МАТЕМАТИКА
В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

$$f(X) \to \underset{X \in G}{\mathrm{extr}}$$

XX

И.К. Волков, Е.А. Загоруйко

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана

Комплекс учебников из 20 выпусков

Под редакцией В. С. Зарубина и А. П. Крищенко

I. Введение в анализ
II. Дифференциальное исчисление функций одного переменного
III. Аналитическая геометрия
IV. Линейная алгебра
V. Дифференциальное исчисление функций многих переменных
VI. Интегральное исчисление функций одного переменного
VII. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля
VIII. Дифференциальные уравнения
IX. Ряды
X. Теория функций комплексного переменного
XI. Интегральные преобразования и операционное исчисление
XII. Дифференциальные уравнения математической физики
XIII. Приближенные методы математической физики
XIV. Методы оптимизации
XV. Вариационное исчисление и оптимальное управление
XVI. Теория вероятностей
XVII. Математическая статистика
XVIII. Случайные процессы
XIX. Дискретная математика
XX. Исследование операций

И.К. Волков, Е.А. Загоруйко

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Под редакцией
д-ра техн. наук, профессора В.С. Зарубина
и д-ра физ.-мат. наук, профессора А.П. Крищенко

Рекомендовано
Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебника для студентов
высших технических учебных заведений

Москва
Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана
2000

УДК 517.1(075.8)
ББК 22.18
В67

Федеральная целевая программа книгоиздания России

Рецензенты: чл.-корр. РАН Ю.Н. Павловский, проф. В.В. Шевелев

В67 **Волков И.К., Загоруйко Е.А.** *Исследование операций*: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. –436 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XX).

ISBN 5-7038-1518-5 (Вып. XX)
ISBN 5-7038-1270-4

Исследование операций аккумулирует те математические методы, которые используются для принятия обоснованных решений в различных областях человеческой деятельности. В учебной литературе эта дисциплина еще не нашла полного отражения, хотя владеть ее методами современному инжеиеру необходимо.

В книге основное внимание уделено постановке задач исследования операций, методам их решения и критериям выбора альтернатив. Рассмотрены методы линейного и целочисленного программирования, оптимизация на сетях, марковские модели принятия решений, злементы теории игр и имитационного моделирования. Значительное число примеров поможет при изучении материала.

Содержание учебника соответствует курсу лекций, который авторы читают в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Для студентов технических университетов. Может быть полезен преподавателям, аспирантам и инженерам.

Ил. 60. Табл. 76. Библиогр. 26 назв.

Выпуск книги финансировал
Московский государственный технический
университет им. Н.Э. Баумана

УДК 517.1(075.8)
ББК 22.18

ISBN 5-7038-1518-5 (Вып. XX)
ISBN 5-7038-1270-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Исследование операций, понимаемое как комплексная математическая дисциплина, занимающаяся построением, разработкой и применением математических моделей принятия оптимальных решений, является одним из наиболее интенсивно развивающихся разделов прикладной математики и имеет многочисленные приложения. Для овладения методами исследования операций необходимы знания не только в объеме базового курса высшей математики. Мы предполагаем, что читатель знаком с основными понятиями таких специальных курсов высшей математики, как теория вероятностей и математическая статистика, случайные процессы и методы оптимизации.

Ориентируясь на студентов технических вузов, инженеров и научных сотрудников прикладных специальностей, мы старались вести изложение на доступном уровне, избегая излишней формализации. Это связано еще и с тем, что некоторые разделы, входящие в исследование операций, в частности математическое программирование и теория игр, фактически представляют собой вполне самостоятельные математические дисциплины со своими объектами и методами исследований. В каждом из этих разделов используются свои специфическая терминология и обозначения, что в значительной степени затрудняет восприятие изучаемой дисциплины как единого целого.

Естественно, что в одной книге невозможно охватить все основные разделы исследования операций, и тем более все ее приложения. Кроме того, часть разделов исследования операций нашли свое отражение в других выпусках серии „Математика в техническом университете“. По замыслу авторов, данный учебник поможет в овладении прикладными методами исследования операций и явится связующим звеном между строгими математическими исследованиями, с одной стороны, и практическими задачами принятия решений — с другой.

Надеемся, что книга будет полезна не только студентам технических вузов, но и инженерам, аспирантам и научным сотрудникам прикладных специальностей.

В начале книги (после предисловия и заданий для самопроверки) помещен список основных обозначений, содержащий расшифровку часто встречающихся в тексте символов. В математической символике в основном использованы буквы латинского и греческого алфавитов, написание и произношение которых приведено после списка основных обозначений.

В конце книги приведен список рекомендуемой литературы и предметный указатель, в который входят в алфавитном порядке (по существительному в именительном падеже) все выделенные в тексте ***полужирным курсивом*** термины. Для каждого термина приводится номер страницы книги, на которой он определен и выделен полужирным курсивом, или номер выпуска серии, в котором дается его объяснение. Выделение термина *светлым курсивом* означает, что в данном параграфе он является одним из ключевых слов и читателю должно быть знакомо значение этого термина. Значение термина можно уточнить, найдя при помощи предметного указателя необходимую страницу. Ссылки на другие источники даются указанием либо номера выпуска серии, либо фамилий авторов, по которым можно определить полные выходные данные этих источников, обратившись к списку рекомендуемой литературы.

Ссылки в тексте на номера формул и рисунков набраны обычным шрифтом (например, (3.12) — двенадцатая формула в третьей главе, рис. 8.3 — третий рисунок в восьмой главе), а на разделы книги (главы и параграфы) — полужирным шрифтом (например, запись „см. **2.1**“ означает ссылку на первый параграф второй главы).

Прежде чем приступить к изучению книги, рекомендуем ответить на вопросы для самопроверки, чтобы убедиться в готовности к усвоению излагаемого материала. В конце каждого вопроса римскими цифрами обозначен номер выпуска серии, в котором изложен соответствующий материал. Последовательность вопросов для самопроверки соответствует последовательности изложения материала в учебнике.

Задания для самопроверки

1. Что понимают под **множеством, элементом множества**? Что называют: а) **объединением множеств**; б) **пересечением множеств**; в) **разностью множеств**; г) **дополнением множества**? Что такое **пустое множество, универсальное множество**? Какие множества называют: а) **конечными**; б) **счетными**; в) **несчетными**? [I]

2. Дайте определение: а) **внутренней точки множества**; б) **граничной точки множества**; в) **границы множества**. Какие множества называют: а) **открытыми**; б) **замкнутыми**; в) **ограниченными**; г) **компактными**; д) **выпуклыми**? [I], [V]

3. Дайте определение **отображения (функции)**. Что называют: а) **образом множества** X **при отображении** f; б) **прообразом множества** Y **при отображении** f? [I]

4. Что называют: а) **скалярной функцией векторного аргумента**; б) **вектор-функцией**; в) **векторной функцией векторного аргумента**; г) **координатной функцией**; д) **линейной функцией**; е) **выпуклой функцией**; ж) **квадратичной функцией**? [I], [II], [V]

5. Дайте определение **локального экстремума (максимума и минимума) скалярной функции векторного аргумента**. Сформулируйте необходимые и достаточные условия его существования. [V]

6. Сформулируйте основные свойства скалярной функции векторного аргумента, непрерывной на линейно связном компактном множестве. [V]

7. Что называют **матрицей** и что понимают под **размерами матрицы**? Какую **матрицу** называют: а) **квадратной**;

б) **единичной**; в) **нулевой** (**нуль-матрицей**); г) **симметрической**; д) **диагональной**; е) **невырожденной**; ж) **блочной**? [III]

8. Что такое **определитель** квадратной **матрицы**? Какая матрица имеет: а) **обратную матрицу**; б) **псевдообратную матрицу**? Дайте определение **ранга матрицы** и опишите способы его вычисления. Как связаны ранг матрицы и ранг **транспонированной матрицы**? [III]

9. Дайте определение **системы линейных алгебраических уравнений**. Какую систему линейных алгебраических уравнений называют **совместной**? Сформулируйте условия существования и единственности **решения системы линейных алгебраических уравнений**. [III]

10. Что понимают под **свободными** и **базисными неизвестными** системы линейных алгебраических уравнений? Опишите структуру **общего решения однородной** и **неоднородной** системы линейных алгебраических уравнений. При каких условиях однородная система линейных алгебраических уравнений имеет **нетривиальное решение**? [III]

11. Дайте определение: а) **линейного пространства**; б) **евклидова пространства**; в) **нормированного пространства**. Что называют: а) **линейной оболочкой системы векторов** линейного пространства; б) **линейно (не)зависимой системой векторов** линейного пространства; в) **базисом линейного пространства**; г) **размерностью линейного пространства**? [IV]

12. Что называют n-**кратным интегралом**? Сформулируйте условия его существования и основные свойства. [VII]

13. Что называют: а) (**случайным**) **событием**; б) **вероятностью события**; в) **условной вероятностью события**? Какие события называют **независимыми**? Что такое **полная группа событий**? [XVI]

14. Что понимают под: а) **случайной величиной**; б) **непрерывной случайной величиной**; в) **дискретной случайной величиной**; г) **случайным вектором**? Что называют

реализацией случайной величины и вероятностью реализации случайной величины? [XVI], [XVIII]

15. Что такое **плотность распределения**, **функция распределения** и **закон распределения случайной величины**? Что понимают под **совместным законом распределения** n случайных величин, под **независимыми случайными величинами**? [XVI], [XVIII]

16. В каких случаях говорят, что **случайная величина распределена**: а) **равномерно**; б) по **нормальному закону**; в) по **закону Пуассона**; г) по **биномиальному закону**? [XVI]

17. Дайте определение **математического ожидания** и **дисперсии** случайной величины, **ковариационной матрицы случайного вектора**. Что представляет собой **коэффициент корреляции** и какими свойствами он обладает? Какие случайные величины называют **некоррелированными**? [XVI], [XVIII]

18. Что называют **случайной выборкой** данной случайной величины и **реализацией случайной выборки**? Как определяют **выборочное среднее**, **выборочную дисперсию** и **выборочную ковариацию**? [XVII], [XVIII]

19. Чем различаются: а) **детерминированные** и **стохастические математические модели**; б) **априорная** и **апостериорная информация**; в) **априорные** и **апостериорные вероятности**? [XVI], [XVII], [XVIII]

20. Дайте определение: а) **случайной функции**; б) **случайного процесса**; в) **стационарного случайного процесса**; г) **процесса с независимыми приращениями**; д) **винеровского процесса**; е) **марковского процесса**. [XVIII]

21. Как связаны между собой **конечномерные** и **двумерные законы распределения** марковского процесса? В каких случаях марковский процесс называют: а) **марковским процессом с дискретными состояниями**; б) **цепью Маркова**? Что называют **шагами** (**этапами**) марковского процесса? [XVIII]

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

◀ и ▶	— начало и окончание доказательства
#	— окончание примера, замечания, теоремы без доказательства
$\approx$	— знак приближенного равенства
$\equiv$	— знак тождественного равенства
$=$	— знак равенства по определению
$\varnothing$	— пустое множество **I-1.1**
$a \in A$	— a — элемент множества A **I-1.1**
$a \notin A$	— a не принадлежит множеству A **I-1.1**
$\{a,\ b,\ c\}$	— множество, состоящее из элементов a, b, c **I-1.1**
$\{x\colon P\}$	— множество, состоящее из элементов x, обладающих свойством P **I-1.1**
$A \subset B$	— множество A является подмножеством множества B **I-1.2**
$A \setminus B$	— разность множеств A и B **I-1.4**
$A \cup B$	— объединение множеств A и B **I-1.4**
$\{a_i\}_{i=1}^{N}$	— множество из элементов a_1, a_2, ..., a_N **I-1.1**
$A \cap B$	— пересечение множеств A и B **I-1.4**
$\bigcup\limits_{i=1}^{N} A_i$	— объединение множеств A_1, A_2, ..., A_N **I-1.4**
$\bigcap\limits_{i=1}^{N} A_i$	— пересечение множеств A_1, A_2, ..., A_N **I-1.4**
$\operatorname{card} G$	— кардинальное число множества G **I-Д.2.1**
$\mathbb{R}$	— множество действительных чисел **I-1.3**
$\mathbb{N}$	— множество натуральных чисел **I-1.3**
$\mathbb{Z}$	— множество целых чисел **I-1.3**

$\mathbf{R}^n$	— (декартово) произведение n множеств действительных чисел **I-2.5**
$\alpha \Longrightarrow \beta$	— из высказывания α следует высказывание β (если α, то β) **I-1.5**
$\alpha \Longleftrightarrow \beta$	— высказывания α и β равносильны (α тогда и только тогда, когда β) **I-1.5**
$\vee$ и $\wedge$	— символы дизъюнкции ($\alpha \vee \beta$ читается: α или β) и конъюнкции ($\alpha \wedge \beta$ читается: α и β) **I-1.5**
$\vee^*$	— символ альтернативной дизъюнкции ($\alpha \vee^* \beta$ читается: только α или только β) **4.4**
$\neg\alpha$	— отрицание высказывания α (не α) **I-1.5**
$\forall$	— квантор всеобщности ($\forall x$ — для любого x) **I-1.5**
$\exists$	— квантор существования ($\exists x$ — существует такое x, что ...) **I-1.5**
$\nexists$	— отрицание квантора существования ($\nexists x \ldots$ — не существует такого x, что ...) **I-1.5**
$f\colon X \to Y$	— отображение f множества X в (на) множество Y **I-2.1**
$f(G)$	— образ множества G при отображении f **I-2.1**
$f^{-1}(Y)$	— прообраз множества Y при отображении f **I-2.1**
$\sum\limits_{k=1}^{N} a_k$	— сумма слагаемых $a_1, a_2, \ldots, a_N$ **I-2.6**
$\prod\limits_{k=1}^{N} a_k$	— произведение N сомножителей $a_1, a_2, \ldots, a_N$ **I-2.6**
$k = \overline{1, N}$	— число k принимает последовательно все значения из множества натуральных чисел от 1 до N включительно **I-2.6**
$\boldsymbol{w}$, $\lvert\boldsymbol{w}\rvert$	— геометрический вектор и его длина **III**
$M_{mn}(\mathbb{R})$	— множество числовых матриц типа $m \times n$ **III**
$M_n(\mathbb{R})$	— множество квадратных числовых матриц порядка n **III**

(a_{ij}) — матрица типа $m \times n$, составленная из элементов a_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ **III**

I_n, E — единичная матрица в $M_n(\mathbb{R})$ **III**

$\mathbf{0}$, $\mathbf{0}_n$ — нуль-вектор в $\mathbb{R}^n$ **IV**

Θ_{mn}, Θ — нулевая матрица в $M_{mn}(\mathbb{R})$ **III**

A^{T} — матрица, транспонированная к матрице A **III**

A^{-1} — матрица, обратная к матрице A **III**

$\det A$, $|A|$ — определитель квадратной матрицы A **III**

$\operatorname{Rg} A$ — ранг матрицы A **III**

$f(x) \to \min\limits_{x \in G}$ — задача минимизации функции $f(x)$ на множестве G **1.1**

$f(x) \to \max\limits_{x \in G}$ — задача максимизации функции $f(x)$ на множестве G **1.1**

$\min\limits_{x \in G} f(x)$ — минимальное значение функции $f(x)$ на множестве G **1.1**

$\min\{a, b, c\}$ и $\max\{a, b, c\}$ — наименьшее и наибольшее из чисел a, b, c **2.3**

$\min\limits_{i \in I} a_i$ и $\max\limits_{i \in I} a_i$ — наименьшее и наибольшее из чисел a_i, $i \in I$ **3.2**

$X \leqslant Y$ — вектор X не превосходит вектора Y, т.е. каждая из координат вектора X не превосходит соответствующей координаты вектора Y **2.2**

P_m, (p_{ij}^m) — матрица переходных вероятностей **1.1**

R_m, (r_{ij}^m) — матрица дохода **1.1**

$X_1 \succ X_2$ — допустимое решение X_1 является более предпочтительным, чем допустимое решение X_2 **1.2**

a_{ij}^* — ведущий элемент симплекс-таблицы **3.2**

s_k^i — событие, состоящее в том, что после i этапов система S переходит в состояние S_k **XVIII**

$\{S_k\}_{k=1}^m$ — множество возможных состояний системы S **6.1**

$\mathbf{P}[\alpha]$ — вероятность события α **XVI**

$\mathbf{P}[\alpha|\beta]$ — условная вероятность события α при условии, что произошло событие β **XVI**

$p(i)$ — вектор вероятностей состояний системы S после i этапов **6.1**

$\mathbf{M}[\xi(\omega)]$ — математическое ожидание случайной величины $\xi(\omega)$ **XVI**

$\mathbf{D}[\xi(\omega)]$ — дисперсия случайной величины $\xi(\omega)$ **XVI**

Π_{ij} — выигрыш первого игрока в игре двух участников с нулевой суммой при выборе первым и вторым игроками стратегий X_i^1 и X_j^2 соответственно **8.2**

Π_*, Π^* — нижняя и верхняя цена игры в игре двух участников с нулевой суммой **8.2**

$\mathrm{int}(x)$ — целая часть действительного числа x **4.2**

$\mathrm{frac}(x)$ — дробная часть действительного числа x **4.2**

Буквы латинского алфавита

Начертание	Произношение	Начертание	Произношение
A a A a	а	N n N n	эн
B b B b	бэ	O o O o	о
C c C c	цэ	P p P p	пэ
D d D d	дэ	Q q Q q	ку
E e E e	е	R r R r	эр
F f F f	эф	S s S s	эс
G g G g	же	T t T t	тэ
H h H h	аш	U u U u	у
I i I i	и	V v V v	вэ
J j J j	йот	W w W w	дубль-вэ
K k K k	ка	X x X x	икс
L l L l	эль	Y y Y y	игрек
M m M m	эм	Z z Z z	зэт

Представлен наиболее употребительный (но не единственный) вариант произношения (в частности, вместо „йот“ иногда говорят „жи“).

Буквы греческого алфавита

Начертание	Произношение	Начертание	Произношение	Начертание	Произношение
A α	альфа	I ι	йота	P ρ	ро
B β	бета	K $\varkappa$	каппа	Σ σ	сигма
Γ γ	гамма	Λ λ	ламбда	T τ	тау
Δ δ	дельта	M μ	ми	Υ υ	ипсилон
E ε	эпсилон	N ν	ни	Φ φ	фи
Z ζ	дзета	Ξ ξ	кси	X χ	хи
H η	эта	O o	омикрон	Ψ ψ	пси
Θ ϑ θ	тэта	Π π	пи	Ω ω	омега

Наряду с указанным произношением также говорят „лямбда“, „мю“ и „ню“.

ВВЕДЕНИЕ

Зарождение исследования операций как научной дисциплины и появление самого термина „исследование операций“ относятся к началу второй мировой войны и были обусловлены практической необходимостью наилучшей организации широкомасштабных боевых действий, а также прогнозирования их исхода при принятии командованием различных решений. Дальнейшее развитие исследования операций тесно связано с научно-технической революцией, которая сопровождается бурным развитием и резким усложнением техники; со значительным увеличением масштабов мероприятий, проводимых в различных сферах человеческой деятельности; с непропорциональным возрастанием затрат материальных и временных ресурсов на их реализацию; с широким внедрением вычислительной техники и математических методов в сфере управления.

В настоящее время методы исследования операций находят широкое применение в решении самых разных практических задач, начиная от перспективного планирования научных разработок и кончая прогнозированием развития сферы обслуживания. Это связано с тем, что любая операция, в том числе и военная, представляет собой совокупность целенаправленных действий, а исследование операций — поиск путей достижения одной или нескольких целей.

Нередко исследование операций понимают как применение математических количественных методов для обоснования решений во всех областях человеческой деятельности. При этом упускают из виду, что исследование операций как научная дисциплина находится на стыке наук, оперирующих не только количественными, но и качественными факторами. Именно пренебрежением к качественным факторам объясняется основное количество отрицательных результатов применения методов исследования операций к решению практических задач, так как содержательные и методологические аспекты в любом операционном исследовании играют ничуть не меньшую роль, чем формальные.

Огромное количество публикаций, относящихся к исследованию операций, как правило, посвящены методам и задачам этой комплексной математической дисциплины. А так как на данном этапе своего развития исследование операций не имеет четко очерченных границ и, как следствие, не имеет даже единой терминологии, то после прочтения многих монографий под названием „Исследование операций“ у того, кто не является специалистом в этой области, появляется ощущение, что он ознакомился с набором искусственно объединенных математических дисциплин и некоторыми их приложениями. Следствием этого является непонимание самой природы практических задач исследования операций, которое, в свою очередь, приводит к значительным трудностям уже математического характера. Необходимость в написании этой книги возникла еще и потому, что учебная литература по курсу „Исследование операций“ в основном представлена немногочисленными учебными пособиями по линейному программированию и теории игр.

Главной целью написания предлагаемого учебника явилось систематическое изложение элементов теории исследования операций, усвоение которых должно способствовать активному овладению ее методами при решении практических задач. Все основные понятия и методы проиллюстрированы примерами, а в конце каждой главы приведены контрольные вопросы и задачи.

Учебник не содержит библиографии по исследованию операций и ее приложениям. В списке рекомендуемой литературы указаны лишь те источники, обращение к которым поможет получить более полную информацию по отдельным вопросам курса исследования операций и в смежных разделах высшей математики.

В первой главе дано формальное определение исследования операций, введены и обсуждены основные понятия этой комплексной математической дисциплины, рассмотрены типовые постановки задач и приведены различные варианты их классификации. Дан качественный анализ различных подходов к решению задач векторной оптимизации и обсуждено понятие „принцип оптимальности". Рассмотрены основные этапы решения задач исследования операций и специфические особенности их практической реализации.

Следующие две главы посвящены изучению теоретических и прикладных аспектов линейного программирования, которое занимает особое место в исследовании операций. Для усвоения материала этих глав не требуется специальной математической подготовки.

Во второй главе обсуждается общая постановка задачи линейного программирования. Введены основные понятия и обоснована необходимость проведения анализа математических моделей задач линейного программирования на чувствительность. Значительное внимание уделено стандартной форме представления математических моделей задач линейного программирования и геометрическому методу их решения. Рассмотрены типовые задачи линейного программирования.

В третьей главе основное внимание уделено изучению алгебраического метода решения задач линейного программирования, известного как симплекс-метод. Сначала сформулированы и доказаны основные утверждения линейного программирования, на базе которых рассмотрен симплекс-метод при известном начальном допустимом базисном решении. Для иллюстраций симплекс-метода используются симплекс-таблицы, а для нахождения начального допустимого базисного решения — метод искусственных переменных. Рассмотрены элементы теории двойственности в линейном программировании и ее приложения к анализу моделей на чувствительность.

Четвертая глава посвящена изучению методов решения задач целочисленного программирования. Основное внимание уделено методу отсекающих плоскостей (метод Гомори) и методу ветвей и границ. Рассмотрены три задачи математического программирования, которые в их исходной постановке не являются задачами целочисленного программирования, но становятся ими после введения новых переменных.

В пятой главе рассмотрены различные задачи транспортного типа: транспортная задача, классическая транспортная задача, транспортная задача с промежуточными пунктами, задача о назначениях, задача выбора кратчайшего пути. Значительное внимание уделено взаимосвязям между конкретными видами задач транспортного типа и формами представления их математических моделей. Подробно рассмотрен симплексный метод решения задач транспортного типа.

В шестой главе рассмотрены приложения методов математического программирования к задачам принятия решений в условиях риска. При этом предполагается, что процесс изменения состояния изучаемой системы представляет собой марковский случайный процесс с конечным множеством возможных состояний и дискретным временем. Структура поощрений представляется матрицей доходов, элементами которой являются доход (>0) или затраты (<0), связанные с переходом системы из одного возможного состояния в другое. Матрицы переходных вероятностей и матрицы доходов зависят от возможных вариантов решений, которыми располагает „лицо, принимающее решения". Основная цель заключается в определении оптимального решения, максимизирующего ожидаемый доход на конечном или бесконечном числе этапов.

Седьмая глава посвящена анализу общих положений теории принятия решений в условиях риска и неопределенности, т.е. в условиях неполной информации, когда „лицу, принимающему решения", не противостоит мыслящий противник. Значительное внимание уделено содержательному анализу наиболее часто используемых при принятии решений в условиях риска и в условиях неопределенности скалярных критериев с последующим определением для каждого из них области не только возможного, но и наиболее целесообразного применения.

В восьмой главе изложены элементы теории принятия решений в условиях неопределенности с несколькими „лицами, принимающими решения“, значение целевой функции для каждого из которых зависит от решений, принимаемых всеми участниками. Этот раздел исследования операций известен как теория игр. Обсуждаются основные понятия, различные варианты классификации и возможные способы описания игр. Основное внимание уделено анализу методов нахождения оптимальных решений в играх двух лиц с нулевой суммой.

В последней, девятой главе учебника рассмотрены основы имитационного моделирования, которое формально не входит в исследование операций, но широко используется для решения таких важнейших ее задач, как задачи организационного управления.

В первом приложении подробно рассмотрен один из наиболее эффективных методов решения задачи о назначениях, известный в исследовании операций как венгерский метод. Во втором приложении основное внимание уделено изучению метода дискретного динамического программирования. Рассмотрены различные аспекты его практического использования в многошаговых задачах принятия решений.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

Напомним, что любая ***математическая модель*** представляет собой описание (часто приближенное) какого-либо класса явлений реального мира, выраженное с помощью математических символов.

Переходя к обсуждению основных понятий исследования операций, отметим лишь следующее. В данной книге ***исследование операций*** понимается как комплексная математическая дисциплина, занимающаяся построением, анализом и применением математических моделей принятия оптимальных (наилучших в каком-то смысле) решений. Основной ***задачей исследования операций*** является задача выбора в заданном множестве элемента, удовлетворяющего тем или иным критериям (от греческого *kritērion* — средство для суждения). При этом любой элемент множества называют ***допустимым решением***, а выбранный элемент — ***оптимальным решением***.

1.1. Постановки задач и их классификация

Построение *математической модели* любой *задачи исследования операций* всегда начинается с описания множества G *допустимых решений* и критериев оптимальности. При этом под ***критерием оптимальности*** понимают признак, на основании которого проводятся сравнительная оценка допустимых решений и выбор *оптимального решения*.

Пример 1.1. Пусть имеется четыре вида продуктов Π_k, $k = \overline{1,4}$, из которых необходимо составить паек, удовлетворяющий следующим требованиям:

1) в паек должны входить все виды продуктов;

2) содержание белков, жиров и углеводов в пайке должно быть не менее b_1, b_2 и b_3 единиц соответственно;

3) стоимость пайка не должна превосходить C денежных единиц;

4) вес пайка не должен превышать заданной величины p;

5) паек должен быть минимального объема;

6) паек должен иметь максимальную калорийность.

Рассматриваемая задача (задача формирования пищевого набора) является задачей исследования операций. Построим ее модель. Пусть x_k — количество единиц продукта Π_k в пайке и $k=\overline{1,4}$. В этом случае вектор $X = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)^{\mathrm{T}}$ полностью определяет состав пайка. Проанализировав требования 1–6, приходим к выводу, что требования 1–4 имеют характер ограничений, накладываемых на компоненты вектора X, а требования 5 и 6 — явно выраженный критериальный характер.

Для описания множества G допустимых решений для всех $k=\overline{1,4}$ считаем известным, что единица продукта Π_k содержит a_{k1} единиц белков, a_{k2} единиц жиров, a_{k3} единиц углеводов, стоит c_k денежных единиц и имеет вес p_k. В этом случае требования 1–4 приводят к системе неравенств, задающих в $\mathbb{R}^4$ множество G:

$$\begin{cases} x_k > 0, \quad k=\overline{1,4}; \\ \sum\limits_{k=1}^{4} a_{kj}x_k \geqslant b_j, \quad j=\overline{1,3}; \\ \sum\limits_{k=1}^{4} c_k x_k \leqslant C; \\ \sum\limits_{k=1}^{4} p_k x_k \leqslant p. \end{cases}$$

Следовательно, допустимое решение представляет собой четырехмерный вектор $X = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)^{\mathrm{T}}$, принадлежащий множеству G.

Для завершения построения математической модели рассматриваемой задачи исследования операций необходимо формализовать критерии оптимальности, соответствующие требованиям 5 и 6.

Если для всех $k=\overline{1,4}$ считать известным, что единица продукта Π_k имеет объем v_k и калорийность q_k, то, согласно требованиям 5 и 6, приходим к следующим критериям оптимальности:

$$\sum_{k=1}^{4} v_k x_k \to \min_{X\in G}, \qquad \sum_{k=1}^{4} q_k x_k \to \max_{X\in G}. \quad \#$$

При рассмотрении задачи о формировании пищевого пайка мы выступали как исследователи операции. По сформулированным требованиям нами была построена соответствующая математическая модель, и на следующем этапе исследований с использованием этой модели мы должны найти оптимальное решение из множества G допустимых решений. Но, как правило, принимает решение не исследователь операции, который лишь готовит информацию для принятия решения, а ***„лицо, принимающее решения“***. Именно „лицо, принимающее решения“, сформулировало требования к пищевому пайку в примере 1.1 и оно же примет окончательное решение о составе пищевого пайка.

Под „лицом, принимающим решения“, в данной книге понимается группа людей, которая, вырабатывая согласованные требования к допустимым решениям и критериям оптимальности, принимает решения. При этом нужно помнить о том, что любое решение всегда принимается в соответствии с ***информационным состоянием „лица, принимающего решения“***, т.е. в соответствии с его содержательными представлениями о возможных и целесообразных действиях в рассматриваемых условиях. В математической модели это отражается на множестве G допустимых решений и критериях оптимальности.

Поэтому математическая постановка каждой задачи исследования операций должна полностью отражать информационное состояние „лица, принимающего решения“. Заметим, что проверка адекватности самих содержательных представлений „лица, принимающего решения“, о возможных и целесообразных решениях уже выходит за рамки исследования операций.

Пример 1.2. Вернемся к задаче о составлении пищевого пайка, рассмотренной в примере 1.1. Можно представить себе ситуацию, когда по каким-то причинам у „лица, принимающего решения“, изменилось информационное состояние. Предположим, что в соответствии с новыми содержательными представлениями „лица, принимающего решения“, о возможных и целесообразных действиях из четырех видов продуктов Π_k, $k = 1, 2, 3, 4$, необходимо составить паек, удовлетворяющий следующим требованиям:

1) в паек должны входить все виды продуктов;

2) содержание белков, жиров и углеводов в пайке должно быть не менее b_1, b_2 и b_3 единиц соответственно;

3) стоимость пайка должна быть минимальной;

4) вес пайка не должен превосходить заданной величины p;

5) объем пайка не должен превосходить заданной величины v;

6) калорийность пайка должна быть не меньше заданной величины q.

Для описания множества G допустимых решений и критериев оптимальности воспользуемся обозначениями, введенными при рассмотрении примера 1.1. Проанализировав требования 1–6, приходим к выводу, что в рассматриваемом случае требования 1, 2, 4–6 имеют характер ограничений, накладываемых на компоненты вектора X, определяющего состав пайка, а требование 3 имеет явно выраженный критериальный характер. В этом случае в соответствии с требованиями 1, 2, 4–6 множество

G допустимых решений описывается системой неравенств

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{4} a_{kj}x_k \geqslant b_j, \quad j=\overline{1,3}; \\ \sum\limits_{k=1}^{4} p_k x_k \leqslant p; \\ \sum\limits_{k=1}^{4} v_k x_k \leqslant v; \\ \sum\limits_{k=1}^{4} q_k x_k \geqslant q; \\ x_k > 0, \quad k=\overline{1,4}, \end{cases}$$

а единственный критерий оптимальности в соответствии с требованием 3 имеет следующий вид:

$$\sum_{k=1}^{4} c_k x_k \to \min_{X\in G}. \quad \#$$

Примеры 1.1 и 1.2 являются наглядной иллюстрацией того, что при изменении информационного состояния „лица, принимающего решения“, нередкими являются случаи, когда некоторые ограничения, описывающие множество G допустимых решений, трансформируются в критерии оптимальности, а критерии оптимальности — в ограничения.

Следует отметить, что построение любой математической модели задачи исследования операций почти всегда связано с необходимостью удовлетворения двух, по существу, противоречивых требований: а) как можно точнее отразить изучаемые реальные явления; б) построить достаточно простую математическую модель, позволяющую решить исходную задачу и получить обозримые результаты. Именно поэтому на этапе построения математической модели необходимо тесное сотрудничество исследователя операции (математика) и „лица, принимающего решения“ (специалиста).

Для удобства дальнейших рассуждений остановимся на классификации возможных постановок задач исследования операций, которая может проводиться по различным признакам.

Классификация задач исследования операций по виду информационного состояния „лица, принимающего решения“. Если принятие решения происходит в наперед известном и не изменяющемся во времени информационном состоянии „лица, принимающего решения“, то задачу исследования операций называют ***статической***, а вся процедура принятия решения может быть реализована за один этап (шаг). Понятие статической задачи исследования операций иллюстрируется примерами 1.1 и 1.2: в каждом из них содержательные представления „лица, принимающего решения“, о возможных и целесообразных действиях при составлении пищевого пайка остаются неизменными. К классу статических задач относят также задачи исследования операций с несколькими различными, но не изменяющимися во времени информационными состояниями — ситуация, характерная для группы „лиц, принимающих решения“. В частности, если считать, что состав пищевого пайка должен удовлетворять как требованиям, сформулированным в примере 1.1 и соответствующим информационному состоянию первого „лица, принимающего решения“, так и требованиям, сформулированным в примере 1.2 и соответствующим информационному состоянию второго „лица, принимающего решения“, то мы снова приходим к статической задаче исследования операций, но уже с двумя информационными состояниями.

Если в процессе принятия решения информационное состояние „лица, принимающего решения“ изменяется во времени, то задачу исследования операций называют ***динамической***. В этом случае зачастую наиболее целесообразной является поэтапная (многошаговая) процедура принятия решения. Кроме того, возможным является представление процедуры принятия решения в виде непрерывного во времени процесса.

Для пояснения понятия динамической задачи исследования операций обратимся к классической навигационной задаче.

Пример 1.3. Предположим, что корабль движется со скоростью $\boldsymbol{v}(t)$, где t — текущий момент времени, относительно течения, скорость которого $\boldsymbol{w}$ постоянна как по величине, так и по направлению. Необходимо найти программу управления рулями корабля, при которой он достигает заданной конечной точки из заданной начальной точки за минимальное время, если $|\boldsymbol{v}(t)| \equiv v_0 = \text{const}$. Заметим, что в данном случае содержательные представления „лица, принимающего решения“, о возможных и целесообразных действиях (управление рулями) зависят от текущего момента времени t, так как от него зависит угол $\varphi(t)$ между вектором скорости корабля $\boldsymbol{v}(t)$ и вектором скорости течения $\boldsymbol{w}$. Таким образом, классическая навигационная задача относится к динамическим задачам исследования операций.

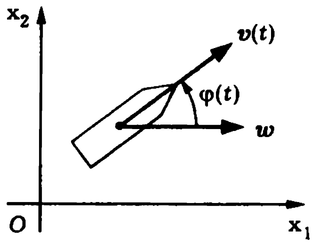


Рис. 1.1

Пусть ось Ox_1 параллельна, а ось Ox_2 перпендикулярна вектору скорости течения $\boldsymbol{w}$, $\varphi(t)$ — регулируемый угол между векторами $\boldsymbol{v}(t)$ и $\boldsymbol{w}$ (рис. 1.1). Если $(x_1(t); x_2(t))$ — координаты корабля в момент времени t, то уравнения его движения имеют следующий вид:

$$\dot{x}_1(t) = |\boldsymbol{w}| + v_0 \cos\varphi(t), \quad \dot{x}_2(t) = v_0 \sin\varphi(t).$$

Если считать, что $(x_{10}; x_{20})$ и $(x_{1*}; x_{2*})$ — начальная и конечная точки маршрута корабля, первую из которых он покидает в момент времени t_0, второй достигает в момент времени t_*, а

$$u_1(t) = \cos\varphi(t), \quad u_2(t) = \sin\varphi(t),$$

то множество G допустимых решений представляет собой совокупность вектор-функций $(u_1(t)\ u_2(t))^{\mathrm{T}}$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = |\boldsymbol{w}| + v_0 u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = v_0 u_2(t), \\ x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20}, \quad x_1(t_*) = x_{1*}, \quad x_2(t_*) = x_{2*}, \\ u_1^2(t) + u_2^2(t) \equiv 1, \quad t \in (t_0, t_*). \end{cases}$$

При этом время прибытия в конечную точку маршрута зависит от программы управления рулями корабля, т.е. $t_* = t_*(U)$, и в соответствии с условиями задачи критерий оптимальности имеет вид

$$t_* - t_0 \to \min_{U \in G}.$$

Заканчивая рассмотрение задачи, отметим, что для ее решения используют методы теории *оптимального управления*. #

Задачи исследования операций с одношаговой и многошаговой процедурами принятия решений зачастую называют соответственно ***одношаговыми*** и ***многошаговыми задачами принятия решений***.

Классификация задач исследования операций по структуре информационного состояния „лица, принимающего решения“. Информационное состояние „лица, принимающего решения“, может соответствовать либо единственному „физическому“ состоянию объекта исследований, либо множеству „физических“ состояний. В первом случае задачу исследования операций называют ***детерминированной***, во втором — ***стохастической*** (или ***задачей принятия решений в условиях риска***), если известны априорные вероятности пребывания объекта исследований в каждом из состояний, и ***неопределенной*** (или ***задачей принятия решений в условиях неопределенности***), если отсутствует информация об априорных вероятностях. Задачи принятия решений в условиях неопределенности являются предметом исследования теории игр.

Задачи исследования операций, рассмотренные в примерах 1.1–1.3, являются детерминированными.

Для пояснения понятия неопределенной задачи исследования операций вернемся к задаче о составлении пищевого пайка (см. пример 1.1). Напомним, что паек формируется из четырех видов продуктов Π_k, $k = \overline{1,4}$. В соответствии с условиями задачи величины c_k, a_{jk}, $j = \overline{1,3}$, p_k, v_k, q_k для всех $k = \overline{1,4}$ зависят от вектора параметров $\Pi = (\Pi_1\ \ \Pi_2\ \ \Pi_3\ \ \Pi_4)^{\mathrm{T}}$. Таким образом, нами рассматривалась ***параметрическая задача*** исследования операций, представляющая собой совокупность задач исследования операций, каждая из которых однозначно определяется конкретным значением вектора параметров Π. Задача о составлении пищевого пайка становится неопределенной, и ее следует отнести к задачам принятия решений в условиях неопределенности, если паек должен удовлетворять требованиям 1–6, сформулированным в примере 1.1, но конкретный набор продуктов не известен.

Принципиальное отличие параметрической задачи исследования операций от задачи принятия решений в условиях неопределенности заключается в том, что решение первой — совокупность решений всех задач исследования операций, соответствующих конкретным значениям вектора параметров, а решение второй — такое допустимое решение, которое в известной мере является желательным, как бы конкретно не реализовывалась неопределенность.

Приведем еще один пример задачи принятия решений в условиях неопределенности.

Пример 1.4. Задана матрица $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{R})$. Два игрока одновременно называют по одному числу: первый игрок называет номер строки $i = \overline{1,m}$, а второй — номер столбца $j = \overline{1,n}$. Число, стоящее на пересечении названной строки и названного столбца в матрице A, — выигрыш первого игрока, если оно больше нуля, и выигрыш второго игрока, если оно меньше нуля. Критерием оптимальности для каждого игрока является максимизация выигрыша. #

Для пояснения понятия стохастической задачи исследования операций рассмотрим задачу с садовником, к которой мы будем неоднократно возвращаться в данной книге.

Пример 1.5. Каждый год в начале сезона садовник проводит химический анализ почвы на своем участке и оценивает продуктивность сада на новый сезон как „хорошая“, „удовлетворительная“, „плохая“, кодируя ее цифрами 1, 2, 3 соответственно. Ведя наблюдения на протяжении многих лет, садовник заметил, что продуктивность сада в текущем году в основном определяется состоянием почвы в предыдущем году. Он составил матрицы вероятностей перехода почвы из i-го состояния продуктивности в j-е как без дополнительной обработки (матрица $P_1 = (p^1_{ij})$), так и с дополнительной обработкой (матрица $P_2 = (p^2_{ij})$) участка, включающей внесение минеральных удобрений и т.д.:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix},$$

где номера строк и столбцов соответствуют состояниям продуктивности почвы в текущем и следующем годах соответственно. Так, вероятность перехода продуктивности почвы из хорошего состояния в плохое без дополнительной обработки участка составляет $p^1_{13} = 0{,}3$, а с дополнительной обработкой участка — $p^2_{13} = 0{,}1$. Матрицы P_1 и P_2 являются *матрицами переходных вероятностей.*

С вероятностью перехода почвы из состояния продуктивности $i = 1, 2, 3$ в текущем году в состояние продуктивности $j = 1, 2, 3$ в следующем году непосредственно связана величина r^m_{ij}, равная доходу ($r^m_{ij} > 0$) или потерям ($r^m_{ij} \leqslant 0$) садовника в следующем году в денежных единицах при наличии ($m = 2$) или отсутствии ($m = 1$) дополнительной обработки участка. Поэтому каждой матрице переходных вероятностей $P_m = (p_{ij}^m)$ садовник поставил в соответствие матрицу $R_m = (r_{ij}^m)$, отражающую его доходы (эту матрицу называют ***матрицей дохода***). Пусть

$$R_1 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad R_2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

где элементы матрицы R_2 учитывают расходы, связанные с дополнительной обработкой участка.

Садовник планирует проработать на своем участке еще N лет и получить максимальную прибыль. Нужно найти оптимальный вариант его действий: в какие годы, если это необходимо, проводить дополнительную обработку участка? #

Анализируя задачу с садовником, можно заметить, что она является не только задачей принятия решений в условиях риска, на что указывают матрицы вероятностей перехода почвы из одного состояния продуктивности в другое, но и динамической задачей исследования операций. При этом в отличие от классической навигационной задачи (см. пример 1.3) информационное состояние „лица, принимающего решения“, т.е. садовника, изменяется во времени дискретным образом (раз в год после анализа продуктивности почвы), а сама процедура принятия решений является поэтапной.

Классификация задач исследования операций по виду критерия оптимальности. Классификация задач исследования операций может быть связана с видом используемого критерия оптимальности, который в принципе может иметь любой, в том числе и неформализуемый, вид. Так, в задаче о составлении пищевого пайка (см. примеры 1.1 и 1.2) в качестве одного из критериев оптимальности может быть и такой: паек должен обладать наилучшими вкусовыми качествами.

Критерием оптимальности может быть требование о максимизации или минимизации некоторой скалярной функции f, определенной на множестве допустимых решений и называемой ***целевой функцией***. В этом случае задачу исследования операций называют ***задачей математического программирования***. Если же критерием оптимальности является требование о максимизации или минимизации нескольких скалярных функций, то говорят о ***задаче многокритериальной (векторной) оптимизации***.

Таким образом, при построении математических моделей для принятия решений о составе пищевого пайка в примере 1.1 мы имеем дело с задачей многокритериальной оптимизации, а в примере 1.2 — с задачей математического программирования.

В математическом программировании чаще других рассматривают задачи, в которых множество G допустимых решений является подмножеством $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющим системе линейных неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Такое множество, если оно непустое и ограниченное, называют ***выпуклым многогранником***, поскольку этот класс выпуклых множеств отвечает геометрическому представлению о многогранниках в пространстве*.

Если множество допустимых решений $G \subset \mathbb{R}^n$ представляет собой выпуклый многогранник, а целевая функция f линейная, то исходную задачу называют ***задачей линейного программирования***. Если множество $G \subset \mathbb{R}^n$ является выпуклым многогранником, а целевая функция f является квадратичной, то исходную задачу называют ***задачей квадратичного программирования***. Если $G \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество, а f — выпуклая функция, то исходную задачу называют ***задачей выпуклого программирования***. Теория решения стохасти-

*См.: *Ашманов С.А.*

ческих задач линейного программирования является предметом исследований ***стохастического программирования***.

В других задачах математического программирования множество G допустимых решений может быть конечным множеством. Такие задачи относятся к ***дискретному программированию***. В них допустимые решения могут быть точками целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$ (***целочисленное программирование***) или векторами, каждая координата которых может принимать лишь два значения (***булево программирование***). В отдельных задачах элементы множества G допустимых решений могут представлять собой *перестановки* конечного числа символов и т.д.

Множество G допустимых решений может быть подмножеством некоторого функционального пространства. В этом случае получаем *задачу вариационного исчисления* или *задачу оптимального управления* (см. пример 1.3).

Особым случаем задач математического программирования являются задачи о нахождении ***максимина***:

$$\max_Y \min_Z f(Y,Z), \quad \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} \in G,$$

и ***минимакса***:

$$\min_Y \max_Z f(Y,Z), \quad \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} \in G.$$

В заключение приведенной далеко не полной классификации задач исследования операции отметим, что задачи многокритериальной оптимизации, равно как и задачи с критериями оптимальности, выражаемыми *отношениями порядка* на множестве G допустимых решений, по существу, относятся к теории игр*. Поэтому их классификация проводится по теоретико-игровым признакам.

*См.: *Гермейер Ю.Б.*

Прежде чем переходить к анализу специфических особенностей решения задач многокритериальной оптимизации, сделаем замечание, относящееся к математическим методам исследования операций.

Под ***математическими методами исследования операций*** обычно понимают математический аппарат (специально разработанный или адаптированный), предназначенный для решения задач исследования операций. Разработанность математических методов для различных классов задач исследования операций является далеко не одинаковой. В настоящее время наиболее разработана теория линейного и выпуклого программирования.

1.2. Об одном аспекте решения задач многокритериальной оптимизации

При анализе основных понятий *исследования операций* мы уже сталкивались с примерами *задач многокритериальной оптимизации*. В общем случае постановки задач многокритериальной оптимизации являются более корректными, чем, скажем, постановки задач математического программирования. Это связано с тем, что любая операция представляет собой совокупность целенаправленных действий и проведение практически любой операции, как правило, предполагает достижение не одной, а нескольких целей.

Пример 1.6. При проектировании нового технического устройства обычно преследуют несколько целей, среди которых могут быть снижение массы конструкции и повышение ее надежности, снижение стоимости изготовления, повышение технологичности и т.д. В процессе проектирования указанные цели достигаются за счет соответствующего выбора структуры и параметров конструкции, которые кодируются вектором X. Таким образом, эта задача оптимального проектирования является типичной задачей многокритериальной оптимизации. #

В общем случае математическая формулировка задачи многокритериальной оптимизации с множеством *допустимых решений* $G \subset \mathbb{R}^n$ и векторной *целевой функцией*

$$f(X) = (f_1(X) \ \dots \ f_m(X))^T$$

может быть записана так:

$$f_k(X) \to \underset{X \in G}{\text{extr}}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Любой скалярный критерий вида

$$f_j(X) \to \max_{X \in G}$$

можно заменить эквивалентным скалярным критерием

$$-f_j(X) \to \min_{X \in G}.$$

Поэтому понятно, что задачу многокритериальной оптимизации можно сформулировать следующим образом:

$$f_k(X) \to \min_{X \in G}, \quad k = \overline{1, m}, \tag{1.1}$$

или в векторной форме:

$$f(X) \to \min_{X \in G}. \tag{1.2}$$

Задачу исследования операций называют ***некорректной***, если она не имеет решения. На начальном этапе развития исследования операций некорректными считали задачи многокритериальной оптимизации, а в качестве обоснования приводились следующие соображения.

Пусть для каждого $k = \overline{1, m}$ элемент X_k множества G является решением задачи математического программирования

$$f_k(X) \to \min_{X \in G}.$$

В этом случае, согласно представлению (1.1), если

$$X_k \equiv X_0, \quad k = \overline{1, m},$$

то X_0 — решение задачи многокритериальной оптимизации (1.2). Но, как правило, $X_k \neq X_j$ при $k \neq j$. Поэтому в общем случае следует ожидать, что задача многокритериальной оптимизации (1.2) не имеет решения.

Пример 1.7. Рассмотрим простейшую задачу многокритериальной оптимизации с множеством допустимых решений

$$G = \left\{ (x_1 \;\; x_2)^{\mathrm{T}} \colon (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \leqslant 1 \right\}$$

и *критериями оптимальности*

$$f_k(X) = x_k \to \min_{X \in G}, \quad k = 1, 2.$$

Из геометрических соображений очевидно (рис. 1.2), что

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

А так как $X_1 \neq X_2$, то исходная задача не имеет решения. #

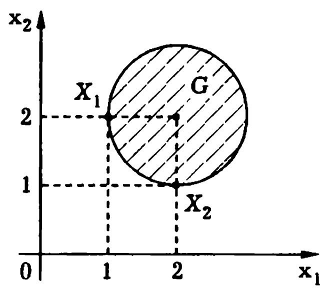


Рис. 1.2

Итак, одновременное достижение минимума по всем скалярным критериям $f_k(X)$ на одном решении X в общем случае невозможно. Выход состоит в поиске некоторого компромисса в достижении локальных целей. „Лицо, принимающее решения", должно сформулировать некоторый ***принцип компромисса*** и придерживаться его при выборе оптимального решения. Принцип компромисса должен определить свойства оптимального решения и дать ответ на главный вопрос: в каком смысле оптимальное решение лучше всех других решений? Кроме того, это оптимальное решение должно принадлежать множеству допустимых решений задачи. Число возможных принципов компромисса очень велико. Поэтому при решении многокритериальных задач возникает ряд проблем, носящих не вычислительный, а концептуальный характер.

На первый взгляд простейшим выходом из сложившейся ситуации является сведение некорректной задачи многокритериальной оптимизации (1.2) к соответствующей задаче математического программирования путем выделения из множества скалярных целевых функций $\{f_k(X)\}_{k=1}^m$ одной основной и использования остальных для формирования дополнительных ограничений, накладываемых на множество G допустимых решений (т.е. путем выделения из множества скалярных критериев одного основного критерия оптимальности и перевода остальных критериев в разряд ограничений).

Трудоемкость и проблематичность корректной реализации обсуждаемого подхода в общем случае связана как с трудностями выбора одной основной целевой функции $f_i(X)$ из множества скалярных целевых функций $\{f_k(X)\}_{k=1}^m$, так и с обоснованным назначением верхних границ $(f_{10}, \ldots, f_{i-1,0}, f_{i+1,0}, \ldots, f_{m0})$ для скалярных критериев, переводимых в ограничения:

$$f_j(X) \leqslant f_{j0}, \quad j \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m\}.$$

Перейдем к рассмотрению иных подходов к решению задач многокритериальной оптимизации. Будем говорить, что допустимое *решение* $X_1 \in G$ задачи многокритериальной оптимизации (1.2) является ***строго более предпочтительным***, чем допустимое решение $X_2 \in G$, и писать $X_1 \succ X_2$, если $f(X_1) < f(X_2)$. Последнее неравенство означает, что $f_k(X_1) \leqslant f_k(X_2)$, $k = \overline{1, m}$, причем среди этих m неравенств есть хотя бы одно строгое. Допустимые решения $X_1, X_2 \in G$ задачи многокритериальной оптимизации (1.2) будем называть ***эквивалентными решениями*** и писать $X_1 \sim X_2$, если $f(X_1) = f(X_2)$. Отметим, что:

а) в общем случае из $X_1 \sim X_2$ не следует $X_1 = X_2$;

б) если допустимое решение X_1 является строго более предпочтительным, чем допустимое решение X_2, а допустимое решение X_2 является строго более предпочтительным, чем допустимое решение X_3, то допустимое решение X_1 является строго более предпочтительным, чем допустимое решение X_3, т.е.

$$\big((X_1 \succ X_2) \wedge (X_2 \succ X_3)\big) \Longrightarrow (X_1 \succ X_3);$$

в) если X_1 и X_2 — эквивалентные решения, X_2 и X_3 — также эквивалентные решения, то X_1 и X_3 будут эквивалентными решениями, т.е.

$$\big((X_1 \sim X_2) \wedge (X_2 \sim X_3)\big) \Longrightarrow (X_1 \sim X_3).$$

Пусть теперь

$$\Omega = f(G) = \{Y \in \mathbb{R}^m \colon Y = f(X),\ X \in G\} \quad — \tag{1.3}$$

множество возможных значений векторной целевой функции f в задаче многокритериальной оптимизации (1.2), порождаемое множеством G допустимых решений. Для удобства графических иллюстраций полагаем, что $m = 2$, и произвольным образом выбираем допустимое решение $X_0 \in G$, которому соответствует значение $f(X_0) = (f_1(X_0)\ \ f_2(X_0))^{\mathrm{T}}$ целевой функции $f(X) = (f_1(X)\ \ f_2(X))$ (рис. 1.3). Пусть Ω^1 — заштрихованная на рис. 1.3 часть множества Ω и $G^1 = f^{-1}(\Omega^1)$ — соответствующее подмножество множества G

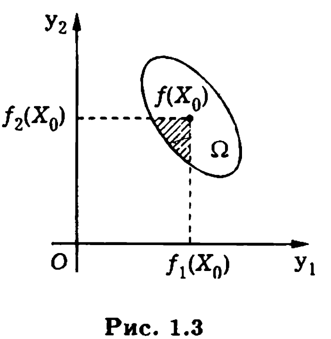


Рис. 1.3

допустимых решений. На рис. 1.3 видно, что

$$f(X^1) \leqslant f(X_0), \quad X^1 \in G^1.$$

Таким образом, любое допустимое решение из множества $G^1 \subset G$ является строго более предпочтительным, чем допустимое решение $X_0 \in G$, т.е.

$$X^1 \succ X_0, \quad X^1 \in G^1 \subset G.$$

Продолжая эти рассуждения, приходим к выводу, что из множества Ω, определяемого согласно (1.3), можно выделить подмножество Ω^*, которое обладает очень ценными свойствами:

1) для допустимых решений из множества

$$G^* = f^{-1}(\Omega^*) \subset G \tag{1.4}$$

в множестве G допустимых решений задачи многокритериальной оптимизации (1.2) уже нет строго более предпочтительных допустимых решений;

2) допустимые решения из множества G^* либо эквивалентны, либо несопоставимы в смысле строгой предпочтительности.

Множество Ω^* обычно называют ***множеством Парето*** или ***множеством компромисса***. На рис. 1.4 множество Ω^* выделено жирной линией и представляет собой дугу ACB, которая является частью границы Γ_Ω множества Ω. При перемещении точки C от точки A до точки B значения скалярного критерия f_1 увеличиваются, а значения скалярного критерия f_2 уменьшаются. Таким образом, уменьшение значений одного из скалярных критериев может быть достигнуто лишь

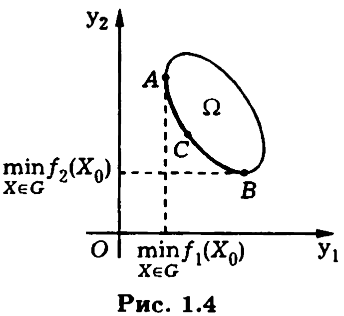


Рис. 1.4

ценой увеличения значений другого. Аналогичная картина наблюдается и в общем случае, так как любые допустимые решения $X_1, X_2 \in G^*$ либо эквивалентны, и для них $f(X_1) = f(X_2)$, либо несопоставимы, т.е. для пар координат $f_k(X_1)$, $f_k(X_2)$, $k = \overline{1, m}$, векторов $f(X_1)$, $f(X_2)$ имеют место хотя бы два из следующих трех соотношений: $f_i(X_1) > f_i(X_2)$, $f_j(X_1) = f_j(X_2)$, $f_n(X_1) < f_n(X_2)$.

Подмножество G^* множества G допустимых решений, определяемое согласно (1.4), можно считать ***обобщенным решением задачи многокритериальной оптимизации*** (1.2). Это обобщенное решение в общем случае может состоять более чем из одного элемента, и тогда *„лицо, принимающее решения“*, сталкивается с проблемой выбора одного допустимого решения из некоторого множества эквивалентных и несопоставимых решений.

Естественно, что решение задачи многокритериальной оптимизации следует искать среди элементов обобщенного решения. Чтобы выбрать один из элементов обобщенного решения, нужно использовать дополнительную информацию. Остановимся на том, каким образом можно задействовать дополнительную информацию.

Ранжировка критериев. Дополнительная информация, помогающая в выборе решения, может состоять в том, что скалярные целевые функции $f_k(X)$, $k = \overline{1, m}$, в задаче векторной оптимизации (1.1) упорядочены в соответствии с их значимостью. В этом случае номер целевой функции отражает ***ранг*** (приоритет) соответствующего ***скалярного критерия***.

Пусть Ω^* — множество Парето для задачи векторной оптимизации (1.1) и номер скалярной целевой функции $f_k(X)$, где $k = \overline{1, m}$, соответствует ее рангу. Процедуру выбора единственного решения из подмножества G^* множества G допустимых решений, определяемого согласно (1.4), начнем с использования критерия первого ранга. Полагаем

$$q_1 = \min_{X \in G^*} f_1(X), \quad G_1^* = f_1^{-1}(q_1) \cap G^*,$$

т.е. G_1^* содержит все допустимые решения из G^*, которые минимизируют в G^* целевую функцию первого ранга. Далее переходим к целевой функции второго ранга и полагаем

$$q_2 = \min_{X \in G_1^*} f_2(X), \quad G_2^* = f_2^{-1}(q_2) \cap G_1^*,$$

т.е. множество G_2^* содержит все допустимые решения из G_1^*, которые минимизируют в G_1^* целевую функцию второго ранга, и т.д. Переходим к целевой функции $(m-1)$-го ранга и полагаем

$$q_{m-1} = \min_{X \in G_{m-2}^*} f_{m-1}(X), \quad G_{m-1}^* = f_{m-1}^{-1}(q_{m-1}) \cap G_{m-2}^*,$$

т.е. множество G_{m-1}^* содержит все допустимые решения из G_{m-2}^*, которые минимизируют в G_{m-2}^* критерий $(m-1)$-го ранга. Так как $G_{m-1}^* \subset G_{m-2}^* \subset \ldots \subset G_1^* \subset G^*$, то для завершения процедуры решения задачи (1.1) многокритериальной оптимизации в условиях ранжировки критериев осталось решить *задачу математического программирования*

$$f_m(X) \to \min_{X \in G_{m-1}^*}$$

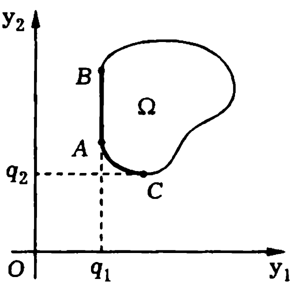


Рис. 1.5

На рис. 1.5 эта процедура иллюстрируется для случая $m = 2$. Множество Парето выделено жирной линией и состоит из отрезка AB и дуги AC. Множеству G_1^* соответствует часть множества Парето, состоящая из отрезка AB, и на втором шаге мы приходим в точку A, которая соответствует оптимальному (в смысле рассматриваемой процедуры) решению.

Из проведенных рассуждений и рис. 1.5 следует, что для реализуемости предложенной процедуры решения задачи многокритериальной оптимизации подмножеству G_{m-1}^* множества G допустимых решений должно соответствовать подмножество множества Парето, состоящее более чем из одного элемента. Так как в общем случае это условие может не выполняться (см. рис. 1.4), то на практике для решения задачи многокритериальной оптимизации чаще используют метод, известный как ***метод компромиссов***.

Предположим, что для скалярной целевой функции $f_k(X)$ назначена ***допустимая уступка*** $\delta_k > 0$, которая определяет величину допустимого отклонения значения критерия k-го ранга от его минимального значения

$$\rho_k = \min_{X \in G^*} f_k(X)$$

на множестве G^* (см. (1.4)). Очевидно, что для каждого $k = \overline{1, m-1}$ уступка δ_k определяет некоторое подмножество

$$G(\delta_k) = \{X \in G^*\colon f_k(X) < \rho_k + \delta_k\}$$

в множестве G^*. Если

$$g = \bigcap_{k=1}^{m-1} G(\delta_k) \neq \varnothing,$$

то для нахождения оптимального (в смысле рассматриваемой процедуры) решения нам осталось лишь решить задачу математического программирования:

$$f_m(X) \to \min_{X \in g}.$$

Это показано на рис. 1.6 при $m = 2$. Решение двухкритериальной задачи соответствует точке C множества Парето, выделенного жирной линией.

При $m > 2$ множество g может оказаться пустым. В этом случае уступки выбраны неудачно и необходима их коррекция.

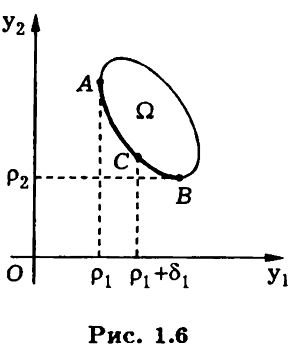


Рис. 1.6

Завершая описание этого подхода к решению задачи многокритериальной оптимизации, отметим, что его практическая реализация связана по крайней мере с двумя принципиальными трудностями:

1) необходимостью ранжирования скалярных критериев;
2) назначением уступок и их коррекцией.

Обе операции формально не определяются и выполняются экспертным путем. Обращение к экспертам неизбежно при решении задач многокритериальной оптимизации, так как необходима дополнительная информация, позволяющая ввести отношение предпочтения на подмножестве G^* множества G допустимых решений, которое соответствует множеству Парето $\Omega^* \subset \Omega$. К сожалению, процедуры ранжирования скалярных критериев и определения уступок по ним не всегда просты для экспертов. Поэтому применение рассмотренного подхода, как правило, ограничивают лишь теми ситуациями, в которых эксперты могут квалифицированно преодолеть обе отмеченные трудности.

Принцип справедливой абсолютной уступки. Согласно этому принципу, справедливым является такой компромисс, при котором суммарный абсолютный уровень повышения одного или нескольких скалярных критериев не превосходит суммарного абсолютного уровня снижения других критериев.

Рассмотрим две точки A и B множества Парето. В силу принципа справедливой абсолютной уступки при переходе от A к B изменение вектора $f(X)$ характеризуется величиной

$$\Delta_{\text{абс}} = \sum_{k=1}^{m} \Delta_k = \sum_{k=1}^{m} (f_k^B - f_k^A) = \sum_{k=1}^{m} f_k^B - \sum_{k=1}^{m} f_k^A,$$

где f_k^A, f_k^B — значения скалярных критериев в точках A и B. Если $\Delta_{\text{абс}} < 0$, то решение, соответствующее точке B, считается лучшим по сравнению с решением, соответствующим

A. Поэтому наилучшим в смысле рассматриваемого принципа будет такое решение, для которого $\Delta_{абс} \not> 0$ при переходе в любую другую точку.

Приведенные рассуждения показывают, что принцип справедливой абсолютной уступки сводится к минимизации суммы скалярных критериев на множестве G^*:

$$\sum_{k=1}^{m} f_k(X) \to \min_{X \in G^*} .$$

Недостаток этого принципа в том, что он допускает дифференциацию по отдельным критериям: низкое значение суммы $f_1 + f_2 + \ldots + f_m$ может достигаться, когда одни критерии имеют сравнительно низкий уровень, в то время как другие — сравнительно высокий уровень. Потенциальная возможность такой дифференциации характерна для задач, в которых критерии выражены в различных единицах измерения. В таких задачах критерии необходимо нормализовать, т.е. привести к единому, желательно безразмерному, масштабу измерения.

Синтез глобального критерия. Идея этого подхода очень проста: для задачи многокритериальной оптимизации (1.1) строят ***глобальный скалярный критерий*** с целевой функцией

$$F(X) = \Phi[f_1(X), \ldots, f_m(X)] = \Phi[f(X)], \tag{1.5}$$

зависящей от исходных скалярных целевых функций, таким образом, чтобы решение задачи математического программирования

$$F(X) \to \min_{X \in G}$$

являлось решением исходной задачи (1.2) в смысле рассматриваемого принципа компромисса.

Ограничимся лишь кратким обсуждением ***синтеза глобального скалярного критерия*** (от греческого sýnthesis —

соединение, сочетание, составление) для задач многокритериальной оптимизации*. Поскольку система неравенств

$$f_k(X_0) \leqslant f_k(X), \quad k=\overline{1,m}, \quad X \in G,$$

эквивалентна системе неравенств

$$l_k f_k(X_0) + c_k \leqslant l_k f_k(X) + c_k, \quad k=\overline{1,m}, \quad X \in G,$$

где $l_k > 0$, $k=\overline{1,m}$, и $c_k \in \mathbb{R}$, $k=\overline{1,m}$, могут быть выбраны произвольно, то допустимое решение X_0 является решением задачи многокритериальной оптимизации (1.1) тогда и только тогда, когда X_0 является решением задачи векторной оптимизации

$$l_k f_k(X) + c_k \to \min_{X \in G}, \quad k=\overline{1,m}.$$

Исходя из этого, рассмотрим те требования, которым должна удовлетворять функция $\Phi[f(X)]$ в (1.5).

Во-первых, ***функция*** $\Phi[f_1,\ldots,f_m]$ должна быть ***инвариантна относительно преобразования сдвига***, т.е. для любого набора действительных чисел $\{c_k\}_{k=1}^m$ и для любого допустимого решения $X \in G$ должно выполняться равенство

$$\Phi[f_1(X),\ldots,f_m(X)] = \Phi[f_1(X)+c_1,\ldots,f_m(X)+c_m]. \qquad (1.6)$$

Во-вторых, ***функция*** $\Phi[f_1(X),\ldots,f_m(X)]$ должна быть ***инвариантна по отношению к изменению масштаба*** любого скалярного критерия f_k, $k=\overline{1,m}$, т.е. для любого набора действительных положительных чисел $\{l_k\}_{k=1}^m$ и для любого допустимого решения $X \in G$ должно выполняться равенство

$$\Phi[f_1(X),\ldots,f_m(X)] = \Phi[l_1 f_1(X),\ldots,l_m f_m(X)]. \qquad (1.7)$$

*Подробности по проблеме синтеза глобального скалярного критерия можно найти в специальной литературе. См., например: *Вентцель Е.С.*, *Гермейер Ю.Б.* или *Растригин Л.А.*, а также: Теория прогнозирования и принятия решений / Под ред. *С.А. Саркисяна*.

Сформулированные требования означают, что, каков бы ни был набор действительных чисел c_k, $k = \overline{1, m}$, набор действительных положительных чисел l_k, $k = \overline{1, m}$ и допустимое решение $X \in G$, верно равенство

$$\Phi[f_1(X), \ldots, f_m(X)] = \Phi[l_1 f_1(X) + c_1, \ldots, l_m f_1(X) + c_m]. \quad (1.8)$$

Выполнение требований (1.6), (1.7) или эквивалентного им требования (1.8), накладываемых на функцию $\Phi[f(X)]$ при синтезе глобального скалярного критерия, определяемого согласно (1.5), может обеспечиваться различными способами. В частности, функция

$$F(X) = \sum_{k=1}^{m} l_k \mathring{f}_k(X), \quad (1.9)$$

где

$$\mathring{f}_k(X) = \frac{f_k(X) - \min\limits_{X \in G^*} f_k(X)}{\max\limits_{X \in G^*} f_k(X) - \min\limits_{X \in G^*} f_k(X)},$$

отвечает требованиям (1.6), (1.7). Кроме того, эта функция учитывает и требование нормализации критериев, так как вместо абсолютных значений скалярных критериев рассматриваются безразмерные величины их относительных отклонений от минимальных значений. Критерий (1.9) называют ***нормированным скалярным критерием***.

В специальной литературе рассматривают другой вид нормированного скалярного критерия, в котором учтена важность отдельных составляющих:

$$F(X) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \mathring{f}_k(X), \quad (1.10)$$

где λ_k, $k = \overline{1, m}$, — некоторые параметры, для которых

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1, \quad 0 \leqslant \lambda_k \leqslant 1, \quad k = \overline{1, m}. \quad (1.11)$$

Эти параметры называют ***весовыми коэффициентами***. Весовые коэффициенты можно определять различными способами, но любой подход в конечном счете сводится к использованию экспертных оценок. Отметим, что для эксперта задача определения весовых коэффициентов ничуть не проще задачи ранжирования скалярных критериев, так как в данном случае приоритет каждого скалярного критерия он должен выразить количественно.

Вопросы и задачи

1.1. Что понимают под исследованием операций?

1.2. Сформулируйте основную задачу исследования операций.

1.3. Существует ли связь между критерием оптимальности и принципом оптимальности? Ответ аргументируйте.

1.4. В чем заключается принципиальное различие статических и динамических задач исследования операций?

1.5. Приведите классификацию задач исследования операций по структуре информационного состояния „лица, принимающего решения".

1.6. Какую задачу исследования операций называют параметрической и в чем ее принципиальное отличие от задачи принятия решений в условиях неопределенности?

1.7. Приведите классификацию задач исследования операций по виду критерия оптимальности.

1.8. Какая существует связь между задачами математического программирования и векторной оптимизации?

1.9. Докажите свойства транзитивности предпочтения и транзитивности эквивалентности.

1.10. Что называют множеством Парето и почему его часто называют также множеством компромисса?

1.11. В чем заключается основная идея подхода к решению задач многокритериальной оптимизации, связанного с ранжированием скалярных критериев? Какие достаточные условия реализуемости этого подхода Вы знаете?

1.12. В каких ситуациях для решения задач многокритериальной оптимизации используют метод компромиссов?

1.13. Сформулируйте требования, которым должен удовлетворять глобальный скалярный критерий задачи векторной оптимизации, и приведите их обоснование.

1.14. Докажите эквивалентность требований (1.6), (1.7) и (1.8), предъявляемых к глобальному скалярному критерию задачи векторной оптимизации.

1.15. Изложите общую идею синтеза глобального скалярного критерия для задачи векторной оптимизации.

1.16. Какие можно предложить принципы оптимальности для задач многокритериальной оптимизации?

1.17. В примере 1.7 определите множество Парето Ω^* и соответствующее ему подмножество G^* множества G допустимых решений.

Ответ:

$$\Omega^* = \left\{ (y_1 \;\; y_2)^{\mathrm{T}} \colon y_2 = 2 - \sqrt{1-(y_1-2)^2},\ 1 \leqslant y_1 \leqslant 2 \right\},$$

$$G^* = \left\{ (x_1 \;\; x_2)^{\mathrm{T}} \colon x_2 = 2 - \sqrt{1-(x_1-2)^2},\ 1 \leqslant x_1 \leqslant 2 \right\}.$$

1.18. Пусть в задаче (1.1) многокритериальной оптимизации $m = 2$, $n = 2$ и $f_1(X) = x_2/(x_1+x_2)$, $f_2(X) = x_1 + x_2$,

$$G = \left\{ (x_1 \;\; x_2)^{\mathrm{T}} \colon x_2 \geqslant \alpha x_1,\ x_2 \leqslant \beta x_1,\ 0 \leqslant x_1 \leqslant d \right\},$$

где $d > 0$ и $0 < \alpha < \beta$. Является ли рассматриваемая задача корректной? Если да, то найдите оптимальное решение $X_0 \in G$.

Ответ: $X_0 = (0\ \ 0)^{\mathrm{T}}$.

Указание: проанализируйте рис. 1.7 и 1.8.

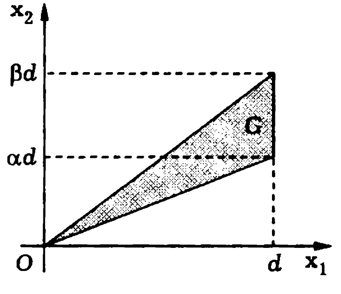


Рис. 1.7

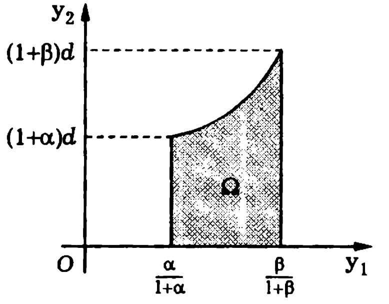


Рис. 1.8

2. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Линейное программирование занимает особое место в *исследовании операций*. Теоретические разработки, опыт практической реализации и анализ результатов применения методов линейного программирования привели к значительным успехам в решении широкого круга практически важных задач, относящихся к таким сферам человеческой деятельности, как промышленное производство, военное дело, сельское хозяйство, экономика, транспорт, здравоохранение. Кроме того, линейное программирование послужило основой для разработки других математических методов исследования операций, например *целочисленного* и *стохастического программирования*.

2.1. Постановка общей задачи линейного программирования и ее анализ

В соответствии с классификацией *задач исследования операций* (см. **1.1**), если множество *допустимых решений* $G \subset \mathbb{R}^n$ — *выпуклый многогранник*, а *критерий оптимальности* — скалярная линейная *целевая функция*, определенная на G, то мы имеем дело с *задачей линейного программирования*. Теория этих задач составляет предмет исследований ***линейного программирования***, а их примером может служить задача о составлении пищевого пайка (см. пример 1.2).

Говоря о задаче линейного программирования, мы фактически имеем в виду не саму задачу исследования операций, а ее математическую модель, обладающую указанными специфическими свойствами. Отметим, что для решения одной и той же задачи исследования операций могут быть использованы разные математические модели.

По виду *информационного состояния „лица, принимающего решения“*, задачи линейного программирования являются *статическими задачами* исследования операций, а соответствующие *процедуры принятия решений* — *одношаговыми*. По структуре информационного состояния „лица, принимающего решения“, задачи линейного программирования являются *детерминированными параметрическими задачами* исследования операций.

Задача линейного программирования имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} c_k x_k \to \max; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \leqslant b_i, \ i \in I_1; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i, \ i \in I_2; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \geqslant b_i, \ i \in I_3; \\ x_k \geqslant 0, \ k = \overline{1, n}, \end{cases} \tag{2.1}$$

где a_{ik}, c_k, b_i — известные числовые параметры, а множества I_1, I_2, I_3 попарно не пересекаются и $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = \{1, \ldots, m\}$. Неизвестные x_k, $k = \overline{1, n}$, в задаче (2.1), представляющие собой координаты вектора $X = (x_1 \ x_2 \ \ldots \ x_n)^{\mathrm{T}}$, называют ***управляемыми переменными***, или ***переменными модели***.

Рассмотрим пример задачи исследования операций, приводящей к задаче линейного программирования.

Пример 2.1. Небольшая фабрика производит два вида лака для покрытия деревянных поверхностей при внутренних и наружных работах. Для производства лаков используются два исходных продукта — A и B. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов определяются емкостями, имеющимися на фабрике, и составляют 6 и 8 т соответственно. При производстве 1 т лака для внутренних работ расходуется 1 т продукта A и 2 т продукта B, а при производстве 1 т лака для внешних работ расходуется 2 т продукта A и 1 т продукта B.

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на лак для наружных работ не превышает 2 т. Доход от реализации (в условных денежных единицах) 1 т лака для внутренних работ равен 3, а доход от реализации 1 т лака для внешних работ — 2. Необходимо выяснить, какое количество лака каждого вида должна производить фабрика, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

Суть рассматриваемой задачи исследования операций можно сформулировать следующим образом. Для фабрики требуется определить объемы производства каждого из лаков, максимизирующие доход от реализации продукции, с учетом ограничений на спрос и расход исходных продуктов A и B.

Так как нужно определить объемы производства каждого вида лака, то управляемыми переменными являются: x_1 — суточный объем производства лака для внутренних работ (в тоннах); x_2 — суточный объем производства лака для внешних работ (в тоннах). Таким образом, $n = 2$ в (2.1).

Суточный расход каждого из исходных продуктов A и B для производства лаков не может превосходить максимально возможного суточного запаса этого продукта, т.е. $x_1 + 2x_2 \leqslant 6$ (для продукта A) и $2x_1 + x_2 \leqslant 8$ (для продукта B).

Ограничение на величину суточного спроса на лак для наружных работ имеет вид $x_2 \leqslant 2$. А так как объемы производства продукции не могут быть отрицательными, то необходимо ввести ограничения на знак управляемых переменных: $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$. Таким образом, в задаче (2.1) $m = 3$, $I_1 = \{1,2,3\}$, $I_2 = I_3 = \varnothing$.

В предположении, что объемы сбыта каждого вида лака не зависят друг от друга, общий доход f равен сумме дохода от продажи лака для внутренних работ и дохода от продажи лака для наружных работ. Таким образом, $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$ (в условных денежных единицах) и *математическая модель* рассматриваемой задачи исследования операций может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \to \max; \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 6, \quad 2x_1 + x_2 \leqslant 8, \quad x_2 \leqslant 2, \quad \# \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Задачи линейного программирования во многих случаях оказываются ***задачами распределительного типа***, суть которых заключается в следующем. Пусть рассматриваемая система характеризуется наличием n видов производственной деятельности, для осуществления которых имеются различные ресурсы с номерами $i = \overline{1, m}$. Возможный объем потребления i-го ресурса ограничен неотрицательной величиной b_i, а его расход для производства единицы продукта k-го вида производственной деятельности равен a_{ik}, где $k = \overline{1, n}$. В свою очередь, единица продукта k-го вида производственной деятельности характеризуется величиной c_k, называемой ***удельной прибылью***. Необходимо определить объемы x_k, $k = \overline{1, n}$, производственной деятельности каждого вида, обеспечивающие максимальный суммарный доход от производственной деятельности системы в целом без нарушения ограничений, накладываемых на использование ресурсов. В общем случае задача распределительного типа имеет вид

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} c_k x_k \to \max; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \leqslant b_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ x_k \geqslant 0, \quad k = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Чтобы задача исследования операций могла быть представлена как задача линейного программирования, необходимо выполнение трех условий: 1) пропорциональности; 2) аддитивности; 3) неотрицательности. Заметим, что эти условия имели место при построении задач (2.2), (2.3).

В терминах задач распределительного типа пропорциональность означает, что затраты ресурсов на любой вид производственной деятельности, а также вклад этого вида производственной деятельности в суммарный доход прямо пропорциональны его уровню (объему) производства. Аддитивность указывает на то, что общий объем ресурсов, потребляемый всеми видами производственной деятельности, равен сумме затрат ресурсов на отдельные виды производственной деятельности, а общий доход от производственной деятельности равен сумме доходов от каждого вида производственной деятельности.

Неотрицательность означает, что ни одному из видов производственной деятельности не может быть приписан отрицательный объем производства. Для большинства систем, встречающихся на практике, это допущение является следствием реальных условий их функционирования. Возможны ситуации, когда некоторое управляемое переменное x_k может принимать и отрицательные значения. В этом случае говорят о ***неограниченном в знаке переменном модели***, и используют представление этого переменного в виде разности двух неотрицательных управляемых переменных:

$$x_k = x'_k - x''_k, \quad x'_k \geqslant 0, \quad x''_k \geqslant 0.$$

На практике допущения о пропорциональности и аддитивности при построении математических моделей задач исследования операций не так часто соответствуют объективной реальности, а их принятие фактически означает аппроксимацию нелинейной модели линейной.

Продолжим рассмотрение частной задачи исследования операций, начатое в примере 2.1, и воспользуемся ***геометрическим методом*** ее решения. Основой этого метода является геометрическое (графическое) представление множества допустимых решений и целевой функции, которое, например, удобно в задаче с двумя управляемыми переменными.

Пример 2.2. Математическая модель (2.2) позволяет решить графически исходную задачу об определении оптимальных объемов производства лаков каждого вида с учетом ограничений на спрос и расход исходных продуктов.

Первый этап графического решения заключается в геометрическом представлении множества G допустимых решений. Искомое множество допустимых решений, согласно (2.2), изображено на рис. 2.1. Стрелками указано, с какой стороны той или иной прямой выполняется соответствующее ограничение из (2.2).

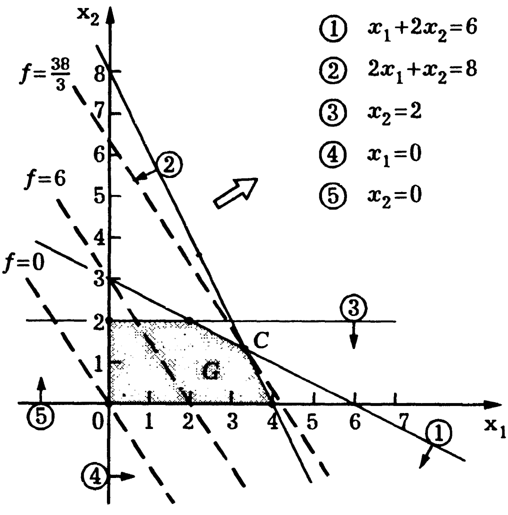


Рис. 2.1

Второй этап графического решения заключается в определении направления возрастания целевой функции $f(x_1,x_2) = 3x_1 + 2x_2$.

При произвольном фиксированном значении $f_0 \in \mathbb{R}$ уравнение $f(x_1,x_2) = f_0$, которое может быть представлено в виде $x_2 = -1{,}5x_1 + 0{,}5f_0$, определяет на плоскости x_1Ox_2 прямую, являющуюся линией уровня целевой функции. Для определения направления возрастания целевой функции (на рис. 2.1 оно обозначено знаком ⇨) достаточно графически изобразить линии уровня $f(x_1, x_2) = f_{01}$ и $f(x_1, x_2) = f_{02}$ при $f_{01} < f_{02}$ (на рис. 2.1 $f_{01} = 0$ и $f_{02} = 6$). Чтобы найти оптимальное решение, следует перемещать линию уровня в направлении возрастания целевой функции до тех пор, пока она целиком не переместится в область недопустимых решений $\mathbb{R}^2 \setminus G$.

На рис. 2.1 видно, что максимальное значение целевой функции достигается в вершине C многоугольника, являющегося границей Γ_G множества G допустимых решений. А так как C — точка пересечения двух прямых, задаваемых уравнениями $x_1 + 2x_2 = 6$ и $2x_1 + x_2 = 8$, то ее координаты x_1^* и x_2^* удовлетворяют системе этих линейных алгебраических уравнений. Следовательно, $x_1^* = 10/3$ и $x_2^* = 4/3$. Полученный результат означает, что суточный объем (в тоннах) производства лака для внутренних работ должен быть равен 10/3, а лака для наружных работ — 4/3, т.е. оптимальное решение $X^* = (10/3 \;\; 4/3)^{\mathrm{T}}$. В этом случае доход от общего производства лака будет максимальным и равным (в условных денежных единицах) $f^* = 3 \cdot 10/3 + 2 \cdot 4/3 = 38/3$.

В рассматриваемом случае удельная прибыль от производства лака каждого вида $c_1 = 3$ и $c_2 = 2$ определяется доходами от реализации, которые по неконтролируемым причинам могут колебаться в различных пределах. А так как суточный доход от производства лаков

$$f(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2,$$

то *„лицу, принимающему решения“*, необходимо знать диапазоны допустимых изменений удельных прибылей, не приводящих к новым оптимальным решениям. Из рис. 2.1 следует, что для любых положительных значений c_1 и c_2, удовлетворяющих условию $0{,}5 \leqslant \dfrac{c_1}{c_2} \leqslant 2$, оптимальным является решение

$X^* = (10/3 \;\; 4/3)^{\mathrm{T}}$. Во всех остальных случаях оптимальное решение будет отличаться от найденного. В частности, если $f(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2$, то оптимальным является решение $(4 \;\; 0)^{\mathrm{T}}$. При $\frac{c_1}{c_2} = 0{,}5$ и $\frac{c_1}{c_2} = 2$ любая точка соответствующей стороны многоугольника Γ_G, отличная от точки C, определяет оптимальное решение, отличное от найденного оптимального решения X^*. #

„Лицу, принимающему решения“, полезно знать и о том, как повлияют на оптимальное решение изменение спроса на выпускаемую продукцию и увеличение или уменьшение запасов исходных продуктов. Исследования, позволяющие получить эту информацию в совокупности с изучением зависимости оптимального решения от параметров целевой функции, представляют собой анализ на чувствительность математической модели (2.2) рассматриваемой задачи исследования операций.

Для удобства дальнейших рассуждений обратимся к задаче линейного программирования (2.3) распределительного типа, предполагая, что непустое множество G допустимых решений ограничено.

Пусть $X^* = (X_1^* \; \ldots \; X_n^*)^{\mathrm{T}}$ — оптимальное решение рассматриваемой задачи линейного программирования распределительного типа. Ограничение

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \leqslant b_i, \quad i \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, m\}, \tag{2.4}$$

в задаче (2.3) называют ***активным***, если

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k^* = b_i,$$

и ***пассивным*** в противном случае. Если некоторое ограничение является активным, то соответствующий ресурс называют

дефицитным ресурсом, так как при реализации оптимального решения он используется полностью. Ресурс, соответствующий неактивному ограничению, следует отнести к ***недефицитным ресурсам*** (недефицитные ресурсы имеются в некотором избытке). Графическое решение задачи линейного программирования, рассмотренной в примере 2.2, показывает, что оптимальному решению всегда можно поставить в соответствие хотя бы одну вершину многоугольника, изображающего множество G допустимых решений. Такую вершину будем называть ***оптимальной вершиной***. Через оптимальную вершину C (см. рис. 2.1) проходят две прямые $x_1 + 2x_2 = 6$ и $2x_1 + x_2 = 8$. Поэтому активными являются ограничения на суточные запасы исходных продуктов A и B.

При анализе модели на чувствительность по правым частям ограничений (2.4) определяются: а) предельно допустимое увеличение запаса дефицитного ресурса, позволяющее получить новое оптимальное решение, которое в смысле значения целевой функции является более предпочтительным, чем старое; б) предельно допустимое снижение запаса недефицитного ресурса, не изменяющее найденного ранее оптимального решения. Ясно, что анализ влияния на оптимальное решение процесса увеличения запаса недефицитного ресурса не имеет смысла. Заметим, что анализ влияния процесса сокращения запасов дефицитного ресурса на оптимальное решение часто проводится на практике, если возможна недопоставка дефицитного ресурса. Но сокращение запаса дефицитного ресурса не может улучшить (в смысле значения целевой функции) оптимальное решение. Поясним сказанное примером.

Пример 2.3. Вернемся к задаче линейного программирования, рассмотренной в примерах 2.1 и 2.2. В изначальной постановке, отраженной в математической модели (2.2), объем потребления первого дефицитного ресурса (исходный продукт A) ограничен величиной $b_1 = 6$. На рис. 2.2 видно, что при увеличении запаса b_1 этого дефицитного ресурса прямая,

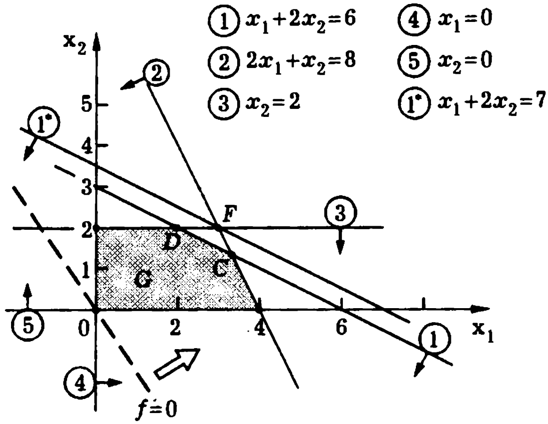


Рис. 2.2

определяемая уравнением $x_1 + 2x_2 = b_1$, начинает перемещаться параллельно самой себе. До момента ее прохождения через точку F при $b_1 = 7$ этому процессу соответствуют перемещение оптимальной вершины C вдоль прямой, заданной уравнением $2x_1 + x_2 = 8$, в направлении точки F и увеличение прибыли (значения целевой функции) при оптимальном решении. При $b_1 > 7$ анализируемый ресурс уже не является дефицитным и дальнейшее увеличение его запаса теряет смысл. Заметим, что при $b_1 = 7$ оптимальное решение $X^* = (3\ \ 2)^{\mathrm{T}}$ соответствует значению целевой функции $f^* = 13$ и наряду с уже имеющимся активным ограничением $2x_1 + x_2 \leqslant 8$ появляется еще одно активное ограничение: $x_2 \leqslant 2$.

Аналогичный анализ может быть проведен и по отношению ко второму дефицитному ресурсу (исходный продукт B), объем потребления которого ограничен величиной $b_2 = 8$. На рис. 2.3 видно, что увеличение запаса b_2 исходного продукта B имеет смысл до величины $b_2 = 12$, при котором оптимальное решение $X^* = (6\ \ 0)^{\mathrm{T}}$ соответствует значению целевой функции $f^* = 18$.

При наличии ограничений на затраты, связанные с созданием дополнительных запасов исходных продуктов A и B, „лицу, принимающему решения“, важно знать, какому ресур-

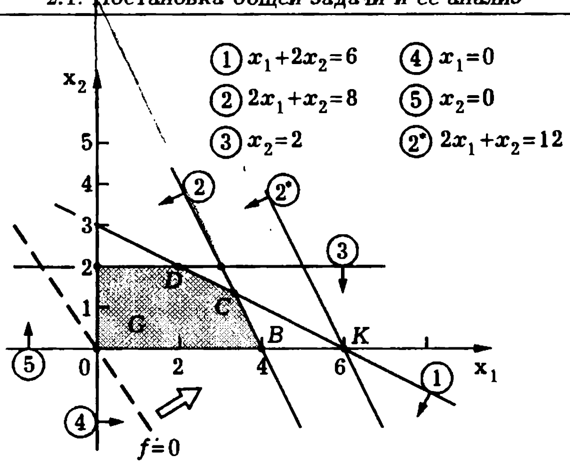


Рис. 2.3

су следует отдать предпочтение. Для этих целей используют дополнительную характеристику i-го дефицитного ресурса — ***ценность дополнительной единицы*** i-го ***ресурса***, которая определяется как отношение максимального приращения целевой функции к максимально допустимому приращению объема i-го ресурса.

В рассматриваемом случае ценность дополнительной единицы первого ресурса (продукта A)

$$y_A = \frac{13 - \frac{38}{3}}{7 - 6} = \frac{1}{3},$$

а второго ресурса (продукта B)

$$y_B = \frac{18 - \frac{38}{3}}{12 - 8} = \frac{4}{3}.$$

Полученные результаты свидетельствуют о том, что при наличии средств дополнительные вложения в первую очередь следует направить на увеличение объема продукта B, а лишь затем на увеличение объема продукта A.

Завершая решение задачи об определении оптимальных объемов производства различных видов лака, рассмотрим вопрос о влиянии на оптимальное решение правой части неактивного ограничения $x_2 \leqslant 2$. Это ограничение отражает предельный уровень спроса на лак для наружных работ. Проанализировав рис. 2.1, можно утверждать, что при неизменности остальных ограничений, входящих в математическую модель (2.2), уменьшение спроса на лак для наружных работ до величины 4/3 не может влиять на оптимальное решение $X^* = (10/3 \;\; 4/3)^{\mathrm{T}}$ (см. пример 2.2).

2.2. Формы записи задач линейного программирования

В дальнейших рассуждениях будем говорить, что ***задача линейного программирования*** представлена ***в стандартной форме***, если она имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{N} \gamma_k y_k \to \max; \\ \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_{ik} y_k = \beta_i, \quad i = \overline{1, L}; \\ y_k \geqslant 0, \; k = \overline{1, N}, \end{cases} \tag{2.5}$$

где система линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_{ik} y_k = \beta_i, \quad i = \overline{1, L}, \tag{2.6}$$

определяющая множество Q *допустимых решений*, является ***базисной***, т.е. число уравнений этой системы равно рангу ее матрицы. Таким образом, в (2.5) имеем $L \leqslant N$. А так как при $L = N$ система (2.6) имеет единственное решение и множество

Q не может содержать больше одного элемента, то в общем случае можно считать, что

$$L < N. \tag{2.7}$$

Сравнивая задачи (2.1) и (2.5), видим, что любая задача линейного программирования может быть представлена в стандартной форме, если все ограничения типа неравенства, за исключением ограничений на знаки *переменных модели*, записать в виде равенств. Ограничение типа неравенства можно записать как ограничение типа равенства путем введения нового неотрицательного переменного. Если ограничение типа неравенства имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_k \leqslant b_i,$$

то с помощью дополнительного переменного $y \geqslant 0$ его можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_k + y = b_i.$$

Аналогично ограничение вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_k \geqslant b_i$$

можно записать следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_k - y = b_i.$$

Для обоснования высказанного утверждения обратимся к математической модели (2.1) и проведем ее анализ, начав с системы ограничений, определяющих множество допустимых решений G.

