

МАТЕМАТИКА
В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ВЫПУСК

XXI

В.С. Зарубин

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ
В ТЕХНИКЕ**

Издательство МГТУ имени Н.Э.Баумана

**Математика в техническом
университете**

**Выпуск XXI
(заключительный)**

***К 175-летию
МГТУ им. Н.Э. Баумана***

Комплекс учебников из 21 выпуска

Под редакцией В. С. Зарубина и А. П. Крищенко

- I. Введение в анализ
- II. Дифференциальное исчисление функций
одного переменного
- III. Аналитическая геометрия
- IV. Линейная алгебра
- V. Дифференциальное исчисление функций
многих переменных
- VI. Интегральное исчисление функций
одного переменного
- VII. Кратные и криволинейные интегралы.
Элементы теории поля
- VIII. Дифференциальные уравнения
- IX. Ряды
- X. Теория функций комплексного переменного
- XI. Интегральные преобразования
и операционное исчисление
- XII. Дифференциальные уравнения
математической физики
- XIII. Приближенные методы математической физики
- XIV. Методы оптимизации
- XV. Вариационное исчисление и оптимальное управление
- XVI. Теория вероятностей
- XVII. Математическая статистика
- XVIII. Случайные процессы
- XIX. Дискретная математика
- XX. Исследование операций
- XXI. Математическое моделирование в технике

В.С. Зарубин

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ТЕХНИКЕ

Под редакцией
д-ра техн. наук, профессора В.С. Зарубина
и д-ра физ.-мат. наук, профессора А.П. Крищенко

Издание второе, стереотипное

*Рекомендовано
Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебника для студентов
высших технических учебных заведений*

Москва
Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана
2003

УДК 517.1(075.8)

ББК 30в6

З-35

Рецензенты: проф. А.В. Манжиров, проф. В.Ф. Формалев

З-35 Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – 2-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 496 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XXI, заключительный).

ISBN 5-7038-1435-9 (Вып. XXI, заключительный)

ISBN 5-7038-1270-4

Книга является дополнительным, двадцать первым выпуском комплекса учебников „Математика в техническом университете“, завершающим издание серии. Она посвящена применению математики к решению прикладных задач, возникающих в различных областях техники. В нее включен предметный указатель ко всему комплексу учебников.

Содержание учебника соответствует курсу „Основы математического моделирования“, читаемому автором в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Для студентов технических университетов. Может быть полезен преподавателям, аспирантам и инженерам.

Ил. 135. Табл. 16. Библиогр. 62 назв.

УДК 517.1(075.8)

ББК 30в6

ISBN 5-7038-1435-9 (Вып. XXI,
заключительный)

ISBN 5-7038-1270-4

© В.С. Зарубин, 2001

© Московский государственный
технический университет
им. Н.Э. Баумана, 2001

© Издательство МГТУ
им. Н.Э. Баумана, 2001

К ЧИТАТЕЛЮ

Московское высшее техническое училище (МВТУ) имени Н.Э. Баумана стало первым в стране государственным техническим университетом (МГТУ имени Н.Э. Баумана). При этом в сложный период перехода к рыночной экономике удалось сохранить создававшиеся в МВТУ десятилетиями научно-педагогические школы. От их состояния и развития в существенной степени зависят научно-технический потенциал страны и уровень инженерного образования в области машиностроения и приборостроения.

Одна из важнейших особенностей технических университетов — фундаментальная подготовка будущих инженеров на основе углубленного и расширенного цикла математических, естественно-научных и общеинженерных дисциплин. Для этого необходимо современное учебно-методическое обеспечение, широко использующее передовые информационные технологии. С целью создания такого обеспечения научно-педагогические школы нашего университета и Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана готовят серии учебников по математике, механике, физике, информатике, электронике и другим дисциплинам. Эта книга завершает первую из названных серий — серию „Математика в техническом университете“, являясь ее заключительным, XXI выпуском.

В написании серии учебников по математике принимал участие большой коллектив преподавателей кафедр Прикладной математики и Математического моделирования МГТУ имени Н.Э. Баумана. В его состав входили как профессиональные математики — выпускники математических кафедр университетов, так и выпускники нашего вуза, широко использующие математику в своей научной и преподавательской работе. Такое сочетание авторов и редакторов серии создало предпосылки

для объединения строгого и доказательного изложения материала с прикладной направленностью многочисленных примеров и задач, рассматриваемых в учебниках, что обеспечивает тесные межпредметные связи курса высшей математики с естественно-научными и общеинженерными дисциплинами. Структура учебников предусматривает возможность нескольких уровней изучения этого курса в зависимости от конкретной инженерной специальности студента и требований к глубине его математической подготовки.

В работе над этой серией проявилась одна из многочисленных форм сотрудничества между Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова и МГТУ имени Н.Э. Баумана в рамках договора о содружестве между нашими университетами: в рецензировании учебников заметную роль сыграли профессора математики МГУ, возглавляемого академиком РАН Виктором Антоновичем Садовничим. Его поддержка замысла издания серии учебников по математике, ориентированных на студентов технических университетов, в значительной степени предопределила благожелательное отношение к нашей инициативе научно-педагогической общественности вузов. В рецензировании учебников принимали также участие ведущие преподаватели других университетов и сотрудники научно-исследовательских институтов РАН.

Надеюсь, что учебники этой серии помогут студентам технических университетов и вузов овладеть непростой, но чрезвычайно важной и необходимой для будущего инженера дисциплиной, без знания и умелого применения которой немислим дальнейший прогресс науки и техники.

И.Б. Федоров,

Ректор Московского государственного технического
университета имени Н.Э. Баумана,
член-корреспондент РАН

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вряд ли в настоящее время можно найти студента технического вуза, который бы не смог объяснить, что такое *математическое моделирование*. Оно все глубже проникает не только в технику, но и во все сферы человеческой деятельности. Однако этот термин пока не имеет общепринятого формального (как это положено в математике) определения, и его границы в смысловом отношении еще четко не очерчены. Такая ситуация характерна для любого нового научного направления на стадии его становления и быстрого развития.

С достаточно общих позиций математическое моделирование можно рассматривать как один из методов познания реального мира в период формирования так называемого информационного общества, как интеллектуальное ядро быстро развивающихся информационных технологий*. Этот метод не противоречит хорошо известной формуле: „От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике“. Особенность математического моделирования состоит в том, что абстрактным отражением существующего или создаваемого объекта является его математическая модель, количественный анализ которой позволяет получить новые знания об этом объекте.

Под *математическим моделированием* в технике понимают адекватную замену исследуемого технического устройства или процесса соответствующей математической моделью и ее последующее изучение методами вычислительной математики с привлечением средств современной вычислительной техники. Поскольку такое изучение математической модели можно рассматривать как проведение эксперимента на ЭВМ при

*См.: Самарский А.А., Михайлов А.П.

помощи вычислительно-логических алгоритмов, то в научно-технической литературе термин *вычислительный эксперимент* часто выступает как синоним термина „математическое моделирование“. Содержание этих терминов принято считать интуитивно понятным и обычно подробно не раскрывают.

Математическое моделирование является одной из основных дисциплин при подготовке инженеров-математиков по специальности „Прикладная математика“. Перефразируя шуточное определение математики как науки, которой занимаются математики, можно сказать, что математическое моделирование — это то, чем занимаются прикладные математики. Математическое моделирование тесно связано с инженерной практикой, опирается на достижения классической и вычислительной математики, активно использует сведения из естественно-научных дисциплин, предполагает уверенное владение вычислительной техникой и программированием на ЭВМ. Поэтому и для инженера любой специальности математическое моделирование — инструмент, творческое применение которого может способствовать прогрессу в любой отрасли техники.

В этой книге кратко рассмотрены возможности, основные понятия и терминология математического моделирования, его связь с разделами математики, изложенными в предыдущих выпусках серии „Математика в техническом университете“. Основное внимание уделено переходу от рассматриваемого технического объекта к его расчетной схеме и построению на ее основе математической модели. При построении примеров математических моделей использованы сведения из естественно-научных и некоторых инженерных дисциплин, изучаемых в технических университетах. Исследование этих математических моделей проведено при помощи оценок качественного характера и аналитических методов, поскольку применение методов вычислительной математики подробно рассмотрено в предыдущих выпусках серии.

Книга состоит из семи глав, параграфы в которых имеют двойную нумерацию (например, 4.5 — пятый параграф в

четвертой главе); ссылки в тексте на параграфы и главы набраны полужирным шрифтом (например: см. 4.5). Аналогично пронумерованы формулы и рисунки (например, (2.3) — третья формула в главе 2, рис. 3.2 — второй рисунок в главе 3). Ссылками на другие выпуски комплекса учебников служат их номера, записанные римскими цифрами и заключенные в квадратные скобки (например, [XIII] — ссылка на тринадцатый выпуск).

Ниже приведен список основных обозначений, где наряду с их краткой расшифровкой указаны параграфы этой книги или номера других выпусков, в которых можно найти более подробное их объяснение. Далее следуют латинский и греческий алфавиты, где указаны написание и русское произношение букв.

В конце книги помещены список рекомендуемой литературы и предметный указатель к этому, заключительному выпуску, содержащий в алфавитном порядке (по существительному в именительном падеже) все используемые в книге термины с указанием страницы, на которой термин определен или описан (на этой странице термин можно найти по выделенным *полужирным курсивом* словам). Выделение термина в начале параграфа *светлым курсивом* означает, что в данном параграфе он отнесен к ключевым словам и для понимания излагаемого материала читателю должно быть известно значение этого термина. Читатель может уточнить это значение, найдя при помощи предметного указателя необходимую страницу, на которой данный термин определен или пояснен.

В этой книге, завершающей издание серии „Математика в техническом университете“, приведен предметный указатель ко всему комплексу из 20 учебников (т.е. без этого, заключительного выпуска) с указанием тех номеров выпусков, в которых определен или наиболее полно описан соответствующий термин. Предметный указатель содержит свыше пяти тысяч терминов, которые составляют словарный запас (так называе-

мый тезаурус) расширенного курса математики в техническом университете.

Математическое моделирование опирается на знание практически всех разделов математики. Поэтому перед чтением этой книги необходимо в целях самоконтроля выполнить следующие несложные задания. В конце каждого задания приведена ссылка на тот выпуск, в котором при возникновении затруднений можно найти все необходимые сведения. Значения терминов, выделенных в тексте этих заданий **прямым полужирным шрифтом**, далее будем считать известными (эти термины в основном тексте книги не выделены и в ее предметный указатель не входят).

Задания для самопроверки

1. Как определить множества целых и рациональных чисел при помощи множества **натуральных чисел**? Что такое **абсолютная величина** (абсолютное значение) действительного числа и **модуль комплексного числа**? Что такое **объединение**, **пересечение**, **разность** и **прямое (декартово) произведение множеств** (подмножеств), **дополнение множества**? [I]

2. Запишите с помощью неравенств условия принадлежности точки x промежуткам **числовой прямой**: отрезку $[a, b]$, интервалу (a, b) , **полуинтервалу** $(a, b]$, **бесконечному интервалу** $(-\infty, b)$ и **бесконечному полуинтервалу** $[a, +\infty)$. [I]

3. Приведите примеры **составной** и **периодической действительных функций** действительного переменного и укажите их **области определения** (существования) и **значений**. Как расположены относительно **начала координат** графики **четной** и **нечетной функций**? Изобразите графики **функции знака**, **возрастающей**, **убывающей**, **невозрастающей** и **неубывающей функций**. Сколько **нулей** имеет

многочлен степени n ? В чем различие между простым нулем и кратным нулем? [I]

4. Сформулируйте определения предела, производной и дифференциала действительной функции действительного переменного в точке. Всякая ли функция, непрерывная в точке, является дифференцируемой в этой точке? Что называют нулем и стационарной точкой функции? Приведите примеры функций, имеющих точки: а) устранимого разрыва; б) разрыва первого рода; в) разрыва второго рода. Каковы свойства функции, непрерывной (дифференцируемой) на отрезке? Как вычислить производную сложной функции? Запишите формулу конечных приращений. Что называют вектор-функцией? [I], [II]

5. При каких условиях функция, дифференцируемая в интервале, является в нем выпуклой (строго выпуклой) вниз или вверх? [II]

6. Что такое абсолютная и относительная погрешности? [II]

7. Каковы правила вычисления скалярного, векторного и смешанного произведений векторов? Что такое нулевой, единичный и коллинеарные векторы, радиус-вектор точки? [II], [III]

8. Что такое прямоугольная, квадратная, транспонированная, блочная, симметрическая, нулевая, единичная, верхняя (нижняя) треугольная, ступенчатая, трехдиагональная, вырожденная и обратная матрицы, базисный минор и ранг матрицы? Что называют главной и побочной диагоналями квадратной матрицы? Чему равен определитель диагональной матрицы? При каком условии однородная квадратная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) имеет ненулевое решение? Каковы особенности метода Гаусса исключения неизвестных? [III]

9. Перечислите аксиомы линейного пространства, которым подчиняются линейные операции в этом простран-

стве. Что называют базисом и размерностью линейного пространства? Каковы аксиомы расстояния между элементами метрического пространства и нормы элементов нормированного пространства? В чем состоит отличие этих пространств? Дайте геометрическую интерпретацию неравенства треугольника в трехмерном евклидовом арифметическом пространстве \mathbb{R}^3 . Что такое ортонормированный базис в \mathbb{R}^n ? [I], [IV]

10. Как найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора в конечномерном линейном пространстве? Что такое собственное подпространство линейного оператора, характеристические многочлен и уравнение матрицы? Какую квадратичную форму называют положительно (отрицательно) определенной? Сформулируйте критерий Сильвестра. [IV]

11. Что называют частной производной и производной по направлению? При каком условии смешанная производная не зависит от последовательности дифференцирования? Запишите формулу Тейлора для скалярной функции многих переменных и матрицу Якоби для векторной функции многих переменных и для координатной функции. Что понимают под внешней нормалью к кусочно гладким кривой или поверхности, ограничивающим некоторую область? Каковы особенности метода Ньютона решения нелинейных уравнений и их систем? [V]

12. Что такое первообразная и неопределенный интеграл? Напишите формулу интегрирования по частям и формулу Ньютона — Лейбница. Чему равна производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу? Что такое абсолютно сходящийся несобственный интеграл? В чем различие интегралов Римана и Лебега? [VI], [IX]

13. Что понимают под элементарным объемом? Что называют кратным (в том числе двойным и тройным), криволинейным и поверхностным интегралами, скалярным

и векторным, безвихревым, потенциальным, соленоидальным и лапласовым полями, потоком и циркуляцией вектора, телесным углом? Напишите выражения для операторов Гамильтона и Лапласа в декартовой прямоугольной системе координат. Как при помощи оператора Гамильтона записать операции дивергенции, градиента и ротора? Напишите формулу Остроградского — Гаусса. [VII]

14. Что называют линейным обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ)? В чем различие между общим и частным решениями ОДУ? Что называют расширенным фазовым пространством и интегральной кривой? Сформулируйте условие Липшица и теорему Коши существования и единственности решения ОДУ первого порядка. Что называют нормальной автономной системой ОДУ и ее положением равновесия? Как найти корни характеристического уравнения нормальной однородной системы линейных ОДУ с постоянными коэффициентами? Для какого порядка нормальной системы ОДУ фазовая траектория лежит в фазовой плоскости? В чем различие между задачей Коши и краевой задачей? Что такое начальные и граничные условия? В чем различие между методами Бернулли и Лагранжа решения линейного ОДУ первого порядка? Как найти общее решение линейного неоднородного ОДУ второго порядка? Какое решение нормальной системы ОДУ называют устойчивым по Ляпунову и асимптотически устойчивым? Запишите систему уравнений первого приближения для нормальной системы ОДУ. [VIII]

15. Что такое сходящийся числовой ряд? При каких условиях функциональный ряд сходится на данном множестве поточечно, равномерно, абсолютно, условно? Что такое радиус сходимости степенного ряда? Запишите частичную сумму и остаток ряда Тейлора. В чем различие между ортогональной и ортонормированной системами функ-

ций? Как вычислить коэффициенты Фурье разложения функции в ряд Фурье? Что называют гармоникой ряда Фурье? При каких условиях существует представление функции интегралом Фурье в комплексной форме? Каков механический смысл спектральной функции? [IX]

16. Что называют действительной и мнимой частями, модулем, аргументом и главным значением аргумента комплексного числа, действительной и мнимой осями комплексной плоскости? Как при помощи формулы Эйлера перейти от показательной формы представления комплексного числа к тригонометрической, алгебраической и геометрической формам его представления? Что называют аналитической функцией, простым полюсом, порядком полюса и вычетом функции комплексного переменного? [X]

17. Что называют ядром, оригиналом и изображением интегрального преобразования? Сформулируйте задачу Штурма — Лиувилля для произвольного линейного ОДУ второго порядка. Каким условиям должна удовлетворять функция $f(t)$ для того, чтобы ее можно было подвергнуть интегральному преобразованию Лапласа? Запишите изображения по Лапласу константы, функции $f(t)$ и ее производной $f'(t)$ при условии, что $f'(0) = 0$. Напишите формулу Римана — Меллина и интеграл Дюамеля. Сформулируйте теоремы разложения. [XI]

18. Что называют уравнениями с частными производными эллиптического, параболического и гиперболического типов? Напишите уравнения Лапласа, Пуассона и Максвелла. Какова последовательность применения метода Фурье (метода разделения переменных) к решению уравнения теплопроводности? Какими свойствами обладают собственные значения и собственные функции краевой задачи? Запишите общее решение волнового уравнения в виде бегущих и стоячей волн. [XII]

19. Выведите оба варианта уравнения неразрывности. Запишите интегральную форму уравнений Максвелла. Что называют спектром оператора? В каком случае спектр оператора называют дискретным? Что называют интегральным уравнением, интегральной формулировкой задачи, методом ортогональных проекций, базисными и проекционными функциями? Каковы особенности метода конечных разностей, методов конечных и граничных элементов, методов локальных вариаций и статистических испытаний? [XIII]

20. Какие задачи относят к классу задач конечномерной оптимизации? Что понимают под критерием и параметрами оптимизации, целевой функцией и ограничениями? В чем различие задач линейного и нелинейного программирования? Приведите примеры задач оптимального проектирования и планирования. [XIV]

21. Что понимают под вариационной формулировкой прикладной задачи? Какими свойствами обладает функционал, альтернативный по отношению к данному? [XV]

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Математические обозначения

- ◀ и ▶ — начало и окончание доказательства
- # — окончание примера, замечания
- $a \in A$ — элемент a принадлежит множеству A I
- $A = \{a, b, c\}$ — множество A состоит из элементов a, b, c I
- $A \subset B, B \supset A$ — множество A является подмножеством множества B (A включено в B) I
- \mathbb{N} — множество натуральных чисел I
- \mathbb{Z} — множество целых чисел I
- \mathbb{Q} — множество рациональных чисел I
- \mathbb{R} — множество действительных чисел I
- \mathbb{R}^n — n -мерное евклидово арифметическое пространство IV
- \mathbb{C} — множество комплексных чисел I, X
- $[a, b]$ — отрезок с концами в точках a и b I
- (a, b) — интервал с концами в точках a и b I
- $[a, b), (a, b]$ — полуинтервалы с концами в точках a и b I
- $|x|$ — абсолютная величина (модуль) числа x I
- ∞ — объединение бесконечных точек $+\infty$ и $-\infty$ I
- $f(a)$ — значение функции $f(x)$ в точке a I
- $X \times Y$ — декартово произведение множеств X и Y I, 5.3
- $\sum_{k=1}^n a_k$ — сумма n слагаемых $a_1, \dots, a_k, \dots, a_n$ I
- $\prod_{m=1}^n a_m$ — произведение n сомножителей $a_1, \dots, a_m, \dots, a_n$ I

- $k = \overline{1, n}$ — число k принимает последовательно все значения из множества \mathbb{N} от 1 до n включительно I
- $n!$ — произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно I
- $n!!$ — произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n и имеющих с ним одинаковую четность I
- ρ и φ — полярные координаты (радиус и угол) точки на плоскости I
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ — предел функции $f(x)$ в точке a (при $x \rightarrow a$) I
- Δx и $\Delta y = \Delta f(x)$ — приращения аргумента x и функции $y = f(x)$ I
- $f'(a)$ — производная функции $f(x)$ в точке a II
- $y'(x), y'_x, \frac{dy}{dx}, y'$ — производная функции $y = f(x)$ II
- dx и $dy = df(x)|_{x=a}$ — дифференциалы аргумента x и функции $y = f(x)$ в точке a II
- $f^{(n)}(a)$ — производная n -го порядка (n -я производная) функции $f(x)$ в точке a II
- \int — знак интеграла VI
- ∇ — дифференциальный оператор Гамильтона VII
- $\nabla^2 = \Delta$ — дифференциальный оператор Лапласа VII
- $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ — действительная и мнимая части комплексного числа z I

Единицы измерения физических величин

- кг — килограмм (единица измерения массы) 2.5
- м — метр (единица измерения расстояния) 2.5
- с — секунда (единица измерения времени) 2.5
- К — кельвин (единица измерения температуры) 2.5
- Н — ньютон (единица измерения силы) 2.5

- Па — паскаль (единица измерения давления или механического напряжения) **2.5**
- Дж — джоуль (единица измерения энергии или работы) **2.5**
- Вт — ватт (единица измерения мощности) **2.5**
- В — вольт (единица измерения электрического напряжения) **2.5**
- А — ампер (единица измерения силы электрического тока) **2.5**
- Ом — ом (единица измерения электрического сопротивления) **2.5**
- См — сименс (единица измерения электрической проводимости) **2.5**
- Кл — кулон (единица измерения электрического заряда) **3.1**
- Ф — фарад (единица измерения электрической емкости) **3.1**
- Гн — генри (единица измерения электрической индуктивности) **3.1**
- Вб — вебер (единица измерения магнитного потока или потокосцепления) **3.1**

Буквы латинского алфавита

Начертание	Произношение	Начертание	Произношение
A a A a	а	N n N n	эн
B b B b	бэ	O o O o	о
C c C c	цэ	P p P p	пэ
D d D d	дэ	Q q Q q	ку
E e E e	е	R r R r	эр
F f F f	эф	S s S s	эс
G g G g	же	T t T t	тэ
H h H h	аш	U u U u	у
I i I i	и	V v V v	вэ
J j J j	йот	W w W w	дубль-вэ
K k K k	ка	X x X x	икс
L l L l	эль	Y y Y y	игрек
M m M m	эм	Z z Z z	зэт

Представлен наиболее употребительный (но не единственный) вариант произношения (в частности, вместо „йот“ иногда говорят „жи“).

Буквы греческого алфавита

Начертание	Произношение	Начертание	Произношение	Начертание	Произношение
A α	альфа	I ι	йота	P ρ	ро
B β	бета	K κ	каппа	Σ σ	сигма
Γ γ	гамма	Λ λ	лямбда	Τ τ	тау
Δ δ	дельта	Μ μ	ми	Υ υ	ипсилон
E ε	эпсилон	Ν ν	ни	Φ φ	фи
Z ζ	дзета	Ξ ξ	кси	Χ χ	хи
Η η	эта	Ο ο	омикрон	Ψ ψ	пси
Θ θ θ	тэта	Π π	пи	Ω ω	омега

Наряду с указанным произношением также говорят „лямбда“, „мю“ и „ню“.

1. РОЛЬ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ТЕХНИКЕ

Совершенство большинства технических устройств определяется главным образом эффективностью преобразования и перемещения ограниченного числа субстанций: массы, энергии, импульса, электрического заряда, информации. Эти процессы подчинены фундаментальным законам природы, составляющим предмет изучения механики, физики, химии и других естественно-научных дисциплин. Не всегда в развитии техники эти законы играли первичную роль. Много примеров изобретения технических устройств, которые, наоборот, натолкнули на открытие или уточнение фундаментальных научных положений. Видимо, такие ситуации возможны и в настоящее время.

Но магистральная линия создания принципиально новых и совершенствования существующих технических устройств — это реализация возможностей, открывающихся при использовании результатов фундаментальных исследований. Этим, в частности, объясняется и современный акцент в инженерном образовании на фундаментальную научную подготовку. Решающую роль при реализации результатов таких исследований играет *математическое моделирование*.

1.1. Моделирование и технический прогресс

На пути реализации в технике наиболее перспективных научных открытий и разработок обычно стоят препятствия, связанные с отсутствием или ограниченными возможностями конструкционных или функциональных материалов и с недостаточностью достигнутого технологического уровня. Поэтому процесс реализации научных и технических идей — это процесс

поиска разумного компромисса между желаемым и возможным, что доказывает история развития таких быстро прогрессирующих технических отраслей, как ядерная энергетика, ракетно-космическая техника, ведущие отрасли приборостроения и вычислительная техника.

При создании технических устройств и систем различного назначения обычно рассматривают несколько возможных вариантов проектных решений, ведущих к намеченной цели. Эти варианты принято называть *альтернативами*. Учет противоречивых требований и поиск компромисса в решении комплекса возникающих при этом взаимосвязанных проблем предполагают наличие достаточно полной и достоверной количественной информации об основных параметрах, которые характеризуют возможные для выбора альтернативы.

В складывавшейся десятилетиями последовательности основных этапов разработки технических устройств в большинстве отраслей машиностроения и приборостроения некоторый начальный объем необходимой информации формировался путем так называемых проектировочных расчетов, степень достоверности которых должна была обеспечивать лишь довольно грубый отбор альтернатив. Основная часть необходимой для принятия окончательного решения количественной информации (как по степени подробности, так и по уровню достоверности) формировалась на стадии экспериментальной отработки технических устройств. По мере их усложнения и удорожания, а также удлинения стадии их экспериментальной отработки значимость проектировочных расчетов стала расти. Возникла необходимость в повышении достоверности таких расчетов, обеспечивающей более обоснованный отбор альтернатив на начальной стадии проектирования и формулировку количественных критериев для структурной и параметрической оптимизации.

Развитие сверхзвуковой авиации, возникновение ракетно-космической техники, ядерной энергетике и ряда других быстро развивающихся наукоемких отраслей современного маши-

ностроения и приборостроения привели к дальнейшему усложнению разрабатываемых и эксплуатируемых технических устройств и систем. Их экспериментальная отработка стала требовать все больших затрат времени и материальных ресурсов, а в ряде случаев ее проведение в полном объеме превратилось в проблему, не имеющую приемлемого решения.

В этих условиях существенно увеличилось значение расчетно-теоретического анализа характеристик таких устройств и систем. Этому способствовал и прорыв в совершенствовании вычислительной техники, приведший к появлению современных ЭВМ с большим объемом памяти и высокой скоростью выполнения арифметических операций. В результате возникла материальная база для становления и быстрого развития *математического моделирования* и появились реальные предпосылки для использования *вычислительного эксперимента* не только в качестве расчетно-теоретического сопровождения на стадии отработки технического устройства, но и при его проектировании, подборе и оптимизации его эксплуатационных режимов, анализе его надежности и прогнозировании отказов и аварийных ситуаций, а также при оценке возможностей форсирования характеристик и модернизации технического устройства.

Так, вычислительный эксперимент позволил снизить затраты на проведение натурных аэродинамических испытаний созданного в США аэробуса и добиться уменьшения аэродинамического сопротивления на 20 % по сравнению с существовавшими аналогами. Известны примеры математического моделирования условий, возникающих при автомобильных авариях и более крупных техногенных катастрофах. На основе *математической модели* (ММ) биосферы Земли* составлен прогноз последствий ядерных взрывов при возможном военном конфликте, приводящих к так называемой „ядерной зиме“.

Отметим, что определенные предпосылки к широкому применению математического моделирования и вычислительного

*См.: Моисеев Н.Н.

эксперимента в технике были созданы благодаря разработке методов аналогового моделирования*¹. Основу большинства этих методов составляло использование электрических моделей-аналогов для исследования процессов в механических, тепловых и гидравлических системах. Явления считают математически аналогичными, если их описывают одинаковые по форме уравнения. Математическая аналогия между процессами в электрических цепях и другими физическими явлениями позволяет создать моделирующие установки, которые, по существу, являются специализированными аналоговыми вычислительными машинами*² (АВМ). Так, на основе *электротепловой аналогии* были разработаны и изготовлены многочисленные установки для моделирования процессов теплопроводности и теплообмена применительно к различным элементам конструкций и технологического оборудования в машиностроении, энергетике, металлургии, химической промышленности и других отраслях техники*³. Но, несмотря на простоту проведения вычислительного эксперимента и достаточную для инженерной практики точность получаемых результатов, со временем АВМ были вытеснены более универсальными и производительными ЭВМ. Тем не менее и сейчас при разработке ММ наряду с электротепловой аналогией *электромеханическую* и *электрогидравлическую аналогии* используют в методических целях для построения *эквивалентных схем* проектируемых и исследуемых *технических объектов**⁴.

В настоящее время математическое моделирование и вычислительный эксперимент с использованием ЭВМ стали составными частями общих подходов, характерных для современных информационных технологий. Принципиально важно то, что математическое моделирование позволило объединить формальное и неформальное мышление и естественным обра-

*¹См.: Тетельбаум И.М.

*²См.: Урмаев А.С.

*³См.: Зарубин В.С. (1966 г.); Коздоба Л.А.; Кузьмин М.П.

*⁴См.: Норенков И.П.

зом сочетать способность ЭВМ „во много раз быстрее, точнее и лучше человека делать формальные, арифметические операции, отслеживать логические цепочки с удивительными свойствами человеческого интеллекта — интуицией, способностью к ассоциациям и т.д.“*. Не менее важно и то, что современные средства отображения информации дают возможность вести с ЭВМ диалог — анализировать альтернативы, проверять предположения, экспериментировать с ММ.

Практическая реализация возможностей математического моделирования и вычислительного эксперимента существенно повышает эффективность инженерных разработок особенно при создании принципиально новых, не имеющих прототипов машин и приборов, материалов и технологий, что позволяет сократить затраты времени и средств на использование в технике передовых достижений физики, химии, механики и других фундаментальных наук. Отмеченные возможности математического моделирования и вычислительного эксперимента еще далеко не исчерпаны, представляются достаточно перспективными и поэтому заслуживают детального рассмотрения.

1.2. Основные этапы математического моделирования

Для обсуждения и обоснования основных подходов к разработке проблем *математического моделирования* технических устройств и процессов в них представляется целесообразным предварительно рассмотреть условную схему (рис. 1.1), определяющую последовательность проведения отдельных этапов общей процедуры *вычислительного эксперимента*. Исходной позицией этой схемы служит *технический объект* (ТО), под которым будем понимать конкретное техническое устройство, его агрегат или узел, систему устройств, процесс, явление или отдельную ситуацию в какой-либо системе или устройстве.

*См.: *Моисеев Н.Н.*

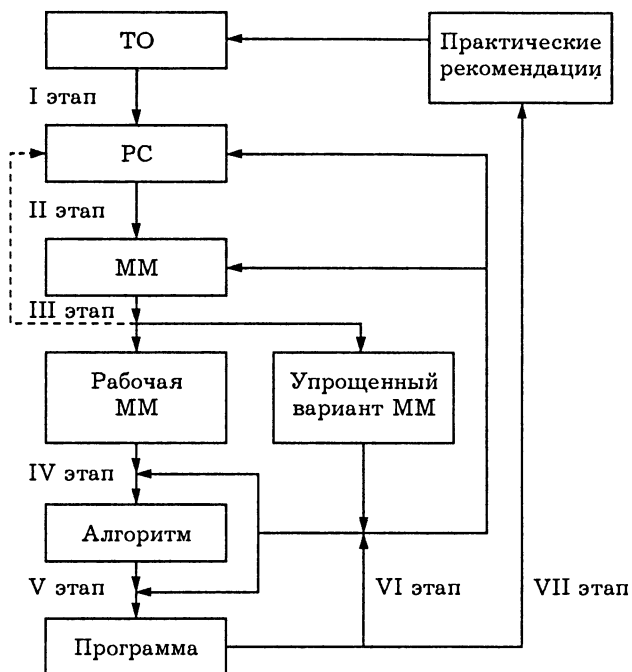


Рис. 1.1

На первом этапе осуществляют неформальный переход от рассматриваемого (разрабатываемого или существующего) ТО к его *расчетной схеме* (РС). При этом в зависимости от направленности вычислительного эксперимента и его конечной цели акцентируют те свойства, условия работы и особенности ТО, которые вместе с характеризующими их параметрами должны найти отражение в РС, и, наоборот, аргументируют допущения и упрощения, позволяющие не учитывать в РС те качества ТО, влияние которых предполагают в рассматриваемом случае несущественным. Иногда вместо РС используют термин *содержательная модель** ТО, а в некоторых случаях — *концептуальная модель*.

*См.: Мьшикис А.Д.

В сложившихся инженерных дисциплинах (например, в сопротивлении материалов, электротехнике и электронике) помимо описательной (вербальной) информации для характеристики РС разработаны специальные приемы и символы наглядного графического изображения. По ряду новых направлений развития техники подобная символика находится в стадии формирования.

При разработке новых ТО успешное проведение первого этапа в значительной мере зависит от профессионального уровня инженера, его творческого потенциала и интуиции. Полнота и правильность учета в РС свойств ТО, существенных с точки зрения поставленной цели исследования, являются основной предпосылкой получения в дальнейшем достоверных результатов математического моделирования. И наоборот, сильная идеализация ТО ради получения простой РС может обесценить все последующие этапы исследования.

Содержание второго этапа состоит, по существу, в формальном, математическом описании РС. Это описание в виде математических соотношений, устанавливающих связь между параметрами, характеризующими РС ТО, и называют *математической моделью* (ММ).

Надо сказать, что для некоторых типовых РС существуют банки ММ, что упрощает проведение второго этапа. Более того, одна и та же ММ может соответствовать РС из различных предметных областей. Однако при разработке новых ТО часто не удается ограничиться применением типовых РС и отвечающих им уже построенных ММ. Создание новых ММ или модификация существующих должны опираться на достаточно глубокую математическую подготовку и владение математикой как универсальным языком науки.

На третьем этапе проводят качественный и оценочный количественный анализ построенной ММ. При этом могут быть выявлены противоречия, ликвидация которых потребует уточнения или пересмотра РС (штриховая линия на рис. 1.1). Ко-

личественные оценки могут дать основания упростить модель, исключив из рассмотрения некоторые параметры, соотношения или их отдельные составляющие, несмотря на то что влияние описываемых ими факторов учтено в РС. В большинстве случаев, принимая дополнительные по отношению к РС допущения, полезно построить такой упрощенный вариант ММ, который позволял бы получить или привлечь известное точное решение. Это решение затем можно использовать для сравнения при тестировании результатов на последующих этапах. В некоторых случаях удается построить несколько ММ для одного и того же ТО, отличающихся различным уровнем упрощения. В этом случае говорят об *иерархии ММ* (греческое слово *ιєραρχία* происходит от *ιєρός* — священный и *αρχή* — власть и в данном случае означает упорядочение ММ по признаку их сложности и полноты).

Построение иерархии ММ связано с различной детализацией свойств изучаемого ТО. Сравнение результатов исследования различных ММ может существенно расширить и обогатить знания об этом ТО. Кроме того, такое сравнение позволяет оценить достоверность результатов последующего вычислительного эксперимента: если более простая ММ правильно отражает некоторые свойства ТО, то результаты исследования этих свойств должны быть близки к результатам, полученным при использовании более полной и сложной ММ.

Итог анализа на рассматриваемом этапе — это обоснованный выбор рабочей ММ ТО, которая подлежит в дальнейшем детальному количественному анализу. Успех в проведении третьего этапа зависит, как правило, от глубины понимания связи отдельных составляющих ММ со свойствами ТО, нашедшими отражение в его РС, что предполагает органическое сочетание владения математикой и инженерными знаниями в конкретной предметной области.

Четвертый этап состоит в обоснованном выборе метода количественного анализа ММ, в разработке эффективного ал-

горитма вычислительного эксперимента, а пятый этап — в создании работоспособной программы, реализующей этот алгоритм средствами вычислительной техники. Для успешного проведения четвертого этапа необходимо владеть арсеналом современных методов вычислительной математики, а при математическом моделировании довольно сложных ТО выполнение пятого этапа требует профессиональной подготовки в области программирования на ЭВМ.

Получаемые на шестом этапе (в итоге работы программы) результаты вычислений должны прежде всего пройти тестирование путем сопоставления с данными количественного анализа упрощенного варианта ММ рассматриваемого ТО. Тестирование может выявить недочеты как в программе, так и в алгоритме и потребовать доработки программы или же модификации и алгоритма и программы. Анализ результатов вычислений и их инженерная интерпретация могут вызвать необходимость в корректировке РС и соответствующей ММ. После устранения всех выявленных недочетов триаду „модель — алгоритм — программа“ можно использовать в качестве рабочего инструмента для проведения вычислительного эксперимента и выработки на основе получаемой количественной информации практических рекомендаций, направленных на совершенствование ТО, что составляет содержание седьмого, завершающего „технологический цикл“ этапа математического моделирования.

Представленная последовательность этапов носит общий и универсальный характер, хотя в некоторых конкретных случаях она может и несколько видоизменяться. Если при разработке ТО можно использовать типовые РС и ММ, то отпадает необходимость в выполнении ряда этапов, а при наличии и соответствующего программного комплекса процесс вычислительного эксперимента становится в значительной степени автоматизированным. Однако математическое моделирование ТО, не имеющих близких прототипов, как правило, связано с проведением всех этапов описанного „технологического цикла“.

1.3. Математические модели в инженерных дисциплинах

Осуществление отдельных этапов *математического моделирования*, рассмотренных в 1.2, требует определенных знаний, навыков и практической подготовки. Если первый, седьмой и частично шестой этапы применительно к моделированию *технических объектов* (ТО) типичны для ампула инженера, то второй, третий и четвертый этапы предполагают наличие серьезной математической подготовки, а пятый — навыков в разработке и отладке ЭВМ-программ. Поэтому к математическому моделированию сложных ТО приходится привлекать и инженеров, и математиков, и программистов. Однако для координации их усилий необходимы специалисты, способные осуществить каждый из рассмотренных этапов на высоком профессиональном уровне.

Подготовка таких специалистов составляет одну из ключевых проблем, от успешного решения которой зависит эффективное использование возможностей математического моделирования при создании технических устройств и их систем. Решение этой проблемы, вероятно, по силам ряду созданных в последние годы технических университетов.

Успех в решении указанной проблемы в значительной степени зависит от укрепления междисциплинарных связей между курсами высшей математики, физики, теоретической механики, химии, информатики и инженерными дисциплинами. Связующим звеном при этом могут быть *математические модели* (ММ) явлений и процессов, являющихся предметом изучения в дисциплинах естественно-научного цикла и лежащих в основе функционирования ТО в конкретных областях техники. Эта связь может обеспечить методическое единство и преемственность циклов математической, естественно-научной и специальной подготовки будущего инженера.

Такие инженерные дисциплины, как прикладная механика (в частности, сопротивление материалов), гидравлика, теория

теплообмена, электротехника, электроника и некоторые другие, можно с определенных позиций рассматривать как упорядоченное множество *расчетных схем* (РС) и ММ соответствующих ТО. Прежде всего в инженерных дисциплинах изучают РС и ММ так называемых типовых элементов, часто встречающихся в данной отрасли техники. Например, в электротехнике роль простейших типовых элементов играют пассивные *электрические двухполюсники*: резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности (см. 3.1). Но даже каждому из таких, казалось бы, простых элементов в зависимости от условий его работы соответствуют несколько РС, и можно говорить об *иерархии ММ* (см. Д.3.3 и 6.1).

В электротехнике и электронике, по существу, сформирован так называемый банк РС и ММ типовых элементов, что в сочетании с принятой системой наглядного графического представления связей между этими элементами позволяет строить ММ достаточно сложных устройств. Аналогичная ситуация существует в инженерных дисциплинах, предметом изучения которых являются механические, тепловые, пневмогидравлические системы и системы, в которых одновременно протекают процессы различной физической природы. Так, в сопротивлении материалов банк РС построен с учетом формы типовых элементов на основе принятых предположений (гипотез) о распределении перемещений или механических напряжений в этих элементах. Причем каждой РС (стержню, балке, пластине, оболочке*¹) соответствует ММ, область применения которой ограничена принятыми гипотезами.

Следует отметить определяющую роль гипотез при формировании РС типовых элементов*². При этом целесообразно отдавать предпочтение более простым гипотезам по сравнению с искусственными и обычно трудно проверяемыми. Если простая гипотеза верна, то ее обычно легко аргументировать и

*¹См.: Феодосьев В.И. (1999 г.)

*²См.: Блезман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г.

подтвердить экспериментально, и, наоборот, если она вызывает сомнение, то ее нетрудно опровергнуть либо на основе контрпримеров и непосредственных наблюдений, либо исходя из соответствующим образом поставленных экспериментов, либо при получении противоречивых результатов уже на стадии количественного анализа ММ, построенной с использованием этой гипотезы. Однако принятие простой гипотезы не всегда равносильно построению простых РС и ММ изучаемого ТО.

Остановимся на особенностях построения ММ в инженерных дисциплинах. Математик-теоретик обычно выбирает для исследования уже построенную ММ, т.е. начинает работу с формулировки математической задачи и затем уже не подвергает сомнению эту формулировку, а лишь обосновывает свои преобразования и этапы решения задачи. При этом в некоторых случаях полученные результаты удается применить непосредственно к конкретному ТО. Но в технике ни одну достаточно сложную задачу нельзя поставить таким образом. Любое формулирование технической задачи является условным. Если некоторое следствие формулировки такой задачи неверно или неприемлемо, то задачу приходится переформулировать, так как любая последовательность математических символов, записанных при построении ММ, является в действительности последовательностью утверждений содержательного характера, связанных с конкретным исследуемым ТО. Поэтому при математическом моделировании ТО необходимо учитывать как математическую, так и содержательную сторону задачи, связывая одну с другой.

Забвение относительного соответствия ММ реальному ТО может привести к ошибкам, связанным с приписыванием ТО свойств его ММ*. В этом отношении характерны слова отечественного математика, механика и кораблестроителя А.Н. Крылова (1863–1945): „Сколько бы ни было точно математическое решение, оно не может быть точнее тех приближенных предпо-

*См.: Мьшикс А.Д.

ссылок, на коих оно основано. Об этом часто забывают, делают вначале какое-нибудь грубое приближенное предположение или допущение, часто даже не оговорив таковое, а затем придают полученной формуле гораздо большее доверие, нежели она заслуживает“.

Отмеченные особенности дают повод для того, чтобы еще раз подчеркнуть важность умения согласовывать этап формирования РС с этапом построения ММ изучаемого ТО (этапы I и II на рис. 1.1). Это умение обычно складывается у студентов при выполнении междисциплинарных курсовых работ и проектов, при самостоятельном решении прикладных математических задач, имеющих конкретное техническое содержание. Для формирования таких навыков необходимы специальные учебные пособия, в которых на примерах ТО, изучаемых в инженерных дисциплинах, была бы детально и аргументированно раскрыта взаимная связь рассматриваемых этапов. В качестве примера такого пособия можно назвать выдержавшую пять изданий книгу В.И. Феодосьева „Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов“, содержание и методическое значение которой для углубленного понимания особенностей математического моделирования ТО существенно шире ее названия*¹.

Акцент на взаимной связи этапов формирования РС и построения ММ исследуемого ТО не противоречит, а дополняет выдвинутый и обоснованный А.А. Самарским и его сотрудниками методологический императив*² (от латинского слова *imperativus* — повелительный) — совершенствование триады „модель — алгоритм — программа“ и ее внедрение в современные информационные технологии. В этой триаде основное внимание уделено проблемам анализа построенных ММ методами вычислительной математики при помощи средств вычислительной техники (т.е. этапам IV и V на рис. 1.1). Подчеркнуто,

*¹См.: Феодосьев В.И. (1996 г.)

*²См.: Самарский А.А., Михайлов А.П.

что изолирование этапов, связанных с построением ММ или разработкой алгоритмов и пакетов программ, как и обучение выполнению этих этапов по отдельности, не достаточно для эффективного использования преимуществ математического моделирования. Наличие современных ЭВМ само по себе еще не решает проблему. Необходимо „интеллектуальное ядро“ вычислительной техники, которым является ее математическое обеспечение, составляющее, по оценкам, не менее 80 % общей стоимости разработки информационных технологий.

Удобства, предоставляемые программным обеспечением современных ЭВМ их пользователям, часто приводят к стремлению обратиться при количественном анализе ММ к существующим и постоянно совершенствуемым универсальным пакетам типа Mathcad^{*1}, Matlab и т.п. Более того, *универсальность ММ* и формирование банков типовых ММ позволяют создавать программные комплексы типа NASTRAN^{*2} или ANSYS, в которые исходная информация вводится даже не в виде ММ, а в виде РС изучаемого ТО.

Однако метод, который годится для решения многих стандартных задач, часто не является наилучшим при решении конкретной задачи, особенно нестандартной, а нередко и вообще не применим. Но в инженерной практике решать приходится в основном нестандартные задачи, потому что стандартные почти все решены или могут быть решены без особых творческих усилий. При решении новых и сложных задач, не имеющих близких аналогов, путь формального обращения к универсальным пакетам и программным комплексам может привести к получению результатов, которые не удастся интерпретировать применительно к рассматриваемому ТО. В таких случаях анализ ММ нужно строить на умелом сочетании качественных оценок, аналитических методов и применения ЭВМ, помня, что цель расчетов — не числа, а понимание^{*3}. Все это говорит о

^{*1}См.: Плис А.И., Сливина Н.А.

^{*2}См.: Трудопошин В.А., Пивоварова Н.В.

^{*3}См.: Хемминг Р.В.

том, что ЭВМ, освобождая нас от многих забот и обязанностей, не освобождает во всяком случае от двух из них — от необходимости владеть математикой и творчески мыслить*.

Вопросы и задачи

1.1. Какие факторы определили расширение в последнее время областей применения математического моделирования в технике?

1.2. Что понимают под аналоговым моделированием?

1.3. Перечислите содержание основных этапов „технологического цикла“ математического моделирования технического объекта.

1.4. Каковы особенности построения РС (содержательной модели) ТО?

1.5. Что понимают под иерархией ММ по отношению к одному и тому же ТО?

1.6. Какую роль играет упрощенный вариант ММ ТО при проведении вычислительного эксперимента?

*См.: *Феодосьев В.И.* (1969 г.)

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Из последовательности основных этапов *математического моделирования* (см. рис. 1.1) следует, что определяющую роль в нем играет *математическая модель* (ММ) изучаемого *технического объекта*. Поэтому прежде всего следует уделить внимание основным свойствам ММ и требованиям к ней, а также классификации ММ.

2.1. Понятие математической модели

Понятие *математической модели* (ММ), как и ряд других понятий, используемых в *математическом моделировании*, не имеет строгого формального определения. Тем не менее в это понятие вкладывают вполне конкретное содержание, с которым, в частности, тесно связано применение математики в инженерной практике. Более того, такие научные дисциплины, как механика, физика и их многочисленные разделы, являются, по существу, упорядоченными множествами ММ, построение которых сопровождается теоретическим обоснованием адекватного отражения этими моделями свойств рассматриваемых процессов и явлений. Именно посредством ММ научные дисциплины взаимодействуют с математикой. По-видимому, к этому сводится смысл замечания Карла Маркса о том, что любая наука только тогда достигает совершенства, когда ей удастся пользоваться математикой.

Этапы развития многих естественно-научных направлений в познании законов природы и в совершенствовании техники — это построение последовательности все более точных и более полных ММ изучаемых процессов и явлений. Однако история науки знает не только случаи последовательного уточнения той

или иной ММ, но и случаи отказа от некоторых ММ вследствие расхождений прогнозируемых ими результатов с реальностью.

Отвечающая реальности (адекватная) ММ является, как правило, большим научным достижением. Она позволяет провести детальное исследование изучаемого объекта и дать надежный прогноз его поведения в различных условиях. Но за адекватность ММ нередко приходится расплачиваться ее усложнением, что вызывает трудности при ее использовании. В этом случае на помощь математике и приходит современная вычислительная техника, существенно расширившая класс ММ, допускающих исчерпывающий количественный анализ.

Одни и те же ММ находят подчас совершенно различные приложения. Известно, например, что закон Ньютона притяжения двух материальных точек и закон взаимодействия двух точечных электрических зарядов при соответствующем выборе единиц измерения физических величин можно выразить одинаковыми формулами. При помощи одной и той же ММ, содержащей уравнение Пуассона

$$\nabla^2 u(M) + f(M) = 0, \quad (2.1)$$

где ∇^2 — дифференциальный оператор Лапласа, а $u(M)$ и $f(M)$ — искомая и заданная функции положения точки $M \in V$ в некоторой области V , можно изучать установившиеся процессы течения жидкости и распространения теплоты, распределение электрического потенциала, деформацию мембраны, механические напряжения при кручении бруса, фильтрацию нефти в нефтеносном слое или влаги в почве, распространение какой-либо примеси в воздухе или эпидемии в регионе. В каждой из перечисленных задач функции $u(M)$ и $f(M)$ приобретают свой смысл, но их связь описывает общее для этих задач уравнение (2.1).

Приведенные примеры характеризуют свойство *универсальности ММ*. Благодаря этому свойству возникает „родство“ между различными отраслями знаний, что ускоряет их совместное развитие.

Такую общность и универсальность ММ можно объяснить тем, что в математике используют абстрактные основополагающие понятия, немногочисленные, но весьма емкие по содержанию. Это позволяет конкретные факты из самых различных областей знаний рассматривать как проявление этих понятий и отношений между ними. Совокупность таких понятий и отношений, выраженных при помощи системы математических символов и обозначений и отражающих некоторые свойства изучаемого объекта, и называют *математической моделью*^{*1} этого объекта. В данном случае математика выступает, по существу, в роли универсального языка науки. Его универсальность французский математик Анри Пуанкаре (1854–1912) определил всего одной фразой: „Математика — это искусство называть разные вещи одним и тем же именем“.

2.2. Структура математической модели

В достаточно общем случае изучаемый *технический объект* (ТО) количественно можно охарактеризовать векторами $x \in \mathbb{R}^k$, $g \in \mathbb{R}^m$ и $y \in \mathbb{R}^n$ *внешних, внутренних и выходных параметров* соответственно. Одни и те же физические, механические или информационные характеристики ТО в моделях различного уровня и содержания могут выполнять роль как внешних или внутренних, так и выходных параметров.

Например, для электронного усилителя выходными параметрами являются коэффициент усиления, полоса частот пропускаемых сигналов, входное сопротивление, рассеиваемая мощность, внешними — сопротивление и емкость нагрузки, напряжения источников питания, температура окружающей среды, а внутренними — сопротивления резисторов, емкости конденсаторов, характеристики транзисторов^{*2}. Но если в качестве ТО рассматривать отдельно взятый транзистор, то такие его

^{*1}См.: Математический энциклопедический словарь.

^{*2}См.: *Норенков И.П.*

характеристики, как отпирающее напряжение и коллекторный ток, следует уже отнести к его выходным параметрам, а в качестве внешних надо будет рассматривать токи и напряжения, задаваемые коммутирующими с ним элементами усилителя.

При создании ТО значения выходных параметров или диапазоны их возможного изменения оговаривают в техническом задании на разработку ТО, тогда как внешние параметры характеризуют условия его функционирования.

В сравнительно простом случае *математическая модель* (ММ) ТО может представлять собой соотношение

$$y = f(x, g), \quad x \in \mathbb{R}^k, \quad g \in \mathbb{R}^m, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (2.2)$$

где f — векторная функция векторного аргумента. Модель в виде (2.2) позволяет легко вычислять выходные параметры по задаваемым значениям внешних и внутренних параметров, т.е. решать так называемую *прямую задачу*. В инженерной практике решение прямой задачи часто называют поверочным расчетом. При создании ТО возникает необходимость решать более сложную так называемую *обратную задачу*: по обусловленным техническим заданием на проектирование ТО значениям внешних и выходных параметров находить его внутренние параметры. В инженерной практике решению обратной задачи соответствует так называемый проектировочный расчет, часто имеющий целью оптимизацию внутренних параметров по некоторому *критерию оптимальности*. Однако при построении ММ ТО функция f в (2.2) обычно заранее не известна и ее предстоит установить. Это наиболее сложная так называемая *задача идентификации* ММ (от латинского слова *identifico* — отождествляю, которому в данном случае придают смысл „распознаю“).

Задача идентификации может быть решена путем математической обработки информации о ряде таких состояний ТО, для каждого из которых известны (например, измерены экспериментально) значения выходных, внутренних и внешних

параметров. Один из таких способов связан с применением регрессионного анализа [XVII]. Если информация о внутренних параметрах отсутствует или же внутреннее устройство ТО слишком сложно, то ММ такого ТО строят по принципу *черного ящика* — устанавливают соотношение между внешними и выходными параметрами путем исследования реакции ТО на внешние воздействия.

Теоретический путь построения ММ состоит в установлении связи между y , x и g в виде *операторного уравнения*

$$L(u(z)) = 0, \quad (2.3)$$

где L — некоторый оператор (в общем случае нелинейный), 0 — нулевой элемент пространства, в котором действует этот оператор, z — вектор независимых переменных, в общем случае включающий время и пространственные координаты, а u — вектор *фазовых переменных*, включающий те параметры ТО, которые характеризуют его состояние. Но даже если возможно получить решение (2.3) и найти зависимость $u(z)$ от z , то далеко не всегда удастся представить ММ ТО в явном относительно вектора y виде (2.2). Поэтому именно (2.3) определяет в общем случае структуру ММ ТО, а (2.2) является более простым частным случаем такой модели.

2.3. Свойства математических моделей

Из сказанного ранее следует, что при изучении реально существующего или мыслимого *технического объекта* (ТО) математические методы применяют к его *математической модели* (ММ). Это применение будет эффективным, если свойства ММ удовлетворяют определенным требованиям. Рассмотрим основные из этих свойств.

Полнота ММ позволяет отразить в достаточной мере именно те характеристики и особенности ТО, которые интересуют нас с точки зрения поставленной цели проведения

вычислительного эксперимента. Например, модель может достаточно полно описывать протекающие в объекте процессы, но не отражать его габаритные, массовые или стоимостные показатели. Так, ММ резистора в виде хорошо известной формулы $U = IR$ закона Ома* обладает свойством полноты лишь с точки зрения установления связи между падением электрического напряжения U на резисторе, его сопротивлением R и протекающим через него током силой I , но не дает никакой информации о размерах, массе, теплостойкости, стоимости и других характеристиках резистора, по отношению к которым она не является полной. Отметим попутно, что в рассматриваемой ММ сопротивление R резистора выступает в роли его внутреннего параметра, тогда как если задано U , то I будет выходным параметром, а U — внешним параметром, и наоборот.

Точность ММ дает возможность обеспечить приемлемое совпадение реальных и найденных при помощи ММ значений выходных параметров ТО, составляющих вектор

$$\mathbf{y} = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_i \ \dots \ y_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть y_i^M и y_i^P — найденное при помощи ММ и реальное значения i -го выходного параметра. Тогда относительная погрешность ММ по отношению к этому параметру будет равна

$$\varepsilon_i = \frac{y_i^M - y_i^P}{y_i^P}, \quad i = \overline{1, n}.$$

В качестве скалярной оценки вектора

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \dots \ \varepsilon_i \ \dots \ \varepsilon_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

можно принять какую-либо его норму, например

$$\varepsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2} \quad \text{или} \quad \varepsilon = \max_{i=\overline{1, n}} |\varepsilon_i|.$$

*Г.С. Ом (1787–1854) — немецкий физик.

Поскольку выходные параметры ТО при помощи ММ связаны с его внешними и внутренними параметрами, то ε , как количественная характеристика точности модели этого ТО, будет зависеть от координат векторов \mathbf{x} и \mathbf{g} .

Адекватность ММ — это способность ММ описывать выходные параметры ТО с относительной погрешностью не более некоторого заданного значения δ . Пусть при некоторых ожидаемых номинальных значениях внешних параметров ТО, составляющих вектор $\mathbf{x}_{\text{ном}}$, из условия минимума ε путем решения задачи конечномерной оптимизации [XIV] найдены значения внутренних параметров, составляющие вектор $\mathbf{g}_{\text{ном}}$ и обеспечивающие минимальное значение ε_{\min} относительной погрешности ММ. Тогда при фиксированном векторе $\mathbf{g}_{\text{ном}}$ можно построить множество

$$X = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k : \varepsilon \leq \delta \} \subset \mathbb{R}^k,$$

называемое **областью адекватности** данной ММ. Ясно, что $X = \emptyset$ при $\delta < \varepsilon_{\min}$, а чем больше заданное значение $\delta > \varepsilon_{\min}$, тем шире область адекватности ММ, т.е. эта ММ применима в более широком диапазоне возможного изменения внешних параметров ТО.

В более общем смысле под адекватностью ММ понимают правильное качественное и достаточно точное количественное описание именно тех характеристик ТО, которые важны в данном конкретном случае. Модель, адекватная при выборе одних характеристик, может быть неадекватной при выборе других характеристик того же ТО. В ряде прикладных областей, еще недостаточно подготовленных к применению количественных математических методов, ММ имеют главным образом качественный характер. Эта ситуация типична, например, для биологической и социальной сфер, в которых количественные закономерности не всегда поддаются строгой математической формализации. В таких случаях под адекватностью ММ естественно понимать лишь правильное качественное описание поведения изучаемых объектов или их систем.

Экономичность ММ оценивают затратами на вычислительные ресурсы (машинное время и память), необходимые для реализации ММ на ЭВМ. Эти затраты зависят от числа арифметических операций при использовании модели, от размерности пространства фазовых переменных, от особенностей применяемой ЭВМ и других факторов. Очевидно, что требования экономичности, высокой точности и достаточно широкой области адекватности ММ противоречивы и на практике могут быть удовлетворены лишь на основе разумного компромисса. Свойство экономичности ММ часто связывают с ее простотой. Более того, количественный анализ некоторых упрощенных вариантов ММ может быть осуществлен и без привлечения современной вычислительной техники. Однако его результаты могут иметь лишь ограниченную ценность на стадии отладки алгоритма или ЭВМ-программы (см. 1.2 и рис. 1.1), если упрощение ММ не согласовано с *расчетной стемой* ТО.

Робастность ММ (от английского слова *robust* — крепкий, устойчивый) характеризует ее устойчивость по отношению к погрешностям исходных данных, способность нивелировать эти погрешности и не допускать их чрезмерного влияния на результат вычислительного эксперимента. Причинами низкой робастности ММ могут быть необходимость при ее количественном анализе вычитания близких друг к другу приближенных значений величин или деления на малую по модулю величину, а также использование в ММ функций, быстро изменяющихся в промежутке, где значение аргумента известно с невысокой точностью. Иногда стремление увеличить полноту ММ приводит к снижению ее робастности вследствие введения дополнительных параметров, известных с невысокой точностью или входящих в слишком приближенные соотношения.

Продуктивность ММ связана с возможностью располагать достаточно достоверными исходными данными. Если они являются результатом измерений, то точность их измерения должна быть выше, чем для тех параметров, которые получают при использовании ММ. В противном случае ММ будет

непродуктивной и ее применение для анализа конкретного ТО теряет смысл. Ее можно будет использовать лишь для оценки характеристик некоторого класса ТО с гипотетическими исходными данными.

Наглядность ММ является ее желательным, но необязательным свойством. Тем не менее использование ММ и ее модификация упрощаются, если ее составляющие (например, отдельные члены уравнений) имеют ясный содержательный смысл. Это обычно позволяет ориентировочно предвидеть результаты вычислительного эксперимента и облегчает контроль их правильности.

В дальнейшем на конкретных примерах будут проиллюстрированы отмеченные выше свойства ММ (см. 3 и 6).

2.4. Структурные и функциональные модели

Различные особенности и признаки *математических моделей* (ММ) лежат в основе их типизации (или классификации). Среди таких признаков выделяют характер отображаемых свойств *технического объекта* (ТО), степень их детализации, способы получения и представления ММ.

Один из существенных признаков классификации связан с отражением в ММ тех или иных особенностей ТО. Если ММ отображает устройство ТО и связи между составляющими его элементами, то ее называют *структурной математической моделью*. Если же ММ отражает происходящие в ТО физические, механические, химические или информационные процессы, то ее относят к *функциональным математическим моделям*. Ясно, что могут существовать и комбинированные ММ, которые описывают как функционирование, так и устройство ТО. Такие ММ естественно называть *структурно-функциональными математическими моделями*.

Структурные ММ делят на *топологические* и *геометрические*, составляющие два уровня *иерархии ММ* этого типа. Первые отображают состав ТО и связи между его эле-

ментами. Топологическую ММ целесообразно применять на начальной стадии исследования сложного по структуре ТО, состоящего из большого числа элементов, прежде всего для уяснения и уточнения их взаимосвязи. Такая ММ имеет форму *графов*, таблиц, матриц, списков и т.п., и ее построению обычно предшествует разработка структурной схемы ТО.

Геометрическая ММ дополнительно к информации, представленной в топологической ММ, содержит сведения о форме и размерах ТО и его элементах, об их взаимном расположении. В геометрическую ММ обычно входят совокупность уравнений линий и поверхностей и алгебрологические соотношения, определяющие принадлежность областей пространства телу ТО или его элементам. Такую ММ иногда задают координатами некоторого множества точек, по которым интерполированием можно построить ограничивающие область линии или поверхности. Границы области задают и кинематическим способом: линию — как траекторию движения точки, а поверхность — как результат перемещения линии. Возможно представление формы и размеров области совокупностью типовых фрагментов достаточно простой конфигурации. Такой способ характерен, например, для метода конечных элементов [XIII], широко используемого в *математическом моделировании*.

Геометрические ММ находят применение при проектировании ТО, разработке технической документации и технологических процессов изготовления деталей (например, на станках с числовым программным управлением).

Функциональные ММ состоят из соотношений, связывающих между собой *фазовые переменные*, т.е. *внутренние*, *внешние* и *выходные параметры* ТО. Функционирование сложных ТО нередко удается описать лишь при помощи совокупности его реакций на некоторые известные (или заданные) входные воздействия (сигналы). Такую разновидность функциональной ММ относят к типу *черного ящика* и обычно называют *имитационной математической моделью*, имея в виду, что она лишь имитирует внешние проявления функционирования

ТО, не раскрывая и не описывая существа протекающих в нем процессов. Имитационные ММ находят широкое применение в технической кибернетике (от греческого слова *κυβερνάω* — управляю рулем) — научном направлении, изучающем системы управления сложными ТО.

По форме представления имитационная ММ является примером *алгоритмической математической модели*, поскольку связь в ней между внешними и выходными параметрами ТО удастся описать лишь в форме алгоритма, пригодного для реализации в виде ЭВМ-программы. По этому признаку к типу алгоритмических относят более широкий класс как функциональных, так и структурных ММ. Если связи между параметрами ТО можно выразить в аналитической форме, то говорят об *аналитических математических моделях*. При построении иерархии ММ одного и того же ТО обычно стремятся к тому, чтобы упрощенный вариант ММ (см. 1.2) был представлен в аналитической форме, допускающей точное решение, которое можно было бы использовать для сравнения при тестировании результатов, полученных при помощи более полных и поэтому более сложных вариантов ММ.

Ясно, что ММ конкретного ТО по форме представления может включать признаки как аналитической, так и алгоритмической ММ. Более того, на стадии количественного исследования достаточно сложной аналитической ММ и проведения *вычислительного эксперимента* на ее основе разрабатывают алгоритм, который реализуют в виде ЭВМ-программы, т.е. в процессе математического моделирования аналитическую ММ преобразуют в алгоритмическую ММ.

2.5. Теоретические и эмпирические модели

По способу получения *математические модели* (ММ) делят на *теоретические* и *эмпирические* (от греческого слова *ἐμπειρία* — опыт). Первые получают в результате изучения свойств *технического объекта* (ТО) и протекающих в нем

процессов, а вторые являются итогом обработки результатов наблюдения внешних проявлений этих свойств и процессов. Один из способов построения эмпирических ММ заключается в проведении экспериментальных исследований, связанных с измерением *фазовых переменных* ТО, и в последующем обобщении результатов этих измерений в алгоритмической форме или в виде аналитических зависимостей. Поэтому эмпирическая ММ по форме представления может содержать признаки как *алгоритмической*, так и *аналитической математической модели*. Таким образом, построение эмпирической ММ сводится к решению *задачи идентификации*.

При построении теоретических ММ прежде всего стремятся использовать известные фундаментальные законы сохранения таких субстанций, как масса, электрический заряд, энергия, количество движения и момент количества движения. Кроме того, привлекают *определяющие соотношения* (называемые также *уравнениями состояния*), в роли которых могут выступать так называемые *феноменологические законы* (например, *уравнение Клапейрона — Менделеева* состояния *совершенного газа*, *закон Ома* о связи силы тока в проводнике и падения электрического напряжения, *закон Гука* о связи деформации и механического напряжения в линейно упругом материале, *закон Фурье* [XII] о связи градиента температуры в теле с плотностью теплового потока и т.п.).

Сочетание теоретических соображений качественного характера с обработкой результатов наблюдения внешних проявлений свойств изучаемого ТО приводит к смешанному типу ММ, называемых *полуэмпирическими*. При построении таких ММ используют основные положения теории размерностей, в том числе так называемую П-теорему (*Пи-теорему**): если между n параметрами, характеризующими изучаемый объект, существует зависимость, имеющая физический смысл, то эту зависимость можно представить в виде зависимости между

*См.: *Седов Л.И.* (1977 г.).

$\bar{n} = n - k$ их безразмерными комбинациями, где k — число независимых единиц измерения, через которые можно выразить размерности этих параметров. При этом \bar{n} определяет число независимых (не выражаемых друг через друга) безразмерных комбинаций, обычно называемых *критериями подобия* (см. Д.2.1).

Объекты, для которых равны значения соответствующих критериев подобия, считают подобными. Например, любой треугольник однозначно определен длинами a , b и c его сторон, т.е. $n = 3$, а $k = 1$. Поэтому, согласно П-теореме, множество подобных треугольников можно задать значениями $\bar{n} = n - k = 2$ критериев подобия. В качестве таких критериев можно выбрать безразмерные отношения длин сторон: b/a и c/a или любые два других независимых отношения. Так как углы треугольника однозначно связаны с отношениями сторон и являются безразмерными величинами, то множество подобных треугольников можно определить равенством двух соответствующих углов или равенством угла и отношения длин прилежащих к нему сторон. Все перечисленные варианты соответствуют известным признакам подобия треугольников.

Для успешного применения П-теоремы к построению моделей ТО необходимо располагать полным набором параметров, описывающих изучаемый объект, причем выбор этих параметров должен опираться на аргументированный качественный анализ тех свойств и особенностей ТО, влияние которых существенно в данном конкретном случае. Отметим, что такой анализ необходим при любом способе построения ММ, и проиллюстрируем это положение примерами.

Пример 2.1. Рассмотрим хорошо известную *расчетную схему* математического маятника (рис. 2.1) в виде материальной точки массой m , подвешенной на невесомом стержне постоянной длины l , который может свободно вращаться относительно горизонтальной оси, проходящей через точку O . Отклонение маятника на угол φ_0 от его вертикального положения

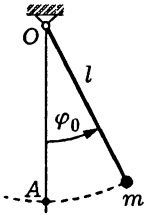


Рис. 2.1

равновесия приведет к возрастанию потенциальной энергии материальной точки на величину $\Delta\Pi = mgl(1 - \cos\varphi_0)$, где g — ускорение свободного падения. Если после отклонения маятник начнет движение, то при отсутствии сопротивления он в силу закона сохранения энергии будет совершать незатухающие колебания относительно положения равновесия (точка A на рис. 2.1). При прохождении положения равновесия скорость v материальной точки является наибольшей по абсолютной величине, поскольку в этом положении кинетическая энергия этой точки равна $mv^2/2 = \Delta\Pi$, так что

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta\Pi}{m}} = \sqrt{2gl(1 - \cos\varphi_0)}.$$

Пусть необходимо установить зависимость *периода T колебаний* маятника (т.е. наименьшего промежутка времени, через который маятник возвращается в некоторое фиксированное положение, не совпадающее с положением равновесия) от параметров m , l , φ_0 и g (параметр v следует исключить из рассмотрения, поскольку его удалось выразить через указанные выше параметры). Размерности $[\cdot]$ четырех указанных параметров и периода T колебаний можно выразить через $k = 3$ независимые стандартные единицы измерения: $[T] = \text{с}$, $[m] = \text{кг}$, $[l] = \text{м}$, $[\varphi_0] = 0$ и $[g] = \text{м/с}^2$. Поэтому в силу П-теоремы из $n = 5$ параметров можно составить $\bar{n} = n - k = 2$ безразмерные комбинации, причем угол φ_0 , будучи безразмерным, является одной из них. Во вторую безразмерную комбинацию не удастся включить массу m материальной точки, поскольку единица измерения массы (кг) входит лишь в размерность массы. Следовательно, величина m не является аргументом искомой зависимости, что можно установить и при построении теоретической ММ рассматриваемого маятника (см. пример 5.12). После исключения параметра m имеем $n = 4$ и $k = 2$, т.е. снова $\bar{n} = 2$, так что наряду с безразмерным параметром φ_0 остальные

параметры образуют лишь одну независимую безразмерную комбинацию, которую можно представить в виде gT^2/l .

Таким образом, согласно П-теореме, искомую зависимость можно искать в виде

$$T^2 \frac{g}{l} = F(\varphi_0), \quad \text{или} \quad T = \sqrt{\frac{l}{g}} f(\varphi_0), \quad (2.4)$$

где $f(\varphi_0) = \sqrt{F(\varphi_0)}$ — некоторая функция угла φ_0 . Установить вид этой функции в рамках теории размерностей нельзя. Для этого необходимо либо провести эксперимент и обработать его результаты в соответствии с первым равенством (2.4), выявив функциональную зависимость безразмерной комбинации gT^2/l от φ_0 , либо воспользоваться теоретической ММ, которая представляет функцию f в виде *полного эллиптического интеграла первого рода*. Но даже при неизвестных функциях f (или F) при помощи (2.4) можно получить полезные результаты. Например, если известно значение периода T колебаний для некоторого маятника длиной l при фиксированных значениях g и φ_0 , то для маятника длиной l_1 период колебаний будет равен $T_1 = T\sqrt{l_1/l}$.

Из соображений симметрии (см. рис. 2.1) значение периода колебаний не должно зависеть от знака угла φ_0 первоначального отклонения маятника. Поэтому функция $f(\varphi_0)$ должна быть четной. Предполагая ее дважды непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки $\varphi_0 = 0$ и используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, можно записать $f(\varphi_0) = f(0) + \frac{1}{2}f''(\Theta\varphi_0)\varphi_0^2$, где $\Theta \in (0, 1)$. Если при $\varphi_0 \rightarrow 0$ ограничиться лишь первым слагаемым в правой части этого равенства, то из (2.4) получим $T = \sqrt{l/g} f(0)$.

Таким образом, теория размерностей позволяет установить зависимость для периода бесконечно малых колебаний математического маятника с точностью до постоянного множителя $f(0)$. Соответствующая этому случаю хорошо известная теоретическая ММ приводит к значению $f(0) = 2\pi$.

Пример 2.2. К полуэмпирической следует отнести ММ, включающую известную формулу

$$P = c_y(\alpha) \frac{\rho v^2}{2} b \quad (2.5)$$

для подъемной силы крыла в дозвуковом воздушном потоке, приходящейся на единицу длины размаха крыла (здесь ρ и v — плотность и скорость набегающего потока, b — так называемая *хорда профиля крыла* (рис. 2.2), $c_y(\alpha)$ — безразмерный

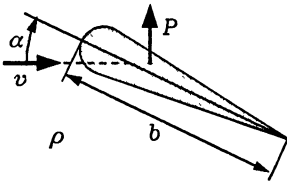


Рис. 2.2

коэффициент, зависящий от формы профиля крыла и характеризуемого *углом атаки* α направления набегающего потока). Угол атаки и параметры, определяющие форму профиля крыла, безразмерны. Поэтому можно рассматривать влияние $n = 4$ размерных параметров P , ρ , v и b , размерности которых можно выразить через $k = 3$ независимые стандартные единицы измерения: $[P] = \text{Н/м} = \text{кг/с}^2$, $[\rho] = \text{кг/м}^3$, $[v] = \text{м/с}$, $[b] = \text{м}$, где $\text{Н} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}$ (ньютон) — производная единица измерения силы. Согласно П-теореме, из этих размерных параметров можно составить лишь одну ($\bar{n} = n - k = 1$) независимую безразмерную комбинацию, которую запишем в виде $\frac{P}{\rho v^2 b}$. Тогда для конкретной формы профиля крыла получим

$$\frac{P}{\rho v^2 b} = f(\alpha),$$

где функция $f(\alpha)$ может быть найдена экспериментально путем продувки под различными углами атаки геометрически подобной модели крыла в аэродинамической трубе. Если безразмерные значения этой функции для фиксированных значений α обозначить через $c_y(\alpha)/2$, то приходим к (2.5). Таким образом, структура (2.5) не противоречит П-теореме. Комплекс $\rho v^2/2$ иногда называют динамическим давлением набегающего

потока, он равен приращению давления при полном торможении потока, или кинетической энергии единицы объема этого потока. Давление, как и механическое напряжение, измеряют в паскалях* ($\text{Па} = \text{Н}/\text{м}^2$). Наряду с (2.5) существует установленная теоретическим путем известная формула Жуковского [X]

$$P = \rho v \Gamma, \quad (2.6)$$

где Γ — циркуляция вектора скорости по контуру, охватывающему профиль крыла. Теоретическая ММ, содержащая (2.6), казалось бы, более совершенна, чем полуэмпирическая ММ, поскольку в отличие от (2.5) не содержит эмпирического коэффициента $c_y(\alpha)$. Однако найти значение Γ теоретическим путем удастся лишь в редких случаях, часто не представляющих практического интереса, а получить это значение при помощи экспериментальных измерений существенно сложнее, чем найти значение $c_y(\alpha)$. Поэтому полуэмпирическая ММ в данном случае обладает определенным преимуществом перед теоретической ММ с точки зрения удовлетворения требованию *продуктивности*.

Пример 2.3. Пусть поток несжимаемой жидкости обтекает неподвижное твердое тело заданной формы, имеющее характерный размер l и постоянную температуру T_0 (рис. 2.3). Скорость v и температура $T_{\text{ж}} > T_0$ жидкости на большом (по сравнению с l) расстоянии от тела сохраняют постоянные значения. Необходимо при некотором фиксированном положении тела относительно направления вектора v скорости найти количество теплоты Q , передаваемое в единицу времени от жидкости к телу и называемое *тепловым потоком*.

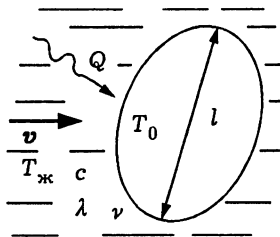


Рис. 2.3

*Б. Паскаль (1623–1662) — французский математик и физик.

Процесс передачи теплоты локализован у поверхности тела и зависит не только от перечисленных параметров, но и от объемной теплоемкости c и коэффициента теплопроводности λ жидкости, поскольку эти параметры характеризуют способность жидкости подводить тепловую энергию и передавать ее поверхности тела. Подвод тепловой энергии к телу также зависит от распределения скорости жидкости у его поверхности. В случае идеальной (невязкой) жидкости оно однозначно определено фиксированным положением тела относительно вектора v , а для вязкой жидкости зависит и от соотношения между силами вязкости и инерции, характеризуемого коэффициентом вязкости ν , называемым *кинематическим* и измеряемым в $\text{м}^2/\text{с}$.

При сравнительно близких значениях $T_{\text{ж}}$ и T_0 естественно предположить, что тепловой поток зависит не от каждой из этих температур, а от их разности $\vartheta = T_{\text{ж}} - T_0$. Тогда в случае идеальной жидкости имеем $n = 6$ размерных параметров, размерности которых можно выразить через $k = 4$ независимые стандартные единицы измерения: $[l] = \text{м}$, $[v] = \text{м}/\text{с}$, $[\vartheta] = \text{К}$, $[Q] = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^3}$, $[c] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{К}}$, $[\lambda] = \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^3 \cdot \text{К}}$, где Дж (джоуль^{*1}) и Вт (ватт^{*2}) — единицы измерения энергии (работы) и мощности соответственно, а К (кельвин^{*3}) — единица измерения температуры в абсолютной шкале. В силу П-теоремы из этих параметров можно составить лишь $\bar{n} = n - k = 2$ независимые безразмерные комбинации, например $Q/(l\lambda\vartheta)$ и $\nu l c/\lambda$. В итоге приходим к функциональной зависимости

$$\frac{Q}{l\lambda\vartheta} = f\left(\frac{\nu l c}{\lambda}\right), \quad (2.7)$$

установленной в 1915 г. Дж.У. Стреттом^{*4}.

^{*1} Дж.П. Джоуль (1818–1889) — английский физик.

^{*2} Дж. Уатт (1736–1819) — английский изобретатель.

^{*3} Лорд Кельвин (У. Томсон) (1824–1907) — английский физик.

^{*4} Дж.У. Стретт (1842–1919) — английский физик, более известный после получения титула как лорд Рэлей.

Отношение $\bar{q} = Q/S$ называют усредненной по площади S поверхности тела *плотностью теплового потока* и измеряют в Вт/м². Так как для геометрически подобных тел $l^2/S = C = \text{const}$, то (2.7) можно представить в виде

$$\text{Ki} = \frac{\bar{q}l}{\lambda\vartheta} = Cf(\text{Pe}), \quad \text{Pe} = \frac{vlc}{\lambda}, \quad (2.8)$$

где Ki — тепловой критерий Кирпичева*¹ и Pe — критерий Пекле*². Интенсивность теплообмена на поверхности тела обычно характеризуют усредненным *коэффициентом теплоотдачи* $\bar{\alpha} = \bar{q}/\vartheta$, измеряемым в $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$. Тогда вместо (2.8) получим

$$\text{Nu} = \frac{\bar{\alpha}l}{\lambda} = Cf(\text{Pe}), \quad (2.9)$$

где Nu — критерий (число) Нуссельта*³. Вид функции f в (2.7)–(2.9) нельзя установить в рамках теории размерностей и его приходится определять путем обработки результатов экспериментов, хотя в некоторых простых случаях удается построить и теоретические ММ процесса теплообмена*⁴.

В случае вязкой жидкости имеем $n = 7$ размерных параметров, размерности которых по-прежнему можно выразить через $k = 4$ независимые единицы измерения, т.е. число независимых безразмерных комбинаций равно $\bar{n} = n - k = 3$. К рассмотренным выше следует добавить любую безразмерную комбинацию, включающую новый параметр ν . Эту комбинацию можно выбрать, например, в виде vl/ν или cv/λ . В первом случае ее называют *критерием (числом) Рейнольдса**⁵ и обозначают $\text{Re} = vl/\nu$, а во втором — *критерием (числом)*

*¹М.В. Кирпичев (1879–1955) — отечественный теплофизик и инженер.

*²Ж.К. Пеклэ (1793–1857) — французский физик.

*³В. Нуссельт (1882–1957) — немецкий физик.

*⁴См.: Теория тепломассообмена.

*⁵О. Рейнольдс (1842–1912) — английский физик и инженер.

*Прандтля** и обозначают $Pr = \nu/\lambda$. Критерий Прандтля характеризует только свойства жидкости, а критерий Рейнольдса — соотношение между инерционными силами и силами вязкого трения. В итоге вместо (2.9) получим

$$Nu = f_1(Pe, Re) \quad \text{или} \quad Nu = f_2(Pe, Pr). \quad (2.10)$$

Так как $Pe = RePr$, то в случае вязкой жидкости критерий Нуссельта может быть представлен функцией любых двух из трех аргументов Pe , Re , Pr . #

Ясно, что при наличии трех и более безразмерных комбинаций параметров построение полуэмпирической ММ существенно усложняется. В этом случае обычно выделяют так называемый определяемый критерий (в примере 2.3 это Ki или Nu), а остальные критерии относят к определяющим и проводят несколько серий экспериментальных измерений для установления функциональной зависимости определяемого критерия от двух или более определяющих, рассматриваемых в качестве аргументов искомой функции (в (2.10) это функции f_1 или f_2). В каждой серии измерений размерные параметры изменяют таким образом, чтобы изменялось значение лишь одного из определяющих критериев. Тогда обработка результатов такой серии измерений позволяет выявить функциональную зависимость определяемого критерия от одного из аргументов при фиксированных значениях остальных. В итоге в некоторой области изменения значений определяющих критериев удастся с некоторой степенью приближения построить искомую функцию, т.е. решить задачу идентификации полуэмпирической ММ.

Отметим, что применение П-теоремы к аналитической ММ, представленной в виде уравнений, позволяет привести их к безразмерной форме и сократить число параметров, характеризующих изучаемый ТО. Это упрощает качественный анализ

* Л. Прандтль (1875–1953) — немецкий ученый в области гидроаэромеханики.

ММ и позволяет еще до проведения количественного анализа оценить влияние отдельных факторов (см. Д.2.2). Кроме того, безразмерная форма ММ дает возможность представить в более компактном виде результаты ее количественного анализа.

2.6. Особенности функциональных моделей

Одной из характерных особенностей *функциональной математической модели* (ММ) является наличие или отсутствие среди ее параметров случайных величин. При наличии таких величин ММ называют *стохастической* (от греческого слова *στοχαστικοζ* — умеющий угадывать), а при их отсутствии — *детерминированной* (от латинского слова *determino* — определяю).

Далеко не все параметры реальных *технических объектов* (ТО) можно характеризовать вполне определенными значениями. Поэтому ММ таких ТО, строго говоря, следует отнести к стохастическим. Например, если изучаемый ТО является изделием массового производства и его *внутренние параметры* могут принимать случайные значения в пределах допусков, установленных относительно номинальных значений, то и *выходные параметры* ТО будут случайными величинами. Случайными могут быть и значения *внешних параметров* при воздействии на ТО таких факторов, как порывы ветра, турбулентные пульсации, сигналы на фоне шума и т.п.

Для анализа стохастических ММ необходимо использовать методы теории вероятностей, случайных процессов и математической статистики. Однако основная трудность их применения обычно связана с тем, что вероятностные характеристики случайных величин (математические ожидания, дисперсии, законы распределения) часто не известны или известны с невысокой точностью, т.е. ММ не удовлетворяет требованию *продуктивности ММ*. В таких случаях эффективнее использовать ММ, более грубую по сравнению со стохастической, но

и более устойчивую по отношению к недостоверности исходных данных, т.е. в большей мере удовлетворяющую требованию *робастности*.

Пример 2.4. Пусть на поверхности S тела с однородной по объему, но меняющейся во времени t температурой $T(t)$ происходит теплообмен с окружающей средой, имеющей постоянную температуру T_c . В первом приближении предполагают, что *плотность q теплового потока*, передаваемого от окружающей среды к телу, пропорциональна разности температур (см. пример 2.3), т.е.

$$q = \alpha(T_c - T), \quad (2.11)$$

где α — *коэффициент теплоотдачи*. В соответствии с (2.11) подводимый от окружающей среды к телу *тепловой поток* равен

$$Q = qS = \alpha(T_c - T)S. \quad (2.12)$$

Он вызывает изменение внутренней энергии тела, которое пропорционально скорости $dT(t)/dt$ изменения температуры, а коэффициентом пропорциональности служит *полная теплоемкость C_T* тела, равная количеству тепловой энергии, необходимой для повышения температуры тела на 1 К, и измеряемая в Дж/К.

Таким образом, из закона сохранения энергии (первого закона термодинамики) следует, что

$$C_T \frac{dT(t)}{dt} = Q(t),$$

или, учитывая (2.12), получим, что ММ, описывающая изменение температуры $T(t)$ тела во времени t , включает ОДУ первого порядка

$$C_T \frac{dT}{dt} = \alpha(T_c - T)S, \quad (2.13)$$

решение которого при $\alpha = \text{const}$ имеет вид

$$T = T_c - (T_c - T_0)e^{-\alpha St/C_\tau}, \quad (2.14)$$

где T_0 — температура тела в момент времени $t = 0$, принимаемый за начальный. При вполне определенном значении α такую ММ следует считать детерминированной.

Но реальный процесс теплообмена является довольно сложным, а его интенсивность зависит от большого числа факторов. Некоторые из этих факторов носят случайный характер (неоднородность окружающей среды, турбулентные пульсации при ее движении, шероховатости на поверхности тела и т.п.). Поэтому коэффициент теплоотдачи, вообще говоря, нельзя считать достоверно известным и постоянным во времени. Его следует рассматривать как случайную функцию $\alpha = f(t, \omega)$ времени t и переменного ω , которое имеет смысл, как это принято в теории вероятностей, элементарного исхода случайного события. Если эту функцию ввести в ОДУ (2.13), то вместо детерминированной придем к стохастической ММ. Но воспользоваться такой ММ можно будет лишь в том случае, если располагать всеми необходимыми характеристиками случайной функции $f(t, \omega)$, а это условие обычно не выполнимо.

Однако часто удается установить границы возможного изменения этой функции в виде двойного неравенства $\alpha_1 < f(t, \omega) < \alpha_2$ в котором $\alpha_1, \alpha_2 = \text{const}$. Тогда можно дважды использовать детерминированную ММ в виде ОДУ (2.13), получив, согласно (2.14), гарантированную оценку для заштрихованной на рис. 2.4 области возможного изменения во времени температуры тела $T(t)$ в соответствии с неравенствами

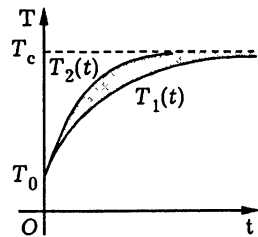


Рис. 2.4

$$\begin{aligned} T_1(t) = T_c - (T_c - T_0)e^{-\alpha_1 St/C_\tau} < T(t) < T_2(t) = \\ = T_c - (T_c - T_0)e^{-\alpha_2 St/C_\tau}. \end{aligned}$$

Из этой оценки, например, следует, что, несмотря на случайный характер процесса теплообмена,

$$T(t) \rightarrow T_c \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty,$$

т.е. система „тело — окружающая среда“ стремится к состоянию термодинамического равновесия. #

Существенным признаком классификации ММ является их возможность описывать изменение параметров ТО во времени. Рассмотренная в примере 2.4 ММ теплообмена тела с окружающей средой учитывает такое изменение, и ее относят к *нестационарным (или эволюционным) математическим моделям*. Если при этом в ММ отражено влияние инерционных свойств ТО, то ее обычно называют *динамической*. В противоположность этому ММ, которая не учитывает изменение во времени параметров ТО, называют *статической*. Рассмотренные в примерах 2.2 и 2.3 ММ являются статическими. Несмотря на движение воздушного потока и жидкости, обтекающих профиль крыла и нагреваемое тело соответственно, все параметры, характеризующие эти процессы остаются постоянными во времени.

Если изменение параметров ТО происходит столь медленно, что в рассматриваемый фиксированный момент времени этим изменением можно пренебречь, то говорят о *квазистатической математической модели*. Например, в медленно протекающих механических процессах можно пренебречь инерционными силами, при малой скорости изменения температуры — тепловой инерцией тела, а при медленно изменяющейся силе тока в электрической цепи — индуктивностью элементов этой цепи. *Стационарные математические модели* описывают ТО, в которых протекают так называемые *установившиеся процессы*, т.е. процессы, в которых интересующие нас выходные параметры постоянны во времени. К установившимся относят и *периодические процессы*, в которых некоторые выходные параметры остаются неизменными, а остальные претерпевают колебания. Например, ММ матема-

тического маятника (см. пример 2.1) является стационарной по отношению к не зависящим от времени *периоду* и *полуразмаху колебаний*, хотя материальная точка перемещается во времени относительно положения равновесия.

Если интересующие нас выходные параметры ТО изменяются медленно и в рассматриваемый фиксированный момент времени таким изменением можно пренебречь, то говорят о *квазистационарной математической модели*. При описании некоторых процессов нестационарная ММ может быть преобразована в квазистационарную соответствующим выбором системы координат. Например, при дуговой электросварке температурное поле в свариваемых стальных листах в окрестности движущегося с постоянной скоростью электрода в неподвижной системе координат описывает нестационарная ММ, а в подвижной системе координат, связанной с электродом, — квазистационарная ММ.

Важным с точки зрения последующего анализа свойством ММ является ее линейность. В *линейной математической модели* ТО его параметры связаны линейными соотношениями. Это означает, что при изменении какого-либо внешнего (или внутреннего) параметра ТО линейная ММ предсказывает линейное изменение зависящего от него выходного параметра, а при изменении двух или более параметров — сложение их влияний, т.е. такая ММ обладает свойством *суперпозиции* (от латинского слова *superpositio* — наложение). Если ММ не обладает свойством суперпозиции, то ее называют *нелинейной*.

Для количественного анализа линейных ММ разработано большое число математических методов, тогда как возможности анализа нелинейных ММ связаны в основном с методами вычислительной математики. Чтобы для исследования нелинейной ММ ТО можно было использовать аналитические методы, ее обычно линеаризуют, т.е. нелинейные соотношения между параметрами заменяют приближенными линейными и получают так называемую *линеаризованную математическую модель* рассматриваемого ТО. Так как линеаризация

связана с внесением дополнительных погрешностей, то к результатам анализа линеаризованной модели следует относиться с определенной осторожностью. Дело в том, что линеаризация ММ может привести к утрате или существенному искажению реальных свойств ТО. Учет в ММ нелинейных эффектов особенно важен, например, при описании смены форм движения или положений равновесия ТО, когда малые изменения внешних параметров могут вызвать качественные изменения в его состоянии.

Каждый параметр ТО может быть двух типов — непрерывно изменяющимся в некотором промежутке своих значений или принимающим только некоторые дискретные значения. Возможна и промежуточная ситуация, когда в одной области параметр принимает все возможные значения, а в другой — только дискретные. В связи с этим выделяют *непрерывные, дискретные и смешанные математические модели*. В процессе анализа ММ этих типов могут быть преобразованы одна в другую, но при таком преобразовании следует контролировать выполнение требования *адекватности ММ* рассматриваемому ТО.

2.7. Иерархия математических моделей и формы их представления

При математическом моделировании достаточно сложного *технического объекта* (ТО) описать его поведение одной *математической моделью* (ММ), как правило, не удастся, а если такая ММ и была бы построена, то она оказалась бы слишком сложной для количественного анализа. Поэтому к таким ТО обычно применяют *принцип декомпозиции*. Он состоит в условном разбиении ТО на отдельные более простые блоки и элементы, допускающие их независимое исследование с последующим учетом взаимного влияния блоков и элементов друг на друга. В свою очередь, принцип декомпозиции можно применить и к каждому выделенному блоку вплоть до уровня

достаточно простых элементов. В таком случае возникает *иерархия ММ* связанных между собой блоков и элементов.

Иерархические уровни выделяют и для отдельных типов ММ. Например, среди *структурных математических моделей* ТО к более высокому уровню иерархии относят *топологические математические модели*, а к более низкому уровню, характеризующемуся большей детализацией ТО, — *геометрические математические модели*.

Среди *функциональных математических моделей* иерархические уровни отражают степень детализации описания процессов, протекающих в ТО, его блоках или элементах. С этой точки зрения обычно выделяют три основных уровня: микро-, макро- и метауровень.

Математические модели микроуровня описывают процессы в системах с распределенными параметрами (в *континуальных системах*), а *математические модели макроуровня* — в системах с сосредоточенными параметрами (в *дискретных системах*). В первых из них *фазовые переменные* могут зависеть как от времени, так и от пространственных координат, а во вторых — только от времени.

Если в ММ макроуровня число фазовых переменных имеет порядок 10^4 – 10^5 , то количественный анализ такой ММ становится громоздким и требует значительных затрат вычислительных ресурсов. Кроме того, при столь большом числе фазовых переменных трудно выделить существенные характеристики ТО и особенности его поведения. В таком случае путем объединения и укрупнения элементов сложного ТО стремятся уменьшить число фазовых переменных за счет исключения из рассмотрения *внутренних параметров* элементов, ограничиваясь лишь описанием взаимных связей между укрупненными элементами. Такой подход характерен для *математических моделей метауровня*.

ММ метауровня обычно относят к высшему уровню иерархии, ММ макроуровня — к среднему, а ММ микроуровня — к низшему.

Наиболее распространенной формой представления *динамической (эволюционной) математической модели* микроуровня является формулировка краевой задачи для дифференциальных уравнений математической физики [XII]. Такая формулировка включает дифференциальные уравнения с частными производными и краевые условия. В свою очередь, краевые условия содержат начальные условия — распределения искомым фазовых переменных в некоторый момент времени, принимаемый за начальный, в пространственной области, конфигурация которой соответствует рассматриваемому ТО или его элементу, — и граничные условия на границах этой области. При представлении ММ целесообразно использовать безразмерные переменные (независимые и искомые) и коэффициенты уравнений, сократив число параметров, характеризующих рассматриваемый ТО (см. Д.2.2).

ММ микроуровня называют *одномерной, двумерной или трехмерной*, если искомые фазовые переменные зависят от одной, двух или трех пространственных координат соответственно. Два последних типа ММ объединяют в *многомерные математические модели микроуровня*. Одномерная ММ микроуровня, фазовые переменные в которой не зависят от времени, имеет представление в виде системы ОДУ с заданными граничными условиями (в простейшем случае одного фазового переменного такая ММ включает лишь одно ОДУ и граничные условия).

Поскольку краевой задаче, содержащей дифференциальные уравнения с частными производными и краевые условия, можно поставить в соответствие интегральную формулировку [XIII], то и ММ микроуровня также может быть представлена в интегральной форме. При определенных условиях интегральную форму краевой задачи удастся привести к вариационной формулировке в виде функционала [XV], который допустимо рассматривать на некотором множестве функций, содержащем искомую функцию. В этом случае говорят о *вариационной форме модели* микроуровня. Искомая функция обращает в

нуль вариацию функционала, т.е. является его *стационарной точкой*.

Построение функционала и соответствующей ему вариационной формы модели микроуровня обычно основано на некотором содержательном с физической точки зрения вариационном принципе механики или электродинамики сплошной среды (например, на принципе минимума потенциальной энергии континуальной системы в положении равновесия или на принципе минимума времени прохождения светового луча между двумя точками оптически неоднородной среды). В этом случае стационарная точка функционала соответствует его экстремальному (в частности, минимальному) значению на допустимом множестве функций. Такая форма модели микроуровня, называемая *экстремальной вариационной*, позволяет, сравнивая значения функционала на любых двух функциях из допустимого множества, оценивать в интегральном смысле близость этих функций к искомой. Это свойство экстремальной вариационной формы модели важно при качественном анализе ММ и при сравнении различных приближенных решений соответствующей краевой задачи*.

При выполнении некоторых ограничений можно построить *двойственную вариационную форму модели* микроуровня, включающую пару функционалов, достигающих в одной и той же стационарной точке равных между собой альтернативных экстремальных значений (минимума и максимума) [XV]. Такая форма ММ дает возможность по разности значений этих функционалов, вычисленных на некоторой функции из допустимого множества, количественно оценить погрешность, возникающую при выборе этой функции в качестве искомой.

Основной формой динамической (эволюционной) ММ микроуровня являются ОДУ или их системы вместе с заданными начальными условиями. Независимым переменным в таких ММ

*См.: Зарубин В.С., Селиванов В.В.

будет время, а искомыми — фазовые переменные, характеризующие состояние ТО (например, перемещения, скорости и ускорения элементов механических устройств, а также приложенные к этим элементам силы и моменты; давление и расход жидкости или газа в трубопроводе; напряжения и силы тока в электрических цепях и т.п.). В некоторых случаях ММ макроуровня удастся представить в интегральной форме, используя принцип Гамильтона — Остроградского или экстремальный вариационный принцип Гамильтона.

Если эволюцию ТО определяет его состояние не только в текущий момент времени t , но и в некоторый предшествующий момент $t - \tau$, то ММ макроуровня включает ОДУ вида

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t - \tau))$$

или

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t - \tau), u'(t - \tau))$$

относительно искомой функции $u(t)$. Такие ОДУ называют уравнениями запаздывающего и нейтрального типа соответственно и относят к *дифференциально-функциональным уравнениям** (ДФУ) (или дифференциальным уравнениям с отклоняющимся аргументом). Наиболее широко ДФУ и их системы представлены в ММ систем автоматического управления и регулирования. Кроме того, ДФУ находят применение в моделях биологических и экономических процессов.

Запаздывающая реакция ТО на изменение своего состояния может определяться более чем одним интервалом времени τ . Тогда ДФУ будет включать не одно, а несколько дискретных запаздываний. В более общем случае запаздывание может быть непрерывным во времени, что приводит, например, для *линейной математической модели к интегро-дифференциаль-*

*См.: Мышкис А.Д.

ному уравнению (ИДУ) вида

$$u'(t) = \int_{t_0}^t K(t, \tau) u(\tau) d\tau + f(t), \quad t \geq t_0.$$

Заданную функцию $K(t, \tau)$ называют ядром этого ИДУ, а о рассматриваемом ТО говорят, что он обладает памятью, поскольку его эволюция зависит от всей предыстории изменения состояний ТО.

В статическую математическую модель макроуровня не входит время. Поэтому она включает лишь конечное (в общем случае нелинейное) уравнение или систему таких уравнений (в частности, систему линейных алгебраических уравнений — СЛАУ). Такой же вид имеют квазистатическая, стационарная и квазистационарная математические модели макроуровня.

Если для рассматриваемого ТО удастся выделить подпадающее количественной характеристике некоторое важное свойство или сочетание таких свойств (надежность, долговечность, массу, стоимость, какой-либо из определяющих качество ТО выходных параметров) и установить их связь с фазовыми переменными при помощи действительной функции, то можно говорить об оптимизации ТО по критерию, выражаемому этой функцией. Ее называют целевой функцией [XIV], поскольку ее значения характеризуют меру (или степень) достижения определенной цели совершенствования ТО в соответствии с выбранным критерием.

Вследствие ограниченности располагаемых ресурсов в реальной ситуации имеют смысл лишь те экстремальные значения целевой функции, которые достигаются в области возможного изменения фазовых переменных ТО, обычно ограниченной системой неравенств. Эти неравенства вместе с целевой функцией и статической ММ ТО в виде конечного нелинейного уравнения или систем таких уравнений входят в математическую формулировку задачи оптимизации ТО по выбранному

критерию, называемой (в общем случае) задачей нелинейного программирования [XIV]. В частном случае *линейной математической модели* ТО в виде СЛАУ, линейных целевой функции и неравенств говорят о задаче линейного программирования. К таким задачам обычно приходят при рассмотрении проблем технико-экономического содержания. Задачу оптимизации ТО, описываемого динамической (эволюционной) ММ макроуровня, относят к классу задач оптимального управления [XV].

Для ММ метауровня характерны те же типы уравнений, что и для ММ макроуровня, но эти уравнения включают фазовые переменные, описывающие состояние укрупненных элементов сложных ТО. Если определен закон непрерывного перехода ТО из одного состояния в другое, то для анализа ММ метауровня часто используют аппарат передаточных функций*, а при рассмотрении состояний ТО в дискретные моменты времени ОДУ и их системы переходят в разностные уравнения относительно значений фазовых переменных в эти моменты времени. В случае дискретного множества состояний ТО применяют также аппарат математической логики и *конечных автоматов*.

Иногда для сложных информационных систем удается перейти к дискретному представлению фазовых переменных. Тогда ММ метауровня становится системой логических соотношений (СЛС), описывающей процессы преобразования сигналов. Использование СЛС применительно к таким сложным ТО более экономично, чем описание изменения в электрических цепях информационной системы напряжений и токов как непрерывных функций времени при помощи ОДУ или их систем. К метауровню также относят имитационные ММ [XX] и ММ массового обслуживания [XVIII], описывающие функционирование сложных вычислительных и информационных систем, производственных участков, линий, цехов, предприятий и их объединений.

*См.: *Норенков И.П.*

ММ метауровня применительно к эволюции биологической популяции [I] содержит последовательность $\{x_n\}$, элементы которой характеризовали относительную численность этой популяции и удовлетворяли рекуррентному соотношению $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, где λ — коэффициент размножения. Это соотношение можно рассматривать как *разностное уравнение* по отношению к ДФУ $u'(t) = au(t - \tau) - bu^2(t - \tau)$, где $u(t)$ — численность популяции в текущий момент времени t , τ — период биологического цикла размножения, $a \geq 0$ и $b > 0$ — параметры, характеризующие скорости соответственно размножения и вымирания популяции при перенаселении. Действительно, приближенно заменяя в ДФУ производную по времени конечно-разностным соотношением $u'(t) \approx (u_{n+1} - u_n)/\tau$ и обозначая $\lambda = 1 + a\tau$ и $x_n = u_n b\tau/\lambda$, после преобразований получим записанное выше разностное уравнение.

Далее в книге ограничимся рассмотрением ММ макро- и микроуровня.

Дополнение 2.1. Введение в теорию размерностей

Предметом теории размерностей является установление связей между размерными параметрами, характеризующими поведение изучаемого объекта. Анализ размерностей этих параметров позволяет определить структуру *математической модели* (ММ) *технического объекта* (ТО) в виде зависимости между безразмерными комбинациями, составленными из таких параметров. Отметим, что в математике используют близкий по звучанию термин „теория размерности“, связанный со свойствами топологических пространств*.

Размерностью величины или параметра называют произведение степеней независимых единиц измерения физических величин, принятых в качестве основных (стандартных).

*См.: Математический энциклопедический словарь.

В качестве основных в Международной системе единиц СИ (Système International) приняты следующие единицы измерения*¹: длины — метр (м), массы — килограмм (кг), времени — секунда (с), силы электрического тока — ампер (А), температуры — кельвин (К), силы света — кандела*² (кд), количества вещества — моль. Дополнительными (безразмерными) единицами являются радиан (рад) для измерения плоского угла и стерадиан (ср) для измерения *телесного угла*.

Например, размерность ускорения a записывают в виде

$$[a] = [l]^{\alpha_l^{(a)}} [t]^{\alpha_t^{(a)}} = \frac{\text{М}}{\text{с}^2},$$

где $[l] = \text{м}$ и $[t] = \text{с}$ — размерности длины и времени соответственно, $\alpha_l^{(a)} = 1$ и $\alpha_t^{(a)} = -2$ — *показатели* этих *размерностей* в выражении для размерности ускорения. Размерность силы P в системе СИ вводят на основе второго закона Ньютона $P = ma$, где m — масса и a — ускорение. Отсюда $[P] = [m][a] = [m]^{\alpha_m^{(P)}} [l]^{\alpha_l^{(P)}} [t]^{\alpha_t^{(P)}} = \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}$ (ньютон), где $\alpha_m^{(P)} = 1$, $\alpha_l^{(P)} = 1$, $\alpha_t^{(P)} = -2$ — показатели размерности массы, длины и времени соответственно в выражении для размерности силы. Ясно, что для величины, равной произведению размерных величин, показатели размерности равны алгебраической сумме соответствующих показателей сомножителей. Например, размерность мощности Q следует из выражения

$$\begin{aligned} [Q] &= \frac{[P][l]}{[t]} = [m]^{\alpha_m^{(P)}} [l]^{\alpha_l^{(P)}} [t]^{\alpha_t^{(P)}} [l]^{\alpha_l^{(l)}} [t]^{-\alpha_t^{(t)}} = \\ &= [m]^{\alpha_m^{(P)}} [l]^{\alpha_l^{(P)} + \alpha_l^{(l)}} [t]^{\alpha_t^{(P)} - \alpha_t^{(t)}}, \end{aligned}$$

где $\alpha_l^{(l)} = \alpha_t^{(t)} = 1$. В итоге получаем $[Q] = [m][l]^2[t]^{-3} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^3} = \text{Вт}$ (ватт).

*¹См.: Шаповалов Л.А.

*²От латинского слова *candela* — свеча.

Отметим, что для принятой системы основных единиц измерения размерность любой величины может быть представлена лишь единственным образом. Итак, существенное предположение теории размерностей состоит в том, что размерность любой рассматриваемой величины x_j можно представить в виде так называемого степенного одночлена

$$[x_j] = \prod_{i=1}^k [L_i]^{\alpha_{ij}}, \quad (2.15)$$

где $[L_i]$ — размерности k величин, принятые в качестве основных единиц измерения, α_{ij} — некоторые показатели степени.

Наименьшую совокупность размерных и безразмерных величин, необходимых и достаточных для однозначного описания изучаемого ТО, в теории размерностей называют *определяющими параметрами*. К ним относят геометрические и физические характеристики ТО и независимые переменные, включая пространственные координаты и время. Величины, зависящие от определяющих параметров, называют *определяемыми параметрами*. Определяющие и определяемые параметры образуют совокупность *основных параметров* данного ТО. Формирование совокупности основных параметров для некоторых ТО рассмотрено в примерах 2.1–2.3.

Пусть рассматриваемый ТО характеризуют n основных параметров $x_j > 0$, $j = \overline{1, n}$, для каждого из которых справедливо (2.15). Рассмотрим степенной одночлен

$$\Pi = \prod_{j=1}^n x_j^{z_j}, \quad (2.16)$$

где z_j — некоторые показатели степени, и найдем число \bar{n} степенных одночленов этого вида при условии, что они являются независимыми (т.е. ни один из них нельзя представить произведением степеней других) и безразмерными. При помощи (2.15)

выразим размерность Π , равную единице, через размерности k величин, принятых в качестве основных единиц измерения:

$$[\Pi] = \prod_{j=1}^n \left(\prod_{i=1}^k [L_i]^{\alpha_{ij}} \right)^{z_j} = \prod_{i=1}^k [L_i]^{\beta_i} = 1, \quad \beta_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} z_j.$$

Таким образом, условием равенства единице размерности степенного одночлена Π является выполнение k равенств $\beta_i = 0$, $i = \overline{1, k}$, или

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} z_j = 0, \quad i = \overline{1, k}. \quad (2.17)$$

Известно [III], что однородная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (2.17) относительно n неизвестных z_j , $j = \overline{1, n}$, с матрицей (α_{ij}) ранга r имеет набор из $n - r$ линейно независимых решений, образующих *фундаментальную систему решений* этой СЛАУ. Таким решениям соответствуют ровно $n - r$ независимых степенных одночленов Π_q , $q = \overline{1, n-r}$, размерности, равной единице, поскольку показатели степени z_j любого другого степенного одночлена Π , будучи решениями СЛАУ (2.17), могут быть представлены линейной комбинацией решений из фундаментальной системы, а это означает, что Π можно представить произведением степеней Π_q .

Ранг r матрицы (α_{ij}) , называемой *матрицей размерностей*, при $n \geq k$ может принять наибольшее возможное значение, равное числу k ее строк. В этом случае из n основных параметров можно составить $\bar{n} = n - k$ безразмерных комбинаций, т.е. степенных одночленов, что и является одним из утверждений *Π -теоремы* (см. 2.5). Но в общем случае $r \leq k$, и поэтому формулировку Π -теоремы следует уточнить*: имеющую физический смысл зависимость между n основными параметрами, характеризующими изучаемый объект, можно представить в виде зависимости между $\bar{n} = n - r$ их независимыми безраз-

*См.: Лойцянский Л.Г.; Шаповалов Л.А.

мерными комбинациями, где r — ранг матрицы размерностей, элементами которой являются показатели в выражениях вида (2.15) для размерности этих параметров.

Второе утверждение этой теоремы состоит в том, что при помощи безразмерных комбинаций — *критериев подобия* — можно привести к безразмерному виду любую зависимость между n параметрами, имеющую физический смысл. Действительно, если такая зависимость содержит слагаемые, то их размерность должна быть одинаковой, а аргументы показательных, тригонометрических, обратных тригонометрических и других функций (кроме, может быть, степенных) должны быть безразмерными. Поэтому такую зависимость путем элементарных операций можно представить в безразмерном виде.

В большинстве прикладных задач $r = k$. Несложно проверить, что это равенство выполнено в примерах 2.1–2.3. Однако возможны случаи, когда $r < k$, что заставляет при применении теории размерностей проверять ранг матрицы размерностей.

Пример 2.5. Известно*, что в стержне с круглым поперечным сечением диаметра d при растяжении силой P возникает растягивающее напряжение $\sigma = \frac{P}{\pi d^2/4}$, а перемещение одного торца стержня относительно другого при сохранении материалом свойств линейной упругости равно $u = \sigma l/E = \frac{Pl}{E\pi d^2/4}$, где l — длина стержня до нагружения и E — модуль упругости материала стержня при растяжении.

Применим к этой элементарной задаче теорию размерностей. В данном случае единицами измерения четырех определяющих параметров P , E и d , l являются ньютон (Н), паскаль (Па) и метр (м) соответственно, а двух определяемых параметров σ и u — паскаль и метр. Размерности $n = 6$ основных параметров выразим через $k = 3$ основные единицы измерения: длины (м), массы (кг) и времени (с). Тогда получим матрицу размерностей, столбцы которой представлены в табл. 2.1.

*См.: Феодосьев В.И. (1999 г.)

Таблица 2.1

	σ	u	P	E	d	l
м	-1	1	1	-1	1	1
кг	1	0	1	1	0	0
с	-2	0	-2	-2	0	0

Так как вторая и третья строки матрицы размерностей пропорциональны, то ее ранг $r = 2 < k = 3$, и, согласно П-теореме, в данном случае основные параметры образуют $\bar{n} = n - r = 4$ независимые безразмерные комбинации. В качестве таких комбинаций можно взять $\Pi_1 = l/d$, $\Pi_2 = P/(Ed^2)$, $\Pi_3 = \sigma/E$ и $\Pi_4 = u/d$ и, используя их, приведенные выше две зависимости между основными параметрами представить в безразмерном виде: $\Pi_3 = \frac{4}{\pi}\Pi_2$ и $\Pi_4 = \frac{4}{\pi}\Pi_1\Pi_2$.

Отметим, что если вместо Π_4 в качестве безразмерной комбинации выбрать $\Pi'_4 = u/l$, то получим $\Pi'_4 = \frac{4}{\pi}\Pi_2$, т.е. критерий геометрического подобия Π_1 останется неиспользованным. При таком выборе безразмерных комбинаций остается в силе формулировка П-теоремы, приведенная в 2.5: для представления в безразмерном виде зависимостей между основными параметрами достаточно взять $\bar{n} = n - k = 3$ безразмерные комбинации Π_2 , Π_3 и Π'_4 . #

С увеличением значений n и k для построения безразмерных комбинаций основных параметров целесообразно использовать процедуру получения фундаментальной системы решений однородной СЛАУ вида (2.17). При этом следует стремиться к выбору такой системы решений, которая бы позволяла включить каждый определяемый параметр не более чем в один критерий подобия. Это же требование желательно выполнить и по отношению к каждому из определяющих параметров, являющихся независимыми переменными (например, время и пространственные координаты, когда они входят в число основных параметров, или определяющие параметры, изменяемые при проведении эксперимента, результаты которого представляют

в виде *полумпирической математической модели*). Для выполнения этого требования удобно располагать столбцы матрицы размерностей в соответствии с такой последовательностью расположения основных параметров: определяемые параметры, изменяемые при проведении эксперимента определяющие параметры, время и пространственные координаты, неизменяемые определяющие параметры.

Пример 2.6. Закрепленная неподвижно конструкция, изготовленная из изотропного линейно упругого материала с модулем упругости на растяжение E , коэффициентами Пуассона* ν , линейного расширения α_L и теплопроводности λ , удельной теплоемкостью c и плотностью ρ , подвержена воздействию силы $P(t)$ и теплового потока $Q(t)$, изменяющихся во времени t по заданным законам. На поверхности конструкции с характерным линейным размером l происходит теплообмен, характеризуемый коэффициентом теплоотдачи α , с окружающей средой, имеющей температуру T_0 , совпадающую с начальной температурой конструкции в момент времени $t = 0$. Возникающие в конструкции поле температуры $T(t, x_i)$ и поле вектора перемещения $u(t, x_i)$ зависят от времени и координат x_i , $i = 1, 2, 3$, прямоугольной декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$.

В данном случае температура T конструкции и проекции u_i вектора перемещения на оси координат являются определяемыми параметрами. Их сразу можно представить в безразмерном виде: $\bar{T} = T/T_0$, $\bar{u} = u_i/l$, $i = 1, 2, 3$. Через них при необходимости можно выразить компоненты σ_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, напряжения в материале конструкции, также представленные в безразмерной форме $\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}/E$. Если ввести безразмерные координаты $\bar{x}_i = x_i/l$ как аргументы искомых функций безразмерных температуры и проекций вектора перемещения, то \bar{x}_i можно не включать в число определяющих параметров, так как добавление или отбрасывание столбцов, состоящих из нулевых элемен-

*С.Д. Пуассон (1781–1840) — французский механик, физик и математик.

тов, не изменяет ранга матрицы размерностей. Аналогично можно поступить и с безразмерным коэффициентом Пуассона ν . Важно лишь на заключительной стадии формирования безразмерных комбинаций определяющих параметров включить \bar{x}_i и ν в число аргументов искомых функций.

Столбцы матрицы размерностей, выраженных через $k = 4$ стандартные единицы измерения, для оставшихся $n = 11$ определяющих параметров представлены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

	P	Q	t	l	ρ	E	α_n	T_0	α	λ	c
м	1	2	0	1	-3	-1	0	0	0	1	2
кг	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
с	-2	-3	1	0	0	-2	0	0	-3	-3	-2
К	0	0	0	0	0	0	-1	1	-1	-1	-1

Перестановкой столбцов эту матрицу можно представить как ступенчатую (табл. 2.3).

Таблица 2.3

	l	ρ	t	T_0	P	Q	E	α_n	α	λ	c
м	1	-3	0	0	1	2	-1	0	0	1	2
кг	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0
с	0	0	1	0	-2	-3	-2	0	-3	-3	-2
К	0	0	0	1	0	0	0	-1	-1	-1	-1

Определитель, составленный из четырех первых столбцов, соответствующих параметрам l , ρ , t и T_0 (см. табл. 2.3), отличен от нуля, так что ранг матрицы размерностей $r = k = 4$. Поэтому в силу П-теоремы из размерных параметров $x_1 = l$, $x_2 = \rho$, $x_3 = t$, $x_4 = T_0$, $x_5 = P$, $x_6 = Q$, $x_7 = E$, $x_8 = \alpha_n$, $x_9 = \alpha$, $x_{10} = \lambda$ и $x_{11} = c$ можно составить $\bar{n} = n - k = 7$ независимых безразмерных комбинаций. Показатели z_j , $j = \overline{1, 7}$, этих параметров в выражении для каждой из таких комбинаций вида (2.16) удовлетворяют однородной СЛАУ (2.17).

Для нахождения фундаментальной системы решений СЛАУ указанный определитель примем в качестве базисного минора матрицы размерностей, поэтому неизвестные $z_j, j = \overline{1, 4}$, будут базисными [III]. Учитывая ступенчатый вид матрицы размерностей, выразим базисные неизвестные через свободные:

$$\begin{cases} z_1 = -4z_5 - 5z_6 - 2z_7 - 3z_9 - 4z_{10} - 2z_{11}, \\ z_2 = -z_5 - z_6 - z_7 - z_9 - z_{10}, \\ z_3 = 2z_5 + 3z_6 + 2z_7 + 3z_9 + 3z_{10} + 2z_{11}, \\ z_4 = z_8 + z_9 + z_{10} + z_{11}. \end{cases}$$

Значения свободных неизвестных в правых частях этих равенств можно выбрать произвольно. Выбирая эти значения последовательно, так, чтобы одно из них равнялось единице, а остальные нулю, получаем из записанных равенств значения $z_j, j = \overline{1, 11}$, показателей степени, с которыми определяющие параметры входят в семь безразмерных комбинаций вида (2.16). Эти значения представлены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

	l	ρ	t	T_0	P	Q	E	α_l	α	λ	c
Π_1	-4	-1	2	0	1	0	0	0	0	0	0
Π_2	-5	-1	3	0	0	1	0	0	0	0	0
Π_3	-2	-1	2	0	0	0	1	0	0	0	0
Π_4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
Π_5	-3	-1	3	1	0	0	0	0	1	0	0
Π_6	-4	-1	3	1	0	0	0	0	0	1	0
Π_7	-2	0	2	1	0	0	0	0	0	0	1

При помощи этой таблицы запишем выражения для безразмерных комбинаций:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{Pt^2}{l^4\rho}, & \Pi_2 &= \frac{Qt^3}{l^5\rho}, & \Pi_3 &= \frac{t^2E}{l^2\rho}, & \Pi_4 &= \alpha_l T_0, \\ \Pi_5 &= \frac{t^3 T_0 \alpha}{l^3 \rho}, & \Pi_6 &= \frac{t^3 T_0 \lambda}{l^4 \rho}, & \Pi_7 &= \frac{t^2 T_0 c}{l^2}. \end{aligned}$$

Обычно при исследовании упругих конструкций, одновременно подверженных механическому и тепловому воздействиям, используют несколько видоизмененную систему независимых безразмерных комбинаций — критериев подобия:

$$\begin{aligned} \Pi'_1 &= \frac{\Pi_1}{\Pi_3} = \frac{P}{El^2}, & \Pi'_2 &= \frac{\Pi_2\Pi_4}{\Pi_6} = \frac{Q\alpha_l}{\lambda l}, & \Pi'_3 &= \frac{\Pi_3\Pi_4}{\Pi_7} = \frac{E\alpha_l}{c\rho}, \\ & & \Pi_4 &= \alpha_l T_0, & \Pi'_5 &= \frac{\Pi_5}{\Pi_6} = \frac{\alpha l}{\lambda}, \\ \Pi'_6 &= \frac{\Pi_6}{\Pi_7} = \frac{t\lambda}{l^2 c\rho}, & \Pi'_7 &= \frac{\Pi_3^3\Pi_4^2}{\Pi_6^2} = \frac{E^3\alpha_l^2 l^2}{\lambda^2 \rho}. \end{aligned}$$

Первый из них, как правило, называют механическим критерием Кирпичева*¹, а второй и третий — термомеханическими критериями подобия*²). Безразмерную комбинацию Π'_5 , характеризующую соотношение между термическими сопротивлениями конструкции и теплоотдачи к окружающей среде, называют *критерием Био**³ и обозначают $Bi = \alpha l / \lambda$, а Π'_6 — *критерием Фурье**⁴, обозначаемым $Fo = \frac{\lambda t}{c\rho l^2}$ и характеризующим скорость изменения температурного поля.

