\ -0{,}6\sqrt{11})$. **303.** $(-7{,}5;\ +1{,}5\sqrt{7})$, $(-7{,}5;$

$-1{,}5\sqrt{7}$). 304. $5\frac{1}{3}$ и $11\frac{1}{3}$. 305. $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{1}=1$. 307. $\frac{(x-5)^2}{25}+$ $+\frac{y^2}{9}=1$ или $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{y^2}{\left(\frac{25}{3}\right)^2}=1$ в зависимости от того, располагается ли на оси абсцисс большая или малая ось эллипса. 308. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)+$ $+2(a^2-b^2)xy=2a^2b^2$. 309. Эллипс $\frac{x^2}{\left(\frac{a}{3}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{b}{3}\right)^2}=1$. 311. $x^2+\frac{y^2}{\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^2}=$ $=1$. 312. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$. 313. $\rho=\frac{2\sqrt{5}}{2-\sqrt{2}\cos\varphi}$. 317. а) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; б) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{2}=1$; в) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; г) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$; д) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$; е) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; ж) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$. 318. $a=3$, $b=4$, $\varepsilon=\frac{5}{3}$, $F_1(5;\ 0)$, $F_2(-5;\ 0)$, $y=\pm\frac{4}{3}x$, $x=\pm\frac{9}{5}$. 319. $(12;+\sqrt{39})$, $(12;-\sqrt{39})$. 320. 1,25. 321. $(x-3)^2-\frac{(y+2)^2}{8}=1$. 322. $23x^2+23y^2+50xy-88x-88y+64=0$. 323. $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$. 324. $2x-y\pm\sqrt{3}=0$. 325. $\operatorname{arctg}\left(\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. 326. 8. 327. $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{\varepsilon^2-1}}{2+\varepsilon^2}$. 328. При $a\neq b$ — равнобочная гипербола. При $a=b$ — биссектрисы углов, образуемых данными прямыми. 329. Гипербола с фокусами в точках A и C. 330. Часть ветви гиперболы с вершинами в точках A и B. 331. $\frac{x^2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}=1$. 335. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$. 336. $\rho=\frac{1}{1-\sqrt{2}\cos\varphi}$. 337. а) $y^2=$ $=6x$; б) $y^2=16x$; в) $y^2=12x$. 338. а) $x^2=8y$; б) $x^2=-1{,}2y$; в) $y^2=10x-25$; г) $x^2=4{,}5y$. 339. $(y-2^2)=-12(x+2)$, $F(-5;\ 2)$, $y-2=0$. 340. $(18;+12)$, $(18;\ -12)$. 341. $r=10$, $k=\frac{4}{3}$. 342. $k=0{,}5$, $k=-0{,}5$. 343. Парабола, для которой данная точка служит фокусом, а данная прямая директрисой. 345. $p=12$. 346. $\frac{8}{3}$. 347. 5 м. 348. 0,5 м. 353. $2x^2-y^2-xy-9x+9y=0$. 354. (1; 0). 355. $\lambda=\frac{3}{4}$. 356. 6 или -8. 357. а) $a_1=\frac{1}{2}$; $a_2=\frac{2}{5}$; б) $a>\frac{1}{2}$, $a<\frac{2}{5}$; в) $\frac{2}{5}<a<\frac{1}{2}$; г, д) ни при каких значениях. 358. а) 2; б) -1 или 5; в) $-1<k<5$, $k\neq 2$; г) $k<-1$ и $k>5$. 359. $x^2+4xy+4y^2-6x-12y=0$. 360. $xy+4x+6y=0$. 361. а) (1; 1); б) центра нет; в) линия центров $x-2y+$ $+1=0$. 364. $\lambda=4$. 365. а) $m\neq 4$; б) $m=4$, $n\neq 6$; в) $m=4$, $n=6$. 366. $6x+16y+15=0$. 367. $2x-y+8=0$, $3x+6y-2=0$. 368. $x+1=0$. 369. а) $x+y-1=0$, $x-y+3=0$; б) $33x+11y-1=0$, $x-3y-7=0$. 374. 60°. 375. $x-12=0$. 376. а) $x-3y=0$; б) $10x-30y-27=0$; в) $3x-$ $-9y-7=0$. 377. $y=-\frac{2}{9}x$. 378. а) $x+2y=0$, $5x-3y=0$; б) $(4+$ $+\sqrt{2})x+(6+5\sqrt{2})y=0$, $(4-\sqrt{2})x+(6-5\sqrt{2})y=0$; в) $3x+y=0$, $y=0$. 379. $x-4y-2=0$, $x+4y-3=0$. 380. $2x-1=0$, $x+4y+$

$+1=0$. **381.** $4x-2y+3=0$, $4x-2y-3=0$. **382.** $4x+3y+10=0$, $4x+13y-10=0$. **383.** $7x-2y-13=0$, $x-3=0$. **384.** $7x+1=0$. **385.** а) $y=3x+1$; б) $x-2y+12=0$. **386.** $x+2y-8=0$, $x+2y+8=0$. **387.** $y^2=162x$. **388.** $p=2{,}5$. **389.** $\left(+\frac{8\sqrt{5}}{5}; +\frac{3\sqrt{15}}{5}\right)$, $\left(+\frac{8\sqrt{5}}{5}; -\frac{3\sqrt{15}}{5}\right)$, $\left(-\frac{8\sqrt{5}}{5}; -\frac{3\sqrt{15}}{5}\right)$, $\left(-\frac{8\sqrt{5}}{5}; +\frac{3\sqrt{15}}{5}\right)$. **390.** $3x+2y+6=0$. **391.** $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$. **392.** а) Эллипс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; б) гипербола $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; в) пересекающие прямые $2x-y=0$ и $2x+y=0$; г) вырожденный эллипс $2x^2+3y^2=0$; д) окружность $x^2+y^2=\frac{2}{3}$; е) эллипс $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{20}=1$; ж) гипербола $x^2-y^2=1$. **393.** а) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$; б) $x^2-y^2=0$; в) $x^2-y^2=2a$; г) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$; д) $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{2}=1$. **394.** а) $\frac{x^2}{\frac{1}{5}}+\frac{y^2}{\frac{1}{10}}=1$; б) $\frac{x^2}{\frac{1}{2}}-\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$; в) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$. **395.** а) $(2; 0)$, $p=4$, ось совпадает с Ox; б) $(3; 5)$, $p=2$, ось параллельна Oy; в) $(0; 0)$, $p=\frac{\sqrt{2}}{2}$, угловой коэффициент оси равен 1. **396.** а) $y^2=-2x$; б) $x^2=1$; в) $y^2+1=0$; г) $y^2=25$; д) $x^2=-\frac{\sqrt{2}}{2}y$; е) $x^2=1$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Борис Иванович Аргунов
Виктор Николаевич Литвиненко
Ирина Николаевна Демидова

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО ГЕОМЕТРИИ

Часть I

Редактор *Л. В. Туркестанская*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технические редакторы *Т. В. Самсонова, М. Тургенева*
Корректор *В. Г. Соловьева*

ИБ № 4314

Сдано в набор 23. 10. 78 г. Подписано к печати 22. 03. 79 г. $60 \times 90^1/_{16}$. Бум тип. № 3. Гарн. литер. Печать высокая. Усл. печ. л. 8,0. Уч.-изд. л 7,44. Тираж 27000 экз. Заказ 834. Цена 20 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.