Пусть для определенности в (2.1) $I_1 = \{1, 2, \ldots, m_1\}$, $I_3 = \{m_1+1, m_1+2, \ldots, m_2\}$, $I_2 = \{m_2+1, m_2+2, \ldots, m\}$. Полагаем $y_k = x_k$, $k = \overline{1, n}$. Если $i \in I_1$, то вводим новое *управляемое переменное*:

$$y_{n+i} = b_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k \geqslant 0.$$

Если же $i \in I_3$, то

$$y_{n+i} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k - b_i \geqslant 0.$$

Таким образом, $N = n + m_2$ в (2.5). Если $i \in I_1$, то $\beta_i = b_i$ и

$$\alpha_{ik} = \begin{cases} a_{ik}, & k = \overline{1, n}; \\ 1, & k = n+i; \\ 0, & k > n,\ k \neq n+i; \end{cases}$$

если $i \in I_2$, то $\beta_i = b_i$ и

$$\alpha_{ik} = \begin{cases} a_{ik}, & k = \overline{1, n}; \\ 0, & k = \overline{n+1, N}; \end{cases}$$

если $i \in I_3$, то $\beta_i = -b_i$ и

$$\alpha_{ik} = \begin{cases} -a_{ik}, & k = \overline{1, n}; \\ 1, & k = n+i; \\ 0, & k > n,\ k \neq n+i. \end{cases}$$

Если среди ограничений в (2.1) нет линейно зависимых, то $L = m$. Если в (2.1) *целевая функция* минимизируется, то

$$\gamma_k = \begin{cases} -c_k, & k = \overline{1, n}; \\ 0, & k = \overline{n+1, N}; \end{cases}$$

если в (2.1) целевая функция максимизируется, то

$$\gamma_k = \begin{cases} c_k, & k = \overline{1, n}; \\ 0, & k = \overline{n+1, N}. \end{cases}$$

Пример 2.4. Чтобы задачу линейного программирования (2.2), рассмотренную в примерах 2.1–2.3, представить в стандартной форме, полагаем $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = 6 - x_1 - 2x_2$, $y_4 = 8 - 2x_1 - x_2$, $y_5 = 2 - x_2$. В этом случае получаем

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 \to \max; \\ y_1 + 2y_2 + y_3 = 6, \quad 2y_1 + y_2 + y_4 = 8, \quad y_2 + y_5 = 2, \\ y_k \geqslant 0, \ k = \overline{1, 5}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Таким образом, $N = 5$ и $L = 3$, в чем нетрудно убедиться. Заметим, что исходная задача (2.2) может быть решена геометрическим методом, а для ее записи в стандартной форме верно равенство $N - L = 2$. #

Понятно, что задача (2.5) — это частный случай задачи линейного программирования вида (2.1), в котором нет ограничений типа неравенства. Но иногда удобно сделать наоборот: ограничения типа равенства преобразовать в неравенства. Рассмотрим приемы такого преобразования на примере задачи (2.5) линейного программирования в стандартной форме.

В задаче (2.5) система линейных алгебраических уравнений (2.6) является базисной, в этой системе $N - L$ неизвестных являются свободными, а L — базисными [III]. Обозначим свободные неизвестные (свободные переменные) через $x_1, \ldots, x_n$, где $n = N - L$, а базисные — через $x_{n+1}, \ldots, x_N$. Запишем систему (2.6) в следующем виде:

$$\alpha_{i,n+1}x_{n+i} + \ldots + \alpha_{iN}x_N = \beta_i - \alpha_{i1}x_1 - \ldots - \alpha_{in}x_n, \quad i = \overline{1, L}.$$

Вводя матричные обозначения

$$D_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{1,n+1} & \ldots & \alpha_{1N} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{L,n+1} & \ldots & \alpha_{LN} \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{L,1} & \ldots & \alpha_{Ln} \end{pmatrix},$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_L \end{pmatrix},$$

приходим к следующему представлению системы линейных алгебраических уравнений:

$$D_1X_1 = \boldsymbol{\beta} - D_2X_2.$$

Так как матрица D_1 является квадратной порядка L и невырождена (она соответствует базисному минору матрицы системы), то имеет обратную матрицу D_1^{-1}. Поэтому

$$X_1 = -D_1^{-1}D_2X_2 + D_1^{-1}\boldsymbol{\beta},$$

что можно записать следующим образом:

$$x_{n+i} = \sum_{k=1}^{n} g_{ik}x_k + q_i, \quad i = \overline{1, L}, \tag{2.9}$$

где g_{ik} — элементы матрицы $-D_1^{-1}D_2$, а q_i — элементы матрицы-столбца $D_1^{-1}\boldsymbol{\beta}$.

Возвращаясь к задаче (2.5), заметим, что ограничения типа равенства в системе (2.6) можно заменить эквивалентными ограничениями типа неравенства. Так как $x_{n+i} \geqslant 0$, $i = \overline{1, L}$, то из (2.9) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} g_{ik}x_k + q_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1, L},$$

Итак, для перехода от задачи (2.5) к задаче (2.1) нужно разделить переменные на базисные и свободные, выразить базисные переменные через свободные, а затем исключить базисные переменные как из *целевой функции*, так и из ограничений, заменив последние неравенствами, означающими, что исключаемые переменные неотрицательны. В целевой функции при этом может появиться постоянное слагаемое, которое можно отбросить как не оказывающее влияния на положение точки экстремума.

Напомним, что выбор базисных и свободных переменных в общем случае не является однозначным [III]. Поэтому не является однозначным и переход от (2.5) к (2.1).

Пример 2.5. Три уравнения в системе ограничений задачи (2.8) являются базисными, так как ранг матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных, равен трем. В качестве базисных переменных можно выбрать y_1, y_2 и y_4 (этим переменным соответствует базисный минор матрицы). Разрешая исходную систему относительно базисных переменных, получаем

$$\begin{cases} y_1 = 2 - y_3 + 2y_5, \\ y_2 = 2 - y_5, \\ y_4 = 2 + 2y_3 - 3y_5. \end{cases}$$

Учитывая неотрицательность переменных y_1, y_2 и y_4, запишем ограничения в виде неравенств:

$$\begin{cases} 2 - y_3 + 2y_5 \geqslant 0, \\ 2 - y_5 \geqslant 0, \\ 2 + 2y_3 - 3y_5 \geqslant 0. \end{cases}$$

Из целевой функции $3y_1 + 2y_2$ исключим базисные переменные:

$$3y_1 + 2y_2 = 3(2 - y_3 + 2y_5) + 2(2 - y_5) = 6 - 3y_3 + 4y_5.$$

Целевую функцию $6 - 3y_3 + 4y_5$ можно заменить целевой функцией $-3y_3 + 4y_5$, так как максимум первой функции достигается при тех же значениях переменных, что и максимум второй. В результате приходим к следующей задаче линейного программирования:

$$\begin{cases} -3y_3 + 4y_5 \to \max; \\ y_3 - 2y_5 \leqslant 2, \quad y_5 \leqslant 2, \quad -2y_3 + 3y_5 \leqslant 2, \\ y_3 \geqslant 0, \quad y_5 \geqslant 0. \end{cases}$$

Отметим, что эта задача отличается от исходной задачи линейного программирования (2.2). #

Если задача линейного программирования представлена в стандартной форме (2.5) и при этом

$$N - L = 2, \tag{2.10}$$

то для ее решения можно использовать геометрический метод.

Действительно, в этом случае система линейных алгебраических уравнений (2.6) имеет два свободных неизвестных, например x_1 и x_2, а все остальные неизвестные — базисные и выражаются через свободные неизвестные:

$$x_{2+i} = b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2, \quad i = \overline{1, L}.$$

Исключая из задачи базисные переменные, мы приходим к задаче линейного программирования с двумя переменными и системой ограничений в виде неравенств:

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 \to \min; \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leqslant b_i, \ i = \overline{1, L}, \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Частным случаем этой задачи является задача (2.2). Все дальнейшие рассуждения, относящиеся к возможностям геометрического метода и техники его применения, ничем не отличаются от рассуждений, проведенных при рассмотрении примера 2.2. Поэтому в данном случае ограничимся иллюстративным примером.

Пример 2.6. Пусть необходимо найти решение задачи линейного программирования в стандартной форме:

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 - 2y_3 + y_4 + 3y_5 - y_6 + 2y_7 \to \max; \\ y_1 - y_2 + y_3 = 4, \quad 2y_1 - y_2 - y_3 - y_4 = -5, \quad y_1 + y_2 - y_5 = -4, \\ y_2 + y_6 = 5, \quad 2y_1 - 2y_2 - y_6 + 2y_7 = 7, \\ y_k \geqslant 0, \quad k = \overline{1, 7}. \end{cases}$$

В данном случае $N = 7$ и $L = 5$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что система линейных алгебраических уравнений, задающих ограничения, является базисной и может быть представлена в виде

$$y_3 = -y_1 + y_2 + 4, \qquad y_4 = 3y_1 - 2y_2 + 1,$$
$$y_5 = y_1 + y_2 + 4, \qquad y_6 = -y_2 + 5,$$
$$y_7 = -y_1 + 0{,}5y_2 + 6.$$

Исключив из целевой функции базисные переменные $y_2, \ldots, y_7$, получим

$$-y_1 + y_2 - 2y_3 + y_4 + 3y_5 - y_6 + 2y_7 = 5y_1 + 2y_2 + 12.$$

Обозначив $x_1 = y_1$ и $x_2 = y_2$, приходим к следующей задаче, эквивалентной исходной:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \to \max; \\ x_1 - x_2 \leqslant 4, \quad -3x_1 + 2x_2 \leqslant 1, \quad -x_1 - x_2 \leqslant 4, \\ x_2 \leqslant 5, \quad x_1 - 0{,}5x_2 \leqslant 6, \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

На рис. 2.4 видно, что *оптимальная вершина* границы Γ_G множества G допустимых решений — это точка C пересечения прямых, задаваемых уравнениями $x_2 = 5$ и $x_1 - 0{,}5x_2 = 6$. Таким образом, оптимальное решение $X^* = (8{,}5\ 5)^{\mathrm{T}}$, которое в исходных переменных $y_1, \ldots, y_9$ имеет вид $Y^* = (8{,}5\ 5\ 0{,}5\ 16{,}5\ 17{,}5\ 0\ 0)^{\mathrm{T}}$. #

Завершая рассмотрение геометрического метода решения задач линейного программирования, сделаем следующие замечания.

Замечание 2.1. Если $Y = (y_1\ \ldots\ y_N)^{\mathrm{T}}$, $\Gamma = (\gamma_1\ \ldots\ \gamma_N)$, $A = (\alpha_{ik}) \in M_{LN}(\mathbb{R})$, $B = (\beta_1\ \ldots\ \beta_L)^{\mathrm{T}}$, Θ_N — нуль-вектор в

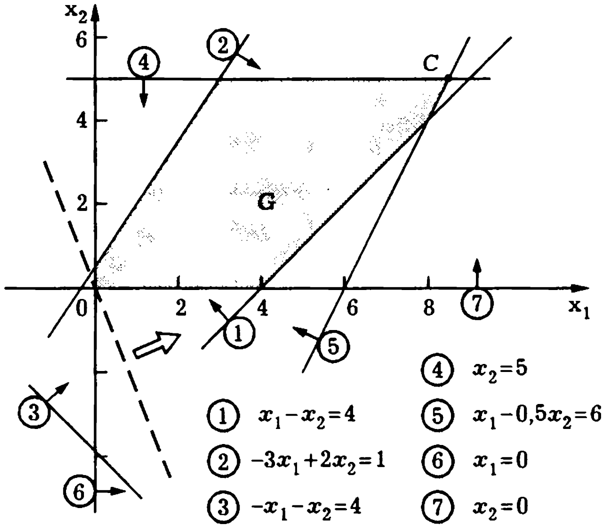


Рис. 2.4

$\mathbb{R}^N$, то задача линейного программирования, представленная в стандартной форме (2.5), принимает вид

$$\begin{cases} \Gamma Y \to \max; \\ AY = B, \quad Y \geqslant \Theta_N. \end{cases} \tag{2.11}$$

Здесь неравенство $Y \geqslant \Theta_N$ понимается как совокупность неравенств $y_k \geqslant 0$, $k = \overline{1, N}$.

Замечание 2.2. Задача линейного программирования может не иметь решения даже тогда, когда множество G допустимых решений не пусто. Эту ситуацию иллюстрирует рис. 2.5.

Замечание 2.3. При $N - L = 2$ оптимальное решение Y^* задачи (2.5) линейного программирования в стандартной форме всегда имеет не менее двух нулевых координат (см. пример 2.6). Это связано с тем, что оптимальная вершина границы Γ_G множества G допустимых решений является точкой пересечения

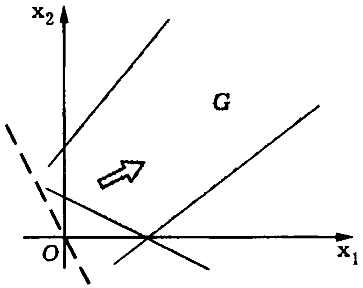


Рис. 2.5

как минимум двух прямых, уравнения которых определяются ограничениями исходной задачи (в примере 2.6 таковыми являются $y_6 = 0$ и $y_7 = 0$, т.е. $x_2 = 5$ и $x_1 - 0{,}5x_2 = 6$).

2.3. Задачи, приводящие к задачам линейного программирования

В процессе изучения основных понятий *исследования операций* и основ *линейного программирования* мы познакомились с двумя задачами линейного программирования: 1) в примере 1.2 рассмотрена задача о составлении пищевого пайка, которая при более общей постановке известна как ***задача о пищевом рационе***; 2) в **2.1** рассмотрена *задача распределительного типа*, которую называют также ***задачей о распределении ограниченных ресурсов***. Для расширения представлений о возможных сферах практического применения линейного программирования изложение его основ завершим анализом нескольких практически важных задач, обратив особое внимание на специфические особенности построения их *математических моделей*.

Транспортная задача. Рассмотрим задачу, возникающую перед транспортным отделом фирмы, имеющей n предприятий Π_i, $i = \overline{1, n}$, производящих однородную продукцию, и m складов C_j, $j = \overline{1, m}$, для ее хранения. Производственные мощности предприятий (S_i — мощность предприятия $П_i$, т.е. месячный объем производимой им продукции) и возможности приема продукции складами (D_j — объем продукции, который может принять склад C_j в течение месяца) известны на каждый месяц. Кроме того, известны транспортные расходы c_{ij} по доставке единицы объема продукции с любого предприятия $П_i$, $i = \overline{1, n}$, на любой склад C_j, $j = \overline{1, m}$. Требуется распределить продукцию, производимую предприятиями $П_i$, по складам C_j так, чтобы минимизировать общие транспортные расходы.

Пусть x_{ij} — объем продукции, поставляемой на склад C_j с предприятия $П_i$. В этом случае $x_{ij} \geqslant 0$ при $i = \overline{1, n}$ и $j = \overline{1, m}$. А так как $c_{ij}x_{ij}$ — затраты на транспортировку объема продукции x_{ij} с предприятия $П_i$ на склад C_j (в предположении, что транспортные расходы пропорциональны объему перевозимого груза), то общие транспортные расходы фирмы равны значению *целевой функции*

$$f(x_{11}, \ldots, x_{nm}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij},$$

которое необходимо минимизировать путем выбора неотрицательных значений $\{x_{ij}\}$, удовлетворяющих следующим ограничениям:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = S_i, \quad i = \overline{1, n},$$

так как произведенная продукция должна быть вывезена с каждого предприятия;

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leqslant D_j, \quad j = \overline{1, m},$$

так как объем продукции, который может принять каждый склад C_j, ограничен его емкостью D_j.

Естественно, что рассматриваемая задача имеет решение, если суммарный объем произведенной продукции не превышает суммарной емкости складов:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i \leqslant \sum_{j=1}^{m} D_j.$$

Следует отметить, что приведенная выше постановка транспортной задачи является далеко не единственной, в чем можно убедиться, ознакомившись со специальной литературой*.

Задача о календарном планировании комплекса работ. Эта задача может быть сформулирована следующим образом. Пусть некоторая фирма должна реализовать проект строительства, состоящий из конечного набора различных операций (работ). Специалисты-строители оценили продолжительность выполнения каждой операции и для каждой операции, содержащейся в проекте, установили все другие операции, которые должны быть выполнены к началу ее реализации. Руководство фирмы заинтересовано в минимально возможных сроках реализации проекта.

Для удобства дальнейших рассуждений предположим, что весь проект состоит из пяти операций A, B, C, D, E и все данные о нем представлены в табл. 2.1, где введена информация о фиктивной операции F, начинающейся в момент завершения реализации проекта.

Из табл. 2.1 видно, что операцию C нельзя начать до завершения выполнения операции A, а к операции E можно приступать лишь после реализации операций B и D. Весь комплекс работ будет выполнен, как только будет завершено выполнение операций C и E.

В рассматриваемой задаче *управляемыми переменными* являются моменты начала выполнения различных операций, за исключением операций A и B. Это связано с тем, что операции

*См.: *Вагнер Г.*, т. 1; *Вентцель Е.С.*; *Таха Х.*, т. 1.

Таблица 2.1

Операция	Продолжительность операции	Предшествующие операции
A	t_A	–
B	t_B	–
C	t_C	A
D	t_D	A
E	t_E	B, D
F	t_F	C, E

A и B не имеют предшествующих, поэтому можно считать их началом нулевой момент времени. Заметим также, что условия задачи не ограничивают количества одновременно начинаемых работ, что позволяет предполагать совпадение моментов начала выполнения операций C и D, так как им непосредственно предшествует одна и та же операция A. Таким образом, математическая модель рассматриваемой задачи в качестве управляемых переменных содержит лишь следующие: x_1 — момент начала операций C и D; x_2 — момент начала операции E; x_3 — момент начала операции F.

А так как x_3 — момент завершения всего комплекса работ, то необходимо минимизировать x_3 при условии выполнения следующих ограничений (см. табл. 2.1):

$$x_1 \geqslant t_A, \quad x_2 \geqslant t_B, \quad x_2 \geqslant t_D + x_1, \quad x_3 \geqslant t_C + x_1, \quad x_3 \geqslant t_E + x_2.$$

Следует отметить, что благодаря специфике ограничений $t_A > 0$, $t_B > 0$, $t_C > 0$, $t_D > 0$, $t_E > 0$ нет необходимости в явном виде задавать условия неотрицательности $x_k \geqslant 0$, $k = \overline{1,3}$. Формально это приводит к тому, что в математической модели рассматриваемой задачи управляемые переменные не ограничены в знаке, что и будет использовано далее для ее решения.

Задача о минимизации дисбаланса на автоматической линии. Фармацевтическая фабрика освоила производство нового бальзама, запустив автоматическую линию, на которой специальным образом обрабатывается смесь равных частей экстрактов календулы, мяты и зверобоя. Эти экстракты поставляют две фирмы, использующие различные технологии и оборудование. Производительность этих фирм по выпуску каждого из экстрактов и максимальный суммарный ресурс времени, которым располагает в течение недели каждая из них для производства этих экстрактов, приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Фирма	Максимальный недельный фонд времени, ч	Производительность фирмы по выпуску экстракта, л/ч		
		календулы	мяты	зверобоя
1	100	8	5	10
2	80	6	12	4

Фабрика заинтересована в максимально возможном увеличении выпуска своей продукции, что фактически эквивалентно минимизации дисбаланса автоматической линии вследствие нехватки одного или двух видов экстрактов. Необходимо определить еженедельные затраты времени (в часах) на производство каждого из трех видов экстрактов на каждой фирме, обеспечивающие максимально возможный объем производства бальзама и удовлетворяющие ограничениям по использованию временных ресурсов этих фирм.

Пусть x_{ij} — недельный фонд времени (в часах), выделенный на фирме $i = 1, 2$ для производства экстракта $j = 1, 2, 3$, где значение $j = 1$ сответствует экстракту календулы, $j = 2$ — экстракту мяты и $j = 3$ — экстракту зверобоя. Тогда, согласно данным, представленным в табл. 2.2, объемы производства для каждого из экстрактов будут равны:

экстракт календулы ($j = 1$): $8x_{11} + 6x_{21}$;

экстракт мяты ($j = 2$): $5x_{12} + 12x_{22}$;

экстракт зверобоя ($j = 3$): $10x_{13} + 4x_{23}$.

Смесь, поступающая на автоматическую линию, должна состоять из равных частей трех экстрактов. Поэтому объем производства бальзама лимитируется тем экстрактом, объем производства которого минимален, и определяется следующим образом:

$$\min\{8x_{11}+6x_{21};\ 5x_{12}+12x_{22};\ 10x_{13}+4x_{23}\}.$$

С учетом ограничений на максимальный суммарный ресурс времени для каждой из фирм, производящих экстракты,

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}\leqslant 100, \quad x_{21}+x_{22}+x_{23}\leqslant 80$$

и естественных ограничений, связанных с условием неотрицательности управляемых переменных,

$$x_{ij}\geqslant 0, \quad i=1,2, \quad j=1,2,3,$$

приходим к математической модели

$$\begin{cases} \min\{8x_{11}+6x_{21};\ 5x_{12}+12x_{22};\ 10x_{13}+4x_{23}\}\to\max; \\ x_{11}+x_{12}+x_{13}\leqslant 100, \quad x_{21}+x_{22}+x_{23}\leqslant 80, \\ x_{ij}\geqslant 0,\ i=\overline{1,2},\ j=\overline{1,3}, \end{cases}$$

которая формально не имеет отношения к задачам линейного программирования из-за характера целевой функции.

Для преобразования рассматриваемой задачи к задаче линейного программирования достаточно целевую функцию заменить другой, введя дополнительное переменное x и дополнительные ограничения:

$$\begin{cases} x\to\max; \\ 8x_{11}+6x_{21}-x\geqslant 0, \quad 5x_{12}+12x_{22}-x\geqslant 0, \\ 10x_{13}+4x_{23}-x\geqslant 0, \quad x\geqslant 0. \end{cases}$$

В результате получим следующую задачу линейного программирования:

$$
\begin{cases}
x \to \max; \\
x_{11}+x_{12}+x_{13} \leqslant 100, \quad x_{21}+x_{22}+x_{23} \leqslant 80, \quad 8x_{11}+6x_{21}-x \geqslant 0, \\
5x_{12}+12x_{22}-x \geqslant 0, \quad 10x_{13}+4x_{23}-x \geqslant 0, \\
x_{ij} \geqslant 0, \ i=\overline{1,2}, \ j=\overline{1,3}, \quad x \geqslant 0.
\end{cases}
$$

Итак, задача о минимизации дисбаланса на автоматической линии может быть сформулирована как задача линейного программирования.

Задачи, рассмотренные в этом параграфе, дают представление о возможных сферах применения методов линейного программирования. Каждая задача в определенном смысле является задачей распределительного типа и, кроме того, *статической задачей* исследования операций. Построение математических моделей этих задач имеет специфические особенности, связанные с выбором управляемых переменных, а также с формированием целевой функции и системы ограничений.

Вопросы и задачи

2.1. Можно ли утверждать, что любая задача линейного программирования является задачей распределительного типа? Ответ аргументируйте.

2.2. Какие допущения используют для представления задачи исследования операций как задачи линейного программирования? Какое из этих допущений будет нарушено, если в (2.3) $c_k = c_k(x_k)$?

2.3. Пусть для некоторой задачи исследования операций построена математическая модель вида (2.1). Почему необходим анализ этой математической модели на чувствительность для: а) разработчика этой модели; б) „лица, принимающего решения“?

2.4. Изменится ли оптимальное решение задачи линейного программирования (2.1), если во всех ограничениях, за исключением требований неотрицательности управляемых переменных, знаки „$\geqslant$“ и „$\leqslant$“ заменить знаком „$=$“?

2.5. Возможны ли случаи неединственности решения задачи линейного программирования? Если такие случаи возможны, то различаются ли значения целевой функции, соответствующие различным оптимальным решениям?

2.6. В чем заключается принципиальное различие между активными и пассивными ограничениями задачи линейного программирования?

2.7. Всегда ли применение геометрического метода решения задачи линейного программирования предполагает представление этой задачи в стандартной форме?

2.8. В каких случаях переход от задачи линейного программирования в стандартной форме (2.5) к задаче общего вида (2.1) не является однозначным?

2.9. В условиях примера 2.1 формализуйте следующие ограничения: а) суточный расход исходного продукта A не может превышать 6 т и быть меньше 3 т; б) спрос на лак для наружных работ не может быть меньше, чем спрос на лак для внутренних работ.

Ответ: а) $x_1 + 2x_2 \leqslant 6$ и $x_1 + 2x_2 \geqslant 3$; б) $x_2 - x_1 \geqslant 0$.

2.10. Для задачи из примера 2.1 проверьте, являются ли допустимыми следующие решения: а) $X = (1\ \ 4)^{\mathrm{T}}$; б) $X = (2\ \ 2)^{\mathrm{T}}$; в) $X = (10/3\ \ 4/3)^{\mathrm{T}}$; г) $X = (2\ \ -1)^{\mathrm{T}}$.

Ответ: а) нет; б) да; в) да; г) нет.

2.11. Используя множество допустимых решений G, изображенное на рис. 2.3, найдите оптимальное решение при следующих целевых функциях: а) $f = 3x_1 + x_2$; б) $f = 3x_1 + 1{,}5x_2$; в) $f = x_1 + 2x_2$.

Ответ: а) $X^* = (4\ \ 0)^{\mathrm{T}}$; б) $X^* = (4 - 0{,}5\lambda\ \ \lambda)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in [0, 4/3]$; в) $X^* = (2\ \ 2)^{\mathrm{T}}$.

2.12. Пусть в задаче линейного программирования заданы ограничения

$$2x_1 + 4x_2 \leqslant 16, \quad -4x_1 + 2x_2 \leqslant 8, \quad x_1 + 3x_2 \geqslant 9, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$$

и целевая функция $f(X) = x_1 + x_2$, где $X = (x_1\ \ x_2)^{\mathrm{T}}$. Найдите такие векторы X^* и X^{**}, что $f(X^*) = \max\limits_{X \in G} f(X)$ и $f(X^{**}) = \min\limits_{X \in G} f(X)$.

Ответ: $X^* = (6\ \ 1)^{\mathrm{T}}$; $X^{**} = (0\ \ 3)^{\mathrm{T}}$.

2.13. Предприятие имеет возможность реализовать не более четырех технологических процессов одновременно, причем технологические процессы $П_1$ и $П_2$ используются для производства продукта A, а технологические процессы $П_3$ и $П_4$ — для производства продукта B. Расходы, связанные с реализацией каждого технологического процесса, определяются трудозатратами (в человеко-неделях), а также количествами (в килограммах) материалов M и N, потребляемых в течение недели. Основные производственно-экономические показатели приведены в табл. 2.3, где доходы от производства 1 кг продукта выражены в условных денежных единицах и зависят как от вида продукта, так и от используемого технологического процесса.

Таблица 2.3

Параметр	На 1 кг A		На 1 кг B		Имеется в наличии
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	
Трудозатраты, чел.-нед	1	1	1	1	15
Количество материала, кг:					
M	7	5	3	2	120
N	3	5	10	15	100
Доход с 1 кг продукта	4	5	9	11	–

Постройте математическую модель задачи о планировании производства с целью получения наибольшего дохода.

Ответ:

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \to \max; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 15, \quad 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leqslant 120, \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leqslant 100, \\ x_k \geqslant 0, \quad k = \overline{1,4}, \end{cases}$$

где x_1 и x_2 — объемы производства продукта A с использованием технологических процессов $П_1$ и $П_2$ соответственно; x_3 и x_4 — объемы производства продукта B с использованием технологических процессов $П_3$ и $П_4$ соответственно.

2.14. Птицеводческая фабрика имеет возможность закупать до трех ингредиентов, используемых для приготовления кормовой смеси, расход которой составляет не менее 20 000 кг в неделю. По используемой технологии выращивания цыплят эта смесь должна содержать: а) не менее 0,8 %, но и не более 1,2 % кальция; б) не менее 22 % белка; в) не более 5 % клетчатки.

Постройте математическую модель задачи минимизации недельных затрат на закупки ингредиентов для приготовления кормовой смеси, соответствующей используемому технологическому процессу. Данные, характеризующие стоимость 1 кг каждого ингредиента (в условных денежных единицах) и содержание в нем (по весу в 1 кг) питательных веществ (кальций, белок, клетчатка), представлены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

Ингредиенты	Содержание питательных веществ			Стоимость
	Кальций	Белок	Клетчатка	
Известняк	0,38	–	–	480
Зерно	0,001	0,09	0,02	1800
Соевые бобы	0,002	0,5	0,08	4800

Ответ:

$$\begin{cases} 480x_1 + 1800x_2 + 4800x_3 \to \min; \\ x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 20000, \quad 0{,}372x_1 - 0{,}007x_2 - 0{,}006x_3 \geqslant 0, \\ 0{,}368x_1 - 0{,}011x_2 - 0{,}01x_3 \leqslant 0, \quad 0{,}22x_1 + 0{,}13x_2 - 0{,}27x_3 \leqslant 0, \\ 0{,}05x_1 + 0{,}03x_2 - 0{,}03x_3 \geqslant 0, \\ x_k \geqslant 0, \quad k = \overline{1,3}. \end{cases}$$

где x_k — объем закупок известняка ($k = 1$), зерна ($k = 2$) и соевых бобов ($k = 3$) в неделю, кг.

2.15. Постройте математическую модель задачи о минимизации дисбаланса на автоматической линии (см. **2.3**), если в ее условиях смесь должна состоять из одной части экстракта календулы, двух частей экстракта мяты и четырех частей экстракта зверобоя.

Ответ:

$$\begin{cases} x \to \max; \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \leqslant 100, \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} \leqslant 80, \\ 8x_{11} + 6x_{21} - x \geqslant 0, \quad 5x_{12} + 12x_{22} - 2x \geqslant 0, \\ 10x_{13} + 4x_{23} - 4x \geqslant 0, \\ x_{ij} \geqslant 0, \ i = \overline{1,2}, \ j = \overline{1,3}, \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

2.16. На хлебокомбинатах с номерами $i = 1, 2, 3$ производится 110, 190 и 90 т муки соответственно. Эта мука потребляется четырьмя хлебозаводами с номерами $j = 1, 2, 3, 4$, ежедневные потребности которых равны соответственно 80, 60, 170 и 80 т муки. Стоимость перевозки 1 т муки (в условных единицах) определяется матрицей, в которой элемент i-й строки j-го столбца равен стоимости перевозки с i-го хлебокомбината на j-й хлебозавод:

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Постройте математическую модель задачи о минимизации транспортных расходов.

Ответ: если x_{ij} — объем поставок муки (в тоннах) с i-го хлебокомбината на j-й хлебозавод, то

$$\begin{cases} 8x_{11}+x_{12}+9x_{13}+7x_{14}+4x_{21}+6x_{22}+2x_{23}+ \\ \qquad\qquad +12x_{24}+3x_{31}+5x_{32}+8x_{33}+9x_{34}\to\min; \\ \sum\limits_{j=1}^{4}x_{1j}=110, \quad \sum\limits_{j=1}^{4}x_{2j}=190, \quad \sum\limits_{j=1}^{4}x_{3j}=90, \\ \sum\limits_{i=1}^{3}x_{i1}=80, \quad \sum\limits_{i=1}^{3}x_{i2}=60, \quad \sum\limits_{i=1}^{3}x_{i3}=170, \\ \sum\limits_{i=1}^{3}x_{i4}=80, \quad x_{ij}\geqslant 0, \ i=\overline{1,3}, \ j=\overline{1,4}. \end{cases}$$

2.17. Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя местные радио- и телевизионные сети. Затраты на рекламу в бюджете фирмы ограничены величиной 5 500 условных денежных единиц. Каждая минута радиорекламы обходится в 5 условных денежных единиц, а каждая минута телерекламы — в 100 условных денежных единиц. Фирма хотела бы использовать радиосеть по крайней мере в 2 раза чаще, чем телесеть, исходя из своих конъюнктурных соображений. Опыт показал, что одна минута телерекламы обеспечивает объем сбыта продукции, в 25 раз превышающий объем сбыта продукции, обеспечиваемый одной минутой радиорекламы.

Найдите оптимальное (в смысле максимизации объема сбыта своей продукции) распределение финансовых средств между теле- и радиорекламой.

Ответ: на радиорекламу — 500 условных денежных единиц, на телерекламу — 5 000.

2.18. Фирма производит и реализует два вида продукции: A и B. Объем сбыта продукции вида A составляет не менее 60 % общего объема реализации всей продукции. Для изготовления продукции A и B используется одно и то же сырье, суточный запас которого равен 120 кг. Расход сырья на единицу продукции A составляет 2 кг, а на единицу продукции B — 4 кг. Цена единицы продукции (в условных денежных единицах) вида A равна 20, а вида B — 40.

Найдите оптимальное (в смысле максимального дохода фирмы от реализации производства продукции) распределение сырья для изготовления продукции вида A и вида B.

Ответ: на изготовление продукции вида A необходимо 40 кг сырья, а на изготовление продукции вида B — 80 кг сырья.

2.19. Для производства двух видов продукции A и B предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида (в килограммах на единицу объема производимой продукции) приведены в табл. 2.5. Там же указано количество сырья каждого вида, которое может быть использовано как при производстве продукции вида A, так и при производстве продукции вида B. Прибыль предприятия от производства единицы объема продукции вида A равна 30, а от производства единицы объема продукции вида B — 40 (в условных денежных единицах).

Таблица 2.5

Вид сырья	Норма расхода сырья для производства продукции		Общее количество сырья, кг
	вида A	вида B	
1	12	4	300
2	4	4	120
3	3	12	252

Определите объемы производств продукции каждого вида, при которых прибыль предприятия будет наибольшей.

Ответ: объем производства продукции вида A равен 12, объем производства продукции вида B равен 18, прибыль предприятия равна 1080.

3. СИМПЛЕКС-МЕТОД

В этой главе рассмотрен общий метод решения *задач линейного программирования*, известный как ***симплекс-метод***. Процесс решения любой задачи линейного программирования симплекс-методом имеет итерационный характер: однотипные вычислительные процедуры в определенной последовательности повторяются до тех пор, пока не будет найдено *оптимальное решение*. Информация, которую можно получить с использованием симплекс-метода, не ограничивается оптимальным решением. Симплекс-метод позволяет дать экономическую интерпретацию оптимального решения и провести *анализ математической модели на чувствительность*.

3.1. Основные утверждения линейного программирования

В **2.2** доказано, что *задача линейного программирования* может быть представлена в *стандартной форме* (2.5) и записана в матричном виде (2.11). При этом всегда можно считать, что *система линейных алгебраических уравнений* (2.6), входящая в (2.5), является *базисной* и $L < N$. В (2.11) система линейных алгебраических уравнений (2.6) представлена в виде

$$AY = B, \tag{3.1}$$

где $A = (\alpha_{ik}) \in M_{LN}(\mathbb{R})$, $\operatorname{Rg} A = L < N$, $Y = (y_1 \ \ldots \ y_N)^{\mathrm{T}}$, $B = (\beta_1 \ \ldots \ \beta_L)^{\mathrm{T}}$.

Не теряя общности рассуждений, первые L столбцов a_k матрицы A далее можем считать базисными. В этом случае переменные y_k, $k = \overline{1, L}$, называют ***базисными***, а переменные

y_k, $k = \overline{L+1, N}$ — ***свободными переменными модели**** (2.11). Таким образом, если

$$\begin{cases} a_k = (\alpha_{1k} \ \dots \ \alpha_{Lk})^{\mathrm{T}}, \quad k = \overline{1, N}; \\ A_b = (a_1 \ \dots \ a_L) \in M_L(\mathbb{R}); \quad Y_b = (y_1 \ \dots \ y_L)^{\mathrm{T}}; \\ A_s = (a_{L+1} \ \dots \ a_N) \in M_{L,N-L}(\mathbb{R}); \quad Y_s = (y_{L+1} \ \dots \ y_N)^{\mathrm{T}}, \end{cases} \tag{3.2}$$

то матричное уравнение $AY = B$ может быть преобразовано к виду

$$A_b Y_b + A_s Y_s = B. \tag{3.3}$$

Отсюда находим

$$Y_b = A_b^{-1}(B - A_s Y_s).$$

Таким образом, для любого $Y_s \in \mathbb{R}^{N-L}$ вектор

$$Y = \begin{pmatrix} A_b^{-1}(B - A_s Y_s) \\ Y_s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N \tag{3.4}$$

является решением уравнения $AY = B$, а при выполнении условия $Y \geqslant \Theta_N$ он является *допустимым решением*, что непосредственно следует из (2.11). В частности, при $Y_s = \Theta_{N-L}$, согласно (3.4), решение уравнения $AY = B$ принимает вид

$$Y = \begin{pmatrix} A_b^{-1} B \\ \Theta_{N-L} \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Это решение называют ***базисным решением*** соответствующей задачи линейного программирования, а решение при $Y \geqslant \Theta_N$ — ***допустимым базисным решением***.

Следует отметить, что в общем случае выбор базисных столбцов матрицы A не является единственным. Значит, выбор базисного решения не является однозначным.

*Эти термины — синонимы терминов „базисное неизвестное“ и „свободное неизвестное“ в курсе линейной алгебры [IV].

Пример 3.1. Пусть для некоторой задачи линейного программирования множество G допустимых решений описывается ограничениями

$$x_1 + x_2 \leqslant 5, \quad 1{,}5x_1 + x_2 \leqslant 6,$$
$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Для перехода к стандартной форме записи рассматриваемой задачи линейного программирования вводим новые *управляемые переменные* x_3, x_4 и, сохраняя старые обозначения, приходим к множеству Q допустимых решений задачи (2.5), которое задается ограничениями

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5, \quad 1{,}5x_1 + x_2 + x_4 = 6,$$
$$x_k \geqslant 0, \quad k = \overline{1,4}.$$

Согласно (2.11),

$$A = (a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \ a_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1{,}5 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

А так как $\operatorname{Rg} A = 2$, то для определения всех базисных решений из столбцов a_k матрицы A составим всевозможные пары, которые могут быть базисными, и представим их матрицами:

$$A_1 = (a_1\ \ a_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1{,}5 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = (a_1\ \ a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1{,}5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = (a_1\ \ a_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1{,}5 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = (a_2\ \ a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = (a_2\ \ a_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_6 = (a_3\ \ a_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что $|A_j| \neq 0$ при любом $j = \overline{1,6}$. Таким образом, любые два различных столбца матрицы A являются базисными и в рассматриваемом случае можно построить шесть базисных решений.

Пусть $A_b = A_1$. Тогда $Y_b = (x_1\ \ x_2)^{\mathrm{T}}$, $Y_s = (x_3\ \ x_4)^{\mathrm{T}}$,

$$A_b^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1{,}5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{0{,}5} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1{,}5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

и, согласно (3.5), базисное решение $Y_1 = (2\ 3\ 0\ 0)^{\mathrm{T}}$. Аналогично находим и другие базисные решения: $Y_2 = (4\ 0\ 1\ 0)^{\mathrm{T}}$, $Y_3 = (5\ 0\ 0\ \ -3/2)^{\mathrm{T}}$, $Y_4 = (0\ 6\ \ -1\ 0)^{\mathrm{T}}$, $Y_5 = (0\ 5\ 0\ 1)^{\mathrm{T}}$, $Y_6 = (0\ 0\ 5\ 6)^{\mathrm{T}}$. При этом базисные решения Y_1, Y_2, Y_5, Y_6 являются допустимыми базисными решениями.

Если обратиться к геометрическому изображению множества G допустимых решений, то можно заметить (рис. 3.1), что каждому допустимому базисному решению соответствует своя вершина многоугольника Γ_G, являющегося границей множества G: первые две компоненты допустимого базисного решения — координаты соответствующей вершины многоугольника Γ_G. Таким образом, базисному решению Y_1 соответствует вершина F, базисному решению Y_2 — вершина H, базисному решению Y_5 — вершина E, а базисному решению Y_6 — вершина O, расположенная в начале координат. #

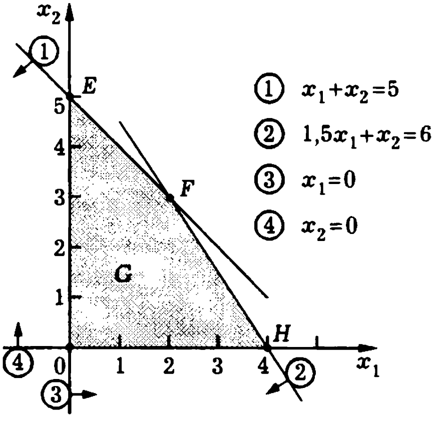


Рис. 3.1

Прежде чем переходить к дальнейшим рассуждениям, напомним некоторые понятия:

а) ***выпуклой комбинацией векторов*** X_k, $k=\overline{1,m}$, называют линейную комбинацию $\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_m X_m$ этих векторов, коэффициенты λ_k которой удовлетворяют условиям $\lambda_k \geqslant 0$, $k=\overline{1,m}$, $\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k = 1$;

б) множество $G \subset \mathbb{R}^n$ называют ***выпуклым***, если наряду с любыми двумя элементами этого множества ему принадлежит и их произвольная выпуклая комбинация, т.е. для любых $X_1, X_2 \in G$ и любого числа $\lambda \in [0, 1]$ выполняется условие

$$\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \in G; \tag{3.6}$$

в) точку X_0 выпуклого множества G называют ***крайней точкой*** этого ***множества***, если не существует двух различных $X_1, X_2 \in G$, для которых

$$X_0 = \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2, \quad 0 < \lambda < 1. \tag{3.7}$$

Заметим, что для точек $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^N$ множество всевозможных их выпуклых комбинаций представляет собой отрезок, соединяющий эти точки. Определение крайней точки выпуклого множества можно сформулировать так: точка $X \in G$ является крайней для множества G, если она не является внутренней ни для какого отрезка, целиком лежащего в G.

Теорема 3.1. Если множество

$$Q = \{Y \in \mathbb{R}^N \colon AY = B,\ Y \geqslant \Theta_N\} \tag{3.8}$$

допустимых решений задачи (2.11) линейного программирования в стандартной форме не является пустым, то это множество содержит допустимое базисное решение.

◄ Пусть a_k, $k=\overline{1,N}$, — столбцы матрицы $A \in M_{LN}(\mathbb{R})$ и $Y = (y_1\ \ldots\ y_s\ 0\ \ldots\ 0)^{\mathrm{T}} \in Q$ — допустимое решение, т.е.

$$\sum_{j=1}^{s} a_j y_j = B; \quad y_j > 0,\ j=\overline{1,s}; \quad y_j = 0,\ j=\overline{s+1,N}. \tag{3.9}$$

Согласно определению допустимого базисного решения, нужно доказать, что среди неотрицательных координат вектора Y содержится не более L ненулевых.

В соответствии с принятыми допущениями $\operatorname{Rg} A = L$. Поэтому, если столбцы a_j, $j = \overline{1, s}$, являются линейно независимыми, то рассматриваемое допустимое решение — допустимое базисное решение, так как $s \leqslant L$.

Если столбцы a_j, $j = \overline{1, s}$, являются линейно зависимыми, то существуют коэффициенты λ_j, такие, что

$$\sum_{j=1}^{s} \lambda_j a_j = \Theta_L, \qquad \sum_{j=1}^{s} |\lambda_j| > 0.$$

Последнее неравенство означает, что среди коэффициентов λ_j, $j = \overline{1, s}$, есть по крайней мере один ненулевой. Обозначив его λ_k, выразим столбец a_k матрицы A через столбцы $a_1, \ldots, a_{k-1}$, $a_{k+1}, \ldots, a_s$:

$$a_k = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{s} \left(-\frac{\lambda_j}{\lambda_k}\right) a_j.$$

Используя это представление столбца a_k, преобразуем первое из равенств (3.9) к следующему:

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{s} \left(y_j - \frac{\lambda_j}{\lambda_k} y_k\right) a_j = B.$$

Всегда можно считать, что среди действительных чисел λ_j, $j = \overline{1, s}$, есть хотя бы одно положительное, так как уравнения

$$\sum_{j=1}^{s} \lambda_j a_j = \Theta_L \qquad \text{и} \qquad \sum_{j=1}^{s} (-\lambda_j) a_j = \Theta_L$$

эквивалентны. Пусть $J \subset \{1, 2, \ldots, s\}$ — совокупность индексов j, для которых $\lambda_j > 0$. Если номер k выбрать так, что

$$\frac{y_k}{\lambda_k} = \min_{j\in J} \frac{y_j}{\lambda_j},$$

то значения

$$\widetilde{y}_j = \begin{cases} y_j - \left(\dfrac{\lambda_j}{\lambda_k}\right) y_k, & j = \overline{1, s},\ j \neq k; \\ 0, & j = k \text{ или } j = \overline{s+1, N}, \end{cases}$$

будут неотрицательными. Таким образом, $\widetilde{Y}_j = (\widetilde{y}_1 \ \dots \ \widetilde{y}_N)^{\mathrm{T}} \in Q$ и допустимое решение $\widetilde{Y}$ имеет строго положительных координат по крайней мере на одну меньше, чем допустимое решение Y. Продолжая рассуждать аналогичным образом, в конце концов придем к допустимому решению, у которого количество положительных координат не превосходит $L = \operatorname{Rg} A$. ▶

Теорема 3.2. Множество Q (3.8) допустимых решений является выпуклым.

◀ Пусть $Y_1, Y_2 \in Q$, т.е. $AY_k = B$ и $Y_k \geqslant \Theta_N$, $k = 1, 2$. Если $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ и $X = \lambda Y_1 + (1-\lambda) Y_2$, то $X \geqslant \Theta_N$ и $AX = \lambda A Y_1 + (1-\lambda) A Y_2 = \lambda B + (1-\lambda) B = B$. Таким образом, выпуклая линейная комбинация любых двух элементов из Q содержится в нем, и, следовательно, Q — выпуклое множество. ▶

Теорема 3.3. Допустимые базисные решения задачи (2.11) линейного программирования в стандартной форме являются крайними точками множества Q ее допустимых решений.

◀ Пусть $Y_0 = \left(y_1^0 \ \dots \ y_L^0 \ 0 \ \dots \ 0\right)^{\mathrm{T}}$ — допустимое базисное решение рассматриваемой задачи линейного программирования. Предположим, что Y_0 не является крайней точкой множества допустимых решений Q. В этом случае существуют две различные точки $Y_k = \left(y_1^k \ \dots \ y_N^k\right)^{\mathrm{T}}$, $k = 1, 2$, этого множества, для которых $Y_0 = \lambda Y_1 + (1-\lambda) Y_2$, где $0 < \lambda < 1$. Таким образом, $\lambda y_j^1 + (1-\lambda) y_j^2 = 0$, $j = \overline{L+1, N}$.

А так как $\lambda > 0$, $1 - \lambda > 0$, $y_j^1 \geqslant 0$ и $y_j^2 \geqslant 0$ для всех $j = \overline{1, N}$, то $y_j^1 = y_j^2 = 0$, $j = \overline{L+1, N}$. Поэтому, если $A = (a_1 \ \dots \ a_N)$, то

$$\sum_{j=1}^{L} y_j^1 a_j = B, \quad \sum_{j=1}^{L} y_j^2 a_j = B$$

и, как следствие,

$$\sum_{j=1}^{L}(y_j^1 - y_j^2)a_j = \Theta_L.$$

Но столбцы a_j, $j=\overline{1, L}$, матрицы A являются линейно независимыми, так как, согласно договоренности, являются базисными. Поэтому $y_j^1 - y_j^2 = 0$, $j=\overline{1, L}$, и $Y_1 = Y_2$, что противоречит исходному предположению о двух различных допустимых решениях Y_1 и Y_2 из Q. Итак, гипотеза о том, что Y_0 не является крайней точкой множества допустимых решений Q, оказалась ложной. ▶

Теорема 3.4. Крайние точки множества Q допустимых решений задачи (2.11) линейного программирования в стандартной форме соответствуют допустимым базисным решениям.

◀ Пусть матрица $A = (a_1 \ \ldots \ a_N) \in M_{LN}(\mathbb{R})$ имеет ранг $\operatorname{Rg} A = L < N$. Предположим, что $Y_0 = \left(y_1^0 \ \ldots \ y_s^0 \ 0 \ \ldots \ 0\right)^{\mathrm{T}}$ — крайняя точка множества Q допустимых решений и $y_j^0 > 0$ при $j=\overline{1, s}$. Докажем, что $s \leqslant L$, т.е. что Y_0 — допустимое базисное решение.

Предположим, что $s > L$. Тогда столбцы a_j, $j=\overline{1, s}$, матрицы A являются линейно зависимыми и существуют такие коэффициенты λ_j, что

$$\sum_{j=1}^{s}\lambda_j a_j = \Theta_L, \quad \sum_{j=1}^{s}|\lambda_j| > 0.$$

Пусть $J \subset \{1,\ 2,\ \ldots,\ s\}$ — совокупность индексов j, для которых $|\lambda_j| > 0$. Если

$$\rho = \min_{j\in J}\frac{y_j^0}{|\lambda_j|}, \quad \Lambda = (\lambda_1 \ \ldots \ \lambda_s \ 0 \ \ldots, 0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^N,$$

то $\rho > 0$, $A\Lambda = \Theta_L$ и векторы

$$X_k = Y_0 - (-1)^k \rho\Lambda, \quad k = 1, 2,$$

удовлетворяют условию неотрицательности, т.е. $X_1 \geqslant \Theta_N$ и $X_2 \geqslant \Theta_N$. Кроме того, $Y_0 \in Q$, т.е. $AY_0 = B$ и

$$AX_k = AY_0 - (-1)^k \rho A\Lambda = B, \quad k = 1, 2.$$

Таким образом, $X_1, X_2 \in Q$ и $Y_0 = 0{,}5(X_1 + X_2)$. Следовательно, Y_0 не может быть крайней точкой для Q, что противоречит выбору Y_0 и означает ошибочность предположения $s > L$. ▶

Замечание 3.1. У множества Q допустимых решений, заданного согласно (3.8), где $L < N$, число крайних точек, а следовательно, и число допустимых базисных решений, конечно и не превышает $C_N^L = \dfrac{N!}{L!(N-L)!}$.

Замечание 3.2. Если множество Q допустимых решений, определенное согласно (3.8), ограничено, то оно является замкнутым выпуклым множеством с конечным числом крайних точек. Можно показать, что любая точка такого множества может быть представлена в виде выпуклой комбинации его крайних точек.

Теорема 3.5. Если в некоторой точке множества Q допустимых решений задачи линейного программирования (2.11) ее целевая функция достигает максимума, то она будет принимать максимальное значение хотя бы в одной крайней точке множества Q. Если целевая функция достигает максимума в нескольких крайних точках множества Q, то она достигает максимума и в любой их выпуклой комбинации.

◀ Сначала предположим, что множество допустимых решений Q задачи линейного программирования (2.11), определяемое согласно (3.8), является ограниченным. Пусть Y_k, $k = \overline{1, K}$, — крайние точки множества Q и $Y_0 \in Q$ — точка, в которой целевая функция $f = \Gamma Y$ достигает своего конечного максимума. Тогда (см. замечание 3.2) существуют λ_k, $k = \overline{1, K}$, такие, что

$$Y_0 = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k Y_k, \quad \sum_{k=1}^{K} \lambda_k = 1, \quad \lambda_k \geqslant 0, \quad k = \overline{1, K}.$$

При этом, если $\widetilde{Y}$ — такая крайняя точка множества Q, что $\Gamma\widetilde{Y} = \max\limits_{k \in K} \Gamma Y_k$, то

$$\Gamma Y_0 = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \Gamma Y_k \leqslant \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \Gamma \widetilde{Y} = \Gamma \widetilde{Y} \sum_{k=1}^{K} \lambda_k = \Gamma \widetilde{Y}.$$

Но Y_0 — точка максимума целевой функции, т.е. $\Gamma Y_0 \geqslant \Gamma Y$ для любого $Y \in Q$. Поэтому $\Gamma Y_0 = \Gamma\widetilde{Y}$ и существует хотя бы одна крайняя точка (точка $\widetilde{Y}$), в которой целевая функция достигает своего максимального значения.

Пусть теперь целевая функция $f = \Gamma Y$ достигает своего максимального значения Φ в крайних точках Y_j^*, $j = \overline{1, J}$, т.е. $\Phi = \Gamma Y_j^*$, $j = \overline{1, J}$. Любой элемент их выпуклой комбинации имеет вид

$$Y = \sum_{j=1}^{J} \lambda_j Y_j^*, \quad \sum_{j=1}^{J} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1, J}.$$

Таким образом, значение целевой функции для этого элемента равно:

$$\Gamma Y = \sum_{j=1}^{J} \lambda_j \Gamma Y_j^* = \sum_{j=1}^{J} \lambda_j \Phi = \Phi \sum_{j=1}^{J} \lambda_j = \Phi.$$

Доказательство утверждения в случае ограниченности множества Q допустимых решений завершено.

Пусть множество Q допустимых решений не является ограниченным. Если существует *оптимальное решение* Y^*, то к ограничениям, определяющим множество Q допустимых решений, всегда можно добавить ограничение $Y \leqslant Y^*$, которое не повлияет на максимальное значение целевой функции, но превратит Q в ограниченное выпуклое замкнутое множество. ▶

В силу основных теорем линейного программирования, доказанных выше, для нахождения оптимального решения любой задачи линейного программирования достаточно исследовать лишь ее допустимые базисные решения. Это связано с тем, что все допустимые базисные решения являются крайними точками множества допустимых решений (см. теорему 3.3). Число допустимых базисных решений зависит от числа базисных миноров матрицы A и в общем случае может быть достаточно большим. Поэтому полный перебор всех допустимых базисных решений, как метод решения задачи линейного программирования, не эффективен и нужен другой метод, который на каждом этапе своей реализации позволяет переходить от одного допустимого базисного решения к другому, лучшему по сравнению с исходным в смысле значений целевой функции.

3.2. Симплекс-метод при известном допустимом базисном решении

В этом параграфе рассмотрим *задачу* (2.11) *линейного программирования в стандартной форме*, для которой известно *допустимое базисное решение*. Есть общий метод определения допустимого базисного решения (см. **3.3**). Однако в частном случае задачи линейного программирования вида (2.1) допустимое базисное решение можно найти непосредственно из системы ограничений задачи. А именно, если в задаче (2.1) нет ограничений типа равенства или типа „больше или равно“, т.е. если $I_2 = I_3 = \varnothing$, а $I_1 = \{1, 2, \ldots, m\}$, причем все коэффициенты b_i неотрицательны, то переход к задаче линейного программирования в стандартной форме путем введения неотрицательных переменных $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ (см. **2.2**) приводит к задаче

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + x_{n+i} = b_i, & i = \overline{1, m}; \\ x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1, n+m}. \end{cases}$$

Нетрудно увидеть, что в задаче с такими ограничениями вектор

$$Y = (0 \ \ldots \ 0 \ b_1 \ \ldots \ b_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n+m} \tag{3.10}$$

является допустимым базисным решением.

Отметим, что к описанному случаю сводится задача вида (2.1), в которой нет ограничений типа равенства ($I_2 = \varnothing$), а коэффициенты b_i в ограничениях типа неравенства удовлетворяют соотношению $b_i \geqslant 0$ при $i \in I_1$ и соотношению $b_i \leqslant 0$ при $i \in I_3$. Действительно, достаточно каждое неравенство с индексом $i \in I_3$ умножить на число -1, в результате чего изменится и тип неравенства, и знак правой части неравенства, т.е. мы придем к случаю $I_2 = I_3 = \varnothing$ и $b_i \geqslant 0$, $i = \overline{1, m}$.

Приступим к изучению *симплекс-метода* при известном допустимом базисном решении, которое будем называть ***начальным базисным решением***. Пусть задана задача линейного программирования в стандартной форме (2.11), причем первые L столбцов a_j матрицы A в представлении (2.11) являются базисными столбцами, соответствующими начальному базисному решению. Для удобства дальнейших рассуждений матрицу A_b, столбцами которой являются базисные столбцы A, назовем ***базисом*** рассматриваемой ***задачи линейного программирования***, или просто базисом.

При сделанных допущениях и обозначениях (3.2) уравнение (3.3), связывающее векторы Y_b и Y_s *базисных* и *свободных переменных модели*, может быть представлено в следующем виде:

$$Y_b + A_b^{-1} A_s Y_s = A_b^{-1} B. \qquad (3.11)$$

Если при записи *целевой функции* $f(Y) = \Gamma Y$ в (2.11) воспользоваться представлением (3.4) вектора Y и ввести обозначения

$$\Gamma_b = (\gamma_1 \ \ldots \ \gamma_L), \quad \Gamma_s = (\gamma_{L+1} \ \ldots \ \gamma_N), \qquad (3.12)$$

то $\Gamma = (\Gamma_b \ \Gamma_s)$ и

$$f(Y) = \Gamma_b A_b^{-1} B + (\Gamma_s - \Gamma_b A_b^{-1} A_s) Y_s. \qquad (3.13)$$

Заметим, что матрица коэффициентов при базисных переменных модели y_k, $k = \overline{1, L}$, в (3.11) является единичной, а в (3.13) —

нулевой. Кроме того, допустимое базисное решение, существование которого предполагается, представимо в виде (3.5) и ему соответствует значение целевой функции

$$f_0 = \Gamma_b A_b^{-1} B, \tag{3.14}$$

определяемое равенством (3.13) при $Y_s = \Theta_{N-L}$. Таким образом, из (3.13), (3.14) следует, что

$$f(Y) = f_0 + (\Gamma_s - \Gamma_b A_b^{-1} A_s) Y_s, \tag{3.15}$$

и коэффициент при свободном переменном y_j в правой части равенства (3.15) для определения значения целевой функции f равен (см.(3.12) и замечание 2.1):

$$d_j = \gamma_j - \Gamma_b A_b^{-1} a_j, \quad j = \overline{L+1, N}. \tag{3.16}$$

Идея симплекс-метода состоит в том, чтобы исходя из начального допустимого базисного решения (3.5) найти новое допустимое базисное решение, исключая для этого некоторой столбец a_i из начального базиса A_b и заменяя его одним из небазисных столбцов a_j матрицы A, где $i = \overline{1, L}$ и $j = \overline{L+1, N}$. Условия такой замены состоят в том, чтобы включение a_j в новый базис, по крайней мере, не ухудшило значение целевой функции f, а удаление a_i обеспечило получение нового допустимого базисного решения.

Согласно проведенным рассуждениям, целевая функция $f(Y)$ может быть записана в виде

$$f(Y) = f_0 + \sum_{j=L+1}^{N} d_j y_j,$$

где коэффициенты d_j, $j = \overline{L+1, N}$, относятся к свободным переменным модели и определяются равенствами (3.16). Каждый такой коэффициент называют ***симплекс-разностью.*** Воспользовавшись этим представлением целевой функции, с учетом неотрицательности переменных модели можно показать, что:

а) небазисный столбец a_j матрицы A имеет смысл вводить в новый базис, если симплекс-разность d_j положительна;

б) в новый базис целесообразно включать тот небазисный столбец матрицы A, у которого симплекс-разность имеет наибольшее положительное значение (***условие оптимальности выбора***);

в) если все симплекс-разности неположительны, то значение целевой функции улучшить нельзя, т.е. допустимое базисное решение является *оптимальным решением.*

Пример 3.2. Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \to \max; \\ x_1 - x_2 \geqslant 1, \\ x_2 \leqslant 2, \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \end{cases}$$

или в стандартной форме

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \to \max; \\ y_1 - y_2 - y_3 = 1, \\ y_2 + y_4 = 2, \\ y_k \geqslant 0, \quad k = \overline{1,4}, \end{cases}$$

где $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, y_3 и y_4 — новые *переменные модели,*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = (1\ \ 1\ \ 0\ \ 0), \tag{3.17}$$

$$A_b = (a_1\ \ a_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A_b = 1, \quad A_b^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

В этом случае, согласно (3.5), (3.17), вектор $Y = (3\ 2\ 0\ 0)^{\mathrm{T}}$ является базисным решением, притом допустимым, и его можно использовать в качестве начального. Из соотношений (3.2), (3.12) и (3.17) находим

$$A_s = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_b = (1\ 1), \quad \Gamma_s = (0\ 0). \tag{3.19}$$

Значение целевой функции f_0, соответствующее начальному допустимому базисному решению, определяется формулой (3.14) с учетом равенств (3.17)–(3.19):

$$f_0 = \Gamma_b A_b^{-1} B = 5,$$

а матрица-строка симплекс-разностей определяется из соотношений (3.15), (3.16), (3.18), (3.19):

$$(d_3\ \ d_4) = \Gamma_s - \Gamma_b A_b^{-1} A_s = (1\ \ -2).$$

Таким образом, $d_3 = 1 > 0$, $d_4 = -2 < 0$ и в новый базис нужно включить столбец $a_3 = (-1\ \ 0)^{\mathrm{T}}$ матрицы A, а новым базисным переменным будет y_3. #

Предположим, что в соответствии с условием оптимальности выбора определен небазисный столбец a_r матрицы А, который будет введен в новый базис. Новый базис, полученный из старого путем замены в нем некоторого базисного столбца a_l матрицы А небазисным столбцом a_r, должен обеспечивать получение нового допустимого базисного решения. Согласно (3.11) и (3.2),

$$Y_b = A_b^{-1} B - A_b^{-1} A_s Y_s = A_b^{-1} B - A_b^{-1} \sum_{j=L+1}^{N} a_j y_j = A_b^{-1} B - A_b^{-1} a_r y_r,$$

так как новое базисное переменное $y_r > 0$, а все остальные небазисные переменные $y_j = 0$ для всех $j \in \{L+1, \ldots, N\} \setminus \{r\}$.

Если $(A_b^{-1}B)_i$ и $(A_b^{-1}a_r)_i$ — i-е координаты векторов $A_b^{-1}B$ и $A_b^{-1}a_r$ соответственно и

$$y_i = (A_b^{-1}B)_i - (A_b^{-1}a_r)_i y_r, \quad i = \overline{1, L}, \tag{3.20}$$

то при $(A_b^{-1}a_r)_i > 0$ и достаточно большом значении y_r новое значение y_i, определяемое согласно (3.20), может стать отрицательным.

Пусть $I \subset \{1, \ldots, L\}$ — множество индексов i, для которых $(A_b^{-1}a_r)_i > 0$. Максимальное значение нового базисного переменного y_r определим следующим образом:

$$y_r^{\max} = \min_{i \in I} \frac{(A_b^{-1}B)_i}{(A_b^{-1}a_r)_i}, \quad 0 \leqslant y_r \leqslant y_r^{\max}. \tag{3.21}$$

Если $y_r = y_r^{\max}$, то по крайней мере одно переменное y_l, где $l \in I$, обратится в нуль и соответствующий ему столбец a_l матрицы A можно вывести из старого базиса. Заметим, что (3.21) фактически определяет ***условие допустимости выбора*** столбца a_l, выводимого из старого базиса. Понятно, что это условие может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{(A_b^{-1}B)_l}{(A_b^{-1}a_r)_l} = \min_{i \in I} \frac{(A_b^{-1}B)_i}{(A_b^{-1}a_r)_i}, \tag{3.22}$$

а новый базис, построенный с использованием условия оптимальности выбора и условия допустимости выбора, обеспечивает получение нового допустимого базисного решения.

Если $(A_b^{-1}a_r)_i \leqslant 0$ для всех $i = \overline{1, L}$, то, согласно (3.20), при увеличении значения нового базисного переменного модели y_r все новые значения y_i, $i = \overline{1, L}$, будут строго положительными. В этом случае задача не имеет решения: существуют допустимые решения со сколь угодно большим значением целевой функции (говорят, что ***оптимальное решение неограниченное***).

Пример 3.3. Вернемся к задаче линейного программирования, рассмотрение которой начато в примере 3.2. В соответствии с условием оптимальности выбора в новый базис должен быть включен небазисный столбец $a_r = a_3 = (-1\ \ 0)^{\mathrm{T}}$ матрицы A. Согласно (3.18),

$$A_b^{-1} a_r = A_b^{-1} a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Все координаты вектора $A_b^{-1} a_r$ неположительны, и задача не имеет решения, что подтверждается при графическом решении задачи (рис. 3.2). #

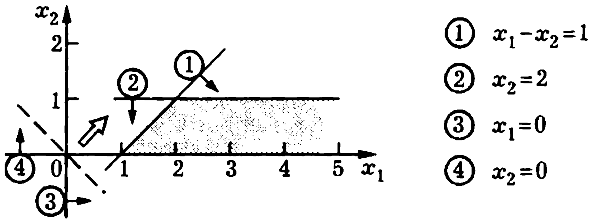


Рис. 3.2

Из определения допустимого базисного решения, уравнения (3.11) и условия допустимого выбора (3.21) следует, что если бы начальное допустимое базисное решение было ***вырожденным***, т.е. среди координат Y_b есть нулевые, то значение $y_r^{\max}$ вводимого базисного переменного y_r могло бы оказаться равным нулю. Кроме того, если считать, что $y_r = y_r^{\max}$ в (3.20), то среди переменных y_i, $i = \overline{1, L}$, могут оказаться два или более нулевых. Тем не менее из начального базисного решения должно быть выведено лишь одно переменное y_l и соответствующий ему столбец a_l матрицы A должен быть выведен из базиса и заменен столбцом a_r. Отметим, что вырожденность допустимого базисного решения (как начального, так и полученного нового) может осложнить поиск оптимального решения задачи. Далее (см. пример 3.7) проблема вырожденности обсуждена подробнее.

Пример 3.4. Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \to \max; \\ x_1 \leqslant 400, \\ x_2 \leqslant 300, \\ x_1 + x_2 \leqslant 500, \\ x_2 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \end{cases}$$

или в стандартной форме

$$\begin{cases} 2y_1 + 5y_2 \to \max; \\ y_1 + y_3 = 400, \\ y_2 + y_4 = 300, \\ y_1 + y_2 + y_5 = 500, \\ y_k \geqslant 0, \quad k = \overline{1,5}, \end{cases}$$

где $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, y_3, y_4, y_5 — новые переменные,

$$\begin{cases} A = (a_1 \ \ldots \ a_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ B = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 500 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = (2 \ 5 \ 0 \ 0 \ 0). \end{cases} \tag{3.23}$$

Выберем, согласно (3.10), вектор $Y = (0 \ 0 \ 400 \ 300 \ 500)^{\mathrm{T}}$ в качестве начального допустимого базисного решения. Тогда $f_0 = \Gamma_b A_b^{-1} B = 0$ и

$$Y_B = \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}, \quad Y_s = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$$A_b = (a_3 \ a_4 \ a_5) = I_3, \quad A_s = (a_1 \ a_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_b = (0 \ 0 \ 0), \quad \Gamma_s = (2 \ 5).$$

Согласно (3.15), (3.16), вычисляем матрицу-строку симплекс-разностей:

$$(d_1 \;\; d_2) = \Gamma_s - \Gamma_b A_b^{-1} A_s = (2 \;\; 5).$$

А так как $d_2 > d_1 > 0$, то в новый базис вводим столбец $a_r = a_2$ матрицы A и новое базисное переменное y_2.

В рассматриваемом случае $A_b^{-1} a_r = I_3 a_2 = (0 \;\; 1 \;\; 1)^{\mathrm{T}}$. Поэтому $(A_b^{-1} a_r)_i > 0$ при $i \in I = \{4,\ 5\}$. А так как $A_b^{-1} B = B = (400 \;\; 300 \;\; 500)^{\mathrm{T}}$, то по условию допустимости выбора (3.22)

$$\frac{(A_b^{-1}B)_l}{(A_b^{-1}a_r)_l} = \min_{i \in I} \frac{(A_b^{-1}B)_i}{(A_b^{-1}a_r)_i} = \min\left\{\frac{300}{1},\ \frac{500}{1}\right\} = 300$$

и $l = 4$, т.е. в базисе заменим столбец a_4 матрицы A ее столбцом a_2. Кроме того, согласно (3.21), (3.22), $y_2^{\max} = 300$, и для определения нового допустимого базисного решения в (3.20) заменим y_r на $y_2^{\max}$ и при $i = 3, 4, 5$ вычислим

$$y_3 = 400 - 0 \cdot 300 = 400,$$
$$y_4 = 300 - 1 \cdot 300 = 0,$$
$$y_5 = 500 - 1 \cdot 300 = 200.$$

Таким образом, получаем новое допустимое базисное решение $Y = (0 \;\; 300 \;\; 400 \;\; 0 \;\; 200)^{\mathrm{T}}$,

$$Y_b = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_5 \end{pmatrix}, \quad Y_s = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_4 \end{pmatrix}, \quad A_b = (a_2 \;\; a_3 \;\; a_5) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_b^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_s = (a_1 \;\; a_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_b = (5 \;\; 0 \;\; 0), \quad \Gamma_s = (2 \;\; 0), \quad f_0 = \Gamma_b A_b^{-1} B = 1500.$$

Согласно (3.15) и (3.16), вычисляем матрицу-строку симплекс-разностей:

$$(d_1 \;\; d_4) = \Gamma_s - \Gamma_b A_b^{-1} A_s = (2 \;\; -5).$$

А так как $d_1 > 0$ и $d_4 < 0$, то в новый базис вводим столбец $a_r = a_1$ матрицы A и новое базисное переменное y_1.

В рассматриваемом случае $A_b^{-1}a_r = A_b^{-1}a_1 = (0\ \ 1\ \ 1)^{\mathrm{T}}$. Поэтому $(A_b^{-1}a_r)_i > 0$ при $i \in I = \{3,\ 5\}$. А так как $A_b^{-1}B = (300\ \ 400\ \ 200)^{\mathrm{T}}$, то по условию допустимого выбора (3.22)

$$\frac{(A_b^{-1}B)_l}{(A_b^{-1}a_r)_l} = \min\left\{\frac{400}{1},\ \frac{200}{1}\right\} = 200$$

и $l = 5$, т.е. в базисе заменим столбец a_5 матрицы A ее столбцом a_1. Кроме того, согласно (3.21), (3.22), $y_1^{\max} = 200$, и для определения нового допустимого базисного решения в (3.20) заменим y_r на $y_1^{\max}$ и при $i = 2, 3, 5$ вычислим

$$y_2 = 300 - 0 \cdot 200 = 300,$$
$$y_3 = 400 - 1 \cdot 200 = 200,$$
$$y_5 = 200 - 1 \cdot 200 = 0.$$

Таким образом, новое допустимое базисное решение имеет вид $Y = (200\ \ 300\ \ 200\ \ 0\ \ 0)^{\mathrm{T}}$,

$$Y_b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad Y_s = \begin{pmatrix} y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}, \quad A_b = (a_1\ \ a_2\ \ a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_b^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_s = (a_4\ \ a_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_b = (2\ \ 5\ \ 0), \quad \Gamma_s = (0\ \ 0), \quad f_0 = \Gamma_b A_b^{-1} B = 1900.$$

Снова, согласно (3.15), (3.16), вычисляем матрицу-строку симплекс-разностей:

$$(d_4\ \ d_5) = \Gamma_s - \Gamma_b A_b^{-1} A_s = (-3\ \ -2).$$

Так как симплекс-разности всех небазисных переменных отрицательны, допустимое базисное решение $Y = (200\ \ 300\ \ 200\ \ 0\ \ 0)^{\mathrm{T}}$ является оптимальным решением. На рис. 3.3 приведено графическое решение и указана последовательность исследования крайних точек множества G допустимых решений при реализации симплекс-метода.

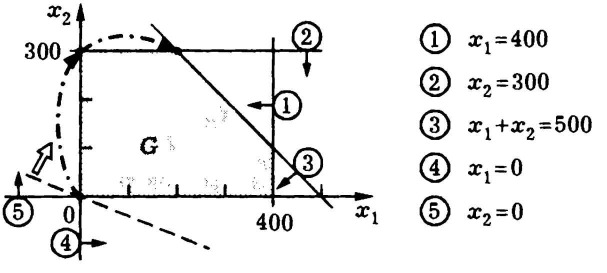


Рис. 3.3

Замечание 3.3. Пусть для задачи линейного программирования в стандартной форме известно начальное базисное решение. В этом случае вся процедура нахождения оптимального решения с использованием симплекс-метода состоит в последовательной реализации следующих шагов (см. пример 3.4).

Шаг 1. Для известного начального базисного решения Y формируют матрицы Y_b, Y_s, A_b, A_s, Γ_b, Γ_s и определяют матрицу A_b^{-1}.

Шаг 2. Вычисляют матрицу-строку симплекс-разностей $\Gamma_s - \Gamma_b A_b^{-1} A_s$. Если все элементы этой матрицы-строки являются неположительными, то начальное базисное решение является оптимальным решением и вычисления завершены. В противном случае, если d_r — максимальная положительная симплекс-разность, то в новый базис вводят небазисный столбец a_r матрицы A.

Шаг 3. Определяют вектор $A_b^{-1} a_r$ и множество индексов I его положительных координат. Определяют номер l столбца a_l матрицы A, выводимого из базиса, и максимальное значение $y_r^{\max}$ нового базисного переменного y_r:

$$y_r^{\max} = \frac{(A_b^{-1}B)_l}{(A_b^{-1}a_r)_l} = \min_{i\in I} \frac{(A_b^{-1}B)_i}{(A_b^{-1}a_r)_i}.$$

Шаг 4. Вычисляют новые значения старых базисных переменных:

$$y_i = (A_b^{-1}B)_i - (A_b^{-1}a_r)_i y_r^{\max}, \quad i \in I.$$

Затем выписывают новое допустимое базисное решение при $y_r = y_r^{\max}$, которое называют начальным базисным решением, и возвращаются к шагу 1.

Замечание 3.4. Процедуру решения задач линейного программирования симплекс-методом удобно оформлять в виде ***симплекс-таблиц***, основой которых являются уравнение (3.11) и представление целевой функции в виде (3.13). Каждая симплекс-таблица отражает одну итерацию симплекс-метода, состоящую из четырех шагов (см. замечание 3.3).

Пример 3.5. Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = 6x_1 + 2x_2 \to \max; \\ 2x_1 + 4x_2 \leqslant 9, \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 6, \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Эта задача относится к частному случаю задач линейного программирования, в котором допустимое базисное решение можно найти непосредственно из ограничений (об этом сказано в начале параграфа). Запишем рассматриваемую задачу в стандартной форме:

$$\begin{cases} f(y_1, y_2, y_3, y_4) = 6y_1 + 2y_2 + 0 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 \to \max; \\ 2y_1 + 4y_2 + 1 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 = 9, \\ 3y_1 + 1 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 + 1 \cdot y_4 = 6, \\ y_k \geqslant 0, \quad k = \overline{1, 4}, \end{cases}$$

где $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, а y_3 и y_4 — новые переменные.

Здесь в соответствии с (3.10) в качестве начального допустимого базисного решения можно использовать вектор $Y = (0\ 0\ 9\ 6)^{\mathrm{T}}$, которому соответствует значение целевой функции $f = 0$. Таким образом, y_3, y_4 — базисные переменные, и можно заполнить первую симплекс-таблицу, соответствующую нулевой итерации симплекс-метода (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Итерация	Базисные переменные	Значение	y_1	y_2	y_3	y_4
0	y_3	9	2	4	1	0
	y_4	6	**3**	1	0	1
	$-f$	0	6	2	0	0

В табл. 3.1, как и в любой другой симплекс-таблице, выделены столбцы „Итерация", „Базисные переменные", „Значение" и столбцы, соответствующие *переменным модели*. В столбце „Итерация" указан номер итерации. Табл. 3.1 соответствует нулевой итерации, поэтому в первом столбце проставлено значение 0. Рассмотрим процесс заполнения таблицы, исключая пока ее последнюю строку.

Перепишем ограничения задачи линейного программирования в следующем виде:

$$\begin{aligned} \boxed{9} &= \boxed{2}\,y_1 + \boxed{4}\,y_2 + \boxed{1}\,y_3 + \boxed{0}\,y_4, \\ \boxed{6} &= \boxed{3}\,y_1 + \boxed{1}\,y_2 + \boxed{0}\,y_3 + \boxed{1}\,y_4. \end{aligned}$$

В результате получим последние столбцы симплекс-таблицы, начиная со столбца „Значение". Остается заполнить столбец „Базисные переменные". В симплекс-таблице базисным переменным всегда соответствуют столбцы единичной матрицы. В табл. 3.1 это столбцы y_3 и y_4. В столбце y_3 единица стоит на пересечении с первой строкой. Поэтому в первой строке в столбце „Базисные переменные" записано y_3. В столбце y_4 единица стоит на пересечении со второй строкой таблицы. Поэтому во второй строке в столбце „Базисные переменные" записано y_4.

Осталось заполнить последнюю строку табл. 3.1. Целевая функция задачи линейного программирования в стандартной форме имеет вид

$$f(y_1, y_2, y_3, y_4) = 6y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 0y_4$$

и зависит только от свободных переменных y_1, y_2. В столбцах y_1, y_2, y_3, y_4 записываем коэффициенты при этих переменных в целевой функции. Отметим, что коэффициенты при переменных y_1 и y_2 являются их симплекс-разностями (3.16), соответствующими начальному базису (y_3, y_4). В столбце „Значение“ записываем нуль как значение функции f в начальном базисном решении, взятое с противоположным знаком. В столбец „Базисные переменные“ записываем $-f$.

Итак, заполнение первой симплекс-таблицы, соответствующей нулевой итерации симплекс-метода, требует представления задачи линейного программирования в стандартной форме. При этом начальное базисное решение выбирают в форме (3.10). В симплекс-таблице есть вся необходимая информация о начальном базисном решении (столбцы „Базисные переменные“ и „Значение“) и данные для построения нового допустимого базисного решения (значения симплекс-разностей, записанные в последней строке под свободными переменными).

Наибольшая положительная симплекс-разность равна 6 и соответствует переменному y_1, которое будет новым базисным переменным. Оба элемента 2 и 3, расположенных на пересечении строк, соответствующих старым базисным переменным y_3, y_4, и столбца, соответствующего новому базисному переменному y_1, положительны. Поэтому вычисляем $9/2 = 4{,}5$ и $6/3 = 2$. Наименьшее из двух полученных чисел равно $2 = y_1^{\max}$ и соответствует старому базисному переменному y_4, которое нужно вывести из нового допустимого базисного решения. #

Строку симплекс-таблицы, соответствующую выводимому базисному переменному, называют ***ведущей строкой симплекс-таблицы***, а ее элемент, расположенный на пересечении со столбцом, соответствующим новому базисному переменному, называют ***ведущим элементом симплекс-таблицы*** (в табл. 3.1 ведущий элемент выделен полужирным шрифтом).

Пример 3.6. Вернемся к задаче линейного программирования, рассмотрение которой начато в примере 3.5. Используя табл. 3.1, продолжим решение задачи линейного программирования, построив новую симплекс-таблицу (табл. 3.2), имеющую столько же строк и столбцов с теми же наименованиями.

Таблица 3.2

Итерация	Базисные переменные	Значение	y_1	y_2	y_3	y_4
1	y_3	5	0	$\frac{10}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$
	y_1	2	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
	$-f$	-12	0	0	0	-2

В столбце „Итерация" записываем номер итерации 1. Старое базисное переменное y_3 остается в базисе. Поэтому в столбце „Базисные переменные" это переменное записываем в той же первой строке. Старое базисное переменное y_4 меняем на новое переменное y_1, запись $-f$ сохраняется — столбец „Базисные переменные" заполнен.

Новому базисному переменному y_1 на итерации 1 соответствует столбец единичной матрицы, причем единичный элемент этого столбца должен стоять на месте ведущего элемента новой симплекс-таблицы (см. пример 3.5). Чтобы добиться этого, разделим все элементы ведущей строки на ведущий элемент, получив тем самым новую ведущую строку, соответствующую новому базисному переменному y_1. Все остальные элементы столбца y_1 должны быть равны нулю, включая элемент, стоящий на пересечении с последней строкой новой симплекс-таблицы. Для этого из первой строки табл. 3.1 вычитаем новую ведущую строку, умноженную на 2, а из последней строки табл. 3.1 вычитаем новую ведущую строку, умноженную на 6. А так как все симплекс-разности, записанные в последней строке табл. 3.2 в столбцах свободных переменных, являются неположительными, то новое допустимое базисное решение $Y = (2\ \ 0\ \ 5\ \ 0)^{\mathrm{T}}$ является оптимальным решением и ему соответствует значение целевой функции $f = 12$. #

Прежде чем переходить к анализу возможностей определения начального базисного решения, обсудим еще одну задачу линейного программирования для иллюстрации специфических особенностей практического использования симплекс-метода.

Пример 3.7. Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = 3x_1 - x_2 \to \max; \\ 2x_1 - x_2 \leqslant 4, \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 2, \\ x_1 + x_2 \leqslant 5, \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \end{cases}$$

или в стандартной форме ($y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, а y_3, y_4, y_5 — новые переменные)

$$\begin{cases} 3y_1 - y_2 \to \max; \\ 2y_1 - y_2 + y_3 = 4, \\ y_1 - 2y_2 + y_4 = 2, \\ y_1 + y_2 + y_5 = 5, \\ y_k \geqslant 0, \quad k = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

В данном случае в качестве начального можно использовать допустимое базисное решение $Y = (0\ \ 0\ \ 4\ \ 2\ \ 5)^{\mathrm{T}}$, которому соответствует значение целевой функции $f = 0$. Тогда y_3, y_4, y_5 — базисные переменные. Мы можем заполнить первую симплекс-таблицу, соответствующую нулевой итерации симплекс-метода (табл. 3.3).

Таблица 3.3

Итерация	Базисные переменные	Значение	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
0	y_3	4	2	−1	1	0	0
	y_4	2	1	−2	0	1	0
	y_5	5	1	1	0	0	1
	$-f$	0	3	−1	0	0	0

Наибольшая положительная симплекс-разность равна 3, т.е. новым базисным переменным является y_1. А так как все элементы столбца, соответствующего переменному y_1, являются положительными, то

$$y_1^{\max} = \min\left\{\frac{4}{2}, \frac{2}{1}, \frac{5}{1}\right\} = 2.$$

Это число соответствует двум базисным переменным: y_3 и y_4. Следовательно, возможны два варианта реализации симплекс-метода.

Вариант 1. Выводим старое базисное переменное y_3. Этому варианту соответствуют симплекс-таблицы, представленные в табл. 3.4.

Таблица 3.4

Итерация	Базисные переменные	Значение	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
1	y_1	2	1	−1/2	1/2	0	0
	y_4	0	0	−3/2	−1/2	1	0
	y_5	3	0	**3/2**	−1/2	0	1
	$-f$	−6	0	1/2	−3/2	0	0
2	y_1	3	1	0	1/3	0	1/3
	y_4	3	0	0	−1	1	1
	y_2	2	0	1	−1/3	0	2/3
	$-f$	−7	0	0	−4/3	0	−1/3

Вариант 2. Выводим старое базисное переменное y_4. Этому варианту соответствуют симплекс-таблицы, представленные в табл. 3.5.

Таблица 3.5

Итерация	Базисные переменные	Значение	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
1	y_3	0	0	**3**	1	−2	0
	y_1	2	1	−2	0	1	0
	y_5	3	0	3	0	−1	1
	$-f$	−6	0	5	0	−3	0
2	y_2	0	0	1	1/3	−2/3	0
	y_1	2	1	0	2/3	−1/3	0
	y_5	3	0	0	−1	**1**	1
	$-f$	−6	0	0	−5/3	1/3	0
3	y_2	2	0	1	−1/3	0	2/3
	y_1	3	1	0	1/3	0	1/3
	y_4	3	0	0	−1	1	1
	$-f$	−7	0	0	−4/3	0	−1/3

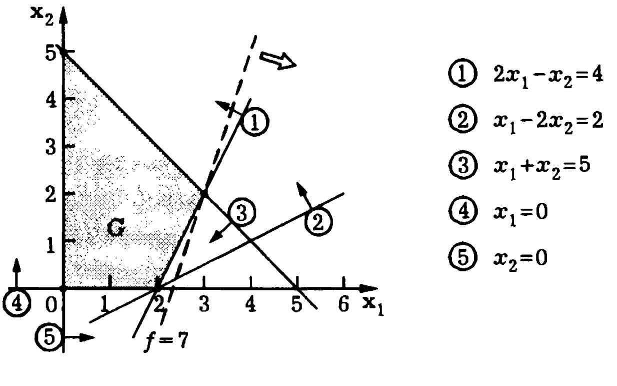


Рис. 3.4

Оптимальному решению $Y = (3\ 2\ 0\ 3\ 0)^{\mathrm{T}}$ соответствует значение целевой функции $f = 7$ (см. рис. 3.4). Заметим, что при реализации как первого, так и второго вариантов при первой итерации (см. табл. 3.4 и 3.5) новое допустимое базисное решение $Y = (2\ 0\ 0\ 0\ 3)^{\mathrm{T}}$ является вырожденным и соответствует (см. рис. 3.4) крайней точке $(2;0)$ множества G допустимых решений. Более того, при реализации варианта 2 новые допустимые базисные решения при первой и второй итерациях являются не только вырожденными, но и совпадают (см. табл. 3.5). #

Вырожденность является следствием переопределенности крайней точки $(2;0)$ множества G допустимых решений, в которой пересекаются три прямые (см. рис. 3.4), соответствующие ограничениям рассматриваемой задачи, в то время как для задания крайней точки множества G на плоскости достаточно двух прямых. Переопределенной крайней точке множества допустимых решений соответствуют два аспекта:

1) одно или несколько ограничений являются избыточными. Если избыточным является i-е ограничение, то его можно снять, не изменяя при этом множество допустимых решений. Это означает, что использование i-го *ресурса* для достижения поставленной цели не является обязательным. Подобная информация может оказаться весьма полезной при практическом использовании результатов исследований;

2) в общем случае при реализации симплекс-метода возможно циклическое повторение операций, не улучшающих значения целевой функции и не приводящих к завершению вычислений (см. табл. 3.5, итерации 1 и 2). Но при практическом использовании симплекс-метода, как показывает опыт, такое маловероятно.

В заключение рассмотрим пример задач линейного программирования, для которых оптимальное решение не является единственным, т.е. целевая функция достигает своего максимального значения на некотором подмножестве множества допустимых решений. Элементы этого подмножества называют ***альтернативными оптимальными решениями***.

Пример 3.8. Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} f(x_1,x_2) = 2x_1 + 4x_2 \to \max; \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 5, \quad x_1 + x_2 \leqslant 4, \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \end{cases}$$

или в стандартной форме

$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 \to \max; \\ y_1 + 2y_2 + y_3 = 5, \quad y_1 + y_2 + y_4 = 4, \\ y_k \geqslant 0, \quad k = \overline{1,4}, \end{cases}$$

где $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, а y_3 и y_4 — новые переменные. В качестве начального базисного решения можно использовать вектор $Y = (0\ \ 0\ \ 5\ \ 4)^T$, которому соответствуют базисные переменные модели y_3, y_4 и значение целевой функции $f = 0$.

В данном случае оптимальное решение не является единственным (рис. 3.5), так как любая точка отрезка AB соответствует оптимальному решению. Выясним, как проявляется специфика рассматриваемой задачи при ее решении симплекс-методом.

В табл. 3.6 приведены симплекс-таблицы двух первых итераций симплекс-метода. Видно, что оптимальному решению

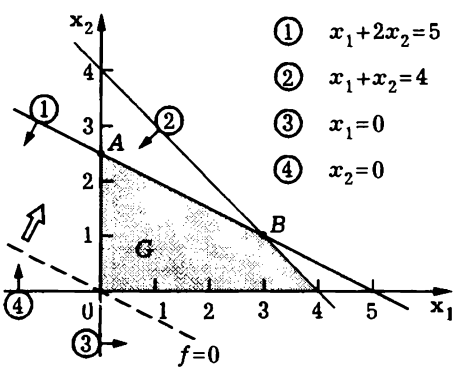


Рис. 3.5

Таблица 3.6

Итерация	Базисные переменные	Значение	y_1	y_2	y_3	y_4
0	y_3	5	1	**2**	1	0
	y_4	4	1	1	0	1
	$-f$	0	2	4	0	0
1	y_2	5/2	1/2	1	1/2	0
	y_4	3/2	1/2	0	−1/2	1
	$-f$	−10	0	0	−2	0

$Y^* = (0\ \ 5/2\ \ 0\ \ 3/2)^{\text{т}}$ соответствует точка A множества G допустимых решений (см. рис. 3.5) и значение целевой функции $f = 10$. В последней строке табл. 3.6 симплекс-разность, соответствующая свободному переменному модели y_1, равна нулю. Следовательно, включение y_1 в число базисных переменных не может привести к изменению значения целевой функции, но может привести к нахождению нового оптимального решения. Из соответствующей симплекс-таблицы (табл. 3.7) видно, что новое оптимальное решение $Y^* = (3\ \ 1\ \ 0\ \ 0)^{\text{т}}$ соответствует крайней точке B множества G (см. рис. 3.5) и значению целевой функции $f = 10$. Таким образом (см. теорему 3.5), $f = 10$ и на выпуклой комбинации $X_\lambda = \lambda X_1^* + (1-\lambda)X_2^*$ оптимальных решений $X_1^* = (0\ \ 5/2)^{\text{т}}$ и $X_2^* = (3\ \ 1)^{\text{т}}$, $0 < \lambda < 1$, вектор X_λ^* является оптимальным решением. #

Таблица 3.7

Итерация	Базисные переменные	Значение	y_1	y_2	y_3	y_4
2	y_2	1	0	1	1	−1
	y_1	3	1	0	−1	2
	$-f$	−10	0	0	−2	0

Информация о наличии альтернативных оптимальных решений является очень полезной при решении практических задач, так как *„лицо, принимающее решения“*, получает возможность выбора альтернативного варианта, в наибольшей степени отвечающего сложившейся ситуации, и при этом нет необходимости исследовать изменения целевой функции.

3.3. Нахождение допустимого базисного решения

В *задаче линейного программирования* (2.1) множество *допустимых решений* определяется системой ограничений

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \leqslant b_i, & i \in I_1; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i, & i \in I_2; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \geqslant b_i, & i \in I_3, \end{cases}$$

с дополнительным условием неотрицательности *переменных модели*. Три множества индексов I_1, I_2, I_3 попарно не пересекаются и в совокупности составляют все множество индексов от 1 до m включительно. Можно считать, что $b_i \geqslant 0$, $i = \overline{1, m}$, так как в противном случае соответствующее неравенство можно умножить на -1. Переходя к задаче линейного программирования в стандартной форме, полагают $y_k = x_k$, $k = \overline{1, n}$, и в каждое i-е ограничение вводят новое неотрицательное переменное y_{n+i}. В результате система ограничений преобразуется к следующему виду:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + y_{n+i} = b_i, & i \in I_1; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + 0 \cdot y_{n+i} = b_i, & i \in I_2; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}x_k - y_{n+i} = b_i, & i \in I_3. \end{cases}$$

Если $I_2 = I_3 = \varnothing$, т.е. $I_1 = \{1, 2, \ldots, m\}$, то вектор

$$Y = (0 \ \ldots \ 0 \ b_1 \ \ldots \ b_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n+m}$$

вида (3.10) является *допустимым базисным решением* рассматриваемой задачи и его можно использовать в *симплекс-методе* в качестве *начального базисного решения* (см. **3.2**). При этом *базисным переменным модели* y_{n+i}, $i = \overline{1, m}$, соответствуют столбцы единичной матрицы I_m, являющейся одним из блоков матрицы ограничений A. Именно этот прием нахождения начального базисного решения был использован в примерах 3.4, 3.5 и 3.7.