В итоге, учитывая коэффициент Пуассона ν и введенные в начале безразмерные координаты, искомые зависимости безразмерных температуры и проекций перемещения можно представить в виде

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{T}{T_0} = f(Fo, \bar{x}_i, \nu, \Pi'_1, \Pi'_2, \Pi'_3, \Pi_4, Bi, \Pi'_7), \\ \bar{u}_i &= \frac{u_i}{l} = f_i(Fo, \bar{x}_i, \nu, \Pi'_1, \Pi'_2, \Pi'_3, \Pi_4, Bi, \Pi'_7), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

*¹В.Л. Кирпичев (1845–1913) — российский ученый в области теоретической механики и сопротивления материалов

*²См.: Шаповалов Л.А.

*³Ж.Б. Био (1774–1862) — французский физик

*⁴Ж.Б.Ж. Фурье (1768–1830) — французский математик и физик.

Дополнение 2.2. Представление математической модели в безразмерной форме

Выше (см. 2.5 и Д.2.1) рассмотрено применение П-теоремы к построению *полуэмпирических математических моделей* (ММ) в виде зависимостей между безразмерными комбинациями параметров — *критериями подобия*. Эту теорему целесообразно использовать и для представления в безразмерной форме *аналитических математических моделей*, полученных теоретическим путем. Такая форма упрощает качественный анализ ММ и позволяет в удобном виде представить результаты ее количественного исследования.

Проследим этапы приведения к безразмерной форме довольно сложной *математической модели микроуровня*, описывающей процесс взаимодействия твердого тела с вязкой сжимаемой средой (газом*), движущегося в ней с постоянной скоростью. В частности, такая ММ описывает движение летательного аппарата в плотных слоях атмосферы.

Газ считаем совершенным, т.е. подчиняющимся уравнению состояния (3.32) Клапейрона — Менделеева в виде $p = \rho RT$, где p , ρ , T — давление, плотность и температура газа, измеряемые в паскалях ($\text{Па} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2}$), килограммах на кубический метр ($\text{кг}/\text{м}^3$) и кельвинах (К) соответственно, R — газовая постоянная, измеряемая в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{К}} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{К}}$. Изохорную теплоемкость c_V газа (или теплоемкость при постоянном объеме), измеряемую в тех же единицах, что и R , примем не зависящей от его температуры, а коэффициент объемной вязкости газа — равным нулю. Зависимость коэффициентов теплопроводности λ газа и его сдвиговой вязкости η от температуры (единицы измерения этих коэффициентов — $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^3 \cdot \text{К}}$ и $\text{Па} \cdot \text{с} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}$

*См.: Седов Л.И. (1977 г.)

соответственно), приближенно представим в виде

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{\eta}{\eta_0} = \sqrt{\frac{T}{T_0}},$$

где λ_0 и η_0 — значения λ и η при температуре T_0 , которую имеет газ плотностью ρ_0 на достаточно большом расстоянии от тела. Величину η часто называют *динамическим коэффициентом вязкости*.

Движение твердого тела с постоянной скоростью v относительно газа равносильно обтеканию неподвижного тела потоком газа, имеющим на достаточно большом расстоянии от тела скорость $v_\infty = -v$. Выберем систему координат $Ox_1x_2x_3$, неподвижно связанную с твердым телом так, чтобы направление скорости v_∞ совпадало с положительным направлением оси Ox_1 . Тогда на поверхности S твердого тела, имеющего характерный размер l и температуру \tilde{T} , вектор v скорости газа будет нулевым в силу свойства вязкости газа [XIII]. В области вне тела параметры газа удовлетворяют *уравнению неразрывности*

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.18)$$

уравнениям движения в проекциях на оси координат [XIII]

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = b_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\eta \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + 2 \frac{\partial (\eta \xi_{ij})}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.19)$$

и уравнению переноса энергии

$$c\nu\rho \frac{dT}{dt} + p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + 2\eta \xi_{ij}^2 \delta_{ij} - \frac{2\eta}{3} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2, \quad (2.20)$$

где t — время, измеряемое в с; v_i и b_i — проекции векторов v скорости газа и b плотности объемных сил на координатные оси (эти проекции измеряют в м/с и $\frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$ соответственно);

$\xi_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ — компоненты *тензора скоростей деформаций*, измеряемые в 1/с, $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$

(в (2.18)–(2.20) использовано правило суммирования по повторяющимся индексам $i, j = 1, 2, 3$). Считая ось Ox_3 направленной вертикально вверх, примем, что в (2.19) $b_1 = b_2 = 0$ и $b_3 = -\rho g$, где g — ускорение свободного падения, измеряемое в m/c^2 .

Можно показать*, что $2\eta\xi_{ij}^2\delta_{ij} - \frac{2\eta}{3}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right)^2 \geq 0$, причем равенство нулю возможно при радиальном расширении или сжатии газа и при его движении без деформаций как абсолютно твердого тела. Эти два слагаемых в правой части (2.20) равны суммарной объемной мощности энерговыделения за счет диссипации кинетической энергии газа в силу его вязкости. Отметим, что, хотя рассматриваемый процесс установившийся, т.е. параметры газового потока и твердого тела не изменяются во времени t , полные производные по t в левых частях (2.18)–(2.20) не равны тождественно нулю, поскольку в случае неоднородных полей плотности, скорости и температуры их переносные (конвективные) производные отличны от нуля [XIII].

Из (2.18)–(2.20) и перечисленных допущений следует, что при фиксированной форме тела и его ориентации относительно системы координат процесс его взаимодействия с газовым потоком характеризуют $n = 10$ размерных определяющих параметров $x_j, j = \overline{1, n}$: $x_1 = l, x_2 = \rho_0, x_3 = v_\infty, x_4 = T_0, x_5 = \tilde{T}, x_6 = \eta_0, x_7 = \lambda_0, x_8 = R, x_9 = c_V, x_{10} = g$, размерности которых можно выразить через $k = 4$ независимые стандартные единицы измерения м, кг, с, К. Столбцы матрицы размерностей для этих параметров представлены в табл. 2.5.

Таблица 2.5

	l	ρ_0	v_∞	T_0	\tilde{T}	η_0	λ_0	R	c_V	g
м	1	-3	1	0	0	-1	1	2	2	1
кг	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
с	0	0	-1	0	0	-1	-3	-2	-2	-2
К	0	0	0	1	1	0	-1	-1	-1	0

*См.: Лойцянский Л.Г.

Матрица размерностей ступенчатая, а определитель, составленный из первых четырех ее столбцов, равен -1 , поэтому ее ранг r равен $r = k = 4$. Согласно *П-теореме*, из размерных параметров x_j , $j = \overline{1, 10}$, можно составить $\bar{n} = n - k = 6$ независимых безразмерных комбинаций. Показатели z_j степеней этих параметров в выражении для каждой безразмерной комбинации вида (2.16) удовлетворяют однородной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида (2.17), матрица которой является матрицей размерностей.

Примем z_j , $j = \overline{1, 4}$, в качестве базисных неизвестных и выразим их через свободные неизвестные z_j , $j = \overline{5, 10}$, используя ступенчатый вид матрицы размерностей:

$$\begin{cases} z_1 = -z_6 - z_7 + z_{10}, \\ z_2 = -z_6 - z_7, \\ z_3 = -z_6 - 3z_7 - 2z_8 - 2z_9 - 2z_{10}, \\ z_4 = -z_5 + z_7 + z_8 + z_9. \end{cases}$$

Выбирая значения свободных неизвестных в правых частях этих равенств последовательно, так, чтобы одно из них равнялось единице, а остальные — нулю, получаем *фундаментальную систему решений* однородной СЛАУ в виде шести наборов значения z_j , $j = \overline{1, 11}$, показателей степени, с которыми определяющие параметры x_j входят в шесть безразмерных комбинаций вида (2.16). Эти значения представлены в табл. 2.6.

Таблица 2.6

	l	ρ_0	v_∞	T_0	\tilde{T}	η_0	λ_0	R	cv	g
П ₁	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0
П ₂	-1	-1	-1	0	0	1	0	0	0	0
П ₃	-1	-1	-3	1	0	0	1	0	0	0
П ₄	0	0	-2	1	0	0	0	1	0	0
П ₅	0	0	-2	1	0	0	0	0	1	0
П ₆	1	0	-2	0	0	0	0	0	0	1

При помощи этой таблицы запишем выражения для безразмерных комбинаций:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{\tilde{T}}{T_0}, & \Pi_2 &= \frac{\eta_0}{lv_\infty\rho}, & \Pi_3 &= \frac{T_0\lambda_0}{lv_\infty^3\rho}, \\ \Pi_4 &= \frac{T_0R}{v_\infty^2}, & \Pi_5 &= \frac{T_0c_V}{v_\infty^2}, & \Pi_6 &= \frac{lg}{v_\infty^2}. \end{aligned}$$

Для некоторых из полученных выражений используют традиционные обозначения. Так, отношение $\Pi_1 = \tilde{T}/T_0 = \Theta$ в данном случае служит критерием подобия полей температуры и зависимостей коэффициентов теплопроводности и сдвиговой вязкости от температуры в подобных процессах, $1/\Pi_2 = lv_\infty\rho/\eta_0 = \text{Re}$ является критерием Рейнольдса, а $\Pi_6 = lg/v_\infty^2 = \text{Fr}$ называют критерием (числом) Фруда^{*1}, характеризующим соотношение сил тяжести и инерционных сил в рассматриваемом процессе. Остальные три степенных одночлена Π_3 , Π_4 и Π_5 обычно преобразовывают с привлечением Π_2 в три независимые безразмерные комбинации

$$\begin{aligned} \frac{\Pi_4 + \Pi_5}{\Pi_5} &= \frac{R + c_V}{c_V} = \gamma, & \Pi_2 \frac{\Pi_4 + \Pi_5}{\Pi_3} &= \frac{\gamma\eta_0c_V}{\lambda_0} = \text{Pr}, \\ \sqrt{\frac{\Pi_5/\Pi_4}{\Pi_4 + \Pi_5}} &= \frac{v_\infty}{\sqrt{\gamma RT_0}} = \text{M}. \end{aligned}$$

Первая из них носит название показателя адиабатического процесса и имеет постоянное значение для конкретного газа. Для воздуха, состоящего в основном из двухатомных газов, $\gamma \approx 1,40$ (см. Д.3.1). Вторая безразмерная комбинация является критерием Прандтля для данного газа, а третью называют критерием (числом) Маха^{*2}. Критерий Маха равен отношению v_∞ к скорости $a_0 = \sqrt{\gamma RT_0}$ звука в невозмущенном потоке

^{*1}У. Фруд (1810–1879) — английский ученый.

^{*2}Э. Мах (1838–1916) — австрийский физик.

газа и характеризует влияние сжимаемости газа на его взаимодействие с твердым телом. В силу принятых допущений о постоянстве c_V и зависимости η и λ от температуры для конкретного газа имеем $Pr = \gamma\eta c_V/\lambda = \text{const}$. Для совершенного газа можно принять*¹ $Pr = \frac{4}{9-5/\gamma}$ (отсюда для воздуха $Pr \approx 0,737$, что несколько выше значений, получаемых экспериментально).

Перечисленные критерии подобия могут служить аргументами функций, определяющих значения безразмерных комбинаций, в которые входят такие интегральные характеристики процесса, как подъемная сила, сила лобового сопротивления, *тепловой поток* от газа к твердому телу. Например, для подъемной силы P при обтекании тела воздушным потоком можно записать

$$\frac{P}{\rho_0 v_\infty^2 l^2 / 2} = f(\Theta, Re, \gamma, Pr, M, Fr). \quad (2.21)$$

Влияние критерия Фруда обычно существенно в случае, когда вес среды, вытесненной объемом твердого тела, сопоставим с весом тела (например, при движении воздушного шара или дирижабля). В остальных случаях влиянием этого критерия в (2.21) можно пренебречь. Известно, что при адиабатическом торможении газового потока его температура и плотность принимают значения*²

$$T^* = T_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right), \quad \rho^* = \rho_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{1/(\gamma-1)}.$$

Отсюда следует, что влияние сжимаемости газа становится существенным при $M \geq 0,5$, а при $M < 0,5$ в (2.21) можно пренебречь влиянием критерия Маха и считать газовый поток несжимаемым. При $\Theta \approx 1$ в (2.21) можно опустить аргумент Θ . Наконец, если допустимо пренебречь влиянием вязкости газа, то критерий Re , характеризующий соотношение инерционных сил и сил вязкого трения, также не будет аргументом

*¹См.: Седов Л.И. (1970 г.).

*²См.: Лойцянский Л.Г.

функции f в (2.21) и при фиксированных для конкретного газа значениях γ и Pr эта функция примет некоторое постоянное значение, определяемое положением обтекаемого твердого тела относительно направления скорости v_∞ . В этом случае $\frac{P}{\rho_0 v_\infty^2 l^2 / 2} = \text{const}$, что согласуется с результатом, полученным в примере 2.2.

Уравнения (2.18)–(2.20) вместе с равенствами $p = \rho RT$ и $\lambda/\lambda_0 = \eta/\eta_0 = \sqrt{T/T_0}$ описывают поля давления, плотности, скорости и температуры газового потока и при неустановившемся процессе обтекания неподвижного твердого тела. Для анализа соответствующей ММ приведем эти уравнения к безразмерному виду, введя безразмерные координаты $\bar{x}_i = x_i/l$ и проекции $\bar{v}_i = v_i/v_\infty$, $i = 1, 2, 3$, скорости, плотность $\bar{\rho} = \rho/\rho_0$, давление $\bar{p} = \frac{p}{\rho_0 R T_0}$, температуру $\bar{T} = T/T_0$, коэффициенты теплопроводности $\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_0$ и сдвиговой вязкости $\bar{\eta} = \eta/\eta_0$:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \text{Но}} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{v}_i)}{\partial \bar{x}_i} = 0, \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \text{Но}} + \bar{\rho} \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_j} = \\ = \text{Fr}_i - \frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_i} - \frac{2}{3 \text{Re}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \left(\bar{\eta} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial \bar{x}_j} \right) + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial (\bar{\eta} \bar{\xi}_{ij})}{\partial \bar{x}_j}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \text{Re Pr} \left(\bar{\rho} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \text{Но}} + \frac{\bar{\rho} \bar{v}_i}{\gamma} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}_i} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \bar{p} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_i} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \left(\bar{\lambda} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}_i} \right) + \\ + 2 \frac{\gamma - 1}{\text{Pr}} M^2 \bar{\eta} \left(\bar{\xi}_{ij}^2 \delta_{ij} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{x}_i} \right)^2 \right), \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где $\text{Fr}_1 = \text{Fr}_2 = 0$ и $\text{Fr}_3 = \text{Fr} = gl/v_\infty^2$, $\bar{\xi}_{ij} = \frac{l}{v_\infty} \xi_{ij}$, $\text{Но} = v_\infty t/l$ — критерий динамической гомохронности, характеризующий соотношение между переносным (конвективным) и локальным ускорением газового потока. В уравнение (2.24) обычно вводят

критерий Фурье $Fo = \frac{Ho}{RePr} = \frac{\lambda_0 t}{l^2 \rho \gamma_{cv}}$, который в данном случае не является независимой безразмерной комбинацией. Отметим, что в силу принятой зависимости коэффициентов теплопроводности и сдвиговой вязкости от температуры $\bar{\lambda} = \bar{\eta} = \sqrt{\bar{T}}$.

Если безразмерные уравнения (2.22)–(2.24) имеют решение, удовлетворяющее начальным и граничным условиям, то это решение в случае конкретного газа с известными значениями γ и Pr можно представить в виде

$$\begin{aligned}\bar{\rho} &= \bar{\rho}(Ho, \bar{x}_i, \Theta, Re, M, Fr), & \bar{p} &= \bar{p}(Ho, \bar{x}_i, \Theta, Re, M, Fr), \\ \bar{v}_i &= \bar{v}_i(Ho, \bar{x}_i, \Theta, Re, M, Fr), & i &= 1, 2, 3, \\ \bar{T} &= \bar{T}(Ho, \bar{x}_i, \Theta, Re, M, Fr).\end{aligned}$$

Движение газа у поверхности твердого тела может быть вызвано лишь объемными силами. В этом случае обычно не удается выбрать в качестве характерной скорости v_∞ какое-либо определенное значение. Тогда вместо критериев Рейнольдса и Фруда используют критерий (число) Галилея* $Ga = Re^2 Fr = = gl^3/\nu_0^2$, где $\nu_0 = \eta_0/\rho_0$ — *кинематический коэффициент вязкости* газа. Этот критерий не содержит скорость и является мерой соотношения сил тяжести и вязкого трения.

При движении газа, вызванном объемными силами, его скорость сравнительно мала, так что влиянием критерия Маха можно пренебречь. В этом случае поля безразмерных плотности, давления, скорости и температуры оказываются функциями критериев Ho , Ga , Θ и безразмерных координат \bar{x}_i , $i = 1, 2, 3$. Объемные силы могут возникнуть за счет неоднородности поля плотности газа. Тогда критерий Галилея домножают на отношение $\Delta\rho/\rho_0$, где $\Delta\rho$ — разность плотности газа в двух характерных точках области, и получают критерий (число) Архимеда $Ar = \frac{Ga\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{gl^3}{\nu_0^2} \frac{\Delta\rho}{\rho_0}$. Если разность плотности газа

*Г. Галилей (1564–1642) — итальянский ученый.

связана с неоднородностью поля температуры, то вместо критерия Архимеда обычно используют критерий (число) Рэлея $Ra = AgPr = \frac{g l^3 \beta \Delta T}{\nu_0 \kappa_0}$, где β — коэффициент объемного расширения газа (для совершенного газа $\beta = 1/T$), ΔT — разность температур газа в двух характерных точках области, $\kappa_0 = \frac{\lambda_0}{\rho \gamma c \nu}$ — коэффициент температуропроводности газа.

При смешанном характере движения газа у поверхности твердого тела также можно опустить критерий Маха, представив поля безразмерных плотности, давления, скорости и температуры в виде функций критериев Θ , Ho , Re , Gr и безразмерных координат \bar{x}_i , $i = 1, 2, 3$. Такое представление обычно используют при построении полуэмпирических ММ процессов теплообмена*.

Вопросы и задачи

2.1. Для условий каждого из примеров 2.1–2.3 составьте матрицу размерностей, найдите ее ранг и сравните с числом k единиц измерения, используемых для представления размерностей основных параметров.

2.2. При построении полуэмпирической ММ установившегося течения вязкой несжимаемой жидкости по трубопроводу проводят измерения перепада Δp давления вдоль трубопровода длиной l с круглым поперечным сечением радиуса r_* при различных значениях $Q_{ж}$ объемного расхода жидкости плотностью ρ с кинематическим коэффициентом вязкости ν . Сколько независимых безразмерных комбинаций можно составить из указанных размерных параметров? В каком виде следует обработать результаты измерений, чтобы получить зависимость между этими безразмерными комбинациями, справедливую для трубопровода с иными размерами и для другой вязкой несжимаемой жидкости?

*См.: Теория тепломассообмена.

2.3. В каком виде следует обработать результаты измерений в предыдущей задаче, если движение жидкости в трубопроводе очень медленное и соответствует весьма малому значению числа Рейнольдса?

2.4. Какие размерные параметры определяют сопротивление твердого тела в потоке совершенного сжимаемого идеального (невязкого) газа и каковы их размерности? Сколько независимых безразмерных комбинаций и какие именно можно составить из этих параметров?

2.5. Какие размерные параметры определяют сопротивление движению с постоянной скоростью надводного корабля при условии, что вода вязкая и несжимаемая? Сколько независимых безразмерных комбинаций и какие именно можно составить из этих параметров?

2.6. В чем различие между одинаковыми по виду критериями Нуссельта и Био (см. примеры 2.3 и 2.6)?

2.7. Убедитесь, что (2.18)–(2.20) можно привести к безразмерному виду (2.22)–(2.24).

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОСТЕЙШИХ ТИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

При всем разнообразии *технических объектов*, в которых протекают процессы различной физической природы, обычно удастся выделить отдельные блоки, агрегаты или узлы, каждый из которых в зависимости от переносимой и преобразуемой физической субстанции можно рассматривать как электрическую, механическую поступательную или вращательную, тепловую, гидравлическую или пневматическую систему*. В общем случае эти системы взаимосвязаны, но, используя *принцип декомпозиции*, их можно представить совокупностью простейших типовых элементов, описываемых сравнительно несложными *математическими моделями макроуровня*. Среди *внешних и выходных параметров*, характеризующих состояние каждого такого элемента, удастся выделить величины, имеющие смысл потенциалов и потоков физических субстанций (например, разность электрических потенциалов и сила тока, разность температур и тепловой поток и т.п.). Эти величины будем называть *потенциальными* и *потоковыми* соответственно. Связь между этими величинами устанавливаются при помощи так называемых *уравнений состояния элемента*, в которые входят также и его *внутренние параметры*.

3.1. Электрические двухполюсники

Несмотря на различие физических процессов, протекающих в типовых элементах разнообразных *технических объектов*, большинство этих элементов удастся объединить в три груп-

*См.: *Норенков И.П.*

пы, каждую из которых удобно охарактеризовать на примере так называемых пассивных *электрических двухполюсников*: резистора, конденсатора без потерь заряда и индуктивной катушки без сопротивления. Резистор является характерным представителем типового элемента, обладающего свойством оказывать сопротивление переносу некоторой физической субстанции (в данном случае — электрических зарядов). Для прохождения через такой элемент потока этой субстанции необходимо располагать разностью потенциалов на входе в элемент и выходе из него. Конденсатор обладает свойством накапливать эту субстанцию при повышении разности потенциалов, а индуктивная катушка — свойством инерции, проявляющимся в стремлении сохранить поток этой субстанции неизменным.

Оказывается, что среди простейших типовых элементов, в которых протекают процессы иной физической природы по сравнению с электрической системой, существуют элементы со свойствами, аналогичными указанным свойствам резистора, конденсатора и индуктивной катушки. Поэтому рассмотрение целесообразно начать с *уравнений состояния* простейших элементов электрической системы, а затем по аналогии с ними строить *математические модели* (ММ) типовых элементов, характерных для других технических систем.

Выше (см. 2.3) отмечено, что ММ резистора, описывающей протекание через него электрического тока, является хорошо известная формула

$$\Delta U = IR \quad (3.1)$$

закона Ома, где ΔU и I — падение электрического напряжения (разность электрических потенциалов) на резисторе и сила тока, измеряемые в вольтах^{*1} (В) и амперах^{*2} (А) соответственно (рис. 3.1, а); R — *сопротивление резистора*, измеряемое в омах ($\text{Ом} = \text{В}/\text{А}$). Величину $g = 1/R$ называют *проводимостью резистора*, единицей измерения которой является

^{*1}А. Вольта (1745–1827) — итальянский физик и физиолог.

^{*2}А.М. Ампер (1775–1836) — французский физик.

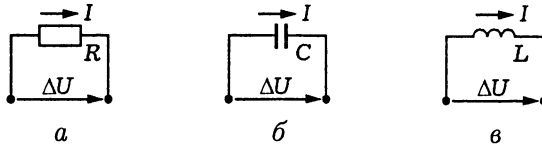


Рис. 3.1

сименс*¹ ($C_m = 1/\text{Ом}$). Электрическая энергия, затрачиваемая на преодоление сопротивления при протекании через резистор тока, переходит в тепловую энергию, причем измеряемая в ваттах ($\text{Вт} = \text{В} \cdot \text{А}$) мощность тепловыделения на резисторе равна

$$W = I\Delta U = I^2 R = \frac{(\Delta U)^2}{R} = g(\Delta U)^2. \quad (3.2)$$

Электрический конденсатор обладает свойством накапливать электрический заряд Q_e , измеряемый в кулонах*² (Кл), пропорционально разности потенциалов ΔU на его обкладках, причем $Q_e = C\Delta U$, где C — *емкость конденсатора*, измеряемая в фарадах*³ (Ф). Для идеализированного конденсатора с постоянной емкостью, в котором нет перетекания электрического заряда через разделяющий обкладки диэлектрик, при изменении ΔU во времени t в цепи, содержащей последовательно включенный конденсатор (рис. 3.1, б), протекает ток силой $I = \frac{dQ_e}{dt}$, т.е.

$$I = C \frac{d\Delta U}{dt}. \quad (3.3)$$

Энергию электрического поля в конденсаторе, равную $E_e = Q_e\Delta U/2 = C(\Delta U)^2/2 = Q_e^2/(2C)$, измеряют в джоулях (Дж).

При изменении во времени силы тока, протекающего через индуктивную катушку, возникает электродвижущая сила (ЭДС) самоиндукции, препятствующая изменению силы тока (рис. 3.1, в). В случае идеализированной (без сопротивления)

*¹Э.В. Сименс (1816–1892) — немецкий электротехник и промышленник.

*²Ш.О. Кулон (1736–1806) — французский инженер и физик.

*³М. Фарадей (1791–1867) — английский физик.

катушки эту ЭДС можно представить как разность потенциалов

$$\Delta U = L \frac{dI}{dt} \quad (3.4)$$

на концах катушки, где L — ее *индуктивность*, измеряемая в генри*¹ (Гн). При прохождении электрического тока через катушку каждый ее виток пронизывает некоторый магнитный поток. Для катушки индуктивности принимают, что этот поток одинаков для всех витков (говорят, что он „сцеплен“ с каждым витком) и равен $\Psi = LI$. Величину Ψ называют потоко-сцеплением и измеряют в веберах*² (Вб). Энергия магнитного поля катушки, измеряемая в Дж, равна $E_m = \Psi I / 2 = LI^2 / 2 = = \Psi^2 / (2L)$.

Таким образом, ММ резистора является алгебраическое уравнение, а для конденсатора и индуктивной катушки ММ имеет форму обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Если считать, что R , C и L в (3.1)–(3.4) не зависят от силы тока и напряжения, то эти уравнения устанавливают линейную связь между I и ΔU , что является признаком линейности ММ.

Наряду с пассивными двухполюсниками к типовым элементам электрических цепей относят источники напряжения и тока, условное обозначение которых представлено на рис. 3.2, *a* и *б* соответственно. Идеальный источник электрического напряжения является двухполюсником, задающим на своих полюсах изменение во времени t по определенному закону $\Delta U(t)$ разности напряжений, не зависящей от значения $I(t)$ силы тока, протекающего через него. Это означает, что такой источник имеет столь малое внутреннее сопротивление \bar{R} , что падением $I(t)\bar{R}$ напряжения на таком сопротивлении можно пренебречь по сравнению с $\Delta U(t)$. Наоборот, идеальный источник электрического тока — это двухполюсник, обладающий столь большим

*¹ Дж. Генри (1797–1878) — американский физик.

*² В.Э. Вебер (1804–1891) — немецкий физик.

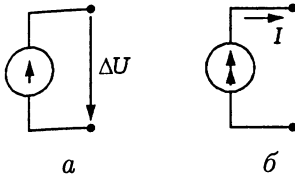


Рис. 3.2

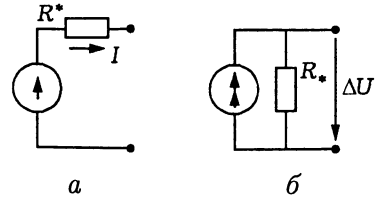


Рис. 3.3

внутренним сопротивлением \bar{R} , что изменяющаяся по определенному закону $I(t)$ сила проходящего через такой источник тока не зависит от разности $\Delta U(t)$ напряжений на его полюсах, т.е. величиной $\Delta U(t)$ можно пренебречь по сравнению с $I(t)\bar{R}$.

Практически источник тока, близкий к идеальному, можно получить последовательным соединением источника достаточно большого напряжения и резистора с сопротивлением R^* , существенно превосходящим сопротивление внешней электрической цепи (рис. 3.3, а). Близким к идеальному источнику напряжения будет двухполюсник, состоящий из параллельно соединенных источника тока и резистора с сопротивлением R_* , существенно меньшим сопротивления внешней цепи (рис. 3.3, б).

Пусть через резистор течет переменный во времени t ток силой

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (3.5)$$

где I_0 — амплитуда колебаний силы тока, ω — угловая частота и φ_0 — начальная фаза колебаний. Величину $\omega t + \varphi_0$ называют **фазой колебаний**. В соответствии с законом Ома для падения напряжения на резисторе с сопротивлением R получим

$$\Delta U_R(t) = I(t)R = I_0 R \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (3.6)$$

Таким образом, для резистора сила тока и падение напряжения имеют одинаковую начальную фазу колебаний (говорят, что они совпадают по фазе), т.е. эти величины одновременно достигают нулевых, максимальных и минимальных значе-

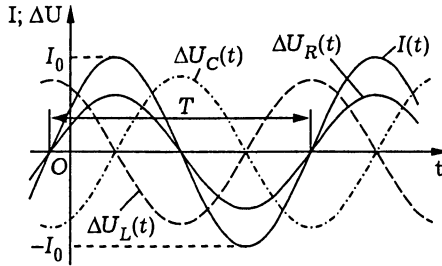


Рис. 3.4

ний (рис. 3.4). В этом случае средняя за период $T = 2\pi/\omega$ колебаний силы тока мощность тепловыделения на резисторе равна

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) \Delta U(t) dt = \frac{I_0^2 R}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi_0) dt = \frac{I_0^2 R}{2},$$

т.е. она вдвое меньше наибольшего мгновенного значения мощности, соответствующего прохождению через тот же резистор постоянного тока силой I_0 .

Если изменяющийся по закону (3.5) ток течет через катушку с индуктивностью L , то в соответствии с (3.4) на катушке возникнет падение напряжения

$$\Delta U_L(t) = L \frac{dI}{dt} = \omega L I_0 \cos(\omega t + \varphi_0) = \omega L I_0 \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.7)$$

Учитывая (3.3), несложно установить, что для протекания такого тока в цепи, внешней по отношению к конденсатору емкостью C , падение напряжения на конденсаторе должно изменяться по закону

$$\Delta U_C(t) = -\frac{I_0}{\omega C} \cos(\omega t + \varphi_0) = \frac{I_0}{\omega C} \sin\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.8)$$

Итак, для конденсатора изменение падения напряжения отстает по фазе на $\pi/2$ от изменения силы тока, а для индуктивной катушки, наоборот, опережает на $\pi/2$ (см. рис. 3.4).

Используя показательную форму представления комплексного числа и формулу Эйлера [X], вместо (3.5)–(3.8) запишем **комплексные представления** соответствующих **функций**:

$$\begin{aligned} I(t) &= \text{Im}(\widehat{I}e^{i\omega t}), & \Delta U_R(t) &= \text{Im}(\Delta\widehat{U}_R e^{i\omega t}), \\ \Delta U_L(t) &= \text{Im}(\Delta\widehat{U}_L e^{i\omega t}), & \Delta U_C(t) &= \text{Im}(\Delta\widehat{U}_C e^{i\omega t}), \end{aligned}$$

где $\widehat{I} = I_0 e^{i\varphi_0}$, $\Delta\widehat{U}_R = I_0 R e^{i\varphi_0}$, $\Delta\widehat{U}_L = \omega L I_0 e^{i(\varphi_0 + \pi/2)}$ и $\Delta\widehat{U}_C = I_0 e^{i(\varphi_0 - \pi/2)} / (\omega C)$ — **комплексные амплитуды** силы тока и соответствующих падений напряжения, $i^2 = -1$, $\text{Im } z$ — мнимая часть комплексного числа z . Отношения

$$\begin{cases} Z_R = \frac{\Delta\widehat{U}_R}{\widehat{I}} = R, \\ Z_L = \frac{\Delta\widehat{U}_L}{\widehat{I}} = \omega L e^{i\pi/2} = i\omega L, \\ Z_C = \frac{\Delta\widehat{U}_C}{\widehat{I}} = \frac{e^{-i\pi/2}}{\omega C} = -\frac{i}{\omega C} \end{cases} \quad (3.9)$$

называют **комплексными сопротивлениями** соответствующих электрических двухполюсников или **импедансами** (от латинского слова impedio — препятствую). При изменяющемся по закону (3.5) токе говорят об **активном сопротивлении** R резистора, **индуктивном сопротивлении** ωL катушки и **емкостном сопротивлении** $1/(\omega C)$ конденсатора. Последние два термина объединяют общим термином „**реактивное сопротивление**“.

Если резистор, индуктивную катушку и конденсатор рассматривать как звено, преобразующее входной сигнал (силу тока $I(t)$) в выходной сигнал (падение напряжения), то соответствующее комплексное сопротивление называют **комплексным передаточным числом** такого звена или **комплексным коэффициентом усиления**. Зависимости модуля $A(\omega)$ комплексного передаточного числа и главного значения

аргумента $\beta(\omega)$ этого числа от угловой частоты ω называют соответственно *амплитудно-частотной* и *фазочастотной характеристиками* звена. С помощью этих характеристик комплексное передаточное число Z можно представить в виде $Z = A(\omega)e^{i\beta(\omega)}$. На рис. 3.5 соответствующими индексами отмечены эти характеристики для резистора, индуктивной катушки и конденсатора.

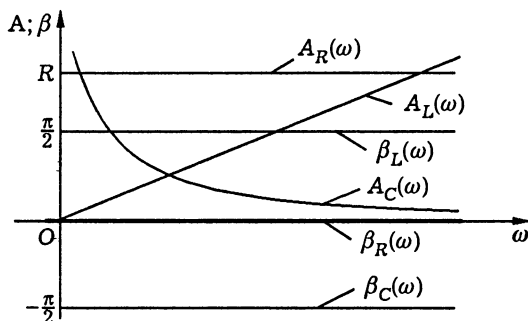


Рис. 3.5

Замечание 3.1. Подчеркнем еще раз, что рассмотренные двухполюсники идеализированы, так как при построении их ММ использованы упрощенные *расчетные схемы* реальных элементов электрических цепей (см. Д.3.3). К отмеченным выше допущениям следует добавить, что не учтена конечная скорость распространения электрических и магнитных полей, т.е. эти ММ являются *квазистационарными математическими моделями*. Такое допущение не приводит к заметным погрешностям, если наименьшая длительность t_{\min} протекающих в этих двухполюсниках процессов удовлетворяет условию $t_{\min} \gg l_{\max}/c$, где l_{\max} — наибольший линейный размер электрической цепи, $c \approx 2,9979 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме. При выполнении этого условия можно пренебречь влиянием на характеристики двухполюсников волновых процессов в электрических элементах и соединительных проводах.

В линейной ММ процесса, описываемого периодической функцией времени, можно рассматривать отдельно влияние каждой гармоники в разложении этой функции в ряд Фурье, а в случае непериодического процесса — влияние функции $S(\omega)e^{i\omega t}$, где $S(\omega)$ — соответствующая спектральная функция [IX]. Но использование гармоник и спектральных функций при больших значениях ω может привести к значительным погрешностям квазистационарных ММ*, поскольку при этом уменьшается значение $t_{\min} = 2\pi/\omega$.

3.2. Простейшие элементы механических систем

При относительном перемещении отдельных элементов механической системы на поверхности их контакта возникают силы трения, препятствующие этому перемещению. Для уменьшения сопротивления трения к поверхности контакта подводят смазочный материал. Тогда скорость v скольжения одной детали относительно другой в первом приближении пропорциональна приложенной силе P (рис. 3.6), т.е.

$P = k_{\text{тр}} S v$, где $k_{\text{тр}}$ — коэффициент вязкого трения, S — площадь поверхности контакта. Если в этом случае для механической системы в качестве *потенциальной величины* выбрать силу P , а в качестве *потокосвой* —

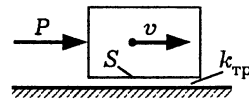


Рис. 3.6

скорость v , то записанное равенство можно рассматривать как аналог формулы (3.1) закона Ома

$$P = k_{\text{тр}} S v = R_{\text{м}} v, \quad (3.10)$$

а величину $R_{\text{м}} = k_{\text{тр}} S$ — как аналог электрического сопротивления R . Так как основными единицами измерения силы и скорости являются соответственно $\text{Н} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}$ (ньютон) и м/с,

* См.: Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.

то величину R_M измеряют в $\frac{Н \cdot с}{м} = \frac{кг}{с}$, а коэффициент вязкого трения — в $\frac{Н \cdot с}{м^3} = \frac{кг}{м^2 \cdot с}$.

При вращении, например, цапфы 1 вала 2 относительно вкладыша 3 подшипника скольжения 4 (рис. 3.7) вращающий момент M , приложенный к валу и измеряемый в $Н \cdot м$, можно

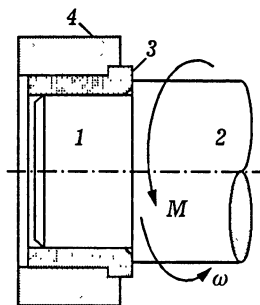


Рис. 3.7

считать при вязком трении пропорциональным угловой скорости ω (единица измерения рад/с). Тогда вместо (3.10) следует написать

$$M = k_{тр} \pi \frac{d^3 l}{4} \omega = R_M^o \omega, \quad (3.11)$$

где d и l — диаметр и длина цапфы. В этом случае момент M будет потенциальной величиной, угловая скорость ω — потоковой, а измеряемая в $Н \cdot м \cdot с$

величина $R_M^o = k_{тр} \pi d^3 l / 4$ — аналогом электрического сопротивления R в (3.1).

При движении против сил сопротивления вязкого трения совершается работа. Мощность, требуемая для преодоления вязкого трения при поступательном движении, равна $W_{тр} = P v = k_{тр} S v^2 = R_M v^2$, а при вращательном — $W_{тр} = M \omega = k_{тр} \pi d^3 l \omega^2 / 4 = R_M^o \omega^2$. Эта мощность является аналогом мощности тепловыделения на резисторе (см. 3.1).

В технических устройствах различного назначения механическую связь между отдельными деталями и агрегатами характеризуют жесткостью узлов крепления, под которой понимают отношение силы, приложенной к такому узлу, к перемещению

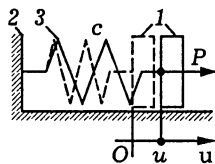


Рис. 3.8

точки приложения этой силы. Простейшей расчетной схемой узла крепления некоторой детали 1 к неподвижному основанию 2 является пружина 3 (рис. 3.8), один конец которой присоединен к этой детали, а второй — к основанию. Жесткостью

пружины называют измеряемое в $\text{Н/м} = \text{кг/с}^2$ отношение $c = P/u$, где P — сила, приложенная к пружине в точке ее присоединения к детали, а u — перемещение этой точки в направлении действия силы.

Изменение во времени t силы P приведет к изменению перемещения u . Если не учитывать силы инерции, возникающие при перемещении витков пружины, и принять значение c постоянным, то после дифференцирования равенства $u = P/c$ по времени получим

$$\frac{du}{dt} = v = \frac{1}{c} \frac{dP}{dt} = C_m \frac{dP}{dt}, \quad (3.12)$$

где v — скорость перемещения точки приложения силы P . В этом случае величину $C_m = 1/c$, измеряемую в м/Н и называемую податливостью пружины, можно рассматривать как аналог емкости C , входящей в соотношение (3.3) для электрического конденсатора. При растяжении или сжатии пружины она накапливает потенциальную энергию, равную работе силы P , совершаемой при перемещении точки приложения этой силы:

$$W = \int_0^u P du = \int_0^u cu du = \frac{c}{2} u^2 = \frac{P^2}{2c}.$$

Эта энергия является аналогом энергии электрического поля в конденсаторе (см. 3.1). Так как $v = du/dt$, $I = dQ_e/dt$ и скорость v — аналог силы I электрического тока, то перемещение u — аналог электрического заряда Q_e .

Зависимость вида (3.12) характерна для многих элементов, материал которых при нагружении сохраняет свойство линейной упругости. Так, например, продольную деформацию линейно упругого стержня с поперечным сечением площадью S при растяжении силой P можно считать одинаковой по всей длине l стержня (рис. 3.9) и равной в соответствии с *законом Гука**

*Р. Гук (1635–1703) — английский естествоиспытатель.

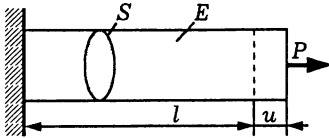


Рис. 3.9

$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{ES}$, где $\sigma = P/S$ — механическое напряжение в поперечном сечении стержня, E — модуль упругости материала стержня при растяжении (модуль Юнга^{*1}), измеряемые в паскалях ($\text{Па} = \text{Н}/\text{м}^2$).

При этом торец стержня, подверженный действию силы, переместится относительно закрепленного торца на расстояние $u = \varepsilon l = Pl/(ES)$. При сравнительно медленном изменении во времени t силы P , позволяющем пренебречь силами инерции, получим

$$\frac{du}{dt} = v = \frac{l}{ES} \frac{dP}{dt} = \bar{C}_m \frac{dP}{dt}, \quad (3.13)$$

где величина $\bar{C}_m = l/(ES)$ является аналогом емкости C в (3.3).

Из курса сопротивления материалов^{*2} известно, что поперечная сила P , приложенная к концу консольной упругой

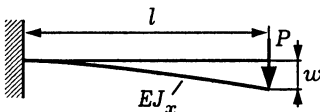


Рис. 3.10

балки длиной l , жестко защемленной другим концом (рис. 3.10), вызывает прогиб $w = Pl^3/(3EJ_x)$, где J_x — геометрический момент инерции поперечного сечения балки

относительно главной центральной оси этого сечения, перпендикулярной плоскости изгиба, в которой лежит нейтральная ось балки и действует сила P . Так, $J_x = \pi d^4/64$ для круглого сечения диаметра d и $J_x = bh^3/12$ для прямоугольного сечения шириной b и высотой h . При изменении во времени t силы P приходим к зависимости, аналогичной (3.12) и (3.13):

$$\frac{dw}{dt} = v = \frac{l^3}{3EJ_x} \frac{dP}{dt} = \hat{C}_m \frac{dP}{dt}, \quad (3.14)$$

где $\hat{C}_m = l^3/(3EJ_x)$.

^{*1}Т. Юнг (1773–1829) — английский ученый.

^{*2}См.: Феодосьев В.И. (1999 г.)

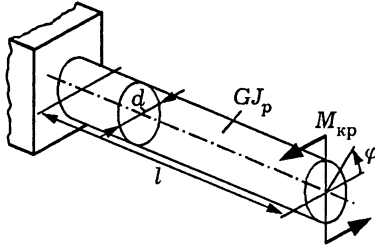


Рис. 3.11

Если один из концов упругого стержня длиной l с круглым поперечным сечением диаметра d жестко закреплен, а ко второму приложен крутящий момент $M_{кр}$ (рис. 3.11), то угол закручивания стержня будет $\varphi = \frac{M_{кр}l}{GJ_p}$, где G — модуль сдвига материала стержня, $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ — полярный момент инерции сечения стержня. Дифференцированием по времени t находим

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \frac{l}{GJ_p} \frac{dM_{кр}}{dt} = C_M^o \frac{dM_{кр}}{dt}, \quad (3.15)$$

где $C_M^o = \frac{l}{GJ_p}$. При закручивании стержня в (3.15) потенциальной величиной является крутящий момент $M_{кр}$, а потоковой — угловая скорость ω поворота того конца стержня, к которому приложен этот момент.

Таким образом, при различном выполнении упругих элементов механической системы между скоростью перемещения (или угловой скоростью) и скоростью изменения приложенной силы (или крутящего момента) справедлива зависимость, аналогичная соотношению (3.3) для электрического конденсатора. Соотношение, аналогичное (3.4) для индуктивной катушки, в случае поступательного движения тела массой m с изменяющейся во времени скоростью v следует непосредственно из второго закона Ньютона в виде

$$P = m \frac{dv}{dt} = L_M \frac{dv}{dt}, \quad L_M = m. \quad (3.16)$$

Здесь масса m тела служит аналогом индуктивности L катушки. При вращении тела относительно фиксированной оси с переменной угловой скоростью ω получим

$$M = J \frac{d\omega}{dt} = L^\circ \frac{d\omega}{dt}, \quad L^\circ = J, \quad (3.17)$$

где M — вращающий момент относительно этой оси. В (3.17) аналогом индуктивности является момент инерции J тела относительно оси вращения. Кинетическая энергия при поступательном движении равна $K = mv^2/2 = L_m v^2/2$, а при вращательном — $K = J\omega^2/2 = L_m^\circ \omega^2/2$. Величина K является аналогом энергии магнитного поля индуктивной катушки (см. 3.1).

Количество движения (импульс) тела массой m , имеющего скорость v , равно mv , а момент количества движения (момент импульса) вращающегося тела — $J\omega$. Продолжая аналогию с индуктивной катушкой, приходим к выводу, что аналогом импульса при поступательном движении тела или момента импульса при вращении тела будет потокосцепление $\Psi = LI$ катушки индуктивностью L , через которую протекает электрический ток силой I (см. 3.1).

Аналогию между *математическими моделями* (ММ) типовых элементов механических систем и *электрических двухполюсников* называют *электромеханической*. Ее удобно использовать при построении ММ сложных механических систем, состоящих из большого числа взаимодействующих между собой элементов.

3.3. Некоторые элементы тепловых систем

Под тепловыми будем понимать технические системы, в которых происходит накопление и перенос тепловой энергии. Аналогами разности электрических потенциалов (напряжений) и силы тока в тепловой системе являются разность (перепад) ΔT температур и тепловой поток Q , измеряемые в кельвинах (К) и ваттах (Вт) соответственно.

Многие элементы конструкции тепловых систем могут быть сведены к *расчетной схеме* (РС) плоской стенки толщиной h (рис. 3.12). Если на поверхностях стенки, материал которой имеет коэффициент теплопроводности λ , измеряемый в $\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$, заданы постоянные значения T_1 и T_2 температур, то при $\lambda = \text{const}$ установившееся распределение температуры по толщине стенки будет линейным: $T(z) = T_1 - \Delta T(z/h)$,

где $\Delta T = T_1 - T_2$, а z — координата, отсчитываемая внутрь стенки от поверхности с температурой T_1 . В этом можно убедиться, решив одномерное уравнение Лапласа $\frac{d^2T(z)}{dz^2} = 0$, описывающее стационарное температурное поле в плоской стенке. В соответствии с эмпирическим законом теплопроводности [XII], установленным Ж.Б.Ж. Фурье, тепловой поток, проходящий через стенку, одна из поверхностей которой имеет площадь S , равен $Q = (\lambda/h)S \Delta T$. Отсюда получаем зависимость

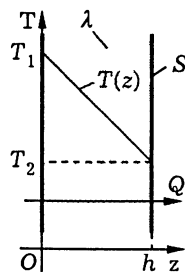


Рис. 3.12

$$\Delta T = Q \frac{h}{\lambda S} = QR_T, \quad (3.18)$$

аналогичную *закону Ома* (3.1). Величину $R_T = h/(\lambda S)$ в (3.18) называют *термическим сопротивлением* плоской стенки.

Если стенка состоит из нескольких плоских слоев, то при заданных температурах на внешних поверхностях стенки R_T в (3.18) следует рассматривать как суммарное термическое сопротивление, равное сумме термических сопротивлений всех слоев. При неидеальном тепловом контакте между слоями в эту сумму должны войти контактные термические сопротивления [XIII].

Многослойные элементы конструкции тепловых систем могут иметь криволинейные поверхности (например, стенки трубопроводов и сосудов, покрытые слоями теплоизоляционного

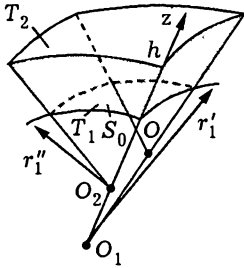


Рис. 3.13

материала). Такие элементы при установившемся одномерном распределении $T(z)$ температуры можно свести к РС неоднородного многослойного тела с коэффициентом теплопроводности $\lambda(z)$ и нормальным к координатной оси Oz сечением площадью $S(z)$. Начало отсчета координаты z поместим на поверхности тела, имеющей температуру T_1 (рис. 3.13). На противоположной поверхности тела при $z = h$ задана температура T_2 . Так как проходящий через тело тепловой поток Q одинаков для любого сечения, нормального к оси Oz , то в соответствии с законом теплопроводности имеем $Q = -\lambda(z)S(z) \frac{dT(z)}{dz} = \text{const}$ и после интегрирования получаем

$$T_2 = T_1 - Q \int_0^h \frac{dz}{\lambda(z)S(z)}.$$

Отсюда следует (3.18), если для многослойного тела обозначить

$$R_{\tau} = \frac{T_1 - T_2}{Q} = \int_0^h \frac{dz}{\lambda(z)S(z)}. \quad (3.19)$$

Пусть тело состоит из N слоев толщиной h_n , $n = \overline{1, N}$, с коэффициентами теплопроводности $\lambda_n = \text{const}$, причем r_n' и r_n'' — главные радиусы кривизны поверхности идеального теплового контакта между слоями с номерами $n - 1$ и n . Тогда, отсчитывая от этой поверхности координату z_n , для n -го слоя можно написать $S_n(z_n) = S_0 \frac{(r_n' + z_n)(r_n'' + z_n)}{r_1' r_1''}$, где S_0 и r_1' , r_1'' — площадь и главные радиусы кривизны поверхности тела, на которой задана температура T_1 (см. рис. 3.13). В этом случае,

используя свойство аддитивности определенного интеграла, из (3.19) находим

$$R_T = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n} \int_0^{h_n} \frac{dz_n}{S_n(z_n)} = \frac{r'_1 r''_2}{S_0} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n (r'_n - r''_n)} \ln \frac{1 + h_n/r'_n}{1 + h_n/r''_n}. \quad (3.20)$$

Если один или оба радиуса кривизны поверхности отрицательны, то выражение для $S_n(z_n)$ и (3.20) имеют смысл лишь при условии $h_n/|r'_n| < 1$ или $h_n/|r''_n| < 1$. В частном случае круглой цилиндрической стенки при $r'_n \rightarrow \infty$ и $r''_n = r_n$ из (3.19) получим

$$\widehat{R}_T = \frac{r_1}{S_0} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n} \ln(1 + h_n/r_n), \quad (3.21)$$

а для плоской ($r'_n \rightarrow \infty$, $r''_n \rightarrow \infty$) и сферической ($r'_n = r''_n = r_n$) стенок предельным переходом найдем соответственно

$$\overline{R}_T = \frac{1}{S_0} \sum_{n=1}^N \frac{h_n}{\lambda_n}, \quad \widetilde{R}_T = \frac{r_1^2}{S_0} \sum_{n=1}^N \frac{h_n/r_n}{\lambda_n (r_n + h_n)}.$$

Сравним термические сопротивления однослойных цилиндрической и плоской стенок одинаковой толщины h с одинаковыми коэффициентами теплопроводности $\lambda = \text{const}$ при условии $S_0 = S$, записав с учетом (3.21)

$$y = \frac{\lambda S}{h} \widehat{R}_T = \frac{\lambda S}{h} \frac{r_1}{\lambda S} \ln\left(1 + \frac{h}{r_1}\right) = \frac{1}{\xi} \ln(1 + \xi),$$

где $\xi = h/r_1$. На рис. 3.14 показана зависимость y от ξ , которая характеризует погрешность, возникающую при представлении цилиндрической стенки более простой расчетной схемой плоской стенки.

Один из распространенных в природе и технике видов теплового взаимодействия тела с окружающей средой состоит в теплообмене между ними

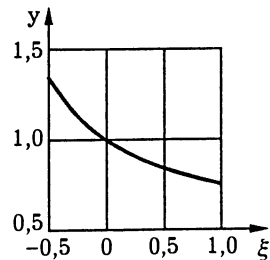


Рис. 3.14

при движении среды относительно тела. Такой вид взаимодействия носит название *конвективного теплообмена**. Для него считают справедливым зависимость

$$Q = \alpha(T_c - T)S, \quad (3.22)$$

где T_c — температура среды, S — площадь поверхности тела, α — коэффициент теплоотдачи (коэффициент конвективного теплообмена), измеряемый в $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$. Эту зависимость обычно называют законом Ньютона для теплоотдачи. Из (3.22) следует, что величину $R_T^{(\alpha)} = \frac{1}{\alpha S} = \frac{T_c - T}{Q}$ можно рассматривать как термическое сопротивление, которое преодолевает тепловой поток при переносе тепловой энергии от среды к телу (или от тела к среде при $T_c < T$).

Пример 3.1. Пусть криволинейная поверхность с главными радиусами кривизны r_1' r_1'' покрыта слоем теплоизоляционного материала толщиной h (см. рис. 3.13). Примем коэффициент λ теплопроводности теплоизоляционного материала постоянным и, положив в (3.20) $N = 1$, запишем суммарное термическое сопротивление между этой поверхностью площадью S_0 и окружающей средой, с которой происходит конвективный теплообмен на внешней поверхности слоя теплоизоляции при $z = h$:

$$R^\Sigma = R_T + R_T^{(\alpha)} = \frac{r_1' r_1''}{\lambda(r_1' - r_1'')S_0} \ln \frac{1 + h/r_1''}{1 + h/r_1'} + \frac{1/(\alpha S_0)}{(1 + h/r_1')(1 + h/r_1'')}.$$

В отличие от плоской поверхности, для которой с увеличением h линейно возрастает суммарное термическое сопротивление, в случае криволинейной поверхности зависимость R^Σ от h может быть немонотонной. Для исследования этой зависимости вычислим производную

$$\frac{dR^\Sigma}{dh} = \frac{r_1' r_1''}{\lambda S_0 (h + r_1'')(h + r_1')} - \frac{(2h + r_1' + r_1'')r_1' r_1''}{\alpha S_0 (h + r_1')^2 (h + r_1'')^2}.$$

*См.: Теория тепломассообмена.

В соответствии с необходимым условием экстремума функции $R^\Sigma(h)$ приравняем эту производную нулю и получим равенство

$$\frac{\alpha}{\lambda} = \frac{1}{h + r'_1} + \frac{1}{h + r''_1}. \quad (3.23)$$

Так как по смыслу $h > 0$ и $\alpha/\lambda > 0$, то равенство (3.23) можно удовлетворить лишь при условии $0 < \alpha/\lambda < 1/r'_1 + 1/r''_1$. Тогда получим квадратное уравнение с неотрицательным решением

$$h_* = \frac{\lambda}{\alpha} - \frac{r'_1 + r''_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2 + \frac{(r'_1 - r''_1)^2}{4}}.$$

Если $\frac{\alpha}{\lambda} < \frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r''_1}$, то значение $\frac{dR^\Sigma}{dh}$ при $h = 0$ отрицательно. Следовательно, значение h_* , называемое критической толщиной слоя теплоизоляционного материала, соответствует минимуму суммарного термического сопротивления. При этом возникает парадоксальная ситуация: увеличение h в интервале $(0, h_*)$ не увеличивает, а, наоборот, снижает термическое сопротивление, что приводит к лишним затратам теплоизоляционного материала и увеличению массы всей конструкции. Избежать такой ситуации можно, если выбрать теплоизоляционный материал с таким значением λ , чтобы было выполнено неравенство $\frac{\alpha}{\lambda} \geq \frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r''_1}$. #

Отметим, что РС, представленную на рис. 3.13, можно использовать для построения одномерной *нелинейной математической модели* (ММ) процесса стационарной теплопроводности в однородном теле с криволинейной поверхностью, коэффициент теплопроводности $\lambda(T)$ которого зависит от температуры. В этом случае, согласно закону теплопроводности, запишем $Q = -\lambda(T)S(z)\frac{dT(z)}{dz} = \text{const}$ и после разделения переменных и интегрирования получим

$$Q \int_0^h \frac{dz}{S(z)} = - \int_{T_1}^{T_2} \lambda(T) dT.$$

Отсюда вместо (3.19) найдем термическое сопротивление

$$R_{\tau} = \frac{T_1 - T_2}{Q} = (T_1 - T_2) \frac{\int_0^h \frac{dz}{S(z)}}{\int_{T_2}^{T_1} \lambda(T) dT}.$$

Термическое сопротивление деталей и конструкций более сложной конфигурации можно найти из решения задачи стационарной теплопроводности [XII], [XIII]. Для приближенных двусторонних оценок (снизу и сверху по отношению к истинному значению термического сопротивления) целесообразно использовать двойственную вариационную формулировку этой задачи [XV].

Если некоторая деталь или конструкция выполнены из материала с высокой теплопроводностью, то их температура достаточно быстро выравнивается во всех направлениях и ее можно приближенно считать не зависящей от пространственных координат. В этом случае тепловое состояние детали или конструкции в любой текущий момент времени t допустимо характеризовать лишь одним значением температуры T , однородным по занимаемому ими объему V . Такое приближение соответствует РС высокотеплопроводного тела с однородной по его объему температурой и измеряемой в джоулях (Дж) тепловой энергией

$$U = \int_V dV(M) \int_0^T c(T, M) dT, \quad (3.24)$$

где $c(T, M)$ — удельная объемная теплоемкость материала (единица измерения $\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}}$), зависящая в общем случае от температуры T и координат точки $M \in V$ (когда конструкция выполнена из различных материалов).

При изменении температуры T во времени тепловая энергия тела постоянной конфигурации изменяется со скоростью

$$\frac{dU}{dt} = \left(\int_V c(T, M) dV \right) \frac{dT}{dt}. \quad (3.25)$$

Это равенство получено дифференцированием внутреннего интеграла в (3.24) по переменному верхнему пределу T , зависящему, в свою очередь, от времени t . Из закона сохранения энергии следует, что тепловая энергия тела может изменяться лишь за счет подвода к телу энергии или ее отвода от него. Если подвод или отвод энергии происходит путем теплового взаимодействия тела с окружающей средой, то интенсивность этого взаимодействия можно характеризовать тепловым потоком Q , который примем положительным в случае подвода тепловой энергии к поверхности тела. Тогда будем иметь $\frac{dU}{dt} = Q$, или, учитывая (3.25),

$$C_T \frac{dT}{dt} = Q(t), \quad C_T = \int_V c(T, M) dV, \quad (3.26)$$

что аналогично зависимости (3.3) для электрического конденсатора. Величину C_T , аналогичную емкости C конденсатора, называют *полной теплоемкостью* тела (единица измерения Дж/К).

Аналогия между термическим и электрическим сопротивлениями, а также между полной теплоемкостью и электрической емкостью позволяет РС процесса конвективного теплообмена тела, имеющего полную теплоемкость C_T , и среды с температурой T_c (рис. 3.15, а), представить в виде электрической цепи, состоящей из источника разности потенциалов ΔU , пропорциональной разности $T_c - T_0$ температуры среды и начальной температуры тела, резистора сопротивлением R и конденсатора емкостью C (рис. 3.15, б). Аналогичными будут и ММ, описывающие процессы в рассматриваемой тепловой системе и

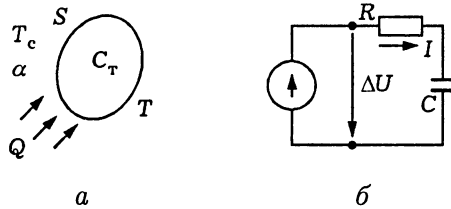


Рис. 3.15

в электрической цепи, причем тепловой поток Q в тепловой системе будет пропорционален силе I тока в электрической цепи.

Для построения ММ рассматриваемой тепловой системы подставим (3.22) в (3.26) и получим ОДУ первого порядка

$$C_T \frac{dT}{dt} = \alpha(T_c - T)S.$$

При постоянных значениях C_T , α , T_c и известной температуре T_0 тела в момент времени $t = 0$, принимаемый за начальный, это ОДУ имеет решение в виде

$$\frac{T_c - T(t)}{T_c - T_0} = \exp\left(-\frac{\alpha St}{C_T}\right) = \exp\left(-\frac{t}{R_T^{(\alpha)} C_T}\right).$$

С течением времени температура тела стремится к температуре окружающей среды. С точностью до 1% от значения $T_c - T_0$ процесс выравнивания этих температур можно считать завершенным при условии $\exp(-\alpha St/C_T) \leq 0,01$, или

$$t \geq \frac{C_T}{\alpha S} \ln 100 \approx 4,6 \frac{C_T}{\alpha S} = 4,6 R_T^{(\alpha)} C_T.$$

Установленную выше аналогию между ММ элементов тепловых систем и *электрических двухполюсников* принято называть *электротепловой*. Эта аналогия позволяет для сложной тепловой системы построить *эквивалентную схему* в виде электрической цепи, состоящей из таких двухполюсников, а затем использовать хорошо разработанные и формализованные при-

емы получения ММ электрических цепей для построения ММ рассматриваемой тепловой системы.

Замечание 3.2. Используемый при получении (3.18) эмпирический закон теплопроводности в виде $\mathbf{q} = -\lambda \text{grad}T$ предполагает, что в ответ на появление в материале с коэффициентом теплопроводности λ градиента $\text{grad}T$ температуры мгновенно возникает тепловой поток с вектором плотности \mathbf{q} . Это равносильно предположению, что скорость распространения тепловой энергии в материале бесконечно велика. На самом деле в реальном материале неизбежно некоторое запаздывание возникновения теплового потока по отношению к появлению градиента температуры (т.е. разности температур в окрестности некоторой точки). Величина такого запаздывания зависит от микромеханизма передачи тепловой энергии в материале и связана со временем обмена энергией между отдельными элементами микроструктуры материала (например, в металлах это время обмена между электронным газом и ионами в узлах кристаллической решетки, имеющее порядок 10^{-10} с). Время τ запаздывания возрастает по мере уменьшения удельной объемной теплоемкости и плотности теплопроводящей среды. В случае высокоинтенсивных и быстро протекающих процессов переноса тепловой энергии указанный эффект запаздывания играет заметную роль и его можно учесть при помощи модифицированного закона теплопроводности*. Здесь отметим лишь то, что этот эффект аналогичен влиянию индуктивности в электрической цепи (см. 3.1).

3.4. Модели элементов гидравлических систем

Перейдем к рассмотрению простейших типовых элементов, характерных для технических систем, в которых происходит перемещение несжимаемой жидкости. Такие системы принято

* См.: Лыков А.В.

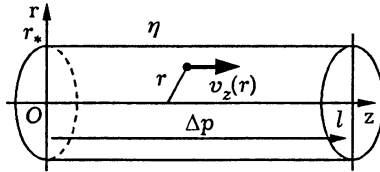


Рис. 3.16

называть гидравлическими. Разности электрических потенциалов (напряжений) и силе тока в гидравлической системе соответствуют разность (перепад) Δp давлений и объемный расход $Q_{\text{ж}}$ жидкости, измеряемые в Па (паскалях) и $\text{м}^3/\text{с}$ соответственно.

Из курса физики известно, что для участка достаточно длинного трубопровода с круглым поперечным сечением радиуса r_* при установившемся ламинарном течении вязкой жидкости справедлива следующая зависимость скорости v_z вдоль оси трубопровода от радиальной координаты r :

$$v_z(r) = \frac{r_*^2 - r^2}{4\eta l} \Delta p, \quad (3.27)$$

где $\eta > 0$ — коэффициент сдвиговой вязкости жидкости, измеряемый в $\text{Па} \cdot \text{с}$, $\Delta p = p_1 - p_2 > 0$ — перепад давления, происходящий на участок трубопровода длиной l (рис. 3.16). Эту зависимость можно получить, решая уравнение Навье — Стокса (см. Д.3.2). Учитывая (3.27), вычисляем объемный расход

$$Q_{\text{ж}} = \int_0^{r_*} 2\pi r v_z(r) dr = \frac{\pi \Delta p}{2\eta l} \int_0^{r_*} r(r_*^2 - r^2) dr = \frac{\pi r_*^4}{8\eta l} \Delta p \quad (3.28)$$

жидкости через трубопровод. Зависимость (3.28) установлена экспериментально Ж.Л.М. Пуазейлем* при изучении кровообращения. Величину $R_{\Gamma} = 8\eta l / (\pi r_*^4)$ можно рассматривать

*Ж.Л.М. Пуазейль (1799–1869) — французский врач и физик.

как *гидравлическое сопротивление* участка трубопровода длиной l и записать

$$\Delta p = Q_{\text{ж}} R_{\Gamma}, \quad (3.29)$$

что аналогично закону Ома в виде (3.1).

Если поперечное сечение трубопровода не является круглым, то выражение для R_{Γ} в (3.29) будет зависеть от формы этого сечения (см. Д.3.2). При увеличении объемного расхода жидкости через трубопровод растет ее скорость и ламинарный режим течения переходит в турбулентный, а R_{Γ} становится функцией $Q_{\text{ж}}$, т.е. *математическая модель* (ММ) установившегося течения в трубопроводе оказывается нелинейной.

Рассмотрим цилиндрический сосуд с вертикально расположенной образующей и поперечным сечением площадью S , заполняемый (или опорожняемый) через трубопровод, присоединенный к этому сосуду (рис. 3.17). Скорость v течения жидкости в трубопроводе будем считать достаточно малой по модулю, так что динамическим

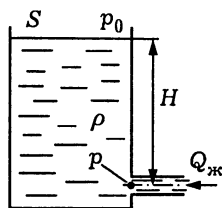


Рис. 3.17

давлением $\rho v^2/2$, где ρ — плотность жидкости, можно пренебречь по сравнению со статическим давлением p на входе трубопровода в сосуд. Это давление равно $p = p_0 + \rho g H$, где p_0 — давление над зеркалом жидкости (для сосуда, сообщающегося с атмосферой, оно равно атмосферному давлению), $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения, H — высота уровня жидкости в сосуде. Изменения во времени t уровня жидкости и разности $\Delta p = p - p_0$ давлений связаны между собой зависимостью $\frac{d\Delta p}{dt} = \rho g \frac{dH}{dt}$. Тогда для объемного расхода жидкости через трубопровод, положительного при заполнении сосуда, можно записать

$$Q_{\text{ж}} = S \frac{dH}{dt} = \frac{S}{\rho g} \frac{d\Delta p}{dt} = C_{\Gamma} \frac{d\Delta p}{dt}, \quad (3.30)$$

где $C_r = \frac{S}{\rho g}$ — величина, аналогичная емкости C электрического конденсатора в (3.3). Таким образом, аналогом конденсатора для гидравлической системы будет сосуд с жидкостью, подводимой или отводимой через трубопровод, присоединенный к дну сосуда.

Элементом гидравлической системы, аналогичным идеализированной (без сопротивления) индуктивной катушке, является участок горизонтального цилиндрического трубопровода длиной l , по которому течет с переменным во времени объемным расходом $Q_{\text{ж}}(t)$ идеальная (невязкая) несжимаемая жидкость плотностью ρ (рис. 3.18). Пусть S — площадь поперечного сечения трубопровода. Тогда в момент времени t на рассматриваемом участке трубопровода будет находиться масса $m_{\text{ж}} = \rho S l$ жидкости, движущаяся со скоростью $v(t) = Q_{\text{ж}}(t)/S$. При переменном объемном расходе за счет ускорения этой массы возникнет сила инерции $F = m_{\text{ж}} \frac{dv(t)}{dt} = \rho l \frac{dQ_{\text{ж}}(t)}{dt}$. Так как жидкость идеальная, то гидравлическое сопротивление при ее течении отсутствует и сила инерции уравновешена лишь разностью $(p_1 - p_2)S$ сил давления в поперечных сечениях трубопровода. Следовательно, имеем

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{F}{S} = \frac{\rho l}{S} \frac{dQ_{\text{ж}}}{dt} = L_r \frac{dQ_{\text{ж}}}{dt}, \quad (3.31)$$

где $L_r = \rho l/S$ — величина, которую можно назвать гидравлической индуктивностью участка трубопровода. Она аналогична индуктивности L катушки в (3.4).

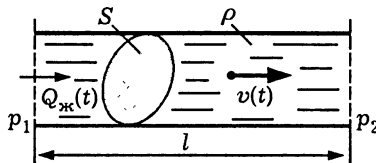


Рис. 3.18

Итак, в гидравлических системах можно выделить простейшие элементы, ММ которых с точностью до обозначений совпадают с ММ идеализированных *электрических двухполюсников*: резистора, конденсатора без потерь заряда и индуктивной катушки без сопротивления. Как и в случае реальных электрических элементов (см. 3.1), комбинируя ММ идеализированных элементов гидравлических систем, можно учесть, например, влияние вязкости жидкости.

При течении по трубопроводу вязкой жидкости неизбежно возникает гидравлическое сопротивление, влияние которого при ее переменном объемном расходе можно учесть аналогично учету электрического сопротивления индуктивной катушки (см. пример 3.7). *Расчетную схему* участка трубопровода длиной l с круглым поперечным сечением радиуса r_* (см. рис. 3.16) представим последовательно соединенными гидравлическим сопротивлением $R_\Gamma = \frac{8\eta l}{\pi r_*^4}$ и гидравлической индуктивностью $L_\Gamma = \rho l/S$ (рис. 3.19). Тогда, учитывая (3.29) и (3.31), получаем ОДУ первого порядка

$$L_\Gamma \frac{dQ_{ж}(t)}{dt} + R_\Gamma Q_{ж}(t) = \Delta p.$$

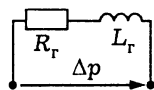


Рис. 3.19

Решение этого ОДУ с правой частью, постоянной и изменяющейся во времени по синусоидальному закону, рассмотрено в примере 3.7.

Аналогию между ММ типовых элементов гидравлической системы и электрических двухполюсников называют *электрогидравлической*. Она дает возможность в случае сложной гидравлической системы построить ее *эквивалентную схему* в виде электрической цепи, объединяющей такие двухполюсники. Это позволяет для получения ММ гидравлической системы применить детально разработанные и формализованные приемы построения ММ электрических цепей (см. 4.4 и 4.5).

Замечание 3.3. Рассмотренные ММ некоторых простейших элементов гидравлических систем являются (как и в 3.1) *квазистационарными математическими моделями*, поскольку

при их построении неявно предполагалось, что возмущения, вызванные изменением давления или объемного расхода жидкости в трубопроводе, распространяются вдоль трубопровода мгновенно. В действительности реальные жидкости обладают некоторой сжимаемостью. Это приводит к тому, что возмущения распространяются с довольно большой, но конечной скоростью a , называемой скоростью звука в жидкости. Если при длине l трубопровода наименьшая длительность t_{\min} протекающих в нем процессов удовлетворяет условию $t_{\min} \gg l/a$, то применение квазистационарных ММ не приводит к большим погрешностям. Но при нарушении этого условия такие ММ становятся неадекватными реальному элементу. Например, они не применимы при моделировании процесса перекрытия трубопровода задвижкой за время одного порядка со значением l/a , когда объемный расход жидкости быстро падает до нуля, что приводит к значительному повышению давления (так называемый *гидравлический удар*). Этот эффект удастся учесть, если от ММ трубопровода с сосредоточенными параметрами (*математической модели макроуровня*) перейти к его *математической модели микроуровня* (см. 6.4).

Дополнение 3.1. Особенности пневматических систем

В широком смысле слова под пневматическими понимают технические системы, в которых рабочей средой является воздух или газ. Основное отличие пневматической системы от гидравлической состоит в том, что рабочая среда является сжимаемой, т.е. ее плотность ρ существенно зависит от давления p . Газ называют *совершенным*, если для него справедливо *уравнение Клапейрона — Менделеева**

$$p = \rho RT, \quad (3.32)$$

*Б.П.Э. Клапейрон (1799–1864) — французский физик и инженер; Д.И. Менделеев (1834–1907) — русский химик.

где T — температура газа, а R — удельная газовая постоянная для данного газа, измеряемая в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$.

В пневматической системе, как и в гидравлической, величиной, имеющей смысл потенциала, является разность (перепад) Δp давлений. Однако в качестве величины, характеризующей перенос рабочей среды, вместо объемного расхода удобнее рассматривать расход \dot{m} массы газа, измеряемый в кг/с. Рассмотрим простейшие элементы пневматических систем и сравним их *математические модели* (ММ) с аналогичными ММ элементов гидравлических систем (см. 3.4).

Пусть в сосуде с фиксированным объемом V находится газ, имеющий температуру T и давление p . Если этот газ допустимо считать совершенным, то его плотность в соответствии с (3.32) равна $\rho = \frac{p}{RT}$, а масса $m = \rho V = \frac{pV}{RT}$. Предположим, что масса газа в сосуде изменяется во времени t путем закачки или выпуска газа при условии $T = T_0 = \text{const}$. Тогда получим соотношение

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \frac{V}{RT_0} \frac{dp}{dt} = \frac{m_0}{p_0} \frac{dp}{dt} = C_{\text{п}} \frac{dp}{dt}, \quad (3.33)$$

аналогичное (3.3) для электрического конденсатора, причем величину $C_{\text{п}} = \frac{V}{RT_0} = \frac{m_0}{p_0}$, где m_0 и p_0 — масса и давление газа в сосуде перед началом процесса его закачки или выпуска, можно считать аналогом емкости C конденсатора или величины $C_{\text{г}}$ в уравнении (3.30) для сосуда с несжимаемой жидкостью.

Условие $T = T_0 = \text{const}$ соответствует изотермическому процессу закачки или выпуска газа, и оно выполнимо лишь при весьма интенсивном теплообмене газа со стенками сосуда, которые поддерживаются при этой постоянной температуре T_0 , т.е. при бесконечно большой величине *коэффициента теплоотдачи* α . При конечном значении α в соответствии с законом сохранения энергии (первым законом термодинамики*) для еди-

* См.: Кириллин В.А., Сычев В.В., Шейндлин А.Е.

ницы массы (1 кг) газа в случае выпуска его из сосуда запишем

$$c_v dT + p dv = \alpha(T_0 - T) \frac{S}{m} dt, \quad (3.34)$$

где $c_v > 0$ — изохорная теплоемкость (или теплоемкость при постоянном объеме) газа, измеряемая в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, $v = 1/\rho$ — удельный объем газа, S — площадь поверхности стенок, контактирующих с газом. Первое слагаемое в левой части (3.34) характеризует изменение массовой плотности внутренней энергии совершенного газа при изменении его температуры, а второе — работу, совершаемую 1 кг газа при его расширении ($dv > 0$) в процессе выпуска. Правая часть (3.34) равна тепловой энергии, передаваемой 1 кг газа от стенок сосуда за промежуток времени dt .

В сосуде объемом V масса газа равна $m = \rho V = V/v$. Отсюда находим $v = V/m$, $dv = -\frac{V}{m^2} dm$ и после подстановки в (3.34) с учетом (3.32) получаем

$$c_v \frac{dT}{dt} = \rho RT \frac{V}{m^2} \frac{dm}{dt} + \alpha S \frac{T_0 - T}{m} = \frac{RT}{m} \dot{m} + \alpha S \frac{T_0 - T}{m}. \quad (3.35)$$

Если $\dot{m} = \dot{m}_0 = \text{const} < 0$, то $m = m_0 + \dot{m}_0 t$, где m_0 — масса газа в сосуде перед началом его выпуска в момент времени $t = 0$, и в полученном ОДУ можно разделить переменные:

$$\frac{dT}{\beta T_0 - T} = \frac{\varkappa dt}{m_0 + \dot{m}_0 t}, \quad \beta = \frac{\alpha S}{\alpha S - R\dot{m}_0}, \quad \varkappa = \frac{\alpha S - R\dot{m}_0}{c_v}.$$

Полагая $T = T_0$ при $t = 0$, после интегрирования находим

$$\frac{T}{T_0} = \beta + (1 - \beta) \left(1 + \frac{\dot{m}_0 t}{m_0}\right)^{-\varkappa/\dot{m}_0} = \beta + (1 - \beta) \left(\frac{m}{m_0}\right)^{-\varkappa/\dot{m}_0}. \quad (3.36)$$

Используя (3.32) при $t = 0$ и $t > 0$, имеем

$$\frac{T}{T_0} = \frac{p/(\rho R)}{p_0/(\rho_0 R)} = \frac{p/(\rho V)}{p_0/(\rho_0 V)} = \frac{p/m}{p_0/m_0} = \frac{p}{p_0} \left(1 + \frac{\dot{m}_0 t}{m_0}\right)^{-1}$$

и после подстановки в (3.36) получаем

$$\frac{p}{p_0} = \beta \left(1 + \frac{\dot{m}_0 t}{m_0}\right) + (1 - \beta) \left(1 + \frac{\dot{m}_0 t}{m_0}\right)^{1 - \kappa/\dot{m}_0}. \quad (3.37)$$

При адиабатическом процессе выпуска газа из сосуда, когда $\alpha = 0$, т.е. теплообмен газа со стенками отсутствует, $\beta = 0$, $\kappa = -R\dot{m}_0/c_v$, и мы из (3.36) и (3.37) находим

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{m}{m_0}\right)^{R/c_v}, \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{m}{m_0}\right)^\gamma, \quad (3.38)$$

где $\gamma = 1 + R/c_v$ — показатель адиабатического процесса. Для совершенного газа с двухатомными молекулами $\gamma \approx 1,40$, а если молекулы состоят из трех и более атомов, то* $\gamma \approx 1,29$. Инертные газы имеют одноатомные молекулы, и для них $\gamma \approx 1,67$, а для воздуха, если считать его совершенным газом, можно принять $\gamma \approx 1,40$. Так как $m = V/v$, то из второго равенства (3.38) следует известное соотношение $pv^\gamma = \text{const}$, называемое уравнением адиабаты Пуассона.

Записав второе равенство (3.38) в виде $m = m_0(p/p_0)^{1/\gamma}$ и продифференцировав по времени t , получим

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \frac{m_0}{\gamma p_0^{1/\gamma}} p^{1/\gamma - 1} \frac{dp}{dt} = \frac{m_0}{\gamma p_0} \left(\frac{p_0}{p}\right)^{1 - 1/\gamma} \frac{dp}{dt} = C_p(p) \frac{dp}{dt}.$$

Величина $C_p(p) = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{1 - 1/\gamma} \frac{m_0}{\gamma p_0}$, являющаяся аналогом емкости конденсатора в (3.3), в данном случае зависит от давления p , т.е. рассматриваемая ММ нелинейна в отличие от линейной ММ (3.33) изотермического процесса.

При закачке газа в сосуд в правой части (3.34) необходимо учесть подводимую вместе с газом тепловую энергию:

$$c_v dT + p dv = \alpha(T_0 - T) \frac{S}{m} dt + \frac{c_v}{m} (T_1 - T) dm,$$

* См.: Кириллин В.А., Сычев В.В., Шейндлин А.Е.

где T_1 — температура подводимого к сосуду газа. Преобразуя это равенство аналогично (3.34), получаем

$$c_v \frac{dT}{dt} = \frac{RT}{m} \dot{m} + \alpha S \frac{T_0 - T}{m} + c_v \frac{T_1 - T}{m} \dot{m}. \quad (3.39)$$

Если $\dot{m} = \dot{m}_0 = \text{const} > 0$, то в полученном ОДУ, как и в (3.35), можно разделить переменные:

$$\frac{dT}{\tilde{T} - T} = \frac{\tilde{\kappa} dt}{m_0 + \dot{m}_0 t}, \quad \tilde{T} = \frac{\alpha S T_0 + c_v \dot{m}_0 T_1}{\alpha S + (c_v - R) \dot{m}_0}, \quad \tilde{\kappa} = \frac{\alpha S + (c_v - R) \dot{m}_0}{c_v}.$$

После интегрирования и нахождения произвольной постоянной из условия $T = T_0$ при $t = 0$ имеем

$$T = \tilde{T} + (T_0 - \tilde{T}) \left(1 + \frac{\dot{m}_0 t}{m_0}\right)^{\tilde{\kappa}/\dot{m}_0}. \quad (3.40)$$

Отсюда при помощи (3.32) аналогично переходу от (3.36) к (3.37) можно перейти к зависимости давления p в сосуде от времени.

Отметим, что при получении (3.36) и (3.40) было принято $\alpha = \text{const}$. В действительности коэффициент теплоотдачи зависит как от давления газа, так и от его температуры*. Кроме того, расход \dot{m} газа при его закачке в сосуд и выпуске из него может изменяться во времени t . Все это приводит к тому, что в общем случае не удастся получить точные аналитические решения ОДУ (3.35) и (3.39) и их приходится решать численными методами [VIII], [XIII].

С увеличением давления p ММ совершенного газа в виде соотношения (3.32) становится неадекватной реальному газу. Дело в том, что эта ММ не учитывает объема, занимаемого молекулами газа, и притяжения между ними. Влияние указанных факторов отражает, например, уравнение состояния реального газа

$$p + \frac{a}{v^2} = \frac{RT}{v - b}, \quad \text{или} \quad p = \frac{\rho RT}{1 - b\rho} - a\rho^2, \quad (3.41)$$

*См.: Теория тепломассообмена.

предложенное в 1873 году Я.Д. Ван-дер-Ваальсом*¹. При постоянной температуре и $p \rightarrow \infty$ из (3.41) следует, что $\rho \rightarrow 1/b$, т.е. b можно интерпретировать как объем, занимаемый собственно молекулами 1 кг реального газа. Второй член в правой части (3.41), содержащий параметр a , учитывает влияние притяжения между молекулами такого газа. Существуют и другие варианты уравнений состояния реального газа*².

Ясно, что использование (3.41) вместо (3.32) приведет к существенному усложнению ММ процессов закачки газа в сосуд и выпуска его из сосуда. Количественный анализ таких ММ удается провести лишь при помощи численных методов.

Перейдем к рассмотрению процесса течения газа по трубопроводу. При установившемся ламинарном течении по трубопроводу вязкого газа с постоянным расходом \dot{m} линейное соотношение

$$\Delta p = \dot{m} R_{\Pi}, \quad R_{\Pi} = \text{const}, \quad (3.42)$$

аналогичное закону Ома в виде (3.1), можно считать справедливым лишь при условии, что изменение давления по длине l трубопровода вызывает пренебрежимо малое изменение плотности ρ газа. В этом случае допустимо принять $\rho = \text{const}$, что означает постоянство объемного расхода газа $Q = \dot{m}/\rho$. Если трубопровод имеет круглое поперечное сечение радиуса r_* , то можно использовать выражение $R_{\Gamma} = \frac{8\eta l}{\pi r_*^4}$ для гидравлического сопротивления при ламинарном течении вязкой несжимаемой жидкости (см. 3.4). В итоге для коэффициента R_{Π} в (3.42) получим $R_{\Pi} = \frac{R_{\Gamma}}{\rho} = \frac{8\eta l}{\pi r_*^4 \rho}$.

В достаточно длинном трубопроводе изменение давления газа может оказаться существенным, что вызовет заметное изменение плотности газа. В результате при постоянном расходе \dot{m} массы газа его объемный расход по длине трубопровода будет переменным. В этом случае длинный трубопровод можно

*¹ Я.Д. Ван-дер-Ваальс (1837–1923) — голландский физик.

*² См.: Физические величины.

условно разбить на ряд более коротких участков так, чтобы в пределах каждого из них плотность газа было бы допустимо считать постоянной. При этом следует учитывать, что плотность газа в соответствии с уравнением состояния вида (3.32) или (3.34) является функцией не только давления, но и температуры газа, изменяющейся по длине трубопровода в зависимости от характера протекающего в газе термодинамического процесса и теплового взаимодействия газа со стенками трубопровода. Как и в случае несжимаемой жидкости, при турбулентном режиме течения газа зависимость сопротивления трубопровода от расхода газа становится нелинейной.

Если для идеального (невязкого) газа, движущегося с изменяющейся во времени t скоростью $v(t)$, пренебречь изменением его плотности ρ по длине l участка трубопровода с поперечным сечением площадью S , то в соответствии со вторым законом Ньютона $S\Delta p = \rho S l \frac{dv(t)}{dt}$, или $\Delta p = L_{\pi} \frac{d\dot{m}}{dt}$, где $L_{\pi} = l/S$ — величина, аналогичная индуктивности катушки в (3.4). Учет изменения плотности по длине трубопровода приведет к более сложной зависимости перепада Δp давления от скорости изменения расхода \dot{m} газа.

Дополнение 3.2. Ламинарное течение вязкой жидкости в трубопроводе

Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе с произвольным поперечным сечением площадью S . Примем, что течение является установившимся, т.е. не зависит от времени, а частицы жидкости движутся по прямолинейным траекториям, параллельным образующей трубы (это соответствует ламинарному режиму течения). Ось Oz прямоугольной декартовой системы координат $Oxuz$ направим вдоль образующей по течению жидкости. Тогда вектор $\mathbf{v} = (0 \ 0 \ v_z)^T$ скорости жидкости будет иметь лишь одну отличную от нуля составляющую v_z . Температуру жидкости считаем

постоянной (изотермическое течение), так что плотность ρ и коэффициент η сдвиговой вязкости жидкости постоянны. Пренебрежем влиянием объемных сил, в том числе влиянием сил тяжести.

Из уравнения неразрывности $\nabla \mathbf{v} = 0$ следует, что $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$, т.е. $v_z = v_z(x, y)$. Кроме того, из проекций на координатные оси уравнения Навье — Стокса имеем

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \eta \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Из первых двух равенств следует, что давление p зависит лишь от z , причем $\frac{\partial p}{\partial z} = \text{const}$, поскольку левая часть третьего равенства от z не зависит. Для участка трубы длиной l обозначим $\Delta p = p_1 - p_2$, где p_1 и p_2 — значения давлений жидкости на входе в этот участок и выходе из него. При установившемся течении сила $\Delta p S$ уравновешена силами вязкого трения жидкости о стенки трубы, поэтому $\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\Delta p}{l}$. В итоге для функции $v_z = v_z(x, y)$ получаем уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} = -\frac{\Delta p}{\eta l} \tag{3.43}$$

с граничным условием $v_z = 0$ на контуре поперечного сечения трубы в силу прилипания вязкой жидкости к стенкам.

Пример 3.2. Наиболее просто решить (3.43) в случае, когда жидкость протекает в плоской щели шириной $2h$. Такую щель можно считать предельным случаем трубы с прямоугольным поперечным сечением, длина одной из сторон которого равна $2h$, а длина второй стороны неограниченно увеличивается. Если ось Oy направить перпендикулярно стенкам щели, поместив начало системы координат $Oxuz$ в середине щели, то получим $\frac{\partial v_z}{\partial x} = 0$. Тогда искомой будет функция $v_z(y)$, удовлетворяющая ОДУ $\frac{d^2 v_z}{dy^2} = -\frac{\Delta p}{\eta l}$ второго порядка, которое следует

из (3.43). Решением этого ОДУ в случае граничных условий $v_z = 0$ при $y = \pm h$ является

$$v_z = \frac{\Delta p}{2\eta l}(h^2 - y^2).$$

Объемный расход жидкости через щель, приходящийся на единицу ее длины вдоль оси Ox , равен

$$Q_{\text{ж}} = \int_{-h}^h v_z dy = \frac{2\Delta p h^3}{3\eta l}. \quad (3.44)$$

Отсюда для гидравлического сопротивления такого участка щели получаем

$$R_{\text{г}} = \frac{\Delta p}{Q_{\text{ж}}} = \frac{3\eta l}{2h^3}.$$

Для средней скорости жидкости в щели имеем $\bar{v}_z = \frac{Q_{\text{ж}}}{2h} = \frac{\Delta p h^2}{3\eta l}$.

Пример 3.3. Пусть контуром поперечного сечения трубы является эллипс с уравнением $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$. Тогда граничному условию $v_z = 0$ на контуре будет удовлетворять функция

$$v_z = A \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right).$$

После ее подстановки в (3.43) получим

$$-2A \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = -\frac{\Delta p}{\eta l},$$

и, найдя коэффициент A , запишем

$$v_z = \frac{dp}{2\eta l} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right).$$

Объемный расход жидкости через трубу с эллиптическим поперечным сечением площадью S равен

$$Q_{\text{ж}} = \int_S v_z dx dy = \frac{dp}{2\eta l} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \int_S \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy.$$

Заменяя переменные интегрирования $x = a\tilde{x}$, $y = a\tilde{y}$ и $\tilde{r}^2 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2$, находим

$$Q_{\text{ж}} = \frac{\pi a^3 b^3 dp}{4\eta l(a^2 + b^2)} \quad (3.45)$$

и гидравлическое сопротивление трубы

$$R_{\text{г}} = \frac{\Delta p}{Q_{\text{ж}}} = \frac{4\eta l(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3}. \quad (3.46)$$

Так как в данном случае $S = \pi ab$, то средняя скорость жидкости равна

$$\bar{v}_z = \frac{Q_{\text{ж}}}{S} = \frac{\Delta p}{4\eta l \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)}.$$

В случае трубы с круглым поперечным сечением $a = b = r_*$, из (3.45) следует (3.28), а из (3.46) — полученное в 3.4 выражение $R_{\text{г}} = \frac{8\eta l}{\pi r_*^4}$, причем средняя скорость жидкости $\bar{v}_z = \frac{\Delta p r_*^2}{8\eta l}$. #

В технической литературе принято гидравлическое сопротивление трубопровода с круглым поперечным сечением радиуса r_* характеризовать коэффициентом $\lambda_{\text{г}}$, входящим в выражение

$$\Delta p = \lambda_{\text{г}} \frac{l}{2r_*} \rho \frac{\bar{v}_z^2}{2}. \quad (3.47)$$

Отсюда при $\bar{v}_z = \frac{\Delta p r_*^2}{8\eta l}$ получаем

$$\lambda_{\text{г}} = \frac{64}{\text{Re}}, \quad (3.48)$$

где $\text{Re} = 2\bar{v}_z r_* \rho / \eta$ — число Рейнольдса. Для оценки сопротивления цилиндрических труб с произвольным поперечным сечением площадью S используют (3.47) и (3.48), но вместо

диаметра $2r_*$ круглой трубы подставляют так называемый *гидравлический диаметр* $d_\Gamma = 4S/\Pi$, где Π — „смоченный“ жидкостью периметр контура поперечного сечения. Для круглой трубы гидравлический диаметр совпадает с диаметром ее поперечного сечения.

Однако такая оценка может оказаться слишком грубой. Например, подстановка в (3.47) и (3.48) вместо $2r_*$ гидравлического диаметра $d_\Gamma = 4 \cdot 2h/2 = 4h$ для плоской щели шириной $2h$ приводит с учетом равенств $\bar{v}_z = \frac{Q_{ж}}{2h}$ (см. пример 3.2) и $Re = \frac{\bar{v}_z d_\Gamma \rho}{\eta}$ к выражению

$$\Delta p = \frac{64}{Re} \frac{l}{d_\Gamma} \rho \frac{v_z^2}{2} = \frac{64\eta}{\bar{v}_z 4h\rho} \frac{l}{4h} \rho \frac{v_z^2}{2} = \frac{2\eta l}{h^2} v_z = \frac{2\eta l}{h^2} \frac{Q_{ж}}{2h} = \frac{\eta l}{h^3} Q_{ж},$$

что в 1,5 раза меньше значения Δp , которое следует из (3.44). Этот пример показывает, что гидравлическое сопротивление трубопровода при ламинарном течении надежнее находить путем непосредственного решения уравнения (3.43).

Двусторонние оценки гидравлического сопротивления можно получить при помощи двойственной вариационной задачи, соответствующей уравнению (3.43). Известно [XV], что его решение $v_z^*(x, y)$ минимизирует функционал

$$\begin{aligned} J[v_z] &= \int_S \left(\frac{(\nabla v_z)^2}{2} - \frac{\Delta p}{\eta l} v_z \right) dS = \\ &= \frac{1}{2} \int_S \left(\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right) dS - \frac{\Delta p}{\eta l} \int_S v_z dS \quad (3.49) \end{aligned}$$

на множестве функций $v_z = v_z(x, y)$, удовлетворяющих условию $v_z = 0$ на контуре Γ поперечного сечения цилиндрической трубы, непрерывных на $\bar{S} = S \cup \Gamma$ и имеющих кусочно непрерывные производные в S . Используя формулу Остроградского — Гаусса [VII], для минимального значения функционала $J[v_z]$

находим

$$\begin{aligned}
 J[v_z^*] &= \int_S \left(\frac{(\nabla v_z^*)^2}{2} - \frac{\Delta p}{\eta l} v_z^* \right) dS = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} v_z^* (\nabla v_z^*) \mathbf{n} d\Gamma - \\
 &- \int_S v_z^* \nabla^2 v_z^* dS - \frac{\Delta p}{\eta l} \int_S v_z^* dS = -\frac{\Delta p}{2\eta l} Q_{\text{ж}} = -\frac{(\Delta p)^2}{2\eta l R_r}, \quad (3.50)
 \end{aligned}$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к контуру Γ .

Рассмотрим непрерывно дифференцируемую в S векторную функцию $\mathbf{f}(x, y)$, удовлетворяющую уравнению

$$\nabla \mathbf{f}(x, y) = \frac{\Delta p}{l}, \quad (x, y) \in S. \quad (3.51)$$

На множестве таких функций функция $\mathbf{f}^* = -\eta \nabla v_z^*$ максимизирует функционал [XV]

$$I[\mathbf{f}] = - \int_S \frac{\mathbf{f}^2}{2\eta^2} dS, \quad (3.52)$$

причем его максимальное значение $J[\mathbf{f}^*]$ совпадает с $J[v_z^*]$, т.е. с учетом (3.50) имеем

$$I[\mathbf{f}] \leq I[\mathbf{f}^*] = -\frac{(\Delta p)^2}{2\eta l R_r} = J[v_z^*] \leq J[v_z]. \quad (3.53)$$

Таким образом, используя допустимые для функционалов $J[v_z]$ и $I[\mathbf{f}]$ функции $v_z(x, y)$ и $\mathbf{f}(x, y)$ соответственно, можно при помощи (3.53) получить двусторонние оценки истинного значения величины $\frac{(\Delta p)^2}{2\eta l R_r}$, включающей гидравлическое сопротивление R_r цилиндрической трубы с произвольным поперечным сечением площадью S .

Пример 3.4. Оценим гидравлическое сопротивление трубы, имеющей квадратное поперечное сечение площадью $S = 4a^2$. Начало системы координат Oxy поместим в центре квадрата

так, что уравнениями его сторон будут $x = \pm a$ и $y = \pm a$. Распределение скорости жидкости в таком сечении представим функцией $v_z = C(a^2 - x^2)(a^2 - y^2)$, $C = \text{const}$, удовлетворяющей граничному условию $v_z = 0$ на стенках трубы. Подставляя эту функцию в (3.49), получаем

$$J = \frac{C^2}{2} \int_{-a}^a \int_{-a}^a (4x^2(a^2 - y^2)^2 + 4y^2(a^2 - x^2)^2) dx dy - \\ - C \frac{\Delta p}{\eta l} \int_{-a}^a \int_{-a}^a (a^2 - x^2)(a^2 - y^2) dx dy = \frac{128}{45} C^2 a^8 - \frac{16}{9} C \frac{\Delta p}{\eta l} a^6.$$

Из необходимого условия $\frac{\partial J}{\partial C} = 0$ минимума функционала найдем коэффициент $C = \frac{5}{16} \frac{\Delta p}{\eta l}$, а затем вычислим значение $J = -\frac{5}{18} \left(\frac{a^2 \Delta p}{\eta l} \right)^2$.

В качестве функции, на которой допустимо рассматривать функционал (3.52), примем $f = \frac{\Delta p}{4l} \nabla(x^2 + y^2)$. Подставляя ее в (3.52), получаем

$$I = -\frac{1}{2\eta^2} \left(\frac{\Delta p}{4l} \right)^2 \int_{-a}^a \int_{-a}^a 4(x^2 + y^2) dx dy = -\frac{(a^2 \Delta p)^2}{3(\eta l)^2}.$$

Таким образом, с учетом (3.53) имеем

$$-\frac{(a^2 \Delta p)^2}{3(\eta l)^2} \leq -\frac{(\Delta p)^2}{2\eta l R_r} \leq -\frac{5(a^2 \Delta p)^2}{18(\eta l)^2},$$

или $1,5\eta l/a^4 \leq R_r \leq 1,8\eta l/a^4$.

Для трубы с прямоугольным поперечным сечением известно точное аналитическое решение уравнения (3.43) в виде ряда*,

*См.: Лойцянский Л.Г.

приводящее к зависимостям

$$Q_{ж} = \frac{a^4 \Delta p}{4\eta l} \kappa f(\kappa), \quad f(\kappa) = \frac{16}{3} - \frac{1024}{\pi^5 \kappa} \left(\operatorname{th} \frac{\pi \kappa}{2} + \frac{1}{3^3} \operatorname{th} \frac{3\pi \kappa}{2} + \dots \right),$$

где $\kappa \geq 1$ — отношение сторон прямоугольника, одна из которых имеет длину $2a$, а значения функции $f(\kappa)$ представлены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

κ	1	2	3	5	10	12	100	∞
$f(\kappa)$	2,253	3,664	4,203	4,665	5,000	5,059	5,299	5,333

Отсюда для квадратной трубы ($\kappa = 1$) получаем

$$R_{г} = \frac{dp}{Q_{ж}} = \frac{4\eta l}{a^4 \kappa f(\kappa)} = \frac{4\eta l}{a^4 \cdot 2,253} \approx 1,775 \frac{\eta l}{a^4},$$

что достаточно близко к полученной выше верхней оценке значения $R_{г}$.

Для квадратной трубы со стороной $2a$ гидравлический диаметр равен $d_{г} = 4S/\Pi = 4 \frac{4a^2}{8a} = 2a$. Тогда из (3.47) и (3.48) при $2r_* = d_{г}$ и $\bar{v}_z = Q_{ж}/S$ находим

$$\Delta p = \frac{64}{\operatorname{Re}} \frac{l}{d_{г}} \rho \frac{\bar{v}_z^2}{2} = \frac{32\eta l S}{Q_{ж} d_{г}^2 \rho} \rho \left(\frac{Q_{ж}}{S} \right)^2 = 2Q_{ж} \frac{\eta l}{a^4}$$

и $R_{г} = \Delta p/Q_{ж} = 2\eta l/a^4$, что примерно на 11% выше полученной верхней оценки для гидравлического сопротивления и почти на 13% выше значения $R_{г}$, которое следует из точного решения.

Дополнение 3.3. Об адекватности математических моделей типовых элементов

Простейшие типовые элементы, рассмотренные в предыдущих параграфах (см. 3.1–3.4), являются идеализированными по отношению к реальным элементам технических систем.

Поэтому применение *математических моделей* (ММ) макроуровня простейших типовых элементов для описания реальных систем вызывает неизбежные погрешности. При использовании ММ макроуровня конкретного типового элемента важно располагать хотя бы грубой оценкой возможной погрешности. Один из способов получения такой оценки связан с количественным анализом уточненной и более детальной ММ этого элемента, учитывающей свойства и эффекты, которые не были учтены при построении ММ макроуровня.

Одной из причин возникновения погрешностей при использовании ММ макроуровня является пренебрежение пространственным распределением параметров, характеризующих свойства типовых элементов и протекающие в них процессы (см. замечания 3.1–3.3). Даже основанная на законе Ома ММ макроуровня такого простого элемента, как резистор, для выявления ее *области адекватности* часто требует рассмотрения *математических моделей микроуровня* физических процессов в резисторе. Так, с увеличением *частоты колебаний* переменного тока, протекающего по проводнику, возрастает неравномерность распределения плотности электрического тока в поперечном сечении проводника. В проводнике с круглым поперечным сечением плотность тока возрастает с увеличением расстояния от оси (см. пример 6.2). Это равносильно уменьшению эффективной площади поперечного сечения и увеличению сопротивления проводника по сравнению с его сопротивлением при протекании постоянного тока. Такое явление носит название *поверхностного эффекта* или *скин-эффекта* (от английского слова skin — кожа, оболочка). Возникающее при этом переменное магнитное поле наводит в проводнике вихревые токи, что вызывает дополнительный нагрев проводника. Увеличение сопротивления проводника при высокой частоте переменного тока связано также и с излучением в окружающее пространство энергии электромагнитных волн*.

*См.: Атабеков Г.И.

Учет перечисленных эффектов возможен лишь на основе *расчетной схемы* (РС) резистора с распределенными параметрами. Все же в некоторых случаях удастся уточнить ММ элемента, усложняя ее, но оставаясь в рамках его РС с сосредоточенными параметрами.

Пример 3.5. Оценим погрешность ММ резистора, вызванную изменением его сопротивления R при изменении температуры T . Для этого рассмотрим совместно ММ резистора как *электрического двухполюсника* и ММ тепловой системы, в которой резистор является элементом, преобразующим электрическую энергию в тепловую. Пусть резистор имеет полную теплоемкость C_T и поверхность площадью S , участвующую в теплообмене с окружающей средой температурой T_0 (интенсивность теплообмена определим *коэффициентом теплоотдачи* α). Зависимость сопротивления резистора от температуры в линейном приближении представим в виде $R = R_0(1 + \beta(T - T_0))$, где R_0 — значение сопротивления резистора при температуре $T = T_0$, а $\beta > 0$ — температурный коэффициент сопротивления.

Если задана разность ΔU потенциалов на резисторе, то мощность тепловыделения в нем в соответствии с (3.2) будет равна

$$W = \frac{(\Delta U)^2}{R} = \frac{(\Delta U)^2}{R_0(1 + \beta(T - T_0))}.$$

При установившемся режиме теплообмена из равенства $W = \alpha(T - T_0)S$ можно получить квадратное уравнение

$$\beta(\Delta T)^2 + \Delta T - \frac{(\Delta U)^2}{R_0\alpha S} = 0$$

относительно разности температур $\Delta T = T - T_0$. По физическому смыслу $\Delta T > 0$, или $T > T_0$. Поэтому установившееся значение температуры резистора

$$\bar{T} = T_0 + \frac{1}{2\beta} \left(-1 + \sqrt{1 + 4\frac{\beta(\Delta U)^2}{R_0\alpha S}} \right), \quad (3.54)$$

а соответствующее значение его сопротивления

$$R(\Delta U) = \frac{R_0}{2} \left(\sqrt{1 + 4 \frac{\beta(\Delta U)^2}{R_0 \alpha S}} + 1 \right).$$

Таким образом, сопротивление резистора в рассматриваемом случае зависит от ΔU . Это означает, что зависимость от ΔU силы I электрического тока, проходящего через резистор, нелинейна: $I = \frac{\Delta U}{R(\Delta U)}$.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ приложения постоянной разности ΔU потенциалов температура резистора равна T_0 . Изменение температуры T резистора во времени описывает ОДУ

$$C_T \frac{dT}{dt} + \alpha(T - T_0)S = \frac{(\Delta U)^2}{R_0(1 + \beta(T - T_0))}$$

первого порядка, которое можно записать в виде ОДУ с разделяющимися переменными

$$\frac{C_T}{\alpha S} \frac{d\Delta T}{dt} = \frac{(\Delta U)^2}{R_0 \alpha S} - \frac{(1 + \beta \Delta T)\Delta T}{1 + \beta \Delta T},$$

или с учетом (3.54)

$$\frac{(1/\beta + \Delta T) d(\Delta T)}{(\Delta \bar{T} - \Delta T)(\Delta \bar{T} + 1/\beta + \Delta T)} = \frac{\alpha S}{C_T} dt,$$

где $\Delta \bar{T} = \bar{T} - T_0$. Отсюда, используя начальное условие $\Delta T = 0$ при $t = 0$, находим

$$\frac{\Delta \bar{T} - \Delta T}{\Delta \bar{T}} \left(\frac{1 + \beta(\Delta \bar{T} + \Delta T)}{1 + \beta \Delta \bar{T}} \right)^{\frac{\beta \Delta \bar{T}}{1 + \beta \Delta \bar{T}}} = \exp \left(- \frac{1 + 2\beta \Delta \bar{T}}{1 + \beta \Delta \bar{T}} \frac{\alpha S t}{C_T} \right).$$

Полученная зависимость позволяет оценить промежуток t_* времени, после истечения которого температуру резистора

можно с относительной погрешностью δ считать установившейся, т.е. $\frac{\Delta\bar{T} - \Delta T}{\Delta\bar{T}} \leq \delta$:

$$t_* = \frac{1 + \beta\Delta\bar{T}}{1 + 2\beta\Delta\bar{T}} \frac{C_T}{\alpha S} \left(\ln \frac{1}{\delta} - \frac{\beta\Delta\bar{T}}{1 + \beta\Delta\bar{T}} \ln \frac{1 + \beta(2 - \delta)\Delta\bar{T}}{1 + \beta\Delta\bar{T}} \right).$$

При $t > t_*$ отличие силы $I = \frac{\Delta U}{R} = \frac{\Delta U}{R_0(1 + \beta\Delta T)}$ тока, протекающего через резистор, от установившегося значения $\bar{I} = \frac{\Delta U}{R_0(1 + \beta\Delta\bar{T})}$ представим в виде

$$\frac{I - \bar{I}}{\bar{I}} = \frac{1 + \beta\Delta\bar{T}}{1 + \beta\Delta T} - 1 = \frac{\beta(\Delta\bar{T} - \Delta T)}{1 + \beta(\Delta\bar{T} - (\Delta\bar{T} - \Delta T))} \leq \frac{\delta\beta\Delta\bar{T}}{1 + (1 - \delta)\beta\Delta\bar{T}}.$$

Если зависимостью сопротивления резистора от температуры можно пренебречь, т.е. принять $\beta = 0$, то значение силы $I_0 = \Delta U / R_0$ тока, протекающего через резистор, не зависит от времени. При этом установившееся значение температуры резистора равно $\bar{T} = T_0 + \frac{(\Delta U)^2}{R_0\alpha S}$ и с относительной погрешностью δ оно достигается за промежуток времени

$$t_0 = \frac{C_T}{\alpha S} \ln \frac{1}{\delta} > t_*$$

после приложения к резистору постоянной разности ΔU потенциалов. #

Уточнение ММ электрического конденсатора и индуктивной катушки (см. 3.1) позволяет оценить возможные погрешности, вызванные утечками заряда в реальном конденсаторе и сопротивлением реальной катушки.

Пример 3.6. Реальный конденсатор емкости C , имеющий в некоторый момент времени $t = 0$, принимаемый за начальный, электрический заряд Q_e , постепенно теряет этот заряд (причиной являются утечки заряда через окружающую среду

и несовершенство электрической изоляции между обкладками конденсатора). В [VIII] приведен пример уточнения РС и ММ конденсатора путем введения тока утечки силой I_* , пропорциональной текущей разности потенциалов $\Delta U(t)$. Это равносильно предположению, что конденсатор в отличие от идеализированной РС, в которой внутреннее сопротивление полагают бесконечно большим, обладает некоторым конечным внутренним сопротивлением R_* (рис. 3.20, а).

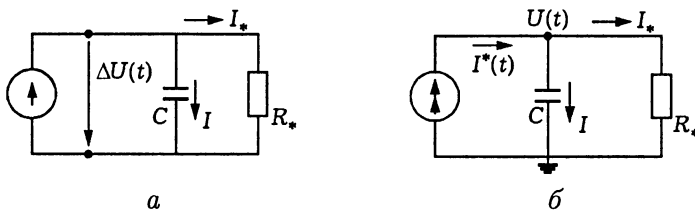


Рис. 3.20

Если использовать первый из законов Кирхгофа для суммы сил токов в разветвлениях электрической цепи применительно к схеме на рис. 3.20, а, то получаем $I + I_* = 0$, или, учитывая (3.1) и (3.3), приходим к ОДУ первого порядка

$$C \frac{dU(t)}{dt} + \frac{U(t)}{R_*} = 0. \quad (3.55)$$

Его решение при значении $U(0) = U_0$ в момент времени $t = 0$, принимаемый за начальный, имеет вид

$$U(t) = U_0 \exp\left(-\frac{t}{R_* C}\right).$$

Разность электрических потенциалов на обкладках уменьшится более чем в 100 раз при условии $t \geq R_* C \ln 100 \approx 4,6 R_* C$.

Выясним влияние изменяющейся по закону $I^*(t) = I_0 \sin \omega t$ силы тока внешнего источника (I_0 — амплитуда колебаний силы тока, ω — угловая частота колебаний) на напряжение $U(t)$ на одной обкладке неидеального конденсатора с заземленной

другой обкладкой (рис. 3.20, б). Теперь применение первого закона Кирхгофа приведет к равенству $I + I_* = I^*$, что с учетом (3.55) соответствует неоднородному ОДУ

$$C \frac{dU(t)}{dt} + \frac{U(t)}{R_*} = I_0 \sin \omega t. \quad (3.56)$$

В начальный момент времени $t = 0$ примем, что $U(0) = 0$. Тогда в решении

$$U(t) = \frac{\omega C R_*^2 I_0 e^{-t/(R_* C)}}{1 + (\omega C R_*)^2} + \frac{I_0 R_*}{1 + (\omega C R_*)^2} (\sin \omega t - \omega C R_* \cos \omega t)$$

этого ОДУ первое слагаемое в правой части при $t \rightarrow +\infty$ будет стремиться к нулю и изменение напряжения будет определять второе слагаемое в виде $\tilde{U}(t) = A(\omega) I_0 \sin(\omega t + \beta(\omega))$, где амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики

$$A(\omega) = \frac{R_*}{\sqrt{1 + (\omega C R_*)^2}}, \quad \beta(\omega) = \text{arctg}(-\omega C R_*) \quad (3.57)$$

цепи, состоящей из параллельно соединенных конденсатора емкостью C и резистора сопротивлением R_* , соответствуют так называемому простому аperiodическому звену (рис. 3.21). При $R_* \rightarrow \infty$ из (3.57) следует $A(\omega) \rightarrow \frac{1}{\omega C}$ и $\beta(\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$, т.е. приходим к характеристикам идеализированного конденсатора (см. рис. 3.5).

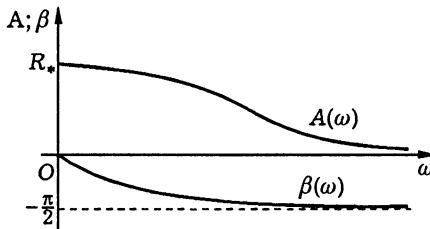


Рис. 3.21

Отметим, что (3.57) можно получить путем вычисления *полного комплексного сопротивления* параллельного соединения конденсатора и резистора (см. 4.1)

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{Z_{R_*}} + \frac{1}{Z_C}} = \frac{1}{\frac{1}{R_*} - \frac{\omega C}{i}} = \frac{R_*}{1 + i\omega C R_*} = R_* \frac{1 - i\omega C R_*}{1 + (\omega C R_*)^2},$$

где $Z_{R_*} = R_*$ и $Z_C = -\frac{i}{\omega C}$ — *комплексные сопротивления* резистора и конденсатора соответственно (см. 3.1). Представляя при помощи формулы Эйлера [X] Z в виде *комплексного передаточного числа*

$$Z = A(\omega)e^{i\beta(\omega)} = \frac{R_* e^{i \arctg(-\omega C R_*)}}{\sqrt{1 + (\omega C R_*)^2}},$$

получаем (3.57).

Пример 3.7. Реальная индуктивная катушка, имеющая индуктивность L , обладает некоторым сопротивлением $R^* > 0$. РС такой катушки изображена на рис. 3.22, а. Если к катушке ключом K присоединить внешний источник постоянного напряжения U^* (рис. 3.22, б), то в цепи возникнет электрический ток, сила $I(t)$ которого будет изменяться во времени. При этом сумма падений напряжения при обходе контура электрической цепи с учетом (3.1) и (3.4) в соответствии со вторым законом Кирхгофа равна нулю:

$$I(t)R^* + \Delta U(t) - U^* = I(t)R^* + L \frac{dI(t)}{dt} - U^* = 0.$$

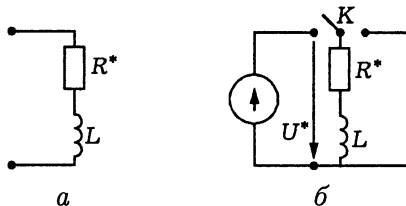


Рис. 3.22

Отсюда получаем линейное ОДУ первого порядка

$$L \frac{dI(t)}{dt} + R^* I(t) = U^*, \quad (3.58)$$

решение которого при начальном условии $I(0) = 0$ имеет вид

$$I(t) = U^* \frac{1 - e^{-tR^*/L}}{R^*}. \quad (3.59)$$

При $t \rightarrow \infty$ сила тока стремится к установившемуся значению U^*/R^* . С точностью до 1% от этого значения процесс изменения силы тока можно считать законченным при выполнении условия $e^{-tR^*/L} \leq 0,01$, или $t \geq (L/R^*) \ln 100 \approx 4,6(L/R^*)$. Если в момент времени $t = t^*$ при значении I^* силы тока ключ K перевести в правое положение (см. рис. 3.22, б), то вместо (3.58) при обходе вновь замкнутого контура получим однородное ОДУ, решением которого при условии $I(t^*) = I^*$ будет $I(t) = I^* e^{-(t-t^*)R^*/L}$.

Полное комплексное сопротивление цепи из последовательно соединенных катушки индуктивностью L и резистора сопротивлением R^* равно (см. 4.1)

$$Z = Z_L + Z_{R^*} = i\omega L + R^* = A(\omega)e^{i\beta(\omega)},$$

где $Z_L = i\omega L$ и $Z_{R^*} = R^*$ — комплексные сопротивления катушки и резистора, $A(\omega) = R^* \sqrt{1 + (\omega L/R^*)^2}$ — амплитудно-частотная характеристика этой цепи, а $\beta(\omega) = \arctg(\omega L/R^*)$ — ее фазочастотная характеристика (рис. 3.23), если в каче-

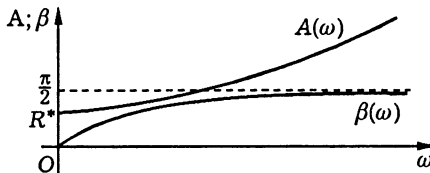


Рис. 3.23

стве входного сигнала рассматривать изменяющуюся по закону $I^*(t) = I_0 \sin \omega t$ силу тока, а в качестве выходного — падение напряжения в этой цепи. При $R^* \rightarrow 0$ получаем $A(\omega) \rightarrow \omega L$ и $\beta(\omega) \rightarrow \frac{\pi}{2}$, что соответствует характеристикам идеализированной индуктивной катушки (см. рис. 3.5). #

Итак, постоянный ток, проходящий через индуктивную катушку, не вызывает электродвижущей силы (ЭДС) самоиндукции, но в этом случае необходимо учитывать отличное от нуля сопротивление R^* реальной (неидеализированной) катушки (см. рис. 3.22, а). Это приведет к возникновению постоянной разности потенциалов между ее соседними витками и постоянного электрического поля. При переменном токе в реальной катушке возникнет не только переменное магнитное поле, наводящее в ее витках ЭДС самоиндукции, но и взаимодействующее с ним переменное электрическое поле между соседними витками. Влияние этого взаимодействия растет с увеличением частоты переменного тока и может быть в первом приближении учтено подключением параллельно к РС, изображенной на рис. 3.22, а, некоторой емкости C^* (рис. 3.24, а).

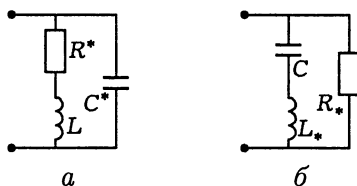


Рис. 3.24

При изменении во времени заряда на обкладках конденсатора возникает переменный ток, создающий переменное магнитное поле, которое взаимодействует с изменяющимся электрическим полем конденсатора. Влияние этого взаимодействия возрастает с увеличением частоты колебаний разности потенциалов на обкладках конденсатора*. Это влияние в первом

*См.: Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.

приближении можно учесть добавлением к РС, представленной на рис. 3.20, а, некоторой индуктивности L_* , включенной последовательно с емкостью конденсатора (рис. 3.24, б).

