

Ю. В. ЛИННИК

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ



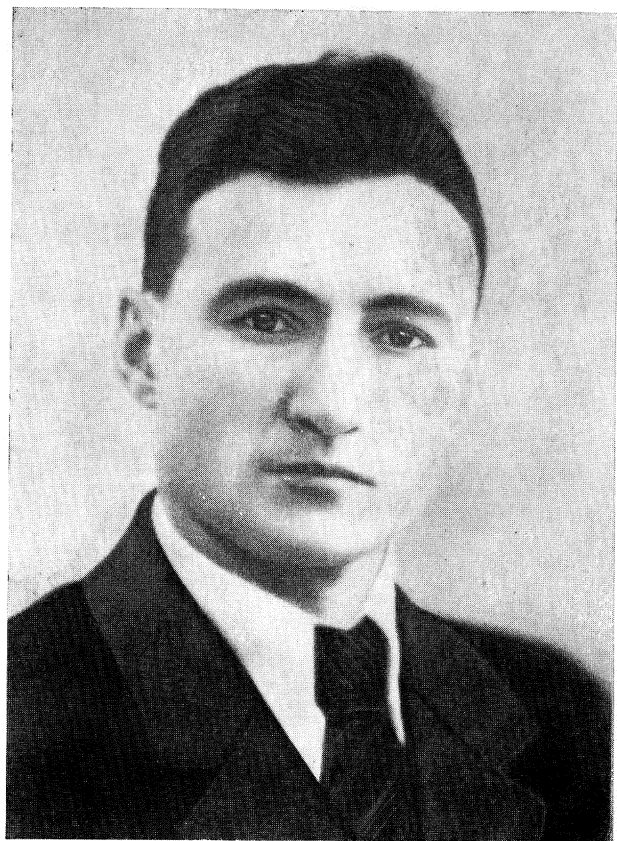
ЛЕНИНГРАД
«НАУКА»
ЛЕНИНГРАДСКОЕ
ОТДЕЛЕНИЕ
1981

Ю. В. ЛИННИК

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



ЛЕНИНГРАД
«НАУКА»
ЛЕНИНГРАДСКОЕ
ОТДЕЛЕНИЕ
1981



Избранные труды. Теория вероятностей. Ю. В. Линник. Л., «Наука», 1981. 344 с.

Настоящий сборник «Избранных трудов» содержит 15 работ по теории вероятностей крупнейшего советского математика академика Ю. В. Линника (1915—1972). Эти работы были выполнены Ю. В. Линником в 1947—1962 гг. и по существу посвящены целиком предельным теоремам теории вероятностей. Издание рассчитано на широкие круги математиков. Лит. — 204 назв., ил. — 2.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

академик Ю. В. ПРОХОРОВ (ответственный редактор),
И. А. ИБРАГИМОВ, А. В. МАЛЫШЕВ, М. С. НИКУЛИН,
А. П. ХУСУ

СОСТАВИТЕЛЬ ТОМА

доктор физ.-мат. наук И. А. ИБРАГИМОВ

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
От редколлегии	6
О точности приближения к гауссову распределению сумм независимых переменных случайных величин. 1947	7
К теории неоднородных цепей Маркова. 1949	34
Многомерные интегральный и локальный законы для неоднородных цепей Маркова. (Совместно с Н. А. Сапоговым). 1949	64
Об одном аналитическом обобщении теоремы Крамера и его применении. (Совместно с А. А. Зингером). 1955	98
О разложении композиции законов Гаусса и Пуассона. 1957	104
Общие теоремы о разложении безгранично делимых законов. I. Формулировки. Три основные леммы. Необходимые условия. 1958	134
Еще об обобщениях теоремы Г. Крамера. (Совместно с В. П. Скитовичем). 1958	174
Об « α -разложениях» безгранично делимых вероятностных законов. 1959	180
Общие теоремы о разложении безгранично делимых законов. II. Достаточные условия (случай конечного пуассоновского спектра). 1959	191
Теоретико-информационное доказательство центральной предельной теоремы в условиях Линдеберга. 1959	225
О некоторых связях информационных количеств К. Шеннона и Р. Фишера с теорией суммирования случайных векторов. 1960	237
Некоторые вопросы теории целых функций, возникающие из теории вероятностей. 1961	250
Предельные теоремы для сумм независимых величин при учете больших уклонений. I—II. 1961	258
О вероятности больших уклонений для сумм независимых величин. 1961	293
Предельные теоремы для сумм независимых величин при учете больших уклонений. III. 1962	313

Приложение

И. А. Ибрагимов, И. В. Островский, В. В. Петров. О работах Ю. В. Линника по теории вероятностей	329

ОТ РЕДКОЛЛЕГИИ

Настоящий том содержит 15 работ по теории вероятностей выдающегося советского математика Юрия Владимировича Линника, опубликованных им в 1947—1962 гг. Развитые в этих работах методы исследования и полученные в них глубокие результаты полностью сохраняют значение для современных исследователей, являясь богатым источником новых идей.

В настоящий том вошли статьи Ю. В. Линника, представляющие наибольший интерес. Работы расположены в хронологическом порядке. Текст не подвергался изменению, исключая исправления замеченных неточностей в тексте статей и библиографии.

В подготовке настоящего тома активное участие приняли И. В. Островский и его ученики и сотрудники, В. В. Петров и возглавляемый им коллектив кафедры теории вероятностей и математической статистики Ленинградского университета. Особенно большую работу проделали сотрудники Лаборатории статистических методов Ленинградского отделения Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. Всем им редакция выражает глубокую благодарность.

**О ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ
К ГАУССОВУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ СУММ
НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН**

Изв. АН СССР. Сер. мат., 1947, т. 11, № 2, с. 111—138

Изучается вопрос о погрешности предельного закона вероятностей для сумм независимых случайных величин. При этом получены более точные оценки, чем ранее известные.

1. Пусть ряд независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_N, \dots$ имеет законы распределения $F_j(x)$, математические ожидания $E(X_j)=0$ и дисперсии $\sigma_j^2 < \infty$ ($j=1, 2, \dots, N$). Пусть дисперсия суммы

$$S_N^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_N^2 \neq 0.$$

Как известно, центральная предельная теорема в ее классической формулировке трактует о законе распределения $F_N(x)$ нормированной суммы $Z_N = (X_1 + X_2 + \dots + X_N)/S_N$. В частности, известны необходимые и достаточные условия для того, чтобы

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{F}_N(x) = G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy, \quad (1)$$

выраженные в виде ограничений, наложенных лишь на поведение вторых моментов.

Однако многие современные работы посвящены собиранию сведений о том, как протекает стремление закона $F_N(x)$ к гауссову закону при выполнении тех или иных достаточных условий, хотя бы и более жестких, чем условия Линдберга. В частности, интересно знать, какова структура тех случайных величин среди всех, подчиняющихся определенным условиям, которые обнаруживают в некотором смысле наибольшее отклонение от суммы нормального распределения.

К исследованиям в этом направлении относятся, например, работы Г. Крамера [1, 2], А. Берри [3] и К. Эссеена [4]. Эти авторы

принимают, что независимые величины X_j , помимо указанных выше условий, имеют еще абсолютные третьи моменты

$$\beta_{3j} = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^3 dF_j(x).$$

Если обозначить $A_{3N} = \sum_{j=1}^N \beta_{3j}$ и ввести «дробь Ляпунова» $L_N = A_{3N}/S_N^3$, то для выполнения (1), как известно, достаточно, чтобы $L_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. В связи с этим исследуется отношение

$$\frac{|P_N(x)|}{L_N} = \frac{|\bar{F}_N(x) - G(x)|}{L_N}.$$

В работах [3] и [4] показано, что

$$\frac{|P_N(x)|}{L_N} \leq C_0, \quad (2)$$

где C_0 — некоторая абсолютная константа ($C_0 = 7.5$ в работе [4] ¹⁾). Кроме того, работа [4] дает некоторые основания выделить среди всех возможных систем $\{X_j\}$ систему, даваемую симметрической схемой Бернулли (бросание монеты), в некотором роде наилучшую.

2. В настоящей работе будут допущены более жесткие, чем в [3] и [4], но все же достаточно широкие условия, и в этих условиях будут получены значительно более точные сведения относительно $|P_N(x)|$, чем в оценке (2). Эти сведения выяснят особую роль симметрической схемы Бернулли в данных условиях, а также некоторые особенности способа приближения $\bar{F}_N(x)$ к $G(x)$.

О б о з н а ч е н и я. $C_0, C_1, \dots; c_0, c_1, \dots$ — абсолютные константы ≥ 1 ; $\eta_0, \eta_1, \dots$ — такие же константы, заключенные между 0 и $1/2$ (исключая 0). Все эти константы будут эффективно вычислимы.

Функции $\Psi_0(N), \Psi_1(N), \Psi_2(N), \dots$ обозначают монотонные положительные функции числа N , возрастающие до ∞ .

Выражение $A(N) \ll B(N)$ И. М. Виноградова для двух функций, $A(N), B(N)$, из которых $B(N)$ положительна и монотонна, означает, что $|A(N)|/B(N) < c_a$ при $N > c_b$ (c_a и c_b — какие-либо из наших констант).

$T_N = L^{-1}N$, r означает $\ln T_N$. Закон распределения $F(x)$ в точках разрыва определяется как $\{F(x-0) + F(x+0)\}/2$. P — вероятность; $F_1 * F_2$ — композиция

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y) dF_2(y)$$

двух законов.

¹⁾ В то же время легко обнаружить, что $C_0 \geq 1/\sqrt{2\pi}$.

3. Подчиним независимые величины $X_1, X_2, \dots, X_N, \dots$, помимо обычных условий, высказанных в п. 1, дополнительным ограничениям. Зададимся функциями $\Psi_0(N), \Psi_1(N), \dots$ типа, указанного в п. 2, и наложим следующие ограничения:

I) на вторые моменты —

$$S_N^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_N^2 \leq c_1 N, \quad (3)$$

$$\sigma_j^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_j(x) \geq c_1^2 \quad (j \leq N), \quad (4)$$

причем допускаются исключения из (4), но не более чем для $N/\Psi_0(N)$ индексов $j \leq N$,

$$L_N \leq \frac{1}{\Psi_1(N)} \quad (5)$$

(это есть конкретизирование условия Ляпунова);

II) на третьи моменты —

$$\frac{1}{A_{3N}} \sum_{j=1}^N R_j^{(N)} \leq \frac{1}{|\Psi_2(N)|}, \quad (6)$$

где

$$R_j^{(N)} = \int_{|x| \geq \delta_{N/\Psi_3(N)}} |x|^3 dF_j(x);$$

III) малая окрестность нуля маловероятна, т. е.

$$\int_{|x| \leq L_N^{1-\gamma_0}} dF_j(x) \leq \frac{1}{|\Psi_4(N)|} \quad (j \leq N), \quad (7)$$

причем допустимы исключения, но не более чем для $N/\Psi_0(N)$ индексов.

Заметим, что $L_N \rightarrow 0$, так что речь идет об окрестности нуля, тем более узкой, чем меньше L_N .

4. При этих условиях получаются следующие теоремы.

Теорема I. Если величины X_i обладают симметрическим распределением ($F_i(x) = 1 - F_i(-x)$), то при любом фиксированном M $|x| \leq M$,

$$\frac{|P_N(x)|}{L_N} = \frac{|\bar{F}_N(x) - G(x)|}{L_N} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} (1 + \varepsilon_N(M)), \quad (8)$$

где $\varepsilon_N(M)$ зависит только от M, N и выбора функций $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_4$, причем $\varepsilon_N(M) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. (Таким образом, приближение

$\varepsilon_N(M)$ к 0 происходит равномерно по всем допустимым системам $\{X_j\}$.

Смысл этой теоремы поясняется следующим замечанием. Для симметрической схемы Бернулли, когда все $F_j(x)$ имеют вид

$$F_j(x) = 0 \quad (x < -1), \quad F_j(x) = \frac{1}{2} \quad (-1 < x < 1), \quad F_j(x) = 1 \quad (x > 1),$$

существует ряд точек x_{vN} ($v=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), таких, что расстояние между соседними точками $x_{v+1,N} - x_{vN} = o(1)$ для $x_{vN} \rightarrow \pm \infty$ при $v \rightarrow \pm \infty$, $N \rightarrow \infty$, и

$$\frac{|\bar{F}_N(x_{vN}) - G(x_{vN})|}{L_N} > \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_{vN}^2/2} (1 - \varepsilon_N),$$

где $\varepsilon_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ и $|x| \leq M$ (точки x_{vN} зависят от N).

Таким образом, в условиях п. 3 схема Бернулли дает среди всех симметрических схем в некотором смысле наибольшее уклонение от нормального распределения.

Теорема II. В условиях теоремы I существует последовательность точек $\zeta_{-n}^{(N)}, \zeta_{-n+1}^{(N)}, \dots, \zeta_{-1}^{(N)}, \zeta_0^{(N)}, \dots, \zeta_l^{(N)}$, таких, что

$$\zeta_{v+1}^{(N)} - \zeta_v^{(N)} = q_N, \quad |M - \zeta_l^{(N)}| \leq q_N, \quad |-M - \zeta_{-n}^{(N)}| \leq q_N,$$

где

$$\left(1 + \frac{1}{\Psi_5(N)}\right) L_N \leq q_N \leq 2 \left(1 + \frac{1}{\Psi_5(N)}\right) L_N, \quad (9)$$

для которых

$$\frac{|\bar{F}_N(\zeta_v^{(N)}) - G(\zeta_v^{(N)})|}{L_N} < \varepsilon'_N, \quad (10)$$

причем $\varepsilon'_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ равномерно по всем допустимым системам $\{X_j\}$.

Далее, для любого x с $|x| \leq M$ имеем:

$$\int_x^{x+q_N} P_N(x) dx \leq q_N L_N \frac{1}{\Psi_6(N)}. \quad (11)$$

Таким образом, существует сетка равноудаленных значений $\zeta_v^{(N)}$, где законы $F_N(x)$ и $G(x)$ должны сближаться более тесно, чем в общем случае.

Следует заметить, что теорема I может быть выведена геометрическим путем из (10) и (11) (см. доказательство леммы 12, п. 20).

Теорема III. Если $\{X_j\}$ не все симметрически распределены, то при дополнительных условиях:

IV) $x=0$ есть медиана распределений $F_j(x)$,

$$\int_{x>0} dF_j(x) = \frac{1}{2} \quad (j \leq N), \quad (12)$$

причем допускаются исключения, но не более чем для $N/\Psi_0(N)$ индексов,

$$V) \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_j(x) = 2 \int_0^{\infty} x^2 dF_j(x) \quad (j \leq N) \quad (13)$$

(причем возможны не более чем $N/\Psi_0(N)$ исключений), получим

$$\frac{|Q_N(x)|}{L_N} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} (1 + \varepsilon_N(M)), \quad (14)$$

где

$$Q_N(x) = \bar{F}_N(x) - G(x) - H_N(x), \quad |x| \leq M,$$

$$H_N(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} (1 - x^2) \Delta_N,$$

$$\Delta_N = \frac{1}{S_N^3} \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} x^3 dF_j(x)$$

и $\varepsilon_N(M)$ — число из теоремы I.

Теорема IV. Существуют точки $\zeta_N^{(N)}$, определяемые так же, как в теореме II, такие, что

$$\frac{|Q_N(\zeta_N^{(N)})|}{L_N} < \varepsilon'_N, \quad (15)$$

где $\varepsilon'_N \rightarrow 0$ — число из теоремы II.

Далее, при $|x| \leq M$

$$\int_x^{x+q_N} Q_N(x) dx \leq q_N L_N \frac{1}{\Psi_6(N)}. \quad (16)$$

Теорема III может быть выведена из (15) и (16) геометрическим путем.

5. Пусть

$$\varphi_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_j(x)$$

— характеристические функции (в дальнейшем х. ф.) законов $F_j(x)$, а

$$g(t) = e^{-t^2/2}$$

— х. ф. закона Гаусса $G(x)$.

Мы будем изучать разность $\bar{F}_N(x) - G(x)$ с помощью х. ф. по обычному способу [2], но для получения большей точности применим к изучению произведения большого числа х. ф. метод особой классификации аргументов (интервалы I и II класса) и «сглаживания» тригонометрических сумм, введенный в аддитивную теорию чисел И. М. Виноградовым.

6. Пусть $F(x)$ и $K(x)$ — два закона распределения с х. ф. $f(t)$ и $k(t)$. Тогда имеем основную формулу обращения [4]:

$$F(x) - K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \frac{f(t) - k(t)}{-it} dt \quad (17)$$

(см. п. 2 относительно определения законов).

Для закона $\bar{F}_N(x)$ распределения нормированной суммы $(X_1 + X_2 + \dots + X_N)/S_N$ имеем:

$$\text{х. ф. } \bar{\varphi}_N(t) = \varphi_1\left(\frac{t}{S_N}\right) \dots \varphi_N\left(\frac{t}{S_N}\right).$$

Пусть $B = B_N = L_N^{-2} \ln^{10} T_N = T_N^2 r^{10}$. Введем вспомогательную нормальную переменную с функцией распределения

$$G_B(x) = \sqrt{\frac{B}{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-By^2/2} dy.$$

Ей соответствует х. ф. $g_B(t) = e^{-t^2/2B}$. Тогда если положить

$$\tilde{F}_N(x) = \bar{F}_N(x) * G_B(x), \quad \tilde{G}(x) = G(x) * G_B(x), \quad (18)$$

то из (17) получим:

$$\tilde{F}_N(x) - \tilde{G}(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{it} [\bar{\varphi}_N(t) - g(t)] g_B(t) dt. \quad (19)$$

Разность $\tilde{P}_N(x) = \tilde{F}_N(x) - \tilde{G}(x)$ значительно более удобна в обращении, чем $P_N(x) = \bar{F}_N(x) - G(x)$; в частности она непрерывна. Основные вычисления будут относиться к этой разности, и поэтому нужно будет из ее свойств выводить свойства $P_N(x)$. С этой целью мы докажем некоторые леммы.

7. Лемма 1. Если число $\Delta \geq L_N/r$ и если для окрестности числа ξ длины $2\Delta/r^2$ ($|x - \xi| \leq \Delta/r^2$) имеем $|\bar{F}_N(x) - \tilde{G}(x)| \leq \Delta$, то при $N > c_1 > e^4$

$$|\bar{F}_N(\xi) - G(\xi)| \leq \Delta \left(1 + \frac{1}{r}\right). \quad (20)$$

Доказательство. Пусть это неверно, и пусть сперва

$$\bar{F}_N(\xi) - G(\xi) > \Delta \left(1 + \frac{1}{r}\right).$$

Так как $G'(x) \leq 1/\sqrt{2\pi}$, а $\bar{F}_N(x)$ монотонна, то при $\delta \in [0, \Delta/2r]$

$$\bar{F}_N(\xi + \delta) - G(\xi + \delta) \geq \Delta \left(1 + \frac{1}{2r}\right).$$

Положим $x_0 = \xi + \Delta/4r^2$; тогда

$$\bar{F}_N(x) - G(x) \geq \Delta \left(1 + \frac{1}{2r}\right)$$

при $|x - x_0| \leq \Delta/8r^2$ и

$$|\bar{F}_N(x) - G(x)| \leq 1$$

вне этого промежутка. Далее,

$$\begin{aligned} \bar{F}_N(x_0) - \tilde{G}(x_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} [\bar{F}_N(x_0 - y) - G(x_0 - y)] dG_B(y) = \\ &= \sqrt{\frac{B}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\bar{F}_N(x_0 - y) - G(x_0 - y)] e^{-By^2/2} dy \geq \\ &\geq \Delta \left(1 + \frac{1}{2r}\right) \int_{|y| \leq \Delta/8r^2} \sqrt{\frac{B}{2\pi}} e^{-By^2/2} dy = 2 \sqrt{\frac{B}{2\pi}} \int_{\Delta/8r^2}^{\infty} e^{-By^2/2} dy. \end{aligned}$$

Так как $B = T_N^2 r^{10}$, то при $N > c_1$

$$\bar{F}_N(x_0) - \tilde{G}(x_0) \geq \Delta \left(1 + \frac{1}{4r}\right),$$

что противоречит условию леммы.

Если

$$\bar{F}_N(\xi) - G(\xi) < -\Delta \left(1 + \frac{1}{r}\right),$$

то, полагая $x_0 = \xi - \Delta/4r^2$, получаем при $|x - x_0| \leq \Delta/8r^2$

$$G(x) - \bar{F}_N(x) \geq \Delta \left(1 + \frac{1}{2r}\right)$$

и снова приходим к противоречию.

Лемма 2.

$$S_N^2 \geq C_2 N, \quad L_N = \frac{A_{3N}}{S_N^3} \geq \frac{1}{\sqrt{N}}. \quad (21)$$

Первое утверждение непосредственно ясно из (4). Второе утверждение верно и без ограничений п. 3. Именно, если ρ_2 и ρ_3 — второй и третий абсолютные моменты некоторого закона распределения, то, как известно [2],

$$\rho_2^{1/2} \leq \rho_3^{1/3}, \quad \rho_3 \geq \rho_2^{3/2}.$$

Наряду с $F_1(x), \dots, F_N(x)$ также и $(F_1(x) + \dots + F_N(x))/N$ будет законом распределения, причем

$$\rho_2 = \frac{S_N^2}{N}, \quad \rho_3 = \frac{A_{3N}}{N}.$$

Отсюда $A_{3N}N^{3/2}/NS_N^3 \geq 1$, что и приводит к доказательству.

8. Основной интеграл (19) сходится абсолютно и равномерно по x в силу поведения $g_B(t) = e^{-t^{1/2}B}$.

Если теперь положим $B_1 = B^{1/2}r^2 = T_N r^2$, то получим

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{B_1}^{\infty} \frac{e^{-ixt}}{it} [\bar{\varphi}_N(t) - g(t)] g_B(t) dt \leq \frac{1}{T_N^2} = L_N^2 \quad (22)$$

и такую же оценку для $-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-B_1}$ в силу малости $g_B(t)$. Это дает нам

$$\begin{aligned} \tilde{P}_N(x) &= \tilde{F}_N(x) - \tilde{G}(x) = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-B_1}^{B_1} \frac{e^{-itx}}{it} [\bar{\varphi}_N(t) - g(t)] g_B(t) dt + R_1, \end{aligned} \quad (23)$$

где $R_1 \ll L_N^2$.

Дальнейшее сужение интервалов можно произвести, используя следующую лемму, доказанную в несколько другой формулировке А. М. Ляпуновым (1901 г.): при $|t| \leq T_N/24$

$$|\varphi_N(t) - g(t)| \leq c_2 L_N |t|^3 e^{-t^2/4} \quad (24)$$

(см. [4], с. 44; обозначения изменены).

9. Положим $L_N^{-1} = T_N$ и, зафиксировав

$$\Psi_5(N) < r^2 = \ln^2 T_N,$$

выделим

$$I_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \Psi_5(N)} \frac{e^{-ixt}}{it} [\bar{\varphi}_N(t) - g(t)] g_B(t) dt.$$

(Изучение I_0 , которое мы отложим на дальнейшее, будет проводиться обычным способом разложения х. ф. в ряд Маклорена).

Далее, из (24) выводим:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Psi_s(N)}^{T_N/24} \frac{e^{-ixt}}{it} [\varphi_N(t) - g(t)] g_B(t) dt \leq c_3 \int_{\Psi_s(N)}^{T_N/24} |t|^2 e^{-t^2/4} L_N dt \ll \frac{L_N}{\Psi_6(N)}. \quad (25)$$

Такая же оценка годна и для $\int_{-T_N/24}^{-\Psi_s(N)}$. Поэтому вся трудность сводится к исследованию

$$I_1 = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-B_1}^{-T_N/24} + \int_{T_N/24}^{B_1} \right\} \frac{e^{-ixt}}{it} [\varphi_N(t) - g(t)] g_B(t) dt = I'_1 + I''_1,$$

где

$$I'_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{T_N/24}^{B_1}, \quad I''_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{-B_1}^{-T_N/24}.$$

Для изучения, в частности, I'_1 положим $t = zT_N$. Так как $B_1 = T_N r^2$, то

$$I'_1 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{1/24}^{r^2} \frac{e^{ixT_N z}}{z} [\varphi_N(zT_N) - g(zT_N)] g_B(zT_N) dz.$$

Положим

$$\varphi_N(zT_N) = f_N(z), \quad \varphi_j\left(\frac{zT_N}{S_N}\right) = f_j(z) \quad (j \leq N).$$

Таким образом,

$$f_N(z) = f_1(z) \dots f_N(z). \quad (26)$$

Функция $f_j(z)$ есть х. ф. для закона $F_j(xS_N/T_N) = H_j(x)$. Этот закон имеет дисперсию $\sigma_j^2 T_N^2/S_N^2$, так что общая дисперсия законов $H_j(x)$ равна T_N^2 . Замечая, что

$$\int_{1/24}^{r^2} g(zT_N) \frac{dz}{z} \ll e^{-T_N^2/48} \ll \frac{L_N}{T_N}, \quad (27)$$

сводим дело к изучению

$$I'_1 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{1/24}^{r^2} \frac{e^{-ixT_N z}}{z} f_N(z) g_B(zT_N) dz.$$

10. Мы имеем

$$f_N(z) = \prod_{j=1}^N f_j(z).$$

В поведении этого произведения могут быть два случая:

1) в каждой точке $z \in [1/24, r^7]$ $|\tilde{f}_N(z)| < e^{-r^2}$; в этом случае

$$I'_1 \ll e^{-r^2/2} \ll L_N^2; \quad (28)$$

такого неравенства было бы достаточно для наших целей;

2) существует $z' \in [1/24, r^7]$, такое, что $|\tilde{f}_N(z')| \geq e^{-r^2}$; в силу непрерывности $\tilde{f}_N(z)$ существует наименьшее z_0 при условии

$$z_0 \in [1/24, r^7], \quad |\tilde{f}_N(z_0)| \geq e^{-r^2}.$$

Возьмем теперь число $1 - r^{50}/N$. Среди N значений $f_j(z_0)$ ($j \leq N$) не более чем N/r^{45} могут удовлетворять неравенству

$$|f_j(z_0)| \leq 1 - \frac{r^{50}}{N},$$

в противном случае свойство числа z_0 было бы нарушено. Из оставшихся $N_1 \geq N(1 - 1/r^{45})$ функций $f_j(z)$ каждая удовлетворяет неравенству

$$|f_j(z_0)| > 1 - \frac{r^{50}}{N}.$$

Поэтому можно выбрать $N_2 \geq N(1 - 1/\Psi_4(N))$ х. ф. $f_j(z)$, таких, что отвечающие им индексы j не являются исключительными в смысле условий п. 3. Мы перенумеруем их, как $f_j(z)$ ($j = 1, 2, \dots, N_2$). Таким образом,

$$|f_j(z_0)| > 1 - \frac{r^{50}}{N} \quad (j \leq N_2). \quad (29)$$

11. Для каждой $f_j(z)$ ($j \leq N_2$) найдется число ϑ_j , такое, что

$$|f_j(z_0)| = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz_0x} dH_j(x) = e^{i\vartheta_j M_j}, \quad M_j > 1 - \frac{r^{50}}{N}.$$

Отсюда

$$1 \geq \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz_0x - i\vartheta_j} dH_j(x) > 1 - \frac{r^{50}}{N},$$

$$1 - \int_{-\infty}^{\infty} \cos(z_0x - \vartheta_j) dH_j(x) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2\left(\frac{z_0x}{2} - \frac{\vartheta_j}{2}\right) dH_j(x) < \frac{r^{50}}{N}. \quad (30)$$

В качестве особых точек оси x отметим нули подынтегральной функции:

$$x_{\nu j} = \frac{2\nu\pi}{z_0} + \frac{\vartheta_j}{z_0} \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Каждую точку оси x можно представить в виде

$$x = \frac{2\sqrt{\pi}}{z_0} + \frac{\vartheta_j}{z_0} + a \quad (|a| \leq \frac{\pi}{z_0}). \quad (31)$$

Изучим вероятности для разных интервалов значений a при законе распределения $H_j(x)$.

Пусть $\mathfrak{B}_0$ — множество всех x с $|a| \in [\pi/10z_0, \pi/z_0]$. Для таких x

$$\sin^2\left(\frac{z_0 x}{2} - \frac{\vartheta_j}{2}\right) \geq \sin^2 \frac{\pi}{20}$$

и в силу (30)

$$\int_{\mathfrak{B}_0} dH_j(x) < \frac{r^{50}}{2N \sin^2(\pi/20)} \ll \frac{r^{50}}{N}. \quad (32)$$

Окружим каждую особую точку $x_{vj} = 2\sqrt{\pi}/z_0 + \vartheta_j/z_0$ сегментом $2\Delta_0$, где

$$\Delta_0 = \frac{r^{100}}{z_0 \sqrt{N}} \in \left[\frac{r^{93}}{\sqrt{N}}, \frac{24r^{100}}{\sqrt{N}} \right].$$

Пусть $\mathfrak{B}$ — множество точек, дополнительное ко всем этим сегментам.

Лемма 3. *Вероятность того, что точка x принадлежит множеству $\mathfrak{B}$, будет $\ll r^{-150}$.*

Доказательство. В силу (32) можно в представлении (31) положить $|a| \in [\Delta_0, \pi/10z_0]$. Тогда из (30) будет следовать

$$\int_{\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_0} dH_j(x) \ll \frac{r^{50}}{\Delta_0^2 z_0^2 N} \ll r^{-5000},$$

что в сочетании с (32) доказывает лемму.

12. Мы видим, что структура закона $H_j(x)$ близка к решетчатой, — вероятность того, что

$$|x - x_{vj}| > \Delta_0 = \frac{r^{100}}{z_0 \sqrt{N}} \quad (j = 1, 2, \dots, N_2),$$

весьма мала. Сумма дисперсий законов $H_j(x)$ не превосходит T_A^2 . Поэтому возможно выбрать из них $N_3 \geq N_2/r$ законов при условии

$$d_j^2 \leq \frac{T_N^2}{N} \left(1 + \frac{2}{r}\right).$$

По предыдущему выбору числа N_2 имеем также

$$d_j^2 \geq c_1^2 \frac{T_N^2}{N}, \quad (33)$$

и по неравенству Чебышева —

$$\int_{|x| > r^5} dH_j(x) \leq r^{-10}. \quad (34)$$

В силу (34) можно считать существенными лишь те особые точки x_{vj} , для которых $|2\sqrt{\pi}/z_0| \leq r^5$.

Докажем теперь лемму, имеющую важное значение для последующего.

Лемма 4. Для каждого $j \leq N_3$ существуют по крайней мере две особые точки x_{vj} при условии

$$\left| \frac{2\sqrt{\pi}}{z_0} \right| \leq r^5, \quad \int_{|x - x_{vj}| \leq \Delta_0} dH_j(x) \geq r^{-25} \quad (j \leq N_3), \quad (35)$$

причем хотя бы для одной из них

$$|x_{vj}| \geq 100\Delta_0. \quad (36)$$

Доказательство. Из леммы 3 и неравенства (34) заключаем, что существует хотя одна точка x_{vj} при условии (35). Если она только одна, то даже

$$\int_{|x - x_{vj}| \leq \Delta_0} dH_j(x) > 1 - \frac{1}{r}.$$

Но тогда

$$|x_{vj}| \geq 100\Delta_0.$$

В самом деле, будь это не так, мы получили бы

$$\int_{|x| \leq 200\Delta_0} dH_j(x) > 1 - \frac{1}{r},$$

что противоречило бы условию маловероятности окрестности нуля для закона $F_j(x)$. Имеем:

$$H_j(x) = F_j\left(x \frac{S_N}{T_N}\right).$$

Получилось бы, что для закона $F_j(x)$

$$P\left\{|x| \leq \frac{200\Delta_0 S_N}{T_N}\right\} > 1 - \frac{1}{r}.$$

Но $S_N < c_1 \sqrt{N}$, $\Delta_0 = r^{100}/z_0 \sqrt{N}$, так что

$$\frac{200\Delta_0 S_N}{T_N} \leq \frac{200c_1 r^{100}}{T_N} \leq \frac{1}{T_N^{1-\eta_0/2}}$$

и наше неравенство противоречит (7). Итак, $|x_{vj}| \geq 100\Delta_0$.

Если наши исходные величины X_j — симметричные (случай теорем I и II), то, так как расстояние соседних точек x_{vj} не меньше чем $2\pi/z_0 > 2\pi r^{-7} > 2\Delta_0$, получаем, что точке $x_{vj} | x_{vj} | \geq 100\Delta_0$ должна отвечать вторая, симметрично расположенная точка.

В противном случае обращаемся к условию (12). Из того факта, что для закона $F_j(x)$ должно быть во всяком случае

$$P\{x > 0\} > \frac{1}{4}, \quad P\{x < 0\} > \frac{1}{4},$$

следует, что такие же неравенства должны иметь место и для закона $H_j(x)$. Отсюда в силу леммы 3 и неравенства (34) выведем существование точки x_{vj} при условии (35) и притом такой, что если она единственна, то сегмент $|x - x_{vj}| \leq \Delta_0$ должен содержать как положительные, так и отрицательные числа. Но это противоречило бы неравенству $|x_{vj}| \geq 100\Delta_0$, так что таких точек по крайней мере две, что доказывает лемму.

13. Лемма 5. Пусть D_j есть минимальное расстояние между точками v_i и v_{i+1} , отвечающими особым точкам x_{vj} леммы 4. Тогда

$$\frac{\pi D_j}{z_0 T_N} \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \left(1 + \frac{1}{\Psi_8(N)}\right). \quad (37)$$

Иначе лемму можно сформулировать так: половина минимального расстояния между особыми точками x_{vj} леммы 4 не превосходит

$$\frac{T_N}{\sqrt{N}} \left(1 + \frac{1}{\Psi_8(N)}\right)^2.$$

Доказательство. Возьмем один из законов $H_j(x)$ и отметим для него особые точки леммы 4:

$$x_{vj}^{(i)} = \frac{2\pi v_i}{z_0} + \frac{\vartheta_j}{z_0}, \quad \left| \frac{2\pi v_0}{z_0} \right| \leq r^5, \quad \int_{|x - x_{vj}| \leq \Delta_0} dH_j(x) \geq r^{-25}.$$

Для дисперсии d_j^2 , согласно леммам 3 и 4, в силу того, что $1/z_0 \ll 1$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{T_N^2}{N} \left(1 + \frac{2}{r}\right) &\geq d_j^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dH_j(x) \geq \int_{|x| \leq r^5} x^2 dH_j(x) \geq \\ &\geq \sum_i \int_{|x - x_{vj}^{(i)}| \leq \Delta_0} x^2 dH_j(x) = \sum_i a_{v_i} (x_{vj}^{(i)})^2 + R_j, \quad |R_j| \leq \frac{r^{-10}}{z_0} \ll r^{-10}, \end{aligned}$$

где

$$a_{v_i} = \int_{|x - x_{vj}^{(i)}| \leq \Delta_0} dH_j(x). \quad (38)$$

²⁾ Таким образом, (37) связывает L_N с гипотетическим числом z_0 .

Заметим далее, что если один из участков $|x - x_j^{(l)}| \leq \Delta_0$ охватывает 0 или вообще находится внутри сегмента $|x| \leq 100\Delta_0$, то, как это следует из доказательства леммы 4, соответствующее число a_{v_0} будет малым:

$$a_{v_0} < \frac{1}{\Psi_4(N)}. \quad (39)$$

Далее, в силу (34) и леммы (3) получим

$$\sum_l a_{v_l} \geq 1 - \theta_j, \quad \theta_j \ll r^{-4},$$

откуда, согласно (39),

$$\sum_{l \neq 0} a_{v_l} > 1 - \frac{1}{\Psi_9(N)}. \quad (40)$$

Возьмем теперь ту половину оси OX , где находится наиболее удаленная от 0 из двух ближайших к 0 точек $x_j^{(l)}$; если D_j — минимум расстояний $v_{l+1} - v_l$, то отвечающее этой точке число

$$x_j^{(l)} = \frac{2\pi v_l}{z_0} + \frac{\vartheta_j}{z_0}$$

будет по абсолютной величине $> (2\pi D_j/z_0)/2 = \pi D_j/z_0$.

По условиям (12) и (13) для этой полуоси будем иметь

$$\sum_{\substack{\text{по } \mathfrak{B} \\ l \neq 0}} a_{v_l} > \frac{1}{2} - \frac{1}{\Psi_{10}(N)}, \quad (41)$$

$$\int_{x \in \mathfrak{B}} x^2 dH_j(x) \leq \frac{1}{2} \frac{T_N^2}{N} \left(1 + \frac{2}{r}\right). \quad (42)$$

Отсюда, по предыдущим неравенствам,

$$\frac{1}{2} \frac{T_N^2}{N} \left(1 + \frac{2}{r}\right) \geq \left(\frac{\pi D_j}{z_0}\right)^2 \sum_{\substack{\text{по } \mathfrak{B} \\ l \neq 0}} a_{v_l} + R_j, \quad |R_j| \ll r^{-3}$$

и в силу (41)

$$\left(\frac{\pi D_j}{z_0}\right)^2 \leq \frac{T_N^2}{N} \left(1 + \frac{1}{\Psi_{11}(N)}\right), \quad \frac{\pi D_j}{z_0} \leq \frac{T_N}{\sqrt{N}} \left(1 + \frac{1}{\Psi_{11}(N)}\right),$$

что доказывает лемму 5.

14. Лемма 6. Пусть $\delta_0 = r^{10000}/\sqrt{N}$. Тогда если z удалена от всех точек вида mz_0/D_j ($m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) более чем на δ_0 , то имеем

$$|f_j(z)| < 1 - \frac{r^{100}}{N}$$

для значений $z \in [1/24, r^7]$ или $z \in [-r^7, -1/24]$.

Доказательство. Пусть это неверно; тогда найдется z при условии

$$z \in \left[\frac{1}{24}, r^7 \right], \quad z = \frac{mz_0}{D_j} + \delta, \quad \frac{z_0}{2D_j} \geq |\delta| \geq \delta_0 \frac{r^{10000}}{\sqrt{N}},$$

$$f_j(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} dH_j(x) = e^{i\varphi} (1 - \mu), \quad \mu < \frac{r^{100}}{N}. \quad (43)$$

Отсюда, как в (30), получим:

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \left(\frac{zx}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) dH_j(x) < \frac{r^{100}}{N}.$$

Пусть

$$x_1 = \frac{2\pi\nu_1}{z_0} + \frac{\vartheta_j}{z_0} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{2\pi\nu_2}{z_0} + \frac{\vartheta_j}{z_0}$$

— две особые точки леммы 4, притом такие, что $\nu_2 - \nu_1 = D_j$. Из (43) имеем:

$$\int_{|x-x_1| \leq \Delta_0} \sin^2 \left(\frac{zx}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) dH_j(x) + \int_{|x-x_2| \leq \Delta_0} \sin^2 \left(\frac{zx}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) dH_j(x) < \frac{r^{100}}{N}. \quad (44)$$

Прежде всего мы докажем, что

$$\left| \sin \left(\frac{zx_1}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) \right| < \frac{r^{1000}}{\sqrt{N}}, \quad \left| \sin \left(\frac{zx_2}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) \right| < \frac{r^{1000}}{\sqrt{N}}. \quad (45)$$

Рассмотрим сначала

$$\int_{|x-x_1| \leq \Delta_0} \sin^2 \left(\frac{zx}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) dH_j(x).$$

Положим

$$x = x_1 + \gamma, \quad |\gamma| \leq \Delta_0 = \frac{r^{100}}{z_0 \sqrt{N}}.$$

Имеем:

$$\sin \left(\frac{z(x_1 + \gamma)}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) = \sin \left(\frac{zx_1}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) \cos \frac{\gamma z}{2} + \cos \left(\frac{zx_1}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) \sin \frac{\gamma z}{2},$$

$$\cos \frac{\gamma}{2} = 1 - \frac{\gamma^2}{8} + \dots, \quad \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma^3}{48} + \dots,$$

так что величина $\sin^2(zx/2 - \varphi/2)$ отличается от

$$\sin^2 \left(\frac{zx_1}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) + \sin \left(\frac{zx_1}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{zx_1}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) \sin \gamma z$$

на величину, меньшую $c_5 \Delta_0^2 = c_5 r^{10000}/N$. Здесь возможны два случая:

1) $|\sin(zx_1/2 - \varphi/2)| < 4\Delta_0$, в этом случае первое из неравенств (45) доказано;

2) $\left| \sin\left(\frac{zx_1}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) \right| \geq 4\Delta_0 z > 2 \sin \gamma z$, тогда

$$\sin^2\left(\frac{zx_1}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) + \sin\left(\frac{zx_1}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{zx_1}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) \sin \gamma z > \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{zx_1}{2} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

По предыдущему,

$$\sin^2\left(\frac{zx}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) > \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{zx_1}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) - c_5 \frac{r^{10000}}{N},$$

поэтому из (44) заключаем:

$$\frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{zx_1}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) \int_{|x-x_1| \leq \Delta_0} dH_j(x) < 2c_5 \frac{r^{10000}}{N}.$$

Но, по условию леммы 4,

$$\int_{|x-x_1| \leq \Delta_0} dH_j(x) \geq r^{-25},$$

откуда

$$\sin^2\left(\frac{zx_1}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) < 4c_5 \frac{r^{10025}}{N}, \quad \left| \sin\left(\frac{zx_1}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) \right| < \frac{r^{1000}}{\sqrt{N}}.$$

Аналогично доказывается и второе из неравенств (45). Мы имеем, таким образом, два неравенства:

$$\left| \sin\left[\left(\frac{mz_0}{D_j} + \delta\right)\left(\frac{\pi\nu_1}{z_0} + \frac{\vartheta_j}{2z_0}\right) - \frac{\varphi}{2}\right] \right| < \frac{r^{1000}}{\sqrt{N}}$$

и

$$\left| \sin\left[\left(\frac{mz_0}{D_j} + \delta\right)\left(\frac{\pi\nu_2}{z_0} + \frac{\vartheta_j}{2z_0}\right) - \frac{\varphi}{2}\right] \right| < \frac{r^{1000}}{\sqrt{N}}.$$

Отсюда выводим: существуют такие целые числа k_1 и k_2 , для которых

$$\left(\frac{mz_0}{D_j} + \delta\right)\left(\frac{\pi\nu_1}{z_0} + \frac{\vartheta_j}{2z_0}\right) - \frac{\varphi}{2} = k_1\pi + \theta_1,$$

$$\left(\frac{mz_0}{D_j} + \delta\right)\left(\frac{\pi\nu_2}{z_0} + \frac{\vartheta_j}{2z_0}\right) - \frac{\varphi}{2} = k_2\pi + \theta_2,$$

где $|\theta_1|$ и $|\theta_2| < c_6 r^{1000}/\sqrt{N}$. Вычитая первое равенство из второго и учитывая, что $\nu_2 - \nu_1 = D_j$, найдем

$$\delta \frac{\pi D_j}{z_0} = (k_2 - k_1 - m)\pi + \theta_3 = n\pi + \theta_3,$$

где n — целое число и $|\theta_3| < 2c_6 r^{1000}/\sqrt{N}$. Отсюда

$$\delta = \frac{nz_0}{D_j} + \theta_4, \quad |\theta_4| < c_6 \frac{r^{1007}}{\sqrt{N}}. \quad (46)$$

Но $|\delta| < z_0/2D_j$, следовательно, $n=0$ и $\delta=\theta_4$. Однако, по условию леммы, $|\delta| > \delta_0 = r^{10000}/\sqrt{N}$, что противоречит (46). Лемма доказана.

Мы видим, насколько существенно наличие по крайней мере двух особых точек типа леммы 4. При существовании лишь одной особой точки лемма 5, на которой основано все последующее, была бы неверна.

15. Предыдущие вычисления верны для каждого из наших законов $H_j(x)$ ($j \leq N_3$), где $N_3 \geq N_2/r$. Для каждого из них существует свое число D_j — минимальная разность $v_{l+1} - v_l$ чисел v_l , характеризующих особые точки. По лемме 4 имеем

$$\left| \frac{2\pi v_l}{z_0} \right| \leq r^5,$$

откуда

$$|v_l| \leq \left| \frac{z_0 r^5}{2\pi} \right| < r^{12}.$$

Поэтому существуют по крайней мере $N_4 \geq N_3/r^{12} \geq N_2/r^{13}$ законов $H_j(x)$ ($j \leq N_4$), у которых соответствующие числа $D_j = D$ совпадают. В силу леммы 6 при

$$z = \frac{mz_0}{D} + \delta, \quad |\delta| \geq \delta_0, \quad (47)$$

$$|f_j(z)| < 1 - \frac{r^{100}}{N} \quad (j \leq N_4). \quad (48)$$

Лемма 7. Для точек $z \in [1/24, r^7]$ при условии (47) имеем

$$\left| \prod_{j=1}^N f_j(z) \right| < e^{-r^2}. \quad (49)$$

Доказательство. В произведение (49) войдут N_4 функций $f_j(z)$ при условии (48). Модули остальных х. ф. не превосходят 1. Так как $N_4 \geq N/r^{13}$, то (49) следует из (48).

16. Вернемся к основному интегралу (п. 9):

$$I'_1 = -\frac{2}{2\pi i} \int_{1/24}^{r^7} \frac{e^{-ixT_N z}}{z} f_N(z) g_B(zT_N) dz, \quad (50)$$

где $f_N(z) = f_1(z) f_2(z) \dots f_N(z)$. Мы видим, что на участке интегрирования по z функция $f_N(z)$ будет мала по модулю,

$$|f_N(z)| < e^{-r^2}, \quad (51)$$

за возможным исключением сегментов длины $2\delta_0$, описанных вокруг точек $z = mz_0/D$ ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$). Эти сегменты играют в данной задаче роль «интервалов I класса» задач аддитивной теории чисел И. М. Виноградова. I_1'' ведет себя, разумеется, так же, как I_1' .

17. В силу леммы 7 мы можем написать:

$$I_1 = I_1' + I_1'' = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{1/24 \leq |z| r \leq r^7} \int_{|z - mz_0/D| \leq \delta_0} \frac{e^{-ixT_N z}}{z} \times \\ \times f_N(z) g_B(T_N z) dz + R_2, \quad (52)$$

$$m = \pm 1, \pm 2, \dots, R_2 \ll e^{-r^2/2}. \quad (53)$$

Заметим, что здесь

$$|m| \leq Dr^7 < r^{20}. \quad (54)$$

Лемма 8. Пусть ξ_1 и ξ_2 — два числа, такие, что $\xi_2 - \xi_1 = n p_N$, где $p_N = 2\pi D/z_0 T_N$, а n — целое число $\leq 1/\sqrt{\delta_0}$. Тогда

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} I_1 dx \ll n p_N L_N r^{-10}. \quad (55)$$

Доказательство. Обратимся к формуле (52), выберем какое-либо из чисел m и рассмотрим

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} dx \int_{|z - mz_0/D| \leq \delta_0} \frac{e^{-ixT_N z}}{z} f_N(z) g_B(T_N z) dz = \\ = \int_{|z - mz_0/D| \leq \delta_0} \frac{e^{-i\xi_2 T_N z} - e^{-i\xi_1 T_N z}}{-iz^2 T_N} f_N(z) g_B(T_N z) dz.$$

Модуль этого выражения не превосходит

$$\frac{2\delta_0}{z_0^2 T_N} \sup_{|z - mz_0/D| \leq \delta_0} |e^{(\xi_2 - \xi_1) T_N z} - 1|.$$

Далее,

$$(\xi_2 - \xi_1) T_N z i = \frac{n \cdot 2\pi D}{z_0 T_N} T_N \left(\frac{mz_0}{D} + \delta \right) i = 2\pi m n i + \theta_\delta i,$$

где $|\theta_\delta| \ll \delta_0^{1/2}$, так что

$$|e^{(\xi_2 - \xi_1) T_N z} - 1| \ll \delta_0^{1/2}.$$

В самом деле, по лемме 5, $\pi D/z_0 T_N < 2/\sqrt{N}$, а по лемме 2, $T_N < \sqrt{N}$. Поэтому модуль нашего интеграла будет

$$\ll \frac{2}{z_0 \pi} \frac{\pi}{z_0 T_N} \delta_0^{3/2} \ll n p_N L_N r^{-100},$$

так как

$$L_N \geq \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad \delta_0 = \frac{r^{10000}}{\sqrt{N}}.$$

Далее, количество чисел m не превосходит r^{20} , что и дает (55).

18. Теперь мы изучим

$$I_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|t| \leq \Psi_5(N)} \frac{e^{-itx}}{t} [\bar{\varphi}_N(t) - g(t)] g_B(t) dt. \quad (56)$$

Имеем:

$$\bar{\varphi}_N(t) = \varphi_1\left(\frac{t}{S_N}\right) \dots \varphi_N\left(\frac{t}{S_N}\right).$$

Разлагая х. ф. $\varphi_j(t/S_N)$ в ряд Маклорена, получим при $|t| < \Psi_5(N)$

$$\begin{aligned} \varphi_j\left(\frac{t}{S_N}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t/S_N)x} dF_j(x) = 1 - \frac{\sigma_j^2}{2S_N^2} t^2 - \frac{i\alpha_{3j}}{6S_N^3} t^3 - \\ &\quad - \frac{it^3}{6S_N^3} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\theta_j x} - 1) x^3 dF_j(x), \end{aligned}$$

где α_{3j} — третий момент, $\theta_j = \theta_j(t)$, $|\theta_j| < \Psi_5(N)/S_N$.

Далее,

$$\sum_{j=1}^N \left| \frac{t^3}{6S_N^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta_j x} x^3 dF_j(x) \right| \ll \frac{|t|^3}{S_N^3} \sum_{j=1}^N \beta_{3j} = L_N |t|^3, \quad (57)$$

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{t^2}{2} \frac{\sigma_j^2}{S_N^2} \right)^2 \leq t^4 \max_j \frac{\sigma_j}{S_N} \sum_{j=1}^N \frac{\sigma_j^3}{S_N^3}.$$

Но $\sigma_j^3 \leq \beta_{3j}$ (см. [2]), откуда для любого $j \leq N$

$$\frac{\sum_{j=1}^N \sigma_j^3}{S_N^3} < L_N, \quad \frac{\sigma_j}{S_N} \leq \frac{\left(\sum_{j=1}^N \beta_{3j} \right)^{1/3}}{S_N} = L_N^{1/3}.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{t^2}{2} \frac{\sigma_j^2}{S_N^2} \right)^2 < t^4 L_N^{4/3}. \quad (58)$$

Из (57) и (58), учитывая, что $|t|^5 < (\Psi_5(N))^5 < L_N^{-1/5}$, находим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \ln \varphi_j \left(\frac{t}{S_N} \right) &= -\frac{t^2}{2} - \frac{it^3}{6} \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_{3j}}{S_N^3} - \\ &- \frac{it^3}{6S_N^3} \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\theta_j x} - 1) x^3 dF_j(x) + R(t), \end{aligned} \quad (59)$$

$$|R(t)| < (t^2 + t^4) L_N^{4/3}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\theta_j x} - 1) x^3 dF_j(x) \right| &\ll \frac{1}{\Psi_{12}(N)} \beta_{3j} + R_j^{(N)}, \\ R_j^{(N)} &= \int_{|x| \geq S_N / \Psi_3(N)} |x|^3 dF_j(x). \end{aligned}$$

В силу (6)

$$\frac{1}{A_{3N}} \sum_{j=1}^N \left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\theta_j x} - 1) x^3 dF_j(x) \right| \ll \frac{1}{\Psi_2(N)} + \frac{1}{\Psi_{12}(N)}. \quad (60)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \ln \varphi_j \left(\frac{t}{S_N} \right) &= -\frac{t^2}{2} - \frac{it^3}{6} \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_{3j}}{S_N^3} + R_1(t), \\ |R_1(t)| &< (t^2 + |t|^3 + t^4) \frac{L_N}{\Psi_{13}(N)}. \end{aligned} \quad (61)$$

Отсюда легко выводим:

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^N \varphi_j \left(\frac{t}{S_N} \right) &= g(t) \left(1 - \frac{it^3}{6} \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_{3j}}{S_N^3} \right) + R_2(t), \\ |R_2(t)| &\ll (t^2 + |t|^3 + t^4) \frac{L_N}{\Psi_{13}(N)}. \end{aligned} \quad (62)$$

Заметим, что при $|t| \leq \Psi_5(N) < r^2$

$$|g_B(t) - 1| \ll \frac{(\Psi_5(N))^2}{T_N r^{10}} \ll L_N r^{-5}.$$

Отсюда, полагая

$$\Lambda_N = \frac{1}{S_N^3} \sum_{j=1}^N \alpha_{3j},$$

имеем:

$$I_0 = \frac{\Lambda_N}{12\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-ixt-t^2/2} dt + R_3, \quad R_3 \ll \frac{L_N}{\Psi_{14}(N)}.$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-ixt-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi} e^{-x^2/2} (1 - x^2),$$

то

$$I_0 = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} (1 - x^2) \Lambda_N + R_3, \quad R_3 \ll \frac{L_N}{\Psi_{14}(N)}. \quad (63)$$

В условиях теорем I и II, когда величины X_j распределены симметрично, имеем $\Lambda_N = 0$, $I_0 = R_3$. Кроме того, очевидно, $|\Lambda_N| \leq L_N < 1/\Psi_1(N)$.

19. Возвращаясь к п. 10, заметим, что $\tilde{f}_N(-z)$ комплексно сопряжена с $\tilde{f}_N(z)$. Поэтому для случая 1) п. 10, учитывая (22), (25), (27), (28) и (63), находим в условиях теорем I и II:

$$|\tilde{P}_N(x)| = |\tilde{F}_N(x) - \tilde{G}(x)| \ll \frac{L_N}{\Psi_{15}(N)}.$$

Если $|x| \leq M$, то при достаточно большом N получим:

$$|\tilde{P}_N(x)| < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \frac{L_N}{\Psi_{16}(N)} (|x| \leq M; N > N_0(M)).$$

Применяя к этому неравенству лемму 1, легко выведем

$$|P_N(x)| < \frac{L_N}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \left(1 + \frac{1}{r}\right) \frac{1}{\Psi_{17}(N)} (|x| < M; N > N_0(M)),$$

что полностью покрывает собой содержание теорем I и II.

В условиях теорем III и IV, применяя очевидный аналог леммы 1 к функции

$$\tilde{Q}_N(x) = (\tilde{F}_N(x) - G(x) - H_N(x)) * G_B(x),$$

получим

$$|Q_N(x)| \leq \frac{L_N}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \left(1 + \frac{1}{r}\right) \frac{1}{\Psi_{17}(N)} (|x| \leq M; N > N_0(M)),$$

что включает в себя утверждения теорем III и IV.

Таким образом, случай 1) п. 10 сразу приводит к нужным результатам. Поэтому в дальнейшем мы будем изучать лишь случай 2) п. 10 и принимать, что указанное там число z_0 существует.

Мы будем также делать выводы в условиях теорем I и II; выводы для теорем III и IV будут совершенно аналогичны, с заменой $P_N(x)$ и $\tilde{P}_N(x)$ на $Q_N(x)$ и $\tilde{Q}_N(x)$.

20. Лемма 9. Существует число q_N при условиях

$$\left(1 + \frac{1}{\Psi_5(N)}\right) L_N \leq q_N \leq 2 \left(1 + \frac{1}{\Psi_5(N)}\right) L_N, \quad (64)$$

такое, что для любого x

$$\left| \int_x^{x+q_N} \tilde{P}_N(t) dt \right| \leq q_N L_N \frac{1}{\Psi_{18}(N)}. \quad (65)$$

Доказательство. Обратимся к лемме 8. Участвующее там число $p_N = 2\pi D/z_0 T_N$ в силу леммы 5 (неравенство (37)) не превосходит $(2/\sqrt{N})(1 + 1/\Psi_8(N))$. Отсюда, согласно оценкам для z_0 и D , получим $T_N > \sqrt{N} (\ln N)^{-100}$, а по лемме 2, $L_N \geq 1/\sqrt{N}$.

Если теперь p_N не превосходит половины количества $2L_N \times (1 + 1/\Psi_5(N))$, то возможно подобрать целое n так, чтобы $q_N = np_N$ удовлетворяло (64). При этом $n \leq 1/\sqrt{\delta_0}$, так как $T_N > N^{1/2} (\ln N)^{-100}$, $L_N \geq 1/\sqrt{N}$, $\delta_0 = r^{1000}/\sqrt{N}$, так что np_N удовлетворяет условиям леммы 3. Используя лемму 8, (22), (24), (27), (28) и (63), получим (65).

Лемма 10. Если q_N — число леммы 9, то на всяком сегменте $[x, x + q_N]$ существует ξ , такое, что

$$|\tilde{P}_N(\xi)| \leq L_N \frac{1}{\Psi_{18}(N)}. \quad (66)$$

Доказательство следует из непрерывности $\tilde{P}_N(x)$ и неравенства (65).

Лемма 11. Если $\xi_2 - \xi_1 = np_N$, где $p_N = 2\pi D/z_0 T_N$ — число из леммы 8 и $n \leq 1/\sqrt{\delta_0}$, то

$$|\tilde{P}(\xi_2) - \tilde{P}(\xi_1)| \leq \frac{L_N}{\Psi_{20}(N)}. \quad (67)$$

Доказательство. В силу (22), (24), (27), (28) и (62) достаточно изучить поведение I_1 (см. (52)). Рассмотрим для какого-либо m из (52) разность

$$\int_{|z - mz_0/D| \leq \delta_0} \frac{e^{-i\xi_2 T_N z} - e^{-i\xi_1 T_N z}}{z} f_N(z) g_B(T_N z) dz.$$

Изучая

$$|e^{-i\xi_2 T_N z} - e^{-i\xi_1 T_N z}| = |e^{(\xi_2 - \xi_1) T_N z i} - 1|,$$

находим, как и в доказательстве леммы 8, что модуль нашего интеграла будет $\ll L_N r^{-100}$ и что количество чисел m не превосходит r^{20} ; это приводит нас к (67).

Заметим, что эта лемма указывает нам на своеобразную периодичность $\tilde{P}_N(x)$ с точностью до $L_N/\Psi_{20}(N)$. Периодом будет число $p_N = 2\pi D/z_0 T_N$.

Объединяя результаты лемм 8, 10, 11, мы можем сказать, что внутри всякого сегмента $[x, x + q_N]$ найдется такое число ξ , что

$$|\tilde{P}_N(\xi + n p_N)| \leq \frac{L_N}{\Psi_{21}(N)} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots; |n| \leq \delta_0^{-1/2}). \quad (68)$$

В частности, можно взять $n p_N = q_N$ при условиях (64).

Далее, имеем

$$\int_{\xi}^{\xi + n p_N} \tilde{P}_N(x) dx \ll n p_N L_N \frac{1}{\Psi_{21}(N)}. \quad (69)$$

Лемма 12. Пусть $|x| < M$. Тогда

$$|\tilde{P}_N(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} L_N (1 + \varepsilon'_N(M)), \quad (70)$$

где $\varepsilon'_N(M) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ равномерно для всех $\{X_j\}$, допустимых условиями теорем I и II.

Доказательство. Докажем сперва вспомогательное предложение. Пусть $A(x)$ — монотонная неубывающая непрерывная функция, а $B(x) = kx + b$ — линейная функция, причем $0 \leq k \leq 1$. Пусть для некоторого ξ и $p > 0$ известно, что

$$A(\xi) = B(\xi), \quad A(\xi + p) = B(\xi + p), \quad \int_{\xi}^{\xi + p} [A(x) - B(x)] dx = 0.$$

Тогда

$$|A(x) - B(x)| \leq \frac{p}{2} k \quad (\xi \leq x \leq \xi + p). \quad (71)$$

Для доказательства обратимся к рис. 1. Пусть (71) неверно, и при $x = \xi_0$ имеем:

$$|A(\xi_0) - B(\xi_0)| > \frac{p}{2} k.$$

Пусть, например,

$$A(\xi_0) - B(\xi_0) > \frac{p}{2} k.$$

Пусть $\mathfrak{A}$ — множество точек x , для которых $A(x) \geq B(x)$, $\mathfrak{B}$ — дополнительное множество в $[\xi, \xi + p]$. Мы видим из рис. 1, что в силу монотонности $A(x)$ треугольник GEH должен полностью

лежать между графиками $A(x)$ и $B(x)$. Его площадь $> kp^2/8$, так что

$$\int_{\mathfrak{A}} [A(x) - B(x)] dx > \frac{kp^2}{8}.$$

С другой стороны, в силу той же монотонности $A(x)$ части ее графика, лежащие ниже графика $B(x)$ (при $x \in \mathfrak{B}$), содержатся внутри ряда треугольников типа CGF и HDJ , общая площадь которых, очевидно, не превосходит $(kp/4)(p/2) = kp^2/8$. Таким образом,

$$\int_{\mathfrak{A}} [A(x) - B(x)] dx > - \int_{\mathfrak{B}} [A(x) - B(x)] dx,$$

что противоречит условию леммы.

Далее, если заменить условия этого предложения следующими: вместо p ввести последовательность чисел $q_N \rightarrow 0$, а вместо $A(x)$ — последовательность $A_N(x)$ при условиях

$$A_N(\xi) = B(\xi) + o(q_N),$$

$$A_N(\xi + q_N) = B(\xi + q_N) + o(q_N),$$

$$\xi + q_N$$

$$\int_{\xi}^{\xi + q_N} [A_N(x) - B(x)] dx = o(q_N^2),$$

то это сведется к тому, что на рис. 1 будут допущены вариации кривой $A(x)$, бесконечно малые сравнительно с $p = q_N$. Неравенство (71) примет в этом случае вид

$$|A_N(x) - B(x)| \leq \frac{q_N}{2} k(1 + o(1)) \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (72)$$

Мы можем теперь обратиться к (68) и (69) и взять $A_N(x) = \hat{F}_N(x)$, а q_N при условиях (64). Выберем ξ так, чтобы $x \in [\xi, \xi + q_N]$, и положим

$$B(x) = G(\xi) + G'(\xi)(x - \xi) = G(\xi) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2} (x - \xi).$$

Тогда в силу (72)

$$|\hat{F}_N(x) - B(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2} \frac{q_N}{2} (1 + \varepsilon_N''(M)), \quad |x - \xi| \leq q_N,$$

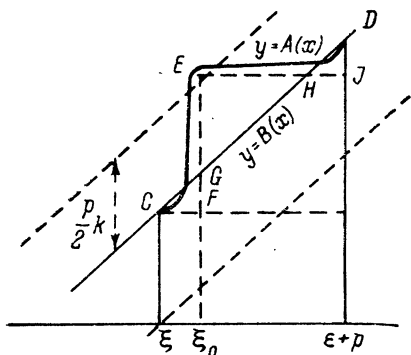


Рис. 1.

где $\varepsilon_N''(M)$ — число того же типа, что $\varepsilon_N'(M)$. Далее, легко подсчитываем, что

$$|B(x) - \tilde{G}(x)| \leq \frac{L_N}{\Psi_{22}(N)}, \quad |e^{-\xi^2/2} - e^{-x^2/2}| \leq L_N,$$

$$\frac{q_N}{2} \leq L_N \left(1 + \frac{1}{\Psi_8(N)}\right),$$

откуда

$$|\tilde{F}_N(x) - \tilde{G}(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} L_N (1 + \varepsilon_N'(M)),$$

что и доказывает (70).

21. Из (70) на основании леммы 1 следует теорема I. Так же доказывается и теорема III:

$$|Q_N(x)| < L_N \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} (1 + \varepsilon_N(M)) \quad \text{при } |x| \leq M.$$

22. Остается доказать замечание к теореме I о роли симметричной схемы Бернулли и теоремы II и IV. Замечание о роли схемы Бернулли, для которой $F_j(x)$ имеет точками роста лишь -1 и 1 со скачками $1/2$, следует из равенства, доказанного, например, в [4] (с. 54):

$$F_N(x) - G(x) \sim \frac{2}{\sqrt{2\pi N}} Q_1\left(\frac{x\sqrt{N}}{2}\right) e^{-x^2/2}, \quad Q_1(x) = [x] - x + \frac{1}{2}.$$

При этом надо учесть, что в точках разрыва $\bar{F}(x)$ мы полагаем

$$\bar{F}_N(x) = \frac{(\bar{F}_N(x+0) + \bar{F}_N(x-0))}{2}.$$

23. Согласно лемме 10, на всяком сегменте $[x, x+q_N]$ существует ξ , такое, что

$$|\tilde{P}_N(\xi)| \leq \frac{L_N}{\Psi_{19}(N)},$$

где $\Psi_{19}(N) < r^{0.1}$.

Обращаясь к теореме II, мы хотим вывести существование чисел, аналогичных ξ , для $P_N(x)$. Для этого нужно иметь возможность применить лемму 1.

Лемма 13. Если ξ — число при условии (66), то в сегменте $[\xi, \xi+q_N]$ найдется ζ , такое, что

$$|\tilde{P}_N(x)| \leq \frac{L_N}{\Psi_{23}(N)}, \quad x \in \left[\zeta - \frac{q_N}{2}, \zeta + \frac{q_N}{2}\right]. \quad (73)$$

Доказательство. Докажем сперва вспомогательное предложение. Пусть $A(x)$ — непрерывная неубывающая функция, $B(x) = kx + b$ — линейная функция, $P(x) = A(x) - B(x)$, $0 \leq k \leq 1$.

Пусть $P(\xi) = P(\xi + q_N) = 0$. Тогда найдется сегмент $[\zeta - q_N/r, \zeta + q_N/r] \subset [\xi, \xi + q_N]$, такой, что на этом сегменте

$$|P(x)| \ll \frac{q_N}{r^{1/2}}. \quad (74)$$

Рассмотрим множество нулей $P(x)$ в $[\xi, \xi + q_N]$. Это будет замкнутое множество. Если не существует промежутка, свободного от нулей, длины $> q_N/r^{1/2}$, то в силу монотонности $A(x)$ легко выводим, что $|P(x)| \leq \leq q_N/r^{1/2}$ во всем сегменте $[\xi, \xi + q_N]$, так что (74) верно.

Пусть теперь между нулями $P(x)$ существует промежуток длины $l \geq q_N/r^{1/2}$. Тогда, как видно из рис. 2, график $A(x)$ лежит либо весь в треугольнике CDE , либо весь в треугольнике CEF .

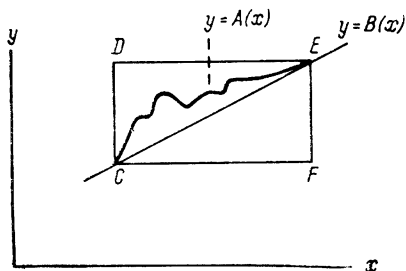


Рис. 2.

В первом случае за искомую точку ζ можно взять $x_2 - 2q_N/r$ (см. рис. 2), во втором случае можно взять $\zeta = x_1 + 2q_N/r$. Замечая, что

$$\tilde{P}_N(\xi) \ll \frac{q_N}{\Psi_{24}(N)}$$

(см. (64)) и что в силу (67)

$$\tilde{P}_N(\xi + q_N) \ll \frac{q_N}{\Psi_{24}(N)},$$

мы переходим от доказательства вспомогательного предложения к доказательству леммы 13 совершенно так же, как это было сделано в доказательстве леммы 12.

24. Лемма 14. В каждом сегменте $[x, x + q_N]$ можно отыскать число ζ_0 , такое, что, полагая

$$\zeta_\nu = \zeta_0 + \nu q_N \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; |\nu| < \Psi_{25}(N)),$$

получим

$$|P_N(\zeta_\nu)| < L_N \frac{1}{\Psi_{26}(N)}.$$

Это — первая часть теоремы II о локальной решетке прижатия законов.

Доказательство. За число ζ_0 можно взять число ζ из леммы (13). Так как, согласно лемме 13,

$$|\tilde{P}_N(\zeta_0 + \rho)| \ll L_N \frac{1}{\Psi_{23}(N)}, \quad |\rho| \leq \frac{q_N}{r},$$

то, по лемме 1,

$$|P_N(\zeta_0)| \leq L_N \frac{1}{\Psi_{23}(N)}.$$

Далее, в силу леммы 11, при $|\nu| < \Psi_{28}(N)$ будем иметь

$$|\tilde{P}_N(\zeta_0 + \nu q_N + \rho)| \leq L_N \frac{1}{\Psi_{23}(N)} + \frac{|\nu| L_N}{\Psi_{20}(N)} \leq \frac{L_N}{\Psi_{27}(N)},$$

откуда, по лемме 1, снова заключаем, что

$$|P_N(\zeta_0 + q_N \nu)| \leq L_N \frac{1}{\Psi_{26}(N)}$$

при $|\nu| \leq \Psi_{25}(N)$.

25. Остается доказать вторую часть теоремы II: для любого x с $|x| \leq M$ имеем (11)

$$\int_x^{x+q_N} P_N(x) dx \leq q_N L_N \frac{1}{\Psi_6(N)}.$$

Это следует из леммы 9 с помощью следующей леммы.

Лемма 15.

$$\int_x^{x+q_N} (P_N(x) - \tilde{P}_N(x)) dx \leq L_N \frac{q_N}{r}.$$

Доказательство. Имеем:

$$\tilde{P}_N(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_N(x-y) f_B(y) dy, \quad f_B(y) = \sqrt{\frac{B}{2\pi}} e^{-By^2/2}, \quad B = L_N^{-2} r^{10}.$$

Отсюда

$$\int_x^{x+q_N} (P_N(x) - \tilde{P}_N(x)) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_B(y) dy \left\{ \int_x^{x+q_N} (P_N(x) - P_N(x-y)) dx \right\}.$$

При $|y| > Y = L_N r^{-2}$ имеем:

$$f_B(y) < e^{-r^2}, \quad \int_Y^{\infty} f_B(y) dy \leq e^{-r^2}.$$

Поэтому

$$\left| \int_x^{x+q_N} (P_N(x) - \tilde{P}_N(x)) dx \right| < \int_{-Y}^Y f_B(y) dy \left\{ \int_x^{x+q_N} (P_N(x) - P_N(x-y)) dx \right\} + R, \\ |R| \leq e^{-r^2}.$$

Далее, в силу теоремы I при $|x| \leq M$

$$|P_N(x)| \leq L_N,$$

откуда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} P_N(x) dx - \int_x^{x+q_N} P_N(x-y) dx &= - \int_x^{x+y} P_N(x) dx - \\ &- \int_{x+q_N}^{x+q_N+y} P_N(x) dx \leq Y L_N = L_N \frac{L_N}{r^2} \leq L_N \frac{q_N}{r^2}. \end{aligned}$$

Этим лемма доказана.