Если в задаче (2.1) не является пустым или множество I_2, или множество I_3, то новое переменное y_{n+i} войдет в систему ограничений с коэффициентом

$$\alpha_{i,n+i} = \begin{cases} 0, & i \in I_2, \\ -1, & i \in I_3 \end{cases}$$

(см. пример 3.2), и в этом случае вектор вида (3.10) не приведет к допустимому базисному решению. Понятно, что при решении таких задач линейного программирования могут возникнуть значительные трудности, связанные с нахождением начальных базисных решений. Рассмотрим один из возможных методов поиска начального базисного решения, основанный на использовании ***искусственных переменных модели***, т.е. переменных, которые не имеют отношения к содержательной постановке рассматриваемой задачи.

Идея использования искусственных переменных для нахождения начального базисного решения задачи линейного программирования достаточно проста и заключается в следующем.

Пусть в соотношениях (2.1) $b_i \geqslant 0$, $i = \overline{1, m}$, и для определенности

$$I_1 = \{1, \ldots, m_1\}, \quad I_3 = \{m_1 + 1, \ldots, m_2\}, \quad I_2 = \{m_2 + 1, \ldots, m\},$$

где $1 \leqslant m_1 < m_2 < m$. Полагают $y_k = x_k$, $k = \overline{1, n}$, вводят новые переменные y_k, $k = \overline{n+1, n+m_2}$, и переходят к следующей задаче линейного программирования в стандартной форме:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} c_k y_k \to \max; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} y_k + y_{n+i} = b_i, \quad i \in I_1, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} y_k = b_i, \quad i \in I_2, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} y_k - y_{n+i} = b_i, \quad i \in I_3, \\ y_k \geqslant 0, \quad k = \overline{1, n+m_2}. \end{cases} \tag{3.24}$$

Каждое новое переменное y_{n+i}, $i = \overline{1, m_2}$, входит лишь в одно ограничение.

После этого вводят $m - m_1$ искусственных переменных y_j, $j = \overline{n+m_2+1, n+m_2+m-m_1}$, и рассматривают вспомогательную задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} \varphi(y_{n+m_2+1}, \ldots, y_{n+m_2+m-m_1}) = -\sum\limits_{j=1}^{m-m_1} y_{n+m_2+j} \to \max; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} y_k + y_{n+i} = b_i, \quad i \in I_1, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} y_k + y_{n+m_2+i-m_1} = b_i, \quad i \in I_2, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} y_k - y_{n+i} + y_{n+m_2+i-m_1} = b_i, \quad i \in I_3, \\ y_k \geqslant 0, \quad k = \overline{1, n+m_2+m-m_1}. \end{cases} \tag{3.25}$$

Для задачи (3.25) начальное базисное решение может быть найдено с использованием приема, рассмотренного в начале этого параграфа. Ненулевые компоненты этого решения имеют вид

$$y_{n+i} = b_i, \quad i \in I_1, \qquad y_{n+m_2+i-m_1} = b_i, \quad i \in I_2 \cup I_3.$$

В силу неотрицательности переменных модели (3.25) и специфики *целевой функции* φ вспомогательной задачи линейного программирования ее *оптимальное решение* будет соответствовать значению $\varphi = 0$, т.е. в оптимальном решении компоненты, соответствующие искусственным переменным модели, будут нулевыми. Таким образом, если в оптимальном решении $\omega^* \in \Omega$ вспомогательной задачи линейного программирования вычеркнуть нулевые компоненты, соответствующие искусственным переменным модели (3.25), то полученный вектор Y будет не только принадлежать множеству допустимых решений Q в (3.24), но и являться базисным допустимым решением исходной задачи, которое можно использовать в качестве начального.

Отметим, что если *оптимальное значение целевой функции* вспомогательной задачи не равно нулю, то, как нетрудно заметить, множество допустимых решений исходной задачи пусто.

Пример 3.9. Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2 \to \max; \\ x_1 + x_2 \leqslant 20, \\ -x_1 + 4x_2 \leqslant 20, \\ x_1 \geqslant 10, \\ x_2 \geqslant 5, \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \end{cases}$$

в стандартной форме имеющую следующий вид:

$$\begin{cases} 3y_1 + 4y_2 \to \max; \\ y_1 + y_2 + y_3 = 20, \\ -y_1 + 4y_2 + y_4 = 20, \\ y_1 - y_5 = 10, \\ y_2 - y_6 = 5, \\ y_k \geqslant 0, \quad k = \overline{1, 6}. \end{cases} \tag{3.26}$$

В рассматриваемом случае $I_1 = \{1,\ 2\}$, $I_2 = \varnothing$, $I_3 = \{3,\ 4\}$. Вводим искусственные переменные модели y_7, y_8 и записываем вспомогательную задачу линейного программирования в стандартной форме:

$$\begin{cases} \varphi(y_1, \ldots, y_8) = -y_7 - y_8 \to \max; \\ y_1 + y_2 + y_3 = 20, \\ -y_1 + 4y_2 + y_4 = 20, \\ y_1 - y_5 + y_7 = 10, \\ y_2 - y_6 + y_8 = 5, \\ y_k \geqslant 0, \quad k = \overline{1, 8}. \end{cases} \tag{3.27}$$

Для вспомогательной задачи в качестве начального базисного решения можно взять $\omega = (0\ \ 0\ \ 20\ \ 20\ \ 0\ \ 0\ \ 10\ \ 5)^{\mathrm{T}}$, тогда базисными переменными будут y_3, y_4, y_7, y_8.

Вспомогательную задачу линейного программирования будем решать с использованием *симплекс-таблиц*. Поэтому, согласно (3.27), базисные переменные y_7, y_8, входящие в целевую функцию φ, выражаем через свободные переменные:

$$y_7 = 10 - y_1 + y_5, \quad y_8 = 5 - y_2 + y_6.$$

Таким образом,

$$\varphi = -15 + y_1 + y_2 - y_5 - y_6.$$

Порядок заполнения симплекс-таблиц вспомогательной задачи и приемы работы с ними те же, что и в случае основной задачи (см. пример 3.5). Но для удобства дальнейших вычислений в симплекс-таблицы вспомогательной задачи линейного программирования введем еще одну строку, соответствующую целевой функции f основной задачи линейного программирования (3.26). С этой строкой будем проводить те же вычисления, что и обычно (т.е. на каждой итерации получать нули на месте пересечения строки со столбцами новых базисных переменных), не обращая внимания на значения симплекс-разностей небазисных переменных до того момента, пока φ не примет нулевого значения. Симплекс-таблицы, отражающие поиск оптимального решения для вспомогательной задачи (3.27), представлены в табл. 3.8.

Таблица 3.8

Итерация	Базисные переменные	Значение	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
0	y_3	20	1	1	1	0	0	0	0	0
	y_4	20	−1	4	0	1	0	0	0	0
	y_7	10	1	0	0	0	−1	0	1	0
	y_8	5	0	1	0	0	0	−1	0	1
	$-\varphi$	15	1	1	0	0	−1	−1	0	0
	$-f$	0	3	4	0	0	0	0	0	0
1	y_3	10	0	1	1	0	1	0	−1	0
	y_4	30	0	4	0	1	−1	0	1	0
	y_1	10	1	0	0	0	−1	0	1	0
	y_8	5	0	1	0	0	0	−1	0	1
	$-\varphi$	5	0	1	0	0	0	−1	−1	0
	$-f$	−30	0	4	0	0	3	0	−3	0
2	y_3	5	0	0	1	0	1	1	−1	−1
	y_4	10	0	0	0	1	−1	4	1	−4
	y_1	10	1	0	0	0	−1	0	1	0
	y_2	5	0	1	0	0	0	−1	0	1
	$-\varphi$	0	0	0	0	0	0	0	−1	−1
	$-f$	−50	0	0	0	0	3	4	−3	−4

Итак, начальное базисное решение для задачи линейного программирования (3.26) имеет вид $Y = (10,\ 5,\ 5,\ 10,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$ и в преобразованном варианте $f = 50 + 3y_5 + 4y_6$. В табл. 3.9 приведены симплекс-таблицы, отражающие процесс нахождения оптимального решения для (3.26). Начальная симплекс-таблица основной задачи получается из симплекс-таблицы вспомогательной задачи (см. табл. 3.8) вычеркиванием столбцов, соответствующих искусственным переменным y_7 и y_8, и строки, соответствующей целевой функции φ вспомогательной задачи.

Таблица 3.9

Итерация	Базисные переменные	Значение	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
0	y_3	5	0	0	1	0	1	1
	y_4	10	0	0	0	1	−1	**4**
	y_1	10	1	0	0	0	−1	0
	y_2	5	0	1	0	0	0	−1
	$-f$	−50	0	0	0	0	3	4
1	y_3	5/2	0	0	1	−1/4	**5/4**	0
	y_6	5/2	0	0	0	1/4	−1/4	1
	y_1	10	1	0	0	0	−1	0
	y_2	15/2	0	1	0	1/4	−1/4	0
	$-f$	−60	0	0	0	−1	4	0
2	y_5	2	0	0	4/5	−1/5	1	0
	y_6	3	0	0	1/5	1/5	0	1
	y_1	12	1	0	4/5	−1/5	0	0
	y_2	8	0	1	1/5	1/5	0	0
	$-f$	−68	0	0	−16/5	−1/5	0	0

Оптимальному решению $Y^* = (12\ \ 8\ \ 0\ \ 0\ \ 2\ \ 3)^{\mathrm{T}}$ соответствует значение целевой функции $f = 68$. Решая рассмотренную задачу линейного программирования графическим методом, можно непосредственно убедиться в том, что ее оптимальное решение $X^* = (12\ \ 8)^{\mathrm{T}}$. #

Пример 3.10. Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \to \max; \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 2, \quad 3x_1 + 4x_2 \geqslant 12, \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \end{cases}$$

(рис. 3.6) или в стандартной форме:

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 \to \max; \\ 2y_1 + y_2 + y_3 = 2, \\ 3y_1 + 4y_2 - y_4 = 12, \\ y_k \geqslant 0, \quad k = \overline{1,4}, \end{cases}$$

где $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, а y_3 и y_4 — новые переменные.

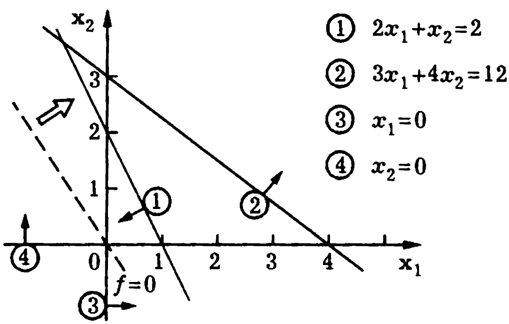


Рис. 3.6

В рассматриваемом случае в обозначениях (2.1) $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \varnothing$, $I_3 = \{2\}$. Вводим искусственное переменное модели y_5 и записываем вспомогательную задачу линейного программирования в стандартной форме:

$$\begin{cases} \varphi(y_1, \ldots, y_5) = -y_5 \to \max; \\ 2y_1 + y_2 + y_3 = 2, \\ 3y_1 + 4y_2 - y_4 + y_5 = 12, \\ y_k \geqslant 0, \quad k = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Для вспомогательной задачи начальное базисное решение имеет вид $\omega = (0\ \ 0\ \ 2\ \ 0\ \ 12)^{\mathrm{T}}$, базисными переменными являются y_3, y_5, а целевую функцию φ можно представить следующим образом: $\varphi = -12 + 3y_1 + 4y_2 - y_4$. Дальнейшее решение вспомогательной задачи представлено в табл. 3.10.

Таблица 3.10

Итерация	Базисные переменные	Значение	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
0	y_3	2	2	**1**	1	0	0
	y_5	12	3	4	0	−1	1
	$-\varphi$	12	3	4	0	−1	0
	$-f$	0	3	2	0	0	0
1	y_2	2	2	1	1	0	0
	y_5	4	−5	0	−4	−1	1
	$-\varphi$	4	−5	0	−4	−1	0
	$-f$	−4	−1	0	−2	0	0

Вспомогательная задача линейного программирования имеет оптимальное решение $\omega^* = (0\ \ 2\ \ 0\ \ 0\ \ 4)^{\mathrm{T}}$. В данном случае рассматриваемая задача не имеет допустимых решений, так как оптимальное значение целевой функции φ вспомогательной задачи отлично от нуля. #

3.4. Анализ на чувствительность

В **2.1** показано, что для любой практической *задачи линейного программирования* при известном *оптимальном решении* целесообразно проводить *анализ на чувствительность*. С приемами проведения этого анализа мы ознакомились, применяя *геометрический метод* решения задач линейного программирования (см. примеры 2.2, 2.3). В общем случае приемы, используемые при проведении анализа задач линейного программирования на чувствительность при известном оптимальном решении, весьма просты, хотя и отличаются некоторой громоздкостью. Для их иллюстраций обратимся к следующей *задаче распределения ограниченных ресурсов.*

Пример 3.11. Рассмотрим *задачу линейного программирования*

$$\begin{cases} f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 4x_1+5x_2+9x_3+11x_4 \to \max; \\ x_1+x_2+x_3+x_4 \leqslant 15, \\ 7x_1+5x_2+3x_3+2x_4 \leqslant 120, \\ 3x_1+5x_2+10x_3+15x_4 \leqslant 100, \quad x_k \geqslant 0, \quad k=\overline{1,4}, \end{cases}$$

которая *в стандартной форме* имеет вид

$$\begin{cases} 4y_1+5y_2+9y_3+11y_4 \to \max; \\ y_1+y_2+y_3+y_4+y_5 = 15, \\ 7y_1+5y_2+3y_3+2y_4+y_6 = 120, \\ 3y_1+5y_2+10y_3+15y_4+y_7 = 100, \quad y_k \geqslant 0, \quad k=\overline{1,7}, \end{cases} \tag{3.28}$$

где $y_k = x_k$, $k=\overline{1,4}$, а y_5, y_6, y_7 — новые переменные. Решение задачи с использованием *симплекс-таблиц* представлено в табл. 3.11.

Оптимальному решению $Y^* = (50/7 \ 0 \ 55/7 \ 0 \ 0 \ 325/7 \ 0)^{\mathrm{T}}$ соответствует значение целевой функции $f = 695/7$. При этом *базисными переменными* в задаче (3.28) при последней итерации *симплекс-метода* являются y_1, y_3, y_6, а *свободными переменными* — y_2, y_4, y_5, y_7. #

Проводя анализ задачи линейного программирования на чувствительность при известном оптимальном решении, прежде всего определяют диапазоны допустимых изменений коэффициентов при переменных в *целевой функции* f. При этом под ***допустимыми изменениями*** понимают такие изменения этих коэффициентов, при которых ***оптимальный базис*** рассматриваемой ***задачи линейного программирования*** (т.е. базис при последней итерации симплекс-метода, соответствующий оптимальному решению) остается оптимальным.

Таблица 3.11

Итерация	Базисные переменные	Значение	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
0	y_5	15	1	1	1	1	1	0	0
	y_6	120	7	5	3	2	0	1	0
	y_7	100	3	5	10	**15**	0	0	1
	$-f$	0	4	5	9	11	0	0	0
1	y_5	25/3	**4/5**	2/3	1/3	0	1	0	−1/15
	y_6	320/3	33/5	13/3	5/3	0	0	1	−2/15
	y_4	20/3	1/5	1/3	2/3	1	0	0	1/15
	$-f$	−220/3	9/5	4/3	5/3	0	0	0	−11/15
2	y_1	125/12	1	5/6	5/12	0	5/4	0	−1/12
	y_6	455/12	0	−7/6	−13/12	0	−33/4	1	5/12
	y_4	55/12	0	1/6	**7/12**	1	−1/4	0	1/12
	$-f$	−1105/12	0	−1/6	11/12	0	−9/4	0	−7/12
3	y_1	50/7	1	5/7	0	−5/7	10/7	0	−1/7
	y_6	325/7	0	−6/7	0	13/7	−61/7	1	4/7
	y_3	55/7	0	2/7	1	12/7	−3/7	0	1/7
	$-f$	−695/7	0	−3/7	0	−11/7	−13/7	0	−5/7

Пример 3.12. Продолжим рассмотрение задачи линейного программирования в стандартной форме (3.28). Предположим, что коэффициенты при переменных модели в целевой функции стали другими:

$$f(y_1, y_2, y_3, y_4) = (4+\varepsilon_1)y_1 + (5+\varepsilon_2)y_2 + (9+\varepsilon_3)y_3 + (11+\varepsilon_4)y_4.$$

Чтобы на нулевой итерации *ведущим элементом симплекс-таблицы* оставалось число 15 (см. табл. 3.11), должно выполняться условие

$$0 < 11+\varepsilon_4 = \max\{4+\varepsilon_1,\ 5+\varepsilon_2,\ 9+\varepsilon_3,\ 11+\varepsilon_4\},$$

приводящее к системе неравенств

$$\varepsilon_4 > -11, \quad \varepsilon_4 - \varepsilon_3 > -2, \quad \varepsilon_4 - \varepsilon_2 > -6, \quad \varepsilon_4 - \varepsilon_1 > -7. \qquad (3.29)$$

В этом случае на первой итерации симплекс-разности равны:

$$\frac{9+5\varepsilon_1-\varepsilon_4}{5}, \quad \frac{4+3\varepsilon_2-\varepsilon_4}{3}, \quad \frac{5+3\varepsilon_3-2\varepsilon_4}{3}, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad \frac{-11-\varepsilon_4}{15}.$$

Таким образом, чтобы на первой итерации ведущим элементом симплекс-таблицы оставалось число 4/5 (см. табл. 3.11), должно выполняться условие

$$0 < \frac{9+5\varepsilon_1-\varepsilon_4}{5} =$$
$$= \max\left\{\frac{9+5\varepsilon_1-\varepsilon_4}{5}, \frac{4+3\varepsilon_2-\varepsilon_4}{3}, \frac{5+3\varepsilon_3-2\varepsilon_4}{3}, \frac{-11-\varepsilon_4}{15}\right\},$$

приводящее к системе неравенств

$$\begin{cases} \varepsilon_4 - 5\varepsilon_1 < 9, \\ 2\varepsilon_4 + 15\varepsilon_1 - 15\varepsilon_2 > -7, \\ 7\varepsilon_4 + 15\varepsilon_1 - 15\varepsilon_3 > -2, \\ 4\varepsilon_4 - 15\varepsilon_1 < 28. \end{cases} \tag{3.30}$$

Если числа ε_k, $k = \overline{1, 4}$, удовлетворяют неравенствам (3.29), (3.30), то на второй итерации симплекс-разности будут равны: 0, $(-1 - 5\varepsilon_1 + 6\varepsilon_2 - \varepsilon_4)/6$, $(11 - 5\varepsilon_1 + 12\varepsilon_3 - 7\varepsilon_4)/12$, 0, $(-9 - 5\varepsilon_1 + \varepsilon_4)/4$, 0, $(-7 + \varepsilon_1 - \varepsilon_4)/12)$. Число 7/12 будет ведущим элементом симплекс-таблицы (см. табл. 3.11), если

$$0 < \frac{11 - 5\varepsilon_1 + 12\varepsilon_3 - 7\varepsilon_4}{12} = \max\{d_2,\ d_3,\ d_5,\ d_7\},$$

где

$$d_2 = \frac{-1 - 5\varepsilon_1 + 6\varepsilon_2 - \varepsilon_4}{6}, \qquad d_3 = \frac{11 - 5\varepsilon_1 + 12\varepsilon_3 - 7\varepsilon_4}{12},$$
$$d_5 = \frac{-9 - 5\varepsilon_1 + \varepsilon_4}{4}, \qquad d_7 = \frac{-7 + \varepsilon_1 - \varepsilon_4}{12},$$

или, что то же самое,

$$\begin{cases} 5\varepsilon_1 - 12\varepsilon_3 + 7\varepsilon_4 < 11, \\ 5\varepsilon_1 - 12\varepsilon_2 + 12\varepsilon_3 - 5\varepsilon_4 > -13, \\ 5\varepsilon_1 + 6\varepsilon_3 - 5\varepsilon_4 > -19, \\ \varepsilon_1 - 2\varepsilon_3 + \varepsilon_4 < 3. \end{cases} \tag{3.31}$$

Если четыре числа ε_1, ε_2, ε_3 и ε_4 удовлетворяют условиям (3.29)–(3.31), то на третьей итерации симплекс-разности 0, $(-3 - 5\varepsilon_1 + 7\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3)/7$, 0, $(-11 + 5\varepsilon_1 - 12\varepsilon_3 + 7\varepsilon_4)/7$, $(-13 - 10\varepsilon_1 + 3\varepsilon_3)/7$, 0, $(-5 + \varepsilon_1 - \varepsilon_3)/7$ не должны быть положительными, т.е.

$$\begin{cases} 5\varepsilon_1 - 7\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 \geqslant -3, \\ 5\varepsilon_1 - 12\varepsilon_3 + 7\varepsilon_4 \leqslant 11, \\ 10\varepsilon_1 - 3\varepsilon_3 \geqslant 13, \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \leqslant 5. \end{cases} \tag{3.32}$$

При выполнении условий (3.29)–(3.32) третья итерация симплекс-метода является завершающей, и оптимальное решение, найденное при рассмотрении примера 3.11, так же, как и оптимальный базис, остается неизменным. #

Из примера 3.12 видно, что процедура определения диапазонов допустимых изменений коэффициентов в целевой функции является достаточно громоздкой. Но на практике подобные исследования чаще всего связаны с анализом допустимых изменений ε_k *удельной прибыли* c_k k-го вида производственной деятельности при неизменности значений всех остальных ее параметров. В этом случае рассмотренная процедура заметно упрощается. В частности, для ε_1 в рассмотренной задаче допустимыми являются изменения от $-2/15$ и до $11/5$, т.е. при любом $\acute{c}_1$ из интервала $(58/15, 93/15)$ оптимальное решение задачи линейного программирования, рассмотренной в примере 3.11, остается неизменным.

Следующий этап анализа математической модели (2.3) задачи о распределении ограниченных ресурсов на чувствительность при известном оптимальном решении связан с определением диапазонов допустимых изменений параметров b_i, $i=\overline{1,n}$. Напомним, что величина b_i характеризует предельно возможный объем потребления i-го ресурса (см. **2.1**).

Пример 3.13. Продолжим обсуждение задачи линейного программирования (3.28). Сначала рассмотрим изменение параметра b_2, для чего в (3.28) положим $b_2 = 120+\delta_2$. Заметим, что эта вариация соответствует новому переменному модели y_6, являющемуся базисным переменным для оптимального базиса (см. табл. 3.11). Если в табл. 3.11 на нулевой итерации заменить 120 на $120+\delta_2$ и потребовать неизменности ведущих элементов всех симплекс-таблиц и допустимости получаемых решений, то должны выполняться неравенства:

а) на нулевой итерации

$$120+\delta_2 \geqslant 0, \qquad \frac{120+\delta_2}{2} > \frac{100}{15};$$

б) на первой итерации

$$\frac{320}{3}+\delta_2 \geqslant 0, \qquad \left(\frac{320}{3}+\delta_2\right)\frac{5}{33} > \frac{25}{3}\cdot\frac{5}{4};$$

в) на второй итерации

$$\frac{455}{12}+\delta_2 \geqslant 0;$$

г) на третьей итерации

$$\frac{325}{7}+\delta_2 \geqslant 0.$$

Таким образом, если $\delta_2 > -455/12$, то оптимальный базис остается неизменным, а оптимальное решение имеет вид

$$Y^* = \begin{pmatrix} \dfrac{50}{7} & 0 & \dfrac{55}{7} & 0 & 0 & \dfrac{325}{7}+\delta_2 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Теперь рассмотрим вариацию параметра b_1 и в (3.28) заменим 15 на $15+\delta_1$. Заметим, что эта вариация соответствует новому переменному y_5, которое не является базисным для оптимального базиса.

Итак, в табл. 3.11 на нулевой итерации заменим 15 на $15+\delta_1$ и потребуем неизменности ведущих элементов всех симплекс-таблиц и допустимости получаемых решений. Тогда должны выполняться неравенства:

а) на нулевой итерации

$$15+\delta_1 \geqslant 0, \quad 15+\delta_1 > \frac{100}{15};$$

б) на первой итерации

$$\frac{25}{3}+\delta_1 \geqslant 0, \quad \left(\frac{25}{3}+\delta_1\right)\frac{5}{4} < \frac{320}{3}\cdot\frac{5}{33};$$

в) на второй итерации

$$\frac{55}{12}-\frac{\delta_1}{4} \geqslant 0, \quad \frac{125}{12}+\frac{5}{4}\delta_1 \geqslant 0, \quad \frac{455}{12}-\frac{33}{4}\delta_1 \geqslant 0,$$

$$\left(\frac{55}{12}-\frac{1}{4}\delta_1\right)\frac{12}{7} < \left(\frac{125}{12}+\frac{5}{4}\delta_1\right)\frac{12}{5};$$

г) на третьей итерации

$$120+24\delta_1 \geqslant 0, \quad 55-3\delta_1 \geqslant 0, \quad 325-61\delta_1 \geqslant 0.$$

Из этих неравенств находим, что

$$\delta_1 > -\frac{25}{3}, \quad -\frac{25}{3} \leqslant \delta_1 < \frac{455}{99}, \quad -5 < \delta_1 \leqslant \frac{455}{99}, \quad -5 \leqslant \delta_1 \leqslant \frac{325}{61}.$$

Таким образом, если $-5 < \delta_1 < 455/99$, то оптимальный базис остается неизменным и оптимальное решение имеет вид

$$Y^* = \begin{pmatrix} \dfrac{50+10\delta_1}{7} & 0 & \dfrac{55-3\delta_1}{7} & 0 & 0 & \dfrac{325-61\delta_1}{7} & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Аналогично проводится анализ возможных вариаций параметра $b_3 = 100$ и возможных одновременных вариаций параметров $\{b_i\}$. #

Рассмотренные выше приемы формально позволяют провести анализ модели на чувствительность для любой задачи линейного программирования. Однако они отличаются громоздкостью и трудоемкостью, а потому не нашли широкого практического применения.

3.5. Двойственная задача линейного программирования

В *математическом программировании* и, как следствие, в *линейном программировании* существует понятие двойственности [XIV], которое позволяет установить взаимосвязи для различных методов *анализа математических моделей на чувствительность*. Поэтому приступим к изучению некоторых аспектов двойственности в линейном программировании.

С каждой *задачей линейного программирования* вида

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k x_k \to \max; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \leqslant b_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ x_k \geqslant 0, k = \overline{1, n}, \end{cases} \tag{3.33}$$

можно связать другую задачу линейного программирования

$$\begin{cases} h(z_1, \dots, z_m) = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i z_i \to \min; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ik} z_i \geqslant c_k, \quad k = \overline{1, n}, \\ z_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{3.34}$$

Задачу (3.34) называют ***двойственной задачей линейного программирования*** по отношению к задаче (3.33) (последнюю при этом часто называют ***прямой задачей линейного программирования***).

Введя обозначения

$$\begin{cases} c=(c_1\ \dots\ c_n), \quad b=(b_1\ \dots\ b_m)^{\mathrm{T}}, \quad A=(a_{ik})\in M_{mn}(\mathbb{R}), \\ X=(x_1\ \dots\ x_n)^{\mathrm{T}}, \quad Z=(z_1\ \dots\ z_m)^{\mathrm{T}}, \end{cases} \tag{3.35}$$

прямую и двойственную задачи линейного программирования можно записать в векторном виде:

$$\text{прямая задача} \qquad \begin{cases} f(X)=cX\to\max; \\ AX\leqslant b, \quad X\geqslant \mathbf{0}_n; \end{cases} \tag{3.36}$$

$$\text{двойственная задача} \qquad \begin{cases} h(Z)=b^{\mathrm{T}}Z\to\min; \\ A^{\mathrm{T}}Z\geqslant c^{\mathrm{T}}, \quad Z\geqslant \mathbf{0}_m. \end{cases} \tag{3.37}$$

Отметим, что задача линейного программирования, двойственная к задаче (3.37), совпадает с исходной задачей линейного программирования (3.36).

Пример 3.14. Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} \varphi(x_1,x_2,x_3)=x_1-4x_2-3x_3\to\min; \\ 3x_1+4x_2+x_3\leqslant 7, \\ x_1+2x_2+x_3=6, \\ x_3\geqslant 4, \\ x_k\geqslant 0, \quad k=\overline{1,3}. \end{cases}$$

В сформулированной задаче заменим минимизируемую функцию φ максимизируемой функцией $f=-\varphi$. Неравенство $x_3\geqslant 4$ эквивалентно неравенству $-x_3\leqslant -4$, а равенство $x_1+2x_2+x_3=$ $=6$ можно представить как два неравенства: $x_1+2x_2+x_3\leqslant 6$ и

$-x_1 - 2x_2 - x_3 \leqslant -6$. Таким образом, рассматриваемую задачу линейного программирования можно представить в виде (3.33):

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max; \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 \leqslant 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 6, \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 \leqslant -6, \\ -x_3 \leqslant -4, \\ x_k \geqslant 0, \quad k = \overline{1,3}. \end{cases}$$

В этом случае в соответствии с (3.35) имеем $m = 4$, $n = 3$ и

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad c = (-1 \;\; 4 \;\; 1).$$

Поэтому двойственная задача имеет следующий вид:

$$\begin{cases} h(z_1, z_2, z_3, z_4) = 7z_1 + 6z_2 - 6z_3 - 4z_4 \to \min; \\ 3z_1 + z_2 - z_3 \geqslant -1, \\ 4z_1 + 2z_2 - 2z_3 \geqslant 4, \\ z_1 + z_2 - z_3 - z_4 \geqslant 1, \\ z_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Заметим, что если в двойственной задаче ввести *переменное* $z = z_2 - z_3$, которое *не ограничено в знаке*, то эта задача сводится к минимизации функции $h^* = 7z_1 + 6z - 4z_4$ при ограничениях:

$$3z_1 + z \geqslant -1, \quad 4z_1 + 2z \geqslant 4, \quad z_1 + z - z_4 \geqslant 1, \quad z_1 \geqslant 0, \quad z_4 \geqslant 0. \quad \#$$

Можно показать, что: а) если в прямой задаче линейного программирования есть ограничения типа равенства, то в двойственной задаче им соответствуют переменные, которые не ограничены в знаке (см. пример 3.14); б) если в прямой задаче линейного программирования есть переменные, которые не ограничены в знаке, то в двойственной задаче им соответствуют ограничения типа равенства (см. пример 3.15).

Пример 3.15. Пусть необходимо найти максимум функции $f^*(x_1, x) = 6x_1 + 10x$ при ограничениях: $5x_1 + 3x \geqslant 10$, $x_1 - x \leqslant 4$, $x_1 \geqslant 0$ и условии, что переменное x не ограничено в знаке.

Полагая $x = x_2 - x_3$, где $x_2 \geqslant 0$ и $x_3 \geqslant 0$, приходим к прямой задаче линейного программирования:

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, x_3) = 6x_1 + 10x_2 - 10x_3 \to \max; \\ -5x_1 - 3x_2 + 3x_3 \leqslant -10, \\ x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 4, \\ x_k \geqslant 0, \quad k = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Двойственная ей задача имеет следующий вид:

$$\begin{cases} h(z_1, z_2) = -10z_1 + 4z_2 \to \min; \\ -5z_1 + z_2 \geqslant 6, \\ -3z_1 - z_2 \geqslant 10, \\ 3z_1 + z_2 \geqslant -10, \\ z_1 \geqslant 0, \quad z_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Два ограничения типа неравенства $-3z_1 - z_2 \geqslant 10$ и $3z_1 + z_2 \geqslant$ $\geqslant -10$ можно заменить одним ограничением типа равенства $3z_1 + z_2 = -10$. #

Вернемся к прямой и двойственной задачам линейного программирования, записанным в матричной форме (3.36) и (3.37). Пусть задача (3.37) — это исходная задача. Если рассматривать ее как прямую задачу линейного программнрования, то необходимо ее преобразовать:

$$\begin{cases} -b^{\mathrm{T}}Z \to \max; \\ -A^{\mathrm{T}}Z \leqslant -c^{\mathrm{T}}; \quad Z \geqslant \mathbf{0}_m. \end{cases}$$

Тогда двойственная ей задача линейного программирования будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} -cX \to \min; \\ -AX \geqslant -b, \quad X \geqslant \mathbf{0}_n. \end{cases} \tag{3.38}$$

А так как (3.38) совпадает с (3.36), то мы пришли к ранее отмеченному свойству: двойственная задача к двойственной задаче линейного программирования — это прямая задача линейного программирования.

Таким образом, в системе „прямая — двойственная“ обе задачи линейного программирования являются равноправными. Любую из них можно рассматривать как прямую, и тогда вторая будет двойственной ей.

Теорема 3.6. Если прямая (3.36) и двойственная (3.37) задачи линейного программирования имеют непустые ограниченные множества G и H *допустимых решений*, то для любых $X \in G$ и $Z \in H$ имеет место неравенство

$$cX \leqslant b^{\mathrm{T}} Z, \tag{3.39}$$

т.е. значение целевой функции прямой задачи не может превосходить значение целевой функции двойственной задачи.

◄ По условию множества G и H не пусты. Пусть $X \in G$ и $Z \in H$. Тогда $AX \leqslant b$, $Z \geqslant \mathbf{0}_m$ и $A^{\mathrm{T}} Z \geqslant c^{\mathrm{T}}$, $X \geqslant \mathbf{0}_n$.

Векторное равенство $AX \leqslant b$ представляет собой совокупность скалярных неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Умножив каждое i-е неравенство этой совокупности на $z_i \geqslant 0$ и просуммировав их, приходим к неравенству

$$\sum_{i=1}^{m} z_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} z_i b_i,$$

или в матричной записи

$$Z^{\mathrm{T}}AX \leqslant Z^{\mathrm{T}}b.$$

Аналогично из векторных неравенств $A^{\mathrm{T}}Z \geqslant c^{\mathrm{T}}$, $X \geqslant \Theta_n$ может быть получено неравенство

$$X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Z \geqslant X^{\mathrm{T}}c^{\mathrm{T}}.$$

Таким образом,

$$cX = X^{\mathrm{T}}c^{\mathrm{T}} \leqslant X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Z = Z^{\mathrm{T}}AX \leqslant Z^{\mathrm{T}}b = b^{\mathrm{T}}Z,$$

откуда и следует неравенство (3.39). ►

Теорема 3.7. Если у прямой (3.36) и двойственной (3.37) задач линейного программирования множества G и H допустимых решений не пустые и ограниченные, причем существуют такие допустимые решения $X^* \in G$, $Z^* \in H$, что

$$cX^* = b^{\mathrm{T}}Z^*, \tag{3.40}$$

то допустимые решения X^* и Z^* являются *оптимальными решениями*.

◄ Согласно теореме 3.6, для любого допустимого решения $X \in$ $\in G$ прямой задачи выполняется неравенство (3.39): $cX \leqslant b^{\mathrm{T}}Z^*$. Таким образом, если существует такое $X^* \in G$, что имеет место равенство (3.40), то $cX \leqslant cX^*$ для любого $X \in G$ и поэтому X^* — оптимальное решение прямой задачи.

Аналогично для любого допустимого решения $Z \in H$ двойственной задачи выполняется неравенство $cX^* \leqslant b^{\mathrm{T}}Z$. Таким образом, если существует $Z^* \in H$, такое, что выполнено равенство (3.40), то $b^{\mathrm{T}}Z^* \leqslant b^{\mathrm{T}}Z$ для любого $Z \in H$ и поэтому Z^* — оптимальное решение двойственной задачи. ►

Теорема 3.8. Если X^* и Z^* — оптимальные решения прямой (3.33) и двойственной (3.34) задач линейного программирования, то (в обозначениях (3.35)) имеет место равенство (3.40).

◀ Пусть прямая задача *линейного программирования* (3.33) представлена *в стандартной форме*:

$$\begin{cases} f(y_1,\ldots,y_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}c_k y_k\to\max;\\ \sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}y_k+y_{n+i}=b_i,\quad i=\overline{1,m},\\ y_k\geqslant 0,\quad k=\overline{1,n{+}m}.\end{cases}$$

Понятно, что для любого Y из множества Q допустимых решений и для любого набора действительных параметров u_j, $i=\overline{1,m}$, имеет место равенство

$$f(y_1,\ldots,y_n)-\sum_{i=1}^{m}b_iu_i=\sum_{k=1}^{n}\Bigl(c_k-\sum_{i=1}^{m}a_{ik}u_i\Bigr)y_k-\sum_{i=1}^{m}u_iy_{n+i}. \quad (3.41)$$

Если $Y^*=\bigl(y_1^*\ \ldots\ y_{n+m}^*\bigr)^{\mathrm{T}}\in Q$ — оптимальное решение прямой задачи линейного программирования в стандартной форме, а $y_{j_1}^*$, …, $y_{j_m}^*$ — значения базисных переменных в Y^*, то равенство (3.41) принимает вид

$$f(y_1^*,\ldots,y_n^*)-\sum_{i=1}^{m}b_iu_i=\sum_{k\in I_1}\Bigl(c_k-\sum_{i=1}^{m}a_{ik}u_i\Bigr)y_k^*-\sum_{i\in I_2}u_{i-n}y_i^*,$$

где

$$I_1=\{1,\ \ldots,\ n\}\cap\{j_1,\ \ldots,\ j_m\},$$
$$I_2=\{n+1,\ \ldots,\ n+m\}\cap\{j_1,\ \ldots,\ j_m\}.$$

При этом если

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ik}u_i=c_k,\quad k\in I_1;\qquad u_{i-n}=0,\quad i\in I_2,$$

то

$$f(y_1^*,\ldots,y_n^*)=\sum_{i=1}^{m} b_i u_i = b^{\mathrm{T}} u, \quad u=(u_1 \ \ldots \ u_m)^{\mathrm{T}}.$$

Если в равенстве (3.41) положить $y_i = y_i^*$, $i=\overline{1,n+m}$, то все коэффициенты при неизвестных в правой части будут неположительными:

$$c_k-\sum_{i=1}^{m} a_{ik} u_i \leqslant 0, \quad k=\overline{1,n};$$
$$-u_i \leqslant 0, \quad i=\overline{1,m},$$

или

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ik} u_i \geqslant c_k, \quad k=\overline{1,n};$$
$$u_i \geqslant 0, \quad i=\overline{1,m}.$$

Сравнивая полученные ограничения с ограничениями двойственной задачи (3.34) и учитывая, что $f(y_1^*,\ldots,y_n^*)=b^{\mathrm{T}}u$, убеждаемся в том, что $u=Z^*$ — оптимальное решение двойственной задачи.

Так как в системе „прямая — двойственная“ обе задачи являются равноправными, то теорема доказана. ▶

Замечание 3.5. Если при записи прямой задачи линейного программирования в стандартной форме воспользоваться обозначениями (3.2), (3.12), то для оптимального решения Y^* будем иметь

$$f=\Gamma_b Y_b^*, \qquad A_b Y_b^* = b, \qquad Y^* \geqslant \mathbf{0}_m.$$

Таким образом, $b^{\mathrm{T}}u=u^{\mathrm{T}}b=u^{\mathrm{T}}A_bY_b^*$ и $f-b^{\mathrm{T}}u=(\Gamma_b-u^{\mathrm{T}}A_b)Y_b^*$. При этом если $u^{\mathrm{T}}A_b=\Gamma_b$ (т.е. $u=(A_b^{-1})^{\mathrm{T}}\Gamma_b^{\mathrm{T}}$), то $f=b^{\mathrm{T}}u$. #

В общем случае нельзя гарантировать выполнение неравенств $u=(A_b^{-1})^{\mathrm{T}}\Gamma_b^{\mathrm{T}} \geqslant \mathbf{0}_m$ и $A^{\mathrm{T}}u \geqslant c^{\mathrm{T}}$, но если множество допустимых решений H двойственной задачи не является пустым, то (см. доказательство теоремы 3.8) $u=(A_b^{-1})^{\mathrm{T}}\Gamma_b^{\mathrm{T}}$ — ее оптимальное решение.

Теорема 3.9. Если $X^* = (x_1^* \ \ldots \ x_n^*)^{\mathrm{T}}$ и $Z^* = (z_1^* \ \ldots \ z_m^*)^{\mathrm{T}}$ — оптимальные решения прямой (3.33) и двойственной (3.34) задач линейного программирования, то

$$\Bigl(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k^* - b_i\Bigr) z_i^* = 0, \quad i = \overline{1, m}; \tag{3.42}$$

$$\Bigl(\sum_{i=1}^{m} a_{ik} z_i^* - c_k\Bigr) x_k^* = 0, \quad k = \overline{1, n}. \tag{3.43}$$

◀ Если X^* и Z^* — оптимальные решения, то, согласно (3.36) и (3.37), имеют место неравенства

$$AX^* \leqslant b, \quad X^* \geqslant \mathbf{0}_n, \quad A^{\mathrm{T}} Z^* \geqslant c^{\mathrm{T}}, \quad Z^* \geqslant \mathbf{0}_m.$$

Как и при доказательстве теоремы 3.6, можно показать, что в данном случае имеют место неравенства

$$(Z^*)^{\mathrm{T}} A X^* \leqslant (Z^*)^{\mathrm{T}} b, \quad (X^*)^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} Z^* \geqslant (X^*)^{\mathrm{T}} c^{\mathrm{T}}.$$

Из этих неравенств следует, что

$$cX^* = (X^*)^{\mathrm{T}} c^{\mathrm{T}} \leqslant (X^*)^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} Z^* = (Z^*)^{\mathrm{T}} A X^* \leqslant (Z^*)^{\mathrm{T}} b = b^{\mathrm{T}} Z^*.$$

Так как X^* и Z^* — оптимальные решения прямой (3.36) и двойственной (3.37) задач линейного программирования, то, согласно теореме 3.8, выполнено равенство $cX^* = b^{\mathrm{T}} Z^*$. Поэтому

$$(X^*)^{\mathrm{T}} c^{\mathrm{T}} = (X^*)^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} Z^*, \quad (Z^*)^{\mathrm{T}} A X^* = (Z^*)^{\mathrm{T}} b,$$

или

$$(X^*)^{\mathrm{T}} (A^{\mathrm{T}} Z^* - c^{\mathrm{T}}) = \mathbf{0}, \quad (Z^*)^{\mathrm{T}} (AX^* - b) = \mathbf{0}.$$

Учитывая обозначения (3.35), заключаем, что

$$\sum_{i=1}^{m} z_i^* \Bigl(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k^* - b_i\Bigr) = 0 = \sum_{k=1}^{n} x_k^* \Bigl(\sum_{i=1}^{m} a_{ik} z_i^* - c_k\Bigr),$$

откуда и следуют равенства (3.42), (3.43). Действительно, в соответствии с формулировками прямой (3.36) и двойственной (3.37) задач

$$z_i^* \geqslant 0, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k^* \leqslant b_i, \quad i = \overline{1, m};$$
$$x_k^* \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ik} z_i^* \geqslant c_k, \quad k = \overline{1, n}.$$

Поэтому

$$z_i^* \Bigl(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k^* - b_i\Bigr) \leqslant 0, \quad i = \overline{1, m};$$
$$x_k^* \Bigl(\sum_{i=1}^{m} a_{ik} z_i^* - c_k\Bigr) \geqslant 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

Остается лишь учесть, что если сумма неположительных (неотрицательных) слагаемых равна нулю, то равно нулю каждое из этих слагаемых. ▶

Пример 3.16. Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \to \max; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 10, \quad 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8, \\ x_k \geqslant 0, \quad k = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Считая эту задачу прямой задачей линейного программирования, преобразуем ее в соответствии с (3.33):

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \to \max; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 10, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leqslant 8, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 \leqslant -8, \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0. \end{cases} \tag{3.44}$$

Двойственная ей задача, согласно (3.34), примет вид

$$\begin{cases} h(z_1, z_2, z_3) = 10z_1 + 8z_2 - 8x_3 \to \min; \\ z_1 + 2z_2 - 2z_3 \geqslant 5, \\ 2z_1 - z_2 + z_3 \geqslant 12, \\ z_1 + 3z_2 - 3z_3 \geqslant 4, \\ z_1 \geqslant 0, \quad z_2 \geqslant 0, \quad z_3 \geqslant 0. \end{cases} \tag{3.45}$$

Для решения прямой задачи линейного программирования полагаем $y_k = x_k$, $k = 1, 2, 3$, вводим новые переменные модели y_k, $k = 4, 5, 6$, *искусственное переменное* y_7 и используем симплекс-метод при неизвестном начальном базисном решении (см. **3.3**). Результаты вычислений представлены в табл. 3.12. На первой итерации y_7 перестает быть базисным переменным, целевая функция φ вспомогательной задачи (3.25) достигает

Таблица 3.12

Итерация	Базисные переменные	Значение	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
0	y_4	10	1	2	1	1	0	0	0
	y_5	8	2	−1	3	0	1	0	0
	y_6	8	2	−1	**3**	0	0	−1	1
	$-\varphi$	8	2	−1	3	0	0	−1	0
	$-f$	0	5	12	4	0	0	0	0
1	y_4	22/3	1/3	**7/3**	0	1	0	1/3	−1/3
	y_5	0	0	0	0	0	1	1	−1
	y_3	8/3	2/3	−1/3	1	0	0	−1/3	1/3
	$-\varphi$	0	0	0	0	0	0	0	−1
	$-f$	−32/3	7/3	40/3	0	0	0	4/3	−4/3
2	y_2	22/7	1/7	1	0	3/7	0	1/7	
	y_5	0	0	0	0	0	1	1	
	y_3	26/7	**5/7**	0	1	1/7	0	−2/7	
	$-f$	−368/7	3/7	0	0	−40/7	0	−4/7	
3	y_2	12/5	0	1	−1/5	2/5	0	1/5	
	y_5	0	0	0	0	0	1	1	
	y_1	26/5	1	0	7/5	1/5	0	−2/5	
	$-f$	−274/5	0	0	−3/5	−29/5	0	−2/5	

своего максимального значения, и, начиная со второй итерации, в симплекс-таблице вычеркнуты столбец, соответствующий y_7, и строки, соответствующие φ.

Итак, оптимальному решению $X^* = (26/5\ 12/5\ 0)^{\mathrm{T}}$ прямой задачи линейного программирования (3.44) соответствует значение целевой функции $f = 274/5$.

Для решения двойственной задачи линейного программирования (3.45) полагаем $\omega_k = z_k$, $k = 1, 2, 3$, вводим новые переменные модели ω_4, ω_5, ω_6, три искусственных переменных ω_7, ω_8, ω_9 и (см. **3.3**) используем симплекс-метод при неизвестном начальном базисном решении (табл. 3.13). Целевая функция вспомогательной задачи в данном случае имеет вид

Таблица 3.13

Итерация	Базисные переменные	Значение	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9
0	ω_7	5	1	2	−2	−1	0	0	1	0	0
	ω_8	12	2	−1	1	0	−1	0	0	1	0
	ω_9	4	1	3	−3	0	0	−1	0	0	1
	$-\varphi$	21	4	4	−4	−1	−1	−1	0	0	0
	$-h$	0	−10	−8	8	0	0	0	0	0	0
1	ω_7	1	0	−1	1	−1	0	1	1	0	
	ω_8	4	0	−7	**−7**	0	−1	2	0	1	
	ω_1	4	1	3	−3	0	0	−1	0	0	
	$-\varphi$	5	0	−8	8	−1	−1	3	0	0	
	$-h$	40	0	22	−22	0	0	−10	0	0	
2	ω_7	3/7	0	0	0	−1	1/7	**5/7**	1		
	ω_3	4/7	0	−1	1	0	−1/7	2/7	0		
	ω_1	40/7	1	0	0	0	−3/7	−1/7	0		
	$-\varphi$	3/7	0	0	0	−1	1/7	5/7	0		
	$-h$	368/7	0	0	0	0	−22/7	−26/7	0		
3	ω_6	3/5	0	0	0	−7/5	1/5	1			
	ω_3	2/5	0	−1	1	2/5	−1/5	0			
	ω_1	29/5	1	0	0	−1/5	−2/5	0			
	$-\varphi$	0	0	0	0	0	0	0			
	$-h$	274/5	0	0	0	−26/5	−12/5	0			

$\varphi = -\omega_7 - \omega_8 - \omega_9$. По мере того как искусственные переменные перестают быть базисными, соответствующие столбцы симплекс-таблицы вычеркиваются, равно как и строки, соответствующие φ, вычеркиваются при достижении φ минимального значения.

Из табл. 3.13 следует, что на третьей итерации найдено начальное базисное решение двойственной задачи линейного программирования, которое оказалось ее оптимальным решением $Z^* = (29/5\ \ 0\ \ 2/5)^{\mathrm{T}}$. Заметим, что наличие допустимых решений означает, что (см. теорему 3.8) для оптимальных решений выполняется равенство (3.40): $cX^* = 274/5 = b^{\mathrm{T}}Z^*$. #

На практике наличие ограниченного оптимального решения одной из задач линейного программирования в системе „прямая — двойственная" практически всегда означает наличие ограниченного оптимального решения и у двойственной ей задачи. Это объясняется равноправием задач в системе „прямая — двойственная" и позволяет (см. замечание 3.5) по известному оптимальному решению прямой задачи находить оптимальное решение двойственной ей задачи. Заметим также, что наличие *неограниченного оптимального решения* прямой задачи линейного программирования, соответствующего бесконечному значению ее целевой функции, означает (см. теорему 3.6), что множество допустимых решений двойственной ей задачи пусто.

Если известно оптимальное решение одной из задач линейного программирования в системе „прямая — двойственная" и оно найдено с использованием симплекс-таблиц, то оптимальное решение двойственной ей задачи уже известно и может быть записано без дополнительных вычислений.

Пример 3.17. В табл. 3.12, описывающей решение задачи примера 3.16, на третьей итерации числа, расположенные на пересечении строки, обозначенной $-f$, и столбцов переменных y_4, y_5, y_6, соответственно равны $-29/5$, 0, $-2/5$, а оптимальное решение двойственной ей задачи имеет вид $Z^* = (29/5\ \ 0\ \ 2/5)^{\mathrm{T}}$.

Аналогично в табл. 3.13 на последней итерации числа, расположенные на пересечении строки, обозначенной $-h$, и столбцов переменных ω_4, ω_5, ω_6, соответственно равны $-26/5$, $-12/5$, 0, а оптимальное решение прямой задачи имеет вид $X^* = (26/5\ 12/5\ 0)^{\mathrm{T}}$. #

Теперь остановимся на экономической интерпретации переменных в задаче линейного программирования, являющейся двойственной по отношению к задаче распределения ограниченных ресурсов (см. задачу исследования операций (2.3), задачу 2.13 и пример 3.11). Рассматривая задачу распределения ограниченных ресурсов как прямую задачу, будем считать, что она записана в виде (3.33) или (3.36) с неотрицательными параметрами, а двойственная ей задача представлена в виде (3.34) или (3.37).

Пусть $f^* = cX^*$ — значение целевой функции задачи распределения ограниченных ресурсов, соответствующее оптимальному решению X^*, а $Z^* = (z_1^*, \ldots, z_m^*)^{\mathrm{T}}$ — оптимальное решение двойственной ей задачи. В этом случае, согласно теореме 3.8, имеет место равенство

$$f^* = \sum_{i=1}^{m} b_i z_i^*.$$

В соответствии с экономической интерпретацией f^* — максимально возможная прибыль (в денежных единицах), b_i — общее количество i-го ресурса (в принятых единицах). Поэтому значение z_i^* должно выражаться в денежных единицах на единицу измерения i-го ресурса ($i = \overline{1, m}$). Таким образом, переменное z_i двойственной задачи отражает „ценность“ i-го ресурса. В связи с этим переменные двойственной задачи называют еще ***теневыми ценами*** или ***скрытыми доходами***. ***Двойственные переменные***, т.е. переменные двойственной задачи, могут быть использованы для определения приоритетов используемых ресурсов в соответствии с их вкладом в прибыль, выражаемую значением целевой функции. Параметр

a_{ik} интерпретируют как норму потребления i-го ресурса в k-м производственном процессе, а сумма $a_{1k}z_1 + a_{2k}x_2 + \ldots + a_{mk}z_m$ определяет экономический эффект за счет k-го производственного процесса, вычисленный с учетом теневых цен. Ограничения, входящие в двойственную задачу, гарантируют строгую пропорциональность экономических эффектов отдельных производственных процессов затраченным усилиям, если имеет место оптимальный режим функционирования всей системы. Более того, при этих условиях исключаются варианты допустимых решений, не оправданных с экономической точки зрения.

Дадим экономическую интерпретацию теореме 3.9, суть которой выражается равенствами (3.42), (3.43):

а) если k-й производственный процесс является строго невыгодным с точки зрения теневых цен z_i^*, $i=\overline{1,m}$, соответствующих оптимальному решению $X^* = (x_1^* \ \ldots \ x_n^*)^{\mathrm{T}}$, то интенсивность его использования x_k^* должна быть равна нулю, т.е.

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ik}z_i^* - c_k > 0\right) \implies \left(x_k^* = 0\right);$$

б) если в оптимальном решении i-й ресурс используется не полностью, то его теневая цена должна быть равна нулю, т.е.

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k^* - b_i < 0\right) \implies \left(z_i^* = 0\right).$$

В заключение отметим, что объем вычислительных затрат, связанных с нахождением оптимального решения любой задачи линейного программирования, определяется в основном не числом переменных модели n, а числом ограничений m. А так как любую задачу линейного программирования можно рассматривать в системе „прямая — двойственная“ и решение любой из них симплекс-методом автоматически приводит к решению второй, то решать нужно ту задачу, у которой меньшее число ограничений.

Вопросы и задачи

3.1. Докажите, что любая точка ограниченного выпуклого замкнутого множества может быть представлена в виде выпуклой комбинации его крайних точек.

3.2. Пусть в (3.20) для всех $i = \overline{1, L}$ имеет место неравенство $(A_b^{-1} a_r)_i \leqslant 0$. Докажите, что в этом случае оптимальное решение Y^* задачи линейного программирования (2.11) не ограничено.

3.3. Может ли количество положительных базисных переменных превышать L на итерации симплекс-метода, если решается задача линейного программирования (2.11)? Ответ аргументируйте.

3.4. Возможны ли ситуации, при которых ведущий элемент симплекс-таблицы равен нулю или является отрицательным?

3.5. Можно ли утверждать, что если текущей итерации симплекс-метода соответствует вырожденное допустимое базисное решение, то и на следующей итерации будет получено вырожденное допустимое базисное решение?

3.6. Пусть значение целевой функции $\varphi^* < 0$ соответствует оптимальному решению вспомогательной задачи линейного программирования (3.25). Что означает этот результат для исходной задачи линейного программирования (3.24)?

3.7. Докажите, что ограничениям типа равенства в исходной задаче линейного программирования соответствуют переменные двойственной задачи, которые не ограничены в знаке.

3.8. Докажите, что если в исходной задаче линейного программирования есть переменные, которые не ограничены в знаке, то в двойственной задаче им соответствуют ограничения типа равенства.

3.9. Может ли двойственная задача линейного программирования иметь допустимое решение, если оптимальное решение соответствующей ей прямой задачи не ограничено?

3.10. Воспользовавшись симплекс-методом, найдите решения следующих задач линейного программирования:

$$\text{а)}\ \begin{cases} f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \to \max; \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 \leqslant 2, \quad x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leqslant 1, \\ x_k \geqslant 0, \quad k = \overline{1,3}; \end{cases}$$

$$\text{б)}\ \begin{cases} f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \to \min; \\ -x_2 + 4x_3 \geqslant 1, \quad -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leqslant 9, \\ -x_1 + 5x_3 \leqslant 1, \quad x_k \geqslant 0, \quad k = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Ответ: а) $X^* = (2/5\ \ 1/5\ \ 0)^{\mathrm{T}}$; б) $X^* = (0\ \ 1/5\ \ 3/10)^{\mathrm{T}}$.

3.11. Из фиксированного набора продуктов необходимо составить пищевой рацион, обладающий минимальной ценой и содержащий по крайней мере 20 единиц белков, 30 единиц углеводов, 10 единиц жиров и 40 единиц витаминов. Количество единиц белков, жиров, углеводов и витаминов в 1 кг (в 1 л) каждого вида продукта и его цена указаны в табл. 3.14. Проведите анализ задачи на чувствительность.

Таблица 3.14

Продукт	Белки	Углеводы	Жиры	Витамины	Цена
Хлеб	2	12	1	2	12
Соя	12	0	8	2	36
Рыба	10	0	3	4	32
Фрукты	1	4	0	6	18
Молоко	2	3	4	2	10

Ответ: цена — 150 (денежных единиц), состав — 5/6 кг рыбы, 5 кг фруктов, 4/3 л молока.

3.12. Найдите решения следующих задач линейного программирования:

а) $$\begin{cases} f(x_1,x_2,x_3) = -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 \to \min; \\ x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 4, \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leqslant 0, \\ x_k \geqslant 0, \quad k = \overline{1,3}; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} f(x_1,x_2) = x_1 + x_2 \to \min; \\ 7x_1 + 8x_2 \geqslant 56, \quad x_1 + 2x_2 \leqslant 6, \\ x_1 \geqslant 9, \quad x_2 \geqslant 0; \end{cases}$$

в) $$\begin{cases} f(x_1,x_2,x_3) = 8x_1 + 19x_2 + 7x_3 \to \max; \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leqslant 50, \quad 3x_1 + 4x_2 + x_3 \leqslant 25, \\ x_k \geqslant 0, \quad k = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Ответ: а) $G = \varnothing$; б) $G = \varnothing$; в) $X^* = (0 \ \ 25/9 \ \ 125/9)^{\mathrm{T}}$.

3.13. Запишите двойственную задачу линейного программирования для следующей задачи:

$$\begin{cases} f(x_1,x_2) = 11x_1 + 44x_2 \to \max; \\ 3x_1 + 5x_2 \leqslant 18, \quad x_1 + 9x_2 \leqslant 30, \quad 2x_1 + 7x_2 \leqslant 27, \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} h(z_1,z_2,z_3) = 18z_1 + 30z_2 + 27x_3 \to \min; \\ 3z_1 + z_2 + 2z_3 \geqslant 11, \quad 5z_1 + 9z_2 + 7z_3 \geqslant 44, \\ z_k \geqslant 0, \quad k = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.14. Фабрика производит три вида продукции. Для производства единицы продукции типа A требуются три единицы сырья α и единица сырья β. Для производства единицы продукции типа B требуются четыре единицы сырья α и три единицы сырья β, а для производства единицы продукции типа C — одна единица сырья α и две единицы сырья β. Производство единицы продукции типа A приносит прибыль в 3 денежные единицы, типа B — в 6 денежных единиц и типа C — в 2 денежные единицы.

Определите: а) оптимальный план производства продукции, максимизирующий суммарную прибыль, если в наличии имеются 20 единиц сырья α и 10 единиц сырья β; б) обоснованную цену за возможную поставку еще одной единицы сырья α (или β).

Ответ: а) произвести 4 единицы продукции типа A и 2 единицы продукции типа B, а продукцию типа C не производить; б) за поставку единицы сырья α платить 0,6 денежных единиц (для β — 1,2 денежных единиц).

3.15. С помощью симплекс-метода найдите решение следующей задачи линейного программирования:

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 18x_4 \to \min; \\ -x_1 + 1{,}5x_3 + x_4 \geqslant 1, \quad x_2 - 5x_3 + 4x_4 \geqslant 3, \\ x_k \geqslant 0, \quad k = \overline{1,4}. \end{cases}$$

С помощью симплекс-метода найдите решение двойственной задачи и сопоставьте полученные результаты.

Ответ: $X^* = (0\ \ 0\ \ 1/11\ \ 19/22)^{\mathrm{T}}$, $Z^* = (6\ \ 3)^{\mathrm{T}}$.

3.16. Задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 8x_4 \to \max; \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 4x_4 \leqslant -1, \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 \geqslant 3, \\ x_k \geqslant 0, \quad k = \overline{1,4}, \end{cases}$$

решите симплекс-методом, а двойственную ей задачу решите геометрическим методом. Сопоставьте полученные результаты.

Ответ: $X^* = (2\ \ 0\ \ 1\ \ 0)^{\mathrm{T}}$, $Z^* = (3/5\ \ 4/5)^{\mathrm{T}}$.

4. ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Общая постановка задачи *целочисленного программирования* отличается от общей постановки задачи линейного программирования лишь наличием дополнительного ограничения. Этим ограничением является ***требование целочисленности***, в соответствии с которым значения всех или части *переменных модели* в *оптимальном решении* являются целыми неотрицательными числами, т.е. принадлежат множеству $\mathbb{N} \cup \{0\}$. При этом если требование целочисленности распространяется на все переменные, то задачу целочисленного программирования называют ***полностью целочисленной задачей***. Если же требование целочисленности относится лишь к части переменных, то задачу называют ***частично целочисленной***. Задачу линейного программирования, отличающуюся от рассматриваемой задачи целочисленного программирования лишь отсутствием требования целочисленности, называют ***задачей с ослабленными ограничениями***, соответствующей задаче целочисленного программирования.

Материал этой главы посвящен анализу различных задач целочисленного программирования и изучению методов их решения. Чтобы понять, насколько важны с практической точки зрения задачи целочисленного программирования, достаточно обратиться к задаче распределения ограниченных ресурсов. В такой задаче некоторые ресурсы могут использоваться лишь в количествах, кратных соответствующей единице измерения. Эти ресурсы будут характеризоваться переменными модели, удовлетворяющими требованию целочисленности. Примерами подобных ресурсов являются штучные изделия: станки, грузовики, партии товаров, самолеты, компьютеры и т.д.

4.1. Методы решения задач целочисленного программирования

На первый взгляд наиболее естественным методом решения задач *целочисленного программирования* является ***метод округления***, реализация которого состоит из двух этапов. На первом этапе находят *оптимальное решение задачи* линейного программирования *с ослабленными ограничениями*, соответствующей рассматриваемой задаче целочисленного программирования. На втором этапе значения переменных в оптимальном решении X^*, не являющиеся целыми, округляют так, чтобы получить *допустимое решение* X^{**} с целочисленными значениями.

Соблазнительность использования метода округления понятна, особенно если погрешность округления невелика по сравнению со значениями округляемых переменных. Однако практическая реализация метода округления может привести к допустимому решению, значимо отличающемуся от оптимального решения исходной задачи целочисленного программирования.

Пример 4.1. Рассмотрим *полностью целочисленную задачу*

$$\begin{cases} x_1 + 1,5x_2 \to \max; \\ 2x_1 + 4x_2 \leqslant 17, \quad 10x_1 + 4x_2 \leqslant 45, \\ x_1, x_2 \geqslant 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Соответствующая задача линейного программирования с ослабленными ограничениями получается снятием ограничений $x_1, x_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ее оптимальное решение $X^* = (7/2\ \ 5/2)^{\mathrm{T}}$ может быть получено *геометрическим методом* (рис. 4.1). Этому решению соответствуют крайняя точка A множества G допустимых решений и значение *целевой функции* $f = 7{,}25$. В соответствии с методом округления получаем допустимое решение $X^{**} = (3\ \ 2)^{\mathrm{T}}$, значение целевой функции на котором равно $f = 6$. Однако на самом деле оптимальным решением целочисленной задачи (4.1) является $X^0 = (2\ 3)^{\mathrm{T}}$, при этом значение целевой функции равно $f = 6{,}5$. #

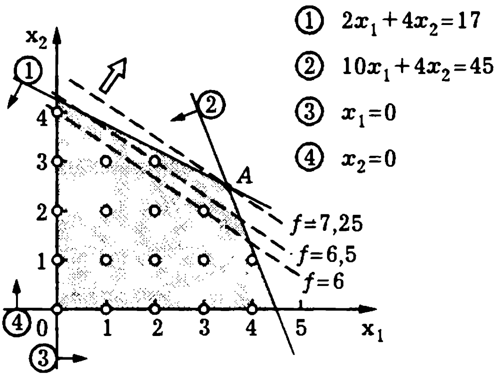


Рис. 4.1

Несостоятельность метода округления как общего метода решения задач целочисленного программирования обусловлена не только возможностью получения неоптимального решения. Дело заключается в том, что многие задачи *математического программирования*, не имеющие на первый взгляд никакого отношения к полностью или частично целочисленным задачам, могут быть сформулированы как задачи целочисленного программирования, в которых переменные модели принимают значения из множества $\{0, 1\}$. В этой ситуации процедура округления является логически неприемлемой.

Для иллюстрации основной идеи методов решения задач целочисленного программирования, известных как ***методы отсечений***, рассмотрим полностью целочисленную задачу, множество допустимых решений которой изображено на рис. 4.2. Допустимым решениям этой задачи соответствуют не все точки множества G допустимых решений, а лишь те, координаты которых удовлетворяют требованию целочисленности. Теоретически из множества G всегда можно выделить такое под-

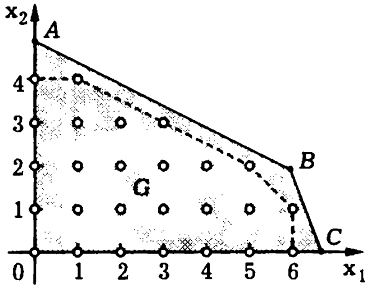


Рис. 4.2

множество G^*, что (см. рис. 4.2): а) оно содержит все точки множества G, координаты которых удовлетворяют требованию целочисленности; б) оно является выпуклым множеством; в) координаты всех его крайних точек удовлетворяют требованию целочисленности.

Если в рассматриваемой полностью целочисленной задаче множество G допустимых решений заменить множеством G^*, то это не может привести к изменению ее оптимального решения, так как G^* получено из G путем отсечения от него подмножества, заведомо не содержащего допустимых решений, удовлетворяющих требованию целочисленности. Но в этом случае оптимальное решение задачи линейного программирования с ослабленными ограничениями и множеством G^* допустимых решений соответствует крайней точке множества G^*. Как следствие, оно удовлетворяет требованию целочисленности и обеспечивает экстремальное значение целевой функции не только на G^*, но и на G, т.е. является оптимальным решением исходной полностью целочисленной задачи. Основные различия в методах отсечений связаны с процедурами выделения подмножества G^* множества допустимых решений задачи целочисленного программирования.

В основе ***комбинаторных методов*** решения задач целочисленного программирования лежит идея перебора всех элементов G множества допустимых решений, удовлетворяющих требованию целочисленности, с целью нахождения оптимального решения. При этом за счет использования различных специальных процедур, как правило, непосредственно рассматривают лишь часть элементов G, удовлетворяющих требованию целочисленности, а оставшиеся элементы учитывают некоторым косвенным образом.

Наиболее известным комбинаторным методом является ***метод ветвей и границ***, использующий процедуру решения задачи линейного программирования с ослабленными ограничениями, соответствующей исходной задаче целочисленного программирования. Если оптимальное решение X^* задачи линейного программирования с ослабленными ограничениями не удовлетворяет требованию целочисленности (на рис. 4.3 этому решению соответствует точка B), то из множества G допустимых решений выделяют два непересекающихся выпуклых подмножества K_1 и K_2, содержащих все допустимые решения из G, удовлетворяющих требованию целочисленности и не содержащих X^* (см. рис. 4.3). Это позволяет заменить рассматриваемую задачу целочисленного программирования совокупностью двух эквивалентных ей (в смысле оптимального решения $X^0 \in G$) задач с множествами допустимых решений K_1 и K_2 соответственно, так как $X^0 \in K_1$ или $X^0 \in K_2$. Различные аспекты практической реализации метода ветвей и границ для решения задач целочисленного программирования рассмотрены в **4.3**.

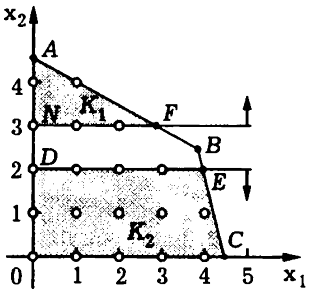


Рис. 4.3

Комбинаторные методы широко используют для решения задач *булева программирования*, т.е. для решения полностью целочисленных задач, переменные которых принимают значения из множества $\{0, 1\}$. Эти переменные называют ***булевыми переменными***. Свойства булевых переменных позволяют существенно упростить процедуры поиска оптимального решения.

К настоящему времени разработано значительное количество частных методов решения конкретных типов задач целочисленного программирования*. Тем не менее почти все эти методы и их модификации можно описать на основе единой принципиальной схемы, состоящей из трех элементов.

Элемент 1. Предусматривается процедура формирования и решения последовательности взаимосвязанных задач, которые называют ***задачами, порожденными исходной задачей***, или ***задачами-истоками***. При этом оптимальное решение по крайней мере одной из задач-истоков должно совпадать с оптимальным решением породившей их задачи.

Элемент 2. Каждой задаче, порожденной исходной задачей, ставится в соответствие так называемая ***ослабленная задача*** (*задача с ослабленными ограничениями*), оптимальное решение которой может быть найдено с гораздо меньшими затратами, чем оптимальное решение соответствующей ей задачи-истока. Специфика ослабленной задачи чаще всего заключается в том, что ее система ограничений является менее жесткой по сравнению с системой ограничений задачи-истока и определяет множество допустимых решений, содержащее все допустимые решения задачи-истока. Как правило, в целочисленном программировании ослабленная задача представляет собой задачу линейного программирования с ограничениями, более слабыми, чем в соответствующей целочисленной задаче-истоке. Очевидно, что если ослабленная задача не имеет допу-

*См.: *Вагнер Г.*, т. 2 или *Акоф Р.*, *Сасиени М.*, а также: Исследование операций: модели и применение / Под ред. *Д. Моудера* и *С. Элмаграби*.

стимых решений, то их не имеет и задача-исток. В некоторых модификациях методов целочисленного программирования целевая функция ослабленной задачи также может отличаться от целевой функции задачи-истока. В этом случае ***оптимальное значение целевой функции*** ослабленной задачи (т.е. значение, соответствующее оптимальному решению) должно быть не меньше оптимального значения целевой функции задачи-истока, если речь идет о задаче максимизации. Кроме того, оптимальное значение целевой функции ослабленной задачи определяет (для задачи максимизации) верхнюю границу для оптимального значения целевой функции задачи-истока.

Элемент 3. В результате анализа решения ослабленной задачи в зависимости от специфики метода, как правило, принимается решение, относящееся к задаче-истоку: а) исключить ее из рассмотрения; б) заменить одной порожденной задачей, выбранной по специальному правилу из определенной совокупности; в) заменить системой порожденных задач.

Следует отметить, что существуют и другие подходы к решению задач целочисленного программирования, которые в общем случае не гарантируют нахождения оптимального решения, но приводят к допустимому решению, близкому (в смысле значения целевой функции) к оптимальному, а иногда и совпадающему с ним. В основе одного из таких подходов лежит идея использования случайной выборки допустимых решений с последующим улучшением (в смысле значения целевой функции) каждого из них, когда возможность улучшения допустимого решения достаточно просто обнаружить.

4.2. Метод отсекающих плоскостей (метод Гомори)

Метод отсекающих плоскостей, известный также как ***метод Гомори***, относится к *методам отсечений* и является одним из наиболее широко используемых методов решения задач *целочисленного программирования*. Для уяснения специфических особенностей метода Гомори сначала обратимся к рассмотрению следующего элементарного примера.

Пример 4.2. Пусть необходимо найти решение *полностью целочисленной задачи*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \to \max; \\ 0{,}75x_1 + 1{,}5x_2 \leqslant 4{,}8; \\ x_1, x_2 \geqslant 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Понятно, что в данном случае можно воспользоваться *геометрическим методом* решения *задач линейного программирования* (рис. 4.4) и найти как решение $X^0 = (6\ 0)^{\mathrm{T}}$ исходной задачи целочисленного программирования, так и решение $X^* = (32/5\ 0)^{\mathrm{T}}$ соответствующей ей *задачи линейного программирования с ослабленными ограничениями*.

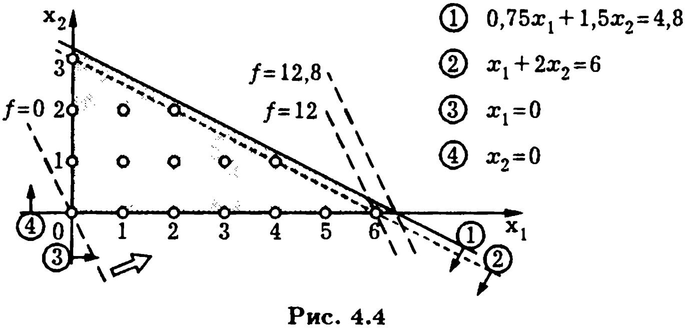


Рис. 4.4

В связи со спецификой задачи целочисленного программирования реализация метода Гомори предполагает преобразование ограничений задачи к эквивалентным им ограничениям, содержащим лишь целые коэффициенты. Это необходимый шаг. Из дальнейшего будет видно, что как исходные, так и новые *переменные* должны быть целочисленными. Между тем наличие дробных коэффициентов может приводить к нарушению целочисленности новых переменных. В этом случае метод отсекающих плоскостей может не давать *допустимого* целочисленного *решения* даже тогда, когда исходная задача такое решение имеет (см., например, задачу 4.13). В рассматриваемом случае ограничение $0{,}75x_1 + 1{,}5x_2 \leqslant 4{,}8$ преобразуется к эквивалентному ограничению $15x_1 + 30x_2 \leqslant 96$, а при переходе к *задаче линейного программирования в стандартной форме* с ослабленными ограничениями, соответствующей исходной полностью целочисленной задаче, оно принимает следующий вид:

$$15y_1 + 30y_2 + y_3 = 96, \tag{4.1}$$

где $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ и y_3 — новое неотрицательное переменное.

Получив *оптимальное решение* X^* задачи линейного программирования с ослабленными ограничениями, которое не удовлетворяет *требованию целочисленности* (табл. 4.1), конструируем дополнительное ограничение. Этому ограничению должны удовлетворять все допустимые решения рассматриваемой задачи линейного программирования с ослабленными ограничениями, для которых выполнено требование целочисленности, и не должно удовлетворять решение X^*, т.е. X^* перестает быть допустимым решением (см. рис. 4.4).

Таблица 4.1

Итерация	Базисные переменные	Значение	y_1	y_2	y_3
0	y_3	96	15	30	1
	$-f$	0	2	1	0
1	y_1	96/15	1	2	1/15
	$-f$	−192/15	0	−3	−2/15

С первой строки ***оптимальной симплекс-таблицы***, т.е. той таблицы, которая соответствует заключительной итерации *симплекс-метода* и приводит к оптимальному решению (см. табл. 4.1, итерацию 1), считываем уравнение

$$y_1 = \frac{96}{15} - 2y_2 - \frac{1}{15}y_3, \tag{4.2}$$

фактически представляющее собой исходное ограничение (4.1) после его умножения на $1/15$. Поэтому оно должно удовлетворяться для всех допустимых решений, в том числе и для тех, для которых выполнено требование целочисленности.

Для рассматриваемой полностью целочисленной задачи имеем $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Поэтому, согласно (4.2),

$$2y_2 + \frac{1}{15}y_3 - \frac{96}{15} \in \mathbb{Z}$$

и, как следствие, для любых $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}$ существует $a \in \mathbb{Z}$, такое, что

$$(2 - a_1)y_2 - \left(\frac{1}{15} - a_2\right)y_3 - \left(\frac{96}{15} - a_3\right) = a. \tag{4.3}$$

Каждое действительное число x можно разложить в сумму его целой части $\operatorname{int}(x)$ и дробной части $\operatorname{frac}(x)$. Напомним, что целая часть действительного числа x — это наибольшее целое число, не превосходящее x. Дробную часть числа x можно определить как действительное число $\operatorname{frac}(x) \in [0, 1)$, для которого разность $x - \operatorname{frac}(x)$ есть целое число.

Полагаем $a_1 = \operatorname{int}(2) = 2$, $a_2 = \operatorname{int}(1/15) = 0$ и $a_3 = \operatorname{int}(96/15) = 6$. В этом случае соотношение (4.3) может быть преобразовано к следующему уравнению:

$$\frac{1}{15}y_3 = a + \frac{6}{15}, \quad a \in \mathbb{Z}. \tag{4.4}$$

А так как $y_3 \geqslant 0$, то из (4.4) следует, что $a \geqslant 0$, и можно выписать новое ограничение, которое называют ***отсекающей плоскостью***:

$$\frac{1}{15}y_3 \geqslant \frac{6}{15}. \tag{4.5}$$

Использование неравенства (4.5) для нахождения решения рассматриваемой полностью целочисленной задачи предполагает введение нового переменного y_4 и представление полученного ограничения в стандартной форме:

$$\frac{1}{15}y_3 - y_4 = \frac{6}{15},$$

а также введение *искусственного переменного* y_5 и целевой функции $\varphi = -y_5$ вспомогательной задачи линейного программирования. Для этого достаточно оптимальную симплекс-таблицу уже решенной задачи линейного программирования с ослабленными ограничениями (см. табл. 4.1, итерацию 1) дополнить новыми столбцами, соответствующими переменным y_4, y_5, новой строкой, соответствующей целевой функции φ, и продолжить решение с использованием симплекс-таблиц (табл. 4.2). Оптимальному решению $Y^* = (6\ 0\ 6\ 0)^{\mathrm{T}}$ соответствует оптимальное решение $X^0 = (6\ 0)^{\mathrm{T}}$ рассматриваемой полностью целочисленной задачи.

Таблица 4.2

Итерация	Базисные переменные	Значение	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
2	y_1	96/15	1	2	1/15	0	0
	y_5	6/15	0	0	1/15	−1	1
	$-f$	−192/15	0	−3	−2/15	0	0
	$-\varphi$	6/15	0	0	1/15	−1	0
3	y_1	6	1	2	0	0	
	y_3	6	0	0	1	−15	
	$-f$	−12	0	−3	0	−2	
	$-\varphi$	0	0	0	0	0	

Завершая рассмотрение примера, заметим, что из (4.1), (4.5) следует ограничение $x_1 + 2x_2 \leqslant 6$. А прямая $x_1 + 2x_2 = 6$ отсекает (см. рис. 4.4) ту часть множества допустимых решений задачи линейного программирования с ослабленными ограничениями, которая содержит ее оптимальное решение, не удовлетворяющее требованию целочисленности, и не содержит допустимых решений исходной полностью целочисленной задачи. #

Рассмотрим теперь полностью целочисленную задачу, представленную в стандартной форме:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} c_k y_k \to \max; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} y_k = b_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ y_k \geqslant 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad y_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad k = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{4.6}$$

При этом будем считать, что при любых $k = \overline{1, n}$ и $i = \overline{1, m}$ параметры c_k, a_{ik} и b_i являются целыми числами.

Решая задачу линейного программирования с ослабленными ограничениями, соответствующую (4.6), находим ее оптимальное решение Y^*. Если оно удовлетворяет требованию целочисленности, то Y^* — решение исходной задачи целочисленного программирования. В противном случае выбираем любое *базисное переменное* y_i, которому в Y^* соответствует нецелое значение, и выписываем i-ю строку *оптимальной симплекс-таблицы*:

$$y_i + \sum_{j \in S} \alpha_{ij} y_j = \beta_i, \tag{4.7}$$

где S — множество индексов *свободных переменных*.

Полагая в (4.7), что все переменные целочисленные, получаем

$$\sum_{j \in S} \alpha_{ij} y_j - \beta_i = a \in Z.$$

Следовательно, для любых $d_j \in \mathbb{Z}$ существует такое $d \in \mathbb{Z}$, что

$$\sum_{j \in S} (\alpha_{ij} - d_j) y_j - (\beta_i - d_i) = d. \tag{4.8}$$

При этом если в (4.8) считать, что

$$\begin{cases} \gamma_{ij} = \operatorname{frac}(\alpha_{ij}), \quad j \in S, \quad 0 \leqslant \gamma_{ij} < 1, \\ \gamma_i = \operatorname{frac}(\beta_i), \quad 0 < \gamma_i < 1, \\ d_j = \operatorname{int}(\alpha_{ij}), \quad j \in S, \quad d_i = \operatorname{int}(\beta_i), \end{cases} \tag{4.9}$$

то из (4.8) получаем

$$\sum_{j\in S}\gamma_{ij}y_j = d+\gamma_i, \quad d\in\mathbb{Z}. \tag{4.10}$$

А так как левая часть равенства (4.10) является неотрицательной, то с учетом (4.9) имеем $d\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ и, как следствие,

$$\sum_{j\in S}\gamma_{ij}y_j \geqslant \gamma_i. \tag{4.11}$$

Неравенство (4.11) представляет собой необходимое условие целочисленности исходной задачи. Оно определяет новое дополнительное ограничение, известное как ***отсечение Гомори*** для полностью целочисленной задачи. Полученное ранее оптимальное решение задачи линейного программирования с ослабленными ограничениями не удовлетворяет новому ограничению (4.11), так как все небазисные переменные y_j, $j\in S$, в этом оптимальном решении равны нулю и, как следствие, $\gamma_i\leqslant 0$.

Метод Гомори часто называют ***дробным алгоритмом***. Это связано с тем, что все ненулевые коэффициенты нового ограничения (4.11) являются *правильными дробями*. Практическая реализация метода Гомори связана с последовательным выполнением следующих этапов.

Этап 1. Найти оптимальное решение задачи линейного программирования с ослабленными ограничениями, соответствующей исходной полностью целочисленной задаче (4.6). Перейти к этапу 2.

Этап 2. Прекратить вычисления, если оптимальное решение задачи линейного программирования с ослабленными ограничениями удовлетворяет требованию целочисленности. В противном случае выбрать какое-либо базисное переменное y_i, которому в оптимальном решении соответствует нецелое значение. Из оптимальной симплекс-таблицы выписать уравнение (4.7), содержащее это базисное переменное, и получить ограничение (4.11). Перейти к этапу 3.

Этап 3. В задачу линейного программирования с ослабленными ограничениями ввести ограничение (4.11), переходя к стандартной форме записи

$$\sum_{j\in S}\gamma_{ij}y_j - y_{n+1} + y_{n+2} = \gamma_i,$$

где y_{n+1} — новое неотрицательное переменное, y_{n+2} — искусственное неотрицательное переменное. Найти оптимальное решение вновь полученной задачи линейного программирования с ослабленными ограничениями и перейти к этапу 2.

Пример 4.3. Рассмотрим следующую полностью целочисленную задачу:

$$\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 \to \max; \\ -x_1 + 3x_2 \leqslant 6, \quad x_1 + (1/7)x_2 \leqslant 5, \\ x_1, x_2 \geqslant 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{cases}$$

которая может быть представлена в стандартной форме

$$\begin{cases} 7y_1 + 9y_2 \to \max; \\ -y_1 + 3y_2 + y_3 = 6, \quad 7y_1 + y_2 + y_4 = 35, \\ y_k \geqslant 0,\ k = \overline{1,4}, \quad y_k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ k = \overline{1,4}, \end{cases}$$

где $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, а y_3 и y_4 — новые переменные задачи.

В табл. 4.3 представлено решение задачи линейного программирования с ослабленными ограничениями, соответствующей рассматриваемой полностью целочисленной задаче. Ее оптимальное решение $Y^* = (9/2\ \ 7/2\ \ 0\ \ 0)^{\mathrm{T}}$ не удовлетворяет требованию целочисленности. Выбираем $y_2 = 7/2$ и выписываем соответствующее уравнение из оптимальной симплекс-таблицы:

$$y_2 + \frac{7}{22}y_3 + \frac{1}{22}y_4 = \frac{7}{2}.$$

Таблица 4.3

Итерация	Базисные переменные	Значение	y_1	y_2	y_3	y_4
0	y_3	6	−1	3	1	0
	y_4	35	7	1	0	1
	$-f$	0	7	9	0	0
1	y_2	2	−1/3	1	1/3	0
	y_4	33	22/3	0	−1/3	1
	$-f$	−18	10	0	−3	0
2	y_1	9/2	1	0	−1/22	3/22
	y_2	7/2	0	1	7/22	1/22
	$-f$	−63	0	0	−28/11	−15/11

А так как в этом случае $\gamma_2 = 1/2$, $\gamma_{23} = 7/22$, $\gamma_{24} = 1/22$, то новое ограничение имеет вид

$$\frac{7}{22}y_3 + \frac{1}{22}y_4 \geqslant \frac{1}{2}. \tag{4.12}$$

При переходе к стандартной форме записи этого ограничения

$$\frac{7}{22}y_3 + \frac{1}{22}y_4 - y_5 + y_6 = \frac{1}{2} \tag{4.13}$$

вводим новое переменное модели y_5 и искусственное переменное y_6.

Для продолжения решения задачи линейного программирования с ослабленными ограничениями, в которой учтено новое ограничение (4.13), воспользуемся уже известным приемом (см. пример 4.2 и табл. 4.4). Вновь полученное оптимальное решение не удовлетворяет требованию целочисленности. Выбираем $y_1 = 32/7$ и выписываем соответствующее уравнение из оптимальной симплекс-таблицы:

$$y_1 + \frac{1}{7}y_4 - \frac{1}{7}y_5 = \frac{32}{7}.$$

Таблица 4.4

Итерация	Базисные переменные	Значение	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
3	y_1	9/2	1	0	−1/22	3/22	0	0
	y_2	7/2	0	1	7/22	1/22	0	0
	y_6	1/2	0	0	7/22	1/22	−1	1
	$-f$	−63	0	0	−28/11	−15/11	0	0
	$-\varphi$	1/2	0	0	7/22	1/22	−1	0
4	y_1	32/7	1	0	0	1/7	−1/7	
	y_2	3	0	1	0	0	1	
	y_3	11/7	0	0	1	1/7	−22/7	
	$-f$	−59	0	0	0	−1	−8	
	$-\varphi$	0	0	0	0	0	0	

А так как в этом случае $\gamma_1 = 4/7$, $\gamma_{14} = 1/7$, $\gamma_{15} = 6/7$, то новое ограничение имеет вид

$$\frac{1}{7}y_4 + \frac{6}{7}y_5 \geqslant \frac{4}{7}. \tag{4.14}$$

При переходе к стандартной форме записи этого ограничения

$$\frac{1}{7}y_4 + \frac{6}{7}y_5 - y_7 + y_8 = \frac{4}{7} \tag{4.15}$$

вводим новое переменное модели y_7 и искусственное переменное y_8.

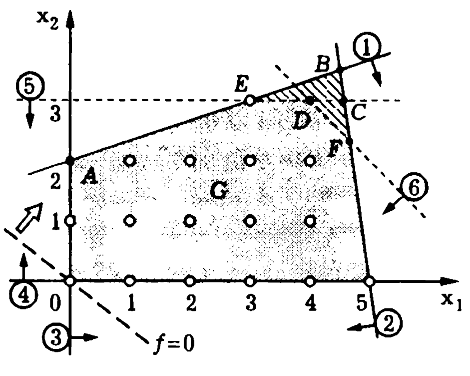
Для продолжения решения задачи линейного программирования с ослабленными ограничениями, в которой учтено новое ограничение (4.15), воспользуемся уже известным приемом с учетом того, что y_8 — искусственное переменное (табл. 4.5).

Полученное оптимальное решение определяет оптимальное решение $X^0 = (4\ \ 3)^{\mathrm{T}}$ исходной полностью целочисленной задачи.

Обратимся к геометрической интерпретации решения рассматриваемой полностью целочисленной задачи методом Гомори (рис. 4.5).

Таблица 4.5

Итерация	Базисные переменные	Значение	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_7	y_8
5	y_1	32/7	1	0	0	1/7	−1/7	0	0
	y_2	3	0	1	0	0	1	0	0
	y_3	11/7	0	0	1	1/7	−22/7	0	0
	y_8	4/7	0	0	0	1/7	6/7	−1	1
	$-f$	−59	0	0	0	−1	−8	0	0
	$-\varphi$	−4/7	0	0	0	1/7	6/7	−1	0
6	y_1	14/3	1	0	0	1/6	0	−1/6	
	y_2	7/3	0	1	0	−1/6	0	7/6	
	y_3	11/3	0	0	1	2/3	0	−11/3	
	y_5	2/3	0	0	0	1/6	1	−7/6	
	$-f$	−161/3	0	0	0	1/3	0	−28/3	
	$-\varphi$	0	0	0	0	0	0	0	
7	y_1	4	1	0	0	0	−1	1	
	y_2	3	0	1	0	0	1	0	
	y_3	1	0	0	1	0	−4	1	
	y_4	4	0	0	0	1	6	−7	
	$-f$	−55	0	0	0	0	−2	−7	



① $-x_1+3x_2=6$

② $x_1+(1/7)x_2=5$

③ $x_1=0$

④ $x_2=0$

⑤ $x_2=3$

⑥ $x_1+x_2=7$

Рис. 4.5

Решение задачи линейного программирования с ослабленными ограничениями, соответствующей исходной полностью целочисленной задаче, за две итерации симплекс-метода (см. табл. 4.3) из *крайней точки* $O(0;0)$ *множества* G допустимых решений, минуя точку $A(0;2)$, приводит в *крайнюю точку* $B(9/2;7/2)$. Но соответствующее оптимальное решение не удовлетворяет требованию целочисленности, следствием чего является новое ограничение (4.12).

Воспользовавшись представлением исходной полностью целочисленной задачи в стандартной форме, выразим новые переменные модели y_3, y_4, входящие в (4.12), через y_1, y_2:

$$y_3 = 6 + y_1 - 3y_2, \quad y_4 = 35 - 7y_1 - y_2. \tag{4.16}$$

Подставив (4.16) в (4.12), приходим к первому отсечению Гомори, выраженному с использованием переменных y_1, y_2: $y_2 \leqslant 3$. Таким образом (см. рис. 4.5), реализация ограничения (4.12) приводит к отсечению от множества G подмножества, которое не содержит допустимых решений, удовлетворяющих требованию целочисленности, и появлению двух новых крайних точек: $E(3;3)$ и $C(32/7;3)$. С учетом нового ограничения (4.12) на четвертой итерации симплекс-метода (см. табл. 4.4) получаем новое оптимальное решение, которое (см. рис. 4.5) соответствует новой крайней точке $C \in G$ и не удовлетворяет требованию целочисленности, следствием чего является новое ограничение (4.14).

В равенство (4.13) входит искусственное переменное задачи y_6, равное нулю: $y_6 = 0$. Поэтому $y_5 = (7y_3 + y_4 - 11)/22$ и с учетом (4.16) из (4.14) получаем второе отсечение Гомори, выраженное с использованием переменных модели y_1, y_2: $y_1 + y_2 \leqslant 7$. Таким образом (см. рис. 4.5), реализация ограничения (4.14) приводит к отсечению от множества G еще одного подмножества, которое не содержит допустимых решений, удовлетворяющих требованию целочисленности, и появлению двух новых крайних точек: $D(4;3)$ и $F(14/3;7/3)$, первая из которых соответствует оптимальному решению исходной полностью целочисленной задачи (см. табл. 4.5). #

При рассмотрении решения полностью целочисленной задачи в примере 4.3 следует обратить внимание на то, что вид отсечения Гомори определяется выбором базисного переменного модели, которое принимает нецелочисленное значение в оптимальном решении соответствующей задачи линейного программирования с ослабленными ограничениями. Одна и та же оптимальная симплекс-таблица может порождать несколько различных отсечений Гомори (см. табл. 4.3). Поэтому возникает естественный вопрос: какое из них является наиболее эффективным (т.е. за меньшее число итераций приводит к оптимальному решению исходной задачи)? Накопленный практический опыт решения задач целочисленного программирования предписывает строить отсечение Гомори по переменному y_i, соответствующему индексу i из множества I индексов базисных переменных в оптимальной симплекс-таблице, для которого выполняется одно из следующих условий:

$$\text{а)}\quad \gamma_i = \max_{k\in I} \gamma_k; \qquad \text{б)}\quad \frac{\gamma_i}{\sum\limits_{j\in S} \gamma_{ij}} = \max_{k\in I} \frac{\gamma_k}{\sum\limits_{j\in S} \gamma_{kj}},$$

где γ_{kj} и γ_k определяются соотношениями (4.9), а S — множество индексов свободных переменных.