При нарушении условия $t_{\min} \gg l_{\max}/c$ (см. замечание 3.1), вызванном увеличением частоты колебаний силы тока, протекающего через индуктивную катушку, или разности потенциалов на обкладках конденсатора, использование схем, представленных на рис. 3.18, может привести к существенным погрешностям. Основной причиной возникновения погрешностей в этом случае является представление простейших типовых элементов в виде РС с сосредоточенными параметрами, т.е. пренебрежение пространственным распределением параметров, характеризующих их свойства и протекающие в них процессы. Поэтому для оценки возможных погрешностей, возникающих по этой причине, и выявления областей адекватности моделей макроуровня конденсатора и индуктивной катушки необходимо применять ММ микроуровня этих элементов, построенные на основе электродинамики сплошной среды*.

Перейдем к уточнению ММ, описывающей неравномерное поступательное движение твердого тела массой m в окружающей среде. При этом часто инерционную силу представляют в виде $m \frac{dv}{dt}$, где v — изменяющийся во времени t вектор скорости тела. Однако при движении тела прилегающие к его поверхности слои окружающей среды также перемещаются с некоторым ускорением, что приводит к необходимости учитывать инерцию этих слоев путем добавления к массе тела некоторой дополнительной массы \tilde{m} среды, называемой *присоединенной массой*. Значение \tilde{m} зависит от формы тела и свойств среды.

Пример 3.8. Рассмотрим поступательное движение твердого шара радиуса R и массой m в идеальной (невязкой) несжимаемой жидкости плотностью ρ , неподвижной на бесконечно

* См.: Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.

большом расстоянии от центра шара. Поместим в центре шара сферическую систему координат $O r \vartheta$ так, чтобы вектор \mathbf{v} скорости шара был направлен по оси, от которой происходит отсчет угла ϑ (рис. 3.25). В этом случае поле скорости жидкости не будет зависеть от угловой координаты φ , т.е. будет осесимметричным.

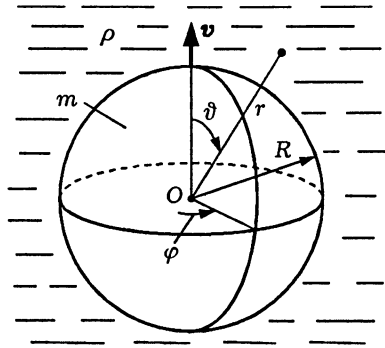


Рис. 3.25

Потенциал Φ поля скорости жидкости в каждый момент времени t удовлетворяет уравнению Лапласа [XIII] $\nabla^2 \Phi = 0$ и граничному условию

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=R} = |\mathbf{v}| \cos \vartheta, \quad \vartheta \in [0, \pi], \quad (3.60)$$

на поверхности шара, а также стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$. Этот потенциал не зависит от предыстории движения шара, а его изменение во времени обусловлено лишь изменением величины $|\mathbf{v}|$ в (3.60).

Несложно проверить, что функция

$$\Phi(r, \vartheta) = -\frac{|\mathbf{v}| R^3 \cos \vartheta}{2r^2} \quad (3.61)$$

удовлетворяет (3.60) и условию $\Phi \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Уравнение Лапласа представим в виде $\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = 0$. В данном случае

$\text{grad } \Phi$ имеет в любой точке области, занятой жидкостью, две составляющие

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{|\mathbf{v}| R^3 \cos \vartheta}{r^3} = v_r, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = \frac{|\mathbf{v}| R^3 \sin \vartheta}{2r^3} = v_\vartheta, \quad (3.62)$$

которые являются радиальной и трансверсальной проекциями вектора скорости жидкости. Поэтому с учетом (3.62) и выражения для операции дивергенции в сферической системе координат [VII] имеем

$$\begin{aligned} \text{div grad } \Phi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial(v_\vartheta \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} = \\ &= -\frac{|\mathbf{v}| R^3 \cos \vartheta}{r^4} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{|\mathbf{v}| R^3 \sin \vartheta \cos \vartheta}{r^3} = 0, \end{aligned}$$

т.е. функция (3.61) удовлетворяет уравнению Лапласа и является потенциалом поля скорости жидкости.

Кинетическая энергия жидкости с учетом (3.62) равна

$$\begin{aligned} K &= \frac{\rho}{2} \int_R^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (v_r^2 + v_\vartheta^2) r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta = \pi \rho \int_R^\infty \int_0^\pi (v_r^2 + v_\vartheta^2) r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta = \\ &= \pi \rho |\mathbf{v}|^2 R^6 \int_R^\infty \frac{dr}{r^4} \int_0^\pi \left(\cos^2 \vartheta + \frac{1}{4} \sin^2 \vartheta \right) \sin \vartheta \, d\vartheta = \\ &= \frac{\pi \rho |\mathbf{v}|^2 R^6}{4} \int_R^\infty \frac{dr}{r^4} \int_0^\pi (1 + 3 \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta = \\ &= \frac{\pi \rho |\mathbf{v}|^2 R^6}{4} \left(\frac{-1}{3r^3} \right) \Big|_R^\infty (-\cos \vartheta - \cos^3 \vartheta) \Big|_0^\pi = \frac{\pi \rho |\mathbf{v}|^2 R^3}{3} = \tilde{m} \frac{|\mathbf{v}|^2}{2}, \end{aligned}$$

где $\tilde{m} = \frac{2}{3} \pi \rho R^3$ — половина массы жидкости, вытесненной шаром. Таким образом, при движении шара в жидкости, неподвижной на бесконечно большом расстоянии от центра шара,

она приобретает кинетическую энергию, равную кинетической энергии тела, движущегося с той же скоростью, что и шар, но имеющего массу \tilde{m} .

Вращение шара в идеальной жидкости относительно оси, проходящей через его центр, не оказывает влияния на поле скорости жидкости и поэтому не приводит к изменению ее кинетической энергии. При этом момент инерции системы „вращающийся шар — жидкость“ совпадает с моментом инерции шара относительно указанной оси.

Суммарная кинетическая энергия системы „шар — жидкость“ равна $K^* = \frac{1}{2}(m + \tilde{m})v^2$. Изменение E^* за время dt , согласно закону сохранения энергии, равно работе, совершаемой силой P , приложенной к шару, на перемещении $v dt$, т.е. $dK^* = P v dt$, или

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m + \tilde{m}}{2} v^2 \right) = (m + \tilde{m}) v \frac{dv}{dt} = P v.$$

Отсюда получаем $(m + \tilde{m}) \frac{dv}{dt} = P$. Следовательно, ММ поступательного движения шара массой m в идеальной несжимаемой жидкости эквивалентна ММ поступательного движения в вакууме материальной точки массой $m + \tilde{m}$.

Оценим влияние присоединенной массы на примере наполненной водородом сферической оболочки, масса m которой вместе с водородом составляет 1/10 массы вытесненного ею воздуха. По закону Архимеда подъемная сила, растягивающая крепящие оболочку канаты, равна $9mg$, где g — ускорение свободного падения. Однако при освобождении этой оболочки от крепления ее начальное ускорение будет существенно меньше $9g$, поскольку присоединенная масса, равная половине массы вытесненного воздуха, в данном случае в 5 раз превышает массу оболочки, т.е. $\tilde{m} = 5m$. Таким образом, начальное ускорение равно $\frac{9mg}{m + \tilde{m}} = \frac{3}{2}g$. #

Для тела произвольной формы, движущегося в окружающей среде, ММ существенно усложняется. Так, например, для тела,

ограниченного поверхностью вращения эллипса с полуосями a и b ($a > b$) относительно оси, проходящей через фокусы эллипса, различают*¹ продольную

$$\tilde{m}_1 = \rho V \frac{\ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - 2\varepsilon}{\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon^2} - \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \quad (3.63)$$

и поперечную

$$\tilde{m}_2 = \rho V \frac{\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon^2} - \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}{\frac{2\varepsilon^3}{1-\varepsilon^2} - 2\varepsilon + \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \quad (3.64)$$

присоединенные массы, где $V = \frac{4}{3}\pi ab^2$ — объем тела, а $\varepsilon = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$ — эксцентриситет эллипса. Если вектор \mathbf{v} скорости жидкости составляет угол α с осью вращения эллипса, то поступательное движение такого тела описывают уравнения

$$(m + \tilde{m}_1) \frac{dv_1}{dt} = P_1, \quad (m + \tilde{m}_2) \frac{dv_2}{dt} = P_2,$$

где m — масса тела, $v_1 = |\mathbf{v}| \cos \alpha$, $v_2 = |\mathbf{v}| \sin \alpha$, $P_1 = |\mathbf{P}| \cos \alpha$, $P_2 = |\mathbf{P}| \sin \alpha$, \mathbf{P} — сила, приложенная к телу.

Таким образом, влияние присоединенной массы на поступательное движение тела зависит от его формы и ориентации относительно вектора скорости, а также от плотности среды. Это влияние мало в случае полета снаряда, самолета или ракеты в воздухе, но его необходимо учитывать, например, при движении дирижабля или воздушного шара в воздухе, корабля или торпеды в воде. Отметим, что в общем случае движения (поступательного и вращательного) тела произвольной формы влияние жидкости учитывают введением тензора присоединенной массы*².

*¹См.: Лойцянский Л.Г.

*²См.: Биркгоф Г.

Вопросы и задачи

3.1. Получите решение уравнения (3.56) при начальном условии $U(0) = 0$.

3.2. Убедитесь, что (3.59) является решением уравнения (3.58) при начальном условии $I(0) = 0$.

3.3. Покажите, что в (3.63) и (3.64) для продольной и поперечной присоединенных масс тела, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения, $\tilde{m}_1 \rightarrow \tilde{m}$ и $\tilde{m}_2 \rightarrow \tilde{m}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где \tilde{m} — присоединенная масса шара.

3.4. Решив уравнение (3.43) для трубы с кольцевым поперечным сечением, найдите выражения для объемного расхода и сопротивления такой трубы.

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ ИЗ ТИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

При математическом моделировании технического устройства, в котором протекают процессы различной физической природы, прежде всего необходимо для каждого из таких процессов выделить типовые элементы (см. 3), образующие однородную по физическим свойствам систему: электрическую, механическую, тепловую, гидравлическую и т.п. Взаимодействие элементов в каждой из систем должно быть отражено в ее *расчетной схеме* (РС). При переходе от РС сложной системы, состоящей из большого числа взаимосвязанных между собой типовых элементов, к ее *математической модели* (ММ) *макроуровня* удобно оперировать *эквивалентными схемами*, основанными на аналогиях между ММ элементов, принадлежащих различным физическим системам. При этом предпочтительнее привлекать аналогии между электрической системой и другими физическими системами. Эти аналогии позволяют при получении ММ таких систем применять достаточно универсальные приемы построения ММ электрических систем, формализованные с использованием *законов Кирхгофа* и *ориентированных графов*.

4.1. Дуальные электрические цепи

Под *эквивалентной схемой* системы, состоящей из типовых элементов, понимают их условное изображение в виде двухполюсников и связей между этими двухполюсниками. Так как *математические модели* (ММ) *макроуровня* типовых элементов различных физических систем совпадают по форме с ММ электрических двухполюсников, то при построении экви-

валентных схем обычно используют обозначения, характерные для электрических систем. Эквивалентную схему в виде электрической цепи, объединяющей двухполюсники, можно считать наглядным представлением *структурной математической модели* рассматриваемой системы.

При построении ММ электрической системы объединяют ММ входящих в эту систему типовых элементов: резисторов, конденсаторов и индуктивных катушек. Такое объединение проводят, применяя к эквивалентной схеме *законы Кирхгофа**. Первый из них устанавливает равенство нулю алгебраической суммы мгновенных значений силы тока во всех ветвях электрической цепи, имеющих общий узел, а второй — равенство нулю алгебраической суммы мгновенных значений падений напряжения при обходе любого контура электрической цепи в любом направлении.

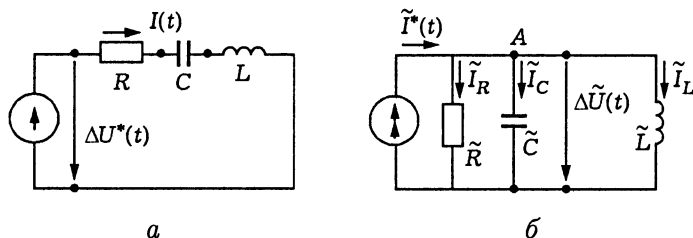


Рис. 4.1

Использование законов Кирхгофа рассмотрим на простом примере электрической цепи, включающей источник, задающий переменное (в общем случае) во времени t напряжение ΔU^* , резистор сопротивлением R , конденсатор емкостью C и катушку индуктивностью L (рис. 4.1, а). Эта цепь состоит из одного замкнутого контура и четырех ветвей, в каждую из которых включен один из указанных двухполюсников. Применяя к каждому из узлов этой цепи первый закон Кирхгофа, приходим к выводу, что в любой момент времени t сила I электрического

*Г.Р. Кирхгоф (1824–1887) — немецкий физик и математик.

тока во всех ветвях одинакова. Для падений электрического напряжения на пассивных двухполюсниках имеем (см. 3.1)

$$\Delta U_R = IR, \quad \Delta U_C = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I dt, \quad \Delta U_L = L \frac{dI}{dt}, \quad (4.1)$$

где t_0 — некоторый момент времени, принятый за начальный. При обходе замкнутого контура по ходу часовой стрелки в соответствии со вторым законом Кирхгофа получим $-\Delta U^*(t) + \Delta U_R + \Delta U_C + \Delta U_L = 0$, или с учетом (4.1)

$$RI + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I dt + L \frac{dI}{dt} = \Delta U^*(t). \quad (4.2)$$

В качестве второго примера рассмотрим электрическую цепь, включающую наряду с пассивными двухполюсниками источник, задающий по определенному закону $\tilde{I}^*(t)$ силу тока (рис. 4.1, б). Из второго закона Кирхгофа следует, что падение напряжения $\Delta \tilde{U}$ в каждой из ветвей этой цепи в любой фиксированный момент времени t одинаково. Для токов в ветвях, содержащих пассивные двухполюсники, запишем (см. 3.1)

$$\tilde{I}_R = \tilde{g} \Delta \tilde{U}, \quad \tilde{I}_C = \tilde{C} \frac{d\Delta \tilde{U}}{dt}, \quad \tilde{I}_L = \frac{1}{\tilde{L}} \int_{t_0}^t \Delta \tilde{U} dt, \quad (4.3)$$

где $\tilde{g} = 1/\tilde{R}$ — проводимость резистора сопротивлением \tilde{R} . Все ветви этой цепи сходятся в два узла. Применяя первый закон Кирхгофа к одному из узлов (например, к узлу A), получим $\tilde{I}_R + \tilde{I}_C + \tilde{I}_L - \tilde{I}^*(t) = 0$, или, учитывая (4.3),

$$\tilde{g} \Delta \tilde{U} + \tilde{C} \frac{d\Delta \tilde{U}}{dt} + \frac{1}{\tilde{L}} \int_{t_0}^t \Delta \tilde{U} dt = \tilde{I}^*(t). \quad (4.4)$$

Таким образом, ММ рассмотренных электрических цепей включают идентичные по форме уравнения (4.2) и (4.4), содержащие помимо времени t различные величины. Соответствие между этими величинами представлено в табл. 4.1.

Таблица 4.1

I	L	R	C	ΔU_R	ΔU_C	ΔU_L	$\Delta U^*(t)$
$\tilde{\Delta U}$	\tilde{C}	\tilde{g}	\tilde{L}	\tilde{I}_R	\tilde{I}_L	\tilde{I}_C	$\tilde{I}^*(t)$

Две электрические цепи, ММ которых удовлетворяют указанному соответствию величин, принято называть *дуальными*. При этом зависимости (4.1) для падений напряжений на пассивных двухполюсниках в одной цепи аналогичны зависимостям (4.3) для токов, протекающих через такие двухполюсники в дуальной цепи, и наоборот. Если связь между законами изменения напряжения и силы тока источников в дуальных цепях подчиняется зависимости $\Delta U^*(t) = R_0 \tilde{I}^*(t)$, где R_0 — коэффициент пропорциональности, имеющий размерность сопротивления, то из сопоставления (4.1), (4.2) и (4.3), (4.4) можно установить, что

$$\frac{\tilde{\Delta U}}{I} = \frac{\Delta U_R}{\tilde{I}_R} = \frac{\Delta U_C}{\tilde{I}_L} = \frac{\Delta U_L}{\tilde{I}_C} = R_0 \quad (4.5)$$

при выполнении условий

$$\frac{R}{\tilde{g}} = \frac{\tilde{L}}{C} = \frac{L}{\tilde{C}} = R_0^2. \quad (4.6)$$

Существуют правила преобразования сложных электрических цепей* в дуальные. При этом число узлов дуальной цепи на единицу превышает число простых замкнутых контуров исходной цепи (к простым относят такие замкнутые контуры, внутренняя линия обхода которых не пересекает ветвей цепи).

*См.: Атабеков Г.И.; Тетельбаум И.М.

Проверкой правильности преобразования цепи в дуальную служит получение исходной цепи путем построения дуальной цепи по отношению к дуальной. Дуальность электрических цепей позволяет расширить возможности построения и преобразования эквивалентных схем применительно к различным физическим системам (прежде всего к механическим системам).

Предположим, что сила тока в электрической цепи, представленной на рис. 4.1, а, изменяется по закону $I(t) = I_0 \sin \omega t$, где I_0 — амплитуда колебаний силы тока, ω — угловая частота колебаний. Выясним, при каком законе $\Delta U^*(t)$ изменения напряжения источника это возможно. Для этого предварительно продифференцируем по t (4.2) и запишем

$$R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{I(t)}{C} + L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} = \frac{d\Delta U^*(t)}{dt},$$

или после подстановки выражения для $I(t)$

$$\omega R I_0 \cos \omega t + \frac{I_0}{C} \sin \omega t - \omega^2 L I_0 \sin \omega t = \frac{d\Delta U^*(t)}{dt}.$$

Отсюда следует, что одним из возможных законов изменения напряжения источника является

$$\Delta U^*(t) = R I_0 \sin \omega t - \frac{I_0}{\omega C} \cos \omega t + \omega L I_0 \cos \omega t.$$

Запишем комплексное представление этой функции в виде $\Delta U^*(t) = \text{Im}(\Delta \hat{U} e^{i\omega t})$, где $\Delta \hat{U}$ — комплексная амплитуда напряжения источника, равная $\Delta \hat{U} = I_0 \left(R - \frac{i}{\omega C} + i\omega L \right) = I_0 (Z_R + Z_C + Z_L)$, причем $Z_R = R$, $Z_C = -\frac{i}{\omega C}$ и $Z_L = i\omega L$ — комплексные сопротивления (импедансы) резистора, емкости и индуктивной катушки соответственно. Так как комплексная амплитуда силы тока $I(t) = I_0 \sin \omega t = \text{Im}(\hat{I} e^{i\omega t})$ равна $\hat{I} = I_0$, то $\Delta \hat{U} / \hat{I} = Z = Z_R + Z_C + Z_L$, где Z — полное комплексное сопротивление цепи из последовательно соединенных резистора, емкости и индуктивной катушки. Таким образом, при

последовательном соединении электрических двухполюсников сумма их комплексных сопротивлений дает полное сопротивление цепи.

Теперь предположим, что падение напряжения во всех ветвях цепи, представленной на рис. 4.1, б, изменяется по закону $\Delta\tilde{U}(t) = \Delta U_0 \sin \omega t$, где ΔU_0 — амплитуда колебаний напряжения. Найдем закон $\tilde{I}^*(t)$ изменения силы тока источника, при котором это возможно. Продифференцировав по t (4.4), запишем

$$\tilde{g} \frac{\Delta\tilde{U}(t)}{dt} + \tilde{C} \frac{d^2 \Delta\tilde{U}(t)}{dt^2} + \frac{\Delta\tilde{U}(t)}{\tilde{L}} = \tilde{I}^*(t)$$

и после подстановки $\tilde{g} = 1/\tilde{R}$ и выражения для $\Delta\tilde{U}(t)$ получим

$$\omega \frac{\Delta U_0}{\tilde{R}} \cos \omega t - \omega^2 \tilde{C} \Delta U_0 \sin \omega t + \frac{\Delta U_0}{\tilde{L}} \sin \omega t = \frac{d\tilde{I}^*(t)}{dt}.$$

Отсюда следует, что возможным законом изменения силы тока источника является

$$\tilde{I}^*(t) = \frac{\Delta U_0}{\tilde{R}} \sin \omega t + \omega \tilde{C} \Delta U_0 \cos \omega t - \frac{\Delta U_0}{\omega \tilde{L}} \cos \omega t.$$

Комплексное представление этой функции имеет вид $\tilde{I}^*(t) = \text{Im}(\bar{I} e^{i\omega t})$, где \bar{I} — комплексная амплитуда силы тока источника, равная

$$\bar{I} = \Delta U_0 \left(\frac{1}{\tilde{R}} + i\omega \tilde{C} - \frac{i}{\omega \tilde{L}} \right) = \Delta U_0 \left(\frac{1}{Z_{\tilde{R}}} + \frac{1}{Z_{\tilde{C}}} + \frac{1}{Z_{\tilde{L}}} \right),$$

причем $Z_{\tilde{R}} = \tilde{R}$, $Z_{\tilde{C}} = -i/(\omega \tilde{C})$ и $Z_{\tilde{L}} = i\omega \tilde{L}$. Поскольку комплексная амплитуда падения напряжения $\Delta U(t) = \Delta U_0 \sin \omega t = \text{Im}(\Delta \bar{U} e^{i\omega t})$ равна $\Delta \bar{U} = \Delta U_0$, то

$$\frac{\Delta \bar{U}}{\bar{I}} = Z = \frac{1}{\frac{1}{Z_{\tilde{R}}} + \frac{1}{Z_{\tilde{C}}} + \frac{1}{Z_{\tilde{L}}}}.$$

Следовательно, при параллельном соединении электрических двухполюсников сумма их комплексных проводимостей, обратных комплексным сопротивлениям, дает полную комплексную проводимость цепи, обратную ее полному комплексному сопротивлению.

4.2. Двойственность электромеханической аналогии

При построении *математических моделей* (ММ) макроуровня сравнительно простых механических систем, состоящих из небольшого количества типовых элементов, обычно непосредственно используют основные законы механики. Но для более сложной механической системы, включающей большое число взаимодействующих между собой элементов, удобнее, используя *электромеханическую аналогию*, предварительно составить *эквивалентную схему*, соответствующую *расчетной схеме* этой системы. Тогда при переходе от эквивалентной схемы к ММ можно применить приемы, разработанные и формализованные для электрических цепей.

Установленный на основе идентичности ММ типовых элементов механической системы и *электрических двухполюсников* вариант электромеханической аналогии (см. 3.2) не является единственным, так как каждой из *дуальных электрических цепей* можно поставить в соответствие свой вариант такой аналогии. В связи с этим допустимо говорить о двойственности электромеханической аналогии.

В качестве примера убедимся, что для механической системы, включающей тело 1 массой m , движущееся поступательно по горизонтальной плоскости и связанное с неподвижной опорой 2 пружиной 3 жесткостью c (рис. 4.2), эквивалентными схемами могут быть обе дуальные цепи, представленные на рис. 4.1, а и б.

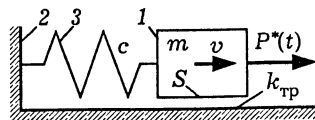


Рис. 4.2

Действительно, в соответствии со вторым законом Ньютона запишем

$$m \frac{dv}{dt} = P^*(t) - k_{\text{тр}} S v - cu, \quad (4.7)$$

где u — перемещение тела относительно положения равновесия, $v = \frac{du}{dt}$ — скорость тела, $P^*(t)$ — внешняя сила, приложенная к телу и изменяющаяся (в общем случае) во времени t , $k_{\text{тр}}$ — коэффициент вязкого трения при движении тела по горизонтальной плоскости, S — площадь поверхности контакта тела с этой плоскостью. Используя введенные в 3.2 обозначения $R_M = k_{\text{тр}} S$, $C_M = 1/c$ и $L_M = m$, представим (4.7) в виде

$$R_M v + \frac{1}{C_M} \int_{t_0}^t v dt + L_M \frac{dv}{dt} = P^*(t), \quad (4.8)$$

где t_0 — некоторый момент времени, принятый за начальный.

Из сравнения (4.8) с (4.2) следует, что ММ рассматриваемой механической системы и ММ электрической цепи, изображенной на рис. 4.1, а, идентичны при выборе в механической системе силы в качестве потенциальной величины, аналогичной падению электрического напряжения, и скорости в качестве потоковой величины, аналогичной силе электрического тока. Такой выбор и был сделан (см. 3.2), что определяет I вариант электромеханической аналогии (табл. 4.2). Но если в механической системе потенциальной величиной считать скорость, а потоковой — силу, то ММ этой системы в виде (4.8) будет идентична ММ электрической цепи, представленной на рис. 4.1, б. В самом деле, полагая $\tilde{g}_M = R_M = k_{\text{тр}} S$, $\tilde{L}_M = C_M = 1/c$ и $\tilde{C}_M = L_M = m$, вместо (4.8) получаем

$$\tilde{g}_M v + \frac{1}{\tilde{L}_M} \int_{t_0}^t v dt + \tilde{C}_M \frac{dv}{dt} = P^*(t), \quad (4.9)$$

что с точностью до обозначений совпадает с (4.4) и определяет II вариант электромеханической аналогии (см. табл. 4.2).

Таблица 4.2

Механическая система	Электрическая система	
	I вариант	II вариант
Сила	Напряжение	Сила тока
Скорость	Сила тока	Напряжение
Вязкое трение	Сопротивление	Проводимость
Податливость	Емкость	Индуктивность
Масса	Индуктивность	Емкость
Перемещение	Заряд	Потокоцепление
Импульс	Потокоцепление	Заряд
Энергия		
потенциальная	электрическая	магнитная
кинетическая	магнитная	электрическая
Мощность		
вязкого трения	тепловыделения в резисторе	

Использование II варианта электромеханической аналогии удобнее при построении эквивалентной схемы механической системы, поскольку для этого варианта получают естественное механическое толкование *законы Кирхгофа*, используемые затем при переходе от эквивалентной схемы к ММ системы. В случае поступательного движения механической системы первый закон Кирхгофа будет аналогом уравнения равновесия всех сил (включая инерционные), действующих на рассматриваемый узел эквивалентной схемы, а второй — аналогом правила сложения скоростей при обходе контура этой схемы. При пространственном движении механической системы силы и скорости являются векторными величинами. Поэтому равенства, следующие из законов Кирхгофа, должны быть выполнены для проекций этих величин на каждую из координатных осей.

Пример 4.1. Построим эквивалентную схему для движущейся поступательно механической системы* (рис. 4.3), состо-

* См.: Трудношин В.А., Пивоварова Н.В.

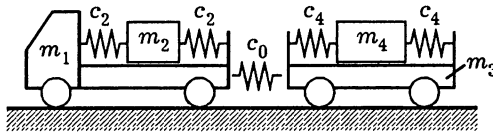


Рис. 4.3

ячей из автомобиля массой m_1 с грузом массой m_2 и прицепа массой m_3 , на котором находится груз массой m_4 . Грузы закреплены при помощи упругих элементов податливостью $1/c_2$ и $1/c_4$ соответственно, а сцепка между автомобилем и прицепом имеет податливость $1/c_0$. При движении автомобиля и прицепа возникают силы сопротивления, пропорциональные значениям v_1 и v_3 их скорости, причем коэффициенты пропорциональности равны k_1 и k_3 соответственно. Силы трения между грузами и кузовами автомобиля и прицепа пропорциональны значениям $\Delta v_2 = v_2 - v_1$ и $\Delta v_4 = v_4 - v_3$ скорости перемещения грузов относительно этих кузовов (коэффициенты пропорциональности равны k_2 и k_4 соответственно). Зависимость $P^*(t)$ силы тяги автомобиля от времени t является заданной.

Для построения эквивалентной схемы используем II вариант электромеханической аналогии. Аналогом скорости v_i , $i = \overline{1, 4}$, каждой из четырех масс механической системы относительно дороги будет электрическое напряжение U_i в одном из четырех узлов электрической цепи (рис. 4.4), отсчитываемое от напряжения $U_5 = 0$ в узле 5, принятого за нуль отсчета.

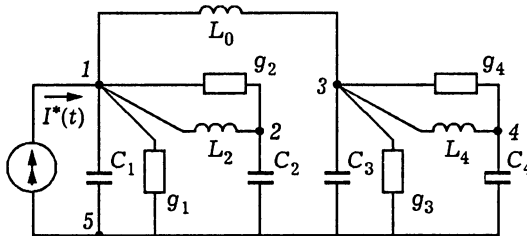


Рис. 4.4

Из второго закона Ньютона для центра масс автомобиля получим уравнение

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} + k_1 v_1 + k_2 (v_1 - v_2) + \\ + c_0 \int_{t_0}^t (v_1 - v_3) dt + 2c_2 \int_{t_0}^t (v_1 - v_2) dt = P^*(t),$$

где t_0 — момент времени, принимаемый за начальный. Слагаемым в левой части этого уравнения на эквивалентной схеме (см. рис. 4.4) соответствуют пять ветвей, сходящихся в узел 1 и содержащих конденсатор емкостью C_1 , резисторы проводимостью g_1 , g_2 и катушки индуктивностью L_0 , L_2 , а правой части — ветвь с источником, задающим ток силой $I^*(t)$. Для центра масс груза в кузове автомобиля имеем

$$m_2 \frac{dv_2}{dt} + k_2 (v_2 - v_1) + 2c_2 \int_{t_0}^t (v_2 - v_1) dt = 0.$$

Первому слагаемому в левой части этого равенства отвечает на рис. 4.4 ветвь, содержащая конденсатор емкостью C_2 . Остальные ветви эквивалентной схемы построены аналогично, но с использованием уравнений

$$m_3 \frac{dv_3}{dt} + k_3 v_3 + k_4 (v_3 - v_4) + \\ + c_0 \int_{t_0}^t (v_3 - v_1) dt + 2c_4 \int_{t_0}^t (v_3 - v_4) dt = 0,$$

$$m_4 \frac{dv_4}{dt} + k_4 (v_4 - v_3) + 2c_4 \int_{t_0}^t (v_4 - v_3) dt = 0$$

второго закона Ньютона для центров масс прицепа и находящегося на нем груза. #

Электромеханическая аналогия может применяться при построении эквивалентных схем механических систем с вращательным движением. Если использовать II вариант этой аналогии (см. табл. 4.2), то силе тока будет соответствовать вращающий момент, напряжению — угловая скорость, проводимости резистора — коэффициент вязкого трения, емкости конденсатора — момент инерции, а индуктивности катушки — податливость упругой связи при вращении.

Пример 4.2. Фрикционная муфта (рис. 4.5) передает вращение ведущего вала 1, к которому приложен зависящий в общем случае от времени t вращающий момент $M^*(t)$, ведомому валу 2, присоединенному к нагрузке с линейной характеристикой $M = \kappa\omega_2$, где M — вращающий момент, ω_2 — угловая скорость вала 2, κ — коэффициент пропорциональности. При изменении ω_2 возникает инерционный момент $J \frac{d\omega_2}{dt}$, где J — момент инерции нагрузки. Моменты сопротивления вращению валов в подшипниках 7 пропорциональны угловым скоростям ω_1 и ω_2 ведущего и ведомого валов (коэффициенты пропорциональности κ_1 и κ_2 соответственно). Вращающий момент M_* , передаваемый муфтой от ее ведущего диска 3 с моментом инерции J_3 ведомому диску 4 с моментом инерции J_4 , зависит от разности $\omega_3 - \omega_4$ угловых скоростей этих дисков, причем $M_* = \kappa_*(t)(\omega_3 - \omega_4)$, где $\kappa_*(t)$ — изменяющийся во времени коэффициент сцепления дисков. Моменты инерции валов 1 и 2 условно сосредоточим в их сечениях 5 и 6, расположенных по-

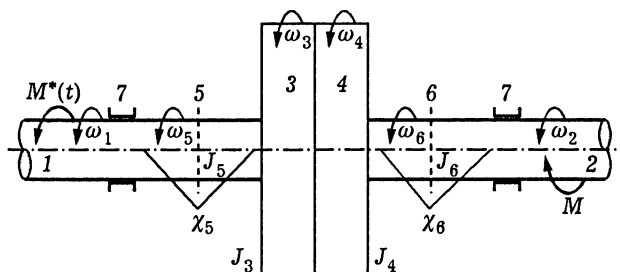


Рис. 4.5

середине между подшипниками и муфтой, и обозначим J_5 и J_6 . Угловые скорости в тех же сечениях обозначим ω_5 и ω_6 , а податливости участков ведущего и ведомого валов при передаче ими крутящего момента — $1/\chi_5$ и $1/\chi_6$ соответственно.

В эквивалентной схеме рассматриваемой механической системы при использовании II варианта электромеханической аналогии каждому значению ω_i , $i = \overline{1, 6}$, угловой скорости относительно неподвижных опор соответствует напряжение U_i в одном из шести узлов электрической цепи (рис. 4.6), отсчитываемое от напряжения $U_7 = 0$ в узле 7, принятого за нуль отсчета.

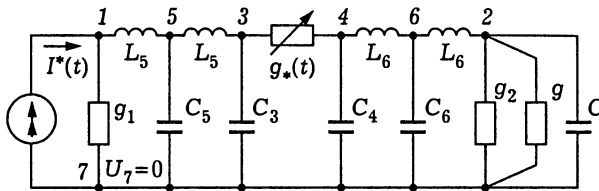


Рис. 4.6

Приложенный к ведущему валу момент $M^*(t)$ уравновешен моментом трения в подшипнике и крутящим моментом на этом участке вала, т.е.

$$\kappa_1 \omega_1 + \chi_5 \int_{t_0}^t (\omega_1 - \omega_5) dt = M^*(t),$$

где t_0 — момент времени, принимаемый за начальный. На эквивалентной схеме двум первым слагаемым в левой части этого равенства соответствуют ветви, сходящиеся в узел 1 и содержащие резистор проводимостью g_1 и катушку индуктивностью L_5 между узлами 1 и 5, а правой части — ветвь с источником, задающим ток силой $I^*(t)$. Для сечения ведущего вала, где условно сосредоточен момент инерции J_5 , имеем

$$J_5 \frac{d\omega_5}{dt} + \chi_5 \int_{t_0}^t (\omega_5 - \omega_1) dt + \chi_5 \int_{t_0}^t (\omega_5 - \omega_3) dt = 0,$$

где в левой части третье слагаемое соответствует крутящему моменту, передаваемому ведущему диску муфты (на рис. 4.6 ветвь между узлами 3 и 5 с катушкой индуктивностью L_5), а первое слагаемое — моменту инерции (ветвь, содержащая конденсатор емкостью C_5).

Для ведущего диска муфты запишем

$$J_3 \frac{d\omega_3}{dt} + \kappa_*(t)(\omega_3 - \omega_4) + \chi_5 \int_{t_0}^t (\omega_3 - \omega_5) dt = 0.$$

На эквивалентной схеме первому слагаемому в левой части этого уравнения соответствует ветвь с конденсатором емкостью C_3 , а второму слагаемому — резистор с изменяющейся во времени проводимостью $g_*(t)$. Ветви схемы, сходящиеся в узлы 4 и 6, построены аналогично ветвям, сходящимся в узлы 3 и 5 соответственно.

Для сечения ведомого вала, присоединенного к нагрузке, получим

$$J \frac{d\omega_2}{dt} + \kappa\omega_2 + \kappa_2\omega_2 + \chi_6 \int_{t_0}^t (\omega_2 - \omega_6) dt = 0.$$

Слагаемым в левой части этого равенства на рис. 4.6 соответствуют ветви, сходящиеся в узел 2 и содержащие конденсатор C , резисторы проводимостью g и g_2 и катушку индуктивностью L_6 .

4.3. Математическая модель линейного осциллятора

Процесс изменения во времени параметров *технического объекта* (ТО) с многократным чередованием их возрастания и убывания принято называть *колебаниями*. При колебаниях происходит знакопеременное отклонение параметров от

их определенных значений. Эти значения могут соответствовать установившемуся состоянию ТО или же, в свою очередь, изменяться во времени по некоторому закону. Как правило, колебания сопровождается преобразование одной формы энергии в другую.

В широком смысле под *осциллятором* (от латинского слова *oscillo* — качаюсь) понимают любую систему, какие-либо параметры которой совершают колебания при отсутствии переменных внешних воздействий. В такой системе колебания могут иметь различную физическую природу. Одним из простейших осцилляторов, в котором можно возбудить электромагнитные колебания, является *колебательный контур*, состоящий из электрического конденсатора и индуктивной катушки (рис. 4.7), имеющих емкость C и индуктивность L соответственно. При определенных условиях электромагнитные колебания возможны в цепях, содержащих помимо конденсаторов и катушек также и резисторы (см. рис. 4.1, а и б, рис. 4.4 и рис. 4.6).

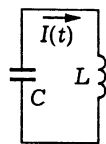


Рис. 4.7

Хорошо известным примером осциллятора в механической системе является тело массой m , присоединенное к неподвижной опоре при помощи упругого элемента (пружины) жесткостью c (см. рис. 4.2). Учитывая, что скорость v тела связана с его перемещением u относительно положения равновесия соотношением $v = du/dt$, запишем (4.7) в виде линейного ОДУ второго порядка

$$m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + k_{\text{тр}} S \frac{du(t)}{dt} + cu(t) = P^*(t), \quad (4.10)$$

где $k_{\text{тр}}$ — коэффициент трения при движении тела по горизонтальной плоскости, S — площадь поверхности контакта тела с этой плоскостью, $P^*(t)$ — внешняя сила, приложенная к телу и зависящая (в общем случае) от времени t .

Если $P(t) \equiv 0$ и в момент времени $t = 0$ известны значения $u(0) = u_0$ и $v(0) = \left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=0} = v_0$, то при условии $0 \leq k_{\text{тр}} S / (2m) =$

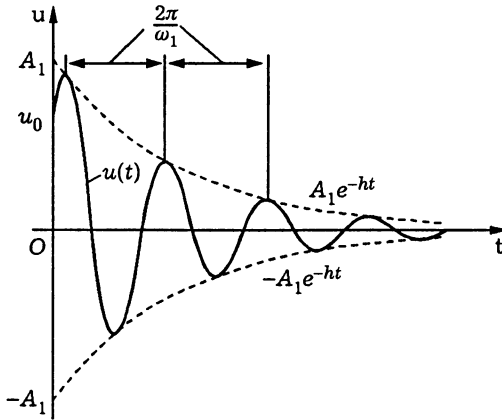


Рис. 4.8

$= h < \sqrt{c/m} = \omega$ ОДУ (4.10) имеет решение [VIII]

$$u(t) = e^{-ht} \left(u_0 \cos \omega_1 t + \frac{v_0 + hu_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right), \quad (4.11)$$

где $\omega_1 = \sqrt{c/m - h^2}$. Выражение в скобках можно также представить в виде $A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$, где

$$A_1 = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{v_0 + hu_0}{\omega_1} \right)^2}, \quad \varphi_1 = -\operatorname{arccctg} \frac{\omega_1 u_0}{v_0 + hu_0}. \quad (4.12)$$

Через промежутки времени π/ω_1 , не зависящие от начальных условий u_0 и v_0 , тело проходит положение равновесия $u = 0$, а через промежутки $2\pi/\omega_1$ функция $u(t)$ достигает максимальных (или минимальных) значений (рис. 4.8), которые соответствуют моментам обращения в нуль скорости

$$v(t) = \frac{du(t)}{dt} = e^{-ht} \left(v_0 \cos \omega_1 t - \frac{hv_0 + \omega^2 u_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right).$$

Каждое максимальное по абсолютной величине отклонение от положения равновесия называют *полуразмахом колебаний**.

*См.: Пановко Я.Г., Губанова И.И.

Из (4.11) следует, что с течением времени полуразмахи колебаний уменьшаются, причем отношение двух последовательных полуразмахов в одну и ту же сторону от положения равновесия постоянно и равно $e^{2\pi h/\omega_1} > 1$. Натуральный логарифм $2\pi h/\omega_1$ этого отношения носит название *логарифмического декремента колебаний* (от латинского слова *decrementum* — уменьшение, убыль). Таким образом, *математическая модель*, включающая ОДУ (4.10), описывает *затухающие колебания*, полуразмахи которых образуют геометрическую прогрессию. В силу линейности этого ОДУ соответствующий осциллятор принято называть *линейным осциллятором*.

Если пренебречь сопротивлением движению тела по горизонтальной плоскости (см. рис. 4.2), то, полагая в (4.10)–(4.12) $h = 0$, получаем ОДУ

$$m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + cu(t) = 0 \quad (4.13)$$

и его решение

$$u(t) = \left(u_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \right) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (4.14)$$

где $\omega = \sqrt{c/m}$ — *угловая* (называемая иногда круговой или циклической) *частота* этих *колебаний*, не зависящая от начальных условий и определяющая *период* $T = 2\pi/\omega$ *колебаний*, измеряемый в с, $A = \sqrt{u_0^2 + (v_0/\omega)^2}$ — *амплитуда колебаний*, а $\varphi = -\operatorname{arccotg}(\omega u_0/v_0)$. В этом случае осциллятор называют *гармоническим осциллятором*. Отметим, что в отличие от угловой частоты, измеряемой в рад/с, *частоту колебаний* $f = \frac{\omega}{2\pi}$ измеряют в герцах* (Гц).

В отличие от гармонических затухающие колебания не являются, строго говоря, *периодическим процессом*, но сохраняют некоторые его свойства, в частности чередование через равные промежутки времени $T_1 = 2\pi/\omega_1$ максимумов и минимумов

* Г.Р. Герц (1857–1894) — немецкий физик.

величины $u(t)$. Поэтому T_1 принято называть *условным периодом* затухающих колебаний, ω_1 — их *условной угловой частотой*, а полуразмахи колебаний — их *условной амплитудой**

Если в (4.2) положить $R = 0$ и $\Delta U^*(t) \equiv 0$, то после дифференцирования по времени получим ОДУ второго порядка

$$L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + \frac{I(t)}{C} = 0, \quad (4.15)$$

где $I(t)$ — сила тока в колебательном контуре, изображенном на рис. 4.7, а L и C — индуктивность катушки и емкость конденсатора соответственно. Аналогичное ОДУ

$$C \frac{d^2 \Delta U(t)}{dt^2} + \frac{\Delta U(t)}{L} = 0, \quad (4.16)$$

описывающее гармонические колебания в этом контуре падения напряжения ΔU на конденсаторе или катушке, следует из (4.4) при $\tilde{g} = 0$ и $\tilde{I}^*(t) \equiv 0$. Период колебаний силы тока и падения напряжения в этом контуре равен $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Независимо от физического содержания процесса колебаний каждое из ОДУ (4.13), (4.15) и (4.16) называют *уравнением гармонического осциллятора*. Приведем энергетическую трактовку этих ОДУ. Используя равенство $\frac{du}{dt} = v$, представим (4.13) в виде

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{dt} \right) + cu = m \frac{dv}{dt} + cu = m \frac{dv}{du} \frac{du}{dt} + cu = mv \frac{dv}{du} + cu = 0,$$

или $d(mv^2/2) + d(cu^2/2) = 0$. Учитывая значения u_0 и v_0 в момент времени $t = 0$, после интегрирования находим

$$m \frac{v^2}{2} + c \frac{u^2}{2} = K + \Pi = W = m \frac{v_0^2}{2} + c \frac{u_0^2}{2} = \text{const}, \quad (4.17)$$

*См.: Курс теоретической механики.

т.е. полная энергия W рассматриваемой механической системы, равная сумме кинетической энергии $K = mv^2/2$ тела и потенциальной энергии $\Pi = cu^2/2$, запасенной в пружине (см. рис. 4.2), в любой момент времени остается постоянной. Систему, в которой полная энергия не изменяется во времени, называют **консервативной** (от латинского слова *conservo* — сохраняю).

Из (4.17) получим уравнение эллипса

$$\frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1, \quad A = \sqrt{u_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad \omega^2 = \frac{c}{m},$$

которое в фазовой плоскости uOv определяет замкнутую фазовую траекторию (рис. 4.9). Движение *изображающей точки* по этой траектории происходит по ходу часовой стрелки, поскольку при $v > 0$ перемещение u возрастает, а при $v < 0$ — убывает. Замкнутость фазовой траектории свидетельствует о периодическом изменении параметров системы. Площадь эллипса

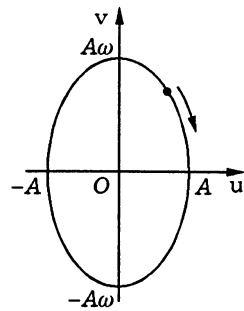


Рис. 4.9

$$\pi A \cdot \omega A = \pi \omega \left(u_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{mc}} \left(m \frac{v_0^2}{2} + c \frac{u_0^2}{2} \right)$$

в соответствии с (4.17) пропорциональна полной энергии системы. Если $u_0 = 0$ и $v_0 = 0$, то $W = 0$ и фазовая траектория вырождается в точку, расположенную в начале координат. В этом случае эта точка является устойчивым по Ляпунову положением равновесия, называемым *центром*.

Учитывая равенство $\Delta U = L \frac{dI}{dt}$ для падения напряжения на катушке индуктивности, представим (4.15) в виде

$$L \frac{d}{dt} \left(\frac{dI}{dt} \right) + \frac{I}{C} = \frac{d\Delta U}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{d\Delta U}{dI} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{\Delta U}{L} \frac{d\Delta U}{dI} + \frac{I}{C} = 0,$$

или $\frac{C}{2} d(\Delta U)^2 + \frac{L}{2} dI^2 = 0$. После интегрирования получим $\frac{C}{2} (\Delta U)^2 + \frac{L}{2} I^2 = \text{const}$, т.е. сумма энергии электрического поля конденсатора и энергии магнитного поля катушки индуктивности (см. 3.1) в любой момент времени остается постоянной. Аналогичный результат можно получить путем преобразования (4.16). Ясно, что в фазовой плоскости $IO\Delta U$ гармонические колебания в контуре, изображенном на рис. 4.7, представляются замкнутой фазовой траекторией, имеющей форму эллипса.

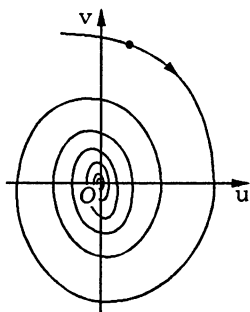


Рис. 4.10

Напомним [VIII], что затухающим колебаниям линейного осциллятора в фазовой плоскости uOv соответствует фазовая траектория в виде спирали, „наматывающаяся“ на начало координат (рис. 4.10). В этом случае оно является положением равновесия, называемым *устойчивым фокусом* и соответствующим асимптотически устойчивому частному решению ОДУ (4.10) при $P^*(t) \equiv 0$ и начальных значениях $t = u(0) = v(0) = 0$.

Если $\omega \leq h$, то решение

$$u(t) = u_0 e^{-ht} \left(1 + \frac{v_0 + hu_0}{bu_0} \text{th} bt \right) \text{ch} bt, \quad b = \sqrt{h^2 - \omega^2}, \quad (4.18)$$

ОДУ (4.10) при $P^*(t) \equiv 0$ и начальных условиях $u(0) = u_0$ и $v(0) = v_0$ описывает так называемое затухающее аperiодическое движение тела. Так как $\text{th} bt$ при $t \in [0, +\infty)$ изменяется в пределах от 0 до 1, то из (4.18) следует, что перемещение $u(t)$ сохраняет знак u_0 при условии $\frac{v_0}{u_0} + h + b > 0$. Этому условию удовлетворяют точки (u_0, v_0) фазовой плоскости, расположенные при $u_0 > 0$ над прямой $v = -(b+h)u$, а при $u_0 < 0$ — под этой прямой (рис. 4.11). Если начальная точка расположена в первом или третьем квадранте фазовой плоскости, то затухание немонотонное (сплошная кривая на рис. 4.12), а монотонно-

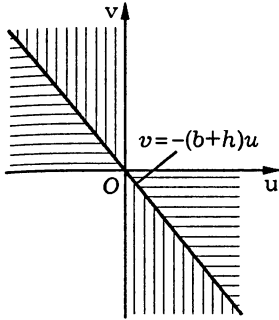


Рис. 4.11

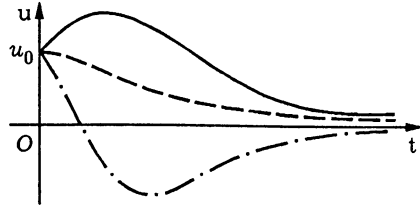


Рис. 4.12

му затуханию (штриховая кривая на рис. 4.12) соответствуют области, отмеченные на рис. 4.11 горизонтальной штриховкой. Расположение начальной точки в областях с вертикальной штриховкой (см. рис. 4.11) приводит к затуханию с переменной знака перемещения (штрихпунктирная линия на рис. 4.12).

Если $\omega = h$, то корни *характеристического уравнения* ОДУ (4.10) кратные. Тогда решение $u(t) = (u_0 + (v_0 + hu_0)t)e^{-ht}$ можно получить из (4.18) предельным переходом при $b \rightarrow 0$. Этот случай соответствует лишь формальной границе между колебательными и аperiodическими процессами, поскольку реально добиться на практике точного выполнения равенства $\omega = h$ не удастся. При $\omega \approx h$ система, выведенная из положения равновесия, быстрее всего приближается к нему. Это свойство используют при проектировании амортизаторов и виброзащитных устройств, при подборе параметров успокоителей в стрелочных измерительных приборах и других ТО.

Ясно, что все варианты решения ОДУ (4.10), полученные выше при $P^*(t) \equiv 0$, останутся в силе и при $P^*(t) \equiv P = \text{const}$, если отсчет значений u_0 и функции $u(t)$ вести от значения $u^\circ = P/c$. При изменении внешней силы по закону $P^*(t) = P \cos pt$ ОДУ (4.10) можно записать в виде

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + 2h \frac{du(t)}{dt} + \omega^2 u(t) = u^\circ \omega^2 \cos pt.$$

Несложно проверить, что этому ОДУ удовлетворяет частное решение $\tilde{u}(t) = A(p) \cos(pt + \beta(p))$, где

$$A(p) = \frac{u^\circ}{\sqrt{(1 - p^2/\omega^2)^2 + (2hp/\omega^2)^2}}, \quad \text{tg } \beta(p) = -\frac{2hp}{\omega^2 - p^2}. \quad (4.19)$$

Вид амплитудно-частотной $A(p)$ и фазочастотной $\beta(p)$ характеристик линейного осциллятора представлен на рис. 4.13 и не зависит от начальных условий. Абсцисса максимума амплитудно-частотной характеристики при $h \rightarrow 0$ стремится к значению ω , а ордината максимума неограниченно возрастает.

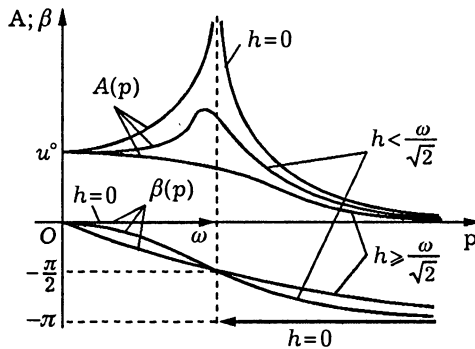


Рис. 4.13

Функция $\tilde{u}(t)$ определяет установившийся периодический процесс вынужденных колебаний осциллятора при периодическом внешнем воздействии в отличие от свободных колебаний, когда отсутствует переменное во времени внешнее воздействие. Свободные колебания осциллятора зависят лишь от характеристик его элементов и начальных условий (в случае гармонического осциллятора их обычно называют собственными колебаниями, поскольку их угловая частота определяется решением соответствующей задачи на собственные значения [VIII]). При $h > 0$ установлению процесса вынужденных колебаний предшествует так называемый переходный процесс, длительность которого зависит от темпа затухания сво-

бодных колебаний осциллятора. Для линейного осциллятора это затухание происходит при $t \rightarrow \infty$. Поэтому длительность переходного процесса оценивают по заданному относительному уменьшению полуразмахов свободных колебаний.

Величину $D = \frac{\omega}{2h}$ принято называть *добротностью* осциллятора. Чем выше значение D , тем ближе осциллятор к гармоническому. Так, для электрического колебательного контура при частоте $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 10^4$ Гц удастся добиться значения $D \approx 100$, для кварцевого генератора в электронных часах ($\nu = 10^5$ Гц) и микроволнового объемного резонатора ($\nu = 10^{10}$ Гц) — $D = 2 \cdot 10^4$, а для частотно-стабилизированного CO₂-лазера ($\nu = 3 \cdot 10^{13}$ Гц) — $D \approx 10^9$.

Угловую частоту $\omega_1 = \sqrt{c/m - h^2}$ колебаний механического линейного осциллятора можно выразить через его добротность и угловую частоту $\omega = \sqrt{c/m}$ гармонического осциллятора в виде $\omega_1 = \omega \sqrt{1 - 1/(2D)^2}$. При высокой добротности можно записать $\omega_1 \approx \omega(1 - 1/(8D^2))$. Эта оценка справедлива не только для механического линейного осциллятора, но и для электрического колебательного контура и вообще для любого линейного осциллятора, в котором происходят колебательные процессы произвольной физической природы.

4.4. Примеры математических моделей тепловых и гидравлических систем

Электротепловую и электрогидравлическую аналогии используем для построения эквивалентных схем и математических моделей технических объектов, относящихся к тепловым и гидравлическим системам.

Пример 4.3. В конструкциях, подверженных совместному силовому и тепловому воздействию, часто применяют покрытие металлической части конструкции, воспринимающей нагрузку, слоем теплоизоляционного материала. При нахождении температурного состояния такой конструкции обычно можно ис-

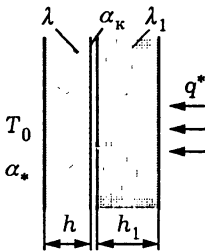


Рис. 4.14

пользовать *расчетную схему* двухслойной пластины, состоящей из слоев металла и теплоизоляционного материала толщиной h и h_1 соответственно (рис. 4.14). Тепловой контакт между слоями примем неидеальным и обладающим *термическим сопротивлением* $R_k = 1/\alpha_k$, где α_k — коэффициент контактного теплообмена. Пусть со стороны металла происходит конвективный теплообмен с воздухом, имеющим температуру T_0 (интенсивность теплообмена характеризуется *коэффициентом теплоотдачи* α_*), а со стороны теплоизоляционного материала пластина воспринимает тепловой поток плотностью q^* . Коэффициенты теплопроводности металла λ и теплоизоляционного материала λ_1 считаем не зависящими от температуры.

При установившемся распределении температуры металл и теплоизоляционный материал не поглощают тепловую энергию, а лишь оказывают сопротивление проходящему через пластину тепловому потоку плотностью q^* . При этом термические сопротивления слоев теплоизоляционного материала и металла, приходящиеся на единицу поверхности пластины, будут h_1/λ_1 и h/λ соответственно (см. 3.3), а термическое сопротивление теплоотдачи к воздуху — $1/\alpha_*$. Поэтому эквивалентную схему пластины можно представить в виде цепи из четырех последовательно соединенных сопротивлений R_* , R , R_k и R_1 (рис. 4.15), удовлетворяющих, согласно электротепловой аналогии, равенству

$$\frac{R_*}{1/\alpha_*} = \frac{R}{h/\lambda} = \frac{R_k}{1/\alpha_k} = \frac{R_1}{h_1/\lambda_1}. \quad (4.20)$$

К левому концу этой цепи присоединен источник, задающий постоянное напряжение U_0 , пропорциональное температуре T_0 , а к правому концу — источник, задающий постоянную силу I^* электрического тока, пропорциональную плотности q^* теплового потока. Отметим, что если отсчитывать установившееся распределение температуры от значения T_0 , то вместо

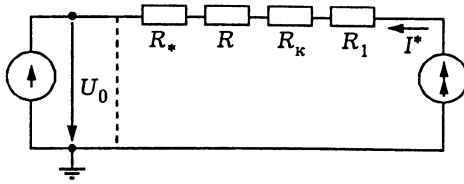


Рис. 4.15

присоединения источника напряжения достаточно левый конец цепи соединить с заземленным проводом (штриховая линия на рис. 4.15).

При установившемся распределении температуры через всю пластину проходит тепловой поток постоянной плотности q^* . Поэтому по аналогии с *законом Ома* в соответствии с (3.18) и (4.20) для перепадов температуры получим

$$T_* - T_0 = q^* \frac{1}{\alpha_*}, \quad T_k - T_* = q^* \frac{h}{\lambda},$$

$$T_{k1} - T_k = q^* \frac{1}{\alpha_k}, \quad T^* - T_k = q^* \frac{h_1}{\lambda_1},$$

где T_* и T_k — температуры поверхностей слоя металла со стороны воздуха и теплоизоляционного материала соответственно; T_{k1} и T^* — температуры поверхностей слоя теплоизоляционного материала со стороны металла и подводимого теплового потока соответственно. Эти равенства составляют *стационарную математическую модель* процесса теплопроводности в пластине. Из них последовательно можно вычислить все значения температур на поверхностях слоев пластины, а по толщине каждого слоя установившееся распределение температуры является линейным (см. 3.3).

Коэффициент теплопроводности металла обычно на два и более порядка превышает коэффициент теплопроводности теплоизоляционного материала, т.е. $\lambda \gg \lambda_1$. Поэтому при сопоставимых значениях h и h_1 термическим сопротивлением h/λ слоя металла можно пренебречь по сравнению с термичес-

ким сопротивлением h_1/λ_1 слоя теплоизоляционного материала. Это означает, что в эквивалентной схеме (см. рис. 4.15) можно принять $R = 0$ и считать, что $T_* = T_k$.

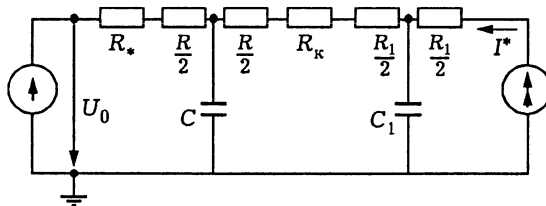


Рис. 4.16

Неустановившийся во времени t процесс теплопроводности в пластине описывает *нестационарная математическая модель*, учитывающая наряду с термическими сопротивлениями слоев их свойство тепловой емкости. Пусть c и c_1 — объемные теплоемкости металла и теплоизоляционного материала соответственно, а начальная температура пластины совпадает с температурой T_0 воздуха. Сосредоточим *полные теплоемкости* слоев hc и h_1c_1 , приходящиеся на единицу площади поверхности пластины в плане, в серединах соответствующих слоев. В эквивалентной схеме полные теплоемкости представим конденсаторами (рис. 4.16), емкости которых удовлетворяют равенству $\frac{C}{hc} = \frac{C_1}{h_1c_1}$, а напряжения U и U_1 на обкладках этих конденсаторов пропорциональны температурам T и T_1 середин слоев металла и теплоизоляционного материала соответственно. Используя для узлов схемы с этими напряжениями первый из *законов Кирхгофа* и закон Ома для сопротивлений, получаем

$$\begin{cases} C \frac{dU(t)}{dt} = \frac{U_1(t) - U(t)}{\frac{R_1}{2} + R_k + \frac{R}{2}} + \frac{U_0 - U(t)}{\frac{R}{2} + R_*}, \\ C_1 \frac{dU_1(t)}{dt} = \frac{U(t) - U_1(t)}{\frac{R_1}{2} + R_k + \frac{R}{2}} + I^*. \end{cases} \quad (4.21)$$

Отсюда, учитывая (4.20), приходим к системе двух ОДУ первого порядка

$$\begin{cases} hc \frac{dT(t)}{dt} = \frac{T_1(t) - T(t)}{\frac{h_1}{2\lambda_1} + \frac{1}{\alpha_k} + \frac{h}{2\lambda}} + \frac{T_0 - T(t)}{\frac{h}{2\lambda} + \frac{1}{\alpha_*}}, \\ h_1 c_1 \frac{dT_1(t)}{dt} = \frac{T(t) - T_1(t)}{\frac{h_1}{2\lambda_1} + \frac{1}{\alpha_k} + \frac{h}{2\lambda}} + q^* \end{cases} \quad (4.22)$$

относительно искомых температур T и T_1 .

Решение системы (4.22), найденное при начальном условии $T(0) = T_1(0) = T_0$, позволяет затем по аналогии с законом Ома вычислить для любого момента времени значения температур на поверхностях слоев пластины:

$$\begin{cases} T^*(t) = T_1(t) + q^* \frac{h_1}{2\lambda_1}, \\ T_*(t) = T(t) - \frac{T(t) - T_0}{h/(2\lambda) + 1/\alpha_*} \frac{h}{2\lambda}, \\ T_k(t) = T(t) + \frac{T_1(t) - T(t)}{h_1/(2\lambda_1) + 1/\alpha_k + h/(2\lambda)} \frac{h}{2\lambda}, \\ T_{k1}(t) = T_1(t) - \frac{T_1(t) - T(t)}{h_1/(2\lambda_1) + 1/\alpha_k + h/(2\lambda)} \frac{h_1}{2\lambda_1}. \end{cases} \quad (4.23)$$

Если допустимо пренебречь термическим сопротивлением слоя металла, то в (4.21) следует положить $R = 0$, а в (4.22) — $h/\lambda = 0$. Тогда вместо (4.23) получим

$$\begin{aligned} T^*(t) &= T_1(t) + q^* \frac{h_1}{2\lambda_1}, & T_*(t) &= T_k(t) = T(t), \\ T_{k1}(t) &= T_1(t) - \frac{T_1(t) - T(t)}{h_1/(2\lambda_1) + 1/\alpha_k} \frac{h_1}{2\lambda_1}. \end{aligned}$$

Пример 4.4. Тонкостенная цилиндрическая металлическая оболочка, подкреплённая продольным силовым набором

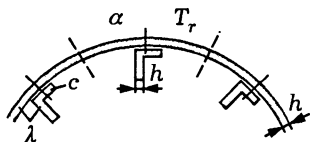


Рис. 4.17

(рис. 4.17), является одним из характерных элементов конструкции летательного аппарата. В условиях *аэродинамического нагрева* в такой оболочке возникает неравномерное распределение температуры, которое вызывает в конструкции дополнительные напряжения, влияющие на ее работоспособность*. Нагрев происходит путем конвективного теплообмена с воздушным потоком, характеризуемого коэффициентом теплоотдачи α и температурой T_r восстановления. Теплообменом оболочки с воздухом, находящимся в ее полости, можно в первом приближении пренебречь. Интенсивность передачи теплоты от оболочки к присоединенным к ней полкам подкрепляющих уголков определяется коэффициентом α_k контактного теплообмена. Толщина h оболочки и уголков, а также коэффициент теплопроводности λ и объемная теплоемкость c их материалов одинаковы, причем начальная температура всей конструкции $T_0 < T_r$.

Построим упрощенную расчетную схему повторяющегося элемента подкрепленной оболочки, границы которого отмечены на рис. 4.17 штриховыми линиями. Эта схема содержит пять участков (рис. 4.18): полку 4 и стенку 5 уголка и три участка 1-3, принадлежащие собственно оболочке, причем средний из них — участок 2 — контактирует с полкой уголка. Штриховой линией на рис. 4.18 показан участок 1 соседнего повторяющегося элемента, контактирующий с участком 3 рассматриваемого элемента. Приходящуюся на единицу длины оболочки полную теплоемкость $\tilde{C}_i = hl_i c$, $i = \overline{1, 5}$, каждого участка длиной l_i сосредоточим в его центре масс, имеющем температуру T_i . Тогда, согласно электротепловой аналогии, в эквивалентной схеме, представленной на (рис. 4.19), емкости C_i конденсаторов пропорциональны значениям \tilde{C}_i , сопротивления

*См.: Зарубин В.С. (1966 г.)

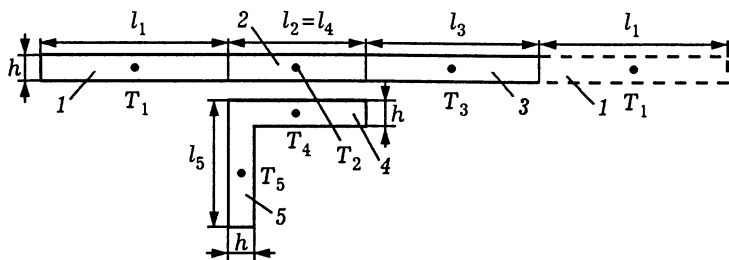


Рис. 4.18

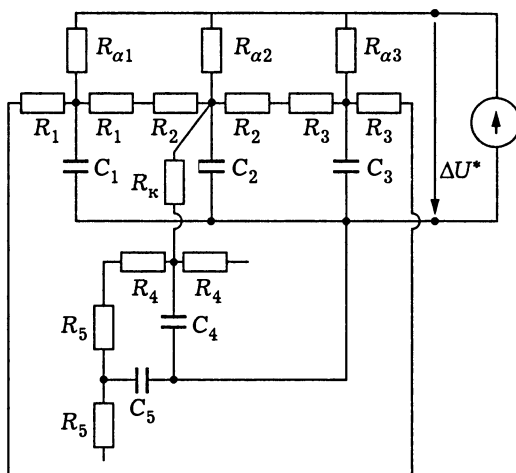


Рис. 4.19

пропорциональны соответствующим термическим сопротивлениям и удовлетворяют равенству

$$\begin{aligned} \frac{R_{\alpha 1}}{1/(\alpha l_1)} &= \frac{R_{\alpha 2}}{l/(\alpha l_2)} = \frac{R_{\alpha 3}}{l/(\alpha l_3)} = \frac{R_1}{l_1/(2h\lambda)} = \frac{R_2}{l_2/(2h\lambda)} = \\ &= \frac{R_3}{l_3/(2h\lambda)} = \frac{R_k}{1/(\alpha_k l_2)} = \frac{R_4}{l_4/(2h\lambda)} = \frac{R_5}{l_5/(2h\lambda)}, \end{aligned}$$

а разность ΔU^* напряжений, задаваемая источником электрического напряжения, пропорциональна разности $T_r - T_0$ температур.

Используя первый закон Кирхгофа для узлов эквивалентной схемы, можно составить систему пяти ОДУ первого порядка относительно напряжений в этих узлах, а затем перейти к системе ОДУ относительно искомым температур T_i , $i = \overline{1, 5}$, в центрах масс участков расчетной схемы (см. рис. 4.18) рассматриваемой конструкции.

Пример 4.5. Гидравлическая система подвода воды через плотину к турбинам гидроэлектростанции 6 из водохранилища 1 включает напорный туннель 2 и трубопровод 4, между которыми расположен цилиндрический уравнивающий резервуар 3 (рис. 4.20). При регулировании заслонкой 5 подвода воды к турбинам уравнивающий резервуар уменьшает колебания давления в системе*. В частности, возникающий при быстром закрытии заслонки гидравлический удар в системе определяется длиной l_4 напорного трубопровода, а не величиной $l_2 + l_4$, где l_2 — длина напорного туннеля.

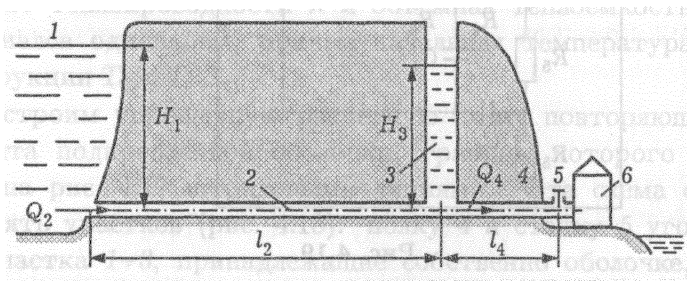


Рис. 4.20

При закрытой заслонке уровни H_1 и H_3 воды соответственно в водохранилище и уравнительном резервуаре, отсчитываемые от уровня расположения турбин, одинаковы. При неизменном положении открытой заслонки объемный расход Q_4 воды и ее давление (напор H_6) перед турбинами постоянны. При этом $\rho g(H_1 - H_3) = Q\bar{R}_2$, где ρ — плотность воды, g — ускорение свободного падения, \bar{R}_2 — гидравлическое сопротивление тун-

*См.: Чугаев Р.Р.

неля (см. 3.4). Но изменение положения заслонки приводит к возникновению *переходного процесса*, связанного с изменением Q_4 , H_3 и H_6 во времени t .

Обозначим \tilde{R}_4 и \tilde{R}_5 — постоянное и регулируемое гидравлические сопротивления напорного трубопровода и заслонки соответственно, \tilde{R}_6 — гидравлическое сопротивление турбин. В силу *электродинамической аналогии* сопротивления R_i , $i = 2, 4, 5, 6$, резисторов эквивалентной схемы (рис. 4.21) рассматриваемой гидравлической системы должны быть пропорциональны соответствующим гидравлическим сопротивлениям \tilde{R}_i , емкость C_3 конденсатора — гидравлической емкости $\tilde{C}_3 = \frac{S_3}{\rho g}$ уравнивающего резервуара с поперечным сечением площадью S_3 , а индуктивности L_2 и L_4 — гидравлическим индуктивностям $\tilde{L}_2 = \rho l_2 / S_2$ и $\tilde{L}_4 = \rho l_4 / S_4$ напорных туннеля и трубопровода с поперечными сечениями площадью S_2 и S_4 соответственно. Напряжение U_1 источника пропорционально давлению $p_1 = \rho g H_1$ на входе в напорный туннель, которое благодаря большому объему водохранилища можно считать постоянным.

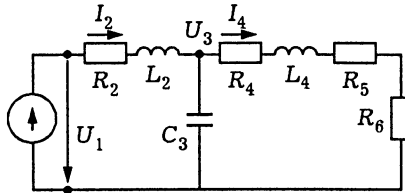


Рис. 4.21

Согласно первому закону Кирхгофа, для узла эквивалентной схемы с напряжением U_3 , пропорциональным давлению $p_3 = \rho g H_3$ воды в месте соединения туннеля и трубопровода, запишем

$$C_3 \frac{dU_3}{dt} = I_2 - I_4, \quad (4.24)$$

где I_2 , I_4 — силы токов в ветвях схемы, пропорциональные текущим значениям объемных расходов Q_2 и Q_4 через туннель и трубопровод соответственно. Используя второй закон Кирхго-

фа для каждого из двух контуров схемы при их обходе по ходу часовой стрелки, получаем

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} + I_2 R_2 + U_3 = U_1, \quad L_4 \frac{dI_4}{dt} + I_4 (R_4 + R_5 + R_6) = U_3. \quad (4.25)$$

Теперь от (4.24) и (4.25) можно перейти к нормальной системе трех ОДУ

$$\begin{cases} \frac{dp_3}{dt} = \frac{Q_2 - Q_4}{\tilde{C}_3}, \\ \frac{dQ_2}{dt} = \frac{p_1 - p_3 - Q_2 \tilde{R}_2}{\tilde{L}_2}, \\ \frac{dQ_4}{dt} = \frac{p_3 - Q_4 (\tilde{R}_4 + \tilde{R}_5 + \tilde{R}_6)}{\tilde{L}_4} \end{cases} \quad (4.26)$$

относительно p_3 , Q_2 и Q_4 . Для ее решения необходимо задать значения этих величин в начальный момент времени $t = 0$. Например, если заслонка сначала была закрыта ($\tilde{R}_5 \rightarrow \infty$), а затем ее открывают и \tilde{R}_5 принимает некоторое конечное значение, то при $t = 0$ имеем $p_3 = p_1$, $Q_2 = Q_4 = 0$.

Если в (4.26) исключить p_3 , то получим систему двух ОДУ второго порядка относительно Q_2 и Q_4 . Для ее решения помимо равенства $Q_2 = Q_4 = 0$ при $t = 0$ следует использовать начальные условия $\frac{dQ_2}{dt} = 0$ и $\frac{dQ_4}{dt} = \frac{p_1}{\tilde{L}_4}$, вытекающие из второго и третьего ОДУ (4.26). Наконец, в (4.26) можно исключить Q_2 , Q_4 и прийти к ОДУ третьего порядка относительно p_3 с начальными условиями $p_3 = p_1$, $\frac{dp_3}{dt} = 0$ и $\frac{d^2 p_3}{dt^2} = -\frac{p_1}{\tilde{L}_4}$ при $t = 0$ (равенства для первой и второй производных от p_3 следуют из первого ОДУ (4.26) непосредственно и после дифференцирования этого ОДУ по времени).

После нахождения зависимостей p_3 , Q_2 и Q_4 от t можно получить законы изменения во времени напора $H_6 = \frac{Q_4 R_6}{\rho g}$ воды перед турбинами и уровня $H_3 = \frac{p_3}{\rho g}$ в уравнительном резервуаре.

4.5. Формализация построения математической модели сложной системы

Математическую модель (ММ) технической системы, состоящей из небольшого числа типовых элементов, нетрудно построить на основе эквивалентной схемы этой системы путем непосредственного применения к такой схеме законов Кирхгофа (см. 4.2–4.4). Для сложной системы, состоящей из большого числа элементов, удобно от эквивалентной схемы перейти к связному ориентированному графу. При этом узлы эквивалентной схемы соответствуют вершинам графа, а ее ветви — его ребрам.

На первом этапе каждой ветви эквивалентной схемы необходимо дать произвольное, но вполне определенное направление. Так, для эквивалентной схемы, построенной в примере 4.1 и представленной на рис. 4.4, возможен выбор направлений, указанных стрелками на рис. 4.22. Соответствующий связный ориентированный граф изображен на рис. 4.23, причем номера

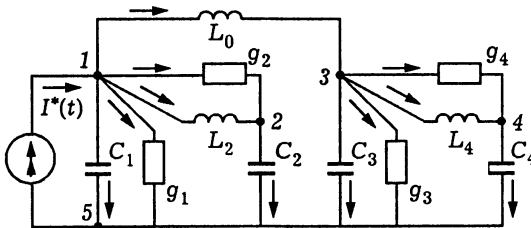


Рис. 4.22

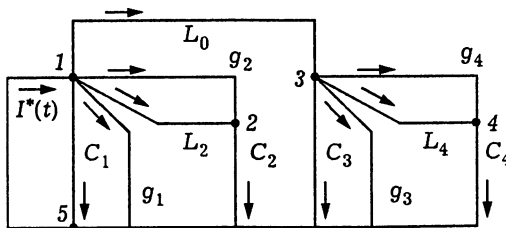


Рис. 4.23

вершин совпадают с номерами узлов исходной эквивалентной схемы, а обозначения дуг ориентированного графа — с обозначением типовых элементов в ее ветвях.

Ориентированный граф, соответствующий эквивалентной схеме технической системы и представленный в виде рисунка, является удобным и наглядным средством визуализации связей между элементами этой системы. Но для отражения этих связей в алгоритме построения ММ системы необходимо перейти к формализованному представлению ориентированного графа в виде матрицы инцидентий A_* размера $n \times m$, где n — число вершин графа, m — число его дуг. Элементы этой матрицы имеют следующие значения:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & j\text{-я дуга выходит из } i\text{-й вершины;} \\ -1, & j\text{-я дуга входит в } i\text{-ю вершину;} \\ 0, & i\text{-я вершина не является концом } j\text{-й дуги.} \end{cases}$$

Для ориентированного графа, изображенного на рис. 4.23, элементы матрицы инцидентий представлены в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Номер вершины	Обозначения дуг											
	$I^*(t)$	C_1	g_1	g_2	L_0	L_2	C_2	C_3	g_3	g_4	L_4	C_4
1	-1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	-1	0	-1	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	-1	0	0	1	1	1	1	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	1
5	1	-1	-1	0	0	0	-1	-1	-1	0	0	-1

В каждом столбце матрицы инцидентий A_* имеются два ненулевых элемента, в сумме равные нулю, поскольку каждая дуга ориентированного графа связывает две вершины, причем из одной вершины она выходит, а в другую входит. Таким образом, строки матрицы A_* являются линейно зависимыми, т.е. ее ранг не превышает $n - 1$. Но он и не меньше $n - 1$,

так как в противном случае, если сумма каких-либо $n - 1$ или меньшего числа строк содержит только нулевые элементы, это означает, что вершины, соответствующие этим строкам, не связаны дугами с остальными вершинами.

Пусть I — матрица-столбец размера $m \times 1$, элементами которой являются значения силы электрического тока в ветвях эквивалентной схемы (положительные значения соответствуют выбранным направлениям дуг ориентированного графа). Тогда получим систему n уравнений $A_* I = \mathbf{0}_m$, где $\mathbf{0}_m \in \mathbb{R}^m$ — нулевой вектор, каждое из которых устанавливает равенство нулю алгебраической суммы токов во всех ветвях, имеющих общий узел, т.е. выражает первый закон Кирхгофа. Из этих уравнений $n - 1$ являются независимыми. Поэтому одну из строк в матрице инцидентий ориентированного графа можно вычеркнуть. Обычно вычеркивают строку, содержащую наибольшее число ненулевых элементов. Такая строка соответствует вершине, являющейся общей для наибольшего числа дуг. В результате получают новую матрицу A размера $(n - 1) \times m$, причем $\text{Rg } A = n - 1$. Для матрицы инцидентий ориентированного графа, изображенного на рис. 4.23, целесообразно вычеркнуть пятую строку (см. табл. 4.3), и тогда новая матрица примет вид

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если ММ типовых элементов рассматриваемой технической системы явно разрешены относительно потоковой величины, то ММ этой системы являются $n - 1$ уравнений $AI = \mathbf{0}_m$ относительно $n - 1$ потенциальных величин в узлах эквивалентной схемы, отсчитываемых от принимаемого за нуль значения потенциальной величины в узле, который соответствует строке, вычеркнутой из матрицы инцидентий A_* . Несложно проверить, что для представленной на рис. 4.22 эквивалентной схемы эти уравнения совпадут с полученными в примере 4.1.

Использование ориентированного графа, соответствующего эквивалентной схеме технической системы, возможно и в более общем случае, когда ММ элементов этой системы не разрешены явно относительно потоковых величин. В этом случае ориентированный граф путем удаления некоторых дуг необходимо предварительно преобразовать в *остовное дерево*.

Дополнение 4.1. Уточнение математической модели линейного осциллятора

Выше (см. 4.3) рассмотрена *математическая модель* (ММ) *гармонического осциллятора*, включающего движущееся тело 1, связанное с неподвижной опорой 2 упругим элементом (пружиной) 3 (рис. 4.24). В этой механической системе при построении ММ учтена лишь масса m движущегося тела и пренебрегается массой упругого элемента. Однако в действительности масса упругого элемента может быть сопоставима по величине с m , что может существенно повлиять на *период колебаний* осциллятора.

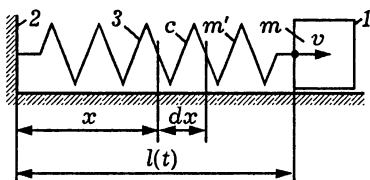


Рис. 4.24

Из энергетической трактовки *уравнения гармонического осциллятора* следует, что при колебаниях такого осциллятора его полная энергия, равная сумме кинетической энергии движущегося тела и потенциальной энергии упругого элемента, остается постоянной (см. 4.3). Но закон сохранения энергии должен выполняться, если учесть и ту часть кинетической энергии, которой при колебаниях тела будет обладать упругий элемент (например, пружина массой m').

Предположим сначала, что растяжение или сжатие пружины при колебаниях тела является равномерным по длине $l(t)$, которую она имеет в текущий момент времени t . Если в этот момент времени тело имеет скорость v , то участок пружины длиной dx , находящийся на расстоянии x от точки ее крепления к опоре (см. рис. 4.24), будет иметь массу $\frac{m'}{l} dx$ и скорость $\frac{vx}{l}$. Кинетическую энергию пружины найдем интегрированием по ее текущей длине l :

$$K' = \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{vx}{l} \right)^2 \frac{m'}{l} dx = \frac{m'v^2}{2l^3} \int_0^l x^2 dx = m' \frac{v^2}{6}.$$

С учетом полученного выражения и (4.17) для полной энергии осциллятора имеем

$$W' = K' + W = m' \frac{v^2}{6} + m \frac{v^2}{2} + c \frac{u^2}{2},$$

где u — перемещение тела в текущий момент времени t относительно положения равновесия. Учитывая, что $v = \frac{du}{dt}$, получаем условие выполнения закона сохранения энергии в виде

$$\frac{dW'}{dt} = (m + m'/3)v \frac{dv}{dt} + cu \frac{du}{dt} = v \left((m + m'/3) \frac{d^2u}{dt^2} + cu \right) = 0.$$

При произвольных значениях v следует, что в предпоследней части этого равенства должно быть равно нулю выражение в больших скобках, т.е.

$$(m + m'/3) \frac{d^2u}{dt^2} + cu = 0. \quad (4.27)$$

Сравнивая (4.27) с (4.13), приходим к выводу, что влияние массы пружины можно учесть, если к массе m тела прибавить треть массы m' пружины. Это поправочное слагаемое называют в данном случае присоединенной массой пружины. В итоге

получим уточненные значения *угловой частоты колебаний* и периода колебаний осциллятора

$$\omega' = \sqrt{\frac{c}{m + m'/3}}, \quad T' = \frac{2\pi}{\omega'} = 2\pi \sqrt{\frac{m + m'/3}{c}} \quad (4.28)$$

соответственно. Значение $\delta_T = \sqrt{1 + m'/(3m)} - 1$ оценивает относительную погрешность вычисления периода колебаний на основе ММ (4.13) по сравнению с уточненной ММ (4.27). При $m' < m/10$ можно принять, что $\delta_T \approx m'/(6m) < 0,02$.

Следует отметить, что допущение о равномерном растяжении или сжатии пружины при колебаниях тела приемлемо, если время Δt распространения возмущений вдоль пружины существенно меньше периода T' колебаний осциллятора*. Для оценки значения δt закрепленную одним концом пружину длиной l_0 в

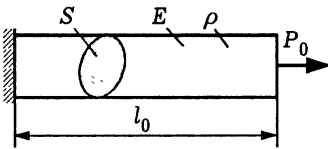


Рис. 4.25

свободном состоянии и массой m' представим прямолинейным однородным стержнем той же длины и массы, имеющим постоянное поперечное сечение S (рис. 4.25). Материал стержня примем линейно упругим с модулем упругости E . Сила P_0 , приложенная к свободному концу пружины, вызовет его перемещение $u_0 = P_0/c$. Для стержня аналогичное соотношение с учетом закона Гука $\sigma = E\varepsilon$ (где $\sigma = P_0/S$ и $\varepsilon = u_0/l_0$ — напряжение в поперечном сечении стержня и его продольная деформация соответственно) примет вид $u_0 = \varepsilon l_0 = \frac{P_0 l_0}{SE}$. Таким образом, упругие характеристики стержня и пружины эквивалентны при выполнении равенства $E = cl_0/S$, а массы стержня и пружины одинаковы, если его плотность равна $\rho = \frac{m'}{l_0 S}$.

Скорость распространения возмущений вдоль стержня и пружины с эквивалентными упругими и инерционными характеристиками одинакова и равна скорости $a = \sqrt{E/\rho} = l_0 \sqrt{c/m'}$

* См.: Мышкис А.Д.

звука в материале стержня [XII]. За Δt примем суммарное время прохождения возмущения вдоль пружины сначала в одном, а затем в другом направлении, т.е. $\Delta t = 2l_0/a = 2\sqrt{m'/c}$. Тогда допущение о равномерном растяжении или сжатии пружины при колебаниях будет приемлемо, если $\Delta t \ll T'$, или $2\sqrt{\frac{m'}{c}} \ll 2\pi\sqrt{\frac{m+m'/3}{c}}$. Если считать, что символ \ll („существенно меньше“) означает „меньше по крайней мере на порядок, т.е. в 10 раз“, то получим оценку $10\sqrt{m'} < \pi\sqrt{m+m'/3}$, или $(\frac{100}{\pi^2} - \frac{1}{3})m' \approx 10m' < m$. При выполнении этого неравенства можно считать, что поправка в (4.28) в виде присоединенной массы пружины оправдана, хотя сама поправка при этом составляет не более 1/30 массы колеблющегося тела.

Более полную ММ осциллятора, в которой пружина представлена стержнем, эквивалентным по инерционным и упругим характеристикам пружине, можно построить на основе *расчетной схемы*, представленной на рис. 4.26. При $x = 0$ один торец стержня длиной l_0 с постоянным поперечным сечением площадью S неподвижно прикреплен к опоре, а ко второму присоединено тело массой m . Переменное во времени t продольное перемещение $u(x, t)$ поперечного сечения с координатой x удовлетворяет волновому уравнению [XII]

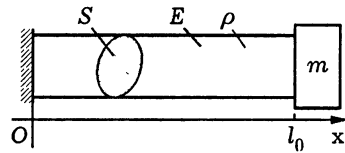


Рис. 4.26

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = l_0 \sqrt{\frac{c}{m'}}, \quad (4.29)$$

описывающему колебания в линейно упругом стержне с модулем упругости E и плотностью ρ материала. Граничные условия при этом с учетом закона Гука и второго закона Ньютона имеют вид

$$u(0, t) = 0, \quad E\varepsilon(l_0, t)S = E \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} S \Big|_{x=l_0} = -m \frac{\partial^2 u(l_0, t)}{\partial t^2}. \quad (4.30)$$

Предполагая гармонический характер колебаний с угловой частотой p , т.е. $u(x, t) = X(x) \sin pt$, из (4.29) и (4.30) получаем линейное однородное ОДУ

$$a^2 \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + p^2 X(x) = 0$$

относительно функции $X(x)$ и граничные условия

$$X(0) = 0, \quad ES \frac{dX(x)}{dx} \Big|_{x=l_0} = mp^2 X(l_0).$$

Это ОДУ имеет решение

$$X(x) = D_1 \cos \frac{px}{a} + D_2 \sin \frac{px}{a}.$$

Из граничного условия при $x = 0$ следует, что $D_1 = 0$, а из граничного условия при $x = l_0$ для произвольного значения D_2 находим

$$ES \frac{p}{a} \cos \frac{pl_0}{a} = mp^2 \sin \frac{pl_0}{a},$$

откуда, обозначая $\mu = pl_0/a$ и учитывая выражение для a в (4.29) и то, что $\rho l_0 S = m'$, получаем

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{m}{m'} \mu. \quad (4.31)$$

По смыслу задачи нас интересуют лишь неотрицательные корни этого трансцендентного уравнения. Таких корней будет бесконечное множество (рис. 4.27).

При отсутствии на конце стержня сосредоточенной массы ($m = 0$) $\mu_n = (2n - 1)\pi/2$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует бесконечный дискретный спектр угловых частот

$$p_n = \frac{2n - 1}{2} \frac{\pi}{l_0} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{2n - 1}{2} \pi \sqrt{\frac{c}{m'}}$$

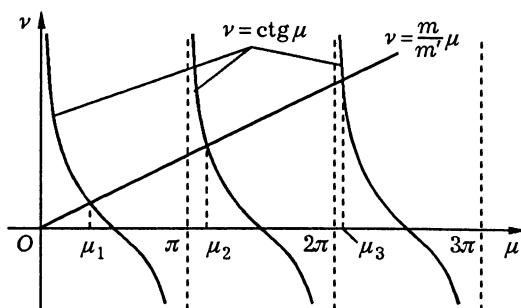


Рис. 4.27

собственных продольных колебаний линейно упругого стержня, один торец которого закреплен неподвижно, а второй свободен, причем значения p_n называют **собственными частотами** таких колебаний. Низшая частота $p_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{c/m'}$ соответствует периоду $T_1 = 2\pi/p_1 = 2\sqrt{m'/c}$ колебаний по первому (низшему, или основному) тону, когда возникает так называемая стоячая волна с узлом на закрепленном торце стержня и пучностью на его свободном торце [XII]. Эта волна отвечает первой (низшей, или основной) гармонике $\sin \frac{p_1 x}{a}$, или $\sin \frac{\pi x}{2l_0}$, которую обычно называют **формой колебаний** по основному тону. Характерно, что период T_1 собственных колебаний по первому тону совпадает с суммарным временем Δt прохождения возмущения вдоль стержня (или пружины) сначала в одном, а затем в другом направлении.

При наличии на конце стержня сосредоточенной массы ($m \neq 0$) $\mu_1 < \pi/2$ (см. рис. 4.27), причем с ее увеличением значения μ_1 и p_1 убывают. Например, в случае $m = m'$ из (4.31) можно найти $\mu_1 \approx 0,8603$ и, учитывая, что $\mu_1 = p_1 \sqrt{m'/c}$, вычислить $p_1 \approx 0,8603 \sqrt{c/m} = 0,8603\omega$, т.е. в случае равенства масс тела и упругого элемента (пружины) низшая частота колебаний будет примерно на 14% ниже частоты ω колебаний гармонического осциллятора, вычисленной без учета массы m' упругого элемента. Учет поправки на присоединенную массу упругого

элемента в данном случае, согласно (4.28), дает значение

$$\omega' = \sqrt{\frac{c}{m + m'/3}} = \sqrt{\frac{c}{m}} \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0,8660\omega,$$

т.е. отличие от более строго полученного значения p_1 составляет менее 1%. Такая точность обычно достаточна в инженерной практике для оценки низшей частоты колебаний.

Таким образом, ограничение на способ учета массы упругого элемента согласно (4.28), введенное из сравнения времени распространения возмущений и периода колебаний, оказалось слишком жестким. Причина в данном случае состоит в том, что частота колебаний является интегральной характеристикой осциллятора и ее значение слабо зависит от локальных особенностей в распределении его параметров (в частности, от степени равномерности растяжения или сжатия пружины при колебаниях).

Отметим, что в электрическом высокочастотном *колебательном контуре* аналогом массы упругого элемента является так называемая паразитная емкость индуктивной катушки (см. Д.3.3), что соответствует II варианту *электромеханической аналогии* (см. 4.2).

Дополнение 4.2. О построении математических моделей механических систем

Для построения *математической модели* (ММ) механической системы наряду с *эквивалентной схемой* часто удобно использовать рассматриваемые в курсе теоретической механики общие уравнения динамики такой системы*. В связи с этим напомним некоторые основные понятия.

Под *обобщенными координатами* понимают совокупность n параметров q_j , $j = \overline{1, n}$, достаточную для определения

*См.: Маркеев А.П.

положения системы в пространстве. Обобщенные координаты и их производные \dot{q}_j по времени t , называемые *обобщенными скоростями*, в общем случае должны подчиняться условиям, отражающим ограничения на движение системы в пространстве. Эти ограничения в теоретической механике называют *связями*. Если ограничивающее условие можно выразить уравнением вида $\Phi(t, q_1, \dots, q_n) = 0$, то *связь голономная*. Связи, ограничивая движение системы, действуют на систему посредством сил, называемых *реакциями связи*. Допускаемые связями в фиксированный момент времени t бесконечно малые перемещения точек системы называют *возможными*. Если сумма работ реакций связи на любых возможных перемещениях равна нулю, то связь считают *идеальной*.

Обобщенные координаты, составляющие наименьшую по численности совокупность, однозначно определяющую положение механической системы в пространстве, называют *независимыми*. Число n таких координат совпадает с числом *степеней свободы* системы. Если на *консервативную систему* наложены идеальные голономные связи и она имеет n степеней свободы, то ее движение в пространстве описывают *уравнения Лагранжа второго рода**

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (4.32)$$

в независимых обобщенных координатах q_j , где $L = K - \Pi$ — *кинетический потенциал*, а K и Π — кинетическая и потенциальная энергии системы соответственно (в механике часто для L используют термины „функция Лагранжа“ или „лагранжиан“, которые в математической литературе имеют иной смысл).

Действующие на консервативную систему силы можно представить в виде так называемых *обобщенных сил* $Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$,

* См.: Лойцянский Л.Г., Лурье А.И.

$j = \overline{1, n}$. Силы, удовлетворяющие такому равенству, называют *потенциальными*. Работа потенциальной силы при переходе системы из одного положения в другое не зависит от пути этого перехода и равна изменению потенциальной энергии системы.

Потенциальные силы могут действовать и на систему, не являющуюся консервативной. К ним, например, относятся реакции упругих связей и сила тяжести. Непотенциальные силы также можно представить в виде обобщенных сил Q_j^* , если сумму работ всех внешних сил (исключая реакции связей) на возможных перемещениях записать в форме

$$\delta A = \sum_{j=1}^n Q_j^* \delta q_j, \quad (4.33)$$

где δq_j — произвольные вариации независимых обобщенных координат. Для неконсервативной системы при условии идеальности и голономности связей уравнения Лагранжа второго рода принимают вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^*, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4.34)$$

Пример 4.6. Рассмотрим свободные колебания автомобиля в вертикальной плоскости*. Перемещения, вызванные деформацией кузова автомобиля, можно считать пренебрежимо малыми по сравнению с перемещениями упругих элементов передней и задней подвесок. Для упрощения не будем учитывать влияние на колебания автомобиля его амортизаторов. Тогда *расчетную схему* (РС) автомобиля можно представить в виде абсолютно жесткого стержня, соединенного с двумя пружинами, имеющими, вообще говоря, различные жесткости c_1 и c_2 (рис. 4.28). Массу m подвешенной части автомобиля считаем сосредоточенной в центре масс C , расположенном на расстояниях a и b от пружин, а момент инерции этой части

*См.: Пановко Я.Г., Губанова И.И.

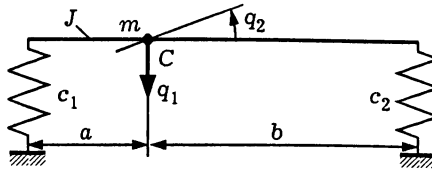


Рис. 4.28

относительно горизонтальной оси, проходящей через точку C , обозначим J .

Предположим, что в процессе колебаний центр масс не перемещается в горизонтальном положении, а нижние концы пружин закреплены неподвижно. Тогда положение механической системы, соответствующей данной РС, можно определить двумя независимыми обобщенными координатами q_1 и q_2 . В качестве q_1 примем вертикальное перемещение точки C , а в качестве q_2 — угол поворота стержня вокруг этой точки, считая этот угол настолько малым, что $\sin q_2 \approx q_2$. Если положительным для q_1 принять перемещение вниз, а для q_2 — поворот против хода часовой стрелки, то перемещения (осадки) концов пружин с жесткостями c_1 и c_2 будут равны $q_1 + aq_2$ и $q_1 - bq_2$ соответственно.

Используя соотношения для кинетической и потенциальной энергий элементов механической системы (см. 3.2), запишем выражения

$$K = m \frac{\dot{q}_1^2}{2} + J \frac{\dot{q}_2^2}{2}, \quad \Pi = c_1 \frac{(q_1 + aq_2)^2}{2} + c_2 \frac{(q_1 - bq_2)^2}{2}$$

для кинетической и потенциальной энергий системы соответственно. При свободных колебаниях рассматриваемой системы полная энергия остается постоянной; т.е. система является консервативной. Так как на эту систему наложены идеальные голономные связи, то для описания ее движения можно применить уравнения (4.32) Лагранжа второго рода, что приведет

к однородной системе линейных ОДУ

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 + (c_1 + c_2)q_1 + (c_1a - c_2b)q_2 = 0, \\ J\ddot{q}_2 + (c_1a - c_2b)q_1 + (c_1a^2 + c_2b^2)q_2 = 0 \end{cases} \quad (4.35)$$

с постоянными коэффициентами. Частное решение этой системы будем искать в виде $q_i = A_i e^{\lambda t}$, $i = 1, 2$. Подставляя эти равенства в (4.35), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\begin{cases} m\lambda^2 A_1 + (c_1 + c_2)A_1 + (c_1a - c_2b)A_2 = 0, \\ J\lambda^2 A_2 + (c_1a - c_2b)A_1 + (c_1a^2 + c_2b^2)A_2 = 0. \end{cases} \quad (4.36)$$

Она имеет ненулевое решение относительно коэффициентов A_1 и A_2 тогда и только тогда, когда равен нулю ее определитель [III], т.е.

$$\begin{vmatrix} m\lambda^2 + c_1 + c_2 & c_1a - c_2b \\ c_1a - c_2b & J\lambda^2 + c_1a^2 + c_2b^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда находим уравнение

$$\lambda^4 + \left(\frac{c_1 + c_2}{m} + \frac{c_1a^2 + c_2b^2}{J} \right) \lambda^2 + c_1c_2 \frac{(a+b)^2}{mJ} = 0, \quad (4.37)$$

имеющее решение

$$\begin{aligned} \lambda^2 = & -\frac{1}{2} \left(\frac{c_1 + c_2}{m} + \frac{c_1a^2 + c_2b^2}{J} \right) \pm \\ & \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_1 + c_2}{m} + \frac{c_1a^2 + c_2b^2}{J} \right)^2 - c_1c_2 \frac{(a+b)^2}{mJ}}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Подкоренное выражение в (4.38) положительно, так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left(\frac{c_1 + c_2}{m} + \frac{c_1a^2 + c_2b^2}{J} \right)^2 - c_1c_2 \frac{(a+b)^2}{mJ} = \\ = \frac{1}{4} \left(\frac{c_1a^2 + c_2b^2}{J} - \frac{c_1 + c_2}{m} \right)^2 + \frac{(c_1a - c_2b)^2}{mJ}. \end{aligned}$$

Следовательно, значения λ_k^2 , $k = 1, 2$, удовлетворяющие (4.37), отрицательны, т.е. все корни этого уравнения чисто мнимые. Каждому из значений λ_k^2 соответствует отношение коэффициентов

$$\frac{A_{2k}}{A_{1k}} = -\frac{m\lambda_k^2 + c_1 + c_2}{c_1a - c_2b}, \quad (4.39)$$

которое можно получить, например, из первого уравнения СЛАУ (4.36). Это отношение определяет так называемую собственную форму колебаний системы с угловой частотой $\omega = \sqrt{-\lambda_k^2} = |\lambda_k|$.

В случае $J = tab$ из (4.38) имеем $\lambda_1^2 = -\frac{c_1}{m}\left(1 + \frac{a}{b}\right)$ и $\lambda_2^2 = -\frac{c_2}{m}\left(1 + \frac{b}{a}\right)$. Подставляя эти значения в (4.39), находим $A_{21}/A_{11} = 1/b$ и $A_{22}/A_{12} = -1/a$. Формы колебаний, соответствующие этим отношениям, показаны на рис. 4.29, а и б. При колебаниях одной подвески другая остается неподвижной, т.е. они колеблются независимо друг от друга с разными угловыми частотами $\omega_1 = |\lambda_1| = \sqrt{\frac{c_1}{m}\left(1 + \frac{a}{b}\right)}$ и $\omega_2 = |\lambda_2| = \sqrt{\frac{c_2}{m}\left(1 + \frac{b}{a}\right)}$. Независимость колебаний подвесок автомобиля является достоинством его конструкции.

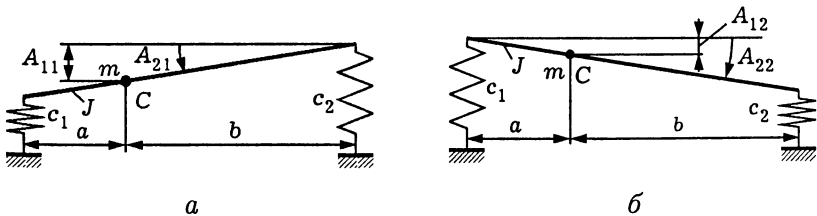


Рис. 4.29

Если $c_1a = c_2b$, то ОДУ системы (4.35) будут независимыми. Это означает, что возможны как колебания без поворотов („подпрыгивание“), когда $q_2 \equiv 0$, так и только угловые колебания („галопирование“), когда центр масс неподвижен, т.е.

$q_1 \equiv 0$. Из (4.36) получим в первом случае $\lambda_1^2 = -\frac{c_1 + c_2}{m}$, а во втором $\lambda_2^2 = -\frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{J}$. Вынужденные колебания с большой амплитудой могут возникнуть при частотах внешних воздействий, близких как к $|\lambda_1|$, так и к $|\lambda_2|$. С точки зрения комфортабельности рационально выбрать параметры подвесок так, чтобы $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_0|$. Тогда колебания с большой амплитудой возникнут лишь при внешних воздействиях, имеющих частоту колебаний, близкую к $|\lambda_0|$. Несложно установить, что $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ возможно при одновременном выполнении равенств $c_1 a = c_2 b$ и $J = tab$.

Пример 4.7. В полете крыло самолета совершает колебания относительно некоторого положения равновесия, характеризуемого *углом атаки* α относительно направления вектора v скорости полета. Эти колебания связаны с изгибом крыла в вертикальной плоскости и с кручением вокруг горизонтальной оси, вызывающим изменение угла атаки. Положение поперечного сечения крыла при колебаниях можно однозначно задать двумя независимыми обобщенными перемещениями q_1 (вертикальным перемещением центра масс C) и q_2 (углом поворота этого сечения относительно точки C) (рис. 4.30).

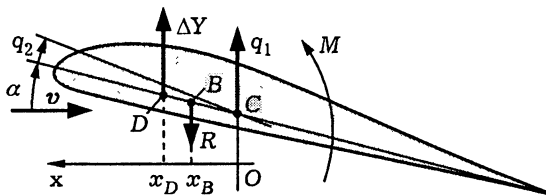


Рис. 4.30

При $q_2 > 0$ возникает противоположно направленный восстанавливающий момент $M = c_2 q_2$, где коэффициент c_2 характеризует жесткость крыла на кручение. Через точку B перпендикулярно поперечному сечению крыла проходит ось жесткости на изгиб, т.е. множество точек, приложение в которых верти-

кальных сил вызывает лишь изгиб крыла и не приводит к его поворотам вокруг этой оси. При $q_1 > 0$ и $q_2 = 0$ возникает направленная вниз реакция $c_1 q_1$, приложенная к точке B , где c_1 — коэффициент, характеризующий жесткость крыла на изгиб. Считая угол q_2 малым по модулю, так что $\cos(\alpha + q_2) \approx \cos \alpha$, в общем случае для этой реакции имеем $R = c_1(q_1 + x_B q_2)$, где x_B — абсцисса точки B , отсчитываемая от центра масс в сторону передней кромки крыла (см. рис. 4.30).

Текущему значению q_2 соответствует приращение

$$\Delta Y = c'_y \rho \frac{v^2}{2} b l q_2 = G q_2, \quad v = |v|, \quad G = c'_y \rho \frac{v^2}{2} b l > 0, \quad (4.40)$$

аэродинамической подъемной силы, приложенной в точке D и направленной перпендикулярно вектору v . В (4.40) $c'_y > 0$ — коэффициент подъемной силы, ρ — плотность воздуха, b — длина хорды профиля крыла, l — длина участка крыла в направлении горизонтальной оси, проходящей через точку C . Работа силы $\Delta Y = G q_2$ зависит от пути перехода из положения системы, определяемого значениями q_1^0, q_2^0 , в положение, характеризуемое значениями $q_1^0 + \Delta q_1, q_2^0 + \Delta q_2$. Действительно, если при $q_1^0 = q_2^0 = 0$ сначала сообщить центру масс C малое перемещение $\Delta q_1 > 0$, а затем повернуть сечение крыла на малый угол $\Delta q_2 > 0$, то на первом этапе сила ΔY и ее работа будут равны нулю, а на втором этапе эта сила совершит работу

$$A_* = \int_0^{\Delta q_2} \Delta Y(q_2) x_D dq_2 = x_D \int_0^{\Delta q_2} G q_2 dq_2 = \frac{G x_D}{2} (\Delta q_2)^2,$$

где x_D — абсцисса точки D , отсчитываемая от точки C в сторону передней кромки крыла (см. рис. 4.30). Если сменить очередность изменения обобщенных координат, то при повороте сечения на угол $\Delta q_2 > 0$ работа силы ΔY также будет равна A_* , но теперь при последующем перемещении точки C на расстояние $\Delta q_1 > 0$ сила $G \Delta q_2 = \text{const} > 0$ совершит дополнительную работу $G \Delta q_2 \Delta q_1 > 0$. Следовательно, сила ΔY не

является потенциальной, а рассматриваемая система — консервативной.

Запишем сумму работ $\delta A = \Delta Y \delta q_1 + x_D \Delta Y \delta q_2$ силы ΔY на произвольных вариациях δq_1 и δq_2 обоих обобщенных перемещений. Отсюда в соответствии с (4.33) найдем непотенциальные обобщенные силы $Q_1^* = \Delta Y$ и $Q_2^* = x_D \Delta Y$.

При помощи соотношений для кинетической и потенциальной энергий элементов механической системы (см. 3.2) получим соответственно

$$K = m \frac{\dot{q}_1^2}{2} + J \frac{\dot{q}_2^2}{2}, \quad \Pi = c_1 \frac{(q_1 + x_B q_2)^2}{2} + c_2 \frac{q_2^2}{2},$$

где m — масса участка крыла, J — его момент инерции относительно горизонтальной оси, проходящей через точку C . Используя уравнения Лагранжа второго рода в форме (4.34), приходим к системе ОДУ

$$m\ddot{q}_1 + c_1(q_1 + x_B q_2) = \Delta Y, \quad J\ddot{q}_2 + x_B c_1(q_1 + x_B q_2) + c_2 q_2 = x_D \Delta Y.$$

Отсюда, учитывая (4.40), получаем однородную систему линейных ОДУ

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + a_{11} q_1 + a_{12} q_2 = 0, \quad \frac{d^2 q_2}{dt^2} + a_{21} q_1 + a_{22} q_2 = 0 \quad (4.41)$$

с постоянными коэффициентами $a_{11} = \frac{c_1}{m}$, $a_{21} = \frac{c_1 x_B}{J}$, $a_{12} = \frac{c_1 x_B - G}{m}$, $a_{22} = \frac{c_1 x_B^2 + c_2 - x_D G}{J}$.

Как и в примере 4.6, частное решение системы (4.41) будем искать в виде $q_i = A_i e^{\lambda t}$, $i = 1, 2$. Подставляя эти равенства в (4.41), приходим к однородной СЛАУ

$$(\lambda^2 + a_{11})A_1 + a_{12}A_2 = 0, \quad a_{21}A_1 + (\lambda^2 + a_{22})A_2 = 0.$$

Из равенства нулю определителя этой СЛАУ следует биквадратное уравнение $\lambda^4 + (a_{11} + a_{22})\lambda^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, которому удовлетворяют значения

$$\lambda^2 = -\frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)^2 - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}. \quad (4.42)$$

Оба значения λ^2 в (4.42) действительны при условии $\beta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \leq \frac{1}{4}(a_{11} + a_{22})^2 = \gamma$. Если при этом $\beta > 0$, т.е. $\beta \in (0, \gamma]$, то эти значения отрицательны, а все четыре корня λ чисто мнимые. В этом случае при отклонении от положения исходного равновесия возникнут гармонические изгибные и крутильные колебания с неизменными амплитудами, т.е. решение системы ОДУ (4.41) устойчиво по Ляпунову.

Подставляя в равенство $\beta = 0$ выражения для коэффициентов a_{ij} , $i, j = 1, 2$, и учитывая выражение для G в (4.40), получаем значение

$$v_* = \sqrt{\frac{2c_2/c'_y}{\rho bl(x_D - x_B)}},$$

называемое критической скоростью дивергенции. Если $v = v_*$, то существует частное решение системы ОДУ (4.41), которому соответствует положение равновесия в отклоненном состоянии, называемое дивергенцией (не следует путать этот термин с одноименной дифференциальной операцией в теории поля [VII]). В случае $v > v_*$ имеем $\beta < 0$, так что одно из значений λ^2 в (4.42) положительно. Тогда один из корней λ положителен и соответствующее частное решение неустойчиво. Это означает неограниченное монотонное нарастание во времени отклонения крыла от положения равновесия. Ясно, что дивергенция возможна при условии $x_D > x_B$, т.е. аэродинамическая подъемная сила должна быть приложена ближе к передней кромке крыла по сравнению с его осью жесткости.

В случае $v = v_*$ подкоренное выражение в (4.42) обращается в нуль, а при $v > v_*$ оно становится отрицательным, так что λ^2 будет комплексным числом. Но извлечение квадратного корня из любого комплексного числа (в том числе из чисто мнимого) приводит к двум комплексным числам, имеющим действительные части противоположных знаков [I]. Поэтому хотя бы один из комплексных корней λ будет иметь положительную действительную часть, что приведет к изгибным и крутильным

колебаниям крыла с неограниченно возрастающими *полуразмахами*. Значение v^* называют критической скоростью изгибно-крутильного *флаттера* (от английского слова flutter — махать, трепетать).

Явление флаттера было обнаружено в 1930-х годах во время летных испытаний скоростных самолетов. Многие из этих испытаний заканчивались катастрофическим разрушением конструкции вследствие быстрого нарастания колебаний.

Рассмотренная в этом примере ММ лишь в первом приближении отражает причины возникновения одного из вариантов такого грозного явления, как флаттер, связанного с взаимодействием упругих, инерционных и аэродинамических сил. Если влияние инерционных сил несущественно, то взаимодействие упругих и аэродинамических сил может вызвать дивергенцию. При отсутствии аэродинамических сил возникают обычные колебания конструкции, а динамические задачи полета летательного аппарата с достаточно жесткой конструкцией можно рассматривать без учета упругих сил. #

Отметим, что если придать соответствующий физический смысл обобщенным перемещениям, скоростям и силам, то уравнения Лагранжа второго рода можно использовать для построения ММ не только механических систем. В частности, используя один из вариантов *электромеханической аналогии* (см. табл. 4.2), можно при помощи этих уравнений строить ММ электрических систем*.

Вопросы и задачи

4.1. Сопоставляя (4.1), (4.2) и (4.3), (4.4), проверьте справедливость (4.5) при выполнении условий (4.6).

4.2. Найдите полное сопротивление электрической цепи, представленной на рис. 4.6.

*См.: Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.

4.3. Покажите, что (4.16) равносильно условию постоянства суммы энергии электрического поля конденсатора и энергии магнитного поля катушки индуктивности, составляющих колебательный контур, представленный на рис. 4.7.

4.4. Решите систему ОДУ из примера 4.3 и запишите выражения для температур поверхностей слоев в произвольный момент времени t . Убедитесь, что при $t \rightarrow \infty$ эти температуры стремятся к установившимся значениям, которые следуют из стационарной ММ процесса теплопроводности.

4.5. Составьте систему ОДУ первого порядка относительно температур T_i , $i = \overline{1, 5}$, в центрах масс участков РС, представленной на рис. 4.18.

4.6. Какую роль выполняет в эквивалентной схеме, представленной на рис. 4.19, проводник, соединяющий резисторы с сопротивлениями R_1 и R_3 ?

4.7. Путем решения системы ОДУ (4.26) выясните характер изменения во времени t объемных расходов Q_2 , Q_4 и давлений p_3 , $p = \rho gH$ после открытия в момент времени $t = 0$ заслонки 5 (см. рис. 4.20).

4.8. Используя переход от эквивалентной схемы к связному ориентированному графу, постройте ММ системы, рассмотренной в примере 4.1.

5. НЕЛИНЕЙНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МАКРОУРОВНЯ

Достаточно полные и адекватные реальным *техническим объектам* (ТО) *математические модели* (ММ) обычно оказываются *нелинейными*. Количественный анализ нелинейных ММ существенно сложнее, чем *линейных математических моделей*, и часто требует применения численных методов и вычислительной техники. Вместе с тем полезной является и информация качественного характера о поведении нелинейной ММ, позволяющая получить предварительное представление об ожидаемых результатах более детального количественного анализа.

В этой главе рассмотрены сравнительно несложные *статические, стационарные и динамические математические модели макроуровня*, включающие нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения первого и второго порядков. Эти модели соответствуют таким ТО, идеализация которых ради получения более простой линейной ММ приводит, как правило, не только к значительным погрешностям, но и к искажению свойств этих ТО. В данном случае, по образному выражению Л.И. Мандельштама*, „идеализация мстит за себя“.

5.1. Причины возникновения нелинейности

Среди причин, приводящих к необходимости рассматривать *нелинейные математические модели* (ММ) *технических объектов* (ТО), одной из основных является непосредственная зависимость значений *внутренних параметров* ТО от их *внеш-*

*Л.И. Мандельштам (1879–1944) — отечественный физик, один из создателей теории нелинейных колебаний.

нит и выходных параметров. Ранее уже упоминались случаи, приводящие к нелинейным ММ. Рассмотрим более подробно некоторые причины возникновения нелинейности сначала на примере механических систем.

Принято считать, что при малых отклонениях механической системы от положения равновесия соотношения между перемещениями или скоростями ее элементов и возникающими в ней силами линейны, что позволяет рассматривать *линейные математические модели*. Однако часто встречаются ситуации, когда даже при малых перемещениях нелинейность оказывается существенной.

Пусть твердое тело, упруго связанное при помощи пружины жесткостью c с неподвижной шарнирной опорой, может перемещаться по горизонтальной плоскости (рис. 5.1). В вертикальном положении пружина имеет длину l_0 и находится в свободном состоянии. При перемещении u тела относительно вертикали, проходящей через опору, длина пружины принимает значение $l = \sqrt{l_0^2 + u^2}$, а сила натяжения пружины — $c(l - l_0) = c(\sqrt{l_0^2 + u^2} - l_0)$. При этом сила $P = c u \frac{\sqrt{l_0^2 + u^2} - l_0}{\sqrt{l_0^2 + u^2}}$, стремящаяся вернуть тело в первоначальное положение, нелинейно зависит от перемещения несмотря на то, что пружина является линейно упругим элементом. Отметим, что даже при весьма малом перемещении $u \ll l_0$, используя представление

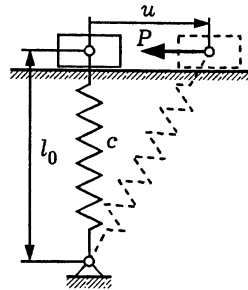


Рис. 5.1

$$\frac{1}{\sqrt{l_0^2 + u^2}} \approx \frac{1}{l_0 + \frac{u^2}{2l_0}} \approx \frac{1}{l_0} \left(1 - \frac{u^2}{2l_0^2} \right),$$

получим нелинейную зависимость

$$P = c u \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l_0^2 + u^2}} \right) \approx \frac{c u^3}{2l_0^2}.$$

Возникающие в механических системах силы трения между твердыми поверхностями различным образом зависят от скорости относительного перемещения этих поверхностей. Линейной зависимости силы сопротивления от скорости v (см. 4.3) соответствует случай сравнительно медленного относительного перемещения поверхностей, разделенных слоем смазочного материала (при жидкостной или газовой смазке). Для краткости такое трение назовем *линейным*. С увеличением v эта зависимость становится нелинейной и ее можно представить в виде $P_{\text{тр}} = -k|v|^{\alpha-1}v$, $\alpha, k = \text{const} > 0$, где учтено, что сила трения $P_{\text{тр}}$ имеет направление, противоположное направлению скорости. В этом случае часто используют обобщающий термин „*вязкое трение*“. При $\alpha = 2$, когда абсолютная величина силы трения пропорциональна квадрату скорости, обычно говорят о *турбулентном трении**¹. Тогда в слое окружающей среды, непосредственно прилегающем к поверхности твердого тела, режим течения становится турбулентным (от латинского слова *turbulentus* — бурный, беспорядочный) с хаотическими пульсациями скорости жидкости или газа. Аналогично можно представить силу сопротивления при движении с большой скоростью твердого тела в жидкости или газе либо при потере давления за счет гидравлического сопротивления трубопровода.

Если слой смазочного материала между поверхностями отсутствует, то говорят о *сухом трении*, различая при этом *сухое трение покоя* и *сухое кинематическое трение*, а также трение скольжения и качения. При прочих равных условиях по абсолютной величине сила трения покоя больше силы кинематического трения, когда происходит относительное перемещение соприкасающихся поверхностей, а сила трения качения, зависящая от кривизны этих поверхностей, меньше силы трения скольжения. Сила сухого трения, согласно закону Амонтона*², пропорциональна силе N нормального давления

*¹См.: Каудерер Г.

*²Г. Амонтон (1663–1705) — французский ученый.

твердых тел друг на друга, причем коэффициент пропорциональности слабо зависит от скорости. При качении шара или кругового цилиндра радиуса r по плоской поверхности сила сухого трения в соответствии с законом, сформулированным Ш.О. Кулоном, пропорциональна N/r .

В случае $v = 0$ сила сухого трения может быть определена лишь при рассмотрении равновесия тела с учетом действия внешних сил. Если проекция P равнодействующей внешних сил на направление возможного движения тела не превышает по абсолютной величине силу $P_{\text{тр}}^0 > 0$ трения покоя, то $P_{\text{тр}} = -P$, а при $|P| > P_{\text{тр}}^0$ тело приходит в движение. В первом приближении все виды сухого трения при $v \neq 0$ можно описать нелинейной зависимостью $P_{\text{тр}} = -\chi \frac{v}{|v|}$, $\chi = \text{const} > 0$ (рис. 5.2).