26. Доказательство теоремы IV совершенно аналогично. Роль $P_N(x)$ и $\tilde{P}(x)$ играют $Q_N(x)$ и $\tilde{Q}_N(x)$.

Литература

1. Cramer H. On the composition of elementary errors. — Skand. Aktuarietidskrift, 1928, vol. 11, p. 13—74, 141—180.
2. Cramer H. Random variables and probability distributions. — Cambr. Tracts, 1937, N 36, p. 1—120.
3. Berry A. The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates. — Trans Amer. Math. Soc., 1941, vol. 49, N 1, p. 122—136.
4. Esseen C. G. Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace—Gaussian law. — Acta Math., 1945, vol. 77, p. 1—125.

К ТЕОРИИ НЕОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Изв. АН СССР. Сер. мат., 1949, т. 13, № 1, с. 65—94

Изучаются условия применимости интегральной предельной теоремы Ляпунова к сумме величин, связанных в неоднородную цепь Маркова. Полученные результаты являются естественным продолжением результатов С. Н. Бернштейна 1926—1928 гг.

§ 1. Мы рассматриваем бесконечную треугольную матрицу случайных величин, n -ю строчку которой образуют величины $X_{1n}, X_{2n}, \dots, X_{nn}$, связанные в простую цепь Маркова, причем величина X_{hn} может принимать k_{hn} значений $a_{1n}^h, \dots, a_{k_{hn}, n}^h$. Относительно последних мы принимаем такие условия:

I) $|a_{in}^h| < K_0$ для любых i, h, n ;

II) $\frac{1}{k_{hn}} \sum_{i=1}^{k_{hn}} (a_{in}^h - \xi_{hn})^2 > c_0$, $\xi_{hn} = (a_{1n}^{(h)} + a_{2n}^{(h)} + \dots + a_{k_{hn}, n}^{(h)}) / k_{hn}$;

III) $2 \leq k_{hn} \leq K_1$ для любых n и $h \leq n$ ($c_0, c_1, \dots, C_0, C_1, \dots, K_0, K_1, \dots$ — положительные константы, произвольно фиксированные при задании матрицы; $C_0, C_1, \dots$ будем всегда считать > 1).

Условия I) и III) далеко не обязательны; можно, например, допустить и бесконечнозначные и неограниченные в совокупности величины; но мы принимаем эти условия для простоты рассуждений. Задание n -й строки как цепи Маркова осуществляется указанием вероятностей перехода

$$p_{i|n}^{(h)} = P(X_{hn} = a_n^{(h)} | X_{h-1, n} = a_{i,n}^{(h-1)}).$$

Рассмотрим сумму по n -й строчке:

$$S_n = X_{1n} + X_{2n} + \dots + X_{nn}.$$

Полагая

$$A_n = E(S_n), \quad B_n = D(S_n),$$

будем изучать поведение нормированного отклонения

$$\frac{S_n - A_n}{\sqrt{B_n}} \quad (1)$$

(разумеется, когда $B_n \neq 0$) и выяснять условия, при которых оно в пределе при $n \rightarrow \infty$ приближается к гауссову распределению.

Этой задачей впервые занимался А. А. Марков в 1911 г. [1], который, наложив жесткое условие «регулярности»

$$p_{i|n}^{(h)} > c_1, \quad (2)$$

доказал, что при $n \rightarrow \infty$ отклонение (1) приближается к гауссову распределению. Что касается ослабления условия (2) и допущения условия $p_{i|n}^{(h)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то А. А. Марков считал это также интересным, но отмечал трудности вопроса, оставляя его открытым для других исследователей.

С. Н. Бернштейн в ряде работ [2—5] в основном выполнил требуемое исследование. Для случая двузначной цепи ($k_{hn} = 2$), когда все величины X_{hn} принимают только два значения, им было показано, что при условии

$$p_{i|n}^{(h)} \geq \frac{1}{n^{1/3-\varepsilon_0}}, \quad (3)$$

где $\varepsilon_0 > 0$ фиксировано и сколь угодно мало, закон Гаусса в пределе приложим к (1); если же потребовать только, чтобы

$$p_{i|n}^{(h)} \geq \frac{1}{n^{1/3}}, \quad (4)$$

то закон Гаусса уже может быть неприменим.

Н. А. Сапогов [6] доказал далее, что условие (3) можно заменить условием

$$P_{i|n}^{(h)} > \frac{\Psi(n)}{n^{1/3}},$$

где $\Psi(n)$ — любая функция, монотонно стремящаяся к ∞ . Этим выявилась интересная роль числа $1/3$ в теории неоднородных двузначных цепей Маркова.

Однако распространение метода С. Н. Бернштейна на многозначные цепи ($k_{nn} > 2$) оказалось весьма затруднительным. Построенный им алгоритм годился полностью лишь для двузначных цепей. Для многозначных цепей С. Н. Бернштейн и Н. А. Сапогов доказали приложимость в пределе гауссова закона лишь при условии

$$P_{i|n}^{(n)} > \frac{1}{n^{1/5-\varepsilon}}, \quad (5)$$

в то время как противоречащие примеры получаются при условии (4). Роль числа $1/3$ для многозначных цепей оставалась пока неясной.

В настоящей работе мы комбинируем метод С. Н. Бернштейна с некоторым новым алгоритмом, годным для цепей любой значности.

Т е о р е м а. *Закон Гаусса приложим в пределе к уклонению (1)*

$$\frac{S_n - A_n}{\sqrt{B_n}}$$

уже при условии (3)

$$P_{i|n}^{(h)} \geq \frac{1}{n^{1/3-\varepsilon_0}}$$

при любом фиксированном $\varepsilon_0 > 0$ и, вообще говоря, неприменим, если гарантировано только условие (4)

$$P_{i|n}^{(h)} \geq \frac{1}{n^{1/3}}.$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, автор считает своим долгом выразить благодарность Н. А. Сапогову, ценные указания которого делают его по существу соавтором этой работы.

§ 2. Возьмем строчку $X_{1n}, X_{2n}, \dots, X_{nn}$. Так как наши рассуждения будут сначала относиться к этой строчке и лишь впоследствии, изменяя $n \rightarrow \infty$, мы перейдем к другим строкам, то опустим второй индекс n и будем говорить об величинах $X_1, X_2, \dots, X_n$, связанных в простую цепь Маркова. Далее, не нарушая общности, можно считать, что

$$E(X_h) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

Пусть ρ — любое фиксированное число $< 1/3$. Мы примем, что

$$p_{i|n}^{(h)} > \frac{1}{n^\rho}, \quad (7)$$

и при этих условиях будем изучать сумму

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

§ 3. Введем основное для дальнейших исследований понятие о «сечении» простой цепи Маркова $X_1, X_2, \dots, X_n$. Пусть даны два целых числа, M и R , при условиях

$$2 \leq M \leq \sqrt{n}, \quad 2 \leq R \leq \sqrt{M}.$$

Среди наших величин $X_1, \dots, X_n$ зафиксируем индексы

$$\begin{aligned} \alpha_{11} = 1, \quad \alpha_{21} = M + 1, \quad \alpha_{31} = 2M + 1, \quad \dots, \quad \alpha_{k1} = (k-1)M + 1, \quad \dots, \\ \alpha_{q_1-1, 1} = (q_1-2)M + 1, \quad \alpha_{q_1, 1} = n. \end{aligned} \quad (8)$$

Если теперь мы фиксируем как-либо величины

$$X_{\alpha_{11}}, X_{\alpha_{21}}, \dots, X_{\alpha_{q_1, 1}},$$

полагая

$$X_{\alpha_{11}} = a_{i_{\alpha_{11}}}^{\alpha_{11}}, \quad X_{\alpha_{21}} = a_{i_{\alpha_{21}}}^{\alpha_{21}}, \quad \dots, \quad X_{\alpha_{q_1, 1}} = a_{i_{\alpha_{q_1, 1}}}^{\alpha_{q_1, 1}}, \quad (9)$$

то совмещение событий (9) будем называть сечением Λ_1 (опускаем соответствующие индексы). Вероятность события Λ_1 мы будем обозначать через $\mathcal{P}_{\Lambda_1}$.

Далее, вводим вторую группу индексов, выбирая среди индексов (8) следующие:

$$\begin{aligned} \alpha_{12} = 1, \quad \alpha_{22} = \alpha_{R+1, 1}, \quad \dots, \quad \alpha_{k2} = \alpha_{(k-1)R+1, 1}, \quad \dots, \quad \alpha_{q_2-1, 2} = \\ = \alpha_{(q_2-2)R+1, 1}, \quad \alpha_{q_2, 2} = n, \end{aligned}$$

и вообще если уже определена система индексов

$$\alpha_{1i} = 1, \quad \alpha_{2i}, \dots, \alpha_{ki}, \dots, \alpha_{q_i i} = n, \quad (10)$$

то вводим следующую группу, полагая

$$\begin{aligned} \alpha_{1, i+1} = 1, \quad \alpha_{2, i+1} = \alpha_{R+1, i}, \quad \dots, \quad \alpha_{k, i+1} = \alpha_{(k-1)R+1, i}, \quad \dots, \\ \alpha_{q_{i+1}-1, i+1} = \alpha_{(q_{i+1}-2)R+1, i}, \quad \alpha_{q_{i+1}, i+1} = n. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, мы вынуждены будем остановиться, когда у нас останутся два индекса: $\alpha_{1s} = 1$ и $\alpha_{2s} = n$. При этом, очевидно, число s будет удовлетворять неравенствам

$$R^s \leq n, \quad s \leq \frac{\ln n}{\ln R}. \quad (11)$$

Каждой системе индексов

$$\alpha_{1,i}, \alpha_{2,i}, \dots, \alpha_{q,i}$$

сопоставляем сечение Λ_i , означающее совмещение случайных событий

$$X_{\alpha_{1,i}} = a_{\alpha_{1,i}}^{(\alpha_{1,i})}, \dots, X_{\alpha_{q,i},i} = a_{\alpha_{q,i},i}^{(\alpha_{q,i},i)} \quad (12)$$

с соответствующей вероятностью $\mathcal{P}_{\Lambda_i}$.

§ 4. Выбросим теперь из нашей цепи величины

$$X_{\alpha_{11}}, X_{\alpha_{21}}, \dots, X_{\alpha_{q,1},1}. \quad (13)$$

Оставшиеся величины

$$X_2, X_3, \dots, X_{\alpha_{21}-1}, X_{\alpha_{21}+1}, \dots, X_{\alpha_{q,1}+1}, \dots, X_{n-1}, \quad (14)$$

очевидно, снова образуют цепь Маркова. Сумму их обозначим через Z_n . Для дальнейшего используем следующее важное свойство цепей Маркова.

Лемма I. Пусть дана произвольная простая цепь Маркова

$$Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_N,$$

где вероятности перехода $\neq 0$. Пусть дано сечение Λ

$$Z'_{\beta_1} = d_1, \quad Z'_{\beta_2} = d_2, \dots, Z'_{\beta_m} = d_m,$$

где $\beta_1 = 1, \beta_m = N, \beta_{i+1} - \beta_i \geq 2$.

Рассмотрим любые функции элементов, лежащих между Z_{β_i} и $Z_{\beta_{i+1}}$ в условиях сечения Λ :

$$Y_{i\Lambda} = \{F_i(Z'_{\beta_{i+1}}, \dots, Z'_{\beta_{i+1}-1}) | \Lambda\} \quad (i = 1, 2, \dots, m-1)$$

(наше обозначение указывает, что аргументы $Z_{\beta_{i+1}}, \dots, Z_{\beta_{i+1}-1}$, стоящие под знаком F_i , суть случайные величины, имеющие законы распределения, индуцированные на цепь Маркова сечением Λ). Тогда при данном Λ величины Y_i ($i = 1, 2, \dots, m-1$) независимы. Именно, их законы распределения зависят только от чисел d_i и d_{i+1} , т. е. от значений Z'_{β_i} и $Z'_{\beta_{i+1}}$.

Доказательство. Лемма является непосредственным следствием определения простой цепи Маркова.

§ 5. Вернемся к цепи (14). Сумма ее элементов Z_n в условиях сечения Λ_1 (§ 3) разбивается на $q_1 - 1$ сумм вида

$$\{X_{\alpha_{i+1}} + X_{\alpha_{i+2}} + \dots + X_{\alpha_{i+1,1}-1} | \Lambda_1\} \quad (i = 1, 2, \dots, q_1 - 1), \quad (15)$$

знак $|$ напоминает о соответствующей условности законов распределения. На основании леммы I можно считать, что закон распре-

деления зависит только от тех значений, которые Λ_1 придает величинам $X_{\alpha_{i1}}$ и $X_{\alpha_{i+1,1}}$. Это дает нам право ввести обозначение

$$\{X_{\alpha_{i1}} + X_{\alpha_{i+1,1}} + \dots + X_{\alpha_{i+1,1-1}} | \Lambda_1\} = Y_{\Lambda_1}(X_{\alpha_{i1}}, X_{\alpha_{i+1,1}}), \quad (16)$$

где значения $X_{\alpha_{i1}}$ и $X_{\alpha_{i+1,1}}$ надо понимать как фиксируемые сечением Λ_1 .

Далее, обозначаем

$$S_{\Lambda_1} = \{Z_n | \Lambda_1\} = \sum_{i=1}^{q_1-1} Y_{\Lambda_1}(X_{\alpha_{i1}}, X_{\alpha_{i+1,1}}). \quad (17)$$

Случайные величины (17) при данном фиксированном Λ имеют следующие условные моменты:

1) условное математическое ожидание

$$E_{\Lambda_1}(Y_{\Lambda_1}(X_{\alpha_{i1}}, X_{\alpha_{i+1,1}})) = A_1(X_{\alpha_{i1}}, X_{\alpha_{i+1,1}}); \quad (18)$$

2) условную дисперсию

$$D_{\Lambda_1}(Y_{\Lambda_1}(X_{\alpha_{i1}}, X_{\alpha_{i+1,1}})) = B_1(X_{\alpha_{i1}}, X_{\alpha_{i+1,1}}); \quad (19)$$

3) условные центральные моменты

$$\mu_{\Lambda_1}^{(3)}(Y_{\Lambda_1}(X_{\alpha_{i1}}, X_{\alpha_{i+1,1}})) = \mu_1^{(3)}(X_{\alpha_{i1}}, X_{\alpha_{i+1,1}}), \quad (20)$$

$$\mu_{\Lambda_1}^{(4)}(Y_{\Lambda_1}(X_{\alpha_{i1}}, X_{\alpha_{i+1,1}})) = \mu_1^{(4)}(X_{\alpha_{i1}}, X_{\alpha_{i+1,1}}). \quad (21)$$

Правые части обозначений (18)–(21) нужно понимать как функции двух переменных, $X_{\alpha_{i1}}$ и $X_{\alpha_{i+1,1}}$, фиксированных сечением Λ_1 , о котором напоминает нижний значок 1. В особенности важны моменты (18) и (19).

Из (17) и (18) имеем:

$$E_{\Lambda_1}(S_{\Lambda_1}) = \sum_{i=1}^{q_1-1} A_1(X_{\alpha_{i1}}, X_{\alpha_{i+1,1}}) = A_1(\Lambda_1). \quad (22)$$

Если теперь, когда выражение (22) составлено, считать Λ_1 случайным событием с соответствующими вероятностями $\mathcal{P}_{\Lambda_1}$, то (22) будет тоже случайной величиной — суммой величин $A_1(X_{\alpha_{i1}}, X_{\alpha_{i+1,1}})$, функций двух переменных, заданных на цепи Маркова. Эти величины уже не являются независимыми, а, как мы увидим далее, являются зависимыми, но слабо.

Фиксируем теперь вторую группу индексов, $\alpha_{12}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{q_12}$, описанных в § 3, и рассмотрим какое-либо сечение Λ_2 . Между индексами α_{i2} и $\alpha_{i+1,2}$ содержатся индексы вида α_{k1} . Именно, пусть $\alpha_{12} = \alpha_{j1}$; тогда $\alpha_{i+1,2} = \alpha_{j+R,1}$, где $R' \leq R(R' < R)$, если только $i+1 = q_2$. Положим $j+R' = l$. Сечение Λ_2 создает в (22) отрезки вида

$$\{A_1(X_{\alpha_{i2}}, X_{\alpha_{j+1,1}}) + A_1(X_{\alpha_{j+1,1}}, X_{\alpha_{j+2,1}}) + \dots + A_1(X_{\alpha_{l-1,1}}, X_{\alpha_{l+1,2}}) | \Lambda_2\} = Y_{\Lambda_2}(X_{\alpha_{i2}}, X_{\alpha_{l+1,2}}). \quad (23)$$

Здесь сечение Λ_2 фиксирует $X_{\alpha_{i2}}$ и $X_{\alpha_{i+1,2}}$ как и вообще все $X_{\alpha_{k2}}$. Закон распределения случайной величины (23) зависит только от того, как эти две величины фиксированы согласно лемме I. Поэтому, в частности, величины

$$Y_{\Lambda_2}(X_{\alpha_{i2}}, X_{\alpha_{i+1,2}}) \quad (24)$$

при $i = 1, 2, \dots, q_2 - 1$ и фиксированном Λ_2 независимы. Введем для них условные моменты, аналогичные (18)—(21):

$$E_{\Lambda_2}(Y_{\Lambda_2}(X_{\alpha_{i2}}, X_{\alpha_{i+1,2}})) = A_2(X_{\alpha_{i2}}, X_{\alpha_{i+1,2}}), \quad (25)$$

$$D_{\Lambda_2}(Y_{\Lambda_2}(X_{\alpha_{i2}}, X_{\alpha_{i+1,2}})) = B_2(X_{\alpha_{i2}}, X_{\alpha_{i+1,2}}), \quad (26)$$

$$\mu_{\Lambda_2}^{(3)}(Y_{\Lambda_2}(X_{\alpha_{i2}}, X_{\alpha_{i+1,2}})) = \mu_2^{(3)}(X_{\alpha_{i2}}, X_{\alpha_{i+1,2}}), \quad (27)$$

$$\mu_{\Lambda_2}^{(4)}(Y_{\Lambda_2}(X_{\alpha_{i2}}, X_{\alpha_{i+1,2}})) = \mu_2^{(4)}(X_{\alpha_{i2}}, X_{\alpha_{i+1,2}}). \quad (28)$$

Рассматривая затем сумму независимых величин

$$S_{\Lambda_2} = \sum_{i=1}^{q_2-1} Y_{\Lambda_2}(X_{\alpha_{i2}}, X_{\alpha_{i+1,2}}), \quad (29)$$

полагаем

$$E_{\Lambda_2}(S_{\Lambda_2}) = \sum_{i=1}^{q_2-1} A_2(X_{\alpha_{i2}}, X_{\alpha_{i+1,2}}) = A_2(\Lambda_2). \quad (30)$$

Если мы будем считать Λ_2 случайным событием и введем сечение Λ_3 , то этим мы продолжим наш процесс.

§ 6. Продолжим наш процесс еще далее. Пусть мы фиксировали уже индексы

$$\alpha_1, p-1, \alpha_2, p-1, \dots, \alpha_{q_{p-1}}, p-1,$$

где $\alpha_1, p-1 = 1$, $\alpha_{q_{p-1}}, p-1 = n$, и ввели сечение Λ_{p-1} и величины

$$Y_{\Lambda_{p-1}}(X_{\alpha_i, p-1}, X_{\alpha_{i+1}, p-1}) \quad (i = 1, \dots, q_{p-1} - 1),$$

независимые при фиксированном Λ_{p-1} , а именно такие, законы распределения которых зависят лишь от того, как Λ_{p-1} фиксирует величины $X_{\alpha_i, p-1}$ и $X_{\alpha_{i+1}, p-1}$.

Пусть введены условные моменты

$$\begin{aligned} E_{\Lambda_{p-1}}(Y_{\Lambda_{p-1}}(X_{\alpha_i, p-1}, X_{\alpha_{i+1}, p-1})) &= A_{p-1}(X_{\alpha_i, p-1}, X_{\alpha_{i+1}, p-1}), \\ D_{\Lambda_{p-1}}(Y_{\Lambda_{p-1}}(X_{\alpha_i, p-1}, X_{\alpha_{i+1}, p-1})) &= B_{p-1}(X_{\alpha_i, p-1}, X_{\alpha_{i+1}, p-1}), \\ \mu_{\Lambda_{p-1}}^{(3)}(Y_{\Lambda_{p-1}}(X_{\alpha_i, p-1}, X_{\alpha_{i+1}, p-1})) &= \mu_{p-1}^{(3)}(X_{\alpha_i, p-1}, X_{\alpha_{i+1}, p-1}), \end{aligned} \quad (31)$$

зависящие лишь от значений, которые сечение Λ_{p-1} дало $X_{\alpha_i, p-1}$ и $X_{\alpha_{i+1}, p-1}$.

Далее, пусть введены

$$S_{\Lambda_{p-1}} = \sum_{i=1}^{q_{p-1}-1} Y_{\Lambda_{p-1}}(X_{\alpha_i, p-1}, X_{\alpha_{i+1}, p-1}), \quad (32)$$

$$E_{\Lambda_{p-1}}(S_{\Lambda_{p-1}}) = \sum_{i=1}^{q_{p-1}-1} A_{p-1}(X_{\alpha_i, p-1}, X_{\alpha_{i+1}, p-1}). \quad (33)$$

Рассмотрим следующую группу индексов (§ 3),

$$1 = \alpha_{1p}, \alpha_{2p}, \dots, \alpha_{q_p, p} = n,$$

и введем сечение Λ_p , которое создаст в сумме

$$A_{p-1}(\Lambda_{p-1}) = \sum_{i=1}^{q_{p-1}-1} A_{p-1}(X_{\alpha_i, p-1}, X_{\alpha_{i+1}, p-1})$$

отрезки вида

$$\{A_{p-1}(X_{\alpha_{jp}, p-1}, X_{\alpha_{j+1}, p-1}) + A_{p-1}(X_{\alpha_{j+1}, p-1}, X_{\alpha_{j+2}, p-1}) + \dots + A_{p-1}(X_{\alpha_{i-1}, p-1}, X_{\alpha_{i+1}, p-1}) | \Lambda_p\}. \quad (34)$$

Здесь положено $\alpha_{jp} = \alpha_{j, p-1}$, $\alpha_{i+1, p} = \alpha_{i, p-1}$, так что j и i имеют не те значения, что в (23). Λ_p фиксирует $X_{\alpha_{jp}}$, $X_{\alpha_{i+1}, p}$ и вообще все $X_{\alpha_{np}}$. В силу леммы I величины (34), которые мы обозначим через

$$Y_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p}) \quad (i = 1, 2, \dots, q_p - 1), \quad (35)$$

независимы при фиксированном Λ_p , так как их условные законы распределения зависят лишь от значений, которые Λ_p придает $X_{\alpha_{ip}}$ и $X_{\alpha_{i+1}, p}$. Сумма их

$$S_{\Lambda_p} = \sum_{i=1}^{q_p-1} Y_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p}) \quad (36)$$

есть сумма независимых величин.

Введем величины

$$\begin{aligned} E_{\Lambda_p}(Y_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p})) &= A_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p}), \\ D_{\Lambda_p}(Y_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p})) &= B_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p}), \\ \mu_p^3(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p}) &= \mu_p^4(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p}), \end{aligned} \quad (37)$$

зависящие лишь от значений $X_{\alpha_{ip}}$ и $X_{\alpha_{i+1}, p}$ фиксированных сечений Λ_p , и обозначим

$$A_p(\Lambda_p) = E_{\Lambda_p}(S_{\Lambda_p}) = \sum_{i=1}^{q_p-1} A_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p}). \quad (38)$$

Из предыдущего видно, что наш процесс построения сечений и случайных величин (35) с указанными выше свойствами можно продолжать вплоть до сечения Λ_s . Это сечение имеет два индекса: $\alpha_{1s} = 1$ и $\alpha_{2s} = n$, и на нем процесс заканчивается.

§ 7. Рассмотрим величину $A_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p})$ для какого-либо $p \leq s$. При фиксированном Λ_p она постоянна, если же Λ_p меняется

как случайное событие, то наша величина становится случайной. При этом ее математическое ожидание есть

$$E(A_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p})) = \sum_{\Lambda_p} \mathcal{P}_{\Lambda_p} \{A_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p}) | \Lambda_p\},$$

где в фигурных скобках стоит то значение, которое Λ_p сообщает нашей величине.

Лемма II. Для всех $p \leq s$ и всех $i \leq q_p - 1$ имеем:

$$E(A_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p})) = 0. \quad (39)$$

Доказательство. В справедливости леммы легко убедиться для $p=1$, исходя из того, что

$$E(X_j) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Пусть это свойство доказано для всех чисел $< p-1$; докажем его для числа p . Имеем:

$$A_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p}) = E_{\Lambda_p}(Y_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p})).$$

Пусть $\{y\}$ — множество всех значений, пробегаемых величиной $Y_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p})$. Тогда

$$\begin{aligned} E(A_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p})) &= \sum_{\Lambda_p} \mathcal{P}_{\Lambda_p} \sum_y y P(Y_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p}) = y) = \\ &= \sum_y y \sum_{\Lambda_p} \mathcal{P}_{\Lambda_p} P(Y_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p}) = y). \end{aligned} \quad (40)$$

Но, по (24) и (35),

$$\begin{aligned} Y_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p}) &= \{A_{p-1}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{j+1}, p-1}) + \\ &+ A_{p-1}(X_{\alpha_{j+1}, p-1}, X_{\alpha_{j+2}, p-1}) + \dots + A_{p-1}(X_{\alpha_{i-1}, p-1}, X_{\alpha_{i+1}, p-1}) | \Lambda_p\}. \end{aligned}$$

Поэтому сумма

$$\sum_{\Lambda_p} \mathcal{P}_{\Lambda_p} P(Y_{\Lambda_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{j+1}, p}) = y)$$

есть априорная вероятность

$$\begin{aligned} P(A_{p-1}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{j+1}, p-1}) + A_{p-1}(X_{\alpha_{j+1}, p-1}, X_{\alpha_{j+2}, p-1}) + \dots + \\ + A_{p-1}(X_{\alpha_{i-1}, p-1}, X_{\alpha_{i+1}, p-1}) = y). \end{aligned}$$

Таким образом, (40) есть математическое ожидание

$$\begin{aligned} E(A_{p-1}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{j+1}, p-1}) + A_{p-1}(X_{\alpha_{j+1}, p-1}, X_{\alpha_{j+2}, p-1}) + \dots + \\ + A_{p-1}(X_{\alpha_{i-1}, p-1}, X_{\alpha_{i+1}, p-1})) = E(A_{p-1}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{j+1}, p-1})) + \\ + E(A_{p-1}(X_{\alpha_{j+1}, p-1}, X_{\alpha_{j+2}, p-1})) + \dots + E(A_{p-1}(X_{\alpha_{i-1}, p-1}, X_{\alpha_{i+1}, p-1})). \end{aligned}$$

Если учесть, что индексы α_{kp} находятся среди индексов α_j , $p-1$ согласно предположению о всех числах α_j , $p-1$, наше выражение

равно 0, что и требовалось доказать. Итак, (39) доказано, а из него вытекает, по (38), что

$$E(A_p(\Lambda_p)) = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, s). \quad (41)$$

§ 8. Нам нужно будет дать выражение m -го центрального момента выражения $A_p(\Lambda_p)$ при целых $m > 0$. Согласно (41), он имеет вид

$$\mu_p^{(m)} = \sum_{\Lambda_p} \mathcal{P}_{\Lambda_p} [A_p(\Lambda_p)]^m = E \left(\sum_{i=1}^{q_p-1} A_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}) \right)^m.$$

Мы будем считать, что $p \leq s-1$, так что существует сечение Λ_{p+1} . Введем это сечение; оно фиксирует $X_{\alpha_{1,p+1}}, \dots, X_{\alpha_{q_{p+1},p+1}}$, и при его введении величина в скобках превращается в сумму

$$S_{\Lambda_{p+1}} = \sum_{i=1}^{q_{p+1}-1} Y_{\Lambda_{p+1}}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p+1}}).$$

Пусть $\{z\}$ — совокупность всех значений, которые может принимать величина

$$\sum_{i=1}^{q_p-1} A_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}).$$

Тогда, очевидно,

$$\begin{aligned} \mu_p^{(m)} &= \sum z^m \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathcal{P}_{\Lambda_{p+1}} P(S_{\Lambda_{p+1}} = z) = \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathcal{P}_{\Lambda_{p+1}} \sum_z P(S_{\Lambda_{p+1}} = z) z^m = \\ &= \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathcal{P}_{\Lambda_{p+1}} \sum_z P(S_{\Lambda_{p+1}} = z) (z - A_{p+1}(\Lambda_{p+1}) + A_{p+1}(\Lambda_{p+1}))^m. \end{aligned}$$

Нас будут интересовать, в частности, случаи $m=2$ и $m=4$. При $m=2$ имеем:

$$\begin{aligned} \mu_p^{(2)} &= D(A_p(\Lambda_p)) = \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathcal{P}_{\Lambda_{p+1}} \sum_z P(S_{\Lambda_{p+1}} = z) (z - A_{p+1}(\Lambda_{p+1}))^2 + \\ &+ 2 \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathcal{P}_{\Lambda_{p+1}} \sum_z P(S_{\Lambda_{p+1}} = z) (z - A_{p+1}(\Lambda_{p+1})) A_{p+1}(\Lambda_{p+1}) + \\ &+ \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathcal{P}_{\Lambda_{p+1}} \sum_z P(S_{\Lambda_{p+1}} = z) [A_{p+1}(\Lambda_{p+1})]^2 = \\ &= \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathcal{P}_{\Lambda_{p+1}} D_{\Lambda_{p+1}}(S_{\Lambda_{p+1}}) + \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathcal{P}_{\Lambda_{p+1}} [A_{p+1}(\Lambda_{p+1})]^2. \end{aligned} \quad (42)$$

Здесь $D_{\Lambda_{p+1}}(S_{\Lambda_{p+1}})$ при фиксированном Λ_{p+1} есть дисперсия суммы независимых величин, равная сумме их дисперсий, а величина

$$\sum_{\Lambda_{p+1}} \mathcal{P}_{\Lambda_{p+1}} [A_{p+1}(\Lambda_{p+1})]$$

в силу (41) есть априорная дисперсия $D(A_p(\Lambda_p))$.

Итак,

$$D(A_p(\Lambda_p)) = \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathcal{P}_{\Lambda_{p+1}} D_{\Lambda_{p+1}}(S_{\Lambda_{p+1}}) + D(A_{p+1}(\Lambda_{p+1})),$$

$$p = 1, 2, \dots, s-1. \quad (43)$$

Из формул (16)–(19) следует, что рекуррентное соотношение (43) применимо и к $p=0$, причем нужно положить тогда

$$A_0(\Lambda_0) = Z_n, \quad D(A_0(\Lambda_0)) = D(Z_n).$$

Это дает нам важное выражение для дисперсии суммы Z_n элементов цепи Маркова (14):

$$D(Z_n) = \sum_{\Lambda_1} \mathcal{P}_{\Lambda_1} D_{\Lambda_1}(S_{\Lambda_1}) + \sum_{\Lambda_2} \mathcal{P}_{\Lambda_2} D_{\Lambda_2}(S_{\Lambda_2}) + \dots +$$

$$+ \sum_{\Lambda_p} \mathcal{P}_{\Lambda_p} D_{\Lambda_p}(S_{\Lambda_p}) + \dots + \sum_{\Lambda_s} \mathcal{P}_{\Lambda_s} D_{\Lambda_s}(S_{\Lambda_s}) + D(A_s(\Lambda_s)). \quad (44)$$

Все члены правой части (44) положительны и каждый, кроме последнего, распадается на более простые члены. Заметим, что из формулы (44), беря числа § 3 $M=2$ и $R=2$ и ограничиваясь лишь одним сечением Λ_1 , легко получить формулы (6), (4bis) и (7) работы [5] С. Н. Бернштейна. Из этих формул С. Н. Бернштейн выводит оценку (23) работы [5], весьма нужную нам в дальнейшем.

Переходим к четвертому моменту и получаем:

$$\mu_p^{(4)} = E(A_p(\Lambda_p))^4 = \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathcal{P}_{\Lambda_{p+1}} \sum_z P(S_{\Lambda_{p+1}} = z) (z - A_{p+1}(\Lambda_{p+1}))^4 +$$

$$+ 4 \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathcal{P}_{\Lambda_{p+1}} \sum_z P(S_{\Lambda_{p+1}} = z) (z - A_{p+1}(\Lambda_{p+1}))^3 A_{p+1}(\Lambda_{p+1}) +$$

$$+ 6 \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathcal{P}_{\Lambda_{p+1}} \sum_z P(S_{\Lambda_{p+1}} = z) (z - A_{p+1}(\Lambda_{p+1}))^2 (A_{p+1}(\Lambda_{p+1}))^2 +$$

$$+ 4 \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathcal{P}_{\Lambda_{p+1}} \sum_z P(S_{\Lambda_{p+1}} = z) (z - A_{p+1}(\Lambda_{p+1})) (A_{p+1}(\Lambda_{p+1}))^3 +$$

$$+ \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathcal{P}_{\Lambda_{p+1}} \sum_z P(S_{\Lambda_{p+1}} = z) (A_{p+1}(\Lambda_{p+1}))^4.$$

Если обозначить третий и четвертый моменты суммы независимых величин $S_{\Lambda_{p+1}}(\Lambda_{p+1}$ фиксировано) через

$$\mu_{\Lambda_{p+1}}^{(3)}(S_{\Lambda_{p+1}}) \text{ и } \mu_{\Lambda_{p+1}}^{(4)}(S_{\Lambda_{p+1}}),$$

то получим:

$$\mu_p^{(4)} = \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathcal{P}_{\Lambda_{p+1}} \mu_{\Lambda_{p+1}}^{(4)}(S_{\Lambda_{p+1}}) + 4 \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathcal{P}_{\Lambda_{p+1}} \mu_{\Lambda_{p+1}}^{(3)}(S_{\Lambda_{p+1}}) A_{p+1}(\Lambda_{p+1}) +$$

$$+ 6 \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathcal{P}_{\Lambda_{p+1}} D_{\Lambda_{p+1}}(S_{\Lambda_{p+1}}) [A_{p+1}(\Lambda_{p+1})]^2 + \sum_{\Lambda_{p+1}} \mathcal{P}_{\Lambda_{p+1}} [A_{p+1}(\Lambda_{p+1})]^4. \quad (45)$$

Заметим, что последняя сумма равна

$$E(A_{p+1}(\Delta_{p+1}))^4 = \mu_{p+1}^4.$$

Далее, из (16)–(19) следует, что (45) применимо и к $p=0$, причем нужно считать тогда

$$\mu_0^{(4)} = E(Z_n^4).$$

§ 9. Заменяем (45) его оценкой сверху. К третьей сумме в (45) приложимо для каждого члена неравенство

$$uv \leq \frac{u^2 + v^2}{2} \quad (u, v \geq 0);$$

полагая

$$u = \sqrt{\mathcal{P}_{\Delta_{p+1}}} D_{\Delta_{p+1}}(S_{\Delta_{p+1}}), \quad v = \sqrt{\mathcal{P}_{\Delta_{p+1}}} [A_{p+1}(\Delta_{p+1})]^2,$$

мы получим

$$\begin{aligned} & 6 \sum_{\Delta_{p+1}} \mathcal{P}_{\Delta_{p+1}} D_{\Delta_{p+1}}(S_{\Delta_{p+1}}) [A_{p+1}(\Delta_{p+1})]^2 \leq \\ & \leq 3 \sum_{\Delta_{p+1}} \mathcal{P}_{\Delta_{p+1}} [D_{\Delta_{p+1}}(S_{\Delta_{p+1}})]^2 + 3 \sum_{\Delta_{p+1}} \mathcal{P}_{\Delta_{p+1}} [A_{p+1}(\Delta_{p+1})]^4. \end{aligned} \quad (46)$$

Ко второй сумме (45) применим неравенство Гельдера (см. [7], с. 189): для $\gamma > 1$, $u_k, v_k \geq 0$

$$\sum_{k=1}^N u_k v_k \leq \left(\sum_{k=1}^N u_k^\gamma \right)^{1/\gamma} \left(\sum_{k=1}^N v_k^{\gamma/(\gamma-1)} \right)^{(\gamma-1)/\gamma},$$

где мы положим $\gamma = 4$,

$$u_k = \mathcal{P}_{\Delta_{p+1}}^{1/4} [A_{p+1}(\Delta_{p+1})], \quad v_k = \mathcal{P}_{\Delta_{p+1}}^{3/4} [\mu_{\Delta_{p+1}}^3(S_{\Delta_{p+1}})].$$

Тогда

$$\begin{aligned} & 4 \left| \sum_{\Delta_{p+1}} \mathcal{P}_{\Delta_{p+1}} \mu_{\Delta_{p+1}}^{(3)}(S_{\Delta_{p+1}}) A_{p+1}(\Delta_{p+1}) \right| \leq \\ & \leq 4 \left(\sum_{\Delta_{p+1}} \mathcal{P}_{\Delta_{p+1}} [A_{p+1}(\Delta_{p+1})]^4 \right)^{1/4} \left(\sum_{\Delta_{p+1}} \mathcal{P}_{\Delta_{p+1}} |\mu_{\Delta_{p+1}}^{(3)}(S_{\Delta_{p+1}})|^{4/3} \right)^{3/4}. \end{aligned} \quad (47)$$

Но (см. [8])

$$|\mu_{\Delta_{p+1}}^{(3)}(S_{\Delta_{p+1}})|^{4/3} \leq \mu_{\Delta_{p+1}}^{(4)}(S_{\Delta_{p+1}}),$$

так что (47) не превосходит

$$4 \left(\sum_{\Delta_{p+1}} \mathcal{P}_{\Delta_{p+1}} [A_{p+1}(\Delta_{p+1})]^4 \right)^{1/4} \left(\sum_{\Delta_{p+1}} \mathcal{P}_{\Delta_{p+1}} \mu_{\Delta_{p+1}}^{(4)}(S_{\Delta_{p+1}}) \right)^{3/4}.$$

Подставляя это и (46) в (45) и вспоминая, что

$$\sum_{\Delta_{p+1}} [A_{p+1}(\Delta_{p+1})]^4 = \mu_{p+1}^{(4)},$$

находим основное неравенство:

$$\mu_p^{(4)} \leq 3 \sum_{\Delta_{p+1}} \mathcal{P}_{\Delta_{p+1}} [D_{\Delta_{p+1}} (S_{\Delta_{p+1}})]^2 + \sum_{\Delta_{p+1}} \mathcal{P}_{\Delta_{p+1}} \mu_{\Delta_{p+1}}^{(4)} (S_{\Delta_{p+1}}) + \\ + 4 (\mu_{p+1}^{(4)})^{1/4} \left(\sum_{\Delta_{p+1}} \mathcal{P}_{\Delta_{p+1}} \mu_{\Delta_{p+1}}^{(4)} (S_{\Delta_{p+1}}) \right)^{3/4} + 4 \mu_{p+1}^{(4)}. \quad (48)$$

§ 10. Нам понадобятся несколько лемм о слабой зависимости далеких друг от друга элементов цепи Маркова $X_1, X_2, \dots, X_n$. Эти леммы не будут содержать ничего нового и явятся лишь легким видоизменением фактов, изложенных у С. Н. Бернштейна [2, 3, 9] (гл. IV) и Н. А. Сапогова [6, 10].

Мы рассматриваем цепь Маркова при условии (3)

$$P_{ii}^{(h)} > \frac{1}{n^p},$$

где p — фиксированное число $< 1/3$ и индекс n опущен.

Лемма III. Пусть $\rho' > \rho$ фиксировано и $\rho' - \rho = \eta > 0$. Тогда при $q - p \geq n^{\rho'}$

$$|P(X_q = f | X_p = e) - P(X_q = f)| < c_1 e^{-n^{2/3}\eta}. \quad (49)$$

Доказательство. См. [9], с. 204, а также [6] и [10].

Лемма IV. Пусть

$$i < k < l \leq m, \quad k - i \geq n^{\rho'}, \quad m - l \geq n^{\rho'}.$$

Возьмем в нашей цепи Маркова элементы X_i, X_k, X_l, X_m . Тогда

$$|P(X_k = b \text{ и } X_l = c) - P(X_k = b \text{ и } X_l = c | X_i = a \text{ и } X_m = d)| < c_2 e^{-n^{\eta/2}}. \quad (50)$$

Доказательство. На основании теоремы об условных вероятностях и известных свойств цепи Маркова имеем:

$$P(X_k = b \text{ и } X_l = c) = P(X_k = b) P(X_l = c | X_k = b), \quad (51) \\ P(X_k = b \text{ и } X_l = c | X_i = a \text{ и } X_m = d) = \\ = \frac{P(X_i = a) P(X_k = b | X_i = a) P(X_l = c | X_k = b) P(X_m = d | X_l = c)}{P(X_i = a) P(X_m = d | X_i = a)}.$$

При этом $P(X_i = a) \neq 0$, иначе формулировка (50) бессмысленна. Все же остальные вероятности условны и удовлетворяют условию (3) (все $> 1/n^p$), как легко видеть из свойств цепи Маркова. Сокращая последнее выражение на $P(X_i = a)$ и применяя (49) и (51), легко выводим (50).

Лемма V. Пусть на нашей цепи Маркова $X_1, X_2, \dots, X_n$ даны, в обозначениях леммы IV, X_i, X_k, X_l, X_m , причем $l - k > n^{\rho'}$. Тогда

$$|P(X_l = c \text{ и } X_m = d) - P(X_l = c \text{ и } X_m = d | X_i = a \text{ и } X_k = b)| \leq c_3 e^{-n^{\eta/2}}. \quad (52)$$

Доказательство аналогично предыдущему.

Лемма VI. Пусть на той же цепи даны две функции, $F_1(X_\alpha, X_\beta)$ и $F_2(X_\gamma, X_\delta)$, причем $\alpha < \beta < \gamma < \delta$; $\gamma - \beta \geq n^{\rho'}$ и $|F_1(X_\alpha, X_\beta)| < n^4$, $|F_2(X_\gamma, X_\delta)| < n^4$.

Тогда

$$|E[F_1(X_\alpha, X_\beta) F_2(X_\gamma, X_\delta)] - E(F_1(X_\alpha, X_\beta)) E(F_2(X_\gamma, X_\delta))| \leq c_3 e^{-n^{\eta/4}}. \quad (53)$$

Доказательство непосредственно следует из леммы V.

Лемма VII. Пусть

$$\alpha < \beta < \gamma < \delta, \quad \beta - \alpha \geq n^{\rho'}, \quad \delta - \gamma \geq n^{\rho'}.$$

Пусть на цепи Маркова задана функция $A(X_\beta, X_\gamma)$, причем всегда $|A(X_\beta, X_\gamma)| < n^4$. Пусть, далее, $E'_{\text{усл}}$ означает условное математическое ожидание при условии

$$X_\alpha = a, \quad X_\delta = d.$$

Тогда

$$|E'_{\text{усл}}(A(X_\beta, X_\gamma)) - E(A(X_\beta, X_\gamma))| \leq c_4 e^{-n^{\eta/4}}. \quad (54)$$

Доказательство. На основании леммы IV можно считать, что левая часть (54) не превосходит

$$K_1^2 n^4 c_2 e^{-n^{\eta/4}} < c_4 e^{-n^{\eta/4}},$$

чем лемма и доказана.

Лемма VIII. Из цепи Маркова $X_1, X_2, \dots, X_n$ выделим суммы $U_1, \dots, U_q$, причем

$$U_i = \sum_{j=N_{i-1}}^{N_i} X_j \quad \text{и} \quad N_{i+1} - N_{2i} \geq n^{\rho'},$$

так что наши суммы разделены группами X_i по крайней мере в n^{ρ} штук. Пусть

$$F_{1i} = E(U_i^1) = 0, \quad F_{2i} = E(U_i^2), \\ F_{3i} = E(U_i^3), \quad F_{4i} = E(|U_i|^4),$$

и пусть $F'_{1i}, F'_{2i}, F'_{3i}, F'_{4i}$ означают математические ожидания тех же величин, но условные, т. е. вычисленные при условии, что $U_1, U_2, \dots, U_{i-1}, U_{i+1}, \dots, U_q$ получили какие-либо значения. Тогда

$$|F_{ji} - F'_{ji}| < c_5 e^{-n^{\eta/4}} \quad (j = 1, 2, 3, 4). \quad (55)$$

Доказательство см. в работе [10].

§ 11. Рассмотрим снова нашу основную цепь Маркова $X_1, X_2, \dots, X_n$. Условие (3) для вероятностей перехода

$$P_{ij}^{(h)} > \frac{1}{n^{\rho}}$$

позволяет нам оценить дисперсию суммы

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad (56)$$

с помощью оценки (23) работы [5], о которой мы уже говорили в § 8. Именно эта оценка дает непосредственно

$$B_n = D(S_n) > c_6 n^{1-\rho}. \quad (57)$$

Введем числа

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \frac{1}{3} - \rho > 0, \quad \rho_1 = \left(\frac{1}{3} + \rho \right) / 2 = \rho + \frac{\eta_0}{2}, \\ \rho_2 &= \frac{\rho + \rho_1}{2} = \frac{3}{4} \rho + \frac{1}{12} = \rho + \frac{\eta_0}{4}. \end{aligned} \quad (58)$$

Цепь Маркова $X_1, X_2, \dots, X_n$ задается вероятностями перехода и априорным законом распределения X_1 . В этих условиях любая ее подпоследовательность будет также цепью Маркова, которую мы назовем подцепью. Возьмем любой элемент X_α и будем образовывать подцепи

$$X_\alpha + X_{\alpha+1} + \dots + X_{\alpha+n'} \quad (1 \leq n' \leq n - \alpha).$$

Допустим, что среди чисел n' найдутся такие, для которых

$$D(X_\alpha + X_{\alpha+1} + \dots + X_{\alpha+n'}) \geq \frac{1}{2} n^{1-\rho_2},$$

пусть n'' — наименьшее из них. (Из (57) и (58) явствует, что, например, при $\alpha = 1$ n'' существует). Тогда имеет место следующая лемма.

Лемма IX. При достаточно большом $n > c_7$ будем иметь:

$$D(X_\alpha + X_{\alpha+1} + \dots + X_{\alpha+n''}) < n^{4-\rho_2}. \quad (59)$$

Доказательство. Положим

$$X_\alpha + X_{\alpha+1} + \dots + X_{\alpha+n''-1} = X'.$$

Тогда

$$D(X') < \frac{1}{2} n^{1-\rho_2}$$

по определению числа n'' . Далее,

$$D(X' + X_{\alpha+n''}) = D(X') + D(X_{\alpha+n''}) + 2R_{X', X_{\alpha+n''}} \sqrt{D(X') D(X_{\alpha+n''})},$$

где $|R_{X', X_{\alpha+n''}}| \leq 1$ как коэффициент корреляции. Отсюда, так как $D(X_{\alpha+n''}) < c_8$, получим

$$D(X' + X_{\alpha+n''}) < \frac{1}{2} n^{1-\rho_2} + c_8 + 2 \sqrt{\frac{1}{2} n^{1-\rho_2} c_8} < n^{1-\rho_2}$$

при $n > c_7$, что и требовалось доказать.

Возьмем нашу подцепь $X_\alpha, X_{\alpha+1}, \dots, X_{\alpha+n''}$. Для удобства переименуем ее переменные, полагая

$$X_\alpha = X'_1, X_{\alpha+1} = X'_2, \dots, X_{\alpha+n''} = X'_{n_1},$$

так что $n_1 = n'' + 1$. Для новой цепи

$$X'_1, X'_2, \dots, X'_{n_1}, \quad (60)$$

имеющей все свойства старой цепи, положим

$$S_{n_1} = X'_1 + X'_2 + \dots + X'_{n_1},$$

тогда

$$n^{1-p_2} > D(S_{n_1}) \geq \frac{1}{2} n^{1-p_2}. \quad (61)$$

§ 12. В новой цепи (60) проведем сечения $\Lambda_1, \dots, \Lambda_s$, причем числа M и R (из § 3) фиксируем следующим образом:

$$M = 2[n^{p_1}], \quad R = [\ln n]. \quad (62)$$

Следовательно, любые среди индексов сечения Λ_i

$$\alpha_{1i} = 1, \alpha_{2i}, \dots, \alpha_{ki}, \dots, \alpha_{q_i,1} = n_1,$$

кроме, может быть, последнего и предпоследнего, удовлетворяют неравенству

$$\alpha_{k+1,i} - \alpha_{ki} > n^{p_1} \quad (63)$$

(для последнего и предпоследнего индексов имеем $k+1 = q_i$, $k = q_i - 1$). Выбрасывая из (60) величины $X'_1, X'_{\alpha_{21}}, \dots, X'_{n_1}$, получим цепь

$$X'_2, X'_3, \dots, X'_{\alpha_{21}-1}, X'_{\alpha_{21}+1}, \dots, X'_{n_1-1}, \quad (64)$$

к которой полностью приложимы все выводы § 3—10. Сумму элементов цепи (64) обозначим через Z_{n_1} .

Основной целью дальнейшего будет изучение величины

$$\frac{E(S_{n_1}^4)}{[D(S_{n_1})]^2},$$

которую мы попытаемся заменить на

$$\frac{E(Z_{n_1}^4)}{[D(Z_{n_1})]^2}.$$

Для этого докажем следующую лемму.

Л е м м а X.

$$|D(S_{n_1}) - D(Z_{n_1})| < c_2 n^{1-(p_1+p_2)/2}, \quad (65)$$

$$E(S_{n_1}^4) < 8E(Z_{n_1}^4) + c_{10} n^{2(1-p_1)}. \quad (66)$$

Доказательство. Обозначим сумму выброшенных элементов $X_1, X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_{k-1}}, \dots, X_{n_1}$ ¹⁾ через U_{n_1} ; тогда $S_{n_1} = Z_{n_1} + U_{n_1}$. Имеем

$$D(S_{n_1}) = D(Z_{n_1} + U_{n_1}) = D(Z_{n_1}) + D(U_{n_1}) + 2R_{Z_{n_1}U_{n_1}}\sqrt{D(Z_{n_1})D(U_{n_1})}, \\ |R_{Z_{n_1}U_{n_1}}| \leq 1.$$

Отсюда

$$|D(S_{n_1}) - D(Z_{n_1})| \leq 2\sqrt{D(S_{n_1})D(U_{n_1})} + D(U_{n_1}). \quad (67)$$

Докажем, что

$$D(U_{n_1}) \leq c_{11}n^{1-p_1}. \quad (68)$$

Имеем

$$D(U_{n_1}) = E\left(\sum_{k=1}^{q_1} X_{\alpha_{k1}}\right)^2 = \sum_{i,j=1}^{q_1} E(X_{\alpha_{i1}}X_{\alpha_{j1}}).$$

При этом, очевидно, по определению сечения Λ_1 ,

$$q_1 \leq \frac{n_1}{2[n^{p_1}]} < n^{1-p_1}.$$

Далее, если $j > i$, то

$$\alpha_{j1} - \alpha_{i1} > 2[n^{p_1}],$$

за исключением, может быть, одного случая: $j = q_1, i = q_1 = 1$. Учитывая, что $E(X_{\alpha_{k1}}) = 0$ и применяя лемму VI, найдем

$$D(U_{n_1}) < \sum_{i=1}^{q_1} E(X_{\alpha_{i1}}^2) + c_{12} < c_{13}q_1 < c_{11}n^{1-p_1}.$$

Подставляя это неравенство в (67), получаем

$$|D(S_{n_1}) - D(Z_{n_1})| < c_{14}n^{(2-p_1-p_2)/2} + c_{11}n^{1-p_1} < c_2n^{1-(p_1-p_2)/2},$$

что и доказывает (65). Для доказательства (66) заметим, что всегда

$$(Z_{n_1} + U_{n_1})^4 \leq 8(Z_{n_1}^4 + U_{n_1}^4).$$

Отсюда

$$E(S_{n_1}^4) \leq 8E(Z_{n_1}^4) + 8E(U_{n_1}^4). \quad (69)$$

Найдем теперь оценку сверху для $E(U_{n_1}^4)$ с помощью той же леммы VI о слабой зависимости. Имеем

$$E(U_{n_1}^4) \leq 24 \sum_{1 \leq j \leq k \leq l \leq q_i} |E(X_{\alpha_{i1}}X_{\alpha_{j1}}X_{\alpha_{k1}}X_{\alpha_{l1}})|. \quad (70)$$

Для оценки (70) рассмотрим отдельно случаи $l < q_1$ и $l = q_1$.

¹⁾ Опускаем штрихи для упрощения записи.

а. $l < q_1$. Если среди индексов $\alpha_{i1}, \alpha_{j1}, \alpha_{k1}, \alpha_{l1}$ нет равных, то на основании леммы VI и равенства

$$E(X_{\alpha_{m1}}) = 0 \quad (m \leq q_1)$$

находим, что для таких членов при $n = \rho_1 - \rho = \eta_0/2$

$$|E(X_{\alpha_{i1}} X_{\alpha_{j1}} X_{\alpha_{k1}} X_{\alpha_{l1}})| < c_{14} e^{-n^{7/4}}.$$

Сумма всех таких членов меньше

$$24c_{14}n^4 e^{-n^{7/4}} < c_{15}. \quad (71)$$

Если среди индексов есть равные, то та же лемма VI или ее очевидное видоизменение показывают, что существенны лишь случаи $\alpha_{i1} = \alpha_{j1}, \alpha_{k1} = \alpha_{l1}$, дающие члены $E(X_{\alpha_{i1}}^2 X_{\alpha_{k1}}^2)$, и случаи $\alpha_{i1} = \alpha_{j1} = \alpha_{k1} = \alpha_{l1}$, дающие члены $E(X_{\alpha_{i1}}^4)$; сумма же остальных членов также $< c_{15}$. Но так как в силу условия I) § 1

$$E(X_{\alpha_{i1}}^2 X_{\alpha_{k1}}^2) < c_{16}, \quad E(X_{\alpha_{i1}}^4) < c_{16}$$

и количество таких членов не превосходит

$$q_1 < (n^{(1-\rho_1)})^2 = n^{2(1-\rho_1)},$$

то вообще наша сумма меньше

$$c_{16}n^{2(1-\rho_1)} + 2c_{15} < c_{17}n^{2(1-\rho_1)}.$$

б. $l = q_1$. Если при этом $k < l - 1$, можно провести те же рассуждения, так как

$$\alpha_{l_1} - \alpha_{k_1} \geq 2 \lfloor n^{\rho_1} \rfloor.$$

Если же $k = l - 1 = q_1 - 1$ или $k = l$, то общее число таких членов $< 2q_1^2$, а сумма их $< c_{17}n^{2(1-\rho_1)}$. Собирая все оценки и подставляя их в (70), найдем:

$$E(v_{n_1}^4) < c_{18}n^{2(1-\rho_1)}.$$

Тогда (69) доказывает нам (66).

§ 13. Вернемся к цепи (64). Сумму ее элементов мы обозначили через Z_{n_1} . Неравенство (65) позволяет оценить дисперсию $D(Z_{n_1})$ снизу:

$$D(Z_{n_1}) > D(S_{n_1}) - c_9 n^{1-(\rho_1+\rho_2)/2}.$$

Так как

$$\rho_1 > \rho_2 = \frac{\rho_1 + \rho}{2} > \rho \quad \text{и} \quad D(S_{n_1}) > \frac{1}{2} n^{1-\rho_2},$$

по (62), то

$$D(Z_{n_1}) > c_{19} n^{1-\rho_2}. \quad (72)$$

Далее, из (62) и (11) находим оценку числа сечений s :

$$s \leq \frac{\ln n}{\ln R} \leq \frac{\ln n}{\ln \ln n}. \quad (73)$$

Лемма XI. Для величин (37)

$$A_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}) \quad (p=1, 2, \dots, s),$$

построенных для цепи (64), имеем

$$|A_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})| \leq 4^p \cdot 2K_0 n^{\rho_1} \quad (74)$$

при $i=1, 2, \dots, q_p-1$ и любых значениях $X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}$.

Доказательство. Для случая $p=1$ наше неравенство тривиально. Пусть оно доказано для всех чисел $\leq p-1$; мы покажем, что тогда оно будет верно для p :

$$\begin{aligned} A_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}) &= E_{\Delta_p}(Y_{\Delta_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})) = E_{\Delta_p}\{A_{p-1}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{j,p-1}}) + \\ &+ A_{p-1}(X_{\alpha_{j+1,p-1}}, X_{\alpha_{j+2,p-1}}) + \dots + A_{p-1}(X_{\alpha_{l-1,p-1}}, X_{\alpha_{i+1,p}}) | \Delta_p\} = \\ &= E_{\Delta_p}\{A_{p-1}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{p+1,p-q}})\} + E_{\Delta_0}\{A_{p-1}(X_{\alpha_{q+1,p-1}}, X_{\alpha_{j+1,p-1}})\} + \dots + \\ &+ E_{\Delta_p}\{A_{p-1}(X_{\alpha_{l-1,p-1}}, X_{\alpha_{i+1,p}})\}. \end{aligned} \quad (75)$$

Напомним, что Δ_p фиксирует только $X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}$ в этом выражении. Рассмотрим два типа членов (75).

I тип: первый, последний и предпоследний члены. Так как, по предположению, всегда

$$|A_{p-1}(X_{\alpha_k, p-1}, X_{\alpha_{k+1,p-1}})| \leq 4^{p-1} \cdot 2K_0 n^{\rho_1},$$

то, очевидно, эта же оценка верна и для наших членов, так что сумма их не превосходит

$$3 \cdot 4^{p-1} \cdot 2K_0 n^{\rho_1}. \quad (76)$$

II тип: остальные члены. Для каждого из них

$$E_{\Delta_p}(A_{p-1}(X_{\alpha_k, p-1}, X_{\alpha_{k+1,p-1}}))$$

имеет оценку вида $Ce^{-n^{\eta/4}}$. Далее,

$$|A_{p-1}(X_{\alpha_k, p-1}, X_{\alpha_{k+1,p-1}})| \leq 4^{p-1} \cdot 2K_0 n^{\rho_1} < 4^{\ln n / \ln \ln n} \cdot 2K_0 n^{\rho_1} < n^4.$$

Поэтому применима лемма VII с $\eta = \rho_1 - \rho = \eta_0/2$, так что

$$|E_{\Delta_p}(A_{p-1}(X_{\alpha_k, p-1}, X_{\alpha_{k+1,p-1}})) - E(A_{p-1}(X_{\alpha_k, p-1}, X_{\alpha_{k+1,p-1}}))| \leq c_4 e^{-n^{\eta/4}}.$$

Но на основании леммы II

$$E(A_{p-1}(X_{\alpha_k, p-1}, X_{\alpha_{k+1,p-1}})) = 0.$$

Отсюда

$$|E_{\Delta p}(A_{p-1}(X_{\alpha_k, p-1}, X_{\alpha_{k+1}, p-1}))| \leq c_4 e^{-n^{7/4}}.$$

Таких слагаемых не больше $R = [\ln n]$ по построению. Таким образом, их общая сумма не превосходит $c_{20} e^{-n^{7/8}}$. Поэтому, учитывая (76), находим, что величина (75) не превосходит

$$3 \cdot 4^{p-1} \cdot 2K_0 \cdot n^{p_1} + c_{20} e^{-n^{7/8}} < 4^p \cdot 2K_0 \cdot n^{p_1},$$

если $n > c_{21}$, что будем всегда предполагать. Лемма доказана.

Лемма XII.

$$|Y_{\Delta p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p})| < 2K_0 \cdot \ln n \cdot 4^p n^{p_1}, \quad (77)$$

$$E_{\Delta p} |Y_{\Delta p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p})|^m < 2^m \cdot K^m (\ln n)^m \cdot 4^{pm} n^{mp_1}. \quad (78)$$

(Нам нужны только $m = 1, 2, 3, 4$).

Доказательство. Неравенство (77) следует из определений (34) и (35), леммы XI и того факта, что $Y_{\Delta p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p})$ имеет $\leq [\ln n]$ слагаемых. Неравенство (78) непосредственно следует из (77).

§ 14. Все предыдущее позволяет нам приблизиться к основной цели — сравнению четвертого момента Z_n с квадратом дисперсии $D(Z_n)$. Для этого нужно доказать еще несколько лемм, касающихся выражений (44) и (48). Для нашей суммы Z_n четвертый центральный момент $E(Z_n^4) = \mu_0^{(4)}$ имеет оценку (48), содержащую величину $\mu^{(4)}$.

$D(Z_n)$ выражается по формуле (44); кроме того, имеем оценку (72)

$$D(Z_n) > c_{12} n^{1-p_2}.$$

Лемма XIII. Для всех $p \leq s - 1$

$$\frac{\sum_{\Delta p} S_{\Delta p} [D_{\Delta p}(S_{\Delta p})]^2}{[D(Z_n)]^2} < c_0. \quad (79)$$

Доказательство. $S_{\Delta p}$ есть сумма независимых величин, и ее дисперсия $D_{\Delta p}(S_{\Delta p})$ есть сумма их дисперсий. В § 6 эти дисперсии обозначались через $B_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p})$ ($i = 1, 2, \dots, q_p - 1$); переменные $X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p}$ фиксированы сечением Δ_p . Обозначим

$$b_{ip} = E(B_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p}))$$

и положим

$$G_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p}) = B_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p}) - b_{ip},$$

так что

$$E(G_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p})) = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{\Lambda_p} \mathcal{P}_{\Lambda_p} [D_{\Lambda_p}(S_{\Lambda_p})]^2 &= E \left(\sum_{i=1}^{q_{p-1}} G_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}) + \sum_{i=1}^{q_{p-1}} b_{ip} \right)^2 = \\ &= E \left(\sum_{i=1}^{q_{p-1}} G_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}) \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{q_{p-1}} b_{ip} \right)^2. \end{aligned} \quad (80)$$

Далее, на основании леммы XII имеем:

$$\begin{aligned} |G_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})| &\leq |B_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})| + |EB_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})| \leq \\ &\leq 2 \cdot 2^2 \cdot K_0^2 (\ln n)^2 \cdot 4^{2p} n^{2p_1} \leq c_{22} \cdot 4^{2 \ln n / \ln \ln n} n^{2p_1}. \end{aligned} \quad (81)$$

Так как $4^{\ln n / \ln \ln n} = O(n^\varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$, то левая часть (81) есть, например, $O(n^{2p_1+\varepsilon})$.

Вернемся к выражению (30). Его первый член распадается на $(q_p - 1)^2$ членов вида

$$E \{ G_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}) G_p(X_{\alpha_{jp}}, X_{\alpha_{j+1,p}}) \}, \quad (82)$$

где $j \geq i$, т. е. такого вида, как в лемме VI. Если $j \geq i + 2$, то лемма VI применима, ибо тогда $\alpha_{jp} - \alpha_{j+1,p} > n^{p_1}$ и, так как

$$E(G_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})) = 0,$$

то, по лемме VI, модуль (82) будет

$$\leq c_4 e^{-n^{\eta/4}}, \quad n = \frac{\eta_0}{2} = p_1 - p.$$

Таких слагаемых не больше $(q_p - 1)^2 < n^2$, так что их общая сумма

$$< c_4 n^2 e^{-n^{\eta/4}} < c_{23} e^{-n^{\eta/8}}. \quad (83)$$

Остаются слагаемые вида $E \{ (G_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}))^2 \}$ и вида

$$2E \{ (G_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})) G_p(X_{\alpha_{i+1,p}}, X_{\alpha_{i+2,p}}) \} \quad (i = 1, 2, \dots, q_p - 1).$$

К таким слагаемым применим неравенство

$$|E(UV)| \leq \frac{1}{2} E(U^2) + \frac{1}{2} E(V^2),$$

и тогда сумма модулей всех оставшихся слагаемых не будет превосходить

$$3 \sum_{i=1}^{q_{p-1}} E \{ (G_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}))^2 \}. \quad (84)$$

Для оценки (84) воспользуемся соотношением (81), которое дает

$$E \{ (G_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}}))^2 \} \leq c_{22} \cdot 4^{2 \ln n / \ln \ln n} n^{2p_1} E |G_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1,p}})|,$$

и очевидным неравенством

$$|G(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p})| \leq B_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p}) + b_{ip},$$

откуда

$$E|G_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p})| \leq E(B_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p})) + b_{ip} = 2b_{ip}.$$

Поэтому величина (84) не превосходит

$$2c_{22} \cdot 4^{2 \ln n / \ln \ln n} n^{2\rho_1} \sum_{i=1}^{q_p-1} b_{ip},$$

а сумма (84) и (83) не превосходит $1 + 2c_{22} \cdot 4^{2 \ln n / \ln \ln n} n^{2\rho_1} \sum_{i=1}^{q_p-1} b_{ip}$ при $n > c_{21}$. Следовательно, (80) не превосходит

$$3 \left(1 + 2c_{22} \cdot 4^{2 \ln n / \ln \ln n} n^{2\rho_1} \sum_{i=1}^{q_p-1} b_{ip} + \left(\sum_{i=1}^{q_p-1} b_{ip} \right)^2 \right). \quad (85)$$

Но из формулы (44) и оценки (72) следует, что

$$\begin{aligned} D(Z_{n_1}) &\geq \sum_{\Delta_p} \mathcal{D}_{\Delta_p} D_{\Delta_p}(S_{\Delta_p}) = E \left(\sum_{i=1}^{q_p-1} B_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p}) \right) = \sum_{i=1}^{q_p-1} b_{ip} (p \leq s-1), \\ D(Z_{n_1}) &> c_{19} n^{1-\rho_2}. \end{aligned}$$

Деля (85) на $[D(Z_{n_1})]^2$, получаем при $p \leq s-1$:

$$\frac{\sum_{\Delta_p} \mathcal{D}_{\Delta_p} [D_{\Delta_p}(S_{\Delta_p})]^2}{[D(Z_{n_1})]^2} < 6 + 6c_{23} \cdot 4^{2 \ln n / \ln \ln n} n^{2\rho_1+\rho_2-1}. \quad (86)$$

Далее,

$$2\rho_1 + \rho_2 - 1 < 3\rho_1 - 1 = \frac{3}{2} \left(\rho - \frac{1}{3} \right) = -\frac{3}{2} \eta_0 < 0,$$

так что левая часть (86) $\rightarrow 6$ при $n \rightarrow \infty$ и, стало быть, всегда $< c_0$, что и требовалось доказать.

§ 15. Лемма XIV. При $p \leq s-1$ имеем:

$$\frac{\sum_{\Delta_p} \mathcal{D}_{\Delta_p} \mu_{\Delta_p}^{(4)}(S_{\Delta_p})}{[D(Z_{n_1})]^2} < c_1. \quad (87)$$

Доказательство. Так как $\mu_{\Delta_p}^{(4)}(S_{\Delta_p})$ есть центральный момент суммы независимых величин

$$S_{\Delta_p} = \sum_{i=1}^{q_p-1} Y_{\Delta_p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p}),$$

то удобно ввести величины

$$W_{\Delta p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p}) = Y_{\Delta p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p}) - A_p(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p}),$$

математические ожидания которых при данном Δ_p равны 0. Они независимы и по лемме XII,

$$|W_{\Delta p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p})| < 4K_0 \cdot \ln n \cdot 4^p n^{\rho_1} < c_{24} \cdot 4^{2 \ln n / \ln \ln n} n^{\rho_1}. \quad (88)$$

В силу независимости наших величин

$$\begin{aligned} \mu_{\Delta p}^{(4)}(S_{\Delta p}) &\leq \sum_{i=1}^{q_p-1} \mu_{\Delta p}^{(4)}(W_{\Delta p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p})) + \\ &+ 3 \left(\sum_{i=1}^{q_p-1} E_{\Delta p}(W_{\Delta p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p}))^2 \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{q_p-1} E_{\Delta p}[(W_{\Delta p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p}))^4] + 3[D_{\Delta p}(S_{\Delta p})]^2. \end{aligned} \quad (89)$$

Далее, из (88) следует

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{q_p-1} E_{\Delta p}[(W_{\Delta p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p}))^4] < \\ &< c_{24}^2 \cdot 4^4 \ln n / \ln \ln n n^{2\rho_1} \sum_{i=1}^{q_p-1} [(W_{\Delta p}(X_{\alpha_{ip}}, X_{\alpha_{i+1}, p}))^2] = \\ &= c_{25} \cdot 4^4 \ln n / \ln \ln n n^{2\rho_1} D_{\Delta p}(S_{\Delta p}). \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (89), находим

$$\mu_{\Delta p}^{(4)}(S_{\Delta p}) < 3[D_{\Delta p}(S_{\Delta p})]^2 + c_{25} \cdot 4^4 \ln n / \ln \ln n n^{2\rho_1} D_{\Delta p}(S_{\Delta p});$$

отсюда числитель (87)

$$\begin{aligned} \sum_{\Delta p} \mathcal{O}_{\Delta p} \mu_{\Delta p}^{(4)}(S_{\Delta p}) &< 3 \sum_{\Delta p} \mathcal{O}_{\Delta p} [D_{\Delta p}(S_{\Delta p})]^2 + \\ &+ c_{25} \cdot 4^4 \ln n / \ln \ln n n^{2\rho_1} \sum_{\Delta p} \mathcal{O}_{\Delta p} D_{\Delta p}(S_{\Delta p}). \end{aligned} \quad (90)$$

При $p \leq s-1$ на основании (44), (72) имеем

$$D(Z_{n_i}) \geq \sum_{\Delta p} \mathcal{O}_{\Delta p} D_{\Delta p}(S_{\Delta p}) \quad \text{и} \quad D(Z_{n_i}) > c_{19} n^{1-\rho_2},$$

применяя оценку (79) леммы XIII, найдем из (90):

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{\Delta p} \mathcal{O}_{\Delta p} \mu_{\Delta p}^{(4)}(S_{\Delta p})}{[D(Z_{n_i})]^2} &< 3C_0 + c_{25} \cdot 4^4 \ln n / \ln \ln n n^{2\rho_1+\rho_2-1} = \\ &= 3C_0 + c_{25} \cdot 4^4 \ln n / \ln \ln n n^{-3\gamma_0/2} < C_1, \end{aligned}$$

чем лемма и доказана.