Пример 4.4. Вернемся к анализу решения полностью целочисленной задачи, рассмотренной в примере 4.3.

После двух итераций симплекс-метода (см. табл. 4.3) $I = \{1,\ 2\}$, $S = \{3,\ 4\}$ и в оптимальном решении $y_1 = 9/2$, $y_2 = 7/2$, т.е. $\gamma_1 = \gamma_2 = 1/2$ и условие а) не позволяет сделать выбор одного из двух возможных отсечений. А так как (см. табл. 4.3)

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_{13}+\gamma_{14}} = \frac{1/2}{21/22+3/22} = \frac{11}{24} < \frac{11}{8} = \frac{1/2}{7/22+1/22} = \frac{\gamma_2}{\gamma_{23}+\gamma_{24}},$$

то, согласно условию б), следует выбрать базисное переменное y_2. #

Не останавливаясь на доказательстве сходимости метода Гомори, заметим, что он может быть использован и для решения *частично целочисленных задач*, которые отличаются от задачи (4.6) лишь видом требования целочисленности:

$$y_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad k \in J, \tag{4.17}$$

где J — множество индексов переменных модели, на которые накладывается требование целочисленности. При этом $J \subset \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ и $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus J \neq \varnothing$.

Действительно, пусть $i \in J$ и в оптимальном решении задачи линейного программирования с ослабленными ограничениями, которая соответствует рассматриваемой частично целочисленной задаче, базисное переменное y_i принимает нецелое значение. Как и в случае полностью целочисленной задачи, из оптимальной симплекс-таблицы выписываем уравнение (4.7). Но теперь некоторые из переменных y_j, $j \in S$, могут не быть целочисленными, поэтому необходимо построить отсечение другого типа, нежели (4.11).

Согласно (4.7), (4.9), получаем

$$y_i - \operatorname{int}(\beta_i) = \gamma_i - \sum_{j \in S} \alpha_{ij} y_j. \tag{4.18}$$

При этом для переменного модели y_i, удовлетворяющего требованию целочисленности, выполняется одно из условий: а) $y_i \leqslant \leqslant \operatorname{int}(\beta_i)$; б) $y_i \geqslant \operatorname{int}(\beta_i) + 1$. Согласно (4.18), эти условия могут быть представлены в следующем виде:

$$\sum_{j \in S} \alpha_{ij} y_j \geqslant \gamma_i, \tag{4.19}$$

$$\sum_{j \in S} \alpha_{ij} y_j \leqslant \gamma_i - 1. \tag{4.20}$$

Пусть S^+ — множество значений индекса j, для которых $\alpha_{ij} \geqslant 0$, а S^- — множество значений индекса j, для которых

$\alpha_{ij} < 0$. В этом случае $S = S^+ \cup S^-$ и, согласно (4.19), получаем

$$\sum_{j \in S^+} \alpha_{ij} y_j \geqslant \gamma_i. \tag{4.21}$$

Кроме того, неравенство (4.20) может быть преобразовано к следующему неравенству:

$$\sum_{j \in S^-} \alpha_{ij} y_j \leqslant \gamma_i - 1,$$

или, что то же самое,

$$\frac{\gamma_i}{\gamma_i - 1} \sum_{j \in S^-} \alpha_{ij} y_j \geqslant \gamma_i. \tag{4.22}$$

Неравенства (4.19), (4.20) и, как следствие, неравенства (4.21), (4.22) не могут выполняться одновременно. Но независимо от того, какой случай имеет место, для каждого допустимого решения рассматриваемой частично целочисленной задачи будет выполняться ограничение

$$\sum_{j \in S^+} \alpha_{ij} y_j + \frac{\gamma_i}{\gamma_i - 1} \sum_{j \in S^-} \alpha_{ij} y_j \geqslant \gamma_i. \tag{4.23}$$

Неравенство (4.23) определяет новое дополнительное ограничение, которое называют ***отсечением Гомори для частично целочисленной задачи***. Это ограничение получено без учета требования целочисленности (4.17) для некоторых переменных модели и может быть заменено более эффективным отсечением

$$\sum_{j \in S} \lambda_j y_j \geqslant \gamma_i, \tag{4.24}$$

где

$$\lambda_j = \begin{cases} \dfrac{\alpha_{ij}\gamma_i}{\gamma_i - 1}, & \alpha_{ij} < 0,\ y_j \notin \mathbb{Z}; \\ \alpha_{ij}, & \alpha_{ij} \geqslant 0,\ y_j \notin \mathbb{Z}; \\ \gamma_{ij}, & \gamma_{ij} \leqslant \gamma_i,\ y_j \in \mathbb{Z}; \\ \dfrac{\gamma_i(1 - \gamma_{ij})}{1 - \gamma_i}, & \gamma_{ij} > \gamma_i,\ y_j \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Пример 4.5. Вернемся к задаче целочисленного программирования, рассмотренной в примере 4.3, и предположим, что при ее постановке требование целочисленности $x_1, x_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ заменено требованием $x_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Рассмотрим процедуру решения этой частично целочисленной задачи методом Гомори.

Из оптимальной симплекс-таблицы задачи линейного программирования с ослабленными ограничениями (см. табл. 4.3) выписываем уравнение, соответствующее переменному y_1:

$$y_1 - \frac{1}{22} y_3 + \frac{3}{22} y_4 = \frac{9}{2},$$

для которого, согласно (4.18), $\gamma_1 = 1/2$, $\alpha_{13} = -1/22$ и $S^- = \{3\}$, $\alpha_{14} = 3/22$ и $S^+ = \{4\}$. Таким образом, отсечение Гомори (4.23) для рассматриваемой частично целочисленной задачи принимает следующий вид:

$$\frac{3}{22} y_4 + \left(-\frac{1}{22}\right) \frac{1/2}{1/2 - 1} y_3 \geqslant \frac{1}{2},$$

или, что то же самое,

$$\frac{1}{22} y_3 + \frac{3}{22} y_4 \geqslant \frac{1}{2}. \tag{4.25}$$

При переходе к стандартной форме записи ограничения (4.25)

$$\frac{1}{22} y_3 + \frac{3}{22} y_4 - y_5 + y_6 = \frac{1}{2}$$

вводим новое переменное y_5 и искусственное переменное y_6. Так же как в методе Гомори для полностью целочисленной задачи, новое ограничение вводим в задачу линейного программирования с ослабленными ограничениями (см. пример 4.3) и симплекс-методом находим оптимальное решение $X^* = (4 \;\; 10/3)^{\mathrm{T}}$.

Графическое решение рассматриваемой задачи представлено на рис. 4.6. Оптимальному решению соответствует точка $H(4; 10/3)$. Отсечение Гомори (4.25) записано в переменных $x_1 = y_1$ и $x_2 = y_2$: $10x_1 + 3x_2 \leqslant 50$. #

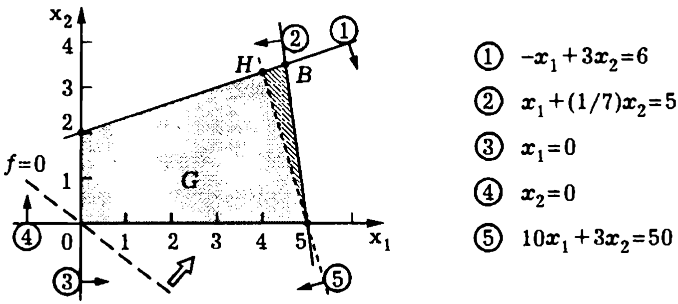


Рис. 4.6

При решении практических задач целочисленного программирования используют различные типы отсечений Гомори, два из которых рассмотрены выше. Тем не менее ни один из известных типов отсечений не обеспечивает высокой эффективности соответствующих вычислительных процедур. Несмотря на то что метод Гомори является надежным средством решения некоторых задач целочисленного программирования, его практическое использование нецелесообразно, если исходная задача имеет большую размерность. Более того, известны случаи, когда непреднамеренное изменение порядка следования дополнительных ограничений при решении задачи целочисленного программирования небольшой размерности приводило к резкому и неоправданному возрастанию объема вычислений при нахождении оптимального решения.

4.3. Метод ветвей и границ

Метод ветвей и границ, основная идея которого рассмотрена в **4.1**, является одним из наиболее широко применяемых *комбинаторных методов*. Его можно использовать для решения как *полностью*, так и *частично целочисленных задач*. Для уяснения специфических особенностей метода ветвей и границ обратимся к полностью целочисленной задаче (4.6).

Согласно общей идее метода, сначала решают *задачу линейного программирования с ослабленными ограничениями*, соответствующую исходной *задаче целочисленного программирования*, и находят ее *оптимальное решение* Y^*. Затем выбирают *базисное переменное* y_i, значение которого β_i в оптимальном решении Y^* не является целым числом. Так как интервал $(\mathrm{int}(\beta_i), \mathrm{int}(\beta_i)+1)$ не содержит целых значений y_i, то любое допустимое целое значение этого переменного (значение y_i в *допустимом решении* $Y \in Q$) удовлетворяет одному из неравенств: а) $y_i \leqslant \mathrm{int}(\beta_i)$; б) $y_i \geqslant \mathrm{int}(\beta_i)+1$. Введение этих неравенств в задачу линейного программирования с ослабленными ограничениями порождает две новые задачи, множества *допустимых решений* которых не пересекаются (говорят, что исходная задача разветвляется на две новые задачи, а саму процедуру ее замены совокупностью двух задач, эквивалентных ей в смысле оптимального решения, называют ***процессом ветвления***). Проводимый в процессе ветвления учет *требования целочисленности* позволяет исключить из рассмотрения часть множества допустимых решений (см. **4.1** и рис. 4.3).

Выбрав любую из двух задач, порожденных исходной задачей, решают соответствующую задачу линейного программирования с ослабленными ограничениями (с *целевой функцией* из рассматриваемой задачи целочисленного программирования). Если полученное решение удовлетворяет требованию целочисленности, то оно является оптимальным решением порожденной задачи целочисленного программирования. Это решение фиксируют как наилучшее, дальнейшего ветвления рассмотренной задачи не проводят и переходят к рассмотрению второй порожденной задачи. В противном случае задача разветвляется на две новые задачи. В список задач, порожденных исходной задачей целочисленного программирования, вместо уже рассмотренной вносят две порожденные ею задачи. В этот список внесено уже три задачи, каждую из которых исследуют по той же схеме, что и первую. Как только получают оптимальное решение задачи линейного программирования с ослабленными ограничениями, удовлетворяющее требованию целочисленности, его сопоставляют с уже имеющимся (если таковое есть) и фиксируют наилучшее из них (в смысле *оптимального значения целевой функции*). Процесс ветвления продолжают до тех пор, пока каждая порожденная задача не приведет к оптимальному решению, удовлетворяющему требованию целочисленности, или пока не будет установлена невозможность улучшения (в смысле оптимального значения целевой функции) уже зафиксированного наилучшего решения.

Для повышения эффективности рассмотренной процедуры вводят понятие ***границы***, на основе которого можно судить о необходимости дальнейшего ветвления каждой из задач, порожденных исходной задачей целочисленного программирования.

Пусть на каждой итерации t определена нижняя граница f_0^{t-1} для оптимального значения целевой функции f. На первой итерации значение f_0^0 выбирают равным значению f для любого известного допустимого решения исходной задачи целочисленного программирования, а при отсутствии априорной информации просто полагают $f_0^0 = -\infty$. Помимо нижней границы имеется список порожденных задач, подлежащих решению, который на первой итерации содержит лишь исходную задачу целочисленного программирования (4.6). Реализация каждой итерации t предполагает последовательное выполнение следующих этапов.

Этап 1. Прекратить вычисления, если список задач, порожденных исходной задачей целочисленного программирования, пуст. В противном случае выбрать одну задачу и, вычеркнув ее из списка, перейти к этапу 2.

Этап 2. Решить задачу линейного программирования с ослабленными ограничениями, соответствующую выбранной на этапе 1 задаче целочисленного программирования. Если множество ее допустимых решений пусто или полученное оптимальное значение целевой функции не превосходит f_0^{t-1}, то принять $f_0^t = f_0^{t-1}$ и вернуться к этапу 1. В противном случае перейти к этапу 3.

Этап 3. Если полученное оптимальное решение задачи линейного программирования с ослабленными ограничениями удовлетворяет требованию целочисленности, то зафиксировать его, принять f_0^t равным соответствующему значению целевой функции и вернуться к этапу 1. В противном случае перейти к этапу 4.

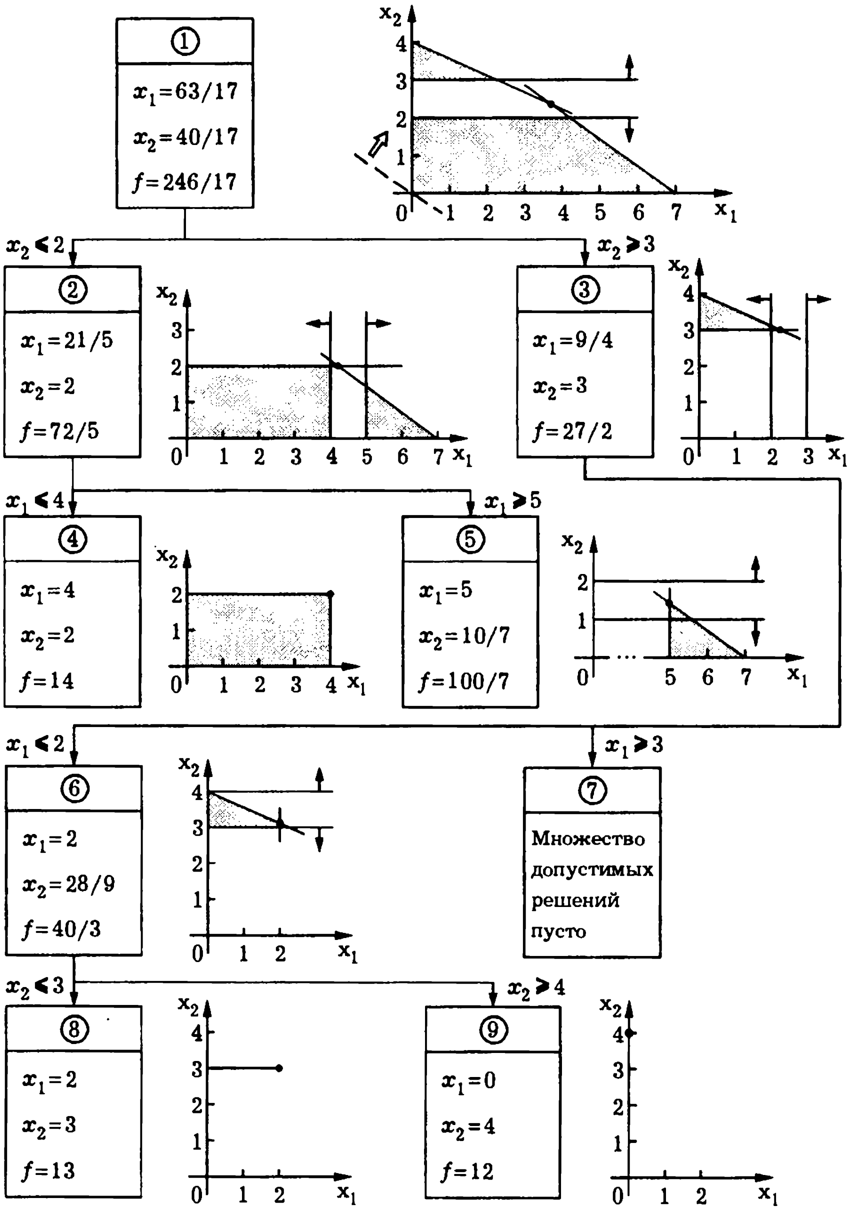
Этап 4. Выбрать любое базисное переменное y_i, значение которого β_i в полученном оптимальном решении не является целым числом. В список задач, порожденных исходной задачей целочисленного программирования, внести еще две задачи. Первая из них отличается от задачи, выбранной на этапе 1, лишь наличием дополнительного ограничения $y_i \leqslant [\beta_i]$, а вторая — наличием дополнительного ограничения $y_i \geqslant [\beta_i] + 1$. Принять $f_0^t = f_0^{t-1}$ и вернуться к этапу 1.

Замечание 4.1. Обратим внимание на специфику описания этапов итерации: не предполагается полная целочисленность исходной задачи, равно как и целочисленность ее коэффициентов. Если же исходная задача является полностью целочисленной и коэффициенты c_k ее целевой функции — целые числа, то процесс решения может быть ускорен за счет видоизменения второго этапа в каждой итерации: а) решить задачу линейного программирования с ослабленными ограничениями, соответствующую полностью целочисленной задаче, выбранной на этапе 1; б) если ее множество допустимых решений пусто или целая часть оптимального значения целевой функции не превосходит f_0^{i-1}, то принять $f_0^t = f_0^{t-1}$ и вернуться к этапу 1. В противном случае перейти к этапу 3.

Пример 4.6. Рассмотрим полностью целочисленную задачу следующего вида:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \to \max; \\ 5x_1 + 7x_2 \leqslant 35, \quad 4x_1 + 9x_2 \leqslant 36, \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \quad x_1, x_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

На рис. 4.7 графически изображен один из возможных вариантов ее решения методом ветвей и границ с использованием



①
$x_1=63/17$
$x_2=40/17$
$f=246/17$
$x_2 \leqslant 2$
$x_2 \geqslant 3$
②
$x_1=21/5$
$x_2=2$
$f=72/5$
③
$x_1=9/4$
$x_2=3$
$f=27/2$
$x_1 \leqslant 4$
$x_1 \geqslant 5$
④
$x_1=4$
$x_2=2$
$f=14$
⑤
$x_1=5$
$x_2=10/7$
$f=100/7$
$x_1 \leqslant 2$
$x_1 \geqslant 3$
⑥
$x_1=2$
$x_2=28/9$
$f=40/3$
⑦
Множество допустимых решений пусто
$x_2 \leqslant 3$
$x_2 \geqslant 4$
⑧
$x_1=2$
$x_2=3$
$f=13$
⑨
$x_1=0$
$x_2=4$
$f=12$

Рис. 4.7

дерева решений, представляющего собой *граф* специального вида.

У дерева решений, изображенного на рис. 4.7, исходной является *вершина* 1. Так как коэффициенты целевой функции $c_1 = 2 > 0$ и $c_2 = 3 > 0$, то полагаем $f_0^0 = 0$. Оба переменных x_1 и x_2 в оптимальном решении

$$X^* = \left(3\frac{12}{17}\ 2\frac{6}{17}\right)^{\mathrm{T}}, \qquad x_1^* = 3\frac{12}{17}, \quad x_2^* = 2\frac{6}{17},$$

задачи линейного программирования с ослабленными ограничениями, соответствующей рассматриваемой полностью целочисленной задаче, принимают нецелочисленные значения и любое из них может быть использовано для инициирования процесса ветвления. Если выбрать x_2, то этот выбор порождает задачи 2 и 3, связанные с условиями $x_2 \leqslant 2$ и $x_2 \geqslant 3$ соответственно, так как $\mathrm{int}(x_2^*) = 2$.

Порожденные задачи охватывают все допустимые решения исходной целочисленной задачи. Полагаем $f_0^1 = f_0^0 = 0$. Теперь нужно выбрать одну из порожденных задач (2 или 3) для решения и, при необходимости, для дальнейшего ветвления. #

Различные варианты выбора одной задачи из совокупности порожденных задач приводят к разным последовательностям порожденных задач и, следовательно, к различным количествам итераций, необходимых для нахождения оптимального решения исходной задачи целочисленного программирования. Для иллюстрации этих особенностей метода ветвей и границ вернемся к полностью целочисленной задаче, рассмотрение которой начато в примере 4.6.

Пример 4.7. Предположим, что в первую очередь решено рассмотреть вершину 2 дерева решений, представленного на рис. 4.7. Находим оптимальное решение

$$X^* = \left(4\frac{1}{5}\ 2\right)^{\mathrm{T}}, \quad x_1^* = 4\frac{1}{5}, \quad x_2^* = 2,$$

соответствующей задачи линейного программирования с ослабленными ограничениями. В оптимальном решении X^* переменное модели x_1 принимает нецелочисленное значение $x_1^* = 21/5$ и $\operatorname{int}(x_1^*) = 4$. Полагаем $f_0^2 = f_0^1 = 0$. Учет ограничений $x_1 \leqslant 4$ и $x_1 \geqslant 5$ порождает задачи 4 и 5 соответственно.

Предположим, что решено рассмотреть задачу 4 из списка задач $\{3,\ 4,\ 5\}$, порожденных исходной полностью целочисленной задачей. Оптимальное решение $X^* = (4\ \ 2)^{\mathrm{T}}$ соответствующей задачи линейного программирования с ослабленными ограничениями удовлетворяет требованию целочисленности, а оптимальное значение целевой функции $f = 14$. Полагаем $f_0^3 = 14$. Заметим, что наличие оптимального решения задачи 4, удовлетворяющего требованию целочисленности, не означает нахождения решения рассматриваемой полностью целочисленной задачи, так как список порожденных задач $\{3,\ 5\}$ не является пустым.

Обратившись к задаче 3, порожденной ограничением $x_2 \geqslant 3$, находим оптимальное решение соответствующей задачи линейного программирования и оптимальное значение целевой функции $f = 13{,}5$, которое не превышает $f_0^3 = 14$. Таким образом, задача 3 не будет порождать новые задачи. Полагаем $f_0^4 = f_0^3 = 14$.

На следующей итерации необходимо исследовать задачу 5, для которой оптимальное значение целевой функции соответствующей ей задачи линейного программирования с ослабленными ограничениями равно $100/7 > f_0^4 = 14$. В рассматриваемом случае (см. пример 4.6) коэффициенты целевой функции и переменные задачи являются целочисленными. Кроме того, $\operatorname{int}(100/7) = 14 = f_0^4$. Поэтому, согласно замечанию 4.1, задачи, порожденные задачей 5, не могут иметь оптимальных решений, удовлетворяющих требованию целочисленности, лучших в смысле оптимального значения целевой функции, чем $X^* = (4\ \ 2)^{\mathrm{T}}$. Ветвление из вершины 5 дерева решений, представленного на рис. 4.7, не проводится и решение исходной задачи завершено. #

Понятно, что в общем случае оптимальному значению целевой функции рассматриваемой задачи целочисленного программирования могут соответствовать несколько оптимальных решений, удовлетворяющих требованию целочисленности. Поэтому, если необходимо найти все оптимальные решения исходной задачи, то при реализации метода ветвей и границ нельзя использовать правило, сформулированное в замечании 4.1, так как прекращение процесса ветвления при найденном оптимальном решении может привести к потере других оптимальных решений, если они есть.

Для наглядного описания последовательности, в которой рассматриваются вершины дерева решений при использовании метода ветвей и границ, вводят понятие ***пути***, формализованное представление которого имеет следующий вид: $(1 \to n_1 \to \to n_2 \to \ldots \to n_M)$, где $n_k \to n_{k+1}$ означает, что после вершины с номером n_k необходимо переходить к вершине с номером n_{k+1}, а M на единицу меньше количества вершин у дерева решений. Так, в примере 4.7 рассмотрен путь $(1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 5)$. Если через S_t обозначить список задач, порожденных исходной задачей целочисленного программирования к началу итерации t, то геометрическая иллюстрация этого пути может быть представлена так, как изображено на рис. 4.8. Этот рисунок легко сопоставляется с рис. 4.7, если учесть, что итерация 1 соответствует вершине 1 дерева решений, итерация 2 — вершине 2, итерация 3 — вершине 4, итерация 4 — вершине 3, а итерация 5 — вершине 5.

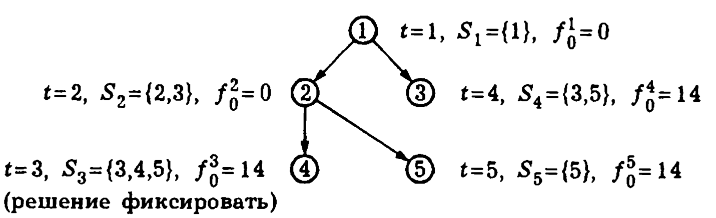


Рис. 4.8

Продолжим рассмотрение решения полностью целочисленной задачи, начатое в примерах 4.6, 4.7.

Пример 4.8. Предположим, что на итерации 2 выбрана задача 3, т.е. начало пути $1 \to 3$ (см. рис. 4.7). Задача 3 порождает две новые задачи: 6 и 7. Теперь нужно выбрать для решения одну задачу из множества $\{2, 6, 7\}$ и т.д. Один из возможных вариантов пути $1 \to 3 \to 6 \to 9 \to 8 \to 7 \to 2 \to 4 \to 5$ представлен на рис. 4.9 (всю необходимую информацию можно найти на рис. 4.7).

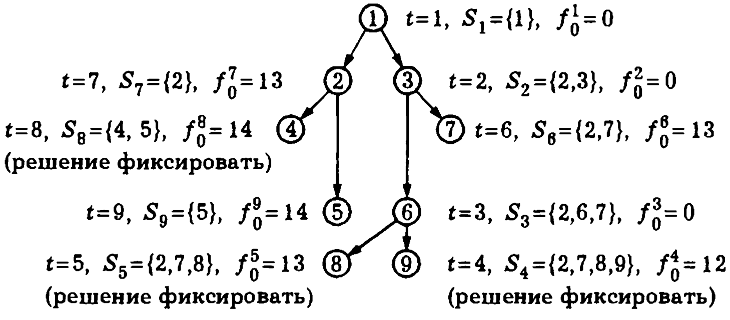


Рис. 4.9

Этот путь предполагает девять итераций. Сначала фиксируется оптимальное решение задачи 9, удовлетворяющее требованию целочисленности и соответствующее оптимальному значению целевой функции $f_0^4 = 12$. Затем фиксируется оптимальное решение задачи 8 с оптимальным значением целевой функции $f_0^5 = 13$ и на итерации 8 фиксируется оптимальное решение задачи 4, которое и является решением исходной полностью целочисленной задачи. #

Рассмотренные примеры наглядно демонстрируют основные недостатки метода ветвей и границ, обусловленные как произволом выбора последовательности рассмотрения задач из списка задач, порожденных исходной задачей целочисленного программирования, так и произволом выбора переменного модели, которое используется для получения порождаемых задач на этапе 4 каждой итерации. Для повышения эффективности метода ветвей и границ разработаны специальные эвристические (от греческого *heuriskō* — открываю, отыскиваю) правила, связанные как с выбором переменных модели, инициирующих процессы ветвления в вершинах дерева решений, так и с выбором на каждой итерации задачи для рассмотрения из списка порожденных задач.

Ход итераций можно представить графически в виде дерева решений (см. рис. 4.7). Каждая вершина дерева решений отображает одну задачу в списке задач, порожденных исходной задачей целочисленного программирования, а каждая ветвь инцидентна одной из задач, вносимой в список на этапе 4 каждой итерации. Связь с графическим представлением объясняет использование термина „ветвь“ в названии рассмотренного метода, а термин „граница“ в этом названии появился благодаря использованию оценочного (граничного) значения для целевой функции на этапе 2 реализации каждой итерации. Метод ветвей и границ можно было бы назвать методом обрыва ветвей, так как наличие оценочного (граничного) значения для целевой функции позволяет обрывать ветвь на дереве решений даже тогда, когда оптимальное решение соответствующей порожденной задачи не удовлетворяет требованию целочисленности. Следует также отметить, что метод ветвей и границ можно было бы назвать и ***методом возврата***, так как при обрыве некоторых ветвей необходимо вернуться к списку задач, порожденных исходной задачей целочисленного программирования.

4.4. Задачи целочисленного программирования

В этом параграфе рассмотрены три *задачи математического программирования*, которые в их исходных постановках не являются *задачами целочисленного программирования*, но становятся ими после введения новых переменных.

1. Задача планирования производства с постоянными элементами затрат. Рассмотрим задачу планирования производства n различных видов промышленной продукции Π_j, $j=\overline{1,n}$. Обозначим: x_j — объем производства продукции Π_j в соответствующих единицах измерения; K_j — ***постоянные элементы затрат***, т.е. затраты, связанные с производством продукции Π_j и не зависящие от его объема x_j; c_j — текущие затраты на производство единицы продукции Π_j (в единицах измерения объема ее производства x_j). В этом случае суммарные затраты, связанные с производством продукции Π_j, определяются следующим образом:

$$\psi_j(x_j)=\begin{cases} K_j+c_jx_j, & x_j>0;\\ 0, & x_j=0,\end{cases}$$

и естественным является желание *„лица, принимающего решения“*, минимизировать общие затраты

$$\psi(X)=\sum_{j=1}^{n}\psi_j(x_j), \qquad X=(x_1\ \ldots\ x_n)^{\mathrm{T}},$$

при планировании производства. Не останавливаясь на описании множества G *допустимых решений* и полагая, что оно соответствует *задаче линейного программирования*, отметим специфическую особенность рассматриваемой задачи планирования производства с постоянными элементами затрат. Эта особенность связана с нелинейностью *целевой функции* $\psi(X)$ по переменным x_j, $j=\overline{1,n}$, и не позволяет использовать методы *линейного программирования* для нахождения *оптимального решения*.

Для преодоления возникших трудностей введем *булевы переменные*

$$y_j=\begin{cases} 1, & x_j>0;\\ 0, & x_j=0,\end{cases} \qquad j=\overline{1,n}.$$

Если положительная константа M удовлетворяет условию $x_j \leqslant \leqslant M$ для любого $j = \overline{1, n}$, то $x_j \leqslant My_j$, $j = \overline{1, n}$, и ***математическая модель*** рассматриваемой задачи планирования производства с постоянными элементами затрат может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum\limits_{k=1}^{n} K_k y_k \to \min; \\ 0 \leqslant x_j \leqslant My_j, \ j = \overline{1, n}, \quad y_j \in \{0,\ 1\}, \ j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Из неравенства $x_j \leqslant My_j$ при $x_j > 0$ следует, что $y_j = 1$ и ***целевая функция*** f учитывает постоянные элементы затрат K_j. Если $x_j = 0$, то y_j может принимать значения 0 или 1, однако, поскольку $K_j > 0$ и целевую функцию требуется минимизировать, переменное y_j должно быть равно нулю.

Еще раз напомним, что в исходной постановке задача планирования производства с постоянными элементами затрат не имеет никакого отношения к целочисленному программированию, но после ее преобразования с использованием булевых переменных она превращается в частично целочисленную задачу.

2. Задача с альтернативными ограничениями. Прежде чем переходить к рассмотрению нового класса задач математического программирования, напомним, что под ***альтернативой*** (от латинского alter — один из двух) обычно понимают ситуацию, в которой необходимо выбрать одну из двух исключающих друг друга возможностей (эти возможности нередко называют альтернативами).

Задачи с ***альтернативными*** (т.е. взаимоисключающими) ***ограничениями*** внешне очень похожи на задачи линейного программирования, но ими не являются. Тем более они в своей изначальной постановке не имеют никакого отношения к задачам целочисленного программирования. Задачу с альтернативными ограничениями можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} c_k x_k \to \max; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \leqslant b_i, \ i = \overline{1, n}, \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n} e_{1k} x_k \leqslant d_1\right) \vee^* \left(\sum\limits_{k=1}^{n} e_{2k} x_k \leqslant d_2\right), \\ x_k \geqslant 0, \ k = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{4.26}$$

Задачи с альтернативными ограничениями, в частности, естественным образом возникают из *задач о распределении ограниченных ресурсов* при появлении дополнительного требования типа: если продукт Π_j вообще производится, то в количестве, не меньшем d_j (задан минимальный обьем партии). В этом случае, если x_{jk} — обьем производства продукта Π_j с использованием k-й технологии, то должно выполняться одно из двух ограничений:

$$\sum_k x_{jk} = 0, \qquad \sum_k x_{jk} \geqslant d.$$

Пусть определены такие числа M_1 и M_2, что для переменных $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющих ограничениям

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \leqslant b_i, \quad i = \overline{1, m}, \qquad x_k \geqslant 0, \quad k = \overline{1, n},$$

имеют место неравенства

$$\sum_{k=1}^{n} e_{1k} x_k - d_1 \leqslant M_1, \quad \sum_{k=1}^{n} e_{2k} x_k - d_2 \leqslant M_2. \tag{4.27}$$

Тогда задача (4.26) может быть преобразована к частично целочисленной задаче:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} c_k x_k \to \max; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \leqslant b_i, \ i = \overline{1, m}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} e_{1k} x_k - M_1 y \leqslant d_1, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} e_{2k} x_k - (1-y) M_2 \leqslant d_2, \\ x_k \geqslant 0, \ k = \overline{1, n}, \quad y \in \{0, 1\}. \end{cases} \tag{4.28}$$

Действительно, если $y = 0$, то должно выполняться ограничение $e_{11}x_1 + \ldots + e_{1n}x_n \leqslant d_1$. Ограничение $e_{21}x_1 + \ldots + e_{2n}x_n - M_2 \leqslant d_2$ можно не учитывать, так как оно выполняется автоматически согласно второму неравенству (4.27). Если $y = 1$, то должно выполняться ограничение $e_{21}x_1 + \ldots + e_{2n}x_n \leqslant d_2$, а ограничение $e_{11}x_1 + \ldots + e_{1n}x_n - M_1 \leqslant d_1$ можно не учитывать, так как оно выполняется автоматически согласно первому неравенству в (4.27).

Анализ задач (4.26), (4.27) позволяет уяснить следующее: а) задачу с альтернативными ограничениями можно рассматривать как совокупность задач линейного программирования, которые различаются лишь одним (альтернативным) ограничением; б) решением задачи с альтернативными ограничениями является оптимальное решение той задачи линейного программирования из соответствующей совокупности задач, *оптимальное значение целевой функции* которой является наибольшим в этой совокупности; в) задача (4.28) позволяет использовать методы целочисленного программирования для решения задач с альтернативными ограничениями.

Замечание 4.2. Возможны и более сложные варианты постановок задач с альтернативными ограничениями, которые могут быть преобразованы к частично целочисленным задачам. Примером подобных задач может служить задача о максимизации целевой функции $f = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ при условии, что будут выполнены любые k $(k \leqslant m)$ из следующих m ограничений:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_j, \quad i = \overline{1, m}. \tag{4.29}$$

Известно [XVI], что k из m различных элементов можно выбрать C_m^k способами, где C_m^k — число сочетаний (без повторений) из m элементов по k. Поэтому рассматриваемая задача с альтернативными ограничениями может быть представлена как совокупность C_m^k задач линейного программирования. Но можно для каждого ограничения в (4.29) ввести новое булево переменное y_i, которое принимает значение 0, если это ограничение выполняется, и значение 1 в противном случае. Затем нужно выбрать достаточно большое число $M > 0$ и перейти к решению следующей частично целочисленной задачи:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} c_jx_j \to \max; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - My_i \leqslant b_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} y_i = m - k, \quad x_j \geqslant 0,\ j = \overline{1, n}, \quad y_i \in \{0,\ 1\},\ i = \overline{1, m}. \end{cases}$$

3. Задача с взаимозависимыми альтернативами. Пожалуй, наиболее важными организационными решениями, приводящими к задачам целочисленного программирования, являются альтернативы „да — нет“. Альтернативы такого рода часто возникают в *задачах организационного управления.*

Обычно в этих задачах переменное модели x_j определяет выбор конкретного проекта, операции или варианта капиталовложения:

$$x_j = \begin{cases} 1, & j\text{-й проект выполняется;} \\ 0, & j\text{-й проект не выполняется.} \end{cases}$$

А так как переменные x_j являются булевыми переменными, то их можно использовать для формализации ограничений, часто возникающих в задачах распределения капиталовложений.

Для иллюстрации сказанного предположим, что необходимо формализовать ограничение, допускающее выбор не более k из N имеющихся проектов. В этом случае имеем

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_N \leqslant k.$$

Если же необходимо выбрать ровно k проектов из N имеющихся, то ограничение принимает вид

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_N = k.$$

Возможными являются ситуации, когда необходимо учитывать ограничение, состоящее в том, что i-й проект может приниматься лишь при условии принятия j-го проекта. Такое ограничение можно записать следующим образом:

$$x_i - x_j \leqslant 0.$$

Действительно, если $x_j = 0$, то и $x_i = 0$. Если же $x_j = 1$, то $x_i \leqslant 1$, т.е. возможны оба варианта: $x_i = 0$ или $x_i = 1$.

Предположим теперь, что i-й и j-й проекты являются взаимоисключающими (альтернативными), а k-й проект может быть принят лишь при условии принятия одного из альтернативных проектов. В этом случае ограничение может быть представлено в следующем виде:

$$x_i + x_j = 1, \qquad x_k - x_i - x_j \leqslant 0.$$

Таким образом, разнообразные зависимости между решениями о принятии проектов могут быть выражены с помощью линейных ограничений, накладываемых на булевы переменные модели.

Вопросы и задачи

4.1. В чем заключается основная идея метода округления и почему этот метод нельзя использовать для точного решения задач целочисленного программирования?

4.2. Может ли оптимальное значение целевой функции полностью целочисленной задачи быть больше (для задачи максимизации) оптимального значения целевой функции соответствующей задачи линейного программирования с ослабленными ограничениями?

4.3. Что объединяет методы отсечений и в чем заключается их принципиальное различие?

4.4. Может ли отсечение Гомори исключить некоторое допустимое решение, удовлетворяющее требованию целочисленности, но заведомо не являющееся оптимальным?

4.5. Чем определяется вид отсечения Гомори и с чем связан основной недостаток методов отсечений?

4.6. Можно ли решить полностью целочисленную задачу путем введения отсечений Гомори для частично целочисленной задачи?

4.7. Что объединяет методы отсечений с методом ветвей и границ? В чем заключается их принципиальное различие?

4.8. В чем заключается принципиальное отличие метода ветвей и границ от метода полного перебора?

4.9. Приведите обоснование того, что реализация вариантов действий, указанных в замечании 4.1, приведет к ускорению процесса нахождения оптимального решения.

4.10. С чем связаны основные недостатки метода ветвей и границ?

4.11. Чем обусловлен нелинейный характер целевой функции $\psi(X)$ в задаче планирования производства с постоянными элементами затрат, рассмотренной в **4.4**?

4.12. Дана полностью целочисленная задача

$$\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 + 10x_3 \to \max; \\ 2x_1 + 20x_2 + 4x_3 \leqslant 15, \quad 6x_1 + 20x_2 + 4x_3 = 20, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Докажите, что решение этой задачи нельзя получить методом округления.

4.13. На примере полностью целочисленной задачи

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \to \max; \\ x_1 + 0{,}5x_2 \leqslant 3{,}25, \quad x_1, x_2 \geqslant 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{cases}$$

покажите, что метод Гомори для полностью целочисленной задачи не приводит к оптимальному решению, если не выполняется требование целочисленности значений ее параметров. Преобразуйте рассматриваемую задачу и методом Гомори найдите ее оптимальное решение.

Ответ: $X^* = (0\ \ 6)^{\mathrm{T}}$.

4.14. Методом Гомори найдите оптимальное решение полностью целочисленной задачи

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max; \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 4, \quad 4x_2 - 3x_3 \leqslant 2, \quad x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leqslant 3, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Ответ: $X^* = (5\ \ 2\ \ 2)^{\mathrm{T}}$.

4.15. Докажите правомочность использования в методе Гомори отсечения, определяемого согласно (4.24).

4.16. Пусть в задаче 4.14 требование целочисленности наложено только на переменные модели x_1 и x_3. Методом Гомори найдите оптимальное решение этой частично целочисленной задачи.

Ответ: $X^* = (5\ \ 11/4\ \ 3)^{\mathrm{T}}$.

4.17. В примере 4.7, игнорируя замечание 4.1, продолжите процесс ветвления из вершины 5 дерева решений, представленного на рис. 4.7. Единственно ли оптимальное решение исходной полностью целочисленной задачи?

Ответ: нет. Оптимальному значению целевой функции $f = 14$ соответствуют оптимальные решения $X_1^* = (4\ \ 2)^{\mathrm{T}}$ и $X_2^* = (7\ \ 0)^{\mathrm{T}}$.

4.18. Методом ветвей и границ найдите все оптимальные решения следующей полностью целочисленной задачи:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \to \max; \\ 2x_1 + 5x_2 \leqslant 16, \quad 6x_1 + 5x_2 \leqslant 30, \\ x_1, x_2 \geqslant 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Ответ: оптимальному значению целевой функции $f = 5$ соответствуют оптимальные решения $X_1^* = (5\ \ 0)^{\mathrm{T}}$, $X_2^* = (4\ \ 1)^{\mathrm{T}}$, $X_2^* = (3\ \ 2)^{\mathrm{T}}$.

4.19. Методом ветвей и границ найдите оптимальное решение следующей полностью целочисленной задачи:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 \to \max; \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leqslant 8, \quad 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 \leqslant 8, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Ответ: $X^* = (0\ \ 0\ \ 1)^{\mathrm{T}}$.

5. ЗАДАЧИ ТРАНСПОРТНОГО ТИПА

Эта глава посвящена изучению *задач линейного программирования*, известных в *исследовании операций* как *задачи транспортного типа*. Интерес к этим задачам обусловлен не только спецификой их формализации и прикладной значимостью, но и рядом других причин, среди которых отметим следующие.

1. Любая задача транспортного типа, как задача линейного программирования, может быть решена *симплекс-методом*. Однако специфические особенности задач рассматриваемого класса позволили разработать более эффективные вычислительные методы. А поскольку в реальных задачах транспортного типа число ограничений и переменных, как правило, бывает весьма значительным, то использование эффективных вычислительных алгоритмов становится не только выгодным, но и просто необходимым.

2. Для задач транспортного типа естественным и удобным является их геометрическое представление в виде *графа* специального вида. Это представление в ряде случаев позволяет преобразовывать к задачам транспортного типа даже такие задачи исследования операций, которые на первый взгляд не имеют с ними ничего общего, и использовать для их решения эффективные вычислительные алгоритмы.

3. Задачи транспортного типа тесно связаны с *детерминированными динамическими задачами исследования операций*, в том числе и с *многошаговыми задачами принятия решений в условиях определенности*, имеющими большое прикладное значение.

Изучение задач транспортного типа начнем не с их формального определения, а с обсуждения математической постановки *классической транспортной задачи*.

5.1. Классическая транспортная задача

В исследовании операций под ***транспортной задачей*** обычно понимают задачу выбора плана перевозок некоторого товара (изделий, груза) от m ***источников*** (пунктов производства, поставщиков) к n ***стокам*** (станциям назначения, пунктам сбыта), обеспечивающего минимальные транспортные затраты. При этом предполагают, что: а) ***мощность*** i-го ***источника*** (объем поставок товара от i-го источника) равна $S_i > 0$, $i = \overline{1, m}$; б) ***мощность*** j-го ***стока*** (объем поставок товара к j-му стоку) равна $D_j > 0$, $j = \overline{1, n}$; в) стоимость перевозки единицы товара (в условных денежных единицах) от i-го источника к j-му стоку равна c_{ij}; г) суммарная мощность всех источников равна суммарной мощности всех стоков, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j. \tag{5.1}$$

Далее под объемом товара будем понимать его количество в фиксированных единицах измерения.

Для математического описания транспортной задачи вводят переменные x_{ij}, обозначающие объемы поставок товара от i-го источника к j-му стоку. В этом случае $x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in}$ — общий объем поставок товара от i-го источника, т.е. мощность этого источника; $x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj}$ — общий объем поставок товара к j-му стоку, т.е. мощность этого стока; $c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{mn}x_{mn}$ — суммарная стоимость перевозок товара от источников к стокам. С учетом этого рассматриваемая задача может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min; \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i, \ i = \overline{1, m}, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = D_j, \ j = \overline{1, n}, \\ x_{ij} \geqslant 0, \ i = \overline{1, m}, \ j = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{5.2}$$

Замечание 5.1. Один из важнейших теоретических результатов исследования операций может быть сформулирован следующим образом (см. теорему 5.3): если выполнены условия

$$S_i \in \mathbb{N},\ i=\overline{1,m}, \quad D_j \in \mathbb{N},\ j=\overline{1,n}, \tag{5.3}$$

то среди всех *оптимальных решений* транспортной задачи (5.2) по крайней мере одно оптимальное решение удовлетворяет требованию целочисленности. В дальнейших рассуждениях мы всегда будем предполагать выполнение условий (5.3). В этом случае транспортную задачу можно рассматривать как *полностью целочисленную задачу*, поскольку введение дополнительного ограничения

$$x_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}, \tag{5.4}$$

не может повлиять на *оптимальное значение целевой функции*. В исследовании операций полностью целочисленную задачу (5.2), (5.4) называют ***классической транспортной задачей***.

Рассмотрим более подробно ограничения типа равенства, входящие в задачу (5.2):

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i, \quad i=\overline{1,m}; \tag{5.5}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = D_j, \quad j=\overline{1,n}. \tag{5.6}$$

Заметим, что каждое переменное модели x_{ij} с ненулевым коэффициентом, равным единице, входит лишь в i-е уравнение системы (5.5), соответствующее i-му источнику (поставки), и в j-е уравнение системы (5.6), соответствующее j-му пункту потребления (спрос). Поэтому, если ввести ***матрицу переменных модели*** (5.2), (5.4)

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{i1} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & \dots & x_{mj} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix},$$

то легко увидеть, что элементы ее i-й строки с коэффициентами 1 входят в i-е уравнение системы (5.5), отражающей мощность источников, а элементы j-го столбца с коэффициентами 1 входят в j-е уравнение системы (5.6), отражающей спрос потребителей. Таким образом, классическую транспортную задачу (5.2), (5.4) можно представить в виде так называемой ***транспортной таблицы*** (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Пункт производства	Пункт потребления					
	1	...	j	...	n	Поставки
1	$x_{11}\ \boxed{c_{11}}$	...	$x_{1j}\ \boxed{c_{1j}}$	...	$x_{1n}\ \boxed{c_{1n}}$	S_1
...	...	...	...	...	...	...
i	$x_{i1}\ \boxed{c_{i1}}$	...	$x_{ij}\ \boxed{c_{ij}}$	...	$x_{in}\ \boxed{c_{in}}$	S_i
	...	...	...	...	...	...
m	$x_{m1}\ \boxed{c_{m1}}$	...	$x_{mj}\ \boxed{c_{mj}}$	...	$x_{mn}\ \boxed{c_{mn}}$	S_m
Спрос	D_1	...	D_j	...	D_n	

Эта таблица соответствует матрице переменных модели $\widetilde{X}$, в которую добавлен один столбец (поставки) и одна строка (спрос), а в правой половине клетки, соответствующей каждому переменному x_{ij}, вписано соответствующее значение c_{ij}. Заметим также, что при решении транспортных задач транспортные таблицы играют ту же роль, что и *симплекс-таблицы* при решении *задач линейного программирования*.

Если каждое уравнение системы (5.6) умножить на -1, то вид системы ограничений в классической транспортной задаче (5.2), (5.4) изменится. В этом случае для ее наглядного представления используют табл. 5.2, отличную от транспортной таблицы.

Таблица 5.2

		Объем поставок													
		x_{11}	x_{12}	$\ldots$	x_{1n}	x_{21}	x_{22}	$\ldots$	x_{2n}	$\ldots$	x_{m1}	x_{m2}	$\ldots$	x_{mn}	
Поставки	1	1	1	$\ldots$	1										S_1
	2					1	1		1						S_2
	$\ldots$									$\ldots$					$\ldots$
	m										1	1	$\ldots$	1	S_m
Спрос	1	-1				-1					-1				$-D_1$
	2		-1				-1					-1			$-D_2$
	$\ldots$									$\ldots$					$\ldots$
	n				-1				-1					-1	$-D_n$
		c_{11}	c_{12}	$\ldots$	c_{1n}	c_{21}	c_{22}	$\ldots$	c_{2n}	$\ldots$	c_{m1}	c_{m2}	$\ldots$	c_{mn}	

В каждом столбце табл. 5.2, соответствующем переменному x_{ij} $(i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n})$, содержится лишь два ненулевых коэффициента 1 и -1, так как свободные места соответствуют нулевым коэффициентам. Коэффициент 1 соответствует i-му источнику (пункт производства), а коэффициент -1 — j-му стоку (пункт потребления или станция назначения).

По табл. 5.1, как и по табл. 5.2, можно полностью восстановить классическую транспортную задачу. Действительно, согласно соотношениям (5.2), (5.4), для этого нужно лишь знать:

а) значение c_{ij} стоимости перевозки единицы товара от i-го к j-стоку (в табл. 5.1 эта информация указана в правой половине соответствующих клеток, а в табл. 5.2 — в последней ее строке);

б) значение S_i мощности каждого i-го источника (в табл. 5.1 и 5.2 эта информация представлена в последнем столбце);

в) значение D_j мощности каждого j-го стока (в табл. 5.1 эта информация дана в последней строке, а в табл. 5.2 — в последнем столбце).

Для удобства геометрической интерпретации классической транспортной задачи, представленной в табл. 5.2, каждый j-й сток и каждый i-й источник изобразим в виде ***узла сети***, т.е. в виде окружности, в центре которой укажем его мощность ($-D_j$ для j-го стока и S_i для i-го источника). Если узел сети, соответствующий i-му источнику ($i = \overline{1, m}$), соединить ориентированной дугой с узлом сети, соответствующим j-му стоку ($j = \overline{1, n}$), и на этой дуге указать стоимость c_{ij} перевозки единицы товара от i-го пункта производства к j-му пункту потребления, то получим представление рассматриваемой задачи в виде *сети*. Ее пример при $m = 2$ и $n = 3$ представлен на рис. 5.1.

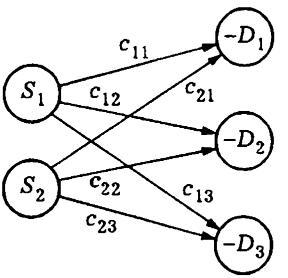


Рис. 5.1

Итак, каждое переменное x_{ij} соответствует потоку вдоль ориентированной дуги, c_{ij} выражает затраты в расчете на единицу потока, а сама задача заключается в распределении мощностей источников по дугам таким образом, чтобы при минимальных затратах удовлетворить потребности стоков.

Прежде чем переходить к рассмотрению конкретных примеров, сделаем несколько замечаний, относящихся к постановке классической транспортной задачи.

Замечание 5.2. Затраты, связанные с производством единицы товара, как правило, не одинаковы для различных пунктов производства. В случае необходимости учет этих затрат при постановке транспортных задач осуществляют путем их включения в коэффициенты c_{ij}.

Замечание 5.3. Если в силу каких-либо причин i-й пункт производства не доступен для j-го пункта потребления, то либо переменное модели x_{ij} исключается из рассмотрения, либо величина c_{ij} принимается сколь угодно большой.

Замечание 5.4. При постановке классической транспортной задачи предполагается выполнение условия (5.1), которое не является обременительным, так как всегда можно ввести фиктивный пункт производства или сбыта и скомпенсировать величину невязки

$$\left|\sum_{i=1}^{m} S_i - \sum_{j=1}^{n} D_j\right|.$$

Замечание 5.5. Иногда возникает необходимость в учете ограничений, связанных с пропускной способностью той или иной ориентированной дуги сети, при постановке транспортной задачи. В простейшем случае эти ограничения имеют вид неравенств

$$x_{ij} \leqslant l_{ij}, \quad i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}. \tag{5.7}$$

Задачу исследования операций вида (5.1)–(5.4), (5.7) называют ***транспортной задачей с ограничениями по пропускной способности***. Как правило, введение ограничений (5.7) в математическую модель классической транспортной задачи приводит лишь к незначительному увеличению объема вычислений при поиске оптимального решения. Но иногда эти ограничения оказываются настолько жесткими, что множество *допустимых решений* рассматриваемой задачи оказывается пустым.

Замечание 5.6. При постановке классической транспортной задачи предполагают, что все пункты производства выпускают одну и ту же продукцию. Но, как правило, каждое предприятие выпускает несколько видов товаров, и при разработке плана их перевозок необходимо учитывать всю номенклатуру. В настоящее время разработаны различные приемы преобразований этой задачи к классической транспортной задаче.

Пример 5.1. Пусть заводы автомобильной фирмы, расположенные в городах A_1, A_2 и A_3, выпускают соответственно 1000, 1500 и 1200 автомобилей в квартал, а спрос на готовую продукцию в центрах сбыта этой фирмы, расположенных в городах B_1 и B_2, составляет 1900 и 1400 автомобилей в квартал соответственно. Стоимость перевозки одного автомобиля от пункта производства до центра сбыта (в условных денежных единицах) представлена в табл. 5.3. Необходимо разработать план перевозок автомобилей от пунктов их производства к центрам сбыта, обеспечивающий минимальные транспортные затраты.

Таблица 5.3

	B_1	B_2
A_1	80	215
A_2	100	108
A_3	102	68

Очевидно, что суммарный объем производства $(1000+1500+1200=3700$ автомобилей в квартал) превышает спрос $(1900+1400=3300$ автомобилей в квартал), и условие (5.1) не выполняется. В этой ситуации можно ввести фиктивный пункт сбыта B_3, который „поглощает" избыток продукции. Фактически автомобили, произведенные на любом из заводов фирмы и предназначенные для фиктивного пункта сбыта B_3, представляют собой избыток производства и остаются на этом заводе. Поэтому стоимость перевозки одного такого автомобиля равна нулю и транспортная таблица рассматриваемой задачи имеет вид, указанный в табл. 5.4.

Таблица 5.4

	B_1	B_2	B_3	Поставки
A_1	x_{11} 80	x_{12} 215	x_{13} 0	1000
A_2	x_{21} 100	x_{22} 108	x_{23} 0	1500
A_3	x_{31} 102	x_{32} 68	x_{33} 0	1200
Спрос	1900	1400	400	

Заметим, что можно назначить штраф за хранение автомобиля на складе завода. В этом случае стоимость перевозки одного автомобиля от места производства до фиктивного пункта сбыта B_3 будет равна стоимости его хранения на складе завода-производителя.

Пример 5.2. Предположим, что в условиях задачи, рассмотренной в примере 5.1, произошло изменение: завод, расположенный в городе A_2, производит не 1500 автомобилей в квартал, а всего лишь 1000 автомобилей. Это опять приводит к нарушению условия (5.1), поскольку суммарный объем производства (3200 автомобилей в квартал) не равен суммарному спросу (3300 автомобилей в квартал). Таким образом, спрос в центрах сбыта автомобилей полностью удовлетворить не удастся. В рассматриваемой ситуации целесообразно так преобразовать транспортную задачу, чтобы недостаток автомобилей ($3300 - 3200 = 100$ автомобилей в квартал) оптимально распределить между центрами сбыта фирмы.

Можно ввести фиктивный завод A_4, производящий в квартал 100 автомобилей, и считать, что стоимость перевозки одного такого автомобиля в любой центр сбыта равна нулю. Транспортная таблица, соответствующая этому варианту действий, представлена в табл. 5.5.

Таблица 5.5

	B_1	B_2	Поставки
A_1	x_{11} 80	x_{12} 215	x_{13} 1000
A_2	x_{21} 100	x_{22} 108	x_{23} 1000
A_3	x_{31} 102	x_{32} 68	x_{33} 1200
A_4	x_{41} 0	x_{42} 0	x_{43} 100
Спрос	1900	1400	

Реально каждая единица недопоставленной в центры сбыта продукции приносит фирме явные и скрытые убытки (штрафы, недополученная прибыль, потеря престижа и т.д.). Поэтому транспортные расходы на единицу продукции фиктивного завода A_4 целесообразно определять с учетом убытков фирмы, обусловленных недопоставками автомобилей в тот или иной центр сбыта.

Пример 5.3. Рассмотрим задачу, которая на первый взгляд не имеет никакого отношения к классической транспортной задаче.

Некоторая фирма решила выделить часть производственных мощностей своего завода для производства сезонных изделий определенного вида в течение четырех месяцев. В течение первого месяца завод может произвести 50 изделий при спросе 100 изделий, оговоренном в контракте оптовым покупателем. В течение второго, третьего и четвертого месяцев эти цифры соответственно составят 180 и 200, 280 и 180, 270 и 300.

В течение каждого месяца спрос можно удовлетворить за счет: а) избытка изделий, произведенных в предыдущие месяцы и хранящихся на заводском складе для реализации в будущем; б) производства изделий в течение текущего месяца; в) избытка производства изделий в более поздние месяцы в счет невыполненных заказов. Затраты, связанные с производством одного изделия, составляют 4 условные денежные единицы. Хранение одного изделия на заводском складе в течение одного месяца обходится фирме в 0,5 условной денежной единицы, а за недопоставку одного изделия оптовый покупатель штрафует изготовителя на 2 условные денежные единицы.

Необходимо разработать план поставок готовой продукции оптовому покупателю, обеспечивающий минимальные затраты, связанные с реализацией проекта выпуска сезонных изделий определенного вида в течение четырех месяцев.

Из табл. 5.6 следует, что рассматриваемая задача может быть сформулирована в терминах классической транспортной задачи, если стоимость „перевозки“ одного изделия из i-го периода производства в j-й период потребления определяется следующим образом (в условных денежных единицах):

$$c_{ij} = \begin{cases} 4, & i=j; \\ 4+0{,}5(j-i), & i<j; \\ 4+2(i-j), & i>j. \end{cases}$$

Здесь в случае $i=j$ учтены затраты на производство, в случае $i<j$ — затраты на производство и затраты на хранение, а в случае $i>j$ — затраты на производство и затраты на оплату штрафа.

Таблица 5.6

Транспортная система	Производственная система
Источник i (пункт производства)	Период производства i (порядковый номер месяца)
Сток j (станция назначения или пункт сбыта)	Период потребления j (порядковый номер месяца реализации готовой продукции)
Мощность источника i (объем поставок товара от i-го пункта производства)	Объем производства за период i (количество изделий, произведенных в течение i-го месяца)
Мощность стока j (объем поставок товара j-й станции назначения)	Реализация за период j (количество изделий, полученных оптовым покупателем в j-м месяце)
Стоимость перевозки единицы товара от i-го источника к j-му стоку	Затраты, связанные с реализацией одного изделия в период потребления j, если оно изготовлено в период производства i

В соответствующей транспортной таблице (табл. 5.7) x_{ij} — количество изделий, изготовленных на заводе в i-м месяце и отправленных покупателю в счет j-го месяца.

Таблица 5.7

Период производства i	Период потребления j				Объем производства
	1	2	3	4	
1	x_{11} 4	x_{12} 4,5	x_{13} 5	x_{14} 5,5	50
2	x_{21} 6	x_{22} 4	x_{23} 4,5	x_{24} 5	180
3	x_{31} 8	x_{32} 6	x_{33} 4	x_{34} 4,5	280
4	x_{41} 10	x_{42} 8	x_{43} 6	x_{44} 4	270
Спрос	100	200	180	300	

5.2. Транспортная задача с промежуточными пунктами

Одно практически важное обобщение *классической транспортной задачи* связано с учетом возможности доставки товара от i-го *источника* к j-му *стоку* по маршруту, проходящему через некоторый ***промежуточный пункт*** (склад). Так, например, промежуточные пункты являются составной частью распределительной системы любой крупной компании, имеющей сеть универсальных магазинов во многих городах. Такая компания обычно имеет зональные оптовые базы (источники), снабжающие товарами более мелкие региональные склады (промежуточные пункты), откуда эти товары поступают в розничную торговую сеть (стоки). При этом товар для каждого фиксированного стока в общем случае может быть доставлен не из любого источника и по маршрутам, не обязательно проходящим через все промежуточные пункты. Кроме того, промежуточные пункты могут обладать вполне определенной спецификой. Так, например, при транспортировке товара от источника к стоку по маршруту, проходящему через склад, часть товара может быть использована для создания неприкосновенного запаса на складе.

Задачу выбора плана перевозок товаров от источников к стокам с учетом промежуточных пунктов, обеспечивающего минимальные транспортные затраты и потребности стоков, в исследовании операций называют ***транспортной задачей с промежуточными пунктами***. Для приобретения практических навыков в построении математических моделей таких задач обратимся к следующему примеру.

Пример 5.4. Торговая фирма имеет восемь складов, на которых сосредоточены все имеющиеся в наличии запасы товара. Перед началом рекламной компании решено перераспределить часть запасов товара между складами в соответствии с прогнозами сбыта в районах их размещения. Требуется разработать план перевозок товара между складами, который позволит при минимальных транспортных затратах создать на каждом складе необходимый запас товара.

На рис. 5.2 представлена схема размещения складов, на которой указаны: а) номера складов (цифры 1–8 в круге); б) избыток товара на складе (если он есть), который должен быть перераспределен в системе складов (он указан под кругом с номером склада неотрицательным числом в единицах измерения товара); в) недостаток товара на складе (если он есть), который должен быть устранен за счет его поставок с других складов системы (он указан под кругом с номером склада отрицательным числом и выражен в единицах измерения товара); г) возможность перевозки товара со склада i на склад j (ориентированная дуга от круга с номером i к кругу с номером j);

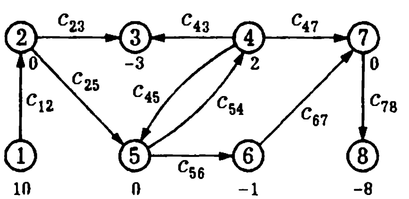


Рис. 5.2

д) затраты, связанные с перевозкой единицы товара со склада i на склад j (величина c_{ij} над соответствующей ориентированной дугой, выраженная в условных денежных единицах).

На рис. 5.2 видно, что суммарный избыток товара, имеющийся на складах системы с номерами 1 и 4, равен суммарному недостатку товара, имеющемуся на складах с номерами 3, 6 и 8 этой же системы. Перераспределение товара может происходить через склады с номерами 2, 4–7, которые в рассматриваемой задаче и являются промежуточными пунктами. Источником является лишь склад с номером 1, на котором имеется избыток товара и с которого товар можно только вывозить, а стоками являются склады с номерами 3 и 8, на которых есть недостаток товара, и на эти склады товары можно только завозить. Заметим также, что между складами с номерами 4 и 5 возможны перевозки в обоих направлениях, но в общем случае $c_{45} \neq c_{54}$ (например, наличие одностороннего движения по кратчайшему маршруту).

На рис. 5.2 фактически представлена *сеть* рассматриваемой транспортной задачи с промежуточными пунктами. Формальное описание этой сети удобно представить в виде табл. 5.8, аналогичной табл. 5.2.

Таблица 5.8

Номер склада	Объемы перевозок x_{ij}										Избыток (+) или недостаток (−) товара
	x_{12}	x_{23}	x_{25}	x_{43}	x_{45}	x_{47}	x_{54}	x_{57}	x_{67}	x_{78}	
1	1										10
2	−1	1	1								0
3		−1		−1							−3
4				1	1	1	−1				2
5			−1		−1		1	1			0
6									1		−1
7						−1		−1	−1	1	0
8										−1	−8
	c_{12}	c_{23}	c_{25}	c_{43}	c_{45}	c_{47}	c_{54}	c_{57}	c_{67}	c_{78}	

В табл. 5.8 каждому *узлу сети* (складу) соответствует одна строка и каждой ориентированной дуге сети соответствует одно *переменное модели* x_{ij}, представляющее собой количество товара (в единицах его измерения), которое должно быть отправлено с i-го склада на j-й склад. Каждому переменному модели x_{ij} соответствует один столбец, в котором стоит 1 в i-й строке, -1 в j-й строке и c_{ij} в последней строке. В табл. 5.8 на пересечении i-й строки и последнего столбца находится число, равное избытку (если оно неотрицательное) или недостатку (если оно отрицательное) товара на i-м складе (в единицах измерения товара).

Перейдем к построению *транспортной таблицы* (табл. 5.9) для рассматриваемой транспортной задачи с промежуточными пунктами с целью доказательства возможности преобразования этой задачи к классической транспортной задаче.

Таблица 5.9

Пункт производства	Пункт потребления							Поставки
	2	3	4	5	6	7	8	
1	x_{12} c_{12}							10
2	x_{22} 0	x_{23} c_{23}		x_{25} c_{25}				12
4		x_{43} c_{43}	x_{44} 0	x_{45} c_{45}		x_{47} c_{47}		14
5			x_{54} c_{54}	x_{55} 0	x_{56} c_{56}			12
6					x_{67} 0	x_{67} c_{67}		11
7						x_{77} 0	x_{78} c_{78}	12
Спрос	12	3	12	12	12	12	8	

На первом этапе в табл. 5.8 нужно выделить строку для каждого *источника* и указать его *мощность* (избыток товара на складе). В данном примере источником является только склад с номером 1, мощность которого $S_1 = 10$. В табл. 5.9

этому складу соответствует первый пункт производства с объемом поставок, равным 10.

На втором этапе в табл. 5.8 нужно выделить столбец для каждого *стока* и указать его *мощность* (недостаток товара на складе). В данном примере стоками являются третий и восьмой склады. Поэтому $D_3 = 3$ и $D_8 = 8$, что в табл. 5.9 соответствует значениям спроса для пунктов потребления 3 и 8.

На третьем этапе нужно сделать следующее.

1. В табл. 5.9 выделить строку и столбец для каждого промежуточного пункта. В данном случае промежуточными пунктами являются склады с номерами 2, 4–7, которые в табл. 5.9 фигурируют как пункты производства и пункты потребления.

2. Для каждого k-го промежуточного пункта определить величину ***чистого запаса*** товара T_k, равного объему избытка со знаком плюс либо объему недостатка со знаком минус. В данном случае $T_2 = 0$, $T_4 = 2$, $T_5 = 0$, $T_6 = -1$, $T_7 = 0$ (см. табл. 5.8).

3. Определить суммарный объем избытка B на всех складах системы, используя последний столбец табл. 5.8. Суммарный объем избытка B представляет собой общий объем перевозок (в единицах измерения товара). В данном случае $B = 10 + 2 = 12$.

4. Считать, что маршрут транспортировки всего суммарного объема избытка товара может проходить через любой промежуточный пункт. Это означает, что любой склад с номером k, рассматриваемый как промежуточный пункт, может принять весь суммарный объем избытка товара и мощность „его стока" равна B, т.е. $D_k = B$. Таким образом, в данном случае $D_2 = D_4 = D_5 = D_6 = D_7 = 12$, в табл. 5.9 эти значения фигурируют как спрос.

5. Для каждого k-го промежуточного пункта определить „мощность его источника" S_k, т.е. объем товара, который может быть вывезен со склада с номером k. Так как на складе с номером k величина чистого запаса товара равна

T_k, а максимально возможный объем поставок определяется величиной B, то $S_k = B + T_k$. В данном случае $S_2 = 12+0 = 12$, $S_4 = 12+2 = 14$, $S_5 = 12+0 = 12$, $S_6 = 12-1 = 11$, $S_7 = 12+0 = 12$. В табл. 5.9 эти значения фигурируют как поставки.

На четвертом этапе необходимо для каждого k-го промежуточного пункта ввести переменное x_{kk} при $c_{kk} = 0$. В данном случае $k \in \{2, 4, 5, 6, 7\}$, а интерпретировать переменное x_{kk} можно как объем товара, который оседает на складе с номером k.

При построении транспортной таблицы (см. табл. 5.9) введена величина B, имеющая смысл „буферного запаса“ в каждом промежуточном пункте. Для каждого k-го промежуточного пункта величина B входит как в S_k, так и в D_k. Поэтому сумма спроса равна сумме поставок. Значение S_k должно быть настолько велико, чтобы оно могло соответствовать любому количеству товара, приходящему через k-й промежуточный пункт при любом *допустимом решении* исходной задачи. Поэтому значение B принимают равным суммарному объему избытка товара в системе. В этом случае значение разности $(B - x_{kk})$ представляет собой объем товара (в единицах его измерения), перевезенного через k-й промежуточный пункт, так как B — максимально возможный объем поставок товара на склад с номером k, а x_{kk} — объем товара, осевшего на этом складе. В табл. 5.9 заполнены лишь те клетки, которые содержат переменные x_{ij}, соответствующие ориентированным дугам сети, а также переменные x_{kk}, соответствующие промежуточным пунктам. Именно в этом и заключается отличие табл. 5.9 от табл. 5.1 (транспортной таблицы).

Следует отметить, что в табл. 5.8 заданы восемь ограничений и десять переменных, а в транспортной таблице (см. табл. 5.9) заданы уже тринадцать ограничений (по строкам и столбцам) и пятнадцать переменных. Увеличение размерности на пять единиц объясняется наличием пяти промежуточных пунктов.

Осталось доказать эквивалентность (в смысле совпадения оптимальных решений) исходной транспортной задачи с промежуточными пунктами, представленной в табл. 5.8, соответствующей ей классической транспортной задаче, представленной в табл. 5.9.

Нетрудно убедиться в том, что в табл. 5.9 строка, соответствующая первому складу (источник), и столбцы, соответствующие третьему и восьмому складам (стоки), задают те же ограничения, что и соответствующие строки в табл. 5.8. Обратимся теперь к k-му складу, являющемуся промежуточным пунктом, т.е. $k \in \{2, 4, 5, 6, 7\}$. Пусть J^* — множество номеров складов, на которые товар может быть доставлен с k-го склада, а J^{**} — множество номеров складов, с которых товар может быть доставлен на k-й склад. Тогда ограничение для k-го склада, заданное в табл. 5.8, имеет вид

$$\sum_{j \in J^*} x_{kj} - \sum_{i \in J_{**}} x_{ik} = T_k, \tag{5.8}$$

где T_k — величина чистого запаса товара, введенная на третьем этапе построения транспортной табл. 5.9. А так как соответствующие ограничения, задаваемые в табл. 5.9 (по строке и по столбцу), могут быть представлены следующим образом:

$$\sum_{j \in J^*} x_{kj} + x_{kk} = T_k + B, \tag{5.9}$$

$$\sum_{j \in J^{**}} x_{ik} + x_{kk} = B, \tag{5.10}$$

то, вычитая (5.10) из (5.9), получаем ограничение (5.8). Доказательство того, что рассматриваемая транспортная задача с промежуточными пунктами эквивалентна классической транспортной задаче, можно считать завершенным.

В частности, для четвертого склада, являющегося промежуточным пунктом, ограничение (5.8) имеет вид

$$x_{43} + x_{45} + x_{47} - x_{54} = 2,$$

а соответствующие ему ограничения (5.9), (5.10) могут быть представлены следующим образом:

$$x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{47} = 14, \quad x_{44} + x_{54} = 12.$$

Это вытекает из равенств $T_4 = 2$ и $B = 12$ (см. третий этап построения в табл. 5.9). #

5.3. Задача о назначениях

Предположим, что имеется n различных работ, каждую из которых может выполнить любой из n привлеченных исполнителей. Стоимость выполнения i-й работы j-м исполнителем известна и равна c_{ij} (в условных денежных единицах). Необходимо распределить исполнителей по работам (назначить одного исполнителя на каждую работу) так, чтобы минимизировать суммарные затраты, связанные с выполнением всего комплекса работ.

В *исследовании операций* задача, сформулированная выше, известна как ***задача о назначениях***. Введем *переменные* x_{ij}, где x_{ij} принимает значение 1 в случае, когда i-ю работу выполняет j-й исполнитель, и значение 0 во всех остальных случаях, $i, j = \overline{1, n}$. Тогда ограничение

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n},$$

гарантирует выполнение каждой работы лишь одним исполнителем, ограничение

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n},$$

гарантирует, что каждый из исполнителей будет выполнять лишь одну работу. Стоимость выполнения всего комплекса работ равна

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}.$$

Таким образом, задачу о назначениях можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min; \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = \overline{1,n}; \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,n}; \\ x_{ij} \in \{0,\ 1\},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{5.11}$$

Задача о назначениях (5.11) является частным случаем *классической транспортной задачи* (5.2), (5.4), в которой надо положить $n = m$, $S_i = 1$, $i = \overline{1,n}$, $D_j = 1$, $j = \overline{1,n}$. При этом условие $x_{ij} \in \{0,\ 1\}$, $i,j = \overline{1,n}$, означает выполнение *требования целочисленности* переменных x_{ij}. Это связано с тем, что *мощности* всех *источников* и *стоков* равны единице, откуда следует, что в допустимом целочисленном решении значениями переменных могут быть только 0 и 1.

Как частный случай классической транспортной задачи, задачу о назначениях можно рассматривать как *задачу линейного программирования*. Поэтому в данном случае используют терминологию и теоретические результаты линейного программирования.

В задаче о назначениях переменное x_{ij} может принимать значение 0 или 1. При этом, согласно (5.11), в любом допустимом решении лишь n переменных могут принимать значения 1. Таким образом, любое *допустимое базисное решение* задачи о назначениях будет *вырожденным*.

На практике встречаются задачи о назначениях, в постановках которых параметр c_{ij} для $i, j = \overline{1, n}$ понимается как эффективность выполнения i-й работы j-м исполнителем. В этих случаях нужно так распределить работы между исполнителями, чтобы суммарная эффективность их выполнения была бы максимальной, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \max, \tag{5.12}$$

где максимум ищется при ограничениях, указанных в (5.11).

Параметры c_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$, задачи о назначениях (5.11) удобно представлять матрицей $C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, которую называют ***матрицей стоимости***. Предположим, что $C^* = (c^*_{ij})$ и $C = (c_{ij})$ — две матрицы стоимости, элементы которых связаны следующим образом:

$$c^*_{ij} = c_{ij} + d_i + l_j, \quad i, j = \overline{1, n},$$

где d_i, $i = \overline{1, n}$, и l_j, $j = \overline{1, n}$, — некоторые постоянные. Таким образом, для получения матрицы C^* нужно к злементам каждой i-й строки матрицы C прибавить число d_i, а к элементам ее каждого j-го столбца — число l_j. В этом случае, если X — *допустимое решение*, удовлетворяющее ограничениям из (5.11), и

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}, \quad f^*(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c^*_{ij}x_{ij},$$

то с учетом ограничений из (5.11) типа равенства имеем

$$f^*(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij} + d_i + l_j)x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \\ + \sum_{i=1}^{n} d_i\Bigl(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\Bigr) + \sum_{j=1}^{n} l_j\Bigl(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\Bigr) = f(X) + \gamma,$$

где

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} d_i + \sum_{j=1}^{n} l_j.$$

Таким образом, для любого допустимого решения X соответствующие ему значения функций f и f^* будут отличаться на постоянную γ, которая не зависит от X. Поэтому, если есть две задачи о назначениях с одним и тем же множеством G допустимых решений и *целевыми функциями* f и f^* соответственно, то их оптимальные решения совпадают. Нетрудно убедиться в наличии аналогичного свойства и у классической транспортной задачи.

Если задача о назначениях является задачей максимизации, т.е. ищется максимум целевой функции на множестве G допустимых решений, которое задается системой ограничений из (5.11), то эквивалентную ей задачу минимизации

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-c_{ij}) x_{ij} \to \min_{X \in G} \tag{5.13}$$

формально нельзя отнести к задачам о назначениях, поскольку коэффициенты ее целевой функции не являются положительными. Это несоответствие можно преодолеть, заменив (5.13) эквивалентной задачей

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-c^*_{ij}) x_{ij} \to \min_{X \in G},$$

в которой

$$c^*_{ij} = c_{ij} - \max_{i=\overline{1,n}} c_{ij}, \quad j = \overline{1,n},$$

так как в этом случае для всех $i, j = \overline{1,n}$ имеет место неравенство $-c^*_{ij} \geqslant 0$.

Пример 5.5. Предположим, что небольшая компания получает заказ на выполнение четырех видов работ, для каждого из которых известна производительность четырех ее штатных сотрудников. Производительность i-го сотрудника при выполнении им j-й работы определяет соответствующий элемент c_{ij} следующей матрицы C дневных доходов компании (матрицы стоимости):

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Сформулируем задачу о распределении штатных сотрудников фирмы по видам работ, дающем максимальный суммарный дневной доход, как задачу о назначениях.

В данном случае

$$l_1 = \max_i c_{i1} = 5, \qquad l_3 = \max_i c_{i3} = 6,$$

$$l_2 = \max_i c_{i2} = 8, \qquad l_4 = \max_i c_{i4} = 5.$$

Таким образом, в (5.11) имеем $n = 4$, а коэффициенты при переменных модели в целевой функции представлены матрицей

$$-C^* = (-c^*_{ij}) = -(c_{ij} - l_j) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad \#$$

Обращаем внимание на то, что задачи о назначениях, возникающие в приложениях, как правило, не имеют никакого отношения к оптимизации перевозок или к каким-либо другим транспортным операциям.

5.4. Задача выбора кратчайшего пути

Пусть задана некоторая *сеть* (рис. 5.3), каждой ориентированной дуге которой соответствует определенное расстояние. Необходимо найти кратчайший путь из i-го *узла сети* в ее

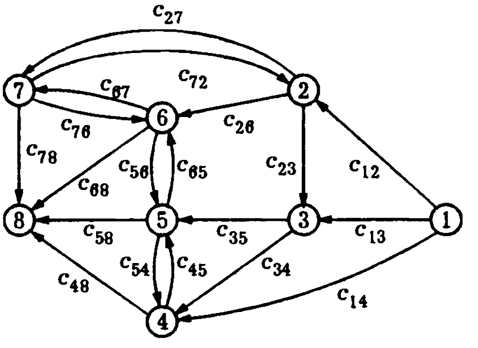


Рис. 5.3

заданный j-й узел. К этой задаче, известной в *исследовании операций* как ***задача выбора кратчайшего пути***, сводятся такие практически важные задачи, как *задача о замене оборудования*, *задача о календарном планировании комплекса работ* и т.д.

Как правило, в сети выделяют один узел, который является конечным (пункт или станция назначения, *сток*). Задача заключается в отыскании кратчайшего пути в этот конечный узел (на рис. 5.3 конечным является узел с номером 8) из некоторого другого узла сети (например, из первого узла сети на рис. 5.3). Величина c_{ij} определяет расстояние от i-го узла сети до ее j-го узла.

Величина c_{ij} может измеряться в единицах, отличных от единиц длины. Так, например, c_{ij} может представлять собой стоимость проезда от i-го до j-го узла сети. Тогда задача заключается в отыскании пути минимальной стоимости. Величина c_{ij} может также определять время переезда от i-го до j-го узла сети. При этом необходимо найти путь с минимальной продолжительностью переезда.

При решении прикладных задач, сводящихся к задаче выбора кратчайшего пути, часто встречаются ситуации, когда $c_{ij} \neq c_{ji}$. Кроме того, как правило, не выполняется так называемое неравенство треугольника: $c_{ij} \leqslant c_{ik} + c_{kj}$ для всех или некоторых значений индексов i, j, k.

Существуют сети, содержащие ***циклы***, каждый из которых представляет собой замкнутый путь (путь, исходящий из некоторого узла сети и возвращающийся в него же). Так, в сети, представленной на рис. 5.3, много циклов, один из них содержит узлы с номерами 2, 3, 5, 6 и 7. Как правило, в задачах исследования операций значения c_{ij} положительны и общая „длина“ цикла является положительной. Следовательно, решение задачи выбора кратчайшего пути не может содержать циклов.

Предположим, что для сети, представленной на рис. 5.3, необходимо найти кратчайший путь от узла с номером 1 (*источник*) до узла с номером 8 (сток). Установим связь этой задачи с *классической транспортной задачей.*

Рассмотрим *транспортную задачу с промежуточными пунктами*, сеть которой представлена на рис. 5.3. При этом предположим, что: а) в узле с номером 1 имеется избыточная единица товара; б) в узле с номером 8 имеется недостаток единицы товара; в) узлы с номерами 2–7 являются промежуточными пунктами с нулевыми *чистыми запасами* (потребность в дополнительных поставках товара равна нулю — см. пример 5.4). Необходимо разработать план перевозок товара между узлами сети (складами), который при минимальных транспортных затратах позволит на каждом складе поддерживать нулевой чистый запас товара.

Как и в примере 5.4, считаем, что каждой ориентированной дуге сети соответствует *переменное модели* x_{ij}, представляющее собой количество товара, которое должно быть отправлено с i-го склада на j-й. Для каждого k-го промежуточного пункта вводим переменное x_{kk} с соответствующим ему коэффициентом $c_{kk} = 0$ в целевой функции, а величину чистого запаса обозначаем через T_k. Если множество пар индексов (i, j), соответствующих ориентированным дугам сети, представленной на рис. 5.3, обозначить через J, то рассматриваемую задачу можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \sum\limits_{(i,\,j)\in J} c_{ij}x_{ij} \to \min; \\ \sum\limits_{(k,\,j)\in J} x_{kj} - \sum\limits_{(i,\,k)\in J} x_{ik} = T_k, \\ T_1 = 1, \quad T_8 = -1, \quad T_k = 0,\ k = \overline{2, 7}, \\ x_{ij} \geqslant 0,\ (i,\,j) \in J. \end{cases} \qquad (5.14)$$

Транспортная таблица для задачи (5.14) (табл. 5.10) аналогична транспортной таблице из примера 5.4 (см. табл. 5.9).

Таблица 5.10

Пункт производства	Пункт потребления							Поставки
	2	3	4	5	6	7	8	
1	x_{12} c_{12}	x_{13} c_{13}	x_{14} c_{14}					1
2	x_{22} 0	x_{23} c_{23}			x_{26} c_{26}	x_{27} c_{27}		1
3		x_{33} 0	x_{34} c_{34}	x_{35} c_{35}				1
4			x_{44} 0	x_{45} c_{45}			x_{48} c_{48}	1
5			x_{54} c_{54}	x_{55} 0	x_{56} c_{56}		x_{58} c_{58}	1
6				x_{65} c_{65}	x_{66} 0	x_{67} c_{67}	x_{68} c_{68}	1
7	x_{72} c_{72}				x_{76} c_{76}	x_{77} 0	x_{78} c_{78}	1
Спрос	1	1	1	1	1	1	1	

Перейдем к рассмотрению примеров, связанных с задачей выбора кратчайшего пути.

Пример 5.6. Рассмотрим задачу, которую в литературе по исследованию операций называют ***задачей о замене оборудования***.

Предположим, что некоторое транспортное агентство разрабатывает план аренды транспортного оборудования на период длительностью $n-1$ лет, где $n>1$. Агентство может выполнить свои обязательства по перевозке грузов, взяв в аренду транспортную единицу в начале первого года и эксплуатируя ее до начала j-го года, где $j \leqslant n$. Если $j<n$, то в начале j-го года агентство заменяет эту транспортную единицу новой и эксплуатирует ее до начала k-го года, где $k \leqslant n$, и т.д. Величина затрат c_{ij} на оборудование, взятое в аренду в начале i-го года и замененное в начале j-го года, где $1 \leqslant i<j \leqslant n$, включает арендную плату плюс ожидаемые расходы на ремонт и обслуживание. Необходимо так составить план замены оборудования, чтобы минимизировать суммарные затраты на его аренду, ремонт и обслуживание в течение планового периода.

Сеть рассматриваемой задачи при $n=6$ представлена на рис. 5.4. Каждый промежуточный пункт (узлы с номерами 2–5) соответствует году, в котором может произойти замена транспортной единицы. Рассматриваемой задаче соответствует транспортная таблица, представленная в табл. 5.11. #

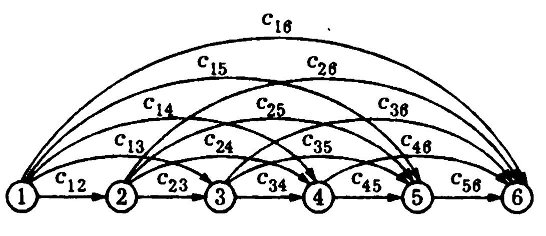


Рис. 5.4

Можно показать, что сеть, представленная на рис. 5.4, не имеет циклов. Такие сети называют ***ациклическими***.

Обращаем внимание на то, что все задачи исследования операций, рассмотренные в этой главе, при всем разнообразии их возможных постановок так или иначе могут быть преобразованы к классической транспортной задаче и их естественно называть ***задачами транспортного типа***. Отметим также, что все задачи транспортного типа имеют сетевую структуру.

Таблица 5.11

Пункт производства	Пункт потребления					Поставки
	2	3	4	5	6	
1	x_{12} c_{12}	x_{13} c_{13}	x_{14} c_{14}	x_{15} c_{15}	x_{16} c_{16}	1
2	x_{22} 0	x_{23} c_{23}	x_{24} c_{24}	x_{25} c_{25}	x_{26} c_{26}	1
3		x_{33} 0	x_{34} c_{34}	x_{35} c_{35}	x_{36} c_{36}	1
4			x_{44} 0	x_{45} c_{45}	x_{45} c_{46}	1
5				x_{55} 0	x_{56} c_{56}	1
Спрос	1	1	1	1	1	

5.5. Симплексный метод решения задач транспортного типа

Решать *задачу транспортного типа*, которая тем или иным способом преобразуется в *классическую транспортную задачу*, относящуюся к *задачам линейного программирования*, можно с помощью *симплекс-метода*. Но специфические особенности классической транспортной задачи позволили разработать более эффективный метод ее решения, известный как ***симплексный метод*** (или ***метод потенциалов***).

Одна из особенностей классической транспортной задачи состоит в избыточности системы ограничений типа равенства, определяющих множество *допустимых решений*. Действительно, согласно (5.2), эти ограничения имеют следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i, \quad i = \overline{1, m}; \tag{5.15}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = D_j, \quad j = \overline{1, n}; \tag{5.16}$$

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j. \tag{5.17}$$

Нетрудно убедиться в том, что *базисная система* для системы ограничений (5.15)–(5.17) типа равенства содержит $n+m-1$ уравнений. Таким образом, любое *допустимое базисное решение* классической транспортной задачи (5.2), (5.4) будет содержать $n+m-1$ *базисных переменных.*

Можно показать, что *задача линейного программирования, двойственная* классической транспортной задаче (5.1)–(5.4), состоит в максимизации целевой функции

$$\varphi(u_1,\ldots,u_m,v_1,\ldots,v_n)=\sum_{i=1}^{m}S_iu_i+\sum_{j=1}^{n}D_jv_j \tag{5.18}$$

при ограничениях

$$u_i+v_j\leqslant c_{ij},\quad i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}, \tag{5.19}$$

где *переменные* u_i, $i=\overline{1,m}$, и v_j, $j=\overline{1,n}$, *не ограничены в знаке.* При этом, если величины x_{ij}^0, u_i^0 и v_j^0 ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$) удовлетворяют ограничениям (5.15)–(5.17) и (5.19) соответственно и, кроме того,

$$x_{ij}^0(c_{ij}-u_i^0-v_j^0)=0,\quad i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}, \tag{5.20}$$

то совокупность всех значений x_{ij}^0 представляет собой *оптимальное решение* рассматриваемой классической транспортной задачи.

Основная идея симплексного метода состоит в том, что на каждой итерации для допустимых базисных решений исходной классической транспортной задачи и двойственной ей задачи линейного программирования всегда выполняются два из следующих трех условий: а) условия (5.15)–(5.17) существования допустимых решений классической транспортной задачи (5.2), (5.4); б) условия (5.19) существования допустимых решений двойственной ей задачи линейного программирования; в) условие (5.20). Приступая к рассмотрению симплексного метода, заметим, что при его реализации на каждой итерации выполняются условия а) и в), а при выполнении условия б) вычислительный процесс прекращается.

Начнем с нахождения начального базисного решения для рассматриваемой классической транспортной задачи, воспользовавшись ее *транспортной таблицей* (см. табл. 5.1) и так называемым ***правилом северо-западного угла.***

Следуя правилу северо-западного угла, полагаем

$$x_{11} = \begin{cases} S_1, & S_1 \leqslant D_1; \\ D_1, & S_1 \geqslant D_1. \end{cases}$$

Если $x_{11} = S_1$, то выделяем первую строку транспортной таблицы (возможности первого *источника* полностью исчерпаны и $x_{1j} = 0$, $j = \overline{2, n}$) и заменяем D_1 на $D_1 - S_1$. Полученная транспортная таблица соответствует классической транспортной задаче с $m - 1$ источником и n *стоками.* Следовательно, процедуру нахождения начального базисного решения можно повторить, определив значение переменного модели x_{21}, расположенного в северо-западном углу новой транспортной таблицы, и т.д.

Понятно, что если $x_{11} = D_1$, то нужно выделить первый столбец транспортной таблицы (возможности первого стока полностью исчерпаны и $x_{i1} = 0$, $i = \overline{2, m}$) и заменить S_1 на $S_1 - D_1$. В этом случае полученная транспортная таблица соответствует классической транспортной задаче с m источниками и $n - 1$ стоками, а в ее северо-западном углу расположено переменное модели x_{12}.

Если $S_1 = D_1$, то можно выделить либо только первую строку исходной транспортной таблицы, либо только ее первый столбец. Так, если выделить первую строку, то $D_1 - S_1 = 0$ и на следующем шаге переменное модели x_{21} становится базисным и принимает нулевое значение. Поэтому на втором шаге выделяем первый столбец. Если сначала выделить первый столбец, то $S_1 - D_1 = 0$, на следующем шаге переменное модели x_{12} становится базисным и принимает нулевое значение. Поэтому на втором шаге выделяем первую строку.

Пример 5.7. Пусть классическая транспортная задача, для которой необходимо найти начальное базисное решение, представлена своей транспортной таблицей (табл. 5.12). В эту таблицу включены только значения c_{ij}, $i = 1, 2, 3$, $j = \overline{1, 4}$. В процессе нахождения начального базисного решения в транспортной таблице будем проставлять значения только базисных переменных. Это позволит различать нулевые значения базисных переменных начального решения и значения свободных переменных, которые равны нулю всегда.

Таблица 5.12

Источник	Сток				Поставки
	1	2	3	4	
1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	10
2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	5
3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	15
Спрос	5	10	8	7	

В данном случае $10 = S_1 > D_1 = 5$. Поэтому по правилу северо-западного угла полагаем $x_{11} = D_1 = 5$, в табл. 5.12 выделяем первый столбец, фиксируя тем самым, что все остальные переменные этого столбца (x_{21} и x_{31}) являются свободными и, как следствие, равными нулю. Проставляя $x_{11} = 5$ и заменяя S_1 на $S_1 - D_1$, приходим к табл. 5.13.

Таблица 5.13

Источник	Сток				Поставки
	1	2	3	4	
1	5 c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	$5 = 10 - 5$
2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	5
3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	15
Спрос	$0 = 5 - 5$	10	8	7	

В северо-западном углу незаштрихованной части табл. 5.13 находится переменное x_{12} и $10 = D_2 > S_1 = 5$. Поэтому полагаем $x_{12} = S_1 = 5$, в табл. 5.13 заштриховываем первую строку и после замены D_2 на $D_2 - S_1 = 5$ приходим к табл. 5.14.