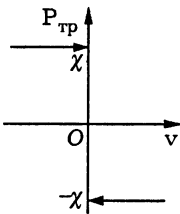


Рис. 5.2

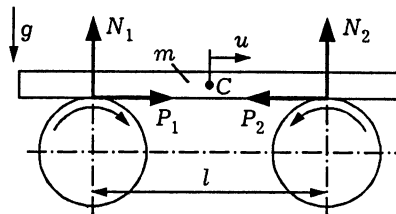


Рис. 5.3

В некоторых случаях сила трения может зависеть не только от направления скорости v относительного скольжения, но и от перемещения u элементов механической системы*. Пусть на двух расположенных горизонтально на одном уровне шкивах, вращающихся с одинаковой угловой скоростью, но в противоположных направлениях, лежит однородный стержень массой m (рис. 5.3). Если стержень расположен симметрично относительно шкивов, то он находится в равновесии. Действительно, силы трения P_1 и P_2 , возникающие при относительном скольжении стержня по поверхностям шкивов, равны по абсолютной величине и противоположно направлены, так как реакции

*См.: Пановко Я.Г., Губанова И.И.

шквивов, уравнивающие вес mg стержня, одинаковы: $N_1 = N_2 = mg/2$, где g — ускорение свободного падения. Но при перемещении u центра масс C стержня для реакций левого и правого шквивов получим соответственно

$$N_1 = \frac{l/2 - u}{l} mg, \quad N_2 = \frac{l/2 + u}{l} mg,$$

где l — расстояние между центрами шквивов. Если принять, согласно закону Амонтона, что сила сухого трения $P_{\text{тр}} = -fN \frac{v}{|v|}$, где $f = \text{const} > 0$ — коэффициент трения, а v — скорость относительного скольжения, то для сил трения, действующих на стержень со стороны шквивов, можно записать

$$P_1 = -fN_1 \frac{v_1}{|v_1|} = -\frac{l/2 - u}{l} fmg \frac{v_1}{|v_1|},$$

$$P_2 = -fN_2 \frac{v_2}{|v_2|} = -\frac{l/2 + u}{l} fmg \frac{v_2}{|v_2|},$$

где v_1 и v_2 — скорости скольжения стержня относительно левого и правого шквивов, причем $|v_1| = |v_2|$.

При направлениях вращения, изображенных на рис. 5.3, $v_1 < 0$ и $v_2 > 0$, так что $P_1 + P_2 = -2fmg u/l$, т.е. сумма сил трения в рассматриваемой системе зависит от перемещения стержня и стремится вернуть его в положение равновесия. Если вращение каждого из шквивов происходит в противоположном направлении, то получим $P_1 + P_2 = 2fmg u/l$, т.е. при сколь угодно малых отклонениях от положения равновесия силы трения стремятся увеличить это отклонение.

Другая причина, приводящая к нелинейным ММ механических систем, вызвана нелинейными свойствами элементов этих систем. Например, сила P сжатия витой конической пружины зависит от перемещения (осадки) u ее свободного конца относительно опорной плоскости (рис. 5.4). При $P < P_A$ эта зависимость близка к линейной, но при $P \geq P_A$ витки пружины по мере ее сжатия последовательно соприкасаются с опорной

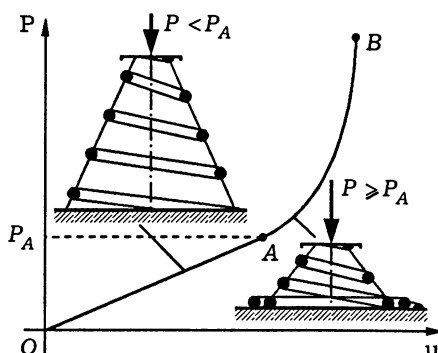


Рис. 5.4

плоскостью, образуя в плане плоскую спираль, что приводит к увеличению жесткости $c(u) = \frac{dP(u)}{du}$ с ростом перемещения u . После соприкосновения с опорной плоскостью всех витков жесткость резко возрастает (точка B на рис. 5.4). Пружины с переменной жесткостью используют для создания так называемых равночастотных систем, применяемых для защиты приборов, оборудования или перевозимых грузов от вредного воздействия высокочастотных вибраций (см. пример 5.5).

Поведение материала упругих элементов даже при сравнительно малых деформациях может отклоняться от закона Гука, устанавливающего линейную связь деформаций и напряжений, что также является причиной нелинейной зависимости между силами и перемещениями в механической системе. При увеличении нагрузки в материале возникает пластическая деформация, сохраняющая свое значение после снятия нагрузки. Хорошо известно, что при растяжении металлического стержня по мере возрастания растягивающего напряжения σ деформация ε сначала растет по линейному закону $\varepsilon = \sigma/E$, где E — модуль упругости, а затем начинает прогрессивно нарастать вплоть до разрушения стержня. Если, не доводя стержень до разрушения, начать уменьшать напряжение до нуля, то связь ε и σ снова становится близкой к линейной (говорят, что происходит упругая разгрузка), но при $\sigma = 0$ сохраняется остаточная пла-

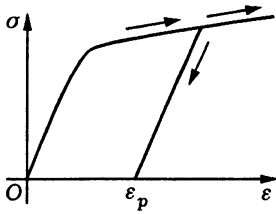


Рис. 5.5

стическая деформация ε_p (рис. 5.5). Такое поведение материала при построении ММ требует привлечения довольно сложных теорий пластичности, в том числе использующих физические представления о микромеханизме пластического деформирования материалов*, что необходимо

при анализе работоспособности высоконагруженных конструкций и при математическом моделировании таких технологических процессов, как прокатка, штамповка и ряд других.

Еще более сложной оказывается ММ механической системы, если конструкционный материал проявляет свойство ползучести, т.е. увеличивает деформацию во времени t даже при неизменном напряжении. В простейшем варианте ползучесть можно описать зависимостью скорости деформации $\frac{d\varepsilon}{dt}$ от напряжения σ и температуры T , причем увеличение σ и T приводят к возрастанию $\frac{d\varepsilon}{dt}$.

Аналогично рассмотренным можно выявить нелинейные зависимости для элементов систем, в которых протекают иные физические процессы. Так, при заполнении жидкостью сосуда с переменной по высоте площадью поперечного сечения (на-

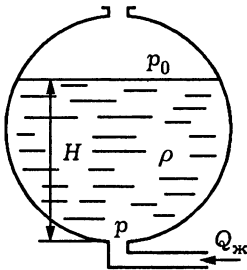


Рис. 5.6

пример, сферического сосуда) величина C_T в (3.30) будет зависеть от высоты H уровня жидкости в сосуде относительно подводящего трубопровода, т.е. от перепада давления $\Delta p = p - p_0 = \rho g H$, где p и p_0 — давления на входе в сосуд подводящего трубопровода и над зеркалом жидкости соответственно, ρ — плотность жидкости (рис. 5.6). Действительно, объем жидкости, заполня-

*См.: Зарубин В.С. (1985 г.)

ющей сосуд при высоте H уровня, равен

$$V_{\text{ж}} = \int_0^H S(z) dz,$$

где $S(z)$ — зависимость площади поперечного сечения сосуда от вертикальной координаты z , отсчитываемой от входа подводящего трубопровода. Так как объемный расход $Q_{\text{ж}} = \frac{dV_{\text{ж}}}{dt}$, то получим в отличие от линейной зависимости (3.30) нелинейное соотношение

$$Q_{\text{ж}} = S(H) \frac{dH}{dt} = \frac{S(H)}{\rho g} \frac{d\Delta p}{dt}.$$

Из курса физики известно, что связь между векторами электрической поляризованности \mathbf{P} и напряженности \mathbf{E} электрического поля для большинства диэлектриков остается линейной лишь при ограниченных значениях $|\mathbf{E}|$, а с увеличением $|\mathbf{E}|$ происходит насыщение процесса поляризации диэлектрика (на рис. 5.7 представлен график функции $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ для случая плоского однородного электрического поля, когда ее можно рассматривать с учетом смены направления векторов \mathbf{E} и \mathbf{P} на противоположное как действительную функцию действительного переменного). Это

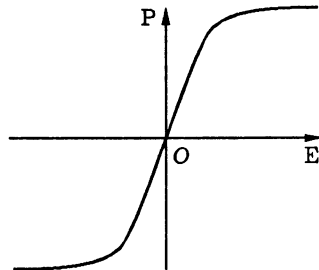


Рис. 5.7

приводит к тому, что при использовании диэлектрика в электрическом конденсаторе связь между зарядом Q_e и разностью ΔU потенциалов на обкладках конденсатора при достаточно высоких значениях $|\Delta U|$ оказывается нелинейной, а в (3.3) емкость C конденсатора становится функцией ΔU или Q_e .

Аналогичная ситуация возникает для зависимости вектора намагниченности \mathbf{M} ферромагнетиков от вектора напряженности \mathbf{H} магнитного поля. Поэтому связь потокосцепления Ψ

и силы I тока для индуктивной катушки, намотанной на железный сердечник, при достаточно высоких значениях $|I|$ становится нелинейной, а в (3.4) значение L индуктивности такой катушки — зависящим от I . Даже сопротивление R резистора в выражении (3.1) для закона Ома при высокой частоте переменного тока может стать функцией I . Помимо рассмотренных *электрических дипольных источников* в современных электрических системах используют различные элементы с существенно нелинейными характеристиками.

В тепловых системах одной из причин, приводящих к необходимости рассматривать нелинейные ММ, является увеличение теплоемкости всех веществ с ростом их температуры. В сравнительно небольшом интервале изменения температуры таким увеличением обычно можно пренебречь, но при рассмотрении тепловых процессов в широком диапазоне температур этот эффект оказывает заметное влияние на количественные результаты математического моделирования. Зависимость теплопроводности веществ от температуры является более сложной и также вызывает необходимость построения нелинейных ММ.

Мощность энерговыделения, сопровождающего экзотермические химические реакции, зависит от скорости их протекания, которая, в свою очередь, является нелинейной функцией температуры T . Эта скорость в соответствии с уравнением Аррениуса*¹ пропорциональна множителю $\exp\left(-\frac{U}{kT}\right)$, где U — энергия активации реакции, $k = 1,3806 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана*². Существенно нелинейной является зависимость плотности q потока теплового излучения тела от его температуры T , определяемая в соответствии с законом Стефана*³ — Больцмана: $q = \epsilon \sigma_0 T^4$, где ϵ — коэффициент излучения, причем $\epsilon \in (0, 1]$, а $\sigma_0 = 5,6696 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная

*¹С.А. Аррениус (1859–1927) — шведский ученый.

*²Л. Больцман (1844–1906) — австрийский физик.

*³Й. Стефан (1835–1893) — австрийский физик.

Стефана — Больцмана. Поэтому ММ, описывающие процессы теплового излучения и энерговыделения при экзотермических реакциях, неизбежно оказываются нелинейными.

5.2. Статические и стационарные модели

При математическом моделировании реального технического объекта (ТО) полезно иметь в виду ситуации, когда его параметры не будут изменяться во времени. Эти ситуации могут и не иметь места в действительности, но их анализ обычно дает оценки границ возможного изменения некоторых параметров ТО. Такие оценки можно получить при помощи статических математических моделей (ММ), которые строят с использованием законов сохранения соответствующих физических субстанций в *состоянии равновесия* рассматриваемого ТО, т.е. в ситуации, когда его параметры остаются постоянными при постоянных внешних воздействиях.

Пример 5.1. Пусть на высокой околоземной орбите находится сферический спутник диаметра D . Поверхность спутника имеет коэффициент излучения ϵ и коэффициент поглощения солнечного излучения A_s . Аппаратура спутника при работе в максимальном режиме выделяет тепловую энергию мощностью Q . Плотность потока солнечного излучения на среднем расстоянии Земли от Солнца составляет $q_s = 1373 \pm 20 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$. В случае высокой орбиты влиянием на температуру спутника собственного излучения Земли и отраженного от ее поверхности солнечного излучения можно пренебречь.

Для оценки усредненной по объему спутника температуры \bar{T} , значение которой остается неизменным во времени, составим на основе закона сохранения энергии уравнение теплового баланса

$$A_s q_s \frac{\pi}{4} D^2 + Q - \epsilon \sigma_0 \bar{T}^4 \pi D^2 = 0, \quad (5.1)$$

где σ_0 — постоянная Стефана — Больцмана (см. 5.1). Первое слагаемое в (5.1) соответствует потоку поглощенного солнеч-

ного излучения, а последнее — потоку собственного излучения. Из (5.1) получим

$$\bar{T} = \left(\frac{A_s q_s}{4\epsilon\sigma_0} + \frac{Q}{\epsilon\sigma_0\pi D^2} \right)^{1/4}. \quad (5.2)$$

Значение \bar{T} , определяемое при помощи (5.2), называют *равновесной температурой*, поскольку при этом значении „уравновешены“ все действующие на рассматриваемый ТО тепловые потоки.

Если бы поверхность спутника соответствовала модели серого тела ($A_s = \epsilon$), то в случае неработающей аппаратуры ($Q \equiv 0$), принимая значения $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ и $q_s = 1400 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$, из (5.2) можно найти значение $\bar{T} \approx 280 \text{ К}$. Если $A_s = \epsilon = 0,6$, $D = 1 \text{ м}$, то при $Q = 100 \text{ Вт}$ получаем $\bar{T} \approx 290 \text{ К}$, а при $Q = 1000 \text{ Вт}$ температура $\bar{T} \approx 353 \text{ К}$ может оказаться недопустимой с точки зрения работоспособности некоторых систем спутника. Отметим, что нелинейность построенной статической ММ проявляется, в частности, в том, что при увеличении Q на порядок приращение температуры по отношению к значению $\bar{T} \approx 280 \text{ К}$ возрастает лишь в 7,3 раза.

Однако модель серого тела является слишком грубой по отношению к большинству применяемых конструкционных материалов, поскольку, как известно из курса физики, спектр теплового излучения Солнца, имеющего температуру поверхности около 6000 К, сильно отличается от спектра собственного излучения спутника в инфракрасной области. В построенной статической ММ температурного состояния спутника это приводит к тому, что $A_s \neq \epsilon$. Например, для полированной поверхности оболочки из нержавеющей (коррозионно-стойкой) стали $A_s/\epsilon \approx 16$ и при $Q = 0$ из (5.2) следует $\bar{T} \approx 560 \text{ К}$, а для оболочки с диэлектрическим покрытием, наоборот, $A_s/\epsilon \approx 1/16$ и при $Q = 0$ из (5.2) получим $\bar{T} \approx 140 \text{ К}$.

Пример 5.2. Нагрев конструкции летательного аппарата при его движении в плотных слоях атмосферы называют *аэро-*

динамическим. Влияние аэродинамического нагрева в первую очередь обычно рассматривают применительно к внешней обшивке летательного аппарата, которую для

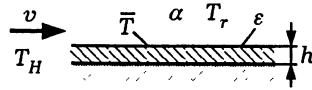


Рис. 5.8

верхней оценки возможных значений температуры принимают идеально теплоизолированной с внутренней стороны (рис. 5.8). При длительном полете с фиксированной скоростью v на постоянной высоте H над поверхностью Земли верхней оценкой температуры \bar{T} обшивки толщиной h является значение температуры заторможенного воздушного потока, равное $T^* = T_H \left(1 + \frac{k-1}{2} M_H^2 \right)$, где T_H — температура воздуха на высоте H , k — показатель адиабаты (для воздуха $k \approx 1,4$), $M_H = v/a_H$ — число Маха, $a_H = \sqrt{kRT_H} \approx 20,05\sqrt{T_H}$ — скорость звука, R — газовая постоянная воздуха. На высотах от 11 до 20 км принимают $T_H = 216,55 \text{ К} = -56,45^\circ \text{С}$, что соответствует скорости звука $a_H \approx 295 \text{ м/с}$. Таким образом, при полете со скоростью $v = 1000 \text{ м/с}$ число Маха равно $M_H \approx 3,39$, а $T^* \approx 714 \text{ К}$. При такой температуре алюминиевые сплавы не работоспособны, и поэтому приходится применять обшивку из стали или титановых сплавов.

При обтекании обшивки без угла атаки температура воздуха у ее поверхности принимает значение

$$T_r = T_H \left(1 + \frac{k-1}{2} r M_H^2 \right) < T^*,$$

называемое *температурой восстановления*, где r — коэффициент восстановления температуры, равный 0,84 при ламинарном режиме течения в пограничном слое и 0,89 при турбулентном режиме. Если принять $r \approx 0,89$, то для использованных выше исходных данных получим $T_r \approx 660 \text{ К}$, что также выше границы применения алюминиевых сплавов.

Оценки температуры обшивки получены в предположении, что при длительном полете наступает термодинамическое равновесие между обшивкой и прилегающим к ней при обтекании

пограничным слоем воздушного потока, т.е. $\bar{T} = T^*$ или $\bar{T} = T_r$. Но в действительности $\bar{T} < T_r$, поскольку обшивка, получая тепловую энергию от воздушного потока, одновременно излучает ее в окружающее пространство, причем в соответствии с законом Стефана — Больцмана тем больше, чем выше ее температура \bar{T} (см. 5.1). Поэтому значение \bar{T} надо определять из условия равновесия подводимого к обшивке и отводимого от нее тепловых потоков, приходящихся на единицу ее внешней поверхности:

$$\alpha(T_r - \bar{T}) = \varepsilon\sigma_0\bar{T}^4,$$

где α — коэффициент теплоотдачи, ε — коэффициент излучения внешней поверхности обшивки (см. рис. 5.8). Отсюда следует алгебраическое уравнение четвертой степени

$$N\vartheta^4 + \vartheta - 1 = 0, \quad N = \frac{\varepsilon\sigma_0}{\alpha}T_r^3, \quad \vartheta = \frac{\bar{T}}{T_r}. \quad (5.3)$$

При известном значении N решение уравнения (5.3) относительно безразмерной равновесной температуры ϑ можно получить в радикалах. Но вследствие неточности задания исходных данных практически достаточно воспользоваться графиком зависимости ϑ от N (рис. 5.9). При обтекании обшивки воздушным потоком со скоростью $v = 1000$ м/с коэффициент теплоотдачи для высоты полета $H = 11$ км можно принять рав-

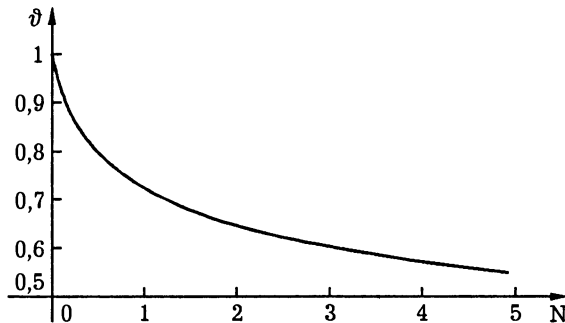


Рис. 5.9

ным $\alpha = 180 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$, а для высоты $H = 20 \text{ км}$ в силу уменьшения примерно в 5 раз плотности воздуха — $\alpha = 40 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$. Тогда при $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ и $\varepsilon = 0,6$ для высоты $H = 11 \text{ км}$ получим $N \approx 0,543$ и по рис. 5.9 найдем $\vartheta \approx 0,79$, а затем вычислим $\bar{T} = \vartheta T_r \approx 520 \text{ К}$. Для высоты $H = 20 \text{ км}$ определим $N \approx 2,444$, найдем $\vartheta \approx 0,62$ и получим $\bar{T} = \vartheta T_r \approx 410 \text{ К}$.

Таким образом, учет собственного излучения обшивки привел к заметному снижению ее равновесной температуры.

Пример 5.3. При термостатировании конструкции для обеспечения стабильности ее температуры T_0 в условиях изменяющейся температуры T_c окружающей среды можно использовать термоэлектрический эффект (эффект Пельтье*¹). Отсутствия теплообмена конструкции с окружающей средой удается добиться как при $T_c > T_0$, так и при $T_c < T_0$, для чего приходится расходовать энергию электрического тока, протекающего в цепи из разнородных проводников, обладающих достаточно сильно выраженным эффектом Пельтье. При этом в месте контакта разнородных материалов в зависимости от направления тока силой I происходит выделение (или поглощение) тепловой энергии мощностью*²

$$Q = 2eT_k I, \quad (5.4)$$

где e — коэффициент термоэлектродвижущей силы контактирующей пары материалов, T_k — температура контакта. Значение e может быть достаточно высоким при контакте металлических проводников с элементами из специальных сплавов.

Пусть термостатируемая конструкция покрыта теплоизолирующим слоем, состоящим из плоских ячеек толщиной h и площадью поверхности F_0 (рис. 5.10, а). Каждая из ячеек заключена между двумя тонкими металлическими пластинами 1

*¹Ж.Ш.А. Пельтье (1785–1845) — французский физик.

*²См.: Зарубин В.С. (1983 г.)

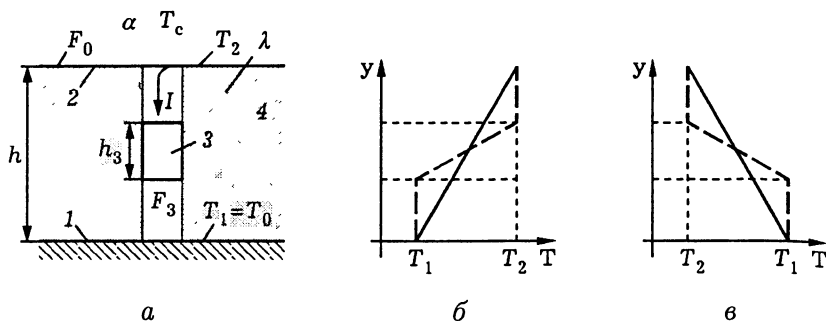


Рис. 5.10

и 2, соединенными цилиндрическим элементом 3 с поперечным сечением площадью F_3 , с коэффициентом теплопроводности λ_3 и электрической проводимостью ρ_3 . Высота h_3 элемента может быть меньше h . В этом случае его торцы соединены с соответствующими пластинами проводниками из одинакового с пластинами материала. Пластины соединены с источником электрического тока. Остальное пространство между пластинами заполнено теплоизоляционным материалом 4. Построим стационарную математическую модель такой ячейки теплоизолирующего слоя.

В первом приближении температуру каждой из пластин можно считать постоянной по ее поверхности и равной температуре контакта с элементом 3. Температуру пластины 1 и соответствующего контакта обозначим T_1 и примем равной заданной температуре T_0 конструкции, т.е. $T_1 = T_0$. Между пластиной 2, имеющей температуру T_2 , и окружающей средой происходит конвективный теплообмен, интенсивность которого определяется коэффициентом теплоотдачи α . Примем, что $I > 0$ при указанном на рис. 5.10, а направлении тока и на верхнем контакте элемента 3 выделяется в соответствии с (5.4) тепловая энергия мощностью $Q_2 = 2eT_2I > 0$, а на нижнем поглощается тепловая энергия мощностью $Q_1 = -2eT_1I < 0$. В этом случае поддержание температуры $T_0 = T_1$ конструкции постоянной возможно при условии $T_c > T_0$ (линейное распреде-

ление температуры по толщине ячеек теплоизолирующего слоя показано на рис. 5.10, б сплошной линией, а в элементе 3 и в связывающих его с пластинами проводниках — штриховой линией). Если направление тока противоположное, то $I < 0$, так что $Q_2 < 0$, $Q_1 > 0$ и поддержание температуры конструкции постоянной возможно при условии $T_c < T_0$ (распределение температуры в этом случае представлено на рис. 5.10, в).

Электрическое сопротивление $\frac{h_3}{F_3\sigma_3}$ элемента 3 заменим двумя одинаковыми сопротивлениями $R_3 = \frac{h_3}{2F_3\sigma_3}$ контактов этого элемента с пластинами и при неизменных во времени параметрах составим уравнения теплового баланса для пластин 2 и 1 соответственно:

$$\alpha(T_c - T_2)F_0 + I^2(R_2 + R_3) + 2eT_2I = \frac{T_2 - T_1}{h/\lambda}(F_0 - F_3) + \frac{T_2 - T_1}{h_3/\lambda_3}F_3,$$

$$I^2(R_1 + R_3) - 2eT_1I = \frac{T_1 - T_2}{h/\lambda}(F_0 - F_3) + \frac{T_1 - T_2}{h_3/\lambda_3}F_3,$$

где R_1 и R_2 — электрическое сопротивление пластин 1 и 2 с учетом коммутирующего проводника и его присоединения к элементу 3, λ — коэффициент теплопроводности теплоизоляционного материала. Складывая эти два уравнения, получаем $\alpha(T_c - T_2)F_0 + I^2(R_1 + R_2 + 2R_3) + 2e(T_2 - T_1)I = 0$. Выражая отсюда разность $T_2 - T_1$ и подставляя в уравнение теплового баланса для пластины 1, приходим к уравнению

$$2eT_1I - I^2(R_1 + R_3) = f(I) \quad (5.5)$$

относительно I , где

$$f(I) = \frac{\alpha(T_c - T_1)F_0 + I^2(R_1 + R_2 + 2R_3)}{(\alpha F_0 - 2eI)R_T},$$

$R_T = \left(\frac{\lambda}{h}(F_0 - F_3) + \frac{\lambda_3}{h_3}F_3\right)^{-1}$ — термическое сопротивление ячейки теплоизолирующего слоя с учетом включения в нее

элемента 3 и его коммутации с пластинами. По физическому смыслу $f(I)$ соответствует тепловому потоку, передаваемому от пластины 2 к пластине 1.

Возможное изменение силы I электрического тока ограничено сверху значением $I_\infty = \frac{\alpha}{2e} F_0$, так как $T_2 \rightarrow \infty$ при $I \rightarrow I_\infty - 0$. Это означает, что в таком случае тепловая мощность, выделяющаяся в ячейке рассматриваемого теплоизолирующего слоя на сопротивлениях электрической цепи и благодаря эффекту Пельтье, уже не может быть отведена в окружающую среду, и поэтому температура пластины 2 неограниченно возрастает.

При $I < I_\infty$ (5.5) является кубическим уравнением

$$2e(R_1 + R_3)R_T I^3 - bI^2 + 2eT_1\alpha F_0 R_T I + \alpha(T_c - T_1)F_0 = 0, \quad (5.6)$$

где $b = (1 + \alpha F_0 R_T)(R_1 + R_3) + R_2 + R_3 + 4e^2 T_1 R_T$, и имеет хотя бы один действительный корень. Ясно, что в случае $T_c = T_1$ теплообмен конструкции с окружающей средой отсутствует при $I = 0$. Но при этом (5.6) имеет еще два положительных корня

$$I_{1,2}^\circ = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 16e^2 T_1 (R_1 + R_3) \alpha F_0 R_T^2}}{4e(R_1 + R_3)R_T},$$

причем несложно показать, что $I_1^\circ > I_\infty$ и поэтому не имеет физического смысла. Из геометрической интерпретации корней уравнения (5.6) как абсцисс точек пересечения графика функции $f(I)$ при $T_c = T_1$ и параболы P , определяемой левой частью (5.5), следует, что $I_2^\circ < I_\infty$ (рис. 5.11). Физический смысл значения $I = I_2^\circ$ состоит в том, что выделяющаяся в ячейке теплоизолирующего слоя тепловая энергия полностью отводится в окружающую среду за счет возникающего перепада температур $T_2 - T_c = \frac{I^2(R_1 + R_2 + 2R_3)}{\alpha F_0 - 2eI^2}$.

Для выяснения возможности изолировать конструкцию от теплового влияния окружающей среды в случае $T_c \neq T_1$ предварительно исследуем поведение функции $f(I)$, непрерывной и

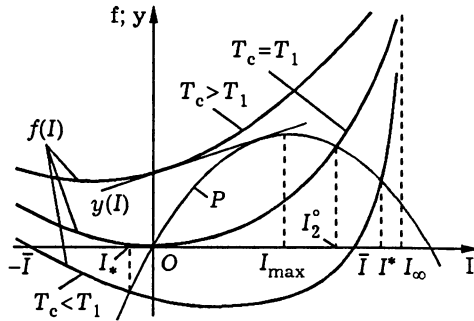


Рис. 5.11

дифференцируемой при $I < I_\infty$. Запишем

$$f'(I) = 2 \frac{\alpha F_0 I - eI^2 + \alpha(T_c - T_1)F_0 e / R_*,}{(\alpha F_0 - 2eI)^2 R_* / R_*},$$

где $R_* = R_1 + R_2 + 2R_3$. Эта производная равна нулю при

$$\bar{I}_{1,2} = \frac{\alpha F_0}{2e} \left(1 \pm \sqrt{1 + 4e^2 \frac{T_c - T_1}{R_* \alpha F_0}} \right).$$

Если $T_c > T_1$, то $\bar{I}_2 > I_\infty$ и $\bar{I}_1 < 0$. Следовательно, в интервале $(0, I_\infty)$ производная $f'(I)$ сохраняет знак своего значения $f'(0) = \frac{2e(T_c - T_1)}{\alpha F_0 R_*} > 0$ при $I = 0$, а функция $f(I)$ является возрастающей. Так как $f(0) = \frac{T_c - T_1}{R_*}$, а левая часть (5.5) достигает максимального значения $\frac{(eT_1)^2}{R_1 + R_3}$ при $I_{\max} = \frac{eT_1}{R_1 + R_3}$, то необходимым условием изоляции конструкции от теплового воздействия окружающей среды является выполнение неравенства $\frac{T_c - T_1}{R_*} < \frac{(eT_1)^2}{R_1 + R_3}$. Это условие можно уточнить исходя из следующих соображений. Функция $f'(I)$ в интервале $(0, I_\infty)$ также строго монотонна, являясь отношением возрастающей функции к убывающей. Следовательно, в этом интервале функция $f(I)$ выпукла вниз и ее график лежит выше прямой с уравнением

$y(I) = f(0) + f'(0)I$ (см. рис. 5.11). Можно показать, что эта прямая будет касаться параболы P при выполнении равенства

$$T_c - T_1 = \alpha F_0 R_T \left(T_1 + I_\infty \left(\sqrt{1 + \frac{e^2 T_1}{\alpha F_0 (R_1 + R_3)}} - 1 \right) \right) = \Delta T_{\max}.$$

Поэтому необходимое условие принимает вид $T_c - T_1 < \Delta T_{\max}$. Ясно, что это условие не является достаточным и его выполнение еще не гарантирует существования решения уравнения (5.6) в интервале $(0, I_\infty)$.

Отметим, что если уравнение (5.6) в интервале $(0, I_\infty)$ имеет корень, то либо он кратный, соответствующий точке касания графика функции $f(T)$ и параболы P , либо таких корней два. В последнем случае целесообразно выбрать силу тока, соответствующую меньшему значению корня, поскольку это обуславливает меньшие затраты электрической энергии.

В случае $T_c < T_1$ нули $\bar{I}_{1,2}$ производной $f'(I)$, если они существуют, положительны, т.е. при $I < 0$ эта производная сохраняет знак своего значения $f'(0) = \frac{2e(T_c - T_1)}{\alpha F_0 R_T} < 0$, а функция $f(I)$ является убывающей. Поэтому всегда существует единственный отрицательный корень I_* уравнения (5.6), причем $I_* \in (-\bar{I}, 0)$, где $\bar{I} = \sqrt{\frac{\alpha}{R_*} (T_1 - T_c) F_0}$ (см. рис. 5.11). Отметим, что при $\bar{I} < I_\infty$ это уравнение имеет корень $I^* > 0$ в интервале (\bar{I}, I_∞) . Но использовать на практике режим работы рассматриваемой ячейки теплоизолирующего слоя при значении I^* силы тока менее надежно, чем при значении I_* . #

При медленном изменении параметров ТО во времени t часто можно не учитывать влияние инерционных свойств объекта, т.е. можно использовать его квазистатическую ММ. В механической системе это означает пренебрежение влиянием инерционных сил.

Пример 5.4. Пусть трубопровод с круглым поперечным сечением радиуса r_0 и со стенкой толщиной h_0 нагружен внутренним давлением p , которое приводит к возникновению в

стенке окружных напряжений pr_0/h_0 . Материал стенки проявляет свойство ползучести (см. 5.1), причем зависимость скорости ползучести от напряжения σ имеет вид

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = A|\sigma|^{\alpha-1}\sigma, \quad A = \text{const} > 0, \quad \alpha \geq 1. \quad (5.7)$$

Предположим, что длина трубопровода при ползучести остается неизменной, а деформирование его материала происходит без изменения объема, т.е. $r_0h_0 = rh = \text{const}$, где r и h — текущие значения радиуса поперечного сечения трубопровода и толщины его стенки. Тогда, используя расчетную схему (РС) оболочки, получим текущее значение напряжения

$$\sigma = \frac{pr}{h} = \frac{pr^2}{r_0h_0} > 0. \quad (5.8)$$

Деформацию стенки в окружном направлении представим в виде

$$\varepsilon = \int_{r_0}^r \frac{dr}{r} = \ln \frac{r}{r_0}.$$

Тогда $\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{r} \frac{dr}{dt}$, так что, используя (5.7) и (5.8), при $\sigma > 0$ получаем

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{dt} = A\sigma^\alpha = A \left(\frac{pr^2}{r_0h_0} \right)^\alpha.$$

Отсчет t будем вести от момента времени, когда $r = r_0$. В этом случае имеем

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{r^{1+2\alpha}} = \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{1}{r_0^{2\alpha}} - \frac{1}{r^{2\alpha}} \right) = At \left(\frac{p}{r_0h_0} \right)^\alpha,$$

или

$$\frac{r}{r_0} = \left(1 - 2\alpha At \left(\frac{pr_0}{h_0} \right)^\alpha \right)^{-1/(2\alpha)}. \quad (5.9)$$

Отсюда следует, что $r \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_*$, где

$$t_* = \frac{1}{2\alpha A} \left(\frac{h_0}{pr_0} \right)^\alpha.$$

Ясно, что при этом $h \rightarrow 0$, т.е. трубопровод разрушится за время, не превышающее t_* . Значение t_* называют критическим временем. Но допустимое время работы трубопровода существенно меньше t_* и может быть найдено при помощи (5.9), если задать предельно допустимое отношение r/r_0 . #

Одной из областей применения стационарных ММ является описание *установившихся процессов* в технических устройствах, когда некоторые *выходные параметры* рассматриваемого ТО не изменяются во времени. В технических устройствах нередко возникают *периодические процессы*, одной из важнейших характеристик которых является *период T* (или *угловая частота $\omega = 2\pi/T$*) *колебаний* параметров таких процессов. Для получения полной картины периодических процессов применяют *нестационарные (динамические) математические модели*, но угловую частоту колебаний обычно удается найти более простым путем.

Пример 5.5. Для защиты оборудования, приборов или транспортных машин от нежелательного воздействия высокочастотных вибраций, передающихся через основания, узлы крепления или элементы подвески, создают специальную систему виброизоляции. При этом, чтобы избежать резонансных явлений (см. 4.3), стремятся обеспечить возможно большее отношение ожидаемых значений частоты вибраций к частоте ω свободных колебаний такой системы, включающей и защищаемый ТО. Если систему виброизоляции вместе с ТО удастся свести к РС *гармонического осциллятора* массой m и с жесткостью c упругой связи, то $\omega = \sqrt{c/m}$.

Однако масса m ТО может изменяться в широких пределах (например, в случае разной загрузки железнодорожного вагона или кузова автомобиля, при использовании в сочетании с

одной и той же системой виброизоляции различных приборов и оборудования). В таком случае полезным оказывается так называемый равночастотный виброизолятор*, жесткость упругих элементов которого изменяется в зависимости от массы защищаемого ТО так, что частота свободных колебаний системы остается постоянной. Для этого применяют, например, витые конические пружины (см. рис. 5.4) с нелинейной статической характеристикой, т.е. с нелинейной зависимостью $P(u)$ силы сжатия от перемещения u (осадки) ее свободного конца.

Чтобы сформулировать требования к статической характеристике, рассмотрим на ней произвольную точку A (рис. 5.12).

Эта точка соответствует массе системы $m_A = P_A/g$, где g — ускорение свободного падения, вес P_A которой вызывает статическое перемещение u_A . При достаточно малых колебаниях относительно положения системы, определяемого этим перемещением, криволинейный участок характеристики в окрестности точки A можно приближенно заменить участком касательной в этой точке с углом наклона φ_A .

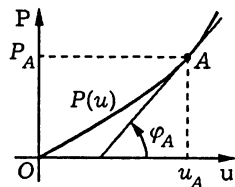


Рис. 5.12

В результате получим линейную колебательную систему, соответствующую гармоническому осциллятору массой m_A и жесткостью $c_A = \left. \frac{dP(u)}{du} \right|_{u=u_A}$. Частота свободных колебаний такого осциллятора равна

$$\omega_A = \sqrt{\frac{c_A}{m_A}} = \sqrt{\frac{g}{P_A} \left. \frac{dP(u)}{du} \right|_{u=u_A}}.$$

Отсюда ясно, что частота свободных колебаний системы виброизоляции вместе с защищаемым ТО будет постоянной и равной заданному значению ω_0 , если выполнено равенство $\omega_0 =$

*См.: Пановко Я.Г., Губанова И.И.

$= \omega_A = \text{const}$, или

$$\frac{dP(u)}{du} = \frac{\omega_0^2}{g} P(u). \quad (5.10)$$

После интегрирования получим

$$\frac{g}{\omega_0^2} \ln P(u) = u + C. \quad (5.11)$$

Константу C было бы логично найти из условия прохождения статической характеристики через начало координат, т.е. $P(0) = 0$. Но ни одна из бесконечного множества полученных интегральных кривых (5.11), соответствующих произвольным значениям C , через начало координат не проходит.

Преодолеть это затруднение можно при помощи простых практических соображений. В техническом задании на разработку системы виброизоляции задают наименьшую массу защищаемого ТО. Поэтому при создании этой системы можно оценить наименьшее значение P_0 ее веса вместе с ТО. При $P < P_0$ система может не удовлетворять ОДУ (5.10) и иметь, например, простейшую линейную характеристику $P = c_0 u$, где c_0 — постоянная жесткость. Чтобы обеспечить плавность перехода от линейной части характеристики к нелинейной, нужно обеспечить выполнение условия $\frac{dP(u)}{du} = c_0$ при $P = P_0$, которое с учетом (5.10) равносильно условию $\frac{\omega_0^2}{g} P_0 = c_0$. Таким образом, при $P = P_0$ находим $u_0 = \frac{P_0}{c_0} = \frac{g}{\omega_0^2}$ и затем, используя (5.11), определяем

$$C = \frac{g}{\omega_0^2} \ln P_0 - u_0 = \frac{g}{\omega_0^2} (\ln P_0 - 1).$$

В итоге после подстановки C в (5.11) заключаем, что требуемая статическая характеристика пружины описывается двумя соотношениями

$$P = \frac{\omega_0^2}{g} P_0 u, \quad P < P_0; \quad P = P_0 e^{\omega_0^2 u/g - 1}, \quad P \geq P_0.$$

Вид этой характеристики, построенной с использованием стационарной ММ гармонического осциллятора и состоящей из линейного и нелинейного участков, представлен на рис. 5.13.

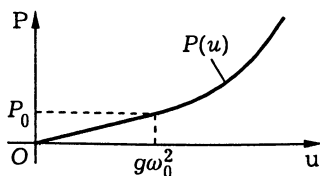


Рис. 5.13

5.3. Некоторые нестационарные модели

Нестационарные математические модели (ММ) некоторых *технических объектов* (ТО) можно привести к нелинейному ОДУ первого порядка

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u(t)), \quad t > 0, \quad (5.12)$$

с начальным условием $u(t_0) = u_0$ в момент времени $t = t_0$. Пусть функция $f(t, u)$ определена и непрерывна в прямоугольной замкнутой области

$$D = \{(t, u) \in \mathbb{R}^2: |t - t_0| \leq a, |u - u_0| \leq b\}$$

и удовлетворяет в D условию Липшица относительно u . Напомним, что тогда в соответствии с теоремой Коши [VIII] задача Коши для ОДУ (5.12) имеет при $|t - t_0| \leq h$, где $h = \min\{a, b/M\}$, $M = \max_{(t,u) \in D} |f(t, u)|$, единственное решение $u(t)$, принимающее в точке $t = t_0$ значение $u(t_0) = u_0$.

Если выполнены условия теоремы Коши, то решение ОДУ непрерывно зависит от начального условия и правой части этого ОДУ. Если к тому же правая часть ОДУ зависит от некоторого параметра $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$, т.е. вместо (5.12) имеем ОДУ $\frac{du}{dt} = g(t, u, \lambda)$ с начальным условием $u(t_0, \lambda) = u_0(\lambda)$, то решение $u(t, \lambda)$ этого ОДУ непрерывно зависит от параметра λ при дополнительном условии непрерывной дифференцируемости функции $g(t, u, \lambda)$ по λ на множестве $D \times \Lambda$. Свойство

непрерывной зависимости решения от перечисленных факторов важно при рассмотрении прикладных задач, поскольку на практике начальное условие, правая часть ОДУ или параметр известны лишь приближенно с некоторой погрешностью.

Расширенным фазовым пространством в данном случае будет плоскость с прямоугольной декартовой системой координат Otu . Попытаемся представить качественный характер интегральной кривой Γ , являющейся графиком решения $u(t)$ ОДУ (5.12), для случая, когда правая часть этого ОДУ не зависит явно от времени, т.е. $f(t, u) \equiv f(u)$. Вид этой кривой зависит от того, имеет или нет уравнение $f(u) = 0$ действительные корни. Если таких корней нет, то производная $\frac{du}{dt}$ знакопостоянна, а функция $u(t)$ строго монотонна (возрастает или убывает).

Пусть уравнение $f(u) = 0$ имеет $m \in \mathbb{N}$ действительных различных корней $u_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, m}$, т.е. существует m действительных нулей функции $f(u)$. Тогда каждая из прямых $u = u_i$ на плоскости tOu будет интегральной кривой ОДУ

$$\frac{du(t)}{dt} = f(u), \quad t > 0, \quad (5.13)$$

при условии, что $u(t_0) = u_i$ в некоторый момент времени $t = t_0$.

Предположим, что функция $f(u)$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки u_i , т.е. в этой окрестности выполнены условия теоремы Коши. Тогда в силу единственности решения ОДУ (5.13) через любую точку $(t, u_i) \in \mathbb{R}^2$ плоскости tOu проходит лишь одна интегральная кривая $u(t) \equiv u_i$. Следовательно, интегральные кривые, расположенные в полосе между прямыми, параллельными оси Ot и соответствующими соседним значениям u_i , $i = \overline{1, m}$, не имеют общих точек с этими прямыми. Поскольку в такой полосе правая часть (5.13) знакопостоянна, то каждой интегральной кривой в этой полосе соответствует строго монотонная функция $u(t)$, а ограничивающие полосу прямые служат горизонтальными асимптотами графика этой функции (рис. 5.14).

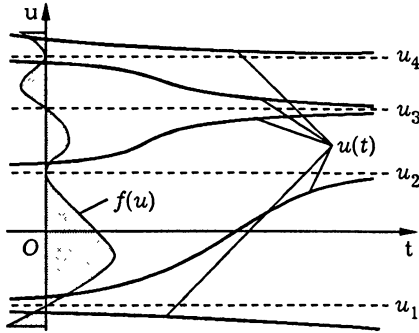


Рис. 5.14

Так как каждая из функций $u(t) = u_i = \text{const}$, $i = \overline{1, m}$, является частным решением ОДУ (5.13), то по аналогии с нормальной автономной системой ОДУ [VIII] точки u_i назовем *положениями равновесия ОДУ* (5.13). Выясним условия устойчивости положения равновесия u_i этого ОДУ в случае, когда функция $f(u)$ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки u_i .

Обозначим $\xi(t) = u(t) - u_i$ отклонение от положения равновесия и при помощи формулы конечных приращений, учитывая, что $f(u_i) = 0$, представим (5.13) в виде

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{d\xi(t)}{dt} = f(u_i + \xi) = f'(u_i + \Theta\xi)\xi, \quad \Theta \in (0, 1). \quad (5.14)$$

При $\Theta = 0$ из (5.14) следует линейное ОДУ $\frac{d\xi}{dt} = f'(u_i)\xi$, которое является частным случаем системы уравнений первого приближения. Согласно теоремам Ляпунова об устойчивости по первому приближению [VIII], при $f'(u_i) < 0$ частное решение $u(t) \equiv u_i$ ОДУ (5.13) асимптотически устойчиво, а при $f'(u_i) > 0$ — неустойчиво (соответственно решения $u(t) \equiv u_3$ и $u(t) \equiv u_1$ на рис. 5.14). В этих случаях говорят, что соответствующее положение равновесия асимптотически устойчиво или неустойчиво.

В случае $f'(u_i) = 0$ для выяснения вопроса об устойчивости положения равновесия умножим равенство (5.14) на $\xi \neq 0$ и получим

$$\xi \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\xi^2}{dt} = \xi^2 f'(u_i + \Theta\xi).$$

Если у точки u_i существует хотя бы одна полукрестность, в которой $f'(u_i + \Theta\xi) > 0$ (например, у точек u_2 и u_4 на рис. 5.14), то в этой полукрестности $\frac{d\xi^2}{dt} > 0$ и $\frac{d|\xi|}{dt} > 0$, т.е. сколь угодно малое отклонение от положения равновесия в этой полукрестности возрастает по абсолютной величине с течением времени. Следовательно, для любого $\delta > 0$ существует такое число $\varepsilon > \delta$ и такой момент времени $t_1 > t_0$, что при $0 < |\xi(t_0)| < \delta$ выполнено неравенство $|\xi(t_1)| \geq \varepsilon$, а это означает неустойчивость по Ляпунову [VIII]. Если же при $f'(u_i) = 0$ существует окрестность точки u_i , в которой $f'(u_i + \Theta\xi) < 0$, то в этой окрестности $\frac{d\xi^2}{dt} < 0$ и $\frac{d|\xi|}{dt} < 0$, т.е. $|\xi| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, что соответствует определению асимптотической устойчивости.

Пример 5.6. Рассмотрим электрическую цепь (рис. 5.15, а), состоящую из последовательно соединенных источника постоянного напряжения U^* , катушки индуктивностью L , резистора сопротивлением R и двух электродов, между которыми при их сближении возникает дуговой разряд (вольтова дуга). Вид

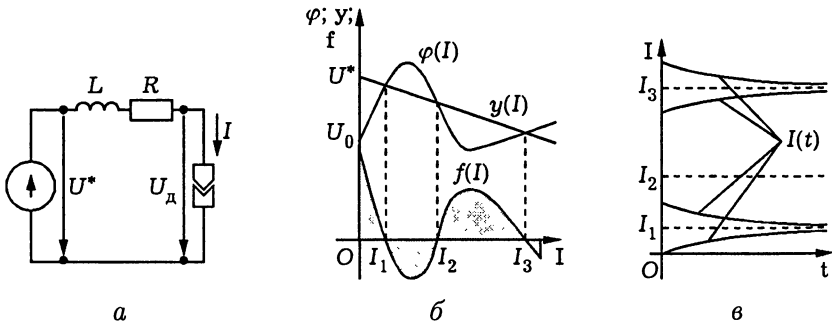


Рис. 5.15

нелинейной характеристики дуги $\Delta U_d = \varphi(I)$, определяющей зависимость разности ΔU_d напряжений на электродах от силы I тока, проходящего через дугу, представлен на рис. 5.15, б. Если считать, что при изменении I соответствующее значение ΔU_d устанавливается мгновенно, то изменение во времени t силы тока в этой цепи описывает (в соответствии со вторым из законов Кирхгофа) нелинейное ОДУ первого порядка $L \frac{dI}{dt} + RI + \varphi(I) = U^*$, или

$$\frac{dI}{dt} = \frac{U^* - RI - \varphi(I)}{L}. \quad (5.15)$$

Положения равновесия ОДУ (5.15) являются абсциссами точек пересечения характеристики дуги с прямой $y(I) = U^* - RI$ (см. рис. 5.15, б). Для рассматриваемого вида характеристики таких точек может быть не более трех, причем по графику функции $f(I) = \frac{1}{L}(U^* - RI - \varphi(I))$ в правой части ОДУ (5.15) можно установить, что положения равновесия I_1 и I_3 являются устойчивыми, а I_2 — неустойчивым. Расположение интегральных кривых $I(t)$ этого ОДУ на плоскости tOI при различных начальных значениях силы тока в момент времени $t = 0$ показано на рис. 5.15, в.

Изменение U^* и/или R приведет к изменению положений равновесия ОДУ (5.15). При непрерывной зависимости решения этого ОДУ от U^* и R как от параметров такое изменение будет непрерывным и не приведет к резкому изменению в расположении интегральных кривых на плоскости tOI .

На рис. 5.16, а приведен график функции $U^*(\bar{I}) = \varphi(\bar{I}) + R_0 \bar{I}$, устанавливающей соответствие между силой \bar{I} тока в положении равновесия ОДУ (5.15) и напряжением U^* при фиксированном значении $R = R_0$. При $U^* \rightarrow U_1^* + 0$ и $U^* \rightarrow U_2^* - 0$ точка неустойчивого положения равновесия сближается с одной из точек устойчивого положения равновесия. В пределе эти точки попарно сливаются в одну, что изменяет характер расположения интегральных кривых (рис. 5.16, б и в). При $U_0 \leq U^* < U_1^*$ и

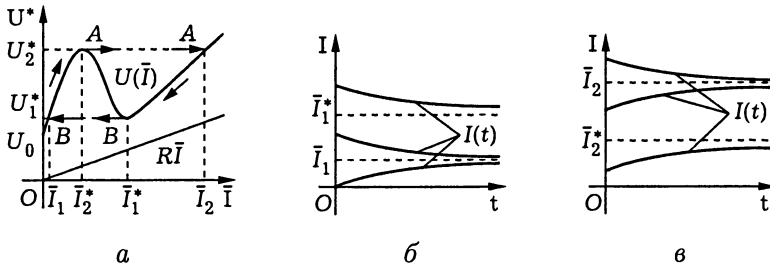


Рис. 5.16

$U^* > U_2^*$ остается лишь по одному положению равновесия, причем устойчивому, что вновь изменяет расположение интегральных кривых на плоскости tOI . Таким образом, в окрестности точек U_1^* и U_2^* утрачивается непрерывная зависимость решения ОДУ (5.15) от параметра U^* . Можно показать*, что при фиксированном значении $U^* = U_0^* > U_0$ существует хотя бы одно значение $R = R_*$, в окрестности которого отсутствует непрерывная зависимость решения этого ОДУ и от параметра R .

Предположим, что напряжение U^* изменяется столь медленно, что каждому его значению соответствует значение \bar{I} в положении равновесия. Тогда при увеличении U^* от нуля тока в цепи сначала не будет, так как при $U^* < U_0$ дуговой разряд между электродами не возникнет. При медленном возрастании U^* на отрезке $[U_0, U_2^*]$ сила \bar{I} тока растет непрерывно до значения \bar{I}_2^* , но затем увеличивается скачком до значения \bar{I}_2 (стрелки A на рис. 5.16, а). Если после этого начать уменьшать U^* , то \bar{I} будет уменьшаться сначала непрерывно до значения \bar{I}_1^* , а затем скачком до значения \bar{I}_1 (стрелки B на рис. 5.16, а). #

Если правая часть ОДУ зависит от параметра и в окрестности некоторого его значения изменяется качественный характер расположения интегральных кривых, то это значение параметра называют **бифуркационным**. В примере 5.6 бифуркационными являются значения U_1^* и U_2^* напряжения U^* .

*См.: Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.

В [VIII] рассмотрено несколько характерных нестационарных ММ механических, гидравлических и тепловых систем, описываемых нелинейными ОДУ первого порядка. При этом в ряде случаев функция в правой части ОДУ вида (5.12) является разрывной, т.е. не удовлетворяет условиям теоремы Коши в окрестности некоторой точки (t_*, u_*) плоскости tOu , так что через эту точку может проходить более чем одна интегральная кривая данного ОДУ. В случае разрывной периодической функции в правой части ОДУ его решение описывает периодический процесс (в [VIII] это процессы заряда и разряда электрического конденсатора и периодического изменения температуры участка движущейся ленты излучателя космической энергетической установки). Интегральная кривая при этом имеет вид пилообразной линии с угловыми точками. Рассмотрим более сложный пример построения решения при разрывной периодической функции в правой части ОДУ.

Пример 5.7. Одним из возможных вариантов устройства для охлаждения рабочего тела космической энергетической установки является дисковый излучатель (рис. 5.17). Участок поверхности тонкого вращающегося диска 2, двигаясь в зазоре между стенками теплообменника 1, нагревается, а затем, выйдя из зазора, излучает тепловую энергию в окружающее пространство. Стенки теплообменника имеют одинаковую по своей поверхности температуру T_1 , а температура T каждого участка диска при длительной работе излучателя циклически изменяется во времени t в соответствии с периодом τ равномерного вращения диска. Поэтому распределение температуры по поверхности диска является квазистационарным: температура T зависит лишь от угла ψ , определяющего положение участка диска относительно теплообменника,

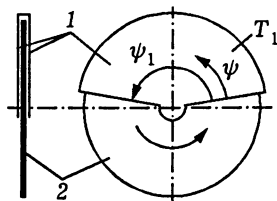


Рис. 5.17

и одинакова для всех точек, лежащих на одном луче, исходящем из центра вращения.

Для тонкого диска передачей теплоты теплопроводностью вдоль его поверхности можно пренебречь. Тогда изменение температуры T участка диска при нагреве и охлаждении описывают ОДУ первого порядка

$$hc \frac{dT}{dt} = 2\varepsilon_* \sigma_0 (T_1^4 - T^4), \quad hc \frac{dT}{dt} = -2\varepsilon \sigma_0 T^4 \quad (5.16)$$

соответственно, где c и h — соответственно объемная теплоемкость материала диска и его толщина, σ_0 — постоянная Стефана — Больцмана (см. 5.1), $\varepsilon_* = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right)^{-1}$ — приведенный коэффициент излучения системы двух тел с плоскопараллельными поверхностями*, размеры которых велики по сравнению с зазором между ними, ε и ε_1 — коэффициенты излучения поверхностей диска и теплообменника соответственно.

Используя в (5.16) замену $t = \frac{r\psi}{2\pi}$, получаем

$$\frac{d\vartheta}{d\psi} = \bar{\varepsilon}_* a (1 - \vartheta^4), \quad \frac{d\vartheta}{d\psi} = -a\vartheta^4, \quad (5.17)$$

где $\vartheta = \frac{T}{T_1}$, $\bar{\varepsilon}_* = \frac{\varepsilon_*}{\varepsilon}$ и $a = 2\varepsilon \sigma_0 T_1^3 \frac{\tau}{2\pi hc}$. Для нахождения квазистационарного распределения температуры по поверхности диска ОДУ (5.17) можно рассматривать лишь при $\psi \in [0, 2\pi]$, причем первое из них — при $\psi \in [0, \psi_1]$, а второе — при $\psi \in [\psi_1, 2\pi]$ (см. рис. 5.17). Тогда для первого ОДУ (5.17) начальным будет значение ϑ_0 при $\psi = 0$ на входе участка диска в зазор между стенками теплообменника, а для второго ОДУ — значение ϑ_* при $\psi = \psi_1$ на выходе из этого зазора.

Интегрированием ОДУ (5.17) получим

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 + \vartheta}{1 - \vartheta} \right| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \vartheta = \bar{\varepsilon}_* a \psi + C_1, \quad \frac{1}{3\vartheta^3} = a\psi + C_2.$$

*См.: Теория тепломассообмена.

Используя начальные условия, находим

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{(1 - \vartheta_0)(1 + \vartheta)}{(1 + \vartheta_0)(1 - \vartheta)} \right| + \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} \vartheta - \operatorname{arctg} \vartheta_0) = \bar{\varepsilon}_* a \psi,$$

$$\frac{1}{3\vartheta^3} - \frac{1}{3\vartheta_*^3} = a(\psi - \psi_1),$$

откуда, учитывая, что $\ln \left| \frac{1+z}{1-z} \right| = 2 \operatorname{Arth} z$ при $|z| \leq 1$, и преобразовывая разность арктангенсов, получаем

$$\begin{cases} \operatorname{Arth} \frac{\vartheta - \vartheta_0}{1 - \vartheta_0 \vartheta} + \operatorname{arctg} \frac{\vartheta - \vartheta_0}{1 + \vartheta_0 \vartheta} = 2\bar{\varepsilon}_* a \psi, \\ \frac{1}{\vartheta^3} - \frac{1}{\vartheta_*^3} = 3a(\psi - \psi_1). \end{cases} \quad (5.18)$$

В случае квазистационарного распределения температуры в диске значению ψ_1 в первом равенстве (5.18) соответствует $\vartheta = \vartheta_*$, а значению $\psi = 2\pi$ во втором — $\vartheta = \vartheta_0$. Тогда получим два уравнения

$$\begin{cases} \operatorname{Arth} \frac{\vartheta_* - \vartheta_0}{1 - \vartheta_0 \vartheta_*} + \operatorname{arctg} \frac{\vartheta_* - \vartheta_0}{1 + \vartheta_0 \vartheta_*} = 2\bar{\varepsilon}_* a \psi_1, \\ \frac{1}{\vartheta_0^3} - \frac{1}{\vartheta_*^3} = 3a(2\pi - \psi_1) \end{cases} \quad (5.19)$$

относительно неизвестных значений ϑ_0 и ϑ_* . Эти уравнения можно решить, используя численные методы. Можно также с помощью второго уравнения выразить одно неизвестное через другое, например ϑ_0 через ϑ_* , и исключить это неизвестное из первого уравнения. В результате придем к довольно громоздкому трансцендентному уравнению с одним неизвестным.

Пусть $h = 2 \cdot 10^{-3}$ м, $c = 3,61 \frac{\text{МДж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}}$, $\varepsilon = \varepsilon_1 = 0,8$, $T_1 = 1000$ К, $\psi_1 = 8\pi/9$ и $\tau = 60$ с. Тогда $\varepsilon_* = 2/3$, $\bar{\varepsilon}_* = 5/6$ и при $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ имеем $a \approx 0,120$. В итоге, решая уравнения (5.19), находим значения $\vartheta_0 \approx 0,71$ и $\vartheta_* \approx 0,86$, соответствующие температурам $T_0 \approx 710$ К и $T_* \approx 860$ К участка диска

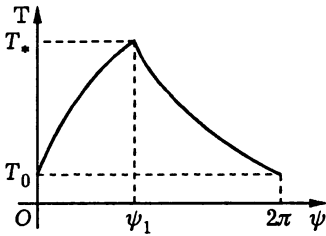


Рис. 5.18

на входе в зазор между стенками теплообменника и выходе из зазора соответственно. Квасистационарное распределение температуры диска в зависимости от угла ψ представлено на рис. 5.18.

За один оборот диска каждый его участок единичной площади теряет путем излучения количество теплоты $hc(T_* - T_0)$, так что мощность излучаемой энергии при использованных выше числовых значениях равна $q = \frac{hc}{\tau}(T_* - T_0) \approx 18,06 \frac{\text{кВт}}{\text{м}^2}$. Если увеличивать скорость вращения диска, т.е. уменьшать значение τ , то значения T_0 и T_* сближаются, а в (5.17) $\frac{d\vartheta}{d\psi} \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$. При этом $T_0 \rightarrow \bar{T}$ и $T_* \rightarrow \bar{T}$, где \bar{T} — равновесная температура диска, удовлетворяющая уравнению теплового баланса* $2\varepsilon_*\sigma_0(T_1^4 - \bar{T}^4)\psi_1 = 2\varepsilon\sigma_0\bar{T}^4(2\pi - \psi_1)$. Отсюда

$$\bar{T} = \left(1 + \frac{2\pi/\psi_1 - 1}{\bar{\varepsilon}_*}\right)^{-1/4} T_1$$

и излучаемая мощность

$$\bar{q} = 2\varepsilon\sigma_0\bar{T}^4 \left(1 - \frac{\psi_1}{2\pi}\right) = 2\varepsilon\sigma_0 T_1^4 \frac{1 - \frac{\psi_1}{2\pi}}{1 + \frac{2\pi}{(\psi_1 - 1)\bar{\varepsilon}_*}}$$

При $\varepsilon = 0,8$, $\bar{\varepsilon}_* = 5/6$, $T_1 = 1000 \text{ К}$ и $\psi_1 = 8\pi/9$ получим $\bar{T} \approx 795 \text{ К}$ и $\bar{q} \approx 20,16 \frac{\text{кВт}}{\text{м}^2}$.

Отметим, что при $\psi_1 = \bar{\psi}_1 = \frac{2\pi}{1 + \sqrt{\bar{\varepsilon}_*}}$ величина \bar{q} достигает максимального значения $\bar{q}_{\max} = \frac{2\varepsilon_*\sigma_0 T_1^4}{(1 + \sqrt{\bar{\varepsilon}_*})^2}$. Для использованных выше числовых данных имеем $\bar{\psi}_1 \approx 1,046\pi \approx 188^\circ$ и $\bar{q}_{\max} \approx 20,66 \frac{\text{кВт}}{\text{м}^2}$. Если все поверхности излучателя имеют свойства

*См.: Зарубин В.С. (1966 г.)

абсолютно черного тела, т.е. $\varepsilon = \varepsilon_1 = 1$, то $\bar{\varepsilon}_* = 1$, $\bar{\psi}_1 = \pi$ и $\bar{q}_{\max} \approx 28,35 \frac{\text{кВт}}{\text{м}^2}$. Это максимально возможное значение мощности, рассеиваемой дисковым излучателем при температуре $T_1 = 1000 \text{ К}$ теплообменника.

5.4. Простейшие динамические модели

При построении *математических моделей* (ММ) *технических объектов* (см. 3 и 4) оказалось удобным оперировать понятиями *потенциальных* и *поточковых величин*. Этот подход в несколько обобщенном виде можно использовать и при построении *нелинейных динамических математических моделей*. Рассмотрим его на примере простейшей механической системы с одной *степеню свободы* и состоящей из материальной точки массой m .

Состояние этой системы в момент времени t характеризуют значения перемещения $u(t)$ материальной точки и ее скорости $v(t) = \frac{du(t)}{dt}$, причем скорость целесообразно принять в качестве *поточковой величины*, а действующие на эту точку силы — в качестве *потенциальных* (см. 3.2), что соответствует I варианту *электромеханической аналогии* (см. табл. 4.2). Пусть на материальную точку действуют две силы, проекции которых на положительное направление координатной оси Ou перемещения обозначим P и P^* . Первая из сил не зависит от скорости v и может быть функцией лишь перемещения и времени, т.е. $P = P(u, t)$, а для второй силы в общем случае имеем $P^* = P^*(u, v, t)$. Тогда, согласно второму закону Ньютона, запишем

$$m \frac{dv}{dt} = P(u, t) + P^*(u, v, t). \quad (5.20)$$

Скорость изменения кинетической энергии $K = mv^2/2$ рассматриваемой системы равна $\frac{dK}{dt} = mv \frac{dv}{dt}$. Поэтому после умно-

жения (5.20) на v получим

$$\frac{dK}{dt} = Pv + P^*v. \quad (5.21)$$

Таким образом, скорость изменения кинетической энергии равна мощности действующих на материальную точку сил, что следует из закона сохранения энергии.

Напомним, что если существует такая функция $\Pi(u, t)$, что $P(u, t) = -\frac{\partial \Pi(u, t)}{\partial u}$, то Π — потенциальная энергия данной системы [XV], а сила $P(u, t)$ — *потенциальная*. Сумма $K + \Pi = W$ является полной энергией, а разность $K - \Pi = L$ — *кинетическим потенциалом* этой системы.

Пусть в фиксированные моменты времени t_0 и t_1 заданы значения

$$u(t_0) = \tilde{u}_0, \quad u(t_1) = \tilde{u}_1. \quad (5.22)$$

Тогда для механической системы, на которую действуют только потенциальные силы, согласно *принципу Гамильтона*, вариация действия по Гамильтону

$$S[u] = \int_{t_0}^{t_1} L(u, v, t) dt \quad (5.23)$$

равна нулю [XV], т.е. при выполнении вытекающего из (5.22) условия

$$\delta u(t_0) = \delta u(t_1) = 0 \quad (5.24)$$

справедливо равенство

$$\delta S[u] = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta \Pi) dt = \int_{t_0}^{t_1} (\delta K + P \delta u) dt = 0, \quad (5.25)$$

поскольку в данном случае $\delta \Pi = -P \delta u$.

Можно показать*, что среди всех возможных законов движения $u = u(t)$, удовлетворяющих условиям (5.22), действительный закон движения не только является *стационарной точкой функционала* (5.23), но и сообщает ему минимальное значение. Минимизация этого функционала при условиях (5.22) — простейшая задача вариационного исчисления [XV], а необходимое условие минимума (5.23) в виде *уравнения Эйлера*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(u, v, t)}{\partial v} \right) - \frac{\partial L(u, v, t)}{\partial u} = 0$$

соответствует для рассматриваемой простейшей механической системы *уравнению Лагранжа второго рода*.

Обобщением соотношения (5.25) для рассматриваемой простейшей механической системы является *принцип Гамильтона — Остроградского*, выражаемый равенством

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta K + P \delta u + P^* \delta u) dt = 0. \quad (5.26)$$

Убедимся, что из (5.26) при выполнении (5.24) следует (5.20).

Так как $\delta K = mv \delta v$ и $\delta v = \frac{d(\delta u)}{dt}$, то, используя интегрирование по частям, находим

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta K dt = m \int_{t_0}^{t_1} v \delta v dt = m \int_{t_0}^{t_1} v d(\delta u) = mv \delta u \Big|_{t_0}^{t_1} - m \int_{t_0}^{t_1} \delta u \frac{dv}{dt} dt.$$

Подставляя это равенство в (5.25) и учитывая (5.24), получаем

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(-m \frac{dv}{dt} + P + P^* \right) \delta u dt = 0.$$

* См.: Маркеев А.П.

Поскольку вариация δu произвольна, то это равенство в случае непрерывности подынтегрального выражения эквивалентно (5.20).

Пусть потенциальная энергия не зависит явно от времени, т.е. $\Pi = \Pi(u)$. Тогда $P = -\frac{d\Pi}{du}$ и

$$Pv = -\frac{d\Pi}{du} \frac{du}{dt} = -\frac{d\Pi}{dt}.$$

После подстановки в (5.21) запишем

$$\frac{dK}{dt} + \frac{d\Pi}{dt} = \frac{dW}{dt} = P^*v. \quad (5.27)$$

В этом случае скорость изменения полной энергии $W = K + \Pi$ равна мощности P^*v непотенциальной силы, действующей на рассматриваемую систему. В случае *консервативной системы* $P^* \equiv 0$ и

$$W = K + \Pi = m\frac{v^2}{2} + \Pi(u) = H = \text{const.} \quad (5.28)$$

Систему называют *диссипативной* (от латинского слова *dissipatio* — рассеяние), если в (5.27) $P^*v \leq 0$ при условии, что $P^*v \neq 0$. Из (5.27) следует, что за период времени, в течение которого мощность непотенциальной силы принимает отрицательные значения, полная энергия W диссипативной системы уменьшается (рассеивается). При этом механические формы энергии могут переходить в немеханические, в том числе в теплоту.

Периодическое во времени движение механической системы возможно, если ее полная энергия остается неизменной (как, например, в случае консервативной системы). Движение диссипативной системы не может быть периодическим. Строго говоря, полная энергия большинства реальных систем не остается постоянной. Поэтому динамические ММ консервативных систем лишь приближенно описывают поведение реальных систем.

Если действующие на механическую систему силы не зависят явно от времени, то ее называют *автономной системой*. Этот термин согласуется с понятием автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [VIII], описывающей движение рассматриваемой механической системы и состоящей из ОДУ $\frac{du}{dt} = v$ и (5.20) в виде

$$m \frac{dv}{dt} = P(u) + P^*(u, v). \quad (5.29)$$

Такая система ОДУ является нелинейной (в общем случае) динамической ММ данной механической системы.

Пример 5.8. В качестве автономной механической системы рассмотрим твердое тело 1 массой m , движущееся при наличии сопротивления по горизонтальной поверхности и связанное с неподвижной опорой 2 пружиной 3, жесткость $c(u)$ которой зависит от перемещения u этого тела (рис. 5.19). Таким образом, пружина действует на тело силой $P(u) = -c(u)u$, являющейся потенциальной. Предположим, что сила P^* сопротивления движению тела пропорциональна квадрату скорости $v = \frac{du}{dt}$ и направлена противоположно направлению скорости, т.е. $P^*(v) = -kv^2 \operatorname{sgn} v$, $k = \operatorname{const} > 0$. Тогда (5.20) примет вид

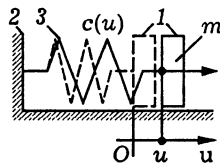


Рис. 5.19

$$m \frac{dv}{dt} = -c(u)u - kv^2 \operatorname{sgn} v.$$

Потенциальную энергию этой системы можно представить интегралом с переменным верхним пределом:

$$\Pi(u) = - \int_{u_0}^u P(u) du = \int_{u_0}^u c(u)u du,$$

где u_0 — некоторое значение перемещения, определяющее положение тела, потенциальную энергию в котором принимают за нуль отсчета. В данном случае за u_0 удобно принять перемещение тела, соответствующее свободному состоянию пружины. Отсчет перемещения u также удобно вести от этого положения, т.е. принять $u_0 = 0$. В этом случае для полной энергии системы получим

$$W = K + \Pi = m \frac{v^2}{2} + \int_0^u c(u)u \, du$$

и в соответствии с (5.27)

$$\frac{dW}{dt} = P^*v = -kv^2v \operatorname{sgn} v = -kv^2|v| \leq 0, \quad (5.30)$$

т.е. рассматриваемая система является диссипативной. При этом система за счет уменьшения своей полной энергии совершает против силы сопротивления работу, частично или полностью переходящую в теплоту. Если силой сопротивления можно пренебречь, т.е. положить $k = 0$, то в (5.30) $\frac{dW}{dt} \equiv 0$, что соответствует консервативной системе, а ее динамическая ММ может описывать периодические во времени движения твердого тела. #

Введенные для механической системы понятия и полученные соотношения можно перенести на системы, в которых протекают процессы немеханической природы. Напомним, что для системы, состоящей из *электрических двухполюсников*, потенциальной величиной является падение напряжения ΔU на двухполюснике, а потоковой — сила тока I (см. 3.1). В гидравлической системе потенциальная величина — перепад Δp давления, а потоковая — объемный расход $Q_{\text{ж}}$ жидкости (см. 3.4).

Пример 5.9. Используем нелинейные ММ индуктивной катушки с железным сердечником и конденсатора, емкость $C(Q_e)$ которого зависит от величины Q_e накопленного электрического заряда (см. 5.1), для построения динамической

ММ *колебательного контура*, включающего кроме этих двухполюсников резистор с постоянным сопротивлением R (рис. 5.20). При достаточно длительном подключении к контуру источника напряжения (ключ K в положении 1) конденсатор будет заряжен до напряжения ΔU^* . При этом накопленный конденсатором заряд Q_e^* можно найти из равенства $\frac{Q_e^*}{C(Q_e^*)} = \Delta U^*$. Пусть в момент времени t_0 ключ K переведен из положения 1 в положение 2. Тогда, согласно второму из *законов Кирхгофа*, запишем

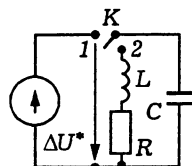


Рис. 5.20

$$\frac{d\Psi(I)}{dt} + RI + \frac{Q_e}{C(Q_e)} = 0, \quad (5.31)$$

где $\Psi(I)$ — потокосцепление катушки, зависящее нелинейно от силы I тока в контуре.

По I варианту электромеханической аналогии (см. табл. 4.2), кинетической энергии соответствует магнитная энергия катушки, а потенциальной — электрическая энергия, запасенная в конденсаторе. Скорость $\frac{dW}{dt}$ изменения полной энергии W колебательного контура равна суммарной мощности $I \frac{d\Psi(I)}{dt} + \frac{IQ_e}{C(Q_e)}$ при протекании тока силой I через катушку и конденсатор. Тогда после умножения (5.31) на I можно записать $\frac{dW}{dt} = -I^2 R \leq 0$. Следовательно, рассматриваемый колебательный контур является диссипативной системой, в которой полная энергия переходит в джоулеву теплоту, выделяющуюся при протекании тока через резистор. Это приводит к затуханию колебаний. Если можно пренебречь сопротивлением R контура, то он будет соответствовать консервативной системе, так что динамическая ММ такого контура может при определенных условиях описывать периодические (незатухающие) колебания.

Пример 5.10. К нижней части цилиндрического сосуда 1 с вертикальной образующей присоединен горизонтальный трубопровод 2 длиной l и радиуса r_* (рис. 5.21). Трубопровод и сосуд заполнены несжимаемой жидкостью плотностью ρ , причем высота уровня жидкости в сосуде относительно трубопровода равна H .

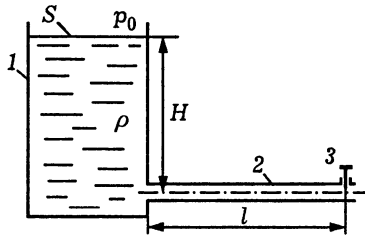


Рис. 5.21

В момент времени $t = 0$ открывают кран 3 на свободном конце трубопровода и жидкость начинает вытекать в приемную емкость. Примем, что площадь S зеркала жидкости в сосуде существенно больше площади πr_*^2 поперечного сечения трубопровода. Тогда скоростью жидкости в сосуде в отличие от ее средней скорости \bar{v} в трубопроводе можно пренебречь. Давление жидкости на входе в трубопровод в соответствии с *интегралом Бернулли* будет равно $p_0 + \rho gh - \rho \bar{v}^2/2$, где p_0 — атмосферное давление, g — ускорение свободного падения, а h — текущая высота уровня жидкости в сосуде, связанная с объемным расходом $Q = \pi r_*^2 \bar{v}$ жидкости через трубопровод соотношением

$$h = H - \frac{1}{S} \int_0^t Q dt = H - \frac{\pi r_*^2}{S} \int_0^t \bar{v} dt. \quad (5.32)$$

Потери давления, вызванные гидравлическим сопротивлением трубопровода, примем в соответствии с (3.47) в виде $\Delta p = \lambda_r l \rho \frac{\bar{v}^2}{4r_*}$, где $\lambda_r = \text{const}$ — коэффициент пропорциональности. После открытия крана давление жидкости на выходе из

трубопровода равно p_0 . Тогда для массы $m = \rho \pi r_*^2 l$ жидкости в трубопроводе имеем

$$\rho \pi r_*^2 l \frac{d\bar{v}}{dt} = \pi r_*^2 \left(\rho g h - \rho \frac{\bar{v}^2}{2} - \lambda_{\Gamma} \frac{l}{2r_*} \rho \frac{\bar{v}^2}{2} \right),$$

или, вводя обозначение $k = 1 + \frac{\lambda_{\Gamma} l}{2r_*}$,

$$l \frac{d\bar{v}}{dt} + k \frac{\bar{v}^2}{2} = g h. \quad (5.33)$$

Подставляя (5.32) в (5.33), находим

$$l \frac{d\bar{v}}{dt} + k \frac{\bar{v}^2}{2} + \frac{\pi r_*^2 g}{S} \int_0^t \bar{v} dt = g H$$

и после дифференцирования по времени t получаем нелинейное ОДУ

$$l \frac{d^2 \bar{v}}{dt^2} + k \bar{v} \frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{\pi r_*^2 g}{S} \bar{v} = 0 \quad (5.34)$$

второго порядка. Отметим, что (5.34) можно получить из закона сохранения энергии в системе, состоящей из сосуда и трубопровода. В любой момент времени t полная энергия $W = \Pi + K$ этой системы включает потенциальную и кинетическую энергии

$$\Pi = \int_0^h \rho g h S dh, \quad K = m \frac{\bar{v}^2}{2} + \int_0^t \rho Q \frac{\bar{v}^2}{2} dt$$

соответственно. Силы гидравлического сопротивления не являются потенциальными, причем на их преодоление система затрачивает работу, т.е. мощность $Q(-\Delta p)$ этих сил отрицательна, что соответствует определению диссипативной системы. Используя (5.27) в виде $\frac{dW}{dt} = -Q\Delta p$, получаем

$$\rho g h S \frac{dh}{dt} + \frac{d(m\bar{v}^2/2)}{dt} + \rho Q \frac{\bar{v}^2}{2} = -Q\Delta p.$$

Отсюда, учитывая (5.32) и выражения для Q , m , Δp , после сокращения на $\rho \pi r_*^2 \bar{v}$ приходим к равенству

$$-gh + \frac{\bar{v}^2}{2} + l \frac{d\bar{v}}{dt} + \lambda_r l \frac{\bar{v}^2}{4r_*} = 0,$$

которое соответствует (5.33).

Если ввести ускорение $w = \frac{d\bar{v}}{dt}$ массы жидкости в трубопроводе, то (5.34) примет вид ОДУ

$$\frac{w dw}{1 + aw} = -\frac{k}{al} \bar{v} d\bar{v}$$

с разделяющимися переменными, где $a = kS/(\pi r_*^2 g)$. После интегрирования имеем

$$\frac{1 + aw - \ln|1 + aw|}{a^2} = -\frac{k}{2al} \bar{v}^2 + C.$$

Константу C найдем из условия, что в момент времени $t = 0$ открытия крана $\bar{v} = 0$, $h = H$ и в соответствии с (5.33) $w = gH/l$.

Тогда получим $C = \frac{1}{a^2} \left(1 + \frac{agH}{l} - \ln \left| 1 + \frac{agH}{l} \right| \right)$ и

$$\bar{v}^2 + \frac{2l}{k} w = \frac{2gH}{k} - \frac{2l}{ak} \ln \left| \frac{1 + agH/l}{1 + aw} \right|. \quad (5.35)$$

Подставляя $w = \frac{d\bar{v}}{dt}$ из (5.33) во второе слагаемое в левой части (5.35), получаем $\frac{ag(H-h)}{l} = \ln \left| \frac{1 + agH/l}{1 + aw} \right|$, или

$$w = \frac{(1 + agH/l)e^{-ag(H-h)/l} - 1}{a}. \quad (5.36)$$

В конце процесса истечения жидкости из сосуда (при $h = 0$) имеем $w_* = \frac{1}{a} \left((1 + agH/l)e^{-agH/l} - 1 \right) < 0$ и после подстановки в (5.35) находим соответствующее значение

$$\bar{v}_* = \sqrt{2l \frac{1 - (1 + agH/l)e^{-agH/l}}{ak}}$$

ее средней скорости в трубопроводе. Отметим, что после открытия крана средняя скорость \bar{v} жидкости изменяется немонотонно и при значении $w = 0$, соответствующем высоте

$$h_{\max} = H - \frac{l}{ag} \ln\left(1 + \frac{agH}{l}\right) > 0$$

уровня жидкости в сосуде, достигает максимального значения

$$\bar{v}_{\max} = \sqrt{\frac{2gH}{k} - \frac{2l}{ak} \ln\left(1 + \frac{agH}{l}\right)},$$

которое следует из (5.35) при $w = 0$. На рис. 5.22 представлен характер зависимости, описываемой соотношением (5.35).

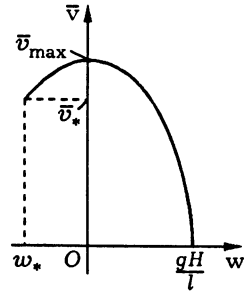


Рис. 5.22

Если зависимость \bar{v} от $w = \frac{d\bar{v}}{dt}$ на отрезке $[0, gH/l]$ аппроксимировать параболой $\bar{v} = \bar{v}_{\max} \left(1 - \frac{(lw)^2}{(gH)^2}\right)$, то получим ОДУ

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{gH}{l} \sqrt{1 - \frac{\bar{v}}{\bar{v}_{\max}}},$$

которое имеет решение $-2\bar{v}_{\max} \sqrt{1 - \frac{\bar{v}}{\bar{v}_{\max}}} = \frac{gHt}{l} + C_{\max}$. Так как $\bar{v} = 0$ при $t = 0$, то $C_{\max} = -2\bar{v}_{\max}$ и

$$1 - \sqrt{1 - \frac{\bar{v}}{\bar{v}_{\max}}} = \frac{gHt}{2l\bar{v}_{\max}}.$$

Отсюда при $\bar{v} = \bar{v}_{\max}$ находим оценку $t_{\max} = \frac{2l}{gH} \bar{v}_{\max}$ времени достижения максимального значения средней скорости в трубопроводе. На отрезке $[w_*, 0]$ используем аппроксимацию $\bar{v} = \bar{v}_* + (\bar{v}_{\max} - \bar{v}_*) \left(1 - \left(\frac{w}{w_*}\right)^2\right)$, приводящую к ОДУ

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = w_* \sqrt{\frac{\bar{v}_{\max} - \bar{v}}{\bar{v}_{\max} - \bar{v}_*}}.$$

Его решением будет $-2(\bar{v}_{\max} - \bar{v}_*)\sqrt{\frac{\bar{v}_{\max} - \bar{v}}{\bar{v}_{\max} - \bar{v}_*}} = w_*t + C_*$. Поскольку $\bar{v} = \bar{v}_{\max}$ при $t = t_{\max}$, то $C_* = -w_*t_{\max}$. Тогда, учитывая, что $w_* < 0$, запишем

$$\sqrt{\frac{\bar{v}_{\max} - \bar{v}}{\bar{v}_{\max} - \bar{v}_*}} = |w_*| \frac{t - t_{\max}}{2(\bar{v}_{\max} - \bar{v}_*)}.$$

Отсюда при $\bar{v} = \bar{v}_{\max}$ находим оценку

$$t_* = t_{\max} + 2 \frac{\bar{v}_{\max} - \bar{v}_*}{|w_*|} = 2 \frac{l\bar{v}_{\max}}{gH} + 2 \frac{\bar{v}_{\max} - \bar{v}_*}{|w_*|}$$

времени опорожнения сосуда.

В частном случае идеальной жидкости $k = 1$ и сохраняют силу все полученные соотношения. Если $l = 0$, т.е. трубопровод отсутствует, а в стенке сосуда имеется круглое отверстие радиуса r_* , также имеем $k = 1$, но из (5.33) получим известное равенство $\bar{v} = \sqrt{2gh}$. Подставляя его в (5.32), после дифференцирования по времени t приходим к ОДУ

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\pi r_*^2}{S} \sqrt{2gh},$$

которое имеет решение $2\sqrt{h} = -\pi r_*^2 \sqrt{2g} \frac{t}{S} + C_0$. Так как $h = H$ при $t = 0$, то $C_0 = 2\sqrt{H}$ и $\frac{h}{H} = \left(1 - \frac{\pi r_*^2}{S} \sqrt{\frac{g}{2H}} t\right)^2$. Отсюда при $h = 0$ находим время $t_0 = \frac{S}{\pi r_*^2} \sqrt{\frac{2H}{g}}$ опорожнения сосуда в случае $l = 0$.

5.5. Положения равновесия консервативной системы

Как показано выше (см. 5.4), динамическую математическую модель консервативной системы в ряде случаев можно свести к нелинейному ОДУ второго порядка

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = f(u), \quad (5.37)$$

правая часть $f(u)$ которого зависит лишь от искомой функции $u(t)$ и явно не зависит от времени t . Если функция $f(u)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица в окрестности некоторой точки u_0 , то, согласно теореме Коши, ОДУ (5.37) имеет в этой окрестности единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям [VIII].

Введя обозначение $v = \frac{du}{dt}$, заменим (5.37) нормальной системой ОДУ

$$\frac{du}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = f(u). \quad (5.38)$$

Первый интеграл этой системы имеет вид [VIII]

$$F(u, v) = \frac{v^2}{2} - \int_{u_0}^u f(\zeta) d\zeta = H = \text{const}. \quad (5.39)$$

Действительно, полная производная функции $F(u, v)$ в силу системы (5.38) равна нулю:

$$\frac{dF}{dt} = v \frac{dv}{dt} - f(u) \frac{du}{dt} = v \left(\frac{dv}{dt} - f(u) \right) = 0.$$

Если под искомой функцией $u(t)$ понимать зависимость от времени перемещения материальной точки массой m , то v — скорость этой точки, а $mf(u)$ — зависящая от перемещения сила, действующая на эту точку. Тогда $mv^2/2$ и mH имеют смысл кинетической и полной энергий материальной точки соответственно (см. 5.4), а взятая с обратным знаком работа $\int_{u_0}^u mf(u) du$ силы $mf(u)$ по перемещению материальной точки из положения u_0 равна потенциальной энергии. В таком случае (5.39) после умножения этого равенства на m будет выражать закон сохранения энергии: сумма кинетической и потенциальной энергий консервативной системы постоянна.

Константу H в (5.39) можно найти, если при значении $u = u_0$ известно значение $v = v_0$. Тогда из (5.39) получим $H = v_0^2/2$ и

запишем

$$v^2 = v_0^2 - \Psi(u), \quad (5.40)$$

где

$$\Psi(u) = -2 \int_{u_0}^u f(\zeta) d\zeta. \quad (5.41)$$

В случае материальной точки значение функции $\Psi(u)$ имеет смысл удвоенного значения потенциальной энергии, приходящейся на единицу массы этой точки, если эту энергию отсчитывать от ее значения при $u = u_0$.

Если выполнены условия теоремы Коши, то через точку (u_0, v_0) фазовой плоскости uOv проходит единственная фазовая траектория, удовлетворяющая (5.40) и (5.41). Эта траектория симметрична относительно оси Ou и определена при значениях u , для которых $v_0^2 - \Psi(u) \geq 0$. Ординаты пары симметричных относительно оси Ou точек этой траектории, имеющих абсциссу u ,

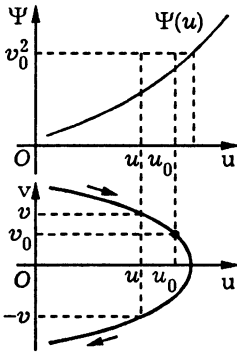


Рис. 5.23

равны $v = \pm \sqrt{v_0^2 - \Psi(u)}$ (рис. 5.23). Движение *изображающей точки* по траектории в верхней полуплоскости фазовой плоскости, т.е. при $v = \frac{du}{dt} > 0$, происходит в сторону возрастания u , а в нижней (при $v < 0$) — в сторону убывания u .

Пусть функция $f(u)$ имеет $m \in \mathbb{N}$ действительных нулей $u_i, i = \overline{1, m}$. При $v_0^2 = \Psi(u_i)$ из (5.40) следует $v = 0$, поэтому точка $(u_i, 0)$ является положением равновесия системы ОДУ (5.38) и соответствует положению равновесия консервативной системы, описываемой (5.38) (или (5.37)).

Если функция $f(u)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки u_i , то для исследования устойчивости положения равновесия можно привлечь теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению [VIII]. В этом

случае система уравнений первого приближения примет вид

$$\frac{du}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = f'(u_i)(u - u_i), \quad (5.42)$$

а корни характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ этой системы, имеющей матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(u_i) & 0 \end{pmatrix},$$

причем E — единичная матрица второго порядка, равны $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{f'(u_i)}$. При $f'(u_i) > 0$ один из корней положителен и поэтому, согласно теоремам Ляпунова, частное решение системы ОДУ (5.38) $u(t) \equiv u_i$, $v(t) \equiv 0$ неустойчиво. Этому решению соответствует неустойчивое положение равновесия системы (5.42), называемое *седлом*. В случае $f'(u_i) \leq 0$ теоремы Ляпунова не применимы, так как действительные части корней равны нулю.

Каждый нуль u_i функции $f(u)$ является стационарной точкой функции $\Psi(u)$ (5.41). Если функция $f(u)$ дифференцируема в точке u_i и $f'(u_i) < 0$, т.е. $\Psi''(u_i) = -2f'(u_i) > 0$, то u_i — точка минимума функции $\Psi(u)$ (рис. 5.24). При $f'(u_i) < 0$ можно указать такие значения $v_0^2 > \Psi(u_i)$, при которых в окрестности точки u_i определены функции $v_+ = \sqrt{v_0^2 - \Psi(u)}$ и $v_- = -\sqrt{v_0^2 - \Psi(u)}$. Эти функции удовлетворяют (5.40) и для каждого фиксированного значения v_0^2 определяют в окрестности точки $(u_i, 0)$ фазовой плоскости uOv симметричную относительно оси Ou замкнутую фазовую траекторию (см. рис. 5.24). Эта траектория пересекает ось Ou в точках u_- и u_+ , соответствующих корням уравнения $v_0^2 - \Psi(u) = 0$. В достаточно малой окрестности точки u_i в соответствии с формулой Тей-

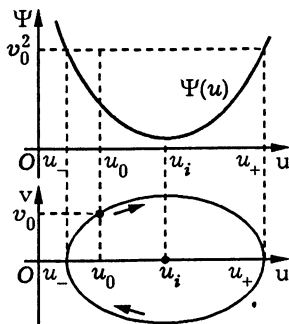


Рис. 5.24

лора имеем $\Psi(u) \approx \Psi(u_i) - f'(u_i)(u - u_i)^2$, поэтому $u_{\pm} \approx u_i \pm \sqrt{\frac{\Psi(u_i) - v_0^2}{f'(u_i)}}$. Так как $u_{\pm} \rightarrow u_i$ при $v_0^2 \rightarrow \Psi(u_i)$, то существует окрестность точки $(u_i, 0)$, заполненная замкнутыми траекториями. Это означает, что при $f'(u_i) < 0$ положение равновесия $(u_i, 0)$ является *центром*, а система ОДУ (5.38) (или ОДУ (5.37)) имеет периодические решения. В этом случае частное решение системы ОДУ (5.38) $u(t) \equiv u_i$, $v(t) \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову.

Напомним, что в случае линейной функции $f(u)$ при $f'(u) < 0$ фазовые траектории являются эллипсами, а периодические решения соответствуют *гармоническим колебаниям* относительно положения равновесия, причем *период колебаний* не зависит от их *амплитуды*. Для нелинейной функции $f(u)$ при $f'(u_i) < 0$ колебания не будут гармоническими. Их период T в силу симметрии фазовой траектории относительно оси Ou можно найти как удвоенное время движения изображающей точки по верхней половине траектории. Поскольку $v = \frac{du}{dt}$, то

$$T = 2 \int_{u_-}^{u_+} \frac{du}{v(u)} = 2 \int_{u_-}^{u_+} \frac{du}{\sqrt{v_0^2 - \Psi(u)}}. \quad (5.43)$$

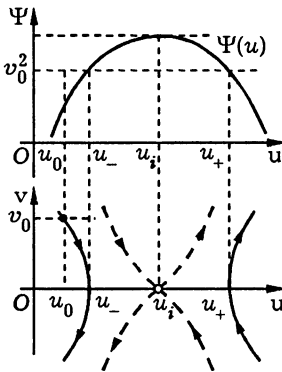


Рис. 5.25

Для вычисления несобственного интеграла в правой части (5.43) обычно приходится использовать методы численного интегрирования [VI].

В случае $f(u_i) = 0$ и $f'(u_i) > 0$ функция $\Psi(u)$ в точке u_i достигает максимума (рис. 5.25). При фиксированном значении $v_0^2 < \Psi(u_i)$ существует такая окрестность (u_-, u_+) точки u_i , что соответствующая этому значению фазовая траектория не определена в полосе (u_-, u_+) фазовой

плоскости. Если $v_0^2 = \Psi(u_i)$, то изображающая точка на фазовой плоскости стремится к седлу $(u_i, 0)$ при $t \rightarrow \pm\infty$ по фазовой траектории, уравнение которой

$$v^2 = 2 \int_{u_i}^u f(\zeta) d\zeta \quad (5.44)$$

следует из (5.40) и (5.41). В этом случае говорят, что фазовая траектория входит в седло или выходит из седла (штриховые линии на рис. 5.25). Такие траектории называют *усами*. При $f(u) = f'(u_i)(u - u_i)$ (5.38) переходит в (5.42), а (5.44) — в уравнения $v = \pm\sqrt{f'(u_i)}(u - u_i)$ прямых, причем остальные фазовые траектории будут гиперболами, для которых эти прямые являются асимптотами.

Предположим, что функцию $f(u)$ можно представить в окрестности ее нуля u_i рядом Тейлора

$$f(u) = f'(u_i)\xi + f''(u_i)\frac{\xi^2}{2!} + \dots + f^{(k)}(u_i)\frac{\xi^k}{k!} + \dots, \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\xi = u - u_i$. Тогда, используя (5.40) и (5.41), получаем

$$v^2 - 2 \left(f'(u_i)\frac{\xi^2}{2!} + f''(u_i)\frac{\xi^3}{3!} + \dots \right. \\ \left. \dots + f^{(k)}(u_i)\frac{\xi^{k+1}}{(k+1)!} + \dots \right) = v_0^2 - \Psi(u_i). \quad (5.45)$$

Отсюда при $v_0^2 = \Psi(u_i)$ и $f'(u_i) > 0$ находим $\left. \frac{dv}{du} \right|_{u=u_i} = \pm\sqrt{f'(u_i)}$, т.е. касательными к усам в точке $(u_i, 0)$ фазовой плоскости являются прямые $v = \pm\sqrt{f'(u_i)}(u - u_i)$. Если при нечетном $n > 1$ функция $f(u)$ имеет в точке u_i равные нулю производные до порядка $n - 1$ включительно и производную $f^{(n)}(u_i) > 0$, то в этой точке функция $\Psi(u)$ достигает максимума, так как $\Psi^{(n+1)}(u_i) = -f^{(n)}(u_i) < 0$ [II]. Тогда точка $(u_i, 0)$ по-прежнему

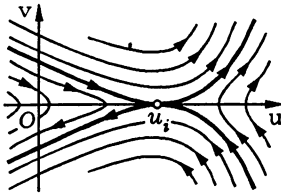


Рис. 5.26

будет седлом, но из (5.45) при $v_0^2 = \Psi(u_i)$ следует $\left. \frac{dv}{du} \right|_{u=u_i} = 0$. Характер фазовых траекторий в окрестности седла для этого случая изображен на рис. 5.26.

Если при нечетном $n > 1$ все производные функции $f(u)$ в точке u_i до порядка $n - 1$ включительно равны нулю, а $f^{(n)}(u_i) < 0$, то в этой точке функция $\Psi(u)$ достигает минимума, причем точка $(u_i, 0)$ по-прежнему будет центром (см. рис. 5.24). Используя (5.45), в малой окрестности центра вместо (5.43) можно приближенно принять

$$T \approx 2 \int_{-\xi_0}^{\xi_0} \frac{d\xi}{\sqrt{v_*^2 - b^2 \xi^{n+1}}} = \frac{4}{b \xi_0^{(n-1)/2}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^{n+1}}}, \quad (5.46)$$

где $v_*^2 = v_0^2 - \Psi(u_i)$, $b^2 = -\frac{2}{(n+1)!} f^{(n)}(u_i)$, $\xi_0 = \left(\frac{v_*}{b}\right)^{2/(n+1)}$ — *полуразмах колебаний**, равный половине отрезка оси Ou между ее точками, в которых $v(\xi) = 0$.

Заменой $z^{n+1} = x$ интеграл в правой части (5.46) можно привести к эйлерову интегралу первого рода (или бета-функции) [VI]:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^{n+1}}} &= \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{-n/(n+1)} dx}{\sqrt{1-x}} = \\ &= \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \frac{B(\alpha, \beta)}{n+1}, \end{aligned}$$

*В случае гармонических колебаний полуразмах соответствует их амплитуде (см.: Пановко Я.Г., Губанова И.И.).

где $\alpha = 1/(n + 1)$ и $\beta = 1/2$. Используя формулу Эйлера для бета- и гамма-функций, в итоге получаем

$$T \approx \frac{4B(\alpha, \beta)}{(n + 1)b\xi_0^{(n-1)/2}} = \frac{4\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(n + 1)\Gamma(\alpha + \beta)b\xi_0^{(n-1)/2}}.$$

Например, при $n = 3$, поскольку $\Gamma(\beta) = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ [VI], находим $T \approx \frac{7,416}{b\xi_0}$, т.е. период колебаний в малой окрестности положения равновесия обратно пропорционален их полуразмаху. Отметим, что при $n = 1$ с учетом значения $\Gamma(1) = 1$ имеем $T \approx \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\sqrt{|f'(u_i)|}}$, т.е. в первом приближении период, как и в случае гармонических колебаний, не зависит от их амплитуды.

Если при четном $n \geq 2$ $f^{(k)}(u_i) = 0$, $k = \overline{1, n-1}$, а $f^{(n)}(u_i) \neq 0$, то u_i — точка перегиба функции $\Psi(u)$ [II] (рис. 5.27, а и б). В этом случае при $v_0^2 = \Psi(u_i)$ точка равновесия $(u_i, 0)$ на фазовой плоскости uOv является *точкой возврата* траектории

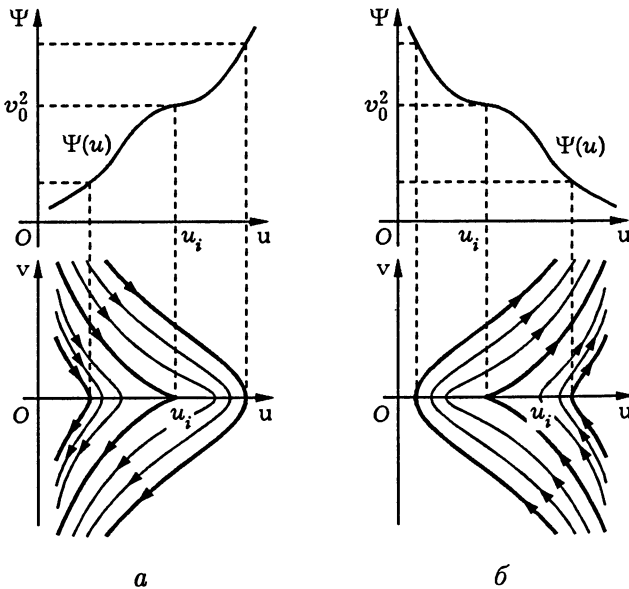


Рис. 5.27

с уравнением (5.44). Действительно, из (5.45) следует, что $\frac{dv}{du} \Big|_{u=u_i} = 0$ при $n \geq 2$, т.е. односторонние касательные к ветвям фазовой траектории в этой точке совпадают с осью Ou . Как и в случае седла, решение системы ОДУ (5.38), соответствующее этому положению равновесия, не устойчиво по Ляпунову.

Применительно к положению равновесия материальной точки все рассмотренные случаи иллюстрируют утверждение, вытекающее из теоремы Лагранжа и обратной теоремы Ляпунова*: положение равновесия устойчиво тогда и только тогда, когда потенциальная энергия в нем достигает минимума.

Пример 5.11. Исследуем положения равновесия электро-механической системы, состоящей из двух параллельных проводников, один из которых является достаточно длинным и закреплен неподвижно, а второй проводник массой m и длиной l подвешен на двух пружинах жесткостью c каждая (рис. 5.28). При отсутствии электрического тока в проводниках пружины растянуты лишь силой веса подвижного проводника, так что его расстояние от неподвижного проводника равно a . Если в проводниках течет в одинаковом направлении постоянный ток, то между ними возникает сила притяжения. В соответствии с известным из курса физики законом Ампера эта сила равна $\mu_0 I_0 I l / (2\pi u)$, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{м}}$ — магнитная постоянная, I_0 и I — значения силы тока в неподвижном и подвижном проводниках соответственно, u — расстояние между проводниками.

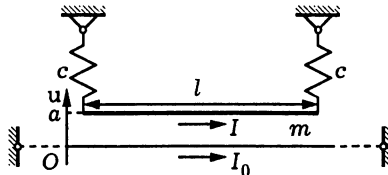


Рис. 5.28

*См.: Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.

При наличии токов изменение во времени t расстояния $u(t)$ между проводниками описывается ОДУ второго порядка

$$m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} - 2c(a - u(t)) + \frac{\mu_0 I_0 I l}{2\pi u(t)} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = f(u), \quad (5.47)$$

где $f(u) = \omega^2 \left(a - u - \frac{b}{2u} \right)$ и $b = \frac{\mu_0 I_0 I l}{2\pi c} \geq 0$, а $\omega = \sqrt{2c/m}$ — собственная частота колебаний подвижного проводника при отсутствии токов. Примем, что в момент времени $t = t_0$ известны значения $u(t_0) = u_0 \neq 0$ и $\frac{du}{dt} = v(t_0) = v_0$. Тогда в соответствии с (5.40) получим $v^2 = v_0^2 - \Psi(u)$, где

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= -2 \int_{u_0}^u f(u) = -\omega^2 \int_{u_0}^u \left(2(a - u) - \frac{b}{u} \right) du = \\ &= \omega^2 \left((a - u)^2 - (a - u_0)^2 + b \ln \frac{u}{u_0} \right). \end{aligned}$$

Введя безразмерные величины $\xi = \frac{u}{a}$ и $\eta = \frac{v}{\omega_0 a}$, вместо (5.40) запишем $\eta^2 = \alpha - \Phi(\xi)$, где $\alpha = \frac{v_0^2}{(\omega_0 a)^2} + (1 - \xi_0)^2 + \lambda \ln \xi_0$, $\lambda = b/a^2 > 0$ и $\Phi(\xi) = (1 - \xi)^2 + \lambda \ln \xi$, причем $\alpha \in \mathbb{R}$. Из условия $\Phi'(\xi) = -2(1 - \xi) + \lambda/\xi = 0$ найдем стационарные точки $\xi_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\lambda}{2}}$ функции $\Phi(\xi)$. Для рассматриваемой системы обе эти точки имеют смысл при $\lambda \in (0, 0,5]$ и симметрично расположены относительно точки $\xi_0 = 0,5$. В случае $\lambda = 0,5$ стационарные точки сливаются в одну точку ξ_0 , при переходе через которую вторая производная $\Phi''(\xi) = 2 - \lambda/\xi^2$ изменяет знак с минуса на плюс, т.е. $\xi_0 = 0,5$ является точкой перегиба функции $\Phi(\xi)$ при значении параметра $\lambda = 0,5$.

Нетрудно установить, что $\Phi''(\xi_1) > 0$ и $\Phi''(\xi_2) < 0$ при $\lambda \in (0, 0,5)$, т.е. ξ_1 и ξ_2 являются для функции $\Phi(\xi)$ точками минимума и максимума соответственно. Эта функция не имеет стационарных точек при $\lambda > 0,5$, а при $\lambda = 0$ у нее единственная стационарная точка $\xi = 1$ — минимум. На рис. 5.29 построены графики функции $\Phi(\xi)$ для различных значений параметра λ .

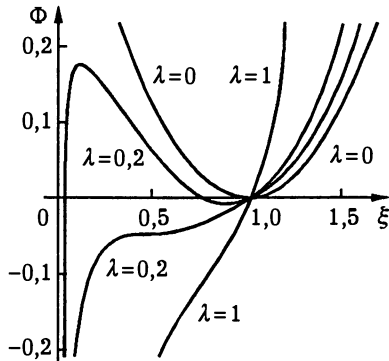


Рис. 5.29

Таким образом, при $\lambda > 0,5$ рассматриваемая система не имеет положений равновесия и при любом значении η_0 подвижный проводник будет притянут к неподвижному. Значению $\lambda = 0$ на фазовой плоскости $\xi O\eta$ соответствует единственное положение равновесия — центр в точке $(1, 0)$, а значениям $\lambda \in (0, 0,5)$ — два положения равновесия: центр в точке $(\xi_1, 0)$ и седло в точке $(\xi_2, 0)$. Наконец, при $\lambda = 0,5$ имеем неустойчивое положение равновесия в точке $(0,5, 0)$, которое является точкой возврата проходящей через него фазовой траектории.

5.6. Фазовый портрет консервативной системы

Описанный выше (см. 5.5) способ построения *фазовых траекторий* в окрестности *положения равновесия консервативной системы* позволяет перейти к анализу фазовых траекторий этой системы на всей *фазовой плоскости* uOv . При этом будем предполагать, что функция $\Psi(u)$ в (5.40) дифференцируема на всей числовой прямой \mathbb{R} и не имеет точек перегиба, в которых $\Psi'(u) = 0$. Последнее ограничение позволяет не возвращаться к исследованию положения равновесия, в котором фазовая траектория имеет *точку возврата* (см. рис. 5.27). Последовательно рассмотрим возможные случаи взаимного расположения

на плоскости uOz графика функции $z = \Psi(u)$ и прямой $z = v_0^2 = \text{const}$.

Если $\Psi(u) > v_0^2$ для всех значений аргумента $u \in \mathbb{R}$, то из (5.40) следует, что $v^2 < 0$, т.е. на фазовой плоскости не определена фазовая траектория, соответствующая значению v_0 . Применительно к механической системе это означает, что при полной энергии, отвечающей значению v_0 , движение этой системы невозможно. Если же $\Psi(u) < v_0^2$ для всех $u \in \mathbb{R}$, то на фазовой плоскости получим две ветви фазовой траектории, симметричные относительно оси Ou (рис. 5.30). Изображающая точка по верхней ветви движется в сторону возрастания u , а по нижней — в сторону убывания u . Ветвь фазовой траектории, для которой абсцисса изображающей точки при $t \rightarrow +\infty$ или $t \rightarrow -\infty$ неограниченно возрастает или неограниченно убывает, называют *убегающей*.

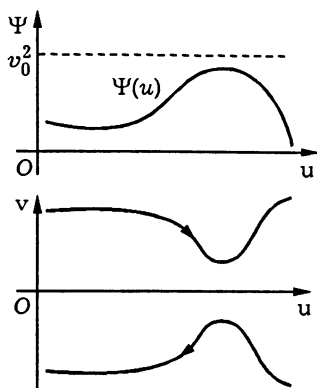


Рис. 5.30

Пусть прямая $z = v_0^2$ пересекает кривую $\Psi(u)$, нигде не касаясь ее (сплошная прямая на рис. 5.31). Тогда соответствующая значению v_0^2 фазовая траектория определена лишь при таких значениях u , для которых $\Psi(u) \leq v_0^2$. При этом в общем случае она может иметь как замкнутые, так и убегающие ветви. Если $\Psi(u)$ является *строго монотонной функцией*, то прямая $z = v_0^2$ может пересечь ее график лишь в одной точке и мы будем иметь фазовую траекторию с убегающими ветвями (см. рис. 5.23). Если же $\Psi(u)$ является *строго унимодальной функцией*, то прямая $z = v_0^2$ может пересечь ее график в двух точках, причем при фиксированном значении v_0^2 в случае минимума получим лишь одну замкнутую траекторию (см. рис. 5.24), а в случае максимума — две траектории с убегающими ветвями (см. рис. 5.25).

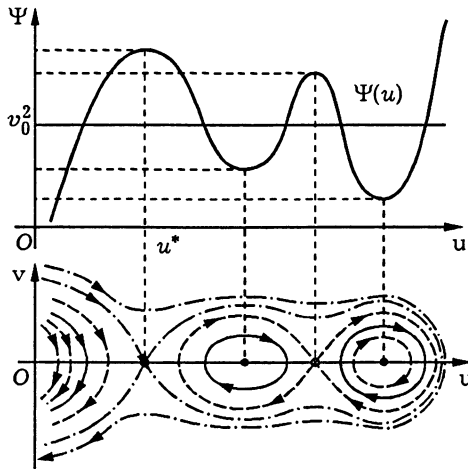


Рис. 5.31

В более общем случае прямые $z = v_0^2$ могут не только пересекать кривую $\Psi(u)$, но и касаться ее (штриховые прямые на рис. 5.31). При этом точке локального минимума функции $\Psi(u)$ соответствует на фазовой плоскости *центр*, вблизи которого при заданном значении v_0^2 нет других фазовых траекторий. Центр является вырожденной фазовой траекторией в виде изолированного положения равновесия консервативной системы (см. 5.5). При некотором увеличении значения v_0^2 вокруг центра возникает замкнутая фазовая траектория. Точке u^* локального максимума функции $\Psi(u)$ на фазовой плоскости отвечает *седло*, в которое входит и из которого выходит фазовая траектория, соответствующая значению $v_0^2 = \Psi(u^*)$ (см. рис. 5.31). Такую траекторию называют *сепаратрисой* (от латинского слова *separatix* — разделяющая). Она может входить (или выходить) в более чем одно седло, быть конечной или же иметь убегающие ветви. В случае конечной сепаратрисы при некотором изменении значения v_0^2 возникают замкнутые фазовые траектории: охватывающая сепаратрису при увеличении v_0^2 и расположенные внутри ее „звеньев“ при уменьшении v_0^2 . Если сепаратриса при некотором значении v_0^2 включает

убегающие ветви, то фазовая траектория, соответствующая большему значению v_0^2 , также имеет убегающие ветви (штрихпунктирные линии на рис. 5.31).

Сепаратрисы разделяют фазовую плоскость на ряд областей, которые при изменении значения v_0^2 будут заполнены фазовыми траекториями различных типов. Поэтому построение сепаратрис важно для выяснения общей картины возможного расположения фазовых траекторий на фазовой плоскости. Эту общую картину обычно называют **фазовым портретом** консервативной системы.

Для *мультиmodalной функции* $\Psi(u)$ точки минимума и максимума чередуются. Следовательно, для консервативной системы на оси абсцисс фазовой плоскости чередуются положения равновесия типа центра и типа седла (см. рис. 5.31). Если некоторому значению v_0^2 соответствует замкнутая фазовая траектория, то можно утверждать, что внутри ее расположен хотя бы один центр. Действительно, между точками пересечения этой траектории осью абсцисс в силу теоремы Ролля [II] существует хотя бы одна точка минимума функции $\Psi(u)$. Из геометрических соображений ясно, что для дифференцируемой функции $\Psi(u)$ внутри такой траектории число положений равновесия нечетно, причем число центров на единицу больше числа седел.

К сепаратрисам иногда относят фазовую траекторию, соответствующую прямой $z = v_0^2$, совпадающей с горизонтальной асимптотой графика функции $\Psi(u)$, даже в том случае, когда на оси абсцисс нет конечной точки, являющейся седлом (рис. 5.32). Такая траектория отделяет область фазовой плоскости с убегающими ветвями фазовых траекторий от области, заполненной замкнутыми траекториями.

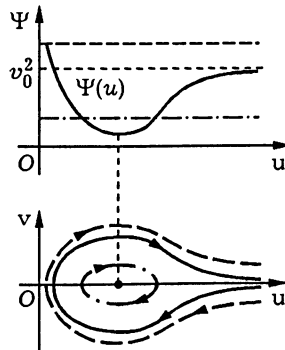


Рис. 5.32

Пример 5.12. Математический маятник (см. пример 2.1) совершает гармонические колебания с периодом, не зависящим от их амплитуды, лишь в предположении бесконечно малых отклонений невесомого стержня от вертикального положения, когда масса m на свободном конце стержня находится в точке A (см. рис. 2.1). Пусть стержень длиной l может без трения поворачиваться в вертикальной плоскости вокруг точки O на любой угол $\varphi \in \mathbb{R}$. Отсчет этого угла будем вести в направлении против хода часовой стрелки от точки A .

Изменение во времени t угла φ описывает обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) второго порядка

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\varphi(t) = 0, \quad (5.48)$$

где g — ускорение свободного падения. Аналогично (5.37) это ОДУ можно представить в виде $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = f(\varphi)$, где $f(\varphi) = -\frac{g}{l} \sin\varphi$, т.е. математический маятник является консервативной системой.

В момент времени $t = t_0$ примем угол $\varphi(t_0) = \varphi_0 = 0$ и угловую скорость $\frac{d\varphi(t_0)}{dt} = \omega(t_0) = \omega_0$. Тогда в соответствии с (5.41) получим

$$\Psi(\varphi) = -2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} f(\zeta) d\zeta = 2 \frac{g}{l} \int_0^{\varphi} \sin\zeta d\zeta = \frac{2g}{l} (1 - \cos\varphi)$$

и $\omega^2 = \omega_0^2 - \Psi(\varphi)$. Функция $\Psi(\varphi)$ дифференцируема на всей числовой прямой \mathbb{R} и является периодической с периодом 2π (рис. 5.33). В случае $\omega_0 = 0$ прямая $z = 0$ касается кривой $\Psi(\varphi)$ в точках $\varphi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, минимума этой функции. Каждой такой точке на оси абсцисс фазовой плоскости $\varphi O \omega$ соответствует устойчивое положение равновесия — центр. Таким образом, если в момент времени $t = t_0$ при положении массы в точке A (см. рис. 2.1) угловая скорость $\omega(t_0) = 0$, т.е. маятник не имеет

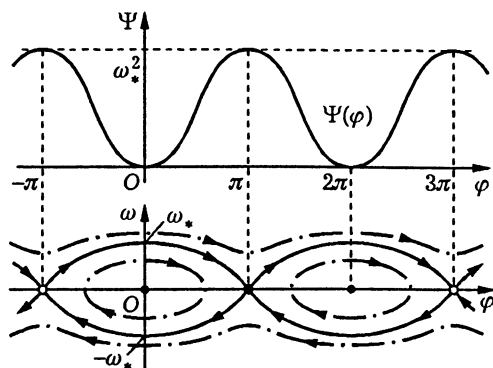


Рис. 5.33

кинетической энергии, то он остается в положении равновесия, отвечающем минимуму потенциальной энергии и частному решению ОДУ (5.48), устойчивому по Ляпунову (см. 5.5).

Если $\omega_0 = \pm 2\sqrt{g/l} = \omega_*$, то прямая $z = \omega_*^2$ касается кривой $\Psi(\varphi)$ в точках $\varphi = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, максимума этой функции (см. рис. 5.33). Каждой такой точке на оси абсцисс фазовой плоскости соответствует неустойчивое положение равновесия — седло, через которое проходит сепаратриса, удовлетворяющая равенству

$$\omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 - \Psi(\varphi)} = \pm \sqrt{\frac{2g}{l}(1 + \cos \varphi)} = \pm |\omega_*| \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Сепаратриса делит фазовую плоскость на область, в которой фазовые траектории имеют убегающие ветви (при $\omega_0^2 > \omega_*^2$), и области замкнутых траекторий вокруг центров внутри „звеньев“ сепаратрисы, причем замкнутые траектории соответствуют периодическим решениям ОДУ (5.48) при $\omega_0^2 \in (0, \omega_*^2)$.

Построенному на рис. 5.33 фазовому портрету математического маятника можно дать следующую механическую интерпретацию. Если в точке A (см. рис. 2.1) масса m имеет кинетическую энергию $ml^2\omega_0^2/2$, большую значения потенциальной энергии $2mgl$ этой массы в верхнем положении, то маятник будет вращаться вокруг точки O против хода часовой

стрелки или по ее ходу без изменения знака угловой скорости $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ (убегающие ветви выше и ниже сепаратрисы соответственно). Если же в точке A кинетическая энергия массы отлична от нуля, но меньше значения $2mgl$, то маятник совершает колебания с изменением знака ω дважды за каждый период (замкнутые фазовые траектории внутри „звеньев“ сепаратрисы). В случае равенства кинетической энергии массы в точке A значению $2mgl$ масса может перейти в верхнее положение, где ее кинетическая энергия будет равна нулю, что соответствует на фазовой плоскости одному из неустойчивых положений равновесия в виде седла. Но при любых сколь угодно малых отклонениях массы от этого положения она покинет его, а затем, пройдя точку A , снова начнет приближаться к верхнему положению с противоположной стороны (этому отвечает движение изображающей точки в фазовой плоскости по ветви сепаратрисы, выходящей из одного седла и входящей в соседнее седло).

При колебаниях маятника отклонения массы m симметричны относительно точки A (см. рис. 2.1). Поэтому из условия $\omega^2 = \omega_0^2 - \Psi(\Delta\varphi) = 0$ можно найти *полуразмах его колебаний*

$$\Delta\varphi = \arccos\left(1 - \frac{\omega_0^2 l}{2g}\right) \quad (5.49)$$

и затем период колебаний

$$T = 2 \int_{-\Delta\varphi}^{\Delta\varphi} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)} = 4 \int_0^{\Delta\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\omega_0^2 - \Psi(\varphi)}} = 4 \int_0^{\Delta\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{2g}{l}(1 - \cos\varphi)}}.$$

Отсюда, учитывая (5.49), получаем

$$T = 2\sqrt{\frac{2l}{g}} \int_0^{\Delta\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\Delta\varphi}} = 2\sqrt{\frac{2l}{g}} I.$$

В интеграле I проведем замену $\Delta\varphi/2 = \Theta$ и $\sin(\varphi/2) = \sin\Theta \sin\vartheta$. Тогда получим $\cos(\varphi/2) d\varphi = 2\sin\Theta \cos\vartheta d\vartheta$ и

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin\Theta \cos\vartheta d\vartheta}{\cos(\varphi/2) \sqrt{1 - 2\sin^2(\varphi/2) - 1 + 2\sin^2(\Delta\varphi/2)}} = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\Theta \cos\vartheta d\vartheta}{\sqrt{1 - \sin^2(\varphi/2)} \sqrt{\sin^2\Theta - \sin^2\Theta \sin^2\vartheta}} = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - \sin^2\Theta \sin^2\vartheta}} = \sqrt{2} \mathbf{K}(k), \end{aligned}$$

где $\mathbf{K}(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода со значением модуля $k = \sin\Theta = \sin(\Delta\varphi/2)$. Итак, $T = 4\sqrt{l/g} \mathbf{K}(k)$. При $\Theta = \Delta\varphi/2 = 0$ имеем $\mathbf{K}(k) = \pi/2$, что дает период $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$ гармонических колебаний математического маятника при бесконечно малых отклонениях от устойчивого положения равновесия. В табл. 5.1 приведены значения отношения T/T_0 для конечных значений $\Delta\varphi$ полуразмахов колебаний.