Лемма XV.

$$\mu_s^{(4)} < c_{25} \cdot 4^4 \ln n / \ln \ln n \cdot n^{4\rho}. \quad (91)$$

Доказательство. Сечение Λ_s имеет лишь два индекса: $\alpha_{1s} = 1$ и $\alpha_{2s} = n$. Поэтому

$$\mu_s^{(4)} = E [(A_s(\Lambda_s))^4] = \{[A_s(X_{\alpha_{1s}}, X_{\alpha_{2s}})]^4\}.$$

Применяя лемму XI, находим

$$\mu_s^{(4)} < 4^{4s} (2K_0)^4 n^{4\rho_1} < c_{26} \cdot 4^4 \ln n / \ln \ln n \cdot n^{4\rho_1},$$

что и требовалось доказать.

§ 16. Теперь будет легко изучить отношение

$$\frac{\mu^{(4)}(Z_{n_1})}{[D(Z_{n_1})]^2} = \frac{E(Z_{n_1}^4)}{[D(Z_{n_1})]^2}.$$

Очевидно, в обозначениях формулы (48),

$$\mu^{(4)}(Z_{n_1}) = \mu_0^{(4)}.$$

Лемма XVI. Для некоторого $C_2 > 1$ и $p = 0, 1, 2, \dots, s-1$ имеем:

$$\frac{\mu_p^{(4)}}{[D(Z_{n_1})]^2} + 1 < C_2 \left(\frac{\mu_{p+1}^{(4)}}{[D(Z_{n_1})]^2} + 1 \right). \quad (92)$$

Доказательство. Деля почленно (43) на $[D(Z_{n_1})]^2$ и применяя леммы XIII и XIV, находим

$$\frac{\mu_p^{(4)}}{[D(Z_{n_1})]^2} < 3C_0 + C_1 + 4C_1^{3/4} \left(\frac{\mu_{p+1}^{(4)}}{[D(Z_{n_1})]^2} \right)^{1/4} + 4 \frac{\mu_{p+1}^{(4)}}{[D(Z_{n_1})]^2},$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{\mu_p^{(4)}}{[D(Z_{n_1})]^2} + 1 &< 3C_0 + C_1 + 4C_1^{3/4} \left(\frac{\mu_{p+1}^{(4)}}{[D(Z_{n_1})]^2} \right)^{1/4} + \\ &+ 4 \left(\frac{\mu_{p+1}^{(4)}}{[D(Z_{n_1})]^2} + 1 \right) \leq 3C_0 + C_1 + 4(C_1^{3/4} + 1) \left(\frac{\mu_{p+1}^{(4)}}{[D(Z_{n_1})]^2} + 1 \right) < \\ &< C_2 \left(\frac{\mu_{p+1}^{(4)}}{[D(Z_{n_1})]^2} + 1 \right), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

§ 17. Теперь легко получить нужную оценку.

Лемма XVII. Для суммы Z_{n_1} элементов нашей цепи Маркова имеем:

$$\frac{E(Z_{n_1}^4)}{[D(Z_{n_1})]^2} < C_3 e^{\ln n / \sqrt{\ln \ln n}}. \quad (93)$$

Доказательство. Из лемм XV, XVI и неравенств (91) и (92) непосредственно заключаем, что

$$\frac{E(Z_{n_1}^4)}{[D(Z_{n_1})]^2} = \frac{\mu_0^{(4)}}{[D(Z_{n_1})]^2} < \frac{\mu_0^{(4)}}{[D(Z_{n_1})]^2} + 1 < C_2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu_0^{(4)}}{[D(Z_{n_1})]^2} + 1 \right) < \\ < C_2^{\ln n / \ln \ln n} + C_2^{\ln n / \ln \ln n} c_{26} \cdot 4^4 \ln n / \ln \ln n \cdot n^{4\rho_1} (c_{19} n^{1-\rho_2})^{-2}. \quad (94)$$

Так как

$$4\rho_1 - 2(1 - \rho_2) = 2(2\rho_1 + \rho_2 - 1) < -3\eta_0,$$

то второй член (94) стремится к 0 и неравенство (93) доказано. Отсюда с помощью леммы X и выводим основную лемму.

Основная лемма XVIII. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ — любая подцепь нашей цепи Маркова $X_1, X_2, \dots, X_n$ с суммой

$$S_{n_1} = X_1 + X_2 + \dots + X_{n_1}$$

и дисперсией

$$n^{1-\rho_2} > D(S_{n_1}) \geq \frac{1}{2} n^{1-\rho_2}$$

(т. е. типа (60)), $\rho_2 = \rho + \eta_0/4$, $\eta_0 = 1/3 - \rho$. Тогда имеем:

$$\frac{E(S_{n_1}^4)}{[D(S_{n_1})]^2} < C_4 e^{\ln n / \sqrt{\ln \ln n}}. \quad (95)$$

Доказательство. Из леммы X выводим, что при $n > c_{21}$

$$D(Z_{n_1}) n^{1-\rho_2} + c_9 n^{1-(\rho_1+\rho_2)/2} < 2n^{1-\rho_2}.$$

Отсюда

$$D(S_{n_1}) \geq \frac{1}{2} n^{1-\rho_2} > \frac{1}{4} D(Z_{n_1}). \quad (96)$$

Используя (66), (72) и (93), находим:

$$\frac{E(S_{n_1}^4)}{[D(S_{n_1})]^2} < \frac{8E(Z_{n_1}^4) + c_{10} n^{2(1-\rho_1)}}{[D(Z_{n_1})/2]^2} < \\ < 128 \frac{E(Z_{n_1}^4)}{[D(Z_{n_1})]^2} + 16c_{10} n^{2(1-\rho_1)-2(1-\rho_2)} < \\ < 128C_3 e^{\ln n / \sqrt{\ln \ln n}} + 16c_{10} n^{2(\rho_2-\rho_1)}.$$

Так как $\rho_2 - \rho_1 = -\eta_0/2 < 0$, то неравенство (95) доказано.

§ 18. Теперь мы будем в состоянии доказать приложимость предельной теоремы Ляпунова к цепи $X_1, X_2, \dots, X_n$, используя метод С. Н. Бернштейна [2, 3], дополненный Н. А. Сапоговым [6, 10]. Положим

$$\eta_1 = \frac{\eta_0}{32} = \frac{1}{32} \left(\frac{1}{3} - \rho \right).$$

Из цепи $X_1, X_2, \dots, X_n$ возьмем подцепь $X_1, X_2, \dots, X_h$ с суммой элементов

$$U_1 = X_1 + X_2 + \dots + X_h,$$

где h — первый из индексов, для которого

$$\frac{1}{2} n^{1-\rho_2} \leq D(U_1) < n^{1-\rho_2}.$$

Согласно лемме IX, таким индексом h будет просто первый индекс, для которого

$$D(U_1) \geq \frac{1}{2} n^{1-\rho_2}.$$

Затем берем подряд $[n^{\rho+\eta_1}]$ индексов и соответствующую им сумму обозначим через

$$V_1 = X_{h+1} + \dots + X_{h+[h^{\rho+\eta_2}]},$$

очевидно, что

$$D(V_1) < c_{27} n^{2\rho+2\eta_2}.$$

Далее, берем следующую группу индексов, так, чтобы соответствующая сумма U_2 кончалась на том индексе, для которого впервые

$$\frac{1}{2} n^{1-\rho_2} \leq D(U_2) < n^{1-\rho_2},$$

и продолжаем процесс до тех пор, пока он не оборвется. Если последняя сумма должна быть типа U_i , но не получается неравенства

$$\frac{1}{2} n^{1-\rho_2} \leq D(U_i) < n^{1-\rho_2},$$

то, согласно лемме IX и предыдущим построениям, ее дисперсия $< n^{1-\rho_2}/2$. Общая же дисперсия

$$B_n = D(S_n) = B(X_1 + \dots + X_n)$$

удовлетворяет оценке С. Н. Бернштейна (57)

$$B_n = D(S_n) > c_8 n^{1-\rho}.$$

Так как $\rho_2 = \rho + \eta_0/4 > \rho$, то дисперсия нашей суммы бесконечно мала по отношению к B_n , так что если $\frac{s_n - U}{\sqrt{B_n}}$ приближается к гауссову распределению, это же касается и $\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}$. Поэтому последнюю сумму можно отбросить.

Если же должна остаться сумма типа U_i , но остается $< [n^{\rho+\eta_2}]$ членов, то мы обозначим последнюю сумму через V_l . Так мы получим сумму вида

$$S_n = U_1 + V_1 + U_2 + \dots + V_{l-1} + U_l$$

или вида

$$S_n = U_1 + V_1 + \dots + U_l + V_l.$$

Лемма XIX. Всегда

$$\frac{\mathbf{D}(U_i)}{\mathbf{D}(U_j)} \leq 2 \quad (i, j = 1, 2, \dots, l), \quad (97)$$

причем всякая сумма U имеет $> [n^{p+n_1}]$ членов.

Доказательство. Соотношение (97) очевидно из построения сумм U_i . Далее, если бы в какой-либо U_i было $\leq [n^{p+n_1}]$ членов, то мы имели бы оценку

$\mathbf{D}(U_i) < c_{27} n^{2p_1+2\eta_1} < \frac{1}{2} n^{1-p_2} = \frac{1}{2} n^{1-p-\eta_0/4}$ при $n > c_{21}$. В самом деле,

$$2\rho + 2\eta_1 = 2\rho + \frac{\eta_0}{16} < 1 - \rho - \frac{\eta_0}{4},$$

ибо

$$1 - 3\rho = 3\left(\frac{1}{3} - \rho\right) = 3\eta_0 > \frac{5}{16}\eta_0,$$

а такая оценка противоречит определению U_i .

Лемма XX.

$$B_n = \mathbf{D}(S_n) \sim \mathbf{D}(U_1 + U_2 + \dots + U_l) \sim \mathbf{D}(U_1) + \dots + \mathbf{D}(U_l) \quad (98)$$

($\sim$ — знак асимптотического равенства).

Доказательство. Согласно леммам VIII и XIX, находим

$$\mathbf{D}(V_1 + V_2 + \dots + V_l) \sim \mathbf{D}(V_1) + \mathbf{D}(V_2) + \dots + \mathbf{D}(V_l) < l c_{27} n^{2p+2\eta_1}, \quad (99)$$

ибо эти суммы, по лемме XIX, разделены не менее чем $[n^{p+n_1}]$ членами. Точно так же

$$\mathbf{D}(U_1 + U_2 + \dots + U_l) \sim \mathbf{D}(U_1) + \mathbf{D}(U_2) + \dots + \mathbf{D}(U_l) \geq \frac{1}{2} l n^{1-p_2}. \quad (100)$$

Сравнивая (99) и (100), мы видим, что неравенством (99) можно пренебречь, ибо их отношение

$$< \frac{c_{27} n^{2p+2\eta_1}}{n^{1-p_2/4}} = 2c_{27} n^{3\rho+5\eta_0/16-1} = 2c_{27} n^{-43\eta_0/16} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Отсюда и следует (98).

Лемма XXI.

$$l > c_6 n^{\eta_0/4}. \quad (101)$$

Доказательство. Из (98) и (57) выводим:

$$B_n = \mathbf{D}(S_n) \sim \mathbf{D}(U_1) + \dots + \mathbf{D}(U_l) > c_6 n^{1-p}.$$

Далее,

$$D(U_1) + \dots + D(U_l) < l n^{1-p_2}.$$

Стало быть, при $n > c_{21}$

$$\frac{l n^{1-p_2}}{c_8 n^{1-p}} \geq 1, \quad l \geq c_8 n^{p_2-p} = c_8 n^{\eta_0/4}.$$

§ 19. Из предыдущего явствует, что для доказательства теоремы § 1 достаточно доказать предельный закон Гаусса для суммы

$$\frac{U_1 + U_2 + \dots + U_l}{\sqrt{B'_n}},$$

где $B'_n \sim B_n$ — дисперсия суммы $U_1 + \dots + U_l$.

Согласно построению, величины U_i разделены группами V_i по $[n^{p+\eta_i}]$ штук. Поэтому, согласно лемме VIII, если обозначить через

$$E'_{Y_{CX}}(U_n), \quad E'_{Y_{CX}}(U_n^2), \quad E'_{Y_{CX}}(|U_n|^3)$$

условные математические ожидания $U_n, U_n^2, |U_n^3|$ (если остальные величины U_i как-либо фиксированы) и учесть, что $E(U_n) = 0$, получим:

$$\begin{aligned} |E'_{Y_{CX}}(U_n)| &< c_{28} e^{-n\eta_1/4}, \quad |E'_{Y_{CX}}(U_n^2) - E(U_n^2)| < c_{28} e^{-n\eta_1/4}, \\ |E'_{Y_{CX}}(|U_n|^3) - E(|U_n|^3)| &< c_{28} e^{-n\eta_1/4}. \end{aligned} \quad (102)$$

Лемма XXII. Пусть

$$\begin{aligned} d_i &= \sup |E'_{Y_{CX}}(U_i)|, \quad \beta_i = \sup |E'_{Y_{CX}}(U_i^2) - E(U_i^2)|, \\ c_i &= \sup E'_{Y_{CX}}(|U_i|^3), \quad C_l = c_1 + c_2 + \dots + c_l, \end{aligned}$$

тогда

$$\frac{\sum_{i=1}^l d_i}{\sqrt{B'_n}} \rightarrow 0, \quad \frac{\sum_{i=1}^l \beta_i}{B'_n} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ и, следовательно, $l \rightarrow \infty$,

$$\frac{C_l}{(B'_n)^{3/2}} \rightarrow 0 \quad \text{при } n, l \rightarrow \infty, \quad (103)$$

где, как и раньше,

$$B'_n = D(U_1 + \dots + U_l).$$

Доказательство. Первые два утверждения следуют непосредственно из (102) и из того, что $B'_n \sim B$ при $n \rightarrow \infty$. Остается доказать (103). Из (97) и (98) имеем, согласно (102),

$$\begin{aligned} \frac{C_l}{(B'_n)^{3/2}} &\sim \frac{C_l}{[D(U_1) + \dots + D(U_l)]^{3/2}} < \frac{2^{-3/2} C_l}{[l D(U_1)]^{3/2}}, \quad C_l = \sum_{i=1}^l c_i, \\ c_n &= \sup E'_{Y_{CX}}(|U_n|^3) \leq E(|U_k|^3) + c_{28} e^{-n\eta_1/4}. \end{aligned} \quad (104)$$

Далее,

$$\frac{E(|U_n|^3)}{[D(U_n)]^{3/2}} = \frac{E(|U_n|^3) (D(U_n))^{1/2}}{[D(U_n)]^2} \leq \frac{E(U_n^4)}{[D(U_n)]^2}, \quad (105)$$

ибо всегда (см. [2])

$$E(|U|^3) [D(U)]^{1/2} \leq E(U^4).$$

Но согласно основной лемме XVIII и определению U_n ,

$$\frac{E(U_n^4)}{[D(U_n)]^2} < C_4 e^{\ln n / \sqrt{\ln \ln n}}.$$

Подставляя это неравенство в (105), находим

$$\frac{E(|U_n|^3)}{[D(U_n)]^{3/2}} < C_4 e^{\ln n / \sqrt{\ln \ln n}}.$$

Из (97) выводим

$$\frac{D(U_n)}{D(U_1)} \leq 2,$$

так что

$$\frac{E(|U_n|^3)}{[D(U_1)]^{3/2}} < 2C_4 e^{\ln n / \sqrt{\ln \ln n}},$$

откуда

$$\frac{C_l}{[D(U_1)]^{3/2}} < l \cdot 3C_4 e^{\ln n / \sqrt{\ln \ln n}}.$$

Следовательно, при $n > c_{21}$

$$\frac{C_l}{B_n^{3/2}} < 4C_4 \frac{l e^{\ln n / \sqrt{\ln \ln n}}}{l^{3/2}} = 4C \frac{e^{\ln n / \sqrt{\ln \ln n}}}{\sqrt{l}}.$$

Но, по лемме XXI, имеем

$$\sqrt{l} > c_6^{1/2} n^{\eta_0/8},$$

так что

$$\frac{e^{\ln n / \sqrt{\ln \ln n}}}{\sqrt{l}} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

и (103) доказано.

§ 20. Теперь остается применить основную лемму С. Н. Бернштейна (см. [2], § 9) (буква n заменена на m): пусть

$$S_m = u_1 + \dots + u_m, \quad E(S_m^2) = B_m, \quad E(u_1^2) + \dots + E(u_m^2) = B'_m$$

(предполагается, что $E(u_1) = 0$).

Если, каково бы ни было множество уже известных величин $u_1, u_2, \dots, u_{i-1}$, отклонения, испытываемые математическими ожиданиями u_i и u_i^2 , не превышают соответственно α_i и β_i и в то же

время математическое ожидание $|u_i^3|$ остается меньшим c_i , то вероятность неравенства

$$z_0 \sqrt{2B_m} < S_m < z_1 \sqrt{2B_m}$$

имеет пределом

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_0}^{z_1} e^{-z^2} dz,$$

если

$$\frac{\sum_{i=1}^m \alpha_i}{\sqrt{B_m}}, \quad \frac{\sum_{i=1}^m \beta_i}{B_m}, \quad \frac{\sum_{i=1}^m c_i}{B_m^{3/2}}$$

стремятся к 0 вместе с $1/n$.

В силу леммы XXII все условия этой основной леммы удовлетворены для величин $U_1, U_2, \dots, U_i$. Далее, $B_n \sim B'_n$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому закон Гаусса в пределе приложим к величинам $\frac{U_1 + U_2 + \dots + U_l}{\sqrt{B'_n}}$, $\frac{U_1 + U_2 + \dots + U_l}{\sqrt{B_n}}$ и тем самым к сумме $\frac{S_n}{\sqrt{B'_n}}$.

Этим доказано первое утверждение теоремы § 1. Второе утверждение — о случаях неприменимости гауссова закона — следует из противоречащего ему примера, построенного С. Н. Бернштейном для двузначной цепи ($k_{hn} = 2$), тривиально обобщаемого на цепи любой значности.

Л и т е р а т у р а ²⁾

1. Марков А. А. Исследования общего случая испытаний, связанных в цепь. — Записки имп. Акад. наук, 1910. Сер. 8, т. 25, № 3. 28 с.
2. Bernstein S. Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes. — Math. Ann., 1926, vol. 97, p. 1—59.
3. Bernstein S. Sur les sommes de quantités dépendantes. — Изв. АН СССР. Сер. 6, 1926, т. 20, № 15—17, с. 1459—1478.
4. Бернштейн С. Н. О суммах зависимых величин. — ДАН СССР. Сер. А, 1928, № 4, с. 55—60.
5. Бернштейн С. Н. Определение нижней границы дисперсии сумм величин, образующих цепь. — Мат. сб., 1936, т. 1, вып. 1, с. 29—38.
6. Сапогов Н. А. О сингулярных цепях Маркова. — ДАН СССР, 1947, т. 58, № 2, с. 193—196.
7. Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства. М., 1948. 456 с.
8. Крамер Г. Случайные величины и распределения вероятностей. М., 1947. 144 с.
9. Бернштейн С. Н. Теория вероятностей. М.—Л., 1946. 556 с.
10. Сапогов Н. А. Предельная теорема Лапласа—Ляпунова для сингулярной цепи Маркова. — ДАН СССР, 1947, т. 58, № 9, с. 1905—1908.

²⁾ В тексте Ю. В. Линника список литературы обрывается после работы [4]. Названия работ [5]—[10] восстановлены редакцией для настоящего издания.

МНОГОМЕРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЙ И ЛОКАЛЬНЫЙ ЗАКОНЫ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Совместно с Н. А. Сапоговым

Изв. АН СССР. Сер. мат., 1949, т. 13, № 6, с. 533—566

В работе рассматриваются цепи Маркова, число состояний в каждом шаге которых конечно и вероятности перехода из одного состояния в n -м шаге в другое состояние в $(n-1)$ -м шаге, вообще говоря, зависящие от n (неоднородность цепи), могут для некоторых состояний обращаться в нуль.

В разделе I работы устанавливается многомерная интегральная предельная теорема для сумм случайных векторов, связанных с состояниями рассматриваемой цепи. В разделе II на основании этих результатов выводится многомерная локальная теорема для числа пребывания системы в возможных состояниях для довольно общего случая цепей типа (А) Деблина. В основном результаты раздела I принадлежат Н. А. Сапогову, а результаты раздела II — Ю. В. Линнику.

И. Интегральная многомерная предельная теорема для сумм случайных векторов, связанных в цепь Маркова

1. Пусть рассматривается последовательность случайных, вообще говоря, зависящих векторов

$$X_i(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(h)}), \quad i = 1, 2, \dots,$$

значения которых принадлежат h -мерному евклидову пространству R_h .

Обозначим через $E'(z)$ условное математическое ожидание в предположении, что векторы X_k при $k < i$ получили некоторые определенные значения, а через $\sup_{k < i} E'(z)$ и $\inf_{k < i} E'(z)$ — точную верхнюю и точную нижнюю границы $E'(z)$ относительно различных возможных значений, принимаемых векторами X_k , $k < i$.

Разность $\sup_{k < i} E'(z) - \inf_{k < i} E'(z)$ будем называть изменением условного математического ожидания $E'(z)$ и обозначать через $\text{изм. } E'(z)$.

Теоремы о цепях будут основываться на следующей общей теореме о суммах слабо зависящих случайных величин, которая

представляет собой обобщение соответствующей теоремы С. Н. Бернштейна¹⁾ (см. [1], § 22), указанной им для случая $h=2$.

Теорема I. Пусть $S_n^{(l)} = \sum_{i=1}^n x_i^{(l)}$, $1 \leq l \leq h$ и величины $x_i^{(l)}$ удовлетворяют следующим условиям.

1) $B_n^{(l)} = E(S_n^{(l)^2}) > H_1 n^\lambda$, где постоянная $\lambda > 2/3$, $1 \leq l \leq h$;

2) $\sup_{k < i} E' |x_i^{(l)}|^3 < H_2$, $1 \leq l \leq h$;

3) для всех $1 \leq l \leq h$ выполняется одно из двух неравенств:

$$E'_{k \leq i} (x_{i+1}^{(l)} + x_{i+2}^{(l)} + \dots + x_{i+g}^{(l)})^2 < H_3 g^\lambda$$

или

$$E'_{k < i} (x_{i+1}^{(l)} + x_{i+2}^{(l)} + \dots + x_{i+g}^{(l)})^2 < H_3 g n^{\lambda-1},$$

каково бы ни было целое $g > 0$;

4) изм. $E'_{i-k > n} (x_i^{(l)}) < 1/n^3$, где $\rho < \lambda/2$ есть положительное фиксированное число и постоянная $\mu > 1 - \lambda/2$;

изм. $E'_{i-k > n^\rho; j-k > n^\rho} (x_i^{(l')} x_j^{(l'')}) < 1/n^{2-\lambda}$, $1 \leq l, l', l'' \leq h$;

5) $D_h \geq a > 0$, где определитель

$$D_h = \begin{vmatrix} 1 & e_{12} & \dots & e_{1h} \\ e_{21} & 1 & \dots & e_{2h} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{h1} & e_{h2} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

имеет элементы

$$e_{\alpha\beta} = \frac{E(S_n^{(\alpha)} \cdot S_n^{(\beta)})}{\sqrt{B_n^{(\alpha)} \cdot B_n^{(\beta)}}}$$

и a — фиксированное положительное число, не зависящее от n .

Тогда если через Δ_{ij} обозначить минор определителя $\Delta = D_h$, соответствующий элементу e_{ij} , то при указанных условиях

$$\begin{aligned} & P \left\{ X \left(\frac{S_n^{(1)}}{\sqrt{B_n^{(1)}}}, \frac{S_n^{(2)}}{\sqrt{B_n^{(2)}}}, \dots, \frac{S_n^{(h)}}{\sqrt{B_n^{(h)}}} \right) \in \Omega \right\} - \\ & - \frac{1}{(2\pi)^{h/2} \Delta^{1/2}} \int_{\Omega} \dots \int e^{-\sum_{i,j} \Delta_{ij} u_i u_j / 2\Delta} du_1 du_2 \dots du_n \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (1)$$

¹⁾ Теорема С. Н. Бернштейна допускает два несколько различных варианта условий; мы имеем в виду вариант, аналогичный теореме В из § 10 работы [1].

где Ω — фиксированная параллелепипедальная область пространства R_h и $P\{\dots\}$ — вероятность события, указанного в скобках, причем предельное соотношение (1) выполняется равномерно относительно параллелепипедальных областей Ω .

(Для простоты предполагается, что априорное математическое ожидание $E(x_i^{(l)})$ равно нулю при всех i и l . Здесь и в дальнейшем H_i — положительные постоянные).

Доказательство проводится без принципиальных изменений, так же, как сделано С. Н. Бернштейном для частного случая $h=2$.

З а м е ч а н и е. Условию 5) теоремы I, обеспечивающему невырожденность предельного закона распределения, в двумерном случае ($h=2$) соответствует требование неравенства для коэффициента корреляции:

$$|e_{1,2}| = \left| \frac{E(S_n^{(1)} \cdot S_n^{(2)})}{\sqrt{B_n^{(1)} \cdot B_n^{(2)}}} \right| \leq L < 1.$$

Заметим, что неравенство $D_h \geq a > 0$ влечет за собой такие же неравенства $D_i \geq a > 0$ для всех значений $i \leq h-1$. Действительно, величины $e_{\alpha\beta}$ можно рассматривать как косинусы углов $\varphi_{\alpha\beta}$ между некоторыми единичными векторами $\bar{a}_\alpha$ и $\bar{a}_\beta$ пространства R_h . Тогда D_h будет представлять собою квадрат объема h -мерного параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}_i$, $1 \leq i \leq h$. При данных фиксированных векторах $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{h-1}$ этот объем будет максимальным, если вектор $\bar{a}_h$ будет ортогональным ко всем предшествующим векторам $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{h-1}$. В этом случае

$$(\bar{a}_i \cdot \bar{a}_h) = 0, \quad 1 \leq i \leq h-1,$$

и потому

$$D_h \leq D_{h-1} \leq D_{h-2} \leq \dots \leq D_1.$$

Возможность введения векторов $\bar{a}_i$ основана на том, что случайные величины $S_n^{(1)}, \dots, S_n^{(h)}$ (мы считаем их линейно независимыми) можно рассматривать как базис линейного (аффинного)

пространства $\mathcal{R}_h$, образованного элементами $\sum_{i=1}^h u_i S_n^{(i)}$, где u_i —

вещественные числа. Задавая скалярные произведения $(S_n^{(i)} \cdot S_n^{(j)})$ посредством равенства

$$(S_n^{(i)} \cdot S_n^{(j)}) = E(S_n^{(i)} \cdot S_n^{(j)}),$$

мы превращаем $\mathcal{R}_h$ в евклидово пространство, изоморфное обычному евклидову пространству R_h , в котором величинам $S_n^{(i)} / \sqrt{B_n^{(i)}}$ будут соответствовать некоторые единичные векторы $\bar{a}_i$.

2. Пусть некоторая система S может в зависимости от случая находиться в одном из k_m состояний (k_m конечно) $\mathcal{E}_1^{(m)}, \mathcal{E}_2^{(m)}, \dots, \mathcal{E}_{k_m}^{(m)}$, которые, равно как и число их, определяются целочисленным параметром m , принимающим последовательно значения $m = 0, 1, 2, \dots$

Допустим, что вероятность того, что система S в m -м шаге находится в состоянии $\mathcal{E}_j^{(m)}$, полностью определяется состоянием $\mathcal{E}_i^{(m-1)}$, в котором она находилась в $(m-1)$ -м шаге, и не зависит от предшествующих состояний. Обозначим эту вероятность перехода через $P_{ij}^{(m)}$. Пусть, кроме того, заданы начальные вероятности $p_i^{(0)}$ нахождения системы в состояниях $\mathcal{E}_i^{(0)}$. Если каждому состоянию $\mathcal{E}_i^{(m)}$ системы S соответствует значение $\Xi_i^{(m)}(\xi_{i,1}^{(m)}, \xi_{i,2}^{(m)}, \dots, \xi_{i,h}^{(m)})$ случайного вектора

$$X^{(m)}(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_h^{(m)}),$$

принадлежащего R_h , то этим задается цепь векторов.

Важное значение имеет неотрицательная величина

$$\Delta_m(U) = \frac{1}{k_m} \sum_{i=1}^{k_m} \left[(U, \Xi_i^{(m)}) - \frac{1}{k_m} \sum_{i=1}^{k_m} (U, \Xi_i^{(m)}) \right]^2,$$

где

$$(U, \Xi_i^{(m)}) = \sum_{l=1}^h u_l \xi_{i,l}^{(m)}$$

является скалярным произведением некоторого переменного вектора $U(u_1, u_2, \dots, u_h)$ на вектор $\Xi_i^{(m)}(\xi_{i,1}^{(m)}, \xi_{i,2}^{(m)}, \dots, \xi_{i,h}^{(m)})$.

Обозначим через $\delta(X^{(m)})$ минимум этой величины $\Delta_m(U)$ относительно различных возможных значений переменного единичного вектора U , т. е. такого вектора U , для которого $|U|^2 = \sum_{i=1}^h u_i^2 = 1$:

$$\min_{|U|=1} \Delta_m(U) = \delta(X^{(m)}) \geq 0.$$

Равенство $\delta(X^{(m)}) = 0$ имеет простой геометрический смысл. В этом случае, очевидно, все скалярные произведения $(U_0, \Xi_i^{(m)})$ равны друг другу при всех $i = 1, 2, \dots, k_m$ (U_0 — вектор U , обращающий в минимум $\Delta_m(U)$, $|U_0| = 1$). Иными словами, произведение

$$(U_0, X^{(m)} - \Xi_i^{(m)})$$

обращается в нуль, каково бы ни было значение $\Xi_i^{(m)}$ вектора $X^{(m)}$. Это означает, что все значения $\Xi_i^{(m)}$ расположены в гиперплоскости

$$(U_0, X^{(m)} - \Xi_i^{(m)}) = 0,$$

т. е. принадлежат подпространству R_h , имеющему размерность

$$h' \leq h - 1.$$

Обратно, из последнего обстоятельства следует, что $\delta(X^{(m)}) = 0$.

Теорема II. Если случайные векторы $X^{(m)}$ из R_h связаны в цепь, причем выполняются условия:

1) $P_{ij}^{(m)} \geq p > 0$ для всех i, j и m , где p — постоянная,
 2) $|\xi_{ij}^{(m)}| \leq H_4$ для всех i, j и m ,²⁾
 3) $\delta(X^{(m)}) \geq \delta > 0$ для всех m , где δ — постоянная, — то к векторам $X^{(m)}$ приложима h -мерная интегральная предельная теорема (предполагается, что $E(x_i^{(m)}) = 0$), т. е. справедливо предельное соотношение (1). $\left(S_n^{(l)} = \sum_{m=1}^n x_i^{(m)}\right)$.

Для доказательства установим, что при указанных условиях последовательность векторов $X^{(m)}$ удовлетворяет всем условиям теоремы I со значением $\lambda = 1$. Из условия $P_{ij}^{(m)} \geq p > 0$ вытекает, что рассматриваемая цепь эргодична, т. е. что

$$\sum_{j=1}^{k_m} |P_{i,l}^{(l,m)} - P_{i,j}^{(l,m)}| < H_5 (1-p)^{m-1}, \quad (2)$$

каковы бы ни были состояния $\mathcal{E}_i^{(l)}$ и $\mathcal{E}_j^{(l)}$; здесь $P_{ij}^{(l,m)}$ есть условная вероятность того, что система в m -м шаге находится в состоянии $\mathcal{E}_j^{(m)}$, если известно, что она находилась в состоянии $\mathcal{E}_i^{(l)}$ при $l < m$.

Благодаря неравенству (2) легко обнаружить, что условия 3) и 4) теоремы I оказываются выполненными. Условие 2) теоремы I является прямым следствием условия 2) теоремы II. Для проверки условий 1) и 5) теоремы I рассмотрим наряду с цепью векторов $X^{(m)}$ вспомогательные случайные скалярные величины $Z^{(m)}$, такие, что состоянию $\mathcal{E}_i^{(m)}$ соответствует значение $z_i^{(m)}$ величины $Z^{(m)}$:

$$z_i^{(m)} = \sum_{l=1}^h u_l \xi_{il}^{(m)} l, \quad (3)$$

где $U(u_1, u_2, \dots, u_h)$ — некоторый переменный вектор. Величины $Z^{(m)}$ оказываются вследствие этого соответствия связанными в цепь. Ввиду предположения $E(X^{(m)}) = 0$ имеем также $E(Z^{(m)}) = 0$.

Применим теперь к величинам $Z^{(m)}$ теорему С. Н. Бернштейна [2], дающую оценку снизу дисперсии суммы величин, связанных в цепь Маркова. Теорема С. Н. Бернштейна сформулирована им для цепи величин x_m ; состояния $\mathcal{E}_i^{(m)}$ в этом случае взаимно-однозначно соответствуют различным значениям величин x_m : $\alpha_m^{(1)}, \alpha_m^{(2)}, \dots, \alpha_m^{(k_m)}$. О самих состояниях $\mathcal{E}_i^{(m)}$ при таком подходе вообще нет речи, речь идет только о значениях $\alpha_m^{(i)}$. Между тем, заменив цепь величин x_m величинами $Z^{(m)}$, которые связаны в цепь благодаря их связи с состояниями $\mathcal{E}_i^{(m)}$ некоторой системы S , можно не делать предположения, что все частные значе-

²⁾ Условие (2) может быть заменено несколько менее ограничительным:
 $\sup_{k < m} E' |x_i^{(m)}|^3 \leq H_4$.

ния $z_i^{(m)}$ величины $Z^{(m)}$ отличны одна от другой. Оценка снизу дисперсии суммы величин, связанных в цепь, данная С. Н. Бернштейном, распространяется, таким образом, и на наш случай величин $Z^{(m)}$.³⁾

Теорема С. Н. Бернштейна применительно к нашему случаю утверждает, что

$$E(S_n^2) = B(S_n) > \frac{p}{4} \sum_{m=1}^n d_m^2, \quad (4)$$

где

$$S_n = \sum_{m=1}^n Z^{(m)}, \quad d_m^2 = \frac{1}{k_m} \sum_{i=1}^{k_m} \left(z_i^{(m)} - \frac{1}{k_m} \sum_{i=1}^{k_m} z_i^{(m)} \right)^2.$$

Имея в виду (3) и определение введенных выше величин $\Delta_m(U)$, мы находим для участвующих в неравенстве (4) величин d_m^2 оценку:

$$d_m^2 \geq |U|^2 \delta(X^{(m)}) \geq \delta \sum_{l=1}^h u_l^2.$$

Поэтому

$$E \left[\left(\sum_{m=1}^n Z^{(m)} \right)^2 \right] = \sum_{l,k} u_l u_k E(S_n^{(l)} \cdot S_n^{(k)}) > \frac{\delta p n}{4} \sum_{l=1}^h u_l^2 = H_\delta n \sum_{l=1}^h u_l^2. \quad (5)$$

Это неравенство прежде всего приводит к оценке снизу дисперсий сумм $S_n^{(l)}$ при всех l :

$$B_n^{(l)} = E(S_n^{(l)2}) > H_\gamma n, \quad (6)$$

что означает выполнимость условия 1) теоремы I ($\lambda=1$). Кроме того, неравенство (5) эквивалентно неравенству

$$\sum_{l,k} e_{l,k} u_l u_k > H_\delta n \sum_{l=1}^h \frac{u_l^2}{B_n^{(l)}},$$

из которого выводим, что

$$\sum_{l,k} e_{l,k} u_l u_k > H_\delta \sum_{l=1}^h u_l^2. \quad (7)$$

³⁾ Можно было бы, желая остаться в пределах терминологии цитируемой статьи С. Н. Бернштейна, путем надлежащего выбора компонент векторов $U(u_1, u_2, \dots, u_h)$ добиться взаимно-однозначного соответствия состояний $\mathcal{E}_i^{(m)}$ и значений $z_i^{(m)}$ без того, чтобы нижеследующие рассуждения потеряли силу. По этому поводу отсылаем читателя к работе [3] (см. § 7).

Последнее неравенство есть следствие легко устанавливаемой оценки

$$B_n^{(1)} < H_{8n},$$

вытекающей из эргодичности цепи.

Неравенство (7) может выполняться (с не зависящей от n постоянной H_9) только в том случае, когда

$$D_h = \begin{vmatrix} 1 & e_{12} & \dots & e_{1h} \\ e_{21} & 1 & \dots & e_{2h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{h1} & e_{h2} & \dots & 1 \end{vmatrix} \geq a > 0,$$

где постоянная a также не зависит от n . Теорема II доказана.

П р и м е ч а н и е. Условия теоремы II могут быть несколько ослаблены, а именно: можно считать, что $P_{i,j}^{(m)} \geq 1/n^\alpha$, где α — некоторая постоянная. В этом случае λ будет < 1 . В одномерном случае известны следующие результаты. С. Н. Бернштейн показал, что если каждая из величин цепи принимает только по два (одинаковых для каждого шага) значения, то предельная теорема имеет место для каждого $\alpha < 1/3$ (см. [4, 5]) и может быть несправедливой для $\alpha = 1/3$ (см [1]).

Уточняя эти результаты С. Н. Бернштейна, один из авторов настоящей работы доказал приложимость предельной теоремы в случае двух возможных значений для каждой из величин цепи при условии $P_{i,j}^{(m)} \geq \varphi(n)/n^{1/3}$, где функция $\varphi(n)$ должна неограниченно возрастать [6]. Другим из авторов было доказано, что можно взять любое $\alpha < 1/3$ для цепи, каждая из величин которой имеет конечное число возможных значений [7, 8]. Наконец, было также показано, что для случая так называемой двумерной цепи (определение этого понятия дается ниже) можно взять любое постоянное $\alpha < 1/5$ [3].

3. Существенным недостатком доказанной в п. 2 теоремы II является предположение о неравенстве $P_{i,j}^{(m)} \geq p > 0$, которое должно осуществляться для всех m, j, i . Этим исключаются цепи, для которых переход из одного какого-либо состояния $\mathcal{E}_{i,j}^{(m-1)}$ в другое $\mathcal{E}_{i,j}^{(m)}$ неосуществим за один шаг. При рассмотрении случая с такого рода невозможными переходами мы ограничимся цепями, матрицы вероятностей перехода которых $\|P_{i,j}^{(m)}\|$ удовлетворяют некоторым указываемым ниже условиям.

Прежде всего будем предполагать, что число возможных состояний k_m одинаково для всех m и что имеют место неравенства

$$(A) P_{i,j}^{(m)} \geq \lambda P_{i,j}^{(k)},$$

где постоянная $\lambda > 0$, каковы бы ни были m, k, i и j . В частности, если $P_{i,j}^{(m)} = 0$ для некоторого m , то при всех k для той же пары индексов i, j должно быть $P_{i,j}^{(k)} = 0$. В. Деббин считает [9], что в этом случае матрицы $\|P_{i,j}^{(m)}\|$ подчиняются условию (A).

Далее, будем предполагать, что возможные значения рассматриваемых случайных h -мерных векторов $\Xi_i^{(m)}$ не зависят от m , так что $\Xi_i^{(m)} = \Xi_i$ при всех m . Для того чтобы предельное распределение сумм рассматриваемых векторов было в действительности h -мерным, матрицы $\|P_{i,j}^{(m)}\|$ должны быть подчинены еще дополнительному условию, которое вместе с условиями (A) мы будем называть условиями (A*).

Рассмотрим вспомогательную простую одномерную однородную цепь с матрицей вероятностей перехода $\|P_{i,j}^{(1)}\|$, ставя в соответствие состоянию $\mathcal{E}_i^{(m)}$ значение x_i случайной величины $X^{(m)}$. Предположим, что для этой цепи существуют при $t \rightarrow \infty$ определенные предельные значения P_j вероятностей перехода $P_{i,j}^{(1)}(t)$ от состояния $\mathcal{E}_i^{(0)}$ в состояние $\mathcal{E}_j^{(t)}$ на t шагов, т. е. предположим, что вспомогательная цепь эргодична. Для дисперсии $B(S_n)$ суммы $S_n = \sum_{m=1}^n X^{(m)}$ случайных величин $X^{(m)}$, связанных в эту цепь, при данных фиксированных возможных значениях x_i могут быть два случая:

а) для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$\frac{B(S_n)}{n} \geq \sigma, \quad (8)$$

где постоянная $\sigma > 0$,

б) $B(S_n) = O(1)$ ($n \rightarrow \infty$).

Подробное выяснение условий, при которых имеет место случай б), произведено в книге Фреше (см. [10], с. 81—88). В частности, случай б) будет при $x_1 = x_2 = \dots = x_k$, какова бы ни была матрица $\|P_{i,j}^{(1)}\|$.

Будем говорить, что матрица $\|P_{i,j}^{(1)}\|$ удовлетворяет условию (*), если неравенство друг другу хотя бы двух каких-либо значений x_i влечет за собой случай а) (с надлежащим значением $\sigma > 0$, зависящим, конечно, от значений $x_1, x_2, \dots, x_k$). Например, для этого достаточно, чтобы все предельные вероятности P_j и все диагональные вероятности перехода $P_{i,j}^{(1)}$ были положительны ($j = 1, 2, \dots, k$) (см. [10], с. 85).

Более подробно смысл условия (*) выяснен в работе [11]. Эквивалентное условию (*) требование, чтобы «основная решетка» Z (определение этого понятия см. в работе [13]) имела размерность k , равную числу состояний, очевидным образом при условии (A) сразу выполняется или не выполняется для всех матриц $\|P_{i,j}^{(m)}\|$.

Если теперь взять одномерную простую цепь величин $X^{(m)}$, возможные значения x_i которых, соответствующие состоянию $\mathcal{E}_i^{(m)}$, не зависят от m , а вероятности перехода от $\mathcal{E}_i^{(m-1)}$ к $\mathcal{E}_j^{(m)}$ задаются

матрицами $\|P_{i,j}^{(m)}\|$, удовлетворяющими условиям (A), причем первая матрица $\|P_{i,j}^{(1)}\|$, кроме того, удовлетворяет введенному выше условию (*), то для дисперсии $B(S_n^*)$ суммы $S_n^* = \sum_{m=1}^n X^{*(m)}$, как это доказано ниже, будет соблюдаться неравенство (8), если только не все x_i равны друг другу (см. также [9]). Для краткости будем говорить, что такого рода последовательность матриц $\|P_{i,j}^{(m)}\|$ удовлетворяет условиям (A).

Теорема III. Если случайные векторы $X^{(m)}(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_h^{(m)})$ из R_h , принимающие для каждого m одни и те же значения

$$\Xi_i(\xi_{i,1}, \xi_{i,2}, \dots, \xi_{i,h}), \quad 1 \leq i \leq k,$$

связаны в цепь с матрицами вероятностей перехода $\|P_{i,j}^{(m)}\|$, причем выполняются условия:

1) последовательность матриц $\|P_{i,j}^{(m)}\|$ удовлетворяет условиям (A),

2) $\delta(X^{(m)}) = \delta > 0$, — то к векторам $X^{(m)}$ приложима предельная интегральная теорема, т. е.

$$\begin{aligned} P \left\{ X \left(\frac{S_n^{(1)} - A_n^{(1)}}{\sqrt{B_n^{(1)}}}, \dots, \frac{S_n^{(h)} - A_n^{(h)}}{\sqrt{B_n^{(h)}}} \right) \in Q \right\} \rightarrow \\ \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{h/2} \Delta^{1/2}} \int \dots \int_Q e^{-\sum_{i,j} \Delta_{ij} u_i u_j / 2\Delta} du_1 \dots du_h, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$S_n^{(i)} = \sum_{m=1}^n x_i^{(m)}, \quad A_n^{(i)} = E(S_n^{(i)}), \quad B_n^{(i)} = E[(S_n^{(i)} - A_n^{(i)})^2],$$

Δ есть определитель

$$\left| \frac{E[(S_n^{(i)} - A_n^{(i)})(S_n^{(j)} - A_n^{(j)})]}{\sqrt{B_n^{(i)} \cdot B_n^{(j)}}} \right|_{i,j=1,h}$$

и Δ_{ij} — минор этого определителя, соответствующий элементу со значками (i, j) .

Для доказательства проверим выполнимость условий общей теоремы I. Условие 2) теоремы I получается из предположения о конечности числа возможных значений Ξ_i величин $X^{(m)}$ и независимости их от m . Предположим, что для матрицы $\|P_{i,j}^{(1)}\|$ существуют определенные предельные вероятности P_j , т. е. что эта матрица эргодична; поэтому рассматриваемая цепь с матрицами $\|P_{i,j}^{(m)}\|$, удовлетворяющими условиям (A), будет также эргодичной. Это обеспечивает выполнимость условий 3) и 4) теоремы I.

Введем две вспомогательные цепи величин $Z^{(m)}$ и $Z^{*(m)}$, возможные значения которых, соответствующие состояниям $\mathcal{E}_i^{(m)}$, в обеих цепях одинаковы и не зависят от m ,

$$z_i^{(m)} = z_i^{*(m)} = \sum_{i=1}^h u_i \xi_i, \quad i,$$

из которых первая однородная, с матрицей вероятностей перехода $\|P_{i,j}^{(1)}\|$, а вторая от состояний $\mathcal{E}_i^{(m-1)}$ к состояниям $\mathcal{E}_j^{(m)}$ имеет матрицы вероятностей перехода $\|P_{i,j}^{(m)}\|$.

Каков бы ни был вектор $U(u_1, u_2, \dots, u_h)$, отличный от нуля, в силу предположения, что $\delta(X^{(m)}) = \delta > 0$, среди $z_i^{(m)}$ будут различные. Принимая во внимание, что матрица $\|P_{i,j}^{(1)}\|$ удовлетворяет условию (*), выводим отсюда, что начиная с некоторого значения n будет выполняться неравенство (8)

$$\frac{B\left(\sum_{m=1}^n Z^{(m)}\right)}{n} = \frac{B(S_n)}{n} \geq \sigma,$$

где постоянная $\sigma > 0$, каков бы ни был вектор U с условием $|U| = 1$.

Пусть $\nu > 0$ обозначает некоторое целое число, которое точнее будет определено ниже. Фиксируем произвольным образом (но одинаково для обеих цепей) переменные $Z^{(m)}$ и $Z^{*(m)}$ рассматриваемых цепей с последовательными номерами $1, \nu + 1, 2\nu + 1, \dots, k\nu + 1, \dots$. Этим вводятся так называемые сечения цепей Λ (см. [7, 8]). В этих работах указывается оценка снизу дисперсии суммы величин, связанных в цепь, основанная на использовании сечений. Например, для суммы величин $Z^{*(m)}$ имеем

$$B(S_n) \geq \sum_{\Lambda} P_{\Lambda} B_{\Lambda}(S_{\Lambda}^*),$$

где Σ_n — сумма величин $Z^{*(m)}$, за исключением тех из них, которые имеют номера $k\nu + 1$ ($k = 0, 1, \dots$); слагаемые суммы Σ_n , очевидно, также образуют цепь Маркова; S_{Λ}^* обозначает случайную величину, в которую обращается Σ_n при фиксированном сечении Λ ; через $B_{\Lambda}(S_{\Lambda}^*)$ обозначена условная дисперсия величины S_{Λ}^* , соответствующая сечению Λ ; P_{Λ} есть вероятность сечения Λ ; суммирование $\sum_{\Lambda}$ производится по всем сечениям Λ .

Условная дисперсия $B_{\Lambda}(S_{\Lambda}^*)$ есть дисперсия суммы независимых величин

$$Y_r^* = \sum_{m=r\nu+2}^{(r+1)\nu} Z^{*(m)}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \left(\left[\frac{n}{\nu}\right] - 1\right).$$

(Возможный остаток величин $Z^{*(m)}$ с номерами $\left[\frac{n}{\nu}\right]\lambda + 2, \dots, n$ не играет роли). Поэтому

$$B(\Sigma_n) \geq \sum_{\Lambda} P_{\Lambda}^{\gamma} \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{\nu}\right]-1} B_{\Lambda}(Y_r^*) \geq \lambda^{\gamma} \sum_{\Lambda} \sum_{r=0}^{\left[\frac{h}{\nu}\right]-1} B_{\Lambda}(Y_r), \quad (10)$$

где $Y_r = \sum_{m=r\nu+2}^{(r+1)\nu} Z^{(m)}$ и $B_{\Lambda}(Y_r)$ есть условная дисперсия Y_r при сечении Λ цепи величин $Z^{(m)}$. Пусть ν выбрано так, чтобы были соблюдены неравенства

$$B_{\Lambda}^{\gamma}(Y_r) \geq \frac{1}{2} B(Y_r) \geq \frac{\sigma}{2} \nu$$

($B(Y_r)$ — дисперсия Y_r а priori), каково бы ни было сечение Λ . Такой выбор ν благодаря эргодичности матрицы $\|P_{i,j}^{(1)}\|$ и неравенству (8) возможен. Неравенство (10) дает в таком случае

$$B(\Sigma_n) \geq \lambda^{\gamma} \frac{\sigma}{2} \nu \left(\left[\frac{n}{\nu} \right] - 1 \right),$$

откуда вытекает, что

$$\frac{B\left(\sum_{m=1}^n Z^{*(m)}\right)}{n} = \frac{B(S_n^*)}{n} \geq \bar{\sigma}, \text{ если } n \geq n^*, \quad (11)$$

где постоянная $\bar{\sigma} > 0$.

Левая часть неравенства (11) является квадратичной формой переменных $u_1, u_2, \dots, u_h$:

$$\frac{B(S_n^*)}{n} = \Phi_n(u_1, u_2, \dots, u_h).$$

Пусть вектор U произволен. В силу однородности формы Φ_n имеем

$$\Phi_n(u_1, u_2, \dots, u_h) = |U|^2 \Phi_n\left(\frac{u_1}{|U|}, \frac{u_2}{|U|}, \dots, \frac{u_h}{|U|}\right),$$

где $|U|^2 = \sum_{i=1}^h u_i^2$. Поэтому для достаточно больших значений n

$$\Phi_n(u_1, u_2, \dots, u_h) \geq \bar{\sigma} \sum_{i=1}^h u_i^2,$$

каков бы ни был вектор U , где не зависящая от U и n постоянная $\sigma > 0$. Таким образом, принимая во внимание равенство

$$B(S_n^*) = \sum_{i,j=1}^h E[(S_n^{(i)} - A_n^{(i)})(S_n^{(j)} - A_n^{(j)})] u_i u_j,$$

где $A_n^{(i)} = E(S_n^{(i)})$, получаем

$$\sum_{i,j=1}^h E[(S_n^{(i)} - A_n^{(i)})(S_n^{(j)} - A_n^{(j)})] u_i u_j \geq \bar{\sigma} n \sum_{i=1}^h u_i^2, \quad (5')$$

откуда, подобно тому как было выведено выше из неравенства (5), получаем условия 1) и 5) теоремы I (с заменой $S_n^{(i)}$ на $S_n^{(i)} - A_n^{(i)}$), что и доказывает теорему III.

Следует специально остановиться на том, что в условиях теоремы III (равно как и для следующей ниже теоремы IV) коэффициенты корреляции $e_{i,j}$ между двумя любыми суммами $S_n^{(i)}$ и $S_n^{(j)}$ всегда по модулю меньше $L < 1$. Действительно, удержав в неравенстве (5') только u_i и u_j , положив другие переменные равными нулю, получим

$$B_n^{(i)} u_i^2 + 2e_{i,j} \sqrt{B_n^{(i)} \cdot B_n^{(j)}} u_i u_j + B_n^{(j)} u_j^2 \geq \bar{\sigma} n (u_i^2 + u_j^2),$$

что равносильно

$$(B_n^{(i)} - \bar{\sigma} n) u_i^2 + 2e_{i,j} \sqrt{B_n^{(i)} \cdot B_n^{(j)}} u_i u_j + (B_n^{(j)} - \bar{\sigma} n) u_j^2 \geq 0.$$

Следовательно,

$$|e_{i,j}| \leq \sqrt{\left(1 - \frac{\bar{\sigma} n}{B_n^{(i)}}\right) \left(1 - \frac{\bar{\sigma} n}{B_n^{(j)}}\right)} \leq L < 1, \quad (12)$$

так как благодаря эргодичности цепи

$$B_n^{(i)}, B_n^{(j)} < H_{10} n. \quad (13)$$

Неравенство (12) следует также из неравенства $D_2 \geq D_n \geq a > 0$, вытекающего из (5'), как указано в замечании к теореме I. Заметим, что дисперсии любых двух сумм $S_n^{(i)}$ и $S_n^{(j)}$ связаны соотношением

$$B_n^{(i)} \asymp B_n^{(j)} \asymp n, \quad 1 \leq i, j \leq h, \quad (14)$$

которое вытекает из (13) и неравенства

$$B_n^{(i)} > H_{11} n, \quad 1 \leq i \leq h, \quad (15)$$

являющегося прямым следствием (5'). (Знак $\asymp$, введенный Харди, показывает, что для двух величин, A и B , связанных этим знаком, одновременно имеют место два соотношения: $A = O(B)$ и $B = O(A)$).

4. Остановимся особо на одном важном частном случае цепи с условием (A^*) , а именно случае, когда возможные значения E_i вектора $X^{(m)}$ из R_{h+1} имеют компоненты

$$\xi_{i,l} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq l, \\ 1, & \text{если } i = l, \end{cases} \quad (1 \leq l \leq h+1).$$

Тогда, очевидно, $S_n^{(1)} + S_n^{(2)} + \dots + S_n^{(h+1)} = n$, поэтому распределение вектора S_n с компонентами $S_n^{(1)}, \dots, S_n^{(h+1)}$ будет h' -мерным ($h' \leq h$).

Теорема IV. Если векторы $X^{(m)}$ из R_{h+1} , связанные в цепь, обладают свойствами:

1) матрицы вероятностей перехода $\|P_{i,j}^{(m)}\|$ удовлетворяют условиям (A*),

2) возможные значения Ξ векторов $X^{(m)}$ имеют координаты

$$\xi_{i,l} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq l, \\ 1, & \text{если } i = l \end{cases} \quad (1 \leq l \leq h+1),$$

то суммы

$$S_n^{(1)} = \sum_{m=1}^n x_1^{(m)}, \dots, S_n^{(h)} = \sum_{m=1}^n x_h^{(m)}$$

при $n \rightarrow \infty$ подчиняются h -мерной предельной теореме (т. е. выполняется соотношение (9)).

Благодаря теореме III надо только показать, что $\delta(\bar{X}^{(m)}) > 0$, где $\bar{X}^{(m)}$ — вектор пространства R_h , принимающий h значений Ξ_i с координатами

$$\xi_{i,l} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq l, \\ 1, & \text{если } i = l \end{cases} \quad (1 \leq l \leq h),$$

и $(h+1)$ -е значение $Z_{h+1} = 0$. Скалярные произведения этих возможных значений $\bar{X}^{(m)}$ и некоторого переменного вектора $U(u_1, u_2, \dots, u_h)$:

$$(U, \Xi_i) = u_i, \quad 1 \leq i \leq h, \quad \text{и} \quad (U, \Xi_{h+1}) = u_{h+1} = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (h+1) \Delta_m(U) &= \sum_{i=1}^{h+1} \left(u_i - \frac{1}{h+1} \sum_{i=1}^{h+1} u_i \right)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^h u_i^2 - \frac{1}{h+1} \left(\sum_{i=1}^h u_i \right)^2 \geq \frac{h-1}{h+1} \sum_{i=1}^h u_i^2. \end{aligned} \quad (16)$$

При $h \geq 2$ это неравенство дает значение

$$\delta(\bar{X}^{(m)}) = \frac{h-1}{(h+1)^2} > 0.$$

При $h=1$ вместо общего неравенства (16) непосредственно находим, что $\delta(\bar{X}^{(m)}) = 1/4$. Таким образом, во всех случаях $\delta(\bar{X}^{(m)}) > 0$, что и доказывает теорему.

Следующий пример показывает, что условия (A*) для матриц $\|P_{i,j}^{(m)}\|$, фигурирующие в теоремах III и IV, являются существен-

ными. Пусть, например, в условиях теоремы IV все матрицы $\|P_{i,j}^{(m)}\|$ равны одной и той же матрице пятого порядка

$$\begin{vmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Эта матрица эргодична, имеются определенные предельные значения при $t \rightarrow \infty$ вероятностей перехода за i шагов $P_j = 1/5$. Однако если состояниям $\mathcal{E}_3^{(m)}$ и $\mathcal{E}_5^{(m)}$ приписать значения случайной (одномерной) величины $Y^{(m)}$, равные u , состояниям $\mathcal{E}_2^{(m)}$ и $\mathcal{E}_4^{(m)}$ — значения $(-u)$, а состоянию $\mathcal{E}_1^{(m)}$ — значение 0, то дисперсия $B\left(\sum_{m=1}^n Y^{(m)}\right)$ будет ограниченной при $n \rightarrow \infty$. Условие (A*) не соблюдено.

Состоянию $\mathcal{E}_i^{(m)}$ соответствует значение Ξ_i случайного вектора $X^{(m)}$ из R . Пусть Ξ_i имеет компоненты $(\xi_{i,1}, \xi_{i,2}, \dots, \xi_{i,5})$, где

$$\xi_{i,l} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq l, \\ 1, & \text{если } i = l, \end{cases} \quad 1 \leq l \leq 5.$$

В таком случае в соответствии со сказанным об ограниченности дисперсии $B\left(\sum_{m=1}^n Y^{(m)}\right)$ будем иметь

$$\sum_{i,j=2}^5 E[(S_n^{(i)} - A_n^{(i)})(S_n^{(j)} - A_n^{(j)})] u_i u_j = O(1) \quad (n \rightarrow \infty),$$

если $u_3 = u_5 = -u_2 = -u_4 = u$. Следовательно, между нормированными суммами

$$\frac{(S_n^{(i)} - A_n^{(i)})}{\sqrt{n}}, \quad 2 \leq i \leq 5,$$

будет устанавливаться при $n \rightarrow \infty$ линейная связь и предельное распределение не будет четырехмерным.

Такое же значение имеет фигурирующее в условиях теорем II и III требование

$$\delta(X^{(m)}) \geq \delta > 0.$$

Без этого требования неравенства (5) и (5'), вообще говоря, не будут справедливы и распределение вероятностей может быть вырождающимся.

5. Общая схема последовательности случайных векторов, связанных в цепь, введенная в п. 2, содержит в качестве частного случая так называемую цепную корреляцию, изученную В. И. Романовским [12, 13], или, по другой терминологии, дву-

мерную цепь, рассматривавшуюся Н. А. Сапоговым в работе [3]. В этих работах речь идет о последовательности дискретно распределенных случайных двумерных векторов $X^{(m)}$, $m = 1, 2, \dots$, возможные значения каждой компоненты которых независимы от возможных значений другой компоненты: всякая комбинация любых значений обеих компонент приводит к возможному значению вектора $X^{(m)}$.

Легко обнаружить, что величины $\delta(X^{(m)})$ при такого рода частной трактовке понятия цепи обязательно положительны (если каждая из компонент вектора $X^{(m)}$ принимает по крайней мере по два различных значения). Действительно, если ограничиться для простоты случаем двух измерений, то

$$\delta(X^{(m)}) = \min_{u^2+v^2=1} \frac{1}{kl} \sum_{i,j} \left[\left(a_i - \frac{\Sigma a_i}{k} \right) u - \left(b_j - \frac{\Sigma b_j}{l} \right) v \right]^2 =$$

$$= \min_{u^2+v^2=1} \left\{ \frac{1}{k} \sum_i \left(a_i - \frac{\Sigma a_i}{k} \right)^2 u^2 + \frac{1}{l} \sum_j \left(b_j - \frac{\Sigma b_j}{l} \right)^2 v^2 \right\} = \min(A, B) > 0,$$

где

$$A = \frac{1}{k} \sum_i \left(a_i - \frac{\Sigma a_i}{k} \right)^2;$$

$$B = \frac{1}{l} \sum_j \left(b_j - \frac{\Sigma b_j}{l} \right)^2;$$

a_i ($1 \leq i \leq k$) — возможные значения первой компоненты и b_j ($1 \leq j \leq l$) — возможные значения второй компоненты вектора $X^{(m)}$. Впрочем, неравенство $\delta > 0$ в рассматриваемом случае, равно как и в случае теоремы IV, непосредственно следует из того, что возможные значения векторов $X^{(m)}$ из R_h в действительности расположены h -мерно, т. е. наименьшее евклидово пространство, охватывающее эти значения, совпадает с B_h .

Таким образом, основываясь на доказанной выше теореме II, мы получаем, в частности, один из результатов, касающихся двумерной цепи (см. [3], теорема 1), при дополнительном условии, что все вероятности перехода равномерно ограничены снизу. Точно так же, принимая во внимание теорему III настоящей работы, мы получим результат В. И. Романовского из [12], причем в нашей формулировке, пригодной для пространства произвольного числа измерений, не содержится никаких дополнительных условий, касающихся коэффициентов корреляций.

II. Локальные законы

Мы исследуем в этом разделе неоднородные цепи, число состояний в каждом шаге которых фиксировано: пусть это будут всегда состояния

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{h+1}, \quad h \geq 1.$$

Рассматриваемая цепь будет всегда типа (А) Деблина (см. раздел I, п. 3). Теория, построенная А. Н. Колмогоровым в 1936 г. для однородных цепей (см. [14, 15], может быть перенесена, как показал Деблин [9], на цепи типа (А).

Состояния $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{h+1}$ распадаются на классы существенных состояний $G_1, G_2, \dots, G_r$ и множество несущественных состояний H . Если исследуемая система S вышла из какого-либо состояния класса G_i в первом шаге, то она будет и впредь оставаться в G_i . Если она вышла из какого-либо несущественного состояния $\mathcal{E}_\alpha \in H$, то с вероятностью $> 1 - Ce^{-\lambda n}$ она через n шагов окажется в каком-либо из классов G_i (c, λ — положительные константы).

Пусть мы произвели N наблюдений подряд над системой S , и пусть при этом m_α — число пребываний S в $\mathcal{E}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \dots, h+1$; $m_1 + m_2 + \dots + m_{h+1} = N$). Пусть дано $h+1$ неотрицательных целых чисел $m_1, m_2, \dots, m_{h+1}$, сумма которых равна N . Обозначим через $P(m_1, m_2, \dots, m_{h+1})$ вероятность того, что система S пребывала в течение наших N наблюдений m_α раз в $\mathcal{E}_\alpha$. Нас интересует вывод для $P(m_1, m_2, \dots, m_{h+1})$ асимптотических выражений типа локальной теоремы Лапласа, обобщением которой они бы и явились.

1. Начнем со случая, когда первое наблюдение фиксирует нашу систему в каком-либо из классов G_i . Совокупность состояний, проходимых системой S при переходе из $\mathcal{E}_\alpha$ в $\mathcal{E}_\beta$, учитывая и их порядки, будем называть путем системы S . Два пути будем называть однотипными, если на каждом из них имеющиеся состояния проходятся одно и то же число раз как на первом, так и на втором пути. Так, например, два пути

$$\mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_\beta \mathcal{E}_\delta \mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_\beta \mathcal{E}_\beta \mathcal{E}_\delta \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_\gamma \mathcal{E}_\beta \mathcal{E}_\beta \mathcal{E}_\beta \mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_\beta \mathcal{E}_\delta$$

однотипны между конечными пунктами.

Обозначим состояния класса G_i , который мы, не нарушая общности, примем за G_1 , через $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_{h+1}$. Пребывание системы S в этих состояниях отвечает цепи Маркова $\mathcal{C}_1$, относительно которой мы во всем дальнейшем примем следующие условия:

I) цепь $\mathcal{C}_1$ типа (А*) (см. раздел I, п. 3);

II) существует некоторое состояние $\mathcal{E}_{h+1} \in G_1$, такое, что для любого $\mathcal{E}_\alpha$ из класса G_1 найдутся два состояния, $\mathcal{E}_\gamma$ и $\mathcal{E}_\delta$ (возможно, совпадающие с $\mathcal{E}_{h+1}$ или $\mathcal{E}_\alpha$), такие, что из $\mathcal{E}_\gamma$ можно прийти в $\mathcal{E}_\alpha$ и $\mathcal{E}_{h+1}$ однотипными путями, а из $\mathcal{E}_\alpha$ и $\mathcal{E}_{h+1}$ можно прийти в $\mathcal{E}_\delta$ однотипными путями.

Условия I) и II), наверное, будут удовлетворяться, если возможны любые переходы $\mathcal{E}_i \rightarrow \mathcal{E}_j$ в один шаг ($i, j = 1, 2, \dots, h+1$). Но они значительно шире и выполняются, например, в приведенном ниже случае состояний $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4, \mathcal{E}_5$:

$$\mathcal{E}_1 \rightrightarrows \mathcal{E}_2 \rightrightarrows \mathcal{E}_3 \rightrightarrows \mathcal{E}_4 \rightrightarrows \mathcal{E}_5.$$

где стрелками обозначены единственно возможные переходы. Цепь с условиями I) и II) будет называться цепью типа (А**).

Условия I) и II) принимаются нами во избежание сложных расчетов. Легко заметить, что они приводят к тому, что каждый класс будет состоять из одного и только одного подкласса в смысле А. Н. Колмогорова.

2. Итак, пусть начальное состояние S принадлежит G_1 . Сопоставим j -му наблюдению вектор

$$Z_j = (\zeta_1^{(j)}, \zeta_2^{(j)}, \dots, \zeta_{h+1}^{(j)}),$$

где все $\zeta_i^{(j)} = 0$, за исключением $\zeta_g^{(j)} = 1$, если система при j -м наблюдении находилась в $\mathcal{E}_\alpha$. Выпишем все векторы Z_j , отвечающие N наблюдениям, — $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$, и рассмотрим их сумму $S_N = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$. Нас интересует предельный локальный закон для S_n , т. е. закон вероятностей $P(S_N = V_m)$, где $V_m = (m'_1, m'_2, \dots, m'_{h+1})$ — некоторый вектор с суммой компонент, равной N .

Положим $M_1 = [\ln^6 N]$ и зафиксируем как-либо векторы $Z_1, Z_{M_1}, Z_{2M_1}, \dots, Z_{qM_1}, Z_N$; здесь qM_1 — последнее число $\leq N$, кратное M_1 , так что $q = [N/M_1]$. Такое событие назовем Λ ; если считать его случайным, то его вероятность можно обозначить через $\mathcal{P}_\Lambda$; событий Λ будет столько, сколько есть возможных комбинаций значений наших фиксированных векторов.

Суммы векторов, оставшихся между фиксированными нами векторами, обозначим через $Y_1, Y_2, \dots, Y_{N_1}$. В силу основных свойств цепей Маркова эти суммы будут величинами независимыми. Таким образом,

$$S'_{N_1} = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{N_1},$$

есть сумма независимых векторов.

Введем сначала предельный локальный закон для S'_{N_1} . Пусть $V_m = (m_1, \dots, m_{h+1})$ — вектор с суммой компонент, равной числу не выброшенных нами векторов Z_j , которое мы обозначим через N_2 . Мы будем выводить предельный закон распределения вероятностей: $P(S'_{N_1} = V_m)$. Докажем сначала несколько лемм о суммах $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$. Заметим, что последняя из этих сумм может оказаться весьма короткой и даже пустой, поэтому мы будем говорить лишь о суммах $Y_1, Y_2, \dots, Y_{N_1-1}$.

3. Векторы $Y_1, \dots, Y_{N_1}$ имеют $h_1 + 1$ компонент. Поэтому каждому такому вектору Y_i можно сопоставить выражения $E_\alpha(Y_i)$ и $D_\alpha(Y_i)$, $\alpha = 1, 2, \dots, h_1 + 1$, обозначающие соответственно математическое ожидание и дисперсию α -й компоненты Y_i . Кроме того, для нас будут существенны коэффициенты корреляции между α -й и β -й компонентами Y_i , которые мы обозначим через $e_{\alpha\beta}(Y_i)$.

Лемма 1. При $M_1 \rightarrow \infty$

$$E_\alpha(Y_i) \asymp M_1, \quad D_\alpha(Y_i) \asymp M_1 \quad (i = 1, 2, \dots, N_1 - 1) \quad (1)$$

($\asymp$ — знак эквивалентности Харди).

Доказательство. При данном Λ (см. п. 2) имеем

$$Y_i = Z'_a + Z'_{a+1} + \dots + Z'_{a+M_1-1},$$

где Z'_j — векторы, происходящие из первоначальных векторов в результате фиксирования векторов Z_{a-1} и Z_{a+M_1} соответственно событию Λ .

Положим:

$$\begin{aligned} M_2 &= [\ln^2 N], \\ U'_i &= Z'_a + Z'_{a+1} + \dots + Z'_{a+M_2-1}, \\ V'_i &= Z'_{a+M_1-M_2-1} + \dots + Z'_{a+M_1-1}, \\ T'_i &= Z'_{a+M_2} + \dots + Z'_{a+M_1-M_2-2}. \end{aligned}$$

Тогда получим:

$$Y_i = U'_i + T'_i + V'_i. \quad (2)$$

Заметим, что, согласно условию I) п. 1, внутри класса G_1 будем применять эргодический принцип, именно: если $P_{ik}^{n,m}$ и $P_{jk}^{n,m}$ — вероятности попасть из $\mathcal{E}_i$ и $\mathcal{E}_j$ в n -м опыте в $\mathcal{E}_k$ в m -м опыте ($\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j, \mathcal{E}_k \in G_1$), то

$$|P_{ik}^{n,m} - P_{jk}^{n,m}| < e^{-c_1 |m-n|} \quad (m > n) \quad (3)$$

($C_1, C_2, \dots, c_1, c_2, \dots$ — положительные константы).
Отсюда, полагая

$$T_i = Z_{a+M_1} + \dots + Z_{a+M_1-M_2-2}$$

и учитывая, что $M_2 = [\ln^2 M]$, легко находим:

$$|E_\alpha(T'_i) - E_\alpha(T_i)| < e^{-c_2 \ln^2 N}, \quad (4)$$

$$|D_\alpha(T'_i) - D_\alpha(T_i)| < e^{-c_2 \ln^2 N}, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, h_1 + 1). \quad (5)$$

Очевидно, что

$$|E_\alpha(U'_i)| < 2M_2 < 2 \ln^2 N, \quad |E_\alpha(V'_i)| < 2 \ln^2 N \quad (6)$$

и на основании (3)

$$D_\alpha(U'_i) < C_1 M_2 < C_1 \ln^2 N, \quad D_\alpha(V'_i) < C_1 \ln^2 N. \quad (7)$$

Далее, в силу соотношения (14) раздела I находим:

$$E_\alpha(T_i) \asymp M_1, \quad D_\alpha(T_i) \asymp M_1.$$

Ввиду того что

$$\frac{M_2}{M_1} \asymp \frac{1}{\ln^4 N},$$

из (3)–(7) получаем

$$\begin{aligned} E_\alpha(Y_i) &\sim E_\alpha(T_i) \asymp M_1, \\ D_\alpha(Y_i) &\sim D_\alpha(T_i) \asymp M_1, \end{aligned}$$

что требовалось доказать ($\sim$ — знак асимптотического равенства).