Таблица 5.14

Источник	Сток				Поставки
	1	2	3	4	
1	5 c_{11}	5 c_{12}	c_{13}	c_{14}	$0 = 5 - 5$
2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	5
3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	15
Спрос	0	$5 = 10 - 5$	8	7	

В северо-западном углу незаштрихованной части табл. 5.14 находится переменное x_{22} и $S_2 = 5 = D_2$. Таким образом, можно найти два начальных базисных решения, в первом из которых $x_{22} = D_2 = 5$ и заштриховывается второй столбец в табл. 5.14, а во втором $x_{22} = S_2 = 5$ и в табл. 5.14 заштриховывается вторая строка. Воспользуемся первым из возможных вариантов и, заменив S_2 на $S_2 - D_2$, приходим к табл. 5.15.

Таблица 5.15

Источник	Сток				Поставки
	1	2	3	4	
1	5 c_{11}	5 c_{12}	c_{13}	c_{14}	0
2	c_{21}	5 c_{22}	c_{23}	c_{24}	$0 = 5 - 5$
3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	15
Спрос	0	$0 = 5 - 5$	8	7	

В северо-западном углу незаштрихованной части табл. 5.15 находится переменное модели x_{23} и $0 = S_2 < D_3 = 8$. Поэтому полагаем $x_{23} = S_2 = 0$ и в табл. 5.15 заштриховываем вторую строку и после замены D_3 на $D_3 - S_2 = 8$ приходим к табл. 5.16.

Таблица 5.16

Источник	Сток				Поставки
	1	2	3	4	
1	5 c_{11}	5 c_{12}	c_{13}	c_{14}	0
2	c_{21}	5 c_{22}	0 c_{23}	c_{24}	$0 = 0 - 0$
3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	15
Спрос	0	0	$8 = 8 - 0$	7	

Табл. 5.16 содержит единственную незаштрихованную строку и из нее непосредственно следует, что $x_{33} = 8$ и $x_{34} = 7$. А так как значения свободных переменных равны нулю, то найдено начальное базисное решение, определяемое следующими значениями базисных переменных: $x_{11} = 5$, $x_{12} = 5$, $x_{22} = 5$, $x_{23} = 0$, $x_{33} = 8$, $x_{34} = 7$.

Кроме правила северо-западного угла разработаны и другие процедуры нахождения начального базисного решения для классической транспортной задачи. Остановимся лишь на одной из них, известной в *исследовании операций* как ***метод минимальной стоимости***. Единственное отличие этого метода от метода северо-западного угла заключается в том, что при его реализации используют переменное x_{ij}, которому соответствует минимальная *удельная стоимость* c_{ij}, а не переменное модели, расположенное в северо-западном углу транспортной таблицы.

Пример 5.8. Пусть классическая транспортная задача, для которой необходимо найти начальное базисное решение, представлена своей транспортной таблицей (табл. 5.17).

Минимальной удельной стоимости $c_{22} = 0$ соответствует переменное модели x_{22}. А так как в данном случае $1 = S_2 <$

$< D_2 = 5$, то полагаем $x_{22} = 1$, заменяем D_2 на $D_2 - S_2 = 4$ и после штриховки второй строки приходим к табл. 5.18.

Таблица 5.17

Источник	Сток				Поставки
	1	2	3	4	
1	x_{11} 2	x_{12} 3	x_{13} 11	x_{14} 7	6
2	x_{21} 1	x_{22} 0	x_{23} 6	x_{24} 1	1
3	x_{31} 5	x_{32} 8	x_{33} 15	x_{34} 9	10
Спрос	7	5	3	2	

Таблица 5.18

Источник	Сток				Поставки
	1	2	3	4	
1	x_{11} 2	x_{12} 3	x_{13} 11	x_{14} 7	6
2	x_{21} 1	**1** 0	x_{23} 6	x_{24} 1	$0 = 1 - 1$
3	x_{31} 5	x_{32} 8	x_{33} 15	x_{34} 9	10
Спрос	7	$4 = 5 - 1$	3	2	

В незаштрихованной части табл. 5.18 минимальной удельной стоимости $c_{11} = 2$ соответствует переменное x_{11}. В данном случае $6 = S_1 < D_1 = 7$. Поэтому полагаем $x_{11} = 6$, заменяем D_1 на $D_1 - S_1 = 1$ и после штриховки первой строки приходим к табл. 5.19.

Табл. 5.19 представляет собой транспортную таблицу с одной незаштрихованной строкой. Поэтому $x_{31} = 1$, $x_{32} = 4$, $x_{33} = 3$, $x_{34} = 2$.

Таким образом, начальное базисное решение рассматриваемой классической транспортной задачи определяется следующими значениями переменных: $x_{11} = 6$, $x_{22} = 1$, $x_{31} = 1$, $x_{32} = 4$, $x_{33} = 3$, $x_{34} = 2$. #

Таблица 5.19

Источник	Сток				Поставки
	1	2	3	4	
1	$6 \mid 2$	$x_{12} \mid 3$	$x_{13} \mid 11$	$x_{14} \mid 7$	$0=6-6$
2	$x_{21} \mid 1$	$2 \mid 0$	$x_{23} \mid 6$	$x_{24} \mid 1$	0
3	$x_{31} \mid 5$	$x_{32} \mid 8$	$x_{33} \mid 15$	$x_{34} \mid 9$	10
Спрос	$1=7-6$	4	3	2	

Заметим, что большинство исследователей склонны считать метод минимальной стоимости более эффективным (в смысле значения целевой функции, соответствующего найденному начальному базисному решению) по сравнению с методом северо-западного угла. Но в общем случае это вряд ли верно (см. задачу 5.12) и при решении практических задач для нахождения начального базисного решения классической транспортной задачи можно использовать любой из известных методов.

Изучение симплексного метода решения классической транспортной задачи при известном начальном базисном решении начнем с доказательства трех основополагающих утверждений. Условимся называть систему линейных алгебраических уравнений ***треугольной***, если она содержит по крайней мере одно уравнение с единственным неизвестным, при исключении которого опять найдется по крайней мере одно уравнение с единственным неизвестным, и так далее, пока не будут исчерпаны все неизвестные*.

Теорема 5.1. Все допустимые базисные решения классической транспортной задачи задаются треугольной системой линейных алгебраических уравнений.

◀ Пусть рассматриваемая классическая транспортная задача представлена своей транспортной таблицей (см. табл. 5.1). До-

*Такая система после соответствующей перестановки уравнений и переменных преобразуется в систему с верхней треугольной матрицей.

кажем, что по крайней мере одна строка или один столбец этой таблицы содержит лишь одно базисное переменное, после исключения которого вновь образованная транспортная таблица сохранит это свойство.

Прежде всего заметим, что $S_i > 0$, $i = \overline{1, m}$, и $D_j > 0$, $j = \overline{1, n}$. А так как небазисные переменные модели принимают лишь нулевые значения, то каждая строка и каждый столбец транспортной таблицы содержат по крайней мере по одному базисному переменному.

Табл. 5.1 содержит m строк и n столбцов, на пересечении которых расположены переменные x_{ij}. По результатам анализа ограничений (5.15)–(5.17) типа равенства, соответствующих рассматриваемой транспортной таблице, из этих mn переменных лишь $m + n - 1$ будут базисными переменными. Поэтому предположение о наличии не менее двух базисных переменных в каждом столбце и каждой строке табл. 5.1 должно быть отвергнуто, так как в этом случае общее число базисных переменных модели не может быть меньшим, чем $n + m$. Не останавливаясь на доказательстве этого очевидного факта, приходим к выводу, что в табл. 5.1 есть по крайней мере одна строка (или столбец), содержащая единственное базисное переменное модели. Если вычеркнуть эту строку (или столбец), произведя необходимую корректировку по спросу (или по поставкам), то проведенные рассуждения можно повторить для вновь полученной транспортной таблицы. А так как табл. 5.1 эквивалентна системе линейных алгебраических уравнений (5.16), (5.17), то исходное утверждение доказано полностью. ▶

Теорема 5.2. Значение каждого базисного переменного x_{ij} в допустимом базисном решении определяется равенством

$$x_{ij} = \left| \sum_{i_* \in I} S_{i_*} - \sum_{j_* \in J} D_{j_*} \right|, \tag{5.21}$$

где I и J — множества номеров строк и столбцов транспортной таблицы классической транспортной задачи (см. табл. 5.1), определяющих значение базисного переменного x_{ij} в допустимом базисном решении.

◀ Согласно теореме 5.1, любое допустимое базисное решение классической транспортной задачи задается треугольной системой линейных алгебраических уравнений. Поэтому в транспортной таблице рассматриваемой задачи (см. табл. 5.1) по крайней мере одна строка или один столбец содержат единственное базисное переменное x_{pq}.

Если это строка, то полагают $x_{pq} = S_p$, в табл. 5.1 заменяют D_q на $D_q - S_p$ и заштриховывают в ней строку с номером p. Если это столбец, то полагают $x_{pq} = D_q$, в табл. 5.1 заменяют S_p на $S_p - D_q$ и заштриховывают в ней столбец с номером q. В результате получают новую таблицу, для которой повторяют эту же процедуру, и так далее, пока не будут определены значения всех базисных переменных в допустимом базисном решении.

Из приведенных рассуждений и следует справедливость равенства (5.21). ▶

Теорема 5.3. Если для транспортной задачи (5.2) выполнены условия (5.3), то в любом ее допустимом базисном решении базисные переменные принимают значения из множества $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

◀ Выполнение условий (5.3) для транспортной задачи (5.2) означает, что мощности всех источников и всех стоков являются целыми положительными. Поэтому утверждение теоремы 5.3 вытекает из теоремы 5.2. ▶

Замечание 5.7. Поскольку оптимальное решение транспортной задачи (5.1), (5.2) является допустимым базисным решением, то при выполнении условий (5.3) оно удовлетворяет *требованию целочисленности.* #

Предположим теперь, что для классической транспортной задачи (5.2), (5.4) известно начальное базисное решение. Для этой задачи ограничения типа равенства представлены системой линейных алгебраических уравнений (5.15)–(5.17), а целевая функция

$$f(x_{11},\ldots,x_{mn}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}. \tag{5.22}$$

Если каждое i-е уравнение системы (5.15) умножить на u_i с последующим их суммированием по $i=\overline{1,m}$, а каждое j-е уравнение системы (5.16) умножить на v_j с последующим их суммированием по $j=\overline{1,n}$, то с учетом (5.22) получаем

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}-u_i-v_j)x_{ij} = \\ = f(x_{11},\ldots,x_{mn}) - \sum_{i=1}^{m} S_i u_i - \sum_{j=1}^{n} D_j v_j. \tag{5.23}$$

Значения параметров u_i, $i=\overline{1,m}$, и v_j, $j=\overline{1,n}$, при которых коэффициенты в левой части равенства (5.23) при базисных переменных, входящих в исходное допустимое базисное решение, были равны нулю, называют ***симплекс-множителями***, соответствующими рассматриваемому допустимому базисному решению.

Можно показать, что для оптимального решения изучаемой классической транспортной задачи симплекс-множители являются значениями двойственных переменных в оптимальном решении двойственной задачи линейного программирования. Поэтому для обозначения симплекс-множителей используют обозначения двойственных переменных.

Множество Ω пар индексов $(i,\ j)$, соответствующих базисным переменным, содержит $m+n-1$ элементов, и можно показать, что система $m+n-1$ линейных уравнений

$$u_i + v_j = c_{ij}, \quad (i,\ j)\in\Omega, \tag{5.24}$$

всегда разрешима относительно $m+n$ неизвестных u_i, $i=\overline{1,m}$, и v_j, $j=\overline{1,n}$. При ее решении, как правило, *независимому неизвестному* придают нулевое значение.

Решив систему линейных алгебраических уравнений (5.24) и определив значения симплекс-множителей, можно найти значения

$$d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j, \quad (i, j) \notin \Omega, \tag{5.25}$$

для коэффициентов при свободных переменных в левой части равенства (5.23). Согласно (5.23), уменьшить значение целевой функции f, соответствующей исходному допустимому базисному решению, можно путем введения в базис рассматриваемой задачи линейного программирования лишь того свободного переменного x_{ij}, для которого $d_{ij} < 0$. При этом естественно выбирать то свободное переменное, для которого отрицательный коэффициент будет наибольшим по модулю. Если же коэффициенты при всех свободных переменных будут неотрицательными, то уменьшить значение целевой функции невозможно и исходное допустимое базисное решение является оптимальным решением.

Пример 5.9. Продолжим рассмотрение классической транспортной задачи, начатое в примере 5.8. Для этой задачи найдено начальное допустимое базисное решение, характеризуемое значениями базисных переменных модели $x_{11} = 6$, $x_{22} = 1$, $x_{31} = 1$, $x_{32} = 4$, $x_{33} = 3$, $x_{34} = 2$ и значением целевой функции $f = 2 \cdot 6 + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 8 \cdot 4 + 15 \cdot 3 + 9 \cdot 2 = 112$ (см. табл. 5.17).

Воспользовавшись этими результатами и данными, представленными в табл. 5.17, выписываем систему линейных алгебраических уравнений (5.24):

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2, \\ u_2 + v_2 = 0, \\ u_3 + v_1 = 5, \\ u_3 + v_2 = 8, \\ u_3 + v_3 = 15, \\ u_3 + v_4 = 9 \end{cases}$$

и находим симплекс-множители в предположении, что $u_3 = 0$:

$$u_1 = -3, \quad u_2 = -8, \quad u_3 = 0,$$
$$v_1 = 5, \quad v_2 = 8, \quad v_3 = 15, \quad v_4 = 9.$$

Используя полученные значения симплекс-множителей и известные удельные стоимости $\{c_{ij}\}$, представленные в табл. 5.17, вычисляем коэффициенты при свободных переменных согласно (5.25):

$$d_{12} = 3 + 3 - 8 = -2, \qquad d_{21} = 1 + 8 - 5 = +4,$$
$$d_{13} = 11 + 3 - 15 = -1, \qquad d_{23} = 6 + 8 - 15 = -1,$$
$$d_{14} = 7 + 3 - 9 = +1, \qquad d_{24} = 1 + 8 - 9 = 0.$$

В новое допустимое базисное решение удобно ввести свободное переменное x_{12}, так как $|d_{12}| = \max\{|d_{12}|, |d_{13}|, |d_{23}|\}$. #

Теперь необходимо найти то базисное переменное, которое должно быть выведено из базиса. В симплекс-методе реализация этого шага связана с *условием допустимости выбора*. Заметим, что для транспортной задачи все коэффициенты при переменных в ограничениях (5.15), (5.16) типа равенства равны либо единице, либо нулю. Поэтому в отношениях, используемых в симплекс-методе при проверке условия допустимости выбора, в знаменателе всегда будет стоять единица, и они полностью определяются значениями базисных переменных.

Для уяснения идеи, используемой в симплексном методе при определении базисного переменного, выводимого из базиса, обратимся к примеру 5.9 и предположим, что при введении в базис свободного переменного x_{12} оно примет значение $\omega > 0$. В этом случае для сохранения ограничения по первой строке транспортной таблицы (см. табл. 5.17) значение базисного переменного x_{11} должно уменьшиться на ω, т.е. $x_{11} = 6 - \omega$. Но тогда для сохранения ограничения по первому столбцу транспортной таблицы значение базисного переменного x_{31} должно увеличиться на ω, т.е. $x_{31} = 1 + \omega$. В этом случае для сохранения ограничений по третьей строке и второму столбцу транспортной таблицы значение базисного переменного x_{32} должно уменьшиться на ω, т.е. $x_{32} = 4 - \omega$. Схема проведенных рассуждений представлена в табл. 5.20, в которой опущены значения c_{ij}, $i = 1, 2, 3$, $j = \overline{1, 4}$.

Таблица 5.20

Источник	Сток				Поставки
	1	2	3	4	
1	$6-\omega$	ω			6
2					1
3	$1+\omega$	$4-\omega$			10
Спрос	7	5	3	2	

С ростом $x_{12} = \omega > 0$ базисные переменные $x_{11} = 6 - \omega$ и $x_{32} = 4 - \omega$ будут уменьшаться. Следовательно, максимально возможное значение ω равно 4, так как при этом значении ω базисное переменное x_{32} принимает нулевое значение. При дальнейшем увеличении значений ω базисное переменное x_{32} становится отрицательным, что противоречит требованию неотрицательности переменных в (5.2). Следовательно, значение нового базисного переменного x_{12} равно 4, а переменное x_{32} должно быть выведено из базиса.

Необходимость введения нового базисного переменного со значением $\omega > 0$ приводит к построению так называемого ***цикла транспортной таблицы***. В табл. 5.20 цикл представлен направленными звеньями замкнутой ломаной $x_{12} \to x_{11} \to \to x_{31} \to x_{32} \to x_{12}$, начало и конец которой находятся в клетке, соответствующей вводимому в базис переменному модели x_{12}. Эта ломаная имеет горизонтальные и вертикальные звенья, стыки которых обязательно находятся в клетках транспортной таблицы, соответствующих базисным переменным (за исключением стыка „начало — конец“). Понятно, что ориентация цикла может быть любой. Перемещаясь в любом направлении от клетки транспортной таблицы, соответствующей вводимому в базис переменному, в первой вершине ломаной (стык звеньев) вычитаем ω из соответствующего базисного переменного, в следующей вершине прибавляем ω к соответствующему базисному переменному, затем опять вычитаем и т.д., пока не вернемся в исходную клетку. Можно доказать, что такой цикл транспортной таблицы существует и определяется однозначно для любого переменного, вводимого в базис.

В общем случае цикл транспортной таблицы, представляемый в виде замкнутой ломаной, может иметь сложную ступенчатую конфигурацию с самопересечениями (эти самопересечения не могут быть в клетках базисных переменных). Для нас цикл транспортной таблицы интересен лишь в одном отношении: он позволяет определять те базисные переменные, из которых мы вычитаем ω. Выбрав из этих переменных то, которое имеет наименьшее значение, мы получим выводимое из базиса переменное.

Пример 5.10. Вернемся к рассмотрению классической транспортной задачи, начатому в примерах 5.8, 5.9.

Новое допустимое базисное решение характеризуется значениями $x_{11} = 2$, $x_{12} = 4$, $x_{22} = 1$, $x_{31} = 5$, $x_{33} = 3$, $x_{34} = 2$ базисных переменных модели (см. пример 5.9 и табл. 5.20) и значением целевой функции $f = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 5 + 15 \cdot 3 + 9 \cdot 2 = 104$ (см. табл. 5.17). На этом первая итерация симплексного метода завершена.

На второй итерации система линейных алгебраических уравнений (5.24) для нахождения симплекс-множителей имеет следующий вид (см. табл. 5.17):

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2, \\ u_1 + v_2 = 3, \\ u_2 + v_2 = 0, \\ u_3 + v_1 = 5, \\ u_3 + v_3 = 15, \\ u_3 + v_4 = 9, \end{cases}$$

а ее решением являются значения

$$u_1 = -3, \quad u_2 = -6, \quad u_3 = 0,$$
$$v_1 = 5, \quad v_2 = 6, \quad v_3 = 15, \quad v_4 = 9.$$

Используя полученные значения симплекс-множителей и известные удельные стоимости c_{ij} из табл. 5.17, вычисляем коэффициенты для небазисных переменных согласно (5.25):

$$d_{13} = 11 + 3 - 15 = -1, \qquad d_{23} = 6 + 6 - 15 = -3,$$
$$d_{14} = 7 + 3 - 9 = 1, \qquad d_{24} = 1 + 6 - 9 = -2,$$
$$d_{21} = 1 + 6 - 5 = 2, \qquad d_{32} = 8 - 0 - 6 = 2.$$

В новое допустимое базисное решение целесообразно ввести свободное переменное x_{23}, так как $|d_{23}| = \max\{|d_{13}|, |d_{23}|, |d_{24}|\}$. Для определения базисного переменного, которое необходимо вывести из базиса, воспользуемся циклом транспортной таблицы $x_{23} \to x_{22} \to x_{12} \to x_{11} \to x_{31} \to x_{33} \to x_{23}$ (табл. 5.21). Сравнив базисные переменные, из которых вычитается ω, находим наименьшее из них: $x_{22} = 1 - \omega$. Таким образом, $\omega = 1$, переменное x_{22} должно быть выведено из базиса, а новое допустимое базисное решение характеризуется значениями базисных переменных $x_{11} = 1$, $x_{12} = 5$, $x_{23} = 1$, $x_{31} = 6$, $x_{33} = 2$, $x_{34} = 2$ и значением целевой функции $f = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot 1 + 5 \cdot 6 + 15 \cdot 2 + 9 \cdot 2 = 101$ (см. табл. 5.17). Вторая итерация симплексного метода завершена.

Таблица 5.21

Источник	Сток				Поставки
	1	2	3	4	
1	$2-\omega$	$4+\omega$			6
2		$1-\omega$	ω		1
3	$5+\omega$		$3-\omega$		10
Спрос	7	5	3	2	

На третьей итерации система линейных алгебраических уравнений (5.24) для нахождения симплекс-множителей имеет следующий вид (см. табл. 5.17):

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2, \\ u_1 + v_2 = 3, \\ u_2 + v_3 = 6, \\ u_3 + v_1 = 5, \\ u_3 + v_3 = 15, \\ u_3 + v_4 = 9. \end{cases}$$

Из этой системы находим

$$u_1 = -3, \quad u_2 = -9, \quad u_3 = 0,$$
$$v_1 = 5, \quad v_2 = 6, \quad v_3 = 15, \quad v_4 = 9.$$

Используя полученные значения симплекс-множителей и известные удельные стоимости c_{ij} (см. табл. 5.17), вычисляем коэффициенты для свободных переменных согласно (5.25):

$$d_{13} = 11 + 3 - 15 = -1, \qquad d_{22} = 0 + 9 - 6 = 3,$$
$$d_{14} = 7 + 3 - 9 = 1, \qquad d_{24} = 1 + 9 - 9 = 1,$$
$$d_{21} = 1 + 9 - 5 = 5, \qquad d_{32} = 8 - 0 - 6 = 2.$$

На третьей итерации отрицательную оценку имеет единственное свободное переменное x_{13}, которое и вводим в базис. Для определения базисного переменного, которое необходимо вывести из базиса, воспользуемся циклом транспортной таблицы $x_{13} \to x_{11} \to x_{31} \to x_{33}$, представленным в табл. 5.22. Сравнив базисные переменные, из которых вычитается ω, находим наименьшее из них: $x_{11} = 1 - \omega$. Таким образом, $\omega = 1$, переменное x_{11} должно быть выведено из базиса, а новое допустимое базисное решение характеризуется значениями базисных переменных $x_{12} = 5$, $x_{13} = 1$, $x_{23} = 1$, $x_{31} = 7$, $x_{33} = 1$, $x_{34} = 2$ и значением

Таблица 5.22

Источник	Сток				Поставки
	1	2	3	4	
1	$1-\omega$		ω		6
2					1
3	$6+\omega$		$2-\omega$		10
Спрос	7	5	3	2	

целевой функции $f = 3\cdot5+11\cdot1+6\cdot1+5\cdot7+15\cdot1+9\cdot2 = 100$. На этом третья итерация симплексного метода завершена.

На четвертой итерации система линейных алгебраических уравнений (5.24) для нахождения симплекс-множителей имеет следующий вид (см. табл. 5.17):

$$\begin{cases} u_1+v_2=3, \\ u_1+v_3=11, \\ u_2+v_3=6, \\ u_3+v_1=5, \\ u_3+v_3=15, \\ u_3+v_4=9. \end{cases}$$

Из нее находим

$$u_1=-4, \quad u_2=-9, \quad u_3=0,$$
$$v_1=5, \quad v_2=7, \quad v_3=15, \quad v_4=9.$$

Используя полученные значения симплекс-множителей и известные удельные стоимости c_{ij}, вычисляем коэффициенты для небазисных переменных согласно (5.25):

$$d_{11}=2+4-5=1, \qquad d_{22}=0+9-7=2,$$
$$d_{14}=7+4-9=2, \qquad d_{24}=1+9-9=1,$$
$$d_{21}=1+9-5=5, \qquad d_{32}=8-0-7=1.$$

А так как все найденные коэффициенты неотрицательны, то решение рассматриваемой задачи завершено и оптимальным является допустимое базисное решение, полученное на предыдущей (третьей) итерации симплексного метода.

Вопросы и задачи

5.1. В каком случае транспортную задачу называют классической транспортной задачей?

5.2. Может ли множество допустимых решений транспортной задачи (5.2), (5.3):

а) быть пустым;

б) содержать допустимые решения, которые не удовлетворяют требованию целочисленности;

в) содержать оптимальные решения, которые не удовлетворяют требованию целочисленности?

5.3. В чем заключается принципиальное отличие транспортной задачи с промежуточными пунктами от классической транспортной задачи? Чем отличаются транспортные таблицы этих задач?

5.4. Как связаны между собой задача о назначениях и классическая транспортная задача? В чем заключается специфика задачи о назначениях?

5.5. В **5.3** обоснована процедура перехода от задачи о назначениях с критерием минимизации суммарных затрат к задаче о назначениях с критерием максимизации суммарной эффективности. Возможен ли обратный переход? Если такой переход возможен, то как его реализовать?

5.6. Существует ли связь между классической транспортной задачей и задачей выбора кратчайшего пути? Если такая связь существует, то в чем она заключается?

5.7. Можно ли утверждать, что для задач транспортного типа циклы могут содержать лишь сети задачи выбора кратчайшего пути? Ответ аргументируйте.

5.8. Почему симплекс-метод не является эффективным средством решения для задач транспортного типа?

5.9. В чем заключается основная идея симплексного метода решения классической транспортной задачи?

5.10. Докажите, что коэффициенты при свободных переменных, определяемые по формуле (5.25), не зависят от значения свободного переменного при решении системы линейных алгебраических уравнений (5.24) для определения значений симплекс-множителей.

5.11. С чем связана идея, используемая в симплексном методе при определении базисного переменного, выводимого из базиса?

5.12. Для классической транспортной задачи, транспортная таблица которой представлена в табл. 5.5, найдите начальное базисное решение, используя: а) правило северо-западного угла; б) метод минимальной стоимости. Ответ представьте в виде матрицы переменных модели.

Ответ:

$$\text{а) } \widetilde{X} = \begin{pmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 900 & 600 & 0 \\ 0 & 800 & 400 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \widetilde{X} = \begin{pmatrix} 600 & 0 & 400 \\ 1300 & 200 & 0 \\ 0 & 1200 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.13. На базы A_1, A_2, A_3 поступил товар в количестве 140, 180 и 160 единиц (в единицах измерения товара). Этот товар необходимо доставить на пункты потребления B_j, $j = \overline{1,5}$, в количестве 60, 70, 120, 130 и 100 единиц, причем товар может быть доставлен с любой базы на любой пункт потребления. Воспользовавшись правилом северо-западного угла, составьте начальный план перевозок (найдите начальное базисное решение) и представьте его в виде матрицы переменных задачи.

$$\text{Ответ: } \widetilde{X}=\begin{pmatrix} 60 & 70 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 110 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 100 \end{pmatrix}.$$

5.14. Четыре предприятия района для производства своей продукции используют одинаковое сырье, запасы которого сосредоточены в трех различных пунктах и составляют 160, 140 и 170 единиц (в единицах измерения сырья). Воспользовавшись методом минимальной стоимости, составьте начальный план перевозок (см. задачу 5.13) сырья на предприятия, если их потребности в сырье составляют 120, 50, 190 и 110 единиц, а стоимости перевозки единицы сырья от i-го источника к j-му стоку представлены матрицей

$$C=\begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: } \widetilde{X}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 160 & 0 \\ 120 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 50 & 30 & 90 \end{pmatrix}.$$

5.15. Симплексным методом найдите решение задачи о назначениях, рассмотренной в примере П1.1. Сопоставьте полученный результат с результатом, приведенным в примере П1.2.

5.16. Для классической транспортной задачи, транспортная таблица которой представлена в табл. 5.23, найдите оптимальное решение, представьте его в виде матрицы переменных модели $\widetilde{x}_0$ и вычислите оптимальное значение ее целевой функции f_0.

$$\text{Ответ: } \widetilde{X}_0=\begin{pmatrix} 0 & 31 & 0 & 0 \\ 22 & 3 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & 38 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_0=668.$$

Таблица 5.23

Пункт производства	Пункт потребления				Поставки
	1	2	3	4	
1	x_{11} 10	x_{12} 7	x_{13} 6	x_{14} 8	31
2	x_{21} 5	x_{22} 6	x_{23} 5	x_{24} 4	48
3	x_{31} 8	x_{32} 7	x_{33} 6	x_{34} 7	38
Спрос	22	34	41	20	

5.17. Классическая транспортная задача представлена своей сетью, изображенной на рис. 5.5. Найдите оптимальное решение этой задачи, представьте его в виде матрицы $\widetilde{X}_0$ и вычислите оптимальное значение f_0 ее целевой функции.

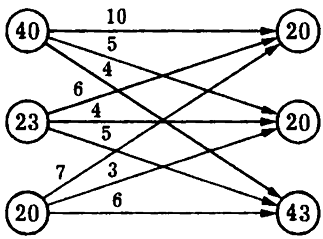


Рис. 5.5

Ответ: $\widetilde{X}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 40 \\ 20 & 0 & 3 \\ 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}$, $f_0 = 355$.

5.18. Для строительства дорог B_k, $k = \overline{1,4}$, необходим гравий в количестве 130, 220, 60 и 70 единиц (в условных единицах измерения), который может быть поставлен из карьеров A_n, $n = \overline{1,3}$. Запасы гравия в этих карьерах составляют 120, 280 и 160 единиц соответственно, а тарифы перевозок (стоимости перевозки единицы груза от i-го источника к j-му стоку) представлены матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Составьте такой план перевозок гравия, при котором потребности в нем каждой из строящихся дорог были бы полностью удовлетворены при минимально возможной общей стоимости перевозок.

Указание: так как суммарные запасы гравия $(120+280+ +160=560)$ превышают спрос на него $(130+220+60+70= =480)$, то, согласно замечанию 5.4, введите фиктивный пункт назначения B_5 и считайте, что $c_{n5}=0$, $n=\overline{1,3}$.

Ответ: $\widetilde{X}_0 = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 220 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 60 & 70 \end{pmatrix}.$

5.19. Найдите решение транспортной задачи с промежуточными пунктами, рассмотренной в примере 5.4, если $c_{12}=3$, $c_{23}=7$, $c_{25}=3$, $c_{43}=6$, $c_{45}=4$, $c_{47}=5$, $c_{54}=5$, $c_{56}=3$, $c_{67}=5$, $c_{78}=2$.

Ответ: $x^0_{12}=10$, $x^0_{22}=2$, $x^0_{23}=3$, $x^0_{25}=7$, $x^0_{43}=0$, $x^0_{44}=12$, $x^0_{45}=0$, $x^0_{47}=2$, $x^0_{54}=0$, $x^0_{55}=5$, $x^0_{56}=7$, $x^0_{66}=5$, $x^0_{67}=6$, $x^0_{77}=4$, $x^0_{78}=8$.

5.20. Найдите решение задачи о назначениях (5.12) с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 6 & 2 \\ 6 & 7 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\widetilde{X}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

5.21. Задача выбора кратчайшего пути задана сетью, изображенной на рис. 5.3. Найдите кратчайший путь от узла этой сети с номером 1 до узла с номером 8, если $c_{12} = 1$, $c_{13} = 4$, $c_{14} = 6$, $c_{23} = 3$, $c_{26} = 5$, $c_{27} = 1$, $c_{34} = 3$, $c_{35} = 5$, $c_{45} = 1$, $c_{48} = 4$ $c_{54} = 1$, $c_{56} = 1$, $c_{58} = 2$, $c_{65} = 1$, $c_{67} = 3$, $c_{68} = 4$, $c_{72} = 1$, $c_{76} = 3$, $c_{78} = 7$.

Ответ: $1 \to 2 \to 7 \to 6 \to 5 \to 8$.

5.22. Найдите самый короткий и самый длинный путь из узла с номером 1 в узел с номером 8 в ациклической сети, представленной на рис. 5.6.

Ответ: самый короткий путь $1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 6 \to 7 \to 8$; самый длинный путь $1 \to 4 \to 5 \to 6 \to 8$, или $1 \to 3 \to 4 \to 5 \to$ $\to 6 \to 8$.

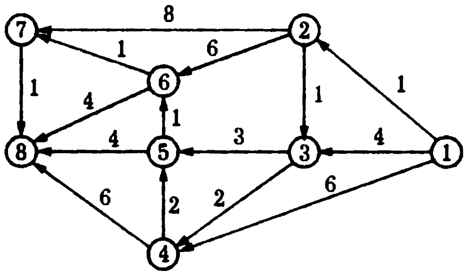


Рис. 5.6

6. МАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

В этой главе рассмотрены приложения методов *математического программирования* к *многошаговым задачам принятия решений в условиях риска*, в которых процесс изменения состояния любой изучаемой системы является марковским процессом с конечным множеством возможных состояний и дискретным временем. Математические модели, приводящие к таким задачам, называют ***марковскими моделями принятия решений***, а сами задачи — ***марковскими задачами принятия решений***.

В марковских моделях принятия решений поощрения (доход, потери) задают *матрицей доходов*, элементами которой являются доходы (положительные значения) или затраты (отрицательные значения), возникающие вследствие перехода системы из одного возможного состояния в другое. *Матрицы переходных вероятностей* и матрицы доходов зависят от ***стратегий***, т.е. *допустимых решений*, которыми располагает *„лицо, принимающее решения“*. Основная цель — определение ***оптимальной стратегии*** (*оптимального решения*), максимизирующей ожидаемый доход за конечное или бесконечное число этапов марковского процесса изменения состояния изучаемой системы.

Излагаемый теоретический материал иллюстрирован примером с садовником (см. пример 1.5), который, несмотря на его простоту, может быть полезен при анализе актуальных прикладных задач (управление запасами, замена оборудования, контроль и регулирование емкости водохранилища и т.д.). Напомним, что садовник, проводя химический анализ почвы, каждый год в начале сезона оценивает продуктивность своего сада как хорошую, удовлетворительную или плохую. Оценка состояния сада позволяет садовнику принять одно из допустимых решений: обойтись без дополнительной обработки или провести обработку, включающую, например, внесение удобрений. Это требует дополнительных затрат, а цель садовника — получить максимальный доход. Отметим, что садовник планирует поработать на своем участке еще N лет и его интересует оптимальный вариант своих действий отражающий, в какие годы нужно проводить дополнительную обработку участка.

6.1. Основные понятия

Рассмотрим некоторую динамическую систему S с возможными дискретными состояниями S_j, $j=\overline{1,m}$, которая в фиксированные последовательные моменты времени $t_1 < t_2 < \ldots$ случайным образом переходит скачком (мгновенно) из одного возможного состояния в другое или остается в прежнем. При этом будем предполагать, что сам процесс изменения состояния изучаемой системы S является марковским процессом, т.е. вероятность перехода системы S в любое возможное состояние в момент времени t_i определяется состоянием, достигнутым в момент времени t_{i-1}, и не зависит от того, когда и как она пришла в это состояние. Напомним, что фиксированные моменты времени t_i принято называть шагами или этапами марковского скалярного процесса изменения состояния системы S.

Для удобства дальнейших рассуждений некоторый момент времени $t_0 < t_1$ будем считать начальным и введем случайное событие s_k^i, состоящее в том, что после i этапов исходная система S находится в состоянии S_k, $k=\overline{1,m}$. При этом $i=0$ соответствует начальному этапу и при любом фиксированном i события s_k^i, $k=\overline{1,m}$, образуют полную группу событий. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}\left[s_k^i\right] \equiv 1, \quad i=\overline{0,N}.$$

Кроме того, вектор

$$p(i) = \left(\mathbf{P}\left[s_1^i\right] \;\; \mathbf{P}\left[s_2^i\right] \;\; \ldots \;\; \mathbf{P}\left[s_m^i\right]\right)^{\mathrm{T}}$$

является *вектором вероятностей состояний системы* S после i этапов при $i = \overline{1, N}$ и *вектором начальных вероятностей состояний системы* S при $i = 0$.

В соответствии с исходными допущениями условная вероятность реализации случайного события s_k^i при условии s_j^{i-1} зависит от принятого после $(i-1)$-го этапа решения $X_{l_{i-1}}$ из множества G *допустимых решений*. Таким образом,

$$p_{jk}(i \mid X_{l_{i-1}}) = \mathbf{P}\left[s_k^i \mid s_j^{i-1}; X_{l_{i-1}}\right]$$

и *матрица переходных вероятностей*

$$P(i \mid X_{l_{i-1}}) = \left(p_{jk}(i \mid X_{l_{i-1}})\right) \in M_m(\mathbb{R}).$$

При этом нетрудно убедиться в том, что верны следующие утверждения [XVIII]:

а) сумма элементов любой строки матрицы переходных вероятностей $P(i \mid X_{l_{i-1}})$ равна единице;

б) вектор вероятностей состояний изучаемой системы S после i этапов равен произведению транспонированной матрицы переходных вероятностей $P(i \mid X_{l_{i-1}})$ на вектор вероятностей состояний после $(i-1)$-го этапа, т.е.

$$p(i) = P^{\mathrm{T}}(i \mid X_{l_{i-1}})\, p(i-1).$$

Из приведенных рассуждений, в значительной степени очевидных, следует вывод о том, что в общем случае вектор вероятностей состояний системы S после N этапов зависит от вектора начальных вероятностей ее состояний $p(0)$ и вектора

$$\left(X_{l_0} \;\; X_{l_1} \;\; \ldots \;\; X_{l_{N-1}}\right)^{\mathrm{T}} \in G^N,$$

который называют ***вектором решений***. Действительно,

$$
\begin{aligned}
p(N) &= P^{\mathrm{T}}(N\,|\,X_{l_{N-1}})\,p(N-1) = \\
&= P^{\mathrm{T}}(N\,|\,X_{l_{N-1}})\,P^{\mathrm{T}}(N-1\,|\,X_{l_{N-2}})\,p(N-2) = \ldots \\
&\ldots = P^{\mathrm{T}}(N\,|\,X_{l_{N-1}})\,P^{\mathrm{T}}(N-1\,|\,X_{l_{N-2}})\ldots P^{\mathrm{T}}(1\,|\,X_{l_0})\,p(0).
\end{aligned}
$$

Пример 6.1. Каждый год в начале сезона садовник проводит химический анализ почвы на своем участке и по его результатам оценивает продуктивность сада на новый сезон как хорошую, удовлетворительную или плохую (табл. 6.1). По результатам многолетних наблюдений садовник установил, что продуктивность сада в текущем году можно считать зависящей лишь от состояния почвы в предыдущем году. Таким образом, процесс изменения состояния почвы представляет собой марковский процесс с тремя возможными состояниями и дискретным временем.

Таблица 6.1

Продуктивность (состояние почвы)	Состояние системы
Хорошая	S_1
Удовлетворительная	S_2
Плохая	S_3

Пусть в рассматриваемом примере матрица переходных вероятностей является постоянной:

$$
P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},
$$

где номера строк и столбцов — это номера состояний системы S_1, S_2, S_3 (см. табл. 6.1) в текущем и последующем годах соответственно. Так, например, если в текущем $(i-1)$-м году состояние почвы хорошее, то вероятность ее перехода в плохое состояние в последующем i-м году равна $p_{13}(i) = \mathbf{P}\left[s_3^i\,|\,s_1^{i-1}\right] = 0{,}3$.

Садовник может принять решение о применении удобрений с целью повышения продуктивности сада, т.е. с целью улучшения состояния почвы, так как в противном случае переходные вероятности не изменятся. Если же садовник принял решение о применении удобрений, то переходные вероятности задаются матрицей

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}05 & 0{,}4 & 0{,}55 \end{pmatrix},$$

наглядно иллюстрирующей улучшение состояния почвы в последующие годы.

В рассматриваемом примере множество допустимых решений $G = \{X_1, X_2\}$, где X_1 — решение о невнесении удобрений, а X_2 — решение о внесении удобрении. Таким образом, для $i = \overline{1, N}$ матрица переходных вероятностей равна

$$P(i\,|\,X_{l_{i-1}}) = \begin{cases} P_1, & X_{l_{i-1}} = X_1; \\ P_2, & X_{l_{i-1}} = X_2. \end{cases} \quad \#$$

С переходом системы S из одного состояния в другое связана *матрица дохода* $R(i\,|\,X_{l_{i-1}}) = (r_{jk}(i\,|\,X_{l_{i-1}})) \in M_m(\mathbb{R})$, в которой элемент $r_{jk}(i\,|\,X_{l_{i-1}})$ есть доход (положительное значение) или убыток (отрицательное значение) за i-й этап. При этом доход или убыток за i-й этап связан лишь с переходом системы из состояния S_j, в котором она находилась после $(i-1)$-го этапа, в состояние S_k при принятии решения $X_{l_{i-1}} \in G$.

Величина

$$\nu_j(X_{l_{i-1}}) = \sum_{k=1}^{m} p_{jk}(i\,|\,X_{l_{i-1}})\, r_{jk}(i\,|\,X_{l_{i-1}}) \tag{6.1}$$

определяет ***ожидаемый доход*** за i-й этап, если после $(i-1)$-го этапа система находилась в состоянии S_j и было принято решение $X_{l_{i-1}} \in G$. Заметим, что ожидаемый доход связан лишь с переходами системы из одного возможного состояния в другое при фиксированном допустимом решении.

Далее в качестве *принципа оптимальности*, совпадающего в рассматриваемом случае с *критерием оптимальности*, использована максимизация ожидаемого дохода за N этапов. При этом специфика решения задачи прежде всего связана с тем, будет ли число этапов N конечным или нет. В соответствии с этим рассматривают задачи принятия решений с ***конечным горизонтом планирования***, когда $N < \infty$, или с ***бесконечным горизонтом планирования***, когда $N = \infty$.

Необходимо отметить, что *„лицо, принимающее решения“*, может интересовать величина ожидаемого дохода при заранее определенной стратегии поведения в случае того или иного состояния системы. Так, например, „лицо, принимающее решения“, может считать, что если после $(i-1)$-го этапа система находится в состоянии S_j, то безотносительно к конкретному значению i всегда необходимо принимать решение $X^* \in G$. В этом случае говорят, что процесс принятия решений описывается ***стационарными стратегиями***. При этом каждой стационарной стратегии будут соответствовать свои матрицы переходных вероятностей и доходов.

Пример 6.2. Продолжим анализ задачи с садовником (см. пример 6.1) и для наглядности будем считать, что матрицы доходов (в условных денежных единицах), соответствующие матрицам переходных вероятностей P_1 и P_2, имеют следующий вид:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

где в матрице доходов R_2 учтены затраты, связанные с внесением удобрений, и

$$R(i\,|\,X_{l_{i-1}}) = \begin{cases} R_1, & X_{l_{i-1}} = X_1; \\ R_2, & X_{l_{i-1}} = X_2. \end{cases}$$

Характер задачи принятия решений, стоящей перед садовником, прежде всего связан с тем, будет ли его деятельность продолжаться конечное число лет ($N < \infty$) или он и его наследники будут заниматься садом всю свою жизнь ($N = \infty$). Но в любом случае садовнику необходимо выбирать наилучшую стратегию поведения (вносить или не вносить удобрения) при известных результатах химического анализа почвы, характеризующих ее состояние, с целью максимизации ожидаемого дохода за N лет.

В частности, садовник может решить вносить удобрения тогда и только тогда, когда состояние почвы плохое. Этой (одной из возможных) стационарной стратегии соответствуют свои матрицы переходных вероятностей P и доходов R:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}05 & 0{,}4 & 0{,}55 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Они отличаются от матриц P_1 и R_1 лишь третьими строками, заимствованными из матриц P_2 и R_2 соответственно.

6.2. Принятие решений при конечном горизонте планирования

При *конечном горизонте планирования* ($N < \infty$) *марковскую задачу принятия решений* с *принципом оптимальности*, который состоит в максимизации *ожидаемого дохода* за N этапов, можно представить как задачу *динамического программирования.*

Действительно, пусть $f_i(j)$ — ***оптимальный ожидаемый доход*** (т.е. наилучший в смысле используемого принципа оптимальности) за этапы с номерами $i, i+1, \ldots, N$ при условии, что после $(i-1)$-го этапа изучаемая система S находится в состоянии S_j, где $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Так как горизонт планирования конечен, то для оптимальных ожидаемых доходов должны быть выполнены естественные условия:

$$f_{N+1}(j) \equiv 0, \quad j = \overline{1, m}.$$

Оптимальный ожидаемый доход $f_i(j)$ на этапах с номерами i, $i+1$, ..., N складывается из двух составляющих. Первая составляющая — оптимальный ожидаемый доход на $(i+1)$-м этапе, обусловленный одним лишь переходом системы S из состояния S_j, в котором она находилась на i-м этапе, в любое допустимое состояние S_k, $k = \overline{1, m}$, на $(i+1)$-м этапе (рис. 6.1). Эта составляющая равна (см. (6.1))

$$\max_{X_{l_i} \in G} \nu_j(X_{l_i}), \quad \nu_j(X_{l_i}) = \sum_{k=1}^{m} p_{jk}(i+1\,|\,X_{l_i})\, r_{jk}(i+1\,|\,X_{l_i}),$$

где $p_{jk}(i+1\,|\,X_{l_i})$ — условная вероятность того, что после $(i+1)$-го этапа система S будет находиться в состоянии S_k, если после i этапов она находилась в состоянии S_j и было принято допустимое решение X_{l_i}; $r_{jk}(i+1\,|\,X_{l_i})$ — доход или убыток, связанный лишь с переходом системы из состояния S_j, в котором она находилась после i этапов, в состояние S_k на $(i+1)$-м этапе в результате принятия решения X_{l_i} из множества допустимых решений G.

Вторая составляющая оптимального ожидаемого дохода $f_i(j)$ определяется совокупностью оптимальных ожидаемых до-

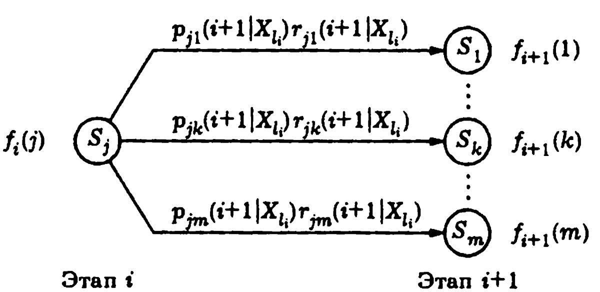


Рис. 6.1

ходов $f_{i+1}(k)$, $k=\overline{1,m}$, с учетом переходных вероятностей $p_{jk}(i+1\,|\,X_{l_i})$, $k=\overline{1,m}$:

$$\max_{X_{l_i}\in G}\sum_{k=1}^{m} p_{jk}(i+1\,|\,X_{l_i})\,f_{i+1}(k).$$

В результате проведенных рассуждений мы приходим к рекуррентному уравнению динамического программирования (см. **П2**) с конечным числом этапов, связывающему оптимальные ожидаемые доходы $f_i(j)$, $j=\overline{1,m}$, и $f_{i+1}(k)$, $k=\overline{1,m}$:

$$f_i(j)=\max_{X_{l_i}\in G}\left\{\nu_j(X_{l_i})+\sum_{k=1}^{m} p_{jk}(i+1\,|\,X_{l_i})\,f_{i+1}(k)\right\},$$
$$i=\overline{0,N-1},\ j=\overline{1,m},$$

При этом напомним, что $f_{N+1}(k)\equiv 0$, $k=\overline{1,m}$, и

$$\nu_j(X_{l_i})=\sum_{k=1}^{m} p_{jk}(i+1\,|\,X_{l_i})\,r_{jk}(i+1\,|\,X_{l_i}),\quad j=\overline{1,m}.$$

Пример 6.3. Вернемся к задаче с садовником, которую мы начали рассматривать в примерах 6.1, 6.2, и предположим, что он планирует прекратить занятие садоводством через три года и за этот период хочет получить максимальный доход. Для этого ему необходимо выработать *оптимальную стратегию* поведения (в смысле максимума суммарного дохода).

Напомним, что изучаемая система (сад) имеет три возможных состояния, определяемые состоянием почвы: S_1 — хорошее, S_2 — удовлетворительное, S_3 — плохое. Множество *допустимых решений* садовника: $G=\{X_1,\ X_2\}$, где X_1 — решение о невнесении удобрений, а X_2 — решение о внесении удобрений. *Матрица переходных вероятностей* имеет вид

$$P(i\,|\,X_{l_{i-1}})\equiv\begin{cases}P_1, & X_{l_{i-1}}=X_1;\\ P_2, & X_{l_{i-1}}=X_2,\end{cases}$$

где

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}05 & 0{,}4 & 0{,}55 \end{pmatrix},$$

а *матрица дохода* имеет вид

$$R(i\,|\,X_{l_{i-1}}) \equiv \begin{cases} R_1, & X_{l_{i-1}} = X_1; \\ R_2, & X_{l_{i-1}} = X_2, \end{cases}$$

где

$$R_1 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

В рассматриваемом случае горизонт планирования $N = 3$, а элементы матриц доходов и переходных вероятностей не зависят от номера этапа.

Воспользовавшись матрицами P_1, P_2, R_1, R_2 и их независимостью от номера этапа, вычислим ожидаемые доходы (6.1), обусловленные одним лишь переходом изучаемой системы S из одного возможного состояния в другое, при различных вариантах допустимых решений из множества G:

$$\begin{aligned}
\nu_1(X_1) &= 0{,}2 \cdot 7 + 0{,}5 \cdot 6 + 0{,}3 \cdot 3 = 5{,}3, \\
\nu_2(X_1) &= 0 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 5 + 0{,}5 \cdot 1 = 3, \\
\nu_3(X_1) &= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = -1, \\
\nu_1(X_2) &= 0{,}3 \cdot 6 + 0{,}6 \cdot 5 + 0{,}1 \cdot (-1) = 4{,}7, \\
\nu_2(X_2) &= 0{,}1 \cdot 7 + 0{,}6 \cdot 4 + 0{,}3 \cdot 0 = 3{,}1, \\
\nu_3(X_2) &= 0{,}05 \cdot 6 + 0{,}4 \cdot 3 + 0{,}55 \cdot (-2) = 0{,}4.
\end{aligned}$$

Для наглядности воспользуемся табличным алгоритмом решения рассматриваемой задачи (табл. 6.2 — этап 3, соответствующий $f_3(j)$, табл. 6.3 — этап 2, соответствующий $f_2(j)$, табл. 6.4 — этап 1, соответствующий $f_1(j)$), при этом нумерация этапов „с конца“ обусловлена определением оптимального ожидаемого дохода $f_i(j)$.

Таблица 6.2

j	$\nu_j(X_k)$		Оптимальный ожидаемый доход $f_3(j)$	Оптимальное решение
	$k=1$	$k=2$		
1	5,3	4,7	5,3	X_1
2	3	3,1	3,1	X_2
3	−1	0,4	0,4	X_2

Таблица 6.3

$\nu_j(X_k)+\sum_{l=1}^{3} p_{jl}(i+1\,\vert\,X_k)\,f_3(l)$		$f_2(j)$	Оптимальное решение
$k=1$	$k=2$		
$5{,}3+0{,}2\cdot 5{,}3+$ $+0{,}5\cdot 3{,}1+$ $+0{,}3\cdot 0{,}4=8{,}03$	$4{,}7+0{,}3\cdot 5{,}3+$ $+0{,}6\cdot 3{,}1+$ $+0{,}1\cdot 0{,}4=8{,}19$	8,19	X_2
$3+0\cdot 5{,}3+0{,}5\cdot 3{,}1+$ $+0{,}5\cdot 0{,}4=4{,}75$	$3{,}1+0{,}1\cdot 5{,}3+$ $+0{,}6\cdot 3{,}1+$ $+0{,}3\cdot 0{,}4=5{,}61$	5,61	X_2
$-1+0\cdot 5{,}3+0\cdot 3{,}1+$ $+1\cdot 0{,}4=-0{,}6$	$0{,}4+0{,}05\cdot 5{,}3+$ $+0{,}4\cdot 3{,}1+$ $+0{,}55\cdot 0{,}4=2{,}125$	2,125	X_2

Таблица 6.4

$\nu_j(X_k)+\sum_{l=1}^{3} p_{jl}(i+1\,\vert\,X_k)\,f_2(l)$		$f_1(j)$	Оптимальное решение
$k=1$	$k=2$		
$5{,}3+0{,}2\cdot 8{,}19+$ $+0{,}5\cdot 5{,}61+$ $+0{,}3\cdot 2{,}125=10{,}38$	$4{,}7+0{,}3\cdot 8{,}19+$ $+0{,}6\cdot 5{,}61+$ $+0{,}1\cdot 2{,}125=10{,}74$	10,74	X_2
$3+0\cdot 8{,}19+$ $+0{,}5\cdot 5{,}61+$ $+0{,}5\cdot 2{,}125=6{,}87$	$3{,}1+0{,}1\cdot 8{,}19+$ $+0{,}6\cdot 5{,}61+$ $+0{,}3\cdot 2{,}125=7{,}92$	7,92	X_2
$-1+0\cdot 8{,}19+$ $+0\cdot 5{,}61+$ $+1\cdot 2{,}125=1{,}13$	$0{,}4+0{,}05\cdot 8{,}19+$ $+0{,}4\cdot 5{,}61+$ $+0{,}55\cdot 2{,}125=4{,}23$	4,23	X_2

Из *оптимального решения* следует, что первые два года садовник должен применять удобрения при любом состоянии системы, т.е. вне зависимости от результатов химического анализа почвы (первые два года оптимальным является допустимое решение X_2 для всех возможных состояний), но на последнем этапе (третий год) ему следует применять удобрения лишь при удовлетворительном (S_2) и плохом (S_3) состояниях почвы. В этом случае суммарный ожидаемый доход составит 10,74 при хорошем состоянии почвы в начале первого года, 7,92 — при удовлетворительном и 4,23 — при плохом состоянии почвы в начале первого года. #

Заметим, что при нахождении оптимальной стратегии поведения садовника в примере 6.3 мы воспользовались тем, что по самой природе рекуррентного уравнения для определения оптимальных ожидаемых доходов $\{f_i(j)\}$ их значения вычисляются итеративно. Именно поэтому рассмотренный метод решения задач дискретного динамического программирования называют ***методом итераций по стратегиям.***

В *марковских моделях принятия решений* матрицы поощрений $\{R(i\,|\,X_{l_{t-1}})\}$, которые в соответствии со сложившейся терминологией мы назвали матрицами доходов, в общем случае не обязательно отражают доходы в прямом смысле этого слова. Но если матрицы $\{R(i\,|\,X_{l_{t-1}})\}$ действительно являются матрицами доходов, а длительность каждого этапа — год, то при нахождении оптимального решения необходимо учитывать ***дисконтирование*** путем введения ***годового коэффициента дисконтирования***

$$\alpha = \frac{1}{1+\varkappa},$$

где $\varkappa$ — годовая норма процента и $0 < \alpha < 1$. Годовой коэффициент дисконтирования указывает на то, что D денежных единиц будущего года равны αD денежным единицам настоящего года. Поэтому в рассматриваемом случае при построении марковской модели принятия решений необходимо использовать коэффициент дисконтирования ожидаемых оптимальных доходов для последовательных этапов, вследствие чего значения $\{f_1(j)\}$ — приведенные величины ожидаемых оптимальных доходов по всем этапам. При введении коэффициента дисконтирования исходное рекуррентное уравнение динамического программирования с конечным числом этапов, связывающее оптимальные ожидаемые доходы $f_i(j)$, $j=\overline{1,m}$, и $f_{i+1}(j)$, $j=\overline{1,m}$, имеет вид

$$f_i(j)=\max_{X_{l_i}\in G}\Bigl(\nu_j(X_{l_i})+\alpha\sum_{k=1}^{m}p_{jk}(i+1\,|\,X_{l_i})\,f_{i+1}(k)\Bigr),$$
$$i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,m},$$

где $f_{N+1}(k)\equiv 0$, $k=\overline{1,m}$, и

$$\nu_j(X_{l_i})=\sum_{k=1}^{m}p_{jk}(i+1\,|\,X_{l_i})\,r_{jk}(i+1\,|\,X_{l_i}),\qquad j=\overline{1,m}.$$

Решение задачи принятия оптимального решения с учетом дисконтирования ничем не отличается от решения аналогичной задачи, но без учета дисконтирования, т.е. при $\alpha=1$. Естественно, что в общем случае оптимальные решения, полученные с учетом и без учета дисконтирования, могут различаться.

Следует также отметить, что рекуррентные уравнения динамического программирования могут быть использованы для оценки любой *стационарной стратегии*. В этом случае с учетом дисконтирования имеем

$$f_i(j)=\nu_j(i)+\alpha\sum_{k=1}^{m}p_{jk}(i)\,f_{i+1}(k),\qquad i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,m},$$

где $f_{N+1}(k)\equiv 0$, $k=\overline{1,m}$,

$$\nu_j(i)=\sum_{k=1}^{m}p_{jk}(i)\,r_{jk}(i),\qquad i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,m},$$

а $p_{jk}(i)$ и $r_{jk}(i)$ — элементы матриц переходных вероятностей и доходов на i-м этапе, соответствующих оцениваемой стационарной стратегии, а α — годовой коэффициент дисконтирования.

Пример 6.4. Найдя оптимальную стратегию поведения при трехлетнем горизонте планирования без дисконтирования (см. пример 6.3), садовник решил оценить ожидаемый доход без дисконтирования для стационарной стратегии, реализация которой предполагает внесение удобрении тогда и только тогда, когда состояние почвы плохое. В этом случае (см. пример 6.2)

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}05 & 0{,}4 & 0{,}55 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

и остается лишь воспользоваться рекуррентным уравнением динамического программирования:

$$f_3(1) = 0{,}2 \cdot 7 + 0{,}5 \cdot 6 + 0{,}3 \cdot 3 = 5{,}3,$$
$$f_3(2) = 0 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 5 + 0{,}5 \cdot 1 = 3,$$
$$f_3(3) = 0{,}05 \cdot 6 + 0{,}4 \cdot 3 + 0{,}55 \cdot (-2) = 0{,}4,$$
$$f_2(1) = 5{,}3 + 0{,}2 \cdot 5{,}3 + 0{,}5 \cdot 3 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 7{,}98,$$
$$f_2(2) = 3 + 0 \cdot 5{,}3 + 0{,}5 \cdot 3 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 4{,}7,$$
$$f_2(3) = 0{,}4 + 0{,}05 \cdot 5{,}3 + 0{,}4 \cdot 3 + 0{,}55 \cdot 0{,}4 = 2{,}09,$$
$$f_1(1) = 5{,}3 + 0{,}2 \cdot 7{,}98 + 0{,}5 \cdot 4{,}7 + 0{,}3 \cdot 2{,}09 = 9{,}87,$$
$$f_1(2) = 3 + 0 \cdot 7{,}98 + 0{,}5 \cdot 4{,}7 + 0{,}5 \cdot 2{,}09 = 6{,}39,$$
$$f_1(3) = 0{,}4 + 0{,}05 \cdot 7{,}98 + 0{,}4 \cdot 4{,}7 + 0{,}55 \cdot 2{,}09 = 3{,}83.$$

Таким образом, при реализации рассматриваемой стационарной стратегии в зависимости от состояния почвы на начальном этапе садовнику следует ожидать суммарный доход в размере 9,87, 6,39 и 3,83 денежных единиц соответственно.

6.3. Принятие решений при бесконечном горизонте планирования

На практике нередкими являются случаи, когда либо *задача принятия решений* охватывает весьма значительное число этапов, т.е. N велико, либо *горизонт планирования бесконечен* ($N = \infty$). В этих ситуациях процедуры нахождения *оптимального решения* обладают специфическими особенностями, в основе которых — свойства марковских процессов.

Поведение марковского процесса на долгосрочном горизонте планирования, когда N велико, характеризует его независимость от начального состояния системы. В этом случае будем говорить, что система достигла ***установившегося состояния***. Нас будут интересовать решения, для которых соответствующие цепи Маркова допускают существование установившегося состояния изучаемой системы. При дальнейших рассуждениях совокупность этапов, предшествующих этапам функционирования системы в установившемся состоянии, будем называть ***переходным периодом***.

В этом параграфе рассмотрим проблему определения *оптимальной* долгосрочной *стратегии марковской задачи принятия решений*. При оценке долгосрочной стратегии целесообразно базироваться на максимизации *ожидаемого дохода* или минимизации ожидаемых затрат за переходный период, так как при достижении изучаемой системой установившегося состояния эти показатели стабилизируются.

Можно указать два основных метода решения задач принятия решений с бесконечным числом этапов. Реализация первого из них связана с перебором всех возможных *стационарных стратегий* принятия решений. В этом случае оптимальное решение может быть найдено путем оценивания эффективности каждой стационарной стратегии, а сам метод называют ***методом полного перебора***. Применение метода полного перебора оправдано лишь в тех случаях, когда число элементов множества G *допустимых решений* и, как следствие, число элементов множества Δ всех стационарных стратегий невелико в смысле вычислительных затрат. При использовании второго метода, называемого *методом итераций по стратегиям* (см. **6.2**), трудности вычислительного характера не являются столь значимыми, как при применении метода полного перебора.

Для упрощения дальнейших рассуждений мы будем предполагать, что *марковский процесс* изменения состояний изучаемой системы S *однородный*, т.е. *однородна* соответствующая *цепь Маркова*. Таким образом, мы фактически предполагаем независимость *матрицы переходных вероятностей* и матрицы доходов от номера этапа $i = \overline{1, \infty}$.

Метод полного перебора. Предположим, что в рассматриваемой задаче принятия решений множество всех стационарных стратегий состоит из K элементов и $P_k = (p_{jn}(k)) \in M_m(\mathbb{R})$, $R_k = (r_{jn}(k)) \in M_m(\mathbb{R})$ — матрицы одношаговых переходных вероятностей и доходов, соответствующие стационарной стратегии с номером $k = \overline{1, K}$, где m — число возможных состояний изучаемой системы S. Метод полного перебора включает следующие этапы реализации.

Этап 1. Вычисление ожидаемого дохода за один шаг при k-й стационарной стратегии для всех возможных состояний системы S:

$$\nu_j(k) = \sum_{n=1}^{m} p_{jn}(k) r_{jn}(k), \quad j = \overline{1, m}.$$

Этап 2. Вычисление *стационарных вероятностей* $\Pi_j(k)$, $j = \overline{1, m}$, матрицы переходных вероятностей P_k, соответствующей стационарной стратегии с номером $k = \overline{1, K}$. Как известно из курса теории случайных процессов [XVIII], эти вероятности, если они существуют, являются решением следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\Pi(k)(P_k - I_m) = \Theta_{1m}, \quad \sum_{j=1}^{m} \Pi_j(k) = 1,$$

где $\Pi(k) = (\Pi_1(k)\ \ \Pi_2(k)\ \ \ldots\ \ \Pi_m(k)) \in M_{1m}(\mathbb{R})$, I_m — единичная матрица порядка m, а Θ_{1m} — нулевая матрица типа $1 \times m$.

Этап 3. Определение ожидаемого дохода для всех стационарных стратегий:

$$E(k) = \sum_{j=1}^{m} \Pi_j(k)\,\nu_j(k), \quad k = \overline{1, K}.$$

Этап 4. Определение номера k^* оптимальной стационарной стратегии из условия

$$E(k^*) = \max_{1 \leqslant k \leqslant K} E(k).$$

Алгоритм реализации метода полного перебора не нуждается в обосновании, поэтому сразу перейдем к рассмотрению примера.

Пример 6.5. В задаче с садовником (см. примеры 6.1–6.4) имеется всего восемь стационарных стратегий:

1. Вообще не применять удобрении.
2. Применять удобрения при любом состоянии почвы.
3. Применять удобрения лишь в том случае, когда почва находится в состоянии S_1 (хорошем).
4. Применять удобрения лишь в том случае, когда почва находится в состоянии S_2 (удовлетворительном).
5. Применять удобрения лишь в том случае, когда почва находится в состоянии S_3 (плохом).
6. Применять удобрения лишь в том случае, когда почва находится или в состоянии S_1, или в состоянии S_2.
7. Применять удобрения лишь в том случае, когда почва находится или в состоянии S_1, или в состоянии S_3.
8. Применять удобрения лишь в том случае, когда почва находится или в состоянии S_2, или в состоянии S_3.

Как было показано в примере 6.2, матрицы переходных вероятностей и матрицы доходов для стационарных стратегий с номерами от 3 до 8 могут быть получены из соответствующих матриц для стационарных стратегий с номерами 1 и 2:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_1 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}05 & 0{,}4 & 0{,}55 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix};$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_3 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_4 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}05 & 0{,}4 & 0{,}55 \end{pmatrix}, \qquad R_5 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix};$$

$$P_6 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_6 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$P_7 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}05 & 0{,}4 & 0{,}55 \end{pmatrix}, \qquad R_7 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix};$$

$$P_8 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}05 & 0{,}4 & 0{,}55 \end{pmatrix}, \qquad R_8 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 7 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

На первом этапе вычисляют ожидаемые доходы $\nu_j(k)$ для всех стационарных стратегий (см. пример 6.3). Результаты вычислений приведены в табл. 6.5.

Таблица 6.5

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$\nu_1(k)$	5,3	4,7	4,7	5,3	5,3	4,7	4,7	5,3
$\nu_2(k)$	3	3,1	3	3,1	3	3,1	3	3,1
$\nu_3(k)$	−1	0,4	−1	−1	0,4	−1	0,4	0,4

На втором этапе вычисляют стационарные вероятности $\Pi_j(k)$ матриц переходных вероятностей P_k для всех стационарных стратегий и всех возможных состояний изучаемой системы. Так, например, для второй стационарной стратегии стационарные вероятности $\Pi_j(2)$, $j=1,2,3$, являются решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (0{,}3-1)\Pi_1(2)+0{,}1\Pi_2(2)+0{,}05\Pi_3(2)=0, \\ 0{,}6\Pi_1(2)+(0{,}6-1)\Pi_2(2)+0{,}4\Pi_3(2)=0, \\ 0{,}1\Pi_1(2)+0{,}3\Pi_2(2)+(0{,}55-1)\Pi_3(2)=0, \\ \Pi_1(2)+\Pi_2(2)+\Pi_3(2)=1. \end{cases}$$

Результаты вычислений приведены в табл. 6.6.

Таблица 6.6

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$\Pi_1(k)$	0	$\frac{6}{59}$	0	0	$\frac{5}{154}$	0	$\frac{5}{137}$	$\frac{12}{135}$
$\Pi_2(k)$	0	$\frac{31}{59}$	0	0	$\frac{69}{154}$	0	$\frac{62}{137}$	$\frac{69}{135}$
$\Pi_3(k)$	1	$\frac{22}{59}$	1	1	$\frac{80}{154}$	1	$\frac{70}{137}$	$\frac{54}{135}$

На третьем этапе вычисляют ожидаемый доход $E(k)$ для каждой стационарной стратегии с учетом результатов, полученных на первых двух этапах реализации алгоритма (см. табл. 6.5 и 6.6). Результаты вычислений приведены в табл. 6.7.

На четвертом этапе находят (см. табл. 6.7)

$$E(k^*)=\max_{k=1,2,\ldots,8} E(k)=E(2)=2{,}26.$$

Таблица 6.7

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$E(k)$	-1	2,26	0,4	-1	1,72	-1	1,73	2,22

Таким образом, оптимальной является вторая стационарная стратегия, реализация которой предполагает применение удобрений при любом состоянии почвы. #

В примере 6.5 следует обратить внимание на линейную зависимость трех первых уравнений системы линейных алгебраических уравнений для определения стационарных вероятностей $\Pi_j(2)$. Это обстоятельство не является случайным, так как в общем случае требуется найти нетривиальное решение квадратной однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$(P_k - I_m)^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}(k) = \Theta_{m1},$$

значения неизвестных в которой неотрицательны, т.е. $\Pi_j(k) \geqslant 0$, $j = \overline{1, m}$, а их сумма равна единице. Таким образом, необходимым условием существования стационарных вероятностей для стационарной стратегии с номером k, $k = \overline{1, K}$, является условие

$$\det(P_k - I_m) = 0.$$

Чтобы оценить трудности, связанные с практическим использованием метода полного перебора, предположим, что (см. пример 6.1) у садовника множество G допустимых решений состоит не из двух, а из четырех элементов: X_1 — решение о невнесении удобрений; X_2 — решение о внесении удобрений один раз в сезон; X_3 — решение о внесении удобрений дважды в сезон; X_4 — решение о внесении удобрений трижды в сезон. В этом случае общее число стационарных стратегий, имеющихся в распоряжении садовника, равно 64. Сложно перечислить все стационарные стратегии в явном виде. Кроме того, велики вычислительные затраты, необходимые для практической реализации метода полного перебора.

Метод итераций по стратегиям без дисконтирования. При анализе марковской задачи принятия решений с конечным горизонтом планирования N мы использовали понятие *оптимального ожидаемого дохода* $f_i(j)$ за этапы с номерами i, $i+1$, ..., N, вычисляемого при условии, что после i этапов изучаемая система S находилась в состоянии S_j. При бесконечном горизонте планирования удобнее использовать понятие ожидаемого дохода $F_\eta(j)$ за этапы с номерами 1, 2, ..., η при условии, что к этапу с номером $\eta+1$ изучаемая система S будет находиться в состоянии S_j. В этом случае, предполагая однородность соответствующей цепи Маркова, для любой конкретной стратегии с матрицей переходных вероятностей $P=(p_{jk}) \in M_m(\mathbb{R})$ и матрицей доходов $R=(r_{jk}) \in M_m(\mathbb{R})$ можно получить матричное рекуррентое уравнение

$$F_\eta = \nu + PF_{\eta-1}, \tag{6.2}$$

при записи которого использованы следующие обозначения:

$$F_\eta = \begin{pmatrix} F_\eta(1) \\ \vdots \\ F_\eta(m) \end{pmatrix}, \quad \nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_m \end{pmatrix}, \quad \nu_j = \sum_{k=1}^{m} p_{jk} r_{jk}, \ j=\overline{1,m}. \tag{6.3}$$

Фактически уравнение (6.2) является матричным аналогом рекуррентного уравнения, лежащего в основе метода итераций по стратегиям при конечном горизонте планирования (см. **6.2**). Но оно позволяет исследовать ***асимптотическое поведение*** изучаемого процесса при неограниченном возрастании числа этапов, т.е. при $\eta \to +\infty$.

Для удобства дальнейших рассуждений введем матрицу-столбец

$$J = (1 \ \dots \ 1)^{\mathrm{T}} \in M_{m1}(\mathbb{R})$$

и вспомним, что сумма элементов любой строки матрицы переходных вероятностей P равна единице, так же как и сумма всех ее стационарных вероятностей, представленных матрицей-строкой

$$\Pi = (\Pi_1 \ \dots \ \Pi_m) \in M_{1m}(\mathbb{R}).$$

Таким образом,

$$PJ \equiv J, \quad \Pi J \equiv 1. \tag{6.4}$$

А так как матрица-строка Π стационарных вероятностей матрицы переходных вероятностей P удовлетворяет уравнению

$$\Pi(P - I_m) = \Theta_{1m},$$

или, что то же самое,

$$\Pi P = \Pi,$$

то, умножив уравнение (6.2) слева на матрицу-строку Π, приходим к равенству

$$\Pi(F_\eta - F_{\eta-1}) = \Pi\nu.$$

Таким образом, ожидаемый доход за один этап при больших значениях номеров этапов безотносительно к состоянию, в котором система S окажется в начале следующего этапа, равен

$$E = \Pi\nu = \sum_{j=1}^{m} \Pi_j \nu_j.$$

Если учесть, что при долгосрочном горизонте планирования поведение однородного марковского процесса характеризует его независимость от начального состояния системы S, то можно предположить, что при больших номерах η этапа значение ожидаемого дохода $F_\eta(j)$ складывается из двух составляющих. Первой составляющей является величина ηE, зависящая лишь от числа рассмотренных этапов и ожидаемого дохода за один этап безотносительно к состоянию системы в начале следующего этапа. Вторая составляющая, которую обозначим $F(j)$, полностью определяется лишь состоянием S_j, в котором система будет находиться в начале $(\eta+1)$-го этапа. Но в этом случае

$$F_\eta(j) = \eta E + F(j), \quad j = \overline{1, m},$$

или

$$F_\eta = \eta E J + F,$$

где $F = (F(1) \ \ldots \ F(m))^T$, и уравнение (6.2) может быть представлено в следующем виде:

$$\eta E J + F = \nu + P\big((\eta - 1) E J + F\big).$$

А так как имеет место первое из равенств (6.4), то мы приходим к матричному уравнению

$$EJ + (I_m - P)F = \nu$$

относительно скаляра E и вектора F, т.е. имеем систему m линейных алгебраических уравнений

$$E + F(j) - \sum_{k=1}^{m} p_{jk} F(k) = \nu_j, \quad j = \overline{1, m}, \tag{6.5}$$

относительно $m+1$ неизвестных E, $F(1)$, ..., $F(m)$. При этом, как и в случае конечного горизонта планирования, конечной целью является определение стратегии, приводящей к максимальному значению E.

В связи с тем, что в нашем распоряжении имеется система (6.5), состоящая из m уравнений с $m+1$ неизвестными, оптимальное значение E не может быть определено за один шаг. Поэтому используют итерационную процедуру, начиная с произвольной стратегии, а затем определяя новую стратегию, дающую лучшее значение E. Процесс решения завершают, если две последовательно определенные стратегии совпадают.

Итерационный процесс состоит из двух основных этапов, называемых ***этапом оценивания параметров*** и ***этапом улучшения стратегии***.

Этап оценивания параметров. Предположим, что $G = \{X_i\}_{i=1}^{M}$ — множество допустимых решений. Выбираем произвольную стратегию $\tau = (X_{l_1}\ X_{l_2}\ \ldots\ X_{l_m})^{\mathrm{T}}$, где $X_{l_j} \in G$, $j = \overline{1, m}$. Используя соответствующие стратегии τ, матрицу переходных вероятностей $P(\tau) = (p_{jk}(\tau))$ и матрицу доходов $R(\tau) = (r_{jk}(\tau))$ и полагая $F_\tau(m) = 0$, решаем систему линейных алгебраических уравнений

$$E_\tau + F_\tau(j) - \sum_{k=1}^{m} p_{jk}(\tau)\, F_\tau(k) = \nu_j(\tau), \quad j = \overline{1, m},$$

относительно E_τ, $F_\tau(1)$, ..., $F_\tau(m-1)$.

Этап улучшения стратегии. Для каждого состояния S_j, $j = \overline{1, m}$, находим допустимое решение $X_{*j} \in G$, на котором достигается

$$\max_{X_i \in G} \Big(\nu_j(X_i) + \sum_{k=1}^{m} p_{jk}(X_i) F_\tau(k) \Big).$$

Эти оптимальные решения образуют новую стратегию $t = (X_{*1}\ X_{*2}\ \ldots\ X_{*m})^{\mathrm{T}}$. Если $t = \tau$, то стратегия τ и является оптимальной. В противном случае нужно обозначить стратегию t через τ и вернуться к первому этапу — этапу оценивания параметров.

Отметим, что, согласно (6.5),

$$E_\tau = \nu_j(X_i) + \sum_{k=1}^{m} p_{jk}(X_i) F_\tau(k) - F_\tau(j),$$

т.е. задача максимизации на этапе улучшения стратегии эквивалентна задаче максимизации суммарного ожидаемого дохода за один этап по всему множеству допустимых решений G.

Пример 6.6. Вернемся к задаче с садовником при бесконечном горизонте планирования, рассмотренной в примере 6.5, и решим ее методом итераций по стратегиям.

В качестве произвольной стратегии τ используем стратегию, исключающую использование удобрений (см. пример 6.5). В этом случае

$$P(\tau) = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R(\tau) = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

На этапе оценивания параметров, учитывая, что $F_\tau(3) = 0$, получаем систему линейных алгебраических уравнений (см. табл. 6.5, столбец $k = 1$)

$$\begin{cases} E_\tau + (1 - 0{,}2)\, F_\tau(1) - 0{,}5\, F_\tau(2) = 5{,}3, \\ E_\tau + 0 \cdot F_\tau(1) + (1 - 0{,}5)\, F_\tau(2) = 3, \\ E_\tau + 0 \cdot F_\tau(1) + 0 \cdot F_\tau(2) = -1, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение

$$E_\tau = -1, \quad F_\tau(1) \approx 12{,}54, \quad F_\tau(2) = 8.$$

В рассматриваемой задаче множество G допустимых решений содержит всего лишь два элемента (см. пример 6.3). Результаты соответствующих вычислений на этапе улучшения стратегии приведены в табл. 6.8, где использованы уже найденные значения $\nu_j(X_i)$ (см. табл. 6.5, столбцы $k = 1$ и $k = 2$).

Таблица 6.8

S_j	$\varphi_j(X_i) = \nu_j(X_i) + p_{j1}(X_i)\, F_i(1) + p_{j2}(X_i)\, F_i(2)$		$\max\limits_G \varphi_j$	X_{*j}
	$i = 1$	$i = 2$		
1	$5{,}3 + 0{,}2 \cdot 12{,}88 + {}$ $+ 0{,}5 \cdot 8 = 11{,}88$	$4{,}7 + 0{,}3 \cdot 12{,}88 + {}$ $+ 0{,}6 \cdot 8 = 13{,}36$	13,36	X_2
2	$3 + 0 \cdot 12{,}88 + {}$ $+ 0{,}5 \cdot 8 = 7$	$3{,}1 + 0{,}1 \cdot 12{,}88 + {}$ $+ 0{,}6 \cdot 8 = 9{,}19$	9,19	X_2
3	$-1 + 0 \cdot 12{,}88 + {}$ $+ 0 \cdot 8 = -1$	$0{,}4 + 0{,}05 \cdot 12{,}88 + {}$ $+ 0{,}4 \cdot 8 + = 4{,}24$	4,24	X_2

Новая стратегия $t = (X_2\ \ X_2\ \ X_2)^{\mathrm{T}}$ предусматривает применение удобрений при любом состоянии почвы. Она отличается от стратегии $\tau = (X_1\ \ X_1\ \ X_1)^{\mathrm{T}}$, поэтому возвращаемся на этап оценивания параметров, полагая $\tau = (X_2\ \ X_2\ \ X_2)^{\mathrm{T}}$.

Новой стратегии τ соответствуют матрицы (см. пример 6.5)

$$P(\tau) = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}05 & 0{,}4 & 0{,}55 \end{pmatrix}, \qquad R(\tau) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

которые при $F_\tau(3) = 0$ определяют следующую систему линейных алгебраических уравнений (см. табл. 6.5, $k = 2$):

$$\begin{cases} E + (1 - 0{,}3)\, F_\tau(1) - 0{,}6\, F_\tau(2) = 4{,}7, \\ E - 0{,}1\, F_\tau(1) + (1 - 0{,}6)\, F_\tau(2) = 3{,}1, \\ E - 0{,}05\, F_\tau(1) + 0{,}4\, F_\tau(2) = 0{,}4. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение

1,94 [illegible] 4,1

$$E = 2{,}26, \quad F_\tau(1) = 6{,}75, \quad F_\tau(2) = 3{,}79.$$

Результаты вычислений на этапе улучшения стратегии приведены в табл. 6.9.

Таблица 6.9

S_j	$\varphi_j(X_i) = \nu_j(X_i) + p_{j1}(X_i)\, F_i(1) + p_{j2}(X_i)\, F_i(2)$		$\max\limits_G \varphi_j$	X_{*j}
	$i = 1$	$i = 2$		
1	$5{,}3 + 0{,}2 \cdot 6{,}75 +$ $+ 0{,}5 \cdot 3{,}79 = 8{,}54$	$4{,}7 + 0{,}3 \cdot 6{,}75 +$ $+ 0{,}6 \cdot 3{,}79 = 8{,}99$	8,99	X_2
2	$3 + 0 \cdot 6{,}75 +$ $+ 0{,}5 \cdot 3{,}79 = 4{,}89$	$3{,}1 + 0{,}1 \cdot 6{,}75 +$ $+ 0{,}6 \cdot 3{,}79 = 6{,}05$	6,05	X_2
3	$-1 + 0 \cdot 6{,}75 +$ $+ 0 \cdot 3{,}79 = -1$	$0{,}4 + 0{,}05 \cdot 6{,}75 +$ $+ 0{,}4 \cdot 3{,}79 = 2{,}25$	2,25	X_2

Новая стратегия $t = (X_2\ \ X_2\ \ X_2)^{\mathrm{T}}$, требующая применения удобрений независимо от состояния почвы, идентична предыдущей, т.е. она является оптимальной. Этот результат совпадает с результатом, полученным методом полного перебора (см. пример 6.5), как в смысле оптимальной стратегии, так и в смысле суммарного ожидаемого дохода за один этап, соответствующего этой стратегии. #

Отметим, что характерной особенностью метода итераций по стратегиям является его быстрая сходимость к оптимальной стратегии.

Метод итераций по стратегиям с дисконтированием. Метод итераций по стратегиям может быть обобщен на случай *дисконтирования*. Действительно, если α — *коэффициент дисконтирования*, то рекуррентное уравнение (6.2) при конечном числе этапов в условиях дисконтирования принимает вид

$$F_\eta = \nu + \alpha P F_{\eta-1}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{6.6}$$

где η — число рассматриваемых этапов. Непосредственно из (6.6) следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$F_{\eta+n} = \alpha^{n+1} P^{n+1} F_{\eta-1} + \nu \sum_{k=0}^{n} \alpha^k P^k.$$

Таким образом, существует предел

$$F = \lim_{n\to\infty} F_{\eta+n} = \nu (I_m - \alpha P)^{-1},$$

где $F = (F(1), \ldots, F(m))$ и $F(j)$ — ***приведенный*** к текущему моменту времени ***дисконтированный доход*** при условии, что система находится в состоянии S_j и функционирует в неограниченном временном интервале. Значит, при больши́х значениях η значение F_η перестает зависеть от номера η. В этом и заключается принципиальное отличие рассматриваемого случая от случая без дисконтирования, для которого имеет место равенство

$$F_\eta = \eta EJ + F.$$

Такого результата и следовало ожидать, так как в случае с дисконтированием влияние будущих доходов асимптотически уменьшается до нуля, а приведенный доход F_η с ростом η стремится к F.

Исходя из вышеизложенных рассуждений, можно выделить следующие этапы реализации метода итераций по стратегиям с дисконтированием.

Этап оценивания параметров. Для произвольно выбранной стратегии $\tau = (X_{l_1}\ X_{l_2}\ \ldots\ X_{l_m})^{\mathrm{T}}$, где $X_{l_j} \in G$, $j = \overline{1, m}$, с матрицей переходных вероятностей $P(\tau) = (p_{jk}(\tau))$ и матрицей доходов $R(\tau) = (r_{jk}(\tau))$ находим решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} F_\tau(j) - \alpha \sum\limits_{k=1}^{m} p_{jk}(\tau)\, F_\tau(k) = \nu_j(\tau), \quad j = \overline{1, m}; \\ \nu_j(\tau) = \sum\limits_{k=1}^{m} p_{jk}(\tau)\, r_{jk}(\tau) \end{cases}$$

относительно $F_\tau(k)$, $k = \overline{1, m}$.

Этап улучшения стратегии. Для каждого состояния S_j изучаемой системы S, $j = \overline{1, m}$, находим допустимое решение $X_{*j} \in G$, на котором достигается

$$\max_{X_i \in G} \Big(\nu_j(X_i) + \alpha \sum_{k=1}^{m} p_{jk}(X_i)\, F_\tau(k) \Big).$$

Эти решения образуют новую стратегию $t = (X_{*1}\ X_{*2}\ \ldots\ X_{*m})^{\mathrm{T}}$. Если $t = \tau$, то вычисления завершены и τ — оптимальная стратегия. В противном случае обозначаем стратегию t через τ и возвращаемся к первому этапу.

Пример 6.7. Решим задачу с садовником при бесконечном горизонте планирования (см. примеры 6.5, 6.6) с учетом дисконтирования, полагая, что коэффициент дисконтирования $\alpha = 0{,}6$.

В качестве начальной выбираем стратегию $\tau = (X_1\ X_1\ X_1)^{\mathrm{T}}$, исключающую использование удобрений. Матрицы $P(\tau)$ и $R(\tau)$ (они приведены в примере 6.6) определяют систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (1 - 0{,}6 \cdot 0{,}2)\, F_\tau(1) - 0{,}6 \cdot 0{,}5\, F_\tau(2) - 0{,}6 \cdot 0{,}3\, F_\tau(3) = 5{,}3, \\ -0{,}6 \cdot 0 \cdot F_\tau(1) + (1 - 0{,}6 \cdot 0{,}5)\, F_\tau(2) - 0{,}6 \cdot 0{,}5\, F_\tau(3) = 3, \\ -0{,}6 \cdot 0 \cdot F_\tau(1) - 0{,}6 \cdot 0\, F_\tau(2) + (1 - 0{,}6 \cdot 1)\, F_\tau(3) = -1, \end{cases}$$

решение которой не вызывает затруднений:

$$F_\tau(1) \approx 6{,}6, \quad F_\tau(2) \approx 3{,}2, \quad F_\tau(3) \approx -2{,}5.$$

Результаты вычислений на этапе улучшения стратегии отражены в табл. 6.10, в которой использованы уже найденные значения $\nu_j(X_i)$ (см. табл. 6.5, столбцы $k = 1$ и $k = 2$) и переходные вероятности $p_{jk}(X_i)$, являющиеся элементами матриц $P_i = P(X_i)$ (см. пример 6.5).

Таблица 6.10

S_j	$\varphi_j(X_i) = \nu_j(X_i) + \alpha \sum_{k=1}^{3} p_{jk}(X_i)\, F_\tau(k)$		$\max\limits_G \varphi_j$	X_{*j}
	$i = 1$	$i = 2$		
S_1	$5{,}3 + [0{,}2 \cdot 6{,}6 + {} + 0{,}5 \cdot 3{,}2 + {} + 0{,}3(-2{,}5)] \cdot 0{,}6 = {} = 6{,}61$	$4{,}7 + [0{,}3 \cdot 6{,}6 + {} + 0{,}6 \cdot 3{,}2 + {} + 0{,}1(-2{,}5)] \cdot 0{,}6 = {} = 6{,}89$	6,89	X_2
S_2	$3 + [0 \cdot 6{,}6 + {} + 0{,}5 \cdot 3{,}2 + {} + 0{,}5(-2{,}5)] \cdot 0{,}6 = {} = 3{,}21$	$3{,}1 + [0{,}1 \cdot 6{,}6 + {} + 0{,}6 \cdot 3{,}2 + {} + 0{,}3(-2{,}5)] \cdot 0{,}6 = {} = 4{,}20$	4,20	X_2
S_3	$-1 + [0 \cdot 6{,}6 + {} + 0 \cdot 3{,}2 + {} + 1 \cdot (-2{,}5)] \cdot 0{,}6 = {} = -2{,}5$	$0{,}4 + [0{,}05 \cdot 6{,}6 + {} + 0{,}4 \cdot 3{,}2 + {} + 0{,}55(-2{,}5)] \cdot 0{,}6 = {} = 0{,}54$	0,54	X_2

Новая стратегия $t = (X_2\ \ X_2\ \ X_2)^{\mathrm{T}}$, требующая применения удобрений при любом состоянии почвы, отличается от предыдущей. Поэтому полагаем $\tau = t$ и возвращаемся на этап оценивания параметров, записав систему линейных алгебраических уравнений на основе матриц P_2 и R_2 (см. пример 6.5):

$$\begin{cases} (1 - 0{,}6 \cdot 0{,}3)\, F_\tau(1) - 0{,}6 \cdot 0{,}6\, F_\tau(2) - 0{,}6 \cdot 0{,}1\, F_\tau(3) = 4{,}7, \\ -0{,}6 \cdot 0{,}1\, F_\tau(1) + (1 - 0{,}6 \cdot 0{,}6)\, F_\tau(2) - 0{,}6 \cdot 0{,}3\, F_\tau(3) = 3{,}1, \\ -0{,}6 \cdot 0{,}05\, F_\tau(1) - 0{,}6 \cdot 0{,}4\, F_\tau(2) + (1 - 0{,}6 \cdot 0{,}55)\, F_\tau(3) = 0{,}4. \end{cases}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае

$$F_\tau(1) \approx 8{,}9, \quad F_\tau(2) \approx 6{,}6, \quad F_\tau(3) \approx 3{,}4.$$

Результаты вычислений на этапе улучшения стратегии отражены в табл. 6.11.

Таблица 6.11

S_j	$\varphi_j(X_i) = \nu_j(X_i) + \alpha \sum\limits_{k=1}^{3} p_{jk}(X_i)\, F_\tau(k)$		$\max\limits_{G} \varphi_j$	X_{*j}
	$i = 1$	$i = 2$		
S_1	$5{,}3 + [0{,}2 \cdot 8{,}9 + {}$ $+ 0{,}5 \cdot 6{,}6 + {}$ $+ 0{,}3 \cdot 3{,}4] \cdot 0{,}6 = 8{,}95$	$4{,}7 + [0{,}3 \cdot 8{,}9 + {}$ $+ 0{,}6 \cdot 6{,}6 + {}$ $+ 0{,}1 \cdot 3{,}4] \cdot 0{,}6 = {}$ $= 8{,}88$	8,95	X_1
S_2	$3 + [0 \cdot 8{,}9 + {}$ $+ 0{,}5 \cdot 6{,}6 + {}$ $+ 0{,}5 \cdot 3{,}4] \cdot 0{,}6 = 5{,}99$	$3{,}1 + [0{,}1 \cdot 8{,}9 + {}$ $+ 0{,}6 \cdot 6{,}6 + {}$ $+ 0{,}3 \cdot 3{,}4)] \cdot 0{,}6 = {}$ $= 6{,}62$	6,62	X_2
S_3	$-1 + [0 \cdot 8{,}9 + {}$ $+ 0 \cdot 6{,}6 + {}$ $+ 1 \cdot 3{,}4] \cdot 0{,}6 = 1{,}04$	$0{,}4 + [0{,}05 \cdot 8{,}9 + {}$ $+ 0{,}4 \cdot 6{,}6 + {}$ $+ 0{,}55 \cdot 3{,}4] \cdot 0{,}6 = {}$ $= 3{,}37$	3,37	X_2

Новая стратегия $t = (X_1\ \ X_2\ \ X_2)^{\mathrm{T}}$, требующая применения удобрений лишь при удовлетворительном и плохом состояниях почвы, отличается от предыдущей. Поэтому полагаем $\tau = t$ и возвращаемся на этап оценивания параметров, записав систему линейных алгебраических уравнений на основе матриц P_8 и R_8 (см. пример 6.5):

$$\begin{cases} (1-0{,}6\cdot 0{,}2)\,F_\tau(1) - 0{,}6\cdot 0{,}6\,F_\tau(2) - 0{,}6\cdot 0{,}3\,F_\tau(3) = 5{,}3, \\ -0{,}6\cdot 0{,}1\,F_\tau(1) + (1-0{,}6\cdot 0{,}6)\,F_\tau(2) - 0{,}6\cdot 0{,}3\,F_\tau(3) = 3{,}1, \\ -0{,}6\cdot 0{,}05\,F_\tau(1) - 0{,}6\cdot 0{,}4\,F_\tau(2) + (1-0{,}6\cdot 0{,}55)\,F_\tau(3) = 0{,}4. \end{cases}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае

$$F_\tau(1) \approx 9{,}0, \quad F_\tau(2) \approx 6{,}6, \quad F_\tau(3) \approx 3{,}4.$$

Результаты вычислений на этапе улучшения стратегии отражены в табл. 6.12.