Таблица 5.1

$\Delta\varphi$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{11}{12}\pi$
$\frac{T}{T_0}$	1,0174	1,0732	1,1803	1,3729	1,7622	2,1855

Так как $\mathbf{K}(k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow 1$, что соответствует $\Delta\varphi \rightarrow \pi$, то по мере приближения полуразмаха колебаний к значению π их период неограниченно возрастает. Это означает, что в случае $\omega_0^2 = 4g/l$ изображающая точка, двигаясь по сепаратрисе (см. рис. 5.33), достигнет седла за бесконечно большое время.

Пример 5.13. Рассмотрим конструкцию, состоящую из двух одинаковых прямолинейных упругих стержней, шарнирное соединение которых в точке C имеет массу m_0 (рис. 5.34).

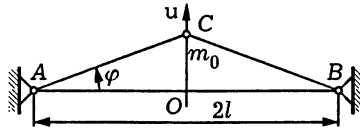


Рис. 5.34

Вторые концы стержней закреплены шарнирно в точках A и B , расстояние между которыми равно $2l$. Каждый стержень имеет площадь поперечного сечения $F = \text{const}$ и длину в свободном состоянии $l_0 > l$. Масса t стержня мала по сравнению с m_0 , и ее влияние на первом этапе составления *математической модели* (ММ) конструкции не будем учитывать. В случае отсутствия трения в шарнирах и сопротивления окружающей среды при перемещении стержней эта конструкция является консервативной системой, т.е. сумма ее кинетической и потенциальной энергий остается постоянной.

Предположим, что стержни находятся в горизонтальной плоскости и шарнир C может перемещаться лишь вдоль оси Ou , лежащей в этой плоскости и перпендикулярной отрезку AB . Тогда его положение можно характеризовать координатой u , отсчитываемой от пересечения этой оси с отрезком AB , или углом φ , причем $u = l \operatorname{tg} \varphi$ (см. рис. 5.34). При произвольном значении u длина каждого стержня равна $\sqrt{l^2 + u^2}$, так что его деформация $\varepsilon = \frac{1}{l_0} (\sqrt{l^2 + u^2} - l_0) = \frac{1}{l_0} \sqrt{l^2 + u^2} - 1$, а в соответствии с *законом Гука* возникает усилие $P = E\varepsilon F = E \left(\frac{1}{l_0} \sqrt{l^2 + x^2} - 1 \right) F$, где E — модуль упругости материала стержня. Это усилие растягивает стержень при $P > 0$ и сжимает при $P < 0$.

Перемещение du точки C вызовет изменение потенциальной энергии $\Pi(u)$ системы, равное изменению энергии упругой деформации обоих стержней:

$$d\Pi(u) = 2P \sin \varphi du = \frac{2Px du}{\sqrt{l^2 + x^2}} = 2EF \left(\frac{u}{l_0} - \frac{u}{\sqrt{l^2 + u^2}} \right) du. \quad (5.50)$$

Если это перемещение происходит за время dt , то скорость шарнира C будет равна $v = \frac{du}{dt}$, а изменение кинетической энергии K системы —

$$dK = d\left(m_0 \frac{v^2}{2}\right). \quad (5.51)$$

Из условия $dK(v, u) + d\Pi(u) = 0$ получим $K(v, u) + \Pi(u) = H = \text{const}$, где $K(v, u) = m_0 v^2/2$ и с учетом (5.50)

$$\Pi(u) = 2EF \int \left(\frac{u}{l_0} - \frac{u}{\sqrt{l^2 + u^2}} \right) du = EF \left(\frac{u^2}{l_0} - 2\sqrt{l^2 + u^2} \right).$$

В итоге запишем

$$m_0 \frac{v^2}{2} + EF \left(\frac{u^2}{l_0} - 2\sqrt{l^2 + u^2} \right) = H.$$

Если в некоторый момент времени $t = t_0$ известны значения $u = u_0$ и $v = v_0$, то имеем

$$m_0 \frac{v_0^2}{2} + EF \left(\frac{u_0^2}{l_0} - 2\sqrt{l^2 + u_0^2} \right) = H$$

и затем, исключая константу H , получаем уравнение $v^2 = v_0^2 - \Psi(u)$ вида (5.40), в котором для рассматриваемой конструкции

$$\Psi(u) = 2 \frac{EF}{m_0} \left(\frac{u^2 - u_0^2}{l_0} - 2\sqrt{l^2 + u^2} + 2\sqrt{l^2 + u_0^2} \right).$$

Найдем стационарные точки функции $\Psi(u)$. Для этого решим уравнение $\Psi'(u) = 0$, имеющее следующий вид:

$$4 \frac{EF}{m_0} \left(\frac{u}{l_0} - \frac{u}{\sqrt{l^2 + u^2}} \right) = 0.$$

Отсюда получаем $u_1 = 0$ и $u_{2,3} = \pm \sqrt{l_0^2 - l^2}$. По знаку второй производной

$$\Psi''(u) = 4 \frac{EF}{m_0} \left(\frac{1}{l_0} - \frac{l^2}{\sqrt{(l^2 + u^2)^3}} \right)$$

устанавливаем, что $u_1 = 0$ является точкой максимума функции $\Psi(u)$, поскольку $\Psi''(0) = \frac{4EF}{m_0} \left(\frac{1}{l_0} - \frac{1}{l} \right) < 0$, а u_2 и u_3 будут точками минимума, так как $\Psi''(u_2) = \Psi''(u_3) = \frac{4EF}{m_0 l_0^3} (l_0^2 - l^2) > 0$. График функции $\Psi(u)$ представлен на рис. 5.35. В фазовой плоскости uOv имеем три положения равновесия $(u_1, 0)$, $(u_2, 0)$ и $(u_3, 0)$, первое из которых является седлом, соответствует максимуму функции $\Psi(u)$ и неустойчиво, а два других являются центрами, отвечают минимумам этой функции и устойчивы. Сепаратриса, проходящая через седло, охватывает центры и выделяет на фазовой плоскости две подобласти фазовых траекторий, описывающих периодические колебания в окрестности устойчивых положений равновесия без изменения знака u , и область периодических колебаний, при которых u изменяет знак. Последние обычно называют *колебаниями с перескоком* через неустойчивое положение равновесия.

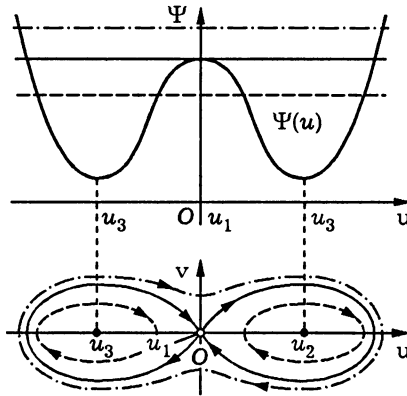


Рис. 5.35

Отметим, что если $l_0 \rightarrow l$, то устойчивые положения равновесия системы сближаются и при $l_0 \leq l$ сливаются в один центр, а неустойчивое положение равновесия исчезает.

Покажем, как при составлении ММ рассматриваемой конструкции можно учесть инерцию стержней. При этом будем

считать, что стержни расположены не в горизонтальной, а в вертикальной плоскости, т.е. при перемещении шарнира C происходит дополнительное изменение потенциальной энергии системы за счет перемещения масс шарнира и стержней. При перемещении du шарнира C центр масс каждого стержня перемещается на $du/2$ (см. рис. 5.34). Поэтому вместо (5.50) получим

$$\begin{aligned} d\Pi(u) &= m_0 g du + 2mg \frac{du}{2} + 2P \sin \varphi du = \\ &= (m_0 + m)g du + \frac{2Px du}{\sqrt{l^2 + x^2}} = \\ &= (m_0 + m)g du + 2EF \left(\frac{u}{l_0} - \frac{u}{\sqrt{l^2 + u^2}} \right) du, \end{aligned} \quad (5.52)$$

а вместо (5.51) —

$$dK = d\left(m_0 \frac{v^2}{2}\right) + 2d\left(J \frac{\omega^2}{2}\right), \quad (5.53)$$

где J и ω — момент инерции и угловая скорость вращения стержня относительно точки его закрепления в неподвижном шарнире.

Изменение длины стержня при упругом деформировании примем достаточно малым, что позволит считать момент инерции стержня постоянным и равным

$$J = \int_0^{l_0} \frac{m}{l_0} x^2 dx = m \frac{l_0^2}{3}.$$

Так как $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ и $\varphi = \text{arctg}(u/l)$, то

$$\omega = \frac{d}{dt} \text{arctg} \frac{u}{l} = \frac{1}{1 + (u/l)^2} \frac{d(u/l)}{dt} = \frac{lv}{l^2 + u^2}.$$

Таким образом, учитывая (5.53), имеем

$$dK(v, u) = d\left(m_0 \frac{v^2}{2}\right) + 2d\left(m \frac{l_0^2}{3} \frac{l^2 v^2}{2(l^2 + u^2)^2}\right) = d\left(\frac{m_0 + 2\tilde{m}(u)}{2} v^2\right),$$

где $\tilde{m}(u) = ml^2 \frac{l_0^2}{3(l^2 + u^2)^2}$ имеет смысл зависящей от u присоединенной массы, учитывающей влияние инерции стержня при его вращении.

Теперь в соответствии с (5.52) имеем

$$\begin{aligned} \Pi(u) &= (m_0 + m)gu + 2EF \int \left(\frac{u}{l_0} - \frac{u}{\sqrt{l^2 + u^2}} \right) du = \\ &= (m_0 + m)gu + EF \left(\frac{u^2}{l_0} - 2\sqrt{l^2 + u^2} \right), \end{aligned}$$

так что в итоге можно написать

$$\frac{m_0 + 2\tilde{m}(u)}{2}v^2 + (m_0 + m)gu + EF \left(\frac{u^2}{l_0} - 2\sqrt{l^2 + u^2} \right) = H_1 = \text{const.}$$

Отсюда с учетом известных в момент времени $t = t_0$ значений $u = u_0$ и $v = v_0$ получим

$$v^2 = \frac{1 + 2\frac{\tilde{m}(u_0)}{m_0}}{1 + 2\frac{\tilde{m}(u)}{m_0}}v_0^2 - \Psi_1(u), \quad (5.54)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_1(u) &= \frac{1 + \frac{m}{m_0}}{1 + 2\frac{\tilde{m}(u)}{m_0}}g(u - u_0) + \\ &+ \frac{2EF}{m_0 + 2\tilde{m}(u)} \left(\frac{u^2 - u_0^2}{l_0} - 2\sqrt{l^2 + u^2} + 2\sqrt{l^2 + u_0^2} \right). \end{aligned}$$

Отличие (5.54) от (5.40) состоит в том, что в (5.54) коэффициент при v_0^2 зависит от u . Это несколько усложняет построение фазовых траекторий, но не изменяет процедуру исследования поведения системы.

Пример 5.14. Исследуем влияние параметров электромеханической системы, рассмотренной в примере 5.11, на изменение ее фазового портрета. При использовании вместо (5.40)

зависимости $\eta^2 = \alpha - \Phi(\xi)$ в безразмерном виде, где $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\Phi(\xi) = (1 - \xi)^2 + \lambda \ln \xi$, достаточно проанализировать влияние параметра λ .

При $\lambda > 0,5$ графику функции $\Phi(\xi)$ (см. рис. 5.29) соответствует фазовый портрет, представленный на рис. 5.36. В этом случае положение равновесия отсутствует и при любых начальных условиях, определяющих значение α , подвижный проводник в итоге неограниченно приближается с возрастающей скоростью к неподвижному проводнику. При $\lambda = 0,5$ на фазовой плоскости $\xi O\eta$ существует неустойчивое положение равновесия $(0,5, 0)$ (рис. 5.37), через которое проходит фазовая траектория, соответствующая значению $\alpha = 1/4 - \ln \sqrt{2} \approx 0,0966$.

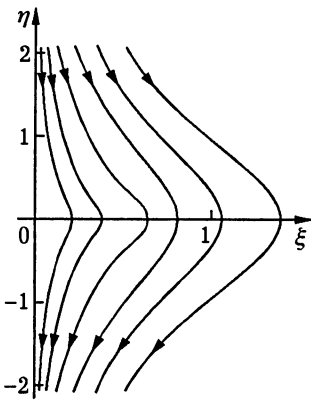


Рис. 5.36

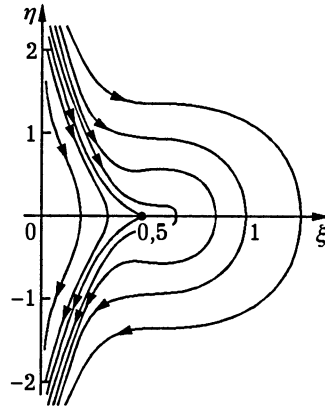


Рис. 5.37

При отсутствии тока в проводниках ($\lambda = 0$) имеем фазовый портрет гармонического осциллятора с положением равновесия $(1, 0)$. Причем в безразмерных координатах уравнения $\eta^2 = \alpha - (1 - \xi)^2$ ($\alpha > 0$) определяют окружности (рис. 5.38). Наконец, при $\lambda \in (0, 0,5)$ существуют устойчивое и неустойчивое положения равновесия: центр и седло (рис. 5.39), расстояние между которыми равно $\sqrt{1 - 2\lambda}$. При этом сепаратриса отделяет область фазовой плоскости с замкнутыми фазовыми тра-

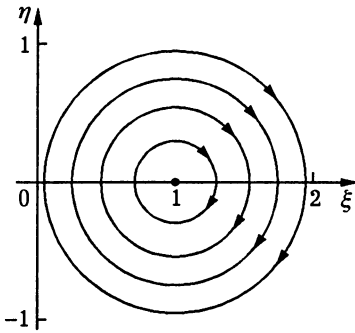


Рис. 5.38

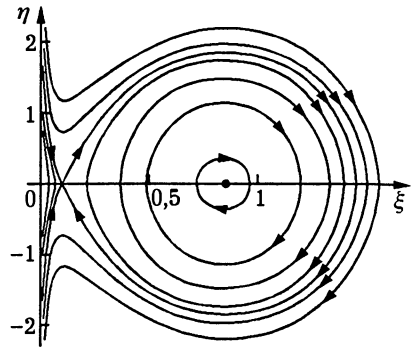


Рис. 5.39

екториями, соответствующими периодическим решениям ОДУ (5.47), от ее областей с фазовыми траекториями, которым отвечают неперіодические решения этого ОДУ.

5.7. Математические модели некоторых диссипативных систем

Математические модели (ММ) консервативных систем не учитывают влияние потери реальным *техническим объектом* (ТО) энергии или иной физической субстанции (массы, заряда, количества движения или момента количества движения), неизбежно возникающей при функционировании ТО. Поэтому *область адекватности* таких ММ обычно ограничена в направлении изменения некоторых параметров. Учет указанных потерь приводит к необходимости построения и анализа ММ неконсервативных систем.

Частным случаем таких систем является *диссипативная система*. На примере *осциллятора* при наличии сопротивления рассмотрена *линейная математическая модель* диссипативной системы (см. 4.3), описывающая неперіодическое изменение *выходных параметров* во времени t . Как уже отмечено (см. 5.4), в любой диссипативной системе периодическое изме-

нение параметров невозможно. Ограничимся рассмотрением диссипативных систем с одной *степенью свободы*.

Пример 5.15. Механическая система состоит из тела массой m , движущегося по горизонтальной поверхности под действием реакции пружины жесткостью c (рис. 5.40). При отсутствии трения между телом и поверхностью эта система является *гармоническим осциллятором*.

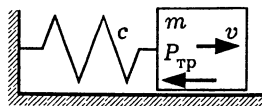


Рис. 5.40

За нуль отсчета перемещения u тела примем положение, в котором пружина находится в свободном состоянии. Примем приложенную к телу силу трения $P_{\text{тр}}$ постоянной и равной P_0 по абсолютной величине, но направленной противоположно его скорости $v = \frac{du}{dt}$, т.е. используем ММ *сухого трения*, для которой $P_{\text{тр}}v = -P_0|v| \leq 0$. При таком представлении сила трения не является *потенциальной*.

Полная энергия $W = \Pi + K$ системы включает кинетическую $K = mv^2/2$ и потенциальную $\Pi = cu^2/2$ энергии, так что в соответствии с (5.27) получаем

$$\frac{d(K + \Pi)}{dt} = mv \frac{dv}{dt} + cu \frac{du}{dt} = v \left(m \frac{d^2u}{dt^2} + cu \right) = P_{\text{тр}}v = -P_0|v| \leq 0,$$

т.е. система является не только диссипативной, но и *автономной*. Из этого равенства следуют два линейных ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$m \frac{d^2u}{dt^2} + cu = -P_0, \quad v > 0, \quad \text{и} \quad m \frac{d^2u}{dt^2} + cu = P_0, \quad v < 0, \quad (5.55)$$

описывающих движение тела. Если тело неподвижно, т.е. $v = 0$, то сила трения может принимать любое значение на отрезке $[-P_0, P_0]$, равное по абсолютной величине и противоположное по знаку реакции $-cu$ пружины.

Представим (5.55) в виде

$$\frac{d^2u_+}{dt^2} + \omega_0^2 u_+ = 0, \quad v > 0, \quad \text{и} \quad \frac{d^2u_-}{dt^2} + \omega_0^2 u_- = 0, \quad v < 0, \quad (5.56)$$

где $\omega_0 = \sqrt{c/m}$ — собственная частота колебаний гармонического осциллятора, соответствующего рассматриваемой системе при отсутствии трения, $u_+ = u + a$, $u_- = u - a$ и $a = P_0/c$ — наибольшее по абсолютной величине перемещение тела, при котором сила трения уравнивает реакцию пружины. Первое ОДУ (5.56) описывает колебания тела относительно положения равновесия $u = -a$ и лишь в течение тех полупериодов колебаний, когда $v > 0$, а второе ОДУ — относительно положения равновесия $u = a$ и в течение полупериодов колебаний, когда $v < 0$.

Если в момент времени $t = 0$ принять $v_0 = 0$ и $u_0 < -a$, т.е. $u_+(0) = u_0 + a < 0$, то пружина будет сжата и ее реакция превысит силу трения. Тогда тело начнет движение в положительном направлении оси Ou , так что при $t > 0$ будем иметь $v > 0$. При этом решение $u_+(t) = (u_0 + a) \cos \omega_0 t$ первого ОДУ (5.56) сохраняет силу до тех пор, пока скорость тела

$$v = \frac{du_+(t)}{dt} = -(u_0 + a)\omega_0 \sin \omega_0 t = |u_0 + a|\omega_0 \sin \omega_0 t$$

положительна, т.е. при $t \in (0, \pi/\omega_0)$. В момент времени $t_1 = \pi/\omega_0$ скорость тела обращается в нуль, а $u_+(t_1) = -(u_0 + a) > 0$, откуда $u_1 = u(t_1) = -u_0 - 2a = |u_0| - 2a$. Если $|u_0| \leq 3a$, то $u_1 \in [-a, a]$, поэтому сила трения уравнивает реакцию пружины и тело прекратит дальнейшее движение. Если же $|u_0| > 3a$, то $u_1 > a$ и реакция растянутой пружины превысит силу трения. Тогда тело начнет движение в отрицательном направлении оси Ou , так что при $t > t_1$ получим $v < 0$. При этом решение $u_-(t) = (u_1 - a) \cos \omega_0(t - t_1)$ второго ОДУ (5.56) останется в силе до тех пор, пока скорость тела

$$v = \frac{du_-(t)}{dt} = -(u_1 - a)\omega_0 \sin \omega_0(t - t_1) = (u_1 - a)\omega_0 \sin \omega_0 t$$

отрицательна, т.е. при $t \in (t_1, t_2)$, $t_2 = 2\pi/\omega_0$.

Таким образом, из решения первого ОДУ (5.56) при $t = \frac{(2n-1)\pi}{\omega_0}$, $n \in \mathbb{N}$, получаем начальное значение u_- для второго

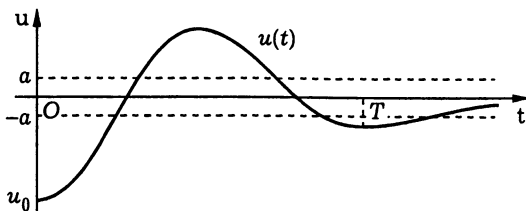


Рис. 5.41

ОДУ, решение которого при $t = \frac{2n\pi}{\omega_0}$ дает начальное значение u_+ для первого ОДУ, и так далее до тех пор, пока $u(m\pi/\omega_0) \notin [-a, a]$, $m \in \mathbb{N}$. При этом график функции $u(t)$ будет состоять из полувольт косинусоиды, смещенных по оси ординат на $-a$ и a (рис. 5.41). Каждая последующая полуволна имеет амплитуду на $2a$ меньше амплитуды предыдущей полуволны, а две соседние полуволны описывают движение тела в течение условного периода $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ затухающих колебаний относительно положения равновесия $u = 0$ системы без трения. Полуразмахи этих колебаний составляют убывающую арифметическую прогрессию с разностью $4a$ за период, в отличие от линейного осциллятора, полуразмахи колебаний которого убывают по геометрической прогрессии. Поэтому движение рассматриваемого тела прекратится, как только будет выполнено условие $u(m\pi/\omega_0) \in [-a, a]$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, т.е. за конечное время (напомним, что колебания линейного осциллятора затухают при $t \rightarrow \infty$).

Несложно убедиться, что для рассматриваемой системы фазовые траектории в фазовой плоскости uOv при соответствующем выборе масштабов по осям Ou и Ov образуют два семейства полуокружностей с центрами в точках $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ (рис. 5.42). Отметим, что характер движения системы (колебательный или аperiодический) зависит не от ее параметров, а от начальных условий, определяющих запас ее полной энергии. При достаточно большом запасе полной энергии система совершает конечное число колебаний до тех пор, пока изображающая точка не окажется на отрезке $[-a, a]$ оси Ou , который

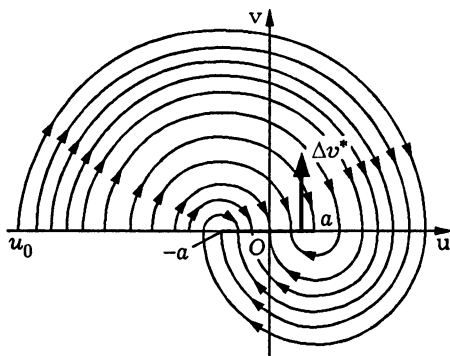


Рис. 5.42

является множеством *положений равновесия* ОДУ (5.55). Эти ОДУ можно рассматривать, например, как составную часть ММ измерительного стрелочного прибора, стрелка которого вследствие трения в опорах ее оси останавливается в некоторой зоне нечувствительности на шкале прибора в окрестности значения измеряемой величины. По той же причине стрелка может не вернуться к нулевой отметке на этой шкале при отключении прибора.

Если в некотором положении равновесия $(u^*, 0)$ сообщить системе возмущение в виде количества движения $m\Delta v^*$, то изображающая точка перейдет на соответствующую фазовую траекторию и затем по ней вернется на отрезок $[-a, a]$ оси Ou , но не обязательно в ту же точку $(u^*, 0)$ (см. рис. 5.42). При одинаковых по абсолютной величине $m|\Delta v|$ малых возмущениях изображающая точка может в зависимости от знака Δv приблизиться как к середине этого отрезка, так и к его концу. Если оба направления малых возмущений $|\Delta v|$ скорости тела в положении равновесия равновероятны, то при систематическом „встряхивании“ системы изображающая точка неограниченно приближается к середине этого отрезка. Этот прием приводит, по существу, к замене в системе сухого трения вязким, линейно зависящим от скорости*.

*См.: Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.

Пример 5.16. Пусть теперь в механической системе, изображенной на рис. 5.40, сила трения направлена противоположно направлению скорости v тела и по абсолютной величине пропорциональна квадрату этой скорости, $P_{\text{тр}} = -kv|v|$, $k = \text{const} > 0$. При этом мощность силы равна $P_{\text{тр}}v = -kv^2|v| \leq 0$, что соответствует определению автономной диссипативной системы (см. 5.4). Вместо (5.55) получим ОДУ второго порядка $\frac{d^2u}{dt^2} + cu = P_{\text{тр}}$ относительно перемещения u тела, которое с учетом $v = \frac{du}{dt}$, $\frac{d^2u}{dt^2} = v \frac{dv}{du} = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{du}$ и $|v| = v \operatorname{sgn} v$ приводится к виду

$$\frac{m}{2} \frac{dv^2}{du} + kv^2 \operatorname{sgn} v + cu = 0, \quad (5.57)$$

где функция знака [I] $\operatorname{sgn} v = 1$ при $v > 0$, $\operatorname{sgn} v = -1$ при $v < 0$ и $\operatorname{sgn} v = 0$ при $v = 0$.

Фазовые траектории в плоскости uOv , описываемые ОДУ (5.57), симметричны относительно начала координат. Действительно, одновременная смена в (5.57) знаков u и v сохраняет это ОДУ в силе. Поэтому достаточно рассмотреть случай $v > 0$, когда при $\operatorname{sgn} = 1$ из (5.57) получаем линейное относительно v^2 ОДУ, имеющее общее решение

$$v^2 = Ce^{-2ku/m} + c \frac{m - 2ku}{2k^2}, \quad C = \text{const},$$

в чем можно убедиться непосредственной подстановкой. Отсюда имеем два уравнения для фазовых траекторий:

$$v_+ = \sqrt{Ce^{-2ku/m} + c \frac{m - 2ku}{2k^2}} \quad \text{и} \quad v_- = -\sqrt{Ce^{2ku/m} + c \frac{m + 2ku}{2k^2}}.$$

При $C \geq 0$ ветви фазовых траекторий являются убегающими, так как в этом случае выражение для v_+ определено при $u \rightarrow -\infty$, а для v_- — при $u \rightarrow +\infty$. Значению $C = C_0 = -\frac{cm}{2k^2}$ соответствует лишь одно значение $u = 0$, при котором определены эти выражения, причем $v_+ = v_- = 0$. Таким образом,

начало координат на фазовой плоскости uOv является положением равновесия ОДУ (5.57).

При $C \in (C_0, 0)$ участки фазовых траекторий в верхней и нижней половинах фазовой плоскости ограничены, поскольку в этом случае выражения для v_+ и v_- определены только на отрезках оси Ou . Убегающие ветви, соответствующие значению $C = 0$, в каждой из полуплоскостей являются границами двух областей, содержащих

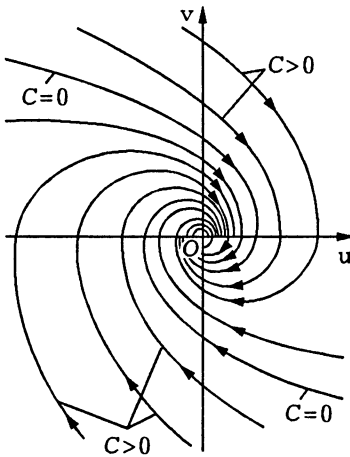


Рис. 5.43

убегающие и ограниченные ветви фазовых траекторий (рис. 5.43). Отметим, что при непрерывном движении изображающей точки по любой фиксированной фазовой траектории каждому пересечению оси Ou соответствует изменение значения C , причем убывающая последовательность этих значений имеет предел C_0 . Таким образом, положение равновесия ОДУ (5.57) отвечает асимптотически устойчивому частному решению этого ОДУ.

5.8. Понятие об автоколебательных системах

Консервативная система при определенных условиях может совершать незатухающие колебания (см. 5.6). При переменном внешнем воздействии такие колебания возможны и в системе, которая не является консервативной. Однако в технике достаточно часто встречаются неконсервативные системы, в которых при отсутствии таких внешних воздействий тем не менее происходят незатухающие колебания. Период этих колебаний зависит лишь от параметров самой системы, которая регулирует поступление энергии (или другой физической субстанции) для поддержания постоянного *полуразмаха колеба-*

ний. Эти системы принято называть *автоколебательными*, а возникающие в них незатухающие колебания — *автоколебаниями*.

К автоколебательным системам относятся часовой механизм, генераторы электрических и электромагнитных колебаний, оптические квантовые генераторы (лазеры), некоторые упругие конструкции, взаимодействующие с воздушными потоками (линии электропередачи, большепролетные вантовые и висячие мосты, элементы конструкций летательных аппаратов) и т.п. Автоколебания могут возникать в системах автоматического управления техническими объектами, в элементах подвески транспортных машин, в различных электромеханических устройствах (например, в обычном электрическом звонке). В смычковых и духовых музыкальных инструментах колебания струн и воздушных объемов также являются примерами автоколебаний.

Основной особенностью автоколебательной системы с одной степенью свободы является наличие в фазовой плоскости хотя бы одного *предельного цикла* — замкнутой фазовой траектории, для которой существует область, полностью прилегающая к этой траектории извне или изнутри или же образующая ее кольцеобразную окрестность и не содержащая других замкнутых траекторий. Предельный цикл называют *устойчивым*, если на фазовой плоскости можно указать такую область, содержащую этот цикл, что все фазовые траектории, начинающиеся в этой области, неограниченно приближаются к нему при $t \rightarrow \infty$. Промежуток времени T , за который изображающая точка проходит предельный цикл, называют периодом автоколебаний. Автоколебательная система может иметь более одного предельного цикла.

Пример 5.17. Пусть механическая система с одной степенью свободы, изображенная на рис. 5.40, является *линейным осциллятором*. Тогда зависимость перемещения u от времени

t удовлетворяет однородному ОДУ (см. 4.3)

$$m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + k_{\text{тр}} S \frac{du(t)}{dt} + cu(t) = 0,$$

где m — масса тела, движущегося по горизонтальной плоскости, $k_{\text{тр}}$ — коэффициент *линейного трения* при движении тела по горизонтальной плоскости, S — площадь поверхности контакта тела с этой плоскостью, c — жесткость пружины. Если в начальный момент времени $t = 0$ перемещение тела $u(0) = u_0 = 0$, а его скорость $v = \frac{du}{dt} = v_0$, то при условии $0 \leq k_{\text{тр}} \frac{S}{2m} = h < \sqrt{\frac{c}{m}} = \omega$ решение этого ОДУ

$$u(t) = \frac{v_0}{\omega_1} e^{-ht} \sin \omega_1 t, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - h^2}, \quad (5.58)$$

можно получить из (4.11), положив $u_0 = 0$. Это решение описывает *затухающие колебания*.

Из (5.58) получим равенство

$$v(t) = \frac{du(t)}{dt} = v_0 e^{-ht} \left(\cos \omega_1 t - \frac{h}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right), \quad (5.59)$$

которое вместе с (5.58) задает в параметрической форме фазовую траекторию в фазовой плоскости uOv (см. рис. 4.10). Функции, определяемые посредством (5.58) и (5.59), не являются периодическими функциями, хотя промежуток времени $\Delta t = 2\pi/\omega_1$ между двумя последовательными максимальными (или минимальными) значениями перемещения или скорости постоянен (см. 4.3). Из (5.58) следует, что перемещение u изменяет знак минус на знак плюс в моменты времени $t = 2n\pi/\omega_1 = n\Delta t$, $n \in \mathbb{N}$, т.е. через тот же промежуток времени Δt . В эти моменты времени в соответствии с (5.59) скорость принимает значения $v(n\Delta t) = v_0 e^{-nh\Delta t}$, уменьшаясь за этот промежуток времени в $e^{h\Delta t}$ раз. При $u = 0$ пружина находится в свободном состоянии, так что в моменты времени $t = n\Delta t$ потенциальную

энергию системы можно принять равной нулю. Следовательно, в каждый промежуток времени Δt полная энергия системы уменьшается за счет уменьшения ее кинетической энергии в $e^{2h\Delta t}$ раз, т.е. рассматриваемая система является *диссипативной системой*.

Если каждый раз при смене знака u с минуса на плюс при помощи специального устройства сообщать системе утраченную долю кинетической энергии, то затухающие колебания станут периодическими. В самом деле, если в момент времени $t = \Delta t$, когда *изображающая точка* находится в положении B (рис. 5.44), сообщить телу приращение скорости $\Delta v = v_0(1 - e^{-h\Delta t})$, то изображающая точка перейдет в положение A и затем продолжит движение по витку спирали, который снова приведет ее в положение B . Повторяя эту процедуру при каждой смене знака u с минуса на плюс и каждый раз возвращая изображающую точку в положение A , можно получить замкнутую фазовую траекторию $ACBA$.

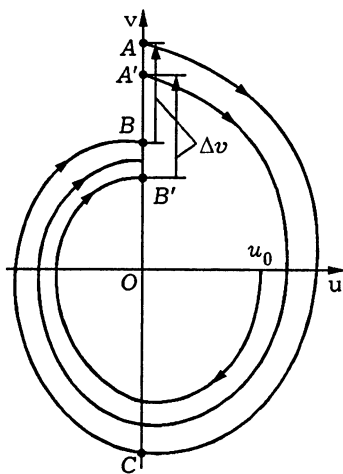


Рис. 5.44

Наличие устройства, способного сообщать телу мгновенное приращение Δv скорости при прохождении положения равновесия $u = 0$ в одном из направлений, наделяет рассматриваемую систему свойством *самовозбуждения колебаний*. При этом начало координат на фазовой плоскости uOv утрачивает свойства устойчивого фокуса. Действительно, при любых отклонениях от положения равновесия изображающая точка, двигаясь по соответствующему витку спирали, неизбежно подойдет слева к оси ординат. Например, при отклонении u_0 изображающая точка придет в положение B' (см. рис. 5.44) и,

совершив скачок вдоль оси ординат на Δv , перейдет в точку A' на новый виток спирали, охватывающий прежний, и т.д. Таким образом, отклонения от положения равновесия будут нарастать. Поскольку фазовая плоскость непрерывно заполнена спиралевидными фазовыми траекториями, то изображающая точка при $t \rightarrow \infty$ будет стремиться перейти на замкнутую траекторию $ACBA$ (при определенных начальных отклонениях от положения равновесия этот переход возможен за конечное число скачков). #

В примере 5.17 рассмотрена *математическая модель* (ММ) механической диссипативной системы с линейным трением. Добавление к этой системе специального устройства, восстанавливающего при определенном ее положении потерянную ею долю полной энергии, превращает эту систему в автоколебательную, причем обладающую свойством самовозбуждения колебаний. Такая ММ весьма приближенно описывает работу часового механизма. Уточнить эту ММ можно следующим образом.

Часовой механизм современных часов состоит из трех основных частей: 1) балансира, совершающего колебания; 2) источника энергии (например, спиральной пружины) и 3) часового спуска, периодически передающего балансиру энергию для поддержания колебаний. Если трение в опорах оси балансира можно в первом приближении считать линейным, т.е. пропорциональным скорости вращения оси, то приведение в действие часового спуска связано с преодолением *трения покоя* и *сухого трения*.

Пример 5.18. Исследуем свойства рассмотренной в примере 5.15 механической системы с сухим трением, но снабженной устройством, передающим ей в некотором ее положении дополнительную энергию. Выберем в верхней половине фазовой плоскости uOv одну из фазовых траекторий, которые при соответствующем выборе масштаба μ по оси Ov образуют два семейства полуокружностей с центрами в точках $(-a, 0)$ и

$(a, 0)$ (см. рис. 5.42). Пусть указанное устройство срабатывает в момент времени, когда абсцисса находящейся в верхней полуплоскости изображающей точки принимает значение $u = -a$ (рис. 5.45). При этом происходит мгновенное приращение скорости на одну и ту же величину $\Delta v > 0$, а изображающая точка скачком переходит из положения B в положение A и продолжает движение по другой траектории, приводящей ее в точку B' , из которой она скачком переходит в положение A' , и т.д.

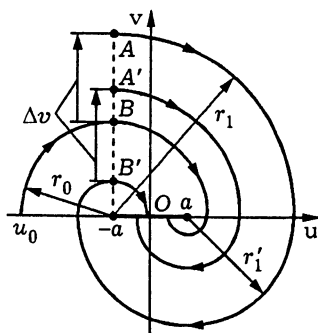


Рис. 5.45

Если в начальный момент времени $t = 0$ изображающая точка имела абсциссу $u_0 < -3a < 0$ и начала двигаться по полуокружности радиуса $r_0 = |u_0| - a$, то после первого скачка эта точка переходит на полуокружность радиуса $r_1 = r_0 + \mu\Delta v = |u_0| - a + \mu\Delta v > 2a$, а при пересечении положительной полуоси абсцисс — на полуокружность радиуса $r'_1 = r_1 - 2a = |u_0| - 3a + \mu\Delta v$ (см. рис. 5.45). Двигаясь по этой полуокружности, изображающая точка придет в положение $(u_1, 0)$, причем $|u_1| = r'_1 - a = |u_0| - 4a + \mu\Delta v$. Ясно, что это положение изображающей точки совпадет с ее начальным положением $(u_0, 0)$ при условии $4a - \mu\Delta v = 0$, или $\Delta v = 4a/\mu$. В этом случае траектория изображающей точки станет замкнутой, соответствующей автоколебаниям в рассматриваемой системе. При $\Delta v < 4a/\mu$ колебания затухающие, а при $\Delta v > 4a/\mu$ отклонение от положения равновесия системы при ее колебаниях возрастает после каждого скачка изображающей точки.

Несложно установить, что в случае $\Delta v < 4a/\mu$ колебания затухают при любом начальном положении изображающей точки, а в случае $\Delta v > 4a/\mu$ размах колебаний возрастает, если начальное положение изображающей точки не лежит внутри области, заштрихованной на рис. 5.46. Автоколебания возника-

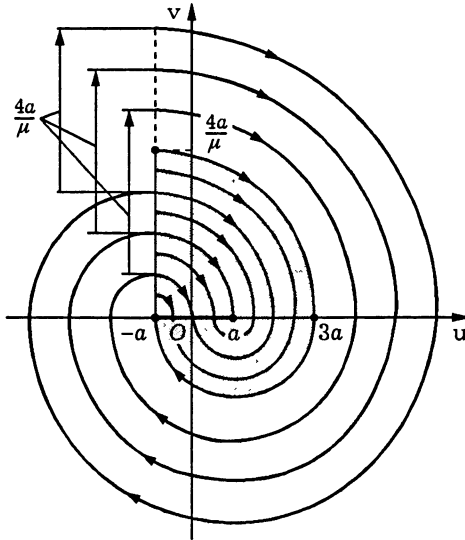


Рис. 5.46

ют при выполнении условия $\Delta v = 4a/\mu$ из любого начального положения, лежащего вне этой области. При этом замкнутая фазовая траектория и размах колебаний зависят от начального положения. Но при сколь угодно малом нарушении равенства $\Delta v = 4a/\mu$ размах колебаний будет убывать или возрастать, т.е. автоколебания в рассматриваемой системе неустойчивы по отношению к малым возмущениям ее параметров. Таким образом, проведенное уточнение ММ еще недостаточно для адекватного описания автоколебаний в часовом механизме.

Пусть в момент времени, когда абсцисса изображающей точки, находящейся в верхней половине фазовой плоскости, принимает значение $u = -a$, вместо фиксированного приращения $\Delta v = \text{const}$ скорости происходит приращение на постоянную величину ΔK кинетической энергии рассматриваемой системы. Это тоже приводит к приращению $\Delta v = \sqrt{v^2 + \frac{2}{m} \Delta K} - v$ скорости тела массой m , но теперь зависящему от значения v его скорости перед этим приращением. Возвращаясь к

рис. 5.45, можно установить, что при этом изображающая точка с полуокружности радиуса $r_0 = |u_0| - a = \mu v$ переходит на полуокружность радиуса

$$\begin{aligned} r_1 &= r_0 + \mu \Delta v = \mu v + \mu \sqrt{v^2 + (2/m)\Delta K} - \mu v = \\ &= \mu \sqrt{v^2 + (2/m)\Delta K}, \quad (5.60) \end{aligned}$$

а в нижней половине фазовой плоскости — на полуокружность радиуса $r'_1 = r_1 - 2a$, достигая положения $(u_1, 0)$, где $|u_1| = = r'_1 - a = r_1 - 3a$. Из (5.60) следует, что

$$r_1^2 = \mu^2 v^2 + 2 \frac{\mu^2}{m} \Delta K = r_0^2 + 2 \frac{\mu^2}{m} \Delta K.$$

Подставляя вместо r_1 и r_0 их выражения через $|u_1|$ и $|u_0|$ соответственно, получаем

$$(|u_1| + 3a)^2 - (|u_0| - a)^2 = 2 \frac{\mu^2}{m} \Delta K = h^2.$$

Рассуждая аналогично, после произвольного числа $n \in \mathbb{N}$ оборотов вокруг начала координат, можно записать

$$(|u_n| + 3a)^2 - (|u_{n-1}| - a)^2 = h^2.$$

Периодические колебания возможны, если при некотором n выполнено условие $|u_n| = |u_{n-1}| = |u_*| > a$, т.е. $(|u_*| + 3a)^2 - (|u_*| - a)^2 = h^2$, откуда $|u_*| = h^2 / (8a) - a > a$ и $h^2 > 16a^2$.

Таким образом, при $h^2 > 16a^2$ в рассматриваемой системе возможны автоколебания, причем фиксированному сочетанию значений h^2 и a , удовлетворяющих этому неравенству, соответствует вполне определенное значение наибольшего отклонения $|u_*|$ в сторону отрицательных перемещений, не зависящее от начального положения изображающей точки. При этом наибольшее отклонение в сторону положительных перемещений равно $u^* = r_1 - a = |u_*| + 2a = \frac{h^2}{8a} + a$, так что полный размах автоколебаний $|u_*| + |u^*| = \frac{h^2}{4a}$.

Отметим, что рассматриваемая система не обладает свойством самовозбуждения колебаний. Действительно, если отклонения из положений равновесия, находящихся на отрезке $[-a, a]$ оси абсцисс, остаются в пределах области, заштрихованной на рис. 5.46, то система возвращается в одно из положений равновесия на этом отрезке. Для возникновения автоколебаний необходимо возмущение, выводящее систему за пределы этой области. Можно показать*, что возникающие при этом автоколебания устойчивы по Ляпунову.

Последний вариант ММ дает более адекватное описание работы реального часового механизма. Но и этот вариант предполагает, что часовой спуск передает порцию энергии мгновенно в некотором фиксированном положении системы. В действительности для этого требуется некоторый промежуток времени, в течение которого положение системы изменяется. Для повышения плавности хода часов обычно часовой спуск действует дважды за период автоколебаний, причем при прохождении системы мимо положения равновесия в том и в другом направлениях. Если учесть в ММ линейное трение, то это усложнит ее, но не внесет в ММ принципиальных особенностей (фазовые траектории вместо дуг окружностей будут состоять из участков спирали).

Пример 5.19. К автоколебательным системам следует отнести сосуд, через дно которого проходит труба, изогнутая в своей верхней части (рис. 5.47). Сосуд заполняется водой с постоянным объемным расходом $Q_{\text{ж}}^{\circ}$. Когда уровень воды достигает высоты H , сосуд начинает опорожняться через изогнутую трубу до тех пор, пока вода не опустится до уровня H_0 , после чего процесс повторяется.

При заполнении цилиндрического сосуда уровень воды повышается линейно во времени t (рис. 5.48). Для заполнения такого сосуда с горизонтальным сечением площадью S до уров-

*См.: Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.

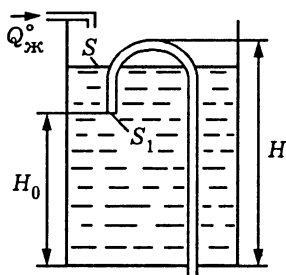


Рис. 5.47

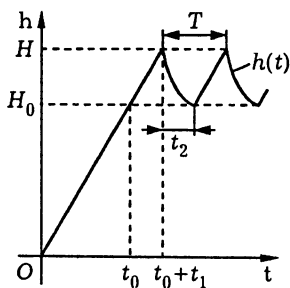


Рис. 5.48

ня H_0 необходимо время $t_0 = \frac{SH_0}{Q_{\text{ж}}^0}$, а от уровня H_0 до уровня H — время $t_1 = \frac{S(H - H_0)}{Q_{\text{ж}}^0}$, так что в момент времени $t = t_0 + t_1$ начнется опорожнение сосуда.

Если площадь S_1 поперечного сечения изогнутой трубы достаточно велика, то опорожнение сосуда происходит за короткий по сравнению с t_1 промежуток времени. Поэтому добавление воды в сосуд за этот промежуток времени можно в первом приближении не учитывать. Тогда время опорожнения будет равно [VIII] $t_2 = \frac{S}{\mu S_1} \sqrt{\frac{2(H - H_0)}{g}}$, где g — ускорение свободного падения, а μ — коэффициент гидравлического сопротивления в формуле для объемного расхода $Q_{\text{ж}}(t) = \mu S_1 \sqrt{2g(h(t) - H_0)}$ воды при опорожнении, причем график зависимости текущего уровня $h(t)$ воды от времени t является параболой (см. рис. 5.48). Таким образом, период автоколебаний равен $T = t_1 + t_2$.

Рассмотренную гидравлическую систему иногда называют „танталовым сосудом“ по имени героя древнегреческого мифа Тантала, низвергнутого Зевсом за грехи в подземное царство Аида. Там, мучимый жаждой, Тантал стоит в прозрачной воде, доходящей ему до подбородка, но при каждой его попытке наклониться и утолить жажду вода исчезает. Несмотря на красивую легенду, название „танталов сосуд“ применительно

к рассмотренной системе неудачно. Дело в том, что период автоколебаний зависит лишь от параметров самой системы и не зависит, например, от того, в какой момент времени Тантал попытается утолить жажду.

Дополнение 5.1. Приближенные методы анализа динамических моделей

Рассмотрим сначала *автономную* механическую систему, в которой возникают *автоколебания*, близкие по форме к гармоническим с угловой частотой p . Пусть в *динамической математической модели* (ММ) этой системы нелинейность имеет принципиальное значение, но в количественном отношении играет меньшую роль по сравнению с линейным слагаемым $p^2u(t)$, где $u(t)$ — искомая функция, описывающая зависимость перемещения от времени t . Тогда нелинейная ММ системы содержит обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) второго порядка

$$\frac{d^2u}{dt^2} + p^2u = \mu f(u, v), \quad v = \frac{du}{dt}, \quad \mu = \text{const} > 0, \quad (5.61)$$

где $f(u, v)$ — явно не зависящая от времени t функция u и скорости v , а μ — малый параметр, значение которого характеризует близость системы к *гармоническому осциллятору*.

При *установившемся процессе* автоколебаний в первом приближении примем

$$u(t) = \bar{A} \cos pt, \quad (5.62)$$

где $\bar{A} = \text{const} > 0$ — *полуразмах колебаний*, характеризующий *предельный цикл* с периодом $T = 2\pi/p$ колебаний. Ясно, что (5.62) не удовлетворяет ОДУ (5.61), так как при подстановке (5.62) в (5.61) в общем случае $f(\bar{A} \cos pt, -p\bar{A} \sin pt) \neq 0$. Функцию $f(u, v)$ можно трактовать как силу, приходящуюся на единицу массы системы. Если за период T колебаний работа этой силы отрицательна, то энергия системы убывает и колебания

затухают, а если положительна, то энергия возрастает и полуразмахи колебаний увеличиваются.

Но и то и другое противоречит предположению о постоянстве значения \bar{A} в (5.62). Поэтому существование предельного цикла возможно лишь при равенстве нулю работы силы $f(u, v)$ за период T колебаний. Такой подход к построению приближенного решения ОДУ (5.61) составляет существо *метода энергетического баланса*. Учитывая, что $du = v dt$, запишем элементарную работу в виде $f(u, v) v dt$, а условие равенства нулю работы за период T колебаний приведет с учетом (5.62) к интегральному соотношению

$$\Phi(\bar{A}) = \int_0^T f(\bar{A} \cos pt, -p\bar{A} \sin pt) \sin pt dt = 0, \quad (5.63)$$

из которого можно найти искомое значение \bar{A} .

Чтобы проанализировать процесс установления автоколебаний из некоторого начального состояния системы, определяемого значением $A(0) = A_0$ в момент времени $t = 0$, примем в зависимости $u(t) = A(t) \cos pt$ величину $A(t)$ настолько медленно изменяющейся во времени t , что в течение одного периода колебаний ее в первом приближении можно считать постоянной. Тогда приращение за один период колебаний полной энергии системы, приходящейся на единицу массы, составит

$$\Delta W = \int_0^T f(u, v) v dt = -pA\Phi(A). \quad (5.64)$$

Полную энергию системы, описываемой ОДУ (5.61), вычислим как сумму кинетической и потенциальной энергий гармонического осциллятора единичной массы ($m = 1$) и жесткости $c = p^2 m = p^2$, учитывая при этом (5.62):

$$W = \frac{v^2}{2} + p^2 \frac{u^2}{2} = \frac{p^2 A^2}{2} \sin^2 pt + \frac{p^2 A^2}{2} \cos^2 pt = \frac{p^2 A^2}{2}.$$

Пренебрегая величиной $(\Delta A)^2$ по сравнению с малым приращением ΔA за период колебаний, для приращения полной энергии находим

$$\Delta W = \frac{p^2}{2}(A + \Delta A)^2 - \frac{p^2}{2}A^2 \approx p^2 A \Delta A.$$

Подставляя ΔW в (5.64), получаем приближенное равенство $p\Delta A \approx -\Phi(A)$, или

$$\frac{\Delta A}{T} \approx -\frac{\Phi(A)}{2\pi}, \quad \Phi(A) = \int_0^T f(A \cos pt, -pA \sin pt) \sin pt \, dt. \quad (5.65)$$

Отношение $\Delta A/T$ характеризует среднюю скорость изменения величины $A(t)$ за период T колебаний. Представим эту скорость в виде $\frac{A_k - A_{k-1}}{T}$, где A_k — значение $A(t)$ в момент времени $t_k = kT$, $k \in \mathbb{N}$. Если в момент времени $t = 0$ задано значение $A(0) = A_0$, то, применяя к (5.65) метод ломаных Эйлера [VIII], можно последовательно вычислить $A_k = A_{k-1} - \frac{1}{p}\Phi(A_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$. Для нахождения последовательности значений A_k возможно применение и других численных методов решения ОДУ первого порядка [VIII], [XIII].

Равенству (5.63) в общем случае может удовлетворять N значений \bar{A}_n , $i = \bar{1}, \bar{N}$. Это означает, что возможно существование N предельных циклов, причем среди них могут быть как *устойчивые*, так и *неустойчивые циклы*. Если малое возмущение $\Delta \bar{A}_n > 0$ полуразмаха колебаний \bar{A}_n предельного цикла с номером n приводит к уменьшению работы за цикл, а малое возмущение $\Delta \bar{A}_n < 0$ — к ее увеличению, то эти возмущения будут по абсолютной величине уменьшаться во времени, т.е. предельный цикл будет устойчивым. Это условие равносильно выполнению неравенства $\left. \frac{d\Phi(A)}{dA} \right|_{A=\bar{A}_n} < 0$, или

$$\int_0^T \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \, dt < 0 \quad \text{при} \quad u = \bar{A}_n \cos pt, \quad v = -\bar{A}_n \sin pt,$$

так как при таком представлении u и v имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(A)}{dA} &= - \int_0^T \left(\frac{\partial f(u,v)}{\partial u} \cos pt - \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} \sin pt \right) \sin pt dt = \\ &= - \int_0^T \left(\frac{\partial f(u,v)}{\partial u} \sin pt + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} \cos pt \right) \cos pt dt + \int_0^T \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} dt = \\ &= \frac{1}{p\bar{A}_n} \int_0^T \left(\frac{\partial f(u,v)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right) \cos pt dt + \int_0^T \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} dt = \\ &= \frac{1}{p\bar{A}_n} \int_0^T \frac{df(u,v)}{dt} \cos pt dt + \int_0^T \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} dt = \frac{f(u,v)}{p\bar{A}_n} \cos pt \Big|_0^T + \\ &\quad + \frac{1}{\bar{A}_n} \int_0^T f(u,v) \sin pt dt + \int_0^T \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} dt = \int_0^T \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} dt, \end{aligned}$$

поскольку в предпоследней части этого равенства первое слагаемое обращается в нуль, а второе равно $\frac{\Phi(\bar{A}_n)}{\bar{A}_n} = 0$.

Известно большое число приближенных методов, применимых к анализу нелинейных динамических ММ как автономных систем, так и не являющихся автономными*. Рассмотрим один из методов построения фазовой траектории в случае, когда непрерывная функция в правой части (5.61) явно зависит от времени t , а $\mu = 1$, т.е.

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + p^2 u = f(u, v, t), \quad v = \frac{du}{dt}. \quad (5.66)$$

Введем безразмерное время $\tau = pt$ и обозначим $\nu = \frac{du}{d\tau} = \frac{v}{p}$. Тогда вместо (5.66) получим $p^2 \nu \frac{d\nu}{d\tau} = f(u, p\nu, \tau/p) - p^2 u$. Обо-

*См.: Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.; Каудерер Г.

значая $\delta(u, \nu, \tau) = -\frac{f(u, p\nu, \tau/p)}{p^2}$, приходим к ОДУ

$$\nu \frac{d\nu}{du} + u + \delta(u, \nu, \tau) = 0. \quad (5.67)$$

Если в некоторый момент времени t_{k-1} , $k \in \mathbb{N}$, известны значения $u(t_{k-1}) = u_{k-1}$ и $\nu(t_{k-1}) = \nu_{k-1}$, то фазовая траектория для рассматриваемой системы будет проходить через точку (u_{k-1}, ν_{k-1}) фазовой плоскости $uO\nu$ (рис. 5.49), где $\nu_{k-1} = \nu_{k-1}/p$.

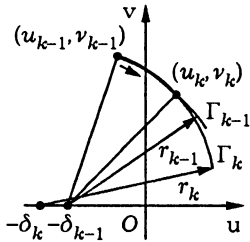


Рис. 5.49

Через достаточно малый промежуток времени $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ изображающая точка перейдет в положение (u_k, ν_k) , причем приближенные значения u_k и ν_k можно найти следующим образом.

За достаточно малый промежуток времени Δt_k изменение u и ν мало, так что правая часть (5.66) также изменяется незначительно и можно положить $\delta(u, \nu, \tau) \approx \delta(u_{k-1}, \nu_{k-1}, \tau_{k-1}) = \delta_{k-1}$, где $\tau_{k-1} = pt_{k-1}$. Тогда вместо (5.67) получим ОДУ $\nu d\nu + (u + \delta_{k-1}) du = 0$, имеющее общее решение

$$\nu^2 + (u + \delta_{k-1})^2 = r_{k-1}^2 = \text{const}, \quad (5.68)$$

где r_{k-1} геометрически соответствует радиусу дуги Γ_{k-1} окружности с центром в точке $(0, -\delta_{k-1})$, проходящей через точку (u_{k-1}, ν_{k-1}) фазовой плоскости (см. рис. 5.49). Следовательно, $r_{k-1} = \sqrt{\nu_{k-1}^2 + (u_{k-1} + \delta_{k-1})^2}$.

Переместим изображающую точку по дуге Γ_{k-1} по ходу часовой стрелки из положения (u_{k-1}, ν_{k-1}) в достаточно близкое положение (u_k, ν_k) . Тогда из приближенного равенства $\nu \approx \frac{1}{2}(\nu_{k-1} + \nu_k) \approx \frac{u_k - u_{k-1}}{p\Delta t_k}$ можно вычислить $\Delta t_k = \frac{2(u_k - u_{k-1})}{p(\nu_{k-1} + \nu_k)}$ и найти момент времени $t_k = t_{k-1} + \Delta t_k$, соответствующий значениям u_k и ν_k . Это позволяет перейти к нахождению следующего

участка фазовой траектории в виде дуги Γ_k окружности радиуса $r_k = \sqrt{\nu_k^2 + (u_k + \delta_k)^2}$ с центром в точке $(0, -\delta_k)$, проходящей через точку (u_k, ν_k) (см. рис. 5.49), причем $\delta_k = \delta(u_k, \nu_k, \tau_k)$ и $\tau_k = p t_k$.

Описанный прием построения фазовой траектории получил название *дельта-метода*. Ясно, что он применим и в случаях, когда правая часть (5.66) является функцией любого сочетания двух из трех аргументов (в частности, явно не зависит от времени t) или же зависит только от одного аргумента. Если нелинейная динамическая ММ включает ОДУ $\frac{d^2 u}{dt^2} = F(u, v, t)$, то его можно привести к виду (5.66), положив $f(u, v, t) = p^2 u + F(u, v, t)$.

Вопросы и задачи

5.1. Покажите, что при фиксированном значении $U^* = U_0^* > \Delta U_0$ существует значение $R = R_*$, в окрестности которого отсутствует непрерывная зависимость решения ОДУ (5.15) от параметра R .

5.2. Покажите, что в примере 5.3 $I_2^0 > I_\infty$. Выведите равенство $T_c - T_1 = \Delta T_{\max}$ и объясните, почему режим работы рассмотренной в этом примере ячейки теплоизолирующего слоя менее надежен при значении I^* силы тока, чем при значении I_* .

5.3. Постройте фазовый портрет консервативной системы, состоящей из длинного однородного прямоугольного параллелепипеда, качающегося вокруг одного из своих горизонтальных ребер, которое соприкасается с горизонтальной поверхностью и не может скользить по ней. Высота и ширина параллелепипеда равны l и b соответственно.

5.4. Исследуйте поведение консервативной системы, рассмотренной в примере 5.11, при $l_0 \leq l$.

5.5. Исследуйте затухающие колебания в системе, изображенной на рис. 5.1, после отклонения твердого тела массой m из положения равновесия на расстояние a в горизонтальном направлении. Колебания около этого положения затухают благодаря силе вязкого трения, пропорциональной квадрату скорости тела. Как изменится поведение системы, если в вертикальном положении пружина жесткостью s имеет натяжение $P_0 > 0$? Исследуйте поведение системы при $P_0 < 0$.

5.6. Убедитесь, что в условиях примера 5.10

$$w_k = \frac{1}{a} \left(\left(1 + \frac{agH}{l} \right) e^{-agH/l} - 1 \right) < 0.$$

5.7. Выведите уравнения фазовых траекторий системы, рассмотренной в примере 5.15. При каком выборе масштабов по осям Ou и Ov фазовой плоскости uOv фазовые траектории образуют два семейства полуокружностей с центрами в точках $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ (см. рис. 5.42)?

5.8. Убедитесь, что в системе, рассмотренной в примере 5.18, автоколебания возможны при условии $\Delta v = 4a/\mu$, если начальное положение изображающей точки лежит вне области, заштрихованной на рис. 5.46, а в случае $\Delta v > 4a/\mu$ размах колебаний возрастает, если начальное положение изображающей точки не лежит внутри этой области.

5.9. Установите влияние притока воды с объемным расходом $Q_{\text{ж}}^{\circ}$ на время опорожнения „танталова сосуда“ (см. пример 5.19).

6. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МИКРОУРОВНЯ

Так как *математические модели (ММ) микроуровня* описывают процессы в *континуальных системах*, то теоретической основой их построения являются механика и электродинамика *сплошной среды*. Некоторые примеры применения этих ММ для обоснования *математических моделей макроуровня* и уточнения их *областей адекватности* приведены в Д.3.2, Д.3.3 и Д.4.1. Методы построения и анализа *многомерных математических моделей микроуровня* достаточно подробно рассмотрены в [XII], [XIII]. Поэтому здесь остановимся в основном на особенностях *одномерных математических моделей микроуровня технических объектов*, в том числе таких объектов, в которых одновременно протекают процессы различной физической природы.

6.1. Модели микроуровня электрических двухполюсников

Уточним по сравнению с *математическими моделями (ММ) макроуровня* (см. 3.1 и Д.3.3) ММ *электрических двухполюсников* — резистора и конденсатора. Для уточнения используем *математические модели микроуровня* этих двухполюсников.

Пример 6.1. Пусть материал прямолинейного проводника длиной l с круглым поперечным сечением радиуса $r_* \ll l$ имеет электрическую проводимость σ , единицей измерения которой является $\frac{\text{А}}{\text{В} \cdot \text{м}}$. Такой проводник можно считать резистором с *активным сопротивлением* $R_0 = \frac{l}{\pi r_*^2 \sigma}$. Однако в случае переменного тока изменяется во времени энергия магнитного

поля вне и внутри проводника и поэтому следует учитывать комплексное сопротивление этого проводника.

В рамках квазистационарной математической модели, в которой не учитывают волновые процессы (см. замечание 3.1), модуль вектора $\mathbf{H}(t, r)$ напряженности магнитного поля в точке на расстоянии $r \geq r_*$ от оси проводника, малом по сравнению с l , равен*

$$H_{\text{н}}(t, r) = \frac{I(t)}{2\pi r}, \quad (6.1)$$

где $I(t)$ — значение силы тока в проводнике в момент времени t . В данном случае величина $I(t)$ аналогична интенсивности вихря, а вектор \mathbf{H} аналогичен вектору скорости несжимаемой жидкости [X], перпендикулярному плоскости, проходящей через ось и рассматриваемую точку.

Если считать плотность $j(t)$ электрического тока в поперечном сечении проводника однородной, т.е. $j(t) = \frac{I(t)}{\pi r_*^2}$, то внутри проводника в соответствии с (6.1) получим

$$H_{\text{вн}}(t, r) = \frac{\pi r^2 j(t)}{2\pi r} = \frac{I(t)r}{2\pi r_*^2},$$

причем $H_{\text{вн}}(t, r_*) = H_{\text{н}}(t, r_*)$ в силу непрерывности тангенциальной проекции вектора \mathbf{H} на поверхности, разделяющей среды с различными свойствами [XIII]. Так как объемная плотность энергии магнитного поля пропорциональна квадрату его напряженности, то энергия поля внутри проводника будет

$$\mathcal{E}_{\text{вн}}(t) = 2\pi l \frac{\mu\mu_0}{2} \int_0^{r_*} H^2(t, r) r dr = \frac{\mu\mu_0 l}{4\pi r_*^4} I^2(t) \int_0^{r_*} r^3 dr = \frac{\mu\mu_0 l}{16\pi} I^2(t),$$

где μ — магнитная проницаемость материала проводника, а $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{м}}$ — магнитная постоянная.

*См.: Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.

Объемная плотность энергии магнитного поля вне проводника равна $\frac{\mu' \mu_0}{2} H_{\text{н}}^2(t, r)$, где μ' — магнитная проницаемость среды, окружающей проводник. Энергию этого поля можно оценить, учитывая (6.1), величиной

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{н}}(t) &= 2\pi l \frac{\mu' \mu_0}{2} \int_{r_*}^l H_{\text{н}}^2(t, r) r dr = \\ &= \frac{\mu' \mu_0 l}{4\pi} I^2(t) \int_{r_*}^l \frac{dr}{r} = \frac{\mu' \mu_0 l}{4\pi} I^2(t) \ln \frac{l}{r_*}, \end{aligned}$$

ограничивая рассматриваемую область круговым цилиндром высоты и радиуса l . При $r_* \ll l$ погрешность этой оценки имеет порядок* $\frac{1}{\ln(l/r_*)}$.

Поскольку энергия магнитного поля катушки индуктивностью L равна $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L I^2(t)$ (см. 3.1), для индуктивности проводника получим $L = L_{\text{вн}} + L_{\text{н}}$, где

$$L_{\text{вн}} = \frac{2\mathcal{E}_{\text{вн}}(t)}{I^2(t)} = \frac{\mu \mu_0 l}{8\pi}, \quad L_{\text{н}} = \frac{2\mathcal{E}_{\text{н}}(t)}{I^2(t)} = \frac{\mu' \mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{l}{r_*}.$$

Если же считать, что ток течет только по поверхности проводника, то $H_{\text{вн}}(t, r) = 0$ при $r < r_*$, т.е. $L_{\text{вн}} = 0$, а выражения для $H_{\text{н}}(t, r_*)$ и $L_{\text{н}}$ останутся прежними.

Таким образом, комплексное сопротивление прямолинейного проводника при прохождении через него переменного тока с угловой частотой ω равно $Z = R_0 + i\omega L$, где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. #

В примере 6.1 рассмотрены два предельных случая распределения плотности тока в длинном прямолинейном проводнике с круглым поперечным сечением. В обоих случаях при прохождении переменного тока с угловой частотой ω проводник обладает некоторым индуктивным сопротивлением ωL .

* См.: Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.

Для исследования реального распределения плотности переменного тока в таком проводнике и выяснения влияния *поверхностного эффекта* на индуктивное и активное сопротивление проводника необходимо привлечь уравнения Максвелла

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}, & \nabla \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}, & \nabla \mathbf{D} = \rho_e, \end{cases} \quad (6.2)$$

где ∇ — оператор Гамильтона, $\mathbf{0}$ — нулевой вектор, \mathbf{j} — вектор плотности электрического тока, ρ_e — объемная плотность электрического заряда [XIII]. Для изотропной среды вектор \mathbf{B} магнитной индукции связан с вектором \mathbf{H} напряженности магнитного поля, измеряемой в А/м, соотношением $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$, а вектор \mathbf{D} электрического смещения — с вектором \mathbf{E} напряженности электрического поля, измеряемой в В/м, соотношением $\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0\mathbf{E}$, где ϵ — диэлектрическая проницаемость, $\epsilon_0 \approx 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{А} \cdot \text{с}}{\text{В} \cdot \text{м}}$ — электрическая постоянная, причем $(\epsilon_0\mu_0)^{-1/2} = c \approx 2,9979 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ — скорость света в вакууме. Связь между \mathbf{j} и \mathbf{E} для изотропной среды устанавливает закон Ома в виде

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (6.3)$$

где σ — электрическая проводимость среды, измеряемая в $\frac{\text{А}}{\text{В} \cdot \text{м}}$. В случае анизотропной среды μ , ϵ и σ являются тензорами второго ранга.

Запись (6.2) предполагает, что среда неподвижна относительно системы координат $Ox_1x_2x_3$, а эта система инерциальна, т.е. неподвижна или движется поступательно с постоянной скоростью. Преобразованием (6.2) и (6.3) можно показать [XII], что в изотропной среде с постоянными значениями μ , ϵ и σ при $\rho_e \equiv 0$ каждая из проекций E_k и H_k , $k = 1, 2, 3$, векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} на координатные оси x_k , обозначенная через u , удовлетворяет

телеграфному уравнению вида

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u, \quad a = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad b = \sigma\mu\mu_0, \quad (6.4)$$

где ∇^2 — оператор Лапласа. Так как $b = 0$ при $\sigma = 0$, то (6.4) переходит в волновое уравнение. Для вакуума $b = 0$ и $\mu = \epsilon = 1$, а в волновом уравнении $a = c$.

Пример 6.2. Как и в примере 6.1, рассмотрим длинный прямолинейный проводник с круглым поперечным сечением радиуса r_* . Материал проводника считаем изотропным, значения μ , ϵ и σ постоянными, а $\rho_e \equiv 0$. По проводнику проходит переменный ток с угловой частотой ω и амплитудой колебаний I_0 .

В цилиндрической системе координат $O\varphi z$ с осью Oz , направленной вдоль оси проводника, в силу осевой симметрии проводника и равноценности любого его поперечного сечения вектор \mathbf{E} напряженности электрического поля зависит лишь от времени t и радиальной координаты r . Этот вектор параллелен оси Oz , т.е. имеет лишь одну отличную от нуля проекцию E_z на эту ось. Действительно, четвертое уравнение (6.2) при $\rho_e \equiv 0$ в силу независимости \mathbf{E} от φ и z примет вид

$$\nabla \mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0 \nabla \mathbf{E} = \frac{\epsilon\epsilon_0}{r} \frac{d(r\mathbf{E}_r)}{dr} = 0.$$

Отсюда для проекции E_r вектора \mathbf{E} на радиальное направление находим $E_r = C_r/r$. Но модуль вектора \mathbf{E} конечен. Поэтому $C_r = 0$ и $E_r \equiv 0$. Электрическое поле является потенциальным [XIII], т.е. $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$, так что для проекции левой части этого равенства на ось Oz получим

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r} = 0.$$

Следовательно, и $E_\varphi \equiv 0$. В итоге вместо (6.3) в данном случае для проекции вектора \mathbf{j} плотности тока на ось Oz можно

записать

$$j_z(t, r) = \sigma E_z(t, r), \quad (6.5)$$

а две остальные проекции этого вектора равны нулю.

Представляя оператор Лапласа в (6.4) для осесимметричного плоского поля [VII], получаем, что искомая функция $E_z(t, r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 E_z(t, r)}{\partial t^2} + b \frac{\partial E_z(t, r)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z(t, r)}{\partial r} \right). \quad (6.6)$$

Гармонические колебания с угловой частотой ω силы тока в проводнике вызовут в случае *установившегося процесса* аналогичные колебания напряженности электрического поля и плотности тока. Поэтому, учитывая (6.5), можно использовать *комплексное представление* искомой функции в виде

$$E_z(t, r) = \frac{j_z(t, r)}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \operatorname{Re}(\hat{j}(r)e^{i\omega t}), \quad (6.7)$$

где $\hat{j}(r)$ — зависящая только от r *комплексная амплитуда* колебаний плотности тока, $\operatorname{Re} \zeta$ — действительная часть комплексного числа ζ , а $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. Линейные операции над действительной частью комплексной функции можно заменить этими операциями непосредственно над комплексной функцией с последующим выделением действительной части полученного результата. Это возможно благодаря коммутативности операций сложения, умножения на число, дифференцирования и интегрирования комплексных функций относительно операции Re . Подставляя (6.7) в (6.6), получаем

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\hat{j}(r)}{dr} \right) + h^2 \hat{j}(r) = 0, \quad h = \frac{\omega}{a} \sqrt{1 + i \frac{a^2 b}{\omega}}. \quad (6.8)$$

Можно убедиться, что функция $\hat{j}(r) = C_0 J_0(hr)$, где $C_0 = \text{const}$, а $J_0(hr)$ — функция Бесселя* I рода нулевого порядка [XI], удовлетворяет (6.8). Действительно, учитывая, что

* Ф.В. Бессель (1784–1846) — немецкий астроном и математик.

$\frac{dJ_0(z)}{dz} = -J_1(z)$ и $\frac{d(zJ_1(z))}{dz} = zJ_0(z)$, где $J_1(z)$ — функция Бесселя I рода первого порядка от аргумента z , получаем

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dJ_0(hr)}{dr} \right) = -\frac{1}{r} \frac{d(hrJ_1(hr))}{dr} = -h^2 J_0(hr).$$

Константу C_0 найдем из условия

$$\begin{aligned} \hat{I} &= 2\pi \int_0^{r_*} \hat{j}(r) r dr = 2\pi C_0 \int_0^{r_*} J_0(hr) r dr = \\ &= \frac{2\pi C_0}{h^2} hr J_1(hr) \Big|_0^{r_*} = \frac{2\pi r_* C_0}{h} J_1(hr_*), \end{aligned} \quad (6.9)$$

где \hat{I} — комплексная амплитуда колебаний силы тока в комплексном представлении $I(t) = \text{Re}(\hat{I}e^{i\omega t})$ закона его изменения. При $I(t) = I_0 \cos \omega t$ имеем $\hat{I} = I_0$ и из (6.9) находим $C_0 = \frac{hI_0}{2\pi r_* J_1(hr_*)}$. Выделив из полученного решения действительную часть, с учетом выражения для C_0 запишем

$$j_z(t, r) = \frac{I_0}{2\pi r_*^2} \text{Re} \left(hr_* \frac{J_0(hr)}{J_1(hr_*)} e^{i\omega t} \right). \quad (6.10)$$

При $\omega \rightarrow 0$ имеем $h \rightarrow 0$, $J_0(hr) \rightarrow 1$ и $\frac{hr_*}{J_1(hr_*)} \rightarrow 2$. Поэтому из (6.10) получим, что в случае постоянного тока силой I_0 его плотность по сечению проводника постоянна и равна средней плотности $j_0 = \frac{I_0}{\pi r_*^2}$. С увеличением угловой частоты ω возникает неравномерное распределение плотности в поперечном сечении проводника.

Для металлического проводника допустимо пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости [XII], т.е. принять $\epsilon \rightarrow 0$. Тогда в (6.10) $hr_* \rightarrow \sqrt{i\omega br_*^2} = \sqrt{i\omega \sigma \mu_0 r_*^2} = \sqrt{i\bar{\omega}} = \xi$, где $\bar{\omega} = \omega \sigma \mu_0 r_*^2$. Если в разложении бесселевых

функций в ряд [XI]

$$J_\nu(\xi) = \left(\frac{\xi}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\xi^2/4)^k}{k!(\nu+k)!}, \quad |\arg z| < \pi, \quad \nu \in \mathbb{N},$$

ограничиться первыми тремя членами, то вместо (6.10) получим

$$\begin{aligned} \frac{j_z(t, r)}{j_0} &= \operatorname{Re} \left(\xi \frac{J_0(\xi \bar{r})}{2J_1(\xi)} e^{i\omega t} \right) \approx \operatorname{Re} \left(\xi \frac{\left(1 - \frac{1}{4}(\xi \bar{r})^2 + \frac{1}{64}(\xi \bar{r})^4\right) e^{i\omega t}}{2 \frac{\xi}{2} \left(1 - \frac{\xi^2}{8} + \frac{\xi^4}{192}\right)} \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{\left(1 - \frac{(\xi \bar{r})^2}{4} + \frac{(\xi \bar{r})^4}{64}\right) \left(1 + \frac{\xi^2}{8} + \frac{\xi^4}{192}\right) e^{i\omega t}}{\left(1 + \frac{\xi^4}{192}\right)^2 - \frac{\xi^4}{64}} \right). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом формулы Эйлера [X] следует, что $\frac{j_z(t, r)}{j_0} \approx \approx C(\bar{\omega}, \bar{r}) \cos \omega t + S(\bar{\omega}, \bar{r}) \sin \omega t$, где $\bar{r} = r/r_* \leq 1$ и

$$\begin{aligned} C(\bar{\omega}, \bar{r}) &= \frac{1 - \frac{\bar{\omega}^2}{192}(1 - 6\bar{r}^2 + 3\bar{r}^4) + \frac{\bar{\omega}^4}{12288}\bar{r}^4}{\left(1 - \frac{\bar{\omega}^2}{192}\right)^2 + \frac{\bar{\omega}^2}{64}}, \\ S(\bar{\omega}, \bar{r}) &= \bar{\omega} \frac{\frac{\bar{r}^2}{4} - \frac{1}{8} + \bar{\omega}^2 \left(\frac{\bar{r}^4}{512} - \frac{\bar{r}^2}{768}\right)}{\left(1 - \frac{\bar{\omega}^2}{192}\right)^2 + \frac{\bar{\omega}^2}{64}}. \end{aligned}$$

Тогда для амплитуды колебаний величины $\frac{j_z(t, r)}{j_0}$ получим приближенную зависимость $A_j(\bar{\omega}, \bar{r}) \approx \sqrt{C^2(\bar{\omega}, \bar{r}) + S^2(\bar{\omega}, \bar{r})}$, для различных значений $\bar{\omega}$ представленную на рис. 6.1 сплошными линиями. Если в выражении для $A_j(\bar{\omega}, \bar{r})$ оставить слагаемые, содержащие параметр $\bar{\omega}$ в степени не выше второй, то получим

$$A_j(\bar{\omega}, \bar{r}) \approx 1 - \frac{\bar{\omega}^2}{384} + \frac{\bar{\omega}^2 \bar{r}^4}{64}. \quad (6.11)$$

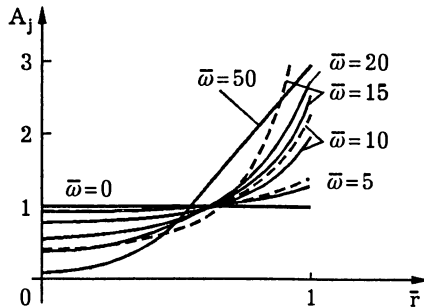


Рис. 6.1

Зависимость (6.11) представлена на рис. 6.1 штриховыми линиями, из сравнения которых со сплошными линиями следует, что (6.11) сохраняет достаточную точность при $\bar{\omega} \leq 5$.

Когда отношение $\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}$ имеет порядок единицы, токи проводимости и смещения сопоставимы [XII]. Тогда подстановка в (6.10) h , определенного в (6.9), дает равенство

$$\frac{j_z(t, r)}{j_0} = \frac{\omega r_*}{2a} \operatorname{Re} \left(\sqrt{1 + \frac{ia^2b}{\omega}} \frac{J_0 \left(\sqrt{1 + \frac{ia^2b}{\omega}} \frac{\omega r}{a} \right)}{J_1 \left(\sqrt{1 + \frac{ia^2b}{\omega}} \frac{\omega r_*}{a} \right)} e^{i\omega t} \right).$$

При достаточно большом значении угловой частоты ω имеем $\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega} \ll 1$, что соответствует ситуации, когда током проводимости можно пренебречь по сравнению с током смещения [XII]. В этом случае вместо телеграфного уравнения (6.4) допустимо рассматривать волновое уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u$.

Используем (6.11) для оценки активного сопротивления металлического проводника длиной l . Среднее за период $T = \frac{2\pi}{\omega}$ колебаний силы переменного тока значение мощности выделения джоулевой теплоты при однородном распределении плотности тока в поперечном сечении проводника пропорционально квадрату амплитуды колебаний силы тока и вдвое меньше максимального мгновенного значения этой мощности (см. 3.1).

Такое же соотношение верно и для средней мощности, приходящейся на единицу объема проводника при неравномерном распределении плотности тока. Поэтому отношение сопротивления R проводника при $\omega > 0$ к его сопротивлению $R_0 = \frac{l}{\pi r_*^2 \sigma}$ при $\omega = 0$ можно представить отношением среднего значения квадрата амплитуды плотности тока при $\omega > 0$ к j_0^2 , т.е.

$$\begin{aligned} \frac{R}{R_0} &= \frac{2\pi}{\pi r_*^2 j_0^2} \int_0^{r_*} (A(\bar{\omega}, \bar{r}) j_0)^2 r dr \approx 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{\bar{\omega}^2}{384} + \frac{\bar{\omega}^2 \bar{r}^4}{64}\right)^2 \bar{r} d\bar{r} = \\ &= \left(1 - \frac{\bar{\omega}^2}{384}\right)^2 + \frac{\bar{\omega}^2}{96} + \frac{2\bar{\omega}^4}{(192)^2} = 1 + \frac{\bar{\omega}^2}{192} + \frac{\bar{\omega}^4}{12288}. \end{aligned}$$

Пренебрегая слагаемым с $\bar{\omega}^4$, получаем оценку $\frac{R}{R_0} \approx 1 + \frac{1}{192} \bar{\omega}^2$. Отсюда следует, что активное сопротивление проводника можно считать равным R_0 при условии $\bar{\omega} \ll 192$, или $\omega \ll \frac{192}{\sigma \mu \mu_0 r_*^2}$.

Можно показать*, что индуктивность металлического проводника, обусловленная изменением магнитного поля внутри него, равна $L_{\text{вн}} = \frac{R_0}{2\omega} \text{Im} \frac{\xi J_0(\xi)}{J_1(\xi)}$, где $\text{Im} \zeta$ — мнимая часть комплексного числа ζ . Ограничиваясь в разложении в ряд бесселевых функций первыми тремя членами, получаем

$$L_{\text{вн}} \approx \frac{R_0 \bar{\omega}}{8\omega} \frac{1 - \omega^2/192}{(1 - \bar{\omega}^2/192)^2 + \bar{\omega}^2/64} \approx \frac{\mu \mu_0 l}{8\pi} \left(1 - \frac{\bar{\omega}^2}{96}\right).$$

Отметим, что при $\bar{\omega} = 0$ значение $L_{\text{вн}} = \frac{\mu \mu_0 l}{8\pi}$ совпадает с полученным в примере 6.1 в предположении однородного распределения плотности тока в поперечном сечении проводника. При больших значениях $\bar{\omega}$ имеем $\frac{R}{R_0} = \frac{\omega L_{\text{вн}}}{R_0} \approx \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{8}}$.

Таким образом, поверхностный эффект связан с повышением активного и индуктивного сопротивлений проводника по мере увеличения угловой частоты переменного тока.

* См.: Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.

Пример 6.3. Исследуем поведение конденсатора при увеличении угловой частоты ω гармонических колебаний разности $\Delta U(t)$ потенциалов на его обкладках. Примем, что обкладки являются хорошо проводящими длинными параллельными листами шириной $2B$, расположенными с зазором h (рис. 6.2). Если к обкладкам подвести постоянную разность потенциалов ΔU_0 , то в слое диэлектрика между обкладками возникнет электрическое поле. Можно считать, что всюду, кроме небольшой зоны у края обкладок, модуль вектора \mathbf{E} напряженности этого поля постоянен и равен $E_0 = \Delta U_0/h$, а сам вектор перпендикулярен обкладкам [X].

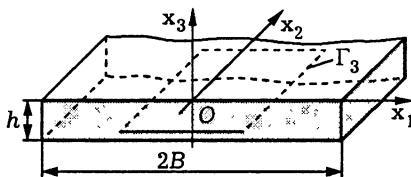


Рис. 6.2

При гармонических колебаниях разности потенциалов электрический заряд на обкладках периодически изменяет знак и абсолютную величину. Это приводит к изменению модуля и направления вектора \mathbf{E} и к возникновению в диэлектрике переменного магнитного поля, характеризуемого вектором напряженности \mathbf{H} . Электрическая проводимость σ диэлектрика ничтожно мала, и можно принять $\sigma = 0$. Тогда каждая из проекций E_k и H_k этих векторов на координатные оси x_k , $k = 1, 2, 3$, декартовой прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$ вместо телеграфного уравнения (6.4) удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla^2 u, \quad a = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (6.12)$$

в котором любая из таких проекций по-прежнему обозначена через u , а ϵ и μ — соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости диэлектрика, полагаемые постоянными.

Если $h \ll 2B$ и обкладки достаточно длинные, то можно считать, что векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} зависят лишь от времени t и координаты x_1 , отсчитываемой по ширине обкладок от их середины (см. рис. 6.2). Принимая вектор \mathbf{E} перпендикулярным обкладкам, получаем для него лишь одну тождественно не равную нулю проекцию $E_3(t, x_1)$, удовлетворяющую уравнению (6.12) в виде

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 E_3(t, x_1)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_3(t, x_1)}{\partial x_1^2}. \quad (6.13)$$

В случае установившегося процесса $E_3(t, x_1) = E(x_1) \sin \omega t$, где $E(x_1)$ — зависящая от x_1 амплитуда гармонических колебаний напряженности электрического поля. В итоге вместо (6.13) получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 E(x_1)}{dx_1^2} + \frac{\omega^2}{a^2} E(x_1) = 0,$$

решением которого с учетом симметрии относительно координатной плоскости $x_2 O x_3$ является функция [VIII] $E(x_1) = C_0 \cos \frac{\omega x_1}{a}$, где $C_0 = \text{const}$. Если $\Delta U(t) \rightarrow \Delta U_0$ при $\omega \rightarrow 0$, то $E(x_1) \rightarrow C_0 = E_0 = \frac{\Delta U_0}{h}$. Таким образом,

$$E_3(t, x_1) = E_0 \sin(\omega t) \cos \frac{\omega x_1}{a}. \quad (6.14)$$

Из второго уравнения (6.2) следует, что $\frac{\partial B_1}{\partial x_1} = 0$, т.е. проекция $B_1 = \mu \mu_0 H_1$ вектора \mathbf{B} не зависит и от координаты x_1 , а может зависеть лишь от времени t . Аналогичный вывод в отношении проекции B_3 этого вектора следует из проекции третьего уравнения (6.2) на ось Ox_2 . Действительно, при $D_2 = \varepsilon \varepsilon_0 E_2 = 0$ и $j_2 = 0$ с учетом представления операции ротора в прямоугольной системе координат [VII] имеем $\frac{\partial H_1}{\partial x_3} - \frac{\partial H_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial H_3}{\partial x_1} = 0$ и отсюда $\frac{\partial B_3}{\partial x_1} = 0$. Но проекция B_3 не может зависеть от времени, поскольку тогда изменялся бы во времени

поток вектора \mathbf{B} через любой плоский контур Γ_3 в диэлектрике, параллельный обкладкам конденсатора (см. рис. 6.2). Это в соответствии с интегральной формой уравнений Максвелла [XIII] привело бы к отличной от нуля циркуляции вектора \mathbf{E} по такому контуру, что противоречит принятому допущению $E_1 = E_2 \equiv 0$. Таким образом, $B_3 = \text{const}$. Аналогично $B_1 = \text{const}$, так как поток вектора \mathbf{B} через любой плоский контур в диэлектрике, перпендикулярный оси Ox_1 , не изменяется во времени в силу равенства нулю циркуляции вектора \mathbf{E} по этому контуру.

Проектируя третье уравнение (6.2) на ось Ox_3 и учитывая (6.14), при $D_3 = \varepsilon\varepsilon_0 E_3$ и $j_3 = 0$ получаем

$$\frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} = \frac{\partial H_2(t, x_1)}{\partial x_1} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_3}{\partial t} = \varepsilon\varepsilon_0 \omega E_0 \cos(\omega t) \cos \frac{\omega x_1}{a}.$$

После интегрирования находим

$$H_2(t, x_1) = \varepsilon\varepsilon_0 a E_0 \cos(\omega t) \sin \frac{\omega x_1}{a} + f(t),$$

где $f(t)$ — некоторая функция времени. Интегрированием H_2 по площади S_2 , охватываемой любым прямоугольным контуром Γ_2 в диэлектрике, перпендикулярным оси Ox_2 и симметричным относительно оси Ox_3 , вычислим поток вектора \mathbf{B} через этот контур, пропорциональный $f(t)S_2$. Но циркуляция вектора \mathbf{E} по такому контуру равна нулю, так что в соответствии с интегральной формой уравнений Максвелла $S_2 \frac{df(t)}{dt} \equiv 0$, т.е. $f(t) \equiv \text{const}$. При $\omega = 0$ электрическое поле конденсатора постоянно и магнитное поле отсутствует. Поэтому $f(t) \equiv 0$ и

$$H_2(t, x_1) = \varepsilon\varepsilon_0 a E_0 \cos(\omega t) \sin \frac{\omega x_1}{a}. \quad (6.15)$$

Из (6.14) следует, что при угловой частоте $\omega_1 = \frac{\pi a}{2B}$ напряженность электрического поля у края обкладок (при $x_1 = \pm B$) обращается в нуль, а при $\omega = 2\omega_1$ принимает значение, равное, но противоположное по знаку значению в их середине (при $x_1 = 0$). Это означает, что в первом случае максимальное значение

энергии электрического поля конденсатора вдвое меньше, чем при постоянном значении напряженности, равном E_0 . Действительно, максимальное значение объемной плотности энергии электрического поля равно $\frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2(x_1) = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 \frac{\omega x_1}{a}$. Интегрируя по ширине обкладок, получаем энергию электрического поля, приходящуюся на единицу длины конденсатора:

$$\mathcal{E}_e(\omega) = 2h \int_0^B \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} E_0^2 \cos^2 \frac{\omega x_1}{a} dx_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 h B}{2} E_0^2 \left(1 + \frac{a}{2\omega B} \sin \frac{2\omega B}{a}\right).$$

Отсюда находим $\mathcal{E}_e(\omega_1) = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 h B E_0^2$, тогда как при постоянном значении напряженности, равном E_0 , $\mathcal{E}_e(0) = \varepsilon\varepsilon_0 h B E_0^2$.

При постоянной разности ΔU_0 потенциалов на обкладках емкость конденсатора, приходящаяся на единицу его длины, равна $C(0) = 2 \frac{\mathcal{E}_e(0)}{(\Delta U_0)^2} = 2\varepsilon\varepsilon_0 \frac{B}{h}$ (см. 3.1). Гармонические колебания этой разности приведут к зависимости

$$C(\omega) = \frac{2\mathcal{E}_e(\omega)}{(\Delta U_0)^2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 B}{h} \left(1 + \frac{a}{2\omega B} \sin \frac{2\omega B}{a}\right) \leq C(0), \quad (6.16)$$

так как $\frac{a}{2\omega B} \sin \frac{2\omega B}{a} \leq 1$. При этом изменение разности потенциалов по закону $\Delta U(t) = \Delta U_0 \sin \omega t$ приводит к возникновению в цепи, внешней по отношению к конденсатору, переменного тока (см. 3.1) силой

$$I(t) = C(\omega) \frac{d(\Delta U)}{dt} = \omega C(\omega) \Delta U_0 \cos \omega t,$$

максимальное значение которой с учетом (6.16) равно

$$I(\omega) = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 B}{h} \omega \Delta U_0 \left(1 + \frac{a}{2\omega B} \sin \frac{2\omega B}{a}\right). \quad (6.17)$$

Наличие магнитного поля в диэлектрике означает возникновение некоторой индуктивности $L(\omega)$, приходящейся на единицу длины конденсатора. Это приводит к эквивалентной схеме рассматриваемого конденсатора, выделенной на рис. 6.3 штриховой линией и состоящей из параллельно соединенных кон-

денсатора емкостью $C(\omega)$, к обкладкам которого приложена изменяющаяся по закону $\Delta U(t) = \Delta U_0 \sin \omega t$ разность потенциалов, и катушки индуктивностью $L(\omega)$, через которую проходит переменный ток $I(t)$ с максимальным значением $I(\omega)$.

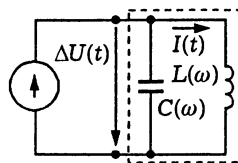


Рис. 6.3

При постоянной силе I_0 тока энергия $\mathcal{E}_m(0)$ магнитного поля соответствует индуктивности $L(0) = 2 \frac{\mathcal{E}_m(0)}{I_0^2}$ (см. 3.1). Аналогично $L(\omega) = 2 \frac{\mathcal{E}_{\max}(\omega)}{I^2(\omega)}$, где $\mathcal{E}_{\max}(\omega)$ — максимальное значение энергии магнитного поля в диэлектрике, приходящейся на единицу длины конденсатора. Максимальное значение объемной плотности энергии магнитного поля в диэлектрике при $t = 0$ с учетом (6.15) равно $\frac{1}{2} \mu \mu_0 H_2^2(0, x_1) = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2 \frac{\omega x_1}{a}$. Тогда, учитывая (6.17), находим

$$\mathcal{E}_{\max}(\omega) = 2h \int_0^B \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{2} E_0^2 \sin^2 \frac{\omega x_1}{a} dx_1 = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 h B}{2} E_0^2 \left(1 - \frac{a}{2\omega B} \sin \frac{2\omega B}{a} \right),$$

$$L(\omega) = \frac{2\mathcal{E}_{\max}(\omega)}{I^2(\omega)} = \frac{h}{\varepsilon \varepsilon_0 B \omega^2} \frac{1 - \frac{a}{2\omega B} \sin \frac{2\omega B}{a}}{\left(1 + \frac{a}{2\omega B} \sin \frac{2\omega B}{a} \right)^2}.$$

Итак, комплексное сопротивление, приходящееся на единицу длины рассматриваемого конденсатора, равно $Z(\omega) = i\omega L(\omega) - \frac{i}{\omega C(\omega)}$, где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. #

Рассмотренное в примере 6.3 взаимодействие переменных электрического и магнитного полей характерно для многих технических устройств. В частности, ММ такого взаимодействия лежат в основе теории волноводов и резонаторов, применяемых в радиотехнике*.

* См.: Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.; Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.

6.2. Одномерные модели стационарной теплопроводности

Математическое моделирование процессов теплопроводности в элементах конструкций и технологическом оборудовании широко применяют при проектировании и исследовании *технических объектов* в различных отраслях техники (см. 1.1). Построению *математических моделей* (ММ) *микроуровня* процессов теплопроводности посвящена обширная учебная и научная литература*. Методам построения и количественного анализа *многомерных математических моделей* стационарной и нестационарной теплопроводности значительное внимание уделено и в [XII], [XIII]. Решение задачи оптимального проектирования *оребрённой конструкции теплообменника* с использованием *одномерной и двумерной математических моделей* стационарной теплопроводности приведено в [XIV]. Одномерные *линейная и нелинейная математические модели* стационарной теплопроводности использованы в 3.3 для нахождения *термического сопротивления* элементов конструкции с криволинейной поверхностью. Приведем еще ряд характерных примеров.

Пример 6.4. При интенсивном теплообмене с высокотемпературной средой повышение термического сопротивления слоя теплоизоляционного материала, обусловленное стремлением защитить конструкцию от теплового воздействия этой среды, приводит к возрастанию температуры T_h поверхности теплообмена. Это вызывает опасность выхода из строя теплоизоляционного материала. Использование пористого теплоизоляционного материала, через поры которого навстречу тепловому потоку подается охлаждающий газ или жидкость, часто позволяет решить проблему тепловой защиты поверхности конструкции с заданной температурой T_0 . Построим *стационарную математическую модель*, отражающую влияние

*См.: Лыков А.В.; Карташов Э.М.; Карслоу Г., Егер Д.

охлаждающей жидкости (газа) на термическое сопротивление плоского слоя пористого теплоизоляционного материала толщиной h (рис. 6.4).

Температуру жидкости в произвольном сечении слоя с координатой z в силу ее интенсивного теплообмена со „скелетом“ пористого теплоизоляционного материала можно считать практически совпадающей с температурой $T(z)$ „скелета“ в этом сечении. Тогда для части слоя между этим сечением и защищаемой конструкцией ($z = 0$) при установившемся процессе теплообмена справедливо уравнение теплового баланса в виде

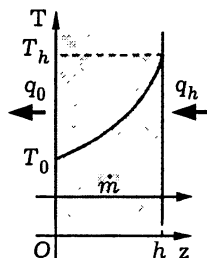


Рис. 6.4

$$\lambda \frac{dT(z)}{dz} - q_0 = \dot{m} \int_{T_0}^{T(z)} c_{ж}(T) dT, \quad (6.18)$$

где $\lambda = p\lambda_{ж} + (1-p)\lambda_*$ — коэффициент теплопроводности пористого теплоизоляционного материала, заполненного жидкостью ($\lambda_{ж}$ и λ_* — коэффициенты теплопроводности жидкости и „скелета“ с пористостью p соответственно); q_0 — плотность теплового потока, воспринимаемого конструкцией; \dot{m} и $c_{ж}(T)$ — удельный массовый расход жидкости и ее удельная массовая теплоемкость, зависящая в общем случае от температуры.

После интегрирования (6.18) получим

$$z = \int_{T_0}^{T(z)} \frac{\lambda dT}{q_0 + \dot{m} \int_{T_0}^T c_{ж}(T') dT'}. \quad (6.19)$$

Значение q_0 можно найти при помощи граничного условия на поверхности теплообмена теплоизоляционного материала с

высокотемпературной средой ($z = h$): $T(h) = T_h$, т.е.

$$h = \int_{T_0}^{T_h} \frac{\lambda dT}{q_0 + \dot{m} \int_{T_0}^T c_{ж}(T') dT'}. \quad (6.20)$$

При этом плотность теплового потока, поступающего от среды в теплоизоляционный материал, равна

$$q_h = \lambda \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=h} = q_0 + \dot{m} \int_{T_0}^{T_h} c_{ж}(T) dT. \quad (6.21)$$

Если λ и $c_{ж}$ допустимо считать независимыми от температуры, то из (6.20) и (6.21) следует

$$q_0 = \dot{m} c_{ж} \frac{T_h - T_0}{e^{m'h} - 1}, \quad q_h = \dot{m} c_{ж} \frac{T_h - T_0}{e^{m'h} - 1} e^{m'h},$$

причем $q_h - q_0 = \dot{m} c_{ж} (T_h - T_0)$, а из (6.19) — известная формула для распределения температуры по толщине плоской пористой стенки*

$$T(z) = T_0 + (T_h - T_0) \frac{e^{m'z} - 1}{e^{m'h} - 1}, \quad m' = \frac{\dot{m} c_{ж}}{\lambda}.$$

Проходящая через слой пористого теплоизоляционного материала жидкость как бы запирает тепловой поток, в результате чего повышается отнесенное к значению q_0 термическое сопротивление этого слоя

$$R_{\tau} = \frac{T_h - T_0}{q_0} = \frac{e^{m'h} - 1}{\dot{m} c_{ж}}$$

по сравнению с термическим сопротивлением $R_{\tau}^{\circ} = \frac{T_h - T_0}{q_0} = \frac{h}{\lambda}$ плоского слоя теплоизоляционного материала в случае неподвижной жидкости. Отношение $\frac{R_{\tau}}{R_{\tau}^{\circ}} = \frac{e^{m'h} - 1}{m'h}$ неограниченно

*См.: Теория тепломассообмена.

возрастает при увеличении параметра m' . С ростом m' возрастает также плотность q_h теплового потока, воспринимаемого на поверхности теплообмена с высокотемпературной средой. Кроме того, выход жидкости (или газа) в пограничный слой на этой поверхности вызывает перестройку профилей скорости, температуры и концентрации компонентов высокотемпературной среды, что снижает интенсивность конвективного теплообмена*.

Рост параметра m' обычно ограничен допустимым значением расхода \dot{m} жидкости. При ограниченном значении \dot{m} можно добиться дополнительного эффекта выбором такого режима, когда испарение жидкости с соответствующими затратами теплоты происходит внутри слоя теплоизоляционного материала. Это дает возможность увеличить разность $q_h - q_0$, однако не всегда удается стабилизировать положение фронта испарения внутри слоя. #

Построим ММ процесса стационарной теплопроводности в теле с внутренним энерговыделением, причиной которого могут быть прохождение электрического тока, фазовые и химические превращения в материале, поглощение проникающего в материал излучения, ядерные реакции и т.п. Пусть криволинейные поверхности ограничивают в направлении оси Oz слой материала толщиной h с идеально теплоизолированными боковыми гранями (см. рис. 3.13). В этом слое происходит энерговыделение объемной мощностью $q_V(z, T)$, зависящей в общем случае от координаты z и температуры T . Если считать распределение температуры в слое установившимся и одномерным, т.е. $T = T(z)$, то из баланса тепловой энергии получим

$$\lambda(z, T) \frac{dT(z)}{dz} S(z) = -Q_0 - \int_0^z q_V(\zeta, T) S(\zeta) d\zeta, \quad (6.22)$$

*См.: Теория тепломассообмена.

где $\lambda(z, T)$ — коэффициент теплопроводности материала слоя, Q_0 — тепловой поток, проходящий в положительном направлении оси Oz через криволинейный участок поверхности площадью S_0 при $z = 0$ с главными радиусами кривизны r_1' и r_1'' , $S(z) = S_0 \left(1 + \frac{z}{r_1'}\right) \left(1 + \frac{z}{r_1''}\right)$.

Для слоя неоднородного материала с независимыми от температуры величинами λ и q_V интегрированием (6.22) найдем

$$T(z) = T(0) - \int_0^z \left(Q_0 + \int_0^{z'} q_V(\zeta) S(\zeta) d\zeta \right) \frac{dz'}{\lambda(z') S(z')}. \quad (6.23)$$

Отсюда при $z = h$ следует:

$$\begin{aligned} T(h) - T(0) + Q_0 \int_0^h \frac{dz}{\lambda(z) S(z)} = \\ = \int_0^h \left(\int_0^z q_V(\zeta) S(\zeta) d\zeta \right) \frac{dz}{\lambda(z) S(z)}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Из граничных условий обычно известны значения $T(h)$, $T(0)$ или $T(h)$, Q_0 . Тогда из (6.24) можно вычислить Q_0 или $T(0)$ и затем при помощи (6.23) найти распределение $T(z)$ температуры по толщине слоя материала.

В более общем случае могут быть заданы условия теплообмена на поверхностях при $z = 0$ и $z = h$:

$$-\lambda(0) \frac{dT(0)}{dz} = Q_0 = \alpha_0 (T_0 - T(0)), \quad \lambda(h) \frac{dT(h)}{dz} = \alpha_h (T_h - T(h)),$$

где α_0 и α_h — коэффициенты конвективного теплообмена со средами, имеющими температуру T_0 и T_h соответственно. После подстановки в эти равенства выражений для $\lambda(h) \frac{dT(h)}{dz}$ из (6.22) при $z = h$ и для $T(h)$ из (6.24) приходим к СЛАУ

относительно $T(0)$ и Q_0 , решение которой дает необходимые для использования (6.23) значения этих величин.

Для слоя однородного материала при $\lambda = \lambda(T)$ в случае $q_V = q_V(z)$ после интегрирования (6.22) получим

$$\int_{T(0)}^{T(z)} \lambda(T) dT = - \int_0^z \left(Q_0 + \int_0^{z'} q_V(\zeta) S(\zeta) d\zeta \right) \frac{dz'}{S(z')}. \quad (6.25)$$

Это равенство позволяет рассчитать распределение $T(z)$ температуры, если предварительно, аналогично сделанным выкладкам, найти при помощи граничных условий значения $T(0)$ и Q_0 .

Пример 6.5. Объемную мощность энерговыделения за счет поглощения проникающего в слой материала излучения можно представить соотношением*¹, которое следует из закона Бугера*²:

$$q_V(z) = \kappa q_0 \frac{S_0}{S(z)} e^{-\kappa z},$$

где κ — коэффициент поглощения, q_0 — плотность потока излучения, падающего на поверхность при $z = 0$. При этом в слое материала выделяется тепловая энергия мощностью

$$Q = \int_0^h q_V(z) S(z) dz = q_0 S_0 \int_0^h \kappa e^{-\kappa z} dz = q_0 S_0 (1 - e^{-\kappa h}).$$

В частном случае плоского слоя материала, когда $S(z) \equiv S_0 = \text{const}$ и известны температуры $T(0)$ и $T(h)$ поверхностей, из (6.25) при $Q_0 = 0$ несложно получить

$$\int_{T(0)}^{T(z)} \lambda(T) dT = \frac{z}{h} \left(\int_{T(0)}^{T(h)} \lambda(T) dT - \frac{Q}{\kappa S_0} \right) + q_0 \frac{1 - e^{-\kappa z}}{\kappa}. \quad (6.26)$$

*¹См.: Зарубин В.С. (1983 г.)

*²П. Бугер (1698–1758) — французский ученый.

При $\lambda(T) \equiv \lambda = \text{const}$ из (6.26) следует явное выражение для температуры:

$$T(z) = T(0) + \left(T(h) - T(0) - \frac{Q}{\kappa \lambda S_0} \right) \frac{z}{h} + \frac{q_0}{\kappa \lambda} (1 - e^{-\kappa z}).$$

Пример 6.6. Для получения источника с большим значением I силы постоянного электрического тока может быть использован униполярный генератор*. Ротором такого генератора является диск 1, вращающийся

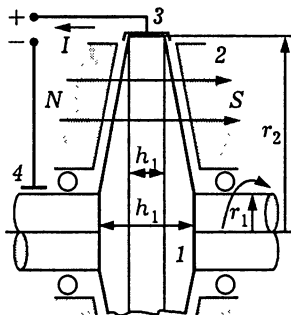


Рис. 6.5

в постоянном магнитном поле, создаваемом статором 2 (рис. 6.5). В результате между центральной частью диска и его периферией возникает разность потенциалов, а электрический ток проходит по диску и передается во внешнюю цепь через токосъемники 3 и 4.

Примем, что плотность j тока в диске зависит лишь от радиальной координаты r и не изменяется по толщине $h(r)$ диска, т.е. $j(r) = \frac{I}{S(r)}$, где $S(r) = 2\pi r h(r)$. Тогда при нахождении установившегося распределения температуры в диске можно использовать расчетную схему стержня с переменным поперечным сечением $S(r)$ и внутренним энерговыделением объемной мощностью $q_V(r) = \frac{j^2(r)}{\sigma}$, где σ — электрическая проводимость материала диска. Примем, что теплообмен на боковых поверхностях диска отсутствует, толщина диска изменяется по закону

$$h(r) = h_1 - (h_2 - h_1) \left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \right)^\beta, \quad \beta \in (0, 1],$$

а температура по толщине постоянна и, значит, установившееся распределение температуры $T(r)$ удовлетворяет уравнению

*См.: Зарубин В.С. (1966 г.)

вида (6.22):

$$\lambda \frac{dT(r)}{dr} = -Q_1 - \int_{r_1}^r q_V(r) S(r) dr, \quad (6.27)$$

где Q_1 — тепловой поток, проходящий от вала в диск через кольцевое сечение шириной h_1 и радиуса r_1 (см. рис. 6.5).

Если в токосъемниках униполярного генератора используют жидкометаллические контакты, то температуру контактирующих поверхностей можно принять равной температуре T_* плавления металла, применяемого в токосъемнике. В этом случае имеем граничные условия $T(r_1) = T(r_2) = T_*$ и после интегрирования (6.27) при постоянных значениях λ и σ , предварительно вычислив

$$Q_1 = I^2 \frac{\vartheta - \bar{r}}{\sigma r_1},$$

где

$$\vartheta = \frac{T(r_1) - T(r_2)}{I^2} \lambda \sigma r_1^2, \quad \bar{r} = \frac{r_1(r_2^\beta - r_1^\beta)}{4\pi\beta(h_1 r_2^\beta - h_2 r_1^\beta)} \ln \frac{r_2^\beta h_1}{r_1^\beta h_2},$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{T(r) - T(r_2)}{I^2} \lambda \sigma r_1^2 = & \vartheta \frac{\ln\left(\left(\frac{r_2}{r}\right)^\beta \frac{h(r)}{h_2}\right)}{\ln\left(\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^\beta \frac{h_1}{h_2}\right)} + \\ & + \frac{2\bar{r}^2}{\ln^2\left(\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^\beta \frac{h_1}{h_2}\right)} \ln \frac{r_2^\beta h(r)}{r^\beta h_2} \ln \frac{r^\beta h_1}{r_1^\beta h(r)}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

При этом через токосъемник 3 (см. рис. 6.5) из диска выходит тепловой поток $Q_2 = \frac{I^2}{\sigma r_1} \left(\frac{\vartheta}{2\bar{r}} + \bar{r}\right)$, а электрическое сопротивление диска равно $2\frac{\bar{r}}{\sigma r_1}$. На рис. 6.6 представлено распределение

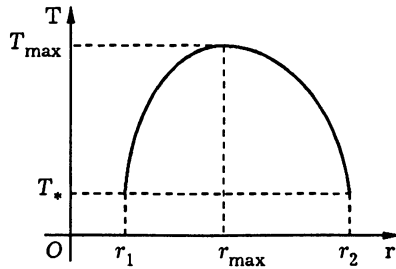


Рис. 6.6

$T(r)$ температуры диска при $I = 10^4$ А, $\sigma = 10^6$ См/м, $T(r_1) = T(r_2) = T_* = 673$ К, $\lambda = 23,2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$, $\beta = 1$, $r_1 = 0,04$ м, $r_2 = 0,2$ м, $h_1 = 0,03$ м, $h_2 = 0,01$ м. Максимального значения $T_{\max} = 833$ К температура достигает при $r_{\max} = 0,11$ м. #

В случае $\lambda = \lambda(T)$, $q_V = q_V(T)$ и плоского слоя материала толщиной h для интегрирования (6.22) можно использовать замену переменного $p = -\lambda(T) \frac{dT(z)}{dz}$. Тогда после предварительного дифференцирования (6.22) по z получим обыкновенное дифференциальное уравнение $p \frac{dp}{dT} + q_V(T) \lambda(T) = 0$ с разделяющимися переменными. Его решение примет вид

$$p = -\lambda(T) \frac{dT(z)}{dz} = \pm \left(C_1 - 2 \int_{T_*}^T q_V(T') \lambda(T') dT' \right)^{1/2}, \quad (6.29)$$

где $C_1 = \text{const}$, T_* — некоторое значение температуры, а выбор знака в правой части (6.29) зависит от направления теплового потока в слое материала. После интегрирования (6.29) получим

$$z = C_2 \mp \int_{T_*}^{T(z)} \frac{\lambda(T) dT}{\left(C_1 - 2 \int_{T_*}^T q_V(T') \lambda(T') dT' \right)^{1/2}}, \quad C_2 = \text{const.}$$

Если на поверхностях слоя материала заданы значения $T(0)$ и $T(h)$, то целесообразно принять $T_* = T(h)$. Тогда $C_2 = h$, а C_1 можно найти из условия $T(z) = T(0)$ при $z = 0$, т.е. из равенства

$$h \mp \int_{T(h)}^{T(0)} \frac{\lambda(T) dT}{\left(C_1 - 2 \int_{T(h)}^T q_V(T') \lambda(T') dT'\right)^{1/2}} = 0. \quad (6.30)$$

Если же поверхность слоя материала при $z = 0$ идеально теплоизолирована, то из (6.29) с учетом $T_* = T(h)$ найдем

$$C_1 = 2 \int_{T(h)}^{T(0)} q_V(T) \lambda(T) dT,$$

а уравнение (6.30) теперь можно использовать для вычисления значения $T(0)$:

$$h = \pm \int_{T(h)}^{T(0)} \frac{\lambda(T) dT}{\left(2 \int_T^{T(0)} q_V(T') \lambda(T') dT'\right)^{1/2}}. \quad (6.31)$$

Это равенство имеет смысл, если $T(0) > T(z) > T(h)$ и $q_V(T) > 0$, либо $T(0) < T(z) < T(h)$ и $q_V(T) < 0$. В первом случае перед интегралом следует выбрать знак плюс, а во втором — знак минус.

Положим $q_V(T) > 0$ и заменим в (6.31) переменное интегрирования: $d\psi = \lambda(T) dT$. Тогда получим

$$h = \int_0^{\psi(0)} \frac{d\psi}{\left(2 \int_{\psi}^{\psi(0)} q_V^*(\psi) d\psi\right)^{1/2}}, \quad \psi(0) = \int_{T(h)}^{T(0)} \lambda(T) dT,$$

где $q_V^*(\psi)$ — зависимость объемной мощности энерговыделения от ψ , получаемая переходом в функции $q_V(T)$ от T к ψ . Если подставить в последнее выражение для h вместо этой зависимости ее линейное приближение $q_V^*(0) + \psi \frac{dq_V^*(0)}{d\psi}$, то после интегрирования придем к равенству

$$\psi(0) = q^*(0)h^2 \frac{\sec \sqrt{\gamma} - 1}{\gamma}, \quad (6.32)$$

где $\gamma = h^2 \frac{dq_V^*(0)}{d\psi}$. При $\gamma \rightarrow \pi^2/4$ правая часть (6.32) неограниченно возрастает. Таким образом, установившееся распределение температуры в плоском слое материала возможно при условии $\frac{dq_V^*(0)}{d\psi} < \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{h}\right)^2$, или

$$\frac{dq_V(T(h))}{dT} < \frac{\pi^2 \lambda(T(h))}{4h^2}. \quad (6.33)$$

Нарушение этого условия соответствует явлению теплового взрыва, когда малые приращения температуры вызывают рост выделения в слое материала тепловой энергии, которая уже не может быть отведена путем теплопроводности к поверхности с температурой $T(h)$ без дальнейшего увеличения температуры.

Если условие (6.33) выполнено, то в линейном приближении зависимости $q_V^*(\psi)$ от ψ решение для рассматриваемого слоя материала принимает вид

$$\psi(z) = \int_{T(0)}^{T(z)} \lambda(T) dT = q_V(T(h)) \frac{h^2}{\gamma} \left(\frac{\cos \sqrt{\gamma} z/h}{\cos \sqrt{\gamma}} - 1 \right). \quad (6.34)$$

Отсюда как частный случай при $\gamma = 0$ предельным переходом можно получить $\psi(z) = q_V(T(h)) \frac{h^2 - z^2}{2}$. При $\gamma < 0$ аргумент косинусов в (6.34) становится чисто мнимым и их следует заменить гиперболическими косинусами.

6.3. Математические модели процессов нестационарной теплопроводности

Ограничимся, как и выше (см. 6.2), рассмотрением *одномерных математических моделей (ММ) микроуровня*, но применительно к процессам нестационарной теплопроводности.

Пример 6.7. Пусть плоская стенка толщиной h разделяет две среды, имеющие постоянные температуры T_1 и T_2 . Длину и ширину стенки считаем достаточно большими по сравнению с h , так что переменное во времени t распределение $T(t, z)$ температуры в стенке можно считать одномерным, причем начало отсчета координаты z поместим на поверхности стенки со стороны среды температурой T_1 (рис. 6.7). Интенсивность конвективного теплообмена на поверхностях стенки определяют коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 соответственно. Кроме того, поверхность стенки при $z = h$ воспринимает от внешних источников излучения *тепловой поток* плотностью q .

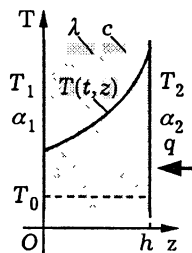


Рис. 6.7

При постоянных значениях объемной теплоемкости c и коэффициента теплопроводности λ материала стенки функция $T(t, z)$ должна удовлетворять одномерному уравнению теплопроводности [XII]

$$\frac{\partial T(t, z)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(t, z)}{\partial z^2}, \quad t > 0, \quad z \in (0, h), \quad (6.35)$$

где $a = \lambda/c$ — коэффициент температуропроводности, и граничным условиям

$$\begin{cases} \lambda \frac{\partial T(t, 0)}{\partial z} = \alpha_1 (T(t, 0) - T_1), \\ \lambda \frac{\partial T(t, h)}{\partial z} = \alpha_2 (T_2 - T(t, h)) + q. \end{cases} \quad (6.36)$$

В (6.36) и далее значение аргумента при записи производной функции указывает, что производная вычислена при этом значении, например $\frac{\partial T(t,0)}{\partial z} = \frac{\partial T(t,z)}{\partial z} \Big|_{z=0}$. В качестве начального условия примем $T(0,z) = T_0 = \text{const}$.

Для решения сформулированной краевой задачи целесообразно использовать интегральное преобразование Лапласа [XI] по переменному t :

$$\tilde{T}(p,z) = \int_0^{\infty} T(t,z) e^{-pt} dt, \quad (6.37)$$

где $\tilde{T}(p,z)$ — изображение по Лапласу, зависящее от z и параметра p , в общем случае комплексного, т.е. $p \in \mathbb{C}$. Применив (6.37) с учетом начального условия к (6.35) и (6.36), получим ОДУ

$$a \frac{d^2 \tilde{T}(p,z)}{dz^2} - p \tilde{T}(p,z) = -T_0, \quad z \in (0, h), \quad (6.38)$$

относительно изображения $\tilde{T}(p,z)$ с граничными условиями

$$\lambda \frac{d\tilde{T}(p,0)}{dz} = \alpha_1 \left(\tilde{T}(t,0) - \frac{T_c}{p} \right), \quad \lambda \frac{d\tilde{T}(p,h)}{dz} = \alpha_2 \left(\frac{T_2^*}{p} - \tilde{T}(t,h) \right),$$

где $T_2^* = T_2 + q/\alpha_2$ — приведенная температура среды.

После подстановки в граничные условия решения $\tilde{T}(p,z) = \frac{T_0}{p} + C_1 \text{sh} \sqrt{\frac{p}{a}} z + C_2 \text{ch} \sqrt{\frac{p}{a}} z$ ОДУ (6.38) и нахождения постоянных C_1 и C_2 запишем

$$\begin{aligned} \tilde{T}(p,z) = & \frac{T_0}{p} + \text{Bi}_1 \frac{\text{Bi}_2(T_2^* - T_0) - (T_1 - T_0)(\text{Bi}_2 \text{ch} \zeta + \zeta \text{sh} \zeta)}{pZ(\zeta)} \frac{\text{sh} \zeta \bar{z}}{\zeta} + \\ & + \frac{\text{Bi}_2(T_2^* - T_0) + \text{Bi}_1(T_1 - T_0) \left(\text{ch} \zeta + \frac{\text{Bi}_2}{\zeta} \text{sh} \zeta \right)}{pZ(\zeta)} \text{ch} \zeta \bar{z}, \quad (6.39) \end{aligned}$$

где $Bi_1 = \frac{\alpha_1 h}{\lambda}$, $Bi_2 = \frac{\alpha_2 h}{\lambda}$ — критерии Био, характеризующие отношения термического сопротивления h/λ стенки к термическим сопротивлениям $\frac{1}{\alpha_1}$ и $\frac{1}{\alpha_2}$ теплоотдачи, $\zeta = \sqrt{\frac{p}{a}} h$, $\bar{z} = \frac{z}{h}$, $Z(\zeta) = (Bi_1 + Bi_2) \operatorname{ch} \zeta + \left(\frac{Bi_1 Bi_2}{\zeta} + \zeta \right) \operatorname{sh} \zeta$.