4. Л е м м а 2. Если число компонент вектора Y_i больше чем 2, то для коэффициента корреляции $e_{\alpha\beta}(Y_i)$ имеем оценку:

$$|e_{\alpha\beta}(Y_i)| < 1 - c_2 (\alpha \neq \beta). \quad (8)$$

Кроме того, квадратичная форма

$$f(t_1, \dots, t_{h_1}) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{h_1} e_{\alpha\beta}(Y_i) t_\alpha t_\beta$$

(где, разумеется, $e_{\alpha\alpha}(Y_i) = 1$) положительна и

$$f(t_1, \dots, t_{h_1}) > c_3 (t_1^2 + \dots + t_{h_1}^2) \quad (9)$$

(весьма важно, что $c_3 > 0$ — константа).

Доказательство. Обозначим через $Y_{\alpha i}$ α -компоненту Y_i и положим

$$E_\alpha(Y_i) = E(Y_{\alpha i}) = a_{\alpha i}.$$

Тогда

$$e_{\alpha\beta}(Y_i) = \frac{E\{(Y_{\alpha i} - a_{\alpha i})(Y_{\beta i} - a_{\beta i})\}}{\sqrt{D_\alpha(Y_i) \cdot D_\beta(Y_i)}}.$$

Мы имеем

$$Y_i = Z'_a + Z'_{a+1} + \dots + Z'_{a+M_1-1}.$$

Положим

$$W_i = Z_a + Z_{a+1} + \dots + Z_{a+M_1-1}.$$

W_i состоит из тех же векторов, что и Y_i , но без дополнительного условия Λ , меняющего законы их распределения. На основании эргодического принципа, выраженного неравенством (3), находим, рассуждая как и в п. 3 раздела II:

$$\begin{aligned} |E_\alpha(Y_i) - E_\alpha(W_i)| &< C_2 M_2, \\ |D_\alpha(Y_i) - D_\alpha(W_i)| &< C_2 M_2. \end{aligned}$$

$$|E\{(Y_{\alpha i} - a_{\alpha i})(Y_{\beta i} - a_{\beta i})\} - E\{(W_{\alpha i} - E_\alpha(W_i))(W_{\beta i} - E_\beta(W_i))\}| \leq C_2 M_2^2.$$

Отсюда с помощью леммы 1 выводим:

$$|e_{\alpha\beta}(Y_i) - e_{\alpha\beta}(W_i)| < \frac{c_4}{\ln^2 N}. \quad (10)$$

Но, как показано в разделе I (формула (12)),

$$|e_{\alpha\beta}(W_1)| < 1 - c_4 (\alpha \neq \beta),$$

поэтому из (10) следует (8).

Наконец, как показано в разделе I (формула (5')), все главные миноры квадратичной формы

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^{h_1} e_{\alpha\beta}(W_i) t_\alpha t_\beta$$

будут $> c_5 > 0$, а тогда на основании (10) при достаточно большом N все главные миноры формы $f(t_1, \dots, t_{h_1})$ будут $> c_5/2$, откуда и следует (9).

5. Обозначим

$$R_i = Y'_i - Y''_i \quad (i = 1, 2, \dots, N_1 - 1),$$

где Y'_i и Y''_i суть векторы, независимые и устроенные оба одинаково — так, как вектор Y_i . Тогда

$$E_\alpha(R_i) = 0, \quad D_\alpha(R_i) \asymp M_1 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, h_1 + 1).$$

Рассмотрим h_1 -мерное евклидово пространство переменных $x_1, x_2, \dots, x_{h_1}$.

Лемма 3. Пусть даны две любые положительные константы C_0 и c_0 . Если взять любой куб Q_{c_0} объема $> c_0 M_1^{h_1/2}$, лежащий целиком в кубе $|x_\alpha| < C_0 \sqrt{M_1}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, h_1$), то вероятность того, что первые h_1 компонент вектора R отвечают кубу Q_{c_0} , при достаточно большом $N > N_0(c_0, C_0)$ будет

$$P_N(Q_{c_0}) > a(c_0, C_0), \quad (11)$$

где $a(c_0, C_0)$ — положительная константа, зависящая только от c_0 и C_0 .

Доказательство. Положим в обозначениях п. 3 раздела II

$$Y_i = U'_i + T'_i + V'_i.$$

Тогда, по (7),

$$D_\alpha(U'_i) < C_1 M_2, \quad D_\alpha(V'_i) < C_1 M_2.$$

Мы можем написать

$$R_i = T'_i - T''_i + X'_i,$$

где T'_i, T''_i независимы, одинаковы, устроены, как T'_i , и

$$D_\alpha(X'_i) < C_2 M_2, \quad D_\alpha(T'_i - T''_i) \asymp M_1.$$

Далее, при достаточно большом N вероятность для $T'_i - T''_i$ соответствовать кубу $Q_{c_0/2}$, имеющему одинаковый центр с Q_{c_0} и вдвое меньшие ребра, будет отличаться от той же вероятности для $\bar{T}'_i - \bar{T}''_i$ менее чем на $e^{-c_0 \ln^2 N}$, где $\bar{T}'_i$ и $\bar{T}''_i$ — переменные, получающиеся из T'_i и T''_i , если не считать событие Λ фиксированным. Последняя же вероятность, согласно теореме IV, будет $> a_1(c_0, C_0)$ и $< 1 - c_6$. При достаточно большом N вероятность того, что первые h_1 компонент вектора $T'_i - T''_i$ будут отвечать точке куба $Q_{c_0/2}$, будет, таким образом, $p'_N(c_0, C_0)$ с условием

$$1 - c_7 > p'_N(c_0, C_0) > a_2(c_0, C_0).$$

Так как ребра $Q_{c_0/2}$ имеют порядок $\sqrt{M_1}$, то, применяя неравенство Чебышева к величине X_i и очевидное неравенство

$$P(A \cap B) \geq 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}),$$

находим искомую оценку (14).

6. Если заданы первые h_i компонент вектора Y_i , то последняя ими вполне определится; если первые h_1 компонент суть $l_1, l_2, \dots, l_{h_1}$, то последняя $l = f(l_1, \dots, l_{h_1})$. Обозначим

$$P_{l_1, \dots, l_{h_1}}^{(f)} = P(Y_j = (l_1, l_2, \dots, l_{h_1}, l))$$

и составим функцию

$$f_j(a_1, a_2, \dots, a_{h_1}) = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_{h_1}} P_{l_1, \dots, l_{h_1}}^{(f)} e^{2\pi i(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \dots + \alpha_{h_1} l_{h_1})},$$

которую будем обозначать через f_j .

Если $V_m = (m_1, m_2, \dots, m_{h_1})$ — какой-либо h_1 -мерный вектор, где $0 \leq m_i \leq N$, а S'_{N_1} — сумма h_1 -мерных векторов, полученных из первых h_1 компонент Y_j , то в силу независимости Y_j (при фиксированном Λ) получим:

$$P(S'_{N_1} = V_m) = \int_{-1/2}^{1/2} da_1 \int_{-1/2}^{1/2} da_2 \dots \int_{-1/2}^{1/2} da_{h_1} f_1 f_2 \dots \\ \dots f_{N_1} e^{-2\pi i(\alpha_1 m_1 + \dots + \alpha_{h_1} m_{h_1})}. \quad (12)$$

7. Пусть τ — любое число > 1 . Согласно теореме Дирихле о диофантовых приближениях [16], для любых чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_{h_1}$ можно найти h_1 дробей a_i/q , таких, что

$$\left| \alpha_i - \frac{a_i}{q} \right| \leq \frac{1}{q\tau^{1/h_1}}, \quad q \leq \tau. \quad (13)$$

Положим, в частности,

$$\tau = \ln^{100 h_1} N. \quad (14)$$

Тогда каждую из точек h_1 -мерного куба $|\alpha_i| \leq 1/2$ ($i = 1, 2, \dots, h_1$) можно в силу (13) изобразить в виде

$$\alpha_i = \frac{a_i}{q} + z_i, \quad |z_i| \leq \frac{1}{q\tau^{1/h_1}}, \quad (15)$$

т. е. сопоставить ей новый кубик, имеющий центром $(a_1/q, a_2/q, \dots, a_{h_1}/q)$ и ребра длины $1/q\tau^{1/h_1}$. Легко заметить, что при достаточно большом N (и τ) эти кубики не имеют общих внутренних точек. Мы покажем в дальнейшем, что в интеграле (12) произведение $|f_1 f_2 \dots f_{N_1}|$ будет весьма мало во всех этих кубах, исклю-

чая тот, который имеет центром $(0, 0, \dots, 0)$. Заметим, что $|f_j(a_1, a_2, \dots, a_{h_1})|^2$ есть характеристическая функция разности независимых переменных Y'_j и Y''_j — векторов, полученных из первых h_1 компонент Y_j . Если $(n_1, n_2, \dots, n_{h_1})$ — значение такой разности, то имеем:

$$|f_j(a_1, a_2, \dots, a_{h_1})|^2 = \sum_{(n_1, n_2, \dots, n_{h_1})} p_{n_1, n_2, \dots, n_{h_1}}^{(j)} \times \\ \times \cos 2\pi (a_1 n_1 + a_2 n_2 + \dots + a_{h_1} n_{h_1}).$$

Отсюда

$$1 - |f_j(a_1, a_2, \dots, a_{h_1})|^2 = \\ = \sum p_{n_1, n_2, \dots, n_{h_1}}^{(j)} \sin^2 (a_1 n_1 + a_2 n_2 + \dots + a_{h_1} n_{h_1}). \quad (16)$$

Полагаем

$$a_i = \frac{a_i}{q} + z_i, \quad |z_i| \leq \frac{1}{q} \tau^{-1/h_1}, \quad \tau = (\ln N)^{100 h_1}. \quad (17)$$

Имеем:

$$\sin^2 \pi (a_1 n_1 + \dots + a_{h_1} n_{h_1}) = \sin^2 \pi \left(\frac{a_1 n_1 + \dots + a_{h_1} n_{h_1}}{q} + z' \right), \quad (18)$$

$$|z'| < \frac{M_1 h_1}{q \tau^{1/h_1}} < \frac{\ln^5 N \cdot h_1}{q (\ln N)^{100}} < \frac{1}{q (\ln N)^{93}}. \quad (19)$$

Для дальнейшего нам понадобится одна лемма о событиях Λ .

8. Событие Λ состоит в совмещении $N_1 + 1$ событий, заключающихся в том, что в 1-м, M_1 -м, $2M_1$ -м опытах система была во вполне определенных состояниях. Пусть $\mathcal{E}_\alpha$ — какое-либо из $h_1 + 1$ возможных состояний: если при исполнении события Λ система пребывает в состоянии $\mathcal{E}_\alpha$ менее чем $\sqrt{N_1}$ раз, будем говорить, что событие Λ принадлежит множеству m_α ; сумму $m_1 + m_2 + \dots + m_{h_1+1}$ обозначим через m , в дополнение к ней множество всех остальных событий — через $\mathfrak{M}$.

Лемма 4. Вероятность того, что событие Λ принадлежит множеству m ,

$$\sum_{\Lambda \in m} \mathcal{P}_\Lambda < e^{-c_6 N_1}. \quad (20)$$

Доказательство. В силу свойства I) п. 1 раздела II априорная вероятность того, что в одном из указанных опытов с номерами $1, M_1, 2M_1, \dots$ произойдет событие $\mathcal{E}_\alpha$, будет лежать между δ и $1 - \delta$, где $\delta < 1$ — некоторая константа. В силу эргодического принципа в форме (3) отсюда выводим: вероятность того, что в сложном событии Λ на каких-либо $v_1 \geq N_1 - \sqrt{N_1}$ определенных местах не будет стоять $\mathcal{E}_\alpha$, будет $< (1 - \delta/2)^{N_1 - \sqrt{N_1}}$. Далее,

оставшиеся $N_1 - \nu$ мест можно выбрать $C_{N_1}^{N_1 - \nu} < (N_1)^{\sqrt{N_1}}$ способами. Поэтому

$$\sum_{\Lambda \in \mathfrak{M}} \mathcal{P}_\Lambda < N_1^{\sqrt{N_1}} \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^{N_1 - \sqrt{N_1}} < e^{-c_1 N_1}.$$

Суммируя по α , получаем (20).

9. В дальнейшем, пока не будет особо оговорено, будем иметь в виду такие фиксированные Λ , которые принадлежат $\mathfrak{M}$ и в которых, стало быть, [всякое состояние $\mathcal{E}_\alpha$ встретится не менее чем на $\sqrt{N_1}$ местах.

Вернемся к п. 7 раздела II и рассмотрим введенные там разности $Y'_j - Y''_j$; точку $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{h_1}$ возьмем при условии (17). В этом условии будем считать $q > 1$. Тогда среди целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ найдем, очевидно, хоть одно, не равное нулю (так как отдельные кубики не имеют общих точек). Пусть, например, это будет a_α . На основании свойства II) для этих двух состояний $\mathcal{E}_\alpha$ и $\mathcal{E}_{h_1+k}$ найдутся такие состояния $\mathcal{E}_\gamma$ и $\mathcal{E}_\delta$, что из $\mathcal{E}_\gamma$ можно прийти в $\mathcal{E}_\alpha$ и $\mathcal{E}_{h_1+1}$ однотипными путями и из $\mathcal{E}_\alpha$ и $\mathcal{E}_{h_1+k}$ можно прийти в $\mathcal{E}_\delta$ однотипными путями. Пусть длина пути между $\mathcal{E}_\gamma$ и $\mathcal{E}_\alpha$ или $\mathcal{E}_{h_1+1}$ будет равна h_1 состояниям, а между $\mathcal{E}_\alpha$ или $\mathcal{E}_{h_1+1}$ и $\mathcal{E}_\delta$ — h_2 состояниям.

Событие $\Lambda \in \mathfrak{M}$; рассмотрим те индексы j при Y_j , для которых в событии Λ встречается $\mathcal{E}_\delta$; их будет не менее $\sqrt{N_1}$. Пусть для одного из таких j имеем

$$Y_j = Z'_M + Z'_{M+1} + \dots + Z'_{M+M_1-1};$$

при этом Z'_{M-1} и Z'_{M+M_1} фиксированы; в частности,

$$Z'_{M+M_1} = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0),$$

0 стоят на месте δ .

Рассмотрим сумму

$$Z'_M + Z'_{M+1} + \dots + Z'_{M+M_1-h_1-h_2-1};$$

пусть она равна вектору $(l_1, l_2, \dots, l_{h_1}, l_{h_1+1})$. Согласно свойству I), вероятность того, что в этой сумме вектор $Z'_{M+M_1-h_1-h_2-1}$ отвечает состоянию $\mathcal{E}_\gamma$, будет $p_\gamma > c_b$.

Рассмотрим линейную форму $a_1 l_1 + a_2 l_2 + \dots + a_{h_1} l_{h_1}$ и ее остатки по модулю q , когда $l_1, l_2, \dots, l_{h_1}$ будут пробегать первые h компонент нашей векторной суммы, такие, что последний вектор $Z'_{M+M_1-h_1-h_2-1}$ отвечает состоянию $\mathcal{E}_\gamma$. Тогда будет существовать хотя бы один остаток r , такой, что

$$a_1 l_1 + a_2 l_2 + \dots + a_{h_1} l_{h_1} \equiv r \pmod{q}$$

с вероятностью $\geq p_i/q > c_8/q$. Далее, после [того как одно из событий, приведенных к такому значению остатка r , совершилось и последний вектор $Z'_{M+M_1-h_1-h_2-1}$ отвечает $\mathcal{E}_7$, рассмотрим такие значения векторов $Z'_{M+M_1-h_1-h_2}, \dots, Z'_{M+M_1-1}$, которые отвечают однотипным путям в $\mathcal{E}_\alpha$ и, далее, в $\mathcal{E}_8$ и в $\mathcal{E}_{h_1+1}$ и, далее, в $\mathcal{E}_9$. Оба этих значения имеют вероятности $> c_9$, а соответствующие значения суммы $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_h u_h$, где u_i — сумма i -х компонент соответствующих векторов, будут, очевидно, отличаться ровно на a_α , так как оба пути насчитывают одинаковое число соответствующих состояний, за исключением того шага, когда один путь идет через $\mathcal{E}_\alpha$, другой — через $\mathcal{E}_{h_1+1}$. Отсюда получаем следующее утверждение.

Лемма 5. При указанных нами индексах j вектор Y'_j с вероятностями $p_1 > c_8 c_9/q$ и $p_2 > c_8 c_9/q$ будет принимать такие группы значений, для которых сумма $a_1 l_1 + a_2 l_2 + \dots + a_h l_h$ будет принимать два значения, различающиеся на $a_\alpha \pmod{q}$, причем $a_\alpha \neq 0$, $|a_\alpha| < q$.

Лемма 6. Разность $Y'_j - Y''_j$ с вероятностями $p'_1 > c_{10}/q^2$ и $p'_2 > c_{10}/q^2$ будет принимать такие две группы значений, при которых соответствующая сумма $a_1 n_1 + a_2 n_2 + \dots + a_h n_h$ будет принимать значения r_1 и $r_1 + a_\alpha \pmod{q}$.

Доказательство. Y'_j и Y''_j независимы; среди значений Y''_j выберем группу таких, где с вероятностью $> c_{11}/q$ будет

$$a_1 l_1 + a_2 l_2 + \dots + a_h l_h \equiv r_2 \pmod{q}.$$

Тогда на основании предыдущего разность $Y'_j - Y''_j$ с вероятностями

$$> \frac{c_8 c_9}{q} \frac{c_{11}}{q} = \frac{c_{10}}{q^2}$$

будет принимать требуемые в формулировке группы значений.

10. Лемма 7. Для всех кубиков $\alpha_i = a_i/q + z_i$, $|z_i| \leq \tau^{1/h_i}/q$, за исключением того, где $q = 1$, $a_1 = a_2 = \dots = a_h = 0$, имеем

$$|f_1 f_2 \dots f_N| < e^{-\sqrt[N]{N}} \text{ при большом } N. \quad (21)$$

Доказательство. Рассмотрим указанные выше индексы j в количестве $\geq \sqrt{N_1}$; полагая $q \neq 1$, рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} 1 - |f_j|^2 &= \sum p_{n_1, n_2, \dots, n_h}^{(j)} \sin^2 \pi (a_1 n_1 + \dots + a_h n_h) = \\ &= \sum p_{n_1, n_2, \dots, n_h}^{(j)} \sin^2 \pi \left(\frac{a_1 n_1 + \dots + a_h n_h}{q} + z' \right), \quad |z'| < \frac{1}{q (\ln N)^{93}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Согласно лемме 6, сумма $a_1 n_1 + \dots + a_h n_h$ будет принимать два значения, r_1 и $r_1 + a_\alpha$, с вероятностью $> c_{10}/q^2$. Хотя бы одно из

этих значений не делится на q , так как $a_\alpha \not\equiv 0 \pmod{q}$. Пусть это будет r_1 . Тогда в силу (22)

$$\sin^2 \pi \left(\frac{a_1 n_1 + \dots + a_{h_1} n_{h_1}}{q} + z' \right) = \sin^2 \pi \left(\frac{r_1}{q} + z' \right) > \frac{c_{12}}{q^2}.$$

Поэтому, очевидно,

$$1 - |f_j|^2 > \frac{c_{10}}{q^2} \frac{c_{12}}{q^2} = \frac{c_{13}}{q^4} > c_{13} (\ln N)^{-400h_1},$$

$$|f_j|^2 < 1 - c_{13} (\ln N)^{-400h_1}.$$

Это неравенство будет выполнено не менее чем для $\sqrt[N]{N_1}$ значков j . Отсюда легко выводим, что для большого N

$$|f_1 f_2 \dots f_{N_1}| < e^{-\sqrt[N]{N}},$$

что и требовалось доказать.

11. Полагая $\Delta = 1/\tau = \frac{1}{(\ln N)^{100h_1}}$, находим (см. (12)):

$$\begin{aligned} & P(S'_{N_1} = V_m) = \\ &= \int_{-\Delta}^{\Delta} da_1 \int_{-\Delta}^{\Delta} da_2 \dots \int_{-\Delta}^{\Delta} da_{h_1} f_1 f_2 \dots f_N e^{-2\pi i(\alpha_1 m_1 + \dots + \alpha_{h_1} m_{h_1})} + R_1, \\ & |R_1| < c_{14} e^{-\sqrt[N]{N}}. \end{aligned}$$

Вернемся к случайной линейной форме $\alpha_1 n_1 + \dots + \alpha_{h_1} n_{h_1}$, отвечающей вектору $Y'_j - Y''_j$, $j = 1, 2, \dots, N_1 - 1$; $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{h_1})$ — точка нашего куба, $|\alpha_i| < \Delta$. Допустим, что не все α_i удовлетворяют более сильному неравенству

$$|\alpha_i| \leq \frac{\ln^4 N_1}{\sqrt{N_1}};$$

в частности, пусть наибольшее из них, каким, не нарушая общности, будем считать α_1 , удовлетворяет неравенству

$$|\alpha_1| > \frac{\ln^4 N_1}{\sqrt{N_1}}.$$

Будем различать два случая.

1. $|\alpha_1| > 2h_1^2 |\alpha_i|$ для $i = 2, 3, \dots, h_1$ (если $h_1 > 1$). Согласно лемме 3, вероятность того, что n_1 лежат в области

$$\sqrt{M_1} = |n_1| \leq 1.01 \sqrt{M_1}, \quad 1 \leq \left| \frac{n_i}{n_1} \right| \leq 1.01 \quad (i = 2, 3, \dots, h_1),$$

будет $> c_{15}$. Отсюда

$$|\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \dots + \alpha_{h_1} n_{h_1}| > |\alpha_1| > \frac{\ln^4 N_1}{\sqrt{N_1}}.$$

Далее, очевидно,

$$|\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \dots + \alpha_{h_1} n_{h_1}| \leq \Delta M_1 < \frac{\ln^6 N}{(\ln N)^{100 h_1}}.$$

Поэтому

$$1 - |f_j(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{h_1})|^2 > c_{15} \frac{\ln^6 N_1}{N_1} \quad (j = 2, 3, \dots, N_1 - 1). \quad (23)$$

2. $|\alpha_1| \geq 2h^2 |\alpha_i|$ не для всех α_i ($i = 2, 3, \dots, h_1$). Тогда из той же леммы 3 заключаем, что в область

$$10h_1^3 \sqrt{M_1} \leq n_1 \leq 20h_1^3 \sqrt{M_1}, \quad \frac{\sqrt{M_1}}{2} \leq n_i \leq \sqrt{M_1}$$

точка $(n_1, n_2, \dots, n_{h_1})$ попадет с вероятностью $> c_{16}$; отсюда, так как для таких точек снова будет

$$h_1 \Delta M_1 \geq |\alpha_1 n_1 + \dots + \alpha_{h_1} n_{h_1}| > |\alpha_1| > \frac{\ln^4 N_1}{\sqrt{N_1}},$$

выводим (23). Наконец, из (23) следует, что для указанных точек $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{h_1})$

$$|f_1 f_2 \dots f_{N_1}| < \left(1 - c_{17} \frac{\ln^8 N_1}{N_1}\right)^{N_1-1} < e^{-\ln^7 N_1} < e^{-\ln^6 N}$$

для больших N .

12. Отсюда находим:

$$P(S'_{N_2} = V_m) = \int_{-\Delta}^{\Delta} d\alpha_1 \dots \int_{-\Delta}^{\Delta} d\alpha_{h_1} f_1 f_2 \dots f_{N_1} e^{-2\pi i(\alpha_1 m_1 + \dots + \alpha_{h_1} m_{h_1})} + R_2,$$

$$|R_2| < e^{-\ln^5 N/2} \text{ для больших } N, \quad |\Delta| \leq \ln^4 N_1 / \sqrt{N_1}.$$

Для таких $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{h_1})$ имеем:

$$f_j(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{h_1}) = \sum p_{l_1, l_2, \dots, l_{h_1}}^{(j)} e^{2\pi i(\alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_{h_1} l_{h_1})}.$$

Здесь $|l_j| \leq M_1 = \ln^6 N$. Отсюда

$$\begin{aligned} f_j(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{h_1}) &= 1 + 2\pi i \sum p_{l_1, l_2, \dots, l_{h_1}}^{(j)} (\alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_{h_1} l_{h_1}) - \\ &- \frac{4\pi^2}{2} \sum p_{l_1, l_2, \dots, l_{h_1}}^{(j)} (\alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_{h_1} l_{h_1})^2 + O\left(\frac{\ln^{18} N \ln^{12} N}{N_1^{3/2}}\right) \end{aligned} \quad (24)$$

(порядок O равномерен по j).

Пусть

$$a_\alpha^{(j)} = E_\alpha(Y_j) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, h_1)$$

и $\mu_{\alpha\beta}^{(j)}$ при $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, h_1$ обозначает математическое ожидание произведения α -й и β -й компонент Y_j (при $\alpha = \beta$ — второй начальный момент). Тогда найдем

$$f_j(a_1, a_2, \dots, a_{h_1}) = 1 + 2\pi i (a_1 a_1^{(j)} + a_2 a_2^{(j)} + \dots + a_{h_1} a_{h_1}^{(j)}) - \\ - \frac{4\pi^2}{2} (a_1^2 \mu_{11}^{(j)} + 2a_1 a_2 \mu_{12}^{(j)} + a_2^2 \mu_{22}^{(j)} + \dots) + R_j, \quad |R_j| < \frac{1}{N_1^{29/20}}. \quad (25)$$

Отсюда легко выводим:

$$\sum_{j=1}^{N_1} \ln f_j = 2\pi i \left(a_1 \sum_j a_1^{(j)} + \dots + a_{h_1} \sum_j a_{h_1}^{(j)} \right) - \\ - \frac{4\pi^2}{2} \left(a_1^2 \sum_j \mu_{11}^{(j)} + 2a_1 a_2 \sum_j \mu_{12}^{(j)} + a_2^2 \sum_j \mu_{22}^{(j)} + \dots \right) + \\ + \frac{4\pi^2}{2} \sum \{ a_1 a_{h_1}^{(j)} + \dots + a_{h_1} a_{h_1}^{(j)} \}^2 + O\left(\frac{1}{N_1^{9/20}}\right).$$

Далее, пусть

$$E_\alpha(S'_{N_1}) = E_\alpha^{(N_1)} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, h_1),$$

$D_\alpha(Y_j)$ — дисперсия α -й компоненты Y_j , $e_{\alpha\beta}^{(j)}$ — коэффициент корреляции α -й и β -й компонент Y_j ; тогда

$$\sum_{j=1}^{N_1} \ln f_j = 2\pi i (a_1 E_1^{(N_1)} + a_2 E_2^{(N_1)} + \dots + a_{h_1} E_{h_1}^{(N_1)}) - \\ - \frac{1}{2} \cdot 4\pi^2 \left(a_1^2 \sum_j D_1(Y_j) + 2a_1 a_2 \sum_j e_{12}^{(j)} \sqrt{D_1(Y_j) D_2(Y_j)} + \right. \\ \left. + a_2^2 \sum D_2(Y_j) + \dots + a_{h_1}^2 \sum D_{h_1}(Y_j) \right) + O(N_1^{-9/20}). \quad (26)$$

13. На основании леммы 2 можно сделать следующее важное замечание. Если положим

$$u_k = 2\pi a_k \sqrt{\sum_j D_k(Y_j)},$$

то квадратичная форма, стоящая во втором члене (26), примет вид

$$u_1^2 + 2R_{12}^{(N_1)} u_1 u_2 + u_2^2 + 2R_{13}^{(N_1)} u_1 u_3 + \dots + u_{h_1}^2 = \varphi(u_1, u_2, \dots, u_{h_1}),$$

где

$$R_{\alpha\beta}^{(N_1)} = \frac{1}{\sqrt{\sum_j D_\alpha(Y_j) \sum_j D_\beta(Y_j)}} \sum_j e_{\alpha\beta}^{(j)} \sqrt{D_\alpha(Y_j) D_\beta(Y_j)}.$$

При этом на основании (8) раздела II легко получим

$$|R_{\alpha\beta}^{(N_1)}| < 1 - c_{17}.$$

Далее, поскольку, согласно (9) раздела II,

$$\alpha_1^2 \mathbf{D}_1(Y_j) + 2\alpha_1 \alpha_2 e_{12}^{(j)} \sqrt{\mathbf{D}_1(Y_j) \mathbf{D}_2(Y_j)} + \alpha_2^2 \mathbf{D}_2(Y_j) + \dots \\ + \alpha_{h_1}^2 \mathbf{D}_{h_1}(Y_j) \geq c_3 (\mathbf{D}_1(Y_j) \alpha_1^2 + \mathbf{D}_2(Y_j) \alpha_2^2 + \dots + \mathbf{D}_{h_1}(Y_j) \alpha_{h_1}^2),$$

легко найдем:

$$u_1^2 + 2R_{12}^{(N_1)} u_1 u_2 + u_2^2 + \dots + u_{h_1}^2 \geq c_3 (u_1^2 + \dots + u_{h_1}^2). \quad (27)$$

Обозначая

$$\sum_j \mathbf{D}_\alpha(Y_j) = \mathbf{D}_\alpha^{(N_1)},$$

получим:

$$\sum_{j=1}^{N_1} \ln f_j = i \left(u_1 \frac{\mathbf{E}_1^{(N_1)}}{\sqrt{\mathbf{D}_1^{(N_1)}}} + \dots + u_{h_1} \frac{\mathbf{E}_{h_1}^{(N_1)}}{\sqrt{\mathbf{D}_{h_1}^{(N_1)}}} \right) - \\ - \frac{1}{2} \varphi(u_1, u_2, \dots, u_{h_1}) + O(N_1^{-9/20}).$$

Отсюда имеем:

$$f_1 f_2 \dots f_{N_1} e^{-2\pi i (\alpha_1 m_1 + \dots + \alpha_{h_1} m_{h_1})} = \\ = \exp \left\{ -i \left(u_1 \frac{m_1 - \mathbf{E}_1^{(N_1)}}{\sqrt{\mathbf{D}_1^{(N_1)}}} + \dots + u_{h_1} \frac{m_{h_1} - \mathbf{E}_{h_1}^{(N_1)}}{\sqrt{\mathbf{D}_{h_1}^{(N_1)}}} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \varphi(u_1, u_2, \dots, u_{h_1}) + O \left(\frac{1}{N_1^{9/20}} \right) \right\}.$$

Далее, полагая $\Delta \sqrt{4\pi^2 \mathbf{D}_\alpha^{(N_1)}} = H_\alpha$, найдем, согласно п. 12, что

$$P(S'_{N_1} = V_m) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{2h_1} \mathbf{D}_1^{(N_1)} \dots \mathbf{D}_{h_1}^{(N_1)}}} \int_{-H_1}^{H_1} du_1 \int_{-H_2}^{H_2} du_2 \dots \int_{-H_{h_1}}^{H_{h_1}} du_{h_1} \times \\ \times \exp \left\{ -i \left(u_1 \frac{m_1 - \mathbf{E}_1^{(N_1)}}{\sqrt{\mathbf{D}_1^{(N_1)}}} + \dots + u_{h_1} \frac{m_{h_1} - \mathbf{E}_{h_1}^{(N_1)}}{\sqrt{\mathbf{D}_{h_1}^{(N_1)}}} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \varphi(u_1, \dots, u_{h_1}) \right\} + R_3, \quad (28)$$

$$|R_3| < \frac{\Delta_{h_1}}{N_1^{9/20}} \text{ для больших } N. \quad (29)$$

14. В силу оценки (27) нетрудно будет дать приближенное выражение (28), встречающееся в теории случайных векторов. Но прежде чем это сделать, мы должны подойти к локальному закону для суммы $S_N = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N$, из которой S'_{N_1} полу-

чилась при введении события Λ — фиксирования определенного ряда векторов.

Пусть $W_n = (n_1, n_2, \dots, n_{h_1})$ — вектор, равный сумме зафиксированных событием Λ векторов. Тогда, очевидно,

$$P(S_N = W_m) = \sum_{\Lambda} (W_n = (n_1, n_2, \dots, n_{h_1})) \times \\ \times P_{\Lambda}(S'_{N_1} = (m_1 - n_1, m_2 - n_2, \dots, m_{h_1} - n_{h_1})),$$

где, как обычно, $V_m = (m_1, m_2, \dots, m_{h_1})$.

Для вероятности $P_{\Lambda}(S'_{N_1} = (m_1 - n_1, \dots, m_{h_1} - n_{h_1}))$ и $\Lambda \in \mathfrak{M}$ мы можем употребить выражение вида (28), но при этом нужно заметить, что входящие туда параметры $E_{\alpha}^{(N_1)}$, $D_{\alpha}^{(N_1)}$, $R_{\alpha\beta}^{(N_1)}$ будут зависеть от события Λ . Если Λ считать случайным событием, то указанные величины будут случайными — положение будет совершенно аналогичным тому, которое имеет место в математической статистике. Соответственно обозначим

$$E_{\alpha}^{(N_1)} = \sum_j E_{\alpha\Lambda}(Y_j), \quad D_{\alpha}^{(N_1)} = \sum_j D_{\alpha\Lambda}(Y_j)$$

и введем величины

$$E_{\Lambda}(Y_i^{(\alpha)} Y_i^{(\beta)}) = F_{\Lambda}^{(\alpha, \beta)} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, h_1; \alpha \neq \beta),$$

где $Y_i^{(\alpha)}$ означает α -ю компоненту вектора Y_i . Нас будут интересовать математические ожидания и дисперсии всех этих величин при переменном Λ .

15. Обозначим через S_N'' сумму невыброшенных векторов $Z_2 + Z_3 + \dots + Z_{M-1} + Z_{M+1}^N + \dots$; тогда, полагая

$$E(E_{\alpha\Lambda}(Y)) = \sum_{\Lambda} \mathcal{P}_{\Lambda} E_{\alpha\Lambda}(Y_j) = E_{\alpha j},$$

найдем

$$\sum_j E_{\alpha j} = E_{\alpha}(S_N'')$$

— математическое ожидание α -й компоненты суммы невыброшенных векторов.

Лемма 8. Дисперсия $E_{\alpha}^{(N_1)} = \sum_j E_{\alpha\Lambda}(Y_j)$ сравнительно мала:

$$D(E_{\alpha}^{(N_1)}) < c_{18} N_1, \\ N_1 \asymp \frac{N}{M_1} \asymp \frac{N}{\ln N}. \quad (30)$$

Доказательство. Вместо $E_{\alpha\Lambda}(Y_j)$ введем отклонение

$$E'_{\alpha\Lambda}(Y_j) = E_{\alpha\Lambda}(Y_j) - E_{\alpha j};$$

дисперсия суммы наших величин равна дисперсии суммы отклонений. Далее с помощью эргодического принципа в форме (3) раздела II получим:

$$\begin{aligned} D(E_{\alpha}^{(N_1)}) &= E \left\{ \left(\sum_j E'_{\alpha\Lambda}(Y_j) \right)^2 \right\} = \sum_{j=1}^{N_1} E(E'_{\alpha\Lambda}(Y_j))^2 + \\ &+ 2 \sum_{j=1}^{N_1-1} E(E'_{\alpha\Lambda}(Y_j) \cdot E'_{\alpha\Lambda}(Y_{j+1})) + O(N_1 e^{-\ln^6 N}). \end{aligned}$$

В силу того же принципа (3) $E'_{\alpha\Lambda}(Y_j) = O(1)$, откуда

$$D(E_{\alpha}^{(N_1)}) = O(1) \sum_{j=1}^{N_1} + O(1) \sum_{i=1}^{N_1-1} 2 + O(N_1 e^{-\ln^6 N}) < c_{18} N_1,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 9. *Дисперсия $D_{\alpha}^{(N_1)}$ сравнительно мала:*

$$D(D_{\alpha}^{(N_1)}) < c_{19} N \ln^6 N.$$

Доказательство. Обозначая

$$\begin{aligned} E(D_{\alpha\Lambda}(Y_j)) &= B_{\alpha j}, \\ D_{\alpha\Lambda}(Y_j) - B_{\alpha j} &= D'_{\alpha\Lambda}(Y_j), \end{aligned}$$

найдем

$$\begin{aligned} D'_{\alpha\Lambda}(Y_j) &= O(M_1), \\ D(D_{\alpha}^{(N_1)}) &= D \left(\sum_j D'_{\alpha\Lambda}(Y_j) \right) = \sum_j E(D'_{\alpha\Lambda}(Y_j))^2 + \\ &+ 2 \sum_j E(D'_{\alpha\Lambda}(Y_j) D'_{\alpha\Lambda}(Y_{j+1})) + O(N_1 e^{-\ln^2 N}) < c_{20} M_1^2 N_1 < c_{19} N \ln^6 N. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается и лемма 10.

Лемма 10. *Пусть $E(R_{\alpha\beta}^{(N_1)}) = \rho_{\alpha\beta}^{(N)}$; тогда*

$$|\rho_{\alpha\beta}^{(N)}| < 1 - c_{21}, \quad (31)$$

$$D(R_{\alpha\beta}^{(N_1)}) < \frac{1}{\ln^2 N}. \quad (32)$$

Доказательство. Неравенство (31) очевидно из того, что для всех Λ

$$|R_{\alpha\beta}^{(N_1)}| < 1 - c_{17}.$$

Для вывода (32) заметим, что

$$R_{\alpha\beta}^{(N_1)} = \frac{1}{\sqrt{D_{\alpha}^{(N_1)} D_{\beta}^{(N_1)}}} \sum_j E((Y_j^{(\alpha)})' \cdot (Y_j^{(\beta)})').$$

Как и в доказательстве леммы 9, находим:

$$D \left(\sum_j E((Y_j^{(\alpha)})' \cdot (Y_j^{(\beta)})') \right) < c_{19} N \ln^6 N. \quad (33)$$

Далее, обозначая

$$\begin{aligned} E \left(\sum_j E \left((Y_j^{(\alpha)})' \cdot (Y_j^{(\beta)})' \right) \right) &= E_{\alpha\beta N}, \\ E(D_{\alpha}^{(N_1)}) &= D_{\alpha N}, \end{aligned}$$

применим неравенство Чебышева к величинам

$$\sum_j E \left((Y_j^{(\alpha)})' \cdot (Y_j^{(\beta)})' \right), D_{\alpha}^{(N_1)}, D_{\beta}^{(N_1)}$$

и очевидное неравенство

$$P(A \cap B \cap C) \geq 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) - P(\bar{C}).$$

Тогда после легких вычислений найдем, что для больших N

$$\begin{aligned} D(R_{\alpha\beta}^{(N_1)}) &< \frac{1}{\ln^2 N}, \\ E(R_{\alpha\beta}^{(N_1)}) &= r_{\alpha\beta}^{(N)} = \frac{E_{\alpha\beta N}}{\sqrt{D_{\alpha N} D_{\beta N}}} + O\left(\frac{1}{\ln^2 N}\right). \end{aligned} \quad (34)$$

16. Итак, по вышеизложенному,

$$\begin{aligned} P(S_N = V_m) &= \sum_{\Lambda \in \mathfrak{M}} \mathcal{P}_{\Lambda} \cdot P(S'_{N_1} = (m_1 - n_1, \dots, m_{h_1} - n_{h_1})) + \\ &+ \sum_{\Lambda \in \mathfrak{M}} \mathcal{P}_{\Lambda} \cdot P(S'_{N_1} = (m_1 - n_1, \dots, m_{h_1} - n_{h_1})), \end{aligned} \quad (35)$$

где вектор $(n_1, n_2, \dots, n_{h_1})$ есть тот, который получается от суммы фиксированных событием Λ векторов. Согласно (20), имеем

$$\sum_{\Lambda \in \mathfrak{M}} \mathcal{P}_{\Lambda} < e^{-c_1 N_1};$$

внося это в (35), находим

$$P(S_N = V_m) = \sum_{\Lambda \in \mathfrak{M}} \mathcal{P}_{\Lambda} \cdot P_{\Lambda}(S'_{N_1} = (m_1 - n_1, \dots, m_{h_1} - n_{h_1})) + \mu_1, \quad (36)$$

где $|\mu_1| < e^{-\sqrt{N}}$ при большом N .

Найдем более удобное выражение для (28). С помощью (27) получим из (28)

$$\begin{aligned} P(S'_{N_1} = V_m) &= \frac{1}{V(2\pi)^{h_1} D_1^{(N_1)} \dots D_{h_1}^{(N_1)} \Delta_{h_1}^{(N_1)}} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2\Delta_{h_1}^{(N_1)}} Q\left(\frac{m_1 - E_1^{(N_1)}}{\sqrt{D_1^{(N_1)}}}, \dots, \frac{m_{h_1} - E_{h_1}^{(N_1)}}{\sqrt{D_{h_1}^{(N_1)}}}\right)\right) + R_3, \end{aligned} \quad (37)$$

где $\Delta_{h_1}^{(N_1)}$ — детерминант

$$\varphi(u_1, \dots, u_{h_1}) = u_1^2 + 2R_{12}^{(N_1)} u_1 u_2 + u_2^2 + \dots,$$

а Q — квадратичная форма, взаимная к $\varphi(u_1, \dots, u_{h_1})$.

Заметим для ориентировки, что $D_{\alpha}^{(N_1)} \asymp N$, так что для любого $\Lambda \in \mathfrak{M}$

$$P(S_{N_1} = V_m) < \frac{c_{20}}{N^{h_1/2}} \text{ для больших } N_1.$$

17. Возвращаясь к (36), рассмотрим случайный вектор $W_n = (n_1, n_2, \dots, n_{h_1})$, определяемый событием Λ . Из неравенства (3) раздела II выводим для покомпонентных дисперсий:

$$D_{\alpha}(W_n) < c_{21} \frac{N}{M_1} < c_{22} \frac{N}{\ln^6 N}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, h_1.$$

Обозначим $E_{\alpha}(W_n) = A_{\alpha}N$. Применяя неравенство Чебышева к компонентам $n_1, n_2, \dots, n_{h_1}$, после небольших вычислений найдем, что вероятность одновременного выполнения неравенств

$$|h_{\alpha} - A_{\alpha}N| < \frac{\sqrt{N}}{\ln N} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, h_1) \quad (38)$$

будет $> 1 - 1/\ln N$ при больших N .

Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$, где $\mathfrak{M}_1$ — множество таких событий Λ , для которых (38) не выполняется, а $\mathfrak{M}_2$ — множество таких, для которых (38) выполняется. Тогда

$$\sum_{\Lambda \in \mathfrak{M}_1} \mathscr{P}_{\Lambda} < \frac{1}{\ln N}, \quad (39)$$

в силу чего получаем:

$$P(S_n = W_m) = \sum_{\Lambda \in \mathfrak{M}_1} \mathscr{P}_{\Lambda} \cdot P(S_{N_1} = m_1 - n_1, \dots, m_{h_1} - n_{h_1}) + \mu_2,$$

$$|\mu_2| < \frac{c_{22}}{N^{h_1/2} \ln N}.$$

Используя (37) и (39) и учитывая $D_{\alpha N} \asymp N$, легко находим, что для больших N

$$P(S_N = V_m) = \sum_{\Lambda \in \mathfrak{M}_2} \mathscr{P}_{\Lambda} \cdot P(S_{N_1} = (m_1 - A_{1N}, \dots, m_{h_1} - A_{h_1N})) + \mu_3, \quad (40)$$

$$|\mu_3| < \frac{1}{(\ln N)^{2/3} N^{n_1/2}}.$$

18. Рассмотрим снова выражение (37). В него входят параметры $E_{\alpha}^{(N_1)}$, $D_{\alpha}^{(N_1)}$, $R_{\alpha\beta}^{(N_1)}$, зависящие от Λ . При переменных Λ математические ожидания этих параметров суть $E_{\alpha N}$, $D_{\alpha N}$, $\rho_{\alpha\beta}^{(N)}$, причем, согласно п. 15, 16 раздела II,

$$D(E_{\alpha}^{(N_1)}) < c_{18} N_1 < c_{18} \frac{N}{\ln^6 N},$$

$$D(D_{\alpha}^{(N_1)}) < c_{19} N \ln^6 N,$$

$$D(R_{\alpha\beta}^{(N_1)}) < \frac{1}{\ln^2 N}.$$

Поэтому, согласно неравенству Чебышева, вероятность одновременного выполнения неравенств

$$|E_{\alpha}^{(N_1)} - E_{\alpha N}| < \frac{\sqrt{N}}{\ln^2 N}, \quad (41)$$

$$|D_{\alpha}^{(N_1)} - D_{\alpha N}| < \sqrt{N} \ln^5 N, \quad (42)$$

$$|R_{\alpha\beta}^{(N_1)} - \rho_{\alpha\beta}^{(N)}| < \frac{1}{\sqrt{\ln N}} \quad (43)$$

будет $> 1 - 1/(\ln N)^{2/3}$.

Разобьем множество $\mathfrak{M}_2$ на $\mathfrak{M}_3$ и $\mathfrak{M}_4$, где $\mathfrak{M}_4$ — множество тех Λ , для которых одновременно выполняются (41)–(43), а $\mathfrak{M}_3$ — множество остальных Λ . Тогда, согласно п. 17, получим для больших N :

$$P(S_n = V_m) = \sum_{\Lambda \in \mathfrak{M}_4} \mathcal{P}_{\Lambda} \cdot P_{\Lambda}(S'_{N_1} = (m_1 - A_{1N}, \dots, m_{h_1} - A_{h_1N})) + \mu_4, \quad (44)$$

$$|\mu_4| < \frac{c_{21}}{N^{h_1/2} \ln^{2/3} N}.$$

Но для каждого $\Lambda \in \mathfrak{M}_4$ выполняются неравенства (41)–(43). Поэтому можно пытаться заменить в выражении

$$P_{\Lambda}(S'_{N_1} = (m_1 - A_{1N}, \dots, m_{h_1} - A_{h_1N})) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{h_1} D_1^{(N_1)} \dots D_{h_1}^{(N_1)} \Delta_{h_1}^{(N_1)}}} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2\Delta_{h_1}^{(N_1)}} Q\left(\frac{m_1 - A_{1N} - E_1^{(N_1)}}{\sqrt{D_1^{(N_1)}}}, \dots, \frac{m_{h_1} - A_{h_1N} - E_{h_1}^{(N_1)}}{\sqrt{D_{h_1}^{(N_1)}}}\right)\right) + \mu_1,$$

$$|\mu_1| < e^{-\sqrt{N}} \quad (45)$$

параметры $E_{\alpha}^{(N_1)}$, $D_{\alpha}^{(N_1)}$, $R_{\alpha\beta}^{(N_1)}$ для $\Lambda \in \mathfrak{M}_4$ на $E_{\alpha N}$, $D_{\alpha N}$, $\rho_{\alpha\beta}^{(N)}$. В силу того что при $|m_{\alpha}| > N(\ln N)^{1/6}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, h_1$) вероятность

$$P_{\Lambda}(S'_{N_1} = (m_1 - A_{1N}, \dots, m_{h_1} - A_{h_1N})) < \frac{e^{-(\ln N)^{1/6}}}{N^{h_1/2}} \left(A_{iN} \asymp \frac{N}{M_1}\right),$$

в выражении (45) такую замену для больших N совершить возможно с погрешностью, не превосходящей

$$\frac{1}{N^{h_1/2} (\ln N)^{1/4}}.$$

После этого (44) дает

$$P(S_N = V_m) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{h_1} D_{1N} \dots D_{h_1N} \Delta_{h_1N}}} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2\Delta_{h_1N}} Q_1\left(\frac{m_1 - C_{1N}}{\sqrt{D_{1N}}}, \dots, \frac{m_{h_1} - C_{h_1N}}{\sqrt{D_{h_1N}}}\right)\right) + \mu,$$

где

$$|\mu| < \frac{1}{N^{h_1/2} (\ln N)^{1/2}}, \quad C_{iN} = A_{iN} + E_{iN},$$

Q_1 и Δ_{h_1N} получаются из Q и $\Delta_{h_1}^{(N)}$ заменой $R_{\alpha\beta}^{(N)}$ на $\rho_{\alpha\beta}^{(N)}$.

19. Итак, мы получаем локальный закон (46), если система с самого начала находилась в каком-либо классе существенных состояний G_j . Если она находилась с самого начала в несущественном состоянии, то через ν шагов с вероятностью $< 1 - e^{-\lambda}$ попадает в какой-либо из классов G_j . Поэтому получаем следующую картину. Если система S , выходя откуда-нибудь, впервые попадает в класс существенных состояний G_j , причем состояния этого класса $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_{h_1+1}$ отвечают цепи Маркова типа (A*) (см. раздел I, п. 3), удовлетворяющей условию, по которому существует такое состояние (например, $\mathcal{E}_{h_1+1}$), что для любого другого состояния $\mathcal{E}_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, h_1)$ найдутся какие-либо состояния $\mathcal{E}_\gamma$ и $\mathcal{E}_\delta$ (возможно, совпадающие с $\mathcal{E}_\alpha$ и $\mathcal{E}_{h_1+1}$), что из $\mathcal{E}_\gamma$ можно прийти в $\mathcal{E}_\alpha$ и в $\mathcal{E}_{h_1+1}$ однотипными путями и из $\mathcal{E}_\alpha$ и $\mathcal{E}_{h_1+1}$ прийти в $\mathcal{E}_\delta$ однотипными путями, то имеет место локальный закон следующего вида.

Пусть $P(m_1, m_2, \dots, m_{h_1})$ — вероятность того, что в N опытах система побывает m_1 раз в $\mathcal{E}_1$, m_2 раз в $\mathcal{E}_2$, $\dots$, m_{h_1} раз в $\mathcal{E}_{h_1}$; тогда

$$P(m_1, m_2, \dots, m_{h_1}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{h_1} D_{1N} \dots D_{h_1N} \Delta_{h_1N}}} \times \\ \times \exp \left(-\frac{1}{2\Delta_{h_1N}} Q_1 \left(\frac{m_1 - C_{1N}}{\sqrt{D_{1N}}} \dots \frac{m_{h_1} - C_{h_1N}}{\sqrt{D_{h_1N}}} \right) \right) + \mu, \\ |\mu| < \frac{1}{N^{h_1/2} (\ln N)^{1/4}},$$

где $C_{1N}, C_{2N}, \dots, C_{h_1N}$ — величины, зависящие от G_j и N , которые легко отождествить с $E(m_1), \dots, E(m_{h_1})$, они удовлетворяют условиям $C_{\alpha N} \asymp N (\alpha = 1, 2, \dots, h_1)$ при $N \rightarrow \infty$; $D_{\alpha N}$ — такие же величины и $D_{\alpha N} \asymp N$ при $N \rightarrow \infty$; $|\rho_{\alpha\beta}^{(N)}| < 1 - c_{24}$ — такие же константы, и форма Q_1 взаимна к $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_{h_1}) = u_1^2 + 2\rho_{12}^{(N)} u_1 u_2 + \dots + u_{h_1}^2 > c_{25} (u_1^2 + \dots + u_{h_1}^2)$; Δ_{h_1N} — детерминант $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_{h_1})$.

Литература

1. Бернштейн С. Н. Распространение предельной теоремы теории вероятностей на суммы зависимых величин. — Успехи мат. наук, 1944, т. 10, вып. 1, с. 63—114.
2. Бернштейн С. Н. Определение нижней границы дисперсии сумм величин, образующих цепь. — Мат. сб., 1936, т. 1, вып. 1, с. 29—38.
3. Сапогов Н. А. Двумерная предельная теорема для двумерной цепи. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1949, т. 13, № 4, с. 301—314.
4. Бернштейн С. Н. О суммах зависимых величин. — Изв. АН СССР. Сер. 6, 1926, т. 20, № 15—17, с. 1459—1478.

5. Бернштейн С. Н. О суммах зависимых величин. — ДАН СССР. Сер. А, 1928, № 4, с. 55—60.
6. Сапогов Н. А. О сингулярных цепях Маркова. — ДАН СССР, 1947, т. 58, № 2, с. 193—196.
7. Линник Ю. В. О неоднородных цепях Маркова. — ДАН СССР, 1948, т. 60, № 1, с. 21—24.
8. Линник Ю. В. К теории неоднородных цепей Маркова. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1949, т. 13, № 1, с. 65—94.
9. Doeblin W. Le cas discontinu des probabilités en chaîne. — Publications de la faculté des sciences de l'université Massaryk, 1937, N 236. 13 p.
10. Fréchet M. Recherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités. 2. Paris, 1938. 315 p.
11. Колмогоров А. Н. Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1949, т. 13, № 4, с. 281—300.
12. Романовский В. И. О цепных корреляциях. Ташкент, 1939. 32 с.
13. Romanovsky V. Quelques problèmes nouveaux de la théorie des chaînes de Markoff. — Actual. sci. et industr., Paris, 1938, N 737, p. 43—50.
14. Колмогоров А. Н. Начала теории цепей Маркова с бесконечным числом возможных состояний. — Мат. сб., 1936, т. 1, вып. 4, с. 607—610.
15. Колмогоров А. Н. Цепи Маркова со счетным множеством возможных состояний. — Бюл. МГУ, 1937, т. 1, вып. 3, с. 1—16.
16. Koksma J. F. Diophantische Approximationen. Berlin, 1936. 157 S.

ОБ ОДНОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ КРАМЕРА И ЕГО ПРИМЕНЕНИИ

Совместно с А. А. Зингером

Вестник ЛГУ, 1955, № 11. Сер. мат., физ. и хим., вып. 4, с. 51—56

В теории вероятностей известна теорема Крамера [1], утверждающая, что если сумма двух независимых случайных величин распределена нормально, то распределение каждого слагаемого также нормально. В терминах характеристических функций это предложение может быть записано так: если две характеристические функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ удовлетворяют в некоторой окрестности нуля уравнению

$$f_1(t) f_2(t) = e^{i\gamma t - t^2/2},$$

то они суть характеристические функции нормальных законов. В теории независимых статистик понадобилось следующее обобщение упомянутого предложения.

Т е о р е м а. Если характеристические функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_s(t)$ удовлетворяют в некоторой окрестности нуля уравнению

$$f_1^{a_1}(t) f_2^{a_2}(t) \dots f_s^{a_s}(t) = e^{i\gamma t - t^2/2}, \quad (1)$$

где $a_j > 0$, $j=1, 2, \dots, s$, то они суть характеристические функции нормального закона.

Если числа a_j рациональные, то решение вопроса может быть сведено непосредственно к теореме Крамера; если же некоторые a_j иррациональны, то предложение уже не является непосредственным следствием теоремы Крамера. В настоящей заметке рассматривается доказательство указанного выше обобщения теоремы Крамера, которое затем применяется к доказательству теоремы В. П. Скитовича [2] об условиях независимости линейных форм независимых случайных величин.

И. Для решения уравнения (4) необходимо произвести симметризацию характеристических функций. Воспользуемся свойством характеристических функций $f(-t) = \overline{f(t)}$; $\varphi_j(t) = f_j(t) \times \times f_j(-t)$ является симметричной характеристической функцией. Так как характеристическая функция непрерывна и $f(0) = 1$, то в достаточно малой окрестности нуля

$$f_j^{\alpha_j}(t) f_j^{\alpha_j}(-t) = [f_j(t) f_j(-t)]^{\alpha_j}.$$

Тогда характеристические функции $\varphi_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, s$, в некоторой окрестности нуля удовлетворяют уравнению

$$\prod_{j=1}^s \varphi_j^{\alpha_j}(t) = e^{-t^2}. \quad (2)$$

Если мы докажем, что $\varphi_j(t)$ — характеристические функции нормального закона, то, по теореме Крамера, будет следовать тотчас же, что и $f_j(t)$ — характеристические функции нормального закона.

Для доказательства рассматриваемой теоремы необходимо несколько очевидных свойств характеристических функций [3].

а. Характеристическая функция симметричного закона имеет вид

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tx dF(x),$$

где $F(x)$ — функция распределения.

б. Если характеристическая функция дифференцируема $2q$ раз, то

$$\varphi^{(2q-1)}(t) = (-1)^q \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \cdot x^{2q-1} dF(x), \quad \varphi^{(2q-1)}(0) = 0,$$

$$\varphi^{(2q)}(t) = (-1)^q \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tx \cdot x^{2q} dF(x).$$

Для существования производных ¹⁾ характеристических функций

¹⁾ Четного порядка. (Прим. ред.).

необходимо существование их в нуле, причем производные характеристической функции в нуле связаны известным образом с моментами распределения

$$\varphi^{(k)}(0) = i^k a_k.$$

В рассматриваемом случае нечетные моменты равны нулю, а четные положительны. Следовательно, $\varphi^{(2q)}(0)$ имеет знак $(-1)^q$.

$$\begin{aligned} \text{В. } \frac{\varphi^{(2q-1)}(t)}{t} &\rightarrow (-1)^q a_{2q}, \quad \frac{\varphi^{(2q)}(t) - \varphi^{(2q)}(0)}{t^2} = \\ &= \frac{2(-1)^{q+1}}{t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{tx}{2} x^{2q} dF_j(x) \rightarrow \frac{(-1)^{q+1}}{2} a_{2q+2}. \end{aligned}$$

Для существования пределов достаточно устремлять t к нулю любой сходящейся к нулю последовательности действительных чисел.

Теперь докажем, что характеристические функции, удовлетворяющие уравнению (2), дифференцируемы любое число раз, что равносильно существованию всех моментов. Доказательство проводится по индукции. Перепишем основное уравнение:

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^s \varphi_j^{\alpha_j}(t) &= e^{-t^2}. \\ \varphi_j(t) &= 1 - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{tx}{2} dF_j(x) < \exp \left(-2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{tx}{2} dF_j(x) \right). \quad (3) \end{aligned}$$

При достаточно малых t неравенство (3) можно возводить в положительную степень α_j . Отсюда вытекает, что

$$\sum_{j=1}^s \alpha_j \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{tx}{2} dF_j(x) \leq \frac{t^2}{2}.$$

Таким образом, при каждом j получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{tx}{2} dF_j(x) \leq \frac{t^2}{2\alpha_j}.$$

Отсюда же, согласно свойству в характеристических функций, вытекает существование вторых моментов, или, что то же самое, вторых производных характеристических функций. Доказанное составляет базу индукции. Пусть $\varphi_j(t)$ ($j=1, 2, \dots, s$) дифференцируема $2q$ раз. Будем доказывать, что существуют тогда $2q+2$ производные. Продифференцируем исходное уравнение (2) $2q$ раз. Производная в левой части будет состоять из слагаемых, представляющих собой произведение степеней производных функ-

ций $\varphi_j(t)$ с коэффициентом вида $C\alpha_1(\alpha_1 - 1) \dots \alpha_s(\alpha_s - 1) \dots$, причем

$$\sum l_\mu m_\mu = 2q \quad (4)$$

(здесь l_μ — порядок производной, а m_μ — степень, в которой она входит; сами $\varphi_j(t)$ считаются производными нулевого порядка). Разобьем полученную сумму на три части, $S_1(t)$, $S_2(t)$, $S_3(t)$. В первую часть $S_1(t)$ включим слагаемые, содержащие производные порядка $2q$; $S_2(t)$ составим из слагаемых, содержащих производные нечетных порядков; $S_3(t)$ — все остальные слагаемые. Таким образом, $S_3(t)$ состоит из слагаемых, содержащих только четные производные порядков, меньших $2q$.

$$S_1(t) + S_2(t) + S_3(t) = H_{2q}(t) e^{-t^2}$$

($H_{2q}(t)$ — полином Эрмита),

$$S_1(t) = \sum \alpha_j \varphi_j^{(2q)}(t) \frac{\prod_{j=1}^s \varphi_j^{q_j}(t)}{\varphi_j(t)};$$

каждое слагаемое в $S_2(t)$ содержит по крайней мере две производные нечетного порядка $S_2(0) = 0$. $S_3(t)$ представляет собой четную функцию, которую можно два раза дифференцировать по t ,

$$\frac{S_1(t) - S_1(0)}{t^2} + \frac{S_2(t)}{t^2} + \frac{S_3(t) - S_3(0)}{t^2} = \frac{H_{2q}(t) - H_{2q}(0)}{t^2} e^{-t^2}.$$

Благодаря свойствам характеристических функций b , v , а также выбору $S_2(t)$ и $S_3(t)$ второе и третье слагаемые в левой части и правая часть равенства стремятся к конечным пределам при $t \rightarrow 0$. Следовательно,

$$\frac{S_1(t) - S_1(0)}{t^2}$$

стремится к конечному пределу при $t \rightarrow 0$. Иными словами, $S_1(t)$ дважды дифференцируема в нуле.

Рассуждая так же, как в случае вторых производных, убеждаемся, что существуют пределы

$$\frac{\varphi_j^{(2q)}(t) - \varphi_j^{(2q)}(0)}{t^2}$$

при $t \rightarrow 0$ по некоторой последовательности, что равносильно, согласно v , существованию производных порядка $2q+2$.

Для дальнейшего необходимо доказать, что функции $\varphi_j(t)$ целые. Доказательство этого состоит из двух этапов. Сначала доказывается существование положительного радиуса сходимости, а затем — сходимость рядов $\varphi_j(t)$ на всей плоскости комплексного переменного t .

Возведем уравнение (2) в степень $2q$ и продифференцируем его $2q$ раз в нуле. Все показатели α_j можно считать ≥ 1 . При этом все слагаемые в левой части, согласно б и (4), будут иметь одинаковые знаки $(-1)^q$. Отбрасывая в левой части все слагаемые, кроме $S_1(0)$, получим неравенство

$$(-1)^q \sum_{j=1}^s 2q \alpha_j \varphi_j^{(2q)}(0) < \frac{(2q)! q^{q2q}}{q!}.$$

Отсюда для каждого слагаемого получаем оценку

$$|\varphi_j^{(2q)}(0)| \leq (2q)! e^{q2q}; \left(\frac{q^n}{n!} \leq e^q\right). \quad (5)$$

Эти неравенства очевидным образом показывают, что радиус круга сходимости $\varphi_j(t)$ не меньше чем $1/\sqrt{2e}$; $\varphi_j(t)$ — четные функции, разлагающиеся в указанном круге в ряды со знакопередающимися коэффициентами. Для дальнейшего удобно перейти на мнимую ось. В этом случае ряды будут иметь положительные коэффициенты.

Положим $\varphi_j(i\tau) = \psi_j(\tau)$; ψ_j в указанном круге разлагаются в ряды с положительными коэффициентами. Согласно принципу аналитического продолжения, функции ψ_j удовлетворяют уравнению

$$\prod_{j=1}^s \psi_j^{\alpha_j}(\tau) = e^{\tau^2}. \quad (6)$$

Так как функции $\psi_j(\tau)$ четные, то удобно сделать замену $\tau^2 = u$ ($u \geq 0$), $\psi_j(\sqrt{u}) = \xi_j(u)$. Функции ξ_j удовлетворяют уравнению

$$\prod_{j=1}^s \xi_j^{\alpha_j}(u) = e^u. \quad (7)$$

Допустим теперь, что радиусы сходимости рядов ξ_j конечны. Пусть C — минимальный из них. Тогда точка $u=C$ должна быть особой²⁾ (положительность всех коэффициентов) для соответствующего ряда ξ_j . Выберем точку u_0 , удовлетворяющую условиям

$$C - \frac{1}{2e} < u_0 < C,$$

и положим $u = u_0 + v$,

$$\prod_{j=1}^s \xi_j^{\alpha_j}(u_0 + v) = e^{u_0 + v}. \quad (8)$$

Функции ξ_j можно разлагать в ряды в окрестности u_0 , причем получающиеся ряды имеют положительные коэффициенты и,

²⁾ См., например: Е. Т и т ч м а р ш. Теория функций. М.—Л., 1951. 507 с.

так как $\xi_j(u_0+v)$ как функции v удовлетворяют (8), аналогичному (7), то для коэффициентов имеют место оценки, идентичные (5). Значит, радиус сходимости этих рядов относительно u_0 не меньше $1/2e$, следовательно, C не может являться особой точкой. Полученное противоречие показывает, что $\xi_j(u)$ суть целые функции. Из уравнения (7) вытекает, что ни одна из них не обращается в нуль.

Доказательство завершается так же, как и в теореме Крамера. Применение теоремы Лиувилля показывает, что $\lg \xi_j(u)$ является многочленом степени не выше первой. Отсюда, возвращаясь к $\varphi_j(t)$, получаем: ³⁾

$$\varphi_j(t) = e^{-\sigma_j^2 t^2/2}.$$

II. Изложенная теорема дает возможность указать весьма простое доказательство теоремы Скитовича о независимости линейных форм (см. [2]). Именно, речь идет о следующем. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_k$ — независимые случайные величины.

$$\begin{aligned} L_1(X) &= a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_k X_k, \\ L_2(X) &= b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_k X_k. \end{aligned}$$

Если $L_1(X)$ и $L_2(X)$ независимы, то те случайные величины X_i , для которых $a_i b_i \neq 0$, распределены нормально.

Доказательство. В терминах характеристических функций условие независимости может быть записано так:

$$\prod_{i=1}^k \varphi_i(a_i u + b_i v) = \prod_{i=1}^k \varphi_i(a_i u) \varphi_i(b_i v). \quad (9)$$

В некоторой окрестности нуля все $\varphi_j(t) \neq 0$. Поэтому можно сократить те сомножители, для которых $a_i b_i = 0$. В дальнейшем можно считать $a_i b_i \neq 0$. Для простоты можно, не нарушая общности, положить $a_i = 1$ и перейти в указанной окрестности нуля к логарифмам

$$\ln \varphi_j(t) = \psi_j(t).$$

Уравнение (9) теперь запишется так:

$$\sum_{i=1}^k \psi_i(u + b_i v) = A(u) + B(v). \quad (10)$$

³⁾ Доказательство остается в силе, если уравнение (4) имеет место для $\{t_k\}$, $k=1, 2, \dots$, такой, что $t_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Умножим обе части (10) на $(x-u)$ и проинтегрируем по u от 0 до x :

$$\sum_{j=1}^k \int_0^x (x-u) \psi_j(u+b_j v) du = \int_0^x A(u)(x-u) du + B(v) \int_0^x (x-u) du,$$

$$\sum_{j=1}^k \int_{b_j v}^{x+b_j v} (x+b_j v-\tau) \psi_j(\tau) d\tau = \frac{x^2}{2} B(v) + \int_0^x A(u)(x-u) du,$$

$$\sum_{j=1}^k \int_0^{x+b_j v} (x+b_j v-\tau) \psi_j(\tau) d\tau = P(x) + \int_0^x A(u)(x-u) du.$$

$P(x)$ представляет собой многочлен второй степени от x с коэффициентами, являющимися функциями от v .

Левую часть можно два раза дифференцировать по v ; так как правая часть — многочлен, то его коэффициенты также допускают дифференцирование два раза по v . Дифференцируем два раза и полагаем $v=0$. Получим:

$$\sum_{j=1}^k b_j^2 \psi_j(x) = i\gamma x - cx^2. \blacksquare$$

Теперь остается только вернуться к экспонентам и применить доказанную в работе [1] теорему.

Л и т е р а т у р а

1. К р а м е р Г. Случайные величины и распределения вероятностей. М., 1947. 144 с.
2. С к и т о в и ч В. П. Линейные формы от независимых случайных величин и нормальный закон распределения. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1954, т. 18, № 2, с. 185—200.
3. К р а м е р Г. Математические методы статистики. М., 1948. 632 с.

О РАЗЛОЖЕНИИ КОМПОЗИЦИИ ЗАКОНОВ ГАУССА И ПУАССОНА

Теор. вероятн. и ее примен., 1957, т. 2, вып. 1, с. 34—59

0. В настоящей работе излагается некоторое обобщение известных теорем Г. Крамера [1] и Д. А. Райкова [2] о разложениях нормального и Пуассонова законов.

Пусть $X_1 \in N(a, \sigma)$ — нормальная случайная величина с параметрами (a, σ) , а X_2 подчиняется закону Пуассона. Под этим будем

понимать, как обычно, что $P(X_2 < x)$ имеет вид $F\left(\frac{x-a}{\beta}; \lambda\right)$, где a — любое реальное число, $\beta > 0$, $\lambda \geq 0$ и

$$F(x; \lambda) = e^{-\lambda} \sum_{k \leq x} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (x \geq 0).$$

Пусть X_2 стохастически не зависит от X_1 ; составим случайную величину

$$Y = X_1 + X_2. \quad (0.1)$$

Закон распределения Y будет композицией законов Гаусса и Пуассона. Пусть имеем другое разложение Y на сумму двух независимых величин Y_1 и Y_2 :

$$Y = Y_1 + Y_2. \quad (0.2)$$

Целью работы является доказательство следующей теоремы.
Т е о р е м а. *Композиция законов Гаусса и Пуассона может быть разложена только на подобные же композиции. Точнее: пусть $\sigma > 0$ и $\lambda > 0$. Для существования разложения вида (0.2) необходимо (и, тривиальным образом, достаточно), чтобы существовали разложения*

$$Y_j = Y_{j1} + Y_{j2}, \quad (0.3)$$

где случайные величины Y_{jk} независимы в совокупности, причем Y_{j1} нормальны, Y_{j2} пуассоновы и

$$\begin{aligned} D(Y_{11}) + D(Y_{21}) &= D(X_1), \\ D(Y_{12}) + D(Y_{22}) &= D(X_2). \end{aligned} \quad (0.4)$$

При использовании (0.4) теоремы Крамера и Д. А. Райкова почти непосредственно следуют из этой теоремы. Однако доказательство нашей теоремы весьма затруднительно в силу того, что здесь нельзя использовать основные факторы в доказательствах [1, 2] — конечность порядка характеристической функции (в дальнейшем х. ф.) для нормального случая и решетчатость распределения — для Пуассонова случая. Х. ф. композиции законов Гаусса и Пуассона имеет как целая функция комплексного переменного бесконечный порядок, а соответствующее распределение не является решетчатым. Ввиду этого приходится применять довольно глубокие теоремы теории целых функций.