Таблица 6.12

S_j	$\varphi_j(X_i) = \nu_j(X_i) + \alpha \sum\limits_{k=1}^{3} p_{jk}(X_i)\,F_\tau(k)$		$\max\limits_G \varphi_j$	X_{*j}
	$i=1$	$i=2$		
S_1	$5{,}3+[0{,}2\cdot 9{,}0+$ $+0{,}5\cdot 6{,}6+$ $+0{,}3\cdot 3{,}4]\cdot 0{,}6 = 8{,}98$	$4{,}7+[0{,}3\cdot 9{,}0+$ $+0{,}6\cdot 6{,}6+$ $+0{,}1\cdot 3{,}4]\cdot 0{,}6 =$ $= 8{,}91$	8,95	X_1
S_2	$3+[0\cdot 9{,}0+$ $+0{,}5\cdot 6{,}6+$ $+0{,}5\cdot 3{,}4]\cdot 0{,}6 = 6{,}00$	$3{,}1+[0{,}1\cdot 9{,}0+$ $+0{,}6\cdot 6{,}6+$ $+0{,}3\cdot 3{,}4)]\cdot 0{,}6 =$ $= 6{,}63$	6,63	X_2
S_3	$-1+[0\cdot 9{,}0+$ $+0\cdot 6{,}6+$ $+1\cdot 3{,}4]\cdot 0{,}6 = 1{,}04$	$0{,}4+[0{,}05\cdot 9{,}0+$ $+0{,}4\cdot 6{,}6+$ $+0{,}55\cdot 3{,}4]\cdot 0{,}6 =$ $= 3{,}38$	3,38	X_2

Так как $t = (X_1\ X_2\ X_2)^{\mathrm{T}} = \tau$, то оптимальная стратегия найдена, и исходная задача решена полностью. #

Сопоставляя результаты теоретических рассуждений и вычислительных экспериментов (см. примеры 6.6, 6.7), приходим к выводу о том, что дисконтирование может влиять на оптимальную стратегию.

6.4. Марковская задача принятия решений и метод линейного программирования

Вернемся к *марковской задаче принятия решений* при бесконечном числе этапов без *дисконтирования.* Предположим, что $G=\{X_i\}_{i=1}^{M}$ — множество *допустимых решений* и $P(X_i) = (p_{jk}(X_i))$, $R(X_i)=(r_{jk}(X_i))\in M_m\mathbb{R}$ — *матрицы переходных вероятностей* и *доходов*, соответствующие допустимому решению $X_i\in G$, а m — число возможных состояний изучаемой системы S, представленных множеством $\{S_j\}_{j=1}^{m}$. Тогда величина *ожидаемого дохода* при принятии допустимого решения X_{l_j} для состояния S_j определяется равенством

$$\nu_j(X_{l_j})=\sum_{k=1}^{m}p_{jk}(X_{l_j})\,r_{jk}(X_{l_j}).$$

Пусть теперь $T=G^n$ — множество *стационарных стратегий*, причем стационарной стратегии

$$\tau=(X_{l_1}\ \ X_{l_2}\ \ \ldots\ \ X_{l_m})^{\mathrm{T}}\in T$$

соответствует матрица переходных вероятностей

$$P(\tau)=(p_{jk}(\tau))\in M_m(\mathbb{R}),$$

для которой матрицу-строку *стационарных вероятностей* $\Pi(\tau)=(\Pi_1(\tau)\ \ \Pi_2(\tau)\ \ \ldots\ \ \Pi_m(\tau))$ можно определить как решение однородного матричного уравнения

$$\Pi(\tau)\big(P(\tau)-I_m\big)=\Theta_{1m},$$

удовлетворяющее очевидным условиям:

$$\Pi_j(\tau) \geqslant 0, \quad j = \overline{1, m}; \qquad \sum_{j=1}^{m} \Pi_j(\tau) = 1, \quad \tau \in T.$$

Таким образом, если

$$\nu(\tau) = \left(\nu_1(X_{l_1}) \ \ \nu_2(X_{l_2}) \ \ \ldots \ \ \nu_m(X_{l_m})\right)^{\mathrm{T}},$$

то ожидаемый доход за один этап безотносительно к состоянию, в котором система S окажется на следующем этапе, при реализации стратегии $\tau \in T$ равен

$$E(\tau) = \Pi(\tau)\nu(\tau),$$

и в соответствии с *методом полного перебора* оптимальная стратегия $\tau^* \in T$ определяется из условия

$$E(\tau^*) = \max_{\tau \in T} E(\tau).$$

Для преобразования рассмотренной задачи к *задаче линейного программирования* воспользуемся следующими соображениями.

Пусть q_j^i — условная вероятность того, что будет принято допустимое решение $X_i \in G$, если изучаемая система S находится в состоянии S_j. Обратимся к задаче минимизации скалярной функции

$$e = \sum_{j=1}^{m} \Pi_j \left(\sum_{i=1}^{M} q_j^i \nu_j^i \right)$$

при ограничениях

$$\Pi_j = \sum_{k=1}^{m} \Pi_k p_{kj}, \quad j = \overline{1, m};$$

$$\sum_{j=1}^{m} \Pi_j = 1; \qquad \sum_{i=1}^{M} q_j^i = 1, \quad j = \overline{1, m};$$

$$\Pi_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1, m}; \qquad q_j^i \geqslant 0, \quad j = \overline{1, m}, \ i = \overline{1, M},$$

где M — число элементов множества допустимых решений; Π_j и p_{kj}, $k, j = \overline{1, m}$, — функции выбранной стратегии и, как следствие, конкретных допустимых решений из множества $G = \{X_i\}_{i=1}^{M}$; $\nu_j^i = \nu_j(X_i)$. Отметим, что эта задача эквивалентна исходной лишь при условии, что $q_j^i = 1$ для фиксированного i_* при каждом $j = \overline{1, m}$, так как в этом случае значение

$$\sum_{i=1}^{M} q_j^i \nu_j^i$$

совпадает со значением $\nu_j^{i_*}$, где $X_{i_*} \in G$ — *оптимальное решение* для состояния S_j изучаемой системы S.

Для любых $j = \overline{1, m}$ и $i = \overline{1, M}$ полагаем

$$\omega_{ji} = \Pi_j q_j^i,$$

где ω_{ji} — вероятность пребывания системы S в состоянии S_j при принятии решения $X_i \in G$. При этом для любого $j = \overline{1, m}$

$$\sum_{i=1}^{M} \omega_{ji} = \sum_{i=1}^{M} \Pi_j q_j^i = \Pi_j \sum_{i=1}^{M} q_j^i = \Pi_j.$$

Таким образом,

$$q_j^i = \frac{\omega_{ji}}{\sum\limits_{i=1}^{M} \omega_{ji}},$$

и ограничение

$$\sum_{j=1}^{m} \Pi_j = 1$$

эквивалентно ограничению

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{M} \omega_{ji} = 1.$$

Скалярная функция e может быть представлена в виде

$$e = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{M} \nu_j^i \omega_{ji},$$

а исходная задача может быть сформулирована в виде задачи линейного программирования с переменными ω_{ji}:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{i=1}^{M} \nu_j(X_i)\omega_{ji} \to \max; \\ \sum\limits_{i=1}^{M} \omega_{ji} - \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{i=1}^{M} p_{kj}(X_i)\omega_{ki} = 0, \quad j = \overline{1, m}, \\ \sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{i=1}^{M} \omega_{ji} = 1, \\ \omega_{ji} \geqslant 0, j = \overline{1, m}, \ i = \overline{1, M}. \end{cases}$$

Для завершения наших рассуждений осталось показать, что оптимальное решение гарантирует выполнение равенства $q_j^i = 1$ для фиксированного i при любом $j = \overline{1, m}$. Система ограничений задачи линейного программирования содержит $m + 1$ ограничений типа равенства, одно из которых является избыточным (см. **6.3**). Следовательно, в задаче должно быть m *базисных переменных*, и можно показать, что вероятность ω_{ji} должна быть строго положительной по меньшей мере при одном i для каждого j, т.е.

$$q_j^i = \frac{\omega_{ji}}{\sum\limits_{i=1}^{M} \omega_{ji}} \in \{0, 1\},$$

что и требовалось доказать.

Пример 6.8. Сформулируем задачу с садовником в виде задачи линейного программирования, для чего воспользуемся переходными вероятностями $p_{jk}(X_i)$, входящими в матрицы $P_i \equiv P(X_i)$ (см. пример 6.5), а также вычисленными значениями ожидаемых доходов (см. табл. 6.5):

$$\begin{cases} 5{,}3\omega_{11} + 4{,}7\omega_{12} + 3\omega_{21} + 3{,}1\omega_{22} - \omega_{31} + 0{,}4\omega_{32} \to \max; \\ (1-0{,}2)\omega_{11} + (1-0{,}3)\omega_{12} - 0{,}1\omega_{22} - 0{,}05\omega_{32} = 0, \\ -0{,}5\omega_{11} - 0{,}6\omega_{12} + (1-0{,}5)\omega_{21} + (1-0{,}6)\omega_{22} - 0{,}4\omega_{32} = 0, \\ -0{,}3\omega_{11} - 0{,}1\omega_{12} - 0{,}5\omega_{21} - 0{,}3\omega_{22} + (1-1)\omega_{31} + (1-0{,}05)\omega_{32} = 0, \\ \sum\limits_{j=1}^{3}\sum\limits_{i=1}^{2}\omega_{ji} = 1, \quad \omega_{ji} \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, \ i = 1, 2. \end{cases}$$

Для этой задачи оптимальным является решение: $\omega_{11} = 0$; $\omega_{12} = 6/59$; $\omega_{21} = 0$; $\omega_{22} = 31/59$; $\omega_{31} = 0$; $\omega_{32} = 22/59$. Таким образом, $q_1^2 = q_2^2 = q_3^2 = 1$ и *оптимальной* является *стратегия* $\tau^* = (X_2 \ \ X_2 \ \ X_2)^{\mathrm{T}}$, что совпадает с результатом, полученным методом полного перебора (см. пример 6.5) #

В **6.3** мы показали, что марковская задача принятия решений с *дисконтированием* фактически связана с рекуррентными уравнениями

$$F_{\tau^*}(j) = \max_{X_i \in G}\Bigl(\nu_j(X_i) + \alpha\sum_{k=1}^{m} p_{jk}(X_i)\, F_{\tau^*}(k)\Bigr), \quad j = \overline{1, m},$$

которые могут быть заменены эквивалентной системой неравенств

$$F_\tau(j) \geqslant \alpha\sum_{k=1}^{m} p_{jk}(X_i)\, F_\tau(k) + \nu_j(X_i), \quad j = \overline{1, m}, \ i = \overline{1, M}, \qquad (6.7)$$

при условии, что функция стратегии $F_\tau(j)$ достигает своего наименьшего значения $F_{\tau^*}(j)$ на множестве стационарных стратегий T при любом $j = \overline{1, m}$. При этом, если воспользоваться *целевой функцией*

$$\sum_{j=1}^{m} b_j F_\tau(j),$$

где произвольные постоянные b_j, $j=\overline{1,m}$, положительны, то становится понятным, что ее минимизация с учетом ограничений (6.7) типа неравенства обеспечивает также и минимальное значение функции $F_\tau(j)$ при $j=\overline{1,m}$. Но при этом задача

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} b_j F_\tau(j) \to \min; \\ F_\tau(j) - \alpha \sum\limits_{k=1}^{m} p_{jk}(X_i)\, F_\tau(k) \geqslant \nu_j(X_i), \quad j=\overline{1,m},\ i=\overline{1,M}, \end{cases}$$

в общем случае не является стандартной задачей линейного программирования, так как функции $F_\tau(j)$ не ограничены в знаке. Но *двойственная* к ней *задача* относительно переменных ω_{ji}

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{i=1}^{M} \nu_j(X_i)\omega_{ji} \to \max; \\ \sum\limits_{i=1}^{M} \omega_{ji} - \alpha \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{i=1}^{M} p_{jk}(X_i)\,\omega_{ki} = b_j, \quad j=\overline{1,m}, \\ \omega_{ji} \geqslant 0, \quad j=\overline{1,m},\ i=\overline{1,M}, \end{cases}$$

является стандартной задачей линейного программирования. При этом ее целевая функция имеет тот же вид, что и в аналогичной задаче линейного программирования без дисконтирования. А это обстоятельство позволяет сохранить содержательную интерпретацию переменных ω_{ji}.

Пример 6.9. Рассмотрим задачу с садовником, в которой коэффициент дисконтирования равен $\alpha = 0{,}6$. Если считать, что $b_j = 1$, $j = 1, 2, 3$, то соответствующую задачу линейного программирования можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} 5{,}3\omega_{11} + 4{,}7\omega_{12} + 3\omega_{21} + 3{,}1\omega_{22} - \omega_{31} + 0{,}4\omega_{32} \to \max; \\ (1-0{,}6\cdot 0{,}2)\omega_{11} + (1-0{,}6\cdot 0{,}3)\omega_{12} - 0{,}6\cdot 0{,}1\omega_{22} - 0{,}6\cdot 0{,}05\omega_{32} = 1, \\ -0{,}6\cdot 0{,}5\omega_{11} - 0{,}6\cdot 0{,}6\omega_{12} + (1-0{,}6\cdot 0{,}5)\omega_{21} + \\ \qquad\qquad + (1-0{,}6\cdot 0{,}6)\omega_{22} - 0{,}6\cdot 0{,}4\omega_{32} = 1, \\ -0{,}6\cdot 0{,}3\omega_{11} - 0{,}6\cdot 0{,}1\omega_{12} - 0{,}6\cdot 0{,}5\omega_{21} - 0{,}6\cdot 0{,}3\omega_{22} + \\ \qquad\qquad + (1-0{,}6\cdot 1)\omega_{31} + (1-0{,}6\cdot 0{,}55)\omega_{32} = 1, \\ \sum\limits_{j=1}^{3}\sum\limits_{i=1}^{2}\omega_{ji} = 1, \quad \omega_{ji} \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3,\ i = 1, 2. \end{cases}$$

Для этой задачи оптимальным является решение

$$\omega_{11} = \frac{269}{3995}, \qquad \omega_{12} = 0,$$
$$\omega_{21} = 0, \qquad \omega_{22} = \frac{2833}{3995},$$
$$\omega_{31} = 0, \qquad \omega_{32} = \frac{893}{3995}.$$

Итак, оптимальной является стратегия $\tau^* = (X_1\ X_2\ X_2)^{\mathrm{T}}$, что и было установлено в примере 6.7.

Вопросы и задачи

6.1. Сформулируйте в общем виде марковскую задачу принятия решений. К каким классам задач исследования операций могут быть отнесены марковские задачи принятия решений?

6.2. Сформулируйте стандартный принцип оптимальности для марковских задач принятия решений.

6.3. В чем заключается принципиальное отличие задач принятия решений с конечным и бесконечным горизонтами планирования?

6.4. Что называют стационарной стратегией? Докажите, что число элементов множества всех стационарных стратегий равно M^m, где M — число допустимых решений, а m — число возможных состояний изучаемой системы.

6.5. Пусть для некоторой марковской задачи принятия решений с конечным горизонтом планирования известны все элементы множества стационарных стратегий. Можно ли в этом случае определить оптимальную стратегию, не используя метод итераций по стратегиям? Ответ поясните.

6.6. В чем заключается содержательный смысл введения коэффициента дисконтирования в марковскую задачу принятия решений?

6.7. Поясните содержательный смысл стационарных вероятностей матрицы переходных вероятностей изучаемой системы в марковской модели принятия решений.

6.8. Чем принципиально отличаются методы нахождения оптимальных стратегий с использованием марковских моделей принятия решений при конечном и бесконечном горизонтах планирования?

6.9. Почему при реализации метода итераций по стратегиям при бесконечном горизонте планирования на этапе оценивания параметров мы полагаем, что $F_\tau(m) \equiv 0$?

6.10. Возможно ли преобразование марковской модели принятия решений при конечном горизонте планирования к модели линейного программирования? Ответ аргументируйте.

6.11. В чем заключается принципиальное отличие метода итераций по стратегиям с дисконтированием от метода итераций по стратегиям без дисконтирования при бесконечном горизонте планирования?

6.12. Фирма ежегодно оценивает положение со сбытом своей продукции как удовлетворительное (состояние S_1) или не-удовлетворительное (состояние S_2). Необходимо принять решение о целесообразности рекламирования продукции с целью расширения ее сбыта при конечном ($N = 3$) и бесконечном горизонтах планирования, если матрицы

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

определяют переходные вероятности рассматриваемой системы при наличии рекламы (допустимое решение X_1) и без нее (допустимое решение X_2) в течение любого года, а соответствующие им доходы заданы матрицами

$$R_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

При решении задачи планирования воспользуйтесь:

в случае конечного горизонта

а) методом полного перебора;

б) методом итераций по стратегиям;

в случае бесконечного горизонта планирования

а) методом полного перебора;

б) методом итераций по стратегиям;

в) методами линейного программирования.

Ответ: при конечном горизонте планирования в первые два года необходимо использовать рекламу лишь в случае неудовлетворительного положения со сбытом, а в третий год рекламу не использовать. При бесконечном горизонте планирования рекламу нужно использовать лишь при удовлетворительном положении со сбытом.

6.13. Фирма может рекламировать свою продукцию с помощью радио (допустимое решение X_1), телевидения (допустимое решение X_2) и газет (допустимое решение X_3). Недельные затраты на рекламу с помощью этих средств равны 200, 900 и 300 денежных единиц соответственно. Фирма может оценивать недельный объем сбыта как удовлетворительный (состояние S_1), хороший (состояние S_2) и отличный (состояние S_3). Матрицы переходных вероятностей для каждого из трех средств массовой информации имеют вид

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix},$$

а соответствующие им недельные доходы (в денежных единицах) заданы матрицами

$$R_1 = \begin{pmatrix} 400 & 520 & 600 \\ 300 & 400 & 700 \\ 200 & 250 & 500 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1000 & 1300 & 1600 \\ 800 & 1000 & 1700 \\ 600 & 700 & 1100 \end{pmatrix},$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} 400 & 530 & 710 \\ 350 & 450 & 800 \\ 250 & 400 & 650 \end{pmatrix},$$

в которых не учтены затраты на рекламу. Найдите оптимальную стратегию рекламы для последующих трех недель и при бесконечном горизонте планирования с использованием рекомендаций, сформулированных в задаче 6.12.

Ответ: при конечном горизонте планирования нужно использовать радиорекламу, если сбыт удовлетворительный, а во всех других случаях использовать газетную рекламу.

6.14 (задача управления запасами). Магазин электротоваров с целью немедленного удовлетворения спроса покупателей может размещать заказы на холодильники в начале каждого месяца. Каждое размещение заказа приводит к постоянным затратам в 100 денежных единиц. Затраты на хранение одного холодильника в течение месяца составляют 5 денежных единиц, а потери магазина при отсутствии холодильника оцениваются в 150 денежных единиц в месяц за каждый холодильник. Месячный спрос на холодильники — дискретная случайная величина ξ, принимающая значения 0, 1 и 2 с вероятностями 0,2, 0,5 и 0,3 соответственно. Магазин реализует следующую стратегию: максимальный уровень запаса не должен превышать двух холодильников в течение месяца. Определите оптимальную стратегию размещения заказов на холодильники на последующие три месяца.

Ответ: если в начале месяца запас равен нулю, то нужно заказывать два холодильника. В противном случае заказы не размещать.

6.15. Найдите решение задачи управления запасами 6.14 при условии, что вероятности, с которыми случайная величина ξ принимает свои возможные значения, зависят от месяца (табл. 6.13).

Таблица 6.13

Спрос	Месяц		
	1	2	3
0	0,1	0,3	0,2
1	0,4	0,5	0,4
2	0,5	0,2	0,4

Ответ: если в начале месяца запас равен нулю, то нужно заказывать два холодильника. В противном случае заказы не размещать.

6.16. Решите задачу 6.12 при $N = 3$ с учетом коэффициента дисконтирования $\alpha = 0{,}9$.

6.17. Решите задачу 6.13 при $N = \infty$ с учетом коэффициента дисконтирования $\alpha = 0{,}9$.

7. ЗАДАЧИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ РИСКА И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Выше (см. 1) мы говорили о том, что один из принципов классификации *задач исследования операций* связан с типом *информационного состояния „лица, принимающего решения"*. В соответствии с этим принципом все *задачи исследования операций* могут быть разбиты на три класса: *детерминированные*, *стохастические* и *неопределенные*.

Детерминированные задачи исследования операций возникают лишь при наличии всей необходимой информации. Поэтому их также называют ***задачами принятия решений в условиях определенности***.

Ограниченность или неточность информации приводит к одной из двух возможных ситуаций: 1) принятие решений в ***условиях риска*** (*задачи принятия решений в условиях риска*); 2) принятие решений в ***условиях неопределенности*** (*задачи принятия решений в условиях неопределенности*). В первом случае степень неполноты исходной информации находит свое отражение в виде законов распределения случайных величин, входящих в стохастические модели принятия решений. Во втором случае априорная информация о законах распределения соответствующих случайных величин не известна.

Таким образом, по отношению к исходной информации определенность и неопределенность представляют собой два крайних случая, а риск определяет промежуточную ситуацию.

В данной книге мы уделили значительное внимание задачам принятия решений в условиях определенности и рассмотрели один из важнейших классов задач принятия решений в условиях риска — *марковские задачи принятия решений*. В настоящей главе мы ознакомимся с общими положениями теории принятия решений в условиях риска и неопределенности, т.е. в условиях неполной информации. При этом мы не будем касаться задач принятия решений в условиях неопределенности, в которых „лицу, принимающему решения", противостоит мыслящий противник. Теория, в которой рассматриваются подобные задачи принятия решений, известна как *теория игр* (см. **8**).

7.1. Одноэтапные процедуры принятия решений в условиях риска

При анализе *марковских моделей принятия решений* (см. **6**) в качестве *принципа оптимальности*, формально совпадающего с *критерием оптимальности*, был использован критерий максимальности ожидаемой прибыли. В общем случае в *задачах принятия решений в условиях риска* используют и другие принципы оптимальности, которые, как правило, базируются на следующих характеристиках:

1) ожидаемое значение доходов, расходов и т.п.;
2) комбинация ожидаемого значения и его дисперсии;
3) заданный предельный уровень ожидаемого значения;
4) наиболее вероятное событие в будущем.

Основная цель этого параграфа заключается в анализе скалярных критериев, наиболее часто используемых при принятии решений в условиях риска, с тем чтобы для каждого из них определить области не только возможного, но и наиболее целесообразного применения.

Критерий ожидаемого значения. Использование этого критерия, обусловленное стремлением максимизировать ожидаемую прибыль или минимизировать ожидаемые затраты, представляет собой естественный переход в задачах принятия решений от условий определенности к условиям риска. Количественно критерий ожидаемого значения можно выразить в денежных единицах или в ***единицах полезности денег***. Для уяснения принципиального различия между денежной единицей и единицей полезности денег обратимся к следующему примеру.

Пример 7.1. Предположим, что инвестиции в 20 000 денежных единиц с равными вероятностями дают либо нулевой доход, либо доход в 100 000 денежных единиц. В этом случае ожидаемый доход составляет

$$100000 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0{,}5 - 20000 = 30000$$

денежных единиц и на первый взгляд может показаться, что решение о вложении 20 000 денежных единиц является оптимальным. В действительности же подобное решение является приемлемым не для всех инвесторов.

Например, инвестор A может полагать, что из-за ограниченности наличных средств потеря 20 000 денежных единиц может привести его к банкротству, и, возможно, предпочтет не вкладывать деньги при сложившихся обстоятельствах. Напротив, инвестор B, располагающий бездействующим капиталом, значительно превышающим необходимую наличность, может охотно пойти на риск.

Этот простой пример иллюстрирует значение отношения *„лица, принимающего решения“*, к ценности или полезности денег. Данный фактор можно проиллюстрировать еще более наглядно, если вновь обратиться к инвестору A.

Предположим, что инвестор A не желает рисковать суммой более чем в 5 000 денежных единиц и у него есть две возможности: 1) вложить 20 000 и с равными вероятностями получить либо 100 000, либо 0; 2) вложить 5 000 и с вероятностью 0,5 получить либо 23 000, либо с той же вероятностью ничего не получить. Из этих условий следует, что инвестору ничего не остается, как выбрать второе решение, хотя ожидаемая в этом случае прибыль

$$23000 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0{,}5 - 5000 = 6500$$

много меньше, чем при выборе первого решения. #

Рассмотренный пример показывает, что полезность денег не обязательно пропорциональна их количеству. Отметим также, что понятие полезности сложно формализовать. На практике влияние полезности денег может быть отражено введением дополнительных ограничений, отражающих поведение „лица, принимающего решения“. Эта ситуация встретилась в примере 7.1, в котором был введен максимальный уровень потерь, приемлемый для инвестора A.

Итак, в общем случае нецелесообразно использовать ожидаемое значение стоимостного выражения как единственный критерий. Экстремальное значение зтого критерия может служить лишь ориентиром, а окончательное решение может быть принято только с учетом всех существующих факторов, определяющих отношение „лица, принимающего решения“, к полезности денег.

Остановимся на формальном аспекте практического использования скалярного критерия типа „ожидаемое значение“ в задачах принятия решений в условиях риска. Пусть $Q_n(\xi) = (\xi_1(\omega)\ \xi_2(\omega)\ \ldots\ \xi_n(\omega))^{\mathrm{T}}$ — случайная выборка объема n из генеральной совокупности случайной величины $\xi(\omega)$, имеющей математическое ожидание m и дисперсию σ^2, т.е. $\mathbf{M}[\xi(\omega)] = m$ и $\mathbf{D}[\xi(\omega)] = \sigma^2$. В этом случае выборочное среднее

$$\bar{\xi}(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k(\omega)$$

обладает следующими числовыми характеристиками [XVII]: $\mathbf{M}[\bar{\xi}(\omega)] = m$, $\mathbf{D}[\bar{\xi}(\omega)] = \sigma^2/n \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, использование критерия „ожидаемое значение“ допустимо лишь тогда, когда одно и то же решение приходится принимать достаточно большое число раз (значение n велико). Тогда случайная величина $\bar{\xi}(\omega)$ начинает проявлять свойство устойчивости, являющееся основным содержанием закона больших чисел [XVI], и для любого $\varepsilon > 0$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left[|\bar{\xi}(\omega) - m| < \varepsilon\right] = 1.$$

Пример 7.2. Каждый из n однотипных станков ремонтируется индивидуально, если он остановился из-за неисправности, а через T единичных временных интервалов производится профилактический ремонт всех n станков. Необходимо найти оптимальное значение T, при котором минимизируются общие затраты на ремонт вышедших из строя станков и профилактический ремонт в расчете на один единичный временной интервал.

Пусть p_k — вероятность выхода из строя одного станка в k-м единичном временном интервале, $k = \overline{1, T}$, а n_k — число станков, вышедших из строя в k-м единичном временном интервале. Из условий рассматриваемой задачи следует, что $n_k = n_k(\omega)$ — дискретная случайная величина, распределенная по биномиальному закону с параметрами n, p_k и математическим ожиданием $\mathbf{M}[n_k(\omega)] = np_k$ [XVI]. Пусть далее C_1 — затраты на ремонт одного вышедшего из строя станка, а C_2 — затраты на профилактический ремонт одного станка. Тогда общие затраты на ремонт вышедших из строя станков и профилактический ремонт в расчете на один единичный временной интервал представляют собой случайную величину

$$C_{[T]}(\omega) = \frac{1}{T}\Big(C_1 \sum_{k=1}^{T} n_k(\omega) + C_2 n\Big).$$

Применение критерия ожидаемого значения в рассматриваемом случае будет оправданным, если станки рассчитаны на длительную эксплуатацию. При этом ожидаемые затраты на один единичный временной интервал составят

$$\mathbf{M}\big[C_{[T]}(\omega)\big] = \frac{1}{T}\Big(C_1 \sum_{k=1}^{T} \mathbf{M}[n_k(\omega)] + C_2 n\Big) = \frac{n}{T}\Big(C_1 \sum_{k=1}^{T} p_k + C_2\Big).$$

Для иллюстрации проведенных рассуждений в табл. 7.1 приведены вероятности p_k выхода из строя одного станка и результаты расчетов ожидаемых затрат на один единичный временной интервал при $C_1 = 100$, $C_2 = 10$ и $n = 50$, из которых следует, что оптимальное значение T равно 3, т.е. профилактический ремонт нужно проводить через три единичных временных интервала. #

Таблица 7.1

T	k	p_k	$\sum_{k=1}^{T} p_k$	$\mathbf{M}[C_{[T]}(\omega)]$
1	1	0,05	0,05	750
2	2	0,07	0,12	550
3	3	0,10	0,22	533
4	4	0,13	0,35	562
5	5	0,18	0,53	630

Критерий „ожидаемое значение — дисперсия“. При анализе критерия ожидаемого значения мы выяснили, что его использование в задачах принятия решений в условиях риска оправдано лишь для многократно повторяющихся ситуаций. А так как этот критерий является весьма удобным при решении практических задач, в чем мы имели возможность убедиться при изучении марковских моделей принятия решений, то попытаемся адаптировать его для редко повторяющихся ситуаций.

Предположим, что величина дохода $\xi(\omega)$ является случайной величиной с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2. Введем ***функцию полезности дохода*** $\varphi(\xi(\omega))$. Мы не будем обсуждать это трудно формализуемое понятие, а сошлемся на специальную литературу*: функция полезности нужна нам лишь для обоснования вида конструируемого критерия. Считая, что скалярная функция $\varphi(x)$ является достаточно гладкой в некоторой окрестности точки $x = m$, приближенно представим функцию полезности дохода по формуле Тейлора:

$$\varphi(\xi(\omega)) \approx \varphi(m) + \varphi'(m)(\xi(\omega) - m) + \frac{1}{2}\varphi''(m)(\xi(\omega) - m)^2.$$

*См.: Исследование операций: модели и применение / Под ред. *Д. Моудера* и *С. Элмаграби.*

Таким образом, ожидаемое значение функции полезности дохода определяется следующим приближенным равенством:

$$\mathbf{M}[\varphi(\xi(\omega))] \approx \varphi(m) + \frac{1}{2}\varphi''(m)\sigma^2.$$

Полученное соотношение указывает на то, что целесообразно учитывать не только ожидаемую прибыль, но и ее дисперсию.

Из-за сложностей формализации понятия функции полезности дохода в задачах принятия решений в условиях риска для редко повторяющихся ситуаций, как правило, используют не критерий ожидаемого значения функции полезности дохода, а ***критерий „ожидаемое значение — дисперсия“***

$$\mathbf{M}[\xi(\omega)] - K\,\mathbf{D}[\xi(\omega)] \to \max\ (\min),$$

где значение параметра K интерпретируют как ***уровень несклонности к риску***.

Так, например, если случайная величина $\xi(\omega)$ представляет собой прибыль, инвестор, особенно остро реагирующий на возможные большие отклонения прибыли вниз от ее ожидаемого значения, может выбрать большое значение K. Это придаст больший вес дисперсии и приведет к решению, уменьшающему вероятность большой потери прибыли.

Пример 7.3. Вернемся к примеру 7.2, но вместо критерия ожидаемого значения воспользуемся критерием „ожидаемое значение — дисперсия“. Для этого нам необходимо определить дисперсию затрат на один единичный временной интервал:

$$C_{[T]}(\omega) = \frac{1}{T}\Big(C_1 \sum_{k=1}^{T} n_k(\omega) + C_2 n\Big),$$

где $\{n_k(\omega)\}$ — независимые случайные величины, распределенные по биномиальному закону с математическим ожиданием $\mathbf{M}[n_k(\omega)] = np_k$ и дисперсией $\mathbf{D}[n_k(\omega)] = np_k(1-p_k)$, $k = \overline{1,T}$.

Следовательно [XVI],

$$\mathbf{D}\left[C_{[T]}(\omega)\right] = \frac{C_1^2}{T^2}\sum_{k=1}^{T}\mathbf{D}\left[n_k(\omega)\right] =$$

$$= \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 n\sum_{k=1}^{T}p_k(1-p_k) = n\left(\frac{C_1}{T}\right)^2\left(\sum_{k=1}^{T}p_k - \sum_{k=1}^{T}p_k^2\right),$$

и в рассматриваемом случае (см. пример 7.2) критерий „ожидаемое значение — дисперсия" имеет вид

$$\mathbf{M}\left[C_{[T]}(\omega)\right] + K\,\mathbf{D}\left[C_{[T]}(\omega)\right] =$$

$$= \frac{n}{T}\left(C_1\sum_{k=1}^{T}p_k + C_2\right) + Kn\left(\frac{C_1}{T}\right)^2\left(\sum_{k=1}^{T}p_k - \sum_{k=1}^{T}p_k^2\right) \to \min_{T\geqslant 1}.$$

Обратим внимание на то, что в данном случае $\mathbf{M}[C_{[T]}(\omega)]$ суммируется с $K\,\mathbf{D}[C_{[T]}(\omega)]$, так как речь идет о затратах, выражаемых этой суммой, и смысл задачи — свести затраты к минимуму.

В табл. 7.2 приведены результаты расчетов для задачи из примера 7.2, выполненных с использованием критерия „ожидаемое значение — дисперсия" и данных из табл. 7.1.

Таблица 7.2

T	k	p_k	$\mathbf{M}[C_{[T]}(\omega)]$	$\mathbf{D}[C_{[T]}(\omega)]$	M/D	$M+D$
1	1	0,05	750	23750	0,03	24500
2	2	0,07	550	14075	0,04	14625
3	3	0,10	533	11256	0,05	11789
4	4	0,13	562	9866	0,06	10428
5	5	0,18	630	9266	0,07	9896

В данном случае

$$\frac{\mathbf{M}[C_{[T]}(\omega)]}{\mathbf{D}[C_{[T]}(\omega)]} < 0{,}07$$

для $T = \overline{1,5}$, и характер изменения значений используемого критерия в зависимости от T в значительной степени будет определяться параметром K, интерпретируемым как уровень несклонности к риску. Если считать $K = 1$ (это означает „равноправность" математического ожидания и дисперсии), то в сумме математического ожидания и дисперсии последняя подавляет математическое ожидание (см. табл. 7.2) и оптимальным становится решение $T^* = 5$, отличное от полученного с помощью критерия ожидаемого значения (см. пример 7.2). #

Рассмотренный пример является наглядной иллюстрацией того, что корректное использование критерия „ожидаемое значение — дисперсия" при принятии решений в условиях риска проблематично. Эффектность практического применения этого критерия в значительной степени связана с обоснованным назначением уровня несклонности к риску, что весьма затруднительно. В основном это связано с тем, что компоненты критерия „ожидаемое значение — дисперсия" не являются нормированными (см. табл. 7.2).

Замечание 7.1. Для случайной величины $\xi(\omega)$ с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2, согласно второму неравенству Чебышева [XVI], имеем

$$\mathbf{P}\big[|\xi(\omega) - m| < 3\sigma\big] \geqslant \frac{8}{9} \approx 0{,}89.$$

Поэтому в задаче из примера 7.2 в качестве критерия оптимальности можно использовать минимум функционала

$$f(T) = \mathbf{M}\big[C_{[T]}(\omega)\big] + 3\sqrt{\mathbf{D}\big[C_{[T]}(\omega)\big]}\,.$$

В этом случае, согласно данным табл. 7.2, имеем $f(1) \approx 1212$; $f(2) \approx 906$; $f(3) \approx 851$; $f(4) \approx 860$; $f(5) \approx 919$. Оптимальным является решение $T^* = 3$, которому соответствует минимальное значение функционала $f(T)$.

Критерий предельного уровня. Рассмотрим ситуацию, когда на продажу выставлен подержанный автомобиль. Указав предлагаемую цену, продавец должен в разумно короткий срок решить, приемлема ли она для него. С этой целью он может установить цену, ниже которой автомобиль не может быть продан (предельный уровень), и согласиться с первым же предложением цены, превышающим этот уровень.

В рассмотренной *одношаговой процедуре принятия решений* использован критерий, который называют ***критерием предельного уровня***. Использование критерия предельного уровня при принятии решений в условиях риска в общем случае не приводит к нахождению *оптимального решения*, например, максимизирующего прибыль или минимизирующего затраты. Скорее, он соответствует определению приемлемого способа действий. Действительно, если вернуться к ситуации с продажей подержанного автомобиля, то можно заметить, что одно из последующих предложений может оказаться более выгодным, чем первое предложение цены, превышающее предельный уровень.

Одним из преимуществ критерия предельного уровня является то, что его практическое использование не предполагает обязательного знания законов распределения соответствующих случайных величин. Однако знание этих законов позволяет не только избежать трудностей, связанных с формализацией различных понятий, но и более обоснованно назначать предельный уровень.

Пример 7.4. Пусть величина спроса в единицу времени на некоторый товар, называемая интенсивностью спроса, является случайной величиной $\xi(\omega)$ с функцией плотности вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{20}{x^2}, & x \in [10,20]; \\ 0, & x \notin [10,20]. \end{cases}$$

Если в начальный момент времени запасы товара невелики, то в дальнейшем возможен дефицит товара, выражаемый случайной величиной $\alpha(\omega)$. В противном случае к концу рассматриваемого периода запасы нереализованного товара могут оказаться слишком большими, т.е. могут образоваться излишки, которые выражаются случайной величиной $\beta(\omega)$. В обоих случаях неизбежны потери. В первом случае уменьшается потенциальная прибыль и возможна потеря клиентов, а во втором случае возрастают издержки, связанные с приобретением товара, и затраты на его складирование.

Возможный компромисс состоит в выборе решения, устанавливающего определенный баланс между двумя видами потерь. Определить потери, вызванные дефицитом товара, весьма сложно. Поэтому „лицо, принимающее решения", может установить необходимый уровень запасов L таким образом, чтобы величина ожидаемого дефицита не превышала A, а величина ожидаемых излишков не превосходила B. Таким образом, в рассматриваемом случае

$$\mathbf{M}[\alpha(\omega)] = \int_{L}^{\infty} (x - L)\, f(x)\, dx \leqslant A,$$

$$\mathbf{M}[\beta(\omega)] = \int_{-\infty}^{L} (L - x)\, f(x)\, dx \leqslant B.$$

При этом из вида функции плотности вероятностей $f(x)$ вытекает, что L принадлежит отрезку $[10, 20]$ и, как следствие,

$$20\left(\ln\frac{20}{L} + \frac{L}{20} - 1\right) \leqslant A, \quad 20\left(\ln\frac{10}{L} + \frac{L}{10} - 1\right) \leqslant B,$$

или, что то же самое,

$$\ln L - 0{,}05L \geqslant \ln 20 - 0{,}05A - 1,$$

$$\ln L - 0{,}1L \geqslant \ln 10 - 0{,}1B - 1.$$

Предельные значения A ожидаемого дефицита и B ожидаемых излишков должны быть выбраны так, чтобы оба полученных неравенства удовлетворялись хотя бы для одного значения

L. Так, например, если $A = 2$ и $B = 4$, то неравенства для определения необходимого уровня запасов L принимают следующий вид:

$$\ln L - 0{,}05L \geqslant 1{,}896, \quad \ln L - 0{,}1L \geqslant 1{,}102.$$

Значение L принадлежит отрезку $[10, 20]$, так как именно в этом диапазоне изменяется величина спроса в единицу времени. Результаты расчетов, содержащиеся в табл. 7.3, показывают, что оба ограничения удовлетворяются для любого $L \in [13, 17]$, т.е. любые значения L из замкнутого интервала $[13, 17]$ удовлетворяют условиям исходной задачи. #

Таблица 7.3

L	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\ln L - 0{,}05L$	1,80	1,84	1,88	1,91	1,94	1,96	1,97	1,98	1,99	1,99	1,99
$\ln L - 0{,}1L$	1,30	1,29	1,28	1,26	1,24	1,21	1,17	1,13	1,09	1,04	0,99

В общем случае критерий предельного уровня может быть использован и в *задачах принятия решений в условиях неопределенности.*

Критерий наиболее вероятного исхода. В основе этого критерия лежит преобразование случайной ситуации к детерминированной путем замены случайной величины ее единственно возможным значением, имеющим наибольшую вероятность реализации.

Пример 7.5. Если доход C от некоторого изделия представляет собой дискретную случайную величину $C(\omega)$ с множеством возможных значений $\{C_k\}_{k=1}^{N}$, то величина C_*, такая, что

$$\mathbf{P}\big[C(\omega) = C_*\big] = \max_{k=\overline{1,N}} \mathbf{P}\big[C(\omega) = C_k\big],$$

может рассматриваться как детерминированное значение дохода от этого изделия. #

Критерий наиболее вероятного исхода можно рассматривать как упрощенный вариант некоторого более сложного критерия для принятия решений в условиях риска. Но это упрощение не связано с чисто аналитическими соображениями, а обусловлено прежде всего тем, что с практической точки зрения знание наиболее вероятного исхода обеспечивает потребность в информации для принятия решений.

При использовании критерия наиболее вероятного исхода для принятия решений в условиях риска необходимо помнить о том, что, как и другие рассмотренные критерии, он не является универсальным. Чтобы понять это, достаточно представить две элементарные ситуации:

1) $\xi(\omega)$ — дискретная случайная величина, принимающая значения X_k, общее количество n которых велико, причем $\mathbf{P}[\xi(\omega) = X_k] \leqslant 0{,}05$, $k = \overline{1, n}$;

2) наибольшую вероятность реализации имеют несколько возможных значений дискретной случайной величины.

В обоих случаях критерий наиболее вероятного исхода явно не годится для принятия обоснованного решения.

7.2. Использование экспериментальных данных при принятии решений в условиях риска

При формализации *задач принятия решений в условиях риска*, т.е. при построении ***стохастических моделей принятия решений***, предполагается, что законы распределения соответствующих случайных величин либо известны, либо могут быть определены (см. примеры 7.2, 7.4). Эти законы распределения называют ***априорными***. Но бывают ситуации, когда в процессе принятия решений появляется возможность проведения эксперимента над изучаемой системой с целью получения дополнительной информации и уточнения априорных законов распределения. Законы распределения случайных величин, полученные с использованием экспериментальных данных, называют ***апостериорными***.

В общем случае привлечение дополнительной информации экспериментального характера при принятии решений в условиях риска может оказать зна́чимое влияние на выбор обоснованного решения. Проиллюстрируем это утверждение следующим примером.

Пример 7.6. Предположим, что предприятие выпускает некоторую продукцию партиями фиксированного размера с фиксированным предельно допустимым процентом бракованных изделий. Но из-за случайных сбоев в технологическом процессе возможен выпуск партии с недопустимо высоким процентом бракованных изделий. Для удобства дальнейших рассуждений введем случайные события:

H_1 — число бракованных изделий в партии является допустимым;

H_2 — число бракованных изделий в партии недопустимо велико;

η — наудачу извлеченное изделие бракованное.

Будем считать известными априорные вероятности

$$\mathbf{P}[H_1]=0{,}95,\quad \mathbf{P}[\eta\,|\,H_1]=0{,}04,\quad \mathbf{P}[H_2]=0{,}05,\quad \mathbf{P}[\eta\,|\,H_2]=0{,}15,$$

где случайные события H_1 и H_2 образуют полную группу случайных событий, а $\mathbf{P}[\eta\,|\,H_k]$ обозначает вероятность того, что наудачу извлеченное изделие из партии с допустимым $(k=1)$ или недопустимым $(k=2)$ процентом бракованных изделий окажется бракованным.

Производителю известно, что при отправке потребителю партии с недопустимо большим числом бракованных изделий он будет оштрафован. Но при использовании критерия наиболее вероятного исхода производитель может сделать вывод, что вероятность выпуска партии с недопустимо большими числом бракованных изделий $\mathbf{P}[H_2]=0{,}05$ слишком мала и для отправки потребителю можно выбрать любую партию без дополнительного контроля.

Теперь предположим, что сумма штрафа достаточно велика и перед отправкой партии потребителю производитель решил случайным образом проверить два изделия из этой партии с целью получения дополнительной информации. Возможные результаты эксперимента таковы:

α_1 — оба изделия доброкачественные;

α_2 — лишь одно изделие доброкачественное;

α_3 — оба изделия бракованные.

При этом с учетом априорных вероятностей $\mathbf{P}[\eta\,|\,H_1]=0{,}04$, $\mathbf{P}[\eta\,|\,H_2]=0{,}15$ и случайной выборки объема 2 из генеральной совокупности биномиально распределенной случайной величины (вид распределения случайной величины вытекает из предложенной схемы контроля), можно вычислить условные вероятности исходов:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[\alpha_1\,|\,H_1] &= C_2^2\,0{,}96^2\cdot 0{,}04^0 = 0{,}922,\\
\mathbf{P}[\alpha_1\,|\,H_2] &= C_2^2\,0{,}85^2\cdot 0{,}15^0 = 0{,}722,\\
\mathbf{P}[\alpha_2\,|\,H_1] &= C_2^1\,0{,}96^1\cdot 0{,}04^1 = 0{,}077,\\
\mathbf{P}[\alpha_2\,|\,H_2] &= C_2^1\,0{,}85^1\cdot 0{,}15^1 = 0{,}256,\\
\mathbf{P}[\alpha_3\,|\,H_1] &= C_2^0\,0{,}96^0\cdot 0{,}04^2 = 0{,}002,\\
\mathbf{P}[\alpha_3\,|\,H_2] &= C_2^0\,0{,}85^0\cdot 0{,}15^2 = 0{,}022.
\end{aligned}$$

Далее по формуле Байеса [XVI]

$$\mathbf{P}[H_i\,|\,\alpha_k] = \frac{\mathbf{P}[\alpha_k\,|\,H_i]\,\mathbf{P}[H_i]}{\mathbf{P}[\alpha_k\,|\,H_1]\,\mathbf{P}[H_1]+\mathbf{P}[\alpha_k\,|\,H_2]\,\mathbf{P}[H_2]},$$

$$i=1,2,\qquad k=1,2,3,$$

могут быть вычислены апостериорные вероятности

$$\begin{gathered}
\mathbf{P}[H_1\,|\,\alpha_1]=0{,}960,\quad \mathbf{P}[H_1\,|\,\alpha_2]=0{,}851,\quad \mathbf{P}[H_1\,|\,\alpha_3]=0{,}575,\\
\mathbf{P}[H_2\,|\,\alpha_1]=0{,}040,\quad \mathbf{P}[H_2\,|\,\alpha_2]=0{,}149,\quad \mathbf{P}[H_2\,|\,\alpha_3]=0{,}425.
\end{gathered}$$

Таким образом, если оба проверенных изделия окажутся доброкачественными, т.е. при реализации случайного события α_1, то вероятность того, что число бракованных изделий в партии является допустимым, равна 0,96. Если же оба проверенных изделия окажутся бракованными, т.е. при реализации случайного события α_3, то вероятности пригодности (случайное событие H_1) или непригодности партии (случайное событие H_2) являются сопоставимыми.

Рассмотренный пример наглядно показывает, что окончательное решение может существенно зависеть от результатов дополнительного контроля, т.е. дополнительной информации экспериментального характера.

7.3. Многоэтапные процедуры принятия решений в условиях риска

Выше (см. **7.1**) были рассмотрены *одноэтапные процедуры принятия решений* в *условиях риска* на основе различных скалярных *критериев*. При их реализации предполагают, что решения, принимаемые в будущем, не зависят от решений, принимаемых в настоящий момент времени. Примеры многоэтапных процедур принятия решений в условиях риска дают *марковские модели принятия решений*.

В этом параграфе рассмотрен многоэтапный процесс принятия решений в условиях риска, в котором взаимозависимые решения принимаются последовательно. Подобные процедуры могут быть представлены графически с помощью так называемого *дерева решений*, использование которого существенно упрощает формализованное описание самого процесса принятия решений в условиях риска. Мы не будем останавливаться на строгом определении понятия дерева решений с позиции теории *графов**, так как содержательный смысл и принцип использования дерева решений наглядно показаны в следующем примере.

---

*См., например: Исследование операций: модели и применение / Под ред. *Д. Моудера* и *С. Элмаграби*.

Пример 7.7. Фирма может принять решение о строительстве крупного или небольшого предприятия. Небольшое предприятие впоследствии может быть расширено. Принимаемое решение определяется в основном будущим спросом на продукцию, которую предполагается выпускать на сооружаемом предприятии. Строительство крупного предприятия экономически оправдано при высоком уровне спроса. Однако можно построить небольшое предприятие и через два года принять решение о его расширении.

В рассматриваемом случае процедура принятия решений состоит из двух этапов. На первом этапе принимается решение о строительстве либо крупного, либо небольшого предприятия. Если на первом этапе принято решение о строительстве небольшого предприятия, то на втором этапе (через два года) принимается или не принимается решение о его расширении.

На рис. 7.1 исходная задача представлена в виде дерева решений. Предполагается, что спрос на продукцию, которая будет выпускаться предприятием, может быть либо высоким (с вероятностью $p = 0{,}75$), либо низким (с вероятностью $p = 0{,}25$). Дерево решений имеет два типа вершин: ***решающие вершины***, которые изображены в виде квадрата, и ***случайные вершины***, изображенные в виде круга. Разветвление с решающей вершины 1 означает принятие решения относительно размеров вводимого в строй предприятия. Случайная вершина 2 соответствует реализации одного из двух вариантов спроса на выпускаемую продукцию (высокий и низкий), что диктуется ситуацией, сложившейся на рынке. Каждый из возможных вариантов отмечен значением его вероятности. Случайная вершина 3 реализует аналогичное разветвление для принятого решения о строительстве небольшого предприятия.

Естественно, что фирма будет рассматривать вопрос о расширении небольшого предприятия лишь в случае, если по истечении двух лет на выпускаемую продукцию установится высокий уровень спроса. Решающая вершина 4 отражает это решение, из нее выходят две ветви, соответствующие возмож-

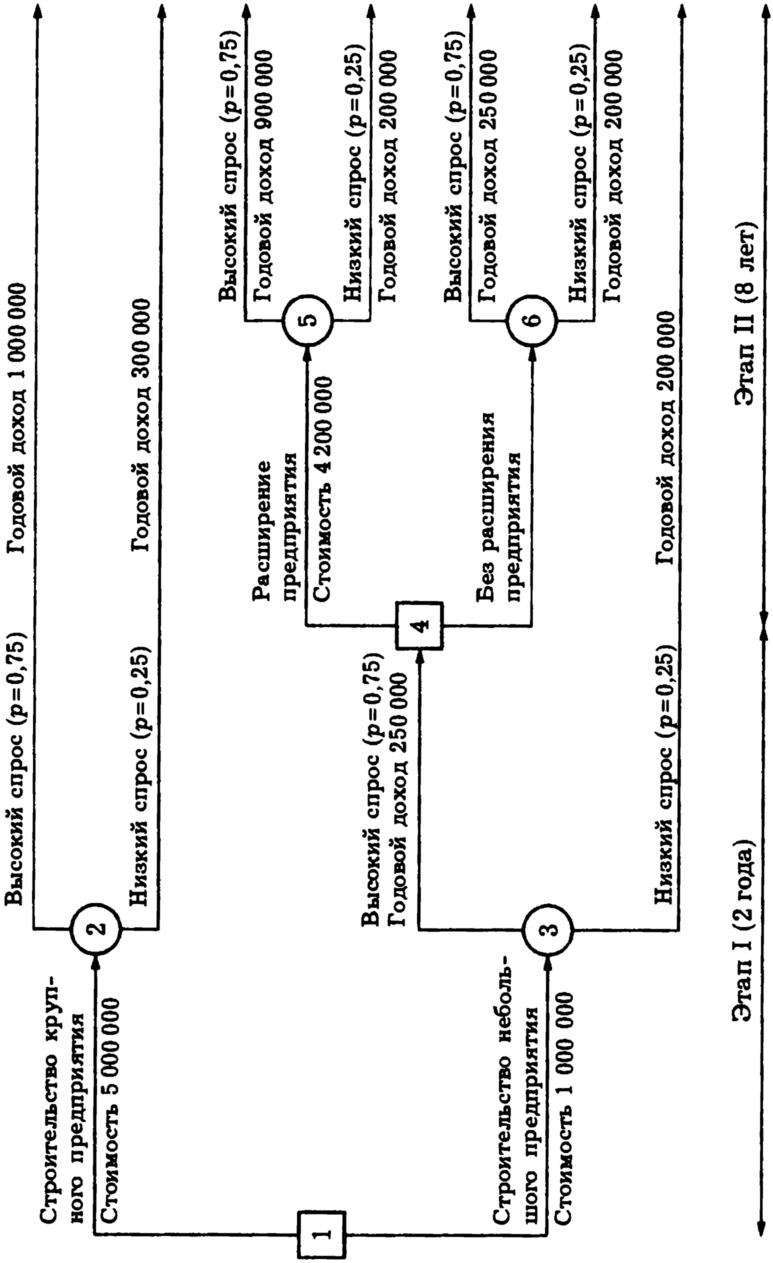

1
Строительство крупного предприятия
Стоимость 5 000 000
2
Высокий спрос (p=0,75)
Годовой доход 1 000 000
Низкий спрос (p=0,25)
Годовой доход 300 000
Строительство небольшого предприятия
Стоимость 1 000 000
3
Высокий спрос (p=0,75)
Годовой доход 250 000
4
Расширение предприятия
Стоимость 4 200 000
5
Высокий спрос (p=0,75)
Годовой доход 900 000
Низкий спрос (p=0,25)
Годовой доход 200 000
Без расширения предприятия
6
Высокий спрос (p=0,75)
Годовой доход 250 000
Низкий спрос (p=0,25)
Годовой доход 200 000
Низкий спрос (p=0,25)
Годовой доход 200 000
Этап I (2 года)
Этап II (8 лет)

Рис. 7.1

ным решениям: „расширять“ и „не расширять“. Случайные вершины 5 и 6 имеют по две выходящие ветви и соответствуют двум возможным уровням спроса.

Для принятия решений необходима следующая информация: 1) о вероятности реализации каждого из возможных вариантов, изображенных ветвями, выходящими из случайных вершин; 2) о доходах или расходах (в денежных единицах), получаемых при реализации каждого допустимого решения. Далее будем предполагать, что для выбора *оптимального решения* фирма планирует использовать *критерий* суммарного *ожидаемого значения* прибыли за 10 лет. Анализ рыночной ситуации, возможных доходов и затрат отражен на рис. 7.1.

Вычисления начинаем с этапа 2, с последующим переходом к этапу 1. Для последних восьми лет планового периода решения, относящиеся к вершине 4, оценивают следующим образом (в денежных единицах):

$$\mathbf{M}[\text{прибыль}\,|\,\text{расширение}] = \\ = (900\,000\cdot 0{,}75 + 200\,000\cdot 0{,}25)\cdot 8 - 4\,200\,000 = 1\,600\,000,$$

$$\mathbf{M}[\text{прибыль}\,|\,\text{без расширения}] = \\ = (250\,000\cdot 0{,}75 + 200\,000\cdot 0{,}25)\cdot 8 = 1\,900\,000.$$

Таким образом, в вершине 4 выгоднее принять решение о нерасширении предприятия. В этом случае ожидаемая прибыль составит 1 900 000 денежных единиц.

Оставляем одну ветвь, выходящую из решающей вершины 4, которой соответствует ожидаемая прибыль в 1 900 000 денежных единиц, и переходим к вычислениям, относящимся к решающей вершине 1 (в денежных единицах):

$$\mathbf{M}[\text{прибыль}\,|\,\text{крупное предприятие}] = \\ = (1\,000\,000\cdot 0{,}75 + 300\,000\cdot 0{,}25)\cdot 10 - 5\,000\,000 = 3\,250\,000,$$

$$\mathbf{M}[\text{прибыль}\,|\,\text{небольшое предприятие}] = (250000\cdot 0{,}75\cdot 2 + \\ + 1\,900\,000 + 200\,000\cdot 0{,}25\cdot 10 - 1\,000\,000) = 1\,775\,000.$$

Таким образом, в вершине 1 оптимальным является решение о строительстве крупного предприятия, исключающее необходимость принятия решений в вершине 4. #

В заключение заметим, что эффективность практического использования деревьев решений в многоэтапных процедурах принятия решений в условиях риска заметно возрастает по мере усложнения задачи. Эти усложнения находят свое отражение в расширении множества *допустимых решений*, увеличении числа этапов и числа решающих и случайных вершин дерева решений, а также в увеличении числа ветвей, выходящих из случайных вершин. Во всем этом нетрудно убедиться, проанализировав содержательные примеры из специальной литературы*.

7.4. Одноэтапные процедуры принятия решений в условиях неопределенности

При анализе *одноэтапных процедур принятия решений* в *условиях риска* мы уже отмечали, что практическое применение *критерия предельного уровня* в общем случае не предполагает знания законов распределения случайных величин. Поэтому критерий предельного уровня может использоваться и при принятии решений в условиях неопределенности. В этом параграфе мы рассмотрим критерии, наиболее часто применяемые на практике:

1) *критерий Лапласа*;
2) *минимаксный* (*максиминный*) *критерий*;
3) *критерий Сэвиджа*;
4) *критерий Гурвица.*

Основное различие между критериями, перечисленными выше, определяется стратегией поведения *„лица, принимающего*

*См.: *Вагнер Г.*, а также: Исследование операций: модели и применение / Под ред. *Д. Моудера* и *С. Элмаграби.*

решения", в условиях неопределенности. Так, например, критерий Лапласа базируется на более оптимистичных предположениях, чем минимаксный критерий, а критерий Гурвица, в свою очередь, можно использовать при различных подходах: от наиболее пессимистичного до наиболее оптимистичного. Таким образом, перечисленные критерии, несмотря на их количественную природу, отражают субъективную оценку ситуации, в которой приходится принимать решения.

К сожалению, не существует общих правил оценки практической применимости того или иного критерия при принятии решений в условиях неопределенности. Скорее всего, это связано с тем, что поведение „лица, принимающего решения", обусловленное неопределенностью ситуации, по всей видимости, является наиболее важным фактором при выборе подходящего критерия.

Напомним, что мы рассматриваем задачи принятия решений в условиях неопределенности, когда выбор решения из множества G *допустимых решений* осуществляется одним лицом. Специфической особенностью этих задач является отсутствие у „лица, принимающего решения", разумного противника. В случае, когда в роли противника выступает „природа", нет оснований предполагать, что она стремится принести вред „лицу, принимающему решения".

Информация, необходимая для принятия решений в условиях неопределенности, обычно представляется в форме матрицы, i-я строка которой соответствует решению X_i из множества допустимых решений $G = \{X_k\}_{k=1}^N$, а j-й столбец соответствует состоянию S_j изучаемой системы S с множеством возможных состояний $\{S_n\}_{n=1}^m$. Каждому допустимому решению $X_i \in G$ и каждому возможному состоянию S_j изучаемой системы S соответствует результат

$$\nu_{ij} \equiv \nu(X_i, S_j), \quad i = \overline{1, N}, \ j = \overline{1, m},$$

определяющий выигрыш или потери при принятии данного решения и реализации данного состояния. Таким образом, если множество G допустимых решений состоит из N элементов, а система S может находиться в любом из m возможных состояний, то матрица

$$N(G,S) = (\nu_{ij}) \in M_{Nm}(\mathbb{R})$$

и является матрицей исходных данных для принятия решений в условиях неопределенности.

Если величина $\nu(X_i, S_j)$ определяет доход (выигрыш), обусловленный принятием решения $X_i \in G$ и реализацией системой S возможного события S_j, то матрица $N(G,S)$ является *матрицей дохода*. Если же величина $\nu(X_i, S_j)$ определяет затраты (потери, проигрыш), обусловленные принятием решения X_i и реализацией системой S возможного состояния S_j, то матрицу $N(G,S)$ называют ***матрицей потерь*** или ***матрицей затрат***.

Перейдем к рассмотрению конкретных критериев, наиболее широко используемых при принятии решений в условиях неопределенности.

Критерий Лапласа. Для обоснования этого критерия, широко используемого в задачах принятия решений в условиях неопределенности, воспользуемся следующими соображениями, отражающими основную суть ***принципа недостаточного обоснования****.

Поскольку вероятности пребывания изучаемой системы S в каждом ее возможном состоянии S_j, $j = \overline{1,m}$, не известны, то отсутствует и необходимая информация для вывода о том, что эти вероятности различны. В противном случае имела бы место ситуация принятия решений в условиях риска. Поэтому мы можем предположить равные вероятности реализации любых возможных состояний системы S. Таким образом, исходную задачу можно рассматривать как задачу принятия решений

*См.: *Таха Х.*, т. 2.

в условиях риска, когда выбирают решение $X_* \in G = \{X_i\}_{i=1}^N$, обеспечивающее наибольший ожидаемый выигрыш, т.е.

$$\max_{X_i \in G} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \nu(X_i, S_j).$$

Здесь учтено, что вероятности пребывания системы S в состояниях S_j, $j = \overline{1, m}$, одинаковы и равны $1/m$. Сформулированный критерий называют ***критерием Лапласа***.

Пример 7.8. Предприятие должно определить уровень предложения услуг таким образом, чтобы удовлетворить потребности клиентов в течение предстоящих праздников. По предварительным прогнозам число клиентов может принять одно из следующих значений:

$$S_1 = 200, \quad S_2 = 250, \quad S_3 = 300, \quad S_4 = 350.$$

Для каждого из этих возможных значений существует наилучший с точки зрения возможных затрат уровень предложений X_i, и совокупность этих уровней образует множество G из четырех элементов. Отклонения от уровней X_i приводят к дополнительным затратам либо из-за неполного удовлетворения спроса, либо из-за превышения предложения над спросом. Матрица потерь в условных денежных единицах приведена ниже:

$$N(G, S) = (\nu_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 18 & 25 \\ 8 & 7 & 8 & 23 \\ 21 & 18 & 12 & 21 \\ 30 & 22 & 19 & 15 \end{pmatrix}.$$

В данном случае $m = N = 4$, а $\nu_{ij} = \nu(X_i, S_j)$ — потери при уровне предложений X_i и реализации состояний S_j.

Имеем

$$\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4}\nu(X_1,S_j)=\frac{1}{4}(5+10+18+25)=14{,}5,$$

$$\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4}\nu(X_2,S_j)=\frac{1}{4}(8+7+8+23)=11{,}5,$$

$$\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4}\nu(X_3,S_j)=\frac{1}{4}(21+18+12+21)=18,$$

$$\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4}\nu(X_4,S_j)=\frac{1}{4}(30+22+19+15)=21{,}5.$$

Таким образом,

$$\min_{X_i\in G}\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4}\nu(X_i,S_j)=11{,}5,$$

и наилучшим уровнем предложения в соответствии с критерием Лапласа будет X_2.

Минимаксный (максиминный) критерий. Этот критерий является наиболее „осторожным", поскольку его реализация предполагает выбор наилучшей из наихудших возможностей.

Пусть $G=\{X_i\}_{i=1}^N$ — множество допустимых решений, а $\{S_j\}_{j=1}^m$ — множество возможных состояний изучаемой системы. Если $\nu(X_i,S_j)$ — потери „лица, принимающего решения", при выборе им решения $X_i\in G$ и реализации системой S возможного состояния S_j, то наибольшие потери независимо от возможных состояний будут равны

$$\max_j \nu(X_i,S_j),\quad i=\overline{1,N}.$$

По ***минимаксному критерию*** выбирают решение $X_*\in G$, обеспечивающее

$$\min_{X_i\in G}\max_{S_j}\nu(X_i,S_j).$$

Аналогично, если $\nu(X_i, S_j)$ — выигрыш, то по ***максиминному критерию*** выбирают решение $X_* \in G$, обеспечивающее

$$\max_{X_i \in G} \min_{S_j} \nu(X_i, S_j).$$

Пример 7.9. Вернемся к примеру 7.8. Так как в этом случае $\nu(X_i, S_j)$ отражают затраты, то воспользуемся минимаксным критерием. Для каждого допустимого решения X_i найдем максимальные затраты:

$$\max_{S_j} \nu(X_1, S_j) = \nu(X_1, S_4) = 25,$$

$$\max_{S_j} \nu(X_2, S_j) = \nu(X_2, S_4) = 23,$$

$$\max_{S_j} \nu(X_3, S_j) = \nu(X_3, S_1) = \nu(X_3, S_4) = 21,$$

$$\max_{S_j} \nu(X_4, S_j) = \nu(X_4, S_1) = 30.$$

Затем из полученных значений найдем минимальное:

$$\min_{X_i \in G} \max_{S_j} \nu(X_i, S_j) = \nu(X_3, S_1) = \nu(X_3, S_4) = 21.$$

Итак, оптимальным является решение X_3.

Критерий Сэвиджа. Минимаксный (максиминный) критерий является настолько „пессимистичным“, что может приводить к нелогичным выводам. Необходимость использования менее „пессимистичного“ критерия обычно иллюстрируют задачей принятия решений в условиях неопределенности с матрицей потерь

$$N(G, S) = (\nu_{ij}) = \big(\nu(X_i, S_j)\big) = \begin{pmatrix} 11000 & 90 \\ 10000 & 10000 \end{pmatrix}.$$

Применение минимаксного критерия приводит к выбору решения X_2 и потерям в 10000 при реализации системой одного из возможных состояний S_1 или S_2. Но интуитивно напрашивается вывод о целесообразности выбора решения X_1, поскольку не исключается возможность реализации состояния S_2 и $\nu(X_1,S_2)=90$.

Для устранения отмеченного недостатка минимаксного (максиминного) критерия вместо величины $\nu(X_i,S_j)$, характеризующей потери (выигрыши) при принятии решения X_i и реализации возможного состояния S_j, введем величину

$$r(X_i,S_j)=\begin{cases}\max\limits_{X_i\in G}\nu(X_i,S_j)-\nu(X_i,S_j), & \nu(X_i,S_j \text{ — доход;}\\ \nu(X_i,S_j)-\min\limits_{X_i\in G}\nu(X_i,S_j), & \nu(X_i,S_j) \text{ — потери.}\end{cases}$$

Фактически величина $r(X_i,S_j)$ выражает сожаление „лица, принимающего решения", по поводу того, что оно не выбрало наилучшее решение относительно состояния S_j изучаемой системы. Поэтому матрицу

$$R(G,S)=(r_{ij})\in M_{Nm}\mathbb{R},\quad r_{ij}=r(X_i,S_j),$$

называют ***матрицей сожалений***, а минимаксный (максиминный) критерий относительно этой матрицы — ***критерием Сэвиджа***. При использовании этого критерия:

а) если $\nu(X_i,S_j)$ — затраты, то решение выбирают из условия

$$\min_{X_i\in G}\max_{S_j} r(X_i,S_j),$$

$$r(X_i,S_j)=\nu(X_i,S_j)-\min_{X_i\in G}\nu(X_i,S_j),\quad i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,m};$$

б) если $\nu(X_i,S_j)$ — доход, то решение выбирают из условия

$$\max_{X_i\in G}\min_{S_j} r(X_i,S_j),$$

$$r(X_i,S_j)=\max_{X_i\in G}\nu(X_i,S_j)-\nu(X_i,S_j),\quad i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,m}.$$

В частности, в рассмотренном выше примере, решение которого с использованием минимаксного критерия приводило к нелогичному выводу,

$$\min_{X_i \in G} \nu(X_i, S_1) = 10000, \qquad \min_{X_i \in G} \nu(X_i, S_2) = 90,$$

и матрица сожалений имеет вид

$$R(G,S) = \begin{pmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 9910 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\max_{S_j} r(X_1, S_j) = r(X_1, S_1) = 1000,$$

$$\max_{S_j} r(X_2, S_j) = r(X_2, S_2) = 9910,$$

$$\min_{X_i \in G} \max_{S_j} r(X_i, S_j) = r(X_1, S_1) = 1000,$$

и по критерию Сэвиджа *оптимальным* является решение X_1. Заметим, что этот же результат мы получим и при использовании критерия Лапласа.

Пример 7.10. Вернемся к примеру 7.8 и запишем матрицу сожалений

$$R(G,S) = \bigl(r(X_i, S_j)\bigr) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 10 & 10 \\ 3 & 0 & 0 & 8 \\ 16 & 11 & 4 & 6 \\ 25 & 15 & 11 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем

$$\max_{S_j} r(X_1, S_j) = r(X_1, S_3) = 10, \qquad \max_{S_j} r(X_2, S_j) = r(X_2, S_4) = 8,$$

$$\max_{S_j} r(X_3, S_j) = r(X_3, S_1) = 16, \qquad \max_{S_j} r(X_4, S_j) = r(X_4, S_1) = 25,$$

$$\min_{X_i \in G} \max_{S_j} r(X_i, S_j) = r(X_2, S_4) = 8,$$

и оптимальным по критерию Сэвиджа является решение X_2, которое отличается от оптимального решения по минимаксному критерию (см. пример 7.9) и совпадает с оптимальным решением по критерию Лапласа (см. пример 7.8).

Критерий Гурвица. Этот критерий охватывает ряд подходов к принятию решений в условиях неопределенности от наиболее пессимистичного до наиболее оптимистичного. Если $N(G,S) = \big(\nu(X_i,S_j)\big) \in M_{Nm}(\mathbb{R})$ — матрица выигрышей (доходов), то наиболее оптимистичному подходу соответствует критерий

$$\max_{X_i \in G} \max_{S_j} \nu(X_i,S_j),$$

а наиболее пессимистичному — критерий

$$\min_{X_i \in G} \min_{S_j} \nu(X_i,S_j).$$

Критерий Гурвица устанавливает баланс между наиболее оптимистичным и наиболее пессимистичным подходами путем взвешивания обоих вариантов принятия решений в условиях неопределенности с весами α и $1-\alpha$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Это значит, что если $N(G,S) = \big(\nu(X_i,S_j)\big)$ — матрица выигрышей, то по критерию Гурвица выбирают решение $X_* \in G$, обеспечивающее

$$\max_{X_i \in G}\Big(\alpha \max_{S_j} \nu(X_i,S_j) + (1-\alpha)\min_{S_j} \nu(X_i,S_j)\Big).$$

Если же $N(G,S)$ — матрица затрат, то по критерию Гурвица выбирают решение $X_* \in G$, обеспечивающее

$$\min_{X_i \in G}\Big(\alpha \min_{S_j} \nu(X_i,S_j) + (1-\alpha)\max_{S_j} \nu(X_i,S_j)\Big).$$

Параметр $\alpha \in [0,1]$ называется ***показателем оптимизма***. Его значение выбирается „лицом, принимающим решения“, в зависимости от опыта принятия решений в условиях неопределенности и личных склонностей к оптимизму ($\alpha \to 1-0$) или пессимизму ($\alpha \to 0+0$). При отсутствии ярко выраженных склонностей $\alpha = 0{,}5$ представляется наиболее разумным.

Пример 7.11. Воспользуемся критерием Гурвица для решения задачи из примера 7.8, полагая $\alpha = 0{,}5$. Результаты расчетов приведены в табл. 7.4

Таблица 7.4

X_i	$\min\limits_{S_j} \nu_{ij}$	$\max\limits_{S_j} \nu_{ij}$	$\alpha \min\limits_{S_j} \nu_{ij} + (1-\alpha) \max\limits_{S_j} \nu_{ij}$
X_1	5	25	15
X_2	7	23	15
X_3	12	21	16,5
X_4	15	30	22,5

Согласно результатам расчетов, оптимальное значение по критерию Гурвица равно 15 и обеспечивается допустимыми решениями X_1 и X_2.

Вопросы и задачи

7.1. Что объединяет задачи принятия решений в условиях риска и в условиях неопределенности?

7.2. В чем заключается принципиальное различие задач принятия решений в условиях риска и в условиях неопределенности?

7.3. Укажите основные недостатки критерия ожидаемого значения. В каких ситуациях принятия решений в условиях риска целесообразно использование критерия ожидаемого значения?

7.4. Изложите принципиальную схему обоснования критерия „ожидаемое значение — дисперсия“. Почему появилась необходимость в разработке этого критерия и в чем заключается принципиальная трудность его практического использования при принятии решений в условиях риска?

7.5. Сформулируйте идею, лежащую в основе критерия предельного уровня. Возможно ли использование этого критерия при принятии решений в условиях: а) риска; б) неопределенности?

7.6. Приведите обоснование возможности практического использования критерия наиболее вероятного исхода при принятии решений в условиях риска.

7.7. Изложите принципиальную схему использования экспериментальных данных при принятии решений в условиях риска.

7.8. В чем заключается принципиальное отличие скалярных критериев, используемых при принятии решений в условиях неопределенности, от скалярных критериев, используемых при принятии решений в условиях риска?

7.9. Нужно ли в дереве решений заранее знать вероятности реализаций всех используемых случайных событий и стоимостные оценки различных допустимых решений?

7.10. Может ли в дереве решений из решающей вершины выходить более двух альтернативных ветвей?

7.11. Сформулируйте идею, лежащую в основе критерия Лапласа для принятия решений в условиях неопределенности.

7.12. Какой из известных Вам критериев для принятия решений в условиях неопределенности является: а) наиболее пессимистичным; б) наиболее оптимистичным?

7.13. Является ли истинным следующее высказывание: «Если „лицо, принимающее решения“, располагает матрицей доходов, то выбор оптимального решения по критерию Сэвиджа основывается на условиях максимина»?

7.14. Производитель выпускает партии изделий, содержащие 8, 10, 12 и 14 % брака с вероятностями 0,4, 0,3, 0,25 и 0,05 соответственно. Он связан контрактами с потребителями A, B и C, и в этих контрактах оговорено следующее:

1) процент брака для потребителей A, B и C не должен превышать 8, 12, и 14 % соответственно;

2) если процент брака превышает обусловленный, то штраф составляет 100 денежных единиц за 1 % превышения.

Кто из потребителей будет иметь наибольший приоритет при выполнении заказа, если партия не проверяется до отправки, а производство партий изделий более высокого качества, чем требуется, приводит к дополнительным затратам производителя в 50 денежных единиц за 1 %?

Ответ: потребитель B.

7.15. Автомат производит α тысяч изделий в сутки. Если α увеличивается, то возрастает и доля брака β. Функция плотности вероятностей случайной величины $\beta=\beta(\omega)$ известна:

$$f_\beta(x)=\begin{cases}\alpha x^{\alpha-1}, & x\in[0,1];\\ 0, & x\notin[0,1].\end{cases}$$

Каждое доброкачественное изделие приносит доход в 5 денежных единиц, а каждое бракованное — убыток в 50 денежных единиц. Определите значение α, при котором ожидаемый доход принимает максимальное значение.

Ответ: $\alpha=49$.

7.16. Найдите решение задачи 7.15 с использованием критерия „ожидаемое значение — дисперсия". Сравните оптимальные решения для значений показателя несклонности к риску $K=1,2,5$.

7.17. Спрос на некоторое изделие является дискретной случайной величиной, информация о которой представлена в табл. 7.5.

Таблица 7.5

x_k	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{P}[\xi(\omega) = x_k]$	0,1	0,15	0,4	0,15	0,1	0,1

Определите:

а) уровень запасов, при котором вероятность их полного истощения не превышает 0,45;

б) уровень запасов, при котором среднее значение дефицита не превосходит 1, а среднее значение превышения не более 2;

в) уровень запасов, при котором ожидаемый уровень дефицита меньше уровня превышения хотя бы на 1.

Ответ: а) уровень запасов $l \geqslant 2$; б) $2 \leqslant l \leqslant 4$; в) $l \geqslant 4$.

7.18. Ежедневный спрос на булочки в продовольственном магазине представляет собой дискретную случайную величину, принимающую значения 100, 120 и 130 с вероятностями 0,2, 0,3 и 0,5 соответственно. Владелец магазина ограничен в выборе величины запаса одним из указанных уровней. Если он закупает больше, чем может продать, то должен реализовать излишек со скидкой в 0,55 денежных единиц за каждую булочку.

С помощью дерева решений найдите оптимальный уровень запаса, если булочка закупается по цене 0,6 денежных единиц, а продается за 1,05 денежных единиц.

Ответ: оптимальный уровень запаса — 130 булочек.

7.19. В условиях задачи 7.18 владелец магазина желает рассмотреть задачу принятия решений на двухдневный период. Его решения для второго дня определяются следующим образом: если спрос в первый день равен текущему запасу, то он закажет такое же количество булочек и на второй день; если в первый день спрос превысил запас, то на второй день он сделает запас на более высоком уровне; если в первый день запас превысил спрос, то на второй день он сделает заказ на более низком уровне. Найдите оптимальное решение с использованием дерева решений.

Ответ: в первый день заказать 130 булочек. Если в первый день спрос составил 100 булочек, то на второй день заказать 120 булочек. Если же спрос составил 120 булочек, то на второй день заказать 120 булочек, а при спросе 130 булочек заказать 130 булочек.

7.20. Известна матрица доходов (выигрышей)

$$N(G,S)=\begin{pmatrix} 15 & 10 & 0 & -6 & 17 \\ 3 & 14 & 8 & 9 & 2 \\ 1 & 5 & 14 & 20 & -3 \\ 7 & 19 & 10 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите и сравните оптимальные решения, полученные с использованием: а) критерия Лапласа; б) максиминного критерия; в) критерия Сэвиджа; г) критерия Гурвица при $\alpha = 0{,}5$.

Ответ: а) X_4; б) X_2; в) X_2; г) X_4.

7.21. Один из N станков нужно выбрать для изготовления партии изделий, объем которой Q может принимать любые действительные значения из отрезка $[Q^*, Q^{**}]$. Производственные затраты C_i для станка с номером i вычисляются по формуле $C_i = K_i + QD_i$, $i = \overline{1, N}$, где K_i, D_i — постоянные величины, характеризующие этот станок. Найдите и сравните оптимальные решения, полученные с использованием критериев: а) Лапласа; б) минимаксного; в) Сэвиджа; г) Гурвица при $\alpha = 0{,}5$.

8. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

В предшествующих главах мы рассмотрели задачи принятия решений, в которых выбор оптимального решения осуществлялся одним *„лицом, принимающим решения“*. В этой главе мы остановимся на *задачах принятия решений в условиях неопределенности*, в которых участвуют несколько „лиц, принимающих решения“, а *оптимальное значение целевой функции* для каждого из них зависит и от решений, принимаемых всеми остальными участниками.

Математическую дисциплину, исследующую ситуации, в которых принятие решения зависит от нескольких участников, называют ***теорией игр***. Предметом теории игр являются такие ситуации, в которых важную роль играют конфликты и совместные действия. Типичными примерами подобных ситуаций могут служить планирование боевых операций противоборствующих армий и рекламирование конкурирующих товаров.

Теория игр хорошо развита и имеет обширные приложения. В главе излагаются лишь некоторые сведения из зтой области, которые помогут при изучении специальной литературы.

8.1. Основные понятия, классификация и описание игр

В *теории игр „лиц, принимающих решения“*, называют ***игроками***, а *целевую функцию* — ***платежной функцией***. Каждый игрок располагает конечным или бесконечным набором *допустимых решений*, называемых *стратегиями*. Выигрыш каждого игрока определяется его платежной функцией, значения которой зависят от стратегий всех участников игры.

Фактически ***игра*** представляет собой совокупность правил, известных всем игрокам. Эти правила, с одной стороны, определяют множества стратегий игроков, а с другой — последствия и выигрыши в результате выбора каждой из стратегий. Заметим, что в теории игр понятие стратегии является одним из центральных.

Классификацию игр проводят по различным признакам:

а) по числу игроков;

б) по числу стратегий;

в) по свойствам платежной функции;

г) по характеру предварительной договоренности между игроками.

Игру, в которой участвует n игроков, называют ***игрой с n участниками***. Количество n участников может быть равным 2, 3 и т.д. При наличии двух игроков могут возникать и конфликтные ситуации, и необходимость в координированных действиях (***кооперация***). Если в игре участвует не менее трех игроков, то могут создаваться ***коалиции***, т.е. группы из двух или более игроков, имеющих общую цель и координирующих свои стратегии.

По количеству стратегий различают ***игры конечные*** и ***бесконечные***. Если хотя бы один из игроков располагает бесконечным множеством стратегий, то игру называют бесконечной. Если же каждый из игроков располагает конечным множеством стратегий, то игру называют конечной.

Еще один способ классификации игр — по свойствам платежной функции. В ***игре с нулевой суммой*** общая сумма выигрышей всех игроков равна нулю. В игре с нулевой суммой и двумя участниками выигрыш одного из них равен проигрышу другого. Таким образом, в играх с нулевой суммой существует конфликт между игроками, и поэтому их называют также ***антагонистическими играми***. В общем случае в игре с нулевой суммой, как правило, имеют место и конфликты, и согласованные действия игроков. Прямой противоположностью играм с нулевой суммой являются ***игры*** двух игроков ***с постоянной разностью***, в которых оба игрока выигрывают или проигрывают одновременно. Поэтому игрокам выгодно действовать согласованно.

В зависимости от характера предварительной договоренности между игроками различают ***кооперативные*** и ***некооперативные игры***. Игра кооперативная, если до ее начала игроки образуют коалиции и принимают взаимообязывающие соглашения о координации своих стратегий. В противном случае игра будет некооперативной.

Прежде чем переходить к рассмотрению основных способов описания и анализа любой конкретной игры, введем еще два понятия, широко используемых в теории игр.

Ход — это момент игры, когда игроки должны выбрать один из возможных вариантов действий, т.е. принять одно из допустимых решений.

Партия игры — это определенная совокупность ходов и выборов возможных вариантов действий.

Существуют два основных способа описания и анализа любой конкретной игры.

П е р в ы й с п о с о б предполагает следующее:

1) перечисление ходов, которые могут делать игроки;

2) определение информации, которой располагают игроки в процессе игры;

3) определение возможных вариантов действий игроков;

4) указание предельных размеров платежей в конце игры.

Игру, описанную подобным образом, называют ***игрой в развернутой***, или ***экстенсивной***, ***форме***, а само описание, как правило, составляют в виде ***дерева игры***, аналогичного *дереву решений*. Игры в развернутой форме называют также ***позиционными играми***.

Пример 8.1. На рис. 8.1 изображено дерево игры для упрощенного варианта игры двух лиц в покер (карточная игра). В этой игре ставка каждого из игроков равна 5 денежным

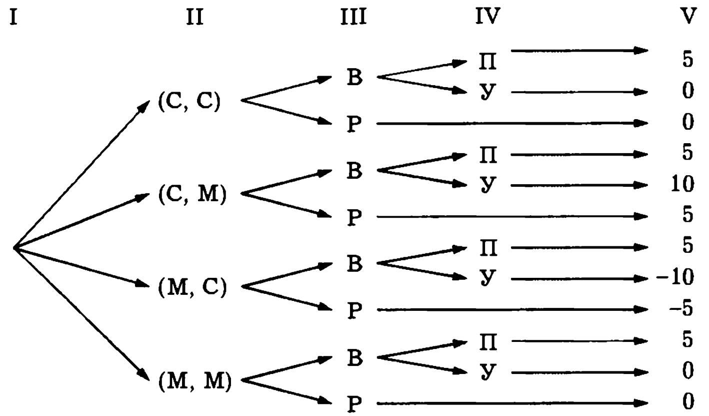


Рис. 8.1

единицам. После сдачи карт на руках у игроков остается определенное количество карт. Набор карт может быть либо „старшим", который мы обозначим через С, либо „младшим", который мы обозначим через М. У первого игрока имеются две возможности: либо раскрыть карты (Р), либо повысить игру (В). При раскрытых картах старший набор карт выигрывает банк, если же карты у игроков равны, то банк делится пополам. Если первый игрок повышает игру, то он вкладывает в банк еще 5 денежных единиц. После этого у второго игрока имеются две *альтернативы*: либо пасовать (П), либо уравнивать (У). Если он пасует, то первый игрок выиграет банк при любых картах. Если же второй игрок уравнивает игру, то вносит в банк еще 5 денежных единиц, после чего либо старшие карты выиграют банк, либо при равных картах банк делится пополам.

На дереве игры (см. рис. 8.1) изображены все возможные ситуации игры и указаны соответствующие им платежи. Римскими цифрами обозначены стадии игры:

I — первый случайный ход, обозначающий определение ставок и сдачу карт;

II — сложившаяся после сдачи карт ситуация: С обозначает старшую карту, а М — младшую, первая буква обозначает карту первого игрока, а вторая — второго. Например, (С, М) обозначает старшую карту у первого игрока и младшую — у второго;

III — второй ход в игре, в котором решение за первым игроком: раскрыть карты (Р) или повысить ставки (В);

IV — третий ход в игре, в котором решение принимает второй игрок. Он может пасовать (П) или уравнять игру (У);

V — завершение партии, когда подводятся ее итоги. При этом положительное значение обозначает выигрыш первого игрока (и проигрыш второго), а отрицательное значение — выигрыш второго игрока (и проигрыш первого). #

Игру в развернутой форме называют ***игрой с полной информацией***, если в ней нельзя делать одновременно несколько ходов и если участникам известны выборы, сделанные при предшествующих ходах, включая и случайные ходы. Примером игры с полной информацией являются шахматы. Покер представляет собой ***игру с неполной информацией***, так как игрокам неизвестно, какие карты находятся на руках у противника.

Второй способ описания игры предполагает рассмотрение всех возможных стратегий каждого игрока и определение платежей, соответствующих любым возможным комбинациям стратегий всех игроков. Игру, описанную вторым способом, обычно называют ***игрой в нормальной форме***. Естественно, зная развернутую форму игры, всегда можно представить ее в нормальной форме.

Нормальная форма игры двух участников состоит из двух ***платежных матриц***, содержащих суммы выигрышей и проигрышей каждого из игроков для любой из возможных пар стратегий. Обычно эти две матрицы объединяются в одну, как это изображено на рис. 8.2. Если первый игрок располагает множеством стратегий $\{X_i^1\}_{i=1}^m$, а второй игрок — множеством стратегий $\{X_j^2\}_{j=1}^n$, то на пересечении i-й строки и j-го столбца объединенной платежной матрицы находится пара чисел

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} X_1^2 & X_2^2 & & X_n^2 \end{array} \\
\begin{array}{c} X_1^1 \\ X_2^1 \\ \ldots \\ X_m^1 \end{array} &
\begin{pmatrix}
(\Pi_{11}^1, \Pi_{11}^2) & (\Pi_{12}^1, \Pi_{12}^2) & \ldots & (\Pi_{1n}^1, \Pi_{1n}^2) \\
(\Pi_{21}^1, \Pi_{21}^2) & (\Pi_{22}^1, \Pi_{22}^2) & \ldots & (\Pi_{2n}^1, \Pi_{2n}^2) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(\Pi_{m1}^1, \Pi_{m1}^2) & (\Pi_{m2}^1, \Pi_{m2}^2) & \ldots & (\Pi_{mn}^1, \Pi_{mn}^2)
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Рис. 8.2

(Π_{ij}^1, Π_{ij}^2), представляющих собой выигрыши первого и второго игроков при выборе ими стратегий X_i^1 и X_j^2 соответственно.

Единая платежная матрица состоит из m строк и n столбцов, где m — число стратегий первого игрока, а n — второго (имеется в виду конечная игра). Считается, что каждому из игроков известны все элементы единой платежной матрицы игры.

8.2. Игры двух участников с нулевой суммой

Игры двух участников с нулевой суммой представляют собой наиболее разработанный раздел *теории игр*. Если *игра* двух участников с нулевой суммой представлена *в нормальной форме*, то для всех $i = \overline{1, m}$ и $j = \overline{1, n}$

$$\Pi_{ij}^1 + \Pi_{ij}^2 = 0,$$

где Π_{ij}^1 и Π_{ij}^2 — выигрыши первого и второго игроков при выборе ими стратегий X_i^1 и X_j^2 соответственно. При этом первый игрок располагает m стратегиями, а второй — n стратегиями. Поэтому в данном случае вместо единой *платежной матрицы* используют платежную матрицу первого игрока (рис. 8.3), в которой

$$\Pi_{ij} = \Pi_{ij}^1 = -\Pi_{ij}^2, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

$$\begin{array}{c} \\ X_1^1 \\ X_2^1 \\ \dots \\ X_m^1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} X_1^2 & X_2^2 & & X_n^2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & & \Pi_{1n} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \dots & \Pi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Pi_{m1} & \Pi_{m2} & \dots & \Pi_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 8.3

Пример 8.2. Первый и второй игроки одновременно и независимо друг от друга показывают один, два или три пальца. Выигрыш или проигрыш (в денежных единицах) равен общему количеству показанных пальцев. Если это количество четное, то выиграет первый игрок, а второй ему платит. Если же оно нечетное, то выиграет второй игрок, а первый ему платит. Требуется построить платежную матрицу.

В рассмотренном случае у каждого игрока имеется по три стратегии: показать один, два или три пальца. Если стратегия X_n^k k-го игрока заключается в том, чтобы показать n пальцев, $k = 1, 2$, $n = \overline{1, 3}$, то платежную матрицу можно записать следующим образом:

$$(\Pi_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}. \quad \#$$

Как мы уже знаем, в *задачах принятия решений* выбор *критерия оптимальности* в значительной степени предопределяется информацией, которой располагает „лицо, принимающее решения“. Игры двух лиц с нулевой суммой в определенном смысле представляют собой предельный случай полного отсутствия информации, когда противники находятся в состоянии конфликта. Именно поэтому в играх двух лиц с нулевой суммой в нормальной форме, называемых также ***матричными играми***, как правило, используют наиболее „пессимистический“ *минимаксный* (*максиминный*) *критерий*, рассмотренный выше при анализе задач принятия решений в условиях неопределенности. Но ситуация в играх принципиально отличается от ситуации в задачах принятия решений в условиях неопределенности, в которых „природа“ не рассматривалась нами как активный или недоброжелательный противник. В нашем случае каждый игрок действует разумно и пытается активно помешать противнику. Поэтому попытаемся уяснить для себя обоснованность использования минимаксного (максиминного) критерия в играх двух лиц с нулевой суммой.

Сначала предположим, что мы выступаем на стороне первого игрока. Мы располагаем стратегиями X_i^1, $i=\overline{1,m}$, и делаем первый ход. Если мы выбираем стратегию X_i^1, то второй игрок, являющийся разумным противником, будет стараться минимизировать наш выигрыш из множества возможных выигрышей Π_{ij}, $j=\overline{1,n}$, выбирая одну из стратегий X_j^2, $j=\overline{1,n}$. Таким образом, величина

$$\Pi_{i*}=\min_j \Pi_{ij}$$

представляет наш гарантированный наименьший выигрыш при выборе стратегии X_i^1 безотносительно к решениям второго игрока. Естественно, что из всех возможных стратегий X_i^1 мы выбираем ту, которая максимизирует наш гарантированный наименьший выигрыш, равный

$$\Pi_*=\max_i \Pi_{i*}=\max_i \min_j \Pi_{ij}.$$

Величину Π_* называют ***нижней ценой игры***, а соответствующую ей стратегию X_{i*}^1 — ***максиминной стратегией***.

Очевидно, что если мы будем придерживаться максиминной стратегии, то при любых действиях противника нам гарантирован выигрыш Π, который, во всяком случае, не меньше Π_*. Поэтому величину Π_* и называют нижней ценой игры.

Естественно, что аналогичные рассуждения можно провести и за второго игрока, который является нашим противником. Он заинтересован в минимизации нашего выигрыша, и, как следствие, для каждой своей стратегии X_j^2, $j = \overline{1, n}$, он должен сначала определить наш максимально возможный выигрыш:

$$\Pi_j^* = \max_i \Pi_{ij}, \quad j = \overline{1, n},$$

а затем минимизировать эти максимально возможные выигрыши путем выбора соответствующей стратегии. Величину

$$\Pi^* = \min_j \Pi_j^* \equiv \min_j \max_i \Pi_{ij}$$

называют ***верхней ценой игры***, а соответствующую ей стратегию X_{*j}^2 — ***минимаксной стратегией***. Придерживаясь минимаксной стратегии, противник имеет гарантии, что в любом случае проиграет (а первый игрок выиграет) не больше чем Π^*.