Функция $\tilde{T}(p, z)$ удовлетворяет условиям третьей теоремы разложения [XI], так что ей соответствует оригинал в виде суммы вычетов этой функции в ее полюсах:

$$T(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Res}_{p=p_n} (\tilde{T}(p, z) e^{pt}). \quad (6.40)$$

Полюсами функции $\tilde{T}(p, z)$ комплексного переменного p являются $p_0 = 0$ и $p_n = \frac{\zeta_n^2 \tilde{a}}{h^2}$, $n \in \mathbb{N}$, где ζ_n — корни уравнения $Z(\zeta) = 0$. Ясно, что у этого уравнения нет действительных корней. Обозначая $\mu^2 = -\zeta^2$, т.е. $\mu = i\zeta$, где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, приходим к трансцендентному уравнению

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{\mu - \frac{Bi_1 Bi_2}{\mu}}{Bi_1 + Bi_2}, \quad (6.41)$$

имеющему счетное множество простых корней $\mu_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ (на рис. 6.8 представлены графики функций $\operatorname{ctg} \mu$ и $f(\mu) =$

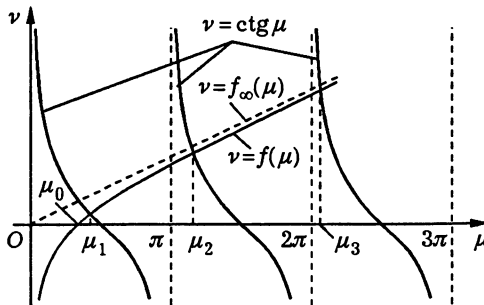


Рис. 6.8

$= \frac{\mu - \text{Bi}_1 \text{Bi}_2 / \mu}{\text{Bi}_1 + \text{Bi}_2}$, причем $\mu^\circ = \sqrt{\text{Bi}_1 \text{Bi}_2}$, а штриховой линией отмечена наклонная асимптота $f_\infty(\mu) = \frac{\mu}{\text{Bi}_1 + \text{Bi}_2}$ графика функции $f(\mu)$. Так как функции в обеих частях (6.41) нечетные, то $-\mu_n$ также является корнем этого уравнения, но не изменяет соответствующего значения p_n . Поэтому достаточно рассматривать лишь неотрицательные корни уравнения (6.99). Можно показать, что они соответствуют простым нулям знаменателя функции $\tilde{T}(p, z)$.

Полюсы p_n (включая $p_0 = 0$) функции $\tilde{T}(p, z) e^{pt}$ простые, вычет этой функции в каждом полюсе p_n можно вычислить по формуле [X]

$$\text{Res}_{p=p_n} \tilde{T}(p, z) e^{pt} = \frac{\varphi(p_n, z)}{\left. \frac{d\psi(p)}{dp} \right|_{p=p_n}}, \quad (6.42)$$

где $\varphi(p, z)$ и $\psi(p, z)$ — аналитические функции, отношение которых $\frac{\varphi(p, z)}{\psi(p)}$ совпадает с $\tilde{T}(p, z) e^{pt}$, причем $\varphi(p_n, z) \neq 0$. Несложно проверить, что в данном случае все эти условия выполнены. Используя (6.39)–(6.42), получаем

$$\begin{aligned} T(t, z) = & \frac{\frac{T_2^*}{\text{Bi}_1} + \frac{T_1}{\text{Bi}_2} + T_1 + (T_2^* - T_1)\bar{z}}{1 + \frac{1}{\text{Bi}_1} + \frac{1}{\text{Bi}_2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n Z_n} \times \\ & \times \left(\text{Bi}_1 (T_1 - T_0) \left(\cos \mu_n (1 - \bar{z}) + \frac{\text{Bi}_2}{\mu_n} \sin \mu_n (1 - \bar{z}) \right) + \right. \\ & \left. + \text{Bi}_2 (T_2^* - T_0) \left(\cos \mu_n \bar{z} + \frac{\text{Bi}_1}{\mu_n} \sin \mu_n \bar{z} \right) \right) e^{-\mu_n^2 \text{Fo}}, \quad (6.43) \end{aligned}$$

где $\text{Fo} = at/h^2$ — критерий Фурье, имеющий в данном случае смысл безразмерного времени в нестационарном процессе теплопроводности, а $\mu_n Z_n = (\text{Bi}_1 + \text{Bi}_2)(\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n) + 2\text{Bi}_1 \text{Bi}_2 \frac{\sin^2 \mu_n}{\mu_n}$.

К рассмотренной ММ может быть сведена расчетная схема (РС) конструкции, на плоскую поверхность которой для

защиты от теплового воздействия среды температурой T_2 нанесен слой теплоизоляционного материала толщиной h (рис. 6.9). Температуру T_1 конструкции поддерживают постоянной во времени t , причем $1/\alpha_1$ определяет термическое сопротивление неидеального теплового контакта между конструкцией и слоем теплоизоляционного материала [XIII]. Если начальная температура слоя теплоизоляционного материала совпадает с температурой конструкции, т.е. $T_0 = T_1$, то из (6.43) получим

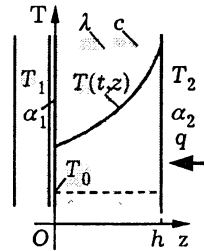


Рис. 6.9

$$\frac{T(t,z) - T_0}{T_2^* - T_0} = \frac{\frac{1}{Bi_1} + \bar{z}}{1 + \frac{1}{Bi_1} + \frac{1}{Bi_2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n Z_n} \left(\cos \mu_n \bar{z} + \frac{Bi_1}{\mu_n} \sin \mu_n \bar{z} \right) e^{-\mu_n^2 Fo}. \quad (6.44)$$

На рис. 6.8 видно, что при любом значении μ° справедлива цепочка неравенств $0 < \mu_1 < \pi < \mu_2 < 2\pi < \dots < (n-1)\pi < \mu_n < n\pi$. Поэтому величина μ_n^2 , входящая сомножителем в отрицательный показатель экспоненты в (6.43) и (6.44), быстро возрастает с увеличением номера n . Следовательно, при фиксированном значении Fo ряды в (6.43) и (6.44) быстро сходятся. Начиная с некоторого значения Fo_1 с заданной точностью можно пренебречь всеми членами такого ряда, кроме первого. Нестационарный процесс теплопроводности, описываемый при $Fo > Fo_1$ формулами вида (6.43) и (6.44), в которых удержан лишь первый член ряда, называют **регулярным режимом**. Значение Fo_∞ , соответствующее завершению регулярного режима, т.е. переходу к *установившемуся процессу*, можно найти по значению μ_1 и заданному допуску на отклонение распределения температуры $T(t,z)$ от установившегося распределения, описываемого первым слагаемым в правой части (6.43) или (6.44).

В частном случае идеальной теплоизоляции поверхности стенки при $z = 0$, что соответствует значению $Bi_1 = 0$, (6.43) и (6.44) принимают вид

$$\frac{T_2^* - T(t, z)}{T_2^* - T_0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\nu_n^2 Fo} \cos \nu_n \bar{z}, \quad (6.45)$$

где

$$B_n = \frac{2 \sin \nu_n}{\nu_n + \sin \nu_n \cos \nu_n},$$

а ν_n — корни трансцендентного уравнения $\operatorname{ctg} \nu = \nu / Bi_2$. Их расположение на оси абсцисс показано на рис. 6.10. Так как $\nu_n \in \left((n-1)\pi, \frac{1}{2}(2n-1)\pi \right)$ и $\nu_n > \sin \nu_n \cos \nu_n$, то при $z = 0$ ряд в правой части (6.45) становится знакопеременным. Для такого ряда отбрасывание при суммировании членов, начиная с n -го, приводит к погрешности вычисления, не превышающей абсолютной величины этого члена.

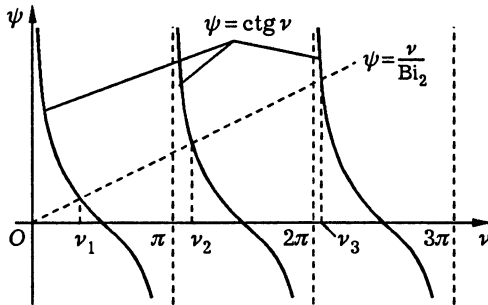


Рис. 6.10

Наибольшие по модулю коэффициенты ряда равны $B_n^* = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)}$, т.е. $B_1^* \approx 1,2732$, $|B_2^*| \approx 0,4244$, $B_3^* \approx 0,2546$ и т.д. Если в (6.45) удержать всего один первый член ряда, то относительная погрешность вычисления температуры $T(t, 0)$ будет менее 1% при $|B_2^*| e^{-\pi^2 Fo} < 0,01$, или при $Fo > Fo_1 \approx 0,38$. Таким

образом, с точностью до 1% при выполнении этого последнего неравенства наступает регулярный режим, описываемый формулой

$$\frac{T_2^* - T(t, z)}{T_2^* - T_0} = B_1 e^{-\nu_1^2 Fo} \cos \nu_1 \bar{z}, \quad Fo > Fo_1. \quad (6.46)$$

Завершению регулярного режима в данном случае соответствует стремление величины $T(t, z)$ к установившемуся значению T_2^* . Если принять в качестве условия завершения регулярного режима выполнение неравенства

$$\frac{T_2^* - T(t, z)}{T_2^* - T_0} < \delta,$$

то из (6.46) получим

$$Fo_\infty = \frac{1}{\nu_1^2} \max_{\bar{z} \in [0, 1]} \ln \frac{B_1 \cos \nu_1 \bar{z}}{\delta} = \frac{1}{\nu_1^2} \ln \frac{B_1}{\delta}.$$

Ясно, что при уменьшении значения Fo ряд в (6.45) сходится медленнее. Поэтому при вычислении с заданной точностью приходится удерживать большее число членов ряда. Так, суммирование двух членов этого ряда обеспечивает относительную погрешность менее 1% при условии $B_3^* e^{-(2\pi)^2 Fo} < 0,01$, т.е. при $Fo > Fo_2 \approx 0,082$. Применение интегрального преобразования Лапласа позволяет получить иную форму решения рассматриваемой задачи, удобную для вычислений при малых значениях Fo . Выражая в (6.39) гиперболические функции через экспоненциальные, при $Bi_1 \rightarrow 0$ получаем

$$T(p, z) = \frac{T_0}{p} + \frac{T_2^* - T_0}{p(1 + \zeta/Bi_2)} \frac{e^{-\zeta(1-\bar{z})} + e^{-\zeta(1+\bar{z})}}{1 + \frac{1 - \zeta/Bi_2}{1 + \zeta/Bi_2} e^{-2\zeta}}.$$

Если величиной $\frac{1 - \zeta/Bi_2}{1 + \zeta/Bi_2} e^{-2\zeta}$ пренебречь по сравнению с единицей, то, используя таблицы соответствия изображений и ори-

гиналов*, можно написать

$$\frac{T(t, z) - T_0}{T_2^* - T_0} = \operatorname{erfc} \frac{1 - \bar{z}}{2\sqrt{Fo}} - e^{\operatorname{Bi}_2(1 - \bar{z}) + \operatorname{Bi}_2^2 Fo} \operatorname{erfc} \left(\frac{1 - \bar{z}}{2\sqrt{Fo}} + \operatorname{Bi}_2 \sqrt{Fo} \right) + \\ + \operatorname{erfc} \frac{1 + \bar{z}}{2\sqrt{Fo}} - e^{\operatorname{Bi}_2(1 + \bar{z}) + \operatorname{Bi}_2^2 Fo} \operatorname{erfc} \left(\frac{1 + \bar{z}}{2\sqrt{Fo}} + \operatorname{Bi}_2 \sqrt{Fo} \right). \quad (6.47)$$

Функцию $\operatorname{erfc} \xi$ выражают через *интеграл ошибок* $\operatorname{erf} \xi$:

$$\operatorname{erfc} \xi = 1 - \operatorname{erf} \xi = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-x^2} dx.$$

Для малых значений аргумента ξ можно использовать разложение [XII]

$$\operatorname{erfc} \xi = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\xi - \frac{\xi^3}{1!3} + \frac{\xi^5}{2!5} - \frac{\xi^7}{3!7} + \dots \right),$$

а для больших значений —

$$\operatorname{erfc} \xi = \frac{e^{-\xi^2}}{\sqrt{\pi} \xi} \left(1 - \frac{1}{2\xi^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2\xi^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2\xi^2)^3} + \dots \right).$$

Пример 6.8. В РС стенки, изображенной на рис. 6.7, положим коэффициент теплоотдачи $\alpha_1 = 0$ и примем температуру среды $T_2(t)$ и плотность теплового потока $q(t)$ зависящими от времени. В этом случае для решения задачи также целесообразно применить интегральное преобразование Лапласа (6.37). Тогда вместо (6.39) получим решение

$$\tilde{\vartheta}(p, z) = \frac{\tilde{\vartheta}^*(p) \operatorname{ch} \zeta \bar{z}}{\operatorname{ch} \zeta + \frac{\zeta}{\operatorname{Bi}_2} \operatorname{sh} \zeta} \quad (6.48)$$

* См.: Лыков А.В.

для изображения температуры $T(t, z) - T_0$, где $\tilde{\vartheta}^*(p)$ — изображение температуры $\vartheta^*(t) = T^*(t) - T_0$, а $T^*(t) = T_2(t) + \frac{q(t)}{\alpha_2}$ — изменяющаяся во времени приведенная температура среды.

Правая часть (6.48) является произведением изображений $\tilde{\vartheta}^*(p)$ и $p\tilde{g}(p, z)$, где

$$\tilde{g}(p, z) = \frac{\operatorname{ch} \zeta \bar{z}}{p(\operatorname{ch} \zeta + (\zeta/\operatorname{Bi}_2) \operatorname{sh} \zeta)}.$$

Используя процедуру, изложенную в примере 6.7, несложно установить, что изображению $\tilde{g}(p, z)$ соответствует оригинал

$$g(t, z) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\nu_n^2 \operatorname{Fo}} \cos \nu_n \bar{z}, \quad (6.49)$$

где

$$B_n = \frac{2 \sin \nu_n}{\nu_n + \sin \nu_n \cos \nu_n},$$

а ν_n — корни трансцендентного уравнения $\operatorname{ctg} \nu = \nu/\operatorname{Bi}_2$. Для перехода от изображения $\tilde{\vartheta}^*(p) p\tilde{g}(p, z)$ к оригиналу $\vartheta(t, z)$ используем интеграл Дюамеля [XI] в виде

$$\vartheta(t, z) = \vartheta^*(t)g(0, z) + \int_0^t \vartheta^*(t - \tau) \frac{dg(\tau)}{d\tau} d\tau.$$

Учитывая начальное условие $T(0, z) = T_0$, при помощи (6.45) находим $g(0, z) \equiv 0$. Тогда получаем

$$T(t, z) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n^2 B_n \frac{a \cos \nu_n \bar{z}}{h^2} \int_0^t \vartheta^*(t - \tau) e^{-\nu_n^2 a \tau / h^2} d\tau. \quad (6.50)$$

Пусть приведенная температура совершает во времени гармонические колебания с амплитудой ΔT^* и угловой частотой

колебаний ω по закону $T^*(t) = T_0 + \Delta T^* \sin \omega t$. В этом случае из (6.50) найдем

$$\begin{aligned} \frac{T(t, z) - T_0}{\Delta T^*} &= \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n^2 B_n \frac{a \cos \nu_n \bar{z}}{h^2} \int_0^t e^{-\nu_n^2 a \tau / h^2} \sin \omega(t - \tau) d\tau = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n \cos \nu_n \bar{z}}{\nu_n^4 + \text{Pd}^2} (\nu_n^2 \sin \omega t - \text{Pd} \cos \omega t + \text{Pd} e^{-\nu_n^2 \text{Fo}}), \quad (6.51) \end{aligned}$$

где $\text{Pd} = \omega h^2 / a$ — критерий Предводителява*. При $\text{Fo} \rightarrow \infty$ колебания во времени температуры $T(t, z)$ будут также гармоническими, причем

$$\frac{\vartheta_*(t, z)}{\Delta T^*} = \frac{T_*(t, z) - T_0}{\Delta T^*} = A(z) \sin(\omega t + \varphi_0(z)).$$

Однако для нахождения зависящих от z амплитуды A и начальной фазы φ_0 этих колебаний использовать (6.51) нерационально.

Вернемся к решению (6.48) и подставим в него изображение

$$\tilde{\vartheta}^*(p) = \int_0^{\infty} \vartheta(t) e^{-pt} dt = \Delta T^* \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin \omega t dt = \frac{\omega \Delta T^*}{p^2 + \omega^2},$$

соответствующее оригиналу $\vartheta(t) = T^*(t) - T_0 = \Delta T^* \sin \omega t$. В результате получим

$$\tilde{\vartheta}(p, z) = \frac{\omega \Delta T^* \text{ch} \zeta \bar{z}}{(p^2 + \omega^2)(\text{ch} \zeta + (\zeta / \text{Bi}_2) \text{sh} \zeta)}, \quad \zeta = \sqrt{\frac{p}{a}} h, \quad \bar{z} = \frac{z}{h}.$$

Теперь наряду с полюсами $p_n = -\frac{\nu_n^2 h^2}{a}$, $n \in \mathbb{N}$, функция $\tilde{\vartheta}(p, z)$ имеет еще два простых полюса $p^{(1)} = i\omega$ и $p^{(2)} = -i\omega$ на мнимой оси комплексной плоскости. С учетом вычетов в этих двух

* А.С. Предводителев (1891–1973) — русский физик.

полюсах запишем

$$\frac{\vartheta(t, z)}{\Delta T^*} = Y_i(\bar{z}) e^{i\omega t} - Y_{-i}(\bar{z}) e^{-i\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_n^2 B_n e^{-\nu_n^2 Fo}}{\nu_n^4 + Pd^2} \cos \nu_n \bar{z}, \quad (6.52)$$

где, если использовать обозначение $2\bar{\omega}^2 = \omega h^2/a = Pd$,

$$\begin{cases} Y_i(\bar{z}) = \frac{\text{ch} \bar{\omega} \sqrt{2i} \bar{z}}{2i(\text{ch} \bar{\omega} \sqrt{2i} + (\bar{\omega} \sqrt{2i}/Bi_2) \text{sh} \bar{\omega} \sqrt{2i})}, \\ Y_{-i}(\bar{z}) = \frac{\text{ch} \bar{\omega} \sqrt{-2i} \bar{z}}{2i(\text{ch} \bar{\omega} \sqrt{-2i} + (\bar{\omega} \sqrt{-2i}/Bi_2) \text{sh} \bar{\omega} \sqrt{-2i})}. \end{cases} \quad (6.53)$$

Гармонические колебания температуры определяют два первых слагаемых в правой части (6.52), причем, применяя формулу Эйлера [X], получим

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta_*(t, z)}{\Delta T^*} &= \frac{T_*(t, z) - T_0}{\Delta T^*} = Y_i(\bar{z}) e^{i\omega t} - Y_{-i}(\bar{z}) e^{-i\omega t} = \\ &= (Y_i(\bar{z}) - Y_{-i}(\bar{z})) \cos \omega t + i(Y_i(\bar{z}) + Y_{-i}(\bar{z})) \sin \omega t = \\ &= 2\sqrt{-Y_i(\bar{z})Y_{-i}(\bar{z})} \sin\left(\omega t + \text{arctg} i \frac{Y_i(\bar{z}) - Y_{-i}(\bar{z})}{Y_i(\bar{z}) + Y_{-i}(\bar{z})}\right). \end{aligned} \quad (6.54)$$

Преобразуем это выражение к действительному виду в частном случае $Bi_2 \rightarrow \infty$, что соответствует высокоинтенсивному конвективному теплообмену на поверхности стенки при $z = h$. В этом случае $T(t, h) \rightarrow T^*(t)$. Так как $(1 \pm i)^2 = 1 \pm 2i - 1 = \pm 2i$, то $\sqrt{\pm 2i} = \pm(1 \pm i)$. Знак „ \pm “ перед $(1 \pm i)$ можно опустить, поскольку этот множитель входит в (6.53) в аргумент четных функций $\text{ch} \xi$ и $\xi \text{sh} \xi$. В соответствии с известными формулами [X] запишем

$$\begin{aligned} \text{ch} \bar{\omega} \sqrt{\pm 2i} \bar{z} &= \text{ch} \bar{\omega}(1 \pm i) \bar{z} = \text{ch} \bar{\omega} \bar{z} \cos \bar{\omega} \bar{z} \pm i \text{sh} \bar{\omega} \bar{z} \sin \bar{\omega} \bar{z}, \\ \text{ch} \bar{\omega} \sqrt{\pm 2i} &= \text{ch} \bar{\omega}(1 \pm i) = \text{ch} \bar{\omega} \cos \bar{\omega} \pm i \text{sh} \bar{\omega} \sin \bar{\omega}, \\ \text{sh} \bar{\omega} \sqrt{\pm 2i} &= \text{sh} \bar{\omega}(1 \pm i) = \text{sh} \bar{\omega} \cos \bar{\omega} \pm i \text{ch} \bar{\omega} \sin \bar{\omega}. \end{aligned}$$

Тогда с учетом (6.53) и (6.54) при $\text{Bi}_2 \rightarrow \infty$ находим

$$\begin{aligned} A(z) &= 2\sqrt{-Y_i(\bar{z})Y_{-i}(\bar{z})} = \sqrt{\frac{\text{ch}^2 \bar{\omega} z \cos^2 \bar{\omega} z + \text{sh}^2 \bar{\omega} z \sin^2 \bar{\omega} z}{\text{ch}^2 \bar{\omega} \cos^2 \bar{\omega} + \text{sh}^2 \bar{\omega} \sin^2 \bar{\omega}}} = \\ &= \sqrt{\frac{\text{ch}^2 \bar{\omega} z \cos^2 \bar{\omega} z + (\text{ch}^2 \bar{\omega} z - 1) \sin^2 \bar{\omega} z}{\text{ch}^2 \bar{\omega} \cos^2 \bar{\omega} + (\text{ch}^2 \bar{\omega} - 1) \sin^2 \bar{\omega}}} = \\ &= \sqrt{\frac{\text{ch}^2 \bar{\omega} z - \sin^2 \bar{\omega} z}{\text{ch}^2 \bar{\omega} - \sin^2 \bar{\omega}}} = \sqrt{\frac{\text{ch}^2 \bar{\omega} z}{\text{ch}^2 \bar{\omega}} \frac{1 - \frac{\sin^2 \bar{\omega} z}{\text{ch}^2 \bar{\omega} z}}{1 - \frac{\sin^2 \bar{\omega}}{\text{ch}^2 \bar{\omega}}}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_0(z) &= \text{arctg} i \frac{Y_i(\bar{z}) - Y_{-i}(\bar{z})}{Y_i(\bar{z}) + Y_{-i}(\bar{z})} = \\ &= \text{arctg} \frac{\text{th} \bar{\omega} z \sin \bar{\omega} z - \text{th} \bar{\omega} \text{tg} \bar{\omega} \cos \bar{\omega} z}{\cos \bar{\omega} z + \text{th} \bar{\omega} \text{tg} \bar{\omega} \text{th} \bar{\omega} z \sin \bar{\omega} z}. \end{aligned}$$

В рассматриваемом частном случае $A(h) = 1$ и $\varphi_0(h) = 0$, а на идеально теплоизолированной поверхности стенки $A(0) = (\text{ch}^2 \bar{\omega} - \sin^2 \bar{\omega})^{-1/2} < 1$ и $\varphi_0(0) = -\text{arctg}(\text{th} \bar{\omega} \text{tg} \bar{\omega}) < 0$ при $\omega > 0$. Для значений $\bar{\omega} > \pi$ имеем $0,996 < \text{th} \bar{\omega} < 1$ и $\text{ch}^2 \bar{\omega} > 100 \gg \gg \sin^2 \bar{\omega}$. Поэтому можно принять $A(0) \approx \frac{1}{\text{ch} \bar{\omega}} < 0,1$ и $\varphi_0(0) \approx \approx -\bar{\omega} < -\pi$. При этом $A(z) \approx \frac{\text{ch} \bar{\omega} z}{\text{ch} \bar{\omega}} \approx e^{-\bar{\omega}(1-\bar{z})}$ и $\varphi_0(z) \approx -\bar{\omega}(1-\bar{z})$ для таких значений $z < h$, когда можно считать $\text{th} \bar{\omega} z \approx 1$.

Таким образом, с удалением от поверхности стенки при $z = h$ уменьшается амплитуда гармонических колебаний температуры во времени и увеличивается запаздывание по фазе по отношению к колебаниям температуры на этой поверхности. Распределение температуры по толщине стенки в фиксированный момент времени представляет собой волну, затухающую при уменьшении координаты z (рис. 6.11). Длину L такой

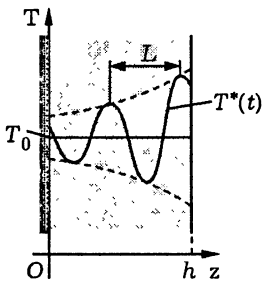


Рис. 6.11

волны, называемой *тепловой*, можно найти как расстояние между точками, в которых разность начальных фаз колебаний температуры равна 2π . При больших значениях $\bar{\omega}$ получим равенство $2\pi = \varphi_0(z) - \varphi_0(z - L) \approx \bar{\omega}L/h$, откуда $L \approx 2\pi \frac{h}{\bar{\omega}} = 2\pi \sqrt{\frac{2a}{\omega}}$. Скорость v распространения тепловой волны можно найти как отношение ее длины к периоду $\frac{2\pi}{\omega}$ колебаний, т.е. $v \approx \sqrt{2a\omega}$. Отметим, что приближенные равенства переходят в точные при $h \rightarrow \infty$, когда тепловая волна распространяется не в стенке, а в полуграниченном теле*.

6.4. Одномерные модели гидравлических систем

При движении жидкости (или газа) по трубопроводу могут возникать колебания давления и расхода жидкости вследствие пульсаций этих параметров на выходе из насоса (или компрессора), нагнетающего жидкость (или газ) в трубопровод, и срабатывания регулирующей и запорной арматуры гидравлической (или пневматической) системы. Ограничимся рассмотрением движения жидкости в прямолинейном горизонтальном трубопроводе, считая ее идеальной (невязкой), но сжимаемой. Сжимаемость жидкости характеризуют объемным модулем упругости $E_{ж}$. Он входит в соотношение

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{p - p_0}{E_{ж}} \right), \quad (6.55)$$

которое связывает плотность ρ жидкости с давлением p (ρ_0 — значение плотности при давлении p_0). Так, для воды $E_{ж} = 2,136 \cdot 10^9$ Па при температуре $293 \text{ K} = 20^\circ \text{C}$ и атмосферном давлении.

Выделим в трубопроводе участок длиной dx (рис. 6.12). Примем, что среднее по поперечному сечению трубопровода

*См.: Лыков А.В.; Карслоу Г., Егер Д.

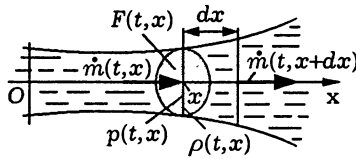


Рис. 6.12

давление $p(t, x)$ жидкости зависит от времени t и координаты x этого сечения. В соответствии с (6.55) для плотности $\rho(t, x)$ имеем аналогичную зависимость. Так как стенки трубопровода могут деформироваться под действием давления, то площадь $F(t, x)$ поперечного сечения также является функцией t и x . Массовый расход жидкости через трубопровод обозначим $\dot{m}(t, x)$. Все указанные функции предполагаем дифференцируемыми по своим аргументам.

С точностью до бесконечно малых более высокого порядка в фиксированный момент времени t в объеме выделенного участка трубопровода находится масса жидкости $\rho(t, x) F(t, x) dx$. Из закона сохранения массы следует, что скорость $\frac{\partial \rho F}{\partial t} dx$ изменения массы жидкости в пределах этого участка равна разности $\dot{m}(t, x) - \dot{m}(t, x + dx) = -\frac{\partial \dot{m}}{\partial x} dx$ расходов через его входное и выходное сечения соответственно (см. рис. 6.12). Таким образом, получаем уравнение неразрывности для движения жидкости по трубопроводу в виде

$$\frac{\partial(\rho F)}{\partial t} = -\frac{\partial \dot{m}}{\partial x}. \quad (6.56)$$

Перепад давления между входным и выходным сечениями выделенного участка создает действующую в направлении оси Ox силу

$$p(t, x) F(t, x) - p(t, x + dx) F(t, x + dx) + \int_x^{x+dx} p(t, \xi) \frac{\partial F(t, \xi)}{\partial \xi} d\xi,$$

причем интеграл соответствует проекции на эту ось равнодействующей сил давления со стороны стенок трубопровода.

В соответствии с законом сохранения количества движения эта сила равна скорости

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho v dV &= \frac{d}{dt} \int_x^{x+dx} \rho(t, \xi) \left(\int_{F(t, \xi)} v dF \right) d\xi = \\ &= \frac{d}{dt} \int_x^{x+dx} \rho(t, \xi) \bar{v}(t, \xi) F(t, \xi) d\xi = \frac{d}{dt} \int_x^{x+dx} \dot{m}(t, \xi) d\xi \end{aligned}$$

изменения в этом направлении количества движения массы жидкости в объеме V выделенного участка (v — проекция вектора скорости жидкости на ось Ox , \bar{v} — величина этой проекции, средняя по поперечному сечению трубопровода). В итоге, отбросив бесконечно малые более высокого порядка, запишем

$$-\frac{\partial(pF)}{\partial x} dx + p \frac{\partial F}{\partial x} dx = -F \frac{\partial p}{\partial x} dx = \frac{d\dot{m}}{dt} dx.$$

Если неустановившееся движение жидкости в трубопроводе рассматривать как возмущенное относительно известного установившегося движения или состояния покоя, то при малых возмущениях полную производную по времени в последнем равенстве можно заменить частной производной [XIII]. Тогда получим

$$\frac{\partial \dot{m}(t, x)}{\partial t} = -F(t, x) \frac{\partial p(t, x)}{\partial x}. \quad (6.57)$$

Зависимость F от p в предположении линейной упругости материала стенок трубопровода можно представить в виде, аналогичном (6.55):

$$F = F_0 \left(1 + \chi \frac{p - p_0}{E} \right), \quad (6.58)$$

где F_0 — площадь поперечного сечения трубопровода при давлении p_0 , E — модуль упругости материала стенок, а коэффициент χ зависит от формы поперечного сечения и толщины

стенок. Так, для толстостенной трубы с круглым поперечным сечением, имеющим при давлении p_0 внутренний радиус r и толщину стенки h , увеличение давления на Δp при отсутствии осевой силы приводит к радиальному перемещению*¹

$$\Delta r = \left((1 + \nu)r + \frac{2r^2}{2h + h^2/r} \right) \frac{\Delta p}{E}$$

на внутренней поверхности трубы (здесь ν — коэффициент Пуассона материала стенки). Это вызывает приращение $\Delta F = \pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2$ площади поперечного сечения. В итоге, пренебрегая величиной Δr по сравнению с r , получаем

$$F = F_0 \left(1 + \frac{2r\Delta r + (\Delta r)^2}{r^2} \right) \approx F_0 \left(1 + 2 \left(1 + \nu + \frac{r/h}{1 + h/(2r)} \right) \frac{\Delta p}{E} \right).$$

Сравнивая это выражение с (6.58), заключаем, что

$$\chi \approx 2(1 + \nu) + \frac{2r/h}{1 + h/(2r)}.$$

Для тонкостенного трубопровода с круглым поперечным сечением при $h \ll r$ и $\nu \leq \frac{1}{2}$ получим $\chi \approx \frac{2r}{h}$.

В (6.55) и (6.58) $\frac{p - p_0}{E_{\text{ж}}} \ll 1$ и $\frac{\chi(p - p_0)}{E} \ll 1$. Следовательно,

$$\frac{\partial(\rho F)}{\partial t} = \rho_0 F_0 \left(\frac{1}{E_{\text{ж}}} + \frac{\chi}{E} + 2\chi \frac{p - p_0}{E_{\text{ж}} E} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \approx \frac{F_0}{a_0^2} \left(1 + \frac{\chi E_{\text{ж}}}{E} \right) \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (6.59)$$

где $a_0 = \sqrt{\frac{E_{\text{ж}}}{\rho_0}}$ — скорость распространения возмущений (скорость звука) в неограниченном объеме жидкости при давлении p_0 . Н.Е. Жуковский*² установил, что в трубопроводе благодаря деформированию его стенок скорость звука в жидкости меньше a_0 и равна

$$a = \frac{a_0}{\sqrt{1 + \chi E_{\text{ж}}/E}}. \quad (6.60)$$

*¹См.: Феодосьев В.И. (1999 г.)

*²Н.Е. Жуковский (1847–1921) — русский механик и математик.

Например, для стальной трубы внутреннего радиуса $r = 16$ мм, толщина стенки которой равна $h = 5$ мм, при $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па и $\nu = 0,3$ найдем $\chi \approx 8,135$ и для воды при $a_0 \approx 1483$ м/с получим $a \approx 1422$ м/с, т.е. скорость звука уменьшается примерно на 4%. Но для тонкостенной алюминиевой трубы внутреннего радиуса 100 мм, толщина стенки которой равна $h = 2$ мм, имеем $\chi = 2r/h = 100$, и при $E = 7,2 \cdot 10^{10}$ Па скорость звука в воде, находящейся в такой трубе, составит $a \approx 745$ м/с, что почти вдвое меньше скорости звука в неограниченном объеме.

Для трубопровода с изменяющимися по его длине площадью $F_0(x)$ поперечного сечения и толщиной стенок коэффициент χ зависит от x . Поэтому $a = a(x)$, так что с учетом (6.59) и (6.60) вместо (6.56) запишем

$$\frac{F_0(x)}{a^2(x)} \frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = - \frac{\partial \dot{m}(t, x)}{\partial x}. \quad (6.61)$$

Дифференцируя (6.61) по t , а (6.57) по x , можно исключить \dot{m} и написать

$$\frac{\partial^2 p(t, x)}{\partial t^2} = \frac{a^2(x)}{F_0(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(F(t, x) \frac{\partial p(t, x)}{\partial x} \right).$$

Наоборот, исключая p , находим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{F(t, x)} \frac{\partial \dot{m}(t, x)}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a^2(x)}{F_0(x)} \frac{\partial \dot{m}(t, x)}{\partial x} \right).$$

В случае трубопровода с постоянными по его длине поперечным сечением и толщиной стенок имеем $a(x) = a = \text{const}$ и $F_0(x) = F_0 = \text{const}$. При этом в силу неравенства $\frac{\chi(p-p_0)}{E} \ll 1$ можно принять $F \approx F_0$. Тогда получим одномерные волновые уравнения

$$\frac{\partial^2 p(t, x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 p(t, x)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \dot{m}(t, x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \dot{m}(t, x)}{\partial x^2}. \quad (6.62)$$

Рассмотрим некоторые варианты граничных условий на концах трубопровода. В конечном сечении трубопровода при $x = 0$ может быть задан закон изменения во времени t давления жидкости, т.е. $p(t, 0) = p_0(t)$. В этом случае из (6.61) получим

$$\frac{\partial \dot{m}(t, 0)}{\partial x} = -\frac{F_0(0)}{a^2(0)} \frac{dp_0(t)}{dt}.$$

В частном случае $p_0(t) \equiv p_0 = \text{const}$ имеем $\frac{\partial \dot{m}(t, 0)}{\partial x} = 0$. Если конец трубопровода при $x = 0$ закрыт, то $\dot{m}(t, 0) = 0$. Тогда в соответствии с (6.57) $\frac{\partial p(t, 0)}{\partial x} = 0$. При задании в этом сечении массового расхода жидкости в виде зависимости $\dot{m}(t, 0) = \dot{m}_0(t)$ из (6.57) следует

$$\frac{\partial p(t, 0)}{\partial x} = -\frac{1}{F(t, 0)} \frac{d\dot{m}_0(t)}{dt}.$$

В конечном сечении трубопровода с координатой $x = l$ может быть установлен демпфер — устройство, в котором объем жидкости изменяется в зависимости от ее давления. Если изменение ΔV этого объема происходит за счет упругости стенок демпфера, то, пренебрегая инерцией стенок, ΔV можно считать пропорциональным изменению Δp давления жидкости, причем

$$\frac{\Delta V}{V_0} = K \frac{p - p_0}{p_0} = K \frac{\Delta p}{p_0},$$

где V_0 — объем жидкости в демпфере при давлении p_0 , а K — безразмерный коэффициент пропорциональности. Тогда с учетом (6.61) получим

$$\frac{d\Delta V}{dt} = \frac{KV_0}{p_0} \frac{\partial p(t, l)}{\partial t} = -\frac{a^2(l)KV_0}{p_0 F_0(l)} \frac{\partial \dot{m}(t, l)}{\partial x}.$$

Но скорость изменения объема жидкости в демпфере равна объемному расходу жидкости через сечение трубопровода при

$x = l$, т.е. $\frac{d\Delta V}{dt} = \frac{\dot{m}(t,l)}{\rho(t,l)}$, и в итоге

$$\dot{m}(t,l) + \frac{a^2(l)\rho(t,l)KV_0}{p_0F_0(l)} \frac{\partial \dot{m}(t,l)}{\partial x} = 0.$$

Отметим, что при установке демпфера в концевом сечении с координатой $x = 0$ при $\frac{d\Delta V}{dt} > 0$ объемный расход жидкости через это сечение отрицателен и поэтому

$$\dot{m}(t,0) - \frac{a^2(0)\rho(t,0)KV_0}{p_0F_0(0)} \frac{\partial \dot{m}(t,0)}{\partial x} = 0.$$

Демпфер может представлять собой полость объемом V_* , частично заполненную газом (воздухом). При повышении давления p жидкости газ сжимается, что приводит к увеличению объема V , занятого в таком демпфере жидкостью. Связь V и p зависит от термодинамического процесса сжатия газа. При изотермическом процессе $p(V_* - V) = p_0(V_* - V_0)$, так что в случае малых изменений давления по сравнению со значением p_0 имеем

$$\frac{dV}{dt} = p_0 \frac{V_* - V_0}{p^2} \frac{dp}{dt} \approx \frac{V_* - V_0}{p_0} \frac{dp}{dt}.$$

Поскольку $\frac{d\Delta V}{dt} = \frac{\dot{m}(t,l)}{\rho(t,l)}$ в сечении трубопровода с координатой $x = l$, то с учетом (6.61) получим

$$\dot{m}(t,l) + \frac{a^2(l)\rho(t,l)(V_* - V_0)}{p_0F_0(l)} \frac{\partial \dot{m}(t,l)}{\partial x} = 0.$$

В гидравлических системах часто встречаются разветвленные трубопроводы. Пусть концевые сечения n трубопроводов объединены в один узел, от которого ведется отсчет координат x_i , $i = \overline{1, n}$, вдоль оси каждого из трубопроводов (рис. 6.13). Тогда в этих сечениях в любой текущий момент времени t

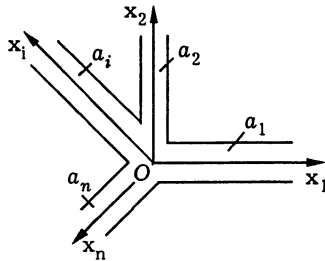


Рис. 6.13

одинаково давление жидкости, т.е. $p_1(t, 0) = \dots = p_i(t, 0) = \dots = p_n(t, 0)$ при $x_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, что с учетом (6.61) позволяет написать равенство

$$\frac{a_1^2(0)}{F_{01}(0)} \frac{\partial \dot{m}_1(t, 0)}{\partial x} = \dots = \frac{a_i^2(0)}{F_{0i}(0)} \frac{\partial \dot{m}_i(t, 0)}{\partial x} = \dots = \frac{a_n^2(0)}{F_{0n}(0)} \frac{\partial \dot{m}_n(t, 0)}{\partial x}.$$

Кроме того, в узле равна нулю алгебраическая сумма массовых расходов:

$$\sum_{i=1}^n \dot{m}_i(t, 0) = 0.$$

Отсюда в соответствии с (6.57) следует, что

$$\sum_{i=1}^n F_i(t, 0) \frac{\partial p_i(t, 0)}{\partial x} = 0.$$

В большинстве случаев граничные условия в концевых сечениях трубопроводов удается сформулировать относительно искомой функции $\dot{m}(t, x)$ массового расхода жидкости. Поэтому в рабочую *математическую модель* (ММ) неустановившегося движения жидкости в трубопроводах помимо таких граничных условий должны входить второе уравнение (6.62) и начальные условия, включающие распределения по длине каждого трубопровода в момент времени $t = 0$, принимаемый за начальный, расхода жидкости и скорости его изменения. Однако на практике обычно известны начальные распределения

$\dot{m}(0, x) = \dot{m}^\circ(x)$ и $p(0, x) = p^\circ(x)$ расхода жидкости и давления соответственно. В этом случае из последнего равенства при помощи (6.57) и (6.58) получим необходимое для завершения математической формулировки задачи начальное условие $\frac{\partial \dot{m}(0, x)}{\partial t} = -F(0, x) \frac{dp^\circ(x)}{dx}$. При определении *собственных частот* и *форм колебаний* жидкости в трубопроводах и анализе *установившегося процесса* колебаний под действием внешних возмущающих факторов необходимость в задании начальных условий отпадает. После нахождения функции $\dot{m}(t, x)$, как правило, несложно установить зависимость $p(t, x)$ давления жидкости от времени и координаты.

Пример 6.9. Пусть трубопровод длиной l имеет постоянные площадь F_0 поперечного сечения и толщину стенки, т.е. для скорости звука в жидкости, находящейся в этом трубопроводе, имеем $a = \text{const}$. В момент времени $t = 0$ давление и массовый расход жидкости постоянны по длине трубопровода и равны p_0 и \dot{m}° соответственно. При $t > 0$ на одном конце трубопровода (при $x = 0$) поддерживается постоянное давление p_0 , так что $p(t, 0) = p_0$, а другой его конец (при $x = l$) перекрывают. В этом случае искомая функция $\dot{m}(t, x)$ должна удовлетворять второму уравнению (6.62), однородным граничным условиям $\frac{\partial \dot{m}(t, 0)}{\partial x} = 0$, $\dot{m}(t, l) = 0$ и начальным условиям $\dot{m}(0, x) = \dot{m}^\circ$ и $\frac{\partial \dot{m}(0, x)}{\partial t} = 0$.

Применим метод Фурье [XII], представив искомое решение в виде $\dot{m}(t, x) = T(t) X(x)$. Подставляя это равенство во второе уравнение (6.62), получаем $\frac{a^2 X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda$. Отсюда следуют два линейных ОДУ второго порядка

$$a^2 X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad T''(t) - \lambda T(t) = 0. \quad (6.63)$$

Общее решение $X(x) = C_1 \text{ch} \sqrt{\lambda} \frac{x}{a} + C_2 \text{sh} \sqrt{\lambda} \frac{x}{a}$ первого из них должно удовлетворять граничным условиям в виде $X'(0) = 0$ и $X(l) = 0$. При любом значении $\lambda > 0$ из граничных условий следует, что $C_1 = C_2 = 0$. Значение $\lambda = 0$ также приводит к

равенству $C_1 = C_2 = 0$. Нетривиальные решения этого ОДУ существуют, если $0 > \lambda = -\omega^2$. В этом случае общее решение ОДУ принимает вид $X(x) = D_1 \cos \omega \frac{x}{a} + D_2 \sin \omega \frac{x}{a}$. Из первого граничного условия имеем $D_2 = 0$, а из второго граничного условия следует, что $D_1 \neq 0$, если $\cos \omega \frac{l}{a} = 0$, т.е. $\omega_k = \frac{\pi a(2k-1)}{2l}$, $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, ω_k являются собственными значениями, а $X_k(x) = \cos \omega_k \frac{x}{a}$ — собственными функциями рассматриваемой краевой задачи [XII].

Теперь общее решение второго уравнения (6.63) при $\lambda = -\omega_k^2$ можно записать в виде $T_k(t) = a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t$, причем из второго начального условия $b_k = 0$. Общее решение второго уравнения (6.62) запишем как суперпозицию всех решений вида $T_k(t)X_k(x)$, т.е.

$$\dot{m}(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2k-1}{2l} \pi a t \cos \frac{2k-1}{2l} \pi x.$$

Первое начальное условие приводит к равенству

$$\dot{m}(0, x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos \frac{2i-1}{2l} \pi x = \dot{m}^{\circ}.$$

Умножая его среднюю и правую части на $\cos \frac{(2k-1)\pi x}{2l}$ и интегрируя по отрезку $[0, l]$, с учетом ортогональности собственных функций получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} a_i \int_0^l \cos \frac{2k-1}{2l} \pi x \cos \frac{2i-1}{2l} \pi x dx &= a_k \int_0^l \cos^2 \frac{2k-1}{2l} \pi x dx = \\ &= \frac{a_k l}{2} = \int_0^l \dot{m}^{\circ} \cos \frac{2k-1}{2l} \pi x dx = \frac{2l \dot{m}^{\circ}}{(2k-1)\pi} (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

и в итоге находим искомую функцию

$$\dot{m}(t, x) = \frac{4\dot{m}^{\circ}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \cos \frac{2k-1}{2l} \pi a t \cos \frac{2k-1}{2l} \pi x.$$

Зависимость давления жидкости от t и x определим при помощи (6.61):

$$\begin{aligned} p(t, x) &= p_0 + \int_0^t \left(-\frac{a^2}{F_0} \frac{\partial \dot{m}(t, x)}{\partial x} \right) dt = \\ &= p_0 + \frac{2\dot{m}^\circ a^2}{F_0 l} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\int_0^t \cos \frac{2k-1}{2l} \pi a t dt \right) \sin \frac{2k-1}{2l} \pi x = \\ &= p_0 + \frac{4\dot{m}^\circ a}{\pi F_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \sin \frac{2k-1}{2l} \pi a t \sin \frac{2k-1}{2l} \pi x. \end{aligned}$$

Давление жидкости на перекрытом конце трубопровода равно

$$p(t, 0) = p_0 + \frac{4\dot{m}^\circ a}{\pi F_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin \frac{2k-1}{2l} \pi a t. \quad (6.64)$$

Нетрудно убедиться [IX], что сумма ряда в (6.64) равна $\pi/4$ при $t \in (0, 2l/a)$ и $-\pi/4$ при $t \in (2l/a, 4l/a)$. Это означает, что сразу после перекрытия трубопровода в его сечении при $x = l$ скачком возрастает давление жидкости на величину $\Delta p^* = \dot{m}^\circ \frac{a}{F_0}$ и сохраняет это значение в течение интервала времени $\Delta t = 2l/a$, равного времени распространения возмущения от одного конца трубопровода до другого и обратно. Затем давление также скачком уменьшается на величину $2\Delta p^*$ и т.д. Полученное приращение давления Δp^* при перекрытии трубопровода согласуется с известной формулой Жуковского $\Delta p^* = \rho a \bar{w}$ для гидравлического удара, где $\bar{w} = \frac{\dot{m}^\circ}{\rho F_0}$ — средняя в поперечном сечении трубопровода скорость движения жидкости перед его перекрытием. #

При анализе явления гидравлического удара в трубопроводе наряду с решением в виде стоячих волн, полученным в примере 6.9, удобно использовать общее решение уравнений

(6.62), описывающее распространение возмущений в виде бегущих волн [XII]:

$$\begin{cases} p(t, x) - p_0 = f_1(x - at) + f_2(x + at), \\ \dot{m}(t, x) - \dot{m}^0 = g_1(x - at) + g_2(x + at), \end{cases} \quad (6.65)$$

где p_0 и \dot{m}^0 — установившиеся значения давления и массового расхода жидкости, f_1, f_2, g_1, g_2 — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Пример 6.10. Пусть в условиях примера 6.9 в момент времени $t = 0$ в сечении $x = l$ трубопровода возникают возмущения установившихся значений давления p_0 и массового расхода жидкости \dot{m}^0 , вызванные перекрытием этого сечения. Возмущения, равные соответственно $\Delta p^* = \dot{m}^0 \frac{a}{F_0}$ и $-\dot{m}^0$, начинают в виде бегущих волн распространяться со скоростью a к открытому концу трубопровода. При этом, используя (6.65), получаем $p(t, x) = p_0 + \Delta p^*$, $\dot{m}(t, x) = 0$ при $at > l - x$ и $p(t, x) = p_0$, $\dot{m}(t, x) = \dot{m}^0$ при $at < l - x$, $x \in (0, l)$. В момент времени $t^* = \frac{l - x^*}{a} < \frac{l}{a}$ распределения $p(t, x)$ и $\dot{m}(t, x)$ по длине трубопровода имеют ступенчатый характер, изображенный на рис. 6.14. В зоне повышенного давления происходит возрастание в соответствии с (6.55) плотности ρ жидкости и увеличение в соответствии с (6.58) площади F поперечного сечения трубопровода по сравнению с площадью F_0 при давлении p_0 .

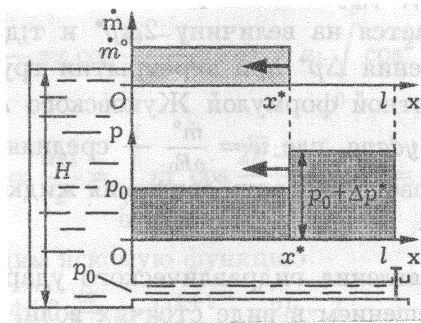


Рис. 6.14

В момент времени $t = l/a$ при достижении бегущими волнами открытого конца трубопровода по всей его длине давление равно $p_0 + \Delta p^*$, а расход жидкости равен нулю, т.е. жидкость неподвижна. Но в соответствии с граничным условием в сечении $x = 0$ давление равно p_0 и поддерживается постоянным, например, за счет постоянного уровня H жидкости в сосуде (см. рис. 6.14). Это приводит к тому, что в момент времени $t = l/a$ в сечении $x = 0$ возникает возмущение давления $p_0 - (p_0 + \Delta p^*) = -\Delta p^*$, которое в виде отраженной бегущей волны начинает распространяться со скоростью a к закрытому концу трубопровода.

Распределение давления по длине трубопровода в момент времени $t_* = \frac{l+x_*}{a} < \frac{2l}{a}$ показано на рис. 6.15. При $x \in (0, x_*)$ возмущения давления разных знаков взаимно уничтожаются, так что давление принимает значение p_0 . При этом плотность жидкости и площадь поперечного сечения трубопровода принимают начальные значения ρ_0 и F_0 соответственно. Это вызывает отраженную от открытого конца трубопровода бегущую волну возмущения расхода жидкости $-\dot{m}^o$, т.е. жидкость при $x \in (0, x_*)$ движется в направлении, противоположном начальному.

При достижении отраженными бегущими волнами в момент времени $t = 2l/a$ закрытого конца трубопровода давление по всей его длине равно p_0 , а расход жидкости равен $-\dot{m}^o$. Но в силу граничного условия $\dot{m}(t, l) = 0$ в этот момент времени при

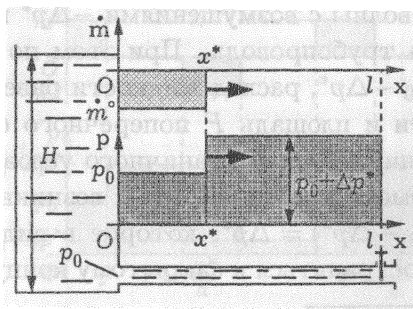


Рис. 6.15

$x = l$ возникнет возмущение расхода жидкости $\dot{m}(t, l) - (-\dot{m}^0) = \dot{m}^0$ обратного знака, которое в виде отраженной бегущей волны начнет распространяться к открытому концу трубопровода. Однако этот процесс реально возможен лишь при выполнении некоторых условий.

Дело в том, что благодаря инерции жидкости, вытекающей из трубопровода через его открытый конец, в момент времени $t = 2l/a$ в сечении $x = l$ возникнет отраженная бегущая волна с возмущением давления $-\Delta p^*$. Если окажется, что $p_0 - \Delta p^* \leq p$, где p — давление насыщенных паров жидкости, то в ней начнется процесс образования пузырьков пара, называемый кавитацией (от латинского слова *cavitas* — пустота). Так, для воды $p = 600$ Па при температуре 0°C и $p = 3200$ Па при температуре 25°C . Средняя плотность образующейся двухфазной парожидкостной смеси уменьшается по сравнению со значением ρ_0 , что приводит к увеличению давления и последующему захлопыванию пузырьков, вызывающему микроразрушения стенок трубопровода, если такое захлопывание происходит на их поверхности*. Двухфазная газожидкостная смесь может возникнуть и в случае, когда в жидкости растворен какой-либо газ (например, воздух). Ясно, что рассматриваемая ММ распространения возмущений в однородной жидкости не применима к двухфазной смеси и сохраняет адекватность при условии $p_0 - \Delta p^* > p$.

Если указанное условие выполнено, то в момент времени $t = 3l/a$ бегущие волны с возмущениями $-\Delta p^*$ и \dot{m}^0 достигнут открытого конца трубопровода. При этом по всей его длине давление равно $p_0 - \Delta p^*$, расход жидкости равен нулю, а плотность ρ жидкости и площадь F поперечного сечения меньше начальных значений. В силу граничного условия $p(t, 0) = p_0$ в этот момент времени в сечении $x = 0$ возникнет возмущение давления $p_0 - (p_0 - \Delta p^*) = \Delta p^*$, которое в виде бегущей волны начнет распространяться к закрытому концу трубопровода

*См.: Чугаев Р.Р.

и достигнет сечения $x = l$ в момент времени $t = 4l/a$. Одновременно будет происходить увеличение значений ρ и F , что вызовет распространение в том же направлении бегущей волны возмущения расхода жидкости \dot{m}° . В результате при $t = 4l/a$ по всей длине трубопровода давление и расход жидкости примут значения p_0 и \dot{m}° , равные начальным. В этот момент времени в сечении $x = l$ снова возникнут возмущения давления Δp^* и расхода жидкости $-\dot{m}^\circ$ и описанный процесс их распространения будет повторяться.

Отметим, что у закрытого конца трубопровода знаки возмущения давления в прямой и отраженной бегущих волнах одинаковы, а знаки возмущения расхода жидкости противоположны. При отражении бегущей волны от открытого конца трубопровода, наоборот, возмущение давления изменяет знак, а возмущение расхода жидкости его сохраняет.

Если зафиксировать некоторое промежуточное сечение $x = x^*$ трубопровода, то изменения в нем во времени t давления и расхода жидкости будут иметь вид, показанный на рис. 6.16, т.е. совершать колебания с периодом $4l/a$. В действительности вследствие сопротивления при движении реальной (вязкой) жидкости в трубопроводе эти колебания постепенно затухают, так что давление в трубопроводе стремится к значению p_0 , а расход жидкости — к нулю.

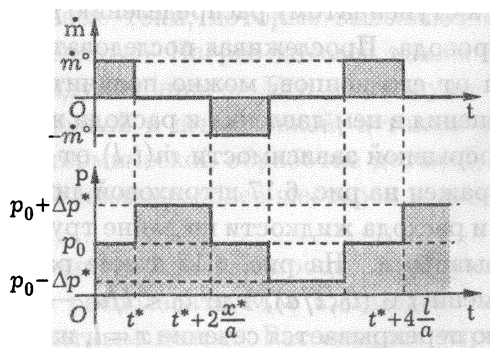


Рис. 6.16

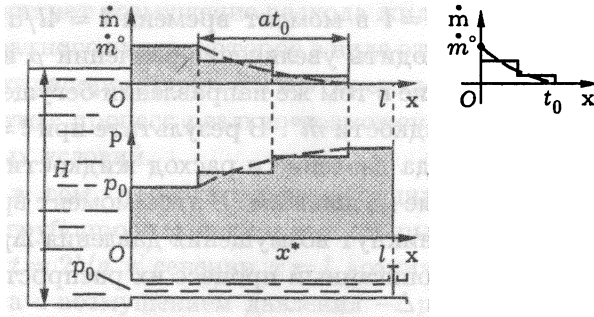


Рис. 6.17

Рассмотренный подход к анализу явления гидравлического удара можно использовать для нахождения распределения давления по длине трубопровода при постепенном перекрытии его сечения $x = l$. Если закон изменения во времени t расхода $\dot{m}(t, l)$ жидкости приблизительно представить в виде ступенчатой зависимости (рис. 6.17), то каждой из n ступеней $\Delta \dot{m}_i$, $i = \overline{0, n-1}$, будет соответствовать бегущая волна возмущения давления $\Delta p_i = \frac{\Delta \dot{m}_i a}{F_i(l)}$, где $F_i(l)$ — площадь поперечного сечения $x = l$ трубопровода при давлении

$$p_i = p_0 + \sum_{j=0}^{i-1} \Delta p_j.$$

Это приведет к ступенчатому распределению $p(t, x)$ давления по длине трубопровода. Проследивая последовательно отражения бегущих волн от его концов, можно получить приближенную картину изменения в нем давления и расхода жидкости. Но при $n \rightarrow \infty$ и непрерывной зависимости $\dot{m}(t, l)$ от времени, график которой изображен на рис. 6.17 штриховой линией, распределения давления и расхода жидкости по длине трубопровода также будут непрерывными. На рис. 6.17 такие распределения для момента времени $t \in (t_0, l/a)$, где $t_0 < l/a$ — время, за которое полностью перекрывается сечение $x = l$, изображены также штриховыми линиями.

При $t \in (l/a, 2l/a)$ распределение $p(t, x)$ давления определяется наложением прямой бегущей волны и отраженной от открытого конца трубопровода. Отметим, что при $t_0 > 2l/a$ давление $p(t, l)$ в перекрытом сечении трубопровода не достигнет значения $p_0 + \Delta p^*$, так как к моменту $t = t_0$ полного перекрытия этого сечения к нему придет отраженная бегущая волна с отрицательным значением возмущения давления. Гидравлический удар при $t_0 > 2l/a$ называют неполным. Если трубопровод длинный и $t_0 < 2l/a$, то можно существенно снизить давление в перекрытом сечении, установив на расстоянии $l_1 \ll at_0$ от этого сечения демпфер, что приведет к неполному гидравлическому удару при перекрытии сечения $x = l$. В данном случае роль демпфера аналогична роли уравнительного резервуара (см. пример 4.5).

Дополнение 6.1. Математическая модель процесса индукционного нагрева

Рассмотрим построение *математической модели* (ММ) *микроровня* достаточно сложного процесса, связанного с происходящими одновременно электромагнитными и тепловыми явлениями.

При взаимодействии внешнего переменного во времени магнитного поля с деталью, выполненной из хорошо проводящего материала (металла), в ее поверхностном слое возникают так называемые вихревые токи, которые вызывают ее нагрев за счет джоулевой теплоты. Нагрев деталей таким способом получил название индукционного. Его используют для нагрева заготовок перед ковкой и штамповкой, а также при сквозной и поверхностной термической обработке деталей, в частности при поверхностной закалке зубьев шестерен и деталей подшипников.

Для количественного анализа процесса индукционного нагрева необходимо располагать ММ взаимодействия детали с переменным магнитным полем. Рассмотрим упрощенный вариант такой ММ применительно к детали в виде металли-

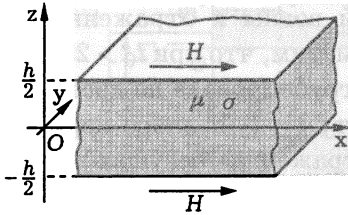


Рис. 6.18

ческого листа толщиной h , помещенного в пространственно однородное внешнее магнитное поле. Вектор \overline{H} напряженности этого поля изменяется во времени t с угловой частотой колебаний ω по закону $\overline{H}(t) = H_0 \sin \omega t$, причем вектор H_0 с модулем $H_0 = |H_0|$ параллелен координатной оси Ox (рис. 6.18). В этом случае вектор \mathbf{H} напряженности магнитного поля, возникающего в проводящем материале листа под действием внешнего поля, на некотором удалении от краев листа практически не будет зависеть от координат x и y , т.е. можно считать $\mathbf{H} = \mathbf{H}(t, z)$.

Примем для материала листа постоянные значения электрической проводимости σ и магнитной проницаемости μ . Отметим, что электрическая проводимость большинства материалов является функцией температуры T , а магнитная проницаемость таких ферромагнитных материалов, как сталь, зависит от напряженности магнитного поля. Поэтому допущения $\sigma = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$ следует рассматривать лишь как первое приближение.

На поверхностях листа при $z = \pm h/2$ (см. рис. 6.18) как на границах между средами с различными свойствами непрерывны тангенциальные проекции вектора напряженности магнитного поля и нормальные проекции вектора \mathbf{B} магнитной индукции [XIII]. Вне листа для воздуха (как и для вакуума) магнитную проницаемость можно принять равной единице, так что $\overline{\mathbf{B}} = \mu_0 \overline{\mathbf{H}}$, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м, а для листа $\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$. Поэтому в данном случае граничные условия имеют вид

$$\begin{cases} H_x(t, \pm h/2) = \overline{H}_x = H_0 \sin \omega t, \\ H_y(t, \pm h/2) = \overline{H}_y \equiv 0, \\ H_z(t, \pm h/2) = \frac{B_z}{\mu \mu_0} = \frac{\overline{B}_z}{\mu \mu_0} = \frac{\overline{H}_z}{\mu} \equiv 0, \end{cases} \quad (6.66)$$

где нижним индексом отмечена проекция векторов напряженности магнитного поля и магнитной индукции на соответствующую координатную ось.

Из второго уравнения (6.2) следует, что $\nabla B = \mu\mu_0 \nabla H = 0$. Но так как вектор \mathbf{H} не зависит от координат x и y , то равенство нулю его дивергенции равносильно равенству $\frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$, т.е. H_z может зависеть лишь от времени. Однако в соответствии с (6.66) $H_z(t, h/2) \equiv 0$, и поэтому по всей толщине листа $H_z \equiv 0$.

Для металлического листа допустимо пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости [XII], т.е. принять для диэлектрической проницаемости материала листа $\epsilon \rightarrow 0$. Тогда каждая из проекций H_x и H_y вектора \mathbf{H} будет удовлетворять одномерному уравнению вида (6.4) при $a \rightarrow \infty$, или

$$\sigma\mu\mu_0 \frac{\partial H_x(t, z)}{\partial t} = \frac{\partial^2 H_x(t, z)}{\partial z^2}, \quad \sigma\mu\mu_0 \frac{\partial H_y(t, z)}{\partial t} = \frac{\partial^2 H_y(t, z)}{\partial z^2}.$$

Применим для решения этих уравнений интегральное преобразование Лапласа вида (6.37), приняв в начальный момент времени $t = 0$ значения $H_x(0, z) = H_y(0, z) = 0$. В результате с учетом (6.66) получим ОДУ второго порядка

$$\begin{cases} \frac{d^2 \tilde{H}_x(p, z)}{dz^2} - 4\zeta^2 \tilde{H}_x(p, z) = 0, \\ \frac{d^2 \tilde{H}_y(p, z)}{dz^2} - 4\zeta^2 \tilde{H}_y(p, z) = 0, \end{cases} \quad (6.67)$$

где $\zeta = \sqrt{\rho\sigma\mu\mu_0/4}$, с граничными условиями

$$\begin{cases} \tilde{H}_x(p, \pm h/2) = \int_0^\infty H_0 e^{-pt} \sin \omega t dt = \frac{\omega H_0}{p^2 + \omega^2}, \\ \tilde{H}_y(p, \pm h/2) = 0. \end{cases} \quad (6.68)$$

Решение второго уравнения (6.67) имеет вид

$$\tilde{H}_y(p, z) = C_2 \operatorname{ch} 2\zeta z + D_2 \operatorname{sh} 2\zeta z.$$

Подставляя это решение во второе равенство (6.68), получаем однородную СЛАУ

$$C_2 \operatorname{ch} \zeta h + D_2 \operatorname{sh} \zeta h = 0, \quad C_2 \operatorname{ch} \zeta h - D_2 \operatorname{sh} \zeta h = 0$$

относительно констант C_2 и D_2 . Эта СЛАУ имеет лишь нулевое решение, поскольку ее определитель $-\operatorname{sh} 2\zeta h$ отличен от нуля. Таким образом, $\tilde{H}_y(p, z) \equiv 0$, а значит, и $H_y(t, z) \equiv 0$.

Первому уравнению (6.67) удовлетворяет аналогичное решение

$$\tilde{H}_x(p, z) = C_1 \operatorname{ch} 2\zeta z + D_1 \operatorname{sh} 2\zeta z,$$

подстановка которого в первое равенство (6.68) дает соотношение

$$C_1 \operatorname{ch} \zeta h + D_1 \operatorname{sh} \zeta h = \frac{\omega H_0}{p^2 + \omega^2}, \quad C_1 \operatorname{ch} \zeta h - D_1 \operatorname{sh} \zeta h = \frac{\omega H_0}{p^2 + \omega^2}.$$

Отсюда $C_1 = \frac{\omega H_0}{(p^2 + \omega^2) \operatorname{ch} \zeta h}$ и $D_1 = 0$, так что решение первого уравнения (6.67) принимает вид

$$\tilde{H}_x(p, z) = \frac{\omega H_0 \operatorname{ch} 2\zeta z}{(p^2 + \omega^2) \operatorname{ch} \zeta h} = \frac{\varphi(p, z)}{\psi(p)},$$

где $\varphi(p, z) = \omega H_0 \operatorname{ch} 2\zeta z$ и $\psi(p) = (p^2 + \omega^2) \operatorname{ch} \zeta h$ — аналитические функции аргумента p , причем $i = \sqrt{-1}$.

Для перехода от изображения $\tilde{H}_x(t, z)$ к оригиналу $H_x(t, z)$ следует найти полюсы $[X]$ функции $\tilde{H}_x(p, z)$ комплексного переменного p , т.е. нули функции $\psi(p)$. Ими будут $p_{-1,0} = \pm i\omega$ и $p_n = -(2n - 1)^2 \frac{\pi^2}{\sigma \mu_0 h^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Так как все полюсы простые, а

функция $\tilde{H}(p, z)$ удовлетворяет условиям третьей теоремы разложения [XI], то в соответствии с (6.40) и (6.42) получим

$$H_x(t, z) = \sum_{n=-1}^{\infty} \operatorname{Res}_{p=p_n} (\tilde{H}_x(p, z) e^{pt}) = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{\varphi(p_n, z) e^{p_n t}}{\left. \frac{d\psi(p)}{dp} \right|_{p=p_n}}.$$

Вычисляя вычеты и учитывая выражение для ζ , находим

$$\begin{aligned} \frac{H_x(t, z)}{H_0} &= \frac{\operatorname{ch} 2\bar{\omega} \sqrt{2i} \frac{z}{h}}{2i \operatorname{ch} \bar{\omega} \sqrt{2i}} e^{i\omega t} - \frac{\operatorname{ch} 2\bar{\omega} \sqrt{-2i} \frac{z}{h}}{2i \operatorname{ch} \bar{\omega} \sqrt{-2i}} e^{-i\omega t} - \\ &- 32\pi\bar{\omega}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n-1) \cos(2n-1) \frac{\pi z}{h}}{(2n-1)^4 \pi^4 + 64\bar{\omega}^4} \exp\left(-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{8\bar{\omega}^2} \omega t\right), \end{aligned}$$

где $\bar{\omega} = \sqrt{\frac{\omega \sigma \mu \mu_0}{8}} h$.

С течением времени все слагаемые под знаком суммы стремятся к нулю, так что начиная с некоторого момента времени t_* можно считать процесс изменения магнитного поля в листе периодическим, описываемым лишь первыми двумя слагаемыми. При $z = 0$ ряд, определяемый этой суммой, является знакопеременным. Поэтому его значение не будет превышать δ при $t \geq t_*$, если t_* определить из условия равенства первого члена этого ряда значению δ , т.е.

$$t_* = \frac{8\bar{\omega}^2}{\pi^2 \omega} \ln \frac{32\pi\bar{\omega}^2/\delta}{\pi^4 + 64\bar{\omega}^4} = \frac{\sigma \mu \mu_0 h^2}{\pi^2} \ln \frac{4\pi\omega \sigma \mu \mu_0 h^2/\delta}{\pi^4 + (\omega \sigma \mu \mu_0 h^2)^2}.$$

При достаточно высокой угловой частоте колебаний ω дробь под знаком логарифма может оказаться меньше единицы даже при весьма малых значениях δ . Это означает, что в таком случае с погрешностью, не превышающей δ , процесс можно считать периодическим начиная с момента времени $t = 0$, т.е. положить $t_* = 0$.

Перейдем к нахождению распределения плотности вихревых токов в листе при периодическом изменении в нем магнитного поля. Из третьего уравнения (6.2) при $D \equiv 0$ получим для

вектора \mathbf{j} плотности вихревых токов $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H}$. Используя представление дифференциальной операции ротора в прямоугольной системе координат [VII], приходим к выводу, что от нуля отлична лишь проекция вектора \mathbf{j} на ось Oy : $j_y(t, z) = \frac{\partial H_x(t, z)}{\partial z}$, или, учитывая в выражении для отношения $\frac{H_x(t, z)}{H_0}$ лишь первые два слагаемых и используя формулу Эйлера [X], получаем

$$\begin{aligned} j_y(t, z) &= H_0 \frac{\bar{\omega}}{i\hbar} (Z_i(z) e^{i\omega t} - Z_{-i}(z) e^{-i\omega t}) = \\ &= H_0 \frac{\bar{\omega}}{i} \left((Z_i(z) - Z_{-i}(z)) \cos \omega t + i(Z_i(z) + Z_{-i}(z)) \sin \omega t \right) = \\ &= 2H_0 \frac{\bar{\omega}}{h} \sqrt{Z_i(z) Z_{-i}(z)} \sin \left(\omega t + \arctg i \frac{Z_i(z) - Z_{-i}(z)}{Z_i(z) + Z_{-i}(z)} \right), \quad (6.69) \end{aligned}$$

где

$$Z_i(z) = \sqrt{2i} \frac{\text{sh } 2\bar{\omega} \sqrt{2i} \frac{z}{h}}{\text{ch } \bar{\omega} \sqrt{2i}}, \quad Z_{-i}(z) = \sqrt{-2i} \frac{\text{sh } 2\bar{\omega} \sqrt{-2i} \frac{z}{h}}{\text{ch } \bar{\omega} \sqrt{-2i}}.$$

Отметим, что так как $Z_i(0) = Z_{-i}(0) = 0$ при $z = 0$, то в середине листа $j_y(t, 0) \equiv 0$.

Преобразуем выражение для $j_y(t, z)$ к действительному виду, учитывая, что $\sqrt{\pm 2i} = \pm(1 \pm i)$ (см. пример 6.8). Знак „ \pm “ перед $(1 \pm i)$ можно опустить, так как $\text{ch } \xi$ — функция четная, а нечетная функция $\text{sh } \xi$ в выражении для $j_y(t, z)$ имеет множителем аргумент ξ . В соответствии с известными формулами [X] запишем

$$\begin{aligned} \text{sh } 2\bar{\omega} \sqrt{\pm 2i} \frac{z}{h} &= \text{sh } 2\bar{\omega} (1 \pm i) \frac{z}{h} = \\ &= \text{sh } 2\bar{\omega} \frac{z}{h} \cos 2\bar{\omega} \frac{z}{h} \pm i \text{ch } 2\bar{\omega} \frac{z}{h} \sin 2\bar{\omega} \frac{z}{h}, \end{aligned}$$

$$\text{ch } \bar{\omega} \sqrt{\pm 2i} = \text{ch } \bar{\omega} (1 \pm i) = \text{ch } \bar{\omega} \cos \bar{\omega} \pm i \text{sh } \bar{\omega} \sin \bar{\omega}.$$

Отсюда с учетом (6.69) находим

$$\begin{aligned} Z_i(z) Z_{-i}(z) &= 2 \frac{\operatorname{sh}^2 2\bar{\omega} \frac{z}{h} \cos^2 2\bar{\omega} \frac{z}{h} + \operatorname{ch}^2 2\bar{\omega} \frac{z}{h} \sin^2 2\bar{\omega} \frac{z}{h}}{\operatorname{ch}^2 \bar{\omega} \cos^2 \bar{\omega} + \operatorname{sh}^2 \bar{\omega} \sin^2 \bar{\omega}} = \\ &= 2 \frac{\operatorname{sh}^2 2\bar{\omega} \frac{z}{h} \cos^2 2\bar{\omega} \frac{z}{h} + \left(1 + \operatorname{sh}^2 2\bar{\omega} \frac{z}{h}\right) \sin^2 2\bar{\omega} \frac{z}{h}}{\operatorname{ch}^2 \bar{\omega} \cos^2 \bar{\omega} + (\operatorname{ch}^2 \bar{\omega} - 1) \sin^2 \bar{\omega}} = \\ &= 2 \frac{\operatorname{sh}^2 2\bar{\omega} \frac{z}{h} + \sin^2 2\bar{\omega} \frac{z}{h}}{\operatorname{ch}^2 \bar{\omega} - \sin^2 \bar{\omega}} = 2 \frac{\operatorname{sh}^2 2\bar{\omega} \frac{z}{h}}{\operatorname{ch}^2 \bar{\omega}} \frac{1 + \frac{\sin^2 2\bar{\omega} z/h}{\operatorname{ch}^2 \bar{\omega}}}{1 - \frac{\sin^2 \bar{\omega}}{\operatorname{ch}^2 \bar{\omega}}} \end{aligned}$$

и, кроме того,

$$i \frac{Z_i(z) - Z_{-i}(z)}{Z_i(z) + Z_{-i}(z)} = \frac{r \operatorname{sh} 2\bar{\omega} \frac{z}{h} \cos 2\bar{\omega} \frac{z}{h} - s \operatorname{ch} 2\bar{\omega} \frac{z}{h} \sin 2\bar{\omega} \frac{z}{h}}{s \operatorname{sh} 2\bar{\omega} \frac{z}{h} \cos 2\bar{\omega} \frac{z}{h} + r \operatorname{ch} 2\bar{\omega} \frac{z}{h} \sin 2\bar{\omega} \frac{z}{h}},$$

где $r = \operatorname{th} \bar{\omega} \cdot \operatorname{tg} \bar{\omega} - 1$ и $s = \operatorname{th} \bar{\omega} \cdot \operatorname{tg} \bar{\omega} + 1$.

При высокой угловой частоте колебаний ω напряженности внешнего магнитного поля имеем $\bar{\omega} \gg 1$. В этом случае можно принять $Z_i(z) Z_{-i}(z) = 2 \frac{\operatorname{sh}^2(2\bar{\omega} z/h)}{\operatorname{ch}^2 \bar{\omega}}$ и амплитуду колебаний плотности вихревых токов представить в соответствии с (6.69) в виде $A_j(z) = 2\sqrt{2} H_0 \left(\frac{\bar{\omega}}{h}\right) \frac{|\operatorname{sh}(2\bar{\omega} z/h)|}{\operatorname{ch} \bar{\omega}}$. Наибольшего значения $A_{\max} = 2\sqrt{2} H_0 (\bar{\omega}/h) \operatorname{th} \bar{\omega} \approx H_0 \sqrt{\omega \sigma \mu \mu_0}$ эта амплитуда достигает на поверхностях листа при $z = \pm h/2$. Характер зависимости $A_j(z)$ иллюстрирует график на рис. 6.19, изображенный сплошной линией. При $\bar{\omega} \geq 1$ вычислим

$$\begin{aligned} i \frac{Z_i(h) - Z_{-i}(h)}{Z_i(h) + Z_{-i}(h)} &= \frac{r \operatorname{sh} \bar{\omega} \cos \bar{\omega} - s \operatorname{ch} \bar{\omega} \sin \bar{\omega}}{s \operatorname{sh} \bar{\omega} \cos \bar{\omega} + r \operatorname{ch} \bar{\omega} \sin \bar{\omega}} \approx \\ &\approx \frac{(\operatorname{tg} \bar{\omega} - 1) \cos \bar{\omega} - (\operatorname{tg} \bar{\omega} + 1) \sin \bar{\omega}}{(\operatorname{tg} \bar{\omega} + 1) \cos \bar{\omega} + (\operatorname{tg} \bar{\omega} - 1) \sin \bar{\omega}} = -1, \end{aligned}$$

т.е. изменение плотности вихревых токов на поверхностях листа отстает по фазе на $\pi/4$ от изменения напряженности высокочастотного внешнего магнитного поля.

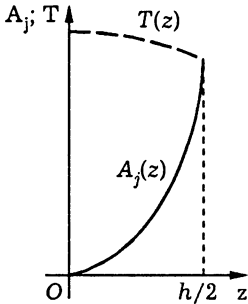


Рис. 6.19

Вихревые токи вызывают нагрев листа, причем средняя за период колебаний объемная мощность выделения джоулевой теплоты при $\bar{\omega} \gg 1$ изменяется по толщине листа и равна

$$q_V(z) = \frac{A_j^2(z)}{2\sigma} = \frac{4H_0^2\bar{\omega}^2}{h^2\sigma} \frac{\text{sh}^2 2\bar{\omega} \frac{z}{h}}{\text{ch}^2 \bar{\omega}} = H_0^2 \omega \mu \mu_0 \frac{\text{ch} 4\bar{\omega} \frac{z}{h} - 1}{4\text{ch}^2 \bar{\omega}}. \quad (6.70)$$

Если считать коэффициент теплопроводности λ и объемную теплоемкость c материала листа постоянными, то при периодическом изменении в нем магнитного поля нестационарное температурное поле, описываемое функцией $T(t, z)$, удовлетворяет уравнению [XII], [XIII]

$$\frac{c}{\lambda} \frac{\partial T(t, z)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(t, z)}{\partial z^2} + \frac{q_V(z)}{\lambda} \quad (6.71)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial T(t, h/2)}{\partial z} &= \alpha \left(T_* - T\left(t, \frac{h}{2}\right) \right), \\ -\lambda \frac{\partial T(t, -h/2)}{\partial z} &= \alpha \left(T_* - T\left(t, -\frac{h}{2}\right) \right), \end{aligned}$$

где α — коэффициент теплоотдачи от поверхности листа к воздуху температурой T_* . Обозначим $\vartheta(t, z) = T(t, z) - T_*$. Тогда если в качестве начального условия принять $\vartheta(0, z) \equiv T_0 - T_* = \vartheta_0 = \text{const}$, где T_0 — начальная температура листа, то в силу симметрии относительно плоскости $z = 0$ граничные условия можно представить в виде

$$\frac{\partial \vartheta(t, 0)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta(t, h/2)}{\partial z} + \frac{\alpha}{\lambda} \vartheta\left(t, \frac{h}{2}\right) = 0. \quad (6.72)$$

В данном случае вследствие зависимости q_V от координаты z для решения сформулированной задачи целесообразно применить интегральное преобразование по переменному z [XI]:

$$\tilde{\vartheta}(t, p) = \int_0^{h/2} \vartheta(t, z) K(z, p) dz, \quad (6.73)$$

где ядро $K(z, p)$ этого преобразования удовлетворяет следующей задаче Штурма — Лиувилля:

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 K(z, p)}{dz^2} &= p^2 K(z, p), \quad z \in \left(0, \frac{h}{2}\right); \\ \frac{dK(0, p)}{dz} &= 0, \quad \frac{dK(h/2, p)}{dz} + \frac{\alpha}{\lambda} K\left(\frac{h}{2}, p\right) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда $K(z, p) = C \cos pz + D \sin pz$, причем из граничного условия при $z = 0$ следует, что $D = 0$, а граничное условие при $z = h/2$ будет удовлетворено, если p является корнем трансцендентного уравнения

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{ph}{2}\right) = \frac{\lambda p}{\alpha}. \quad (6.74)$$

Константу C найдем из условия нормировки на отрезке $[0, h/2]$:

$$\|K(z, p)\|^2 = \int_0^{h/2} K^2(z, p) dz = C^2 \int_0^{h/2} \cos^2 pz dz = \frac{C^2}{2} \left(\frac{h}{2} + \frac{\sin ph}{2p}\right) = 1.$$

Отсюда $C = 2\sqrt{\frac{p}{ph + \sin ph}}$. Так как правая часть этого равенства является четной функцией от p , то достаточно рассматривать лишь счетное множество положительных корней $p_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, уравнения (6.74), записав в итоге

$$K(z, p_n) = 2\sqrt{p_n} \frac{\cos p_n z}{\sqrt{p_n h + \sin p_n h}}. \quad (6.75)$$

Применяя к (6.71) и начальному условию преобразование (6.73), с учетом (6.70) и обозначения $\vartheta(t, z) = T(t, z) - T_*$ получаем ОДУ первого порядка

$$\frac{d\tilde{\vartheta}(t, p_n)}{dt} + ap_n^2 \tilde{\vartheta}(t, p_n) = \frac{H_0^2 \omega \mu \mu_0 \sqrt{p_n}}{2c \sqrt{p_n h} + \sin p_n h} \operatorname{ch}^2 \bar{\omega} I(p_n)$$

относительно изображения $\tilde{\vartheta}(t, p_n)$, где $a = \lambda/c$ и

$$\begin{aligned} I(p_n) &= \int_0^{h/2} \left(\operatorname{ch} 4\bar{\omega} \frac{z}{h} - 1 \right) \cos p_n z \, dz = \\ &= \frac{4\frac{\bar{\omega}}{h} \operatorname{sh} 2\bar{\omega} \cos p_n \frac{h}{2} + p_n \operatorname{ch} 2\bar{\omega} \sin p_n \frac{h}{2}}{\left(4\frac{\bar{\omega}}{h}\right)^2 + p_n^2} - \frac{1}{p_n} \sin p_n \frac{h}{2}, \end{aligned}$$

с начальным условием

$$\tilde{\vartheta}(0, p_n) = \frac{2\vartheta_0 \sqrt{p_n}}{\sqrt{p_n h} + \sin p_n h} \int_0^{h/2} \cos p_n z \, dz = \frac{2\vartheta_0 \sqrt{h} \sin \frac{p_n h}{2}}{\sqrt{p_n h} (p_n h + \sin p_n h)}.$$

Отсюда находим решение относительно изображения

$$\begin{aligned} \tilde{\vartheta}(t, p_n) &= \frac{2\vartheta_0 \sqrt{h} \sin \frac{p_n h}{2}}{\sqrt{p_n h} (p_n h + \sin p_n h)} e^{-ap_n^2 t} + \\ &+ \frac{H_0^2 \omega \mu \mu_0 \sqrt{p_n}}{2\lambda p_n^2 \sqrt{p_n h} + \sin p_n h} \operatorname{ch}^2 \bar{\omega} I(p_n) (1 - e^{-ap_n^2 t}). \quad (6.76) \end{aligned}$$

Используя формулу обращения [XI]

$$\vartheta(t, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\vartheta}(t, p_n) K(z, p_n) \quad (6.77)$$

и учитывая (6.76), переходим к оригиналу

$$\vartheta(t, z) = 4\vartheta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin p_n \frac{h}{2}}{p_n h + \sin p_n h} e^{-ap_n^2 t} \cos p_n z + \frac{H_0^2 \omega \mu \mu_0 h}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I(p_n) \cos p_n z}{p_n h (p_n h + \sin p_n h) \operatorname{ch}^2 \bar{\omega}} (1 - e^{-ap_n^2 t}). \quad (6.78)$$

Первая сумма в (6.78) учитывает отличие начальной температуры T_0 листа от температуры T_b воздуха и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. В частном случае равенства этих температур $\vartheta = 0$ и первая сумма в (6.78) исчезает. Вторая сумма в (6.78) отражает влияние нагрева листа вихревыми токами. При $t \rightarrow \infty$ распределение температуры по толщине листа стремится к установившемуся, определяемому формулой

$$T(z) = T_b + \frac{H_0^2 \omega \mu \mu_0 h}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I(p_n) \cos p_n z}{p_n h (p_n h + \sin p_n h) \operatorname{ch}^2 \bar{\omega}}.$$

Однако пользоваться этой формулой неудобно, поскольку нахождение температуры связано с громоздкими вычислениями и требует суммирования значительного количества членов ряда. Установившееся распределение температуры можно найти непосредственно решением ОДУ второго порядка, которое следует из (6.71), если приравнять нулю его правую часть. Первое интегрирование с учетом (6.70) и граничного условия $\frac{dT(0)}{dz} = 0$ дает равенство

$$\begin{aligned} \frac{dT(z)}{dz} &= - \int_0^z \frac{q_V(z)}{\lambda} dz = \\ &= - \frac{4H_0^2 \bar{\omega}^2}{\lambda h^2 \sigma} \int_0^z \frac{\operatorname{sh}^2 \bar{\omega} \frac{z}{h}}{\operatorname{ch}^2 \bar{\omega}} dz = H_0^2 \bar{\omega} \frac{4\bar{\omega} \frac{z}{h} - \operatorname{sh} 4\bar{\omega} \frac{z}{h}}{2\lambda h \sigma \operatorname{ch}^2 \bar{\omega}}. \end{aligned}$$

После второго интегрирования запишем

$$T(z) = C^* + H_0^2 \frac{8 \left(\bar{\omega} \frac{z}{h} \right)^2 - \operatorname{ch} 4\bar{\omega} \frac{z}{h}}{8\lambda \sigma \operatorname{ch}^2 \bar{\omega}}.$$

Константу C^* найдем исходя из граничного условия $\frac{dT(h/2)}{dz} = \frac{\alpha}{\lambda}(T_b - T(h/2))$ на поверхности листа:

$$H_0^2 \bar{\omega} \frac{2\bar{\omega} - \text{sh } 2\bar{\omega}}{2\lambda h \sigma \text{ch}^2 \bar{\omega}} = \frac{\alpha}{\lambda} \left(T_b - C^* - H_0^2 \frac{2\bar{\omega}^2 - \text{ch } 2\bar{\omega}}{8\lambda \sigma \text{ch}^2 \bar{\omega}} \right).$$

Выражая отсюда константу C^* и подставляя ее в предыдущее равенство, получаем

$$T(z) = T_b + H_0^2 \bar{\omega} \frac{\text{sh } 2\bar{\omega} - 2\bar{\omega}}{2\alpha h \text{ch}^2 \bar{\omega}} + H_0^2 \frac{\text{ch } 2\bar{\omega} - \text{ch } 4\bar{\omega} \frac{z}{h} - 2\bar{\omega}^2 \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right)}{8\lambda \sigma \text{ch}^2 \bar{\omega}}.$$

Температуру поверхностей листов определяют первые два слагаемых в правой части этого равенства. Характер установившегося распределения температуры представлен на рис. 6.19 штриховой линией.

Теперь вместо (6.78) можно написать

$$\begin{aligned} T(t, z) = & T_b + 4(T_0 - T_b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin p_n \frac{h}{2}}{p_n h + \sin p_n h} e^{-ap_n^2 t} \cos p_n z + \\ & + H_0^2 \bar{\omega} \frac{\text{sh } 2\bar{\omega} - 2\bar{\omega}}{2\alpha h \text{ch}^2 \bar{\omega}} + H_0^2 \frac{\text{ch } 2\bar{\omega} - \text{ch } 4\bar{\omega} \frac{z}{h} - 2\bar{\omega}^2 \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right)}{8\lambda \sigma \text{ch}^2 \bar{\omega}} - \\ & - \frac{8H_0^2 \bar{\omega}^2}{\lambda h \sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I(p_n) \cos p_n z}{p_n h (p_n h + \sin p_n h) \text{ch}^2 \bar{\omega}} e^{-ap_n^2 t}. \quad (6.79) \end{aligned}$$

Время t^* , за которое с абсолютной погрешностью Δ происходит завершение процесса установления распределения температуры в листе, можно оценить, приравняв Δ первому слагаемому второй суммы в (6.79). Тогда получим

$$t^* = \frac{1}{ap_1^2} \ln \frac{8H_0^2 \bar{\omega}^2 I(p_1)}{\lambda h^2 \Delta \sigma p_1 (p_1 h + \sin p_1 h) \text{ch}^2 \bar{\omega}}.$$

Отметим, что $p_1 h \in (0, \pi/h)$, так как в соответствии с геометрической интерпретацией уравнения вида (6.74), представленной на рис. 6.10, $p_1 h/2 \in (0, \pi/2)$.

Для поверхностной термической обработки листа или других деталей применяют кратковременный индукционный нагрев при высокой частоте изменения внешнего магнитного поля. В этом случае использовать (6.79) при расчете температурного поля нерационально, так как для достижения приемлемой точности необходимо суммировать слишком большое количество слагаемых. Возможен иной подход к построению ММ процесса кратковременного высокочастотного индукционного нагрева. Он основан на том, что с увеличением угловой частоты колебаний ω уменьшается толщина поверхностного слоя, в пределах которого напряженность магнитного поля в листе и плотность вихревых токов оказываются существенными. Поэтому поверхностный слой, в котором локализовано выделение джоулевой теплоты, может составлять весьма малую долю толщины листа, так что за короткий период нагрева повышение температуры происходит главным образом лишь в пределах этого слоя.

Введем координату $\xi = h/2 - z$, отсчитываемую по нормали к поверхности листа внутрь его. Заменяв в (6.70) z на $h/2 - \xi$, запишем

$$q_V(\xi) = H_0^2 \omega \mu \mu_0 \frac{(\text{sh } \bar{\omega} \text{ ch } 2\bar{\omega}\xi/h - \text{ch } \bar{\omega} \text{ sh } 2\bar{\omega}\xi/h)^2}{2 \text{ch}^2 \bar{\omega}}.$$

Так как $\text{sh } \bar{\omega} \approx \text{ch } \bar{\omega}$ при $\bar{\omega} \gg 1$, то получим

$$\begin{aligned} q_V(\xi) &\approx \frac{H_0^2 \omega \mu \mu_0}{2} \left(\text{ch } 2\bar{\omega} \frac{\xi}{h} - \text{sh } 2\bar{\omega} \frac{\xi}{h} \right)^2 = \\ &= \frac{H_0^2 \omega \mu \mu_0}{2} e^{-\sqrt{\omega \sigma \mu \mu_0 / 2} \xi}, \quad (6.80) \end{aligned}$$

т.е. объемная мощность выделения джоулевой теплоты не зависит от толщины листа. Это означает, что при $\bar{\omega} \gg 1$ можно

использовать *расчетную схему* (РС) полупространства с заданным на его ограничивающей плоскости внешним магнитным полем, напряженность которого изменяется по тому же закону, что и в случае листа толщиной h . Для такой РС последнее равенство становится точным. Ту же РС допустимо применить и к поверхности детали произвольной формы, если для оценки значения $\bar{\omega}$ взять толщину h детали в направлении нормали к этой поверхности.

Используем (6.80) для построения ММ процесса кратковременного высокочастотного индукционного нагрева. Если пренебречь за период t_* нагрева передачей теплоты теплопроводностью и теплообменом листа с воздухом, то распределение температуры в поверхностном слое листа к моменту окончания нагрева будет равно

$$T_{\max}(t_*, \xi) = T_0 + \frac{qv(\xi)t_*}{c} = T_0 + \frac{H_0^2 \omega \mu \mu_0 t_*}{2c} e^{-\sqrt{\omega \sigma \mu \mu_0 / 2} \xi}. \quad (6.81)$$

Эта формула дает верхнюю оценку возможных значений температур в поверхностном слое.

При поверхностной закалке сразу после прекращения нагрева поверхность подвергают интенсивному охлаждению. На этой стадии ММ процесса включает уравнение

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \bar{\vartheta}(t, z)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{\vartheta}(t, z)}{\partial \xi^2}, \quad t > t_*, \quad (6.82)$$

с граничными условиями вида (6.72)

$$\frac{\partial \bar{\vartheta}(t, 0)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\vartheta}(t, h/2)}{\partial \xi} + \frac{\alpha_c}{\lambda} \bar{\vartheta}\left(t, \frac{h}{2}\right), \quad t > t_*,$$

где $\bar{\vartheta}(t, z) = T(t, z) - T_c$, α_c — коэффициент теплоотдачи от поверхности листа к охлаждающей среде температурой T_c . В качестве начального условия с учетом (6.81) примем

$$\bar{\vartheta}(t_*, z) = T_0 - T_c + \frac{4H_0^2 \bar{\omega}^2 t_*}{c \sigma h^2} e^{-\bar{\omega}(1-2z/h)}, \quad \bar{\omega} = \sqrt{\frac{\omega \sigma \mu \mu_0 h^2}{8}}.$$

Для решения уравнения (6.82) также целесообразно применить интегральное преобразование вида (6.73) по переменной z , причем ядро (6.75) этого преобразования будет содержать значения p_n , которые являются корнями трансцендентного уравнения, аналогичного (6.74), но с заменой α на α_c . Изображение $\widehat{\vartheta}(t, p_n)$ должно удовлетворять однородному ОДУ первого порядка $\frac{d\widehat{\vartheta}(t, p_n)}{dt} + ap_n^2 \widehat{\vartheta}(t, p_n) = 0$ с начальным условием

$$\widehat{\vartheta}(t_*, p_n) = \int_0^{h/2} \overline{\vartheta}(t_*, z) K(z, p_n) dz = \frac{2(T_0 - T_c) \sin \frac{p_n h}{2}}{\sqrt{p_n(p_n h + \sin p_n h)}} +$$

$$+ \frac{8H_0^2 \bar{\omega}^2 t_* \sqrt{p_n}}{c\sigma h \sqrt{p_n h + \sin p_n h}} \frac{p_n h \sin \frac{p_n h}{2} + \bar{\omega} \left(\cos \frac{p_n h}{2} - e^{-\bar{\omega}} \right)}{(p_n h)^2 + 4\bar{\omega}^2}.$$

Решение $\widehat{\vartheta}(t, p_n) = \widehat{\vartheta}(t_*, p_n) e^{-ap_n^2(t-t_*)}$ после подстановки в формулу (6.77) обращения дает в итоге решение относительно искомого распределения температуры в листе на стадии охлаждения:

$$T(t, z) = T_c + 4(T_0 - T_c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{p_n h}{2}}{p_n h + \sin p_n h} e^{-ap_n^2(t-t_*)} \cos p_n z +$$

$$+ \frac{16H_0^2 \bar{\omega}^2 t_*}{c\sigma h^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n h \sin \frac{p_n h}{2} + \bar{\omega} \left(\cos \frac{p_n h}{2} - e^{-\bar{\omega}} \right)}{\left(1 + \frac{\sin p_n h}{p_n h} \right) (p_n^2 h^2 + 4\bar{\omega}^2)} e^{-ap_n^2(t-t_*)} \cos p_n z.$$

Отсюда можно найти время охлаждения, которое обеспечивает снижение температуры в поверхностном слое листа до такого уровня, ниже которого структура закаленного материала остается стабильной.

Напомним, что (6.81) соответствует оценке сверху распределения температуры в поверхностном слое листа в конце нагрева. Для выяснения погрешности этой оценки используем с

учетом (6.80) РС полупространства и рассмотрим ММ, включающую уравнение

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T(t, \xi)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(t, \xi)}{\partial \xi^2} + \frac{H_0^2 \omega \mu \mu_0}{2\lambda} e^{-\sqrt{\omega \sigma \mu \mu_0 / 2} \xi}, \quad \xi > 0, \quad (6.83)$$

с начальным условием $T(0, \xi) = T_0$ и граничными условиями

$$\frac{\partial T(t, 0)}{\partial \xi} = \frac{\alpha}{\lambda} (T(t, 0) - T_*), \quad \frac{\partial T(t, \xi)}{\partial \xi} \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow \infty. \quad (6.84)$$

Эта ММ даст оценку снизу значений температур в поверхностном слое листа в конце нагрева.

Применим к (6.83) интегральное преобразование Лапласа (6.37). В результате с учетом начального условия получим ОДУ второго порядка

$$\frac{d^2 \tilde{T}(p, \xi)}{d\xi^2} - \frac{pT(p, \xi)}{a} = -\frac{T_0}{a} - \frac{H_0^2 \omega \mu \mu_0}{2\lambda p} e^{-\sqrt{\omega \sigma \mu \mu_0 / 2} \xi}$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \tilde{T}(p, 0)}{\partial \xi} = \frac{\alpha}{\lambda} \left(\tilde{T}(p, 0) - \frac{T_*}{p} \right), \quad \frac{\partial \tilde{T}(p, \xi)}{\partial \xi} \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow \infty.$$

Общее решение этого ОДУ

$$\begin{aligned} \tilde{T}(p, \xi) = & C_* e^{\sqrt{p/a} \xi} + D_* e^{-\sqrt{p/a} \xi} + \\ & + \frac{T_0}{p} + \frac{H_0^2 \omega \mu \mu_0}{cp(2p - \omega \sigma \mu \mu_0 a)} e^{-\sqrt{\omega \sigma \mu \mu_0 / 2} \xi} \end{aligned}$$

удовлетворяет граничным условиям при $C_* = 0$ и

$$D_* = \frac{T_* - T_0}{p \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} - \frac{H_0^2 \omega \mu \mu_0 \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{\omega \sigma \mu \mu_0}{2}} \right)}{cp \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{p}{a}} \right) (2p - \omega \sigma \mu \mu_0 a)}.$$

В итоге запишем решение относительно изображения:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(p, \xi) = & \frac{T_0}{p} + \frac{H_0^2 \omega \mu \mu_0 e^{-\sqrt{\omega \sigma \mu \mu_0 / 2} \xi}}{c p (2p - \omega \sigma \mu \mu_0 a)} + \frac{(T_* - T_0) e^{-\sqrt{p/a} \xi}}{p \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{p}{a}}\right)} - \\ & - \frac{H_0^2 \omega \mu \mu_0}{c p (2p - \omega \sigma \mu \mu_0 a)} \frac{1 + \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{\omega \sigma \mu \mu_0}{2}}}{1 + \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{p}{a}}} e^{-\sqrt{p/a} \xi}. \end{aligned}$$

Отсюда, используя таблицу соответствия оригиналов и изображений*, находим

$$\begin{aligned} T(t, \xi) = & T_0 + \frac{H_0^2 e^{-\sqrt{\omega \sigma \mu \mu_0 / 2} \xi}}{\lambda \sigma} \left(e^{\frac{\omega \sigma \mu \mu_0 a t}{2}} - 1 \right) + \\ & + (T_* - T_0) \left(\operatorname{erfc} \frac{\xi}{2\sqrt{at}} - e^{\alpha \xi / \lambda + \alpha^2 a t / \lambda^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi}{2\sqrt{at}} + \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{at} \right) \right) - \\ & - \frac{H_0^2 \omega \mu \mu_0}{2c} \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{\omega \sigma \mu \mu_0}{2}} \right) \times \\ & \times \int_0^t e^{\frac{\omega \sigma \mu \mu_0 a (t-\tau)}{2}} \left(\operatorname{erfc} \frac{\xi}{2\sqrt{a\tau}} - e^{\frac{\alpha \xi}{\lambda} + \frac{\alpha^2 a \tau}{\lambda^2}} \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi}{2\sqrt{a\tau}} + \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{a\tau} \right) \right) d\tau, \end{aligned}$$

где

$$\operatorname{erfc} \eta = \operatorname{erf} \eta = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta.$$

При $\xi = 0$ для температуры поверхности запишем

$$\begin{aligned} T(t, 0) = & T_0 + (T_* - T_0) \left(1 - e^{\frac{\alpha^2 a t}{\lambda^2}} \operatorname{erfc} \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{at} \right) + \\ & + \frac{H_0^2}{\lambda \sigma} \left(e^{\frac{\omega \sigma \mu \mu_0 a t}{2}} - 1 \right) - \frac{H_0^2 \omega \mu \mu_0}{2c} \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{\omega \sigma \mu \mu_0}{2}} \right) I(t), \quad (6.85) \end{aligned}$$

*См.: Лыков А.В.

где

$$I(t) = \int_0^t e^{\frac{\omega\sigma\mu_0 a(t-\tau)}{2}} \left(1 - e^{\frac{\alpha^2 a\tau}{\lambda^2}} \operatorname{erfc} \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{a\tau} \right) d\tau.$$

Для вычисления интеграла $I(t)$ используем представление*1

$$\operatorname{erfc} \eta = 1 - \frac{2e^{-\eta^2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1} \eta^{2k-1}}{(2k-1)!!},$$

где $(2k-1)!!$ означает произведение всех нечетных натуральных чисел, не превышающих $2k-1$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда, обозначив $\eta = \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{at}$, вычислим

$$\begin{aligned} I(t) &= e^{\frac{\omega\sigma\mu_0 at}{2}} \left(\int_0^t e^{-\frac{\omega\sigma\mu_0 a\tau}{2}} \left(1 - e^{\frac{\alpha^2 a\tau}{\lambda^2}} \right) d\tau + \right. \\ &+ \frac{\lambda^2}{\alpha^2 a \sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{(2k-1)!!} \int_0^{\eta} \eta^{2k} d\eta \left. \right) = 2 \frac{e^{\frac{\omega\sigma\mu_0 at}{2}} - 1}{\omega\sigma\mu_0 a} - \\ &- \frac{e^{\frac{\omega\sigma\mu_0 at}{2}} - e^{\eta^2}}{a \left(\frac{\omega\sigma\mu_0}{2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} \right)} + \frac{\lambda^2}{\alpha^2 a \sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\eta)^{2k+1}}{(2k-1)!!(2k+1)}. \quad (6.86) \end{aligned}$$

Аппроксимация*2

$$e^{\eta^2} \operatorname{erfc} \eta \approx \frac{a_1}{1+b\eta} + \frac{a_2}{(1+b\eta)^2} + \frac{a_3}{(1+b\eta)^3},$$

где

$$a_1 = 0,34802, \quad a_2 = -0,09588, \quad a_3 = 0,74786, \quad b = 0,47047,$$

*1 См.: Градштейн И.С., Рыжик И.М.

*2 См.: Справочник по специальным функциям.

имеет абсолютную погрешность не более $2,5 \cdot 10^{-5}$. Учитывая эту аппроксимацию, а также (6.81) и (6.85), при $t = t_*$ получаем

$$\begin{aligned} \Delta T = T_{\max}(t_*, 0) - T(t_*, 0) \approx & \frac{H_0^2 \omega \mu \mu_0}{2c} \left(t_* - 2 \frac{e^{\frac{\omega \sigma \mu \mu_0 a t_*}{2}} - 1}{\omega \sigma \mu \mu_0 a} \right) + \\ & + (T_B - T_0) \left(\frac{a_1}{1 + b\eta} + \frac{a_2}{(1 + b\eta)^2} + \frac{a_3}{(1 + b\eta)^3} - 1 \right) + \\ & + \frac{H_0^2 \omega \mu \mu_0}{2c} \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha} \sqrt{\frac{\omega \sigma \mu \mu_0}{2}} \right) I(t_*). \end{aligned}$$

В частном случае, когда $T_0 = T_B$, последнее выражение становится точным, с учетом (6.86) и обозначений $\beta^2 = \omega \sigma \mu \mu_0 \frac{\lambda^2}{2\alpha^2}$ и $\eta_* = \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{a t_*}$ оно примет вид

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} = \frac{\lambda \sigma \Delta T}{H_0^2} = & \beta^2 \eta_* + 1 - e^{\beta^2 \eta_*^2} + \\ & + \beta^2 (1 + \beta) \left(\frac{e^{\beta^2 \eta_*^2} - 1}{\beta^2} - \frac{e^{\beta^2 \eta_*^2} - e^{\eta_*^2}}{\beta^2 - 1} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\eta_*)^{2k+1}}{(2k-1)!!(2k+1)} \right). \end{aligned}$$

Еще раз отметим, что рассмотренная ММ, являясь *линейной математической моделью*, служит лишь для приближенного описания реального процесса индукционного нагрева. Магнитная проницаемость материала листа в общем случае зависит не только от напряженности магнитного поля, но и от температуры. Это приводит к необходимости учитывать взаимное влияние электромагнитных и тепловых процессов в листе, что существенно усложняет ММ. Кроме того, при значительном повышении температуры становится существенной зависимость от нее теплофизических характеристик материала и помимо конвективного теплообмена с воздухом происходит теплообмен излучением. Учесть перечисленные факторы можно лишь в рамках *нелинейной математической модели*, количественный анализ которой требует использования численных методов*.

*См.: Тихонов А.Н., Кальнер В.Д., Гласко В.Б.

Дополнение 6.2. Пример применения моделей микроуровня в оптимальном проектировании

В большинстве задач оптимального проектирования свойства оптимизируемого *технического объекта* отражают при помощи *математической модели* (ММ) *макроуровня*. Но в ряде случаев связь между параметрами оптимизации не удастся адекватным образом выразить при помощи таких ММ и приходится привлекать *математические модели микроуровня*. В [XI], [XIV] приведены примеры, когда целевая функция задачи оптимизации и/или ограничения построена на основе ММ микроуровня рассматриваемого процесса. В одном случае речь идет о нахождении толщины пластины, подверженной интенсивному локальному нагреву с одной стороны и охлаждаемой с другой, из условия минимума наибольшего значения функции распределения температуры в этой пластине. В другом случае максимизируемое значение теплового потока, передаваемое ребром пластины окружающей среде, связано с параметрами оптимизации также ММ микроуровня, включающей дифференциальное уравнение с частными производными. Ниже рассмотрим еще один характерный пример использования ММ микроуровня в оптимальном проектировании.

Пример 6.11. Круглая цилиндрическая оболочка толщиной h и радиуса r_* нагружена внутренним давлением p_r сильно нагретого газа, имеющего температуру T_r . От непосредственного теплового воздействия со стороны газа оболочка защищена слоем теплоизоляционного материала толщиной \tilde{h} (рис. 6.20), а на внешней поверхности оболочки происходит теплообмен с окружающей средой, имеющей температуру T_c .

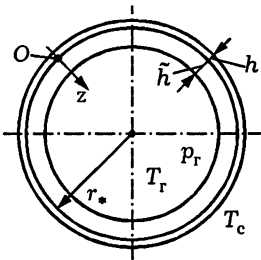


Рис. 6.20

Предположим, что слой теплоизоляционного материала не несет

механическую нагрузку и ее воспринимает оболочка, в которой под действием внутреннего давления возникает в окружном направлении растягивающее напряжение, определяемое известной формулой*¹ $\sigma = \frac{p_r r_*}{h}$. Оболочка сохраняет работоспособность при условии

$$\sigma = \frac{p_r r_*}{h} \leq [\sigma(T_*)], \quad (6.87)$$

где $[\sigma(T_*)]$ — зависящее от температуры T_* допустимое для материала оболочки напряжение. Примем для определенности, что оболочка выполнена из металла, имеющего достаточно большую теплопроводность по сравнению с теплоизоляционным материалом. Зависимость $[\sigma(T_*)]$ для этого металла задана в табл. 6.1.

Таблица 6.1

$T_*, \text{ К}$	300	500	600	700	800	900
$[\sigma], \text{ МПа}$	600	580	560	520	400	200

Уменьшение допустимого напряжения при возрастании температуры характерно для большинства конструкционных материалов. Поэтому с ростом температуры оболочки для выполнения условия (6.87) приходится увеличивать значение h по сравнению со значением $h_0 = \frac{p_r r_*}{[\sigma]_0}$, соответствующим нормальной температуре T_0 (в табл. 6.1 $T_0 = 300 \text{ К}$). Ясно, что это ведет к увеличению массы конструкции. Избежать существенного повышения температуры оболочки можно за счет увеличения толщины \tilde{h} слоя теплоизоляционного материала, но это также связано с ростом массы конструкции. Задачу оптимального проектирования в данном случае сформулируем так*²: найти соотношение толщин h и \tilde{h} , обеспечивающее при сохранении работоспособности конструкции минимум ее массы

$$m = \rho h + \tilde{\rho} \tilde{h}, \quad (6.88)$$

*¹См.: Феодосьев В.И. (1999 г.).

*²См.: Зарубин В.С. (1991 г.).

приходящейся на единицу площади поверхности оболочки (в (6.88) ρ и $\tilde{\rho}$ — плотность металла и теплоизоляционного материала соответственно).

Сначала рассмотрим *установившийся процесс* теплопроводности в конструкции. Пусть тепловой контакт оболочки со слоем теплоизоляционного материала является идеальным, а интенсивность теплообмена с газом и окружающей средой определяют коэффициенты теплоотдачи α_r и α_c соответственно. Используя *электротепловую аналогию*, представим *термическое сопротивление* передаче теплоты от газа к этой среде в виде

$$R_r = \frac{1}{\alpha_r} + \frac{\tilde{h}}{\lambda} + \frac{h}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_c},$$

где λ и $\tilde{\lambda}$ — коэффициенты теплопроводности металла и теплоизоляционного материала соответственно. Здесь термические сопротивления оболочки и слоя теплоизоляционного материала приближенно приняты соответствующими плоской стенке, что допустимо при $\frac{h + \tilde{h}}{r_*} \ll 1$ (см. 3.3).

Для термических сопротивлений оболочки и слоя теплоизоляционного материала характерно соотношение $\frac{h}{\lambda} \ll \frac{\tilde{h}}{\lambda}$. Поэтому первым из них можно пренебречь, считая температуру T_* однородной по толщине оболочки и равной

$$T_* = T_c + \frac{T_r - T_c}{R_r} \frac{1}{\alpha_c} = T_c + \frac{T_r - T_c}{\frac{\alpha_c}{\alpha_r} + \alpha_c \frac{\tilde{h}}{\lambda} + 1}. \quad (6.89)$$

Характер зависимости (6.89) T_* от \tilde{h} при $T_c = 300\text{ К}$, $T_r = 2300\text{ К}$, $\alpha_c = 400 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$, $\alpha_r = 1000 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$, $\tilde{\lambda} = 0,4 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ представлен на рис. 6.21, *a* сплошной линией. Если в предельном случае сохранения оболочкой работоспособности заменить в (6.87) неравенство равенством, т.е. принять

$$\frac{p_r r_*}{h} = [\sigma(T_*)], \quad (6.90)$$

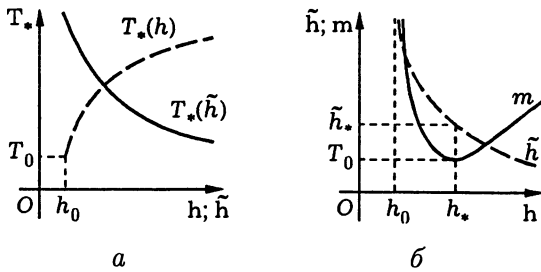


Рис. 6.21

то при $p_r r_* = 1,2 \text{ МПа} \cdot \text{м}$ с учетом данных табл. 6.1 получим зависимость T_* от h . График этой зависимости показан на рис. 6.21, *а* штриховой линией. Отметим, что в данном случае $h_0 = \frac{p_r r_*}{[\sigma(T_0)]} = 2 \text{ мм}$. Исключая из этих двух зависимостей температуру T_* оболочки, устанавливаем связь между \tilde{h} и h , дающую такие пары значений толщин оболочки и слоя теплоизоляционного материала, при которых оболочка еще сохраняет работоспособность. На рис. 6.21, *б* эта связь отмечена штриховой линией, а сплошной линией представлен график зависимости массы m от h , построенный по (6.88) для указанных пар значений толщин при $\rho = 8000 \text{ кг/м}^3$ и $\tilde{\rho} = 1600 \text{ кг/м}^3$. Масса конструкции достигает минимального значения $m_* \approx 24,8 \text{ кг/м}^2$ при оптимальных толщинах $h_* \approx 2,2 \text{ мм}$ и $\tilde{h}_* \approx 4,5 \text{ мм}$. При этом значение температуры оболочки равно примерно 640 К .

Решение рассматриваемой задачи можно представить в аналитической форме, если в окрестности ожидаемого значения температуры оболочки зависимость допустимого напряжения $[\sigma]$ от T_* линеаризовать и записать $[\sigma(T_*)] = A - BT_*$, где A и B — коэффициенты линеаризации. Тогда, учитывая (6.89) и (6.90), получаем

$$h = p_r r_* \left(A - BT_c + \frac{B(T_r - T_c)}{\frac{\alpha_c}{\alpha_r} + \alpha_c \frac{\tilde{h}}{\lambda} + 1} \right)^{-1}. \quad (6.91)$$

Отсюда, дифференцируя, находим соотношение между дифференциалами dh и $d\tilde{h}$:

$$\left(A - BT_c + \frac{B(T_r - T_c)}{\frac{\alpha_c}{\alpha_r} + \alpha_c \frac{\tilde{h}}{\lambda} + 1} \right) \frac{dh}{h} + \frac{B(T_r - T_c)\alpha_c}{\tilde{\lambda} \left(\frac{\alpha_c}{\alpha_r} + \alpha_c \frac{\tilde{h}}{\lambda} + 1 \right)^2} d\tilde{h} = 0.$$

Оно позволяет в сочетании с (6.91) и необходимым условием минимума массы m конструкции в виде $\rho dh + \tilde{\rho} d\tilde{h} = 0$ найти оптимальную толщину слоя теплоизоляционного материала

$$\tilde{h}_* = \frac{\tilde{\lambda}}{\alpha_c} \left(\frac{\sqrt{\frac{B}{A}(T_r - T_c)} + \sqrt{\frac{p_r \gamma_* \alpha_c}{\tilde{\lambda} A}}}{\left(1 - \frac{BT_c}{A}\right) \sqrt{\frac{A\tilde{\rho}}{B\rho(T_r - T_c)}}} - \frac{\tilde{\lambda}}{\alpha_r} \right). \quad (6.92)$$

Оптимальную толщину h_* оболочки можно вычислить из (6.91) при $\tilde{h} = \tilde{h}_*$, а значение температуры оболочки — из (6.89).

Предположим, что ожидаемое значение температуры оболочки лежит в интервале с границами $T_1 = 500$ К и $T_2 = 700$ К, которым в табл. 6.1 соответствуют значения $[\sigma_1] = 580$ МПа и $[\sigma_2] = 520$ МПа. Тогда после подстановки числовых значений в линеаризованное соотношение

$$[\sigma(T_*)] = [\sigma_1] - ([\sigma_2] - [\sigma_1]) \frac{T_* - T_1}{T_2 - T_1} \quad (6.93)$$

получим коэффициенты линеаризации $A = 730$ МПа, $B = 0,3 \frac{\text{МПа}}{\text{К}}$.

По указанным выше исходным данным из (6.92) находим $\tilde{h}_* \approx 3,66$ мм, а из (6.89) — $T_* \approx 695$ К, что лежит близко к верхней границе принятого выше интервала ожидаемых значений температуры оболочки.

Примем теперь $T_1 = 600$ К и $T_2 = 700$ К. Этим границам в табл. 6.1 соответствуют значения $[\sigma_1] = 560$ МПа и $[\sigma_2] = 520$ МПа, подстановка которых в (6.93) дает $A = 800$ МПа и

$B = 0,4 \frac{\text{МПа}}{\text{К}}$. Используя (6.92) и (6.89), находим $\tilde{h}_* \approx 4,46 \text{ мм}$ и $T_* \approx 642 \text{ К}$. Вычисленное значение температуры лежит почти в середине принятого интервала ожидаемых значений температуры оболочки. Поэтому можно остановиться на последнем варианте коэффициентов линеаризации и при помощи (6.91) найти $h_* \approx 2,21 \text{ мм}$. После округления до десятых долей миллиметра примем $\tilde{h}_* \approx 4,5 \text{ мм}$ и $h_* \approx 2,2 \text{ мм}$, что совпадает со значениями, полученными ранее.

Отметим, что оптимизация толщин оболочки и слоя теплоизоляционного материала при установившемся процессе теплопроводности в конструкции проведена с использованием моделей макроуровня, определяющих температурное и напряженное состояние оболочки. Но в случае неустановившегося процесса для описания температурного состояния конструкции необходимо привлечь *нестационарную математическую модель* микроуровня. Если условия теплообмена не изменяются вдоль внешней поверхности оболочки и поверхности слоя теплоизоляционного материала, контактирующего с газом, то распределение температуры в конструкции зависит лишь от времени t и координаты z , отсчитываемой от поверхности контакта оболочки с этим слоем (см. рис. 6.20). При $\frac{h + \tilde{h}}{r_*} \ll 1$ рассматриваемую конструкцию можно свести к *расчетной схеме* двухслойной пластины* (рис. 6.22).

При $\frac{h}{\lambda} \ll \frac{\tilde{h}}{\lambda}$ по-прежнему можно считать, что температура $T_*(t)$ оболочки однородна по ее толщине, но теперь изменяется во времени t . Поэтому оболочку можно рассматривать лишь как аккумулятор тепловой энергии с полной теплоемкостью hc , приходящейся на единицу площади поверхности оболочки (c — удельная объемная теплоем-

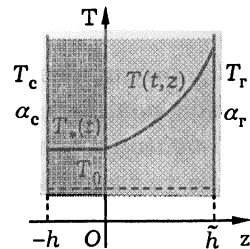


Рис. 6.22

* См.: Зарубин В.С. (1983 г.).