1. Обращаясь к разложениям (0.2), замечаем, что, не нарушая общности, можно считать х. ф. $Y(t)$ — реальная переменная)

$$f_0(t) = \exp(-\gamma t^2 + \lambda(e^{it} - 1)) \quad (1.1)$$

за счет линейного преобразования случайных величин Y, Y_1, Y_2 (см., например, [3]); $\gamma > 0$; $\lambda > 0$. Введя еще х. ф.

$$f_1(t) = E \exp(itY_1); \quad f_2(t) = E \exp(itY_2),$$

получим:

$$f_0(t) = f_1(t) f_2(t). \quad (1.2)$$

Из (1.1) видим, что $f_0(t)$ можно продолжить на плоскость комплексного переменного, где она будет целой функцией без нулей.

Л е м м а 1 (Д. А. Райков). *Функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ могут быть продолжены на плоскость комплексных значений аргумента t и являются там целыми функциями. Равенство (1.2) выполняется на всей комплексной плоскости.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это следует, в силу свойств $f_0(t)$, из одной теоремы Д. А. Райкова (см. [4], с. 98—99).

Положим теперь:

$$it = z, \quad t = -iz, \quad (1.3)$$

так что

$$\varphi_j(z) = E \exp(zY_j) \quad (j = 1, 2), \quad (1.4)$$

$$\varphi_0(z) = E \exp(zY),$$

$$\varphi_0(z) = \varphi_1(z) \varphi_2(z). \quad (1.5)$$

Интегралы в (1.4) сходятся абсолютно и равномерно во всякой ограниченной области значений комплексного переменного z . Из (1.5) видим, что целые функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ не имеют нулей на комплексной плоскости, а из (1.4) видим, что они реальные на реальной оси (как и $\varphi_0(z)$). Из элементарной теории функций комплексного переменного следует, что существует целая функция $g(z)$ (одна из ветвей $\ln \varphi_1(z)$), реальная на реальной оси, такая, что

$$\varphi_1(z) = \exp g(z).$$

2. Положим: $\varphi(z) = e^\lambda \varphi_0(z)$. Имеем из (1.5): $\varphi_2(z) = \varphi_0(z) \exp(-g(z))$; или

$$e^\lambda \varphi_2(z) = \varphi(z) \exp(-g(z)), \quad (2.1)$$

или в силу (1.4)

$$\varphi(z) \exp(-g(z)) = e^\lambda E \exp(zY_2). \quad (2.2)$$

Далее, по (1.4),

$$\exp g(z) = E \exp(zY_1). \quad (2.3)$$

Пусть Y_0 — случайная величина, распределенная, как Y , и независимая от Y_1 . Тогда имеем:

$$\varphi(z) \exp g(z) = e^\lambda E \exp(z(Y + Y_1)). \quad (2.4)$$

Положим $z = x + iy$ (x, y реальные). В (2.2) и (2.4) используем хорошо известные свойства положительно определенных функций.

Л е м м а 2.

$$|\varphi(x + iy) \exp(\pm g(x + iy))| \leq \varphi(x) \exp(\pm g(x)), \quad (2.5)$$

где неравенство верно для любого знака и при всех реальных x и y .

Доказательство непосредственно видно из поведения правых частей (2.2) и (2.4). Мы видим также, что правая часть (2.5) положительна на реальной оси.

3. Положим

$$g(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (3.1)$$

где

$$u(x, y) = \operatorname{Re} g(z); \quad v(x, y) = \operatorname{Im} g(z).$$

Далее получаем:

$$\varphi(z) = \exp(\gamma z^2 + \lambda e^x), \quad (3.2)$$

$$|\varphi(z) \exp(\pm g(z))| = \exp[\gamma(x^2 - y^2) + \lambda e^x \cos y \pm u(x, y)]. \quad (3.3)$$

Отсюда выводится одна из основных лемм.

Лемма 3.

$$|u(x, y) - u(x, 0)| \leq \gamma y^2 + 2\lambda e^x \sin^2\left(\frac{y}{2}\right). \quad (3.4)$$

Доказательство. Из (3.3) и (2.5) имеем:

$$\gamma(x^2 - y^2) + \lambda e^x \cos y + u(x, y) \leq \gamma x^2 + \lambda e^x + u(x, 0), \quad (3.5)$$

$$\gamma(x^2 - y^2) + \lambda e^x \cos y - u(x, y) \leq \gamma x^2 + \lambda e^x - u(x, 0). \quad (3.6)$$

Из (3.5) находим:

$$u(x, y) - u(x, 0) \leq \gamma y^2 + 2\lambda e^x \sin^2\left(\frac{y}{2}\right).$$

из (3.6) —

$$u(x, y) - u(x, 0) \geq -\gamma y^2 - 2\lambda e^x \sin^2\left(\frac{y}{2}\right).$$

Полученные два неравенства равносильны (3.4).

Для дальнейшего весьма важен частный случай (3.4), когда $y = 2m\pi$ (m — любое целое число). В этом случае $\sin^2(y/2) = 0$, и мы имеем следующую лемму.

Лемма 4.

$$|u(x, 2m\pi) - u(x, 0)| \leq 4\gamma\pi^2 m^2 \quad (3.7)$$

для любых значений x и целых значений m .

4. Мы должны начать систематическое изучение $u(x, y)$; из лемм 3 и 4 видно, что нужно знать поведение $u(x, 0)$.

Лемма 5.

$$u(x, 0) = O(x^2 + e^x). \quad (4.1)$$

Доказательство. Обратимся к (2.2) и (2.4) и положим там $z = x$. Получим:

$$\exp(\gamma x^2 + \lambda e^x - u(x, 0)) = e^\lambda E \exp(xY_2), \quad (4.2)$$

$$\exp(\gamma x^2 + \lambda e^x + u(x, 0)) = e^\lambda E \exp x(Y_0 + Y_1). \quad (4.3)$$

Введем в рассмотрение еще нормальную величину Z , для которой

$$E \exp(xZ) = \exp \gamma x^2 \quad (4.4)$$

и которая независима от Y_2 . Умножая (4.4) на (4.2), найдем:

$$\exp(2\gamma x^2 + \lambda e^x - u(x, 0)) = e^{\lambda E} \exp x(Z + Y_2). \quad (4.5)$$

Рассмотрим случайные величины $Z + Y_2$ и $Y_0 + Y_2$. В каждую из них будет входить независимая от Y_2 гауссова компонента с ненулевой дисперсией ($\gamma \neq 0$). Отсюда непосредственно следует существование двух пар положительных чисел A_{j1}, A_{j2} ($j = 1, 2$), таких, что

$$P(A_{11} \leq Y_0 + Y_2 \leq A_{11} + 1) > 0, \quad (4.6)$$

$$P(-A_{12} - 1 \leq Y_0 + Y_2 \leq -A_{12}) > 0, \quad (4.7)$$

$$P(A_{21} \leq Z + Y_2 \leq A_{21} + 1) > 0, \quad (4.8)$$

$$P(-A_{22} - 1 \leq Z + Y_2 \leq -A_{22}) > 0. \quad (4.9)$$

Вернемся к (4.1), и будем считать, что $x > 0$; нам нужно будет доказать, что

$$u(x, 0) = O(e^x). \quad (4.10)$$

Пусть это неверно; тогда найдется последовательность $x_j \rightarrow \infty$, такая, что

$$|u(x_j, 0)| > 3\lambda e^{x_j}. \quad (4.11)$$

Здесь $u(x_j, 0)$ может быть положительной или отрицательной. Допустим сначала, что для бесконечной подпоследовательности $\{t_j\}$, $t_j \rightarrow \infty$, чисел x_j будет $u(t_j, 0)$. Тогда с помощью (4.11) найдем оценку левой части (4.5) для достаточно больших t_j :

$$\exp(2\gamma t_j^2 + \lambda e^{t_j} - u(t_j, 0)) < \exp(2\gamma t_j^2 - 2\lambda e^{t_j}) < \exp(-\lambda e^{t_j}). \quad (4.12)$$

Обращаясь к правой части (4.5), на основании (4.8) замечаем, что

$$E \exp t_j(Z + Y_2) > a_0 \exp a_1 t_j \quad (4.13)$$

(в дальнейшем a_i, c_i — положительные константы). При $t_j \rightarrow \infty$ получаем противоречие с (4.12). Приходится допустить, что при $j \geq j_0$ $u(x_j, 0) < 0$. Тогда обращаемся к (4.3) и находим, пользуясь (4.11),

$$\exp(\gamma x_j^2 + \lambda e^{x_j} + u(x_j, 0)) < \exp(-\lambda e^{x_j}), \quad (4.14)$$

но из (4.6) следует

$$E \exp x_j(Y_0 + Y_2) > a_0 \exp a_1 x_j, \quad (4.15)$$

что при $x_j \rightarrow \infty$ противоречит (4.14). Это доказывает (4.10).

Пусть теперь $x < 0$. Остается доказать, что

$$u(x, 0) = O(x^2 + 1). \quad (4.16)$$

Допустим, что (4.16) неверно и что существует последовательность $x_j \rightarrow \infty$, таких, что:

$$|u(-x_j, 0)| > 4\gamma x_j^2. \quad (4.17)$$

Сперва допустим, что для подпоследовательности $t_j \rightarrow \infty$ чисел x_j будет $u(-t_j, 0) > 0$. Из (4.17) находим оценку для правой части (4.5)

$$\exp(2\gamma t_j^2 + \lambda e^{-t_j} - u(-t_j, 0)) < \exp(-\gamma t_j^2) \quad (4.18)$$

для достаточно больших t_j . Но из (4.9) следует, что

$$E \exp(-t_j)(Z + Y_2) > a_0 \exp a_1 t_j, \quad (4.19)$$

а это противоречит (4.18) при больших t_j . Приходится допустить, что $u(-x_j, 0) < 0$ при $j \geq j_0$. Тогда обращаемся к (4.3) и из (4.17) находим

$$\exp(\gamma x_j^2 + \lambda e^{-x_j} + u(-x_j, 0)) < \exp(-\gamma x_j^2) \quad (4.20)$$

при $j \geq j_1$. Но из (4.7) вытекает

$$E \exp(-x_j)(Y_0 + Y_2) > a_0 \exp a_1 x_j,$$

что противоречит (4.20) при больших x_j и доказывает (4.16). Вместе с (4.10) это дает (4.1).

5. Лемма 6.

$$u(x, y) = O(x^2 + y^2 + e^x). \quad (5.1)$$

Доказательство. Из (3.4) находим:

$$|u(x, y)| \leq |u(x, 0)| + \gamma y^2 + 2\lambda e^x \sin^2\left(\frac{y}{2}\right).$$

Используя (4.1), непосредственно приходим к (5.1).

Теперь нам нужно получить оценки для $v(x, y)$. Для этого мы используем интеграл Пуассона (см., например, [5], с. 96—97).

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$; рассматриваем окружность $|z - z_1| = R$; полагаем $z = z_1 + Re^{i\varphi}$ на окружности и $z = z_1 + re^{i\psi}$ внутри нее; тогда

$$\begin{aligned} v(x, y) = v(x_1, y_1) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x_1 + R \cos \varphi, y_1 + R \sin \varphi) \times \\ \times \frac{Rr \sin(\psi - \varphi) d\varphi}{R^2 - 2Rr \cos(\psi - \varphi) + r^2}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Лемма 7. При $x \leq 0$

$$v(x, y) = O(|z|^3 + 1). \quad (5.3)$$

При $x > 0$ и любом $\varepsilon > 0$

$$v(x, y) = O(\exp |z| (1 + \varepsilon)). \quad (5.4)$$

Доказательство. Сперва займемся (5.3) и рассмотрим решетку всех целых точек (ξ, η) с $\xi \leq 0$. Докажем, что

$$v(\xi, 0) = O(|\xi|^3 + 1); \quad \xi \leq 0. \quad (5.5)$$

В (5.2) полагаем $y = 0$; $x = \xi - 1$; $x_1 = \xi$, $y_1 = 0$; $R = 4$; $r = 2$. С помощью (5.1) находим

$$|v(\xi - 1, 0)| \leq |v(\xi, 0)| + a_2(\xi^2 + 1), \quad (5.6)$$

откуда

$$|v(\xi - 1, 0)| \leq a_3 + a_2 \sum_{v=1}^{|\xi|+1} (v^2 + 1) \leq a_4(|\xi|^3 + 1), \quad (5.7)$$

что и доказывает (5.5). Пусть теперь задано целое $\xi \leq 0$; рассматриваем точки (ξ, η) с целыми $\eta > 0$. В (5.2) полагаем $x_1 = \xi$; $y_1 = \eta$; $R = 4$; $r \leq 2$. С помощью (5.1) находим

$$|v(\xi, \eta + 1)| \leq |v(\xi, \eta)| + a_2(\xi^2 + \eta^2 + 1), \quad (5.8)$$

откуда

$$|v(\xi, \eta + 1)| \leq |v(\xi, 0)| + a_2 \xi^2 (\eta + 1) + a_2 \sum_{v=1}^{\eta+1} (v^2 + 1). \quad (5.9)$$

Учитывая (5.5), получаем:

$$|v(\xi, \eta + 1)| \leq a_3(|\xi|^3 + |\eta|^3 + 1). \quad (5.10)$$

Аналогично действуем при $\eta < 0$. Это доказывает (5.3) для целых точек (x, y) с $x \leq 0$. Пусть (x, y) с $x \leq 0$ — любая точка, а (ξ, η) — ближайшая к ней целая точка (или одна из таковых). В (5.2) возьмем $x_1 = \xi$; $y_1 = \eta$; $R = 4$; $r \leq 2$. Используя (5.1), находим:

$$|v(x, y)| \leq |v(\xi, \eta)| + a_2(x^2 + y^2 + 1).$$

Так как (5.3) доказано для целых точек, то этим оно доказано вообще.

Перейдем к (5.4). Пусть в (5.2) $z = x + iy = re^{i\psi}$; $R = r + \varepsilon$. Имеем:

$$\begin{aligned} v(x, y) &= v(0, 0) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R \cos \varphi, R \sin \varphi) \times \\ &\times \frac{Rr \sin(\psi - \varphi) d\varphi}{R^2 - 2Rr \cos(\psi - \varphi) + r^2}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Из (5.1) видим, что

$$u(R \cos \varphi, R \sin \varphi) = O(e^{r(1+\varepsilon)}),$$

при этом (5.11) дает

$$v(x, y) = v(0, 0) + \left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) O(e^{r(1+\varepsilon)}),$$

что и доказывает (5.4).

6. Объединяя (5.1), (5.3) и (5.4), получаем оценку $g(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, которую сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 8. При $x \leq 0$

$$|g(z)| = O(|z|^3 + 1). \quad (6.1)$$

При $x > 0$ и любом $\varepsilon > 0$

$$|g(z)| = O(\exp |z| (1 + \varepsilon)). \quad (6.2)$$

Из леммы 8 следует, что $g(z)$ — функция экспонентного типа $\tau \leq 1$. Несколько углубляя предыдущие рассуждения, мы могли бы показать, что либо $\tau = 1$, либо $g(z)$ есть квадратный полином. Но мы предпочтем другой путь. Составим две целые функции:

$$G_{\pm}(z) = \gamma z^2 + \lambda e^{\pm z} \pm g(z). \quad (6.3)$$

Мы видим, что обе эти функции экспонентного типа $\tau \leq 1$. По крайней мере одна из них должна быть экспонентного типа $\tau = 1$. Будь это не так, функция

$$G_+(z) + G_-(z) = 2\gamma z^2 + 2\lambda e^z$$

была бы экспонентного типа $\tau' < 1$, что невозможно. Из двух функций (6.3) выберем ту, которая имеет экспонентный тип $\tau = 1$, и обозначим ее $G(z)$. Имеем:

$$G(z) = \gamma z^2 + \lambda e^z + s_0 g(z), \quad (6.4)$$

где $s_0 = +1$ или -1 .

Лемма 9. При $x \leq 1$

$$|G(z)| < c_1 (|z|^3 + 1). \quad (6.5)$$

При $x > 0$ и любом $\varepsilon > 0$

$$G(z) = O(\exp |z| (1 + \varepsilon)). \quad (6.6)$$

Доказательство непосредственно следует из (5.4) и леммы 8. При всяком $\varepsilon < 0$ (6.6) уже неверно, так как $G(z)$ имеет экспонентный тип $\tau = 1$.

7. Основным орудием дальнейших выводов будет служить известная теорема Р. Пэли—Н. Винера ([6], с. 12—13).

Теорема Р. Пэли—П. Винера. Следующие классы целых функций совпадают:

(1) класс всех целых функций $F(z)$ с условием

$$F(z) = O(e^{A|z|}); \quad A > 0,$$

принадлежащих L_2 на реальной оси, т. е. таких, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 dx < \infty;$$

(2) класс всех целых функций, изображаемых в виде

$$F(z) = \int_{-A}^A e^{izu} f(u) du,$$

где $f(u) \in L_2(-A, A)$, т. е. $f(u)$ — комплексная измеримая функция, суммируемая с квадратом по Лебегу.

(В дальнейшем все интегралы будут пониматься в смысле Лебега).¹⁾

Выведем важную для дальнейшего лемму.

Лемма 10.

$$G(z) = z^4 \int_{-1}^1 e^{zt} \Phi(t) dt + P(z), \quad (7.1)$$

где $\Phi(t) \in L_2(-1, 1)$ суммируема с квадратом по Лебегу и реальна, а $P(z)$ — полином не выше чем 3-й степени.

Доказательство. Введем вспомогательную функцию

$$H(z) = \frac{1}{z^4} \left(G(z) - G(0) - G'(0)z - \frac{G''(0)}{2}z^2 - \frac{G'''(0)}{6}z^3 \right) \quad (7.2)$$

и рассмотрим $H(z)$. Ясно, что это — целая функция экспонентного типа $\tau = 1$. На мнимой оси $z = iy$, согласно (6.5) и (7.2), будем иметь:

$$H(iy) \in L_2(-\infty, \infty), \quad \text{т. е.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |H(iy)|^2 dy < \infty.$$

Значит, $H(iz)$ будет принадлежать L_2 на реальной оси. Далее, она экспонентного типа $\tau = 1$. Отсюда, по теореме Р. Пэли—Н. Винера,

$$H(iz) = \int_{-1}^1 e^{izu} f(u) du$$

¹⁾ Если экспонентный тип $F(z)$ точно равен τ , можно взять $A = \tau$ (см. [7]).

при всех значениях iz ; стало быть,

$$H(z) = \int_{-1}^1 e^{zuf(u)} du, \quad (7.3)$$

где $f(u) \in L_2(-1, 1)$. Выражая $G(z)$ через $H(z)$ по формуле (7.2), получим

$$G(z) = z^4 \int_{-1}^1 e^{zuf(u)} du + P(z), \quad (7.4)$$

где $P(z)$ — полином степени ≤ 3 , появляющийся в числителе (7.2).

Остается доказать, что $f(u)$ можно выбрать реальной и что $P(z)$ имеет реальные коэффициенты. Последнее явствует из того, что $G(z)$ реальна на реальной оси. Полагая $z = x$, находим из (7.4):

$$G(x) = x^4 \int_{-1}^1 e^{xtf(t)} dt + P(x).$$

Беря сопряженные, имеем:

$$G(x) = x^4 \int_{-1}^1 e^{xt\overline{f(t)}} dt + P(x).$$

Отсюда

$$G(x) = x^4 \int_{-1}^1 e^{xt} \frac{f(t) + \overline{f(t)}}{2} dt + P(x).$$

Обозначая $\Phi(t) = \frac{f(t) + \overline{f(t)}}{2}$, приходим к (7.1), где $\Phi(t)$ реальна.

8. Для дальнейшего изучения свойств $\Phi(t)$ в (7.1) нам будет весьма полезна одна аналитическая лемма И. М. Виноградова. Она касается построения «гладких пиков», или «стаканчиков» (см. [8], с. 27, лемма 12).

Лемма («стаканчики» И. М. Виноградова). Пусть r целое, $r > 0$; α, β вещественные;

$$0 < \Delta < 0.5; \quad \Delta \leq \beta - \alpha \leq 1 - \Delta.$$

Тогда существует периодическая функция $\psi(x)$ с периодом 1 и с условиями:

- 1) $\psi(x) = 1$ при $x \in [\alpha + 0.5\Delta, \beta - 0.5\Delta]$;
- 2) $0 \leq \psi(x) \leq 1$ при $x \in [\alpha - 0.5\Delta, \alpha + 0.5\Delta]$ и $x \in [\beta - 0.5\Delta, \beta + 0.5\Delta]$;
- 3) $\psi(x) = 0$ при $x \in [\beta + 0.5\Delta, 1 + \alpha - 0.5\Delta]$;

4) $\psi(x)$ разлагается в ряд Фурье вида

$$\psi(x) = \beta - \alpha + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos 2\pi m x + b_m \sin 2\pi m x, \quad (8.1)$$

$$|a_m| \leq \frac{2}{\pi m}, \quad |b_m| \leq \frac{2}{\pi m}, \quad \text{если } m \leq \frac{1}{\Delta},$$

$$|a_m| \leq 2c\Delta, \quad |b_m| \leq 2c\Delta, \quad \text{если } m \leq \frac{1}{\Delta}, \quad \beta - \alpha \leq c\Delta,$$

$$|a_m| < \frac{2}{\pi m} \left(\frac{r}{\pi m \Delta} \right)^r, \quad |b_m| < \frac{2}{\pi m} \left(\frac{r}{\pi m \Delta} \right)^r, \quad \text{если } m > \frac{1}{\Delta}.$$

Несложное доказательство леммы И. М. Виноградова см. в работе [8] (с. 27—29; оно может быть еще упрощено применением аппарата сверток).

Нам будет важна еще оценка производных $\psi(x)$. Конструкция $\psi(x)$, по [8] (с. 27—28), такова: берем $\psi_0(x)$, периодическую с периодом 1,

$$\psi_0(x) = 1 \quad \text{при } x \in (\alpha, \beta),$$

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2} \quad \text{при } x = \alpha \text{ и } x = \beta,$$

$$\psi_0(x) = 0 \quad \text{при } x \in [\beta, 1 + \alpha].$$

Далее, полагаем $\delta = \Delta/2r$, и при $r = 1, 2, \dots, r$

$$\psi_r(x) = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \psi_{r-1}(x+z) dz = \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \psi_{r-1}(z) dz. \quad (8.2)$$

Тогда можем положить $\psi(x) = \psi_r(x)$. Пользуясь (8.2), найдем оценки для производных $\psi^{(\nu)}(x)$ при $\nu \leq r-1$. Имеем при $r \geq 2$:

$$\psi_r'(x) = \frac{1}{2\delta} [\psi_{r-1}(x+\delta) - \psi_{r-1}(x-\delta)]. \quad (8.3)$$

Так как для всех r $0 \leq \psi_r(x) \leq 1$, то из (8.3) выводим следующую лемму.

Лемма 11. При $\nu \leq r-1$

$$|\psi^{(\nu)}(x)| \leq C(r) \Delta^{-r}, \quad (8.4)$$

где $C(r)$ зависит только от r .

Запишем еще ряд (8.1) в комплексной форме:

$$\psi(x) = \beta - \alpha + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m e^{2\pi i m x}. \quad (8.5)$$

Тогда получим:

$$|\gamma_m| \leq 2(|a_m| + |b_m|). \quad (8.6)$$

9. Перейдем к изучению $\Phi(t)$ в (7.1). Если на сегменте $[a, b]$ две измеримые функции $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ совпадают почти везде,

то будем, как обычно, называть их эквивалентными и писать $\Phi_1(t) \approx \Phi_2(t)$. Мы применим лемму И. М. Виноградова для доказательства следующей леммы.

Лемма 12. В представлении (7.1)

$$\Phi(t) \approx 0 \text{ при } t \in [-1, 0], \quad (9.1)$$

так что можно написать:

$$G(z) - P(z) = z^4 \int_0^1 e^{zt} \Phi(t) dt. \quad (9.2)$$

Доказательство. Из (7.1) имеем:

$$H(z) = \frac{G(z) - P(z)}{z^4} = \int_{-1}^1 e^{zt} \Phi(t) dt. \quad (9.3)$$

$H(z)$ — целая функция, и из (6.5) найдем:

$$|H(x + iy)| < \frac{c_2}{(|y| + 1)} \text{ при } x \leq 0. \quad (9.4)$$

Будем рассматривать измеримую и суммируемую функцию $\Phi(t)$ на сегменте $S = [-1, 0]$. Точки $t_0 \in S$ называются точками Лебега $\Phi(t)$, если

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} |\Phi(t) - \Phi(t_0)| dt = 0 \quad (9.5)$$

(см. [9], с. 224). Далее, для всякой суммируемой функции $\Phi(t)$ почти все точки $t_0 \in S$ будут точками Лебега (см. там же).

Далее мы будем употреблять рассуждения о сингулярных интегралах типа П. И. Романовского (см. [9], с. 245), но для нас важны будут количественные оценки, так что нельзя будет прямо сослаться на П. И. Романовского.

Пусть $t_0 \in (-1, 0)$ — точка Лебега $\Phi(t)$, и пусть

$$\Phi(t_0) \neq 0. \quad (9.6)$$

Мы должны привести к противоречию (9.6).

Зададимся малым $\varepsilon > 0$ и выберем $h_0(t_0, \varepsilon)$ столь малым, что

$$\frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} |\Phi(t) - \Phi(t_0)| dt < \varepsilon, \quad (9.7)$$

если $0 < h \leq h(t_0, \varepsilon)$. В лемме И. М. Виноградова положим $x = t/2$, так что получится функция $\varphi(t)$ с периодом 2.

Рассмотрим интеграл

$$\int_{-1}^1 e^{xt} \Phi(t) \varphi(t) dt. \quad (9.8)$$

Будем считать $x < 0$; $|x|$ большим числом. При заданном x будем строить $\varphi(t)$ в зависимости от точки t_0 и значения x , вводя, таким образом, в (9.8) ядро $\varphi(t) = W(t, t_0, x)$. В (9.7) выберем $h_0(t_0, \varepsilon)$, помимо нужного нам условия, еще столь малым, что

$$h_0(t_0, \varepsilon) \leq \frac{1}{x^2}. \quad (9.9)$$

После этого в лемме И. М. Виноградова положим $r = 20$; $\Delta = h_0(t_0, \varepsilon)/100$; $\alpha = t_0 - 0.5\Delta$; $\beta = t_0 + h_0 - 0.5\Delta$ ($h_0 = h_0(t_0, \varepsilon)$). Имеем, согласно (9.7),

$$\left| \int_{-1}^1 e^{xt} W(t, t_0, x) \Phi(t) dt - \int_{-1}^1 e^{xt} W(t, t_0, x) \Phi(t_0) dt \right| \leq \\ \leq \int_{-1}^1 e^{xt} W(t, t_0, x) |\Phi(t) - \Phi(t_0)| dt < 4e^{xt_0} \varepsilon h_0, \quad (9.10)$$

ибо $t_0 < 0$ и $h_0 \leq 1/x^2$.

Будем считать также h_0 столь малым, что интервал интегрирования²⁾ не выходит из $(-1, 0)$. Далее, ввиду того что

$$\int_{-1}^1 W(t, t_0, x) dt = 2(\beta - \alpha),$$

имеем

$$\left| \int_{-1}^1 e^{xt} W(t, t_0, x) \Phi(t_0) dt \right| > |\Phi(t_0)| h_0 e^{(t_0 + h_0)x} > \frac{1}{2} |\Phi(t_0)| e^{xt_0} h_0, \quad (9.11)$$

так как $e^{xh_0} = 1 + O(1/|x|)$. В сочетании с (9.10) это приводит нас к важному выводу, что при

$$h_0 \leq \min\left(h_1(t_0), \frac{1}{x^2}\right), \quad (9.12)$$

где $h_1(t_0)$ зависит только от t_0 , получим

$$\left| \int_{-1}^1 e^{xt} W(t, t_0, x) \Phi(t) dt \right| > \frac{h_0}{4} |\Phi(t_0)| e^{xt_0}. \quad (9.13)$$

²⁾ Имеется в виду интервал $(t_0 - 0.5\Delta; t_0 + 0.5\Delta)$. (Прим. ред).

Теперь рассмотрим разложение

$$W(t, t_0, x) = \beta - \alpha + \sum'_m \gamma_m e^{\pi m i t}, \quad (9.14)$$

где все коэффициенты будут зависеть от t_0 и x . Согласно лемме И. М. Виноградова, выбору $r=20$ и (8.6), имеем:

$$|\gamma_m| \leq C_3 h_0^{-20} |m|^{-21}. \quad (9.15)$$

Далее,

$$\int_{-1}^1 e^{xt} \gamma_m e^{\pi m i t} \Phi(t) dt = \gamma_m \int_{-1}^1 \exp t(x + m\pi i) \Phi(t) dt = \gamma_m H(x + m\pi i).$$

В силу (9.4), ввиду того что $x \leq 0$,

$$|\gamma_m H(x + m\pi i)| \leq \frac{|\gamma_m| c_2}{(|m\pi| + 1)}. \quad (9.16)$$

Далее, согласно (8.6) и оценкам леммы И. М. Виноградова (п. 8), $|\gamma_m| \leq 8/|\pi m|$ при $1 \leq |m| \leq 1/\Delta = 100/h_0$. При $|m| > 1/\Delta$

$$|\gamma_m| < c_4 h_0^{-20} |m|^{-21},$$

и при $m=0$ получается член $(\beta - \alpha) H(x) = O(1)$ для $x \leq 0$. Собирая эти оценки, находим:

$$\left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m H(x + m\pi i) \right| < c_3 + c_4 h_0^{-20}. \quad (9.17)$$

Далее, ряд (9.14) сходится абсолютно и равномерно. Стандартными приемами убеждаемся в законности почленного интегрирования ряда (9.14) в (9.13). Имеем равенство

$$\int_{-1}^1 e^{xt} W(t, t_0, x) \Phi(t) dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m H(x + m\pi i). \quad (9.18)$$

Подставляя его в (9.13) и используя (9.17), находим:

$$c_3 + c_4 h_0^{-20} > \frac{h_0}{4} |\Phi(t_0)| e^{xt_0},$$

или

$$|\Phi(t_0)| < c_5 h_0^{-21} e^{xt_0}. \quad (9.19)$$

Выберем x столь большим, что, согласно (9.12),

$$h_0 = \frac{1}{x^2}.$$

Тогда (9.19) дает:

$$|\Phi(t_0)| < c_5 x^{42} e^{-|xt_0|}.$$

При этом $t_0 \neq 0$, ибо $t_0 \in (-1, 0)$. При $x \rightarrow \infty$ получаем $\Phi(t_0) = 0$, что противоречит (9.6). Итак, во всех точках Лебега $\Phi(t)$ при $t \in (-1, 0)$, т. е. почти везде, $\Phi(t) = 0$. Значит, $\Phi(t) \approx 0$, и лемма 12 доказана.

10. Обозначим $G(z) - P(z) = G_0(z)$. Имеем:

$$G_0(z) = z^4 \int_0^1 e^{zt} \Phi(t) dt. \quad (10.1)$$

Положим $G_0(z) = u_0(x, y) + iv_0(x, y)$; в силу реальности $\Phi(t)$ найдем из (10.1) непосредственным подсчетом:

$$\begin{aligned} u_0(x, y) = & \int_0^1 e^{xt} (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) \cos yt \Phi(t) dt + \\ & + \int_0^1 e^{xt} (-4x^3y + 4xy^3) \sin yt \Phi(t) dt. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Пусть $\{\gamma_m\}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) — набор реальных чисел при условии

$$|\gamma_m| < \frac{A_1(x)}{(m+1)^{20}}. \quad (10.3)$$

Составим четный ряд Фурье:

$$\Lambda(t, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m \cos 2\pi mt. \quad (10.4)$$

В правой части (10.2) при заданном x будем полагать $y = 2\pi t$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), умножать на γ_m и складывать; в силу (10.3) законно это делать под знаком интеграла в (10.2).

Полученный результат обозначим $F(\Lambda, u_0)$. Ввиду (10.3) при заданном x ряд (10.4) можно не менее 18 раз дифференцировать по t . Простой подсчет³⁾ дает:

$$F(\Lambda, u_0) = \int_0^1 \frac{\partial^4}{\partial t^4} (e^{xt} \Lambda(t, x)) \Phi(t) dt. \quad (10.5)$$

³⁾ Используется равенство $u_0(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial^4}{\partial t^4} (e^{xt} \cos yt) \Phi(t) dt$, которое по-

лучается отделением реальной части в равенстве $G_0(z) = \int_0^1 \frac{\partial^4}{\partial t^4} (e^{zt}) \Phi(t) dt$.

(Прим. ред.).

Далее, формально имеем

$$F(\Lambda, u_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m u_0(x, 2\pi m). \quad (10.6)$$

Покажем, что ряд (10.6) будет абсолютно сходящимся.

Лемма 13. При целых m и $x > 0$

$$|u_0(x, 2\pi m) - u_0(x, 0)| \leq (12|\alpha_0|x + 4|\alpha_1| + 8\gamma)\pi^2 m^2, \quad (10.7)$$

если $P(z)$ в (9.2) имеет вид

$$P(z) = \alpha_0 z^3 + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z + \alpha_3. \quad (10.8)$$

Доказательство. Имеем:

$$G_0(z) = G(z) - P(z) = \gamma z^2 - P(z) + \lambda e^z + s_0 g(z), \quad (10.9)$$

где $s_0 = +1$ или -1 . Согласно (3.7), имеем для $u(x, y) = \operatorname{Re} g(z)$:

$$|u(x, 2\pi m) - u(x, 0)| \leq 4\gamma\pi^2 m^2. \quad (10.10)$$

Полагая $u_1(x, y) = \operatorname{Re}(\gamma z^2 - P(z) + \lambda e^z)$, найдем:

$$u_1(x, y) = -\alpha_0(x^3 - 3xy^2) + (\gamma - \alpha_1)(x^2 - y^2) - \alpha_2 x - \alpha_3 + \lambda e^x \cos y. \quad (10.11)$$

Ввиду этого для целых m

$$|u_1(x, 2\pi m) - u_1(x, 0)| \leq 12|\alpha_0|x\pi^2 m^2 + 4|\gamma - \alpha_1|\pi^2 m^2, \quad (10.12)$$

что вместе с (10.10) дает (10.7).

Таким образом, для ряда (10.6) имеем:

$$F(\Lambda, u_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m u_0(x, 2\pi m) = u_0(x, 0) \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m + F_1(\Lambda, u_0), \quad (10.13)$$

$$F_1(\Lambda, u_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m [u_0(x, 2\pi m) - u_0(x, 0)] \quad (10.14)$$

и

$$\begin{aligned} |F_1(\Lambda, u_0)| &\leq \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m| |u_0(x, 2\pi m) - u_0(x, 0)| \leq \\ &\leq c_6 x A_1(x) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m^2}{(m+1)^{20}} < c_7 x A_1(x). \end{aligned}$$

Эта оценка ряда (10.14) будет нужна в дальнейшем.

11. Вернемся к основной формуле (10.5). Если бы $\Phi(t)$ была четырежды дифференцируемой функцией t , то было бы выгодно употреблять в (10.5) интегрирование по частям. Но в общем случае $\Phi(t)$ лишь измерима и суммируема с квадратом, и приходится избирать обходные пути.

Пусть $U(t, x)$ — непрерывная при каждом $x > 0$ функция t , заданная при $t \in [0, 1]$. Частным решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4} (e^{xt} \Gamma(t, x)) = e^{xt} U(t, x) \quad (11.1)$$

будет, как нетрудно проверить,

$$\Gamma(t, x) = \frac{1}{6} \int_0^t e^{x(t-v)} (t-v)^3 U(v, x) dv. \quad (11.2)$$

Пусть $h > 0$ — любое число, такое, что $t + 4h$ и t лежат в сегменте $[0, 1]$. Составим четвертую разность $\Phi(t)$:

$$\Delta^4 \Phi(t) = \Phi(t+4h) - 4\Phi(t+3h) + 6\Phi(t+2h) - 4\Phi(t+h) + \Phi(t). \quad (11.3)$$

Целью всех дальнейших рассуждений является доказательство соотношения

$$\Delta^4 \Phi(t) = 0 \quad (11.4)$$

почти для всех t при данном h . Это, однако, потребует вспомогательных рассуждений.

Имеем из (11.2) $\Gamma(0, x) = 0$. Для дальнейшего важно также поведение

$$\begin{aligned} \Gamma(1, x) &= \frac{1}{6} \int_0^1 e^{x(v-1)} (1-v)^3 U(v, x) dv = \\ &= \frac{1}{6} e^{-x} \int_0^1 e^{xv} (1-v)^3 U(v, x) dv. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Пусть $W(\xi)$ — непрерывная функция ξ , причем $W(\xi) = 0$ при $|\xi| \geq \xi_0$ ($\xi_0 \leq h/100$); пусть $t_0 \in (0, 1)$ таково, что при $j = 0, 1, \dots, 4$

$$[t_0 + jh, t_0 + jh + \xi_0] \subset (0, 1). \quad (11.6)$$

Соответственно (11.3) построим функцию

$$\begin{aligned} U(v, x, t_0) &= W(v - t_0 - 4h) - 4e^{xh} W(v - t_0 - 3h) + \\ &+ 6e^{2xh} W(v - t_0 - 2h) - 4e^{3xh} W(v - t_0 - h) + e^{4xh} W(v - t_0). \end{aligned} \quad (11.7)$$

Лемма 14. При выборе $U(v, x) = U(v, x, t_0)$ в (11.2) имеем:

$$\Gamma(1, x) = 0. \quad (11.8)$$

Доказательство. В силу (11.5) надлежит доказать, что

$$\int_0^1 e^{xv} (1-v)^3 U(v, x, t_0) dv = 0.$$

Имеем при целых $j \geq 0$:

$$\int_0^1 e^{xv} (1-v)^3 W(v - t_0 - jh) dv = \\ = \exp x(t_0 + jh) \int_{-\xi_0}^{\xi_0} e^{x\xi} (1 - t_0 - jh - \xi)^3 W(\xi) d\xi.$$

Отсюда, используя (11.7), находим

$$\int_0^1 e^{xv} (1-v)^3 U(v, x, t_0) dv = \exp(t_0 + 4h) x \int_{-\xi_0}^{\xi_0} e^{x\xi} W(\xi) \times \\ \times [(1 - t_0 - 4h - \xi)^3 - 4(1 - t_0 - 3h - \xi)^3 + \\ + 6(1 - t_0 - 2h - \xi)^3 - 4(1 - t_0 - h - \xi)^3 + (1 - t_0 - \xi)^3] d\xi = 0,$$

что и доказывает лемму.

12. Впредь будем рассматривать $\Gamma(t, x)$, задаваемые формулой (11.2), где $U(v, x) = U(v, x, t_0)$ задается (11.7). Тогда будем иметь

$$\Gamma(0, x) = \Gamma(1, x) = 0 \quad (12.1)$$

при всех $x > 0$.

Пусть t_0, h и ξ_0 таковы, что

$$t_0 \pm (4h + \xi_0) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \quad (12.2)$$

(так что $t_0 \geq 1/2$). Построим по данному t_0 функцию $U(v, x, t_0)$ (см. (11.7)). Мы видим, что

$$U(v, x, t_0) = 0 \quad \text{при } v \leq \frac{1}{2}, \quad (12.3)$$

так что, согласно (11.2),

$$\Gamma(t, x) = 0 \quad \text{при } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \quad (12.4)$$

Введем теперь функцию

$$\Lambda(t, x) = \Gamma(t, x) + \Gamma(1 - t, x). \quad (12.5)$$

Это — четная функция $t - 1/2$ при каждом x . Далее, в силу (12.1)

$$\Lambda(0, x) = \Lambda(1, x) = 0 \quad (12.6)$$

при всех $x > 0$.

Рассмотрим подробнее поведение $\Lambda(t, x)$ при заданном $x > 0$ и $t \in [0, 1]$. Имеем, согласно (12.4),

$$\Gamma(1 - t, x) = 0 \quad \text{при } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \quad (12.7)$$

Отсюда, по определению $\Lambda(t, x)$ (12.5),

$$\begin{aligned}\Lambda(t, x) &= \Gamma(t, x) \text{ при } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ \Lambda(t, x) &= \Gamma(1-t, x) \text{ при } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right].\end{aligned}\quad (12.8)$$

Рассмотрим действие оператора $\frac{\partial^4}{\partial t^4}$ на функцию $e^{xt}\Lambda(t, x)$. Из (12.8) и (11.1) имеем:

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4}(e^{xt}\Lambda(t, x)) = e^{xt}U(t, x, t_0) \text{ при } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \quad (12.9)$$

Далее, из (11.2):

$$\begin{aligned}\Gamma(1-t, x) &= \frac{1}{6} \int_0^{1-t} e^{x(v-1+t)} (1-t-v)^3 U(v, x, t_0) dv = \\ &= \frac{1}{6} e^{x(t-1)} \int_0^{1-t} e^{xv} (1-t-v)^3 U(v, x, t_0) dv.\end{aligned}\quad (12.10)$$

Таким образом, при $t \in [0, 1/2]$ в силу (12.8)

$$e^{xt}\Lambda(t, x) = \frac{1}{6} e^{x(2t-1)} \int_0^{1-t} e^{xv} (1-t-v)^3 U(v, x, t_0) dv. \quad (12.11)$$

13. Нам нужно получить оценку для $\frac{\partial^4}{\partial t^4}(e^{xt}\Lambda(t, x))$ при $t_0 \pm \pm(4h + \xi_0) \in (1/2, 1)$ и $t \in [0, 1/2]$. При определении $U(v, x, t_0)$ в (11.7) будем считать $W(\xi)$ заданной в виде «стаканчика» И. М. Виноградова (см. п. 8), так что

$$0 \leq W(\xi) \leq 1; \quad W(\xi) = 0; \quad |\xi| \geq \xi_0. \quad (13.1)$$

Применяя оператор $\partial^4/\partial t^4$ к (12.11), видим, что результат состоит из ограниченного числа членов вида

$$ae^{x(2t-1)}x^\nu \int_0^{1-t} e^{xv} (1-t-v)^\mu U(v, x, t_0) dv, \quad (13.2)$$

или

$$a'e^{x(2t-1)}x^\nu e^{x(1-t)} U(1-t, x, t_0), \quad (13.3)$$

где a, a' — константы; $0 \leq \nu \leq 4; 0 \leq \mu \leq 3$.

Лемма 15. При $x \geq 1, t \in [0, \frac{1}{2}]; t_0 \pm (4h + \xi_0) \in (\frac{1}{2}, 1)$

$$\left| \frac{\partial^4}{\partial t^4}(e^{xt}\Lambda(t, x)) \right| \leq c_8 x^4 \exp(1 - t_0 + 4h + 3\xi_0) x. \quad (13.4)$$

Доказательство. Из (11.7) видим, что $U(v, x, t_0) = 0$ при v , не принадлежащем системе сегментов

$$[t_0 + jh - \xi_0, t_0 + jh + \xi_0]; j = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Учитывая это, получаем для (13.3) оценку

$$|a'x^ye^{xt}U(1-t, x, t_0)| \leq 6|a'|x^4 \max_{0 \leq j \leq 4} \exp x(1-t_0-jh+\xi_0+4h) \leq c_9x^4 \exp x(1-t_0+4h+\xi_0). \quad (13.5)$$

Теперь обращаемся к (13.2). Ввиду свойств $U(v, x, t_0)$ при $1-t < t_0 - \xi$ ($t > 1-t_0 + \xi_0$) интеграл в (13.2) равен 0, так что для (13.2) получим оценку (см. (11.7))

$$6|a|x^4 \exp x[2(1-t_0+\xi_0)-1] \exp x(1-t_0+\xi_0) \exp 4xh = 6|a|x^4 \exp x(2-3t_0+4h+3\xi_0). \quad (13.6)$$

Но $2-3t_0 < 1$, так как $t_0 > 1/2$, так что оценки (13.5) и (13.6) можно объединить в (13.4), и лемма доказана.

14. Конкретизируем теперь выбор «стаканчика» И. М. Виноградова $W(\xi)$. Будем считать при заданном t_0 $\xi_0 = \xi_0(t_0, x)$ заданной функцией x ; в лемме И. М. Виноградова возьмем $r = 20$; $\Delta = \xi_0/100$; $\alpha = 0.5\Delta$; $\beta = \xi_0 - 0.5\Delta$. Согласно лемме 11 (8.4), получим при $v \leq 18$

$$|W^{(v)}(\xi)| \leq c_9 \xi_0^{-18}. \quad (14.1)$$

При заданном t_0 ξ_0 зависит от x . Полагая

$$\xi_0^{-18} = A_0(x), \quad (14.2)$$

найдем:

$$|W^{(v)}(\xi)| \leq c_9 A_0(x). \quad (14.3)$$

Нам надо получить оценку для коэффициентов разложения в ряд Фурье функции $\Gamma(t, x)$.

Лемма 16.

$$\left| \frac{\partial^4}{\partial t^4} \Gamma(t, x) \right| < c_{10} x^{18} A_0(x) e^{4xh} \quad (14.4)$$

при $0 \leq v \leq 18$.

Доказательство. Согласно (11.2),

$$\Gamma(t, x) = \frac{1}{6} \int_0^t e^{x(v-t)} (t-v)^3 U(v, x, t_0) dv.$$

Имеем: $\Gamma(t, x) = 0$ при $t > t_0 + 4h + \xi_0$, ибо $U(v, x, t_0) = 0$ при $v \geq t_0 + 4h + \xi_0$. Далее, $\Gamma(t, x) = \Gamma(0, x)$ при $t < t_0 - \xi_0$, ибо $U(v, x, t_0) = 0$ при $v < t_0 - \xi_0$.

Далее, $\Gamma(1, x) = 0$ (11.8). Отсюда следует, что $\Gamma^{(v)}(0, x) = \Gamma^{(v)}(1, x) = 0$ для всех целых v . Далее, из (11.2), непосред-

ственно дифференцируя и оценивая слагаемые, находим при $0 \leq v \leq 18$ в силу (14.3)

$$\left| \frac{\partial^v}{\partial t^v} \Gamma(t, x) \right| \leq c_{10} x^{18} A_0(x) e^{4xh},$$

что совпадает с (14.4).

Лемма 17. При разложении в ряд Фурье

$$\Gamma(t, x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos 2\pi m t + b_m \sin 2\pi m t \quad (14.5)$$

имеем оценки

$$|a_m| + |b_m| < \frac{c_{11} x^{18} A_0(x) e^{4xh}}{(m+1)^{16}}. \quad (14.6)$$

Доказательство. При $t=0$ и $t=1$ $\Gamma^{(v)}(t, x) = 0$ для всех целых $v \geq 0$. При $0 \leq v \leq 18$ и $t \in [0, 1]$ имеем оценку (14.4). На основании этого (14.6) следует из известных теорем теории рядов Фурье (см., например, [10], с. 605—606).

15. На основании оценок, найденных в п. 14 для коэффициентов Фурье вспомогательной функции

$$\Gamma(t, x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos 2\pi m t + b_m \sin 2\pi m t,$$

легко найдем такие же оценки для основной функции:

$$\Lambda(t, x) = \Gamma(t, x) + \Gamma(1-t, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m \cos 2\pi m t. \quad (15.1)$$

Очевидно, $\gamma_m = 2a_m$, и из (14.6) находим:

$$|\gamma_m| < \frac{c_{12} x^{18} A_0(x) e^{4xh}}{(m+1)^{16}}. \quad (15.2)$$

Далее, весьма важно отметить, что в силу

$$\Lambda(0, x) = \Lambda(1, x) = 0 \quad (15.3)$$

имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m = \frac{\Lambda(0, x) + \Lambda(1, x)}{2} = 0. \quad (15.4)$$

Вернемся к формулам (10.5) и (10.6):

$$F(\Lambda, u_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m u_0(x, 2\pi m) = \int_0^1 \frac{\partial^4}{\partial t^4} (e^{xt} \Lambda(t, x)) \Phi(t) dt. \quad (15.5)$$

Лемма 18.

$$|F(\Lambda, u_0)| < c_{13} x^{19} A_0(x) e^{4xh} \text{ при } x \geq 1. \quad (15.6)$$

Доказательство. В силу (15.4) находим

$$F(\Delta, u) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m u_0(x, 2\pi m) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m (u_0(x, 2\pi m) - u_0(x, 0)),$$

откуда, по лемме 13(10.7) и (15.2),

$$\begin{aligned} |F(\Delta, u_0)| &\leq \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m| |u_0(x, 2\pi m) - u_0(x, 0)| \leq \\ &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_{12} x^{18} A_0(x) e^{4xh}}{(m+1)^{16}} c_{14} x m^2 < c_{13} x^{19} A_0(x) e^{4xh} \end{aligned}$$

при $x \geq 1$, что и доказывает (15.6).

16. Обозначим

$$\begin{aligned} I_{1/2} &= \int_0^{1/2} \frac{\partial^4}{\partial t^4} (e^{xt} \Lambda(t, x)) \Phi(t) dt; \\ I_1 &= \int_{1/2}^1 \frac{\partial^4}{\partial t^4} (e^{xt} \Lambda(t, x)) \Phi(t) dt. \end{aligned}$$

Из (15.5) находим:

$$F(\Delta, u_0) = I_{1/2} + I_1.$$

По лемме 15(13.4) имеем:

$$\begin{aligned} |I_{1/2}| &\leq c_8 x^4 \exp(1 - t_0 + 4h + 3\xi_0) x \int_0^{1/2} |\Phi(t)| dt \leq \\ &\leq c_{15} x^4 \exp(1 - t_0 + 4h + 3\xi_0) x. \end{aligned} \quad (16.1)$$

Теперь обращаемся к I_1 . В силу (12.9)

$$I_1 = \int_{1/2}^1 e^{xv} U(v, x, t_0) \Phi(v) dv. \quad (16.2)$$

Функция $U(v, x, t_0)$ выражается формулой (11.7). Имеем ($0 \leq j \leq 4$):

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^1 e^{(4-j)xh} W(v - t_0 - jh) e^{xv} \Phi(v) dv &= \int_{v=t_0+jh-\xi_0}^{t_0+jh+\xi_0} \exp x(v + (4-j)h) \times \\ &\times W(v - t_0 - jh) \Phi(v) dv = \\ &= \exp(4h + t_0) x \int_{-\xi_0}^{\xi_0} e^{\xi x W(\xi)} \Phi(t_0 + jh + \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (16.3)$$

В силу (11.7) имеем из (16.3)

$$I_1 = e^{(t_0+4h)x} \int_{-\xi_0}^{\xi_0} e^{\xi x} W(\xi) F(t_0 + \xi) d\xi, \quad (16.4)$$

где

$$F(t_0 + \xi) = \Delta^4 \Phi(t_0 + \xi) \quad (16.5)$$

при заданном значении h (см. (11.3)).

Пока мы не накладывали на t_0 никаких условий, помимо $t_0 \pm (4h + \xi_0) \in [1/2, 1]$. Сейчас мы наложим дополнительные условия. Рассмотрим при заданном h измеримую функцию τ

$$F(\tau) = \Delta^4 \Phi(\tau) \quad (16.6)$$

в сегменте $\tau \in [1/2 + 4h + \xi_0, 1 - 4h - \xi_0]$. $F(\tau)$ суммируема на этом сегменте, так что почти все точки τ этого сегмента будут точками Лебега $F(\tau)$ (см. [9], с. 224, а также п. 9). Мы будем требовать, чтобы t_0 была одной из этих точек Лебега, так что

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} \int_0^u |F(t_0) - F(t_0 + \xi)| d\xi = 0.$$

17. Перейдем к доказательству одной из основных лемм.

Лемма 19. Пусть $(a, b) \subset [1/2, 1]$. При всяком заданном достаточно малом $h \leq \delta_0(a, b)$ почти для всех точек $t_0 \in (a, b)$ будем иметь

$$F(t_0) = 0. \quad (17.1)$$

Доказательство. Пусть дан интервал $(a, b) \subset [1/2, 1]$ и h столь мало, что сегмент S :

$$[a - 4.01h; b + 4.01h] \subset [1/2, 1]. \quad (17.2)$$

Фиксируем какое-либо из таких $h > 0$ и рассмотрим соответствующую функцию $F(\tau)$ (см. (16.6)).

Пусть $t_0 \in S$ — точка Лебега $F(\tau)$. Мы должны привести к противоречию гипотезу о том, что

$$F(t_0) \neq 0. \quad (17.3)$$

Зададим $\varepsilon > 0$ (которое фиксируем в дальнейшем) и выберем $u_0 = u_0(t_0, \varepsilon)$ столь малым, что

$$\frac{1}{u} \int_0^u |F(t_0 + \xi) - F(t_0)| d\xi < \varepsilon \quad \text{при } 0 < u \leq u_0(t_0, \varepsilon). \quad (17.4)$$

При определении «стаканчика» И. М. Виноградова $W(\xi)$ в п. 14 при заданном $x \geq 1$ положим:

$$\xi_0 = \min \left(u_0(t_0, \xi), \frac{1}{x^2} \right). \quad (17.5)$$

Займемся оценкой снизу интеграла I_1 (см. (16.4)). Согласно (17.4),

$$\exp(t_0 + 4h)x \int_{-\xi_0}^{\xi_0} e^{\xi x} W(\xi) |F(t_0 + \xi) - F(t_0)| d\xi \leq 2\varepsilon \xi_0 \exp(t_0 + 4h)x, \quad (17.6)$$

ибо $e^{\xi_0 x} \leq e^{1/x} = 1 + O(1/x)$ в силу (17.5) и $0 \leq W(\xi) \leq 1$. Далее, ввиду того что

$$\int_{-\xi_0}^{\xi_0} W(\xi) d\xi > \frac{\xi_0}{2}, \quad (17.7)$$

имеем:

$$\exp(t_0 + 4h)x \left| \int_{-\xi_0}^{\xi_0} e^{\xi x} W(\xi) F(t_0) d\xi \right| > \frac{1}{2} \xi_0 |F(t_0)| \exp(t_0 + 4h)x. \quad (17.8)$$

Учитывая (16.4), (17.3) и (17.6), находим, что при достаточно малом $\varepsilon = \varepsilon(t_0)$ (не зависящем от x)

$$|I_1| > \frac{\xi_0}{4} |F(t_0)| \exp(t_0 + 4h)x. \quad (17.9)$$

Для $|I_{1/2}|$ мы найдем оценку сверху. Согласно (16.1),

$$|I_{1/2}| \leq c_{15} x^4 \exp(1 - t_0 + 4h + 3\xi_0)x. \quad (17.10)$$

Далее, $t_0 > 1/2$, так что $1 - t_0 < t_0$. Выберем x столь большим, чтобы соответственно (17.5)

$$\xi_0 = \frac{1}{x^2} \quad (17.11)$$

и

$$\left(\frac{1}{4x^2} \right) |F(t_0)| \exp(t_0 + 4h)x > 2c_{15} x^4 \exp(1 - t_0 + 4h + 3\xi_0)x. \quad (17.12)$$

Из (17.9) и (17.12) находим:

$$|F(\Lambda, u_0)| = |I_{1/2} + I| > \frac{1}{8} |F(t_0)| x^{-2} \exp(t_0 + 4h)x. \quad (17.13)$$

С другой стороны, оценим $|F(\Lambda, u_0)|$ сверху. По лемме 18 (15.6),

$$|F(\Lambda, u_0)| < c_{13} x^{19} A_0(x) e^{4xh},$$

причем, согласно (14.2), $A_0(x) = \xi_0^{-18} = x^{36}$ в силу (17.11). Таким образом,

$$|F(\Delta, u_0)| < c_{13} x^{55} \exp(4xh).$$

Сопоставляя это выражение с (17.13), при $x \rightarrow \infty$ получаем: $F(t_0) = 0$, что противоречит (17.3) и доказывает лемму 19.

18. Лемма 20. Почти для всех точек $t_0 \in [1/2, 1]$ имеем: ⁴⁾

$$\Phi(t_0) = P_3(t_0), \quad (18.1)$$

где $P_3(t_0)$ — кубический полином.

Доказательство. Пусть $(a, b) \subset [1/2, 1]$. Для всякого заданного $h \leq h_0(a, b)$ имеем $F(\tau) = \Delta^4 \Phi(\tau) = 0$ для почти всех $\tau \in (a, b)$. Возьмем достаточно малое $\delta > 0$ и рассмотрим усреднение

$$\Phi_\delta(\tau) = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \Phi(\tau + u) du = \frac{1}{\delta} \int_\tau^{\tau+\delta} \Phi(u) d\mu. \quad (18.2)$$

При всяком заданном $h \leq h_0(a, b)$, $\tau \in (a, b)$,

$$\Delta^4 \Phi_\delta(\tau) = 0.$$

Из (18.2) видно, что $\Phi_\delta(\tau)$ — непрерывная (даже абсолютно непрерывная) функция τ . Докажем, что $\Phi_\delta(\tau) = Q_\delta(\tau)$ — кубический полином с коэффициентами, зависящими от δ , при $\tau \in (a, b)$.

Имеем $\Delta^4 \Phi_\delta(\tau) = 0$ при всех достаточно малых h . Пусть сегмент $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Разделим его на N равных частей, где $h = (\beta - \alpha)/N$ достаточно мало; пусть точки деления суть $\alpha_0 = \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_N = \beta$. Возьмем кубический полином, скажем, интерполяционный полином Лагранжа $Q_\delta(\tau)$, совпадающий с $\Phi_\delta(\tau)$ при $\tau = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Заменим $\Phi_\delta(\tau)$ на $\psi_\delta(\tau) = \Phi_\delta(\tau) - Q_\delta(\tau)$; тогда $\Delta^4 \psi_\delta(\tau) = 0$ и легко найдем, что $\psi_\delta(\alpha_i) = 0$ ($i = 0, 1, \dots, N$).

Возьмем теперь наряду со старыми точками деления новые $(\alpha_j + \alpha_{j+1})/2 = \alpha'_j$. Определим новый кубический полином, совпадающий с $\psi_\delta(\tau)$ в точках $\alpha_0, \alpha'_0, \alpha_1, \alpha'_1$. Тогда он должен совпадать с $\psi_\delta(\tau)$ во всех точках α_i, α'_i и, так как $\psi_\delta(\alpha_i) = 0$, он тождественно равен 0 и $\psi_\delta(\alpha'_i) = 0$. Снова вводим новые точки деления, вставляя их посередине двух старых. Рассуждая так далее, находим, что $\psi_\delta(\tau) = 0$ на всюду плотном множестве точек и в силу ее непрерывности — на всем (α, β) и, стало быть, на всем (a, b) .

⁴⁾ Основная идея доказательства леммы 20 автору дана И. П. Натансоном и О. А. Ладыженской.

Итак, $\Phi_\delta(\tau) = Q_\delta(\tau)$; $\tau \in (a, b)$. Пусть теперь $\delta \rightarrow 0$, и τ — точка Лебега $\Phi(\mu)$. Тогда

$$\frac{1}{\delta} \int_{\tau}^{\tau+\delta} (\Phi(\mu) - \Phi(\tau)) d\mu \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0, \text{ так что } \Phi_\delta(\tau) = Q_\delta(\tau) \rightarrow \Phi(\tau)$$

во всех точках Лебега $\Phi(\tau)$.

Положим $Q_\delta(\tau) = \alpha_{0\delta}\tau^3 + \alpha_{1\delta}\tau^2 + \alpha_{2\delta}\tau + \alpha_{3\delta}$. Пусть $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ — точки Лебега $\Phi(\tau)$ и $\tau_i \neq \tau_j$ ($i \neq j$). Имеем $Q_\delta(\tau_j) = \Phi(\tau_j) + \varepsilon_j(\delta)$; $\varepsilon_j(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Разрешая эти уравнения относительно $\alpha_{i\delta}$, видим, что $\alpha_{i\delta}$ стремится к постоянным пределам α_i при $\delta \rightarrow 0$ и $Q_\delta(\tau) \rightarrow P_3(\tau)$. Итак, $\Phi(\tau) = P_3(\tau)$ во всех точках Лебега $\Phi(\tau)$ при $\tau \in (a, b)$, т. е. почти везде на $[1/2, 1]$, что и доказывает лемму 20.

19. Лемма 10 (7.1) позволяет теперь писать

$$G(z) = P(z) + z^4 I_{1/2}(z) + z^4 I_1(z), \quad (19.1)$$

где

$$I_{1/2}(z) = \int_0^{1/2} e^{zt} \Phi(t) dt, \quad I_1(z) = \int_{1/2}^1 e^{zt} (\alpha_0 t^3 + \alpha_1 t^2 + \alpha_2 t + \alpha_3) dt. \quad (19.2)$$

Займемся $z^4 I_1(z)$. Прямым вычислением находим:

$$z^4 I_1(z) = e^z (\beta_0 z^3 + \beta_1 z^2 + \beta_2 z + \beta_3) + e^{z/2} (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z^2 + \gamma_2 z + \gamma_3) \quad (19.3)$$

(β_i, γ_i — реальные константы).

Лемма 21. В выражении (19.3)

$$\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 0. \quad (19.4)$$

Доказательство. Имеем из (6.4): $G(z) = \gamma z^2 + \lambda e^z + s_0 g(z)$ ($s_0 = +1$ или -1). Отсюда

$$g(z) = s_0 (G(z) - \gamma z^2 - \lambda e^z). \quad (19.5)$$

Далее, замечаем, что при $x > 0$

$$|z^4 I_{1/2}(z)| \leq |z|^4 \int_0^{1/2} |e^{xz}| |\Phi(t)| dt \leq c_{16} |z|^4 e^{x/2}. \quad (19.6)$$

В соединении с (19.1), (19.3) и (19.5) это дает (b_i — реальные константы)

$$g(z) = e^z (b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3) + O(|z|^3) + O(|z|^4 e^{x/2}). \quad (19.7)$$

Теперь обратимся к соотношениям (4.3) и (4.5) — (4.9). Положим $z = x \geq 1$; из (19.7) найдем:

$$u(x, 0) = e^x (b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3) + O(x^4 e^{x/2}). \quad (19.8)$$

Пусть $b_0 \neq 0$ и $b_0 > 0$. Из (19.8) находим при больших x

$$\exp(2ix^2 + \lambda e^x - u(x, 0)) = O\left(\exp\left[-\frac{b_0}{2} x^3 e^x\right]\right),$$

что противоречит (4.5) и (4.8).

Если $b_0 < 0$, то получаем при $x \rightarrow \infty$ противоречие между (4.3) и (4.6). Значит, $b_0 = 0$. Совершенно так же обнаруживаем, что $b_1 = 0$ и $b_2 = 0$. Но из (19.5) и (19.7) видим, что $b_0 = s_0 \beta_0$, $b_1 = s_0 \beta_1$, $b_2 = s_0 \beta_2$, откуда следует (19.4).

20. Теперь из (19.3) получаем

$$z^4 I_1(z) = \beta e^z + e^{z/2} (\gamma_0 z^3 + \gamma_1 z^2 + \gamma_2 z + \gamma_3),$$

так что

$$G(z) - \beta e^z - P(z) = z^4 \int_0^{1/2} e^{zt} \Phi(t) dt + e^{z/2} (\gamma_0 z^3 + \gamma_1 z^2 + \gamma_2 z + \gamma_3). \quad (20.1)$$

Лемма 22. Существует такой полином $Q(t)$ степени ≤ 3 , что

$$z^4 \int_0^{1/2} e^{zt} Q(t) dt = e^{z/2} (\gamma_0 z^3 + \gamma_1 z^2 + \gamma_2 z + \gamma_3) + \gamma_4. \quad (20.2)$$

Доказательство. Имеем (см., например, [11], с. 126—127) при любых z

$$\alpha_0 z^4 \int_0^{1/2} t^3 e^{zt} dt = \alpha_0 e^{zt} (t^3 z^3 - 3t^2 z^2 - 6) \Big|_0^{1/2},$$

$$\alpha_1 z^4 \int_0^{1/2} t^2 e^{zt} dt = \alpha_1 e^{zt} (t^2 z^3 - 2t z^2 + 2z) \Big|_0^{1/2},$$

$$\alpha_2 z^4 \int_0^{1/2} t e^{zt} dt = \alpha_2 e^{zt} (t z^3 - z^2) \Big|_0^{1/2},$$

$$\alpha_3 z^4 \int_0^{1/2} e^{zt} dt = \alpha_3 e^{zt} z^3 \Big|_0^{1/2},$$

откуда видим, что при подходящем выборе α_i получается (20.2).

Полагая теперь $\gamma_4 = \mu$, находим из (20.1):

$$G(z) - P(z) - \beta e^z - \mu = z^4 \int_0^{1/2} e^{zt} (\Phi(t) + Q(t)) dt. \quad (20.3)$$

Обозначим $G_1(z) = u_1(x, y) + iv_1(x, y) = G(z) - P(z) - \beta e^z - \mu$;
 $\Phi(t) + Q(t) = \Phi_1(t)$, ($Q(t)$ — кубический полином). Получим:

$$G_1(z) = z^4 \int_0^{1/2} e^{zt} \Phi_1(t) dt. \quad (20.4)$$

Здесь $G_1(z)$ — целая функция, ведущая себя совершенно так же, как $G(z)$. Она реальна на реальной оси, и ввиду того что для функции $E(z) = -\beta e^z - \mu$ имеем $\operatorname{Re} E(x + 2\pi im) - \operatorname{Re} E(x) = 0$, из леммы 13 (10.7) получаем

$$|u_1(x, 2\pi m) - u_1(x, 0)| < (12|\alpha_0|x + 4|\alpha_1| + 8\gamma)\pi^2 m^2 \quad (20.5)$$

при $x \geq 1$ и целых m .

Поэтому мы можем действовать, как ранее. При подходящей $\Lambda(t, x)$, периодической с периодом 1, четной и имеющей достаточно быстро сходящийся ряд Фурье, составляем, как в (10.5), равенство

$$F(\Lambda, u_1) = \int_0^{1/2} \frac{\partial^4}{\partial t^4} (e^{xt} \Lambda(t, x)) \Phi_1(t) dt. \quad (20.6)$$

По формуле (11.7) составляем функцию $U(v, x, t_0)$, где

$$t_0 \pm (4h + \xi) \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad (20.7)$$

$$\Gamma_1(t, x) = \frac{1}{6} \int_0^t e^{x(v-t)} (t-v)^3 U(v, x, t_0) dv. \quad (20.8)$$

Тогда получим:

$$\Gamma_1(0, x) = \Gamma_1(1, x) = 0. \quad (20.9)$$

Далее, $\Gamma_1(t, x)$ не изменяется после $t = t_0 + 4h + \xi_0$, так что $\Gamma_1(t, x) = 0$ при $t > t_0 + 4h + \xi_0$. Составляем, как в (12.5), функцию

$$\Lambda(t, x) = \Gamma_1(t, x) + \Gamma_1(1-t, x). \quad (20.10)$$

В силу (20.7) ($t_0 \in (0, 1/2)$) имеем $\Gamma_1(1-t, x) = 0$ при $[0, 1/2]$ и

$$\Lambda(t, x) = \Gamma_1(t, x) \quad \text{при } t \in [0, 1/2]. \quad (20.11)$$

Это сильно облегчает дело. Из (20.11) имеем при $t \in [0, 1/2]$

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4} (e^{xt} \Lambda(t, x)) = \frac{\partial^4}{\partial t^4} (e^{xt} \Gamma_1(t, x)) = e^{xt} U(t, x, t_0),$$

откуда

$$F(\Lambda, u_1) = \int_0^{1/2} e^{xv} U(v, x, t_0) \Phi_1(v) dv.$$

Отсюда, как и ранее, приходим к выводу, что при $(a, b) \subset [0, 1/2]$ и заданном $h \leq h_0(a, b)$ почти для всех $t \in (a, b)$

$$\Delta^4 \Phi_1(t) = 0.$$

Но $\Phi_1(t) = \Phi(t) + Q(t)$, где $Q(t)$ — кубический полином и $\Delta^4 Q(t) = 0$, так что

$$\Delta^4 \Phi(t) \approx 0; \quad t \in (a, b); \quad h \leq h_0(a, b).$$

Отсюда находим $\Phi(t) = Q_3(t)$ (кубический полином) при $t \in [0, 1/2]$.

21. Подставляя $\Phi(t)$ в (20.1), непосредственно находим⁵⁾

$$G(z) = P(z) + \beta e^z + \mu_1 + e^{z/2} (\gamma_0 z^3 + \gamma_1 z^2 + \gamma_2 z + \gamma_3), \quad (21.1)$$

где μ_1 — новая константа.

Лемма 23. В выражении (21.1) $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$.

Доказательство.

$$G_1(z) = e^{z/2} (\gamma_0 z^3 + \gamma_1 z^2 + \gamma_2 z + \gamma_3) + \mu_1 - \mu. \quad (21.2)$$

Далее используем (20.5). Из (21.2) получаем при $m=3$:

$$\begin{aligned} u_1(x, 6\pi) - u_1(x, 0) &= -e^{x/2} (\gamma_0 (x^3 - 108\pi^2 x^2) + \gamma_1 (x^2 - 36\pi^2) + \\ &\quad + \gamma_2 x + \gamma_3) - e^{x/2} (\gamma_0 x^3 + \gamma_1 x^2 + \gamma_2 x + \gamma_3) = \\ &= -e^{x/2} (2\gamma_0 x^3 + x^2 (2\gamma_1 - 108\pi^2 \gamma_0) + 2\gamma_2 x + 2\gamma_3 - 36\pi^2 \gamma_1). \end{aligned} \quad (21.3)$$

Сравнивая (21.3) с (20.5), при $x \rightarrow \infty$ находим $\gamma_0 = 0$, затем $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 0$, что и доказывает лемму 23.

Итак,

$$G(z) = \beta e^z + P_1(z), \quad (21.4)$$

где $P_1(z)$ — кубический полином. Из (19.5) получаем

$$g(z) = \lambda_1 e^z + P_2(z), \quad (21.5)$$

где $P_2(z)$ — полином степени ≤ 3 . Мы должны доказать, что $\lambda_1 \geq 0$ и что $P_2(z)$ — квадратный полином. Будем действовать, как в п. 4. Допустим, что $\lambda_1 < 0$. Имеем из (2.3):

$$\exp g(z) = E(\exp z Y_1). \quad (21.6)$$

Пусть V — независимая от Y_1 случайная величина, такая, что

$$E \exp(zV) = \exp z^2.$$

Тогда

$$\exp(x^2 + \lambda_1 e^x + P_2(x)) = E \exp x (Y_1 + V). \quad (21.7)$$

⁵ Ниже постоянные $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ не те же, что в (19.3). (Прим. ред.).