Пример 8.3. Система противовоздушной обороны (ПВО) обороняет от воздушного налета участок территории, располагая двумя зенитно-ракетными комплексами (ЗРК), зоны действия которых не перекрываются (рис. 8.4). Каждый ЗРК с единичной вероятностью поражает самолет противника в зоне своего действия, если его система наведения начинает отслеживать цель и вырабатывать данные для стрельбы еще за пределами зоны. Противник располагает двумя самолетами, каждый из которых может быть направлен в зону действия любого ЗРК.

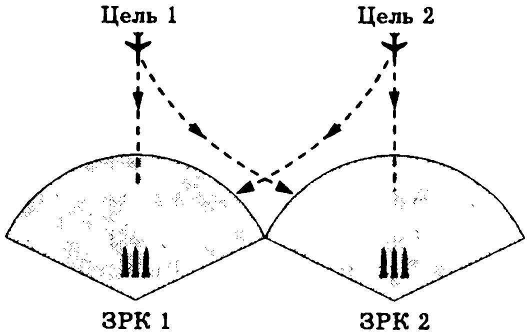


Рис. 8.4

В момент, когда система ПВО решает задачу целераспределения, т.е. решает, какому ЗРК по какой цели стрелять, самолеты противника могут применить обманный маневр (см. рис. 8.4) и изменить маршрут. Цель системы ПВО — поразить как можно больше самолетов противника, а цель противника — потерять как можно меньше самолетов.

В рассматриваемом случае мы имеем игру двух лиц с нулевой суммой. В распоряжении первого игрока (система ПВО) имеются четыре стратегии:

X_1^1 — система наведения каждого ЗРК отслеживает цель, направляющуюся в его зону, т.е. k-му ЗРК назначена k-я цель, $k = 1, 2$;

X_2^1 — система наведения первого ЗРК отслеживает вторую цель, а система наведения второго ЗРК отслеживает первую цель;

X_3^1 — системы наведения обоих ЗРК отслеживают первую цель;

X_4^1 — системы наведения обоих ЗРК отслеживают вторую цель.

У второго игрока (противника) также имеются четыре стратегии:

X_1^2 — оба самолета не меняют своего курса, т.е. k-й самолет следует в зону действия k-го ЗРК, $k = 1, 2$;

X_2^2 — оба самолета применяют обманный маневр и меняют курс, т.е. первый самолет следует в зону действия второго ЗРК, а второй самолет следует в зону действия первого ЗРК;

X_3^2 — первый самолет применяет обманный маневр, а второй нет, т.е. оба самолета следуют в зону действия второго ЗРК;

X_4^2 — второй самолет применяет обманный маневр, а первый нет, т.е. оба самолета следуют в зону действия первого ЗРК.

Составим платежную матрицу:

$$(\Pi_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

определим верхнюю и нижнюю цены игры, а также минимаксную и максиминную стратегии игроков.

Для первого игрока имеем

$$\Pi_{1*} = \Pi_{12} = 0; \qquad \Pi_{2*} = \Pi_{21} = 0;$$

$$\Pi_{3*} = \Pi_{3j} = 1,\ j = \overline{1,4}; \qquad \Pi_{4*} = \Pi_{4j} = 1,\ j = \overline{1,4}.$$

Нижняя цена игры равна $\Pi_* = 1$, а первый игрок располагает двумя максиминными стратегиями X_3^1, X_4^1.

Для второго игрока имеем

$$\Pi_1^* = \Pi_{11} = 2; \qquad \Pi_2^* = \Pi_{22} = 2;$$

$$\Pi_3^* = \Pi_{13} = 1,\ j = \overline{1,4}; \qquad \Pi_4^* = \Pi_{i4} = 1,\ j = \overline{1,4}.$$

Верхняя цена игры равна $\Pi^* = \Pi_* = 1$, а второй игрок располагает двумя минимаксными стратегиями X_3^2, X_4^2.

В данном случае верхняя и нижняя цены игры совпадают и равны единице. Это означает, что при использовании системой ПВО любой из максиминных стратегий она гарантированно сбивает один самолет, а при использовании противником любой из своих минимаксных стратегий, он гарантированно теряет лишь один самолет. #

В теории игр *оптимальность решения* связывают с ситуацией, в которой ни одному из игроков невыгодно изменять свою стратегию. В этом случае игра считается ***стабильной***, или ***находящейся в состоянии равновесия***.

В примере 8.3 рассмотрена игра, для которой нижняя цена равна верхней:

$$\Pi_* = \max_i \min_j \Pi_{ij} = \min_j \max_i \Pi_{ij} = \Pi^*.$$

Это равенство является проявлением ***свойства устойчивости*** минимаксных (максиминных) ***стратегий***. Свойство устойчивости заключается в том, что если один из игроков придерживается своей минимаксной (максиминной) стратегии, то другой игрок никак не может улучшить свое положение, отступая от своей максиминной (минимаксной) стратегии.

Игры, в которых нижняя цена равна верхней, занимают особое место в теории игр, их называют ***играми с седловой точкой***.

В платежной матрице любой игры с седловой точкой всегда существует элемент, являющийся одновременно минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце. Такой элемент называется ***седловой точкой***. Заметим, что седловая точка может быть и не единственной. Так, платежная матрица игры из примера 8.3 имеет четыре седловые точки, расположенные на пересечении двух ее последних строк и двух последних столбцов.

В играх с седловой точкой общее значение нижней и верхней цены

$$\nu = \Pi_* = \Pi^*$$

называют ***чистой ценой игры***. Очевидно, что седловой точке соответствует максиминная стратегия первого игрока и минимаксная стратегия второго. До тех пор пока игроки будут придерживаться этих стратегий, выигрыш остается постоянным и равным чистой цене игры. Если второй игрок отклонился от своей минимаксной стратегии, то первый игрок сразу получает преимущество, так как элемент ν является минимальным в своей строке и подобное отклонение не может быть выгодным для второго игрока. Проводя аналогичные рассуждения для первого игрока, приходим к выводу: в играх с седловой точкой максиминная стратегия первого игрока и минимаксная стратегия второго являются *оптимальными*. Поэтому совокупность этих двух стратегий называют ***решением игры***.

Из минимаксного и максиминного критериев следует [XIV], что верхняя цена игры всегда не меньше ее нижней цены, т.е.

$$\Pi_* = \max_i \min_j \Pi_{ij} \leqslant \min_j \max_i \Pi_{ij} = \Pi^*,$$

причем это неравенство превращается в равенство для игры с седловой точкой. Чтобы убедиться в том, что существуют игры с нулевой суммой без седловой точки, т.е. $\Pi_* < \Pi^*$, достаточно вновь обратиться к примеру 8.2.

Пример 8.4. Продолжим анализ игры „три пальца“ из примера 8.2 и определим нижнюю и верхнюю цены игры с помощью платежной матрицы.

Для первого игрока имеем

$$\Pi_{1*} = \Pi_{12} = -3, \quad \Pi_{2*} = \Pi_{23} = -5, \quad \Pi_{3*} = \Pi_{32} = -5.$$

Таким образом, нижняя цена игры равна $\Pi_* = -3$, и ей соответствует максиминная стратегия X_1^1 первого игрока.

Для второго игрока имеем

$$\Pi_1^* = \Pi_{31} = 4, \quad \Pi_2^* = \Pi_{22} = 4, \quad \Pi_3^* = \Pi_{33} = 6.$$

Верхняя цена равна $\Pi^* = 4$, и ей соответствуют две минимаксные стратегии X_1^2 и X_2^2 второго игрока.

В рассматриваемой игре

$$\Pi_* = -3 < 4 = \Pi^*,$$

что означает отсутствие седловой точки. Для наглядности нашего анализа предположим, что каждый из игроков делает свой ход в порядке очередности. Пусть второй игрок выбрал минимаксную стратегию X_1^2. В ответ на это первый игрок, отступая от своей максиминной стратегии, может воспользоваться стратегией X_3^1 и выиграет 4. Тогда второй игрок, продолжая игру, реализует вторую минимаксную стратегию X_2^2 и выигрывает 5, на что первый игрок отвечает стратегией X_2^1 и выигрывает 4. Таким образом, если один из игроков будет придерживаться своей минимаксной (максиминной) стратегии, то другой игрок может улучшить свое положение, отступив от своей максиминной (минимаксной) стратегии. В рассматриваемом случае минимаксные (максиминные) стратегии не обладают свойством устойчивости. #

В играх двух участников с нулевой суммой выигрыш одного из них равен проигрышу другого. Поэтому, если целью одного из игроков является максимизация своего выигрыша, то целью другого игрока является минимизация своего проигрыша. Если фиксированная стратегия одного из игроков (допустим, первого) не обладает свойством устойчивости, то она не может быть оптимальной, так как в этом случае второй игрок может улучшить свое положение (увеличить свой выигрыш или уменьшить свой проигрыш) за счет улучшения положения первого игрока.

Итак, среди игр двух лиц с нулевой суммой существуют игры без седловых точек. В таких играх нижняя цена игры строго меньше ее верхней цены, а минимаксные и максиминные стратегии не являются оптимальными, т.е. их совокупность не является решением игры. Анализу подобных игр и посвящен следующий параграф.

8.3. Решение игр двух участников с нулевой суммой в смешанных стратегиях

В *теории игр* элементы множеств *допустимых решений игроков* принято называть ***чистыми стратегиями***. Как мы уже знаем, в *игре двух участников с нулевой суммой* при наличии *седловых точек решение игры* находится в чистых стратегиях, а *оптимальными* являются *максиминная* и *минимаксная стратегии*.

На практике в играх двух участников с нулевой суммой гораздо чаще встречается случай, когда седловых точек нет, т.е. *верхняя* Π^* и *нижняя* Π_* *цены игры* различаются. Если искать решения подобных задач в чистых стратегиях, то в расчете на разумного противника мы должны воспользоваться *минимаксным (максиминным) критерием*. В этом случае первый игрок гарантирует себе выигрыш, равный нижней цене игры Π_*. При этом естественное желание первого игрока гарантировать себе выигрыш больше чем Π_* и естественное желание второго игрока гарантировать себе проигрыш меньше чем Π^* при использовании чистых стратегий приводят к нарушению *стабильности игры*, что мы и наблюдали в примере 8.4.

Для преодоления нестабильности игры используют ***смешанные стратегии***, которые заключаются в случайном чередовании чистых стратегий. С вероятностной точки зрения, если $p_k^1 \geqslant 0$ — вероятность выбора первым игроком чистой стратегии X_k^1, $k = \overline{1, m}$, где

$$\sum_{k=1}^{m} p_k^1 = 1,$$

то его смешанная стратегия — это m-мерный вектор

$$s_{X^1} = \left(p_1^1 \ p_2^1 \ \ldots \ p_m^1\right)^T.$$

Таким образом, множество смешанных стратегий содержит в себе и все чистые стратегии, так как для любой чистой стратегии X_k можно записать вектор s_{X_k} с координатами

$$p_i^1 = \begin{cases} 1, & i = k; \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \quad i = \overline{1, m}.$$

Фактически смешанные стратегии представляют собой *математическую модель* гибкой, изменчивой тактики; при применении этой тактики противник не знает и не может знать заранее, с какой ситуацией ему предстоит столкнуться.

Пусть p_i^1, $i = \overline{1,m}$, и p_j^2, $j = \overline{1,n}$, — вероятности выбора первым и вторым игроками чистых стратегий X_i^1 и X_j^2, т.е.

$$s_{X^1} = \begin{pmatrix} p_1^1 & p_2^1 & \ldots & p_m^1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \quad —$$

смешанная стратегия первого игрока, а

$$s_{X^2} = \begin{pmatrix} p_1^2 & p_2^2 & \ldots & p_n^2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \quad —$$

смешанная стратегия второго игрока. При этом

$$p_i^1 = \mathbf{P}\left[X_i^1\right] \geqslant 0, \quad i = \overline{1,m}; \quad \sum_{i=1}^{m} p_i^1 = 1;$$

$$p_j^2 = \mathbf{P}\left[X_j^2\right] \geqslant 0, \quad j = \overline{1,n}; \quad \sum_{j=1}^{n} p_j^2 = 1.$$

В этом случае *платежная матрица* игры имеет следующий вид:

$$(\Pi_{ij}) = \begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \ldots & \Pi_{1n} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \ldots & \Pi_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Pi_{m1} & \Pi_{m2} & \ldots & \Pi_{mn} \end{pmatrix}.$$

При использовании смешанных стратегий выигрыш первого игрока есть дискретная случайная величина, множество возможных значений которой представлено матрицей (Π_{ij}). Игроки выбирают свои смешанные стратегии независимо друг от друга. Поэтому вероятность того, что первый игрок выберет стратегию X_i^1, а второй игрок — стратегию X_j^2, равна произведению $p_i^1 p_j^2$. Так как этой паре стратегий соответствует выигрыш Π_{ij} первого игрока, то для определения ожидаемого выигрыша первого игрока и ожидаемого проигрыша второго в случае использования ими смешанных стратегий s_{X^1} и s_{X^2} достаточно вычислить математическое ожидание дискретной случайной величины. Таким образом, ожидаемый выигрыш первого игрока (и ожидаемый проигрыш второго игрока) равен

$$\nu(s_{X^1}, s_{X^2}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i^1 p_j^2 \Pi_{ij}.$$

Мы предполагаем, что в игре участвуют разумные противники. Поэтому первому игроку целесообразно выбирать свою смешанную стратегию, т.е. набор вероятностей p_i^1, $i = \overline{1, m}$, выбора чистых стратегий X_i^1, исходя из условия максимальности своего наименьшего ожидаемого выигрыша. А так как в множестве его смешанных стратегий содержатся и все чистые стратегии, то ожидаемый выигрыш Π^1 не может быть меньше нижней цены игры безотносительно к действиям второго игрока:

$$\Pi_* \leqslant \Pi^1 = \max_{p_i^1}\min_{j}\Bigl(\sum_{i=1}^{m} p_i^1 \Pi_{ij}\Bigr).$$

Второму игроку целесообразно выбирать свою смешанную стратегию, исходя из условия минимальности своего наибольшего ожидаемого проигрыша. Проведя аналогичные рассуждения, мы приходим к выводу о том, что этот проигрыш не может быть больше верхней цены игры:

$$\Pi^* \geqslant \Pi^2 = \min_{p_j^2}\max_{i}\Bigl(\sum_{j=2}^{n} p_j^2 \Pi_{ij}\Bigr).$$

При этом можно доказать, что, как и в случае чистых стратегий, выполняются неравенства

$$\Pi_* \leqslant \Pi^1 \leqslant \Pi^2 \leqslant \Pi^*.$$

Мы можем также утверждать следующее. Если вероятности выбора чистых стратегий p_i^{1*}, $i = \overline{1, m}$, и p_j^{2*}, $j = \overline{1, n}$, определяют оптимальные решения игроков, то ожидаемый максиминный выигрыш Π^1 первого игрока и ожидаемый минимаксный проигрыш Π^2 второго равны между собой и равны ***ожидаемой цене игры***:

$$\nu^* = \nu(s^*_{X^1}, s^*_{X^2}) = \Pi^1 = \Pi^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i^{1*} p_j^{2*} \Pi_{ij},$$

$$s^*_{X^1} = \left(p_1^{1*}\ p_2^{1*}\ \ldots\ p_m^{1*}\right)^{\mathrm{T}}, \qquad s^*_{X^2} = \left(p_1^{2*}\ p_2^{2*}\ \ldots\ p_n^{2*}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Известно не так много методов нахождения оптимальных смешанных стратегий $s^*_{X^1}$ и $s^*_{X^2}$, т.е. оптимальных вероятностей p_i^{1*} и p_j^{2*} выбора чистых стратегий в играх двух участников с нулевой суммой. Рассмотрим некоторые из них, начав с простейших.

Аналитический метод для игр с платежной матрицей второго порядка. В дальнейших рассуждениях под ***активными стратегиями*** игрока будем понимать те чистые стратегии, которые с ненулевыми вероятностями содержатся в его оптимальной смешанной стратегии. В играх двух участников с нулевой суммой, каждый из которых имеет две чистые стратегии, платежная матрица имеет порядок два. При отсутствии седловой точки решение может быть найдено в смешанных стратегиях и обе чистые стратегии каждого игрока являются активными.

Если первый игрок придерживается своей оптимальной смешанной стратегии $s^*_{X^1} = \left(p_1^{1*}\ p_2^{1*}\right)^{\mathrm{T}}$, то его выигрыш остается неизменным и равным ожидаемой цене игры ν^* независимо от действий второго игрока. Таким образом,

$$\Pi_{11}p_1^{1*} + \Pi_{21}p_2^{1*} = \nu^*, \quad \Pi_{12}p_1^{1*} + \Pi_{22}p_2^{1*} = \nu^*, \quad p_1^{1*} + p_2^{1*} = 1,$$

откуда при $\Pi_{11} + \Pi_{22} \neq \Pi_{12} + \Pi_{21}$ следует, что

$$p_1^{1*} = \frac{\Pi_{22} - \Pi_{21}}{(\Pi_{11} + \Pi_{22}) - (\Pi_{12} + \Pi_{21})}, \quad p_2^{1*} = \frac{\Pi_{11} - \Pi_{12}}{(\Pi_{11} + \Pi_{22}) - (\Pi_{12} + \Pi_{21})},$$

$$\nu^* = \frac{\Pi_{11}\Pi_{22} - \Pi_{12}\Pi_{21}}{(\Pi_{11} + \Pi_{22}) - (\Pi_{12} + \Pi_{21})}.$$

Аналогично, если второй игрок придерживается своей оптимальной стратегии $s^*_{X^2} = \left(p_1^{2*} \;\; p_2^{2*}\right)^{\mathrm{T}}$, то его проигрыш остается неизменным и равным цене игры ν^* независимо от действий первого игрока. Таким образом,

$$\Pi_{11}p_1^{2*} + \Pi_{12}p_2^{2*} = \nu^*, \quad \Pi_{21}p_1^{2*} + \Pi_{22}p_2^{2*} = \nu^*, \quad p_1^{2*} + p_2^{2*} = 1,$$

откуда

$$p_1^{2*} = \frac{\Pi_{22} - \Pi_{12}}{(\Pi_{11} + \Pi_{22}) - (\Pi_{12} + \Pi_{21})}, \quad p_2^{2*} = \frac{\Pi_{11} - \Pi_{21}}{(\Pi_{11} + \Pi_{22}) - (\Pi_{12} + \Pi_{21})}.$$

Завершая наши рассуждения, напомним, что отсутствие седловой точки означает выполнение неравенства

$$\max_i \min_j \Pi_{ij} < \min_j \max_i \Pi_{ij}.$$

В рассматриваемом случае каждый из индексов i и j может принимать два значения: 1 и 2. Можно показать, что при отсутствии седловой точки выполняется условие $\Pi_{11} + \Pi_{22} \neq \neq \Pi_{12} + \Pi_{21}$, а также условия

$$p_j^{k*} > 0, \quad k, j = 1, 2.$$

Пример 8.5. Предположим, что сторона A (первый игрок) посылает в расположение противника B (второй игрок) два бомбардировщика. Бомбардировщик *1* летит спереди, а бомбардировщик *2* — сзади. Один из них (заранее не известно какой) несет мощную бомбу для поражения наземной цели, а второй выполняет функции сопровождения. В районе расположения противника бомбардировщики подвергаются нападению истребителя стороны B, который атакует их со стороны задней полусферы (рис. 8.5). Если истребитель атакует задний бомбардировщик, то по нему ведут огонь пушки только этого бомбардировщика и поражают его с вероятностью 0,3. Если же истребитель атакует передний бомбардировщик, то по нему ведут огонь пушки как переднего, так и заднего бомбардировщика; они поражают его с вероятностью $1-(1-0,3)^2=0,51$. Если истребитель не сбит огнем бомбардировщика, то он поражает атакованную цель с вероятностью 0,8. Задача бомбардировщиков — донести бомбу до цели, а задача истребителя — воспрепятствовать этому. Необходимо найти оптимальные стратегии игроков.

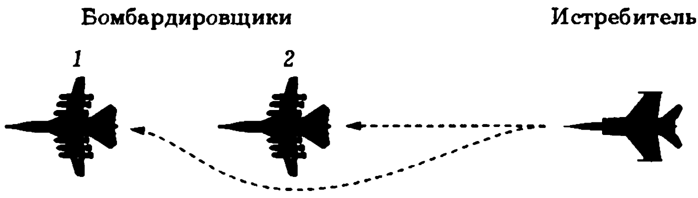


Рис. 8.5

В распоряжении каждого игрока имеются по две стратегии:

X_i^1 — сделать носителем бомбы бомбардировщик i, $i \in \in \{1, 2\}$;

X_j^2 — атаковать бомбардировщик j, $j \in \{1, 2\}$.

Составим платежную матрицу игры, для чего определим средний выигрыш Π_{ij}, $i, j = 1, 2$, первого игрока (вероятность непоражения носителя) при каждой возможной комбинации стратегий игроков.

Π_{11} — вероятность непоражения бомбардировщика *1*, являющегося носителем, при атаке истребителя. Носитель выполнит свою задачу в случае, если истребитель будет сбит огнем бомбардировщиков, или же в случае, если они его не собьют, но и он не поразит свою цель. Таким образом,

$$\Pi_{11} = 0,51 + (1-0,51)(1-0,8) = 0,608.$$

Π_{12} — вероятность непоражения бомбардировщика *1*, являющегося носителем, при атаке истребителем бомбардировщика *2*. Очевидно, что $\Pi_{12} = 1$.

Π_{21} — вероятность непоражения бомбардировщика *2*, являющегося носителем, при атаке истребителем бомбардировщика *1*. Очевидно, что $\Pi_{21} = 1$.

Π_{22} — вероятность непоражения бомбардировщика *2*, являющегося носителем, при его атаке истребителем. Носитель выполнит свою задачу, если истребитель будет сбит огнем носителя или же, уцелев от огня носителя, он не поразит свою цель. Поэтому

$$\Pi_{22} = 0{,}3 + (1 - 0{,}3)(1 - 0{,}8) = 0{,}44.$$

Записываем платежную матрицу

$$(\Pi_{ij}) = \begin{pmatrix} 0{,}608 & 1 \\ 1 & 0{,}44 \end{pmatrix}.$$

Нижняя цена игры равна $\Pi_* = 0{,}608$, а верхняя цена игры равна $\Pi^* = 1$. Игра не имеет седловой точки, поэтому решение следует искать в смешанных стратегиях. Найдем оптимальные смешанные стратегии и цену игры:

$$\Pi_{11} + \Pi_{22} - (\Pi_{12} + \Pi_{21}) = -0{,}952,$$

$$p_1^{1*} = \frac{0{,}44 - 1}{-0{,}952} = 0{,}588, \qquad p_2^{1*} = \frac{0{,}608 - 1}{-0{,}952} = 0{,}412,$$

$$p_1^{2*} = \frac{0{,}44 - 1}{-0{,}952} = 0{,}588, \qquad p_2^{2*} = \frac{0{,}608 - 1}{-0{,}952} = 0{,}412,$$

$$\nu^* = \frac{0{,}608 \cdot 0{,}44 - 1 \cdot 1}{-0{,}952} = 0{,}769.$$

Оптимальные смешанные стратегии

$$s^*_{X^1} = s^*_{X^2} = (0{,}588 \;\; 0{,}412)^{\mathrm{T}}$$

найдены с точностью до третьего знака после запятой. Таким образом, сторона A (первый игрок) в 58,8 % всех случаев (с вероятностью 0,588) должна делать носителем бомбардировщик *1*, а в 41,2 % случаев — бомбардировщик *2*. Оптимальная стратегия стороны B (второй игрок) состоит в том, чтобы в 58,8 % случаев истребитель атаковывал головной бомбардировщик, в 41,2 % случаев — замыкающий. При этом носитель будет выполнять свою задачу с вероятностью 0,769 %, что больше нижней цены игры $\Pi_* = 0{,}608$ и меньше верхней цены игры $\Pi^* = 1$.

Графический метод. Этот метод можно использовать, когда у одного из игроков в распоряжении лишь две чистые стратегии. В случае отсутствия седловой точки обе чистые стратегии будут активными.

Рассмотрим игру двух участников с нулевой суммой, в которой нет седловой точки, а первый игрок может применять две чистые стратегии, т.е. $(\Pi_{ij}) \in M_{2n}(\mathbb{R})$. Пусть $s^*_{X^1} = \begin{pmatrix} p_1^{1*} & p_2^{1*} \end{pmatrix}^T$ — оптимальная смешанная стратегия первого игрока. Тогда

$$p_2^{1*} = 1 - p_1^{1*}, \quad 0 < p_1^{1*} < 1,$$

и его ожидаемый выигрыш, соответствующий чистой стратегии X_j^2 второго игрока, $j = \overline{1, n}$, равен

$$Y(X_j^2, p_1^{1*}) = \sum_{i=1}^{2} p_i^{1*}\Pi_{ij} = (\Pi_{1j} - \Pi_{2j})p_1^{1*} + \Pi_{2j}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Таким образом, ожидаемый выигрыш первого игрока при любой стратегии второго игрока является линейной функцией вероятности p_1^{1*} выбора первым игроком своей первой чистой стратегии.

В соответствии с минимаксным критерием для игр двух участников с нулевой суммой при отсутствии седловой точки первый игрок должен выбирать значение p_1^{1*} так, чтобы максимизировать свой минимальный ожидаемый выигрыш. Эта задача легко решается графически путем построения прямых, соответствующих ожидаемым выигрышам первого игрока при различных чистых стратегиях второго игрока и являющихся линейными функциями аргумента $p_1^1 \in (0,1)$.

Если второй игрок располагает двумя чистыми стратегиями, т.е. $(\Pi_{ij}) \in M_{m2}(\mathbb{R})$, то все проведенные рассуждения можно повторить для второго игрока.

Пример 8.6. Рассмотрим игру двух участников с нулевой суммой и платежной матрицей

$$(\Pi_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Нижняя цена этой игры

$$\Pi_* = \max_i \min_j \Pi_{ij} = 2$$

отличается от ее верхней цены

$$\Pi^* = \min_j \max_i \Pi_{ij} = 3,$$

т.е. игра не имеет седловой точки.

Чтобы определить оптимальную смешанную стратегию первого игрока, представим его ожидаемые выигрыши для всех возможных стратегий X_j^2, $j = \overline{1,4}$, второго игрока в виде линейной функции вероятности p_1^1 выбора первым игроком своей первой чистой стратегии X_1^1:

$$Y(X_1^2, p_1^1) = -2p_1^1 + 4, \qquad Y(X_2^2, p_1^1) = -p_1^1 + 3,$$

$$Y(X_3^2, p_1^1) = p_1^1 + 2, \qquad Y(X_4^2, p_1^1) = -7p_1^1 + 6.$$

На рис. 8.6 изображены графики линейных зависимостей ожидаемых выигрышей первого игрока от вероятности p_1^1 выбора им своей первой чистой стратегии X_1^1. Выделенная ломаная линия ANB определяет минимальный гарантированный выигрыш первого игрока независимо от действий второго игрока. Таким образом, согласно максиминному критерию,

$$p_1^{1*} = 0{,}5, \qquad \nu^* = 2{,}5,$$

что соответствует точке $N(0{,}5; 2{,}5)$. А так как в рассматриваемом случае первый игрок располагает лишь двумя стратегиями, то $p_1^{1*} + p_2^{1*} = 1$ и его оптимальная смешанная стратегия $s_{X^1}^* = (0{,}5\ \ 0{,}5)^T$. #

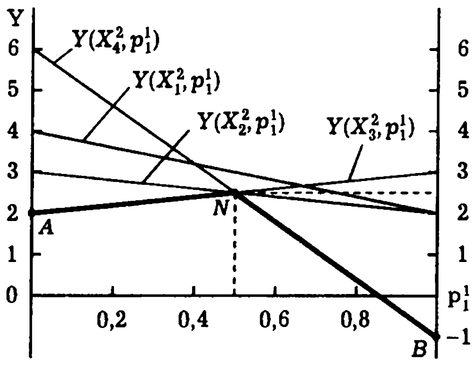


Рис. 8.6

При использовании графического метода для решения игр двух участников, один из которых имеет две стратегии, все построения в смешанных стратегиях соответствуют ожидаемому проигрышу второго игрока.

Пусть $s_{X^2}^2 = \left(p_1^{2*}\ \ p_2^{2*}\right)^T$ — оптимальная смешанная стратегия второго игрока, располагающего стратегиями X_1^2 и X_2^2. Тогда

$$p_2^{2*} = 1 - p_1^{2*}, \qquad 0 < p_1^{2*} < 1,$$

и его ожидаемый проигрыш, соответствующий чистой стратегии X_i^1, $i = \overline{1,m}$, первого игрока, равен

$$Z(X_i^1, p_1^{2*}) = \sum_{i=1}^{2} p_i^{2*}\Pi_{ij} = (\Pi_{i1} - \Pi_{i2})p_1^{2*} + \Pi_{i2}, \quad i = \overline{1,m}.$$

Все дальнейшие рассуждения аналогичны предыдущим, если учесть, что второй игрок использует минимаксный критерий.

Пример 8.7. Рассмотрим игру двух участников с нулевой суммой, в которой платежная матрица равна

$$\Pi_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

В данном случае нижняя цена игры $\Pi_* = 2$ отличается от ее верхней цены $\Pi^* = 3$, т.е. игра не имеет седловой точки.

Чтобы определить оптимальную смешанную стратегию второго игрока, представим его ожидаемые проигрыши для всех возможных стратегий X_i^1, $i = \overline{1,4}$, первого игрока как линейные функции вероятности p_1^2 выбора вторым игроком своей первой чистой стратегии X_1^2:

$$Z(X_1^1, p_1^2) = -2p_1^2 + 4, \qquad Z(X_2^1, p_1^2) = -p_1^2 + 3,$$

$$Z(X_3^1, p_1^2) = p_1^2 + 2, \qquad Z(X_4^1, p_1^2) = -8p_1^2 + 6.$$

На рис. 8.7 выделенная ломаная линия $AMNB$ определяет максимальный гарантированный проигрыш второго игрока независимо от действий первого игрока. Таким образом, согласно минимаксному критерию,

$$p_1^{2*} = \frac{2}{3}, \quad \nu^* = \frac{8}{3}, \quad s_{X^2}^* = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^T. \quad \#$$

Отметим, что графический метод позволяет находить не только ожидаемую цену игры и оптимальную смешанную стратегию одного из игроков, но и оптимальную смешанную стратегию другого игрока, т.е. полностью решить исходную задачу.

Действительно, рассмотрим игру двух участников с нулевой суммой, в которой первый игрок имеет две стратегии и

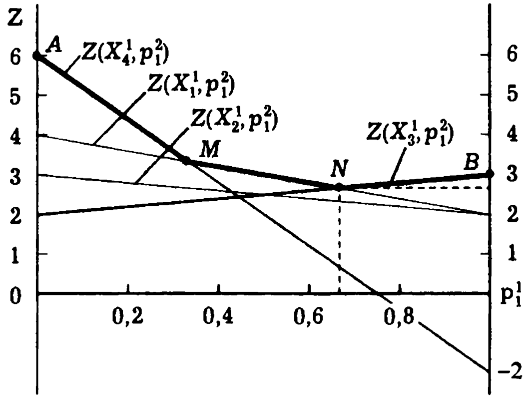


Рис. 8.7

нет седловых точек. С помощью графического метода мы можем определить ожидаемую цену игры ν^* и оптимальную смешанную стратегию первого игрока $s^*_{X^1} = \left(p_1^{1*}\ p_2^{1*}\right)^T$. На рис. 8.8 изображены три возможных принципиально различных варианта ломаной, отражающей минимальный гарантированный выигрыш первого игрока. Пусть анализируемая ломаная имеет горизонтальный участок, соответствующий стратегии X_j^2 второго игрока (см. рис. 8.8, *а*), что возможно лишь при $\Pi_{1j} = \Pi_{2j}$. В этом случае p_1^{1*} может принимать любое значение из отрезка $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$, а второй игрок имеет единственную оптимальную смешанную стратегию, которая является чистой

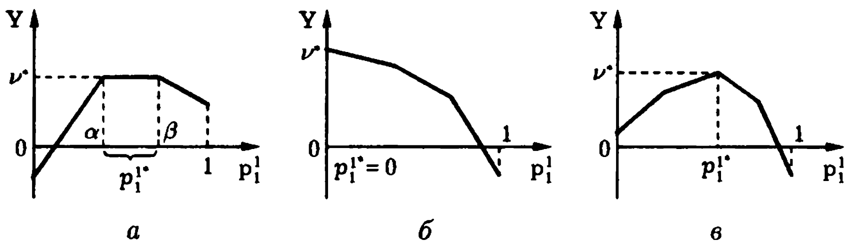


Рис. 8.8

стратегией X_j^2. Отметим, что из равенств $\Pi_{1j} = \Pi_{2j}$, $j = \overline{1,n}$, вытекает равенство

$$\max_i \min_j \Pi_{ij} = \min_j \max_i \Pi_{ij}.$$

Значит, ломаная на рис. 8.8, *а* соответствует игре двух участников с нулевой суммой и с седловой точкой, не представляющей интереса для нас.

Предположим теперь, что ломаная является „пиковой" с абсциссой, равной 0 или 1 (см. рис. 8.8, *б*). Для определенности ограничимся случаем пиковой точки $(0;\nu^*)$, которой соответствует оптимальная смешанная стратегия $s^*_{X^1} = (0\ \ 1)^{\mathrm{T}}$ первого игрока, представляющая собой чистую стратегию. Ожидаемая цена игры ν^* есть ожидаемый выигрыш первого игрока. Так как в данном случае $m = 2$, $p_1^{1*} = 0$, $p_2^{1*} = 1$, то

$$\nu^* = \min_j \Pi_{ij},$$

т.е. существует такой номер $j*$, $1 \leqslant j* \leqslant n$, что $\nu^* = \Pi_{2j*}$. В то же время ожидаемая цена игры определяется равенством

$$\nu^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i^{1*} p_j^{2*} \Pi_{ij},$$

которое в данной ситуации имеет вид

$$\nu^* = \sum_{j=1}^{n} p_j^{2*} \Pi_{2j}.$$

Сопоставив это равенство с равенством $\nu^* = \Pi_{2j*}$, приходим к выводу, что чистая стратегия X_{j*}^2 является оптимальной для второго игрока. Таким образом, пиковой точке $(0;\nu^*)$ соответствует игра двух участников с нулевой суммой, решение которой может быть найдено в чистых стратегиях. Можно показать, что в этом случае игра является игрой с седловой точкой. Для нас она не представляет интереса. Переходим к анализу ситуации, изображенной на рис. 8.8, *в*.

Если $0 < p_1^{1*} < 1$, то в точке $\left(p_1^{1*}; \nu^*\right)$ пересекается не менее двух прямых, одна из которых имеет положительный наклон, а другая — отрицательный (см., например, рис. 8.6). Пусть эти прямые определены уравнениями

$$Y(X_{j_1}^2, p_1^1) = (\Pi_{1j_1} - \Pi_{2j_1})p_1^1 + \Pi_{2j_1},$$

$$Y(X_{j_2}^2, p_1^1) = (\Pi_{1j_2} - \Pi_{2j_2})p_1^1 + \Pi_2 j_2,$$

где индексы j_1, j_2 обозначают номера чистых стратегий второго игрока, $(\Pi_{1j_1} - \Pi_{2j_1})(\Pi_{1j_2} - \Pi_{2j_2}) < 0$. Если второй игрок откажется от использования всех своих стратегий, кроме стратегий $X_{j_1}^2$, $X_{j_2}^2$, то в получившейся игре с нулевой суммой каждый игрок будет располагать двумя возможными стратегиями, а платежная матрица будет квадратной второго порядка. При этом единственная оптимальная стратегия первого игрока $s_{X^1}^* = \left(p_1^{1*} \ \ 1 - p_1^{1*}\right)^{\mathrm{T}}$ в игре с платежной матрицей второго порядка будет той же, что и в исходной игре. Таким образом, используя только стратегии $X_{j_1}^2$, $X_{j_2}^2$, второй игрок может помешать первому игроку получить выигрыш, больший чем ν^*. Следовательно, оптимальной для второго игрока является стратегия $s_{X^2}^* = \left(0 \ \ldots \ 0 \ p_{j_1}^{2*} \ 0 \ \ldots \ 0 \ p_{j_2}^{2*} \ 0 \ \ldots \ 0\right)^{\mathrm{T}}$. Используя аналитический метод для игр с платежной матрицей второго порядка, получаем

$$p_{j1}^{2*} = \frac{\Pi_{2j_2} - \Pi_{1j_2}}{(\Pi_{1j_1} + \Pi_{2j_2}) - (\Pi_{1j_2} + \Pi_{2j_1})}, \quad p_{j_2}^{2*} = 1 - p_{j_1}^{2*}.$$

Пример 8.8. В игре из примера 8.6 для второго игрока возможны две оптимальные смешанные стратегии (см. рис. 8.6). Для первой из них $j_1 = 3$, $j_2 = 4$,

$$p_3^{2*} = \frac{6 - (-1)}{(3+6) - (2-1)} = \frac{7}{8}, \quad p_4^{2*} = \frac{1}{8}, \quad s_{X^2}^* = \left(0 \ 0 \ \frac{7}{8} \ \frac{1}{8}\right)^{\mathrm{T}},$$

а цена игры

$$\nu^* = 2\cdot 0 + 2\cdot 0 + 3\cdot \frac{7}{8} - 1\cdot \frac{1}{8} = 2{,}5 = 4\cdot 0 + 3\cdot 0 + 2\cdot \frac{7}{8} + 6\cdot \frac{1}{8}.$$

Для второй оптимальной стратегии $j_1 = 2$, $j_2 = 3$,

$$p_2^{2*} = \frac{2-3}{(2+2)-(3+3)} = \frac{1}{2}, \quad p_3^{2*} = \frac{1}{2}, \quad s^*_{X^2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

а цена игры

$$\nu^* = 2\cdot 0 + 2\cdot 0{,}5 + 3\cdot 0{,}5 - 1\cdot 0 = 2{,}5 =$$
$$= 4\cdot 0 + 3\cdot 0{,}5 + 2\cdot 0{,}5 + 6\cdot 0. \quad \#$$

Если платежная матрица имеет два столбца, т.е. второй игрок имеет лишь две возможные стратегии, то все рассуждения повторяются для первого игрока. В этом случае

$$p_{i_1}^{1*} = \frac{\Pi_{i_2 2} - \Pi_{i_2 1}}{(\Pi_{i_1 1} + \Pi_{i_2 2}) - (\Pi_{i_1 2} + \Pi_{i_2 1})}, \quad p_{i_2}^{1*} = 1 - p_{i_1}^{1*}.$$

Пример 8.9. В игре из примера 8.7 для первого игрока возможна одна оптимальная смешанная стратегия (см. рис. 8.7), для которой $i_1 = 1$, а $i_2 = 3$. Таким образом,

$$p_1^{1*} = \frac{2-3}{(2+2)-(4+3)} = \frac{1}{3}, \quad p_3^{1*} = \frac{2}{3}, \quad s^*_{X^1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

а цена игры

$$\nu^* = 2\cdot \frac{1}{3} + 2\cdot 0 + 3\cdot \frac{2}{3} - 2\cdot 0 = \frac{8}{3} = 4\cdot \frac{1}{3} + 3\cdot 0 + 2\cdot \frac{2}{3} + 6\cdot 0.$$

Метод линейного программирования. Использование *линейного программирования* наиболее эффективно для игр двух участников с нулевой суммой без седловых точек и большим количеством стратегий у обоих игроков. В принципе любая конечная игра двух участников с нулевой суммой может быть преобразована в соответствующую *задачу линейного программирования* и, наоборот, каждую задачу линейного программирования можно интерпретировать как конечную игру двух участников с нулевой суммой.

Действительно, пусть $(\Pi_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{R})$ — платежная матрица в игре двух участников с нулевой суммой без седловых точек. Как мы уже знаем, в этом случае оптимальная смешанная стратегия первого игрока определяется условиями:

$$\nu^* = \max_{p_i^1} \min_j \sum_{i=1}^m \Pi_{ij} p_i^1, \quad \sum_{i=1}^m p_i^1 = 1, \quad p_i^1 \geqslant 0, \quad i = \overline{1,m},$$

где ν^* — ожидаемая цена игры; Π_{ij} — элемент платежной матрицы, расположенный на пересечении ее i-й строки и j-го столбца и равный выигрышу первого игрока, если он использует стратегию X_i^1, а его противник использует стратегию X_j^2; p_i^1 — вероятность выбора первым игроком стратегии X_i^1. При этом величина

$$\nu = \min_j \sum_{i=1}^m \Pi_{ij} p_i^1$$

представляет собой ожидаемый выигрыш первого игрока при использовании им смешанной стратегии $s_{X^1} = \begin{pmatrix} p_1^1 & p_2^1 & \dots & p_m^1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. Таким образом,

$$\nu^* = \max_{p_i^1} \nu$$

и имеют место неравенства

$$\nu \leqslant \sum_{i=1}^m \Pi_{ij} p_i^1, \quad j = \overline{1,n}.$$

Поэтому задача об определении оптимальной смешанной стратегии для первого игрока может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{cases} \nu \to \max; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \Pi_{ij} p_i^1 \geqslant \nu, \quad j = \overline{1,n}; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} p_i^1 = 1; \\ p_i^1 \geqslant 0, \quad i = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Предположим, что ожидаемая цена игры ν^* этой задачи положительна, т.е. $\nu^* > 0$. Введем новые переменные

$$x_i = \frac{p_i^1}{\nu^*}, \quad i = \overline{1,m}.$$

Так как значению $\max \nu$ соответствует значение

$$\min \frac{1}{\nu} \equiv \min \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{m} p_i^1 \equiv \min \sum_{i=1}^{m} x_i,$$

то мы приходим к задаче линейного программирования для первого игрока

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} x_i \to \min; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \Pi_{ij} x_i \geqslant 1, \ j = \overline{1,n}, \quad x_i \geqslant 0, \ i = \overline{1,m}. \end{cases}$$

Заметим, что в этой задаче отсутствует ограничение типа равенства, связывающее вероятности выбора первым игроком своих чистых стратегий. Данное обстоятельство обусловлено наличием функциональной зависимости между координатами x_i^* оптимального решения рассматриваемой задачи линейного программирования, координатами p_i^{1*} оптимальной смешанной стратегии первого игрока и ожидаемой ценой игры:

$$x_i^* = \frac{p_i^{1*}}{\nu^*}, \quad i = \overline{1,m}.$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{m} p_i^{1*} = 1$$

тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^* = \frac{1}{\nu^*}.$$

Найдя оптимальное решение $(x_1^* \ \dots \ x_m^*)^T$ задачи линейного программирования для первого игрока, мы можем вычислить ожидаемую цену игры ν^* и затем оптимальную смешанную стратегию $s_{X^1}^* = \left(p_1^{1*} \ \dots \ p_m^{1*}\right)^T$ первого игрока.

Для второго игрока оптимальная смешанная стратегия определяется условиями:

$$\nu^* = \min_{p_j^2} \max_i \sum_{j=1}^{n} \Pi_{ij} p_j^2, \quad \sum_{j=1}^{n} p_j^2 = 1, \quad p_j^2 \geqslant 0, \ j = \overline{1, n},$$

где p_j^2 — вероятность выбора вторым игроком стратегии X_j^2. В новых переменных

$$y_i = \frac{p_j^2}{\nu^*}, \quad j = \overline{1, n},$$

приходим к задаче линейного программирования для второго игрока

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} y_j \to \max; \\ \sum_{j=1}^{n} \Pi_{ij} y_j \leqslant 1, \ i = \overline{1, m}, \quad y_j \geqslant 0, \ j = \overline{1, n}, \end{cases}$$

являющейся *двойственной задачей* по отношению к задаче линейного программирования для первого игрока.

Прежде чем переходить к рассмотрению иллюстративного примера, отметим следующее.

1. Если $\nu < 0$, то ко всем элементам платежной матрицы (Π_{ij}) можно прибавить настолько большое положительное число $K > \max\limits_{ij} \Pi_{ij}$, что все элементы платежной матрицы станут положительными. В этом случае цена игры увеличится на K, а решение не изменится.

2. Двойственность задач линейного программирования для первого и второго игроков приводит к тому, что решение одной из них автоматически приводит к решению другой. Учитывая это, как правило, решают задачу, имеющую меньшее число ограничений. А это, в свою очередь, зависит от числа чистых стратегий, находящихся в распоряжении каждого из игроков.

Пример 8.10. Вернемся к игре „три пальца", которую мы рассматривали в примерах 8.2, 8.4. Для нее

$$(\Pi_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \Pi_* = -3 < 4 = \Pi^*.$$

Прибавляя ко всем элементам матрицы (Π_{ij}) число $K = 5$, приходим к матрице модифицированной игры

$$(\Pi^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 11 \end{pmatrix},$$

которой соответствует задача линейного программирования

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \to \min; \\ 7x_1 + 2x_2 + 9x_3 \geqslant 1, \quad 2x_1 + 9x_2 + \geqslant 1, \quad 9x_1 + 11x_3 \geqslant 1, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Воспользовавшись симплекс-методом, находим решение:

$$x_1^* = \frac{1}{20}, \quad x_2^* = \frac{1}{10}, \quad x_3^* = \frac{1}{20}.$$

Таким образом, цена модифицированной игры

$$(\nu^1)^* = \frac{1}{x_1^* + x_2^* + x_3^*} = 5,$$

а цена исходной игры $\nu^* = (\nu^1)^* - 5 = 0$. При этом

$$p_i^{1*} = (\nu^1)^* x_i, \quad i = \overline{1,3},$$

т.е. оптимальная смешанная стратегия первого игрока

$$s_{X^1}^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

В рассматриваемой игре $(\Pi_{ij})^{\mathrm{T}} = (\Pi_{ij})$ и $s_{X^2}^* = s_{X^1}^*$. Нетрудно найти оптимальную смешанную стратегию второго игрока, решив соответствующую задачу линейного программирования, и убедиться в том, что она совпадает с оптимальной смешанной стратегией первого игрока. #

Завершая рассмотрение игр двух участников с нулевой суммой без седловых точек, заметим, что при использовании смешанных стратегий перед каждой партией игры каждым игроком запускается некий механизм (бросание монеты, игральной кости или использование датчика случайных чисел), обеспечивающий выбор каждой чистой стратегии с заданной вероятностью. Как мы уже отмечали, смешанные стратегии представляют собой математическую модель гибкой тактики, при использовании которой противник не знает заранее, с какой обстановкой ему придется столкнуться в каждой следующей партии игры. При этом ожидаемые теоретические результаты игры, при неограниченном возрастании числа разыгрываемых партий, стремятся к их истинным значениям.

8.4. Игры двух участников с ненулевой суммой

В *играх* двух участников *с нулевой суммой* интересы игроков являются диаметрально противоположными и им невыгодно информировать друг друга о своих предполагаемых действиях. Иная картина может наблюдаться в играх двух участников с ненулевой суммой. В частности, совершенно очевидна необходимость координированных действий игроков в *игре с постоянной разностью* (см. рис. 8.2):

$$\Pi^1_{ij} - \Pi^2_{ij} \equiv C = \mathrm{const}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n},$$

когда они выигрывают и проигрывают одновременно. При этом (Π^k_{ij}) — *платежная матрица* k-го игрока, $k = 1, 2$.

Пример 8.11. Два человека оказались в горящем доме. Они могут покинуть дом и спастись лишь через входную дверь, которую заклинило так сильно, что открыть ее можно только совместными усилиями.

В данном случае каждый из игроков ($k = 1, 2$) располагает двумя *стратегиями*:

X^k_1 — толкать дверь и пытаться ее открыть;

X^k_2 — не толкать дверь.

Действуя вместе, игроки могут спастись — выигрыш каждого равен 1; в противном случае могут пострадать оба — выигрыш каждого равен 0. Таким образом, платежная матрица имеет вид

$$\left((\Pi^1_{ij}, \Pi^2_{ij}) \right) = \begin{pmatrix} (1, 1) & (0, 0) \\ (0, 0) & (0, 0) \end{pmatrix},$$

и мы имеем игру с постоянной (нулевой) разностью, в которой игрокам целесообразно координировать свои действия. #

Выше было отмечено, что игры с ненулевой суммой могут быть *кооперативными* и *некооперативными*. В некооперативных играх, которые рассматриваются в этом параграфе, игроки принимают решения независимо друг от друга либо потому, что координация действий запрещена, либо потому, что она невозможна. Примером подобной ситуации могут служить антитрестовские законы, запрещающие некоторые виды соглашений между крупными фирмами.

Один из подходов к решению некооперативных игр двух участников связан с понятием точки равновесия игры. Пусть X_i^1, $i=\overline{1,m}$, и X_j^2, $j=\overline{1,n}$, — *чистые стратегии* первого и второго игроков соответственно, а $\Pi^k=(\Pi_{ij}^k)\in M_{mn}(\mathbb{R})$ — платежная матрица k-го игрока, $k=1,2$, в которой Π_{ij}^k — выигрыш k-го игрока при использовании первым игроком стратегии X_i^1, а вторым игроком — стратегии X_j^2. Обозначим через S^1 и S^2 множества *смешанных стратегий* первого и второго игроков, т.е.

$$S^1=\left\{\begin{pmatrix}p_1^1 & \ldots & p_m^1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^m:\ \sum_{i=1}^{m}p_i^1=1,\ p_i^1\geqslant 0,\ i=\overline{1,m}\right\},$$

$$S^2=\left\{\begin{pmatrix}p_1^2 & \ldots & p_n^2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n:\ \sum_{j=1}^{n}p_j^2=1,\ p_j^2\geqslant 0,\ j=\overline{1,n}\right\}.$$

Величина p_r^k — это вероятность выбора k-м игроком своей чистой стратегии X_r^k.

Под ***точкой равновесия*** некооперативной ***игры*** двух участников понимают пару *оптимальных* смешанных *стратегий* $s_{X^1}^*\in S^1$ и $s_{X^2}^*\in S^2$, т.е.

$$s_{X^1}^{\mathrm{T}}\Pi^1 s_{X^2}^*\leqslant (s_{X^1}^*)^{\mathrm{T}}\Pi^1 s_{X^2}^*,\qquad s_{X^1}\in S^1,$$

$$(s_{X^1}^*)^{\mathrm{T}}\Pi^2 s_{X^2}\leqslant (s_{X^1}^*)^{\mathrm{T}}\Pi^2 s_{X^2}^*,\qquad s_{X^2}\in S^2.$$

Таким образом, как и в играх двух участников с нулевой суммой, в рассматриваемом подходе к решению некооперативных игр *оптимальность решения* связывают с ***состоянием равновесия игры***, т.е. с ситуацией, в которой ни одному из игроков невыгодно изменять свою стратегию. Следует отметить, что в некооперативной игре может быть несколько точек равновесия и различным парам смешанных оптимальных стратегий игроков могут соответствовать различные значения ожидаемых выигрышей.

Пример 8.12. Двое подростков (игроки с номерами 1 и 2) едут на автомобилях навстречу друг другу, имея в своем распоряжении по две стратегии: X_1^k — свернуть в сторону; X_2^k — не свернуть. Если один свернул в сторону, а другой поехал прямо, то выигравший (поехавший прямо) получает одно очко, а проигравший (свернувший в сторону) теряет одно очко. Если сворачивают оба, то их выигрыши равны нулю. Если же ни один из них не свернул в сторону, то игра заканчивается аварией и каждый игрок проигрывает 20 очков. Таким образом, платежная матрица игры имеет вид

$$\left((\Pi_{ij}^1, \Pi_{ij}^2) \right) = \begin{pmatrix} (0,\ 0) & (-1,\ 1) \\ (1,\ -1) & (-20,\ -20) \end{pmatrix},$$

а платежные матрицы игроков равны

$$\Pi^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -20 \end{pmatrix}, \quad \Pi^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -20 \end{pmatrix}.$$

Для определения точек равновесия рассматриваемой игры воспользуемся тем, что у каждого из игроков две чистые стратегии:

$$p_2^k = 1 - p_1^k, \quad k = 1, 2.$$

Таким образом, в соответствии с определением оптимальной смешанной стратегии имеем

$$\begin{pmatrix} p_1^1 & 1-p_1^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^{2*} \\ 1-p_1^{2*} \end{pmatrix} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{pmatrix} p_1^{1*} & 1-p_1^{1*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^{2*} \\ 1-p_1^{2*} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} p_1^{1*} & 1-p_1^{1*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^{2} \\ 1-p_1^{2} \end{pmatrix} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{pmatrix} p_1^{1*} & 1-p_1^{1*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^{2*} \\ 1-p_1^{2*} \end{pmatrix},$$

где $p_1^1, p_1^2 \in [0, 1]$, или, что то же самое,

$$(p_1^{1*} - p_1^1)(19 - 20p_1^{2*}) \geqslant 0, \quad p_1^1 \in [0, 1],$$

$$(p_1^{2*} - p_1^2)(19 - 20p_1^{1*}) \geqslant 0, \quad p_1^2 \in [0, 1].$$

Решив полученную систему неравенств, находим $p_1^{1*} = 1$, $p_1^{2*} = 0$ или $p_1^{1*} = 0$, $p_1^{2*} = 1$. Значит, игра имеет две точки равновесия:

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right), \quad \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right),$$

которым соответствуют платежи $(-1,\ 1)$ и $(1,\ -1)$.

Вопросы и задачи

8.1. Какие способы описания игр Вы знаете? В чем заключается их принципиальное различие?

8.2. Дайте определение игры двух участников с нулевой суммой. Почему игры двух участников с нулевой суммой называют антагонистическими играми?

8.3. Почему в играх двух участников с нулевой суммой участникам целесообразно использовать максиминные и минимаксные стратегии? Что представляет собой: а) нижняя цена игры; б) верхняя цена игры?

8.4. Докажите, что игра двух участников с нулевой суммой обладает следующими свойствами:

а) седловая точка может быть не единственной, но чистая цена игры определена однозначно;

б) чистая цена игры является неубывающей непрерывной функцией элементов платежной матрицы.

8.5. Всегда ли оптимальное решение в играх двух участников с нулевой суммой соответствует седловой точке?

8.6. Докажите, что в любой игре двух участников с нулевой суммой выполняется неравенство

$$\max_{p_i^1}\min_{j}\sum_{i=1}^{m}p_i^1\Pi_{ij}\leqslant\min_{p_i^2}\max_{i}\sum_{i=1}^{n}p_j^2\Pi_{ij}.$$

8.7. Докажите, что в игре двух участников с нулевой суммой и без седловых точек верны следующие утверждения:

а) если противник использует свою оптимальную смешанную стратегию, то никакая смешанная стратегия не может дать большего выигрыша, чем оптимальная стратегия;

б) оптимальные смешанные стратегии не изменяются при монотонных линейных преобразованиях, а цена игры изменяется согласно использованному монотонному линейному преобразованию;

в) если s_1 и s_2 — две оптимальные смешанные стратегии игрока, то оптимальной является и смешанная стратегия $s = \alpha s_1 + (1-\alpha)s_2$, где $0 < \alpha < 1$.

8.8. Докажите, что любая задача линейного программирования может быть представлена как игра двух участников с нулевой суммой.

8.9. В чем заключается принципиальное отличие игр двух участников с ненулевой суммой от игр двух участников с нулевой суммой?

8.10. Имеются два игрока: игрок A прячется, а игрок B его ищет. Игрок A по своему усмотрению может спрятаться в любом из убежищ с номерами 1 и 2 соответственно. Если игрок B найдет игрока A в том убежище, где тот спрятался, то игрок A платит игроку B штраф в одну денежную единицу. Если игрок B будет искать игрока A не в том убежище, где тот спрятался, то игрок B платит игроку A такой же штраф. Для этой игры: а) постройте платежную матрицу игры; б) установите, имеются ли седловые точки; в) найдите оптимальное решение.

Ответ: а) $(\Pi_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; б) седловых точек нет; в) $s^*_{X^1} = s^*_{X^2} = \left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right)^{\text{т}}$.

8.11. Найдите седловую точку и чистую цену в игре двух участников с нулевой суммой, в которой платежная матрица второго игрока имеет вид:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 8 & 6 & 2 & 8 \\ 8 & 9 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \qquad \text{б)} \begin{pmatrix} -0{,}5 & -0{,}6 & -0{,}8 \\ -0{,}9 & -0{,}7 & -0{,}8 \\ -0{,}7 & -0{,}5 & -0{,}6 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: а) $\Pi_{31} = -7$; б) $\Pi_{22} = 0{,}7$; в) $\Pi_{13} = \Pi_{14} = \Pi_{33} = \Pi_{34} = \Pi_{43} = \Pi_{44} = 1$.

8.12. Найдите оптимальное решение и цену игры в игре двух участников с нулевой суммой и платежной матрицей:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}7 & 1 \\ 1 & 0{,}7 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: а) $s^*_{X^1} = (0\ 1)^{\text{т}}$, $s^*_{X^2} = (0\ 1\ 0)^{\text{т}}$, $\nu = \frac{2}{3}$; б) $s^*_{X^1} = \left(\frac{3}{8}\ \frac{5}{8}\right)^{\text{т}}$, $s^*_{X^2} = \left(\frac{1}{4}\ 0\ \frac{3}{4}\right)^{\text{т}}$, $\nu = \frac{5}{8}$; в) $s^*_{X^1} = (p\ 1-p)^{\text{т}}$, где $p \in \left[\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right]$ любое, $s^*_{X^2} = (0\ 1\ 0)^{\text{т}}$, $\nu = 0{,}7$.

8.13. Найдите оптимальное решение и цену игры с платежной матрицей:

$$\text{а)}\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix};\quad \text{б)}\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -1 \\ -4 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: а) $s^*_{X^1} = \left(\frac{1}{7}\ \frac{6}{7}\ 0\right)^{\mathrm{T}}$, $s^*_{X^2} = \left(\frac{3}{7}\ \frac{4}{7}\ 0\right)^{\mathrm{T}}$, $\nu = \frac{32}{70}$; б) $s^*_{X^1} = \left(\frac{20}{45}\ \frac{11}{45}\ \frac{14}{45}\right)^{\mathrm{T}}$, $s^*_{X^2} = \left(\frac{14}{45}\ \frac{11}{45}\ \frac{20}{45}\right)^{\mathrm{T}}$, $\nu = \frac{196}{45}$.

8.14. Ниже перечислен ряд принципов, лежащих в основе различных подходов к решению игр двух участников с ненулевой суммой:

а) принцип максимина (максимизация своих минимальных выигрышей каждым игроком);

б) принцип минимакса (каждый игрок минимизирует максимальный выигрыш своего противника);

в) принцип максимальной суммы (максимизируется сумма выигрышей игроков);

г) принцип максимальной разности (максимизируется разность выигрышей игроков).

Сравните эти подходы на примере игры двух подростков на автомобилях (см. пример 8.12).

9. ВВЕДЕНИЕ В ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

До сих пор мы фактически не сталкивались с анализом обширного класса *задач исследования операций*, известных как ***задачи организационного управления***. В качестве примера рассмотрим задачу формирования инвестиционной политики крупной фирмы при перспективном планировании ее деятельности. Другие примеры подобных задач и их качественный анализ можно найти в специальной литературе.

Инвестиционная политика любой крупной фирмы должна, в частности, учитывать финансовое обеспечение научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ при создании новых видов продукции, возможности расширения рынка сбыта, критериальные оценки основных проектов, оценку степени риска при планировании тех или иных комплексов работ, источники финансирования (кредит, привлечение капитала путем продажи акций и т.д.), увеличение фонда заработной платы, размещение и сокращение финансовых активов, сравнительную оценку вариантов слияния с другой фирмой и ее приобретения и т.д.

Ознакомившись с этим далеко не полным перечнем требований, предъявляемых к инвестиционной политике любой крупной фирмы, мы должны для себя отметить следующее:

1) инвестирование имеет стохастическую природу и динамический характер, поэтому рассматриваемая задача является *многошаговой стохастической задачей принятия решений*;

2) на каждом этапе в распоряжении „*лица, принимающего решения*“, имеется огромное количество *альтернатив* (*допустимых решений*);

3) возможны трудности различного рода, связанные с формализацией исходной задачи;

4) *математическая модель* принятия решений будет иметь столь значительное число внутренних связей и обладать такой большой размерностью, что возможность ее практической реализации в общем случае является весьма проблематичной.

Таким образом, столкнувшись с задачей организационного управления, „лицо, принимающее решения“, вынуждено либо в значительной степени использовать свою интуицию и личный опыт, либо искать иные подходы к ее решению. Наиболее эффективный из существующих в настоящее время подходов к решению задач организационного управления связан с использованием имитационного моделирования и вычислительной техники.

9.1. Основные понятия и этапы имитационного моделирования

С ***имитационным моделированием в широком смысле*** наверняка знаком каждый, и многочисленные примеры его использования привести несложно. Поэтому мы лишь заметим, что при продувке модели летательного аппарата в аэродинамической трубе имитируется его поведение в условиях реального полета, а различного рода войсковые учения и маневры связаны с имитацией боевых действий. Основная цель имитационного моделирования заключается в воспроизведении поведения изучаемой системы на основе анализа наиболее существенных взаимосвязей ее элементов.

При использовании имитационного моделирования прежде всего строится модель изучаемой системы. Затем проводится сравнительный анализ конкретных вариантов ее функционирования путем „проигрывания“ различных возможных ситуаций на модели. Таким образом, если основной *задачей исследования операций* является нахождение *оптимального решения* из множества G *допустимых решений* изучаемой системы S, то ***задача имитационного моделирования*** состоит в имитации функционирования этой системы в различных возможных ситуациях.

При решении многих практически важных задач, в том числе и *задач организационного управления*, имитация реальных действий, как это делается, например, в армейских условиях во время учений и маневров, является слишком длительным и дорогостоящим предприятием. Поэтому в настоящее время все шире используется ***компьютерное имитационное моделирование***.

Практическое использование компьютерного имитационного моделирования предполагает построение соответствующей *математической модели*, учитывающей *факторы неопределенности*, динамические характеристики и весь комплекс взаимосвязей между элементами изучаемой системы. Имитирование системы начинается с некоторого вполне конкретного *начального состояния*. В соответствии с принимаемыми решениями, а также вследствие реализаций различных контролируемых и неконтролируемых событий, среди которых могут быть и события случайного характера, модель системы переходит в последующие моменты времени в другие свои возможные состояния. Этот эволюционный процесс будет продолжаться до конечного момента ***планового периода***, т.е. до конечного момента имитирования.

Компьютерное имитационное моделирование следует рассматривать как *статистический эксперимент*. В отличие от описанных в предыдущих главах математических моделей, результаты использования которых отражали устойчивое во времени поведение соответствующей системы, результаты компьютерного имитационного моделирования представляют собой наблюдения. А это означает, что любое утверждение относительно характеристик имитируемой системы является *статистической гипотезой*.

Имитационное моделирование как эксперимент может быть полностью реализовано с помощью компьютера. Описывая взаимодействие элементов изучаемой системы с помощью математических соотношений, можно получить информацию об изучаемой системе, не обращаясь к натурным экспериментам, в рамках тех упрощающих предположений, которые приняты для исходной модели. Следует отметить, что с точки зрения детализации поведения сложных систем имитационное моделирование по сравнению с „классическим“ математическим моделированием обладает большой гибкостью. Но при этом создание имитационных моделей связано со значительными затратами средств и времени. Эти затраты резко возрастают, если имитационная модель предназначена для оптимизации поведения изучаемой системы.

Результаты имитационного моделирования, как правило, представляют собой оценки значений функциональных характеристик имитируемой системы. Так, например, при имитационном моделировании системы массового обслуживания практический интерес могут представлять такие ее характеристики, как средняя продолжительность обслуживания заявки, средняя длина очереди и т.д. [XVIII]. Поэтому основой метода имитационного моделирования является моделирование случайных величин с заданными законами распределения и случайных событий с заданными вероятностями реализаций.

Компьютерное имитационное моделирование используют при решении задач двух основных типов.

1. Теоретические задачи в таких областях науки, как математика, физика и химия. Среди этих задач отметим лишь следующие:

а) вычисление кратных интегралов;

б) обращение и псевдообращение матриц;

в) вычисление различных констант, таких, как π, e и т.д.;

г) решение различных задач для уравнений в частных производных и их систем [XIII];

д) анализ диффузии частиц и нахождение пространственных траекторий их движения.

2. Практические задачи организационного управления, возникающие в различных сферах человеческой деятельности. Примерами подобных задач являются:

а) задачи разработки и анализа производственно-технологических процессов;

б) задачи, связанные с изучением возможных режимов функционирования систем экономического характера, включая процессы планирования и экономического прогнозирования;

в) задачи анализа последствий реализации той или иной военной стратегии и тактики;

г) задачи социального и социально-психологического характера.

Используя компьютерное имитационное моделирование применительно к задачам организационного управления, преследуют по крайней мере одну из следующих целей:

1) углубленное изучение действующей функциональной системы;

2) анализ гипотетической функциональной системы;

3) проектирование более совершенной функциональной системы.

Пример 9.1. Предположим, что некоторая промышленная фирма наряду с резким увеличением числа заказов на свою продукцию отметила заметное ухудшение качества обслуживания своих клиентов в части соблюдения сроков выполнения их заказов. Несоблюдение фирмой своих обязательств перед заказчиками может привести к ощутимым потерям как за счет штрафных санкций, так и за счет оттока клиентов. В рассматриваемой ситуации у фирмы может появиться желание воспользоваться компьютерным имитационным моделированием, с помощью которого можно было бы выяснить, каким образом существующие процедуры определения сроков выполнения принимаемых заказов, календарного планирования производства и оформления заявок на поставки сырья порождают наблюдаемые задержки.

Пример 9.2. Руководство крупной клиники разрабатывает новую систему управления запасами лекарственных препаратов. Использование имитационной модели, построенной на основе ретроспективных данных, позволит оценить, каким будет средний уровень средств, необходимых для обеспечения запасов лекарственных препаратов, и как часто будут возникать нехватки различных видов препаратов при реализации новой системы управления.

Пример 9.3. Рассмотрим предприятие с мелкосерийным производством, на котором производственные мощности распределены в соответствии с приоритетами, присвоенными выполняемым работам. Может быть построена имитационная модель для нахождения эффективного способа определения системы приоритетов для того, чтобы все работы могли выполняться без больших задержек и при этом коэффициент использования оборудования был бы достаточно высок. #

Теперь перейдем к краткому описанию основных этапов построения и практического использования имитационной модели. Более подробное описание и анализ каждого из этих этапов приведены в последующих разделах.

Этап 1. **Построение модели.** Содержание этого этапа практически не отличается от содержания этапа построения модели *исследования операций.* Излишняя детализация модели может привести к слишком большим затратам машинного времени при проведении вычислительного эксперимента и другим негативным последствиям. Поэтому при построении модели нужно помнить о том, что уровень ее сложности должен соответствовать основной цели проводимых исследований.

Этап 2. **Планирование вычислительного эксперимента.** На этом этапе исследователь должен уяснить для себя, какие функциональные характеристики имитируемой системы планируется измерять, с помощью каких методов математической статистики [XVII] будут учитывать флуктуации экспериментальных данных, полученных в результате этих измерений, каковы должны быть вероятности совершения тех или иных ошибок и т.д.

Этап 3. **Разработка программного обеспечения.** Компьютерное имитационное моделирование предполагает, что все стадии процесса функционирования модели, генерация случайных величин и случайных событий протекают в компьютере. Поэтому естественным является и этап разработки программного обеспечения в компьютерном имитационном моделировании, который мы не будем далее обсуждать. Во-первых, эта проблема выходит за рамки нашего курса, а во-вторых, в связи с бурным развитием вычислительной техники интенсивность разработки ее программного обеспечения такова, что наши рекомендации в этой области теряют смысл. Прежде чем переходить к более детальному изучению элементов компьютерного имитационного моделирования, рассмотрим простейший пример имитационного моделирования игры на фондовой бирже.

Пример 9.4. Биржевой игрок разработал свой порядок приобретения и продажи акций, состоящий в следующем:

1) обладая пакетом акций, необходимо продать его, как только цены на эти акции начинают падать;

2) как только цены на акции начинают возрастать, их необходимо покупать.

Игрок не желает рисковать своими ограниченными средствами в натурном эксперименте и хочет оценить прибыльность своей стратегии с помощью имитационного моделирования. Для упрощения дальнейших рассуждений будем предполагать, что:

а) игрок покупает и продает только одни какие-нибудь акции;

б) в рассматриваемый момент времени, принимаемый за начальный, игрок располагает пакетом в 100 акций, стоимостью в 10 денежных единиц каждая, и цена акции может ежедневно изменяться на 1 денежную единицу (если сегодня акция стоит 10 денежных единиц, то завтра она будет стоить 9, 10 или 11 денежных единиц);

в) игрок совершает не более одной сделки в день и за каждую сделку платит комиссионные в размере 2 % стоимости купленных или проданных акций;

г) игрок не располагает иными средствами, кроме пакета в 100 акций.

Для оценки прибыльности своей стратегии игрок построил модель суточных флуктуаций цен на акции с использованием ретроспективных биржевых данных. Эта модель представлена в виде табл. 9.1 и определяет вероятности изменения цен на акции. Согласно этой модели, если в понедельник и во вторник цена одной акции равнялась 10 денежным единицам, то в среду (см. табл. 9.1, вторая строка снизу) она будет стоить 11 денежных единиц с вероятностью 1/4, 10 денежных единиц с вероятностью 1/2 и 9 денежных единиц с вероятностью 1/4. Если же во вторник цена одной акции равнялась 9 денежным единицам, то в среду (см. табл. 9.1, первая строка снизу) она будет стоить 10 денежных единиц с вероятностью 1/4,

Таблица 9.1

Цена одной акции в (n–1)-й день	Цена одной акции в n-й день		
	Возрастает	Остается без изменения	Падает
Возросла по сравнению с (n–2)-м днем	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
Осталась такой же, как и в (n–2)-й день	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Упала по сравнению с (n–2)-м днем	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

9 денежных единиц с вероятностью 1/4 и 8 денежных единиц с вероятностью 1/2.

Прежде чем начинать процесс имитационного моделирования, необходима генерация случайных событий, которые с соответствующими вероятностями их реализаций представлены в табл. 9.1. Не располагая ни вычислительной техникой, ни соответствующим программным обеспечением, наш игрок решил воспользоваться простейшим способом, который заключается в бросании двух монет. Соответствие между возможными исходами этого *случайного испытания* и генерируемыми случайными событиями он отразил в табл. 9.2.

Таблица 9.2

Цена одной акции в $(n-1)$-й день	Цена одной акции в n-й день		
	Возрастает	Остается без изменения	Падает
Возросла по сравнению с $(n-2)$-м днем	Герб и решка	Два герба	Две решки
Осталась такой же, как и в $(n-2)$-й день	Два герба	Герб и решка	Две решки
Упала по сравнению с $(n-2)$-м днем	Два герба	Две решки	Герб и решка

Предположим, что игрок решил ограничить длительность периода имитации 20 днями и каждому дню поставил в соответствие номер $k=\overline{1,20}$. Эти номера, расположенные в порядке возрастания, образуют столбец I в табл. 9.3, отражающей результаты имитирования изменения цен на акции. Столбец II в табл. 9.3 он заполнил после 20-кратного подбрасывания двух монет, воспользовавшись следующими обозначениями: ГГ — выпали два герба; ГР — выпали один герб и одна решка; РР — выпали две решки. Для определения изменения цен на акции необходимо задать начальные условия: цену одной акции в день с

Таблица 9.3

I	II	III	IV	I	II	III	IV
1	ГР	Без изменения	10	11	РР	Рост	12
2	РР	Без изменения	9	12	ГР	Падение	11
3	ГГ	Падение	10	13	РР	Падение	11
4	ГГ	Рост	10	14	ГГ	Без изменения	12
5	ГГ	Без изменения	11	15	ГР	Рост	13
6	ГР	Рост	12	16	ГР	Рост	14
7	ГГ	Рост	12	17	РР	Рост	13
8	РР	Без изменения	11	18	ГР	Падение	12
9	ГГ	Падение	12	19	ГР	Падение	11
10	ГР	Рост	13	20	РР	Падение	11

номером $k = 0$ и направление изменения вчерашней цены. В соответствии с исходными предположениями начальная цена одной акции равнялась 10 денежным единицам и совпадала с ценой в предшествующий день. Это нашло свое отражение в первой строке столбца III табл. 9.3, в котором игрок фиксировал направления изменения вчерашней цены акции. В столбце IV он фиксировал сегодняшнюю цену одной акции.

Согласно табл. 9.2, при рассматриваемых начальных условиях выпадение герба и решки при первом бросании двух монет означает, что в первый день цена акции не изменяется (первая строка, столбец III) и остается равной 10 денежным единицам (первая строка, столбец IV). Поскольку цены акций в первый день имитирования равны 10 денежным единицам, то выпадение двух решек при втором бросании двух монет (вторая строка, столбец II) означает падение цены до 9 денежных единиц за акцию (вторая строка, столбец IV). Аналогично проверяется правильность заполнения игроком двух последних столбцов табл. 9.3.

Воспользовавшись данными об изменении цены акции за двадцатидневный период, представленными в табл. 9.3, наш игрок составил табл. 9.4, в которой отразил результаты имита-

Таблица 9.4

День имитации	Цена акции	Решение	Количество акций у игрока	Стоимость пакета акций	Наличные деньги
1	10	–	100	1000	0,00
2	9	Продать	0	0	882,00
3	10	Купить	86	860	4,80
4	10	–	86	860	4,80
5	11	–	86	946	4,80
6	12	–	86	1032	4,80
7	12	–	86	1032	4,80
8	11	Продать	0	0	931,88
9	12	Купить	76	912	1,64
10	13	–	76	988	1,64
11	12	Продать	0	0	895,40
12	11	–	0	0	895,40
13	11	–	0	0	895,40
14	12	Купить	73	876	1,88
15	13	–	73	949	1,88
16	14	–	73	1022	1,88
17	13	Продать	0	0	931,90
18	12	–	0	0	931,90
19	11	–	0	0	931,90
20	11	–	0	0	931,90

ционного моделирования своей стратегии купли и продажи акций на бирже. Прочерки в третьем столбце этой таблицы означают отсутствие сделок, что может быть обусловлено как выбранной стратегией поведения игрока (дни имитации 1, 4, 7, 13, 20), так и отсутствием у него либо наличных денег (дни имитации 5, 6, 10, 15, 16), либо акций (дни имитации 12, 18, 19). При определении наличных денег учитывались комиссионные с каждой сделки. Так, например, на девятый день имитации игрок, располагая наличностью в размере 931,88 денежных единиц, купил 76 акций по цене 12 денежных единиц за акцию, заплатил комиссионные в размере $0,02 \cdot 12 \cdot 76 = 18,24$ денежных единиц и у него осталось в наличии $931{,}88 - 12 \cdot 76 - 0.02 \cdot 12 \cdot 76 = 1{,}64$ денежных единиц.

Проанализировав результаты имитационного моделирования, записанные в табл. 9.4, можно сразу отметить, что, придерживаясь своей стратегии, биржевой игрок останется в проигрыше. Но это лишь первое впечатление. Действительно, если процесс имитирования оборвать на шестой или шестнадцатый день, то он выиграет. А что будет, если повторить имитационный эксперимент или увеличить длительность периода имитирования? #

Даже этот простейший пример имитационного моделирования игры на фондовой бирже порождает ряд весьма сложных вопросов относительно меры эффективности выбираемой стратегии и метода проектирования научно обоснованного эксперимента по проверке этой эффективности. Кроме того, становится очевидным, что, несмотря на простоту вычислительных процедур при имитационном моделировании, их объем весьма значителен. Поэтому конструктивное использование имитационного моделирования практически невозможно без использования быстродействующей вычислительной техники.

Завершая наши общие рассуждения, отметим, что практическое использование имитационного моделирования, как правило, связано с необходимостью учета случайных событий и случайных величин (см. пример 9.4). В связи с этим рассмотрим методы их математического моделирования.

9.2. Моделирование случайных величин и случайных событий

В определенном смысле предшественником методов современного *имитационного моделирования* можно считать *метод Монте-Карло*, известный достаточно давно и широко применяемый при решении теоретических задач до конца 50-х годов. Основная идея этого метода заключается в использовании случайных выборок для получения искомых оценок. В свою очередь, процесс получения случайных выборок предполагает, что исходная задача была формализована с учетом соответствующих законов распределений входящих случайных величин.

Имитационное моделирование, подобно методу Монте-Карло, основано на использовании случайных выборок для оценивания результатов функционирования моделируемой системы. В этом плане многие идеи, возникшие в связи с разработкой метода Монте-Карло, нашли непосредственное применение в *компьютерном имитационном моделировании.* В первую очередь это относится к использованию *псевдослучайных чисел* для получения реализаций случайных выборок из генеральных совокупностей случайных величин с заданными законами распределения и к разработке способов уменьшения объемов случайных выборок, необходимых для надежной оценки получаемых результатов.

Отметим, что в настоящее время задача компьютерного моделирования случайных величин и случайных событий решается с использованием различных программных средств, имеющихся в распоряжении пользователя. Но мы считаем, что полезно иметь хотя бы общие представления о самом механизме моделирования. Эту цель и преследовали авторы при изложении материала этого параграфа.

В основе компьютерного моделирования случайных событий и случайных величин лежит реализация на компьютере равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$ случайных величин, для чего используют два принципа: физический и алгоритмический. Мы не будем касаться физического принципа, который основан на использовании различных физических явлений, достаточно подробно описан в специальной литературе* и в настоящее время уже практически не применяется в компьютерном имитационном моделировании, а остановимся на втором принципе — алгоритмическом.

*См.: *Таха Х.*, т. 2.

Для получения реализаций случайных величин, равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$, широко используют различные алгоритмические методы, причем главным образом те, которые достаточно просто реализовать на компьютере. Среди них наиболее распространен ***метод мультипликативных конгруэнций***, на обсуждении которого мы и остановимся.

Далее будем говорить, что два числа $x, y \in \mathbb{N}$ являются конгруэнтными по модулю $m \in \mathbb{N}$ (или равными по модулю m) и писать при этом $x \overset{m}{=} y$, если число $|x - y|$ является кратным m, т.е. делится на него без остатка. В качестве числа $y \in \mathbb{N}$, конгруэнтного числу $x \in \mathbb{N}$ по модулю $m \in \mathbb{N}$, можно взять, например, остаток от деления x на m.

Пример 9.5. Пусть $x = 43297$ и $m = 10$. Тогда $y = 7$ и $43297 \overset{10}{=} 7$. Если же в условиях рассматриваемого примера $m = 2$, то $y = 1$ и $43297 \overset{2}{=} 1$. #

Метод мультипликативных конгруэнций состоит в получении числовой последовательности $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ с помощью рекуррентной формулы

$$x_{k+1} \overset{m}{=} ax_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

в которой a, m, $x_0 \in \mathbb{N}$ — входные параметры. Полученные таким способом числа x_k называют ***псевдослучайными***. Реализация метода на компьютере приводит к тому, что числа x_k с какого-то момента начинают повторяться. Учитывая это, входные параметры подбирают так, чтобы количество псевдослучайных чисел до того, как они начнут повторяться, было достаточно большим: его должно хватать для одного полного *прогона имитационной модели*.

Предположим, что мы намерены генерировать десятичные дроби y_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, с десятью знаками после запятой. Можно доказать, что если $y_k = 10^{-10}x_k$, $a = 100003$, $m = 10^{10}$, а x_0 — любое нечетное число, не делящееся на 5, то равенство

$x_n = x_0$ впервые будет иметь место при $n = 5 \cdot 10^8$. Если при этом $x_0 = 123456789$, то

$$ax_0 = 100003 \cdot 123456789 = 12346049270367 \overset{10^{10}}{=}$$
$$\overset{10^{10}}{=} 6049270367 = x_1, \quad y_1 = 0{,}6049270367;$$

$$ax_1 = 100003 \cdot 6049027367 = 604945184511101 \overset{10^{10}}{=}$$
$$\overset{10^{10}}{=} 5184511101 = x_2, \quad y_2 = 0{,}5184511101$$

и т.д. Значения y_k, $k = \overline{1, 30}$, приведены в табл. 9.5. Проверив соответствующие *статистические гипотезы*, можно убедиться в том, что эти числа — реализации равномерно распределенной на отрезке [0, 1] случайной величины. Вместе с тем все эти числа „определены" заранее, как только заданы входные параметры a, m, x_0 в исходной рекуррентной формуле. Именно поэтому полученные подобным образом числа называют псевдослучайными в отличие от истинно случайных, для генерации которых используют физический принцип.

Таблица 9.5

k	y_k	k	y_k	k	y_k
1	0,6049270367	11	0,6956902556	21	0,7531391389
2	0,5184511120	12	0,1126290699	22	0,1733065296
3	0,6665535727	13	0,2448731491	23	0,1728751589
4	0,3569329660	14	0,0495253020	24	0,0345180076
5	0,3673940252	15	0,6787808067	25	0,9043107612
6	0,5046996355	16	0,1170111628	26	0,7890546151
7	0,4776453995	17	0,4673165634	27	0,8286741394
8	0,9728847466	18	0,0582941814	28	0,8999650040
9	0,3933189141	19	0,5930217271	29	0,2002926951
10	0,0713648160	20	0,9517789780	30	0,8703832609

Из теории функций случайных величин известно [XVI], что для моделирования случайной величины $\xi(\omega)$ с любой непрерывной и монотонно возрастающей функцией распределения $F_\xi(x)$

достаточно уметь моделировать случайную величину $\eta(\omega)$, равномерно распределенную на отрезке $[0, 1]$. Получив реализацию y_k случайной величины $\eta(\omega)$, можно найти соответствующую ей реализацию x_k случайной величины $\xi(\omega)$, так как они связаны равенством

$$x_k = F_\xi^{-1}(y_k). \tag{9.1}$$

Пример 9.6. Предположим, что в некоторой системе массового обслуживания время обслуживания одной заявки распределено по экспоненциальному закону с параметром μ, где μ — интенсивность обслуживания [XVIII]. Тогда функция распределения $G(t)$ времени обслуживания имеет вид

$$G(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t}, & t > 0; \\ 0, & t \leqslant 0. \end{cases}$$

Пусть $y_k \in [0, 1]$ — реализация случайной величины $\eta(\omega)$, равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$, а t_k — соответствующая ей реализация случайного времени обслуживания одной заявки. Тогда, согласно (9.1),

$$t_k = G^{-1}(y_k) = -\mu^{-1} \ln(1 - y_k). \quad \#$$

Требование, чтобы функция распределения $F_\xi(x)$ случайной величины $\xi(\omega)$ была непрерывной и монотонно возрастающей, для равенства (9.1) не является принципиальным. Это непосредственно следует из общей постановки и решения задачи о нахождении законов распределения функций случайных величин [XVI]. Но в общем случае $F_\xi^{-1}(x_k)$ — прообраз элемента x_k при отображении F_ξ, и при практическом использовании равенства (9.1) может появиться определенная специфика.

Пример 9.7. Пусть $\xi(\omega)$ — число очков на верхней грани игральной кости при ее произвольном бросании. Если предположить, что игральная кость является правильной (т.е. является однородной, имеет форму куба и не может встать на ребро или вершину), то $\xi(\omega)$ — дискретная случайная величина с множеством возможных значений $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и вероятностями событий $\mathbf{P}[\xi(\omega) = k] = 1/6$, $k = \overline{1,6}$. Значит, функция распределения этой случайной величины имеет вид

$$F_\xi(x) = \mathbf{P}[\xi(\omega) \leqslant x] = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ 1/6, & 1 \leqslant x < 2; \\ 2/6, & 2 \leqslant x < 3; \\ 3/6, & 3 \leqslant x < 4; \\ 4/6, & 4 \leqslant x < 5; \\ 5/6, & 5 \leqslant x < 6; \\ 1, & 6 \leqslant x, \end{cases}$$

и является кусочно постоянной. Поэтому непосредственное использование равенства (9.1) для определения реализации x_k случайной величины $\xi(\omega)$ по известной реализации y_k случайной величины $\eta(\omega)$ становится проблематичным. Вместе с тем

$$\mathbf{P}\left[\frac{k-1}{6} \leqslant \eta(\omega) < \frac{k}{6}\right] = \frac{1}{6} = \mathbf{P}[\xi(\omega) = k], \quad k = \overline{1,6},$$

откуда следует, что если $y_k \in \left[\frac{k-1}{6}, \frac{k}{6}\right)$, то $x_k = k$, $k = \overline{1,6}$. Так, например, если $y_k = 0{,}4$, то $x_k = 3$. #

В ряде случаев для определения реализации x_k случайной величины $\xi(\omega)$ с заданной функцией распределения $F_\xi(x)$ бывает удобнее использовать ее вероятностно-статистические свойства, а не равенство (9.1). В первую очередь это относится к случайной величине $\xi(\omega)$, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2, для моделирования которой может быть использована *центральная предельная теорема*. Действительно, если $\eta_j(\omega)$, $j = \overline{1,n}$, — независимые равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$ случайные величины, то $\mathbf{M}[\eta_j(\omega)] = 1/2$, $\mathbf{D}[\eta_j(\omega)] = 1/12$, $j = \overline{1,n}$, и при достаточно больших n случайная величина

$$\xi(\omega) = m + \sqrt{\frac{12\sigma^2}{n}} \sum_{j=1}^{n} \left(\eta_j(\omega) - \frac{1}{2}\right)$$

будет распределена по закону, близкому к нормальному с параметрами m и σ^2 [XV]. При моделировании нормально распределенных случайных величин с использованием центральной предельной теоремы обычно выбирают $n \geqslant 12$.

Рассмотрим еще один пример, иллюстрирующий использование вероятностно-статистических свойств функции распределения $F_\xi(x)$ случайной величины $\xi(\omega)$ для определения ее реализаций.

Пример 9.8. Предположим, что необходимо определить реализации дискретной случайной величины, распределенной по закону Пуассона с заданным параметром $\mu = \lambda t$. Эта задача весьма актуальна в имитационном моделировании процессов массового обслуживания [XVIII].

Известно, что если частота реализаций случайных событий имеет распределение Пуассона, то время между появлениями отдельных событий имеет экспоненциальный закон распределения [XVIII]. Для случайной величины $\xi(\omega)$, распределенной по закону Пуассона с параметром $\mu = \lambda t$, реализация — это число событий $n \geqslant 0$, происходящих за период времени t. Поэтому для реализации случайной величины $\xi(\omega)$, распределенной по закону Пуассона с параметром $\mu = \lambda t$, необходимо получить столько реализаций случайной величины, распределенной по экспоненциальному закону с параметром λ, чтобы сумма их минимального числа первый раз превысила t. В этом случае реализацию случайной величины $\xi(\omega)$ берут равной числу реализаций экспоненциально распределенной случайной величины минус единица.

Например, если $\lambda = 3$ и $t = 1{,}4$, то (см. пример 9.6) реализация t_k экспоненциально распределенной с параметром λ случайной величины определяется равенством

$$t_k = -\lambda^{-1} \ln y_k.$$

Замена $1 - y_k \in [0,1]$ на $y_k \in [0,1]$ произведена для удобства вычислений, а ее законность следует из определения равномерного закона распределения. Используя реализации y_n из табл. 9.5, получаем результаты, приведенные в табл. 9.6. Из табл. 9.6 находим, что искомая реализация равна $n = 6 - 1 = 5$. #

Таблица 9.6

n	y_n	t_n	$\sum\limits_{k=1}^{n} t_k$	n	y_n	t_n	$\sum\limits_{k=1}^{n} t_k$
1	0,6049	0,1675	0,1675	4	0,3569	0,3434	0,8651
2	0,5185	0,2190	0,3865	5	0,3674	0,3338	1,1989
3	0,6666	0,1352	0,5217	6	0,5047	0,2279	1,4268

Моделирование случайного вектора осуществляют путем последовательного моделирования его координат. При этом первую координату моделируют в соответствии с ее безусловным законом распределения, а каждую последующую — в соответствии с условным распределением при полученных ранее значениях всех предыдущих координат.

Для моделирования случайного события A с вероятностью реализации p достаточно моделировать случайную величину $\eta(\omega)$, равномерно распределенную на отрезке $[0, 1]$. При попадании реализации случайной величины $\eta(\omega)$ в отрезок $[0, p]$ считают, что случайное событие A произошло, а при ее попадании в полуинтервал $(p, 1]$ считают, что случайное событие A не произошло.

Пример 9.9. В игре с монетой первый игрок выигрывает у второго одно очко, если выпадает герб (событие A) и проигрывает ему одно очко, если монета падает противоположной стороной (событие B). При этом предполагается, что монета является правильной и не может встать на ребро, т.е. $\mathbf{P}[A] = \mathbf{P}[B] = 0{,}5$.

Поскольку числа y_k, $k = \overline{1, 30}$, в табл. 9.5 являются реализациями случайной величины $\eta(\omega)$, равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$, то можно предложить следующее правило для моделирования итога игры: если $y_k \in [0,\ 0{,}5]$, то при k-м бросании монеты реализуется событие A; если $y_k \in (0{,}5,\ 1]$, то при k-м бросании монеты реализуется событие B.

Предположим, что игроки договорились о трех партиях, каждая из которых состоит из десяти бросаний монеты. В соответствии с правилом для определения итога игры воспользуемся таблицей псевдослучайных чисел (см. табл. 9.5). Итог первой партии определяется псевдослучайными числами y_k, $k=\overline{1,\ 10}$, и его можно представить в виде строки $BBBAABABAA$. Видно, что игроки набрали по пять очков. Итог второй партии определяется псевдослучайными числами y_k с номерами $k=\overline{11,20}$, и ему соответствует строка $BAAABAAABB$. Первый игрок выигрывает у второго два очка. Итог третьей партии определяется псевдослучайными числами y_k с номерами $k=\overline{21,30}$, и ему соответствует строка $BAAABBBBAB$. Первый игрок проигрывает второму два очка. #

Для моделирования полной группы событий A_k с вероятностями $\mathbf{P}[A_k]=p_k$, $k=\overline{1,N}$, где $p_1+p_2+\dots+p_N=1$, достаточно смоделировать равномерно распределенную на отрезке $[0,1]$ случайную величину $\eta(\omega)$ и считать, что событие A_1 произошло, если реализация случайной величины $\eta(\omega)$ попала в отрезок $[0,p_1]$; событие A_2 произошло, если реализация случайной величины $\eta(\omega)$ попала в полуинтервал $(p_1,\ p_1+p_2]$ и т.д. Событие A_N соответствует попаданию реализации случайной величины $\eta(\omega)$ в полуинтервал $(p_1+p_2+\ldots+p_{N-1},\ 1]$.

9.3. Имитационное моделирование как вычислительный эксперимент

При использовании *компьютерного имитационного моделирования* для решения практических задач часто упускают из виду, что оно по своей сути представляет собой вычислительный эксперимент, результаты которого должны интерпретироваться с позиций математической статистики [XVII]. При этом необходимо помнить о том, что в соответствии с *законом больших чисел* результаты компьютерного имитационного моделирования начинают проявлять свойство устойчивости лишь после многократного повторения вычислительного эксперимента.

Таким образом, для того чтобы результаты компьютерного имитационного моделирования действительно давали представление о том, что же реально можно ожидать в будущем, вычислительный эксперимент должен быть повторен достаточно большое число раз. Ответ на вопрос, что представляет собой „достаточно большое число раз“, зависит от типа моделируемой системы и начальных условий вычислительного эксперимента.

Результаты имитационного моделирования игры в монету, приведенные в примере 9.9, нельзя считать неожиданными. Естественно, что, воспользовавшись другими таблицами *псевдослучайных чисел*, мы могли бы получить и другие варианты исхода игры. Для иллюстрации приведенных выше рассуждений рассмотрим еще один пример.

Пример 9.10. Пусть требуется определить площадь круга K с центром в точке $(1;2)$ и радиусом $r = 5$ (рис. 9.1).