кость ее материала). В случае постоянных значений $\tilde{\lambda}$ и удельной объемной теплоемкости \tilde{c} теплоизоляционного материала распределение температуры $T(t, z)$ в слое теплоизоляционного материала удовлетворяет одномерному уравнению теплопроводности [XII]

$$\frac{\partial T(t, z)}{\partial t} = \tilde{a} \frac{\partial^2 T(t, z)}{\partial z^2}, \quad t > 0, \quad z \in (0, \tilde{h}), \quad (6.94)$$

где $\tilde{a} = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{c}}$ — коэффициент температуропроводности теплоизоляционного материала, с граничными условиями*

$$\tilde{\lambda} \frac{\partial T(t, 0)}{\partial z} = hc \frac{dT_*(t)}{dt} + \alpha_c (T_*(t) - T_c), \quad T(t, 0) = T_*(t) \quad (6.95)$$

при $z = 0$ и

$$\tilde{\lambda} \frac{\partial T(t, \tilde{h})}{\partial z} = \alpha_r (T_r - T(t, \tilde{h})) \quad (6.96)$$

при $z = \tilde{h}$. В (6.95) и (6.96) и далее значение аргумента при записи производной функции указывает, что производная вычислена при этом значении, например $\left. \frac{\partial T(t, 0)}{\partial z} = \frac{\partial T(t, z)}{\partial z} \right|_{z=0}$. Начальное условие примем в виде

$$T(0, z) = T_*(0) = T_0. \quad (6.97)$$

Сформулированная задача (6.94)–(6.97) является нестационарной одномерной линейной математической моделью процесса теплопроводности в рассматриваемой конструкции. Граничное условие (6.95) не позволяет использовать для решения этой задачи хорошо известный метод Фурье (или метод разделения переменных) [XII]. Решение можно получить при помощи интегрального преобразование Лапласа (6.37). Применяя к

*См.: Зарубин В.С. (1966 г.).

(6.94)–(6.96) это преобразование и учитывая (6.97), получаем краевую задачу для ОДУ второго порядка

$$\tilde{a} \frac{d^2 \tilde{T}(p, z)}{dz^2} - p \tilde{T}(p, z) = -T_0, \quad z \in (0, \tilde{h}),$$

относительно функции $\tilde{T}(p, z)$, удовлетворяющей граничным условиям

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} \frac{d\tilde{T}(p, 0)}{dz} - (\alpha_c + phc)\tilde{T}(p, 0) &= -\frac{\alpha_c}{p} T_c - hcT_0, \\ \tilde{\lambda} \frac{d\tilde{T}(p, \tilde{h})}{dz} + \alpha_r \tilde{T}(p, \tilde{h}) &= \frac{\alpha_r}{p} T_r. \end{aligned}$$

Решение этого ОДУ можно представить в виде

$$\tilde{T}(p, z) = \frac{T_0}{p} + D_1 \operatorname{ch} \zeta \bar{z} + D_2 \operatorname{sh} \zeta \bar{z}, \quad \zeta = \sqrt{\frac{p}{\tilde{a}}} \tilde{h}, \quad \bar{z} = \frac{z}{\tilde{h}}.$$

После нахождения из граничных условий постоянных D_1 и D_2 и подстановки их в решение запишем

$$\begin{aligned} \tilde{T}(p, z) = \frac{T_0}{p} + \operatorname{Bi}_r (T_r - T_0) \frac{\operatorname{ch} \zeta \bar{z} + (\operatorname{Bi}_c + K \zeta^2) \frac{\operatorname{sh} \zeta \bar{z}}{\zeta}}{pZ(\zeta)} + \\ + \operatorname{Bi}_c (T_c - T_0) \frac{\operatorname{ch} \zeta (1 - \bar{z}) + \operatorname{Bi}_r \operatorname{sh} \zeta (1 - \bar{z}) - K \zeta \operatorname{ch} \zeta \operatorname{sh} \zeta \bar{z}}{pZ(\zeta)}, \quad (6.98) \end{aligned}$$

где

$$Z(\zeta) = (\operatorname{Bi}_c + \operatorname{Bi}_r + K \zeta^2) \operatorname{ch} \zeta + (\operatorname{Bi}_c \operatorname{Bi}_r + (1 + K \operatorname{Bi}_r) \zeta^2) \frac{\operatorname{sh} \zeta}{\zeta},$$

критерии Био $\operatorname{Bi}_c = \alpha_c \frac{\tilde{h}}{\lambda}$ и $\operatorname{Bi}_r = \alpha_r \frac{\tilde{h}}{\lambda}$ характеризуют интенсивность теплообмена конструкции с окружающей средой и газом соответственно, а безразмерный параметр $K = \frac{hc}{\tilde{h}c}$ является отношением полных теплоемкостей оболочки и слоя теплоизоляционного материала.

Для перехода от решения относительно изображения $\tilde{T}(p, z)$ к решению относительно оригинала $\tilde{T}(t, z)$ находят полюсы [X] функции $\tilde{T}(p, z)$ комплексного переменного p . Ими будут $p_0 = 0$ и $p_n = \frac{\zeta_n^2 \tilde{a}}{h^2}$, $n \in \mathbb{N}$, где ζ_n — корни уравнения $Z(\zeta) = 0$. Поскольку оно не имеет действительных корней, то обозначим $\mu^2 = -\zeta^2$, т.е. $\mu = i\zeta$, где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, и придем к трансцендентному уравнению

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{(1 + K \operatorname{Bi}_r) \mu^2 - \operatorname{Bi}_c \operatorname{Bi}_r}{\mu (\operatorname{Bi}_c + \operatorname{Bi}_r - K \mu^2)}. \quad (6.99)$$

Так как функции в обеих частях (6.99) нечетные, то каждому корню $\mu_n > 0$ соответствует корень $-\mu_n$, который не изменяет соответствующего значения p_n . Поэтому достаточно рассматривать лишь неотрицательные корни уравнения (6.99). Можно показать, что эти корни соответствуют простым нулям знаменателя функции $\tilde{T}(p, z)$.

Оригинал, соответствующий функции $\tilde{T}(p, z)$, является суммой (6.40) вычетов этой функции в ее полюсах, поскольку правая часть (6.98) удовлетворяет условиям третьей теоремы разложения [XI]. В данном случае выполнены все условия, требуемые для того, чтобы полюсы p_n (включая $p_0 = 0$) были простыми (см. пример 6.7). Поэтому, используя (6.40), (6.42) и (6.98), получаем

$$T(t, z) = \frac{\frac{T_c}{\operatorname{Bi}_r} + \frac{T_r}{\operatorname{Bi}_c} + T_c + (T_r - T_c)\bar{z}}{\frac{1}{\operatorname{Bi}_r} + \frac{1}{\operatorname{Bi}_c} + 1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n Z_n} e^{-\mu_n^2 F_0} \left(\operatorname{Bi}_r (T_r - T_0) \left(\cos \mu_n \bar{z} + \frac{\operatorname{Bi}_c - K \mu_n^2}{\mu_n} \sin \mu_n \bar{z} \right) + \operatorname{Bi}_c (T_c - T_0) \left(\cos \mu_n (1 - \bar{z}) + \frac{\operatorname{Bi}_r}{\mu_n} \sin \mu_n (1 - \bar{z}) \right) \right), \quad (6.100)$$

где $Fo = \frac{\tilde{a}t}{h^2}$ — критерий Фурье и

$$Z_n = Bi_r + Bi_c - K\mu_n^2 + (Bi_r + Bi_c + K\mu_n^2) \frac{\sin\mu_n \cos\mu_n}{\mu_n} + Bi_r Bi_c \frac{\sin^2\mu_n}{\mu_n^2}.$$

Из (6.100) при $\bar{z} = 0$ нетрудно получить зависимость температуры оболочки от времени $T_*(t) = T(t, 0)$.

На практике часто встречаются случаи, когда $T_c = T_0$. Для таких случаев вместо (6.100) получим

$$\begin{aligned} \frac{T(t, z) - T_0}{T_r - T_0} &= \frac{\frac{1}{Bi_c} + \bar{z}}{\frac{1}{Bi_r} + \frac{1}{Bi_c} + 1} - \\ &- Bi_r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin\mu_n}{\mu_n Z_n} e^{-\mu_n^2 Fo} \left(\cos\mu_n \bar{z} + \frac{Bi_c - K\mu_n^2}{\mu_n} \sin\mu_n \bar{z} \right), \end{aligned}$$

а температура оболочки будет равна

$$\frac{T_*(t) - T_0}{T_r - T_0} = \frac{1}{Bi_c \left(\frac{1}{Bi_r} + \frac{1}{Bi_c} + 1 \right)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin\mu_n}{\mu_n Z_n} e^{-\mu_n^2 Fo}. \quad (6.101)$$

Используем (6.90) и (6.101) для нахождения пар значений h и \tilde{h} , обеспечивающих работоспособность оболочки в течение некоторого заданного времени t_* .

Наряду с указанными выше для случая установившегося процесса теплопроводности исходными данными примем $T_0 = 300$ К, $t_* = 90$ с, $\tilde{c} = 1,6 \frac{\text{МДж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}}$ и $c = 4 \frac{\text{МДж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}}$. Результаты вычислений по (6.101) приводят к зависимостям $T_*(t_*)$ от h при различных фиксированных значениях \tilde{h} . Характер этих зависимостей представлен на рис. 6.23, а сплошными линиями. Точки пересечения этих линий со штриховой линией, построенной по (6.90) и совпадающей в данном случае с такой же линией на

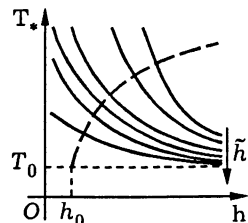


Рис. 6.23

рис. 6.21, *a*, дают искомые пары значений h и \tilde{h} (связь между этими значениями аналогична показанной на рис. 6.21, *б* штриховой линией). Построенный по (6.88) график зависимости массы m от h аналогичен изображенному на рис. 6.21, *б* сплошной линией. В данном случае масса конструкции достигает минимального значения $m_* \approx 24 \text{ кг/м}^2$ при оптимальных толщинах $h_* \approx 2,3 \text{ мм}$ и $\tilde{h}_* \approx 3,5 \text{ мм}$, которым соответствует значение температуры оболочки около 700 К .

При $K \gg 1$ полная теплоемкость слоя теплоизоляционного материала пренебрежимо мала по сравнению с полной теплоемкостью металла. В пределе при $K \rightarrow \infty$ этот слой выполняет лишь роль термического сопротивления \tilde{h}/λ . Тогда неустановившийся процесс теплопроводности в рассматриваемой конструкции можно описать моделью макроуровня, включающей ОДУ первого порядка

$$hc \frac{dT_*(t)}{dt} = \frac{T_r - T(t)}{\frac{1}{\alpha_r} + \frac{\tilde{h}}{\lambda}} + \alpha_c (T_c - T(t))$$

с начальным условием $T_*(0) = T_0$. Решение этого ОДУ имеет вид

$$\frac{\bar{T} - T_*(t)}{\bar{T} - T_0} = \exp\left(-\frac{1 + \text{Bi}_c + \frac{\alpha_c}{\alpha_r} \alpha_r t}{1 + \text{Bi}_r} \frac{\alpha_r t}{hc}\right), \quad (6.102)$$

где \bar{T} — установившееся значение температуры оболочки при $t \rightarrow \infty$, вычисляемое по формуле

$$\bar{T} = \frac{\frac{T_c}{\text{Bi}_r} + \frac{T_r}{\text{Bi}_c} + T_c}{\frac{1}{\text{Bi}_r} + \frac{1}{\text{Bi}_c} + 1}.$$

Процедура подбора оптимальных толщин h_* и \tilde{h}_* аналогична описанной выше, но теперь вместо (6.101) следует использовать (6.102), причем выполнения условия $T_0 = T_c$ не требуется.

Вопросы и задачи

6.1. Используя интегральную форму уравнений Максвелла, убедитесь, что в примере 6.3 $B_1 = \text{const}$ и $B_3 = \text{const}$.

6.2. Выведите (6.26), (6.34) и (6.28). При помощи (6.22) для случая $q_V = \text{const}$ и $\lambda = \text{const}$ найдите распределение температуры в слое с криволинейными поверхностями при условии, что задана температура $T(h)$, а поверхность при $z = 0$ идеально теплоизолирована, т.е. $Q_0 = 0$.

6.3. Получите решение задачи нестационарной теплопроводности, рассмотренной в примере 6.7, для случая идеального теплового контакта между конструкцией и слоем теплоизоляционного материала.

6.4. Выведите (6.49). Рассмотрите частный случай (6.50) при линейной зависимости от времени t приведенной температуры $T^*(t)$ среды.

6.5. Как записать граничное условие при установке в конечном сечении трубопровода демпфера, в котором процесс сжатия газа является адиабатическим (см. пример 6.9)?

6.6. Убедитесь, что сумма ряда в (6.64) равна $\dot{m}^\circ a / F_0$ при $t \in (0, 2l/a)$ и $-\dot{m}^\circ a / F_0$ при $t \in (2l/a, 4l/a)$.

6.7. В примере 6.9 вместо мгновенного перекрытия трубопровода рассмотрите случай, когда массовый расход жидкости в сечении $x = l$ уменьшается по закону $\dot{m} = \dot{m}^\circ (1 - t/t_*)$, и получите зависимость давления в этом сечении от времени t .

6.8. Убедитесь, что общие решения в виде (6.65) удовлетворяют уравнениям (6.62).

6.9. Почему граничное условие (6.95) не позволяет использовать для решения задачи (6.94)–(6.97) метод Фурье? Проверьте, удовлетворяет ли искомая функция условиям, позволяющим применить для решения этой задачи интегральное преобразование Лапласа.

6.10. Покажите, что корни уравнения (6.41) соответствуют простым нулям знаменателя функции $\tilde{T}(p, z)$ (6.39), а корни уравнения (6.99) — простым нулям знаменателя функции $\tilde{T}(p, z)$ (6.98).

6.11. Какой вид примет граничное условие (6.96), если на внутреннюю поверхность теплоизоляционного материала (см. рис. 6.20) дополнительно нанести слой толщиной h_1 высокотеплопроводного материала, имеющего теплоемкость c ? Повлияет ли наличие такого слоя при установившемся процессе теплопроводности в рассматриваемой конструкции на распределение температуры и оптимальное соотношение толщин оболочки и слоя теплоизоляционного материала?

6.12. Для конструкции, рассмотренной в примере 6.11, постройте нестационарную математическую модель процесса теплопроводности при условии, что $h/\lambda \approx \tilde{h}/\tilde{\lambda}$, т.е. в РС, приведенной на рис. 6.22, нельзя пренебречь термическим сопротивлением оболочки по сравнению с термическим сопротивлением слоя теплоизоляционного материала.

7. АЛГОРИТМИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

При проведении *вычислительного эксперимента* исходная *математическая модель* (ММ) рассматриваемого *технического объекта* претерпевает ряд преобразований, необходимых для того, чтобы количественный анализ ММ был осуществлен при помощи ЭВМ. Эти преобразования в конечном счете должны привести к такому алгоритму, который можно было бы реализовать на ЭВМ, т.е. составить ЭВМ-программу в виде последовательности элементарных действий (арифметических и логических операций), реализуемых командами ЭВМ.

7.1. Способы преобразования математических моделей к алгоритмическому виду

Пути преобразования *математических моделей* (ММ) непосредственно связаны с теми математическими методами, которые используют для количественного анализа этих моделей. Отдельные частные примеры преобразования ММ были рассмотрены ранее. Проследим эти пути в более общем виде при помощи схемы, представленной на рис. 7.1.

Для некоторых типов ММ без предварительных преобразований могут быть непосредственно составлены алгоритмы решения *прямой задачи* вычислительной математики, реализуемые на ЭВМ. К ним относятся прежде всего *математические модели* *метауровня* в виде *разностных уравнений* (РУ) и систем логических соотношений (СЛС). *Имитационная математическая модель* (ИММ), являясь *алгоритмической математической моделью*, также не нуждается в предварительном преобразовании перед реализацией на ЭВМ.

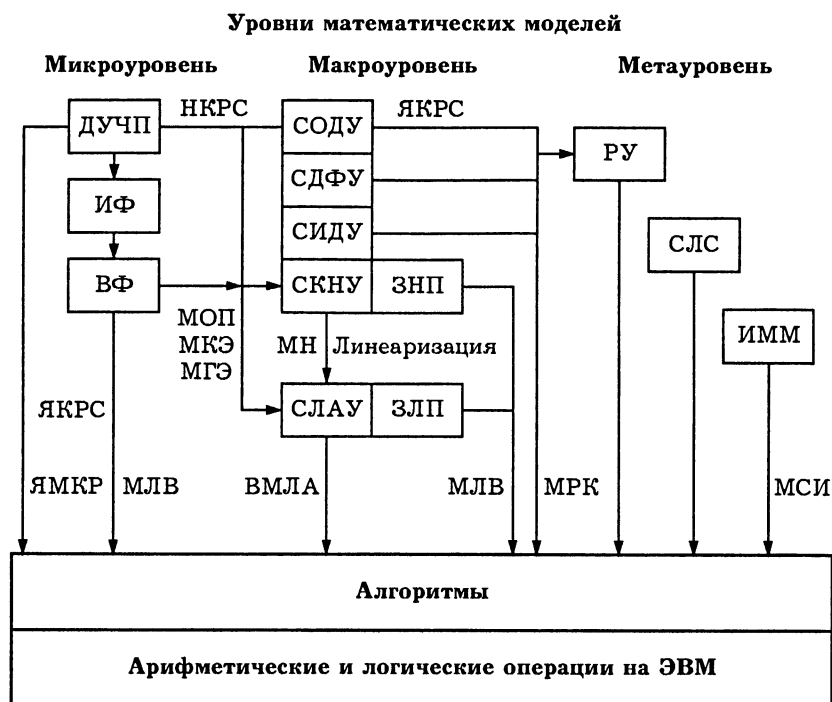


Рис. 7.1

Часто ИММ используют в сочетании с методом статистических испытаний (МСИ), иногда называемым методом Монте-Карло. При этом неизвестные *фазовые переменные* моделируют случайными величинами и затем результаты моделирования обрабатывают статистическими методами. Такой подход можно использовать и для анализа *детерминированной математической модели макро- или микроуровня*, если построить эквивалентную ей вспомогательную *стохастическую математическую модель*. Известны стохастические ММ для вычисления интегралов [VII], решения интегральных уравнений, систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и дифференциальных уравнений с частными производными (ДУЧП) [XIII], для оценки собственных значений линейных операторов.

Динамические (нестационарные) математические модели, допускающие аппроксимацию производных *фазовых переменных* по времени при помощи явной конечно-разностной схемы (ЯКРС) также нетрудно привести к алгоритмическому виду. В частности, для обыкновенных дифференциальных, *дифференциально-функциональных* и *интегро-дифференциальных уравнений* (ОДУ, ДФУ и ИДУ) и их систем (СОДУ, СДФУ и СИДУ) можно использовать методы Рунге — Кутты (МРК) [VIII], а для ДУЧП — явный метод конечных разностей (ЯМКР) [XIII].

Если ММ микроуровня в *вариационной форме* (ВФ) содержит *функционал*, который на искомом решении достигает единственного экстремума (минимума или максимума), то применение метода локальных вариаций (МЛВ) фазовых переменных позволяет построить достаточно простой алгоритм поиска решения, который несложно осуществить при помощи ЭВМ. Ясно, что МЛВ можно использовать для поиска экстремума целевой функции в *задачах линейного или нелинейного программирования* (ЗЛП или ЗНП).

Наиболее удобными ММ с точки зрения реализации на ЭВМ являются *линейные математические модели* в виде квадратной СЛАУ

$$Ax = b,$$

где A — матрица СЛАУ порядка N ; x — вектор, включающий N искомых фазовых переменных рассматриваемого *технического объекта* (ТО); b — вектор правой части СЛАУ.

Большинству вычислительных методов линейной алгебры (ВМЛА) (см. рис. 7.1) отвечают хорошо изученные алгоритмы (в том числе с параллельными вычислениями), на основе которых созданы эффективные ЭВМ-программы, составляющие достаточно полное математическое обеспечение для решения СЛАУ. Поэтому многие математические методы, связанные с преобразованием ММ, ориентированы на последовательное сведение исходной ММ к модели в виде СЛАУ.

Так, например, система конечных нелинейных уравнений (СКНУ) вида

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b},$$

где $\mathbf{f} = (f_1(\mathbf{x}) \dots f_n(\mathbf{x}) \dots f_N(\mathbf{x}))^T$ — заданная дифференцируемая векторная функция векторного аргумента \mathbf{x} , включающая N координатных функций $f_n(\mathbf{x})$, $n = \overline{1, N}$, путем линеаризации относительно некоторого известного приближенного значения \mathbf{x}_{k-1} искомого вектора \mathbf{x} фазовых переменных ТО может быть записана в форме

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_{k-1})(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}) = \mathbf{b},$$

где

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_N(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_N(\mathbf{x})}{\partial x_N} \end{pmatrix} \quad \text{—}$$

матрица Якоби векторной функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, а \mathbf{x}_k — следующее приближение к искомому значению вектора \mathbf{x} . Если обозначить

$$A_k = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_{k-1}) \quad \text{и} \quad \mathbf{b}_k = \mathbf{b} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_{k-1})\mathbf{x}_{k-1},$$

то для нахождения вектора \mathbf{x}_k необходимо решить СЛАУ

$$A_k \mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k.$$

Описанную процедуру повторяют для найденного приближения и т.д. Такое преобразование исходной ММ в виде СКНУ к СЛАУ отвечает методу Ньютона (МН) решения СКНУ последовательными приближениями (см. рис. 7.1).

С многократным решением СЛАУ связано рассмотрение ЗЛП, а также ЗНП в случае линеаризации этой задачи. К СЛАУ методом конечных разностей могут быть преобразованы ли-

нейные динамические (нестационарные, эволюционные) ММ микро- и макроуровня, если для аппроксимации производных фазовых переменных ТО по времени использовать неявные конечно-разностные схемы (НКРС). *Нелинейные математические модели* этих же типов сначала приводят к СКНУ, а уже после линеаризации СКНУ — к СЛАУ. Также в итоге к СЛАУ приводят *статические математические модели* микроуровня при конечно-разностной аппроксимации производных фазовых переменных по пространственным координатам.

Если при количественном анализе ММ микроуровня в интегральной форме (ИФ) или вариационной форме применить один из методов ортогональных проекций (МОП), представив искомое решение приближенно в виде линейной комбинации базисных функций [XIII], то для вычисления коэффициентов этой линейной комбинации также необходимо решать СЛАУ. Для приближенного количественного анализа таких ММ можно использовать дискретизацию области конечными элементами и затем процедуру метода конечных элементов (МКЭ). Это тоже приведет к необходимости решать СЛАУ относительно значений фазовых переменных в узлах конечных элементов [XIII]. Аналогичная ситуация возникает и при использовании метода граничных элементов (МГЭ).

7.2. Вычислительные операции линейной алгебры

Из рассмотренных выше способов преобразования *математических моделей* (ММ) следует, что часто алгоритмизация ММ связана с применением вычислительных методов линейной алгебры (см. рис. 7.1). Используемые в этих методах вычислительные операции достаточно просты, но таят в себе еще не всегда рационально используемые возможности увеличения производительности ЭВМ*. Эти операции можно условно

* См.: Райс Дж.

расположить на трех уровнях иерархии. На нижнем уровне находятся операция сложения векторов, состоящая из скалярных операций сложения их координат, и операция скалярного умножения векторов, состоящая из скалярных операций умножения двух сомножителей и сложения полученных результатов. Операция умножения матрицы на вектор составлена из серии скалярных умножений, и такую операцию следует отнести к более высокому уровню иерархии. Наконец, умножение матриц состоит из серии умножений матрицы на вектор. Перечисленные операции можно осуществить различными способами, и в зависимости от структуры векторов и матриц среди этих способов может быть найден наиболее рациональный с точки зрения производительности ЭВМ способ.

Пример 7.1. Пусть необходимо вычислить вектор $\mathbf{z} = A\mathbf{x}$, равный произведению матрицы A размера $m \times n$ и вектора \mathbf{x} размера n . Казалось бы, удобнее каждую из строк этой матрицы с номером $i = \overline{1, m}$ скалярно умножить на вектор \mathbf{x} и полученные скалярные произведения записать в качестве координат вектора \mathbf{z} . Для этого понадобится произвести mn умножений и mn сложений (если каждой из координат z_i вектора \mathbf{z} сначала присвоено нулевое значение). Но можно поступить иначе, если использовать операцию, состоящую из умножения вектора на число и сложения результата с другим вектором. Для этого при начальных нулевых значениях z_i и каждом фиксированном номере $j = \overline{1, n}$ столбца матрицы A следует во внутреннем цикле по $i = \overline{1, m}$ координату x_j вектора \mathbf{x} умножить на элемент A_{ij} этой матрицы и результат сложить со значением z_i , присвоив z_i полученное значение суммы. Несложно проверить, что при этом количество умножений и сложений останется прежним. Различие состоит в том, что в первом случае доступ к элементам матрицы идет по строкам при фиксированных номерах i , а во втором — по столбцам при фиксированных номерах j . #

Объем вычислительной работы, выполняемой ЭВМ-программой, измеряют количеством операций сложения или умно-

жения чисел с *плавающей точкой* (или запятой), или **флопов** (сокращение английских слов floating point operation). Таким образом, каждая из рассмотренных выше процедур умножения матрицы на вектор требует выполнения $N = 2mn$ флоп.

Пример 7.2. Выясним, нельзя ли уменьшить число N операций в случае умножения симметрической матрицы A порядка n на вектор x размера n . Ясно, что если не использовать симметрию матрицы, то $N = 2n^2$. Можно попытаться уменьшить N за счет уменьшения объема памяти, требуемой для хранения симметрической матрицы. Ее можно хранить в одном векторе a размера $n(n+1)/2$ как, например, нижнюю треугольную матрицу [III], причем $A_{ij} = a_{i+(n-j/2)(j-1)}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, i}$. Тогда для каждого фиксированного номера $i = \overline{1, n}$ строки следует выполнить два внутренних цикла по номерам j столбцов: сначала при $j = \overline{i+1, n}$ вычислить $z_i = z_i + a_{j+(n-i/2)(i-1)}x_j$, а затем при $j = \overline{1, i}$ определить $z_i = z_i + a_{i+(n-j/2)(j-1)}x_j$. Но такой способ требует также $2n^2$ флоп.

Причиной неудачи является то, что алгоритм обращается к элементам симметрической матрицы не в порядке их расположения в массиве, в котором они хранятся, т.е. не в порядке возрастания номера координат вектора a . Расположим эти элементы в векторе a в порядке следования их по диагоналям, начиная с главной: при $i \geq j$ и $k \geq 0$ имеем $A_{i+k, i} = a_{i+nk-k(k-1)/2}$, $i = \overline{1, n}$. Если теперь для каждого значения $k = \overline{1, n-1}$, $i = \overline{1, n-k}$, вычислить сначала $z_i = z_i + a_{i+k}x_{i+k}$, а затем $z_{i+k} = z_{i+k} + a_{i+k}x_i$, где $t = nk - k(k-1)/2$, то для нахождения всех координат искомого вектора $z = Ax$ потребуется $2n(n-1)$ флоп. Таким образом, экономия по числу операций составит $2n$ флоп. #

Умножение матрицы A размера $m \times n$ на матрицу B размера $n \times r$ должно в общем случае потребовать $2mnr$ флоп. Если учитывать конкретную структуру матриц, то это число можно существенно сократить.

Пример 7.3. Пусть необходимо перемножить две верхние треугольные матрицы A и B порядка n . Несложно убедиться,

что в результате получим также верхнюю треугольную матрицу $C = AB$ того же порядка. Ее элементами будут укороченные скалярные произведения строк матрицы A на столбцы матрицы B с учетом того, что $a_{ik}b_{kj} = 0$ при $k < i$ или $j < k$, $i, j, k = \overline{1, n}$. Отсюда следует, что элементы матрицы C равны

$$c_{ij} = \sum_{k=i}^n \sum_{k=i}^j a_{ik}b_{kj}.$$

Таким образом, вычисление элемента c_{ij} при $i \leq j$ требует $2(j - i + 1)$ флоп. В итоге, пренебрегая для больших значений n слагаемыми низших степеней, получаем*

$$\begin{aligned} N &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n 2(j - i + 1) = 2 \sum_{i=1}^n \sum_j^{n-i+1} j = 2 \sum_{i=1}^n \frac{(n-i+1)(n-i+2)}{2} = \\ &= \sum_{i=1}^n (n-i+1)^2 + \sum_{i=1}^n (n-i+1) = \frac{n^3}{3} + n^2 + \frac{2n}{3} \approx \frac{n^3}{3}. \end{aligned}$$

Итак, для умножения верхних треугольных (и аналогично нижних треугольных) матриц порядка n требуется примерно в 6 раз меньше арифметических операций по сравнению с умножением произвольных матриц того же порядка. #

В вычислениях с матрицами больших размеров наряду с экономией арифметических операций актуальной является и экономия памяти ЭВМ, используемой для хранения исходных матриц и записи результатов вычислений. Вопрос использования памяти особенно важен, поскольку память современных ЭВМ организована по иерархическому принципу. Процессору, выполняющему арифметические операции, требуется наименьшее время для обращения к так называемой *кэш-памяти* (буферной памяти между регистрами центрального процессора и основной частью оперативной памяти). Несколько большее

*См.: Голуб Дж., Ван Лоун Ч.

время требуется для записи и считывания данных в основной части оперативной памяти. Доступ к внешней памяти, имеющей большую емкость, требует еще больших затрат времени. Поэтому при разработке алгоритмов матричных вычислений следует стремиться к уменьшению обмена данными с внешней памятью, а данные, попавшие в кэш-память, целесообразно использовать максимальным образом.

Пример 7.4. Пусть требуется вычислить произведение $C = AB$ квадратных матриц A и B порядка n , причем в кэш-памяти можно разместить лишь M чисел с плавающей точкой ($M \approx 3n \ll n^2$). Построим алгоритм вычислений так, чтобы каждый столбец матрицы B попадал в кэш-память только один раз. Для этого при каждом фиксированном значении $j = \overline{1, n}$ следует создать в кэш-памяти нулевой столбец C_j матрицы C и загрузить в кэш-память столбец B_j матрицы B , а затем для фиксированного значения $k = \overline{1, n}$ загрузить столбец A_k матрицы A . Во внутреннем цикле по $i = \overline{1, n}$ проводим вычисление элемента $c_{ij} = c_{ij} + a_{ik}b_{kj}$. Эти циклы повторяем для каждого значения $k = \overline{1, n}$, так что в итоге получаем в кэш-памяти столбец C_j искомой матрицы C , который следует переписать в основную оперативную память, после чего перейти к следующему значению номера j .

Подсчитывая количество чисел с плавающей точкой, проходящих при выполнении описанного алгоритма в обоих направлениях по каналу связи между кэш-памятью и основной оперативной памятью, получаем

$$N = \sum_{j=1}^n j \left(2n + \sum_{k=1}^n kn \right) = 2n^2 + n^3 \approx 2n^2 + \frac{3n^4}{M}.$$

Отсюда видна важность увеличения кэш-памяти.

Предположим, что число M таково, что в кэш-памяти можно разместить по α столбцов матриц B и C и один столбец матрицы A , т.е. $M \approx (\alpha + 1)n$. Тогда описанный выше алгоритм

можно использовать для вычисления матрицы C по блокам, каждый из которых состоит из α столбцов. При этом количество чисел, проходящих в обоих направлениях по каналу связи между кэш-памятью и основной оперативной памятью, будет равно

$$N_1 = \sum_{j=1}^n 2nj + [n/\alpha]^* \sum_{k=1}^n kn = 2n^2 + n^2[n/\alpha]^*,$$

где $[n/\alpha]^*$ — наименьшее натуральное число, равное числу n/α или большее его. Если $\frac{n}{\alpha} \in \mathbb{N}$, то $N_1 = 2n^2 + \frac{n^3}{\alpha} \approx 2n^2 + \frac{2n^4}{M-n}$. При $n \gg 1$ имеем $N_1 \approx \frac{N}{\alpha}$, т.е. увеличение M в $\frac{2\alpha+1}{3}$ раз позволит получить экономию затрат времени в α раз.

Покажем, что в данном случае кэш-память даст больший эффект, если при перемножении квадратных матриц A и B порядка n использовать их блочное представление, причем каждую из них представить состоящей из $(n/\beta)^2$ блоков в виде квадратных подматриц порядка β (полагаем, что $\frac{n}{\beta} \in \mathbb{N}$). Тогда, согласно правилу умножения блочных матриц [III], блок C_{IJ} , $I, J = 1, n/\beta$, матрицы C равен

$$C_{IJ} = \sum_{K=1}^{n/\beta} A_{IK} B_{KJ},$$

где A_{IK} и B_{KJ} — блоки матриц A и B соответственно. Если для фиксированных значений $I, J = 1, n/\beta$ создать в кэш-памяти нулевой блок C_{IJ} и во внутреннем цикле по $K = 1, n/\beta$, вызывая в кэш-память блоки A_{IK} и B_{KJ} , провести матричные вычисления $C_{IJ} = C_{IJ} + A_{IK} B_{KJ}$, то в итоге получим блок C_{IJ} искомой матрицы C , который затем следует переписать в основную оперативную память. При реализации такого алгоритма по каналу связи между кэш-памятью и основной оперативной памятью в обоих направлениях пройдет количество чисел

$$N_2 = \sum_{I=1}^{n/\beta} \sum_{J=1}^{n/\beta} IJ \left(\beta^2 + \sum_{K=1}^{n/\beta} 2K\beta^2 \right) = n^2 + 2n^2 \frac{n}{\beta}.$$

При сравнении N_2 с N_1 следует учесть, что кэш-память объемом $M \approx (2\alpha + 1)n$ позволит выбрать β из условия $M \approx 3\beta^2$. Следовательно, при $n \gg 1$ получим

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{2n^2 + \frac{n^3}{\alpha}}{n^2 + 2\frac{n^3}{\beta}} \approx \frac{\beta}{2\alpha} \approx \frac{n\sqrt{\frac{M}{3}}}{M-n} \approx \frac{n}{\sqrt{3M}}.$$

Так, при $n = 2^{10}$ и $M = 2^{14}$ по затратам времени на пересылку чисел из основной оперативной памяти в кэш-память и обратно последний алгоритм экономнее предыдущего в 4,9 раза.

7.3. Алгоритмы векторно-конвейерных вычислений

Скалярное умножение векторов — вычислительная операция, занимающая в силу своей простоты низший уровень иерархии вычислительных операций линейной алгебры (см. 7.2). Благодаря специальной организации вычислений можно добиться существенного повышения производительности ЭВМ при выполнении этой операции. Основной особенностью такой организации является так называемая конвейеризация выполнения операций, входящих в скалярное умножение векторов.

Напомним*, что действительное число x в памяти ЭВМ представлено в виде $x = \pm q \cdot R^p$, где R — основание системы счисления (для двоичной системы $R = 2$, для десятичной $R = 10$ и т.п.), $q \in [1/R, 1)$ — правильная дробь, называемая мантиссой числа x , $p \in \mathbb{Z}$ — целое число, называемое порядком числа x . Такая форма записи числа носит название представления с *плавающей запятой* (или с *плавающей точкой*), причем на каждое число отведено определенное количество *битов* (элементов, принимающих только одно из двух значений — 0 или 1), образующих *машинное слово*.

*См.: Савельев А.Я.

Рассмотрим сначала этапы выполнения операции сложения двух чисел $x = q_x \cdot R^{p_x}$ и $y = q_y \cdot R^{p_y}$, которой соответствует формула

$$x \pm y = R^{p_x} (q_x \pm q_y \cdot R^{p_y - p_x}).$$

Эта операция состоит из четырех этапов, каждый из которых выполняет специальное устройство. На первом этапе оба числа поступают в устройство, в котором происходит сравнение их порядков, например, по разности $p_x - p_y$ (рис. 7.2). На втором этапе осуществляется сдвиг плавающей запятой, например, у числа x таким образом, чтобы складываемые числа имели одинаковый порядок (запись числа x принимает вид \bar{x}). После этого на третьем этапе происходит сложение мантисс, а на четвертом результат подвергается так называемой нормализации, состоящей в приведении его мантиссы к допустимому промежутку значений.

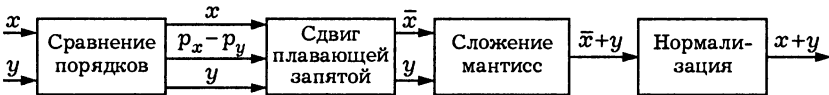


Рис. 7.2

При выполнении отдельно взятой операции сложения двух чисел в каждый текущий момент времени занято и активно работает лишь одно из четырех рассмотренных устройств. При этом производительность зависит от суммарного времени прохождения информации через все четыре устройства. Время τ выполнения каждого этапа обычно одинаково и носит название *тактового периода*. Например, при сложении двух векторов с n координатами потребуется время $t_*(n) = sn\tau$, где s — число тактов при выполнении сложения одной пары координат (в данном случае $s = 4$). Об ЭВМ, выполняющей вычисления описанным способом, говорят, что она имеет *последовательную архитектуру*.

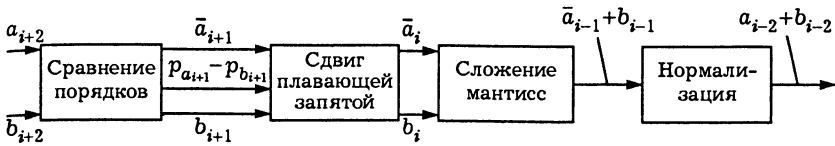


Рис. 7.3

При конвейерном сложении координат двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} все четыре устройства работают одновременно (рис. 7.3). Пока первое устройство сравнивает порядки координат a_{i+2} и b_{i+2} этих векторов, второе устройство сдвигает плавающую запятую у одной из $(i+1)$ -х координат (например, у a_{i+1} , переводя ее запись в форму \bar{a}_{i+1}), третье складывает мантиссы чисел \bar{a}_i и b_i , а четвертое нормализует сумму $\bar{a}_{i-1} + b_{i-1}$. В это же время происходит запись результата $c_{i-2} = a_{i-2} + b_{i-2}$, являющегося $(i-2)$ -й координатой вектора $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, а на входе в первое устройство уже подготовлены координаты a_{i+3} и b_{i+3} складываемых векторов.

Таким образом, в данном случае на выполнение одного сложения требуется один тактовый период вместо четырех при последовательной архитектуре ЭВМ, а для сложения двух векторов с n координатами потребуется время $t^*(n) = s\tau + (n-1)\tau$ (слагаемое $s\tau$ равно времени получения первой суммы, после чего все четыре устройства начнут работать как конвейер). При $n \gg s$ из сравнения $t^*(n)$ с $t_*(n)$ следует, что производительность ЭВМ в данном случае возрастает в s раз.

Несложно представить таким же образом последовательность работы и взаимодействие устройств при выполнении скалярного умножения векторов или операции умножения вектора на число и сложения с другим вектором (см. пример 7.1). Эти устройства входят в состав векторных регистров, обменивающихся информацией с памятью компьютера при помощи инструкций загрузки вектора в регистр и записи вектора в память. Архитектуру ЭВМ, выполняющей вычисления по такой схеме, называют *конвейерной*.

Пусть векторный регистр одновременно может выполнять l этапов некоторой конвейеризованной векторной операции, причем выполнение любого из этапов соответствует одному такту. Если векторная операция является n -мерной, т.е. ее результат — это вектор с n координатами, и $n \leq l$, то для ее выполнения потребуется время $t(n) = (q + n)\tau$, где q — число тактов, необходимое для начальной загрузки векторного регистра. Но при $n > l$ загружаемые в регистр векторы должны быть представлены в виде нескольких *кортежей* длиной не более l . Тогда получим

$$t(n) = (n + q[n/l]^*)\tau, \quad (7.1)$$

где $[n/l]^*$ — наименьшее натуральное число, равное числу n/l или большее его.

Если для вычисления каждой координаты итогового результата требуется ρ флоп, то эффективная скорость векторно-конвейерных вычислений равна

$$v(n) = \frac{\rho n}{t(n)} = \frac{\rho}{\tau \left(1 + \frac{q}{n}[n/l]^*\right)}.$$

При измерении τ в секундах получим $v(n)$ в флопах в секунду (флоп/с).

Пример 7.5. Рассмотрим процедуру векторно-конвейерных вычислений применительно к умножению матрицы A размера $m \times r$ на матрицу B размера $r \times n$. Если при этом учитывать затраты времени лишь на вычисление скалярных произведений векторов с r координатами, то время, требуемое для перемножения этих матриц, в соответствии с (7.1) равно $t_r = mn(r + q[r/l]^*)\tau$.

Но алгоритм перемножения матриц можно построить иначе. Например, при фиксированных значениях $j = \overline{1, n}$ и $k = \overline{1, r}$ во внутреннем цикле по $i = \overline{1, m}$ можно конвейеризовать опера-

цию $c_{ij} = c_{ij} + a_{ik}b_{kj}$ вычисления элемента c_{ij} матрицы $C = AB$ с использованием операций умножения вектора на число и сложения результата с другим вектором (см. пример 7.1). Тогда получим $t_m = nr(m + q\lceil m/l \rceil)\tau$. Если же в аналогичном алгоритме внутренний цикл провести по $j = \overline{1, n}$, то будем иметь $t_n = rm(n + q\lceil n/l \rceil)\tau$.

Ясно, что из трех рассмотренных алгоритмов следует выбрать оптимальный, соответствующий наименьшему из значений $mn\lceil r/l \rceil^*$, $nr\lceil m/l \rceil^*$ или $rm\lceil n/l \rceil^*$. Сравнивая эти значения между собой, можно заключить, что в случае, когда l больше каждого из значений m , n и r , оптимальным будет алгоритм с наибольшей длиной внутреннего цикла. Если же l существенно меньше каждого из значений m , n и r , то различие в затратах времени на перемножение матриц при использовании этих алгоритмов невелико. #

Оценка (7.1) не учитывает затраты времени на перемещение данных между памятью и регистрами в обоих направлениях. Важно, чтобы при таком перемещении эти данные занимали непрерывную область. Для вектора это означает, что расстояние между его последовательными координатами, измеренное в ячейках памяти, минимально. Это расстояние называют *шагом выборки*. Элементы матрицы обычно располагают в памяти по столбцам. Поэтому доступ к последовательным элементам в столбце матрицы можно осуществить наиболее рационально, т.е. с *единичным шагом выборки*, а доступ к последовательным элементам в строке уже не будет операцией с таким шагом. Так, среди рассмотренных в примере 7.5 алгоритмов лишь во внутреннем цикле по $i = \overline{1, m}$ второго алгоритма выборка элементов a_{ik} и c_{ij} матриц A и C происходит с единичным шагом (элемент b_{kj} матрицы B во внутреннем цикле фиксирован). Ясно, что при оценке суммарных затрат времени на перемножение матриц необходимо учитывать его затраты на перемещение данных, тем более если эти перемещения происходят не с единичным шагом выборки.

7.4. О распараллеливании матричных вычислений

С возможностью распараллеливания алгоритмов связано повышение производительности ЭВМ, имеющих несколько процессоров и специальную архитектуру, обычно называемую *матричной архитектурой*. Объединение этих процессоров называют *мультипроцессором* (или *матрицей процессоров*). Они имеют доступ либо к общей памяти ЭВМ, либо к своей локальной, называемой в этом случае распределенной памятью ЭВМ. Одновременное выполнение несколькими процессорами вычислений, относящихся к одной задаче, при соответствующей организации вычислений может ускорить решение этой задачи. Распределение функций между процессорами зависит как от структуры алгоритма, так и от системы связи между процессорами.

При сложении n чисел алгоритм вычислений наряду с последовательным суммированием слагаемых допускает несколько вариантов распараллеливания. Например, при $n = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$, можно складывать слагаемые попарно, затем проводить попарное сложение полученных результатов и т.д. Нетрудно установить, что общее число операций сложения равно $n - 1 = 2^m - 1$, т.е. совпадает с числом операций сложения при последовательном суммировании слагаемых. Поэтому такой вариант распараллеливания, называемый каскадной схемой, не дает экономии времени при использовании ЭВМ с *последовательной архитектурой*. Но для мультипроцессора, состоящего всего из двух параллельно работающих процессоров, каскадную схему алгоритма сложения можно реализовать за m последовательных этапов.

Применительно к операции сложения двух векторов с n координатами (см. 7.3) мультипроцессор, состоящий из N параллельно работающих процессоров, выполняющих сложение каждой пары координат за $s = 4$ тактовых периода длительностью τ , при $N < n$ завершит вычисления за время $t(n) =$

$= s[n/N]^* \tau$, где $[n/N]^*$ — наименьшее натуральное число, равное числу n/N или большее его. Таким образом, в этом случае при $\frac{n}{N} \in \mathbb{N}$ время выполнения операции сложения векторов можно сократить в N раз по сравнению с временем при использовании ЭВМ с последовательной архитектурой. Если $N \gg s$, то выполнение этой операции при помощи этого мультипроцессора будет проходить существенно быстрее, чем на ЭВМ с конвейерной архитектурой. Можно добиться еще большего увеличения производительности ЭВМ, если объединить в мультипроцессор процессоры, выполняющие вычисления по конвейерной схеме*.

Рассмотрим особенности применения ЭВМ различной архитектуры для перемножения квадратных матриц A и B порядка n с элементами a_{ij} и b_{ij} $i, j = \overline{1, n}$, соответственно. Можно выделить три алгоритма выполнения этой операции. В первом из них для фиксированных значений $i, j = \overline{1, n}$ при начальном значении $c_{ij} = 0$ во внутреннем цикле по $k = \overline{1, n}$ вычисляют элемент $c_{ij} = c_{ij} + a_{ik}b_{kj}$ матрицы $C = AB$. Этот алгоритм предусматривает вычисление скалярного произведения i -й строки матрицы A и j -го столбца матрицы B во внутреннем цикле, и поэтому его называют *алгоритмом внутреннего произведения*. Ясно, что для выполнения этого алгоритма можно использовать ЭВМ с любой архитектурой. Однако возможности его распараллеливания применительно к мультипроцессору ограничены (например, для мультипроцессора, состоящего из n параллельно работающих процессоров, можно одновременно вычислить n произведений $a_{ik}b_{kj}$, $k = \overline{1, n}$, а затем полученные результаты сложить по каскадной схеме).

Перемножение квадратных матриц порядка n требует вычисления n^2 скалярных произведений их строк и столбцов. Поэтому для повышения производительности ЭВМ целесообразно так изменить алгоритм вычисления этого произведения, чтобы

*См.: Хокни Р., Джесссхоуп К.

дать работу одновременно большему числу процессоров мультипроцессора.

Если цикл по номерам $i = \overline{1, n}$ строк искомой матрицы C сделать внутренним, цикл по $j = \overline{1, n}$ — внешним, а цикл по $k = \overline{1, n}$ — средним, то n параллельно работающих процессоров смогут вычислять скалярные произведения одновременно для всех элементов j -го столбца этой матрицы. Такой вариант распараллеливания называют *алгоритмом среднего произведения*. Отметим, что можно было сделать внутренним цикл по номерам $j = \overline{1, n}$ столбцов матрицы C , а внешним — цикл по номерам $i = \overline{1, n}$ строк. Но тогда к элементам b_{kj} матрицы B доступ в памяти происходил бы не с *единичным шагом выборки*, поскольку в смежных ячейках памяти хранятся элементы столбца матрицы (см. 7.3). Поэтому в алгоритме среднего произведения предпочтительнее внешним делать цикл по номерам $j = \overline{1, n}$ столбцов искомой матрицы. Если число N процессоров в мультипроцессоре меньше порядка перемножаемых матриц, то аналогично ситуации, рассмотренной в примере 7.4, матрицу B можно разбить на блоки по N или менее столбцов, используя правило умножения блочных матриц [III].

Наконец, *алгоритм внешнего произведения*, в котором внешним является цикл по $k = \overline{1, n}$, предусматривает использование мультипроцессора, состоящего из n^2 параллельно работающих процессоров. Каждый из этих процессоров для фиксированного сочетания значений $i = \overline{1, n}$ и $j = \overline{1, n}$ вычисляет последовательно по $k = \overline{1, n}$ слагаемые $a_{ik}b_{kj}$ соответствующего скалярного произведения и суммирует их для получения „своего“ элемента c_{ij} матрицы $C = AB$. Если мультипроцессор имеет $N^2 < n^2$ процессоров, то в этом случае целесообразно матрицы A и B разбить на квадратные блоки порядка N или менее и, применив к таким блокам алгоритм внешнего произведения, в соответствии с правилом умножения блочных матриц сложить полученные результаты и записать их в память по столбцам искомой матрицы C .

Представляет определенный интерес случай, когда мульти-процессор имеет $N^2 > n^2$ процессоров. Тогда, конечно, можно использовать лишь n^2 процессоров в сочетании с алгоритмом внешнего произведения. Но если количество параллельно работающих процессоров равно n^3 , возможно применение еще одного варианта распараллеливания алгоритма перемножения квадратных матриц порядка n . Дело в том, что при этом необходимо выполнить n^3 операций умножения, вычисляя n^2 скалярных произведений строк и столбцов, каждое из которых требует выполнения n операций умножения. Поэтому каждому из n^3 процессоров можно поручить выполнить лишь одну операцию умножения, а затем просуммировать n слагаемых каждого из n^2 скалярных произведений по каскадной схеме.

Отметим, что большинство вычислительных методов линейной алгебры, содержащих матричные операции, приводят к алгоритмам, реализацию которых наиболее просто осуществить на ЭВМ с последовательной или конвейерной архитектурой. К ним, например, можно отнести метод Гаусса исключения неизвестных и метод прогонки [III]. Но и для таких методов можно построить алгоритмы с распараллеливанием вычислений, эффективно реализуемые на ЭВМ с матричной архитектурой*.

7.5. Операции с разреженными матрицами

Преобразование многих *математических моделей* (ММ) *технических объектов* приводит к матрицам с большим количеством нулевых элементов. Такие матрицы принято называть *разреженными* (или *слабозаполненными*).

Строгое определение разреженной матрицы отсутствует. Один из критериев разреженности связан с ограничением числа ненулевых элементов в строке от 2 до 10. Другой критерий устанавливает для квадратных матриц порядка n число ненулевых элементов, равное $n^{1+\gamma}$, где $\gamma \in (0, 1)$. Так, для матриц,

*См.: *Валях Е.; Голуб Дж., Ван Лоун Ч.; Хокки Р., Джессстоун К.*

полученных преобразованием ММ электрических систем, обычно $\gamma \approx 0,2$. Однако на практике матрицу считают разреженной, если имеет смысл извлекать выгоду из того, что многие ее элементы равны нулю*. Поэтому свойство разреженности матрицы тесно связывают со способами ее экономного хранения в памяти ЭВМ и с алгоритмами, позволяющими при вычислениях с ней повысить производительность ЭВМ.

Разреженная матрица является множеством ненулевых элементов, нерегулярно расположенных по строкам и столбцам. Поэтому ее ненулевые элементы не удастся хранить в памяти ЭВМ столь простым способом, как элементы обычной матрицы. Если ограничиться хранением значений ненулевых элементов разреженной матрицы, то придется хранить и так называемую индексную информацию, указывающую номера строки и столбца каждого такого элемента. Этот способ часто не является самым рациональным. Более рациональны способы хранения разреженной матрицы, связанные с запоминанием определенной доли нулевых элементов. Способ, оставляющий при хранении меньшее число нулевых элементов, обычно более сложен, а алгоритм обработки матрицы в такой записи труднее программировать.

Так как операции с матрицами можно свести к операциям скалярного умножения векторов, соответствующих столбцам и строкам матриц, и покомпонентного сложения векторов (см. 7.2), то применительно к разреженным матрицам достаточно рассмотреть особенности хранения, сложения и умножения векторов с большим количеством нулевых координат. Такие векторы принято называть *разреженными*. Ясно, что это частный случай разреженной матрицы, имеющей только один столбец или одну строку.

Один из вариантов хранения разреженного вектора a размера n в памяти ЭВМ требует двух массивов длиной n_a , соответствующей числу ненулевых координат этого вектора. В массив

*См.: Писсанецки С.

AR в любой последовательности записывают значения ненулевых координат a_i , а соответствующие им номера (индексы i) хранят в массиве AN . В этом случае число $n_a \in \mathbb{N}$ необходимо хранить отдельно. В другом варианте хранения массив AR остается прежним, а в массиве AN длиной $n_a + 1$ в последней позиции записывают ноль в качестве признака окончания списка индексов. Этот вариант хранения называют компактным неупорядоченным.

Рассмотрим на конкретном примере операцию сложения двух разреженных векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} размера n . Пусть информация об этих векторах записана в массивах $AN = \{10, 3, 7, 4\}$ и $AR = \{0, 2, 0, 3, 0, 4, -0, 7\}$ длиной $n_a = 4$ и массивах $BN = \{5, 4, 10\}$ и $BR = \{0, 6, 0, 7, 0, 5\}$ длиной $n_b = 3$ соответственно. Используя эту информацию, можно было бы последовательно просматривать массивы AN и BN и в конце каждого этапа просмотра складывать соответствующие координаты векторов. Так, чтобы найти первую координату $c_1 = a_1 + b_1$ вектора $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, необходимо, просмотрев эти массивы, убедиться, что ни в одном из них нет числа 1, т.е. и $a_1 = 0$, и $b_1 = 0$, и лишь после этого вычислить $c_1 = 0$. Затем аналогичным образом установить, что $c_2 = 0$. При третьем просмотре удастся обнаружить, что в массиве AN есть число 3 и ему в массиве AR соответствует $a_3 = 0,3$, но в массиве BN нет числа 3 и поэтому $b_3 = 0$, так что в итоге $c_3 = a_3 + b_3 = 0,3$. Следовательно, при вычислении каждой из n координат вектора \mathbf{c} приходится просматривать массивы AN и BN . С учетом выполнения операций сложения общее число элементарных операций составит примерно $n(n_a + n_b)$, что при достаточно большом значении n делает такой алгоритм весьма неэффективным*.

Более эффективным является алгоритм, в котором выделены так называемые индексный и вычислительный этапы и они выполняются последовательно. На индексном этапе объединяют массивы AN и BN в одном массиве IC длиной n и

*См.: Писсанецки С.

одновременно формируют массив CN индексов ненулевых координат c_i вектора c . Эти координаты предстоит найти на вычислительном этапе алгоритма, но предварительно подробнее рассмотрим процедуру формирования массивов IC и CN .

Перед объединением массивов AN и BN в массив IC длиной n , называемый массивом переключателей, засылают нули. Затем из двух массивов AN и BN выбирают более длинный (при $n_a = n_b$ выбор произволен) и в результате его просмотра заменяют в массиве IC нули на условленное число-переключатель (например, на число 1) в тех позициях, номера которых соответствуют числам в выбранном массиве. В данном случае $n_a > n_b$, и поэтому после выбора и просмотра массива AN переключатели в массиве IC займут позиции, представленные в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Номер позиции в массиве IC	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
Переключатель	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0

При просмотре второго массива (в данном случае массива BN) замена нуля на переключатель в массиве IC происходит аналогично, но только в тех позициях, в которых остались нули после просмотра первого массива. Для рассматриваемого примера при просмотре массива BN замена нуля на переключатель в массиве IC произойдет лишь в позиции 5, так как в позициях 4 и 10 такая замена произошла при просмотре массива AN . В итоге массив IC примет вид, представленный в табл. 7.2.

Таблица 7.2

Номер позиции в массиве IC	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
Переключатель	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0

Замена нуля на переключатель при просмотре массива BN означает, что после сложения векторов a и b вектор c наряду

с n_a ненулевыми координатами может иметь еще несколько ненулевых координат. Поэтому после каждой такой замены номер соответствующей позиции массива IC следует заносить в позиции, добавляемые к массиву AN при формировании массива CN . В данном случае такая замена произошла лишь один раз в позиции с номером 5 массива IC . Поэтому к массиву AN следует добавить лишь одну позицию, в которую нужно записать этот номер, а массив индексов ненулевых элементов искомого вектора c будет иметь $n_c = n_a + 1$ позиций и примет вид $CN = \{10, 3, 7, 4, 5\}$.

После формирования массива CN , определяющего пока лишь структуру вектора $c = a + b$, вычислительный этап алгоритма сложения векторов можно выполнить разными путями. На первый взгляд достаточно прост следующий путь. В первой позиции этого массива стоит номер 10 индекса ненулевого элемента $c_{10} = a_{10} + b_{10}$ искомого вектора. Для его вычисления необходимо путем просмотра массивов AN и BN найти номера позиций, которые в массивах AR и BR соответственно занимают значения $a_{10} = 0,2$ и $b_{10} = 0,5$, и только потом сложить эти значения, а затем перейти ко второй позиции массива CN и т.д. Такой путь связан с выполнением большого количества операций просмотра массивов и поэтому неэффективен.

Целесообразно поступить следующим образом. Сначала при помощи массива CN формируем так называемый массив UC указателей длиной n , начальные значения которых равны нулю. В рассматриваемом примере в первой позиции массива CN стоит число 10, т.е. $CN(1) = 10$. Это означает, что в первой позиции массива CR длиной $n_c = 5$, предназначенном для записи координат искомого вектора c , будет после вычисления записана координата c_{10} . Поэтому полагаем $UC(10) = 1$. Так как $CN(2) = 3$, то полагаем $UC(3) = 2$, и вообще при $CN(k) = m$ имеем $UC(m) = k$. В итоге получим массив указателей, представленный в табл. 7.3.

Далее формируем массив CR длиной $n_c = 5$ с нулевыми начальными значениями элементов. Просматривая массивы AN

Таблица 7.3

Номер позиции в массиве IC	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
Указатель	0	0	2	4	5	0	3	0	0	1	0	0

и BN , при помощи массива UC определяем позиции массива CR , в которых должна быть записана сумма соответствующих координат векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} . Например, в первой позиции массива AN находим $AN(1) = 10$. Этому значению соответствуют указатель $UC(10) = 1$ и значение $AR(1) = 0,2$ координаты a_{10} . Следовательно, можно записать $CR(1) = 0 + AR(1) = 0,2$. Затем находим $AN(2) = 3$, $UC(3) = 2$, $AR(2) = 0,3$ и $CR(2) = 0 + 0,3 = 0,3$. Ясно, что в итоге просмотра массива AN получим массив $CR = \{0,2, 0,3, 0,4, -0,7, 0\}$, отличающийся от массива AR лишь одной дополнительной позицией с нулевым значением. Поэтому в данном случае можно было бы не просматривать массив AN , а сразу сформировать массив CR в указанном виде.

Теперь переходим к просмотру массива BN . Так как $BN(1) = 5$, то $UC(5) = 5$, $BR(1) = 0,6$ и $CR(5) = CR(5) + BR(1) = 0 + 0,6 = 0,6$. Затем определяем $BN(2) = 4$, $UC(4) = 4$, $BR(2) = 0,7$ и $CR(4) = CR(4) + BR(2) = -0,7 + 0,7 = 0$. Наконец, по $BN(3) = 10$ находим $UC(10) = 1$, $BR(3) = 0,5$ и $CR(1) = CR(1) + BR(3) = 0,2 + 0,5 = 0,7$. В итоге получаем массив $CR = \{0,7, 0,3, 0,4, 0, 0,6\}$. Отметим, что при сложении один из ожидаемых ненулевых элементов массива CR оказался равным нулю. Взаимное уничтожение действительных чисел происходит достаточно редко, и поэтому можно примириться с тем, что некоторые из хранимых координат разреженного вектора на самом деле являются нулями. Но при сложении специальных матриц (например, матриц инцидентности в теории графов [XIX]), имеющих большое число элементов, равных ± 1 , такие случаи будут частыми, что потребует модифицировать алгоритм сложения векторов.

Описанная процедура вычислительного этапа содержит число элементарных операций, пропорциональное сумме $n_a + n_b$. К этому числу следует добавить n операций засылки нулей при формировании массива переключателей. Отметим, что за один индексный и один вычислительный этапы можно сложить любое число разреженных векторов, а также вычислить их линейную комбинацию. При этом массив переключателей может объединить любое число массивов с индексами ненулевых элементов этих векторов. Этот же массив переключателей можно использовать при сложении разреженных матриц, когда придется складывать несколько пар векторов, соответствующих, например, столбцам этих матриц. В этом случае в массиве переключателей каждому столбцу искомой матрицы должен соответствовать свой переключатель (например, номер этого столбца).

Пусть теперь требуется вычислить скалярное произведение двух разреженных векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} размера n при компактном неупорядоченном варианте их хранения в массивах AR и BR длиной n_a и n_b соответственно. Прямолинейная попытка вычисления скалярного произведения привела бы к необходимости много раз просматривать массив BN с индексами ненулевых координат b_i вектора \mathbf{b} . Убедимся в этом на примере умножения тех же векторов, что и при сложении. Действительно, после нахождения в первой позиции массива AR ненулевой координаты $a_{10} = 0,2$ вектора \mathbf{a} необходимо определить значение множителя b_{10} . Для этого надо просмотреть весь массив BN и установить, что этому индексу соответствует третья позиция этого массива, затем из третьей позиции массива BR извлечь значение $b_{10} = 0,5$, наконец, вычислить $a_{10}b_{10} = 0,1$ и запомнить это значение. Во второй позиции массива AR записана координата $a_3 = 0,3$. Снова придется повторить процедуру просмотра массива BN только для того, чтобы убедиться, что $b_3 = 0$. В итоге число элементарных операций при просмотре будет равно $n_a n_b$.

Более эффективен алгоритм скалярного умножения, использующий массив индексов U длиной n . Этот массив формируется за один просмотр массива AN , и для рассматриваемого примера его вид представлен в табл. 7.4.

Таблица 7.4

Номер позиции в массиве IC	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
Индекс	0	0	2	4	0	0	3	0	0	1	0	0

Из табл. 7.4 следует, что значение a_3 записано в позиции 2 массива AR , значение a_4 — в позиции 4, a_7 — в позиции 3 и a_{10} — в позиции 1 этого массива, а все остальные координаты вектора a равны нулю.

Затем за один просмотр массива BN при помощи массива U удастся найти все сомножители, которые дадут ненулевые произведения $a_i b_i$ координат векторов a и b , вычислить и просуммировать эти произведения, получив искомый результат. В самом деле, на первом шаге просмотра массива BN устанавливаем, что $BN(1) = 5$, но $U(5) = 0$, т.е. $a_5 = 0$, и, значит, произведение $a_5 b_5 = 0$ не даст вклада в искомое скалярное произведение векторов. На втором шаге находим $BN(2) = 4$ и $U(4) = 4 \neq 0$. Поэтому из массивов AR и BR извлекаем значения $AR(4) = a_4 = 0,7$ и $BR(2) = b_4 = -0,7$ соответственно, находим $a_4 b_4 = -0,49$ и записываем этот результат в ячейку h памяти, выделенную для значения скалярного произведения. Наконец, на последнем (третьем) шаге просмотра массива BN , определяем значением $n_b = 3$, имеем $BN(3) = 10$ и $U(10) = 1 \neq 0$, из массивов AR и BR извлекаем значения $AR(1) = a_{10} = 0,2$ и $BR(3) = b_{10} = 0,5$ соответственно, вычисляем $a_{10} b_{10} = 0,1$ и получаем искомое значение $h = h + a_{10} b_{10} = -0,49 + 0,1 = -0,39$ скалярного произведения заданных векторов.

Описанный алгоритм особенно удобен тогда, когда один и тот же вектор a нужно скалярно умножить на несколько различных векторов. В этом случае массив U формируется один

раз и многократно используется при однократном просмотре массива индексов координат каждого из сомножителей вектора \mathbf{a} .

Наряду с хранением симметрической разреженной матрицы по столбцам или строкам может оказаться рациональным ее хранение в виде так называемой ленты. Квадратную матрицу называют *ленточной*, если все ее ненулевые элементы заключены внутри ленты, образованной побочными диагоналями. Для симметрической ленточной матрицы A ее элементы $a_{ij} = 0$ при $|i - j| > \beta \in \mathbb{N}$ и $a_{k, k-\beta} \neq 0$ либо $a_{k, k+\beta} \neq 0$ хотя бы для одного значения $k \in \mathbb{N}$. Значение β называют полушириной ленты, а значение $2\beta + 1$ — ее шириной. При $\beta = 1$ ленточную матрицу называют трехдиагональной [III], при $\beta = 2$ — *пятидиагональной*, а при $\beta = 0$ ленточная матрица вырождается в диагональную.

Таким образом, в каждой строке симметрической ленточной матрицы не более $2\beta + 1$ ненулевых элементов. Если это значение существенно меньше порядка n такой матрицы, то ее рационально хранить в виде верхней или нижней полуленты, т.е. в виде части ленты выше или ниже главной диагонали, включая главную диагональ. При этом используют диагональную схему хранения в виде прямоугольной матрицы \bar{A} размера $n \times (\beta + 1)$, иллюстрируемую следующим примером для матрицы A порядка $n = 7$ с полушириной ленты $\beta = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 4 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 8 & 5 & 9 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 9 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 9 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 5 & 9 & 8 \\ 6 & 0 & - \\ 7 & - & - \end{pmatrix}.$$

В этом случае в матрице \bar{A} размера 7×3 записана верхняя полулента, причем в первом столбце хранятся элементы главной

диагонали, а в следующих столбцах — элементы более коротких верхних побочных диагоналей. При этом в столбце матрицы \bar{A} с номером j_* будет не определено $j_* - 1$ элементов. При хранении нижней полуленты матрицы A главную диагональ записывают в последний столбец матрицы \bar{A} , а нижние побочные диагонали — в остальные столбцы со сдвигом на одну позицию вниз при каждом смещении влево.

Диагональная схема хранения удобна с точки зрения доступа к элементам матрицы A , поскольку имеется простое однозначное соответствие между положением каждого ненулевого элемента a_{ij} в матрице A и его положением в матрице \bar{A} , где он сохраняет номер i строки, а его номер столбца принимает значение $j - i$ при хранении верхней полуленты и значение $j - i + \beta + 1$ при хранении нижней полуленты.

Симметрические ленточные матрицы возникают при преобразовании многих ММ к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с применением методов конечных разностей или конечных элементов [XIII]. Существуют алгоритмы, позволяющие одновременной перестановкой строк и столбцов, сохраняя симметрию ленточной матрицы, минимизировать полуширину ее ленты*. При решении СЛАУ с разреженной симметрической матрицей методом Гаусса исключения неизвестных [III] могут возникнуть новые ненулевые элементы. Но при выборе главных элементов на главной диагонали такие элементы появляются только в пределах ленты, так что для них уже зарезервировано место при диагональной схеме хранения исходной матрицы.

Отметим, что разреженную матрицу иногда удобно представить в виде блочной. При этом часто удается более простым способом решить проблемы экономного хранения ненулевых элементов и построить более эффективные алгоритмы вычислений с такими матрицами.

*См.: Джордж А., Лю Дж.; Писсанецки С.

Вопросы и задачи

7.1. Напишите ЭВМ-программу на каком-либо алгоритмическом языке, выполняющую умножение симметрической матрицы порядка n на вектор в соответствии с алгоритмами, рассмотренными в примере 7.2. Проверьте, что второй алгоритм позволяет сократить количество необходимых операций на $2n$ флоп.

7.2. Постройте алгоритм, записывающий с наименьшим объемом дополнительной памяти матрицу A^2 на место верхней треугольной матрицы A .

7.3. Обобщите алгоритм, рассмотренный в примере 7.3, на случай перемножения двух прямоугольных ленточных матриц.

7.4. Пусть X — матрица размера $n \times m$, а B — симметрическая матрица порядка n . Постройте алгоритм вычисления матрицы $Y = X^T A X$ при условии хранения матрицы A по диагоналям (см. пример 7.2) и записи матрицы Y также по диагоналям.

7.5. Вычислите произведение матриц A , B и C размеров $m \times r$, $r \times n$ и $n \times q$ соответственно, используя во внутреннем цикле единичный шаг выборки и операции умножения вектора на число и сложения результата с другим вектором (см. пример 7.1). Выясните, при каких условиях выгоднее вычислять произведение как $D = A(BC)$ вместо $D = (AB)C$, если время выполнения внутреннего цикла равно $t(k) = (k + L)\tau$, где $L = \text{const}$, а τ — продолжительность такта.

7.6. Постройте алгоритм вычисления матрицы $A^T B A$, где A и B — матрицы порядка n , причем матрица B симметрическая, при условии единичного шага выборки в каждом внутреннем цикле.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Учебники и учебные пособия

Атабеков Г.И. Теоретические основы электротехники: В 2 т. Т. 1: Линейные электрические цепи. М.: Энергия, 1978. 592 с.

Карташов Э.М. Аналитические методы в теплопроводности твердых тел. М.: Высш. шк., 1985. 480 с.

Кириллин В.А., Сычев В.В., Шейндлин А.Е. Техническая термодинамика. М.: Энергоатомиздат, 1983. 416 с.

Курс теоретической механики / *В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.М. Ильин* и др.; Под общ. ред. *К.С. Колесникова*. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 736 с. (Сер. Механика в техническом университете; Т.1).

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: В 10 т. Т. 8: Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 664 с.

Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики: В 2 т. Т. 2. М.: Наука, 1983. 640 с.

Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 416 с.

Норенков И.П. Основы автоматизированного проектирования. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 360 с. (Сер. Информатика в техническом университете).

Савельев А.Я. Основы информатики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 328 с. (Сер. Информатика в техническом университете).

Седов Л.И. Механика сплошной среды: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.

Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем. Минск: ДизайнПРО, 1997. 640 с.

Теория теплообмена: Учебник для технических университетов и вузов / *С.И. Исаев, И.А. Кожин, В.И. Кожанов* и др.; Под ред. *А.И. Леонтьева*. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 684 с.

Трудоношин В.А., Пивоварова Н.В. Математические модели технических объектов // Системы автоматизированного проектирования / Под ред. *И.П. Норенкова*. Кн. 4. М.: Высш. шк., 1986. 160 с.

Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике: В 9 т. Т. 6: Электродинамика / Пер. с англ. под ред. *Я.А. Смородинского*. М.: Мир, 1977. 347 с.

Феодосьев В.И. Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1969. 174 с.

Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. 5-е изд., испр. и доп. М.: Наука, 1996. 368 с.

Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. 10-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 592 с. (Сер. Механика в техническом университете; Т. 2).

Чугаев Р.Р. Гидравлика. Л.: Энергоиздат. Ленингр. отд-ние, 1982. 672 с.

Справочные издания и монографии

Александрова Н.В. Математические термины: Справочник. М.: Высш. шк., 1978. 190 с.

Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.

Биркгоф Г. Гидродинамика: Методы. Факты. Подобие: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 244 с.

Блезман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. Киев: Наук. думка, 1976. 270 с.

Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986. 544 с.

Валая Е. Последовательно-параллельные вычисления: Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 456 с.

Воднев В.Т., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф. Математический словарь высшей школы / Под ред. *Ю.С. Богданова*. Минск: Вышэйш. шк., 1984. 528 с.

Галакин М.П., Попов Ю.П. Квазистационарные магнитные поля в неоднородных средах: Математическое моделирование. М.: Наука, 1995. 320 с.

Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления / Пер. с англ. под ред. *В.В. Воеводина*. М.: Мир, 1999. 548 с.

Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.

- Джордж А., Лю Дж.* Численное решение больших разреженных систем уравнений / Пер. с англ. под ред. *Х.Д. Икрамова*. М.: Мир, 1984. 336 с.
- Зарубин В.С.* Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат, 1983. 328 с.
- Зарубин В.С.* Прикладные задачи термпрочности элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1985. 296 с.
- Зарубин В.С.* Расчет и оптимизация термоизоляции. М.: Энергоатомиздат, 1991. 192 с.
- Зарубин В.С.* Температурные поля в конструкции летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1966. 216 с.
- Зарубин В.С., Селиванов В.В.* Вариационные и численные методы механики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. 360 с.
- Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел / Пер. с англ. под ред. *А.А. Померанцева*. М.: Наука, 1964. 488 с.
- Каудерер Г.* Нелинейная механика / Пер. с нем. под ред. *Я.Г. Пановко*. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 778 с.
- Коздоба Л.А.* Электрическое моделирование явлений тепло- и массопереноса. М.: Энергия, 1972. 296 с.
- Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике: Для научных работников и инженеров: Пер. с англ. М.: Наука, 1973. 832 с.
- Краснощечков П.С., Петров А.А.* Принципы построения моделей. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. 264 с.
- Кузьмин М.П.* Электрическое моделирование нестационарных процессов теплообмена. М.: Энергия, 1974. 416 с.
- Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высш. шк., 1967. 600 с.
- Математический энциклопедический словарь / Гл. ред. *Ю.В. Протооров*. М.: Сов. энцикл., 1988. 848 с.
- Магин В.А., Присняков В.Ф., Белиж Н.П.* Динамика жидкостных ракетных двигателей. М.: Машиностроение, 1969. 384 с.
- Моисеев Н.Н.* Математика ставит эксперимент. М.: Наука, 1979. 224 с.
- Мышкис А.Д.* Элементы теории математических моделей. М.: Наука, 1994. 192 с.
- Пановко Я.Г.* Основы прикладной теории упругих колебаний. М.: Машиностроение, 1967. 316 с.
- Пановко Я.Г., Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки. М.: Наука, 1979. 384 с.

Писсанецки С. Технология разреженных матриц / Пер. с англ. под ред. *Х.Д. Икрамова.* М.: Мир, 1988. 412 с.

Плис А.И., Сливина Н.А. Mathcad 2000: математический практикум для экономистов и инженеров. М.: Финансы и статистика, 2000. 656 с.

Политехнический словарь / Гл. ред. *А.Ю. Ишлинский.* М.: Сов. энцикл., 1989. 656 с.

Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение / Пер. с англ. под ред. *В.В. Воеводина.* М.: Мир, 1984. 264 с.

Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. М.: Наука, 1997. 320 с.

Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977. 440 с.

Справочник по специальным функциям / Под ред. *М. Абрамовица и И. Стигака;* Пер. с англ. под ред. *В.А. Диткина и Л.Н. Кармазиной.* М.: Наука, 1979. 832 с.

Тетельбаум И.М. Электрическое моделирование. М.: Физматгиз, 1959. 320 с.

Тихонов А.Н., Кальнер В.Д., Гласко В.В. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении. М.: Машиностроение, 1990. 264 с.

Урмаев А.С. Основы моделирования на аналоговых вычислительных машинах. М.: Наука, 1974. 320 с.

Физические величины: Справочник / Под ред. *И.С. Григорьева, Е.З. Мейлизова.* М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.

Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров / Пер. с англ. под ред. *Р.С. Гутера.* М.: Наука, 1972. 400 с.

Хокки Р., Джессстоун К. Параллельные ЭВМ / Пер. с англ. под ред. *Е.П. Курочкина.* М.: Радио и связь, 1986. 392 с.

Шаповалов Л.А. Моделирование в задачах механики элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1990. 288 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ К XXI ВЫПУСКУ

Автоколебания 271

Автомат конечный XIX, 66

Адекватность ММ 41

Алгоритм произведения внешнего
390

-- внутреннего 389

-- среднего 390

Альтернатива XIV, 21

Амплитуда колебаний 159

-- условная 160

- комплексная 93

Аналогия электрогидравлическая
113

- электромеханическая 100

- электротепловая 108

Архитектура конвейерная 385

- матричная 388

- последовательная 384

Бит 383

Вектор разреженный 392

Величина потенциальная 87

- потоковая 87

Вершина графа XIX, 175

Ветвь фазовой траектории
убегающая 251

Волна тепловая 325

Газ совершенный 114

Граф XIX, 44

Граф ориентированный XIX, 175

- связный XIX, 175

Двухполюсник электрический 88

Действие по Гамильтону XV, 230

Декремент колебаний

логарифмический 159

Дельта-метод 285

Дерево остовное XIX, 178

Диаметр гидравлический 124

Добротность 165

Дуга XIX

Емкость конденсатора 89

Задача идентификации II, 38

- обратная II, 38

- прямая 38

Закон Гука XIII, 97

- Ома 40

Законы Кирхгофа 144

- феноменологические 46

Запятая плавающая 383

Значение параметра

бифуркационное 224

Значения начальные VIII, 162

Иерархия ММ 27

Импеданс 93

Индуктивность 90

Интеграл Бернулли XIII, 236

Интеграл ошибок XII, 320

- эллиптический первого рода
полный X, 257

Интенсивность вихря X, 288

Колебания 156

- вынужденные 164
- затухающие VIII, 159
- свободные 164
- собственные 164
- с перескоком 260

Контур колебательный 157

Координаты обобщенные 184

- независимые 185

Кортеж I, 386

Коэффициент вязкости

- динамический 78
- кинематический 52
- теплоотдачи 53
- усиления комплексный 93

Критерий Био 76

- Маха 81
- оптимальности XIV, XX, 38
- подобия 47
- Прандтля 53
- Рейнольдса 53
- Фурье 76

Кэш-память 380

Масса присоединенная 137

Матрица инцидентий XIX, 176

- ленточная 399
- процессоров 388
- пятидиагональная XIII, 399
- размерностей 70
- разреженная 391
- слабозаполненная XIII, 391

Метод энергетического баланса 281

Моделирование математическое
XIII, 7

Модель концептуальная 25

- математическая XX, 37
- алгоритмическая 45
- аналитическая 45
- геометрическая 43
- детерминированная 55
- динамическая 58
- дискретная 60
- имитационная 44
- квазистатическая 58
- квазистационарная 59
- линеаризованная 59
- линейная 59
- макроуровня 61
- метауровня 61
- микроуровня 61
- двумерная 62
- многомерная 62
- одномерная 62
- трехмерная 62
- нелинейная 59
- непрерывная 60
- нестационарная 58
- полуэмпирическая 46
- смешанная 60
- статическая 58
- стационарная 58
- стохастическая 55
- структурная 43
- структурно-функциональная 43
- теоретическая 45
- топологическая 43
- функциональная 43
- эволюционная 58
- эмпирическая 45
- содержательная 25

- Модуль эллиптического интеграла
 VI, 257
 Момент инерции геометрический
 VI, 98
 Мультипроцессор 388
- Наглядность** ММ 43
 Нагрев аэродинамический 206
- Область адекватности** ММ 41
 Объект технический 24
 Осциллятор 157
 – гармонический VIII, 159
 – линейный VIII, 159
- Параметры внешние** 37
 – внутренние 37
 – выходные 37
 – определяемые 69
 – определяющие 69
 – основные 69
 Переменные фазовые 39
 Перемещения возможные 185
 Период колебаний 48
 – условный 160
 – тактовый 384
 Пи-теорема 46
 Плотность теплового потока 53
 – электрического тока XIII, 288
 – энергии объемная XIII, 288
 Показатель размерности 68
 Полнота ММ 39
 Положение равновесия ОДУ 221
 Полуось эллипса III, 141
 Полуразмах колебаний 158
 Портрет фазовый 253
 Потенциал кинетический 185
 Поток тепловой 51
- Представление функции
 комплексное 93
 Принцип Гамильтона XV, 230
 – Гамильтона — Остроградского
 231
 – декомпозиции 60
 Проводимость резистора 88
 Продуктивность ММ 42
 Процесс переходный 164
 – периодический 58
 – установившийся 58
- Размерность** 67
 Реакция связи 185
 Ребро графа XIX, 175
 Режим регулярный 317
 Робастность ММ 42
- Самовозбуждение колебаний** 273
 Связь 185
 – голономная 185
 – идеальная 185
 Седло VIII, 243
 Сепаратриса VIII, 252
 Сила обобщенная 185
 – потенциальная 186
 Система автоколебательная 271
 – автономная 233
 – дискретная 61
 – диссипативная 232
 – консервативная 161
 – континуальная 61
 – решений фундаментальная III, 70
 Скин-эффект 128
 Скорости обобщенные 185
 Слово машинное 383
 Соотношения определяющие 46

- Сопrotивление активное 93
- гидравлическое 111
 - емкостное 93
 - индуктивное 93
 - комплексное 93
 - полное 147
 - реактивное 93
 - резистора 88
 - термическое 101
- Состояние равновесия 205
- Среда сплошная XIII, 287
- Степень свободы 185
- Суперпозиция 59
- Схема расчетная 25
- эквивалентная 143
- Т**емпература восстановления 207
- равновесная 206
- Тензор второго ранга XIII, 290
- скоростей деформаций XIII, 78
- Теплоемкость полная 107
- Теплообмен конвективный 104
- Точка возврата графика II, 247
- изображающая VIII, 161
 - плавающая 383
 - стационарная функционала XV, 63
- Точность MM 40
- Трение вязкое 198
- линейное 198
 - сухое 198
 - кинематическое 198
 - покоя 198
 - турбулентное 198
- У**гол атаки 50
- телесный VII, 68
- Удар гидравлический 114
- Универсальность MM 36
- Уравнение гармонического осциллятора 160
- дифференциально-функциональное 64
 - интегро-дифференциальное XIII, 64
 - Клапейрона — Менделеева 114
 - Навье — Стокса XIII, 121
 - неразрывности XIII, 78
 - операторное XIII, 39
 - разностное 67
 - состояния 46
 - элемента 87
 - телеграфное XIII, 291
 - характеристическое ОДУ n -го порядка VIII, 163
 - Эйлера XV, 231
- Уравнения Лагранжа второго рода 185
- Максвелла XII, XIII, 290
- Усы 245
- Ф**аза колебаний 91
- начальная 91
- Флаттер 194
- Флоп 379
- Фокус устойчивый VIII, 162
- эллипса III, 141
- Форма колебаний 183
- модели вариационная 62
 - двойственная 63
 - экстремальная 63
- Функция мультимодальная XIV, 253
- строго монотонная I, 251
 - унимодальная XIV, 251

Характеристика

- амплитудно-частотная VIII, 94
- фазочастотная VIII, 94
- Хорда профиля крыла 50

Центр VIII, 161

- Цепи электрические дуальные 146
- Цикл предельный 271
- устойчивый 271

Частота колебаний 159

- угловая 159
- условная 160
- собственная 183

Число Маха 81

- передаточное комплексное 93
- Прандтля 53
- Рейнольдса 53

Шаг выборки 387

- единичный 387

Экономичность ММ 42

- Эксперимент вычислительный 8
- Эксцентриситет эллипса III, 141
- Эллипс III, 141
- Эффект поверхностный 128

Ящик черный 39

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ К КОМПЛЕКСУ УЧЕБНИКОВ ИЗ 20 ВЫПУСКОВ

- Абсцисса точки I
- Аванцепочка XIX
- Автомат XIX
 - конечный XIX
 - детерминированный XIX
 - квазидетерминированный XIX
 - минимальный XIX
 - полностью определенный XIX
 - с выходом XIX
 - магазинный (МП-автомат) XIX
- Автоматы конечные минимальные изоморфные XIX
 - эквивалентные XIX
- Автоморфизм XIX
 - графа XIX
 - множества XIX
- Аддитивность интеграла двойного VII
 - кратного VII
 - Ньютона VI
 - определенного VI
 - тройного VII
 - комплексного потенциала X
 - меры IX
 - счетная IX
 - площади VI
- Аксиома I, XIX
 - неотрицательности XVI
 - непрерывности XVI
- Аксиома нормированности XVI
 - сложения XVI
 - расширенная XVI
 - теории XIX
- Аксиомы кольца XIX
 - линейного пространства IV
 - нормы IV
 - полукольца XIX
 - поля IV, XIX
 - скалярного умножения IV
- Алгебра V, XIX
 - булева I, XIX
 - двухэлементная XIX
 - одноэлементная XIX
 - векторная III
 - кватернионов XIX
 - конечная XIX
 - конечно порожденная XIX
 - Кэли XIX
 - Ли V
 - многосортная XIX
 - порожденная множеством XIX
 - событий XVI
 - универсальная XIX
 - цепей неориентированного графа XIX
- Алгебры многосортные изоморфные XIX
 - однотипные XIX
 - однотипные XIX

- Алгоритм Демукрона XIX
 – дробный XX
 – Евклида II
 – итерационный I
 – Квайна — Мак-Клоски XIX
 – Краскала XIX
 – нахождения наиболее длинного пути XX
 – неустойчивый XIII
 – сортировки XIX
 – (схема) Горнера I
 – устойчивый XIII
 – Флойда — Уоршелла — Клини XIX
 – эффективный XIX
 Алфавит XIX
 – входной XIX
 – конечного автомата XIX
 – с выходом XIX
 – конечный машины Тьюринга XIX
 – МП-автомата XIX
 – выходной XIX
 – магазинный МП-автомата XIX
 – нетерминальный XIX
 – объединенный XIX
 – терминальный XIX
 Альтернатива XX
 – Фредгольма XIII
 Альтернирование IV
 Амплитуда колебания IX
 Анализатор XIX
 Анализ безтупиковый XIX
 – восходящий XIX
 – гармонический XVIII
 – дисперсионный XVII
 – двухфакторный XVII
 – однофакторный XVII
 Анализ конъюнктный XVII
 – нисходящий XIX
 – однопроходный XIX
 – „разверткой“ XIX
 – регрессионный XVII
 – „сверткой“ XIX
 – „сверху вниз“ XIX
 – „снизу вверх“ XIX
 – стохастический XVIII
 – факторный XVII
 Антиградиент XIV
 Антирезонанс VIII
 Антисимметричность XIX
 Антицепь XIX
 Аппликата точки III
 Аппроксимация гладкая XIII
 – конечно-разностная V
 – производных XIII
 Аргумент комплексного числа I
 – операции XIX
 – скалярный II
 – функции I
 Ареакосинус VI
 Ареакотангенс VI
 Ареасинус VI
 Ареатангенс VI
 Арккосинус I
 Аркотангенс I
 Арксинус I
 Арктангенс I
 Асимметрия XVI
 Асимптота графика функции
 вертикальная I
 – горизонтальная двусторонняя I
 – правосторонняя I
 – наклонная I
 – двусторонняя I

- Асимптота графика функции
 наклонная левосторонняя I
 ---- односторонняя I
 ---- правосторонняя I
 Асимптотика функции I
 Ассоциативность I
 Астроида VI
 Атлас V
 – максимальный V
- Базис** в V_1 III
 -- V_2 III
 --- правый (левый) III
 -- V_3 III
 --- правый (левый) III
 – Жегалкина XIX
 – задачи линейного
 программирования XX
 ---- оптимальный XX
 – линейного пространства IV
 – ортогональный IV
 – ортонормированный III
 – правый III
 – сингулярный IV
 – стандартный IV, XIX
 -- в \mathbb{R}^n XV
 – счетный IX
 – Френе сопровождающий II
- Базисы биортогональные IV
 – взаимные IV
- Берег разреза верхний X
 -- нижний X
- Бета-распределение XVII
 Бета-функция VI, XII
 – неполная XVII
- Биекция I
 – обратная I
- Бикомпонента XIX
- Бином I
 – дифференциальный VI
 – Ньютона I
- Бинормаль II
 Блок матрицы III
 – управления автомата XIX
- Брахистохрона II
 Буква XIX
 – входная конечного автомата XIX
- Булеан множества XIX
 Бумага вероятностная XVII
- Валентность** тензора IV
 Вариация допустимая XV
 – первая XV
 – функции XV
 – функционала XV
 -- вторая XV
- Вектор III
 – арифметический V
 – бинормальный II
 – блочный XVIII
 – булев XIX
 -- единичный XIX
 -- нулевой XIX
 – вероятностей состояний XVIII
 --- начальных XVIII
 --- предельных XVIII
 --- системы XVIII
 ---- начальных XVIII
- геометрический III
 -- единичный III
 -- ненулевой III
 -- нулевой III
 – главный нормальный II
 – Дарбу II
 – детерминированный XVIII
 – единичный III

- Вектор значений булевой функции XIX
- касательный V
 - к кривой V
 - параметризованной кривой V
 - подмножеству на многообразии V
 - ковариантный IV
 - контравариантный IV
 - математических ожиданий XVI
 - модуля XIX
 - направляющий прямой III
 - напряжения XIII
 - ненулевой III
 - нормальный к поверхности V
 - единичный V
 - плоскости III
 - прямой III
 - нулевой III
 - ортогональный подпространству IV
 - перемещений XIV
 - противоположный IV
 - решений XX
 - свободный III
 - связанный III
 - скользящий III
 - случайный XVIII
 - двумерный XVI
 - дискретный XVIII
 - непрерывный XVIII
 - n -мерный XVI
 - сноса XVIII
 - собственный квадратной матрицы IV
 - линейного оператора IV
 - состояния XVIII
- Вектор средних значений XVI
- квадратичных отклонений XVI
 - управления XV
 - фазовой скорости XV
 - фазовый VIII
- Вектор-столбец ошибок XVII
- Вектор-функция двумерная II
- дифференцируемая в точке II
 - непрерывно на множестве II
 - кусочно непрерывная XV
 - непрерывная в точке II
 - скалярного аргумента II
 - трехмерная II
- Векторы геометрические
- коллинеарные III
 - однонаправленные (сонаправленные) III
 - противоположно направленные III
 - компланарные III
 - равные III
 - коллинеарные III
 - однонаправленные (сонаправленные) III
 - противоположно направленные III
 - сонаправленные III
 - компланарные III
 - линейно зависимые IV
 - независимые IV
 - ортогональные III
 - присоединенные VIII
 - случайные независимые в совокупности XVIII
 - сопряженные XIV
- Величина I
- векторная III
 - переменная I

- Величина постоянная I
 – скалярная I
 – случайная XVI, XVIII
 -- двумерная XVI
 --- дискретная XVI
 --- непрерывная XVI
 -- дискретная XVI
 -- многомерная (n -мерная) XVI
 -- непрерывная XVI
 -- одномерная XVI
 -- центрированная XVI
 Величины случайные зависимые XVI
 -- независимые XVI
 --- в совокупности XVI
 -- некоррелированные XVI
 Вероятности апостериорные XVI
 – априорные XVI
 Вероятность XVIII
 – безусловная XVI
 – геометрическая XVI
 – доверительная XVII
 – переходная XVIII
 – события XVI
 – состояния XVIII
 – стационарная XVIII
 – условная XVI
 Верх магазина XIX
 Вершина XIX
 – гиперболы III
 – графа XVIII
 – дерева внутренняя XIX
 -- решений XIX
 – достижимая XIX
 -- в ориентированном графе XIX
 – конечного автомата
 заключительная XIX
 --- начальная XIX
 Вершина конической поверхности III
 – конуса III
 – оптимальная XX
 – параболы III
 – решающая XX
 – симплекса XIV
 – случайная XX
 – стека XIX
 – эллипса III
 Вершины смежные XIX
 -- неориентированного графа XIX
 Вес IX, XVIII
 – дуги XIX
 – ребра XIX
 Веса квадратурной формулы VI
 – нормированные XIV
 Ветвь однозначная многозначной функции X
 Вид уравнения двучленный VIII
 Вихреисточник X
 Вихрь X
 Включение XIX
 Вложение XIX
 – многообразия V
 Внешность кривой X
 – круга X
 Внутренность кривой X
 – множества I
 Воздействие управляющее XV
 Возмущение XV
 – матрицы системы IV
 – решения IV
 – столбца правых частей IV
 Возмущения VIII
 Волна тепловая XII
 – ударная XII
 – электромагнитная XII

- Волны импульса XII
 – кноидальные XII
 – отклонения XII
 – стоячие XII
- Время обслуживания XVIII
 – ожидания XVIII
 – свободное XV
- Вронскиан VIII
- Вход сети XIX
- Вхождение главное XIX
 – первое XIX
 – слова в слово XIX
- Вхождения не пересекающиеся XIX
 – пересекающиеся XIX
- Выборка XVI
 – без возвращения XVI
 – из контрольной совокупности XVII
 – контрольная XVII
 – рабочая XVII
 – с возвращением XVI
 – случайная XVIII
 -- k -я XVII
 – экспериментальная XVII
- Вывод в грамматике XIX
- Выводимость цепочки из цепочки XIX
- Вывод на множестве конфигураций МП-автомата XIX
 – статистический XVII
 – цепной XIX
 – цепочки левый (правый) XIX
- Выводы цепочки эквивалентные XIX
- Выделение особенности аддитивное VI
 -- мультипликативное VI
- Выражение иррациональное VI
 – подынтегральное VI
 – рациональное VI
 – регулярное XIX
- Выражения регулярные эквивалентные XIX
- Высказывание I
- Высказывания логически эквивалентные XIX
 – равносильные XIX
- Высота вершины ориентированного дерева XIX
 – матрицы-столбца III
 – ориентированного дерева XIX
- Выход сети XIX
 – триггера инверсный XIX
 -- прямой XIX
- Вычет функции X
 -- в бесконечно удаленной точке X
 -- логарифмический X
 --- относительно контура X
- Вычитание XIX
- Г**амма-зона XVII
- Гамма-распределение XVII
- Гамма-функция (Эйлера) VI, XI, XII
- Гармоника IX
- Геликоид прямой V
- Геометрия дифференциальная V
 – поверхности внешняя V
 -- внутренняя V
- Гипербола III
 – равнобочная III
 – сопряженная III
- Гиперboloид вращения III
 -- двуполостный III
 -- однополостный III

- Гиперboloид двуполостный III
 – однополостный III
 Гиперплоскость XIII, XIV, XV
 Гиперповерхность XV
 Гипотеза альтернативная XVII
 – Кирхгофа — Лява V
 – конкурирующая XVII
 – линейная XVII
 – многопараметрическая XVII
 – однопараметрическая XVII
 – основная XVII
 – параметрическая XVII
 – статистическая XVII
 -- простая XVII
 -- сложная XVII
 Гипотезы XVI
 Гипотрохида II
 Гипоциклоида II
 Гистограмма XVII
 Глубина вершины
 ориентированного дерева XIX
 Годограф II
 Голова списка XIX
 Головка автомата XIX
 Гомеоморфизм V
 Гомоморфизм XIX
 – алгебр V
 – графов XIX
 – групп XIX
 – канонический XIX
 -- группы в фактор-группу XIX
 – колец XIX
 – многосортный XIX
 – проектирующий XIX
 – строгий XIX
 Горизонт планирования
 бесконечный XX
 Горизонт планирования конечный
 XX
 Градиент приведенный XIV
 -- обобщенный XIV
 – скалярного поля VII
 – функции V
 Грамматика контекстно-зависимая
 XIX
 -- обобщенная XIX
 – контекстно-свободная XIX
 -- однозначная XIX
 – леволинейная XIX
 – линейная XIX
 – неукорачивающая XIX
 – общего вида XIX
 – порождающая XIX
 – праволинейная XIX
 – регулярная XIX
 – типа 0 XIX
 – Хомского XIX
 Грамматики эквивалентные XIX
 Грани параллельные XIX
 – соседние XIX
 Граница XX
 – верхняя (нижняя) XVII
 -- γ -доверительная односторонняя
 XVII
 – многосвязной области внешняя X
 --- внутренняя X
 – множества I, V
 -- (подмножества) I
 --- верхняя (нижняя) I
 -- γ -доверительная односторонняя
 XVII
 – поверхности VII
 Грань булева куба XIX
 – множества верхняя (нижняя) XIX

- Грань множества верхняя (нижняя)
 точная I, XIX
- последовательности верхняя (нижняя) точная XIX
- Граф ациклический XIX
- бесконтурный XIX
 - конечного автомата с выходом XIX
 - КС-грамматики XIX
 - неориентированный XIX
 - ассоциированный XIX
 - взвешенный XIX
 - размеченный XIX
 - связный XIX
 - ориентированный XIX
 - взвешенный XIX
 - размеченный XIX
 - связный сильно (слабо) XIX
 - соответствия XIX
 - состояний XVIII
 - размеченный XVIII
- График отображения (функции) I
- соответствия XIX
 - функции I
- Графы изоморфные XIX
- Группа I, XIX
- абелева XIX
 - автоморфизмов XIX
 - аддитивная действительных чисел XIX
 - по модулю 1 XIX
 - кольца XIX
 - целых чисел XIX
 - вычетов по модулю k аддитивная XIX
 - диффеоморфизмов локальная однопараметрическая V
- Группа коммутативная XIX
- конечная XIX
 - локальная V
 - мультипликативная вычетов по модулю p XIX
 - действительных чисел XIX
 - поля XIX
 - рациональных чисел XIX
 - тела XIX
 - неразложимая XIX
 - подстановок XIX
 - n -й степени I
 - симметрий фигуры I
 - симметрическая множества XIX
 - степени n XIX
 - событий полная XVI
 - циклическая XIX
- Группоид XIX
- Группы изоморфные XIX
- Д**анные математической задачи
- входные IV
 - выходные IV
 - статистические XVII
 - группированные XVII
 - экспериментальные XVII
- Движение возмущенное XV
- лимитационное XV
 - невозмущенное VIII
 - объекта XV
 - пространства V
- Девиатор напряжений XIII
- скоростей деформаций XIII
- Действие по Гамильтону XV
- Деление XIX
- Делители нуля XIX
- Делитель многочлена I

- Делитель многочленов общий II
 --- наибольший II
 - нормальный XIX
 Дельта-функция XII
 Дерево вывода XIX
 -- цепочки в КС-грамматике XIX
 -- частичное XIX
 - игры XX
 - неориентированное XIX
 - ориентированное XIX
 -- бинарное XIX
 --- полное XIX
 - остовное XIX
 -- наименьшего веса XIX
 - помеченное XIX
 -- λ -свободное XIX
 - решений XIX
 - упорядоченное XIX
 Детерминант III
 Дефект оператора IV
 - сплайна II
 Диагональ XIX
 - матрицы главная III
 -- побочная III
 - определителя вторая III
 -- главная III
 -- побочная III
 Диаграмма конечного автомата с
 выходом XIX
 - Хассе XIX
 Диаграммы Эйлера — Венна XVI
 Диамант XIX
 Диаметр множества I
 - разбиения VI, VII
 Дивергенция VII
 Дизъюнктор XIX
 Дизъюнкция I, XIX
 - элементарная XIX
- Диполь X
 Директриса гиперболы III
 - параболы III
 - эллипса III
 Дисконтирование XX
 Дискриминант квадратичной
 формы V
 - квадратного трехчлена II
 Дисперсия XVIII
 - (второй центральный момент)
 XVI
 - выборки XVII
 - выборочная XVII
 -- исправленная XVII
 - остаточная XVII
 - случайного процесса XVIII
 - условная XVI
 Дистрибутивность I
 - бесконечная XIX
 Дисциплина очереди XVIII
 Диффеоморфизм V
 Дифференциал биномиальный VI
 - вектор-функции в точке II
 - второго порядка II, V
 - гладкого отображения в точке V
 - длины дуги плоской кривой II
 - иррациональный VI
 - отображения V
 - первого порядка II, V
 - полный V
 - рациональный VI
 - сильный (Фреше) XV
 - слабый (Гато) XV
 - случайного процесса XVIII
 - стохастический в форме Ито
 XVIII
 ---- Стратоновича XVIII

- Дифференциал функции в точке II
 ---- второй (второго порядка) II
 ---- первый (первого порядка) II
 ---- n -й (n -го порядка) II
 -- комплексного переменного в
 точке X
 -- (полный) V
 -- частный V
 - k -го порядка II, V
 Дифференцирование II
 - алгебры V
 - в точке V
 - логарифмическое II
 - почленное функционального ряда
 IX
 - функции вдоль вектора V
 - численное II
 Длина вектора III
 -- геометрического III
 - вывода XIX
 - дизъюнктивной нормальной
 формы (длина ДНФ) XIX
 - кортежа XIX
 - кривой II
 - матрицы-строки III
 - пути XX
 - слова XIX
 - цепи XIX
 ДМП-автомат XIX
 ДНФ XIX
 - кратчайшая XIX
 - минимальная XIX
 - сокращенная XIX
 - тупиковая XIX
 Доказательство I
 - от противного I
 Доминирование XIX
 Доопределение функции по
 непрерывности V
 Дополнение XIX
 - алгебраическое III
 - булево XIX
 - графа неориентированного XIX
 -- ориентированного XIX
 - множества I
 - ортогональное IV
 - прямое IV
 - события XVI
 Доход ожидаемый XX
 -- оптимальный XX
 - приведенный дисконтированный
 XX
 - скрытый XX
 Дробь правильная I
 - рациональная I
 -- правильная (неправильная) I
 -- простейшая VI
 Дуга XIX
 - древесная XIX
 - заходящая XIX
 - инцидентная XIX
 - исходящая XIX
 - нагруженная XVIII
 - обратная XIX
 - поперечная XIX
 - прямая XIX
 - пустая XIX
 - (путь) I
 - стартовая XIX
 Единица I
 - кольца XIX
 - мнимая I
 - моноида XIX

Единица полезности денег XX

- полукольца XIX
- полурешетки XIX
- поля X
- решетки XIX
- функции нижняя XIX

Единицы мнимые XIX

Зависимое переменное I

Завихренность VII

Задача анализа дисперсионного
XVII

- конечного автомата XIX
 - корреляционного XVII
 - регрессионного XVII
 - Больца XV
 - элементарная XV
 - вариационная XV
 - на условный экстремум XV
 - с подвижными границами XV
 - концами XV
 - вариационного исчисления XV
 - простейшая XV
 - выбора кратчайшего пути XX
 - глобального анализа графов XIX
 - двойственная XIV
 - двухточечная XV
 - детерминированная XX
 - динамическая XX
 - Дирихле XII
 - Евклида XIV
 - идентификации II
 - изопериметрическая XV
 - имитационного моделирования XX
 - исследования операций XX
- Задача-исток XX

Задача Коши для гиперболического
уравнения XII

- нормальной системы ОДУ VIII
- ОДУ первого порядка VIII
- n -го порядка VIII
- уравнения теплопроводности XII
- стохастическая XVIII
- краевая XII
- двухточечная VIII
- линейная VIII
- неоднородная VIII
- однородная VIII
- смешанная VIII
- для нормальной системы ОДУ VIII
- ОДУ n -го порядка VIII
- Лагранжа XV
- в форме Понтрягина XV
- Майера XV
- математическая корректная
(корректно поставленная) IV
- некорректная IV, XX
- минимизации XIV
- многокритериальной (векторной)
оптимизации XX
- на собственные значения VIII
- условный экстремум V
- Неймана XII
- неопределенная XX
- обратная II
- о встрече XVI
- геодезических линиях XV
- диете XIV
- замене оборудования XX
- календарном планировании
комплекса работ XX
- кратчайших расстояниях XIX

- Задача о назначениях XX
- перечислении путей XIX
 - пищевом рационе XX
 - путях общая XIX
 - распределении ограниченных ресурсов XX
 - сдвиге двухвыборочная XVII
 - одновыборочная XVII
 - оптимального управления XV
 - линейная XV
 - оптимальной стабилизации XV
 - оптимизации XIV
 - конечномерная XIV
 - организационного управления XX
 - ослабленная XX
 - оценивания параметров случайного процесса XVIII
 - параметрическая XX
 - параметрической идентификации стохастических моделей состояния XVIII
 - парных наблюдений XVII
 - планирования производства с постоянными элементами затрат XX
 - порожденная исходной задачей XX
 - принятия решений в условиях неопределенности XX
 - определенности XX
 - риска XX
 - марковская XX
 - многошаговая XX
 - одношаговая XX
 - программирования выпуклого XIV, XX
 - геометрического XIV
 - дискретного XIV
- Задача программирования
- дробно-линейного XIV
 - квадратичного XIV, XX
 - линейного XIV, XX
 - в стандартной форме XX
 - двойственная XX
 - естественная XIV
 - общая XIV
 - основная XIV
 - прямая XX
 - стандартная XIV
 - математического XIV, XX
 - общая XIV
 - нелинейного XIV
 - общая XIV
 - сепарабельного XIV
 - целочисленного XIV
 - распределительного типа XX
 - синтеза конечного автомата XIX
 - оптимальных управлений XV
 - сортировки XIX
 - с ослабленными ограничениями XX
 - подвижными (скользящими) концами XV
 - со свободным концом XV
 - стабилизации XV
 - статическая XX
 - стохастическая XX
 - структурного синтеза конечного автомата с выходом XIX
 - с фиксированным временем XV
 - фиксированными концами XV
 - теории управления V
 - транзитивного замыкания ориентированного графа XIX

Задача транспортная XIV, XX
 -- классическая XX
 -- с ограничениями по пропускной способности XX
 --- промежуточными пунктами XX
 - транспортного типа XX
 - управления XV
 -- многоточечная XV
 - целочисленная полностью XX
 -- частично XX
 - Штейнера XIX
 - Штурма — Лиувилля XI, XII
 --- регулярная XI
 --- сингулярная XI
 - экологического прогнозирования XII
 Заключение теоремы I
 Закон биномиальный XVI
 - больших чисел XVI
 --- в форме Бернулли XVI
 ----- Чебышева XVI
 --- слабый XVI
 - геометрический XVI
 - Гука обобщенный XIII
 - движения XV
 - инерции IV
 - композиции аддитивный I
 -- ассоциативный I
 -- бинарный внутренний I
 -- дистрибутивный I
 -- индуцированный I
 -- коммутативный I
 -- мультипликативный I
 - нормальный многомерный XVI
 -- стандартный XVI
 -- n -мерный общий XVI

Закон Пуассона XVI
 - распределения апостериорный XX
 -- априорный XX
 -- Вейбулла XVI
 -- вероятностей XVI
 -- генеральной совокупности XVII
 -- дифференциальный XVI
 -- интегральный XVI
 -- Релея XVI
 -- случайного вектора XVIII
 --- процесса конечномерный (N -мерный) XVIII
 ---- одномерный XVIII
 -- случайной величины XVIII
 -- случайных процессов совместный XVIII
 -- совместный XVIII
 -- условный XVIII
 -- экспоненциальный (показательный) XVI
 -- χ^2 (хи-квадрат) XVI
 - редких событий XVI
 - сокращения левый (правый) XIX
 Законы де Моргана I, XVI, XIX
 --- бесконечные XIX
 - распределения условные XVI
 Замена координат гладкая V
 - параметра V
 -- кривой X
 - переменных линейная IV
 Замыкание множества X
 -- булевых функций XIX
 - относительно операции XIX
 - рефлексивно-транзитивное XIX
 - элемента XIX
 Запас чистый XX

- Запись аддитивная XIX
 – мультипликативная XIX
 – СЛАУ векторная III
 -- координатная III
 -- матричная III
 Заявка XVIII
 Звено линейное динамическое XVIII
 --- невозмущенное XVIII
 Знак интеграла VI
 Значение абсолютное (модуль) I
 – аргумента главное I
 – арксинуса главное X
 – величины I
 – выборочное XVII
 – логарифма главное X
 -- общее X
 – наивероятнейшее XVI
 – неопределенное XIX
 – несобственного интеграла
 главное VI
 – оценки XVII
 – показательной функции главное
 X
 --- общее X
 – регулярное оператора XIII
 – собственное квадратной матрицы
 IV
 -- кратное XIII
 -- линейного оператора IV, XIII
 -- операторного уравнения XIII
 -- простое XIII
 – среднее XVI
 -- выборки XVII
 -- функции на отрезке VI
 – точечной оценки XVII
 – узловое XIII
 – условного математического
 ожидания XVI
 Значение условной дисперсии XVI
 – формулы XIX
 – функции в точке I
 -- максимальное (минимальное) II
 -- наибольшее (наименьшее) I
 -- среднее VII
 -- узловое VII
 -- целевой оптимальное XX
 -- экстремальное II
 Значения начальные VIII
 – случайного процесса
 независимые XVIII
 – собственные XII
Игра XX
 – антагонистическая XX
 – бесконечная XX
 – в нормальной форме XX
 -- развернутой форме XX
 -- экстенсивной форме XX
 – конечная XX
 – кооперативная XX
 – матричная XX
 – находящаяся в состоянии
 равновесия XX
 – некооперативная XX
 – позиционная XX
 – с информацией неполной XX
 --- полной XX
 -- нулевой суммой XX
 -- постоянной разностью XX
 -- седловой точкой XX
 -- n участниками XX
 – стабильная XX
 Игрок XX
 Идемпотентность I
 Идентификация математической
 модели VIII

- Изгибание поверхности V
 Измельчение разбиения VII
 -- отрезка VI
 Изменение допустимое XX
 Измерение косвенное XVIII
 - прямое XVIII
 Изображение XI
 - комплексного числа сферическое X
 - по Лапласу XI
 Изоклина VIII
 Изометрия XIII
 Изоморфизм XIX
 - алгебр V
 - графов XIX
 - групп XIX
 - естественный IX
 - колец XIX
 - линейных пространств IV
 - многосортный XIX
 - пространств гильбертовых IX
 Импликанта XIX
 - простая XIX
 -- избыточная XIX
 -- ядровая XIX
 Импликация I, XIX
 Инвариант IV
 Инвариантность неопределенного интеграла VI
 - площади VII
 - формы записи дифференциала II
 Инверсия X
 - в перестановке I
 - конечной подстановки XIX
 - морфизма XIX
 - набора XIX
 - цепочки XIX
 Инвертор XIX
 Инволюта (эвольвента) II
 Индекс вторичный XVII
 - первичный XVII
 - подгруппы в группе левый XIX
 Интеграл абелев VI
 - Бернулли XIII
 - Гильберта инвариантный XV
 - гиперэллиптический VI
 - Дарбу верхний (нижний) VI
 - двойной VII
 - Дирихле VI
 - Дюамеля XI
 - зависящий от параметра VI
 - контурный X
 - Коши X
 - Коши — Лагранжа XIII
 - криволинейный второго рода VII
 ---- общего вида VII
 -- первого рода VII
 - Кристоффеля — Шварца X
 - Лапласа IX, XI, XVI
 - Лебега IX
 - линейный VII
 -- векторного поля VII
 - Меллина XI
 - неберущийся VI
 - неопределенный VI
 - несобственный VI
 -- второго рода VI, VII
 -- зависящий от параметра VI
 ----- сходящийся VI
 ----- равномерно VI
 -- от комплекснозначной функции IX
 ----- сходящийся IX
 ----- абсолютно IX

- Интеграл несобственный от неограниченной функции VI
- по ограниченной области VII
 - первого рода VI, VII
 - по бесконечному промежутку VI
 - неограниченной области VII
 - расходящийся VI, VII
 - сходящийся VI, VII
 - абсолютно VI, VII
 - в смысле главного значения IX
 - условно VI
 - Ньютона VI
 - с переменным пределом верхним (нижним) VI
 - общий ОДУ первого порядка VIII
 - определенный VI
 - зависящий от параметра VI
 - Ньютона VI
 - от комплекснозначной функции IX
 - с переменным пределом верхним (нижним) VI
 - от функции комплексного переменного по кривой X
 - ошибок XII
 - первый векторного поля V
 - системы VIII
 - поверхностный второго рода VII
 - первого рода VII
 - повторный VI
 - псевдоэллиптический VI
 - Пуассона VI, XII
 - Римана VI
 - кратный VII
 - Римана — Стильтьеса XI
- Интеграл с переменным верхним пределом от случайного процесса XVIII
- стохастический Ито XVIII
 - от функции неслучайной по случайному процессу XVIII
 - по винеровскому процессу XVIII
 - Стратоновича XVIII
 - табличный VI
 - тройной VII
 - Фурье IX
 - в комплексной форме IX
 - Эйлера — Пуассона VI
 - эйлеров второго рода VI, XI
 - первого рода VI
 - эллиптический VI
 - второго рода VI
 - полный VI
 - в форме Лежандра второго (первого, третьего) рода VI
 - первого рода VI
 - полный X
 - третьего рода VI
 - n -кратный несобственный VII
- Интегралы первые независимые в области VIII
- точке VIII
 - Френеля VI
- Интегрант XV
- Интегрирование VI
- заменой переменного VI
 - ОДУ VIII
 - подведением под знак дифференциала VI
 - подстановкой VI
 - по параметру VI
 - частям VI

- Интегрирование функционального ряда почленное IX
- численное VI
- Интенсивность белого шума XVIII
- вихреисточника комплексная X
 - вихря X
 - источника (стока) VII, X
 - обслуживания XVIII
 - простейшего потока XVIII
 - спектральная процесса случайных возмущений XVIII
 - ухода из очереди XVIII
- Интервал I
- бесконечный I
 - времени управления XV
 - доверительный XVII
 - неопределенности XIV
 - корня II
 - сходимости IX
 - γ -доверительный XVII
- Интерполирование II
- вперед (назад) II
- Интерполяция II
- квадратичная (трехточечная) II
 - линейная (двухточечная) II
- Интерпретация условной вероятности геометрическая XVI
- Информация априорная XVII
- Инъекция I
- Иррефлексивность XIX
- Испытание случайное XVI
- Испытания повторные независимые XVII
- Исследование операций XX
- Источник X
- векторного поля VII
 - сети XIX
- Исходы элементарные равновозможные XVI
- Исход элементарный XVI
- благоприятствующий событию XVI
 - образующий событие XVI
- Исчерпывание монотонное VII
- Итерация III
- внешняя V
 - внутренняя V
 - позитивная XIX
 - элемента XIX
 - языка XIX
- К**анал обслуживания XVIII
- Кардиоида II
- Карта V
- Карно XIX
 - на многообразии V
- Карты согласованные V
- Касательная II
- к кривой II
 - односторонняя II
- Катеноид II
- Квадрат бинарного отношения XIX
- вектора скалярный III
 - декартов XIX
- Квадратриса Динострата II
- Квазипорядок XIX
- Квантиль уровня α (α -квантиль) XVI
- Квантор общности I
- существования I
- Кватернион сопряженный XIX
- К3-грамматика XIX
- обобщенная XIX
 - К3-правило XIX

- КЭ-язык XIX
 – обобщенный XIX
 Класс подгруппы по элементу смежный левый (правый) XIX
 – Поста XIX
 – эквивалентности XIX
 – языка XIX
 – C^k V
 Клетка жорданова IV
 КНФ XIX
 Коалиция XX
 Ковариация XVI
 – двух случайных векторов XVIII
 --- величин XVIII
 Ковектор IV
 Колебание функции VI
 Колебания гармонические VIII
 – затухающие VIII
 Количество информации по Фишеру XVII
 Кольца изоморфные XIX
 Кольцо I, XIX
 – булево XIX
 – вычетов по модулю k XIX
 – коммутативное XIX
 – линейных операторов XIX
 – многочленов I
 – эндоморфизмов абелевой группы XIX
 Команда XIX
 – применимая к конфигурации XIX
 Комбинаторика I
 Комбинация векторов выпуклая XX
 – выпуклая XIV
 -- строго XIV
 – линейная I, IV
 -- векторов III
 -- нетривиальная IV
 Комбинация линейная строк (столбцов) III
 -- тривиальная IV
 Коммутативность I
 Коммутатор векторных полей V
 Компакт I
 Композиция бинарных отношений на множестве XIX
 – операторов XIII
 – подстановок I
 – соответствий XIX
 – (суперпозиция) отображений (функций) I
 – элементов I
 Компонента (связности) графа XIX
 – слабой связности (слабая) XIX
 – тензора IV
 -- косимметрического ведущая IV
 Компоненты одноименные XIX
 Конгруэнция XIX
 – многосортная XIX
 Конец вектора III
 -- геометрического III
 – дуги графа XIX
 – отрезка левый (правый) XIX
 – пути V
 – ребра графа XIX
 – цепи XIX
 – цепочки XIX
 Конкатенация кортежей XIX
 – слов XIX
 – языков XIX
 Константа I, XIX
 – булева XIX
 – индивидуальная XIX
 Константы Ламе XIII

- Конституэнта единицы XIX
 – нуля XIX
 Контекст КЗ-правила левый
 (правый) XIX
 – левый XIX
 Контраст линейный XVII
 Контур XIX
 – замкнутый II
 – – простой II
 – составной X
 Конус верхний (нижний) XIX
 – допустимых направлений XIV
 – прямой круговой III
 – характеристический XII
 – эллиптический III
 Конфигурация автомата XIX
 – – конечного XIX
 – выводимая XIX
 – – непосредственно XIX
 – заключительная XIX
 – машины Тьюринга XIX
 – МП-автомата XIX
 – начальная XIX
 – тупиковая XIX
 Конхойда II
 Конъюнктор XIX
 Конъюнкция I, XIX
 – элементарная XIX
 Кооперация XX
 Координата вектора III
 Координаты вектора III
 – – в базисе IV
 – – касательного V
 – – – внутренние V
 – – случайного XVI
 – главные V
 – криволинейные в плоской области
 VII
 Координаты криволинейные в
 пространственной области VII
 – на множестве V
 – полилинейной формы IV
 – полярные обобщенные VII
 – стереографические V
 – сферические обобщенные VII
 – точки I, III
 – – барицентрические XIII
 – – в локальной системе координат
 V
 – – в \mathbb{R}^n V
 – – внутренние V
 – – декартовы (аффинные) III
 – – на поверхности V
 – – полярные I, III
 – – прямоугольные III
 – – сферические III
 – – цилиндрические III
 – фазовые XV
 – элемента банахова пространства
 в базисе IX
 Корень действительный II
 – квадратный из квадратной
 симметрической матрицы XVIII
 – кратный II
 – локализованный II
 – ориентированного дерева XIX
 – простой II
 – уравнения I
 – – алгебраического II
 Корни комплексно сопряженные II
 Кортёж I
 – пустой XIX
 Косинус I
 – вектора направляющий III
 – гиперболический I
 – интегральный VI