Как и в п. 4, убеждаемся, что при $x \geq 1$

$$E \exp x (Y_1 + V) > a_0 e^{a_1 x}. \quad (21.8)$$

Но если $\lambda_1 < 0$, то при $x \rightarrow \infty$ левая часть (21.7) стремится к 0, что противоречит (21.8). Итак, $\lambda_1 \geq 0$.

Пусть $P_2(z) = \gamma_0 z^3 + \gamma_1 z^2 + \gamma_2 z + \gamma_3$. Докажем, что

$$\gamma_0 = 0, \quad \gamma_1 \geq 0. \quad (21.9)$$

Рассмотрим

$$u(x, y) = \operatorname{Re} g(z) = \lambda_1 e^x \cos y + \gamma_0 (x^3 - 3xy^2) + \gamma_1 (x^2 - y^2) + \gamma_2 x + \gamma_3. \quad (21.10)$$

Должно быть

$$u(x, 0) \geq u(x, y). \quad (21.11)$$

Положим $y = 2m\pi$; m целое. Имеем:

$$u(x, 0) - u(x, 2m\pi) = 3\gamma_0 x (2\pi m)^2 + \gamma_1 (2\pi m)^2. \quad (21.12)$$

Если $\gamma_0 < 0$, то при $x \rightarrow \infty$, $m = 1$ получаем противоречие с (21.11). Если $\gamma_0 > 0$, то при $x \rightarrow -\infty$, $m = 1$ получаем такое же противоречие. Итак, $\gamma_0 = 0$. Далее, если $\gamma_1 < 0$, то при $m = 1$ (21.12) противоречит (21.11). Итак, (21.9) доказано.

22. Имеем:

$$g(z) = \lambda_1 e^z + \gamma_1 z^2 + \gamma_2 z + \gamma_3, \quad \gamma_1 \geq 0.$$

Но у нас должно быть $g(0) = 0$, так что $\gamma_3 = -\lambda_1$ и

$$g(z) = \lambda_1 (e^z - 1) + \gamma_1 z^2 + \gamma_2 z.$$

Итак, Y_1 есть композиция законов Пуассона и Гаусса, быть может, вырождающихся при $\lambda_1 = 0$ или $\gamma_1 = 0$. Нужно доказать еще, что и Y_2 есть подобная же композиция и что дисперсии гауссовых и пуассоновых компонент складываются в дисперсии основных подобных же компонент.

Обратимся к (2.2):

$$E \exp(zY_2) = \exp[(\lambda - \lambda_1)(e^z - 1) + (\gamma - \gamma_1)z^2 - \gamma_2 z].$$

Достаточно доказать, что $\lambda - \lambda_1 \geq 0$, $\gamma - \gamma_1 \geq 0$. Вводя дополнительную нормальную компоненту V , независимую от Y_2 и такую, что $E \exp(zV) = \exp z^2$, и рассуждая совершенно так же, как в п. 21, находим, что $\lambda - \lambda_1 \geq 0$. После этого, рассуждая, как в конце п. 21, определяем, что $\gamma - \gamma_1 \geq 0$. Этим основная теорема и утверждение (0.4) наконец доказаны.

23. Мы считали, что $\gamma > 0$ и $\lambda > 0$. Докажем, что можно считать $\gamma = 0$ или $\lambda = 0$, т. е. покажем, как теоремы Г. Крамера и Д. А. Райкова выводятся из нашей теоремы. Пусть X — пуассонова случайная величина и $X = Y_1 + Y_2$, где Y_1 и Y_2 независимы. Пусть Z нормально с дисперсией δ и независимо от (Y_1, Y_2) и, стало быть, от X . Имеем: $Z + X = Z + Y_1 + Y_2$. По нашей теореме, $Y_2 = Y_{21} + Y_{22}$, где $D(Y_{21}) \leq \delta$ и Y_{22} — пуассонова величина. При

$\delta \rightarrow 0$ получаем, что Y_2 — пуассонов. Точно так же доказываем, что Y_1 — пуассонов. Замена слов «пуассонов» на «гауссов» и обратно дает и теорему Г. Крамера.

Автор благодарит И. П. Натансона и О. А. Ладыженскую за любезную помощь.

Л и т е р а т у р а

1. Cramer H. Über eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion. — Math. Z., 1936, Bd 41, H. 3, S. 405—414.
2. Райков Д. А. О разложении закона Пуассона. — ДАН СССР, 1937, т. 14, № 1, с. 9—12.
3. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. Изд. 2. М., 1954. 412 с.
4. Райков Д. А. О разложении законов Гаусса и Пуассона. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1938, т. 2, № 1, с. 91—124.
5. Курант Р. Геометрическая теория функций комплексной переменной. Л.—М., 1934. 370 с.
6. Paley R., Wiener N. Fourier transforms in the complex domain. — Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 1934, vol. 19. 184 p.
7. Boas R. Entire functions. New York, 1954. 276 p.
8. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1947, т. 23, с. 1—111.
9. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. Л., 1950. 552 с.
10. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. III. М.—Л., 1949. 783 с.
11. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М., 1948. 256 с.

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ О РАЗЛОЖЕНИИ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ ЗАКОНОВ

І. Формулировки. Три основные леммы. Необходимые условия ¹⁾

Теория вероятн. и ее примен., 1958, т. 3, вып. 1, с. 3—40

О. Около 20 лет тому назад известная работа Г. Крамера [1] о разложениях нормального закона вызвала ряд исследований по возможным разложениям для тех или иных видов безгранично делимых законов. Сюда относятся работы П. Леви [2, 3], А. Я. Хинчина [4], Д. А. Райкова [5, 6], Р. А. Фишера и Д. Дюгэ [7] и многие другие. Однако эти исследования относились либо к нормальному закону, либо к композициям конечного числа законов пуассонова типа. Как заметил Г. Крамер в обзорной статье [8], общая проблема факторизации безгранично делимых законов оставалась нерешенной.

¹⁾ Исправления к статье см.: Теор. вероятн. и ее примен., 1960, т. 5, вып. 3, с. 376.

Согласно известной формуле П. Леви [9], логарифм характеристической функции (в дальнейшем х. ф.) безгранично делимого (в дальнейшем б. д.) закона $\ln \varphi(t)$ однозначно выражается формулой

$$\ln \varphi(t) = \beta it - \gamma t^2 + \int_{-\infty}^0 \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dG_-(u) + \int_0^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dG_+(u), \quad (0.1)$$

где берется ветвь $\ln w$, реальная при положительных w ; β и $\gamma \geq 0$ — реальные константы; $G_-(u)$ и $G_+(u)$ — неубывающие функции, такие, что $G_-(-\infty) = G_+(\infty) = 0$ и $\int_{-a}^0 u^2 dG_-(u) + \int_0^a u^2 dG_+(u) < \infty$ для любого конечного $a > 0$. Далее,

$$\int_{-\varepsilon}^0 u^2 dG_-(u) + \int_0^{\varepsilon} u^2 dG_+(u) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (0.2)$$

Класс всех б. д. законов обозначим I . Композицию двух интегральных законов F_1 и F_2 будем обозначать $F = F_1 * F_2$; если $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — две соответствующие х. ф., то, как известно, они будут перемножаться: $\varphi(t) = \varphi_1(t) \varphi_2(t)$.

Нетрудно описать такие разложения $F \in I$, $F = F_1 * F_2$, где $F_i \in I$ ($i = 1, 2$), т. е. разложение б. д. законов на б. д. компоненты. Именно, соответствующие х. ф. должны удовлетворять формуле вида (0.1), причем

$$\beta = \beta_1 + \beta_2; \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2; \quad G_- = G_-^{(1)} + G_-^{(2)}; \quad G_+ = G_+^{(1)} + G_+^{(2)}. \quad (0.3)$$

Однако компоненты F_1 и F_2 в разложении

$$F = F_1 * F_2 \quad (0.4)$$

для $F \in I$ не обязаны принадлежать I для всех видов х. ф. типа (0.1).

Мы можем поставить вопрос об описании всех б. д. законов F , которые допускают разложение только на б. д. компоненты. Класс таких законов обозначим I_0 ; $I_0 \subset I$.

Если в представлении (0.1) $\gamma \neq 0$, то будем говорить, что соответствующий закон F имеет гауссову компоненту; очевидно, для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$F = G * F_1, \quad (0.5)$$

где G — какой-либо невырожденный нормальный закон, а F_1 — б. д. закон.

В настоящей работе производится исследование всех б. д. законов, имеющих гауссову компоненту и принадлежащих I_0 (имею-

щих только б. д. компоненты). Введем некоторую терминологию. Будем называть функции $G_-(u)$ и $G_+(u)$ пуассоновым спектром закона F ; $G_-(u)$ будет отрицательной, а $G_+(u)$ — положительной частью пуассонова спектра. Если $dG_-(u) \equiv 0$, то будем говорить, что б. д. закон F имеет положительный пуассонов спектр; аналогично определяются законы с отрицательным пуассоновым спектром. Если $dG_+(u) = 0$ при $u \geq U_0 > 0$, то будем говорить, что положительная часть пуассонова спектра ограничена; аналогично вводим понятие ограниченности отрицательной части пуассонова спектра. Если $dG_-(u) = dG_+(u) = 0$ при $|u| \geq U_0$, то говорим, что пуассонов спектр ограничен. Естественно появляются случаи конечного и счетного пуассоновых спектров. В случае конечного спектра имеем

$$\ln \varphi(t) = \beta it - \gamma t^2 + \sum_{m=1}^M \lambda_m (e^{it\mu_m} - 1) + \sum_{n=1}^N \lambda_{-n} (e^{-it\nu_n} - 1), \quad (0.6)$$

где M, N — конечные целые неотрицательные числа; $\lambda_m > 0$; $\lambda_{-n} > 0$; $\mu_m > 0$; $\nu_n > 0$. Отдельная пуассонова компонента P в (0.6) имеет х. ф. $\exp(\lambda_m (e^{it\mu_m} - 1))$ или $(\lambda_{-n} (e^{-it\nu_n} - 1))$; при этом

$$\mu_m = \frac{D(P)}{E(P)} \text{ или } \nu_n = \frac{D(P)}{E(P)}. \quad (0.7)$$

Случай конечного спектра важен, ибо, как известно (см. [10]), совокупность I всех б. д. законов совпадает с совокупностью законов, предельных для законов вида (0.6) (даже если брать только законы $\gamma = 0$). Случай счетного пуассонова спектра описывается формулой

$$\begin{aligned} \ln \varphi(t) = \beta it - \gamma t^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \left(e^{it\mu_m} - 1 - \frac{it\mu_m}{1 + \mu_m^2} \right) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{-n} \left(e^{-it\nu_n} - 1 + \frac{it\nu_n}{1 + \nu_n^2} \right), \end{aligned} \quad (0.8)$$

где $\lambda_m > 0$, $\lambda_{-n} > 0$ и ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m \mu_m^2}{1 + \mu_m^2} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{-n} \nu_n^2}{1 + \nu_n^2} \quad (0.9)$$

сходятся, причем

$$\sum_{\mu_m < \varepsilon} \lambda_m \mu_m^2 + \sum_{\nu_n < \varepsilon} \lambda_{-n} \nu_n^2 \rightarrow 0 \quad (0.10)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. В иных случаях будем говорить, что спектр имеет континуальную часть. Параметры λ_i можно называть «параметрами энергии» при μ_i или $-\nu_i$.

Интересный класс б. д. законов составляют законы с ограниченным пуассоновым спектром. Их х. ф. имеет вид

$$\ln \varphi(t) = \beta it - \gamma t^2 + \int_{-b}^0 (e^{itu} - 1 - itu) dG_1(u) + \int_0^a (e^{itu} - 1 - itu) dG_2(u), \quad (0.11)$$

где $a \geq 0$, $b \geq 0$ — ограниченные числа; $G_1(u)$ и $G_2(u)$ — неубывающие функции, ограниченные вне сегмента $[-\varepsilon, \varepsilon]$ при любом $\varepsilon > 0$, так что сумма

$$\int_{-\varepsilon}^0 u^2 dG_1(u) + \int_0^{\varepsilon} u^2 dG_2(u)$$

ограничена при $\varepsilon > 0$ и стремится к 0 при $\varepsilon \rightarrow 0$. Здесь пуассонов спектр частот лежит в сегменте $[-b, a]$; неотрицательности «приращений энергии» $dG_i(u)$ ($i=1, 2$) отвечает безграничная делимость для х. ф. вида (0.11). В дальнейшем у нас будут встречаться х. ф. типа (0.11), допускающие «отрицательное приращение энергии» $dG_i(u)$ ($i=1, 2$); мы будем говорить об их «обобщенном пуассоновом спектре частот».

1. Вернемся к множеству I_0 законов, имеющих только б. д. компоненты. Отдельные элементы этого множества были указаны в нескольких работах. Так, закон Гаусса $G \in I_0$ [1], закон Пуассона $P \in I_0$ [5, 6], композиция законов Гаусса и Пуассона принадлежат I_0 [11, 12]. Метод работ [11] и [12] приводит к следующей общей теореме.

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы безгранично делимый закон F , имеющий гауссову компоненту, разлагался только на безгранично делимые компоненты, необходимо, чтобы его пуассонов спектр был конечным или счетным. При этом пуассоновы частоты μ_m и ν_n в формулах (0.6) и (0.8) должны совпадать с рядами чисел: для μ_m —*

$$\dots, k_{-2}k_{-1}\mu, k_{-1}\mu, \mu, \frac{\mu}{k_1}, \frac{\mu}{k_1k_2}, \dots, \quad (1.1)$$

для ν_n —

$$\dots, l_{-2}l_{-1}\nu, l_{-1}\nu, \nu, \frac{\nu}{l_1}, \frac{\nu}{l_1l_2}, \dots, \frac{\nu}{l_1l_2\dots l_s}, \dots, \quad (1.2)$$

где $\dots, k_{-2}, k_{-1}, k_1, k_2, k_3, \dots$ и $\dots, l_{-2}, l_{-1}, l_1, l_2, l_3, \dots$ — какие-либо наборы натуральных чисел, больших единицы (допускаются повторения). В случае ограниченности этого спектра необходимое условие является и достаточным.

Соответственно (0.9) и (0.10) ряды

$$\sum_{s=0}^{\infty} \lambda_1^{(s)} \frac{1}{1 + \left(\frac{k_1 \dots k_s}{\mu}\right)^2}, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_2^{(s)} \frac{1}{1 + \left(\frac{l_1 \dots l_s}{\nu}\right)^2}, \quad \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_1^{(-s)}, \quad \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_2^{(-s)}$$

должны быть сходящимися и, значит, суммы

$$\sum_{s \geq s_0} \lambda_1^{(s)} \frac{1}{1 + \left(\frac{k_1 \dots k_s}{\mu} \right)^2}, \quad \sum_{s \geq s_0} \lambda_i^{(s)} \frac{1}{1 + \left(\frac{l_1 \dots l_s}{\nu} \right)^2}$$

— стремящимися к 0 при $s_0 \rightarrow \infty$; при этом $\lambda_i^{(s)}$ и $\lambda_i^{(-s)}$ означают λ -параметры в формуле (0.8) при соответствующих пуассоновых частотах (параметры энергии).

Случай неограниченного пуассонова спектра будет исследован отдельно; пока достаточность получается лишь при некоторых дополнительных предположениях.

Доказательство теоремы 1 весьма затруднительно и требует ряда вспомогательных теорем. Весьма существенно при этом наличие гауссовой компоненты у закона F ($\gamma > 0$ в формуле (0.1)). Если $\gamma = 0$, то картина совершенно меняется.²⁾

Для случая ограниченного пуассонова спектра можно сформулировать следующую теорему.

Т е о р е м а 2. Пусть F — б. д. закон с ограниченным пуассоновым спектром, так что для его х. ф. имеет место формула (0.11). Всем его разложениям $F = F_1 * F_2$ отвечают х. ф. $\varphi_j(t)$ ($j=1, 2$) вида

$$\varphi_j(t) = \exp \left(P_{3j}(it) + t^4 \int_{-b}^a e^{itu} \Phi_j(u) du \right), \quad (1.3)$$

где $P_{3j}(it)$ — полином не более чем третьей степени, а $\Phi_j(u)$ — реальная функция, суммируемая с квадратом на сегменте $[-b, a]$.

Пусть F — б. д. закон с ограниченным пуассоновым спектром, сосредоточенным на сегменте $[-b, a]$ (см. формулу (0.11)). Будем говорить, что пуассонов спектр F рационален правее точки α ; $0 < \alpha < a$, если его х. ф. имеет вид

$$\begin{aligned} \ln \varphi(t) = & \beta it - \gamma t^2 + \int_{-b}^0 (e^{itu} - 1 - itu) dG_1(u) + \\ & + \int_0^\alpha (e^{itu} - 1 - itu) dG_2(u) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \left(\exp \left(it \frac{a_j u}{q} \right) - 1 \right), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\lambda_j > 0$; a_j, q целые, $a_1 < a_2 < \dots < a_m$; $a_1/q^\mu > \alpha$; $\mu > 0$. Совершенно аналогично определяем пуассонов спектр, рациональный левее точки $\beta < 0$, $\beta > -b$.

Т е о р е м а 3. Пусть F — б. д. закон с ограниченным пуассоновым спектром, рациональным правее точки $\alpha \geq 0$; $\alpha < a$ (в формуле (0.11)). Тогда всем его компонентам отвечают х. ф. вида

$$\ln \varphi(t) = P_3(it) + t^4 \int_{-b}^\alpha e^{itu} \Phi(u) du + \sum_{n=1}^{a_m} (\alpha_n + \beta_n it) \left(\exp \frac{it n \mu}{q} - 1 \right), \quad (1.5)$$

²⁾ Это непосредственно следует из результатов работ [2, 6]. (Прим. ред.).

где α_n, β_n — реальные числа (не обязательно положительные); $\Phi(u)$ — суммируемая с квадратом на $[-b, a]$ функция; $P_3(it)$ — полином не более чем третьей степени.

Совершенно аналогичная теорема имеет место для законов с ограниченным пуассоновым спектром, рациональным левее точки $\beta \leq 0, \beta > -b$.

Отметим частный случай теоремы 3, когда $b = \alpha = 0, rn = q = a_1 = 1$, так что

$$\ln \varphi(t) = \beta it - \gamma t^2 + \lambda_1 (e^{it\mu} - 1),$$

и мы имеем композицию законов Пуассона и Гаусса. Согласно (1.5), всякая компонента такой композиции имеет вид

$$\ln \varphi(t) = P_3(it) + (\alpha_1 + \beta_1 it) (\exp(it\mu) - 1).$$

Легко установить, что $\alpha_1 \geq 0, \beta_1 = 0$, а $P_3(it)$ — полином степени не выше 2, так что $\varphi(t)$ снова отечает композиции законов Пуассона и Гаусса. Это и есть основной результат работ [11] и [12].

2. В ч. I настоящей работы мы будем заниматься только теоремой 1 и будем доказывать необходимость высказанного там условия, чтобы б. д. закон $F \in I_0$. Эта необходимость легко выводится из следующих трех основных лемм, имеющих и некоторый самостоятельный интерес.

Основная лемма I. Пусть $\alpha = p/q$ — рациональное число, причем дробь p/q несократима, и

$$1 < p < q. \quad (2.1)$$

Составим случайную величину X с х. ф.³⁾

$$\varphi(z) = E \exp(zX) = \exp(\gamma z^2 + \lambda_1 (e^z - 1) + \lambda_2 (e^{\alpha z} - 1)), \quad (2.2)$$

где $\gamma > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$.

При достаточно малом $\nu > 0$ функция

$$\psi(z) = \varphi(z) \exp(-\nu (e^{z/q} - 1)) = \exp(\gamma z^2 + \lambda_1 (e^z - 1) + \lambda_2 (e^{\alpha z} - 1) - \nu (e^{z/q} - 1)) \quad (2.3)$$

будет х. ф. некоторой случайной величины Y .

Основная лемма II. Пусть $\alpha \in (0, 1)$ — иррациональное число. Составим случайную величину X с х. ф.

$$\varphi(z) = \exp(\gamma z^2 + \lambda_1 (e^z - 1) + \lambda_2 (e^{\alpha z} - 1)); \quad \lambda_i > 0. \quad (2.4)$$

При достаточно малом $\nu > 0$ и надлежаще выбранном малом $\eta_0 > 0$ функция

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \varphi(z) \exp(-\nu (e^{\eta_0 z} - 1)) = \\ &= \exp(\gamma z^2 + \lambda_1 (e^z - 1) + \lambda_2 (e^{\alpha z} - 1) - \nu (e^{\eta_0 z} - 1)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

будет х. ф. некоторой случайной величины Y .

³⁾ В дальнейшем под х. ф. будем понимать $\varphi(z) = E \exp(zX)$ для тех комплексных z , для которых соответствующие интегралы сходятся.

Основная лемма III. Пусть $G(u)$ — непрерывная неубывающая на сегменте $[\beta, 1]$, $\beta < 1$, функция и $G(1) - G(\beta) > 0$. Составим случайную величину X с х. ф.

$$\varphi(z) = \exp \left(\gamma z^2 + \int_{\beta}^1 (e^{zu} - 1) dG(u) \right). \quad (2.6)$$

При достаточно малом $\nu > 0$ и подходяще выбранном малом $\gamma_0 > 0$ функция

$$\psi(z) = \varphi(z) \exp(-\nu(e^{\gamma_0 z} - 1)) = \exp \left(\gamma z^2 + \int_{\beta}^1 (e^{zu} - 1) dG(u) - \nu(e^{\gamma_0 z} - 1) \right) \quad (2.7)$$

будет х. ф. некоторой случайной величины Y .

Доказательство этих лемм производится методом перевала; сперва оно идет одинаково во всех трех случаях, затем разветвляется на специфические для каждого из трех случаев приемы. Для проведения общей части доказательства запишем каждую из трех х. ф. (2.2), (2.4), (2.6) в виде

$$\varphi(z) = \exp \left(\gamma z^2 + \int_{\beta}^1 (e^{zu} - 1) dH(u) \right), \quad (2.8)$$

где $\beta < 1$, а $H(u)$ — ограниченная неубывающая функция, причем

$$H(1) - H(\beta) = c > 0. \quad (2.9)$$

Докажем, что случайная величина X с х. ф. (2.8) имеет плотность вероятности $g(x) > 0$ при всех x . Составим интеграл

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(it) e^{-ixt} dt. \quad (2.10)$$

Из (2.8) заключаем, что этот интеграл сходится абсолютно и равномерно по x , так что плотность вероятности $g(x)$ существует и непрерывна на всей реальной оси. Далее, видим, что случайную величину X с х. ф. (2.8) можно представить в виде суммы двух независимых случайных величин:

$$X = X_1 + X_2, \quad (2.11)$$

причем $E \exp zX_1 = \exp(\gamma z^2)$, т. е. X_1 нормально и не вырождено ($\gamma > 0$) и $E \exp zX_2 = \exp \left(\int_{\beta}^1 (e^{zu} - 1) dH(u) \right)$.

Рассмотрим случайную величину X_2 . Существует точка ξ , такая, что при любом $\varepsilon > 0$

$$P\{\xi - \varepsilon \leq X_2 \leq \xi + \varepsilon\} > 0. \quad (2.12)$$

Пусть F_1 — (нормальный) закон распределения, отвечающий X_1 , а F_2 — закон распределения X_2 . Тогда X имеет закон распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^x g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y) dF_2(y).$$

Дифференцируя по x , находим

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1'(x-y) dF_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}\right] dF_2(y), \quad (2.13)$$

где интеграл справа, очевидно, сходится равномерно по x в каждом конечном сегменте значений x и $\sigma^2 = D(X_1)$. Очевидно, при любом $\varepsilon > 0$

$$g(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{|y-x| \leq \varepsilon} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}\right] dF_2(y) > c(x) \int_{|y-x| \leq \varepsilon} dF_2(y) > 0,$$

где $c(x)$ — некоторая положительная константа, зависящая от x , и учитывается (2.12). Этим доказано желаемое.

Пусть теперь $\eta_0 > 0$ — какое-либо число, меньшее β ; $\nu > 0$ — малое число; составим

$$\psi(it) = \varphi(it) \exp[-\nu(e^{\eta_0 it} - 1)] \quad (2.14)$$

и

$$g_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(it) e^{-ixt} dt. \quad (2.15)$$

Покажем, что:

$$g_\nu(x) > 0 \text{ при } |x| \leq X_0(\nu), \quad (2.16)$$

где $X_0(\nu)$ — сколь угодно большая константа при достаточно малом ν .

При заданной константе $X_0 > 0$ находим $\varepsilon_0 > 0$, такое, что $g(x) \geq \varepsilon_0$ при $|x| \leq X_0$, что возможно на основании предыдущего утверждения. Выберем теперь T_0 так, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|t| \geq T_0} |\psi(it)| dt + \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \geq T_0} |\varphi(it)| dt < \frac{\varepsilon_0}{4}, \quad (2.17)$$

что возможно согласно (2.8) и (2.14).

Пусть, далее, $\nu > 0$ столь мало, что при $|t| \leq T_0$

$$|\varphi(it) - \psi(it)| > \frac{\varepsilon_0}{8T_0}.$$

Отсюда и из (2.10), (2.15) имеем:

$$|g_{\nu}(x) - g(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(it) - \psi(it)| dt < T_0 \frac{\varepsilon_0}{4T_0} + \frac{\varepsilon_0}{4} = \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

В силу того что $g(x) \geq \varepsilon_0$ при $|x| \leq X_0$, имеем $g_{\nu}(x) > g(x) - \varepsilon_0/2 > \varepsilon_0/2$ при $|x| \leq X_0$, что и доказывает (2.16).

3. Общим для доказательства трех основных лемм будет изучение поведения $g_{\nu}(x)$ при $x < 0$. Обратимся к выражениям (2.8) и (2.10).

При данном γ выбираем X_0 столь большим, как нам понадобится далее; соответственно ему выбираем малое $\nu > 0$ в (2.14); полагаем η_0 малым заданным числом. Имеем (см. (2.15)):

$$g_{\nu}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma=0} \psi(z) e^{-xz} dz, \quad (3.1)$$

где $z = \sigma + it$. Далее,

$$\begin{aligned} \psi(z) e^{-xz} &= \exp \left(\gamma z^2 - xz + \int_{\beta}^1 (e^{zu} - 1) dH(u) - \nu (e^{\eta_0 z} - 1) \right) = \\ &= \exp \left[\gamma \left(z - \frac{x}{2\gamma} \right)^2 - \frac{x^2}{4\gamma} + \int_{\beta}^1 (e^{zu} - 1) dH(u) - \nu (e^{\eta_0 z} - 1) \right]. \end{aligned}$$

Здесь считаем $x < 0$. Из теоремы Коши непосредственно явствует, что контур интегрирования в (3.1) можно переносить на любую вертикальную прямую. Естественнее выбрать контур $\sigma = x/2\gamma = \sigma_0$ (при $x < 0$ точка $z = x/2\gamma$ мало отличается от точки перевала для $\ln(\psi(z) e^{-xz})$). Тогда получим

$$g_{\nu}(x) = \exp \left[-\frac{x^2}{4\gamma} - H(1) + H(\beta) + \nu \right] J(t),$$

где

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\gamma t^2 + \int_{\beta}^1 e^{\sigma_0 u} e^{it u} dH(u) - \nu e^{\eta_0 \sigma_0} e^{i t \eta_0} \right] dt.$$

Далее имеем:

$$\int_{\beta}^1 e^{\sigma_0 u} e^{it u} dH(u) - \nu e^{\eta_0 \sigma_0} e^{i t \eta_0} = \theta_{c_0} \exp \left(-\eta_0 \frac{|x|}{2\gamma} \right)$$

($c_0, c_1, \dots$ в дальнейшем положительные константы; $|\theta| \leq 1$; θ в дальнейшем не всегда одно и то же). Отсюда

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\gamma t^2 + \theta c_0 \exp\left(-\eta_0 \frac{|x|}{2\gamma}\right)\right) dt > \\ > \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\gamma t^2) \left(1 + \theta c_0 \exp\left(-\eta_0 \frac{|x|}{2\gamma}\right)\right) dt > \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\gamma t^2) \frac{1}{2} dt > \frac{c_1}{\sqrt{\gamma}}$$

при $|x|$ достаточно большом сравнительно с γ и $1/\eta_0$, что и будем предполагать. Таким образом, $g_\gamma(x) > 0$ при $x < -X_0$ и при достаточно малом γ $g_\gamma(x) > 0$ при $x \leq 0$.

4. Перейдем к случаю $x \geq X_0$. Рассмотрим выражение вида (3.1), где

$$\psi(z) e^{-xz} = \exp\left[\gamma z^2 - xz + \int_{\beta}^1 (e^{\eta u} - 1) dH(u) - \nu(e^{\eta_0 z} - 1)\right]. \quad (4.1)$$

Для нахождения точек перевала берем производную в экспоненте и приравниваем ее к 0:

$$2\gamma z + \int_{\beta}^1 e^{\eta u} u dH(u) - \nu \eta_0 e^{\eta_0 z} - x = 0.$$

Это уравнение, очевидно, имеет положительный корень $z = \sigma_0$, зависящий от x и монотонно возрастающий вместе с ним:

$$2\gamma \sigma_0 + \int_{\beta}^1 e^{\sigma_0 u} u dH(u) - \nu \eta_0 e^{\eta_0 \sigma_0} - x = 0. \quad (4.2)$$

Полагаем $z = \sigma_0 + it$ и переносим контур интегрирования на $\sigma = \sigma_0$. Имеем на этом контуре из (4.1)

$$\psi(z) e^{-xz} = \exp U_1(x) \exp V_1(t) \exp V_2(t), \quad (4.3)$$

где

$$U_1(x) = \gamma \sigma_0^2 - \sigma_0 x + h_0, \quad h_0 = - \int_{\beta}^1 dH(u) + \nu, \quad (4.4)$$

$$V_1(t) = -\gamma t^2 + it(2\gamma \sigma_0 - x), \quad (4.5)$$

$$V_2(t) = \int_{\beta}^1 e^{\sigma_0 u} (\cos tu + i \sin tu) dH(u) - \nu e^{\eta_0 \sigma_0} (\cos \eta_0 t + i \sin \eta_0 t). \quad (4.6)$$

Положим

$$U_0(\sigma_0) = \int_{\beta}^1 e^{\sigma_0 u} dH(u) - \nu e^{\eta_0 \sigma_0},$$

$$V_3(t) = 2 \int_{\beta}^1 e^{\sigma_0 u} \sin^2 \frac{tu}{2} dH(u) - 2\nu e^{\eta_0 \sigma_0} \sin^2 \frac{\eta_0 t}{2}, \quad (4.7)$$

$$V_4(t) = \int_{\beta}^1 e^{\sigma_0 u} \sin tudH(u) - \nu e^{\eta_0 \sigma_0} \sin \eta_0 t + t(2\gamma\sigma_0 - x). \quad (4.8)$$

Тогда

$$\psi(z) e^{-xz} = \exp(U_1(x) + U_0(\sigma_0)) \exp(-\gamma t^2) \exp(-V_3(t)) \exp(iV_4(t)), \quad (4.9)$$

разумеется, $V_3(t)$ и $V_4(t)$ зависят от x .

Вычислим производную от $V_4(t)$:

$$V_4'(t) = \int_{\beta}^1 e^{\sigma_0 u} u \cos tudH(u) - \nu e^{\eta_0 \sigma_0} \eta_0 \cos \eta_0 t + 2\gamma\sigma_0 - x.$$

В силу (4.2) имеем

$$2\gamma\sigma_0 - x - \nu\eta_0 e^{\eta_0 \sigma_0} + \int_{\beta}^1 e^{\sigma_0 u} u dH(u) = 0,$$

так что

$$V_4'(t) = -2 \int_{\beta}^1 e^{\sigma_0 u} u \sin^2 \frac{tu}{2} dH(u) + 2\nu\eta_0 e^{\eta_0 \sigma_0} \sin^2 \frac{\eta_0 t}{2}. \quad (4.10)$$

5. Теперь обратимся отдельно к основной лемме I. В условиях этой леммы (см. (2.1)–(2.3)) положим, что функция $H(u)$ в (4.1) — кусочно-постоянная со скачками $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ в точках $u=1$ и $u=\alpha$. Кроме того, положим $\eta_0 = 1/q$; $\nu \in (0, 1)$ пока не фиксируем. Получим при $x \geq X_0$

$$\psi(z) e^{-xz} = \exp U_0(x) \exp(-\gamma t^2) \exp(-2e^{\sigma_0} U(t)) \exp(iV(t)), \quad (5.1)$$

где

$$U(t) = \lambda_1 \sin^2 \frac{t}{2} + \lambda_2 \exp\left(\frac{p-q}{q} \sigma_0\right) \sin^2 \frac{pt}{2q} - \nu \exp\left(\frac{1-q}{q} \sigma_0\right) \sin^2 \frac{t}{2q}, \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} V(t) = & \lambda_1 \exp(\sigma_0) \sin t + \lambda_2 \exp\left(\frac{p}{q} \sigma_0\right) \sin \frac{pt}{q} - \\ & - \nu \exp\left(\frac{\sigma_0}{q}\right) \sin \frac{t}{q} + t(2\gamma\sigma_0 - x), \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$U_0(x) = \gamma\sigma_0^2 - \sigma_0 x - \lambda_1 - \lambda_2 + \nu. \quad (5.4)$$

Считая X_0 , а следовательно, и σ_0 достаточно большим, рассмотрим такие значения t , для которых

$$|U(t)| \leq \exp \left[- \left(1 - \frac{1}{4q} \right) \sigma_0 \right]. \quad (5.5)$$

Пусть в дальнейшем B означает ограниченную для всех встречающихся параметров функцию, не всегда одну и ту же. Из (5.5) и (5.2) следует:

$$\lambda_1 \sin^2 \frac{t}{2} + \lambda_2 \exp \left(\frac{p-q}{q} \sigma_0 \right) \sin^2 \frac{pt}{2q} = B \exp \left(\frac{1-q}{q} \sigma_0 \right). \quad (5.6)$$

Отсюда

$$\sin^2 \frac{t}{2} = B \exp \left(\frac{1-q}{q} \sigma_0 \right), \quad \sin^2 \frac{pt}{2q} = B \exp \left(\frac{1-p}{q} \sigma_0 \right) \quad (5.7)$$

и

$$\left| \sin \frac{t}{2} \right| = B \exp \left(\frac{1-q}{q} \frac{\sigma_0}{2} \right), \quad \left| \sin \frac{p}{q} \frac{t}{2} \right| = B \exp \left(\frac{1-p}{q} \frac{\sigma_0}{2} \right). \quad (5.8)$$

Заметим, что $p > 1$ в силу (2.1), так что обе оценки (5.8) нетривиальны при достаточно большом σ_0 . Из них выводим

$$t = 2k_1\pi + B \exp \left(- \frac{\sigma_0}{2q} \right),$$

$$\frac{p}{q} t = 2k_2\pi + B \exp \left(- \frac{\sigma_0}{2q} \right),$$

где k_1, k_2 — целые числа. Умножая эти равенства на q , найдем новые равенства:

$$qt = 2k_1q\pi + B \exp \left(- \frac{\sigma_0}{2q} \right), \quad (5.9)$$

$$pt = 2k_2q\pi + B \exp \left(- \frac{\sigma_0}{2q} \right).$$

Так как дробь p/q несократима, то целые числа p и q взаимно-просты. Ввиду этого найдутся целые числа a и b , ($|a| < q$; $|b| < p$), такие, что $ap + bq = 1$. Умножая первое из соотношений (5.9) на b , второе на a и складывая, найдем

$$t = 2kq\pi + B \exp \left(- \frac{\sigma_0}{2q} \right), \quad (k \text{ целое}), \quad (5.10)$$

если $U(t)$ удовлетворяет (5.5). Итак, для значений t при условии (5.5) можем положить:

$$t = 2kq\pi + v, \quad |v| < c_1 \exp \left(- \frac{\sigma_0}{2q} \right) \quad (5.11)$$

(далее $c_1, c_2 \dots$ — положительные константы).

Допустим теперь, что $U(t)$ удовлетворяет (5.5). Тогда имеет место (5.11). Пользуясь (5.2), находим:

$$U(t) = \lambda_1 \sin^2 \frac{v}{2} + \lambda_2 \exp\left(\frac{p-q}{q} \sigma_0\right) \sin^2\left(\frac{p}{q} \frac{v}{2}\right) - \\ - \nu \exp\left(\frac{1-q}{q} \sigma_0\right) \sin^2\left(\frac{1}{q} \frac{v}{2}\right).$$

Ввиду малости $|v|$, согласно (5.11), имеем

$$U(t) = \lambda_1 \frac{v^2}{4} (1 + \Delta(\sigma_0, v)), \quad (5.12)$$

где $\Delta(\sigma_0, v) \rightarrow 0$ при увеличении σ_0 равномерно по v при выполнении (5.11). Это рассуждение годно при любом значении параметра $\nu \in (0, 1)$.

Если условие (5.5) удовлетворяется, то, как мы видим, выполняется (5.12). Допустим теперь, что при условии (5.11)

$$|v| > \exp\left(-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4q}\right) \sigma_0\right) = \xi_1. \quad (5.13)$$

Тогда из (5.12) находим:⁴⁾

$$U(t) > \frac{1}{8} \lambda_1 \exp\left[-\left(1 - \frac{1}{2q}\right) \sigma_0\right] > \exp\left[-\left(1 - \frac{1}{4q}\right) \sigma_0\right]. \quad (5.14)$$

6. Докажем, что при всех значениях t

$$U(t) \geq 0. \quad (6.1)$$

В самом деле, $U(t)$ — тригонометрический полином от $t/2q$. При $t = \pi$ и достаточно большом σ_0 (что предполагается здесь и в дальнейшем) имеем, очевидно, $U(t) > 0$. Если для какого-либо t_1 $U(t_1) < 0$, то должен иметься хотя один нуль t_0 функции $U(t)$ нечетной кратности, так что

$$U(t_0) = 0, \quad (6.2)$$

$$U(t_0 - \delta) U(t_0 + \delta) < 0 \quad (6.3)$$

для всех достаточно малых $\delta > 0$. Сопоставляя (6.2) с (5.5), находим $t_0 = 2k_0 q \pi + v_0$, где k_0 целое и v_0 имеет оценку (5.11). При достаточно малых δ получим из (5.12) $U(t_0 - \delta) \geq 0$; $U(t_0 + \delta) \geq 0$, что противоречит (6.3) и доказывает (6.1).

Рассмотрим теперь значения t , нарушающие неравенство (5.5). В силу (6.1) для таких t имеем:

$$U(t) > \exp\left[-\left(1 - \frac{1}{4q}\right) \sigma_0\right]. \quad (6.4)$$

⁴⁾ При достаточно больших σ_0 . (Прим. ред.).

Вернемся теперь к основной формуле:

$$q_{\nu}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{t=-\infty}^{\infty} \psi(z) e^{-zx} dt, \quad z = \sigma_0 + it \quad (6.5)$$

(см. п. 2 и 3). Ось интегрирования по t разобьем на два множества: множество T тех значений t , для которых выполняется (5.5), и дополнительное множество D , где верно (6.4). Заметим, что в силу сказанного выше из (5.5) следует более сильное неравенство

$$0 \leq U(t) \leq \exp \left[- \left(1 - \frac{1}{4q} \right) \sigma_0 \right]. \quad (6.6)$$

Множество T , как доказано в п. 5, содержится в системе сегментов

$$|t - 2kq\pi| = |v| \leq \xi_1 = \exp \left[- \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4q} \right) \sigma_0 \right], \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (6.7)$$

которую мы обозначим T_q ; дополнение к T_q , которое мы обозначим D_q , содержится в D . Соответственно этому разобьем (6.5) на два интеграла,

$$g_{\nu}(x) = J_{1\nu}(x) + J_{2\nu}(x), \quad (6.8)$$

где

$$J_{1\nu}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{t \in T_q} \psi(z) e^{-zx} dt, \quad (6.9)$$

$$J_{2\nu}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{t \in D_q} \psi(z) e^{-zx} dt. \quad (6.10)$$

Оценим $J_{2\nu}(x)$. При $t \in D_q$ выполняется (6.4). Ввиду этого при $z = \sigma_0 + it$ в силу (5.1)

$$|\psi(z) e^{-zx}| \leq \exp U_0(x) \exp(-\gamma t^2) \exp \left(-2 \exp \frac{\sigma_0}{4q} \right), \quad (6.11)$$

откуда

$$\begin{aligned} |J_{2\nu}(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \exp U_0(x) \exp \left(-2 \exp \frac{\sigma_0}{4q} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\gamma t^2) dt = \\ &= \frac{B}{\sqrt{\gamma}} \exp(U_0(x)) \exp \left(-2 \exp \frac{\sigma_0}{4q} \right). \end{aligned} \quad (6.12)$$

7. Обратимся к $J_{1\nu}(x)$. Из T_q выделим те значения t , для которых

$$|2\pi qk| \leq \frac{\sigma_0 q}{\sqrt{\gamma}} \left(\gamma + \frac{1}{\gamma} \right) = \rho_0. \quad (7.1)$$

Это множество обозначим T_{0q} , а дополнение T_{0q} в T_q обозначим T_{1q} . Имеем в силу (5.1) и (6.1) при $t \in T_{1q}$

$$|\psi(z) e^{-zx}| \leq \exp(U_0(x)) \exp(-\gamma t^2), \quad (7.2)$$

так что

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{t \in T_{1q}} \psi(z) e^{-zx} dt \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \exp[U_0(x)] \int_{p_0}^{\infty} \exp[-\gamma t^2] dt = \\ &= \frac{B}{\sqrt{\gamma}} \exp[U_0(x)] \exp\left[-\frac{q^2}{2} \sigma_0^2 \left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right)^2\right]. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Остается интеграл

$$J_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{t \in T_{0q}} \psi(z) e^{-zx} dt. \quad (7.4)$$

Он является реальным числом в силу симметричности T_{0q} относительно 0. Мы будем оценивать его снизу.

Рассмотрим один из сегментов, входящих в T_{0q} ,

$$\omega_k: |v| = |t - 2kq\pi| \leq \xi_1 = \exp\left(-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4q}\right)\sigma_0\right). \quad (7.5)$$

Обращаясь к (5.1), находим для таких t :

$$\gamma t^2 = \gamma(2kq\pi + v)^2 = 4\pi^2 \gamma k^2 q^2 + 4\pi \gamma k q v + \gamma v^2.$$

Ввиду (7.1) и (7.5)

$$4\pi \gamma k q v + \gamma v^2 = B \gamma \exp\left(-\frac{2\sigma_0}{5}\right). \quad (7.6)$$

Таким образом, при $t \in \omega_k$

$$\exp(-\gamma t^2) = \exp(-4\pi^2 \gamma q^2 k^2) \left(1 + B \gamma \exp\left(-\frac{2\sigma_0}{5}\right)\right). \quad (7.7)$$

Далее, в силу (5.12)

$$\exp(-2e^{\sigma_0} U(t)) = \exp\left[-\frac{v^2}{2} \lambda_1 e^{\sigma_0} (1 + \Delta(\sigma_0, v))\right]. \quad (7.8)$$

Перейдем к функции $V(t)$ (см. (5.3)). В силу (4.10) имеем:

$$\begin{aligned} V'(2kq\pi) &= V''(2kq\pi) = 0, \\ V^{(m)}(2kq\pi) &= B e^{\sigma_0}, \quad (m \geq 3). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Таким образом,

$$V(t) = V(2kq\pi) + B e^{\sigma_0} \xi_1^3 = V(2kq\pi) + B \exp\left(-\frac{\sigma_0}{5}\right). \quad (7.10)$$

Собирая эти оценки и подставляя в (5.1) при $t \in T_{0q}$, находим:

$$\begin{aligned} \psi(z) e^{-zx} = \exp[U_0(x)] \exp[-4\pi^2 \gamma q^2 k^2] \exp\left[-\frac{v^2 \lambda_1}{2} e^{\sigma_0} (1 + \Delta(\sigma_0, v))\right] \times \\ \times \exp[iV(2kq\pi)] \left(1 + B \exp\left[-\frac{\sigma_0}{5}\right]\right). \end{aligned} \quad (7.11)$$

Рассмотрение интеграла

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\omega_k} \psi(z) e^{-zx} dt \quad (7.12)$$

приводится к рассмотрению

$$\int_{|\sigma| \leq \xi_1} \exp\left(-\frac{v^2}{2} \lambda_1 e^{\sigma_0} (1 + \Delta(\sigma_0, v))\right) dv. \quad (7.13)$$

Полагая $v \sqrt{\lambda_1 e^{\sigma_0}} = w$, приведем наш интеграл к виду

$$\lambda_1^{-1/2} e^{-\sigma_0/2} \int_{|w| \leq \xi_1 \sqrt{\lambda_1 e^{\sigma_0}}} \exp\left[-\frac{w^2}{2} (1 + \delta(w))\right] dw, \quad (7.14)$$

где $|\delta(w)| \leq \delta(\sigma_0)$ при всех w сегмента интегрирования и $\delta(\sigma_0) \rightarrow 0$ при $\sigma_0 \rightarrow \infty$. Ввиду того что $\xi_1 e^{\sigma_0/2} = \exp(\sigma_0/4q)$, элементарными рассуждениями находим для (7.14) выражение

$$\lambda_1^{-1/2} \sqrt{2\pi} e^{-\sigma_0/2} (1 + \Delta_1(\sigma_0)), \quad (7.15)$$

где $\Delta_1(\sigma_0) \rightarrow 0$ при $\sigma_0 \rightarrow \infty$. Из (7.7)–(7.15) находим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_k} \psi(z) e^{-zx} dt = \frac{\lambda_1^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\sigma_0/2} \exp[U_0(x)] \cdot \exp[-4\pi^2 \gamma q^2 k^2] \times \\ \times \exp[iV(2\pi qk)] + B e^{-\sigma_0/2} \exp[U_0(x)] \cdot \exp[-4\pi^2 \gamma q^2 k^2] \cdot \Delta_1(\sigma_0); \\ \Delta_1(\sigma_0) \rightarrow 0 \text{ при } \sigma_0 \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

При этом, согласно (5.3),

$$V(\pi qk) = 2\pi qk(2\gamma\sigma_0 - x). \quad (7.16)$$

8. Вернемся к интегралу (7.4). Имеем:

$$\begin{aligned} J_1 = \frac{\lambda_1^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\sigma_0/2} \exp[U_0(x)] \cdot \sum_{|2\pi qk| \leq \rho_0} \exp[-4\pi^2 \gamma q^2 k^2] \exp[iV(2\pi qk)] + \\ + B e^{-\sigma_0/2} \exp[U_0(x)] \left(\sum_{|2\pi qk| \leq \rho_0} \exp[-4\pi^2 \gamma q^2 k^2] \right) \Delta_1(\sigma_0) \end{aligned} \quad (8.1)$$

(см. (7.1)). Если мы распространим суммирование на все целые числа k в (8.1), то получим погрешность

$$B e^{-\sigma_0/2} \cdot \exp[U_0(x)] \cdot \Delta_2(\sigma_0), \quad \Delta_2(\sigma_0) \rightarrow 0, \quad (8.2)$$

как очевидно из (7.1). Таким образом,

$$J_{\nu} = \frac{\lambda_1^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\sigma_0/2} \exp[U_0(x)] \cdot S + B e^{-\sigma_0/2} \exp[U_0(x)] \times \\ \times \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp[-4\pi^2 \gamma q^2 k^2] \right) \Delta_2(\sigma_0), \quad (8.3)$$

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp[-4\pi^2 \gamma q^2 k^2 + i(2\pi q k y)], \quad (8.4)$$

где $y = 2\gamma\sigma_0 - x$ (см. (7.16)).

Согласно классической формуле Пуассона из теории ϑ -функций (см., например, [13], с. 68—69), имеем при $\operatorname{Re} \omega > 0$:

$$\theta(\omega, \xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi k^2 \omega) \exp(2\pi i k \xi) = \omega^{-1/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\pi \frac{(\xi - k)^2}{\omega}\right].$$

Таким образом,

$$S = \theta(4\pi \gamma q^2, qy) = \frac{1}{(4\pi \gamma q^2)^{1/2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(qy - k)^2}{4\gamma q^2}\right]. \quad (8.5)$$

Далее, очевидно,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(qy - k)^2}{4\gamma q^2}\right] > \exp\left[-\frac{1}{8\gamma q^2}\right],$$

так что S — реальное число и

$$S > c_2 (\gamma q^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{8\gamma q^2}\right). \quad (8.6)$$

Так же, очевидно,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-4\pi^2 \gamma q^2 k^2) = B (1 + \gamma^{-1/2} q^{-1}).$$

Подставляя полученные оценки в (8.3), находим:

$$J_{\nu} > c_3 \gamma^{-1/2} q^{-1} \exp\left[-\frac{1}{8\gamma q^2}\right] \exp[U_0(x)] e^{-\sigma_0/2} (1 - B (1 + \gamma^{-1/2} q^{-1}) \Delta_2(\sigma_0)).$$

Таким образом, при достаточно большом σ_0 имеем:

$$J_{\nu} > c_4 \gamma^{-1/2} q^{-1} \exp\left(-\frac{\pi}{8\gamma q^2}\right) e^{-\sigma_0/2} \exp[U_0(x)]. \quad (8.7)$$

Обратимся к (6.5). Сравнивая (6.9) с (8.7), находим:

$$J_{1\nu}(x) = J_{\nu} (1 + B \Delta(\sigma_0)), \quad \Delta(\sigma_0) \rightarrow 0 \text{ при } \sigma_0 \rightarrow \infty.$$

Далее, сравнивая (6.12) с (8.7), получаем: $J_{2\nu}(x) = BJ_\nu \Delta(\sigma_0)$. Обращаясь к (6.8), находим:

$$g_\nu(x) = J_\nu(1 + B\Delta(\sigma_0)).$$

Это верно при любом $\nu \in (0, 1)$, и $\Delta(\sigma_0) \rightarrow 0$ равномерно по ν при $\sigma_0 \rightarrow \infty$.

Теперь можно завершить доказательство основной леммы I. Выберем X_0 столь большим, чтобы при $x \geq X_0$ и любом $\nu \in (0, 1)$ $g_\nu(x) > J_\nu/2 > 0$. Затем выберем ν столь малым, что $g_\nu(x) > 0$ при $|x| \leq X_0$. Мы можем, согласно п. 3, считать X_0 столь большим и соответственно ν столь малым, что $g_\nu(x) > 0$ и при $x \leq -X_0$. Этим основная лемма I доказана.

9. Перейдем к доказательству основной леммы II. Оставляя в (2.5) $\nu \in (0, 1)$ и $\eta_0 \in (0, \alpha/8)$ пока не определенными, как и в п. 5 ((5.1)–(5.3)), напомним: при $x \geq X_0 > 1$

$$\psi(z) e^{-zx} = \exp[U_0(x)] \exp[-\gamma t^2] \exp[-2e^{\sigma_0} U(t)] \exp[iV(t)], \quad (9.1)$$

где

$$U(t) = \lambda_1 \sin^2 \frac{t}{2} + \lambda_2 \exp(\alpha - 1) \sigma_0 \cdot \sin^2 \frac{\alpha t}{2} - \\ - \nu \exp(\eta_0 - 1) \sigma_0 \cdot \sin^2 \frac{\eta_0 t}{2}, \quad (9.2)$$

$$V(t) = \lambda_1 e^{\sigma_0} \sin t + \lambda_2 e^{\alpha \sigma_0} \sin \alpha t - \nu \exp(\eta_0 \sigma_0) \cdot \sin \eta_0 t + t(2\gamma \sigma_0 - x), \quad (9.3)$$

$U_0(x)$ определяется формулой (5.4).

Иррациональное число $\alpha \in (0, 1)$ разложим в непрерывную дробь

$$\alpha = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}},$$

$q_1 \geq 1$ — целые числа, неполные частные α . Зададим ряд подходящих дробей α : $P_1/Q_1, P_2/Q_2, \dots, P_n/Q_n, P_{n+1}/Q_{n+1}$. Как известно (см., например, [14]),

$$Q_n = q_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \quad (n \geq 3), \quad Q_n \geq 2Q_{n-2}; \quad Q_n \geq 2^{(n-1)/2}, \\ \left| \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} \right| = \frac{1}{Q_n Q_{n+1}}.$$

Далее, если задано любое $\tau > 1$ и Q_n — наибольшее из чисел Q_i , не превосходящих τ , то

$$\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| \leq \frac{1}{Q_n^\tau}. \quad (9.4)$$

Рассмотрим ряд знаменателей подходящих дробей:

$$Q_1, Q_2, \dots, Q_n, Q_{n+1}. \quad (9.5)$$

С помощью ряда (9.5) построим числа

$$\eta'_n = \frac{\xi_{0n}}{Q_n} + \frac{\xi_{1n}}{Q_n Q_{n+1}} + \dots + \frac{\xi_{mn}}{Q_n Q_{n+1} \dots Q_{n+m}} + \dots, \quad (9.6)$$

где целые числа ξ_{in} последовательно определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi_{0n} &= 1, \quad \xi_{1n} + \xi_{0n} Q_{n+1} \equiv 0 \pmod{Q_n}, \\ 0 \leq \xi_{1n} < Q_n, \quad \xi_{2n} + \xi_{1n} Q_{n+2} + \xi_{0n} Q_{n+1} Q_{n+2} &\equiv 0 \pmod{Q_n Q_{n+1}}, \quad 0 \leq \xi_{2n} < Q_n Q_{n+1}. \end{aligned}$$

Если $\xi_{0n}, \dots, \xi_{m-1, n}$ определены, то ξ_{mn} определяется сравнением

$$\begin{aligned} \xi_{mn} + \xi_{m-1, n} Q_{n+m} + \xi_{m-2, n} Q_{n+m-1} Q_{n+m} + \dots + \xi_{0n} Q_{n+1} Q_{n+2} \dots Q_{n+m} &\equiv \\ \equiv 0 \pmod{Q_n Q_{n+1} \dots Q_{n+m-1}}, \quad 0 \leq \xi_{mn} < Q_n Q_{n+1} \dots Q_{n+m-1}. \end{aligned}$$

При таком определении чисел ξ_{in} получим

$$\begin{aligned} \left| \eta'_n - \frac{\xi_{0n}}{Q_n} - \frac{\xi_{1n}}{Q_n Q_{n+1}} - \dots - \frac{\xi_{mn}}{Q_n Q_{n+1} Q_{n+m}} \right| &\leq \\ &\leq \frac{1}{Q_{n+m+1}} + \frac{1}{Q_{n+m+2}} + \dots < \frac{32}{Q_{n+m+1}} \end{aligned} \quad (9.7)$$

в силу свойств чисел ξ_{in} и Q_j . При этом $\eta'_n \rightarrow 0$. Далее,

$$\frac{\xi_{0n}}{Q_n} + \frac{\xi_{1n}}{Q_n Q_{n+1}} + \dots + \frac{\xi_{mn}}{Q_n Q_{n+1} \dots Q_{n+m}} = \frac{a_{mn}}{Q_{mn}}, \quad (a_{mn} \text{ целое})$$

при $n \rightarrow \infty$ и $\eta'_n > 0$ для всех n . Число η_0 будет выбираться как одно из чисел η'_n .

10. Обратимся к $U(t)$ и будем исследовать ее малые значения. Пусть в некоторой точке t имеем

$$|U(t)| \leq \exp(\zeta - 1) \sigma_0 = \xi_0, \quad (10.1)$$

причем

$$\zeta = 4\eta_0 \quad (10.2)$$

и $\eta \in (0, 1)$ как-либо фиксировано. Из (9.2) выводим:

$$\lambda_1 \sin^2 \frac{t}{2} + \lambda_2 \exp(\alpha - 1) \sigma_0 \sin^2 \frac{at}{2} = B \exp(4\eta_0 - 1) \sigma_0. \quad (10.3)$$

Отсюда, как и в п. 5,

$$\left| \sin \frac{t}{2} \right| = B \exp\left(\frac{\alpha - 1}{2} \sigma_0\right); \quad \left| \sin \frac{at}{2} \right| = B \exp\left(\frac{4\eta_0 - \alpha}{2} \sigma_0\right); \quad (10.4)$$

$$t = 2k_1\pi + v_1; \quad v_1 = B \exp\left(\frac{\alpha - 1}{2} \sigma_0\right); \quad (10.5)$$

$$at = 2k_2\pi + v_2; \quad v_2 = B \exp\left(\frac{4\eta_0 - \alpha}{2} \sigma_0\right).$$

Пусть $\tau > 1$ — заданное число; Q_n — наибольшее из чисел (9.5), не превышающее τ ; $p/q = P_n/Q_n$, так что

$$a = \frac{p}{q} + \frac{\theta}{q\tau}; \quad |\theta| \leq 1; \quad q \leq \tau; \quad (p, q) = 1. \quad (10.6)$$

Подставляя (10.6) в (10.5) и умножая на q , найдем:

$$\begin{aligned} qt &= 2k_1q\pi + Bq \exp\left(\frac{\alpha-1}{2}\sigma_0\right), \\ pt &= 2k_2q\pi + \frac{\theta|t|}{\tau} + Bq \exp\left(\frac{4\eta_0-\alpha}{2}\sigma_0\right). \end{aligned} \quad (10.7)$$

Числа p и q взаимно-простые; поэтому найдутся a и b , такие, что $ap - bq = 1$, $0 < a < q$, $0 < b < p < q$; при этом из (10.7) следует:

$$\begin{aligned} t &= 2\pi q (k_1a - k_1b) + Bqb \exp\left(\frac{\alpha-1}{2}\sigma_0\right) + \\ &+ Bqa \exp\left(\frac{4\eta_0-\alpha}{2}\sigma_0\right) + \theta \frac{|t|a}{\tau}. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Обозначим

$$\min\left(\frac{\alpha-4\eta_0}{4}, \frac{1-\alpha}{4}\right) = \beta, \quad \beta_1 = 0.99\beta, \quad (10.9)$$

$\beta < \min(\alpha/8, (1-\alpha)/4) > 0$, так как $\eta_0 < \alpha/8$. Положим далее:

$$\tau = \exp(\beta_1\sigma_0). \quad (10.10)$$

Тогда из (10.8) получаем:

$$t = 2\pi q (k_2a - k_1b) + B \exp\left(-\frac{\beta\sigma_0}{100}\right) + \theta \frac{|t|a}{\tau}. \quad (10.11)$$

Мы будем рассматривать большие значения σ_0 начиная со значения, определяемого большим значением параметра X_0 . Такие σ_0 (и отвечающие им x в выражении (4.2)) будем разбивать на два класса, $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &\in \mathfrak{A}_1, \text{ если } q \leq \tau^{10^{-5}}, \\ \sigma_0 &\in \mathfrak{A}_2, \text{ если } q > \tau^{10^{-5}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим сперва поведение $\psi(z)e^{-zx}$ при t , удовлетворяющих (10.1), и $\sigma_0 \in \mathfrak{A}_2$. Будем впредь считать, что η_0 выбрано в классе чисел η'_n так, что

$$0 < \eta_0 < 10^{-10}\beta_1. \quad (10.12)$$

11. Пусть

$$|t| \leq \sqrt{q}. \quad (11.1)$$

В силу того, что $\sigma_0 \in \mathfrak{A}_2$, при достаточно большом σ_0 q велико:

$$q \geq \exp(10^{-5}\beta_1\sigma_0). \quad (11.2)$$

Поэтому при достаточно большом σ_0 выводим из (11.1) и (10.11):

$$k_1 a - k_2 b = 0. \quad (11.3)$$

Так как a и b взаимно-просты, имеем: $k_1 = k_3 b$; $k_2 = k_1 a (k_3, k_4$ целые); $k_3 = k_4$.

Из равенств (10.5) получаем:

$$t = 2k_3 b \pi + v_1; \quad at = 2k_3 a \pi + v_2 \quad (v_1, v_2 \text{ малы}). \quad (11.4)$$

Докажем теперь, что t должно быть мало. Для этого рассмотрим поведение чисел a и b . Если $b \geq q^{2/3}$, то в силу (11.1) при большом σ_0 (что будем предполагать) из (11.4) следует: $k_3 = 0$, $t = v_1$. Если $b < q^{2/3}$, то $a = (1 + bq)/p < 4b/\alpha < 4q^{2/3}/\alpha$ и из (10.11) и (11.3) находим

$$t = B \exp\left(-\frac{\beta \sigma_0}{100}\right) + \theta |t| q^{-1/3},$$

откуда

$$t = B \exp\left(-\frac{\beta \sigma_0}{100}\right).$$

Итак, мы вывели, что при $\sigma_0 \in \mathfrak{A}_2$ и $|t| \leq \sqrt{q}$ соотношение (10.1) приводит к оценке

$$t = B \exp\left(-\frac{\beta \sigma_0}{100}\right) + B \exp\left(\frac{\alpha - 1}{2} \sigma_0\right) = B \exp\left(-\frac{\beta \sigma_0}{100}\right). \quad (11.5)$$

Итак, при $|t| \leq \sqrt{q}$ имеет место (11.5) либо

$$|U(t)| > \exp[(4\eta_0 - 1)\sigma_0] = \xi_0. \quad (11.6)$$

При t , удовлетворяющих (11.5), имеем из (9.2):

$$U(t) = \frac{\lambda_1}{4} t^2 (1 + B\Delta(\sigma_0)). \quad (11.7)$$

Отсюда видно, что $U(t) \geq 0$ при $|t| \leq \sqrt{q}$, ибо если бы $U(t)$ меняло знак в точке $t_0 \neq 0$, то $U(t_0) = 0$, t_0 было бы малым и $U(t_0)$ выражалось формулой (11.7), так что $U(t_0) \neq 0$, что противоречиво. Если же $t_0 = 0$, то в окрестности t_0 имело бы место (11.7) и не могла бы происходить перемена знака.

Далее, из (4.8), (4.10) и (9.3) находим:

$$V(t) \rightarrow \frac{t^3}{6} V'''(\theta t) = B e^{\sigma_0} |t|^3. \quad (11.8)$$

Из (11.7) выводим: при

$$\exp\left[\frac{\sigma_0}{2}(\zeta_1 - 1)\right] < |t| < c_2 \exp\left(-\frac{\beta \sigma_0}{100}\right),$$

где ζ_1 — какая-либо константа, $\zeta_1 \in (\eta_0; 0, 01)$,

$$U(t) \geq \frac{\lambda_1}{4} \exp[\sigma_0(\zeta_1 - 1)](1 + B\Delta(\sigma_0)) > \frac{\lambda_1}{8} \exp[\sigma_0(\zeta_1 - 1)]. \quad (11.9)$$

Если же $|t| \leq \exp \sigma_0(\zeta_1 - 1)/2$, то

$$V(t) = B \exp\left(-\frac{\sigma_0}{4}\right). \quad (11.10)$$

Вернемся теперь к интегралу вида (6.5)

$$g_{\mathbf{v}}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z) e^{-zx} dt, \quad (11.11)$$

где $\psi(z) e^{-zx}$ определяется формулой (9.1); предполагаем, что $\sigma_0 \in \mathfrak{A}_2$. Разобьем ось изменения t на области:

$$D_q: |t| > \sqrt{q}; \quad T_{1q}: c_2 \exp\left(-\frac{\beta\sigma_0}{100}\right) < |t| \leq \sqrt{q};$$

$$T_{2q}: \exp\left(-0.99 \frac{\sigma_0}{2}\right) \leq |t| \leq c_2 \exp\left(-\frac{\beta\sigma_0}{100}\right); \quad T_{0q}: |t| \leq \exp\left(-0.99 \frac{\sigma_0}{2}\right);$$

соответствующие части интеграла (11.11) назовем

$$J(D_q), \quad J(T_{1q}), \quad J(T_{2q}), \quad J(T_{0q}).$$

Оценим $J(D_q)$. Так как $\sigma_0 \in \mathfrak{A}_2$, то

$$q > \tau^{10^{-5}} > \exp(10^{-5}\beta_1\sigma_0). \quad (11.12)$$

Далее, из (9.2) очевидно, что при любом t

$$|\psi(z) e^{-zx}| \leq \exp[U_0(x)] \exp[\nu \exp[\eta_0\sigma_0]] \exp(-\gamma t^2). \quad (11.13)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} J(D_q) &= B \exp[U_0(x)] \exp[\nu \exp(\eta_0\sigma_0)] \int_{\sqrt{q}}^{\infty} \exp(-\gamma t^2) dt = \\ &= B \exp[U_0(x)] \exp[\nu \exp(\eta_0\sigma_0)] \exp\left[-\frac{\gamma}{2} q\right]. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Учитывая (10.12) и (11.12), находим для (11.14) оценку

$$\begin{aligned} J(D_q) &= B \exp[U_0(x)] \exp\left[\nu \exp(\eta_0\sigma_0) - \frac{\gamma}{2} \exp(10^{-5}\beta_1\sigma_0)\right] = \\ &= B \exp[U_0(x)] \exp\left[-\frac{\gamma}{4} \exp(10^{-5}\beta_1\sigma_0)\right]. \end{aligned} \quad (11.15)$$

12. Рассмотрим теперь $J(T_{1q})$. Из п. 11 явствует, что в области T_{1q}

$$U(t) > \exp(4\eta_0 - 1)\sigma_0. \quad (12.1)$$

Отсюда

$$J(T_{1q}) = B \exp[U_0(x)] \exp[-2 \exp(4\eta_0 \sigma_0)]. \quad (12.2)$$

Переходим к $J(T_{2q})$. В силу (11.9) в области T_{2q}

$$U(t) > \frac{\lambda_1}{8} \exp(-0.99\sigma_0).$$

Отсюда

$$J(T_{2q}) = B \exp[U_0(x)] \exp\left(-\frac{\lambda_1}{4} \exp 0.01\sigma_0\right). \quad (12.3)$$

Наконец, в области T_{0q} , полагая $\xi_1 = \exp(-0.99\sigma_0/2)$, имеем:

$$J(T_{0q}) = \frac{1}{2\pi} \exp[U_0(x)] \int_{|t| \leq \xi_1} \exp(-\gamma t^2) \exp\left[-\frac{\lambda_1}{2} e^{\sigma_0 t^2} (1 + B\Delta(\sigma_0))\right] \times \\ \times \exp\left[B \exp\left(-\frac{\sigma_0}{4}\right)\right] dt.$$

При достаточно большом σ_0 (что, как обычно, предполагается) можно заменить три подынтегральных множителя соответственно оценками снизу: $1/2$, $\exp(-\lambda_1 e^{\sigma_0 t^2})$, $1/2$, так что

$$J(T_{0q}) > \frac{1}{8\pi} \exp[U_0(x)] \int_{|t| \leq \xi_1} \exp(-\lambda_1 e^{\sigma_0 t^2}) dt > c_3 \exp[U_0(x)] e^{-\sigma_0/2}. \quad (12.4)$$

Сопоставляя (11.15) и (12.2)–(12.4), находим:

$$g_v(x) > \frac{c_3}{2} \exp[U_0(x)] e^{-\sigma_0/2} > 0 \quad (12.5)$$

при $v \in (0, 1)$, $\sigma_0 \in \mathcal{A}_2$ и при достаточно большом x (а следовательно, и σ_0).

13. Теперь переходим к случаю $\sigma_0 \in \mathcal{A}_1$. Здесь имеем:

$$q \leq \tau^{10^{-5}}. \quad (13.1)$$

Положение будет сходно со случаем рационального α , рассмотренным ранее. Здесь, однако, в силу иррациональности α q не будет фиксированным числом, а необходимо $q \rightarrow \infty$ при возрастании x , а вместе с ним τ_0 и τ . При данном (большом) $\sigma_0 \in \mathcal{A}_1$ и соответствующем по формуле (10.11) τ ось изменения t разбиваем на множества

$$D_\tau : |t| \geq \tau^{0.01} \quad (13.2)$$

и

$$T_\tau : |t| < \tau^{0.01}. \quad (13.3)$$

Соответствующие части интеграла (11.11) обозначим $J(D_\tau)$ и $J(T_\tau)$. Займемся сперва $J(D_\tau)$. В силу оценки (11.13), верной для любого t , находим:

$$J(D_\tau) = B \exp[U_0(x)] \exp[\nu \exp(\eta_0 \sigma_0)] \int_{\tau^{0.01}}^{\infty} \exp(-\gamma t^2) dt.$$

Совершенно так же, как в п. 11 (формулы (11.14), (11.15)), получаем оценку

$$J(D_\tau) = B \exp[U_0(x)] \exp\left[-\frac{\gamma}{4} \exp(0.01\beta_1 \sigma_0)\right]. \quad (13.4)$$

Теперь пусть $t \in T_\tau$, так что верно (13.3). Обратимся к формуле (10.11). Здесь $0 < a < \tau^{-10^8}$, так что получаем: если верно (10.1), то $t = 2\pi qk + \tau^{-0.01} + \theta t \tau^{10^{-8}-1}$; k — целое число. Отсюда

$$t = 2\pi qk + B\tau^{-0.01}. \quad (13.5)$$

Полагая $t - 2\pi qk = \tau$, видим, что (10.1) приводит к соотношениям

$$|t - 2\pi qk| = |\omega| \leq c_4 \tau^{-0.01}. \quad (13.6)$$

Обратимся к (9.1)–(9.3). Число q есть одно из чисел ряда (9.5). Мы можем считать, что $q > K_0$, где K_0 — любая назначенная нами константа (от этого будет зависеть выбор параметров X_0, ν, η_0). Если Q_{n_0} — наименьшее число ряда (9.5), большее K_0 , то полагаем впредь $\eta_0 = \eta'_{n_0-1}$ (см. (9.6)); при этом n_0 должно быть столь большим, чтобы η_0 было достаточно малым, в частности удовлетворяло (10.12). Пусть теперь $q = Q_n$; $n \geq n_0$. Из (9.7) выводим:

$$\eta_0 = \frac{l}{q} + \frac{32\theta}{Q_{n+1}}; \quad l, q \text{ целые.}$$

Но мы имеем $q = Q_n < \tau$; $Q_{n+1} > \tau$. В силу (13.1)

$$\eta_0 = \frac{l}{q} + \frac{32\theta}{\tau}; \quad q \leq \tau^{10^{-8}}. \quad (13.7)$$

При выбранном и теперь уже фиксированном значении $\eta_0 = \eta'_{n_0-1}$ и t , подчиняющемся условию (13.6), рассмотрим поведение $U(t)$ и $V(t)$ (см. (9.2) и (9.3)). В области T_τ

$$\frac{\eta_0 t}{2} = \frac{lt}{2q} + \frac{16\theta t}{\tau}; \quad |t| \leq \tau^{0.01}. \quad (13.8)$$

Далее, $\alpha = p/q + \theta/q\tau$. Здесь $(p, q) = 1$. Кроме того, $0 < l < p/2$, ибо $\eta_0 < \alpha/8$. Затем

$$\frac{at}{2} = \frac{pt}{2q} + \frac{\theta t}{2q\tau} \quad (13.9)$$

($|\theta| \leq 1$; θ не всегда одно и то же). Рассмотрим значения $t \in T_\tau$ при условиях (13.6):

$$U(t) = \lambda_1 \sin^2 \frac{w}{2} + \lambda_2 \exp(\alpha - 1) \sigma_0 \sin^2 \left(\frac{p}{q} \frac{w}{2} + \frac{\theta t}{2q\tau} \right) - \\ - \nu \exp(\gamma_0 - 1) \sigma_0 \sin^2 \left(\frac{l}{q} \frac{w}{2} + \frac{16\theta t}{\tau} \right). \quad (13.10)$$

При условиях (13.6) докажем неравенство

$$U(t) > \frac{\lambda_1}{8} w^2 + B \exp(-\sigma_0 - \frac{\beta \sigma_0}{200}). \quad (13.11)$$

В самом деле,

$$\sin^2 \left(\frac{l}{q} \frac{w}{2} + \frac{16\theta t}{\tau} \right) = B \left(w - \frac{t}{\tau} \right)^2 = B \tau^{-0.02} = B \exp(-0.02\beta_1 \sigma_0). \quad (13.12)$$

Из (10.12), (13.10) и (13.12) следует (13.11).