Для решения задачи воспользуемся методом *Монте-Карло.* Впишем исходный круг в квадрат, который разобьем на элементарные квадраты, площадь каждого из которых равна единице (см. рис. 9.1). Применение случайных выборок при использовании метода Монте-Карло основано на предположении о равноправности всех точек квадрата $[-4,6]\times[-3,7]$ с точки зрения возможностей их реализа-

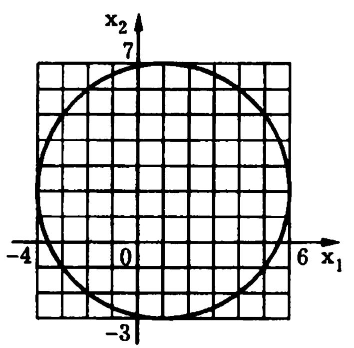


Рис. 9.1

ции. Формально это означает, что координаты случайного вектора $\eta(\omega) = (\eta_1(\omega)\ \ \eta_2(\omega))^{\mathrm{T}}$ являются независимыми случайными величинами, распределенными равномерно на отрезках $[-4, 6]$ и $[-3, 7]$ соответственно, т.е.

$$f_\eta(x_1, x_2) = f_{\eta_1}(x_1)\, f_{\eta_2}(x_2),$$

где

$$f_{\eta_1}(x_1) = \begin{cases} 0{,}1, & x_1 \in [-4, 6]; \\ 0, & x_1 \notin [-4, 6]; \end{cases} \qquad f_{\eta_2}(x_2) = \begin{cases} 0{,}1, & x_2 \in [-3, 7]; \\ 0, & x_2 \notin [-3, 7]. \end{cases}$$

В этом случае, если $K = \{(x_1; x_2)\colon x_1^2 + x_2^2 \leqslant 5^2\}$, то

$$\mathbf{P}[\eta(\omega) \in K] = \iint\limits_K f_\eta(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \iint\limits_K 0{,}1^2\, dx_1\, dx_2 = 0{,}01 m(K),$$

где $m(K)$ — площадь круга K. Таким образом,

$$m(K) = 100\, \mathbf{P}[\eta(\omega) \in K],$$

где коэффициент 100 выражает площадь квадрата, в который вписан круг K.

С учетом принятых допущений определим n реализаций случайного вектора $\eta(\omega)$, которым будут соответствовать n точек в искомом квадрате, из которых m принадлежат кругу K. В этом случае [XVI]

$$\mathbf{P}[\eta(\omega) \in K] \approx \frac{m}{n}, \quad m(K) = 100\, \mathbf{P}[\eta(\omega) \in K] \approx 100 \frac{m}{n}.$$

В табл. 9.7 приведены результаты использования метода Монте-Карло для определения площади рассматриваемого круга для различных значений n. Кроме того, для каждого фиксированного n было проведено 10 вычислительных экспериментов с использованием различных наборов псевдослучайных чисел из отрезка [0,1].

Таблица 9.7

Номер экспери-мента	Оценка площади круга при фиксированном n						
	n=100	n=200	n=500	n=1000	n=2000	n=5000	n=10000
1	78	79,5	77,4	76,2	78,80	78,22	78,77
2	70	77,0	81,0	76,2	78,70	78,60	78,23
3	80	79,5	77,2	79,0	78,15	77,72	78,88
4	70	77,0	77,0	79,7	78,70	77,76	78,63
5	79	77,0	79,4	77,0	79,45	79,00	78,21
6	81	76,0	79,2	78,8	77,65	78,68	78,27
7	77	78,0	79,0	77,3	78,40	79,08	78,64
8	78	79,5	80,2	80,2	77,05	78,54	78,27
9	82	76,5	80,4	79,5	79,75	78,34	78,67
10	75	82,0	75,6	79,8	79,00	78,22	78,16
Среднее	77,1	78,2	78,64	78,37	78,56	78,42	78,57
Дисперсия	18,3	3,5	3,1	2,4	0,66	0,23	0,22

Если полагать, что $\pi = 3{,}14159$, то $m(K) = \pi r^2 = 78{,}5398$. Исходя из анализа результатов вычислительных экспериментов, представленных в табл. 9.7, можно утверждать следующее.

1. С ростом используемого числа реализаций случайного вектора $\eta(\omega)$ оценка площади круга в среднем приближается к ее истинному значению.

2. Десять вычислительных экспериментов, отличающихся друг от друга лишь использованными наборами псевдослучайных чисел, дают различные значения оценок площади круга при одном и том же значении n. Каждый вычислительный эксперимент можно рассматривать как наблюдение в процессе имитационного моделирования.

3. При усреднении результатов по всей серии вычислительных экспериментов улучшается качество получаемых результатов. Уменьшение выборочной дисперсии в зависимости от числа испытаний n, т.е. в зависимости от используемого чи-

сла реализаций случайного вектора $\eta(\omega)$, имеет нелинейный характер, что необходимо учитывать при планировании объема испытаний. #

В завершение этого параграфа отметим, что утверждения, сформулированные в примере 9.10, полностью соответствуют основным положениям математической статистики [XVII]. Кроме того, при значительном числе экспериментов (в примере 9.10 число вычислительных экспериментов равно 10) на основании центральной предельной теоремы стандартным способом можно находить не только точечные, но и интервальные оценки интересующих нас параметров [XVII]. Так, в рассмотренном примере 9.10 при $n = 10000$ среднее значение площади круга $\hat{m}(K) = 78{,}57$, выборочная дисперсия $S^2 = 0{,}22$, число экспериментов $N = 10$. Таким образом, полуразмах симметричного доверительного интервала для оцениваемой площади круга

$$l = \sqrt{\frac{S^2}{N}}\, h^t_{1-\alpha/2}(N-1) \approx 0{,}27,$$

где $1-\alpha = 0{,}9$ — доверительная вероятность, $h^t_{1-\alpha/2}(N-1)$ — квантиль распределения Стьюдента с $(N-1)$-й степенью свободы [XVII].

Основной недостаток метода Монте-Карло и имитационного моделирования связан с необходимостью использовать огромное число реализаций случайного вектора $\eta(\omega)$ и проводить значительное число вычислительных экспериментов для получения хороших результатов. Если вернуться к примеру 9.10, то результат использования $nN = 100000$ реализаций случайного вектора $\eta(\omega)$, проведенных в 10 вычислительных экспериментах, вряд ли можно считать удовлетворительным, судя по точечной оценке $\hat{m}(K) = 78{,}57$ и полуразмаху симметричного доверительного интервала $l = 0{,}27$, построенного с минимально используемой на практике доверительной вероятностью $1-\alpha = 0{,}9$.

9.4. Построение и эксплуатация имитационных моделей

Первый этап создания любой имитационной модели — этап описания реально существующей системы в терминах характеристик основных событий. Эти события, как правило, связаны с переходами изучаемой системы из одного возможного состояния в другое и обозначаются как точки на временной оси. Для достижения основной цели моделирования достаточно наблюдать систему в моменты реализации основных событий.

Для наглядности иллюстрации идеи использования основных событий в *компьютерном имитационном моделировании* рассмотрим пример одноканальной системы массового обслуживания [XVIII]. Как правило, целью имитационного моделирования подобной системы является определение оценок ее основных характеристик, таких, как среднее время пребывания заявки в очереди, средняя длина очереди и доля времени простоя системы [XVIII]. Характеристики самого процесса массового обслуживания могут изменять свои значения либо в момент поступления новой заявки на обслуживание, либо при завершении обслуживания очередной заявки. К обслуживанию поступившей заявки система массового обслуживания может приступить немедленно (канал обслуживания свободен), но не исключена необходимость ожидания, когда заявке придется занять место в очереди (система массового обслуживания с очередью, канал обслуживания занят). После завершения обслуживания очередной заявки система массового обслуживания может сразу приступить к обслуживанию следующей заявки, если она есть, но может и простаивать, если таковая отсутствует. Необходимую информацию можно получить, наблюдая различные ситуации, возникающие при реализациях основных событий. Так, при поступлении заявки в систему массового обслуживания с очередью при занятом канале обслуживания длина очереди увеличивается на единицу. Аналогично длина очереди уменьшается на единицу, если завершено обслуживание очередной заявки и множество заявок в очереди не пусто.

Для эксплуатации любой имитационной модели необходимо выбрать единицу времени. В зависимости от природы моделируемой системы такой единицей может быть микросекунда, час, год и т.д. Так, например, при моделировании процесса функционирования крупного аэропорта в качестве единицы времени, как правило, используют минуту, а при моделировании процесса эволюции в изолированной популяции — среднюю продолжительность жизни одного поколения.

Для иллюстрации принципа эксплуатации имитационных моделей приведем простейший типовой пример.

Пример 9.11. Рассмотрим одноканальную систему массового обслуживания с простейшим входным потоком заявок [XVIII] и интенсивностью $\lambda = 3$ (заявки в час). Время обслуживания одной заявки с вероятностью 0,5 равно 0,2 ч и с вероятностью 0,5 равно 0,6 ч. Заявки обслуживаются в порядке поступления. Длина очереди и источник заявок не ограничены. Предполагается, что в начальный момент времени канал обслуживания свободен и в очереди нет ни одной заявки.

Для простейшего входного потока заявок с интенсивностью $\lambda = 3$ (заявки в час) длительность временного интервала между двумя последовательно поступившими заявками — случайная величина $\tau(\omega)$, распределенная по экспоненциальному закону с параметром λ [XVIII]. Как показано в примере 9.6, если y_k — реализация случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$, то реализация τ_k длительности временного интервала между двумя последовательно поступившими заявками определяется следующим образом:

$$\tau_k = -\lambda^{-1}\ln(1 - y_k) = -(1/3)\ln(1 - y_k).$$

А так как по условию с вероятностью 0,5 время обслуживания одной заявки равно либо 0,2 ч, либо 0,6 ч, то реализация времени обслуживания (см. пример 9.9)

$$t_{\text{обсл}}(y_k) = \begin{cases} 0{,}2, & y_k \in [0,\, 0{,}5]; \\ 0{,}6, & y_k \in (0{,}5,\, 1]. \end{cases}$$

В рассматриваемой системе массового обслуживания возможны два основных события: поступление заявки и уход заявки из системы в связи с окончанием обслуживания. Действия, связанные с этими событиями, можно охарактеризовать следующим образом.

I. Действия, связанные с поступлением заявки в систему массового обслуживания:

1) генерация момента поступления следующей заявки на обслуживание путем определения реализации τ_k длительности $\tau(\omega)$ временного интервала между двумя последовательно поступившими заявками и прибавлением τ_k к текущему времени моделирования;

2) проверка состояния системы (процесс обслуживания или простой): а) если система простаивает (канал обслуживания свободен), то следует начать обслуживание поступившей заявки, для чего моделируется время обслуживания $t_{\text{обсл}}(y_k)$ и вычисляется время окончания обслуживания, добавляемое к текущему времени моделирования $t_{\text{обсл}}(y_k)$. Состояние системы изменяется на рабочее и корректируется суммарное время ее простоя; б) если система находится в процессе обслуживания, то следует поставить поступившую заявку в очередь, увеличив ее длину на единицу.

II. Действия по окончании обслуживания заявки в системе связаны с проверкой состояния очереди: а) если очередь пуста, т.е. в ней нет заявок, то объявляется простой системы; б) если очередь не пуста, то необходимо начать обслуживание первой по очереди заявки, уменьшить длину очереди на единицу, скорректировать время ожидания, сгенерировать время обслуживания $t_{\text{обсл}}(y_k)$ и вычислить время окончания обслуживания, прибавив $t_{\text{обсл}}(y_k)$ к текущему времени моделирования.

Одноканальная система начинает работать при пустой очереди и свободном канале обслуживания, т.е. ее функционирование начинается с простоя. Время τ_1 поступления первой заявки на обслуживание моделируется *псевдослучайным числом*, взятым, например, из табл. 9.5:

$$\tau_1 = -(1/3)\ln(1 - 0{,}60493) = 0{,}31 \text{ ч}$$

(далее псевдослучайные числа извлекаются из этой таблицы по порядку). Таким образом, в момент времени $t = 0 + \tau_1 = 0{,}31$ происходит событие, состоящее в поступлении заявки на обслуживание. Вычисляем время поступления следующей заявки:

$$t = 0{,}31 + \tau_2 = 0{,}31 - (1/3)\ln(1 - 0{,}51845) = 0{,}55 \text{ ч.}$$

Поскольку в начальный момент времени система простаивает, то в момент времени $t = 0{,}31$ начинается обслуживание первой заявки. Время обслуживания $t_{\text{обсл}}(0{,}66655) = 0{,}6$ ч, т.е. время окончания обслуживания равно

$$t = 0{,}31 + 0{,}6 = 0{,}91 \text{ ч.}$$

Система объявляется работающей, а время простоя корректируется:

$$t_{\text{простоя}} = 0 + 0{,}31 = 0{,}31 \text{ ч.}$$

Следующее по времени событие связано с поступлением заявки на обслуживание в момент времени $t = 0{,}55$ ч. Так как в это время происходит обслуживание первой заявки, то поступившая заявка становится в очередь, длина которой корректируется:

$$r = 0 + 1 = 1 \ (\text{в момент } t = 0{,}55).$$

Следующая заявка поступает в момент времени

$$t = 0{,}55 + \tau_3 = 0{,}55 - (1/3)\ln(1 - 0{,}35693) = 0{,}70 \text{ ч.}$$

А так как система все еще обслуживает первую заявку, то длина очереди увеличивается:

$$r = 1 + 1 = 2 \text{ (в момент } t = 0{,}70).$$

Далее определяется время поступления следующей заявки:

$$t = 0{,}70 - \tau_4 = 0{,}70 - \frac{1}{3}\ln(1 - 0{,}36739) = 0{,}85 \text{ ч.}$$

А так как система все еще обслуживает первую заявку, то длина очереди увеличивается:

$$r = 2 + 1 = 3 \text{ (в момент } t = 0{,}85).$$

Определим время поступления следующей заявки:

$$t = 0{,}85 + \tau_5 = 0{,}85 - \frac{1}{3}\ln(1 - 0{,}50469) = 1{,}08 \text{ ч.}$$

Полезно отмечать новые события на рисунке по мере их реализации (на рис. 9.2 символ α обозначает поступление заявки, символ β — время окончания обслуживания заявки).

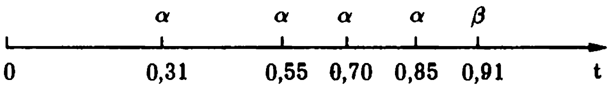


Рис. 9.2

Следующее событие наступает в момент времени $t = 0{,}91$ ч и представляет собой окончание обслуживания первой заявки. А так как очередь не пуста, то начинается обслуживание следующей заявки и корректируется длина очереди:

$$r = 3 - 1 = 2 \text{ (в момент } t = 0{,}91).$$

При этом суммарное время ожидания обслуживания равно

$$t_{\text{ожидания}} = 0 + (0{,}91 - 0{,}55) = 0{,}36 \text{ ч,}$$

а время обслуживания второй заявки равно $t_{\text{обсл}}(0{,}47764) = 0{,}2$ ч. Таким образом, обслуживание второй заявки завершится в момент времени

$$t = 0{,}91 + 0{,}2 = 1{,}11 \text{ ч.}$$

Процедура повторяется до тех пор, пока не будет промоделирован весь отрезок времени $[0, T]$ функционирования одноканальной системы массового обслуживания. При этом можно определить оценки основных характеристик этой системы [XVIII] и установить зависимость их качества от величины T, т.е. от длительности времени моделирования процесса функционирования системы. Так, например:

а) доля времени простоя системы (в процентах) равна отношению суммарного времени простоя к величине T, умноженному на 100;

б) среднее время ожидания обслуживания равно отношению суммарного времени ожидания к числу поступивших заявок;

в) средняя длина очереди равна отношению $m(A)/T$, где $m(A)$ — площадь плоской фигуры A, ограниченной осью времени и ступенчатой линией $r = r(t)$, $t \in [0, T]$, отражающей зависимость длины очереди от времени t.

9.5. Получение наблюдений при компьютерном имитационном моделировании

Так как по своей сути *компьютерное имитационное моделирование* представляет собой вычислительный эксперимент, то его наблюдаемые результаты в совокупности должны обладать свойствами реализации случайной выборки. Лишь в этом случае будет обеспечена корректная статистическая интерпретация моделируемой системы.

В любом физическом эксперименте оценка его результата, как правило, базируется на среднем значении N независимых наблюдений. При этом объем испытаний N планируют заранее в соответствии с заданным размахом доверительного интервала для оцениваемого параметра, величина которого и характеризует качество получаемой оценки при фиксированной доверительной вероятности [XVII]. При компьютерном имитационном моделировании оценки характеристик изучаемой системы также должны базироваться на результатах N независимых наблюдений, но их получение значительно сложнее, чем в физическом эксперименте. Следует отметить, что при компьютерном имитационном моделировании основной интерес представляют наблюдения, полученные после достижения изучаемой системой стационарного режима функционирования, так как в этом случае резко уменьшается выборочная дисперсия [XVIII]. Время, необходимое для достижения системой стационарного режима функционирования, определяется значениями ее параметров и начальным состоянием.

Поскольку основной целью является получение данных наблюдений с возможно меньшей ошибкой, то для достижения этой цели можно:

а) увеличить длительность времени имитационного моделирования процесса функционирования изучаемой системы. В этом случае не только увеличивается вероятность достижения системой стационарного режима функционирования, но и возрастает число n используемых *псевдослучайных чисел*, что также положительно влияет на качество получаемых результатов (см. пример 9.10);

б) при фиксированной длительности времени T имитационного моделирования провести N вычислительных экспериментов, называемых еще ***прогонами имитационной модели***, с различными наборами псевдослучайных чисел, каждый из которых дает одно наблюдение (см. пример 9.10).

При практическом использовании компьютерного имитационного моделирования необходимо иметь в виду следующее:

а) затраты на проведение имитационного моделирования существенно зависят от его длительности, т.е. от продолжительности прогона модели;

б) выборочная дисперсия может быть уменьшена за счет использования специальных методов формирования случайных выборок.

Переходим к рассмотрению трех наиболее распространенных методов получения данных наблюдений при компьютерном имитационном моделировании.

Метод повторения. Каждое наблюдение получается в результате отдельного прогона модели. Все прогоны начинаются при одном и том же начальном состоянии моделируемой системы, но с использованием различных наборов псевдослучайных чисел. Преимуществом этого метода является независимость получаемых наблюдений x_k, $k = \overline{1, N}$, параметра μ моделируемой системы. Если число N прогонов модели достаточно велико, то границы симметричного доверительного интервала для параметра μ определяются следующим образом [XVII]:

$$\underline{\mu} = \overline{x} - h^t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-1)\frac{S}{\sqrt{N}}, \quad \overline{\mu} = \overline{x} + h^t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-1)\frac{S}{\sqrt{N}},$$

где

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k, \quad S^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \overline{x})^2,$$

$1-\alpha$ — доверительная вероятность, а $h^t_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-1)$ — квантиль распределения Стьюдента с $N-1$ степенью свободы. Заметим, что если данные наблюдений соответствуют переходному режиму функционирования моделируемой системы, то возможна их смещенность [XVIII].

Метод подынтервалов. Этот метод ориентирован на уменьшение влияния переходных режимов функционирования моделируемой системы на данные наблюдений и основан на разбиении времени каждого прогона на равные промежутки (подынтервалы). Конец каждого подынтервала соответствует моменту записи информации о наблюдении. Преимущество рассматриваемого метода состоит в том, что со временем влияние переходного режима функционирования изучаемой системы на соответствующие данные наблюдений уменьшается. Основной недостаток метода подынтервалов связан с тем, что данные наблюдений являются зависимыми, поскольку результаты наблюдений в каждом последующем подынтервале зависят от состояния системы в конце предыдущего подынтервала, т.е. существует автокорреляция [XVII]. Ее влияние можно уменьшить, но это связано с ростом затрат на моделирование.

Пример 9.12. На рис. 9.3 показано изменение длины очереди r в зависимости от времени t, происходящее за один прогон модели одноканальной системы массового обслуживания с очередью [XVIII]. При использовании метода подынтервалов длина подынтервала должна быть достаточной для получения информации о наблюдаемой величине. В рассматриваемом примере время прогона модели $T=30$, а длина подынтервала взята равной 5 (см. рис. 9.3), т.е. последовательные наблюдения реализуются на подынтервалах $[5k,\, 5(k+1))$, $k=\overline{0,5}$.

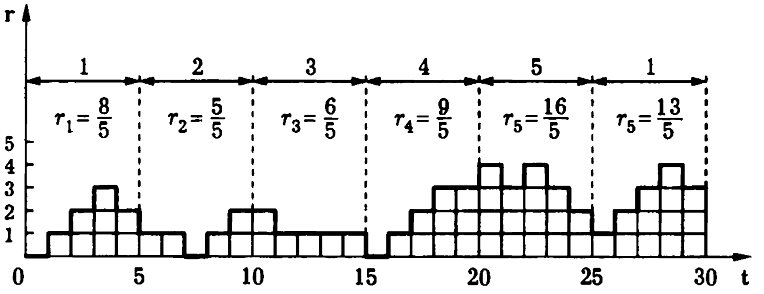


Рис. 9.3

Основная цель этого примера — получение данных наблюдений о средней длине очереди. Пусть r_{k+1} — результат k-го наблюдения, представляющий собой отношение площади ступенчатой фигуры, изображенной на рис. 9.3, к длине подынтервала $[5k,\, 5(k+1))$. На основе этой информации находим выборочное среднее

$$\overline{r} = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} r_{k+1} = \frac{57}{30} = 1{,}9 \text{ (заявки)}$$

и исправленную выборочную дисперсию

$$S^2 = \frac{1}{6-1}\sum_{k=0}^{5}(r_{k+1}-\overline{r})^2 = \frac{358}{500} = 0{,}716,$$

при определении которой мы предполагаем, что влияние автокорреляции пренебрежимо маλó. #

Как известно из математической статистики [XVII], приближенная формула для нахождения оценки дисперсии по данным наблюдений x_k, $k=\overline{1,n}$, с учетом автокорреляций имеет вид

$$\widehat{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2 + 2\sum_{j=1}^{m}\Bigl(1-\frac{j}{m}\Bigr)\frac{1}{n-j}\sum_{k=1}^{n-j}(x_k-\overline{x})(x_{k+j}-\overline{x}),$$

где $n \gg m$. Таким образом, для уменьшения влияния автокорреляции необходимо увеличение объема выборки n.

Метод циклов. При использовании метода циклов влияние автокорреляции уменьшается за счет выбора подынтервалов таким образом, чтобы в их начальных точках условия были одинаковыми. Так, в примере 9.12 (см. рис. 9.3) подынтервалы $[0, 7)$ и $[7, 15)$ можно использовать в качестве первых двух подынтервалов в методе циклов, поскольку оба они начинаются при одном и том же условии: длина очереди равна нулю. При использовании метода циклов влияние автокорреляции меньше, чем при использовании метода подынтервалов, но, как правило, меньше и число наблюдений, поскольку удается использовать меньше подынтервалов.

Завершая рассмотрение вопросов получения данных наблюдений при компьютерном имитационном моделировании, еще раз остановимся на проблеме уменьшения выборочной дисперсии, что напрямую связано с качеством получаемых результатов. При этом мы не будем касаться прямых методов уменьшения выборочной дисперсии, базирующихся на увеличении объема выборки и возрастании длительности прогона модели, так как их практическая реализация приводит к резкому возрастанию объема вычислений и росту затрат на имитационное моделирование.

В практике компьютерного имитационного моделирования для уменьшения выборочной дисперсии широко используют ***метод дополнения***. Основная идея этого метода заключается в следующем.

Если $\{y_k\}$ — последовательность псевдослучайных чисел (см., например, табл. 9.5), то $\{1-y_k\}$ — также последовательность псевдослучайных чисел. Значит, возможна реализация двух прогонов модели с использованием двух наборов псевдослучайных чисел y_k и $1-y_k$, $k=\overline{1,n}$. Если x_k и z_k — соответствующие результаты этих прогонов, то:

а) оба рассматриваемых набора псевдослучайных чисел имеют одинаковые числовые характеристики;

б) так как $y_k+(1-y_k)\equiv 1$, $k=\overline{1,n}$, то между множествами псевдослучайных чисел y_k и $1-y_k$ существует отрицательная корреляция [XVII];

в) если $u_k=(x_k+z_k)/2$, $k=\overline{1,n}$, то оценку

$$\overline{u}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k\equiv\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(x_k+z_k)$$

параметра μ можно рассматривать как оценку, полученную по данным случайной выборки объема $2n$ [XVII];

г) если

$$\operatorname{cov}[x(\omega);z(\omega)]<0 \quad \text{и} \quad u(\omega)=\frac{x(\omega)+z(\omega)}{2},$$

то дисперсии случайных величин $x(\omega)$, $z(\omega)$, $u(\omega)$ связаны неравенством [XVI]

$$\mathbf{D}[u(\omega)] = 0{,}25\big(\mathbf{D}[x(\omega)] + \mathbf{D}[z(\omega)]\big) + 0{,}5\,\mathbf{cov}[x(\omega); y(\omega)] < \\ < 0{,}25\big(\mathbf{D}[x(\omega)] + \mathbf{D}[y(\omega)]\big),$$

т.е. оценка $\overline{u}$ параметра μ обладает дисперсией, меньшей, чем дисперсия аналогичной оценки, полученной по данным случайной выборки объема $2n$.

Вопросы и задачи

9.1. В чем заключается основная цель имитационного моделирования и что является его основой?

9.2. Сформулируйте основную задачу имитационного моделирования. Чем она отличается от задач исследования операций?

9.3. Почему компьютерное имитационное моделирование можно рассматривать как статистический эксперимент и что представляют собой результаты этого моделирования?

9.4. Назовите основные области применения компьютерного имитационного моделирования.

9.5. Какие цели преследуют при использовании компьютерного имитационного моделирования применительно к задачам организационного управления?

9.6. Назовите основные этапы построения и практического использования имитационной модели.

9.7. Сформулируйте основную идею метода Монте-Карло. Что общего между компьютерным имитационным моделированием и методом Монте-Карло?

9.8. Для чего нужны псевдослучайные числа в компьютерном имитационном моделировании и в чем заключается основная идея их использования?

9.9. Изложите общую идею метода мультипликативных конгруэнций получения псевдослучайных чисел.

9.10. Сформулируйте основные идеи, используемые при компьютерном моделировании случайных величин с заданными законами распределения.

9.11. Как можно смоделировать с помощью компьютера: а) случайный вектор; б) случайное событие?

9.12. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, в которой определена скалярная функция $\varphi(X)$ векторного аргумента $X \in G$. Сформулируйте основную идею использования метода Монте-Карло для вычисления интеграла

$$J = \int_G \varphi(X)\, dX.$$

9.13. Каким образом случайные события используют при построении и эксплуатации компьютерных имитационных моделей?

9.14. Каковы основные идеи методов повторения, подынтервалов и циклов получения наблюдений в компьютерном имитационном моделировании? Назовите их достоинства и недостатки.

9.15. Какие методы уменьшения выборочной дисперсии при компьютерном имитационном моделировании Вы знаете? В чем заключаются основные идеи этих методов?

9.16. Используя из табл. 9.5 первые 10 псевдослучайных чисел, запишите результаты первых 10 исходов в игре с бросанием игральной кости (см. пример 9.7).

Ответ: 4, 4, 4, 3, 3, 4, 3, 6, 3, 1.

9.17. В примере 9.4 игрок решил воспользоваться таблицей псевдослучайных чисел. Как он может это сделать?

Ответ: если псевдослучайное число y_k попадает в промежуток $[0,\ 0{,}5)$, то при бросании двух монет выпадают герб и решка; если $y_k \in [0{,}5,\ 0{,}75)$, то выпадают два герба; если $y_k \in [0{,}75,\ 1]$, то выпадают две решки.

9.18. Пусть время обслуживания заявки в некоторой системе массового обслуживания представляет собой случайную величину, распределенную по экспоненциальному закону с параметром $\mu = 10$ (заявок в минуту). Построив модель системы с помощью псевдослучайных чисел из табл. 9.5, определите время обслуживания первых пяти заявок.

Ответ: 0,09 мин; 0,07 мин; 0,11 мин; 0,04 мин; 0,04 мин.

Указание: см. пример 9.6.

9.19. В примере 9.11 продолжите процесс имитационного моделирования, полагая $T = 2{,}36$ ч. Определите тип и время реализации основных событий на отрезке времени $[0, T]$. Вычислите среднюю длину очереди и среднее время ожидания обслуживания на $[0, T]$.

Ответ: тип и время реализации основных событий изображены на рис. 9.4; средняя длина очереди — 0,7 заявки, а среднее время ожидания обслуживания — 0,6 ч.

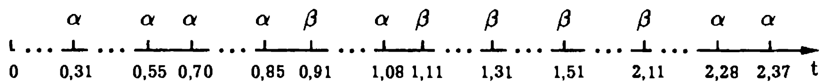


Рис. 9.4

9.20. На рис. 9.5 отражено изменение числа заявок r, находящихся в одноканальной системе массового обслуживания. Время моделирования $T = 36$, количество циклов 4. С доверительной вероятностью 0,95 определите интервальные оценки: а) для доли времени простоя системы; б) для числа заявок, находящихся в системе.

Ответ: а) $0{,}364 \pm 0{,}096$; б) $1{,}004 \pm 0{,}511$.

9.21. Пусть время обслуживания в одноканальной системе массового обслуживания является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону с параметром

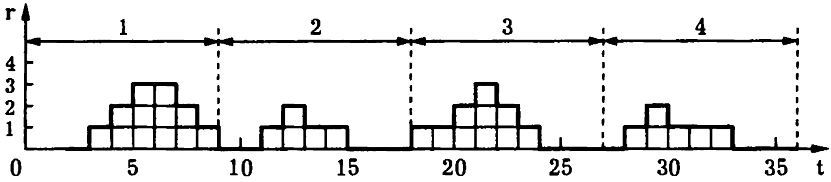


Рис. 9.5

$\mu = 0{,}5$. Определите среднее время обслуживания одной заявки и исправленную выборочную дисперсию этой оценки:

а) по десяти наблюдениям с использованием псевдослучайных чисел y_k, $k = \overline{21, 30}$, из табл. 9.5;

б) по десяти наблюдениям с использованием псевдослучайных чисел $1 - y_k$, $k = \overline{21, 30}$, из табл. 9.5;

в) по первым пяти наблюдениям, взятым из а) и б), с использованием метода дополнения.

Ответ: а) $\overline{x} = 2{,}45$, $S^2 = 3{,}64$; б) $\overline{z} = 1{,}89$, $S^2 = 4{,}77$; в) $\overline{u} = 2{,}31$, $S^2 = 5{,}48$.

Приложение 1. ВЕНГЕРСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

При обсуждении постановки *задачи о назначениях* (см. **5.3**) было отмечено, что эта задача является частным случаем *классической транспортной задачи* и, как следствие, является *задачей транспортного типа*. Применительно к задаче о назначениях *симплексный метод* не эффективен, так как любое ее *допустимое базисное решение* является *вырожденным*. Специфические особенности задачи о назначениях позволили разработать эффективный метод ее решения, известный как ***венгерский метод****. Прежде чем приступать к изучению этого метода, напомним основной результат, полученный в **5.3** при анализе задачи о назначениях.

Пусть $C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ — матрица стоимости задачи о назначениях (5.11) и $C^* = (c^*_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ — ***эквивалентная*** ей ***матрица стоимости***, т.е.

$$c^*_{ij} = c_{ij} + d_i + l_j, \quad i = \overline{1, n}, \; j = \overline{1, n},$$

где d_i, $i = \overline{1, n}$, и l_j, $j = \overline{1, n}$, — некоторые постоянные. Тогда при замене в задаче (5.11) параметров c_{ij}, входящих в матрицу стоимости C, параметрами c^*_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$, из эквивалентной матрицы стоимости C^* *оптимальное решение* исходной задачи останется неизменным.

Основная идея венгерского метода заключается в переходе от исходной матрицы стоимости C к эквивалентной ей матрице стоимости C^* с неотрицательными элементами и ***системой*** n ***независимых нулей***, т.е. с совокупностью нулевых элементов

*См.: *Раскин Л.Г.*

матрицы, из которых никакие два не принадлежат одной и той же строке или одному и тому же столбцу. Понятно, что квадратная матрица порядка n не может иметь систему более чем из n независимых нулей. Согласно (5.11), можно утверждать, что для любого *допустимого решения* задачи о назначениях *матрица переменных* $\widetilde{X} = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ содержит $n(n-1)$ нулей и n единиц, из которых никакие две не принадлежат одной и той же строке или одному и тому же столбцу. Таким образом, если эти n единиц в матрице $\widetilde{X}$ расставить в соответствии с расположением элементов системы n независимых нулей эквивалентной матрицы стоимости C^*, то получим допустимое решение рассматриваемой задачи о назначениях. Более того, найденное допустимое решение является оптимальным решением, так как ему соответствует нулевое значение *целевой функции*, определяемой матрицей C^*, которое не может быть уменьшено в силу неотрицательности элементов эквивалентной матрицы стоимости C^*.

Алгоритм венгерского метода решения задачи о назначениях состоит из подготовительного этапа и не более чем $n-2$ последовательно повторяющихся итераций. На подготовительном этапе получают матрицу стоимости C_0, эквивалентную матрице стоимости рассматриваемой задачи о назначениях и содержащую первоначальную систему независимых нулей. На каждой итерации число независимых нулей в преобразованной эквивалентной матрице стоимости увеличивается не менее чем на единицу. Через конечное число итераций система независимых нулей в преобразованной эквивалентной матрице стоимости C^* будет состоять из n элементов, что означает завершение процесса решения рассматриваемой задачи.

Подготовительный этап заключается в последовательном выполнении следующих трех шагов.

Шаг 1. Для каждого столбца матрицы стоимости C задачи о назначениях находят минимальный элемент

$$l_j = \min_{i=\overline{1,n}} c_{ij}, \quad j = \overline{1,n},$$

и формируют эквивалентную матрицу стоимости $C' = (c'_{ij})$, в которой

$$c'_{ij} = c_{ij} - l_j \geqslant 0, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

В результате выполнения первого шага подготовительного этапа получают эквивалентную матрицу стоимости C', в каждом столбце которой имеется по крайней мере один нулевой элемент.

Шаг 2. Для каждой строки матрицы стоимости C' находят минимальный элемент

$$d_i = \min_{j=\overline{1,n}} c'_{ij}, \quad i = \overline{1, n},$$

и формируют эквивалентную матрицу стоимости $C_0 = (c^0_{ij})$, в которой

$$c^0_{ij} = c'_{ij} - d_i \geqslant 0, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

В результате выполнения второго шага подготовительного этапа получают эквивалентную матрицу стоимости C_0 с неотрицательными элементами, в каждой строке и каждом столбце которой имеется по крайней мере один нулевой элемент.

Шаг 3. В первом столбце матрицы C_0 выбирают любой нулевой элемент и обозначают его как 0^*. Затем переходят ко второму столбцу матрицы C_0, и если в нем есть нулевые элементы, не лежащие в одной строке с нулевым элементом 0^* первого столбца, то выбирают любой из них и обозначают как 0^*. Далее процедуру повторяют для всех последующих столбцов матрицы стоимости C_0 и получают для нее первоначальную систему независимых нулей, состоящую из нулевых элементов, обозначенных как 0^*.

Можно доказать, что первоначальная система независимых нулей не может содержать менее двух элементов.

Пример П1.1. Проиллюстрируем подготовительный этап алгоритма венгерского метода для следующей матрицы стоимости:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 1 \\ 10 & 4 & 6 & 7 \\ 8 & 5 & 3 & 5 \\ 12 & 5 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1. В первом столбце минимальным является элемент $l_1 = c_{11} = 5$, во втором — $l_2 = c_{22} = 4$, в третьем — $l_3 = c_{33} = 3$, в четвертом — $l_4 = c_{14} = 1$. Вычитаем эти значения из соответствующих столбцов и приходим к матрице

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Находим минимальные элементы в строках матрицы C'. В первой строке $d_1 = c'_{11} = 0$, во второй — $d_2 = c'_{22} = 0$, в третьей — $d_3 = c'_{33} = 0$, в четвертой — $d_4 = c'_{42} = 1$. Вычитая эти значения из соответствующих строк, получаем матрицу

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Отмечаем систему независимых нулей:

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0^* & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0^* & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 0^* & 4 \\ 6 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad C'_0 = \begin{pmatrix} 0^* & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 0^* & 4 \\ 6 & 0^* & 5 & 6 \end{pmatrix}. \quad \#$$

Теперь перейдем к описанию итерации алгоритма венгерского метода решения задачи о назначениях. Пусть проведено m итераций ($m \geqslant 0$), в результате которых получена эквивалентная матрица стоимости C_m.

Шаг 1. В матрице C_m подсчитываем число элементов в системе независимых нулей, которое обозначим через k. Если $k = n$, то переходим к шагу 2. Если $k < n$, то переходим к шагу 3.

Шаг 2. В соответствии с системой n независимых нулей эквивалентной матрицы стоимости $C^* = C_m$ в матрице переменных модели $\widetilde{X}$ расставляем n единиц, а остальные ее элементы заменяем нулями. Решение завершено.

Шаг 3. Столбцы матрицы C_m, содержащие 0^*, выделяем знаком „+“, их элементы называют ***выделенными*** (остальные элементы матрицы называют ***невыделенными***). Переходим к шагу 4.

Шаг 4. Если среди невыделенных элементов матрицы C_m есть хотя бы один нуль, то переходим к шагу 5. В противном случае переходим к шагу 9.

Шаг 5. Если строка, содержащая невыделенный нуль, содержит также и 0^*, то переходим к шагу 6. В противном случае переходим к шагу 7.

Шаг 6. Найденный невыделенный нуль обозначаем через $0'$, содержащую его строку отмечаем знаком „+“ и все ее элементы называем выделенными. Снимаем знак „+“ со столбца, в котором расположен 0^* из выделенной строки, и переходим к шагу 4.

Шаг 7. Найденный невыделенный нуль обозначаем через $0'$ и, начиная с него, строим так называемую ***L-цепочку*** по следующему правилу: исходный $0'$; далее 0^*, расположенный с ним в одном столбце (если такой найдется); затем $0'$, расположенный в одной строке с предшествующим 0^*; далее 0^*, расположенный в одном столбце с предшествующим $0'$ (если такой найдется) и т.д. Переходим к шагу 8.

Замечание П1.1. Построение L-цепочки осуществляется однозначно. Действительно, в каждом столбце не может быть более одного 0^*, а в каждой строке не может быть более одного $0'$ (после того как в строке один нуль выделен штрихом, эту строку выделяют и никакие другие ее нули не могут быть выделены).

Замечание П1.2. L-цепочка всегда начинается с $0'$ и заканчивается $0'$. Принципиальная схема построения L-цепочки представлена на рис. П1.1.

$$0' \xrightarrow{\text{по столбцу}} 0^* \xrightarrow{\text{по строке}} 0' \cdots$$

Рис. П1.1

Действительно, пусть $C_m = (c_{ij}^m) \in M_n(\mathbb{R})$ и существует L-цепочка вида

$$L = \left(c_{i_1 j_1}^m,\ c_{i_2 j_1}^m,\ c_{i_2 j_2}^m,\ \ldots,\ c_{i_k j_k}^m,\ c_{i_{k+1} j_k}^m\right),$$

которая не может быть продолжена, причем $c_{i_k j_k}^m$ отмечен как $0'$, $c_{i_{k+1} j_k}^m$ отмечен как 0^*. В этом случае в матрице C_m столбец с номером j_k не выделен знаком „+“, так как в этом столбце есть элемент $c_{i_k j_k}^m$ типа $0'$. В то же время этот столбец содержит 0^* (так отмечен злемент $c_{i_{k+1} j_k}^m$). Следовательно, знак выделения столбца с номером j_k был снят и строка с номером i_{k+1} содержит $0'$, так как на шаге 6 она была выделена. Таким образом, L-цепочка может быть продолжена, что противоречит сделанному предположению.

Замечание П1.3. Число элементов в L-цепочке является нечетным. При этом L-цепочка может состоять из одного элемента, если в одном столбце с рассматриваемым $0'$ нет 0^*. #

Шаг 8. В L-цепочке все 0^* заменяем нулями, а все $0'$ — символами 0^*, в результате чего в эквивалентной матрице стоимости C_m получаем новую систему независимых нулей, число элементов которой на единицу больше числа элементов в предыдущей системе независимых нулей (согласно замечаниям П1.2 и П1.3, в L-цепочке число элементов $0'$ всегда на единицу больше числа элементов 0^*). Вне L-цепочки все $0'$ заменяем нулями и снимаем все выделения строк и столбцов матрицы C_m. Переходим к шагу 1.

Шаг 9. Среди невыделенных элементов матрицы C_m находим минимальный элемент h ($h > 0$ в силу неотрицательности элементов эквивалентной матрицы стоимости C_m и отсутствия невыделенных нулей). Значение h вычитаем из элементов невыделенных строк и прибавляем к элементам выделенных столбцов. Вновь полученную эквивалентную матрицу стоимости с неотрицательными элементами, в которой по меньшей мере один из невыделенных элементов является нулем, обозначаем через C_m и переходим к шагу 5.

Пример П1.2. Вернемся к задаче о назначениях, для которой в примере П1.1 выполнен подготовительный этап венгерского метода и получена эквивалентная матрица стоимости C_0. Рассмотрим итерационный процесс венгерского метода решения этой задачи.

Первая итерация

Шаг 1. Число k элементов в системе независимых нулей матрицы C_0 равно трем (см. пример П1.1). А так как $n = 4$ и $k < n$, переходим к шагу 3.

Шаг 3. Выделяем столбцы матрицы C_0, содержащие 0^*:

$$C_0 = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & + & + & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0^* & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0^* & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 0^* & 4 \\ 6 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Переходим к шагу 4.

Шаг 4. Один из элементов невыделенного четвертого столбца матрицы C_0 является нулевым (в первой строке). Переходим к шагу 5.

Шаг 5. В первой строке матрицы C_0 наряду с невыделенным нулем ($c_{14}^0 = 0$) есть элемент c_{11}^0, выделенный как 0^*. Переходим к шагу 6.

Шаг 6. Найденный невыделенный нуль обозначаем через $0'$ и выделяем содержащую его первую строку. Снимаем знак выделения с первого столбца, в котором расположен 0^* из первой строки:

$$C_0 = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & + & + & \end{matrix} \\ \begin{matrix} + \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0^* & 2 & 4 & 0' \\ 5 & 0^* & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 0^* & 4 \\ 6 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Переходим к шагу 4.

Шаг 4. Среди невыделенных элементов матрицы C_0 нет нулей. Переходим к шагу 9.

Шаг 9. Среди невыделенных элементов матрицы C_0 находим минимальный элемент $h = \min\{5, 3, 6, 6, 4, 6\} = 3$. Значение $h = 3$ вычитаем из элементов невыделенных строк с номерами 2, 3, 4 и прибавляем к элементам выделенных столбцов с номерами 2, 3. Вновь полученную эквивалентную матрицу стоимости обозначаем через C_0:

$$C_0 = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & + & + & \end{matrix} \\ \begin{matrix} + \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0^* & 5 & 7 & 0' \\ 2 & 0^* & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0^* & 1 \\ 3 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Переходим к шагу 5.

Шаг ·5. В третьей строке, содержащей невыделенный нуль ($c'_{31} = 0$), есть и выделенный нуль ($c'_{33} = 0^*$). Переходим к шагу 6.

Шаг 6. Найденный невыделенный нуль обозначаем через $0'$, содержащую его третью строку выделяем. Снимаем знак выделения с третьего столбца, в котором расположен 0^* из третьей строки:

$$C_0 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & + & & \end{array} \\ \begin{array}{c} + \\ \\ + \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0^* & 5 & 7 & 0' \\ 2 & 0^* & 3 & 3 \\ 0' & 1 & 0^* & 1 \\ 3 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Переходим к шагу 4.

Шаг 4. Среди невыделенных элементов матрицы C_0 нет нулей. Переходим к шагу 9.

Шаг 9. Среди невыделенных элементов матрицы C_0 находим минимальный элемент $h = \min\{2, 3, 3, 3, 5, 3\} = 2$. Значение $h = 2$ вычитаем из элементов невыделенных строк с номерами 2 и 4 и прибавляем к элементам выделенного второго столбца. Вновь полученную эквивалентную матрицу стоимости обозначаем через C_0:

$$C_0 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & + & & \end{array} \\ \begin{array}{c} + \\ \\ + \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0^* & 7 & 7 & 0' \\ 0 & 0^* & 1 & 1 \\ 0' & 3 & 0^* & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Переходим к шагу 5.

Шаг 5. Во второй строке, содержащей невыделенный нуль ($c^0_{21} = 0$), есть выделенный нуль ($c^0_{22} = 0^*$). Переходим к шагу 6.

Шаг 6. Найденный невыделенный нуль обозначаем через $0'$, содержащую его вторую строку выделяем. Снимаем знак выделения со второго столбца, в котором расположен 0^* из второй строки:

$$C_0 = \begin{array}{c} + \\ + \\ + \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0^* & 7 & 7 & 0' \\ 0' & 0^* & 1 & 1 \\ 0' & 3 & 0^* & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Переходим к шагу 4.

Ш а г 4. Среди невыделенных элементов матрицы C_0 есть нуль $(c_{42}^0 = 0)$. Переходим к шагу 5.

Ш а г 5. Так как четвертая строка, содержащая невыделенный нуль, не содержит 0^*, то переходим к шагу 7.

Ш а г 7. Найденный невыделенный нуль обозначаем символом $0'$ и строим L-цепочку $\left(c_{42}^0, c_{22}^0, c_{21}^0, c_{11}^0, c_{14}^0\right)$:

$$C_0 = \begin{array}{c} + \\ + \\ + \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0^* & 7 & 7 & 0' \\ 0' & 0^* & 1 & 1 \\ 0' & 3 & 0^* & 1 \\ 1 & 0' & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Переходим к шагу 8.

Ш а г 8. В L-цепочке все символы 0^* заменяем нулями, а символы $0'$ заменяем на 0^*. Вне L-цепочки все $0'$ заменяем нулями и снимаем все выделения строк и столбцов. Полученную матрицу стоимости обозначаем через C_1:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 7 & 0^* \\ 0^* & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0^* & 1 \\ 1 & 0^* & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Переходим к шагу 1 следующей итерации $(m = 2)$.

В т о р а я и т е р а ц и я

Ш а г 1. Число элементов k в системе независимых нулей матрицы C_1 равно четырем. А так как $k = 4 = n$, то переходим к шагу 2.

Ш а г. 2. В соответствии с эквивалентной матрицей стоимости $C^* = C_1$ выписываем оптимальное решение рассматриваемой задачи, представленное в виде матрицы ее переменных

$$\widetilde{X}_0 = (x_{ij}^0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \#$$

Выше при анализе задачи о назначениях было отмечено (см. **5.3**), что на практике встречаются задачи, для которых параметр c_{ij} имеет смысл эффективности выполнения i-й работы j-м исполнителем, $i, j = \overline{1, n}$. В таких задачах суммарная эффективность выполнения всех работ должна быть максимальной, что приводит к задаче (5.12). Для преобразования задачи (5.12) к стандартной задаче (5.11) можно воспользоваться приемом, рассмотренным в **5.3**, или изменить первый шаг подготовительного этапа венгерского метода, который в этом случае принимает следующий вид.

Ш а г 1. Для каждого столбца матрицы $C = (c_{ij}^0) \in M_n(\mathbb{R})$ задачи о назначениях (5.12) находим максимальный элемент

$$l_j = \max_{i=\overline{1,n}} c_{ij}, \quad j = \overline{1, n},$$

и формируем эквивалентную матрицу стоимости $C' = (c'_{ij})$, в которой

$$c'_{ij} = l_j - c_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Пример П1.3. Рассмотрим задачу о назначениях вида (5.12) с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 6 & 9 \\ 5 & 9 & 7 & 3 \\ 7 & 8 & 10 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

В этом случае

$$l_1 = \max\{10,\ 5,\ 7,\ 3\} = 10, \qquad l_2 = \max\{6,\ 7,\ 10,\ 4\} = 10,$$
$$l_3 = \max\{7,\ 9,\ 8,\ 8\} = 9, \qquad l_4 = \max\{9,\ 3,\ 5,\ 2\} = 9$$

и эквивалентная матрица стоимости имеет вид

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что эта матрица совпадает с матрицей C', полученной на первом шаге подготовительного этапа венгерского метода в примере П1.1 (задача минимизации затрат). А так как последующие шаги подготовительного этапа не изменятся, то понятно, что решение $\widetilde{X}_0$, полученное в примере П1.2, будет оптимальным решением и для рассматриваемой задачи о назначениях (задача максимизации суммарной эффективности).

Приложение 2. МЕТОД ДИСКРЕТНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Метод дискретного *динамического программирования* является одним из наиболее эффективных методов реализации *многошаговых задач принятия решений в условиях определенности.* Приступая к изучению этого метода, заметим, что каждая *многошаговая процедура принятия решений* в условиях определенности соответствует вполне конкретной *задаче выбора кратчайшего* (или самого длинного) *пути* в некоторой *ациклической сети.* В любой ациклической сети есть лишь один узел-источник, т.е. *узел сети,* в который не входит ни одна ориентированная дуга. Это следует из того, что рассматриваемые нами системы имеют единственное начальное и единственное конечное состояния. Напомним, что к задаче выбора кратчайшего пути была преобразована *задача о замене оборудования* (см. пример 5.6).

Одна из специфических особенностей любой ациклической сети состоит в том, что возможна нумерация узлов сети, при которой для каждой ориентированной дуги (i, j), выходящей из узла с номером i и входящей в узел с номером j, будет иметь место неравенство $i < j$. Процедура такой нумерации состоит из нескольких этапов. Сначала узлу ациклической сети, в который не входит ни одна ориентированная дуга, присваивают номер 1 и вычеркивают ориентированные дуги, выходящие из него. После этого в сети выделяется n_1 узлов, в каждый из которых не входит ни одна из ориентированных дуг. Этим узлам (в любой последовательности) присваивают номера от 2 до $n_1 + 1$ и вычеркивают ориентированные дуги, выходящие из них. После этого в сети образуется n_2 узлов, в каждый из которых не входит ни одна из ориентированных дуг, и рассуждения, проведенные выше, повторяют до тех пор, пока не будут пронумерованы все узлы рассматриваемой ациклической сети.

Пример П2.1. Пронумеруем узлы ациклической сети, изображенной на рис. П2.1, так, чтобы для любой ее ориентированной дуги (i, j) имело место неравенство $i < j$.

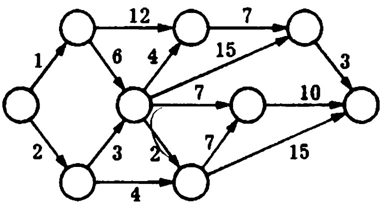


Рис. П2.1

В соответствии с описанной выше процедурой нумерации узлов ациклической сети, этапы которой частично отражены на рис. П2.2, приходим к результату представленному на рис. П2.3. #

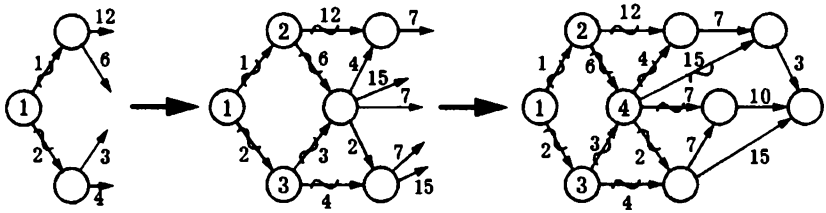


Рис. П2.2

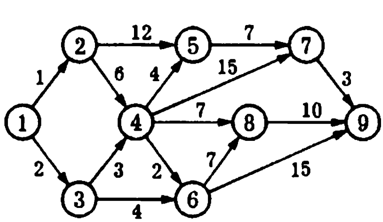


Рис. П2.3

Далее будем предполагать, что для ациклической сети выполнены следующие условия:

а) узлы сети пронумерованы так, что для любой ее ориентированной дуги $(i,\ j)$ имеет место неравенство $i < j$;

б) для каждой ориентированной дуги $(i,\ j)$ указана ее длина c_{ij} (например, на рис. П2.3 имеем $c_{25} = 12$, $c_{89} = 10$).

В этих условиях под ***длиной пути*** от i-го узла ациклической сети до ее j-го узла, где $i < j$, будем понимать сумму длин входящих в этот путь дуг.

Пусть ациклическая сеть содержит N узлов и необходимо найти кратчайший путь от ее 1-го до N-го узла. Постановка этой задачи и метод ее решения уже известны (см. **5.4** и **5.5**), но мы рассмотрим другой подход.

Обозначим через f_i длину кратчайшего пути от узла 1 ациклической сети до ее узла i, и пусть $f_1 = 0$. В этом случае $f_i + c_{ij}$ — длина кратчайшего пути от узла 1 до узла j, где $i < j$, при условии, что дуга $(i,\ j)$ является последней дугой этого пути. Кратчайший путь от узла 1 до узла j должен содержать некоторую дугу в качестве конечной, и поэтому

$$f_j = \min_{i \in I(j)} \left(f_i + c_{ij}\right), \qquad (\text{П}2.1)$$

где $I(j)$ — множество номеров тех вершин рассматриваемой ациклической сети, из которых выходят ориентированные дуги, входящие в узел j. А так как для всех ориентированных дуг $(i,\ j)$, входящих в узел j, имеет место неравенство $i < j$, то соотношение (П2.1) может быть использовано для последовательного вычисления значений $f_2,\ f_3,\ \ldots,\ f_N$, и мы приходим к следующему алгоритму нахождения кратчайшего пути в ациклической сети.

Шаг 1. Полагаем $v_1 = 0$, $v_k = \infty$, $k = \overline{2, N}$, $j = 2$. Переходим к шагу 2.

Шаг 2. Вычисляем

$$v_j \leftarrow \min_{i \in I(j)} \{v_j,\ v_i + c_{ij}\},$$

где запись $x \leftarrow y$ означает, что переменное x принимает значение y. Переходим к шагу 3.

Шаг 3. Если $j = N$, то прекращаем вычисления. Если $j < N$, то выполняем присвоение $j \leftarrow j + 1$ и переходим к шагу 2.

Рассмотренный алгоритм позволяет находить не сам кратчайший путь, а его длину. Для нахождения кратчайшего пути необходимо запоминать номера дуг $(i,\ j)$, которые составляют путь длиной v_j. В примере П2.2 такие дуги для наглядности дополнительно помечены штриховой линией.

Пример П2.2. Используем изложенный алгоритм для нахождения кратчайшего пути от узла 1 до узла 9 в ациклической сети, изображенной на рис. П2.3.

Шаг 1. Полагаем $v_1 = 0$, $v_k = \infty$, $k = \overline{2, 9}$, $j = 2$. Переходим к шагу 2.

Шаг 2. Вычисляем $v_2 \leftarrow \min\{v_2,\ v_1 + c_{12}\} = \min\{\infty,\ 0+1\} = 1$, учитывая, что в узел 3 входит единственная дуга (1, 3). Фиксируем ориентированную дугу (1, 3), выделив ее штриховой линией (рис. П2.4) и переходим к шагу 3.

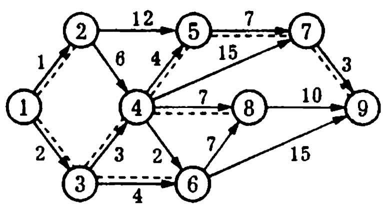


Рис. П2.4

Шаг 3. Так как $j = 2 < 9 = N$, то полагаем $j = 3$ и переходим к шагу 2.

Шаг 2. Вычисляем $v_3 \leftarrow \min\{v_3,\ v_1 + c_{13}\} = \min\{\infty,\ 0+2\} = 2$, учитывая, что в узел 3 входит единственная дуга (1, 3). Фиксируем ориентированную дугу (1, 3), отметив ее штриховой линией, переходим к шагу 3.

Шаг 3. Так как $j = 3 < 9 = N$, полагаем $j = 4$ и переходим к шагу 2.

Шаг 2. Присваиваем $v_4 \leftarrow \min\{v_4,\ v_2+c_{24},\ v_3+c_{34}\} = \min\{\infty,\ 1+6,\ 2+3\} = 5$, учитывая, что в узел 4 входят дуги (2, 4), (3, 4). Фиксируем ориентированную дугу (3, 4), отмечаем ее штриховой линией и переходим к шагу 3.

Шаг 3. Так как $j=4<9=N$, полагаем $j=5$ и переходим к шагу 2.

Шаг 2. Присваиваем $v_5 \leftarrow \min\{v_5,\ v_2+c_{25},\ v_4+c_{45}\} = \min\{\infty,\ 1+12,\ 5+4\} = 9$, учитывая, что в узел 5 входят дуги (2, 5), (4, 5). Фиксируем ориентированную дугу (4, 5), отмечаем ее штриховой линией и переходим к шагу 3.

Шаг 3. Так как $j=5<9=N$, полагаем $j=6$ и переходим к шагу 2.

Шаг 2. Присваиваем $v_6 \leftarrow \min\{v_6,\ v_3+c_{36},\ v_4+c_{46}\} = \min\{\infty,\ 2+4,\ 5+2\} = 6$, учитывая, что в узел 6 входят дуги (3, 6), (4, 6). Фиксируем ориентированную дугу (3, 6), отмечаем ее штриховой линией и переходим к шагу 3.

Шаг 3. Так как $j=6<9=N$, полагаем $j=7$ и переходим к шагу 2.

Шаг 2. Присваиваем $v_7 \leftarrow \min\{v_7,\ v_4+c_{47},\ v_5+c_{57}\} = \min\{\infty,\ 5+15,\ 9+7\} = 16$, учитывая, что в узел 7 входят дуги (4, 7), (5, 7). Фиксируем ориентированную дугу (5, 7), отмечаем ее штриховой линией и переходим к шагу 3.

Шаг 3. Так как $j=7<9=N$, полагаем $j=8$ и переходим к шагу 2.

Шаг 2. Присваиваем $v_8 \leftarrow \min\{v_8,\ v_4+c_{48},\ v_6+c_{68}\} = \min\{\infty,\ 5+7,\ 6+7\} = 12$, учитывая, что в узел 8 входят дуги (4, 8), (6, 8). Фиксируем ориентированную дугу (4, 8), отмечаем ее штриховой линией и переходим к шагу 3.

Шаг 3. Так как $j=8<9=N$, полагаем $j=9$ и переходим к шагу 2.

Шаг 2. Вычисляем $v_9 \leftarrow \min\{v_9,\ v_6+c_{69},\ v_7+c_{79},\ v_8+c_{89}\} = \min\{\infty,\ 6+15,\ 16+3,\ 12+10\} = 19$, учитывая, что в узел 9 входят дуги (6, 9), (7, 9), (8, 9). Фиксируем ориентированную дугу (7, 9), отмечаем ее штриховой линией и переходим к шагу 3.

Шаг 3. Так как $j = 9 = N$, вычисления прекращаем.

Кратчайший путь найден: $1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 7 \to 9$. Его длина (см. рис. П2.4) равна $2 + 3 + 4 + 7 + 3 = 19$. Для наглядности для каждого узла укажем длину кратчайшего пути до него от узла 1 (рис. П2.5). Итак, рассмотренный алгоритм позволяет находить кратчайший путь от узла 1 до любого узла сети. #

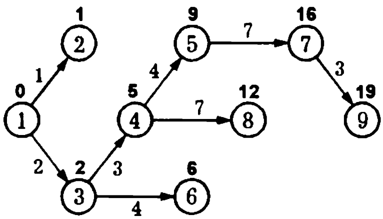


Рис. П2.5

Алгоритм нахождения в ациклической сети ***наиболее длинного пути*** аналогичен рассмотренному алгоритму выбора кратчайшего пути и отличается от последнего лишь тем, что на шаге 1 начальные значения v_k берутся равными $-\infty$ (при $k \neq 1$), а на шаге 2 вместо минимума нужно определять максимум.

Пример П2.3. В ациклической сети из предыдущего примера (см. рис. П2.3) рассмотрим задачу поиска наиболее длинного пути от узла 1 до узла 9.

На первом шаге полагаем $v_1 = 0$, $v_k = -\infty$, $k = \overline{2, 9}$, и $j = 2$. Переходим к шагу 2. Присваиваем $v_2 \leftarrow \max\{v_2,\ v_1 + c_{12}\} = \max\{-\infty,\ 0 + 1\} = 1$, учитывая, что в узел 2 входит единственная дуга (1, 2). Отмечаем эту дугу и переходим к шагу 3. На третьем шаге, так как $j = 2 < 9 = N$, полагаем $j = 3$ и снова переходим к шагу 2. Дальнейший ход решения не вызывает затруднений. Окончательный результат представлен на рис. П2.6, на котором для каждого узла указана наибольшая длина пути до него от узла 1. #

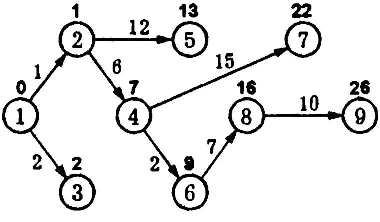


Рис. П2.6

В ряде случаев нумерацию узлов ациклической сети целесообразно проводить так, чтобы для каждой ориентированной дуги (i, j) этой сети, выходящей из узла i и входящей в узел j, выполнялось неравенство $i > j$. Процедура такой нумерации во многом схожа с процедурой нумерации, рассмотренной выше, и состоит из нескольких этапов. Сначала узлу ациклической сети, из которого не выходит ни одна ориентированная дуга, присваивают номер 1 и вычеркивают ориентированные дуги, входящие в него. После этого в сети образуется n_1 узлов, из которых не выходит ни одна из ориентированных дуг. Этим узлам (в любой последовательности) присваивают номера от 2 до $n_1 + 1$, вычеркивают дуги, входящие в них, и рассуждения, проведенные выше, повторяют до тех пор, пока не будут пронумерованы все узлы рассматриваемой ациклической сети.

Для уяснения описанной процедуры нумерации можно в качестве примера взять ациклическую сеть, изображенную на рис. П2.1. Результат нумерации узлов этой ациклической сети представлен на рис. П2.7.

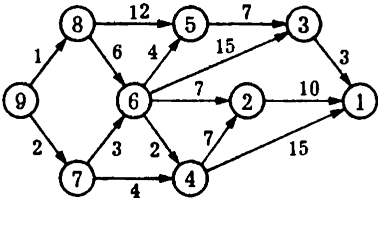


Рис. П2.7

Заметим, что использование нумерации узлов ациклической сети, при которой для всех ориентированных дуг (i, j) выполнено неравенство $i > j$, приводит к изменению порядка отсчета узлов: в задаче поиска кратчайшего (наиболее длинного) пути длина пути отсчитывается не от его начала, а от конца. На рис. П2.8 представлено решение задачи выбора наиболее длинного пути для ациклической сети, изображенной на рис. П2.7

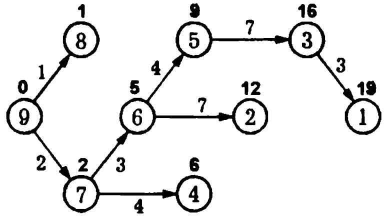


Рис. П2.8

Пусть для некоторой ациклической сети задан путь, который можно рассматривать как последовательность номеров узлов этой сети: $(i_1, i_2, \ldots, i_N)$. Любой путь вида

$$(i_{k_1}, i_{k_2}, \ldots, i_{k_m}),$$

где $1 \leqslant k_i < \ldots < k_m \leqslant N$, называют ***подпутем*** исходного пути.

В частности, для ациклической сети на рис. П2.3 путь (2, 4, 6, 8, 9) содержит несколько подпутей, включая (2, 4, 6) и (4, 6).

Понятие подпути позволяет дать первую формулировку принципа оптимальности дискретного динамического программирования в рамках ациклических сетей: подпуть оптимального (кратчайшего или наиболее длинного) пути сам является оптимальным путем. В этой формулировке принцип оптимальности понятен и не нуждается в комментариях, но прежде чем обсуждать вторую, самую распространенную формулировку принципа оптимальности дискретного динамического программирования, остановимся на следующем примере.

Пример П2.4. Рассмотрим следующую *задачу исследования операций*:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k) \to \max; \\ \sum_{k=1}^{n} q_k(x_k) \leqslant b, \quad x_k \in N \cup \{0\},\ k = \overline{1, n}, \end{cases} \tag{П2.2}$$

где b — известное целое положительное число; функции $q_k(x_k)$, $k = \overline{1, n}$, определены на множестве $\mathbb{N} \cup \{0\}$, принимают значения из этого же множества и $q_k(0) = 0$; $c_k(x_k)$, $k = \overline{1, n}$, — некоторые произвольные функции, удовлетворяющие условию $c_k(0) = 0$.

Функции вида $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1) + \ldots + \varphi_n(x_n)$ называют ***аддитивными***. В рассматриваемой задаче аддитивными являются *целевая функция* и функции, входящие в левую часть ограничений. Именно с видом этих функций связана специфика этой задачи.

Поставленная задача может возникнуть в различных ситуациях. Например, пусть предприятие для производства n различных продуктов использует некоторый ресурс, запасы которого ограничены величиной b. Для производства x_k единиц k-го продукта нужно израсходовать $q_k(x_k)$ единиц ресурса, а доход от этого составляет $c_k(x_k)$ условных денежных единиц. Тогда определение объемов производства продуктов x_k, $k = \overline{1, n}$, обеспечивающих максимальный суммарный доход, приводит к сформулированной задаче исследования операций.

Поставленная задача является *статической задачей принятия решений*. Но если по каким-либо причинам производство различных продуктов должно происходить последовательно (сначала 1-й продукт, затем 2-й и т.д.), то мы приходим к многошаговой задаче принятия решений, которую и будем рассматривать далее.

Проанализируем ситуацию, которая может сложиться после того, как завершено производство продуктов с номерами от 1 до $k-1$, $1 \leqslant k-1 < n$. Прежде всего заметим, что в этом случае могут остаться недоиспользованными y единиц ресурса, где $y \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ b\}$, так как по условию $b \in \mathbb{N}$ и $q_k(x_k) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k = \overline{1, n}$. Эти y единиц ресурса необходимо распределить для производства продуктов с номерами от k до n так, чтобы суммарный доход был максимальным. При этом интуитивно понятно, что сложившаяся ситуация может быть однозначно охарактеризована с помощью пары $(k,\ n)$.

Пусть $f_k(y)$ — максимальная прибыль, которую можно получить за счет производства продуктов с номерами от k до n, имея в наличии y единиц ресурса. Тогда $f_1(b)$ — *оптимальное значение целевой функции* исходной задачи, и нужно определить $f_k(y)$ и $y \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ n\}$, $k = \overline{1, n}$.

Говорят, что производство x_k единиц k-го продукта допустимо, если $q_k(x_k) \leqslant y$, $x_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, т.е. если необходимое для этого количество единиц ресурса не превосходит его наличный запас y. Отметим, что величина

$$c_k(x_k) + f_{k+1}\big(y - q_k(x_k)\big) \tag{П2.3}$$

представляет собой максимально возможный доход, который можно получить за счет распределения наличного запаса ресурса y для производства продуктов с номерами от k до n при условии, что произведено x_k единиц k-го продукта. Интерпретация выражения (П2.3) является корректной, поскольку запас ресурса после производства k-го продукта, по предположению, распределен оптимально. Таким образом,

$$f_k(y) = \max_{x_k \in \omega_k} \Big(c_k(x_k) + f_{k+1}(y - q_k(x_k))\Big), \tag{П2.4}$$

где

$$\omega_k = \{x_k \in N \cup \{0\}\colon q_k(x_k) \leqslant y\}.$$

При этом (П2.4) справедливо и при $k = n$, если считать, что

$$f_{n+1}(y) = 0, \quad y = \overline{0, b}. \tag{П2.5}$$

Заметим, что предположение (П2.5) можно интерпретировать как бесполезность неиспользованного ресурса. Поэтому при решении практических задач иногда вводят понятие издержек за переход ресурса в следующий период.

В (П2.4) сначала полагают $k=n$ и с учетом (П2.5) находят $f_n(y)$ для каждого $y=\overline{0,b}$. Затем полагают $k=n-1$ и находят $f_{n-1}(y)$, $y=\overline{0,b}$, с учетом уже известных $f_n(y)$. Вычисления продолжают вплоть до нахождения $f_1(b)$. #

Задачу, рассмотренную в примере П2.4, можно интерпретировать как задачу выбора наиболее длинного пути в ациклической сети. Действительно, каждой паре чисел $(k,\ y)$, $k=\overline{1,n}$, $y=\overline{0,b}$, поставим в соответствие узел сети. Из этого узла для каждого значения $x_k\in\omega_k$ проведем ориентированную дугу, которая входит в узел $(k+1,\ y-q_k(x_k))$ и имеет длину $c_k(x_k)$. Тогда рассматриваемая задача равносильна поиску самого длинного пути в этой ациклической сети от узла $(1,\ b)$ до некоторого узла $(n+1,\ z)$, где z — количество единиц неиспользованного ресурса.

Любую многошаговую процедуру принятия решений можно интерпретировать как процесс изменения состояния некоторой динамической системы с дискретным временем [XVIII]. Само понятие состояния играет важную роль в дискретном динамическом программировании и может иметь весьма своеобразную интерпретацию.

Так, для задачи нахождения кратчайшего пути, рассмотренной в примере П2.2, состояниям системы соответствуют узлы ациклической сети (см. рис. П2.3), а совокупность ориентированных дуг, выходящих из узла с номером $i\in\{1,\ 2,\ \ldots,\ 9\}$, есть не что иное, как множество допустимых решений для этого состояния. Заметим, что для динамической системы будущее состояние определяется текущим состоянием и не зависит от ее состояния в прошлом, т.е. процесс изменения состояния этой системы в определенном смысле можно рассматривать как детерминированный аналог *марковского процесса*. Это обстоятельство связано с тем, что ориентированные дуги, выходящие из любого узла ациклической сети (см. рис. П2.3), никак не зависят от входящих в него ориентированных дуг.

В дискретном динамическом программировании элементы состояния принято называть ***переменными состояния***. Так, в задаче о распределении ограниченного ресурса из примера П2.4 состояние представляет собой пару (k, y), а k и y — переменные состояния.

Понятие этапа, уже встречавшееся в марковских случайных процессах с дискретным временем, используют и в дискретном динамическом программировании. Так, в задаче о распределении ограниченного ресурса, рассмотренной в примере П2.4, на k-м этапе происходит переход из состояния (k, y) в состояние $(k+1, z)$. В исследовании операций все многошаговые процедуры принятия решений основываются на понятии ***этапа*** (***шага***), который в конкретной задаче либо является естественным элементом, либо вводится искусственно.

Суть метода дискретного динамического программирования применительно к многошаговым задачам принятия решений с аддитивной целевой функцией заключается в поэтапной оптимизации. Реализация идеи поэтапной оптимизации была проиллюстрирована в примере П2.4 при решении задачи о распределении ограниченного ресурса с использованием равенств (П2.4), (П2.5).

Поэтапная оптимизация состоит в том, что оптимальное решение принимается на каждом шаге. В задаче выбора кратчайшего пути это решение связано с выбором одной дуги из совокупности ориентированных дуг, выходящих из некоторого узла ациклической сети (см. пример П2.2), а в задаче о распределении ограниченного ресурса — с выбором из множества ω_k в ситуации, описываемой парой (k, y). Из этих примеров следует, что принятие решений на каждом шаге, за исключением последнего, должно осуществляться с учетом всех его возможных последствий в будущем (на еще предстоящих шагах).

Среди множества шагов многошаговой процедуры принятия решений последний шаг занимает особое место. Это связано с тем, что на последнем шаге выбор решения из соответствующего множества допустимых решений можно осуществлять „без оглядки на будущее“. Именно поэтому при использовании метода дискретного динамического программирования сначала планируют последний шаг, исходя из максимально возможной эффективности (в смысле значений целевой функции) принимаемого решения.

В дискретном динамическом программировании выбор решения из множества допустимых решений называют ***управлением***. При выборе управления на последнем n-м шаге необходимо исходить из всех возможных вариантов завершения $(n-1)$-го шага и для каждого из них найти такое управление, чтобы его эффективность на последнем шаге была максимально возможной. Решив эту задачу, находят ***условное оптимальное управление*** на n-м шаге, т.е. управление с максимально возможной эффективностью (в смысле значения целевой функции), которое нужно применить на n-м шаге при условии, что $(n-1)$-й шаг завершился определенным образом.

При определении условного оптимального управления на $(n-1)$-м шаге необходимо исходить из всех возможных вариантов завершения $(n-2)$-го шага и для каждого из них найти такое управление, чтобы выигрыш (в смысле значения целевой функции) от его применения за последние два шага (из которых последний уже полностью определен) был бы максимально возможным. Затем переходят к определению условного оптимального управления на $(n-2)$-м шаге и т.д.

В результате проведенных рассуждений мы пришли ко второй формулировке принципа оптимальности в дискретном динамическом программировании, который больше известен *как принцип оптимальности Беллмана*: каково бы ни было состояние динамической системы в результате реализации какого-то числа шагов, управление на ближайшем шаге нужно выбирать так, чтобы оно, в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах, привело к максимально возможному выигрышу на всех оставшихся шагах, включая данный.

На практике при применении в дискретном динамическом программировании принципа оптимальности используют прием, называемый ***методом погружения***. Он состоит в том, что вместо решения одной исходной задачи с заданным начальным состоянием S_0 и известным числом шагов решают совокупность однотипных задач, различающихся начальным состоянием. Так, в примере П2.2 в процессе решения последовательно находят кратчайшие пути от первого узла сети до каждого из оставшихся узлов. Исходная задача (поиск кратчайшего пути от узла 1 до узла 9) представляет собой последнюю из восьми однотипных задач. В примере П2.4 состояние описывается парой (k, y), а пара $(1, b)$ соответствует начальному состоянию.

Реализация рассматриваемого принципа оптимальности приводит к появлению специфических функциональных уравнений, методы решения которых и составляют основу вычислительных схем динамического программирования. В примерах П2.1 и П2.4 такими функциональными уравнениями являлись уравнения (П2.1) и (П2.4).

Если известны условные оптимальные управления для каждого шага процесса изменения состояния некоторой динамической системы, то можно найти и ***безусловные оптимальные управления***, т.е. решение рассматриваемой задачи. Действительно, пусть известно начальное состояние S_0 изучаемой системы. Но для первого шага известно условное оптимальное управление, связанное с начальным состоянием S_0. В результате реализации этого управления после первого шага система перейдет в другое состояние S_1. Но для второго шага известно условное оптимальное управление, связанное с состоянием S_1 и т.д. Таким образом, при реализации метода дискретного динамического программирования многошаговую процедуру принятия решений повторяют дважды: первый раз — „от конца к началу“ и находят условные оптимальные управления на каждом шаге; второй раз — „от начала к концу“ и находят безусловные оптимальные управления на каждом шаге.

В заключение отметим, что при реализации метода дискретного динамического программирования многошаговую процедуру принятия решений можно сразу проводить „от начала к концу“ и определять безусловные оптимальные управления. В вычислительном аспекте эта схема ничуть не хуже предложенной выше, но в смысле удобства описания и „прозрачности“ для понимания уступает ей.

Для иллюстрации возможностей метода дискретного динамического программирования рассмотрим задачу о распределении капиталовложений.

Пример П2.5. Руководство фирмы изучает предложения по наращиванию производственных мощностей на трех принадлежащих фирме предприятиях A_1, A_2 и A_3. Каждое предприятие представило на рассмотрение различные проекты наращивания своих производственных мощностей, реализацию каждого из которых характеризуют величины (в условных денежных единицах) суммарных затрат C и суммарных доходов R (табл. П2.1). Возможность отказа фирмы от наращивания производственных мощностей учтена проектом, для которого $C = 0$ и $R = 0$. Для расширения производства на всех трех предприятиях фирма выделяет средства в объеме 5 условных денежных единиц. Их нужно распределить между предприятиями так, чтобы с учетом представленных проектов получить максимальный доход от инвестиций.

Таблица П2.1

Номер проекта	A_1		A_2		A_3	
	C_1	R_1	C_2	R_2	C_3	R_3
1	0	0	0	0	0	0
2	1	5	2	8	1	3
3	2	6	3	9	–	–
4	–	–	4	12	–	–

В рассматриваемой задаче каждому из предприятий A_1, A_2, A_3 ставим в соответствие этап многошаговой процедуры принятия решений (распределение инвестиций или капиталовложений), поскольку нужно выбрать оптимальный проект для каждого из них. Номер этапа j будет соответствовать предприятию A_j, $j=\overline{1,3}$.

Пусть далее y_1 — объем капиталовложений, распределяемых на этапах 1, 2, 3; y_2 — объем капиталовложений, распределяемых на этапах 2 и 3; y_3 — объем капиталовложений, распределяемых на этапе 3. Понятно, что конкретные значения y_2 и y_3 не известны, но известно, что y_2, $y_3 \in \{0, 1, \ldots, 5\}$. Значение же y_1 равно суммарному объему капиталовложений, распределенных на всех трех этапах, т.е. равно 5.

На рис. П2.9 представлена ациклическая сеть, соответствующая рассматриваемой задаче. Конечный этап ($j=4$) введен в рассмотрение для удобства вычислений. Каждому возможному значению y_1, y_2, y_3 поставлен в соответствие узел сети, ассоциированный с одним из этапов. Длины ориентированных дуг, соединяющих узлы на этапе $j+1$ с узлами на этапе j, числен-

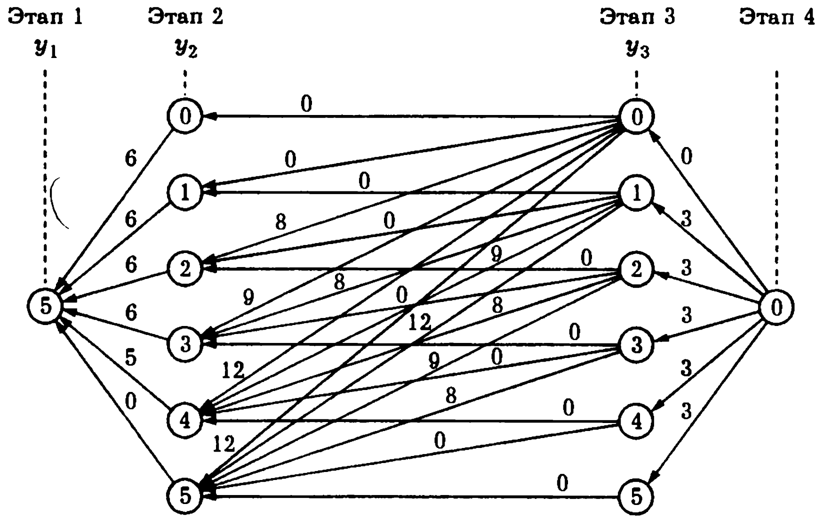


Рис. П2.9

но равны. доходам от реализации наилучшего допустимого (в смысле объема капиталовложений) проекта. В узлах сети проставлены возможные значения y_1, y_2 и y_3. Это сделано лишь для удобства построения сети и никоим образом не связано с нумерацией ее узлов.

Рассмотрим ориентированные дуги, соединяющие узел 0 на этапе 4 с узлами на этапе 3. Дуга (0, 0) соответствует случаю, когда капиталовложения на этапе 3 отсутствуют, т.е. допустимым является проект с номером 1 и $R_3 = 0$. Поэтому дуге (0, 0) соответствует длина, равная нулю. Дуга (0, 1) соответствует единичному объему капиталовложений на этапе 3, и оба заявленных проекта с номерами 1 и 2 являются допустимыми. Но (см. табл. П2.1) доход от реализации второго проекта $R_3 = 3$ больше дохода от реализации первого проекта $R_3 = 0$. Таким образом, более предпочтительным является второй проект и дуге (0, 1) соответствует длина, равная 3. Рассуждая аналогичным образом и учитывая тот факт, что предприятие A_3 представило лишь два проекта, приходим к выводу: длина каждой из ориентированных дуг $(0,\ k)$, $k = \overline{2, 5}$, равна 3.

Переходя к рассмотрению ориентированных дуг сети, соединяющих ее узлы на этапе 3 с узлами на этапе 2, обращаем внимание на величину $y_2 - y_3$, значение которой равно объему капиталовложений, распределенных на этапе 2. Таким образом, ориентированная дуга $(y_3,\ y_2)$ является допустимой лишь для тех проектов предприятия A_2, затраты на реализацию которых не превышают $y_2 - y_3$. Длина дуги $(y_3,\ y_2)$ будет равна наибольшему значению R_2 для всех таких проектов. В частности, для ориентированной дуги (1, 5) объем капиталовложений, распределенных на этапе 2, равен $y_2 - y_3 = 5 - 1 = 4$, и все проекты, представленные предприятием, являются допустимыми. А так как $\max\{0,\ 8,\ 9,\ 12\} = 12$, то эта дуга имеет длину, равную 12. Для ориентированной дуги (2, 4) объем капиталовложений, распределенных на этапе 2, равен $y_2 - y_3 = 4 - 2 = 2$, и лишь первые два проекта, представленные предприятием A_2, являются допустимыми. А так как $\max\{0,\ 8\} = 8$, ориентированная дуга (2, 4) имеет длину, равную 8. Заметим, что при $y_3 > y_2$ ориентированная дуга (y_3, y_2) не существует, так как объем капиталовложений, распределяемых на этапах 2 и 3, не может быть меньше объема капиталовложений, распределяемых на этапе 3.

Анализируя ациклическую сеть, изображенную на рис. П2.9, видим, что каждая ее ориентированная дуга единственным образом связана с некоторым конкретным проектом, а исходная задача заключается в отыскании самого длинного пути от узла 0 на этапе 4 до узла 5 на этапе 1. Кроме того, нетрудно заметить, что некоторые ориентированные дуги можно отбросить как заведомо неоптимальные, сократив тем самым объем вычислений при поиске оптимального решения. Так, например, можно исключить ориентированную дугу, соединяющую узел 0 на этапе 3 с узлом 1 на этапе 2, так как $y_2 - y_3 = 1 - 0 = 1$ и эти капиталовложения на этапе 2 не могут принести какой бы то ни было доход (см. табл. П2.1). Однако, чтобы не отвлекаться, мы не будем рассматривать процедуры подобного рода.

В принципе можно воспользоваться уже обсуждавшейся процедурой нумерации ациклической сети и решить исходную задачу с помощью алгоритма нахождения наиболее длинного пути (см. пример П2.3). Но мы остановимся на методе дискретного динамического программирования, который обычно применяют при решении многошаговых задач в исследовании операций.

Пусть k_j — номер проекта на этапе j. Этот проект будет допустимым на этапе j при заданном значении y_j, если $c_j(k_j) \leqslant \leqslant y_j$, где $c_j(k_j)$ — величина суммарных затрат на реализацию проекта k_j. Если $R_j(k_j)$ — величина суммарного дохода, обусловленная реализацией проекта, а $f_j(y_j)$ — максимальный доход на этапе j при заданном y_j, то, согласно (П2.4), (П2.5) и примеру П2.4,

$$f_j(y_j) = \max_{k_j \in \omega_j} \Big(R_j(k_j) + f_{j+1}(y_j - c_j(k_j)) \Big), \quad j = \overline{1, 3},$$

где ω_j — множество номеров k тех проектов, для которых $c_j(k) \leqslant y_j$, а $f_4(y_4) = 0$ для всех значений $y_4 = \overline{0,5}$.

Процесс вычислений начинаем при $j = 3$, а результаты вычислений представим в табл. П2.2–П2.4.

Таблица П2.2

y_3	$R_3(k_3)$		Условное оптимальное управление	
	$k_3 = 1$	$k_3 = 2$	$f_3(y_3)$	k_3^*
0	0	–	0	1
1	0	3	3	2
2	0	3	3	2
3	0	3	3	2
4	0	3	3	2
5	0	3	3	2

Таблица П2.3

y_2	$R_2(k_2)+f_3(y_2-c_2(k_2))$				Условное оптимальное управление	
	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$	$k_2=4$	$f_2(y_2)$	k_2^*
0	$0+0=0$	–	–	–	0	1
1	$0+3=3$	–	–	–	3	1
2	$0+3=3$	$8+0=0$	–	–	8	2
3	$0+3=3$	$8+3=11$	$9+0=9$	–	11	2
4	$0+3=3$	$8+3=11$	$9+3=12$	$12+0=12$	12	3 или 4
5	$0+3=3$	$8+3=11$	$9+3=12$	$12+3=15$	15	4

Таблица П2.4

y_1	$R_1(k_1)+f_2(y_1-c_1(k_1))$			Условное оптимальное управление	
	$k_1 = 1$	$k_1 = 2$	$k_1 = 3$	$f_1(y_1)$	k_1^*
5	$0+15=15$	$5+12=17$	$6+11=17$	17	2 или 3

Чтобы найти оптимальное решение, проведем анализ полученных результатов, начиная с этапа 1. При $y_1 = 5$ оптимальные проекты имеют номера $k_1^* = 2$ и $k_1^* = 3$ (см. табл. П2.4). Сначала рассмотрим случай $k_1^* = 2$. С учетом данных, представленных в табл. П2.1, имеем $c_1(2) = 1$ и на этапах 2 и 3 $y_2 = y_1 - c_1(2) = 5 - 1 = 4$. Таким образом (см. табл. П2.3 при $y_2 = 4$), $k_2^* = 3$ или $k_2^* = 4$. Если $k_2^* = 3$, то (см. табл. П2.1) $c_2(3) = 3$ и $y_3 = y_2 - c_2(3) = 4 - 3 = 1$. Поэтому (см. табл. П2.1 при $y_3 = 1$) $k_3^* = 2$. Найдем оптимальный набор проектов $k_1^* = 2$, $k_2^* = 3$, $k_3^* = 2$, что соответствует суммарному доходу (см. табл. П2.1) в объеме $5 + 9 + 3 = 17$ условных денежных единиц и следующему распределению капиталовложений: для предприятия A_1 — 1; для предприятия A_2 — 3; для предприятия A_3 — 1. Схема нахождения всех различных оптимальных наборов проектов представлена на рис. П2.10. #

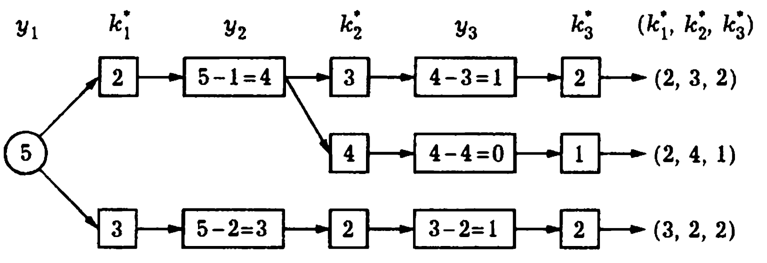


Рис. П2.10

Завершая рассмотрение метода дискретного динамического программирования, заметим, что материал этого приложения предназначен лишь для первого знакомства как с самим методом, так и с динамическим программированием в целом. Для более детального изучения этих важных разделов исследования операций рекомендуем обратиться к специальной литературе*.

*См.: *Вагнер Г.*, тт. 1–3; *Таха Х.*, т. 1.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Учебники и учебные пособия

Ашманов С.А. Линейное программирование: Учеб. пособ. М.: Наука, 1981. 304 с.

Воробьев Н.Н. Теория игр. Лекции для экономистов-кибернетиков. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1974. 160 с.

Карманов В.Г. Математическое программирование: Учеб. пособ. М.: Наука, 1975. 272 с.

Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование: Учеб. пособ. М.: Высш. шк., 1976. 352 с.

Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации: Учеб. пособ. М.: Наука, 1978. 350 с.

Теория прогнозирования и принятия решений: Учеб. пособ. / Под ред. *С.А. Саркисяна.* М.: Высш. шк., 1977. 304 с.

Задачники

Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособ. М.: Высш. шк., 1986. 319 с.

Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. М.: Высш. шк., 1975. 270 с.

Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в примерах и задачах: Учеб. пособ. М.: Высш. шк., 1986. 287 с.

Монографии

Айзекс Р. Дифференциальные игры / Пер. с англ. под ред. *М.И. Зеликина.* М.: Мир, 1967. 480 с.

Акоф Р., Сасиени М. Основы исследования операций / Пер. с англ. под ред. *И.А. Ушакова.* М.: Мир, 1971. 536 с.

Арис Р. Дискретное динамическое программирование / Пер. с англ. под ред. *Б.Т. Поляка.* М.: Мир, 1969. 172 с.

Банди Б. Основы линейного программирования / Пер. с англ. под ред. *О.В. Шахеевой.* М.: Радио и связь, 1989. 176 с.

Вагнер Г. Основы исследования операций / Пер. с англ. под ред. *Б.Т. Вавилова*: В 3 т. Т. 1. М.: Мир, 1972. 336 с.; Т. 2. М.: Мир, 1973. 488 с.; Т. 3. М.: Мир, 1973. 504 с.

Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Советское радио, 1972. 552 с.

Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971. 384 с.

Грень Е. Статистические игры и их применение / Пер. с польск. под ред. *Г.Г. Пирогова* и *С.Д. Горшенина*. М.: Статистика, 1975. 176 с.

Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. М.: Наука, 1976. 240 с.

Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / Пер. с англ. под ред. *А.А. Конюса*. М.: Прогресс, 1975. 608 с.

Исследование операций: модели и применение / Под ред. *Д. Моудера* и *С. Элмаграби*: В 2 т. Т. 1. / Пер. с англ. *И.М. Макарова* и *И.М. Бескровного*. М.: Мир, 1981. 677 с.

Карр Ч., *Хоув Ч.* Количественные методы принятия решений в управлении и экономике / Пер. с англ. под ред. *Н.Н. Воробьева*. М.: Мир, 1966. 463 с.

Льюис Р., *Райфа Х.* Игры и решения / Пер. с англ. под ред. *Д.Б. Юдина*. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 644 с.

Нейман Д., *Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение / Пер. с англ. под ред. *Н.Н. Воробьева*. М.: Наука, 1970. 708 с.

Раскин Л.Г. Анализ сложных систем и элементы теории оптимального управления. М.: Советское радио, 1976, 344 с.

Растригин Л.А. Системы экстремального управления. М.: Наука, 1974. 632 с.

Таха Х. Введение в исследование операций / Пер. с англ. *В.Я. Алтаева*, *Б.Т. Вавилова*, *В.С. Данилина* и *В.И. Моторина*: В 2 т. М.: Мир, 1985. Т. 1. 479 с.; Т. 2. 496 с.

Флеминг У., *Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами / Пер. с англ. под ред. *А.Н. Ширяева*. М.: Мир, 1978. 318 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Математика в техническом университете
Выпуск XX

Волков Игорь Куприянович
Загоруйко Елена Антоновна

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Редактор *Е.В. Авалова*
Художиик *С.С. Водчиц*
Корректор *О.В. Калашникова*

Оригииал-макет подготовлеи
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
под руководством *А.Н. Канатникова*

Изд. лиц. № 020523 от 25.04.97

Подписаио в печать 30.05.2000 Формат 60×88 1/16.
Печать офсетиая. Бумага офсетная № 1.
Усл. печ. л. 27,25. Уч.-изд. л. 27,02.
Тираж 2000 экз. Изд. № 25. Заказ 5110

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумаиа,
107005, Москва, 2-я Баумаиская, 5.

Отпечатаио в Производствеиио-издательском комбииате ВИНИТИ,
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403.
Тел. 554-21-86

ISBN 5-7038-1518-5
9 785703 815182