- Косинус-преобразование Фурье IX
 Котангенс I
 – гиперболический I
 Коэффициент весовой XX
 – второй квадратичной формы V
 – детерминации XVII
 – дисконтирования годовой XX
 – диффузии XVIII
 – доверия XVII
 – дробления шага XIV
 – значимый XVII
 – корреляции XVI
 -- выборки XVII
 -- выборочный XVII
 -- множественный XVII
 -- ранговый Спирмена XVII
 -- частный XVII
 – линейной комбинации III
 – отражения XIV
 – полиномиальный
 (мультиномиальный) XVI
 – растяжения XIV
 -- в точке при отображении X
 – регрессии XVII
 – редукции XIV
 – сжатия III
 – сноса XVIII
 – угловой III
 -- прямой III
 Коэффициенты биномиальные I
 – весовые VI
 – комплексного степенного ряда X
 – Котеса VI
 – многочлена I
 – первой квадратичной формы V
 – СЛАУ III
 – степенного ряда IX
 – Тейлора X
 Коэффициенты теплопроводности
 главные XIII
 – Фурье IX
 -- дискретные IX
 Край поверхности VII
 Кратность корня нечетная (четная)
 II
 -- уравнения II
 – нуля I
 -- аналитической функции X
 -- многочлена I
 -- функции в бесконечно
 удаленной точке X
 – собственного значения IV
 – узла интерполяции II
 Кривая алгебраическая II
 – Вивиани II
 – второго порядка III
 – гладкая II
 – дискриминантная VIII
 – Жордана X
 – замкнутая II
 – интегральная VIII
 – кусочно гладкая II
 – (линия) алгебраическая на
 плоскости III
 – логистическая VIII
 – на многообразии
 параметризованная гладкая V
 -- плоскости X
 --- расширенной X
 -- поверхности V
 – непрерывная II
 -- в \mathbb{R}^n V
 – непрерывно дифференцируемая II
 – плоская II
 – простая X
 – распадающаяся (приводимая) II

Кривая спрямляемая II

- таутохронная II
 - трансверсальная векторному полю VII
 - уникарсальная VI
 - фазовая XV
 - характеристическая XII
- Кривизна дуги средняя II
- кривой в точке полная II
 - плоской кривой в точке II
 - поверхности гауссова V
 - главная V
 - нормальная V
 - полная V
 - средняя V
 - пространственной кривой в точке II

Кривые параметризованные соприкасающиеся V

- циклоидальные II

Критерий I, XVII

- Вальда XVII
- Гурвица XX
- Дарбу VI, VII
- двухвыборочный Вилкоксона XVII
- дифференцируемости функции комплексного переменного X
- знаков XVII
- знаковых рангов Вилкоксона XVII
- интегральный квадратичный XV
- смешанный XV
- качества XV
- интегральный XV
- энергетический XV
- Колмогорова XVII
- конечного состояния XV

Критерий Коши X

- равномерной сходимости несобственного интеграла VI
- функционального ряда IX
- стохастический XVIII
- существования конечного предела функции I
- сходимости несобственного интеграла VI
- ряда в банаховом пространстве IX
- функционального IX
- числового IX
- Лапласа XX
- максиминный XX
- метода наименьших квадратов XVIII
- минимаксный XX
- наиболее вероятного исхода XX
- независимости случайных величин XVI
- χ^2 XVII
- непараметрический XVII
- асимптотически XVII
- ожидаемого значения XX
- „ожидаемое значение — дисперсия“ XX
- оптимального быстрого действия XV
- оптимальности XIV, XX
- оптимальный Неймана — Пирсона XVII
- ортогональности векторов III
- отношения остаточных дисперсий XVII
- правдоподобия последовательный XVII
- Поста XIX

- Критерий предельного уровня XX
- равномерно наиболее мощный XVII
 - Римана VI, VII
 - Сильвестра IV
 - симметричности точек X
 - скалярный глобальный XX
 - нормированный XX
 - Смирнова XVII
 - согласия χ^2 XVII
 - состоятельный XVII
 - Спирмена ранговый XVII
 - статистический XVII
 - суммируемости функции IX
 - существования двойного интеграла VII
 - кратного интеграла VII
 - определенного интеграла VI
 - тройного интеграла VII
 - Сэвиджа XX
 - факторизации Неймана — Пирсона XVII
 - эффективности для регулярных моделей XVII
 - ω^2 XVII
- Крона дерева XIX
- Круги Эйлера I
- Круг производящий II
- сходимости IX
 - степенного ряда X
- Кручение кривой в точке II
- Крыло вхождения левое (правое) XIX
- КС-грамматика XIX
- однозначная XIX
- КС-язык XIX
- детерминированный XIX
- Куб булев XIX
- декартов XIX
 - единичный размерности n XIX
 - n -мерный XIX
- Куст XIX
- Лагранжиан** XV
- Лапласиан VII
- Лемма вариационного исчисления
- основная XV
- Дарбу VII
 - Дюбуа — Реймона XV
 - Жордана X
 - Коши фундаментальная XIII
 - Лагранжа XV
 - Римана IX
 - для несобственных интегралов IX
 - Шварца X
- Лемниската Бернулли II
- Лента автомата входная XIX
- Лес неориентированный XIX
- ориентированный XIX
 - остовный XIX
 - глубоинный XIX
 - поиска в глубину XIX
- Линейность интеграла двойного VII
- кратного VII
 - неопределенного VI
 - Ньютона VI
 - определенного VI
 - тройного VII
- произведения векторного III
 - скалярного III
 - смешанного III
- Линии уровня функции V
- Линия векторная VII
- винтовая II

- Линия геодезическая V
 – кривизны V
 – переключений XV
 – равного потенциала X
 – разрыва функции V
 – регрессии XVI
 – силовая X
 – тока X
 – уровня V
 – цепная II
 – эквипотенциальная X
 Лист XIX
 – декартов II
 – Мебиуса VII
 Литерал XIX
 „Лицо, принимающее решения“ XX
 Логарифм интегральный VI
 – комплексного числа X
 – натуральный I
 Локализация (отделение) корня II
 Локон Аньези I
 Локсодромия II
 Ломаная Эйлера VIII
 Луночка X

Магазин МП-автомата XIX
 Мажоранта I
 – ряда X
 – числовая IX
 Максимин XX
 Максимум локальный II
 – – условный V
 – сильный (слабый) XV
 – функции абсолютный
 (глобальный) на отрезке II
 – – локальный II
 Маркер начала ленты XIX

 Массив XIX
 – лидеров XIX
 Масштабирование XIV
 Матрица III
 – базисных функций XVII
 – билинейной формы IV
 – блочная III
 – блочно-диагональная III
 – блочно-треугольная III
 – булева XIX
 – весовая XVIII
 – выборочных средних значений
 отклика XVII
 – вырожденная III
 – Гессе V
 – Грама IV
 – Гурвица VIII
 – диагональная III
 – дискретного преобразования
 Фурье обратного (прямого) IX
 – дисперсионная Фишера XVII
 – диффузии XVIII
 – достижимости XIX
 – дохода XX
 – единичная III
 – жесткости глобальная XIII
 – – конечного элемента XIII
 – жорданова IV
 – затрат XX
 – закононеопределенная XIV
 – идемпотентная XIV
 – инцидентий XIX
 – квадратичной формы IV
 – квадратная порядка n III
 – ковариаций (ковариационная)
 XVI
 – ковариационная случайного
 вектора XVIII

- Матрица ковариационная
случайного процесса XVIII
- комплексно сопряженная IV
 - корреляционная (нормированная ковариационная) XVI
 - кососимметрическая III
 - линейного оператора IV
 - масс глобальная XIII
 - конечного элемента XIII
 - меток дуг XIX
 - наблюдений XVII
 - невырожденная III
 - неособая III
 - неотрицательно (неположительно) определенная XIV
 - неразложимая XIII
 - нулевая III
 - обратная III
 - определителя III
 - ортогональная IV
 - отклика XVII
 - отрицательно определенная IV
 - оценок среднего значения отклика XVII
 - ошибок XVII
 - переменных модели XX
 - перехода IV
 - переходных вероятностей XVIII
 - платежная XX
 - положительно определенная IV
 - поправочная XIV
 - потеря XX
 - присоединенная III
 - проекционная XIV
 - противоположная III
 - прямоугольная III
 - псевдообратная IV
- Матрица пятидиагональная XIII
- разреженная XIII
 - с диагональным преобладанием III
 - частичным XIII
 - симметрическая III
 - системы ОДУ VIII
 - слабозаполненная XIII
 - СЛАУ III
 - расширенная III
 - смежности вершин XIX
 - сожалений XX
 - спектральных интенсивностей XVIII
 - стоимости XX
 - эквивалентная XX
 - ступенчатая III
 - теплоемкости глобальная XIII
 - конечного элемента XIII
 - теплопроводности глобальная XIII
 - конечного элемента XIII
 - транспонированная III
 - трапециевидная верхняя III
 - треугольная верхняя (нижняя) III
 - трехдиагональная III
 - функциональная V
 - Якоби V
 - по части переменных V
- Матрица-столбец III
- Матрица-строка III
- Матрицы коммутирующие III
- перестановочные III
 - подобные IV
 - равные III
- Машина Тьюринга XIX
- в алфавите XIX
 - детерминированная XIX
 - над алфавитом XIX

- Медиана XVI
- Мера IX
- вероятностная XVI
 - внешняя (внутренняя) IX
 - (Жордана) множества VII
 - Лебега (лебегова) IX
 - промежутка n -мерного VII
- Метка входная XIX
- дуги XIX
 - входная (выходная) XIX
 - пути XIX
 - магазинная XIX
 - ребра XIX
- Метод аппроксимации
- квадратичной XIV
 - кубической XIV
 - баланса XIII
 - Бернулли VIII
 - бисекции II
 - Блейка XIX
 - Больцано I
 - Бройдена V
 - Бубнова — Галеркина XIII
 - вариации постоянных VIII
 - венгерский XX
 - верхней релаксации IV
 - ветвей и границ XX
 - взвешенных невязок XIII
 - возврата XX
 - возможных направлений XIV
 - выборочный XVII
 - Гаусса III
 - исключения неизвестных III
 - с выбором главного элемента III
 - геометрический XX
 - Гомори XX
 - градиентного спуска XIV
- Метод граничных элементов (МГЭ)
- XIII
- графический XVII
 - Даламбера XII
 - двух включений XIX
 - деления отрезка I
 - динамического программирования XV
 - дихотомии XIV
 - доверительной области V
 - доверительных множеств XVII
 - дополнения XX
 - дробления шага XIV
 - Зейделя IV
 - нелинейный V
 - золотого сечения XIV
 - итераций I
 - по стратегиям XX
 - с дисконтированием XX
 - итерационный двухшаговый IV
 - неявный (явный) V
 - одношаговый IV
 - линейный V
 - неявный (явный) IV
 - стационарный IV
 - k -шаговый IV
 - Канторовича XIII
 - касательных II
 - коллокации в подобластях XIII
 - точках XIII
 - комбинаторный XX
 - компромиссов XX
 - конечных разностей (МКР) XIII
 - элементов (МКЭ) XIII
 - Куранта XV
 - Лагранжа IV, VIII
 - вариации постоянных VIII

Метод Лагранжа неопределенных коэффициентов VIII

- линеаризации XVI
- линейного интерполирования I
- – поиска V
- ложного положения корня I
- локальных вариаций XIII
- ломаных усовершенствованный VIII
- – Эйлера VIII
- Ляпунова второй (прямой) VIII
- – первый VIII
- максимального правдоподобия XVII
- малого параметра XIII
- математической индукции I
- минимальной стоимости XX
- многошаговый II
- множителей Лагранжа XV
- моментов XVII
- Монте-Карло VII
- мультипликативных конгруэнций XX
- наименьших квадратов IV, XVII, XVIII
- наискорейшего спуска XIV
- неопределенных коэффициентов VI, XIX
- непараметрический XVII
- нестационарный V
- нижней релаксации IV
- Ньютона V, XIV
- – (касательных) II
- – упрощенный II
- одношаговый II
- округления XX
- определения семантики аксиоматический XIX

Метод ортогональных проекций XIII

- Остроградского VI
- отсекающих плоскостей XX
- отсечений XX
- параметрический XVII
- погружения XX
- поиска минимаксный XIV
- покоординатного циклического спуска XIV
- полного перебора XX
- последовательного исключения неизвестных XIX
- последовательных приближений I
- потенциалов XX
- приведенного градиента XIV
- прогонки III, XIII
- проекции антиградиента XIV
- – точки на множество XIV
- проекционный XIII
- пропорциональных частей I
- простой итерации II
- прямого поиска XIV
- прямых (Роте) XII, XIII
- разделения области XIII
- разложения VI
- релаксации V
- решения СЛАУ итерационный III
- – – прямой III
- – – точный III
- Ритца XIII
- Ричардсона IV
- Рунге II
- Рунге — Кутты VIII
- секущих II
- сеток XIII
- сечений III
- симплексный XX

Метод сопряженных градиентов
XIV

- направлений XIV
- средней точки XIV
- статистических испытаний XIII
- стационарный V
- стрельбы XIII
- сходящийся глобально (локально)
V
- условного градиента XIV
- установления XIII
- Фибоначчи XIV
- функции Грина XII
- функций Ляпунова VIII
- Фурье XII

характеристик XII
характеристических функций
XIX

- хорд I
- Чаплыгина VIII
- Чебышева II
- штрафа XIII
- штрафных функций внешних XIV
- внутренних XIV
- Эйлера — Коши VIII
- эквивалентных преобразований

XIX

- Якоби IV
- нелинейный V
- k -шаговый II

Методы второго порядка XIV

- исследования операций
математические XX
- квазиньютоновские XIV
- нулевого порядка XIV
- первого порядка XIV
- полиномиальной аппроксимации
XIV

Методы проекционно-сеточные XIII

- прямого поиска XIV
 - сеточные XIII
 - спуска XIV
- Метрика I
- дискретная I
 - евклидова (естественная) I
 - индуцированная нормой IX
 - сферическая X

Механизм управления выводом XIX

Минимакс XX

Минимизация конечного автомата
XIX

- одномерная XIV

Минимум локальный на множестве
XIV

- строгий XIV
- условный V
- сильный (слабый) XV
- строгий XV
- функции абсолютный
(глобальный) на отрезке II
- локальный II

Минор III

Миноранта I

Минор базисный III

- главный IV
- диагональный XIV
- окаймляющий III
- порядка k III
- угловой III

МНК-оценка XVII

Многогранник выпуклый XX

Многообразие аффинное XIV

- (гладкое) V
- интегральное V
- максимальное V
- линейное IX
- n -мерное V

- Многообразия диффеоморфные V
 Многочлен (полином) I
 – асимптотический I
 – интерполяционный II
 -- Лагранжа II
 -- Ньютона II
 -- полный XIII
 -- с кратными узлами II
 -- Эрмита II
 --- кубический II
 – над полем действительных чисел I
 – от n переменных III
 – Тейлора II
 – Фурье IX
 – характеристический IV
 -- линейного оператора IV
 -- матрицы IV
 Многочлены взаимно простые II
 – Лежандра VI
 – Чебышева II
 -- первого рода VIII
 Множества равномощные (эквивалентные) I, XIX
 – равные XIX
 Множество (подмножество) I
 – бесконечное I
 – булевых функций замкнутое XIX
 --- полное XIX
 – возможных значений случайной величины XVI
 – вполне упорядоченное XIX
 – всюду плотное IX
 – выпуклое IX, XIV, XX
 -- многогранное XIV
 – действительных чисел I
 --- пополненное (расширенное) I
 – допустимое XIV
- Множество допустимых управлений XV
 – (жордановой) меры нуль VII
 – замкнутое I, V
 -- относительно операции IV, XIX
 ---- операций XIX
 – измеримое IX
 -- (по Жордану) VII
 -- по Лебегу IX
 – компактное I, V
 -- относительно XIII
 -- по энергии XV
 – компромисса XX
 – конечное I
 – континуальное XIX
 – критическое XVII
 – линейно связанное V
 – мощности континуума XIX
 – натуральных чисел I
 – не более чем счетное XIX
 – несчетное (счетное) I
 – объема нуль VII
 – ограниченное I, V
 -- сверху (снизу) I
 – открытое I, V
 – параметрическое XVII
 – Парето XX
 – площади нуль VII
 – правильное VII
 – предкомпактное XV
 – пустое I
 – рациональных чисел I
 – слов в алфавите перечислимое (по Тьюрингу) XIX
 ---- разрешимое (по Тьюрингу) XIX

- Множество события
характеристическое XVIII
– состояний машины Тьюринга
конечное XIX
– строго выпуклое XIV
– универсальное I, XIX
– упорядоченное I, XIX
-- индуктивное XIX
-- линейно XIX
-- частично I
– функций равномерно
ограниченное XIII
-- равностепенно непрерывное
XIII
– целых чисел I
– частичное VII
– элементарное VII
– n -элементное XIX
– Ω -замкнутое XIX
Множители Лагранжа XV
Множитель интегрирующий VIII
– Лагранжа V
– сходимости VI
– ускоряющий XIV
Мода случайной величины
дискретной XVI
--- непрерывной XVI
Моделирование имитационное в
широком смысле XX
-- компьютерное XX
– математическое XIII
Модель XIX
– анализирующая XIX
– биномиальная XVII
– дисперсионного анализа линейная
XVII
– канала связи XVIII
– Коши XVII
– линейная по параметрам XVII
Модель математическая II, XV, XX
– нормальная XVII
– параметрическая XVII
– порождающая XIX
– принятия решений марковская
XX
--- стохастическая XX
– пуассоновская XVII
– распознающая XIX
– регрессии XVII
-- допустимая XVII
-- значимая (незначимая) XVII
– регрессионная линейная XVII
--- адекватная XVII
– регулярная XVII
– сигнала XVIII
– состояния детерминированная
XVIII
--- устойчивая XVIII
-- стохастическая XVIII
---- в форме Ито XVIII
----- Стратоновича XVIII
– статистическая XVII
-- дискретная (непрерывная) XVII
Модуль I
– вектора III
-- геометрического III
– интеграла эллиптического VI
--- дополнительный X
– комплексного числа I
– над кольцом левый (правый) XIX
– распределения V
Момент второй начальный XVI
-- центральный XVI
– выборочный k -го порядка
начальный XVII
---- центральный XVII
– диполя X

Момент инерции геометрический

- VI
- осевой VII
- относительно оси VI
- плоскости VI
- полярный VII
- центробежный VII
- корреляционный XVI
- выборки XVII
- выборочный XVII
- обновления алгоритма XIV
- статический VI
- геометрический VI
- k -го порядка XVI
- выборки начальный XVII
- центральный XVII
- начальный XVI
- случайного процесса XVIII
- центральный XVI
- Моменты случайного процесса XVIII
- Моноид XIX
 - кольца мультипликативный XIX
 - полукольца аддитивный XIX
 - мультипликативный XIX
 - свободный XIX
 - симметрический XIX
- Мономорфизм XIX
- Монотонность кратного интеграла VII
 - меры IX
 - площади VI
- Морфизм XIX
 - инверсный XIX
 - обратный XIX
 - языка XIX
 - инверсный XIX
 - λ -свободный XIX

Мощность гиперконтинуума I

- источника XX
- континуума I, XIX
- критерия XVII
- множества I, XIX
- стока XX
- МП-автомат XIX
 - детерминированный XIX
 - расширенный XIX
 - эквивалентный КС-грамматике XIX
- МП-автоматы эквивалентные XIX
- Мультивектор IV
- Мультиграф ориентированный XIX

Наблюдения повторные

- независимые XVII
- Набор булев XIX
 - единичный XIX
 - значений переменных XIX
 - нулевой XIX
- Наборы взаимно противоположные XIX
- Наклон поля экстремалей XV
 - сплайна II
- Направление главное V
 - грани XIX
 - допустимое XIV
 - спуска XIV
 - возможное XIV
 - ньютоновское XIV
- Направления сопряженные XIV
- Направляющая поверхности конической III
 - цилиндрической III
- Напряжение касательное XIII
 - нормальное XIII

- Начало вектора III
- геометрического III
 - дуги графа XIX
 - координат I, III
 - пути V
 - системы координат III
 - цепочки XIX
- Невязка XV, XVII
- оценивания XVIII
 - СЛАУ IV
 - уравнения IV
 - операторного XIII
- Независимость событий попарная XVI
- Неизвестное базисное III
- зависимое (независимое) III
 - свободное III
- Нейтральный элемент моноида XIX
- Неопределенность I
- Неотрицательность меры VII
- площади VII
- Непрерывность меры IX
- Неравенства Коши X
- Неравенство Бесселя IX
- Буняковского IV
 - взвешенных средних XIV
 - Гельдера для конечных сумм IX
 - рядов IX
 - Иенсена XIV, XVIII
 - интегральное Гронуолла VIII
 - Коши IV
 - Коши — Буняковского IV
 - Минковского для конечных сумм IX
 - рядов IX
 - Рао — Крамера XVII
 - треугольника I, IV
 - Чебышева второе XVI
 - первое XVI
- Неравенство Шварца IV
- для математического ожидания XVIII
- Нетерминал XIX
- Норма евклидова (сферическая) IV
- кватерниона XIX
 - кубическая (l_{∞}) IV
 - линейного оператора XIII
 - функционала XIII
 - максимальная столбцовая IV
 - строчная (кубическая) IV
 - матрицы евклидова (l_2) IV
 - индуцированная (подчиненная, операторная) IV
 - кольцевая (матричная) IV
 - ограниченного оператора XV
 - октаэдрическая (l_1) IV
 - СК XVIII
 - согласованная IV
 - спектральная IV
 - унитарная IX
 - функции XIII
 - энергетическая XIII
- Нормаль II, V
- главная II
 - к кривой в точке II
 - поверхности V
- Нормировка конформного отображения X
- Носитель XIX
- алгебры XIX
 - карты V
 - функции XII
- Нуль I, XIX
- Нуль-вектор III
- Нуль кольца XIX
- левый (правый) XIX
 - многочлена I

- Нуль многочлена кратный
(простой) I
-- m -кратный II
- относительно операции XIX
- полукольца XIX
- полурешетки XIX
- решения ОДУ VIII
- решетки XIX
- функции I
-- аналитической X
--- простой X
-- векторной V
-- комплексного переменного X
- Нумерация XIX
- вершин правильная XIV
- лексикографическая XIX
- Область** X
- замкнутая X
-- квадратуемая (кубируемая) VII
-- многосвязная (односвязная) VII
-- простая VII
- значений (изменения) переменной величины I
-- оператора XIII
-- отображения XIX
-- функции I
- значения соответствия XIX
- изменения комплексного переменного X
- интегрирования VII
-- правильная VII
- многосвязная X
- ограниченная X
- односвязная X
-- поверхностно VII
- определения карты V
-- оператора XIII
-- соответствия XIX
- Область определения
(существования) функции I
-- функциональной последовательности IX
-- частичного отображения XIX
- определенности состояния памяти XIX
- правильная VII
- применимости машины Тьюринга XIX
- пространственная объемно односвязная VII
- расширенной комплексной плоскости односвязная X
- сходимости X
-- абсолютной X
-- метода V
-- условной X
-- функционального ряда IX, X
-- функциональной последовательности IX
- управления XV
- управляемости XV
- целостности XIX
- частичная VII
- n -связная X
- z -цилиндрическая VII
- Оболочка V
- выпуклая XIV
- линейная IV
- Образ геометрический III
- гомоморфный группы XIX
-- кольца XIX
-- системы XIX
- множества (подмножества) при отображении I
- оператора IV

- Образующая однополостного
гиперболоида прямолинейная III
- поверхности конической III
 - цилиндрической III
- Образ элемента при отображении I
- Обусловленность II
- Обход границы отрицательный X
- положительный X
- Объединение булево XIX
- подмножеств (множеств) I
 - разбиений VII
 - решеточное XIX
 - семейств XIX
 - (сумма) событий XVI
- Объект детерминированный XV
- оптимизации XIV
 - управляемый XV
- Объем выборки XVII
- случайной XVII
 - испытаний средний XVII
 - тела VI
- Овалы Кассини II
- Огибающая однопараметрического
семейства VIII
- Ограничение XIV
- активное (пассивное) XX
 - альтернативное XX
 - бинарного отношения на
подмножество XIX
 - линейного оператора IV
 - на управление XV
 - фазовые координаты XV
 - неактивное XIV
 - прямое XIV
 - двустороннее XIV
 - одностороннее XIV
 - соответствия на подмножества
XIX
- Ограничение типа неравенства XIV
- равенства XIV
 - фазовое XV
- Ограничения фазовые XV
- ОД-функция XIX
- Ожидание математическое XVI
- случайного процесса XVIII
 - (среднее значение) случайной
величины дискретной XVI
 - непрерывной XVI
 - условное XVI
- ОКЗ-грамматика XIX
- ОКЗ-язык XIX
- Окрестность точки I
- на множестве V
 - проколота I
- Окружность на поверхности V
- Октава XIX
- Оператор XIII
- бигармонический XIII
 - булев XIX
 - взаимно однозначный XIII
 - вполне непрерывный XIII
 - Гамильтона VII
 - Даламбера XII
 - действующий в линейном
пространстве XV
 - дифференцирования VIII
 - интегральный XI
 - компактный (вполне
непрерывный) XV
 - Лапласа VII, XII
 - линейный IV
 - противоположный IV
 - „набла“ VII
 - неотрицательный XV
 - непрерывный XIII
 - в точке XIII

- Оператор нулевой IV
 – обратный XIII
 –– левый (правый) XIII
 – ограниченный XIII, XV
 –– снизу XV
 – ортогонального проектирования IV
 – ортогональный IV
 – положительно определенный XIII
 – положительный XIII
 – проекционный XIII
 – разностный XIII
 – резольвентный XIII
 – самосопряженный (эрмитовый) IV, XII, XIII
 – сжимающий XIII
 – симметрический XIII
 – сопряженный IV
 – тождественный IV, XIII
 – Штурма — Лиувилля XI
 – эллиптический XIII
 Оператор-функция XIII
 Операторы физических величин XII
 Операции булевы XIX
 – (действия) над событиями XVI
 – линейные IV
 Операция алгебраическая IV
 –– бинарная IV
 – ассоциативная XIX
 – бинарная XIX
 – восстановления симплекса XIV
 – дифференциальная второго (первого) порядка VII
 – дополнительная IV
 – идемпотентная XIX
 – коммутативная XIX
 – конкатенарная XIX
 – линейная III
 Операция логическая XIX
 – многосортная XIX
 – нульарная XIX
 – основная IV
 – решеточная XIX
 – унарная XIX
 – n -арная XIX
 – n -местная XIX
 Определение вероятности аксиоматическое XVI
 –– геометрическое XVI
 –– классическое XVI
 –– статистическое XVI
 – функции как процедуры XIX
 Определения взаимно двойственные XIX
 Определитель III
 – Вандермонда (степенной) III
 – Вронского VIII
 – второго порядка III
 – линейного оператора IV
 – матрицы III
 – порядка n III
 – системы второго порядка III
 –– третьего порядка III
 – третьего порядка III
 Оптимизация поэтапная XX
 Опускание индекса тензора IV
 Ординарность входного потока XVIII
 Ордината точки I
 Оригинал XI
 – по Лапласу XI
 ––, свертка XI
 – составной XI
 Ориентация базиса III
 – реперов одинаковая III
 –– противоположная III

- Орт III
- Ортант неотрицательный XIV
- положительный XIV
- Ортопроектор XIII
- Оси рассеивания XVI
- тензора главные XIII
- Основа XIX
- вхождения XIX
- Основание криволинейной трапеции VI
- Остаток ряда IX
- функционального IX
 - числового IX
- Остаточный член в форме Лагранжа II, V
- Пеано II, V
- Осциллятор гармонический VIII
- линейный VIII
- Ось III
- абсцисс III
 - аппликат III
 - гиперболы действительная III
 - мнимая III
 - диполя X
 - координат III
 - координатная I
 - действительная (мнимая) I
 - ординат III
 - параболы III
 - полярная III
 - тела центральная VII
 - эллипса III
- Отделение корней уравнения I
- (локализация) корня II
- Отец XIX
- Отклик XVII
- Отклонение среднее квадратичное XVI
- выборки XVII
 - выборочное XVII
 - точки от прямой III
- Отношение бинарное XIX
- на множестве XIX
 - антисимметричное XIX
 - иррефлексивное XIX
 - обратное XIX
 - плотное XIX
 - рефлексивное XIX
 - симметричное XIX
 - транзитивное XIX
 - взаимной достижимости XIX
 - включения XIX
 - выводимости XIX
 - двойственное к отношению порядка XIX
 - доминирования XIX
 - достижимости XIX
 - золотого сечения XIV
 - квазипорядка XIX
 - корреляционное XVI
 - линейного порядка XIX
 - непосредственной выводимости XIX
 - достижимости XIX
 - порядка I, XIX
 - естественное I
 - правдоподобия XVII
 - предпорядка XIX
 - равенства по модулю XIX
 - разностное II
 - смежности XIX
 - строгого порядка XIX
 - предпорядка XIX
 - толерантности XIX

- Отношение функциональное по компоненте XIX
- частичного порядка XIX
 - эквивалентности XIX
 - n -арное (n -местное) XIX
 - на множестве XIX
- Отображение (функция) I
- биективное I
 - гладкое V
 - в точке V
 - \mathbb{R}^n V
 - дробно-линейное X
 - индуцированное V
 - инъективное I, XIX
 - касательное в точке V
 - конформное XII
 - в области (в точке) X
 - линейное X
 - матричное V
 - множества на себя I
 - монотонное XIX
 - непрерывное XIX
 - в точке I
 - на множестве I
 - нормированном пространстве IX
 - обратное I
 - перехода V
 - разрывное I
 - сжимающее I
 - сюръективное I, XIX
 - тождественное I, XIX
 - частичное XIX
- Отображения взаимно обратные I
- эквивалентные X
- Отражение IV
- вершины XIV
- Отрезок I, XIX
- вложенный в отрезок I
 - касательной (подкасательной) II
 - полярной II
 - локализации корня II
 - направленный III
 - нормали (поднормали) II
 - полярной II
 - разбиения частичный VI
- Отрицание I, XIX
- набора XIX
- Отсечение Гомори XX
- для частично целочисленной задачи XX
- Отсутствие последействия XVI
- во входном потоке XVIII
- Оценка XVII
- асимптотическая I
 - асимптотически несмещенная XVIII
 - нормальная XVIII
 - эффективная XVIII
 - интервальная XVII
 - γ -доверительная XVII
 - квазиправдоподобная XVIII
 - линейная XVII
 - максимального правдоподобия XVII
 - (метода) наименьших квадратов XVII, XVIII
 - несмещенная (смещенная) XVII
 - нормальная XVIII
 - погрешности апостериорная XIII
 - априорная XIII
 - сверхэффективная XVII
 - состоятельная XVIII
 - среднего значения отклика XVII
 - точечная XVII

- Оценка Ходжеса — Лемана XVII
- эффективная XVII
 - в классе оценок XVII
 - по Рао — Крамеру XVII
- Очередь XVIII, XIX
- Ошибка второго рода XVII
- итерации IV
 - первого рода XVII
 - случайная XVII
- П**алиндром XIX
- Память автомата внутренняя XIX
- Парабола III
- Параболоид вращения III
- гиперболический III
 - поверхности соприкасающийся V
 - эллиптический III
- Парадокс Рассела XIX
- Параллелепипед τ -мерный XV
- Параметр I
- интегрального уравнения XIII
 - итерационный IV
 - оптимальный IV
 - кривой II
 - натуральный II
 - оптимизации XIV
 - сильной выпуклости XIV
 - точности поиска XIV
 - узловой XIII
 - управляющий XV
 - фокальный гиперболы III
 - параболы III
 - эллипса III
 - штрафа XIV
- Параметры Ламе VII
- m -мерной плоскости V
- Пара неупорядоченная XIX
- упорядоченная I
- Партия игры XX
- Пары упорядоченные равные XIX
- Пентагон XIX
- Первообразная VI
- Переименование нетерминалов
грамматики XIX
- Переключение XV
- Переменное XIX
- базисное XIV, XX
 - булево XIX, XX
 - булевой функции XIX
 - входное (выходное) XVII
 - задачи XIV
 - индивидуальное XIX
 - интегрирования VI
 - комплексное X
 - модели XX
 - искусственное XX
 - неограниченное в знаке XX
 - промежуточное I
 - свободное XIV, XX
 - состояния XX
 - наблюдаемое (ненаблюдаемое)
XVIII
 - существенное XIX
 - управляемое XX
 - фиктивное XIX
- Переменные автомобильные XII
- выравнивающие II
 - двойственные XX
 - канонические IV
 - сопряженные XV
 - фазовые VIII
- Перенос параллельный системы
координат IV
- в пространстве III
 - на плоскости III
- Переобозначение переменных III

- Пересечение булево XIX
- линейных подпространств IV
 - подмножеств (множеств) I
 - (произведение) событий XVI
 - решеточное XIX
 - семейств XIX
 - языков суженное XIX
- Перестановка I, III, XVI, XIX
- нормальная III
 - четная (нечетная) I
- Пересчет элементов множества I
- Переход из состояния в состояние XIX
- Период переходный XX
- плановый XX
 - функции I
- Петля XIX
- План эксперимента XVII
- Пластина VII
- Плоскость касательная V
- комплексная (комплексных чисел) I
 - расширенная X
 - координатная III
 - нормальная II
 - отсекающая XX
 - соприкасающаяся II
 - спрямляющая II
 - тела центральная VII
 - фазовая VIII
 - t -мерная V
- Плотность вероятности перехода XVIII
- количества движения среды
 - объемная XIII
 - момента количества движения
 - среды объемная XIII
 - объемная XIII
- Плотность поверхностная VII
- потока XIII
 - заявок приведенная XVIII
 - массы XIII
 - простейшего XVIII
 - ухода заявок из очереди
 - приведенная XVIII
 - энергии XIII
 - распределения (вероятностей) XVI
 - обобщенная XVIII
 - нормального многомерного XVI
 - случайного вектора XVI
 - совместная XVI
 - двумерная XVI
 - n -мерная XVI
 - условная XVI
 - эмпирическая XVII
 - спектральная XVIII
 - взаимная XVIII
 - среды XIII
 - электрического заряда объемная XIII
 - тока XIII
 - энергии объемная XIII
- Площадь плоской фигуры VI
- поверхности VII
- Поведение асимптотическое XX
- функции асимптотическое I
- Поверхности изометричные V
- касающиеся в точке V
- Поверхность V
- алгебраическая III
 - векторная VII
 - вращения III
 - второго порядка III
 - в \mathbb{R}^n IV
 - в \mathbb{R}^n цилиндрическая IV

- Поверхность гладкая V
- двусторонняя VII
 - заданная неявно V
 - параметрически VII
 - явно VII
 - замкнутая VII
 - quadriруемая VII
 - коническая III
 - координатная VII
 - линейчатая III
 - минимальная V
 - модуля X
 - оболочки срединная V
 - односторонняя VII
 - простая VII
 - разрыва XIII
 - сильного (слабого) XIII
 - функции V
 - регулярная V
 - с самопересечением V
 - уровня функции V
 - цилиндрическая III
- Поворот системы координат IV
- в пространстве III
 - на плоскости III
 - с отражением (симметрией) IV
- Погрешность аппроксимации XIII
- ОДУ XIII
 - квадратурной формулы VI
 - метода на шаге VIII
 - разностной схемы XIII
 - систематическая XVII
- Подалгебра V, XIX
- многосортная XIX
- Подграф XIX
- максимальный XIX
 - остовный XIX
- Подграф порожденный XIX
- множеством вершин XIX
 - собственный XIX
- Подгруппа XIX
- нетривиальная (тривиальная) XIX
 - нормальная XIX
 - собственная XIX
 - циклическая, порожденная элементом a XIX
- Подгруппоид XIX
- собственный XIX
- Поддерево XIX
- максимальное XIX
- Подкольцо XIX
- Подкуб XIX
- Подмногообразие V
- Подмножества (множества) непересекающиеся I
- Подмножество I
- замкнутое (устойчивое) I
 - ограниченное I
 - собственное I
 - строгое XIX
 - упорядоченное XIX
- Подмоноид XIX
- нетривиальный (тривиальный) XIX
 - собственный XIX
- Поднятие индекса тензора IV
- Подпокрытие покрытия множества I
- Подполе XIX
- Подполугруппа XIX
- собственная XIX
- Подполукольцо XIX
- Подпоследовательность I

- Подпространство инвариантное IV
 – линейное IV
 – несобственное IV
 – нормированного пространства IX
 – нулевое IV
 – собственное IV
 -- линейного оператора IV
 -- операторного уравнения XIII
 Подпуть XX
 Подсемейство XIX
 Подсистема алгебраической системы XIX
 – векторов IV
 Подслово XIX
 Подстановка XIX
 – Абеля VI
 – конечная XIX
 -- инверсная XIX
 – обратная I
 – тождественная n -й степени I
 – четная (нечетная) I
 – языков в язык XIX
 – n чисел (n -й степени) I
 Подстановки равные III
 – Эйлера VI
 Подтело XIX
 Подформула XIX
 Подфраза первого уровня XIX
 – фразы XIX
 Подход интенциональный XIX
 – экстенциональный XIX
 Подцепочка XIX
 Позином XIV
 – регулярный XIV
 Поиск в глубину (ширину) XIX
 – исследующий XIV
 – пассивный XIV
 -- оптимальный XIV
 Поиск последовательный XIV
 – прямой управляемый XIV
 – симплексный XIV
 Показатель оптимизма XX
 – степени I
 – эффективности по Рао — Крамеру XVII
 Покрытие множества I
 -- конечное I
 -- открытое I
 Поле I, IV
 – векторное VII, VIII
 -- безвихревое VII
 -- бесциркуляционное VII
 -- двумерное VII
 -- дифференцируемое VII
 -- касающееся подмножества V
 -- координатное V
 -- лапласово VII
 -- на многообразии V
 ---- гладкое V
 -- неоднородное (однородное) VII
 -- непрерывное VII
 -- нестационарное VII
 -- одномерное VII
 -- осевое VII
 -- осесимметричное VII
 -- плоское VII
 -- плоскопараллельное VII, X
 -- потенциальное VII
 -- принадлежащее распределению V
 -- силовое VII
 -- соленоидальное VII
 -- стационарное VII
 -- трехмерное VII
 -- центральное VII
 – вихреисточника X

- Поле вихря X
- вычетов по модулю p XIX
 - двумерное VII
 - действительных чисел XIX
 - диполя X
 - источника X
 - квадруполя X
 - комплексных чисел I, XIX
 - корреляционное XVII
 - мультиполя ($2m$)-го порядка X
 - направлений VIII
 - неоднородное (однородное) VII
 - рациональных чисел XIX
 - скалярное VII
 - дифференцируемое VII
 - непрерывное VII
 - нестационарное VII
 - одномерное VII
 - осевое VII
 - осесимметричное VII
 - плоское VII
 - стационарное VII
 - центральное VII
 - трехмерное VII
 - упорядоченное XIX
 - непрерывное XIX
 - экстремалей XV
- Поливектор IV
- Полигон частот XVII
- Полином Жегалкина XIX
- первой степени XIX
 - (многочлен) I
 - тригонометрический IX
 - интерполяционный IX
- Полиномы Лежандра VI, XII
- Чебышева — Лаггера XII
 - Чебышева — Эрмита XII
- Положение плоскостей общее III
- равновесия системы VIII
- Полуаддитивность внешней меры IX
- меры счетная IX
- Полугруппа I, XIX
- коммутативная XIX
 - симметрическая XIX
 - циклическая XIX
- Полуинтервал I
- бесконечный I
- Полукольцо XIX
- взаимное XIX
 - двойственное XIX
 - замкнутое XIX
 - идемпотентное XIX
 - коммутативное XIX
 - матриц над полукольцом XIX
 - регулярных языков XIX
 - симметричное XIX
 - с итерацией XIX
- Полуокрестность точки I
- верхняя (нижняя) I
 - проколота левая (правая) I
- Полуось гиперболы действительная III
- мнимая III
 - эллипса большая (малая) III
 - эллипсоида III
- Полупространство XIV
- Полурешетка XIX
- верхняя (нижняя) XIX
- Полустепень захода (исхода) XIX
- Полюс X
- полярной системы координат III
 - простой X
 - северный (южный) V
- Помеха XVIII

- Пополнение нормированного пространства XIII
 Портрет фазовый VIII
 Порядок XIX
 – алгебраической кривой II, III
 –– поверхности III
 – аппроксимации XIII
 – бесконечно большой функции I
 – булев XIX
 – гладкости V
 – двойственный XIX
 – естественный идемпотентного полукольца XIX
 –– полурешетки (решетки) XIX
 – индуцированный XIX
 – касания поверхностей V
 – конечной группы XIX
 – лексикографический XIX
 – линейный XIX
 – малости бесконечно малой функции I
 – нуля аналитической функции X
 – погрешности аппроксимации XIII
 – полюса X
 – роста функции XI
 – системы ОДУ нормальной VIII
 – строгий XIX
 – сходимости метода II
 – точности квадратурной формулы VI
 –– кубатурной формулы VII
 –– метода на отрезке VIII
 –––– шаг VIII
 –– разностной схемы XIII
 – тригонометрического полинома IX
 – уравнения III
 –– дифференциального VIII
- Порядок формулы Тейлора V
 – частичный XIX
 – частного коэффициента корреляции XVII
 – числовой естественный XIX
 – элемента XIX
 Последовательность I, XIX
 – бесконечно большая I
 –– малая I
 – возрастающая (убывающая) I
 – в \mathbb{R}^n V
 –––– расходящаяся (сходящаяся) V
 – итерационная I
 – комплексных чисел бесконечно большая X
 –––– ограниченная X
 –––– стремящаяся к бесконечности X
 –––– сходящаяся X
 –––– фундаментальная X
 – конфигураций для цепочки допускающая XIX
 – Коши (фундаментальная) I
 – минимизирующая XV
 – множеств монотонно невозрастающая (неубывающая) IX
 – монотонная (строго монотонная) I
 – невозрастающая (неубывающая) I
 – независимых одинаковых испытаний XVI
 – неограниченная (ограниченная) I
 – обратная I
 – постоянная I
 – расходящаяся I
 – релаксационная XIV
 – случайная XVIII

- Последовательность стремящаяся к
бесконечному пределу I
- сходящаяся в нормированном пространстве IX
 - к точке I
 - по норме IX
 - поточечно XIII
 - фундаментальная (Коши) I, XIII
 - функций IX
 - функциональная IX
 - расходящаяся в точке IX
 - сходящаяся в точке IX
 - на множестве IX
 - неравномерно (равномерно) IX
 - поточечно IX
 - числовая I
 - бесконечная (конечная) I
 - элементов множества I
- Постоянная интегрирования VI
- Липшица VIII
 - циклическая VII
 - Эйлера XI
- Постфикс цепочки XIX
- Потенциал векторного поля
(скалярный) VII
- векторный VII, XII
 - двойного слоя XII
 - комплексный X, XII
 - логарифмический XII
 - объемный XII
 - поляризационный XII
 - поля скорости X, XIII
 - простого слоя XII
 - скалярный VII, XII
- Поток векторного поля VII
- фазовый V
 - входной (выходной) XVIII
 - простейший XVIII
- Потомок XIX
- подлинный XIX
- Правило Бернулли — Лопиталья II
- вывода XIX
 - контекстно-зависимое XIX
 - КС-грамматики цепное XIX
 - Гарвика II
 - дифференцирования Ито XVIII
 - сложной функции II
 - индексов IV
 - интегрирования по частям VI
 - Крамера III
 - множителей Лагранжа
обобщенное XIV
 - обобщенного поглощения XIX
 - склеивания XIX
 - параллелограмма III
 - Саррюса III
 - северо-западного угла XX
 - суммирования по умолчанию IV
 - треугольника III
 - цепное II
 - Штурма II
- Прагматика языка XIX
- Предел бесконечный I
- вектор-функции II
 - замечательный второй I
 - первый I
 - интегральных сумм VI
 - интегрирования верхний
(нижний) VI
 - комплекснозначной функции IX
 - отображения в точке по
множеству I
 - последовательности I
 - бесконечный (конечный) I
 - в \mathbb{R}^n V
 - комплексных чисел X

- Предел последовательности случайных процессов XVIII
 -- сходящейся по норме IX
 -- функциональной равномерной IX
 -- случайного процесса XVIII
 -- функции в точке I
 ---- бесконечный (конечный) I
 ---- двусторонний (односторонний) I
 ---- левый (левосторонний) I
 ---- по множеству V
 ---- правый (правосторонний) I
 -- комплексного переменного в точке X
 -- при стремлении аргумента к бесконечности I
 Пределы интегрирования VI
 Предикат XIX
 – тождественно истинный XIX
 -- ложный XIX
 – характеристический XIX
 Предложение XIX
 Предок XIX
 – подлинный XIX
 Предпорядок XIX
 – строгий XIX
 Представление кривой векторное II
 -- координатное II
 – об алгоритме интуитивное XIX
 Предшественник XIX
 Преемник XIX
 Преобразование I
 – Абеля IX
 – интегральное XI
 -- Вебера XI
 -- Ганкеля XI
 -- Лапласа XI
 Преобразование интегральное Меллина XI
 -- на неограниченном промежутке XI
 --- ограниченном промежутке XI
 -- Фурье косинус (синус) XI
 --- смешанное XI
 --- экспоненциальное XI
 – квадратичной формы ортогональное IV
 – конформное XII
 – Коула — Хопфа XII
 – Лапласа — Стильеса XVI
 – линейное IV
 – ортогональное IV
 -- матрицы IV
 – сжатия III
 – формулы тождественное XIX
 -- эквивалентное XIX
 – Фурье дискретное IX
 --- быстрое IX
 --- обратное (прямое) IX
 -- обратное (прямое) IX
 – элементарное обратное III
 -- столбцов (строк) матрицы III
 Преобразователь состояний памяти XIX
 – стирающий XIX
 Префикс цепочки XIX
 Приближение начальное V
 – функции квадратичное II
 -- линейное II
 --- (первое) V
 – чебышевское II
 Прибыль удельная XX
 Приведение матрицы к диагональному виду IV

- Признак Абеля VI
- Абеля — Дирихле IX
 - Вейерштрасса X
 - сходимости ограниченной монотонной последовательности I
 - Даламбера IX
 - предельный IX
 - детерминированности алгоритма XIX
 - Дини IX
 - Дирихле VI
 - Жордана IX
 - Коши интегральный IX
 - радикальный IX
 - предельный IX
 - Лейбница IX
 - массовости алгоритма XIX
 - равномерной сходимости функционального ряда Вейерштрасса IX
 - необходимый IX
 - результативности алгоритма XIX
 - сравнения IX
 - предельный IX
 - сходимости ряда необходимый IX
- Применимость правила вывода XIX
- Пример Коши IX
- Принцип аргумента X
- взаимности XV
 - вложенных отрезков (принцип Кантора) I
 - Гамильтона XV
 - гомоморфной интерпретации XIX
 - двойственности (дуальности) I, XV, XIX
 - для упорядоченных множеств XIX
- Принцип компромисса XX
- локализации Римана IX
 - максимума XV
 - для гармонической функции XII
 - параболического уравнения XII
 - модуля X
 - минимакса II
 - недостаточного обоснования XX
 - непрерывности X
 - оптимальности XV
 - Беллмана XV
 - равномерной ограниченности XIII
 - симметрии X
 - соответствия границ X
 - сохранения области X
 - суперпозиции VIII
- Приращение аргумента в точке I
- функции в точке I
 - многих переменных частное V
 - полное V
- Проблема непустоты для конечного автомата XIX
- принадлежности XIX
 - пустоты для КС-грамматик XIX
 - синтаксического анализа XIX
 - соответствий Поста XIX
- Прогон имитационной модели XX
- Прогонка встречная XIII
- матричная XIII
 - немонотонная XIII
 - ортогональная XIII
 - потоковая XIII
 - продольно-поперечная XIII
 - циклическая XIII
- Программирование булево XX
- динамическое XV

- Программирование дискретное XX
 – линейное XIV, XX
 – стохастическое XX
 – целочисленное XX
- Продолжение отображения I
 –– (функции) I
 – функции аналитическое X
 – функционала XIII
- Продукция XIX
- Проектор XIII
- Проекция вектора на ось III
 ––– плоскость III
 – касательного расслоения естественная V
 – конечного автомата с выходом входная XIX
 – кортежа XIX
 – ортогональная IV
 –– вектора на направление III
 –––– ось (на прямую) III
 –– точки на плоскость III
 –––– прямую III
 – точки на множество XIV
- Произведение XIX
 – абсолютно сходящихся рядов IX
 – алгебраических систем прямое XIX
 – вектора на число III
 – векторов векторное III
 –– двойное III
 –– скалярное III
 –– смешанное III
 – внешнее IV
 – действительных чисел I
 – комплексных чисел I
 – линейного оператора на действительное число IV
 – линейных операторов IV
- Произведение матриц III
 – матрицы на число III
 – множеств I
 –– прямое (декартово) I, XIX
 – последовательностей I
 – ряда на число IX
 – рядов IX
 –– в форме Коши IX
 – скалярное IV
 –– энергетическое XIII
 – соответствий XIX
 – тензора на действительное число IV
 – тензоров IV
 – функции многих переменных на действительное число V
 – функций многих переменных V
 – элемента (вектора) на число IV
- Производная бесконечная (конечная) II
 –– определенного знака II
 – вектор-функции в точке II
 –––– вторая II
 – комплекснозначной функции IX
 – кусочно непрерывная IX
 – обобщенная XII
 –– левая (правая) IX
 – односторонняя II
 –– бесконечная (конечная) II
 –– слева (справа) II
 – по направлению вектора V
 – скалярного поля по направлению VII
 – случайного процесса в точке XVIII
 ––– на множестве XVIII
 – смешанная V

- Производная функции вдоль вектора V
- в точке II
 - вторая (второго порядка) II
 - первая (первого порядка) II
 - комплексного переменного в точке X
 - логарифмическая II
 - многих переменных в точке частная V
 - полная V
 - в силу системы VIII
 - частная V
 - второго порядка V
 - высшего порядка V
 - первого порядка V
 - n -го порядка II
- Промежуток I, VII
- замкнутый (открытый) I
 - n -мерный VII
- Прообраз множества (подмножества) при отображении I
- элемента при отображении I
- Пространства гильбертовы изоморфные IX
- линейные изоморфные IV
 - нормированные изометричные XIII
- Пространство I
- банахово IX
 - рефлексивное XIII
 - вероятностное XVI
 - выборочное XVII
 - гильбертово IX
 - евклидово IV
 - полное IX
 - измеримое XVIII
- Пространство изображений XI
- линейное IV
 - арифметическое IV
 - бесконечномерное IV
 - действительное IV
 - комплексное IV
 - конечномерное IV
 - над полем IV, XIX
 - n -мерное IV
 - линейных операторов (преобразований) IV
 - метрическое I
 - линейно связное I
 - механической системы конфигурационное V
 - нормированное IV
 - полное IX
 - сепарабельное IX
 - оригиналов XI
 - сопряженное IV, XIII
 - двойное (второе) IV, XIII
 - суммируемых функций IX
 - унитарное IX
 - фазовое VIII
 - расширенное VIII
 - факторное XVII
 - функций почти всюду ограниченных XIII
 - суммируемых с квадратом IX
 - p -й степенью XIII
 - функциональное XIII
 - нормированное XIII
 - цепей графа XIX
 - циклов графа XIX
 - элементарных исходов XVI
 - событий XVIII
 - энергетическое XIII
 - $V_1 (V_2, V_3)$ III

- Профили Жуковского X
- Процедура исключения отрезка XIV
- Процесс ветвления XX
- винеровский XVIII
 - стандартный XVIII
 - гауссов XVIII
 - гибели — размножения XVIII
 - однородный XVIII
 - допустимый XV
 - локально оптимальный XV
 - марковский XVIII
 - однородный XVIII
 - с состояниями дискретными XVIII
 - неоднородный XVIII
 - однородный XVIII
 - непрерывными XVIII
 - массового обслуживания XVIII
 - нормальный XVIII
 - оптимальный XV
 - ортогонализации Грама — Шмидта IV
 - пуассоновский XVIII
 - случайный XVIII
 - векторный XVIII
 - второго порядка XVIII
 - дифференцируемый в точке XVIII
 - на множестве XVIII
 - интегрируемый с весом XVIII
 - комплексный XVIII
 - координатный XVIII
 - непрерывный в точке XVIII
 - на множестве XVIII
 - с дискретным временем XVIII
 - скалярный XVIII
- Процесс случайный стационарный в узком (широком) смысле XVIII
- центрированный XVIII
 - элементарный XVIII
 - эргодический по отношению к дисперсии XVIII
 - математическому ожиданию XVIII
 - n -мерный XVIII
 - случайных возмущений XVIII
 - отклонений XVIII
 - с приращениями независимыми XVIII
 - стационарными XVIII
 - некоррелированными (ортогональными) XVIII
 - циклический XVIII
 - однородный XVIII
- Процессы случайные независимые XVIII
- некоррелированные XVIII
 - равные XVIII
 - стохастически эквивалентные XVIII
- Прямая I
- в \mathbb{R}^n V
 - числовая I
 - расширенная (пополненная) I
- Псевдорешение (нормальное) IV
- Псевдосфера II
- Пункт промежуточный XX
- Путь (дуга) I, XIX, XX
- в мультиграфе XIX
 - замкнутый XIX
 - интегрирования X
 - на многообразии гладкий V
 - простой XIX
- Пучок плоскостей III
- прямых III

- Равенства Вальда** XVII
Равенство асимптотическое I
 – параллелограмма IX
 – Парсеваля IX
Равносильность XIX
Радиал VI
Радиус-вектор II, III
Радиус кривизны плоской
 (пространственной) кривой в
 точке II
 – окрестности точки I
 – полярный I, III
 – сходимости IX
 – степенного ряда X
 – фокальный III
Разбиение VII, XIX
 – множества VII
 – отрезка VI
 – тривиальное XIX
Развертка II
Разделение переменных VIII
Разложение вектора в базисе III
 – по базису IV
 – в степенной ряд в окрестности
 точки IX
 – Ганкеля XI
 – матрицы мультипликативное III
 – QR IV
 – LDU (LU , SS^T) III
 – определителя III
 – по столбцу (строке) III
 – третьего порядка по первой
 строке III
 – потенциала мультипольное XII
 – сингулярное IV
 – стандартное IX
 – функции асимптотическое I
Разложение функции в ряд Тейлора
 X
 – сумму гармонических
 колебаний (гармоник) IX
 – лорановское в окрестности
 особой точки X
 – по косинусам (синусам)
 кратных дуг IX
 – Холецкого III
 – элемента банахова пространства
 в ряд по базису IX
Размер критерия XVII
 – матрицы III
Размерность карты V
 – кортежа XIX
 – многообразия (подмногообразия)
 V
 – пространства линейного IV
 – распределения V
Размещение I, XVI
 – без повторений XVI
 – с повторениями XVI
Разность XIX
 – векторов IV
 – действительных чисел I
 – комплексных чисел I
 – конечная II
 – правая (вперед) и левая
 (назад) II
 – центральная II
 – матриц III
 – множеств (подмножеств) I
 – симметрическая I
 – разделенная II
 – событий XVI
Разрез X
Ранг квадратичной формы IV
 – коциклический XIX

- Ранг матрицы III
- оператора IV
 - отображения в точке V
 - пути XIX
 - системы векторов IV
 - скалярного критерия XX
 - тензора IV
 - циклический XIX
 - элемента последовательности XVII
 - случайной выборки XVII
- Распределение асимптотически нормальное XVII
- бета XVII
 - бимодальное XVI
 - биномиальное XVI
 - (вероятностей) XVI
 - вероятностей биномиальное XVI
 - выборочное XVII
 - гамма XVI, XVII
 - гауссово XVI
 - генеральной совокупности XVII
 - геометрическое XVI
 - гипергеометрическое XVI
 - гладкое V
 - касающееся подмногообразия V
 - Коши XVI
 - логарифмически нормальное (логнормальное) XVI
 - Максвелла XVI
 - мультимодальное XVI
 - нормальное XVI
 - вырожденное XVI
 - двумерное XVI
 - невырожденное XVI
 - многомерное XVI
 - стандартное XVI
 - стандартное XVI
- Распределение отрицательное биномиальное XVII
- Парето XVII
 - полиномиальное XVI
 - Пуассона XVI
 - равномерное XVI
 - в области XVI
 - регулярное в точке V
 - Релея XVI
 - Стьюдента (t -распределение) XVI
 - унимодальное XVI
 - условное XVI
 - Фишера XVII
 - Фишера — Снедекора (F -распределение) XVI
 - экспоненциальное XVII
 - двумерное XVI
 - Эрланга XVI
 - χ^2 (хи-квадрат) XVI, XVII
- Распространение закона на множество I
- Расстановка пределов интегрирования VII
- Расстояние I
- в \mathbb{R}^n V
 - от элемента до множества IX
 - по поверхности V
 - пути XIX
 - фокальное III
- Расходимость числового ряда IX
- Расширение множества I
- оператора XIII
- Реакция на входной сигнал XVIII
- Реализации выборочные независимые XVIII
- Реализация выборочная XVIII
- случайного процесса XVIII
 - случайной выборки XVII, XVIII

- Ребро булева куба XIX
- графа XIX
 - древесное XIX
 - инцидентное XIX
 - обратное XIX
- Регрессия XVI
- линейная простая XVII
 - средняя квадратичная XVII
- Редукция симплекса XIV
- Режим особый XV
- функционирования стационарный XVIII
- Резольвента XI, XVIII
- задачи Коши XVIII
 - кубическая II
 - оператора XIII
- Результат применения машины Тьюринга к слову XIX
- операции XIX
- Рельеф функции X
- Репер III
- кривой сопутствующий II
- Рестарт XIV
- Ресурс дефицитный (недефицитный) XX
- Рефлексивность XIX
- Решение базисное XX
- допустимое XX
 - вырожденное XX
 - начальное XX
 - Вейля XI
 - допустимое XIV, XX
 - ДУ с частными производными первого порядка линейного неоднородного (однородного) VIII
- Решение задачи Коши VIII
- многокритериальной оптимизации обобщенное XX
 - игры XX
 - классическое XIII
 - матричного уравнения III
 - нормальной системы ОДУ общее VIII
 - обобщенное XII
 - обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) VIII
 - ОДУ особое VIII
 - колеблющееся (неколеблющееся) VIII
 - нетривиальное (тривиальное) VIII
 - первого порядка общее VIII
 - частное VIII
 - формальное VIII
 - n-го порядка VIII
 - общее (частное) VIII
 - неоднородного (однородного) VIII
 - операторного уравнения классическое XV
 - обобщенное XV
 - приближенное XV
 - оптимальное XIV, XX
 - альтернативное XX
 - неограниченное XX
 - периодическое VIII
 - системы неустойчивое по Ляпунову VIII
 - ОДУ нормальной VIII
 - устойчивое асимптотически VIII
 - по Ляпунову VIII

- Решение слабое XIII
- СЛАУ III
 - общее (частное) III
 - однородной общее III
 - частное III
 - строго более предпочтительное XX
 - строгое XII
 - фундаментальное для уравнения Лапласа XII
 - уравнения теплопроводности XII
- Решения эквивалентные XX
- Решетка XIX
- дистрибутивная XIX
- Риск второго рода XVII
- первого рода XVII
- Ротор векторного поля VII
- Ряд абсолютно сходящийся IX
- биномиальный IX
 - вариационный XVII
 - выборки XVII
 - случайной выборки XVII
 - гармонический IX
 - геометрический IX
 - Дирихле IX
 - знакоотрицательный IX
 - знакопеременный IX
 - знакоположительный IX
 - знакочередующийся IX
 - комплексный степенной X
 - Лорана X
 - в окрестности особой точки X
 - мажорируемый X
 - мажорирующий X
 - Маклорена IX
 - по ортонормированной системе IX
- Ряд по степеням $z - z_0$ IX
- распределения (вероятностей) дискретной случайной величины XVI
 - расходящийся IX
 - с неотрицательными (неположительными) членами IX
 - статистический XVII
 - интервальный XVII
 - степенной двусторонний X
 - действительный (комплексный) IX
 - обобщенный IX
 - расходящийся в точке X
 - сходящийся в точке X
 - абсолютно (условно) X
 - сходящийся абсолютно (условно) IX
 - по норме IX
 - равномерно внутри X
 - Тейлора IX
 - для функции комплексного переменного X
 - тригонометрический в комплексной форме IX
 - общий IX
 - функциональный IX
 - расходящийся в точке IX
 - сходящийся в точке IX, X
 - на множестве IX
 - абсолютно (условно) IX
 - неравномерно (равномерно) IX
 - поточечно IX
 - равномерно X
 - Фурье IX
 - в комплексной форме IX
 - дискретный (конечный) IX
 - тригонометрический IX

Ряд числовой действительный IX
 -- комплексный IX, X
 --- сходящийся X
 -- расходящийся (сходящийся) IX
 - элементов нормированного пространства IX

Свертка двух тензоров IV
 - (композиция) законов распределения XVI
 -- плотностей распределения XVI
 - тензора IV
 - функций IX

Свойство, выполняющееся почти всюду IX
 - геодезических линий экстремальное V
 - дробно-линейного отображения круговое X
 - инвариантное V
 - коллективизирующее XIX
 - непрерывности XIX
 - нуля аннулирующее XIX
 -- полукольца аннулирующее XIX
 - оптическое гиперболы III
 -- параболы III
 -- эллипса III
 - равных дробей VIII
 - устойчивости стратегий XX
 - характеристическое XIX

Связи голономные XV
 - дифференциальные XV
 - интегральные (изопериметрические) XV

Связка логическая XIX
 - плоскостей III

Связь обратная XV
 - стохастическая XVII
 - частная XVII

Сдвиг левый (правый) XIX
 СДНФ XIX

Седло VIII
 Сектор криволинейный VI
 Секущая II
 - кривой II

Семантика денотационная XIX
 - операциональная XIX
 - смешанных вычислений XIX
 - трансформационная XIX
 - языка XIX

Семейство множеств (индексированное) XIX
 -- конечно XIX
 -- не более чем счетное XIX
 -- счетное XIX
 - порождающее распределение V
 - Ω -замкнутое XIX

Сепаратриса VIII
 Сетка VIII
 - временная XIII
 - двумерная XIII
 - конечных элементов XIII
 - одномерная XIII
 - пространственная XIII
 - пространственно-временная XIII
 - трехмерная XIII

Сеть XIX
 - ациклическая XX
 - булева XIX
 - координатных линий V
 - ориентированная XIX
 - простая XIX

Сечение коническое III
 - отрезка золотое XIV
 - поверхности нормальное V
 - случайного процесса XVIII

- Сечение соответствия XIX
-- по множеству XIX
- функции XIV
Сечения независимые XVIII
Сигма-алгебра (σ -алгебра) XVI
- борелевская (минимальная) XVI
- событий XVI
Сигнал XVIII
- входной XVIII
Сигнатура XIX
- алгебры XIX
- многосортная XIX
Сила подъемная крыла X
- эйлера VIII
Символ XIX
- включения I
- входной (выходной) XIX
-- конечного автомата XIX
-- обозреваемый XIX
- Кронекера IV, XIV
- логический I
- магазина верхний XIX
-- начальный XIX
- магазинный XIX
- направления движения головки XIX
- недостижимый XIX
- нетерминальный XIX
-- бесполезный XIX
- принадлежности I
- пустой XIX
- строгого включения XIX
- терминальный XIX
Символы Ландау I
Симметрирование IV
Симметричность XIX
Симплекс XIV
- регулярный XIV
Симплекс-метод XX
- выпуклый XIV
Симплекс-множитель XX
Симплекс-разность XX
Симплекс-таблица XX
- оптимальная XX
Синтаксис языка XIX
Синтез глобального скалярного критерия XX
- управления XV
Синус I
- гиперболический I
- интегральный VI
Синус-преобразование Фурье IX
Система алгебраическая XIX
-- конечная XIX
-- (структура алгебраическая основная) I
- биортогональная XIII
- биортонормированная XIII
- векторов IV
-- линейно зависимая IV
--- независимая IV
-- ортогональная IV
- вектор-функций линейно зависимая (независимая) VIII
- возмущенная IV
- гамильтонова XV
- двух линейных уравнений III
- динамическая с управлением V
- замкнутая IX
- команд автомата XIX
-- машины Тьюринга XIX
-- МП-автомата XIX
- координат III
-- декартова (аффинная) III
--- прямоугольная I, III
-- каноническая III

Система координат косоугольная

- III
- локальная V
- на множестве V
- полярная III
- прямоугольная IV
- в \mathbb{R}^n IV
- связанная с касательной плоскостью V
- сопутствующая XIII
- сферическая III
- цилиндрическая III
- линейно независимая IX
- линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) III
- базисная XX
- треугольная XX
- ОДУ нормальная VIII
- неоднородная (однородная) VIII
- с переменными коэффициентами нормальная неоднородная (однородная) VIII
- устойчивая (неустойчивая) VIII
- асимптотически VIII
- постоянными коэффициентами нормальная VIII
- неоднородная (однородная) VIII
- минимальная XIII
- независимых нулей XX
- нелинейная V
- нормальных уравнений XVII
- образующих XIX
- многосортной алгебры XIX

Система обслуживания XVIII

- замкнутая XVIII
- с ограниченной длиной очереди XVIII
- ожиданием XVIII
- чистой XVIII
- отказом XVIII
- очередью XVIII
- ОДУ VIII
- жесткая XIII
- нормальная VIII
- автономная VIII
- ортогональная IX
- ортонормированная IX
- замкнутая IX
- полная IX
- отсчета I
- промежутков накрывающая множество IX
- Радемахера IX
- решений фундаментальная III
- нормальная III
- сопряженная XV
- с управлением V
- трех линейных уравнений III
- тригонометрическая IX
- Уолша IX
- управляемая XV
- линейная XV
- уравнений Колмогорова XVIII
- первого приближения VIII
- характеристик VIII
- Эйлера XV
- условий полная XV
- Фабера — Шаудера IX
- формальная XIX
- Франклина IX

- Система функций линейно
зависимая VIII
--- независимая VIII
- Хаара IX
- Якоби XV
- γ -доверительных множеств XVII
Системы алгебраические
изоморфные XIX
-- однотипные XIX
- эквивалентные IX
Скаляр модуля XIX
Скачок функции I
Склейка простая XIX
СКНФ XIX
Скобка Пуассона XV
Скорость сходимости
итерационного метода IV
-- квадратичная II
-- кубическая II
-- линейная (сверхлинейная) II
СЛАУ III
- квадратная III
- неоднородная (однородная) III
- неопределенная (определенная) III
- несовместная (совместная) III
- нормальная IV
- обусловленная плохо (хорошо) III
След линейного оператора IV
- матрицы IV
Слово XIX
- пустое XIX
Сложение XIX
- кольца (полукольца) XIX
- линейных операторов IV
- по модулю 2 XIX
--- k XIX
- элементов (векторов) IV
Сложность алгоритма XIX
- схемы из функциональных
элементов (сложность СФЭ) XIX
Слой сетки
пространственно-временной XIII
Случаи анализа устойчивости
критические VIII
Смещение оценки XVIII
Событие XVI
- достоверное XVI
- невозможное XVI
- противоположное XVI
- элементарное XVI
События зависимые XVI
- независимые XVI
-- в совокупности XVI
- несовместные
(непересекающиеся) XVI
--- в совокупности XVI
--- попарно XVI
- совместные (пересекающиеся)
XVI
Совокупность генеральная XVII
Соединение кортежей XIX
- слов XIX
- языков XIX
Солитон XII
Соответствие XIX
- взаимно однозначное XIX
- всюду определенное XIX
- обратное XIX
- пустое XIX
- универсальное XIX
- функциональное по компоненте
XIX
Соотношение дисперсионное XII
- рекуррентное I
-- Беллмана XV
- секущих V

- Соотношения Коши XIII
 Сорт XIX
 Сортировка топологическая XIX
 Составляющая ортогональная IV
 Состояние блока управления автомата XIX
 --- заключительное (начальное) XIX
 -- информационное „лица, принимающего решения“ XX
 -- конечного автомата XIX
 --- заключительное (начальное) XIX
 ---- поглощающее XIX
 ---- с выходом XIX
 ----- заключительное (начальное) XIX
 -- МП-автомата заключительное (начальное) XIX
 -- начальное XV
 -- памяти XIX
 -- всюду неопределенное XIX
 -- равновесия игры XX
 -- установившееся XX
 -- фазовое XV
 Сочетание I, XVI
 -- без повторений XVI
 -- с повторениями XVI
 Спектр дискретный XIII
 -- квадратной матрицы IV
 -- линейного оператора IV, XIII
 -- непрерывный XI
 -- оператора непрерывный XIII
 -- остаточный XIII
 -- точечный XI, XIII
 Спираль архимедова X
 -- логарифмическая II
 -- синусоидальная II
- Список инцидентности XIX
 -- смежности XIX
 -- вершины XIX
 Сплайн бикубический V
 -- интерполяционный эрмитов V
 -- интерполяционный II
 -- билинейный V
 -- первой степени двух переменных V
 -- степени (1,1) V
 -- кубический II
 -- дважды V
 -- естественный II
 -- фундаментальный II
 -- линейный II
 -- полиномиальный V
 -- (сплайн-функция) II
 Способ задания функции алгоритмический (программный) I
 I
 --- аналитический неявный (явный) I
 --- графический I
 --- описательный (словесный) I
 --- параметрический I
 --- табличный I
 Способность пропускная абсолютная XVIII
 -- относительная XVIII
 Спуск исчерпывающий XIV
 Среда сплошная XIII
 Среднее выборочное XVII
 -- Уолша XVII
 Стабилизация оптимальная в целом XV
 Статистика XVII
 -- достаточная XVII

- Статистика знаковых рангов
Вилкоксона XVII
- критерия знаков XVII
 - Манна — Уитни XVII
 - ранговая (рангов) Вилкоксона XVII
 - Фишера — Пирсона XVII
 - с поправкой Йейтса на непрерывность XVII
 - центральная XVII
- Стационарность входного потока XVIII
- Стек XIX
- Степень вершины XIX
- декартова нулевая XIX
 - n -я XIX
 - многочлена I
 - от n переменных III
 - множества декартова XIX
 - оператора XIII
 - уравнения III
 - элемента XIX
- Стоимость прохождения XIX
- Сток XX
- векторного поля VII
 - сети XIX
- Столбец (строка) базисный III
- Сторона поверхности VII
- Стратегия XX
- активная XX
 - максиминная (минимаксная) XX
 - оптимальная XX
 - „перенос — свертка“ XIX
 - смешанная XX
 - стационарная XX
 - чистая XX
- Стрелка Пирса XIX
- Строка симплекс-таблицы ведущая XX
- Строки (столбцы) линейно зависимые (независимые) III
- Структура алгебраическая I
- основная (система алгебраическая) I
 - гладкая V
 - овражная XIV
- Сужение оператора XIII
- отображения (функции) I
 - соответствия на подмножество XIX
 - строгое XIX
- Сумма бесконечная XIX
- векторов III
 - Дарбу верхняя (нижняя) VI
 - действительных чисел I
 - дизъюнктивная I
 - интегральная VI, VII
 - Лебега IX
 - квадратов остаточная XVII
 - квадратурная VI
 - комплексных чисел I
 - линейных операторов IV
 - подпространств IV
 - прямая IV
 - матриц III
 - прямая III
 - ортогональная IX
 - по модулю k XIX
 - последовательностей I
 - ряда IX, X
 - функционального IX
 - частичная IX
 - частичная IX, X
 - числового IX
 - частичная IX

- Сумма рядов IX
- тензоров IV
 - функций многих переменных V
 - частичная IX, XIX
 - элементов (векторов) IV
 - последовательности XIX
- Суммирование рядов почленное IX
- Суперпозиция над множеством XIX
- (наложение) функций I, XIX
 - языков в язык XIX
- Существование и единственность геодезических линий V
- Сфера I
- единичная IV
 - комплексных чисел X
 - Римана X
 - соприкасающаяся II
 - n -мерная V
- Схема (алгоритм) Горнера I
- Бернулли XVI
 - обобщенная XVI
 - биномиальная XVI
 - геометрическая XVI
 - гипергеометрическая XVI
 - над базисом XIX
 - из функциональных элементов XIX
 - классическая XVI
 - полиномиальная (мультиномиальная) XVI
 - разностная XIII
 - двухслойная неявная XIII
 - с весами XIII
 - симметричная XIII
 - явная XIII
 - корректная XIII
 - локально-одномерная XIII
- Схема разностная типа предиктор-корректор XIII
- трехслойная неявная (явная) XIII
 - симметричная XIII
- Эйткена II
- Сходимость в нормированном пространстве IX
- среднем IX
 - квадратичном IX
 - всюду XVI
 - квадратичная V
 - метода II
 - локальная II
 - несобственного интеграла VI
 - абсолютная (условная) VI
 - по вероятности XVI
 - норме IX
 - энергии XV
 - с вероятностью 1 (почти наверное) XVI
 - сильная (слабая) XIV
 - функций распределения слабая XVI
 - функционального ряда неравномерная IX
 - поточечная IX
 - равномерная IX
 - функциональной последовательности неравномерная IX
 - поточечная IX
 - равномерная IX
 - числового ряда IX
 - абсолютная (условная) IX
- Сын XIX
- Сюръекция I
- каноническая XIX

- Таблица дисперсионного анализа XVII
- истинности XIX
 - Квайна XIX
 - корреляционная XVII
 - критериальная XIX
 - Кэли XIX
 - сопряженности признаков XVII
 - структурная XIX
 - транспортная XX
 - управляющая XIX
- Табулирование функций II
- Такт работы автомата XIX
- МП-автомата XIX
- Тангенс I
- гиперболический I
- Тезис Тьюринга XIX
- Тело I, XIX
- кубиремое VI
 - цилиндрическое VII
 - z-цилиндрическое VII
- Тензор IV
- антисимметрический по группе индексов IV
 - второго ранга единичный XIII
 - деформаций XIII
 - евклидов IV
 - инерции IV
 - ковариантный (контравариантный) IV
 - кососимметрический IV
 - по группе индексов IV
 - метрический ковариантный (контравариантный) IV
 - напряжений XIII
 - симметрический IV
 - по группе индексов IV
 - скоростей деформаций XIII
- Тензор смешанный IV
- теплопроводности XIII
 - транспонированный IV
 - шаровой XIII
- Теорема I, XIX
- Абеля X
 - алгебры основная I
 - Арцела XIII
 - Банаха об обратном операторе XIII
 - Банаха — Штейнгауза XIII
 - Бернулли XVI
 - Вейерштрасса IX
 - первая (вторая) I
 - взаимности работ XIII
 - Гаусса VII
 - Гершгорина XIII
 - Гильберта — Шмидта XIII
 - Гульдина первая (вторая) VI
 - двойственности XIV
 - Дирихле IX
 - запаздывания XI
 - Калмана XVIII
 - Кантора XIX
 - Кантора — Бернштейна XIX
 - Каратеодори XIV
 - Карлесона IX
 - Коши IX
 - для многосвязной области X
 - односвязной области X
 - о вычетах X
 - существования и единственности решения ОДУ первого порядка VIII
 - не разрешенного относительно производной VIII
 - Кронекера — Капелли III
 - Куна — Таккера XIV

Теорема Кэли XIX

- Кэли — Гамильтона IV
- Лагранжа XIX
- Лиувилля X
- Мертенса IX
- Мореры X
- Муавра — Лапласа интегральная XVI
- непрерывности XVI
- о базисном миноре III
- детерминизации XIX
- дифференцировании изображения XI
- оригинала XI
- квадрате XIX
- квадратичном функционале XIII
- линейности преобразования Фурье IX
- логарифмическом вычете X
- неподвижной точке XIX
- непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда IX
- неявной функции V
- перестановке членов абсолютно сходящегося ряда IX
- почленном дифференцировании ряда IX
- интегрировании ряда IX
- предельном переходе для функциональных рядов IX
- под знаком несобственного интеграла IX
- преобразовании Фурье производной IX
- промежуточном значении непрерывной функции I
- равномерной сходимости тригонометрического ряда IX

Теорема о связи функции, ее

- предела и бесконечно малой V
- среднем VII
- значении VI
- для интеграла двойного VII
- кратного VII
- тройного VII
- сумме вычетов X
- об интегрировании изображения XI
- оригинала XI
- обратной функции X
- оценке интеграла двойного VII
- по модулю VII
- тройного VII
- по модулю VII
- кратного VII
- по модулю VII
- обратная I
- обращения преобразования Фурье IX
- Остроградского — Гаусса VII
- Пифагора IV
- подобия XI
- Римана X
- Рисса XIII
- Рисса — Фишера IX
- Родрига V
- сложения вероятностей XVI
- смещения XI
- Стеклова XII
- Стокса VII
- Тейлора V
- Ферма малая XIX
- Фробениуса V
- Хана — Банаха XIII
- центральная предельная XVI
- эргодическая XVIII
- Эфроса XI

- Теоремы разложения XI
- Теория игр XX
- массового обслуживания XVIII
 - спектральная XVIII
 - фильтрации и упреждения XVIII
 - формальная XIX
- Терминал XIX
- Тетраэдр VII
- Тип матрицы III
- операции XIX
 - полилинейной формы IV
 - тензора IV
- Тождества основные кольца XIX
- полукольца XIX
- Тождество XIX
- Лагранжа XI
 - логарифмическое основное I
 - обобщенного поглощения XIX
 - склеивания XIX
 - поглощения XIX
 - теоретико-множественное XIX
 - Якоби V
- Толерантность XIX
- Толщина пластины VII
- Тор V
- Точка асимптотическая II
- базовая XIV
 - бесконечная (конечная) I
 - бесконечно удаленная X
 - возврата (заострения) II
 - графика II
 - излома графика II
 - изображающая VIII
 - интегральной кривой
обыкновенная VIII
 - касания II
 - кривой изолированная II
 - конечная (начальная) II, X
- Точка кривой кратная II
- неособая (обыкновенная) II
 - особая II
 - угловая X
 - критическая потока X
 - функции II
 - максимума функции II
 - локального II
 - строгого II
 - минимума функции II
 - локального II
 - строгого II
 - множества внешняя X
 - внутренняя I
 - граничная I
 - изолированная I
 - крайняя XX
 - предельная I
 - начальная XIV
 - непрерывности отображения I
 - функции I
 - округления V
 - оператора неподвижная XIII
 - особая изолированная X
 - ОДУ VIII
 - устранимая X
 - функции комплексного
переменного X
 - отображения неподвижная I
 - наименьшая XIX
 - перегиба графика функции II
 - функции II
 - переключения XV
 - поверхности внутренней VII
 - гиперболическая V
 - неомбилическая V
 - неособая (особая) VII
 - омбилическая V

- Точка поверхности параболическая
V
- регулярная V
 - эллиптическая V
 - последовательности предельная I
 - приложения вектора III
 - геометрического III
 - касательного V
 - равновесия игры XX
 - разветвления потока X
 - разрыва второго рода I
 - отображения (функции) I
 - первого рода I
 - устранимого I
 - функции I
 - распрямления кривой II
 - самопересечения кривой X
 - (узловая) графика II
 - сгущения последовательности I
 - седловая XX
 - сопряженная XV
 - стационарная функции II
 - функционала XV
 - существенно особая X
 - схода потока X
 - угловая графика II
 - уплощения V
 - кривой II
 - фазовая (изображающая) XV
 - функции особая изолированная X
 - экстремума XV
 - функции II
 - локального II
 - строгого II
- Точки коллокации XIII
- отделимые V
 - симметричные относительно окружности X
- Траектория II
- изогональная VIII
 - оптимальная XV
 - ортогональная VIII
 - системы V
 - случайного процесса XVIII
 - фазовая VIII
 - соответствующая управлению XV
- Трактриса II
- Транзитивность I, XIX
- Транспозиция перестановки I
- подстановки III
- Транспонирование тензора
элементарное IV
- Трапеция криволинейная VI
- Требование XVIII
- целочисленности XX
- Треугольник Паскаля I
- Трехгранник подвижный II
- Трехчлен квадратный I
- Триангуляция замкнутой области
VII
- многоугольника V
- Триггер XIX
- Триэдр основной II
- Тройка некомпланарных векторов
левая (правая) III
- точек левая (правая) V
- Трохоида II
- Трубка векторная VII
- Угол между векторами IV
- полярный I, III
 - смежности дуги II
 - телесный VII
- Узел XIX
- вырожденный VIII

- Узел дикритический VIII
- интерполяции II
 - кратный II
 - конечного элемента XIII
 - неустойчивый (устойчивый) VIII
 - сети XX
 - сетки VIII
 - промежуточный XIII
 - сплайна V
 - бикубического V
 - формулы квадратурной VI
 - кубатурной VII
- Улитка Паскаля II
- Умножение XIX
- алгебры V
 - в группе (групповое) XIX
 - кольца (полукольца) XIX
 - левое (правое) XIX
 - линейного оператора на действительное число IV
 - операторов XIII
 - полукольца XIX
 - скалярное IV
 - стандартное IV
 - элемента (вектора) на число IV
- Универсум I
- Управление XX
- векторное V
 - допустимое XV
 - оптимальное XV
 - безусловное (условное) XX
 - по быстрдействию XV
 - особое XV
 - программное XV
 - скалярное V
 - экстремальное XV
- Управляемость системы XV
- Уравнение алгебраическое II
- четвертой степени II
 - Беллмана XV
 - Бернулли VIII
 - Бесселя XI
 - модифицированное XI
 - бигармоническое XIII
 - биквадратное II
 - Бюргерса XII
 - вариационное XV
 - голономное XV
 - волновое XII
 - Гельмгольца XIII
 - гиперболического типа XII
 - гиперболы в асимптотах III
 - смещенное III
 - каноническое III
 - полярное III
 - смещенное III
 - сопряженной каноническое III
 - смещенное III
 - двучленное I
 - дифференциальное VIII
 - линейное стохастическое XVIII
 - обыкновенное (ОДУ) в полных дифференциалах VIII
 - второго порядка VIII
 - линейное неоднородное (однородное) с постоянными коэффициентами VIII
 - высшего порядка VIII
 - однородное VIII
 - первого порядка VIII
 - квазиоднородное VIII
 - линейное VIII
 - неоднородное (однородное) VIII

- Уравнение дифференциальное
 обыкновенное первого порядка
 однородное VIII
 ----- разрешенное относительно
 производной VIII
 ---- с разделяющимися
 переменными VIII
 ---- n -го порядка VIII
 ----- линейное VIII
 ----- неоднородное
 (однородное) VIII
 ----- с постоянными
 коэффициентами VIII
 -- первого порядка квазилинейное
 VIII
 -- с отклоняющимся аргументом
 VIII
 ---- частными производными VIII
 ----- первого порядка линейное
 неоднородное (однородное) VIII
 - диффузии XII
 - Зельдовича XII
 - интегральное XIII
 -- граничное XIII
 -- первого (второго) рода XI
 -- типа свертки XI
 - интегро-дифференциальное XIII
 - канонического вида IV
 - каноническое гиперболоида
 двуполостного III
 ---- однополостного III
 -- конуса прямого кругового III
 --- эллиптического III
 -- параболоида гиперболического
 III
 --- эллиптического III
 -- эллипсоида III
 - квадратное II
- Уравнение Клеро VIII
 - Колмогорова матричное XVIII
 -- первое (второе) XVIII
 - Колмогорова — Петровского —
 Пискунова XII
 - Колмогорова — Фоккера —
 Планка XVIII
 - Кортвега — де Фриза XII
 - кривой второго порядка неполное
 III
 -- комплексное X
 - кубическое II
 -- неполное II
 - Лагранжа VIII
 -- n -го порядка VIII
 - Лапласа VII, X, XII
 - леволinéйное (праволinéйное)
 XIX
 - Лежандра XII
 - линейное III
 - Максвелла XII
 - Маркова — Смолуховского —
 Чепмена — Колмогорова XVIII
 - матричное III
 - множества III
 - нелинейное II
 - неразрывности XIII
 - однородное III
 - операторное XIII, XV
 -- однородное XIII
 - Остроградского XV
 - параболического типа XII
 - параболы канонические III
 -- полярное III
 -- смещенное III
 - плоскости векторное III
 --- параметрическое III
 -- в отрезках III

Уравнение плоскости нормальное

- III
- общее III
- поверхности векторное V
- второго порядка смещенное III
- прямой векторное III
- в отрезках III
- каноническое III
- нормальное III
- общее III
- проходящей через две точки III
- с угловым коэффициентом III
- Пуассона XII
- разностное XIII
- Риккати VIII
- Римана XII
- связи V
- с двумя неизвестными V
- Семенова XII
- синус-Гордона XII
- состояния XIII
- стохастическое дифференциальное линейное XVIII
- телеграфное XIII
- теории упругости в перемещениях XIII
- теплопроводности XII
- типа „реакция — диффузия“ XII
- функциональное XIII
- характеристическое VIII
- линейного оператора IV
- матрицы IV
- ОДУ n -го порядка VIII
- системы ОДУ VIII
- Чебышева VIII
- Шредингера XII
- Эйлера VIII

Уравнение Эйлера — Пуассона XV

- Эйри VIII
- эллипса каноническое III
- полярное III
- смещенное III
- эллиптического типа XII
- Якоби XV
- Уравнения движения XIII
- возмущенного движения VIII
- канонические конечного автомата с выходом XIX
- Клоппера — Пирсона XVII
- Кодацци — Гаусса V
- кривой натуральные II
- параметрические II
- Ламе XIII
- Навье — Стокса XIII
- параметрические плоскости III
- m -мерной V
- поверхности V
- прямой III, V
- первого приближения XV
- правдоподобия XVII
- прямой канонические III
- общие III
- проходящей через две точки III
- равновесия XIII
- Эйлера XIII
- задачи Лагранжа XV
- изопериметрической задачи XV
- n -мерной плоскости (прямой) общие V
- Уровень XVII
- вершины XIX
- ориентированного дерева XIX
- доверия XVII
- значимости критерия XVII
- несклонности к риску XX

Условие граничное главное

- (предварительное) XIII
- естественное XIII
- Дирихле XI
- допустимости выбора XX
- достаточное I
- слабого минимума XV
- калибровки Лоренца XII
- квазиньютоновское XIV
- Коши (начальное) VIII
- краевое естественное XV
- Лежандра XV
- усиленное XV
- Липшица I
- начальное VIII
- необходимое I
- условного экстремума V
- неопределенности XX
- общности положения XV
- оптимальности выбора XX
- отделимости V
- отражения XV
- преломления XV
- риска XX
- существования точки перегиба достаточное (необходимое) II
- сходимости комплексного числового ряда X
- теоремы I
- трансверсальности XV
- экстремума функции достаточное (необходимое) II, V
- функционала необходимое XV
- Якоби XV
- усиленное XV
- Условия Вейерштрасса — Эрдмана XV
- граничные XII
- связанные XIII

Условия Дирихле IX

- на бесконечном промежутке IX
- дополняющей нежесткости XIV
- Коши — Римана X
- в полярных координатах X
- краевые VIII
- первого (второго, третьего) рода VIII
- начальные XII
- для системы ОДУ VIII
- ортогональности XIV
- Рауса — Гурвица VIII
- связи XV
- совместности системы дифференциальных уравнений V
- Устойчивость алгоритма вычислительная XIII
- по входным данным XIII
- статистическая XVI
- частоты статистическая XVIII
- Устройство управления машины Тьюринга XIX
- Уступка допустимая XX
- Утверждение XIX
- Участок особого управления (режима) XV

Фаза колебания начальная IX

- Фактор XVII
- неопределенности XVII
- Фактор-алгебра многосортная XIX
- Фактор-группа по нормальному делителю XIX
- Фактор-кольцо XIX
- Фактор-множество XIX
- Фактор-модель XIX
- Фактор-система по конгруэнции XIX

- Фигура плоская VI
 -- квадратуемая VI
 Фильтр Калмана XVIII
 Фокус гиперболы III
 - неустойчивый (устойчивый) VIII
 - параболы III
 - сложный VIII
 - эллипса III
 Форма билинейная IV
 -- кососимметрическая IV
 -- симметрическая IV
 - дивергентная уравнения
 неразрывности XIII
 ---- обобщенная XIII
 - жорданова каноническая IV
 -- нормальная IV
 - записи системы ОДУ
 симметричная VIII
 - каноническая интеграла
 эллиптического VI
 -- одношагового итерационного
 метода IV
 -- уравнений Эйлера XV
 -- уравнения XII
 - квадратичная IV
 -- вторая (первая) V
 -- вырожденная (невыврожденная)
 IV
 -- знакопеременная IV
 -- канонического вида IV
 -- неопределенная IV
 -- определенная неотрицательно
 IV
 --- неположительно IV
 --- отрицательно IV
 --- положительно IV
 -- поверхности второго порядка
 IV
 Форма линейная IV
 - нормальная дизъюнктивная XIX
 --- кратчайшая XIX
 --- минимальная XIX
 --- совершенная (СДНФ) XIX
 --- сокращенная XIX
 --- тупиковая XIX
 -- конъюнктивная XIX
 --- совершенная (СКНФ) XIX
 - полилинейная IV
 - представления комплексного
 числа алгебраическая I
 ---- геометрическая I
 ---- показательная X
 ---- тригонометрическая I
 - приведенная КС-грамматики XIX
 - статистики знаков считающая
 XVII
 Формула Байеса XVI
 - Бернулли XVI
 - биномиальная XVI
 - вероятности объединения
 независимых событий XVI
 - Ганкеля XI
 - Грина XI, XII
 -- вторая (первая) VII
 -- для многосвязной области VII
 --- односвязной области VII
 - Даламбера XII
 - Дюамеля XI
 - Жуковского X
 - Кардано II
 - квадратурная VI
 -- Гаусса VI
 -- Ньютона VI
 -- Эйлера VI
 - комбинаторики основная XVI
 - конечных приращений II

Формула Коши — Адамара X
 – Коши интегральная X
 -- конечных приращений II
 – кубатурная VII
 – Лагранжа II
 – Лейбница II
 – Маклорена II
 – Менье V
 – Муавра возведения комплексного
 числа в целую положительную
 степень I
 -- извлечения корня целой
 положительной степени из
 комплексного числа I
 -- Муавра — Лапласа
 интегральная (локальная) XVI
 – над множеством XIX
 – Ньютона — Лейбница VI
 --- для криволинейного интеграла
 VII
 --- обобщенная VI
 – обращения XVI
 -- косинус-преобразования Фурье
 IX
 -- преобразования Фурье
 обратного (прямого) IX
 -- синус-преобразования Фурье IX
 – Остроградского XIII
 – Остроградского — Гаусса VII
 – парабол VI
 – полной вероятности XVI
 – прямоугольника VI
 – прямоугольников VI
 -- левых (правых) VI
 -- центральных VI
 – Пуассона XII, XVI
 – Римана — Меллина XI
 – Родрига IX

Формула свертки XVI
 – сдвига VIII
 – Симпсона VI
 – средних VI
 – Стирлинга IX
 – Стокса VII
 – Тейлора II
 -- в дифференциалах II
 -- с остаточным членом в форме
 Лагранжа II
 ----- Пеано II
 – трапеции (трапеций) VI
 – умножения вероятностей XVI
 – Эйлера X
 -- для бета- и гамма-функций VI
 Формулировка задачи
 интегральная XIII
 -- прикладной вариационная XV
 Формулы Бонне VI
 – Крамера III
 – Ньютона — Котеса VI
 – приведения VI
 – Серре — Френе II
 – Филона VI
 – Фурье IX
 – эквивалентные XIX
 – Эрланга XVIII
 Фрагмент вывода XIX
 Фраза языка XIX
 Функции базисные XVII
 -- финитные XIII
 – бесконечно большие несравнимые
 I
 --- одного порядка I
 --- эквивалентные I
 -- малые несравнимые I
 --- одного порядка I
 --- эквивалентные I

- Функции Бесселя XI**
 – булевы равные XIX
 – весовые XIII
 – взаимно обратные I
 – Ганкеля XI
 – гармонические сопряженные X
 – гиперболические обратные VI
 – комплексного переменного
 тригонометрические X
 – координатные булева оператора
 XIX
 -- вектор-функции II
 – Лежандра присоединенные XII
 – Ляпунова VIII
 – Макдональда XI
 – одного порядка I
 – ортогональные с весом IX
 – проекционные XIII
 – собственные XII
 – специальные VI
 – сферические XII
 – тригонометрические I
 -- обратные I
 – целые трансцендентные X
 – цилиндрические
 модифицированные XI
 -- первого (второго, третьего)
 рода XI
 – Четаева VIII
 – Эйри VIII
 – эквивалентные I
 – элементарные I
 -- основные I
Функционал альтернативный XV
 – билинейный XV
 – вспомогательный XV
 – выпуклый XV
 -- строго XV
- Функционал вырожденный XV**
 – дифференцируемый в точке XV
 ---- дважды XV
 – Дирихле XV
 – квадратичный XV
 -- определенный неотрицательно
 XV
 --- положительно XV
 -- сильно положительный XV
 – Лагранжа XV
 – линейный IV
 -- ограниченный XIII
 – непрерывный в точке XV
 – терминальный XV
 – целевой XV
 -- интегральный XV
 -- смешанный XV
 -- терминальный XV
 – энергии XIII
Функция I
 – аддитивная XX
 – алгебраическая I
 – аналитическая XIII
 -- в замкнутой области X
 ---- точке X
 -- (голоморфная, регулярная) в
 области X
 – Беллмана XV
 – бесконечно большая I
 ---- более высокого (низкого)
 порядка I
 ---- положительная
 (отрицательная) I
 ---- при стремлении аргумента по
 множеству I
 ---- k -го порядка I
 -- дифференцируемая IX

- Функция бесконечно малая I
 --- более высокого (низкого) порядка I
 --- по сравнению с другой функцией I
 --- при стремлении аргумента по множеству I
 --- k -го порядка I
 - бигармоническая XIII
 - булева XIX
 -- вычисляемая вершиной схемы XIX
 --- СФЭ XIX
 -- коммутативная XIX
 -- от n переменных XIX
 -- частичная XIX
 - Вейерштрасса XV
 - Вейля — Титчмарша XI
 - векторная I
 -- аргумента скалярного II
 --- векторного V
 - вербальная XIX
 - весовая IX, XIX
 - взаимно однозначная I
 - возрастающая на множестве I
 - волновая XII
 - выпуклая XIV
 -- (строго) вверх (вниз) в интервале II
 - выходов конечного автомата с выходом XIX
 - вычисляемая по Тьюрингу XIX
 - Гамильтона XV
 - гармоническая XII
 - гладкая XV
 - голоморфная в точке X
 - голосования XIX
 - Грина XI, XII
- Функция двойственная XIV
 -- к позиному XIV
 --- функции XIX
 - действительная аналитическая IX
 -- действительного переменного I
 - действительного (вещественного) переменного I
 - детерминированная XVIII
 -- ограничено XIX
 - Дирихле I
 - дифференцируемая II
 -- в интервале II
 --- промежутке непрерывно n раз II
 --- точке II
 ---- непрерывно n раз II
 -- на множестве II
 - допустимая XV
 - дробно-линейная I
 - дробно-рациональная I
 - единичная Хевисайда I
 - Жуковского X
 - заданная неявно V
 - знака I
 - знакоопределенная VIII
 - знакпеременная VIII
 - знакпостоянная VIII
 - измеримая IX
 - инвариантная V
 -- относительно изменения масштаба XX
 --- преобразования сдвига XX
 - индикаторная XIV
 - интегрируемая VI, VII
 -- абсолютно VI, IX
 -- по Лебегу IX
 --- Риману VI, VII
 - инцидентности XIX

- Функция невозрастающая на множестве I
- Неймана XII
 - неограниченная на множестве I
 - неотрицательная (положительная) при стремлении аргумента по множеству I
 - неположительная (отрицательная) при стремлении аргумента по множеству I
 - непрерывная в интервале I
 - точке I
 - на множестве равномерно I
 - отрезке I
 - слева (справа) в точке I
 - непрерывно дифференцируемая V
 - k раз V
 - не равная нулю при стремлении аргумента по множеству I
 - нескольких переменных V
 - неубывающая на множестве I
 - (невозрастающая) при стремлении аргумента по множеству I
 - неявная II
 - обратная I
 - общего вида I
 - ограниченная I
 - на множестве I
 - по сравнению с другой функцией I
 - сверху (снизу) на множестве I
 - при стремлении аргумента по множеству I
 - однолистная в точке X
 - однородная степени k VIII
- Функция от случайной величины
- двумерной XVI
 - скалярной XVI
 - Патрика XIX
 - передаточная XI, XVIII
 - перехода V
 - переходов XIX
 - конечного автомата с выходом XIX
 - машины Тьюринга XIX
 - МП-автомата XIX
 - периодическая I
 - платежная XX
 - плотности вероятностей случайного процесса
 - конечномерная (N -мерная) XVIII
 - одномерная XVIII
 - подынтегральная VI
 - показательная I
 - интегральная VI
 - общая X
 - показательно-степенная I
 - полезности дохода XX
 - Понтрягина XV
 - порядковая XIX
 - потенциальная VII
 - правдоподобия XVII
 - предельная IX
 - представляемая формулой над множеством XIX
 - пробная XII, XV
 - проектирующая XIX
 - производящая XVI
 - разделяющая точки множества XVIII
 - разметки XIX
 - разрывная I
 - в точке I

- Функция распределения
(вероятностей) XVI
- случайного вектора XVIII
 - n -мерного XVI
 - случайной величины XVIII
 - совместная XVI
 - выборочная XVII
 - нормального стандартного XVI
 - одномерная частная или маргинальная XVI
 - случайного процесса
 - конечномерная (N -мерная) XVIII
 - одномерная XVIII
 - совместная XVIII
 - теоретическая XVII
 - условная XVI
 - эмпирическая XVII
 - рациональная I
 - целая I
 - регрессии XVI
 - регулярная в точке X
 - самодвойственная XIX
 - сепарабельная XIV
 - сеточная IX
 - силовая X
 - сильно выпуклая XIV
 - синтезирующая XV
 - скалярная I
 - словарная XIX
 - сложная I
 - случайная XVIII
 - случайного вектора векторная XVIII
 - скалярная XVIII
 - случайной величины векторная XVIII
 - скалярная XVIII
- Функция собственная XII
- оператора XIII
 - с ограниченным изменением IX
 - составная I
 - сохраняющая константу 0 (1) XIX
 - спектральная IX
 - сравнения VI
 - степенная I
 - общая X
 - целая X
 - стремящаяся к бесконечности при стремлении аргумента к бесконечности I
 - конечной точке I
 - точке сверху при стремлении аргумента к точке I
 - строго выпуклая XIV
 - монотонная I
 - унимодальная XIV
 - ступенчатая IX
 - суммируемая IX
 - с квадратом IX
 - и весом IX
 - сходящаяся равномерно на множестве IX
 - сюръективная I
 - тождественная XIX
 - тока X
 - трансцендентная (неалгебраическая) I
 - убывающая на множестве I
 - унимодальная XIV
 - финитная XII
 - формы конечного элемента XIII
 - характеристическая XVI
 - случайного вектора XVIII
 - процесса XVIII
 - Хевисайда XI

Функция целая X

- целевая V, XIV, XX
- четная (нечетная) I
- чувствительности XVIII
- матричная XVIII
- штрафа XIV
- внешнего (внутреннего) XIV
- штрафная XIV
- экспоненциальная I
- языка семантическая XIX
- Якоби XII

Характеристика

- амплитудно-частотная VIII
- выборочная XVII
- критерия оперативная XVII
- фазочастотная VIII
- частотная динамической системы XVIII
- числовая XVII
- генеральная XVII
- теоретическая XVII
- Характеристики VIII
- квазилинейного ДУ VIII
- Ход XX
- метода Гаусса обратный III
- прямой III

Цель управления XV

- Цена игры верхняя (нижняя) XX
- ожидаемая XX
- чистая XX
- тенева XX
- Ценность дополнительной единицы ресурса XX
- Центр VIII
- гиперболы III

Центр кривизны плоской

- (пространственной) кривой в точке II
- масс VI
- геометрический VII
- окрестности точки I
- разложения X
- рассеивания XVI
- степенного ряда IX
- шара I
- эллипса III
- Цепочка XIX
- входная XIX
- допустимая конечного автомата XIX
- МП-автомата XIX
- непосредственно выводимая XIX
- нетерминальная (терминальная) XIX
- пустая XIX
- тупиковая XIX
- Цепь XIX
- замкнутая XIX
- Маркова XVIII
- неоднородная (однородная) XVIII
- простая XIX
- Цикл XIX, XX
- транспортной таблицы XX
- фундаментальный XIX
- эйлеров XIX
- Циклоида II
- Цилиндр второго порядка III
- гиперболический III
- круговой III
- параболический III
- эллиптический III
- Циркуляция векторного поля VII
- Циссоида Диоклеса II

- Ч**астное от деления XIX
 – последовательностей I
 – функций многих переменных V
 – чисел действительных I
 -- комплексных I
Частота XVII
 – колебания циклическая (круговая) IX
 – относительная XVII
 – события случайного наблюдения XVI
 -- условная XVI
Часть входной цепочки
 непрочитанная XIX
 – главная суммы бесконечно больших функций I
 ---- малых функций I
 – действительная (мнимая) комплексного числа I
 --- комплекснозначной функции IX
 – левая (правая) команды XIX
 ---- машины Тьюринга XIX
 --- правила вывода XIX
 – лорановского разложения главная X
 --- правильная X
 – ряда Лорана главная X
 --- правильная X
 – схемы запоминающая XIX
 -- комбинационная XIX
 – тождества левая (правая) XIX
 – целая I
Числа комплексно сопряженные I
 – Фибоначчи I
Число алгебраическое I
Число действительное I
 -- конечное I
 – иррациональное I
 – кардинальное I
 – комплексное I
 – Кэли XIX
 – натуральное I
 – обратное I
 – обусловленности абсолютное II
 -- матрицы IV
 – отрицательное (положительное) I
 – противоположное I
 – псевдослучайное XX
 – рациональное I
 – сингулярное линейного оператора IV
 -- матрицы IV
 – собственное квадратной матрицы IV
 -- линейного оператора IV
 – степеней свободы распределения χ^2 XVI
 --- системы V
 – трансцендентное I
 – характеристическое XIII
 – целое I
 – чисто мнимое I
Член вариационного ряда XVII
 --- случайной выборки XVII
 – комплексного числового ряда общий X
 – остаточный формулы Тейлора II
 ---- в общей форме II
 ----- интегральной форме IX
 ----- форме Коши II
 ----- Лагранжа II
 ----- Пеано II
 – разбиения XIX

- Член ряда IX
 -- общий IX
 -- функционального IX
 - уравнения свободный III
 - функциональной последовательности IX
 Члены вариационного ряда крайние XVII
- Ш**аблон XIV
 - разностной схемы XIII
- Шаг** XX
 - винтовой линии II
 - вывода XIX
 - марковского процесса XVIII
 - ньютоновский V
 - поиска XIV
 - покоординатного спуска XIV
 - работы МП-автомата XIX
 - разбиения максимальный VI
 - сетки VIII
 - спуска XIV
- Шар** I
 - замкнутый (открытый) I
 --- n -мерный V
- Шкала** сравнения I
- Штрих** Шеффера XIX
- Шум** белый XVIII
- Эвольвента** (инволюта) II
- Эволюта** II
- Эквивалентность** XIX
- Эквиваленция** I
- Эксперимент** случайный XVI
- Эксперименты** повторные независимые XVII
- Экспонента** I
 - матричная XVIII
- Экстраполяция** II
 - линейная (двухточечная) II
- Экстремаль** XV
 - включенная в поле экстремалей XV
 - задачи Лагранжа XV
- Экстремум** сильный (слабый) XV
 - функции V
 -- абсолютный (глобальный) II
 -- гладкий II
 -- локальный II
 -- острый II
 -- строгий V
 -- условный V
 --- строгий V
- Эксцентриситет** гиперболы III
 - параболы III
 - эллипса III
- Эксцесс** XVI
- Элемент** ведущий III
 - вероятности XVI
 - выборки XVII
 -- случайной XVII
 - выделенный XX
 - главный III
 - граничный XIII
 - группы образующий XIX
 - диагональный III
 - единичный IV
 - задержки XIX
 - кольца обратимый XIX
 - комплексно сопряженный I
 - конечный (КЭ) XIII
 -- комплексный XIII
 -- лагранжевый XIII
 -- мультиплексный XIII
 -- симплексный XIII

- Элемент конечный сингулярный XIII
- эрмитовый XIII
 - максимальный XIX
 - массива XIX
 - матрицы III
 - минимальный XIX
 - множества I
 - наибольший (наименьший) XIX
 - невыделенный XX
 - нейтральный I, XIX
 - левый (правый) XIX
 - неопределенный XIX
 - нулевой (нуль) IV
 - оболочки прямолинейный V
 - обратный I, IV
 - ортогональный подпространству IX
 - площади в криволинейных координатах VII
 - криволинейной поверхности VII
 - полугруппы образующий XIX
 - поля нулевой X
 - последовательности I
 - предшествующий I
 - следующий I
 - противоположный XIX
 - (симметричный) I, IV
 - разбиения XIX
 - регулярный I
 - симметризуемый I
 - симметричный (обратный, противоположный) I
 - симплекс-таблицы ведущий XX
 - собственный оператора XIII
 - операторного уравнения XIII
 - функциональной последовательности IX
- Элементы затрат постоянные XX
- несравнимые (сравнимые) XIX
 - ортогональные IX
 - связанные отношением XIX
 - бинарным XIX
- Эллипс III
- мнимый III
- Эллипсоид III
- вращения III
 - мнимый III
 - рассеивания XVI
 - трехосный III
- Эллипс равной вероятности XVI
- рассеивания XVI
- Эндоморфизм XIX
- Энтропия случайной величины дискретной (непрерывной) XVI
- двумерной XVI
- Эпиморфизм XIX
- групп XIX
 - колец XIX
- Эпитрохоида II
- Эпициклоида II
- Этап XX
- марковского процесса XVIII
 - оценивания параметров XX
 - улучшения стратегии XX
- Я**дро XIX
- гомоморфизма XIX
 - Дирихле IX
 - интегрального уравнения XIII
 - оператора IV
- Язык в алфавите XIX
- допускаемый МП-автоматом XIX
 - конечного автомата XIX
 - контекстно-зависимый XIX
 - обобщенный XIX

- Язык контекстно-свободный XIX
 -- детерминированный XIX
 - левострогий (правострогий)
 XIX
 - линейный XIX
 - неукорачивающий XIX
 - перечислимый XIX
 - порожденный грамматикой XIX
 - регулярный XIX
 - типа 0 XIX
 - универсальный XIX
 Якобиан V
 Ячейка магазина верхняя XIX
- 0-эквивалентность XIX
 C -сужение соответствия XIX
 -- строгое XIX
 (C, D) -ограничение соответствия
 XIX
 D -номер XIX
 F_k -множество XIX
 (F, X) -схема XIX
 k -слой XIX
 k -эквивалентность XIX
 l_1 -норма (l_2 -норма, l_∞ -норма) IV
 L -цепочка XX
- $LL(k)$ -грамматика XIX
 - сильная XIX
 $LL(k)$ -условие XIX
 n -ка I
 - упорядоченная XIX
 n -набор упорядоченный XIX
 n -сеть булева XIX
 p -дизъюнкция XIX
 V -проекция конечного автомата с
 выходом XIX
 Y -сцепление магазинных меток XIX
- γ -зона XVII
 ϵ -окрестность сильная (слабая) XV
 - точки I
 -- проколота V
 λ -переход XIX
 λ -правило вывода КС-грамматики
 XIX
 λ -такт работы МП-автомата XIX
 σ -аддитивность меры IX
 σ -алгебра XVIII
 - борелевская XVIII
 χ^2 -распределение XVII
 Ω -алгебра XIX
 Ω -замыкание XIX
 - подсемейства XIX
 Ω -подалгебра XIX

ПОСЛЕСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ КОМПЛЕКСА УЧЕБНИКОВ

Эта книга завершает издание комплекса учебников серии „Математика в техническом университете“, предпринятое Издательством МГТУ имени Н.Э. Баумана по инициативе ректора МГТУ имени Н.Э. Баумана Игоря Борисовича Федорова. Очередность выхода выпусков из печати не полностью соответствовала их нумерации: выпуски I, XI и XII вышли в 1996 году, выпуск VIII — в 1997 году, выпуски II, III, IV и XVI — в 1998 году, VI, XV и XVIII — в 1999 году, V, IX, X, и XX — в 2000 году, остальные — в 2001 году. Некоторые из выпусков за это время были переизданы в прежнем объеме, но с указанием нового года издания.

В работе над этим комплексом учебников принимали участие преподаватели математических кафедр университета, в основном кафедр Прикладной математики и Математического моделирования. В учебниках отражен многолетний опыт преподавания в МВТУ (МГТУ) общего курса математики и ее специальных глав для наукоемких инженерных специальностей в области машиностроения и приборостроения, а также ряда математических дисциплин, входящих в программу подготовки инженеров-математиков по специальности „Прикладная математика“.

Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана во главе с директором Татьяной Игоревной Попенченко и главным редактором Александром Николаевичем Твороговым провело большой объем работы, что позволило довести до логического конца один из наиболее крупных издательских проектов, которые приходилось выполнять вузовским издательствам. Общий объем комплекса учебников превышает 500 учетно-издательских ли-

стов. Решающая роль в осуществлении этого проекта принадлежит коллективу редакции Издательства. Тщательная и кропотливая работа высококвалифицированных редакторов и корректоров под руководством заведующей редакцией Натальи Георгиевны Ковалевской обеспечила традиционно высокий для отечественных учебников литературный и полиграфический уровень этого комплекса. Творческое взаимодействие явилось хорошей школой для авторов и редакторов серии „Математика в техническом университете“ и на протяжении пяти лет было источником подлинного интеллектуального удовлетворения результатами напряженного совместного труда. Благодаря мастерству и безупречному вкусу художника Издательства Степана Сергеевича Водчица все выпуски серии оформлены в едином строгом стиле, отвечающем содержанию учебников.

Особенность серии „Математика в техническом университете“ состоит в том, что впервые при издании достаточно большого по объему комплекса учебников предпринята попытка выдержать единые структуру и стиль изложения материала всех выпусков, связав их между собой терминологически при помощи сквозного предметного указателя. Предметный указатель ко всему комплексу учебников из 20 выпусков помещен в конце этой книги. Отвечающие указателю шрифтовые выделения в тексте выпусков позволяют читателю легко находить определения и описания нужных ему терминов и понятий, а при чтении каждого очередного параграфа читатель может по отмеченным светлым курсивом ключевым словам оценивать свою подготовленность к усвоению материала. Такая особенность построения серии характерна для современных информационных технологий формирования так называемого гипертекста и может служить основой для создания компьютерной версии этой серии. Более подробно методические особенности и структура комплекса учебников, а также советы по работе с ним изложены в обращении „К читателю“ в начале первого выпуска серии.

Редакторы серии считают своим приятным долгом поблагодарить всех наших рецензентов, взявших на себя труд прочитать рукописи и высказать свои замечания, которые были учтены в работе над серией. Мы будем признательны всем, кто пожелает высказать свои критические соображения по содержанию учебников.

Мы благодарны всем нашим авторам, вынужденным терпеливо следовать избранным стилю и структуре серии, что порой сдерживало их творческие порывы. Самым активным автором серии явился доцент кафедры Математического моделирования Анатолий Николаевич Канатников, участие которого формально отражено в составлении четырех выпусков. Но главная его заслуга состоит в разработке оригинальной компьютерной системы и ее использовании для подготовки оригинал-макетов выпусков, что существенно сократило время выхода в свет учебников и обеспечило стабильное качество их оформления. В процессе подготовки оригинал-макетов его эрудиция, глубокое знание математики и умение дать простую трактовку достаточно сложным вопросам способствовали существенному улучшению текста рукописей, так что мы считаем его соредактором серии.

Мы глубоко признательны всем сотрудникам Издательства МГТУ имени Н.Э. Баумана, благодаря которым удалось завершить работу над комплексом учебников серии „Математика в техническом университете“. Но этот комплекс не был бы написан, а если и был бы написан, то не вышел бы в свет без постоянного внимания к нему нашего ректора Игоря Борисовича Федорова. Его строгий, но доброжелательный и заботливый контроль за подготовкой выпусков серии и нескрываемое удовлетворение после выхода каждого очередного учебника служили для нас стимулом в напряженной и, надеемся, небесполезной работе.

*В.С. Зарубин,
А.П. Крищенко*

ОГЛАВЛЕНИЕ

К читателю	5
Предисловие	7
Основные обозначения	16
1. Роль математического моделирования в технике	20
1.1. Моделирование и технический прогресс	20
1.2. Основные этапы математического моделирования . .	24
1.3. Математические модели в инженерных дисциплинах	29
Вопросы и задачи	34
2. Математическая модель	35
2.1. Понятие математической модели	35
2.2. Структура математической модели	37
2.3. Свойства математических моделей	39
2.4. Структурные и функциональные модели	43
2.5. Теоретические и эмпирические модели	45
2.6. Особенности функциональных моделей	55
2.7. Иерархия математических моделей и формы их пред-	
ставления	60
Д.2.1. Введение в теорию размерностей	67
Д.2.2. Представление математической модели в безразмерной	
форме	77
Вопросы и задачи	85
3. Математические модели простейших типовых эле-	87
ментов	
3.1. Электрические двухполюсники	87
3.2. Простейшие элементы механических систем	95
3.3. Некоторые элементы тепловых систем	100
3.4. Модели элементов гидравлических систем	109
Д.3.1. Особенности пневматических систем	114
Д.3.2. Ламинарное течение вязкой жидкости в трубопроводе	120
Д.3.3. Об адекватности математических моделей типовых	
элементов	127
Вопросы и задачи	142

4. Математические модели систем из типовых элементов	143
4.1. Дуальные электрические цепи	143
4.2. Двойственность электромеханической аналогии . . .	149
4.3. Математическая модель линейного осциллятора . . .	156
4.4. Примеры математических моделей тепловых и гидравлических систем	165
4.5. Формализация построения математической модели сложной системы	175
Д.4.1. Уточнение математической модели линейного осциллятора	178
Д.4.2. О построении математических моделей механических систем	184
Вопросы и задачи	194
5. Нелинейные математические модели макроуровня	196
5.1. Причины возникновения нелинейности	196
5.2. Статические и стационарные модели	205
5.3. Некоторые нестационарные модели	219
5.4. Простейшие динамические модели	229
5.5. Положения равновесия консервативной системы . . .	240
5.6. Фазовый портрет консервативной системы	250
5.7. Математические модели некоторых диссипативных систем	264
5.8. Понятие об автоколебательных системах	270
Д.5.1. Приближенные методы анализа динамических моделей	280
Вопросы и задачи	285
6. Математические модели микроуровня	287
6.1. Модели микроуровня электрических двухполюсников	287
6.2. Одномерные модели стационарной теплопроводности	302
6.3. Математические модели процессов нестационарной теплопроводности	313
6.4. Одномерные модели гидравлических систем	325
Д.6.1. Математическая модель процесса индукционного нагрева	341
Д.6.2. Пример применения моделей микроуровня в оптимальном проектировании	360
Вопросы и задачи	371

7. Алгоритмизация математических моделей	373
7.1. Способы преобразования математических моделей к алгоритмическому виду	373
7.2. Вычислительные операции линейной алгебры	377
7.3. Алгоритмы векторно-конвейерных вычислений . . .	383
7.4. О распараллеливании матричных вычислений	388
7.5. Операции с разреженными матрицами	391
Вопросы и задачи	401
Список рекомендуемой литературы	402
Предметный указатель к XXI выпуску	406
Предметный указатель к комплексу учебников из 20 выпусков	411
Послесловие редакторов комплекса учебников	490

Учебное издание

**Математика в техническом университете
Выпуск XXI
(заключительный)**

Зарубин Владимир Степанович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
В ТЕХНИКЕ**

Редактор *Е.В. Авалова*
Художник *С.С. Водчиц*

Оригинал-макет подготовлен
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
под руководством *А.Н. Канатникова*

Подписано в печать 22.10.03. Формат 60×88 1/16.
Печать офсетная. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 31,0. Уч.-изд. л. 32,70.
Тираж 3000 экз. Заказ № 9102

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5.

Отпечатано в ГУП ППП «Типография «Наука».
121099, г. Москва, Шубинский пер., 6.

ISBN 5-7038-1435-9



9 785703 814352