14. Из (13.11) выводим: при $|w| \geq \exp[(\zeta - 1)\sigma_0/2]$ ($\zeta > 0$ — константа)

$$U(t) > \frac{\lambda_1}{16} \exp[(\zeta - 1)\sigma_0]. \quad (14.1)$$

Таким образом, $U(t)$ может не подчиняться неравенству (14.1) лишь для таких t в условиях (13.6), для которых

$$|w| \leq \exp(\zeta - 1) \frac{\sigma_0}{2} = \xi_0. \quad (14.2)$$

Обозначим теперь: $T_{\tau q} \subset T_\tau$ — множество точек t , входящих в T_τ и подчиненных условию (14.2), т. е.

$$|t - 2\pi q k| \leq \xi_0, \quad (14.3)$$

$T'_\tau = T_\tau - T_{\tau q}$, $T_{\tau q 0}$ — множество точек $t \in T_{\tau q}$, где $k = 0$, т. е.

$$|t| \leq \xi_0. \quad (14.4)$$

$T_{\tau q 1} = T_{\tau q} - T_{\tau q 0}$, т. е. множество точек $t \in T_\tau$ при условии (14.3), где $k \neq 0$. Соответствующие интегралы от $\psi(z)e^{-zx}$ обозначим $J(T'_\tau)$, $J(T_{\tau q 0})$, $J(T_{\tau q 1})$. Оценим сперва $J(T'_\tau)$. Имеем, согласно (9.1) и (14.1), на T'_τ :

$$|\psi(z)e^{-zx}| = B \exp(-\gamma t^2) \exp\left(-\frac{\lambda_1}{8} \exp \zeta \sigma_0\right) \exp[U_0(x)]. \quad (14.5)$$

Отсюда

$$J(T'_\tau) = B \exp[U_0(x)] \exp[-c_5 \exp \zeta \sigma_0]. \quad (14.6)$$

Мы приняли, что $q \geq K_0$, где, как говорилось ранее, K_0 — выбранная нами по параметрам γ , α достаточно большая константа.

Исходя из этого, оценим $|J(T_{\tau q1})|$ через K_0 . Согласно (9.1) и (13.14),

$$J(T_{\tau q1}) = B \exp[U_0(x)] \sum_{k \neq 0} \exp\left(-\frac{\gamma}{2} 4\pi^2 q^2 k^2\right) \times \\ \times \int_{|w| \leq \xi_0} \exp\left[-\frac{\lambda_1}{4} e^{\sigma_0} \left(w^2 + B \exp\left(-\sigma_0 - \frac{\beta \sigma_0}{200}\right)\right)\right] dw. \quad (14.7)$$

Интеграл в (14.7), очевидно, равен следующему:

$$\int_{|w| \leq \xi_0} \exp\left(-\frac{\lambda_1}{4} e^{\sigma_0} w^2\right) \left(1 + B \exp\left[-\frac{\beta \sigma_0}{200}\right]\right) dw = B e^{-\sigma_0/2}. \quad (14.8)$$

Таким образом,

$$J(T_{\tau q1}) = B \exp[U_0(x)] e^{-\sigma_0/2} \sum_{k \neq 0} \exp(-2\gamma\pi^2 k^2 q^2).$$

Если $K_0 > K_1/\sqrt{\gamma}$, то $\sum_{k \neq 0} \exp(-2\gamma\pi^2 k^2 q^2) < \exp(-K_1^2)$, так что

$$J(T_{\tau q1}) = B \exp[U_0(x)] e^{-\sigma_0/2} \exp(-K_1^2). \quad (14.9)$$

При этом ограниченная функция B в (14.9) имеет оценку модуля сверху, не зависящую от K_1 .

15. Интеграл $J(T_{\tau q0})$ оценим снизу. Из (14.4) находим:

$$U(t) = t^2 \left\{ \frac{\lambda_1}{4} + \lambda_2 \frac{a^2}{4} \exp(a-1) \sigma_0 - \frac{\gamma_0^2}{4} \exp(\gamma_0-1) \sigma_0 \right\} (1+Bt). \quad (15.1)$$

Далее,

$$V(t) = V(0) + V'(0)t + V''(0)\frac{t^2}{2} + V'''(0)\frac{t^3}{6}$$

при $t \in T_{\tau q0}$. Из (4.10) видим, что $V'(0) = V''(0) = 0$; $V'''(t) = B e^{\sigma_0}$; из (9.3) явствует, что $V(0) = 0$. Поэтому

$$V(t) = B e^{\sigma_0} \frac{t^3}{6} = B \exp\left(\frac{3}{2} \zeta_0 - \frac{1}{2}\right) \sigma_0.$$

Будем считать $\zeta = 10^{-3}$. Тогда

$$V(t) = B \exp\left(-\frac{\sigma_0}{4}\right). \quad (15.2)$$

Отсюда

$$J(T_{\tau q0}) > \frac{1}{2} \exp[U_0(x)] \int_{|t| \leq \xi_0} \exp(-\lambda_1 e^{\sigma_0} t^2) \left(1 + B \exp\left[-\frac{\sigma_0}{4}\right]\right) dt > \\ > c_0 e^{-\sigma_0/2} \exp[U_0(x)]. \quad (15.3)$$

Сопоставляя (15.3), (14.9), (14.6) и (13.4), видим, что если константа K_1 в (14.9) была заранее выбрана достаточно большой, то

$$g_v(x) > \frac{1}{2} c_8 e^{-x_0/2} \exp[U_0(x)]$$

при $c_0 \in \mathfrak{A}_1$ достаточно большим и $v \in (0, 1)$. Как известно из предыдущего, выбирая достаточно малое $v > 0$, можно сделать $g_v(x) > 0$ при $|x| \leq X_0$; $X_0 > 1$ можно заранее выбрать сколь угодно большими. Далее, при $c_0 \in \mathfrak{A}_2$ и x достаточно большим имеем (12.5). При $x < -X_0$ также имеем $g_v(x) > 0$. Это и доказывает основную лемму II.

16. Переходим к доказательству основной леммы III. Обратимся к (2.6). $G(u)$ в (2.6) — непрерывная неубывающая функция. Обозначим

$$G(1) - G(\beta) = \Delta_0 > 0.$$

Рассмотрим производные числа Дини функции $G(u)$ на сегменте $[\beta, 1]$. Нам будет нужна следующая лемма (см. [15], с. 97—98): пусть $f(u)$ непрерывна в интервале (a, b) ; l и L — точные верхняя и нижняя грани какого-либо одного из четырех производных чисел Дини $f(u)$. Тогда

$$l \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq L.$$

Пусть $(a, b) \subset [\beta, 1]$ — такой интервал, что $G(b) - G(a) > 0$; в силу непрерывности $G(u)$ он должен существовать при a и b , достаточно близких к числам β и 1.

Очевидно, все четыре производных числа Дини (допускающие, как известно, и бесконечное значение) неотрицательны, так что $l \geq 0$. Рассмотрим левое нижнее производное число Дини:

$$\lambda'_u = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{G(u) - G(u - h)}{h}.$$

Пусть $L = \sup_u \lambda'_u$ ($L \leq \infty$). Тогда $L > 0$. В самом деле, будь $L = 0$, то ввиду того что $l = 0$, из вышеуказанной леммы следовало бы, что $G(b) - G(a) = 0$, что невозможно. Итак, должна существовать точка $u_0 \in [\beta, 1]$, где $\lambda'_{u_0} > 0$. Легко видеть, что существует константа $c > 0$, такая, что при достаточно малых $h > 0$, $h \leq h^{(0)}$

$$G(u_0) - G(u_0 - h) > ch. \quad (16.1)$$

Рассмотрим сегмент $I_0: [u - h^{(0)}, u_0] \subset [\beta, 1]$.

Выберем $h^{(1)}$ столь малым, что

$$1 - 10^{-10} < \frac{u_0 - h^{(1)}}{u_0} < 1; \quad h^{(1)} < h^{(0)}. \quad (16.2)$$

Пусть $G(u_0) - G(u_0 - h^{(1)}) = \Delta_1 > 0$. В силу непрерывности $G(u)$ можно выбрать $h^{(2)}$ так, что $G(u_0) - G(u_0 - h^{(2)}) = \Delta_1/2$; $h^{(2)} < h^{(1)}$. Тогда $G(u_0 - h^{(2)}) - G(u_0 - h^{(1)}) = \Delta_1/2$.

Рассмотрим сегменты $I_1: [u_0 - h^{(2)}, u_0]$; $I_2: [u_0 - h^{(1)}, u_0 - h^{(2)}]$. Положим $u/u_0 = v$; $u = vu_0$; $G(u) = G(u_0 v) = G_1(v)$. Тогда сегменты I_1 и I_2 превратятся в сегменты изменения v : $I'_1 = [1 - h^{(2)}, 1]$; $I'_2 = [v^{(1)}, v^{(2)}]$, где $h^{(2)}/u_0 = h^{(2)}_1$; $v^{(1)} = 1 - h^{(1)}/u_0$; $v^{(2)} = 1 - h^{(2)}/u_0$.

Из (16.1) вытекает неравенство для $G_1(v)$:

$$G_1(1) - G_1(1 - h) > cu_0 h \quad (16.3)$$

при $h \leq h^{(0)}/u_0$. Кроме того, $G_1(1) - G_1(1 - h^{(2)}_1) = \Delta_1/2$; $G(v^{(2)}) - G(v^{(1)}) = \Delta_1/2$ и в силу (16.2)

$$1 - 10^{-10} < v^{(1)} < v^{(2)} < 1. \quad (16.4)$$

Теперь осуществим в сегменте I'_2 следующую конструкцию. Задаем большое число S_0 . На сегменте I'_2 отмечаем все рациональные дроби r/s со знаменателями $1 < s \leq S_0$. Возле каждой из них опишем интервал $(r/s - \delta_{r/s}, r/s + \delta_{r/s})$, где $\delta_{r/s}$ избраны так, что сумма приращений $G_1(v)$ по этим интервалам не превосходит $\Delta_1/4$.

В оставшейся системе сегментов выберем сегмент $I^{(S_0)}_2$, такой, что приращение $G_1(v)$ на нем равно $\Delta_2 > 0$ (что, очевидно, возможно). На сегменте $I^{(S_0)}_2$ к функции $G_1(v)$ применяем то же рассуждение о левом нижнем производном числе Дини, что и раньше. Оно доказывает, что найдется число $\alpha \in I^{(S_0)}_2$, такое, что

$$G_1(\alpha) - G_1(\alpha - h) > c'h$$

при $0 < h < h^{(3)}$; $c' > 0$ — константа.

17. Дальнейшие рассуждения будут вестись о сегментах I'_1 и $[\alpha - h^{(3)}, \alpha]$. Эти сегменты переобозначим π_1 и $\pi(S_0)$; переобозначим также $h^{(2)}_1 = h_0$, $h^{(3)} = \rho_0$, так что

$$\pi_1 = [1 - h_0, 1]; \quad \pi(S_0) = [\alpha - \rho_0, \alpha]. \quad (17.1)$$

Теперь введем новую случайную величину X_0 , такую, что

$$\begin{aligned} \varphi_0(z) = E \exp(zX_0) = \exp \left(\gamma z^2 + \int_{\pi_1} (e^{zv} - 1) dG_1(v) + \right. \\ \left. + \int_{\pi(S_0)} (e^{zv} - 1) dG_1(v) \right). \end{aligned} \quad (17.2)$$

Мы будем доказывать сначала, что при достаточно малом $\nu_0 > 0$ и подходяще выбранном малом $\eta_0 > 0$ функция

$$\psi_0(z) = \varphi_0(z) \exp(-\nu_0(e^{\eta_0 z} - 1)) \quad (17.3)$$

будет х. ф. некоторой случайной величины Y . Положим далее $G_1(1+v) = \Lambda(v)$; $G_1(\alpha+v) = \Lambda_1(v)$. Тогда

$$\int_{\pi_1} (e^{zv} - 1) dG_1(v) = \int_{-h_0}^0 (e^{z(1+v)} - 1) d\Lambda(v), \quad (17.4)$$

$$\int_{\pi(S_0)} (e^{zv} - 1) dG_1(v) = \int_{-p_0}^0 (e^{z(\alpha+v)} - 1) d\Lambda_1(v). \quad (17.5)$$

Считая $x \geq X_0$ ($X_0 > 1$ большое), находим точку перевала $\sigma_0 = \sigma_0(x)$ соответственно (4.2) и полагаем, как и ранее, $z = \sigma_0 + it$. Положим далее

$$h(\sigma_0) = \int_{-h_0}^0 e^{\sigma_0 v} d\Lambda(v) \quad (17.6)$$

и $v_0 \in (0, 1)$. Получим в обозначениях, аналогичных (9.1)–(9.3):

$$\psi_0(z) e^{-zx} = \exp[U_0(x)] \exp[-\gamma t^2] \exp[-2e^{\sigma_0} U(t)] \exp[tV(t)], \quad (17.7)$$

$$U(t) = \int_{-h_0}^0 e^{\sigma_0 v} \sin^2 \frac{t(1+v)}{2} d\Lambda(v) + \exp(\alpha - 1) \sigma_0 \int_{-p_0}^0 e^{\sigma_0 v} \sin^2 \frac{t(\alpha+v)}{2} \times \\ \times d\Lambda_1(v) - v_0 \exp(\eta_0 - 1) \sigma_0 \sin^2 \frac{\eta_0 t}{2}, \quad (17.8)$$

$$V(t) = e^{\sigma_0} \int_{-h_0}^0 \sin t(1+v) d\Lambda(v) + e^{\alpha \sigma_0} \int_{-p_0}^0 e^{\sigma_0 v} \sin t(\alpha+v) d\Lambda_1(v) - \\ - v_0 \sin(\eta_0 t) \exp(\eta_0 \sigma_0) + t(2\gamma \sigma_0 - x). \quad (17.9)$$

Полагая $\Delta = \int_{-h_0}^0 d\Lambda(v)$, из (17.6) находим:

$$h(\sigma_0) \leq \int_{-h_0}^0 d\Lambda(v) = \Delta. \quad (17.10)$$

В дальнейшем $a_0, a_1, \dots$ будут означать положительные константы; $\zeta_0, \zeta_1, \dots$ — малые положительные константы, $K_0, K_1, \dots$ — большие положительные константы; σ_0 будет считаться достаточно большим.

Имеем:

$$h(\sigma_0) = \int_{-h_0}^0 e^{\sigma_0 v} d\Lambda(v) > \frac{a_0}{\sigma_0}. \quad (17.11)$$

В самом деле, при достаточно большом σ_0

$$h(\sigma_0) > \frac{1}{e} \int_{-1/\sigma_0}^0 d\Lambda(v) > \frac{a_0}{\sigma_0}$$

в силу (16.3).

Пусть, далее, $R(\sigma_0) = 4 \ln \sigma_0$; $h_1(\sigma_0) = \frac{R(\sigma_0)}{\sigma_0}$. Тогда

$$\int_{-h_0}^{-h_1(\sigma_0)} e^{\sigma_0 v} d\Lambda(v) < \exp[-R(\sigma_0)] \int_{-h_0}^{-h_1(\sigma_0)} d\Lambda(v) < \frac{\Delta}{\sigma_0^4} < \frac{1}{2} \frac{a_0}{\sigma_0}.$$

В силу (17.11) отсюда выводим:

$$\int_{-h_1(\sigma_0)}^0 e^{\sigma_0 v} d\Lambda(v) > \frac{1}{2} h(\sigma_0). \quad (17.12)$$

Совершенно аналогично трактуется интеграл $\rho(\sigma_0) = \int_{-\rho_0}^0 e^{\sigma_0 v} d\Lambda_1(v)$.

Имеем:

$$\rho(\sigma_0) > \frac{a_0}{\sigma_0}; \quad \int_{-h_1(\sigma_0)}^0 e^{\sigma_0 v} d\Lambda_1(v) > \frac{1}{2} \int_{-\rho_0}^0 e^{\sigma_0 v} d\Lambda_1(v) = \frac{1}{2} \rho(\sigma_0). \quad (17.13)$$

Нам нужно будет еще очевидное равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\xi^2 e^{\sigma_0} \int_{-h_0}^0 e^{\sigma_0 v} d\Lambda(v) \right] d\xi = a_1 e^{-\sigma_0/2} (h(\sigma_0))^{-1/2}. \quad (17.14)$$

В дальнейшем будем считать ⁵⁾

$$|t| \leq \exp(0.51\eta_0\sigma_0). \quad (17.15)$$

Значениями t , не удовлетворяющими (17.15), мы можем пренебречь. На основании очевидного аналога (11.13) имеем

$$\int_{|t| > \exp(0.51\eta_0\sigma_0)} |\psi_0(z) e^{-zx}| dt = B \exp(U_0(x)) \exp(-\exp(0.01\eta_0\sigma_0)),$$

чем, как видно из дальнейшего, можно будет пренебречь.

18. Рассмотрим теперь те значения $U(t)$, для которых

$$|U(t)| < K_1 e^{-\sigma_0\sigma_0}. \quad (18.1)$$

⁵⁾ От этого места и до конца п. 18 текст изменен в соответствии с авторской поправкой, опубликованной в журнале «Теория вероятностей и ее приложения» (1960, 5, 3, с. 376). (Прим. ред.).

Из (17.8) находим

$$0 < \int_{-h_0}^0 e^{\sigma_0 v} \sin^2 \frac{t(1+v)}{2} d\Lambda(v) + \exp(\alpha - 1) \sigma_0 \int_{-\rho_0}^0 e^{\sigma_0 v} \sin^2 \frac{t(\alpha+v)}{2} d\Lambda_1(v) = \\ = B \sigma_0 \exp(\eta_0 - 1) \sigma_0. \quad (18.2)$$

При этом в силу (16.4) $1 - \alpha \leq 10^{-10}$; мы будем считать $1 - \alpha$ взятым в интервале $(0, 10^{-10})$. Докажем, что

$$\left| \sin \frac{t}{2} \right| \leq K_1 \exp\left(-\sigma_0 \frac{1 - 1.52\eta_0}{3}\right) = \xi_1. \quad (18.3)$$

Пусть это не так и $|\sin t/2| > \xi_1$. Положим $\xi'_1 = \xi_1 \exp(-0.51\eta_0\sigma_0)$. Тогда при $|v| < \xi'_1$ имеем, учитывая (17.15):

$$\left| \sin \frac{t(1+v)}{2} \right| > \frac{\xi_1}{4}.$$

Отсюда

$$\int_{-h_0}^0 e^{\sigma_0 v} \sin^2 \frac{t(1+v)}{2} d\Lambda(v) > \frac{\xi_1^2}{16} \int_{-\xi'_1}^0 e^{\sigma_0 v} d\Lambda(v) > \frac{a_0}{16} \xi_1^3 \exp(-0.51\eta_0\sigma_0)$$

в силу (16.3). Далее, $\xi_1^3 = K_1^3 \exp[-\sigma_0(1 - 1.52\eta_0)] \sigma_0$ и полученное неравенство противоречит (18.2). Этим (18.3) доказано. Аналогично из (18.1) следует:

$$\left| \sin \frac{\alpha t}{2} \right| \leq K_1 \exp\left(-\sigma_0 \frac{\alpha - 1.52\eta_0}{3}\right) = \xi_2. \quad (18.4)$$

При этом

$$\xi_2 = \xi_1 \exp \frac{1 - \alpha}{3} \sigma_0; \quad 1 - \alpha \leq 10^{-10}.$$

19. Дальнейшие рассуждения будут зависеть от того, является ли α рациональным или иррациональным числом. Начнем со случая рационального $\alpha = p/q$ (дробь p/q несократима). При этом в силу (16.4) $1 < p < q$. Далее, по конструкции сегмента $\pi(S_0)$,

$$q > S_0, \quad (19.1)$$

ибо все рациональные числа с меньшими знаменателями были выброшены. Выбираем

$$\eta_0 = \frac{1}{q}, \quad (19.2)$$

считая $S_0 > 10^{20}$. Из (18.3) и (18.4) имеем:

$$\sin \frac{t}{2} = \theta \xi_2, \\ \sin \frac{t}{2} \frac{p}{q} = \theta_1 \xi_2. \quad (19.3)$$

Отсюда в силу взаимной простоты p и q , как и ранее, выводим:

$$t = 2\pi kq + 2\theta q^2 \xi_2 = 2\pi qk + \theta \xi_3 \quad (19.4)$$

(k целое; $|\theta_1| \leq 1$; θ не всегда одно и то же), или

$$t = 2\pi kq + w; \quad |w| \leq \xi_3. \quad (19.5)$$

Пусть $U(t)$ подчиняется (18.1). Тогда для t получаем соотношение (19.5) и t подчиняется (19.4). Имеем:

$$t \frac{1+v}{2} = k\pi qv + \frac{w}{2}(1+v) + \pi kq,$$

$$\frac{t}{2} \left(\frac{p}{q} + v \right) = k\pi qv + \frac{w}{2} \left(\frac{p}{q} + v \right) + \pi kp.$$

Таким образом, $t(1+v)/2 - t(p/q+v)/2 = (w/2)(1 - p/q) + \pi k(q-p)$ при любом значении v . Отсюда видно, что для w при условии (19.5) либо $\sin^2(t/2)(1+v)$, либо $\sin^2(t/2)(\alpha+v)$ будет не меньше $w^2/16$. Далее, $\sin^2(\eta_0 t/2) = \sin^2(t/2q) = \sin^2(w/2q) = (w^2/4q^2)(1+B|w|)$. Поэтому из (17.8) следует:

$$U(t) > w^2 \left(\frac{1}{16} \exp[(\alpha-1)\sigma_0] \frac{a_0}{\sigma_0} - v_0 \frac{1}{2q^2} \exp\left(\frac{1}{q} - 1\right) \sigma_0 \right) > > w^2 (a_2 \exp(\alpha-1)\sigma_0) \frac{1}{\sigma_0}. \quad (19.6)$$

Отсюда мы выводим прежде всего, что $U(t) \geq 0$ при всех t , ибо если $U(t_1) = 0$, то в окрестности t_1 функция $U(t)$ не может менять знак. Далее, если имеет место (18.1), то из (19.6) заключаем:

$$w^2 a_2 \frac{1}{\sigma_0} \exp(\alpha-1)\sigma_0 < K_2 e^{-\sigma_0 \sigma_0}, \quad (19.7)$$

$$|w| \leq \frac{K_2^{1/2}}{a_2^{1/2}} \sigma_0 \exp\left(-\frac{\alpha \sigma_0}{2}\right) \leq \exp\left(-\frac{\alpha - \xi_0}{2} \sigma_0\right) = \xi_4.$$

Теперь, считая S_0 и, стало быть, q достаточно большими, рассмотрим поведение интеграла $(1/2\pi) \int_{|t-2\pi qk| \leq \xi_4} \psi_0(z) e^{-zx} dt$. Мы будем считать $k \neq 0$. Если

$$|k| \geq 4 \sqrt{\frac{\sigma_0}{\gamma}}, \quad (19.8)$$

то

$$|t| \geq 4\pi q \sqrt{\frac{\sigma_0}{\gamma}}. \quad (19.9)$$

Ввиду того что $U(t) \geq 0$, из (17.7) находим:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|t| \geq 4\pi q \sqrt{\sigma_0/\gamma}} \psi_0(z) e^{-zx} dt = B \exp[U_0(x)] \exp(-\pi q \sigma_0). \quad (19.10)$$

Как мы увидим далее, такой величиной можно пренебречь. Рассмотрим поведение $U(t)$ при $|t - 2\pi qk| \leq \xi_4$ и k , не удовлетворяющем неравенству (19.8).

Обратим внимание на последний член $U(t)$ в (17.8). Он имеет вид ($\eta_0 = 1/q$; $w = t - 2\pi kq$)

$$B \exp\left(\frac{1}{q} - 1\right) \sigma_0 \sin^2 \frac{w}{2q} = B \exp\left(-\frac{3}{2} \sigma_0\right). \quad (19.11)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} -2e^{\sigma_0} U(t) = & -2e^{\sigma_0} \left(\int_{-h_0}^0 e^{\sigma_0 v} \sin^2 \frac{t}{2} (1+v) d\Lambda(v) + \right. \\ & \left. + \exp(\alpha - 1) \sigma_0 \int_{-\rho_0}^0 e^{\sigma_0 v} \sin^2 \frac{t}{2} (\alpha + v) d\Lambda_1(v) \right) + B \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma_0\right). \end{aligned}$$

Стало быть,

$$2e^{\sigma_0} U(t) \geq 2e^{\sigma_0} \int_{-h_0}^0 e^{\sigma_0 v} \sin^2 \frac{t}{2} (1+v) d\Lambda(v) + B \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma_0\right). \quad (19.12)$$

Далее,

$$\frac{t}{2} (1+v) = \frac{2\pi qk + w}{2} (1+v) = \pi kq + \frac{w}{2} (1+v) + \pi kqv$$

и

$$\sin^2 \frac{t}{2} (1+v) = \sin^2 \left(\pi kqv + \frac{w}{2} (1+v) \right).$$

h_0 было фиксировано, а $q > S_0$, и вся конструкция, связанная с S_0 , производится независимо от h_0 . При достаточно большом q и $|k| \geq 1$

$$\int_{-h_0}^0 e^{\sigma_0 v} \sin^2 \frac{t}{2} (1+v) d\Lambda(v) \geq \int_{-1/4|k|q}^0 e^{\sigma_0 v} \sin^2 \frac{t}{2} (1+v) d\Lambda(v). \quad (19.13)$$

Так как $|\pi kqv| \leq \pi/4$ в этом случае, то

$$\begin{aligned} & \int_{-1/4|k|q}^0 e^{\sigma_0 v} \sin^2 \frac{t}{2} (1+v) d\Lambda(v) > \\ & > \frac{1}{2} \int_{-1/4|k|q}^0 e^{\sigma_0 v} \left(\pi kqv + \frac{w}{2} (1+v) \right)^2 d\Lambda(v). \end{aligned} \quad (19.14)$$

Из (17.7), (17.8), (17.12), (19.13) и (19.14) имеем:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{|t-2\pi qk| \leq \xi_4} \psi_0(z) e^{-zx} dt \right| = B \exp[U_0(x)] \exp(-\gamma \pi^2 k^2 q^2) \times$$

$$\times \int_{|w| \leq \frac{1}{2}} \exp \left[-e^{\sigma_0} \int_{-1/4|k|q}^0 e^{\sigma_0 v} \left(\pi k q v + \frac{w}{2} (1+v) \right)^2 d\Lambda(v) \right] dw. \quad (19.15)$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \exp [-(aw^2 + 2bw + c)] dw,$$

где $aw^2 + 2bw + c$ — определенный квадратный полином с дискриминантом $D = b^2 - ac < 0$. Имеем:

$$J = \frac{a_3}{\sqrt{a}} \exp \left(-\frac{D}{a} \right) < \frac{a_3}{\sqrt{a}}. \quad (19.16)$$

Обращаясь к (19.15), находим:

$$e^{\sigma_0} \int_{-1/4|k|q}^0 e^{\sigma_0 v} \left(\pi k q v + \frac{w}{2} (1+v) \right)^2 d\Lambda(v) = aw^2 + 2bw + c,$$

где

$$a = e^{\sigma_0} \int_{-1/4|k|q}^0 e^{\sigma_0 v} \frac{(1+v)^2}{4} d\Lambda(v). \quad (19.17)$$

Ввиду этого последний интеграл в (19.15) имеет оценку сверху:

$$a_3 e^{-\sigma_0/2} \left(\int_{-1/4|k|q}^0 e^{\sigma_0 v} d\Lambda(v) \right)^{-1/2}. \quad (19.18)$$

Обратимся теперь к (17.12). Если σ_0 достаточно велико сравнительно с q (что предполагается), то

$$\frac{1}{4|k|q} > \frac{a_4}{\sqrt{\sigma_0 q}} > \frac{4 \ln \sigma_0}{\sigma_0} = h_1(\sigma_0) \quad (19.19)$$

и в силу (17.12)

$$\int_{-1/4|k|q}^0 e^{\sigma_0 v} d\Lambda(v) > \int_{-h_1(\sigma_0)}^0 e^{\sigma_0 v} d\Lambda(v) > \frac{1}{2} h(\sigma_0),$$

(19.18) не превосходит

$$a_4 e^{-\sigma_0/2} (h(\sigma_0))^{-1/2}, \quad (19.20)$$

а выражение (19.15) не превосходит

$$B \exp [U_0(x)] e^{-\sigma_0/2} (h(\sigma_0))^{-1/2} \exp (-\gamma \pi^2 k^2 q^2). \quad (19.21)$$

20. Суммируя выражения (19. 21) по всем k с $|k| \geq 1$, получаем оценку

$$B \exp [U_0(x)] e^{-\sigma_0/2} (h(\sigma_0))^{-1/2} \exp \left(-\frac{\gamma}{2} \pi^2 q^2 \right). \quad (20. 1)$$

Далее, рассмотрим значения t , для которых (18. 1) не выполнено. Так как $U(t) \geq 0$, то

$$U(t) > K_1 e^{-\sigma_0 \sigma_0}. \quad (20. 2)$$

Если $\mathfrak{A}$ — множество таких значений t , то, очевидно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{A}} \psi_0(z) e^{-zx} dt &= B \exp [U_0(x)] \exp [-2K_1 \sigma_0] \int_{-\infty}^{\infty} \exp [-\gamma t^2] dt = \\ &= B \exp [U_0(x)] e^{-\sigma_0/2} \exp (-K_1 \sigma_0). \end{aligned} \quad (20. 3)$$

Наконец, остается случай $k=0$, т. е. интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \xi} \psi_0(z) e^{-zx} dt. \quad (20. 4)$$

Здесь

$$U(t) < t^2 \int_{-h_0}^0 e^{\sigma_0 v} d\Lambda(v). \quad (20. 5)$$

Далее, согласно (4. 10),

$$V(t) = V(0) + V''(\theta t) \frac{t^3}{6} = B e^{\sigma_0 \xi_1^3} = B \exp \left(-\frac{1}{4} \sigma_0 \right). \quad (20. 6)$$

Ввиду этого из (17. 7), (20. 5) и (20. 6) вытекает:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \xi} \psi_0(z) e^{-zx} dt &> a_5 e^{-\sigma_0/2} \left(\int_{-h_0}^0 e^{\sigma_0 v} d\Lambda(v) \right)^{-1/2} \exp [U_0(x)] = \\ &= a_5 e^{-\sigma_0/2} (h(\sigma_0))^{-1/2} \exp [U_0(x)]. \end{aligned} \quad (20. 7)$$

Сопоставив (19. 10), (20. 1), (20. 3) и (20. 7), находим, что при достаточно больших $x > X_0$ (и, стало быть, σ_0) и S_0

$$g_{1\nu_0}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(z) e^{-zx} dt > \frac{a_5}{2} e^{-\sigma_0/2} (h(\sigma_0))^{-1/2} \exp [U_0(x)] > 0. \quad (20. 8)$$

При $|x| \leq X_0$ и достаточно малом $\nu_0 > 0$ имеем $g_{1\nu_0}(x) > 0$, как доказывается в п. 2, а при $x < -X_0$ имеем $g_{1\nu_0}(x) > 0$, как явствует из п. 3.

21. Перейдем к случаю, когда α иррационально. Здесь будем действовать во многом аналогично п. 9—15. Мы строим сегмент

$\pi(S_0)$, как и ранее; из предыдущего видно, что если S_0 достаточно велико (сравнительно с уже выбранным h_0 и $1/\gamma$), а $\alpha = p/q$ рационально, то $g_{1/\gamma_0}(x) > 0$. Выберем такое S_0 , что если бы соответствующее α было рациональным, то получилось бы $g_{1/\gamma_0}(x) > 0$, и зафиксируем его. Остается предположить, что избираемое нами соответственно п. 16 число α является иррациональным. Разложим его в непрерывную дробь, составим ряд подходящих дробей P_n/Q_n и числа η'_n , как в п. 9; число η_0 будет избираться одним из них. Рассуждения п. 17 и 18, разумеется, не меняются. Соотношения (18.3) и (18.4) используются, как в п. 10. Вводится большое число $\tau > 1$. Если Q_n — наибольшее из чисел (9.5), не превосходящее τ , и если $U(t)$ подчинено (18.1), то будет иметь место соотношение, аналогичное (10.8). Вводим числа (10.9) и определяем τ с помощью (10.10). Тогда имеем (10.11). Считаем σ_0 большим; σ_0 будем разделять, как и в п. 10, на такие же классы $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$. Начнем со случая $\sigma_0 \in \mathfrak{A}_2$. Выбираем η_0 в классе чисел η'_n столь малым, что удовлетворяется (10.12); полагаем $\nu_0 \in (0, 1)$.

Далее, считая $|t| \leq \sqrt{q}$, повторяем рассуждение п. 11 и находим, что имеет место либо (11.5), либо (11.6), причем, разумеется, в (11.6) $U(t)$ отвечает так же обозначенной функции в (17.8). При t , удовлетворяющих (11.5), имеем из (17.8):

$$U(t) = t^2 \left\{ \int_{-h_0}^0 e^{\sigma_0 v} \left(\frac{1+v}{2} \right)^2 (1+Bt) d\Lambda(v) + \exp(\alpha - 1) \sigma_0 \times \right. \\ \left. \times \int_{-\nu_0}^0 e^{\sigma_0 v} \left(\frac{\alpha+v}{2} \right)^2 (1+Bt) d\Lambda_1(v) - \nu_0 \exp(\eta_0 - 1) \sigma_0 \frac{\eta_0^2}{4} (1+Bt) \right\}.$$

Таким образом, считая, как обычно, σ_0 достаточно большим и учитывая, что $h(\sigma_0) > a_0/\sigma_0$ (см. (17.11)), находим:

$$U(t) \geq \frac{t^2}{8} \int_{-h_0}^0 e^{\sigma_0 v} d\Lambda(v) = \frac{t^2}{8} h(\sigma_0). \quad (21.1)$$

Мы видим отсюда, что $U(t) \geq 0$ при $|t| \leq \sqrt{q}$. Далее, при

$$|t| \geq \exp \frac{\sigma_0}{2} (\zeta_1 - 1) = \xi_0 \quad (21.2)$$

имеем

$$U(t) \geq \frac{1}{8} \exp[\sigma_0(\zeta_1 - 1)] h(\sigma_0) > \exp \sigma_0 (\zeta_2 - 1) \quad (21.3)$$

при $\zeta_2 = \zeta_1/2$.

Далее, как и в (20.6), находим, что при $|t| \leq \xi_0$ $V(t) = = B \exp(-\sigma_0/4)$. При $|t| \leq \xi_0$ легко находим из (17.8):

$$U(t) < 16t^2 h(\sigma_0). \quad (21.4)$$

Теперь обращаемся к интегралу

$$g_{1v_0}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(z) e^{-zx} dt. \quad (21.5)$$

Как и в п. 11, вводим области изменения t D_q , T_{1q} , T_{2q} , T_{0q} и интегралы $J(D_q)$, $J(T_{1q})$, $J(T_{2q})$, $J(T_{0q})$. Имеем (11.13), где $\psi(z)$ нужно заменить на $\psi_0(z)$, оценку (11.15) для $J(D_q)$ и, как в п. 12, оценку (12.2) для $J(T_{1q})$ и (12.3) для $J(T_{2q})$. Переходим к оценке $J(T_{0q})$ снизу:

$$J(T_{0q}) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \xi_0} \psi_0(z) e^{-zx} dt. \quad (21.6)$$

В силу (17.7) и (21.4) находим:

$$\begin{aligned} J(T_{0q}) &> \frac{1}{4\pi} \exp[U_0(x)] \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-32e^{\sigma_0} h(\sigma_0) t^2] dt > \\ &> a_5 \exp[U_0(x)] e^{-\sigma_0/2} (h(\sigma_0))^{-1/2}. \end{aligned} \quad (21.7)$$

Сравнивая (11.15), (12.2), (12.3) и (21.7), приходим к выводу:

$$g_{1v_0}(x) > a_6 \exp(U_0(x)) e^{-\sigma_0/2} (h(\sigma_0))^{-1/2} > 0$$

при достаточно большом $\sigma_0 \in \mathfrak{A}_2$.

22. Теперь рассмотрим случай $\sigma_0 \in \mathfrak{A}_1$, следуя п. 13 и 15. Как и в п. 13, вводим области D_{τ} и T_{τ} . Интеграл $J(D_{\tau})$ оценивается выражением (13.4). При $U(t)$, подчиненном (18.1), будем иметь соотношение (10.11), из которого следует (13.5) или (13.6). Далее, имеем (13.7)—(13.9). Из (13.8) следует (13.12), после чего (17.8) дает:

$$U(t) > \int_{-h_0}^0 e^{\sigma_0 v} \sin^2 \frac{t(1+v)}{2} dv + B \exp\left(-\sigma_0 - \frac{\beta \sigma_0}{200}\right). \quad (22.1)$$

Положим сперва $k \neq 0$;

$$t = 2\pi kq + w; \quad |w| \leq c_4 \tau^{-0.01} = \xi_0. \quad (22.2)$$

Далее рассуждаем, как в п. 19 (см. (19.12) и (19.13)). Имеем (19.13), считая q достаточно большим. Затем получаем (19.14) и (19.15), где вместо ξ_4 нужно брать ξ_0 . Далее с помощью (19.16)—(19.20) находим для интеграла

$$\int_{|t-2\pi kq| \leq \xi_0} \psi_0(z) e^{-zx} dt$$

оценку

$$B \exp[U_0(x)] e^{-\sigma_0/2} (h(\sigma_0))^{-1/2} \exp(-\gamma \pi^2 k^2 q^2). \quad (22.3)$$

Суммируя по $k \neq 0$, получаем оценку

$$B \exp [U_0(x)] e^{-\sigma_0/2} (h(\sigma_0))^{-1/2} \exp \left(-\frac{\gamma}{2} \pi^2 q^2 \right). \quad (22.4)$$

Для значений $U(t)$, не подчиняющихся (18.1), т. е. подчиненных (20.2), получаем, как и в п. 20, оценку интеграла вида (20.3):

$$B \exp [U_0(x)] e^{-\sigma_0/2} \exp (-K_1 \sigma_0). \quad (22.5)$$

Наконец, при $k=0$ имеем из (17.8):

$$U(t) < 2 \int_{-h_0}^0 e^{\sigma_0 v} \sin^2 \frac{t(1+v)}{2} d\lambda(v) + B \exp \left(-\sigma_0 - \frac{\beta \sigma_0}{200} \right) < \\ < 4t^2 h(\sigma_0) + B \exp \left(-\sigma_0 - \frac{\beta \sigma_0}{200} \right). \quad (22.6)$$

Отсюда

$$U(t) < \exp \sigma_0 (\zeta_1 - 1) \text{ при } |t| \geq \exp \frac{\sigma_0}{2} (2\zeta_1 - 1)$$

($\zeta_1 > 0$ — константа). Это позволяет написать

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \xi_0} \psi_0(z) e^{-zx} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \xi_1} \psi_0(z) e^{-zx} dt + B \exp \left(-\exp \frac{\zeta_1}{2} \sigma_0 \right), \quad (22.7)$$

где $\xi_1 = \exp \left[\frac{\sigma_0}{2} (2\zeta_1 - 1) \right]$. После этого $V(t)$ при $|t| \leq \xi_1$ оценивается, как в (20.6), и мы получаем, как в (20.7):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \xi_1} \psi_0(z) e^{-zx} dt > a_5 e^{-\sigma_0/2} (h(\sigma_0))^{-1/2} \exp [U_0(x)]. \quad (22.8)$$

Сопоставляя (13.4), (22.4), (22.5), (22.7) и (22.8), находим при $x \geq X_0$ и $\sigma_0 \in \mathfrak{A}_1$:

$$g_{1\nu_0}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(z) e^{-zx} dt > \frac{a_5}{2} e^{-\sigma_0/2} (h(\sigma_0))^{-1/2} \exp [U_0(x)] > 0.$$

При достаточно малом $\nu_0 > 0$ имеем $g_{1\nu_0}(x) > 0$ для $|x| \leq X_0$ и $g_{1\nu_0}(x) > 0$ для $x \leq -X_0$. Таким образом, при достаточно малом $\nu_0 > 0$ функция (17.3) будет х. ф. случайной величины Y_0 .

23. Обращаясь к (17.7), замечаем, что

$$\psi(z) = \exp \left[\gamma z^2 + \int_{I_1} (e^{zu/u_0} - 1) dG(u) + \right. \\ \left. + \int_{I_2^{(S_0)} u_0} (e^{zu/u_0} - 1) dG(u) - \nu_0 (e^{\gamma_0 z} - 1) \right],$$

где $I_2^{(S_0)} u_0$ — сегмент $I_2^{(S_0)}$, растянутый в u_0 раз.

Если заменим $\gamma > 0$ числом $\gamma/u_0^2 > 0$, то, очевидно, проходят такие же рассуждения, только число ν_0 , быть может, придется еще уменьшить. Таким образом, функция

$$\psi_1(z) = \exp \left[\frac{\gamma}{u_0^2} z^2 + \int_{I_1} (e^{zu/u_0} - 1) dG(u) + \int_{I_2^{(S_0)} u_0} (e^{zu/u_0} - 1) dG(u) - \nu (e^{\eta_0 z} - 1) \right]$$

будет х. ф. случайной величины Y_1 при $\nu > 0$, $\nu \leq \nu_0$. Но тогда и

$$\psi_2(z) = \psi_1(zu_0) = \exp \left[\gamma z^2 + \int_{I_1} (e^{zu} - 1) dG(u) + \int_{I_2^{(S_0)} u_0} (e^{zu} - 1) dG(u) - \nu (e^{\eta_0 u_0 z} - 1) \right]$$

будет х. ф. случайной величины Y_2 .

Обращаясь к (2. 6), обозначим множество $[\beta, 1] - I_1 - I_2^{(S_0)} u_0$, где первый член содержит сумму второго и третьего, через $\mathfrak{A}$. Очевидно, функция

$$\psi_3(z) = \exp \left[\int_{\mathfrak{A}} (e^{zu} - 1) dG(u) \right]$$

будет х. ф. случайной величины Y_3 , притом безгранично делимой.

Считая Y_3 независимым от Y_2 , получаем, что $\psi_2(z)\psi_3(z) = E \exp z(Y_2 + Y_3)$ есть х. ф. случайной величины $Y_2 + Y_3$. Но $\psi_2(z)\psi_3(z) = \psi(z)$, как видно из (2. 7), и лемма III доказана.

24. Если в (2. 2) — (2. 7) переменить знак у переменной z , то, очевидно, леммы I — III останутся в силе. Кроме того, если в (2. 6) берется интеграл не от β до 1, а от β_1 до β_2 , $\beta_2 > \beta_1 > 0$, то, очевидно, лемма III остается в силе; достаточно произвести соответствующие замены переменных u и z , состоящие в умножении этих переменных на положительные числа.

Теперь мы можем доказывать необходимость условий (1. 1) и (1. 2) теоремы 1. Сперва покажем, что если имеющий гауссову компоненту закон $F \in I$ имеет только б. д. компоненты, то его пуассонов спектр в формуле (0.1) не может иметь непрерывных компонент. Пусть это не так. Пусть X — соответствующая случайная величина, и пусть, например, непрерывная компонента имеется в функции $G_+(u)$. Тогда X разлагается на сумму двух независимых случайных величин, $X = X_1 + X_2$, причем X_1 имеет х. ф. $\varphi_1(t)$ вида

$$\varphi_1(t) = \exp \left[-\frac{\gamma}{2} t^2 + \int_{\beta_1}^{\beta_2} (e^{itu} - 1) dG(u) \right], \quad (24. 1)$$

где $G(u)$ — непрерывная функция. Согласно лемме III, при достаточно малом $\nu > 0$ функция вида

$$\varphi_3(t) = \exp \left[-\frac{\gamma}{2} t^2 + \int_{\beta_1}^{\beta_2} (e^{itu} - 1) dG(u) - \nu (e^{i\gamma_0 t} - 1) \right] \quad (24.2)$$

будет х. ф. случайной величины X_3 . Очевидно, функция $\varphi_4(t) = \exp[\nu(e^{i\gamma_0 t} - 1)]$ будет х. ф. пуассоновой случайной величины X_4 и $X_1 = X_3 + X_4$; X_3, X_4 независимы и не зависят от X_2 . Тогда $X = X_3 + (X_2 + X_4)$, где все компоненты независимы, и X_3 не является безгранично делимым, как следует из (24.2). Аналогично действуем, если отрицательная часть пуассонова спектра содержит непрерывную компоненту.

Итак, закон $F \in I_0$, имеющий гауссову компоненту, может иметь лишь счетный или конечный пуассонов спектр. Имеет место соотношение (0.8). Пусть $\mu = \mu_{m_1}$ и $\mu' = \mu_{m_2}$ — две любые частоты положительной части пуассонова спектра в (0.8) и $\mu < \mu'$. Докажем, что $\mu'/\mu = n$ — целое число. В самом деле, рассмотрим

$$\varphi_1(t) = \exp[-\gamma t^2 + \lambda_{m_1}(e^{it\mu} - 1) + \lambda_{m_2}(e^{it\mu'} - 1)].$$

Если $\mu/\mu' = \alpha$ иррационально, то, согласно лемме II, действуя, как было сказано выше, найдем разложение $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) \varphi_3(t)$, где $\varphi_2(t)$ будет отвечать не б. д. закону; значит, исходный закон F будет иметь не б. д. компоненту.

Итак, $\alpha = p/q$ рационально. Тогда, по таким же соображениям, из леммы I вытекает, что $p=1$ (считаем $(p, q)=1$), иначе исходный закон F имел бы не б. д. компоненту. Итак, если $\mu_{m_2} > \mu_{m_1}$, то μ_{m_2}/μ_{m_1} — целое число. Совершенно то же касается частот в отрицательной части пуассонова спектра: если $\nu_{m_2} > \nu_{m_1}$, то ν_{m_2}/ν_{m_1} — целое число. Отсюда следует, что числа μ_m могут иметь только две предельные точки, 0 или $+\infty$. В самом деле, если бы у них существовала предельная точка $\mu \neq 0$, то в сегменте $[3\mu/4, 5\mu/4]$ были бы две частоты, μ и $\mu' > \mu$, причем, очевидно, $\mu'/\mu \leq 5/3$ не могло бы быть целым числом. Совершенно аналогично числа ν_m могут иметь лишь две предельные точки, 0 или ∞ .

Пусть $\mu > 0$ — одно из чисел μ_m (если их множество не пусто). Все числа $\mu_m > \mu$ в силу сказанного выше можно упорядочить по возрастанию, и отношение каждого из них к предыдущему будет целым числом, а числа левее μ можно упорядочить по убыванию, и каждое из них будет также делить предыдущее. То же касается и чисел ν_m . Таким образом, необходимость условий теоремы 1 доказана.

Л и т е р а т у р а

1. Cramer H. Über eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion. — Math. Z., 1936, Bd 41, H. 3, S. 405—414.
2. Levy P. Sur les exponentielles de polynomes. . . — Ann. sci. École normale super., 1937, t. 54, p. 231—292.

3. Levy P. L'arithmétique des lois de probabilités. — J. Math. Pures Appl., 1936, t. 15, p. 11—26.
4. Хинчин А. Я. Об арифметике законов распределения. — Бюл. МГУ, 1937, т. 1, вып. 1, с. 6—17.
5. Райков Д. А. О разложении законов Пуассона. — ДАН СССР, 1937, т. 14, № 1, с. 9—12.
6. Райков Д. А. О разложении законов Гаусса и Пуассона. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1938, т. 2, № 1, с. 91—124.
7. Fisher R. A., Dugue D. Un résultat assez inattendu d'arithmétique des lois de probabilités. — C. r. Acad. sci., Paris, 1948, t. 227, p. 1205—1207.
8. Cramer H. Problems in probability theory. — Ann. Math. Stat., 1947, vol. 18, № 2, p. 165—193.
9. Levy P. Théorie de l'addition des variables aléatoires. Paris, 1937. 386 p.
10. Хинчин А. Я. Предельные законы для сумм независимых величин. М.—Л., 1938. 116 с.
11. Линник Ю. В. О композиции вероятностных законов Гаусса и Пуассона. — ДАН СССР, 1957, т. 114, № 1, с. 21—24.
12. Линник Ю. В. О разложении композиции законов Гаусса и Пуассона. — Теор. вероятн. и ее примен., 1957, т. 2, вып. 1, с. 34—59.
13. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. М.—Л., 1933. 525 с.
14. Хинчин А. Я. Цепные дроби. М.—Л., 1948. 116 с.
15. Валле-Пуссен Ш. Ж. де ла. Курс анализа бесконечно малых. Т. 1. М.—Л., 1933. 464 с.

ЕЩЕ ОБ ОБОБЩЕНИЯХ ТЕОРЕМЫ Г. КРАМЕРА

Совместно с В. П. Скитовичем

Вестник ЛГУ, 1958, № 1. Сер. мат., мех., астроном., вып. 1, с. 39—44

1. Известная теорема Г. Крамера [1] о том, что нормальная случайная величина может быть разложена только на нормальные независимые слагаемые, за последнее время подверглась некоторым обобщениям и была связана с некоторыми задачами математической статистики. В настоящей статье предлагается подобное обобщение в новом направлении и показывается, что вводимые при этом условия в достаточной мере широки. Прежде чем формулировать это обобщение, дадим сводку уже имеющихся обобщений и связанных с ними теорем.

Теорема 1 (Ю. В. Линник [2] и [3]). *Композиция законов Гаусса и Пуассона может быть разложена только на подобные же композиции, причем сумма дисперсий гауссовых слагаемых равна дисперсии основной гауссовой компоненты, это же можно сказать и о пуассоновых слагаемых.*

Эта теорема может быть обобщена далее как часть теории разложения безгранично делимых законов. Она обобщает одновременно теоремы Г. Крамера и Д. А. Райкова [4].

Теорема 2 (Ю. В. Линник [5], А. А. Зингер и Ю. В. Линник [6]). *Если $f_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) — характеристич-*

ческие функции случайных величин (в дальнейшем *х. ф.*), $\alpha_i > 0$ ($i=1, 2, \dots, n$) — какой-либо набор положительных чисел, и если в какой-либо окрестности нуля $[-\delta, \delta] \prod_{i=1}^n f_i^{\alpha_i}(t) = \exp Q(t)$, где $Q(t)$ — квадратный полином, то $f_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) суть *х. ф.* нормальных распределений.

Задача перенесения этой теоремы на произведение счетного числа множителей остается открытой.¹⁾ Из теоремы 2 сравнительно просто следует теорема В. П. Скитовича.

Т е о р е м а 3 (В. П. Скитович [7] и [8]). *Две линейные формы от независимых случайных величин (вообще неодинаково распределенных) могут быть независимы лишь тогда, когда случайные величины, входящие в обе эти формы с коэффициентами, отличными от нуля, нормальны.*

Теорема 3, как показано в работе [9], много сильнее теоремы Г. Крамера. Из нее теорема Крамера следует весьма просто, в то время как из теоремы Г. Крамера сравнительно просто выводится лишь теорема 3 для случая линейных форм с рациональным отношением коэффициентов, но не общий случай, причем предельный переход от рациональных коэффициентов к иррациональным до сих пор совершить не удалось.

2. В настоящей работе рассматривается обобщение, которое не учитывает вероятностный смысл слагаемых. Пусть B — класс всех функций $V(x)$, удовлетворяющих условиям:

1) $V(x)$ ограниченной вариации в $(-\infty < x < \infty)$;

2) $\int_{-\infty}^{\infty} dV(x) = 1$.

Пусть $G(x)$ — нормальный интегральный закон со средним 0 и дисперсией 1 (очевидно, что рассмотрение только такого нормального закона не нарушает общности). Мы будем рассматривать разложения вида

$$G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} V_1(x-z) dV_2(z) = V_1(x) * V_2(x), \quad (2.1)$$

где знак $*$ будет означать композицию. Подобное разложение, хотя и не имеет обычного вероятностного смысла, однако встречается на практике, например, в некоторых разделах радиотехники.

Знаком $\text{Var } V(x)|_a^b$ будем обозначать полную вариацию $V(x)$ на сегменте $[a, b]$. Сформулируем²⁾ еще одно обобщение теоремы Г. Крамера.

¹⁾ О работах в этом направлении см. с. 335. (Прим. ред.).

²⁾ В формулировку внесены изменения в соответствии с авторской поправкой, опубликованной в журнале «Вестник ЛГУ» (1960, № 13. Сер. мат., мех., астроном., вып. 3, с. 152). (Прим. ред.).

Т е о р е м а 4. Пусть имеем разложение

$$G(x) = V_1(x) * V_2(x), \quad (2.2)$$

где $V_i(x) \in B$ ($i=1, 2$) симметрические³⁾ и

$$\text{Var } V_i(x) \Big|_y^\infty = O(\exp(-y^{1+\gamma})), \quad (2.3)$$

$$\text{Var } V_i(x) \Big|_{-\infty}^{-y} = O(\exp(-y^{1+\gamma})) \quad (2.4)$$

при каком-либо $\gamma > 0$ и $y > 0$. Тогда $V_1(x)$ и $V_2(x)$ — нормальные вероятностные распределения.

Вместе с тем существуют функции $W_1(x)$ и $W_2(x) \in B$, такие, что

$$G(x) = W_1(x) * W_2(x)$$

и

$$\text{Var } W_i(x) \Big|_y^\infty = O\left(\exp\left(-y \frac{\ln(y+1)}{2}\right)\right), \quad (2.5)$$

$$\text{Var } W_i(x) \Big|_{-\infty}^{-y} = O\left(\exp\left(-y \frac{\ln(y+1)}{2}\right)\right) \quad (2.6)$$

при $i=1, 2$; $y > 0$, причем $W_1(x)$ есть вероятностное распределение, а $W_2(x)$ не является нормальным (и, следовательно, вообще не может быть вероятностным распределением).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий (2.3) и (2.4) следует, что существуют интегралы

$$I_k = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dV_k(x) \quad (k=1, 2). \quad (2.7)$$

Рассмотрим теперь функцию

$$f_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dV_1(x)$$

для комплексных значений t . Из сходимости интеграла (2.7) следует, что интеграл, определяющий $f_1(t)$, сходится абсолютно и равномерно в каждой конечной области плоскости переменного t . Следовательно, $f_1(t)$ — целая функция комплексного переменного t .

Все сказанное выше справедливо и для функции

$$f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dV_2(x).$$

³⁾ Это означает, что во всех точках непрерывности функций $V_i(x)$ выполняется $V_i(x) = 1 - V_i(-x)$. (Прим. ред.).

Из соотношения $f_1(t)f_2(t)=e^{-t^2/2}$ следует, что $f_1(t)$ и $f_2(t)$ суть целые функции, не имеющие нулей.

Принимая во внимание, что $V_k(x)$ ($k=1, 2$) имеют ограниченную вариацию, с помощью теоремы Адамара легко получить,⁴⁾ что $f_k(t)=\exp Q_k(t)$, где $Q_k(t)$ — полином степени не выше второй ($k=1, 2$) и коэффициенты при t^2 не положительны.

Перейдем теперь к доказательству дополнительного утверждения. Рассмотрим нормальное распределение $G(x)$ с х. ф. $\exp(-t^2)$. Разложим $G(x)$ в виде композиции

$$G(x) = W_1(x) * W_2(x),$$

где для $W_1(x)$ возьмем х. ф.

$$\varphi_1(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2} + \lambda(e^{it} - 1)\right) \quad (2.8)$$

и для $W_2(x)$ — х. ф.

$$\varphi_2(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2} - \lambda(e^{it} - 1)\right); \quad (2.9)$$

λ — какое-либо положительное число.

Мы видим, что $W_1(x)$ есть композиция законов Гаусса и Пуассона. Имеем далее

$$W'_i(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2} \pm \lambda(e^{it} - 1) - itx\right) dt, \quad (2.10)$$

где знак (+) надо брать при $i=1$ и знак (—) — при $i=2$. На плоскости комплексного переменного $t=u+iv$ выберем контуры $v=v_0=-(\operatorname{sign} x) \ln(|x|+1)$, получим при $|x| \geq 1$ оценку подынтегральной функции для (2.10), она оценивается

$$\exp\left(\frac{v_0^2 - u^2}{2} + \lambda e^{|v_0|} - |v_0||x|\right).$$

Отсюда видно, что (2.10) имеет оценку при $|x| \geq 1$

$$O\left(\exp\left(-\frac{3}{4}|x| \ln|x|\right)\right).$$

Отсюда непосредственно следуют оценки (2.5) и (2.6).

Аналогично обобщается и теорема 3 (В. П. Скитовича). Именно, соответственно функциям $V_i(x) \in B$ вводим обобщенные случайные величины X_i , для которых $V_i(x)$ играют роль функции распределения. Понятие независимости вводится естественным путем. Имеет место следующее обобщение теоремы 3.⁵⁾

⁴⁾ Так как из условий (2.3) и (2.4) следует, что функции $f_k(t)$, $k=1, 2$, имеют конечный порядок. (Прим. ред.).

⁵⁾ В формулировку внесены изменения в соответствии с авторской поправкой, опубликованной в журнале «Вестник ЛГУ» (1960, № 13. Сер. мат., мех., astron., вып. 3, с. 152). (Прим. ред.).

Т е о р е м а 5. Пусть $l_1 = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$, $l_2 = b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_n X_n$ — две независимые линейные формы от независимых обобщенных случайных величин X_i , которым отвечают симметрические функции $V_i(x)$ при условиях

$$\text{Var } V_i(x) |_y^\infty = O(\exp(-y^{1+\gamma})),$$

$$\text{Var } V_i(x) |_{-\infty}^y = O(\exp(-y^{1+\gamma}))$$

для $y > 0$ и какого-либо $\gamma > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда все те функции $V_i(x)$, для которых $a_i b_i \neq 0$, являются нормальными вероятностными распределениями. Вместе с тем уже при $n = 4$ существуют пары независимых линейных форм l_1 и l_2 независимых обобщенных случайных величин X_i , где $a_i b_i \neq 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) и

$$\text{Var } V_i(x) |_y^\infty = O\left(\exp\left(-y \frac{\ln(y+1)}{2}\right)\right),$$

$$\text{Var } V_i(x) |_{-\infty}^y = O\left(\exp\left(-y \frac{\ln(y+1)}{2}\right)\right)$$

при $y > 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$), причем $V_i(x)$ не являются нормальными (и, следовательно, не являются вероятностными) распределениями.

Доказательство.⁶⁾ Для простоты доказательства будем считать, что все $a_i b_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и

$$\frac{a_i}{b_i} \neq \frac{a_k}{b_k} \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n; i \neq k).$$

Пусть

$$f_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dV_k(x), \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

тогда из независимости величин X_i и форм l_1 и l_2 следует, что

$$\prod_{k=1}^n f_k(a_k u + b_k v) = \prod_{k=1}^n f_k(a_k u) \prod_{k=1}^n f_k(b_k v). \quad (2.11)$$

Легко показать (см., например, [8]), что ни одна из функций, входящих в равенство (2.11), не обращается в нуль. Положим $\varphi_i(t) = \ln f_i(t)$, тогда

$$\sum_{k=1}^n \varphi_k(a_k u + b_k v) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(a_k u) + \sum_{k=1}^n \varphi_k(b_k v). \quad (2.12)$$

В работе [8] было показано, что все $\varphi_k(t)$ будут полиномами степени не выше n .

⁶⁾ В книге Ю. В. Линника «Разложения вероятностных законов» (Л., 1960) приведено более простое доказательство этой теоремы. (Прим. ред.).

Продифференцируем теперь (2.12) два раза по v и положим $v=0$. Получим:

$$\sum_{k=1}^n b_k^2 \varphi_k''(a_k u) = c. \quad (2.13)$$

Из (2.13) имеем:

$$\prod_{k=1}^n f_k^{b_k^2/a_k^2}(a_k u) = e^{c u^2 + c_1 u + c_2}.$$

Так как все $\varphi_k(t)$ — полиномы степени не выше n , то

$$f_k^{b_k^2/a_k^2}(a_k u) = e^{\varrho_k(u)},$$

$$\prod_{k=1}^n f_k^{b_k^2/a_k^2}(a_k u) = \prod_{k=1}^n e^{\varrho_k(u)} = e^{c u^2 + c_1 u + c_2}, \quad (2.14)$$

где $Q_k(u)$ — полиномы степени не выше n .

Принимая во внимание, что все $V_i(x)$ имеют ограниченную вариацию, из равенства (2.14) можно заключить, что все $Q_k(u)$ ($k=1, 2, \dots, n$) — полиномы степени не выше второй и коэффициенты при u^2 не положительны. Сделанные в начале доказательства допущения не существенны. Действительно, в том случае, когда не все $a_i b_i \neq 0$ ($i=1, 2, \dots, n$), для доказательства может быть применен метод, использованный в работе [8]. Те слагаемые, для которых $a_k/b_k = a_l/b_l$ ($k=1, \dots, n; l=1, \dots, n; k \neq l$), могут быть объединены в одно, и для них нормальность будет следовать из теоремы 4.

Дополнительное утверждение теоремы 5 легко следует из дополнительного утверждения теоремы 4. Пусть X_1 и X_2 — независимые нормальные величины с х. ф. $\exp(-t^2)$, Y_1, Y_2 — независимые обобщенные случайные величины, соответствующие функциям $W_1(x)$ и $W_2(x)$, Y'_1 и Y'_2 — независимые от них экземпляры таких же величин. Составим линейные формы

$$l_1 = X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2 + Y'_1 + Y'_2,$$

$$l_2 = X_1 - X_2 = Y_1 + Y_2 - Y'_1 - Y'_2.$$

Они, очевидно, независимы, причем Y_i, Y'_i не являются нормальными и удовлетворяют условиям (2.5) и (2.6).

Л и т е р а т у р а

1. C r a m e r H. Über eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion. — Math. Z., 1936, Bd 41, H. 3, S. 405—414.
2. Л и н н и к Ю. В. О разложении композиции законов Гаусса и Пуассона. — Теор. вероят. и ее примен., 1957, т. 2, вып. 1, с. 34—59.
3. Л и н н и к Ю. В. О композиции вероятностных законов Гаусса и Пуассона. — ДАН СССР, 1957, т. 114, № 1, с. 21—24.
4. Р а й к о в Д. А. О разложении законов Гаусса и Пуассона. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1938, т. 2, № 1, с. 91—124.

5. Л и н н и к Ю. В. Одна задача о характеристических функциях вероятностных распределений. — Успехи мат. наук, 1955, т. 10, вып. 1, с. 137—138.
6. З и н г е р А. А., Л и н н и к Ю. В. Об одном аналитическом обобщении теоремы Крамера и его применении. — Вестник ЛГУ, 1955, № 11. Сер. мат., физ., астрон., вып. 4, с. 51—56.
7. С к и т о в и ч В. П. Об одном свойстве нормального распределения. — ДАН СССР, 1953, т. 89, № 2, с. 217—219.
8. С к и т о в и ч В. П. Линейные формы от независимых случайных величин и нормальный закон распределения. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1954, т. 18, № 2, с. 185—200.
9. Л и н н и к Ю. В. Замечание к теореме Крамера о разложении нормального закона. — Теор. вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, вып. 4, с. 479—480.

ОБ « α -РАЗЛОЖЕНИЯХ» БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАКОНОВ

Вестник ЛГУ, 1959, № 1. Сер. мат., мех., астрон., вып. 1, с. 14—23

0. Теория разложения безгранично делимых законов, имеющих гауссову компоненту, рассматривается в работах [1—4]. Мы будем придерживаться в дальнейшем терминологии этих работ. В них, в частности, устанавливаются необходимые условия, чтобы безгранично делимый (в дальнейшем б. д.) закон, содержащий гауссову компоненту, имел только б. д. компоненты. Они состоят в том, чтобы пуассонов спектр (см. [1—3]) данного закона F был конечным или счетным и пуассоновы частоты совпадали с рядами чисел

$$\begin{aligned} \dots, \frac{\mu}{k_1 k_2}, \frac{\mu}{k_1}, \mu, k_{-1}\mu, k_{-1}k_{-2}\mu, \dots; \mu \geq 0, \\ \dots, \frac{\nu}{l_1 l_2}, \frac{\nu}{l_1}, \nu, l_{-1}\nu, l_{-1}l_{-2}\nu, \dots; \nu \leq 0, \end{aligned} \quad (0.1)$$

где $k_i > 1$, $l_i > 1$ — целые числа.

Если пуассонов спектр (0.1) закона F ограничен, то эти необходимые условия оказываются и достаточными.

Множество законов, содержащих гауссову компоненту и имеющих ограниченный пуассонов спектр вида (0.1), будем называть $I^{(N)}$. Если закон $F \in I^{(N)}$, то F имеет только б. д. компоненты. Обозначим характеристическую функцию (в дальнейшем х. ф.) закона F через

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x).$$

Имеем для всех реальных t

$$\ln \varphi(t) = \beta it - \gamma t^2 + \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m \left(e^{it\mu_m} - 1 - \frac{it\mu_m}{1 + \mu_m^2} \right) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{-n} \left(e^{-it\nu_n} - 1 + \frac{it\nu_n}{1 + \nu_n^2} \right), \quad (0.2)$$

здесь

$$\begin{aligned} \mu_m &= \frac{\mu}{q_1 q_2 \dots q_m}, \quad \mu_0 = \mu, \quad \mu \geq 0, \\ \nu_n &= \frac{\nu}{p_1 p_2 \dots p_n}, \quad \nu_0 = \nu, \quad \nu \geq 0, \end{aligned} \quad (0.3)$$

где $p_i, q_i > 1$ — целые числа и ряды $\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m \mu_m^2$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{-n} \nu_n^2$ сходятся, причем

$$\sum_{\mu_m < \varepsilon} \lambda_m \mu_m^2 + \sum_{\nu_n < \varepsilon} \lambda_{-n} \nu_n^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (0.4)$$

Здесь $\lambda_m \geq 0, \lambda_{-n} \geq 0$ — «параметры энергии» пуассоновых частот.

Теорема 1 работы [2] показывает, что все компоненты закона F имеют х. ф. также вида (0.2) с теми же значениями пуассоновых частот μ_m, ν_n и, вообще говоря, иными значениями неотрицательных «параметров энергии» λ_m, λ_{-n} и констант $\beta; \gamma \geq 0$. С аналитической точки зрения это означает следующее. Пусть $f_j(t)$ ($j=1, 2, \dots, s$) — х. ф. случайных величин, $m_1, \dots, m_s$ — целые неотрицательные числа, и пусть для всех реальных t

$$(f_1(t))^{m_1} \dots (f_s(t))^{m_s} = \varphi(t). \quad (0.5)$$

Тогда все $f_j(t)$ имеют вид, отвечающий формуле (0.2). Если равенство (0.5) верно лишь в какой-либо окрестности 0: $|t| \leq \delta$, то нетрудно вывести, что оно верно для любых реальных t . Рассмотрим теперь равенство

$$(f_1(t))^{\alpha_1} \dots (f_s(t))^{\alpha_s} = \varphi(t), \quad (0.6)$$

где $|t| \leq \delta$ (δ фиксировано); $\alpha_j \geq 0$ — константы; $f_j(t)$ — х. ф. Такое соотношение будем называть α -разложением закона F с х. ф. $\varphi(t)$. В работе [5], где изучен частный случай α -разложений для нормальной х. ф. $\varphi(t)$, показано, что свойства α -разложений существенны для некоторых теорем о независимых статистиках. В настоящей работе дается довольно широкое обобщение теоремы работы [5] для правой части (0.6) $\varphi(t)$ — х. ф. б. д. закона $F \in I^{(N)}$, притом формулировка теоремы несколько усиливается.

Пусть для какой-либо последовательности чисел $t_k \rightarrow 0$ имеют место соотношения

$$(f_1(t_k))^{\alpha_1} \dots (f_s(t_k))^{\alpha_s} = \varphi(t_k),$$

где $\alpha_j \geq 0$; $f_j(t)$ — х. ф. случайных величин; $\varphi(t)$ — х. ф., нигде не обращающаяся в 0. При определении $(f_j(t_k))^{\alpha_j} = \exp(\alpha_j \ln f_j(t_k))$

будем считать $\ln f_j(t_k)$ определенным так, что $\arg f_j(0) = 0$, и далее продолженным по непрерывности.

От равенств вида (0. 5) с целыми m_s нетрудно перейти к равенствам того же вида с рациональными m_s , но переход от рациональных m_s к общим m_s на основе диофантовых приближений, по-видимому, весьма затруднителен и не проходит обычными средствами.

Т е о р е м а. Пусть для какой-либо последовательности реальных значений $t_k \rightarrow 0$ имеют место соотношения

$$(f_1(t_k))^{\alpha_1} \dots (f_s(t_k))^{\alpha_s} = \varphi(t_k), \quad (0. 7)$$

где $\alpha_j > 0$ ($j=1, 2, \dots, s$); $f_j(t) — x.$ ф. случайных величин; $\varphi(t) — x.$ ф. б. д. закона вида (0. 2), где $\gamma \geq 0$ (гауссова компонента может и отсутствовать). Тогда равенства (0. 7) имеют смысл и место для всех реальных (и всех комплексных) значений t_k и все $f_j(t)$ имеют логарифмы вида (0. 2).

1. Доказательство теоремы требует ряда лемм, сводящих его к доказательству теоремы 1 в работах [3, 4].

Как известно, х. ф. обладают свойством эрмитовости $f_j(-t) = \overline{f_j(t)}$. Далее, $f_j(0) = 1$. Положим $\varphi_0(t) = \varphi(t) \varphi(-t)$; $\varphi_j(t) = f_j(t) f_j(-t) \geq 0$. Тогда $\varphi_j(t) — x.$ ф., и при достаточно малых t_k будем иметь:

$$\prod_{j=1}^s (\varphi_j(t_k))^{\alpha_j} = \varphi_0(t_k). \quad (1. 1)$$

За счет возможного сдвига в нумерации t_k и отбрасывания нескольких первых членов последовательности можем считать, что (1. 1) верно для всех t_k .

Дальнейшее основано на лемме, имеющей и некоторый самостоятельный интерес.

Основная лемма. Если имеем соотношения (0. 7) для какой-либо последовательности реальных значений $t_k \rightarrow 0$ и в правой части х. ф. $\varphi(t)$ есть целая функция комплексного переменного без нулей, то х. ф. $f_j(t)$ являются целыми функциями t и равенства (0. 7) имеют смысл и место для всех комплексных значений t .

Для доказательства этого утверждения надо доказать ряд других лемм.

Лемма 1. В равенстве (1. 1) $\varphi_j(t)$ дважды дифференцируемы на всей оси.

Доказательство. $\varphi_j(t) —$ четные х. ф., так что $\varphi_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx dF_j(x)$, где $F_j(x) —$ вероятностный закон распределения.

Если $\varphi_j(t)$ дифференцируема $2q$ раз (q целое), то

$$\varphi_j^{(2q-1)}(t) = (-1)^q \int_{-\infty}^{\infty} \sin tx \cdot x^{2q-1} dF_j(x); \quad \varphi_j^{(2q-1)}(0) = 0;$$

$$\varphi_j^{(2q)}(t) = (-1)^q \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx dF_j(x).$$

Далее, если существует $\varphi_j^{(2q)}(0)$, то существует и $\varphi_j^{(2q)}(t)$ при всех реальных t . Если α_{kj} — k -й начальный момент для $\varphi_j(t)$ и $k \leq 2q$, то $\varphi_j^{(k)}(0) = i^k \alpha_{kj}$. Заметим далее, что $\varphi_0(t)$ — четная функция и $\varphi_0(t) > 0$ при всех реальных t .

Можно положить

$$\varphi_0(t) = \exp g_0(t), \quad (1.2)$$

где $g_0(t)$ — целая функция, реальная при реальных t и четная; $g_0(0) = 0$. Имеем далее:

$$\begin{aligned} \varphi_j(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx dF_j(x) = 1 - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{tx}{2} dF_j(x) \leq \\ &\leq \exp \left(-2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{tx}{2} dF_j(x) \right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Полагая $t = t_k$ (так что t достаточно мало), можем возвести неравенства (1.3) в степени α_j ($j = 1, 2, \dots, s$) и перемножить. Сравнивая результат с (1.1), получаем для всех t_k :

$$-2 \sum_{j=1}^s \alpha_j \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{xt_k}{2} dF_j(x) \geq g_0(t_k)$$

или

$$-\frac{1}{2} g_0(t_k) \geq \sum_{j=1}^s \alpha_j \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{xt_k}{2} dF_j(x). \quad (1.4)$$

Полагая $-g_0(t_k)/2 = \beta_2 t_k^2 + O(t_k^4)$ (ибо $g_0(t)$ — целая четная функция), видим, что должно быть $\beta_2 \geq 0$ и

$$\beta_2 t_k^2 + O(t_k^4) \geq \sum_{j=1}^s \alpha_j \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{xt_k}{2} dF_j(x).$$

Ввиду положительности всех α_j находим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{xt_k}{2} dF_j(x) \leq \frac{\beta_2}{\alpha_j} t_k^2 + O(t_k^4). \quad (1.5)$$

Имеем далее: $\sin \xi \geq 2\xi/\pi$ при $0 \leq \xi \leq \pi/2$, так что

$$\int_{-\pi/2t_k}^{\pi/2t_k} \sin^2 \frac{xt_k}{2} dF_j(x) \geq \frac{t_k^2}{\pi^2} \int_{-\pi/2t_k}^{\pi/2t_k} x^2 dF_j(x).$$

Внеся это неравенство в (1.5) и сокращая на t_k^2 , получаем:

$$\frac{\beta_2}{\alpha_j} + O(t_k^2) \geq \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi/2 t_k}^{\pi/2 t_k} x^2 dF_j(x). \quad (1.6)$$

При $t_k \rightarrow 0$ получаем $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_j(x)$, т. е. законы $F_j(x)$ имеют дисперсии и $\varphi_j(t)$ дважды дифференцируемы, что и требовалось доказать.

Заметим теперь, что если $\varphi^{(2m)}(t)$ существует (m целое ≥ 1), то законы $F_j(x)$ имеют $2m$ -е моменты. Если при этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{xt}{2} x^{2m} dF_j(x) = O(t^2),$$

то $\int_{-\infty}^{\infty} x^{2m+2} dF_j(x) < \infty$, существуют $(2m+2)$ -е моменты и $\varphi^{(2m+2)}(t)$.

Лемма 2. Функции $\varphi_j(t)$ имеют производные всех порядков на всей реальной оси.

Доказательство. Зная, что существует $\varphi_j''(t)$, будем действовать по индукции. Допустим, что существует $\varphi_j^{(2q)}(t)$, и докажем, что существует $\varphi_j^{(2q+2)}(t)$. Левую часть (1.1) продифференцируем в окрестности 0 $2q$ раз. Производная в левой части будет суммой слагаемых, состоящих из некоторых дробных степеней $\varphi_j(t)$, коэффициентов вида $C\alpha_1(\alpha_1-1)\dots\alpha_s(\alpha_s-1)\dots$ и производных $\varphi_j(t)$ в целых степенях m_μ , причем $\sum l_\mu m_\mu = 2q$ (l_μ — порядок производной). Разобьем полученную сумму на три суммы: $S_1(t)$, содержащую только производные порядка $2q$; $S_2(t)$, состоящую из членов, имеющих хотя бы одну производную нечетного порядка, и $S_3(t)$, состоящую из членов с производными только четных порядков.

Возвращаясь к равенству (1.1), имеющему место для всех t_k , заметим, что обе его части дифференцируемы $2q$ раз и реальны. Применим известную теорему Ролля: между двумя корнями дифференцируемой функции лежит корень ее производной. Отсюда следует, что если продифференцировать обе части равенства (1.1), то они будут совпадать в последовательности чисел $t_{k1} \rightarrow 0$, лежащих между числами t_k или совпадающих с ними. Снова дифференцируем обе получающиеся функции и применяем теорему Ролля. Получаем, что вторые производные будут совпадать в бесконечной последовательности реальных чисел $t_{k2} \rightarrow 0$. Действуя далее таким образом, убедимся, что $2q$ -е производные

функций $\prod_{j=1}^s (\varphi_j(t))^{\alpha_j}$ и $\varphi_0(t)$ будут совпадать в бесконечной последовательности чисел $t_{k, 2q} \rightarrow 0$. Для упрощения записи перенумеруем эти числа $t_{k, 2q}$ в числа t'_k .

Имеем:

$$S_1(t) = \sum_{j=1}^s \alpha_j \varphi_j^{(2q)}(t) \frac{1}{\varphi_j(t)} \prod_{j=1}^s \varphi_j^{\alpha_j}(t). \quad (1.7)$$

$S_2(t)$ должна иметь в каждом слагаемом, очевидно, по крайней мере 2 производные нечетных порядков (может быть повторение одной и той же). $S_3(t)$ должна иметь все производные четных порядков $< 2q$. Далее, $S_3(t)$, очевидно, четная функция, по крайней мере дважды дифференцируемая. Поэтому существует конечный предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_3(t'_k) - S_3(0)}{(t'_k)^2} = s_3. \quad (1.8)$$

Далее, $S_2(0) = 0$. Каждое слагаемое $S_2(t)$ содержит по крайней мере два множителя вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x t x^{2k+1} dF_j(x); \quad 2k+1 < 2q.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_2(t'_k) - S_2(0)}{(t'_k)^2} = s_2 \quad (1.9)$$

существует и конечен.

Далее, обращаясь к (1.7), видим, что функции

$$\frac{1}{\varphi_j(t)} \prod_{j=1}^s \varphi_j^{\alpha_j}(t) = \psi_j(t)$$

— четные и дважды дифференцируемые в окрестности 0 и $\psi_j(0) = 1$, поэтому

$$\psi_j(t) = 1 + b_j t^2 + o(t^2). \quad (1.10)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} S_1(t) - S_1(0) &= \sum_{j=1}^s \alpha_j \varphi_j^{(2q)}(t) \psi_j(t) - \sum_{j=1}^s \alpha_j \varphi_j^{(2q)}(0) = \\ &= S_{11}(t) + t^2 S_{12}(t) + S_{13}(t), \end{aligned} \quad (1.11)$$

где

$$S_{11}(t) = \sum_{j=1}^s \alpha_j (\varphi_j^{(2q)}(t) - \varphi_j^{(2q)}(0)), \quad (1.12)$$

$$S_{12}(t) = \sum_{j=1}^s \alpha_j b_j \varphi_j^{(2q)}(t), \quad (1.13)$$

$$S_{13}(t) = \sum_{j=1}^s \alpha_j \varphi_j^{(2q)}(t) o(t^2). \quad (1.14)$$

Из (1.1) имеем:

$$\frac{S_1(t'_k) - S_1(0)}{(t'_k)^2} + \frac{S_2(t'_k) - S_2(0)}{(t'_k)^2} + \frac{S_3(t'_k) - S_3(0)}{(t'_k)^2} = \\ = \frac{1}{(t'_k)^2} (\varphi_0^{(2q)}(t'_k) - \varphi_0^{(2q)}(0)).$$

При $k \rightarrow \infty$, согласно (1.8) и (1.9) и в силу того, что правая часть стремится к конечному пределу,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_1(t'_k) - S_1(0)}{(t'_k)^2} = s_1$$

существует и конечен. Далее, используя (1.11)—(1.14), находим, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^s \alpha_j \frac{1}{(t'_k)^2} (\varphi^{(2q)}(t'_k) - \varphi^{(2q)}(0)) = s_{11}$$

существует и конечен. $\alpha_j > 0$, так что, используя представление $\varphi^{(2q)}(t) - \varphi^{(2q)}(0)$ в виде интеграла Стильбеса, получим

$$(-1)^{q-2} \sum_{j=1}^s \alpha_j \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{t'_k x}{2} x^{2q} dF_j(x) = O((t'_k)^2)$$

при $k \rightarrow \infty$. В силу положительности α_j находим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{t'_k x}{2} x^{2q} dF_j(x) = O((t'_k)^2), \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Откуда, как и ранее, выводим, что $\int_{-\infty}^{\infty} x^{2q+2} dF_j(x) < \infty$ и $\varphi^{(2q+2)}(t)$ существует для всех реальных t . Этим доказана лемма 1.

2. Лемма 3. *Функции $\varphi_j(t)$ голоморфны в некоторой окрестности 0.*

Доказательство. Мы можем считать в основном равенстве (1.1) числа $\alpha_j > 1$ за счет возведения его в подходящую целую степень (в достаточно малой окрестности 0). Нам надо получить оценку для $|\varphi_j^{(2q)}(0)|$ ($q \geq 1$). Возведем уравнение (1.1) в степень $2q$ и продифференцируем обе его части $2q$ раз при $t=0$. Важно заметить, что при $t=0$ все производные нечетного порядка исчезнут: $\varphi_j^{(2k+1)}(0)=0$. Далее, все остальные слагаемые будут иметь знак $(-1)^q$. При этом важно, что все коэффициенты вида $2q\alpha_1(2q\alpha_1-1) \dots 2q\alpha_s(2q\alpha_s-1) \dots$ будут положительны, ибо $2q\alpha_j > 2q$. Полученные справа и слева выражения будут совпадать в последовательности чисел $t'_k \rightarrow 0$; так как они являются непрерывными в окрестности 0, то они будут совпадать при $t'_k=0$.

Оставляя в сумме, получившейся в левой части, среди членов одного и того же знака $(-1)^q$ только члены, содержащие $\varphi_j^{(2q)}(0)$, находим:

$$\left| \sum_{j=1}^s 2q \alpha_j \varphi_j^{(2q)}(0) \right| \leq \left| \frac{d^{2q}}{(dt)^{2q}} (\varphi_0(t))^{2q} \Big|_{t=0} \right|.$$

Таким образом,

$$|\varphi_j^{(2q)}(0)| \leq \frac{1}{2q \alpha_j} |((\varphi_0(0))^{2q})^{(2q)}|. \quad (2.1)$$

Оценим теперь правую часть, которую переобозначим $|\varphi_0(0, 2q)|$ с помощью интеграла Коши. Имеем:

$$\varphi_0(0, 2q) = \frac{1}{2\pi i} (2q)! \oint_{|z|=1} \frac{(\varphi_0(z))^{2q}}{z^{2q+1}} dz. \quad (2.2)$$

Полагая $M_0 = \sup_{|z|=1} |\varphi_0(z)|$, получаем:

$$|\varphi_0(0, 2q)| \leq (2q)! M_0^{2q}. \quad (2.3)$$

Из (2.1) находим:

$$|\varphi_j^{(2q)}(0)| \leq (2q)! M_0^{2q}. \quad (2.4)$$

В силу известных свойств характеристических функций заключаем отсюда, что $\varphi_j(t)$ голоморфны, по крайней мере в полосе $|\operatorname{Im} t| < M_0^{-1}$, и лемма 3 доказана.

Итак, справа и слева в равенстве (1.1) стоят функции, голоморфные в полосе $|\operatorname{Im} t| < M_0^{-1}$ и совпадающие в последовательности чисел $t_k \rightarrow 0$. При этом важно, что $\varphi_0(t)$ и $\varphi_j(t)$ не обращаются в 0. Отсюда следует, что равенство (1.1) имеет место во всей полосе $|\operatorname{Im} t| < M_0^{-1}$. При определении $(\varphi_j(t))^{\alpha_j} = \exp(\alpha_j \ln \varphi_j(t))$ берем ветвь логарифма, реальную при реальных t и далее непрерывно продолжаемую.

Положим $it = z = x + iy$, так что

$$\varphi_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zu} dF_j(u) = v_j(z). \quad (2.5)$$

Интеграл в правой части сходится по крайней мере при $|x| < M_0^{-1}$.

При $z = x$ $v_j(z)$ образуют четные ряды с положительными коэффициентами. Имеем из (1.1):

$$\prod_{j=1}^s (v_j(z))^{\alpha_j} = v_0(z), \quad (2.6)$$

где $v_0(z) = \varphi_0(t)$ — целая четная функция z ; $|z| < M_0^{-1}$.

3. Лемма 4. Функции $\varphi_j(t)$ — целые функции t .

Доказательство. Нам нужно доказать, что $v_j(z)$ — целые функции ($j = 1, 2, \dots, s$). Пусть это не так, тогда радиусы схо-

димости некоторых из рядов $v_j(z)$ должны быть конечны. Пусть минимальный из них r_1 для ряда $v_1(z)$ (что, разумеется, не нарушает общности). Ввиду неотрицательности коэффициентов четных рядов $v_j(z)$, по известной теореме Прингсхейма—Ландау (см., например, [6]), точка $z=r_1$ должна быть особой точкой функции $v_1(z)$. Рассмотрим точку $x_\Delta=r_1-\Delta$, где $\Delta < r_1/2$ — малое число. Имеем из (2.6):

$$\prod_{j=1}^s (v_j(x_\Delta + \xi))^{\alpha_j} = v_0(x_\Delta + \xi) \quad (3.1)$$

при $|\xi| < \Delta$. Ряды $v_j(x_\Delta + \xi)$ по степеням ξ имеют неотрицательные коэффициенты. Оценим коэффициент при ξ^q , равный

$$\frac{1}{q!} (v_j(x_\Delta + \xi))^{(\alpha_j)} \Big|_{\xi=0}.$$

Для этого возведем (3.1) в степень q , продифференцируем q раз и положим $\xi=0$. В силу того, что $q\alpha_j > q$, как и ранее, получим суммы с положительными коэффициентами, так что найдем

$$\sum_{j=1}^s q\alpha_j \frac{d^q}{d\xi^q} v_j(x_\Delta + \xi) \Big|_{\xi=0} \leq \frac{d^q}{d\xi^q} (v_0(x_\Delta + \xi))^q \Big|_{\xi=0}. \quad (3.2)$$

Все производные, участвующие в этих соотношениях, неотрицательны. Правую часть оценим, как и ранее, с помощью интеграла Коши. Имеем, считая ξ комплексным и учитывая, что $v_0(x_\Delta + \xi)$ — целая функция:

$$\frac{d^q}{d\xi^q} (v_0(x_\Delta + \xi))^q \Big|_{\xi=0} = \frac{q!}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{(v_0(x_\Delta + z))^q}{z^{q+1}} dz.$$

Положим $\sup_{|z|=1} |v_0(x_\Delta + z)| = \rho(x_\Delta)$. Очевидно, $\rho(x_\Delta) < C(r_1)$, где $C(r_1)$ — некоторая положительная функция $r_1 = x_\Delta + \Delta$; $\Delta < r_1/2$. Отсюда

$$\frac{d^q}{d\xi^q} (v_0(x_\Delta + \xi))^q \Big|_{\xi=0} \leq q! (C(r_1))^q.$$

В силу (3.2)

$$\frac{d^q}{d\xi^q} v_j(x_\Delta + \xi) \Big|_{\xi=0} \leq q! (C(r_1))^q.$$

Таким образом, при всяком $\Delta \in (0, r_1/2)$ радиус сходимости по ξ рядов $v_j(x_\Delta + \xi)$ не меньше $1/C(r_1)$. Но так как r_1 — особая точка $v_j(z)$, то такой радиус сходимости не может быть больше Δ . Для достаточно малых Δ получаем противоречие, доказывающее лемму 4.

4. Теперь мы можем доказать основную лемму. Мы доказали, что $\varphi_j(t)$ — целые функции. Но $\varphi_j(t) = f_j(t) f_j(-t)$, где $f_j(t)$ и $f_j(-t)$ — х. ф. По теореме Д. А. Райкова [7], $f_j(t)$ — целые функции, что и доказывает основную лемму.

Заменим t на $it = z$ и переобозначим $f_j(t)$ через $f_j(z)$, так что $f_j(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} dF_j(x)$ — целые функции; найдем

$$\prod_{j=1}^s (f_j(z))^{\alpha_j} = f_0(z). \quad (4.1)$$

Разумеется, $f_j(z)$ не обращаются в 0. Мы можем положить

$$(f_j(z))^{\alpha_j} = \exp(h_j(z)), \quad (4.2)$$

где $h_j(z)$ — целые функции и $h_j(0) = 0$.

Далее мы будем проводить рассуждения, аналогичные рассуждениям работы [3]. Положим

$$(f_1(z))^{\alpha_1} = \exp g_1(z); \quad (f_2(z))^{\alpha_2} \dots (f_s(z))^{\alpha_s} = \exp g_2(z), \quad (4.3)$$

где $g_1(z)$ и $g_2(z)$ — целые функции, реальные при реальных z ; $g_1(0) = g_2(0) = 0$; $f_0(z)$ будем считать соответствующей закону F класса $I^{(N)}$; согласно формуле (0.2),

$$f_0(z) = \exp \left\{ \gamma z^2 + \int_{-b}^a \left(e^{zu} - 1 - \frac{zu}{1+u^2} \right) dG(u) \right\}, \quad (4.4)$$

где $G(u)$ имеет точки роста только в точках пуассонова спектра (0.3) и ее скачки подчиняются (0.4); $\gamma \geq 0$. Имеем:

$$\begin{aligned} \overline{f_0(z)} \exp(-g_1(z)) &= (f_2(z))^{\alpha_2} \dots (f_s(z))^{\alpha_s}, \\ f_0(z) \exp(g_1(z)) &= (f_1(z))^{\alpha_1+1} (f_2(z))^{\alpha_2} (f_s(z))^{\alpha_s}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Весьма важно, что функции $(f_j(z))^{\alpha_j}$, не будучи, вообще говоря, характеристическими функциями случайных величин, являются целыми функциями без нулей и обладают тем же свойством, что $f_j(z)$: на любой вертикальной прямой модуль функции достигает максимума на ее пересечении с осью абсцисс. Это же касается, очевидно, произведения таких функций в любых положительных степенях, и из (4.5) выводим:

$$|f_0(x+iy) \exp(\pm g_1(x+iy))| \leq f_0(x) \exp(\pm g_1(x)). \quad (4.6)$$

Эта формула отвечает формуле (1.9) работы [3], на которую придется сослаться. Далее рассуждаем, как в работе [3]. Полагая $g_1(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, выводим все нужные неравенства для $u(x, y)$, за исключением оценки сверху для $u(x, 0)$, даваемой

формулой (3.1) работы [3]. Покажем, что и эта оценка верна. Имеем (ср. формулы (3.2) и (3.3) работы [3]) соответственно (4.5):

$$\begin{aligned} \exp \left(\gamma x^2 + \int_{-b}^a \left(e^{xu} - 1 - \frac{xu}{1+u^2} \right) dG(u) - u(x, 0) \right) &= \\ &= (f_2(x))^{\alpha_2} \dots (f_s(x))^{\alpha_s}, \\ \exp \left(\gamma x^2 + \int_{-b}^a \left(e^{xu} - 1 - \frac{xu}{1+u^2} \right) dG(u) + u(x, 0) \right) &= \\ &= (f_1(x))^{\alpha_1+1} \dots (f_s(x))^{\alpha_s}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Введем функцию¹⁾

$$\exp((1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_s)x^2) = (E \exp xZ)^{1+\alpha_1+\dots+\alpha_s};$$

далее положим

$$f_j(x) = E \exp xY_j \quad (j=1, 2, \dots, s).$$

Умножая равенства (4.7) на полученную функцию, найдем:

$$\begin{aligned} \exp \left((\gamma + 1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_s)x^2 + \int_{-b}^a \left(e^{xu} - 1 - \frac{xu}{1+u^2} \right) dG(u) - u(x, 0) \right) &= \\ &= (E \exp xZ)^{\alpha_1+1} \prod_{j=2}^s (E \exp x(Z + Y_j))^{\alpha_j}, \\ \exp \left((\gamma + 1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_s)x^2 + \int_{-b}^a \left(e^{xu} - 1 - \frac{xu}{1+u^2} \right) dG(u) + u(x, 0) \right) &= \\ &= (E \exp x(Z + Y_1))^{\alpha_1+1} \prod_{j=2}^s (E \exp x(Z + Y_j))^{\alpha_j}. \end{aligned}$$

Очевидно, существуют две пары положительных чисел a_i, b_i , таких, что

$$E \exp x(Z + Y_j) > a_1 \exp b_1 x \quad (x \geq 0),$$

$$E \exp x(Z + Y_j) > a_2 \exp(-b_2 x) \quad (x < 0).$$

Такие же неравенства верны для $E \exp xZ = \exp x^2$. Отсюда находим оценку для $u(x, 0)$, рассуждая, как в п. 3. При замене $g_1(z)$ на $g_2(z)$ вводятся понятные видоизменения. Дальнейшие рассуждения совершенно идентичны рассуждениям работы [3].

5. Окончательным результатом является то же, что и в работе [3], именно: функция $f_1(it) = E \exp(itY_1)$ имеет логарифм,

¹⁾ Здесь Z — нормальная случайная величина, такая, что $Z, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ независимы в совокупности. (Прим. ред.).

выражаемый формулой вида (0. 2), для случая конечного пуассонова спектра (0. 3). То, что это же свойство будет иметь место и для счетного спектра (0. 3), получается рассуждениями, совпадающими с рассуждениями п. 1 и 2 работы [4]. Передавая роль $f_1(z)$ любой из $f_j(z)$, приходим к полному доказательству теоремы.

Л и т е р а т у р а

1. Л и н н и к Ю. В. О разложении безгранично делимых вероятностных законов. — ДАН СССР, 1957, т. 116, № 5, с. 735—737.
2. Л и н н и к Ю. В. Общие теоремы о разложении безгранично делимых законов. — Теор. вероятн. и ее примен., 1958, т. 3, вып. 1, с. 3—40.
3. Л и н н и к Ю. В. Общие теоремы о разложении безгранично делимых законов. 2. — Теор. вероятн. и ее примен., 1959, т. 4, вып. 1, с. 55—85.
4. Л и н н и к Ю. В. Общие теоремы о разложении безгранично делимых законов. 3. — Теор. вероятн. и ее примен., 1959, т. 4, вып. 2, с. 150—171.
5. З и н г е р А. А., Л и н н и к Ю. В. Об одном аналитическом обобщении теоремы Крамера и его применении. — Вестник ЛГУ, 1955, № 11. Сер. мат., физ., хим., вып. 4, с. 51—56.
6. Т и т ч м а р ш Е. Теория функций. М., 1951. 507 с.
7. Р а й к о в Д. А. О разложении законов Гаусса и Пуассона. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1938, т. 2, № 1, с. 91—124.

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ О РАЗЛОЖЕНИИ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ ЗАКОНОВ

II. Достаточные условия (случай конечного пуассонова спектра)

Теор. вероятн. и ее примен., 1959, т. 4, вып. 1, с. 55—85

1. Основной целью ч. II настоящей работы является доказательство достаточности условий в теореме 1 ч. I об общем виде безгранично делимых (в дальнейшем б. д.) законов с гауссовой компонентой, имеющих только б. д. компоненты, в случае конечного пуассонова спектра. Придется начать с доказательства теоремы 2 ч. I. Мы будем пользоваться методом работы [1]. Пусть дан б. д. закон с ограниченным пуассоновым спектром, т. е. с х. ф. вида

$$\ln \varphi(t) = \beta it - \gamma t^2 + \int_{-b}^a \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dG(u), \quad (1.1)$$

где β реально; $\gamma \geq 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$ — ограниченные константы; $G(u)$ — неубывающая функция, подчиненная обычным условиям (см. п. 0 ч. I). Докажем, что $\varphi(t)$ — целая функция. Интеграл (1.1) будет существовать и абсолютно сходиться при любом комплексном значении аргумента $it=z$ (см. условие (0. 2) ч. I). Производная от (1.1) по аргументу $z=it$ будет также существовать

всюду. Таким образом, $\ln \varphi(t)$ будет целой функцией, а $f(z) = \varphi(t)$ — целой функцией z , не имеющей нулей на всей плоскости. Положим:

$$z = it = x + iy; \operatorname{Re} z = x; \operatorname{Im} z = y; \quad (1.2)$$

$$f(z) = \varphi(t) = \exp \left(\beta z + \gamma z^2 + \int_{-b}^a \left(e^{zu} - 1 - \frac{zu}{1+u^2} \right) dG(u) \right).$$

Не нарушая общности, можем считать $\beta = 0$. Если Y — случайная величина с законом распределения F ,

$$f(z) = E \exp(zY) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(zy) dF(y). \quad (1.3)$$

Пусть имеем разложение $F = F_1 * F$ или $Y = Y_1 + Y_2$, где Y_1 и Y_2 — независимые случайные величины, отвечающие законам F_1 и F_2 и х. ф. $\varphi_1(t)$; $\varphi_2(t)$. В силу одной теоремы Д. А. Райкова (см. [2], с. 98—99) $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ будут целыми функциями. Положим

$$f_j(z) = \varphi_j(t) = E \exp(zY_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(zy) dF_j(y); \quad j = 1, 2. \quad (1.4)$$

Тогда

$$f(z) = f_1(z) f_2(z) \quad (1.5)$$

на всей комплексной плоскости.

Из (1.4) видим, что $f_j(z)$ неотрицательны на реальной оси $z = x$ и $f(0) = 1$, из (1.2) — что $f(z)$, а стало быть, $f_1(z)$ и $f_2(z)$, не имеют нулей на комплексной плоскости. Пусть $g(z) = \ln f_1(z)$, причем взята ветвь логарифма, реальная на реальной оси. Имеем:

$$f_1(z) = \exp g(z) = E \exp(zY_1). \quad (1.6)$$

Отсюда

$$f_2(z) = E \exp(zY_2) = f(z) \exp(-g(z)). \quad (1.7)$$

Пусть Y_0 — случайная величина, распределенная, как Y , и независимая от Y_1 . Тогда из (1.6) получаем:

$$f(z) \exp g(z) = E \exp z(Y_0 + Y_1). \quad (1.8)$$

Лемма 1. При любых реальных x и y для любого знака $\pm$

$$|f(x + iy) \exp(\pm g(x + iy))| \leq f(x) \exp(\pm g(x)). \quad (1.9)$$

Доказательство непосредственно явствует из (1.7) и (1.8).

2. Положим $u(x, y) = \operatorname{Re} g(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} g(z)$, так что $g(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, тогда

$$|\exp(\pm g(x + iy))| = \exp(\pm u(x, y)).$$

Далее, из (1.2) (где полагаем $\beta=0$) находим:

$$|f(x+iy)| = \exp \operatorname{Re} \left(\gamma z^2 + \int_{-b}^a \left(e^{zu} - 1 - \frac{zu}{1+u^2} \right) dG(u) \right) = \\ = \exp \left(\gamma(x^2 - y^2) + \int_{-b}^a \left(e^{xu} \cos yu - 1 - \frac{xu}{1+u^2} \right) dG(u) \right),$$

так что

$$|f(x+iy) \exp(\pm g(x+iy))| = \exp \left(\gamma(x^2 - y^2) + \right. \\ \left. + \int_{-b}^a \left(e^{xu} \cos yu - 1 - \frac{xu}{1+u^2} \right) dG(u) \pm u(x, y) \right). \quad (2.1)$$

Отсюда выводится одна из основных лемм.

Лемма 2.

$$0 \leq u(x, 0) - u(x, y) \leq \gamma y^2 + 2 \int_{-b}^a e^{xu} \sin^2 \frac{yu}{2} dG(u). \quad (2.2)$$

Доказательство. Из (2.1) и (1.9) выводим:

$$\gamma(x^2 - y^2) + \int_{-b}^a \left(e^{xu} \cos yu - 1 - \frac{xu}{1+u^2} \right) dG(u) + u(x, y) \leq \\ \leq \gamma x^2 + \int_{-b}^a \left(e^{xu} - 1 - \frac{xu}{1+u^2} \right) dG(u) + u(x, 0), \\ \gamma(x^2 - y^2) + \int_{-b}^a \left(e^{xu} \cos yu - 1 - \frac{xu}{1+u^2} \right) dG(u) - u(x, y) \leq \\ \leq \gamma x^2 + \int_{-b}^a \left(e^{xu} - 1 - \frac{xu}{1+u^2} \right) dG(u) - u(x, 0).$$

Отсюда находим:

$$u(x, y) - u(x, 0) \leq \gamma y^2 + 2 \int_{-b}^a e^{xu} \sin^2 \frac{yu}{2} dG(u), \\ u(x, y) - u(x, 0) \geq -\gamma y^2 - 2 \int_{-b}^a e^{xu} \sin^2 \frac{yu}{2} dG(u).$$

При этом два последних интеграла сходятся в окрестности $u=0$ в силу условия (0.2) ч. I. Отсюда

$$|u(x, y) - u(x, 0)| \leq \gamma y^2 + 2 \int_{-b}^a e^{xu} \sin^2 \frac{yu}{2} dG(u). \quad (2.3)$$

Далее, из (1.6) имеем:

$$\operatorname{expg}(x) \geq |\operatorname{expg}(x + iy)| \quad \text{или} \quad u(x, 0) - u(x, y) \geq 0.$$

Последнее неравенство вместе с (2.3) приводит к (2.2).

Лемма 3. При $|x| \rightarrow \infty$ имеем:

$$\left| \int_{-b}^a \left(e^{xu} - 1 - \frac{zu}{1+u^2} \right) dG(u) \right| = O(|z|^2 (e^{ax/2} + e^{-bx/2}) + e^{ax} + e^{-bx}). \quad (2.4)$$

Доказательство. В силу условия (0.2) ч. I интегралы

$$\int_0^a u^2 dG(u) \quad \text{и} \quad \int_{-b}^0 u^2 dG(u) \quad \text{сходятся. При } |z| > 0$$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^a \left(e^{xu} - 1 - \frac{zu}{1+u^2} \right) dG(u) \right| &= \left| \int_0^a \frac{1}{u^2} \left(e^{xu} - 1 - \frac{zu}{1+u^2} \right) u^2 dG(u) \right| \leq \\ &\leq \left| \int_0^{|z|^{-1}} \right| + \left| \int_{|z|^{-1}}^{a/2} \right| + \left| \int_{a/2}^a \right| \end{aligned}$$

(определяем $dG(u) = 0$ при $u > a$). Имеем:

$$\left| \int_0^{|z|^{-1}} \right| = O(|z|^2); \quad \left| \int_{|z|^{-1}}^{a/2} \right| = O(|z|^2 \operatorname{expg} \frac{a}{2} x) + O(|z|^2); \quad \left| \int_{a/2}^a \right| = O(e^{ax}) + O(|z|).$$

Аналогично оцениваем $\left| \int_{-b}^0 \right|$. Это приводит к (2.4).

3. Чтобы извлечь из (2.2) информацию относительно $u(x, y) = \operatorname{Re} g(z)$, нужно иметь оценку для $u(x, 0)$.

Лемма 4.

$$u(x, 0) = O(x^2 (e^{ax/2} + e^{-bx/2}) + e^{ax} + e^{-bx}). \quad (3.1)$$

Доказательство. Обратимся к (1.7) и (1.8), полагая там $z = x$. Имеем:

$$\operatorname{expg} \left(\gamma x^2 + \int_{-b}^a \left(e^{xu} - 1 - \frac{xu}{1+u^2} \right) dG(u) - u(x, 0) \right) = \mathbb{E} \operatorname{expg}(xY_2), \quad (3.2)$$

$$\operatorname{expg} \left(\gamma x^2 + \int_{-b}^a \left(e^{xu} - 1 - \frac{xu}{1+u^2} \right) dG(u) + u(x, 0) \right) = \mathbb{E} \operatorname{expg}(x(Y_0 + Y_1)). \quad (3.3)$$

Введем в рассмотрение нормальную величину Z , независимую от Y_0, Y_1, Y_2 в совокупности, для которой

$$E \exp(xZ) = \exp(x^2),$$

$$\exp\left((1+\gamma)x^2 + \int_{-b}^a \left(e^{xu} - 1 - \frac{xu}{1+u^2}\right) dG(u) - u(x, 0)\right) = \\ = E \exp x(Z + Y_2), \quad (3.4)$$

$$\exp\left((1+\gamma)x^2 + \int_{-b}^a \left(e^{xu} - 1 - \frac{xu}{1+u^2}\right) dG(u) + u(x, 0)\right) = \\ = E \exp x(Z + Y_0 + Y_1). \quad (3.5)$$

Рассмотрим случайные величины $Z + Y_2$ и $Z + Y_0 + Y_1$. В каждую из них будет входить независимая от второго слагаемого нормальная компонента Z с ненулевой дисперсией. Отсюда явствует существование четырех пар положительных чисел $\alpha_i > 0, \beta_i > 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$), таких, что при $x > 0$

$$E \exp x(Z + Y_2) > \alpha_1 \exp \beta_1 x, \quad (3.6)$$

$$E \exp x(Z + Y_0 + Y_1) > \alpha_2 \exp \beta_2 x \quad (3.7)$$

и при $x < 0$

$$E \exp x(Z + Y_2) > \alpha_3 \exp(-\beta_3 x), \quad (3.8)$$

$$E \exp x(Z + Y_0 + Y_1) > \alpha_4 \exp(-\beta_4 x). \quad (3.9)$$

Вернемся к утверждению (3.1). Допустим, что (3.1) нарушено при $x > 0$. Тогда найдется такая последовательность $x_j \rightarrow \infty$, что (с учетом леммы 3(2.4))

$$|u(x_j, 0)| > 2 \left| \int_{-b}^a \left(e^{x_j u} - 1 - \frac{x_j u}{1+u^2}\right) dG(u) \right| + 2e^{ax_j}. \quad (3.10)$$

Здесь $u(x_j, 0)$ может быть положительной и отрицательной. Допустим сначала, что для бесконечной подпоследовательности $\{t_j\}$; $t_j \rightarrow \infty$ чисел x_j будет $u(t_j, 0) > 0$. Тогда из (3.4) находим

$$E \exp t_j(Z + Y_2) < \exp((1+\gamma)t_j^2 - 2e^{at_j}) < \exp(-e^{at_j})$$

для достаточно больших t_j . Это противоречит (3.6). Приходится допустить, что $u(x_j, 0) < 0$ при $j \geq j_0$. Тогда (3.10) и (3.5) при $j \geq j_0$ дают

$$E \exp x_j(Z + Y_0 + Y_1) < \exp((1+\gamma)x_j^2 - 2e^{ax_j}) < \exp(-e^{ax_j}),$$

что противоречит (3.7). Итак, при $x > 0$ неравенство (3.10) невозможно.

Перейдем к случаю $x < 0$. Пусть (3.1) нарушено при этом условии. Тогда найдется последовательность $x_j \rightarrow \infty$, такая, что

$$|u(-x_j, 0)| > 2 \left| \int_{-b}^a \left(e^{-x_j u} - 1 - \frac{-x_j u}{1+u^2} \right) dG(u) \right| + 2e^{-bx_j}. \quad (3.11)$$

Сперва допустим, что для последовательности $t_j \rightarrow \infty$ чисел x_j будет $u(-x_j, 0) > 0$. Из (3.4) найдем при $j \geq j_0$

$$E \exp[-t_j(Z + Y_2)] < \exp(-e^{bx_j}),$$

что противоречит (3.8) при $x = -t_j$ и больших t_j .

Приходится допустить, что $u(-x_j, 0) < 0$ при больших x_j . Тогда обращаемся к (3.5) и находим: при больших t_j

$$E \exp[-t_j(Z + Y_0 + Y_1)] < \exp(-e^{bx_j}),$$

что противоречит (3.9) при $x = -t_j$ и больших t_j и опровергает (3.11). В силу (2.4) это доказывает лемму 4.

4. Лемма 5.

$$u(x, y) = O(|z|^2(e^{ax/2} + e^{-bx/2}) + e^{ax} + e^{-bx}). \quad (4.1)$$

Доказательство. Из (2.2) находим:

$$|u(x, y)| \leq u(x, 0) + \gamma y^2 + 2 \int_{-b}^a e^{xu} \sin^2 \frac{yu}{2} dG(u). \quad (4.2)$$

Далее, имеем, как в п. 2:

$$\int_{-b}^a e^{xu} \sin^2 \frac{yu}{2} dG(u) = O(e^{ax} + e^{-bx} + y^2(e^{ax/2} + e^{-bx/2})). \quad (4.3)$$

Из (4.2) с учетом (3.1) и (4.3) получаем:

$$u(x, y) = O(\gamma y^2 + (x^2 + y^2)(e^{ax/2} + e^{-bx/2}) + e^{ax} + e^{-bx}),$$

или

$$u(x, y) = O(|z|^2(e^{ax/2} + e^{-bx/2}) + e^{ax} + e^{-bx}),$$

что и требовалось доказать.

Мы видим, в частности, что при $x = 0$, $z = iy$ имеем:

$$u(0, y) = O(y^2 + 1). \quad (4.4)$$

Теперь нам нужно, пользуясь (4.1), найти оценку для $v(x, y)$. Имеет место следующая лемма.

Лемма 6. При $x = 0$

$$v(0, y) = O(|y|^3 + 1). \quad (4.5)$$

Вообще при $|x| \leq c_0$ ($c_0 > 0$ — выбранная по желанию константа)

$$|v(x, y)| < c_1 (|y|^3 + 1) \quad (4.6)$$

(в дальнейшем $c_1, c_2, \dots$ — положительные константы).

При любом x и любом $\varepsilon > 0$

$$v(x, y) = O(e^{(a+\varepsilon)x} + e^{-(b+\varepsilon)x}) (|z|^3 + 1). \quad (4.7)$$

Доказательство получается из (4.1) применением интегральной формулы Пуассона из теории гармонических функций так же, как доказательство совершенно аналогичной леммы 7 из работы [1].

Теперь мы можем получить оценку $g(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, которую можно сформулировать в виде леммы.

Л е м м а 7. При $|x| \leq c_0$

$$|g(z)| < c_3 (|y|^3 + 1). \quad (4.8)$$

При любом x и любом $\varepsilon > 0$ имеем:

$$|g(z)| = O(e^{(a+\varepsilon)x} + e^{-(b+\varepsilon)x}) (|z|^3 + 1). \quad (4.9)$$

Доказательство непосредственно следует из (4.1), (4.6) и (4.7).

5. Нам понадобятся несколько теорем из теории целых функций экспонентного типа. Целая функция $G(z)$ называется функцией экспонентного типа $\tau \geq 0$, если $G(z) = O(\exp(\tau + \varepsilon)|z|)$ при $|z| \rightarrow \infty$ имеет место для всякого положительного и не имеет места ни для одного отрицательного постоянного ε .

Некоторый самостоятельный интерес для теории разложений законов $F \in I$ имеет следующая лемма.

Л е м м а 8. Функция $g(z)$ есть либо полином степени не выше второй, либо целая функция положительного экспонентного типа τ ; $0 < \tau \leq a_0$, $a_0 = \max(a, b)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (4.1) и (4.7) видно, что $g(z)$ — целая функция экспонентного типа $\tau \leq a_0$. Если бы $\tau = 0$, то мы имели бы $|g(z)| = O(\exp \varepsilon |z|)$ при $|z| \rightarrow \infty$ и любом $\varepsilon > 0$.

Применим одну из теорем Р. Пэли—Н. Винара из их известной книги (см. [3], с. 13, теорема XI). Мы сформулируем ее так: если для целой функции $G(z)$ и любого $\varepsilon > 0$ имеем:

$$|G(z)| = O(\exp \varepsilon |z|)$$

и $G(z)$ не обращается в нуль тождественно, то $|G(z)|$ не может принадлежать L_2 вдоль какой-либо оси. Пусть $\tau = 0$; $|g(z)| = O(\exp \varepsilon |z|)$; имея в виду, что $g(0) = 0$, рассмотрим

$$G(z) = z^{-4} \left(g(z) - g'(0)z - \frac{g''(0)}{2}z^2 - \frac{g'''(0)}{6}z^3 \right). \quad (5.1)$$

$G(z)$ будет целой функцией, и $|G(z)| = O(\exp \varepsilon |z|)$ при любом $\varepsilon > 0$. Далее, из (4.8) явствует, что на мнимой оси $z = it$ имеем: $|G(it)| \in L_2(-\infty, \infty)$. Согласно указанной теореме Р. Пэли—Н. Ви-

нера, $G(z) \equiv 0$, так что $g(z)$ — полином степени не выше третьей. Из (1.6) находим $\exp g(it) = E \exp(itY_1)$, где Y_1 — случайная величина. Если $g(it)$ — полином, то, согласно теореме Марцинкевича [4], степень этого полинома не выше второй. Этим лемма доказана.

6. Лемма 9.

$$g(z) = z^4 \int_{-a_0}^{a_0} e^{zt} \Phi(t) dt + P(z), \quad (6.1)$$

где $a_0 = \max(a, b)$, $\Phi(t)$ реальна и суммируема с квадратом по Лебегу в $[-a_0, a_0]$, т. е. $\Phi(t) \in L_2(-a_0, a_0)$, а $P(z)$ — полином степени не выше третьей.

Доказательство. Как и ранее, введем вспомогательную функцию

$$G(z) = z^{-4} \left(g(z) - g'(0)z - \frac{g''(0)}{2}z^2 - \frac{g'''(0)}{6}z^3 \right) \quad (6.2)$$

($g(0) = 0$). Мы видим, что $g(z)$ либо полином не выше второй степени, либо целая функция экспонентного типа $\tau \in (0, a_0)$.

Если $g(z)$ — полином, то (6.1) доказано с $\Phi(t) \equiv 0$. Допустим, что $g(z)$ — целая функция экспонентного типа $\tau > 0$. Тогда $G(z)$ — тоже целая функция того же экспонентного типа τ и ввиду (4.4) и (4.5) $G(it) \in L_2(-\infty, \infty)$. Согласно классической теореме Р. Пэли—Н. Винера ([3], с. 12—13, теорема X; см. также ее использование в доказательстве леммы 10 работы [1]), найдем

$$G(z) = \int_{-a_0}^{a_0} e^{zu} f(u) du, \quad (6.3)$$

где $f(u)$ — комплекснозначная функция; $|f(u)| \in L_2(-a_0, a_0)$. Отсюда

$$g(z) = z^4 \int_{-a_0}^{a_0} e^{zu} f(u) du + P(z), \quad (6.4)$$

где $P(z)$ — полином степени не выше третьей. Этот полином имеет реальные коэффициенты, ибо $g(z)$ реальна на реальной оси $z = x$.

Имеем:

$$g(x) = x^4 \int_{-a_0}^{a_0} e^{xu} f(u) du + P(x).$$

Беря сопряженные, получаем:

$$\overline{g(x)} = x^4 \int_{-a_0}^{a_0} e^{xu} \overline{f(u)} du + \overline{P(x)}.$$

Следовательно,

$$g(x) = x^4 \int_{-a_0}^{a_0} e^{xu} \Phi(u) du + P(x), \quad (6.5)$$

где $\Phi(u) = (f(u) + \overline{f(u)})/2$ — реальная функция, $\Phi(u) \in L_2(-a_0, a_0)$, т. е. суммируема с квадратом по Лебегу. По принципу аналитического продолжения равенство (6.5) будет верно на всей комплексной плоскости, т. е. (6.1) доказано.

7. Для двух суммируемых по Лебегу функций $\Phi_1(u)$ и $\Phi_2(u)$ будем обозначать соотношение эквивалентности (равенства почти везде) через $\Phi_1(u) \approx \Phi_2(u)$. Мы подошли теперь к доказательству теоремы 2 ч. I. Для доказательства этой теоремы¹⁾ достаточно установить, что $\Phi(u) \approx 0$ при u , лежащем в дополнении к сегменту $[-b, a]$ в сегменте $[-a_0, a_0]$. Пусть сперва $a_0 = a$, так что $0 < b \leq a_0$.

Если $b = a_0$, то теорема 2 следует из формулы (6.1), так как $f_1(z) = \exp g(z)$ отвечает произвольной компоненте б. д. закона с ограниченным пуассоновым спектром. Поэтому допустим, что $b < a_0$. Положим $a_0 u = t$; $g_1(z) = g(a_0 z)$; $P_1(z) = P(a_0 z)$; $\Phi_1(t) = a_0^3 \Phi(u)$. Тогда

$$g_1(z) = z^4 \int_{-a_0}^{a_0} e^{za_0 u} a_0^4 \Phi(u) du + P_1(z),$$

или

$$g_1(z) = z^4 \int_{-1}^1 e^{zt} \Phi_1(t) dt + P_1(z). \quad (7.1)$$

При этом, так как $a_0 > 0$, подстановка $z \rightarrow a_0 z$ переводит левую и правую полуплоскости в себя, так что $g_1(z)$ имеет те же свойства, что и $g(z)$. Перейдем теперь к доказательству леммы.

Л е м м а 10. В формуле (7.1) $\Phi_1(t) \approx 0$ при $t \in [-1, -b/a_0]$.

Доказательство этой леммы совершенно аналогично доказательству леммы 12 работы [1]. Употребляем лемму о «стаканчиках» И. М. Виноградова и соответствующие оценки (см. [1], п. 8). Сформулируем эту лемму и оценки. Пусть $r > 0$ целое; α, β реальные; $0 < \Delta < 0.5$; $\Delta \leq \beta - \alpha \leq 1 - \Delta$.

Тогда существует периодическая реальная функция $\psi(x)$ с периодом 1, удовлетворяющая условиям:

- 1) $\psi(x) = 1$ при $x \in [\alpha + 0.5\Delta, \beta - 0.5\Delta]$;
- 2) $0 \leq \psi(x) \leq 1$ при $x \in [\alpha - 0.5\Delta, \alpha + 0.5\Delta]$ и $x \in [\beta - 0.5\Delta, \beta + 0.5\Delta]$;
- 3) $\psi(x) = 0$ при $x \in [\beta + 0.5\Delta, 1 + \alpha - 0.5\Delta]$;

$$4) \psi(x) = \beta - \alpha + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m e^{2\pi i m x} \quad (m \neq 0). \quad (7.2)$$

¹⁾ В книге Ю. В. Линника «Разложения вероятностных законов» (Л., 1960, с. 263) приведено более простое доказательство этой теоремы. (Прим. ред.).

При этом

$$|\gamma_m| \leq \frac{4}{\pi|m|} \quad \text{при} \quad |m| \leq \frac{1}{\Delta}, \quad (7.3)$$

$$|\gamma_m| < 4c\Delta \quad \text{при} \quad |m| \leq \frac{1}{\Delta}; \quad \beta - \alpha \leq c\Delta, \quad (7.4)$$

$$|\gamma_m| < \frac{4}{\pi|m|} \left(\frac{r}{\pi|m|\Delta} \right)^r \quad \text{при} \quad |m| > \frac{1}{\Delta}. \quad (7.5)$$

Далее, ряд (7.2) можно почленно дифференцировать $r-1$ раз, причем при $v \leq r-1$

$$|\psi^{(v)}(x)| \leq C(r) \Delta^{-r}. \quad (7.6)$$

Будем теперь с помощью сформулированной леммы И. М. Виноградова доказывать равенство

$$\Phi_1(t) \approx 0 \quad \text{при} \quad t \in [-1, -b_0], \quad (7.7)$$

где $b_0 = b/a_0$. Из (7.1) имеем:

$$H_1(z) = \frac{g_1(z) - P_1(z)}{z^4} = \int_{-1}^1 e^{zt} \Phi_1(t) dt. \quad (7.8)$$

$H_1(z)$ — целая функция, и при $x < 0$ и любом $\varepsilon > 0$, согласно (4.9) и определению $g_1(z)$,

$$|g_1(z)| = O(e^{-(b_0+\varepsilon)x}(|z|^3 + 1)). \quad (7.9)$$

Будем считать далее $|x|$ большим; $x < 0$. Тогда

$$H_1(z) = O\left(e^{-(b_0+\varepsilon)x} \frac{1}{|z|+1}\right). \quad (7.10)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно малое фиксированное число; $S(2\varepsilon)$ — сегмент $[-1, -(b_0 + 2\varepsilon)]$. Будем рассматривать точки Лебега t_0 функции $\Phi_1(t)$, внутренние для $S(\varepsilon)$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} |\Phi_1(t) - \Phi_1(t_0)| dt = 0. \quad (7.11)$$

Как известно (см., например, [5], с. 224), почти все точки $[-1, 1]$ будут точками Лебега для $\Phi_1(t)$. Пусть $t_0 \in S(\varepsilon)$ — внутренняя точка сегмента, являющаяся точкой Лебега для $\Phi_1(t)$, и пусть

$$\Phi_1(t_0) \neq 0. \quad (7.12)$$

Приведем это предположение к противоречию. Зададимся малым $\varepsilon_1 > 0$ и выберем $h_0(t_0, \varepsilon_1)$ столь малым, что

$$\frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} |\Phi_1(t) - \Phi_1(t_0)| dt < \varepsilon_1, \quad (7.13)$$

если $0 < h < h_0(t_0, \varepsilon_1)$. В лемме И. М. Виноградова положим $x = t/2$, так что получится функция $\varphi(t)$ с периодом 2. Рассмотрим интеграл

$$\int_{-1}^1 e^{xt} \varphi(t) \Phi_1(t) dt. \quad (7.14)$$

При заданном $x < 0$ будем строить $\varphi(t)$ в зависимости от точки t_0 и значения x , вводя, таким образом, в (7.14) ядро: $\varphi(t) = W(t, t_0, x)$. В (7.13) выберем $h_0(t_0, \varepsilon_1)$, помимо нужного там условия, еще столь малым, что

$$h_0(t_0, \varepsilon_1) < \frac{1}{x^2} \quad (7.15)$$

и интервал интегрирования не выходит из $S(2\varepsilon)$. После этого в лемме И. М. Виноградова положим:

$$r = 20; \Delta = \frac{1}{100} h_0(t_0, \varepsilon_1); \alpha = t_0 - 0.5\Delta; \beta = t_0 + h_0 \quad (h_0 = h_0(t_0, \varepsilon_1)).$$

Согласно (7.13),

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-1}^1 e^{xt} W(t, t_0, x) \Phi_1(t) dt - \int_{-1}^1 e^{xt} W(t, t_0, x) \Phi_1(t_0) dt \right| \leq \\ & \leq \int_{-1}^1 e^{xt} W(t, t_0, x) |\Phi_1(t) - \Phi_1(t_0)| dt \leq 4e^{xt_0} \varepsilon_1 h_0. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Далее, ввиду того что $\int_{-1}^1 W(t, t_0, x) dt = 2(\beta - \alpha)$, имеем

$$\left| \int_{-1}^1 e^{xt} W(t, t_0, x) \Phi_1(t_0) dt \right| > |\Phi_1(t_0)| e^{x(t_0+h_0)} h_0 > \frac{1}{2} |\Phi_1(t_0)| e^{xt_0} h_0, \quad (7.17)$$

так как $e^{xh_0} = 1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right)$.

В сочетании с (7.16) это приводит к выводу о том, что при $h_0 \leq \min(h_1(t_0), 1/x^2)$, где $h_1(t_0)$ зависит только от t_0 , получим:

$$\left| \int_{-1}^1 e^{xt} W(t, t_0, x) \Phi_1(t) dt \right| > \frac{h_0}{4} |\Phi_1(t_0)| e^{xt_0}. \quad (7.18)$$

Теперь рассмотрим разложение

$$W(t, t_0, x) = \beta - \alpha + \sum_m' \gamma_m e^{\pi m t i}. \quad (7.19)$$

Коэффициенты γ_m будут зависеть от t_0 и x . Согласно лемме И. М. Виноградова и выбору $r=20$, имеем:

$$|\gamma_m| \leq c_4 h_0^{-20} |m|^{-21}. \quad (7.20)$$

Далее,

$$\int_{-1}^1 e^{xt} \gamma_m e^{m\pi i t} \Phi_1(t) dt = \gamma_m \int_{-1}^1 \exp(x + \pi m i) t \Phi_1(t) dt = \gamma_m H_1(x + m\pi i).$$

Из (7.10) при $x < 0$ следует:

$$|\gamma_m H_1(x + m\pi i)| \leq \frac{c(\varepsilon) |\gamma_m|}{|m\pi| + 1} \exp(-x(b_0 + \varepsilon))$$

($c(\varepsilon) > 0$ зависит лишь от ε).

8. Согласно лемме И. М. Виноградова,

$$|\gamma_m| < \frac{8}{|m\pi|}, \quad 1 \leq |m| \leq \frac{1}{\Delta} = 100h_0^{-1}.$$

При $|m| > 1/\Delta$ будем использовать (7.20). При $m=0$ получается член

$$(\beta - \alpha) H_1(x) = O(\exp(-x(b_0 + \varepsilon))). \quad (8.1)$$

Собирая эти оценки, находим:

$$\left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m H_1(x + m\pi i) \right| < \exp(-x(b_0 + \varepsilon)) (c_5 + c_6 h_0^{-20}). \quad (8.2)$$

Далее, ряд (7.19) сходится абсолютно и равномерно. Стандартными приемами убеждаемся в законности почленного интегрирования ряда (7.19) в (7.18). Имеем:

$$\int_{-1}^1 e^{xt} W(t, t_0, x) \Phi_1(t) dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m H_1(x + m\pi i).$$

Из (7.18) и (8.2) находим:

$$\exp(-x(b_0 + \varepsilon)) (c_5 + c_6 h_0^{-20}) > \frac{h_0}{4} |\Phi_1(t_0)| e^{xt_0},$$

или

$$|\Phi_1(t_0)| < c_7 h_0^{-21} \exp(-x(b_0 + \varepsilon + t_0)). \quad (8.3)$$

Но $t_0 \in S(2\varepsilon)$, так что $t_0 < -b_0 - 2\varepsilon$ и, ввиду того что $x < 0$, неравенство (8.3) дает:

$$|\Phi_1(t_0)| < c_7 h_0^{-21} \exp(-|x|\varepsilon).$$

Выберем x столь большим, что, согласно (7.15),

$$h_0 = \frac{1}{x^2}.$$

Тогда из (8.4)

$$|\Phi_1(t_0)| < c_7 x^{42} \exp(-|x|\varepsilon).$$

При $x \rightarrow \infty$ получаем $\Phi_1(t_0) = 0$, что противоречит (7.12). Итак, $\Phi_1(t_0) = 0$ во всех точках Лебега $t_0 \in S(2\varepsilon)$ и ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ соотношение (7.7) и лемма 10 доказаны. Мы допустили, что $a_0 = a$. Если $a_0 = b$, то этот случай сводится к предыдущему заменой z на $(-z)$ в формуле (6.1). Этим теорема 2 ч. I полностью доказана.

9. Доказательство теоремы 3 ч. I гораздо более затруднительно, хотя и осуществляется полностью с помощью аппарата работы [1].

Пусть б. д. закон с х. ф. $\varphi(t)$ имеет пуассонов спектр, рациональный справа от α , $\alpha \in (0, a)$, лежащий в $[-b, a]$, так что

$$\ln \varphi(t) = \beta it - \gamma t^2 + \int_{-b}^0 \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dG_1(u) + \int_0^\alpha \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dG_2(u) + \sum_{j=1}^k \lambda_j \left(\exp \left(it \frac{a_j}{q} \mu \right) - 1 \right); \quad (9.1)$$

a_j целые; $\frac{a_1}{q} \mu > \alpha$, $a_1 < a_2 < \dots < a_k$. (Ввиду того что промежуток интегрирования ограничен, можно было брать itu вместо $itu/(1+u^2)$ за счет изменения константы β). Мы можем сделать замену $t \rightarrow qt/\mu$ в (9.1), так что, не нарушая общности, будем просто считать $q = \mu = 1$. В формуле (4.1) будем считать $dG(u) = dG_1(u)$ ($-b \leq u < 0$); $dG(u) = dG_2(u)$ ($0 < u \leq \alpha$); $G(u)$ — кусочно-постоянная неубывающая функция при $u > \alpha$ со скачками $\lambda_j > 0$ в точках a_j ($\mu = 1$).

Вернемся теперь к неравенству (2.2) (лемма 2) и выведем из него важные для дальнейшего следствия. Имеем после указанных выше преобразований (считая $\beta = 0$):

$$\ln \varphi(t) = -\gamma t^2 + \int_{-b}^\alpha \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dG(u) + \sum_{j=1}^k \lambda_j (\exp(it a_j) - 1). \quad (9.2)$$

Пусть Y — случайная величина, отвечающая (9.2); составим выражения (4.3)–(4.8); какой-либо компоненте Y_1 случайной величины Y отвечает $g(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ согласно (4.6). В формуле (2.2) положим $y = 2\pi m$, где m — какое-либо целое число. Тогда

$$\int_{\alpha}^{a_k} e^{xu} \sin^2 \frac{yu}{2} dG(u) = \int_{\alpha}^{a_k} e^{xu} \sin^2 \pi mu dG(u) = 0, \quad (9.3)$$

ибо правее α функция $G(u)$ имеет точки роста только в целых точках a_j . Таким образом,

$$0 \leq u(x, 0) - u(x, 2\pi m) \leq 4\pi \gamma m^2 + 2 \int_{-b}^\alpha e^{xu} \sin^2 \pi mu dG(u). \quad (9.4)$$

Будем считать $x \geq 1$; рассуждая, как в п. 2, получим

$$\int_{-b}^{\alpha} e^{xu} \sin^2 \pi m u dG(u) = O(e^{2x}(x^2 + m^2)),$$

так что (9.4) дает

$$0 \leq u(x, 0) - u(x, 2\pi m) \leq c_3 e^{ax}(x^2 + m^2). \quad (9.5)$$

10. Применим доказанную нами теорему 2 ч. I к закону F с х. ф., отвечающей формуле (9.2). Какой-либо его компоненте Y_1 отвечает целая функция $g(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ согласно (1.6). Имеем, по указанной теореме 2,

$$g(z) = P(z) + z^4 \int_{-b}^{a_k} e^{zt} \Phi(t) dt, \quad (10.1)$$

где $P(z)$ — полином степени ≤ 3 ; $\Phi(u)$ суммируема с квадратом в $[-b, a_k]$.

$$G_0(z) = g(z) - P(z) = u_0(x, y) + iv_0(x, y). \quad (10.2)$$

В силу реальности $\Phi(u)$ из (10.1) непосредственным подсчетом находим:

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= \int_{-b}^{a_k} e^{xt} (x^4 - 6x^2 y^2 + y^4) \cos yt \Phi(t) dt + \\ &+ \int_{-b}^{a_k} e^{xt} (-4x^3 y + 4xy^3) \sin yt \Phi(t) dt. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Далее мы действуем совершенно аналогично пунктам 10 и следующим работы [1]. Поскольку все же будут небольшие отличия в рассуждениях, воспроизведем их в основном. Пусть $\{\gamma_m\}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) — набор реальных чисел при условии

$$|\gamma_m| < \frac{A_1(x)}{(m+1)^{20}}. \quad (10.4)$$

Составим четный ряд Фурье:

$$\Lambda(t, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m \cos 2\pi m t. \quad (10.5)$$

В правой части (10.3) при заданном x будем полагать $y = 2\pi m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), умножать на γ_m и складывать; в силу (10.4) это законно делать под знаком интеграла в (10.3).

Полученный результат обозначим $F(\Lambda, u_0)$. Ввиду (10.4) ряд (10.5) можно не менее 18 раз дифференцировать по t . Простой подсчет дает:

$$F(\Lambda, u_0) = \int_{-b}^{a_k} \frac{\partial^4}{\partial t^4} (e^{xt} \Lambda(t, x)) \Phi(t) dt. \quad (10.6)$$

Далее, формально имеем:

$$F(\Lambda, u_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m u_0(x, 2\pi m). \quad (10.7)$$

Покажем, что ряд (10.7) будет сходящимся (даже абсолютно). Пусть

$$P(z) = \alpha_0 z^3 + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z + \alpha_3.$$

Лемма 11. При целых m и $x \geq 1$

$$|u_0(x, 2\pi m) - u_0(x, 0)| \leq c_9 e^{\alpha x} (x^2 + m^2). \quad (10.8)$$

Доказательство. Имеем из (10.2):

$$u_0(x, y) = u(x, y) + u_1(x, y), \text{ где } u_1(x, y) = \operatorname{Re}(-P(z)). \quad (10.9)$$

При этом

$$u_1(x, y) = -x_0(x^3 - 3xy^2) - x_1(x^2 - y^2) - \alpha_2 x - \alpha_3. \quad (10.10)$$

Далее, из (9.5) находим

$$|u(x, 2\pi m) - u(x, 0)| \leq c_8 e^{\alpha x} (x^2 + m^2) \quad (10.11)$$

и из (10.9) подсчитываем, что

$$|u_1(x, 2\pi m) - u_1(x, 0)| \leq 12 |\alpha_0| x \pi^2 m^2 + 4 |\alpha_1| \pi^2 m^2. \quad (10.12)$$

Вместе с (10.11) это дает при $x \geq 1$ неравенство (10.8).

Таким образом для ряда (10.7) имеем:

$$F(\Lambda, u_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m u_0(x, 2\pi m) = u_0(x, 0) \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m + F_1(\Lambda, u_0), \quad (10.13)$$

где

$$F_1(\Lambda, u_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m [u_0(x, 2\pi m) - u_0(x, 0)]$$

и

$$|F_1(\Lambda, u_0)| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m| |u_0(x, 2\pi m) - u_0(x, 0)|. \quad (10.14)$$

В силу (10.14) и (10.8)

$$|F_1(\Lambda, u_0)| < c_{10} x^2 A_1(x) e^{\alpha x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2}{(m+1)^{20}} = c_{11} x^2 A_1(x) e^{\alpha x}. \quad (10.15)$$

Получившаяся оценка нам будет нужна в дальнейшем.

11. Вернемся к формуле (10. 6). Если бы $\Phi(t)$ была четырежды дифференцируемой функцией t , было бы выгодно для расчетов употреблять в (10. 6) интегрирование по частям. Но в общем случае $\Phi(t)$ лишь измерима и суммируема с квадратом и интегрирование по частям можно было бы делать лишь с привлечением обобщенных функций. Далее, однако, приходится рассуждать о локальных свойствах функций и аппарат обобщенных функций не помог бы. Ввиду этого изберем обходной путь, без интегрирования по частям (10. 6).

Будем рассуждать, как в п. 11 работы [1]. Вводим непрерывную при каждом $x > 0$ функцию $U(t, x)$ аргумента t . Частным решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4} (e^{xt} \Gamma(t, x)) = e^{xt} U(t, x) \quad (11. 1)$$

будет, как нетрудно проверить,

$$\Gamma(t, x) = \frac{1}{6} \int_0^t e^{x(v-t)} (t-v)^3 U(v, x) dv. \quad (11. 2)$$

Пусть $h > 0$ — любое число, такое, что $t + 4h$ и t лежат в сегменте

$$[a_k - 1, a_k].$$

Составим четвертую разность функции $\Phi(t)$:

$$\Delta^4 \Phi(t) = \Phi(t + 4h) - 4\Phi(t + 3h) + 6\Phi(t + 2h) - 4\Phi(t + h) + \Phi(t). \quad (11. 3)$$

Целью дальнейшего является доказательство соотношения

$$\Delta^4 \Phi(t) = 0 \quad (11. 4)$$

почти для всех $t \in [a_k - 1, a_k]$. Это, однако, потребует вспомогательных рассуждений.

Конкретизируем построение $U(v, x)$. Пусть при заданном малом $h > 0$, входящем в (11. 3), выбирается ξ_0 , $0 < \xi_0 \leq h/100$, и $t_0 \in (a_k - 1, a_k)$ таково, что при $j = 0, 1, 2, 3, 4$

$$[t_0 + jh - \xi_0, t_0 + jh + \xi_0] \subset (a_k - 1, a_k). \quad (11. 5)$$

Пусть $W(\xi)$ — непрерывная функция ξ , причем $W(\xi) = 0$ при $|\xi| \geq \xi_0$. Соответственно (11. 3) построим функцию

$$U(v, x, t_0) = W(v - t_0 - 4h) - 4e^{xh} W(v - t_0 - 3h) + \\ + 6e^{2xh} W(v - t_0 - 2h) - 4e^{3xh} W(v - t_0 - h) + e^{4xh} W(v - t_0). \quad (11. 6)$$

Лемма 12. *Функция $\Gamma(t, x)$, определенная равенством (11. 2), где $U(v, x) = U(v, x, t_0)$ (см. (11. 6)), при каждом $x \geq 1$ обладает свойством*

$$\Gamma(m, x) = 0 \quad (11. 7)$$

при любом целом $m \geq 0$.

Доказательство (см. лемму 14 в работе [1]). Из (11.6) видим, что $U(v, x, t_0)$ может отличаться от 0 только в сегментах $|v - t_0 - jh| \leq \xi_0$ ($j=0, 1, 2, 3, 4$), т. е. в силу (11.5) только в $(a_k - 1, a_k)$. Ввиду этого при $t \leq a_k - 1$ имеем:

$$\Gamma(t, x) = \frac{1}{6} \int_0^t e^{x(v-t)} (t-v)^3 U(v, x, t_0) dv = 0. \quad (11.8)$$

Докажем далее, что при $t = a_k$

$$\Gamma(a_k, x) = 0. \quad (11.9)$$

Имеем при $j=0, 1, 2, 3, 4$; $m \geq a_k$

$$\begin{aligned} & \int_0^{a_k} e^{xv} (m-v)^3 W(v - t_0 - jh) dv = \\ & = \exp[x(t_0 + jh)] \int_{-\xi_0}^{\xi_0} e^{x\xi} (m - t_0 - jh - \xi)^3 W(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

ибо $W(\xi) = 0$ при $|\xi| \geq \xi_0$, и

$$[t_0 + jh - \xi_0, t_0 + jh + \xi_0] \subset (a_k - 1, a_k) \text{ при } j=0, 1, 2, 3, 4.$$

Используя (11.6), находим:

$$\begin{aligned} & \int_0^{a_k} e^{xv} (m-v)^3 U(v, x, t_0) dv = \exp(t_0 + 4h)x \times \\ & \times \int_{-\xi_0}^{\xi_0} e^{x\xi} W(\xi) [(m - t_0 - 4h - \xi)^3 - 4(m - t_0 - 3h - \xi)^3 + \\ & + 6(m - t_0 - 2h - \xi)^3 - 4(m - t_0 - h - \xi)^3 + (m - t_0 - \xi)^3] d\xi = 0. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Отсюда видим, что $\Gamma(a_k, x) = 0$; в силу (11.8) имеем $\Gamma(m, x) = 0$ ($m < a_k$). Далее, в силу (11.10) и указанного ранее свойства $U(v, x, t_0)$ имеем $\Gamma(m, x) = 0$ ($m > a_k$), что и доказывает лемму 12.

12. Легко заметить, что функция $\Gamma(t, x)$ может отличаться от 0 лишь в $[a_k - 1, a_k]$. Рассмотрим функцию $\Gamma(t + a_k - 1, x)$, которая может быть отличной от 0 лишь в $[0, 1]$, и, беря только ее значения в $[0, 1]$, периодически продолжим ее с периодом 1. Новую периодическую функцию аргумента t при данном x обозначим $\Gamma^{(1)}(t, x)$. Получаем:

$$\Gamma^{(1)}(t, x) = \Gamma(t, x) \text{ при } t \in [a_k - 1, a_k]. \quad (12.1)$$

Имеем, очевидно,

$$\Gamma^{(1)}(m, x) = 0 \quad (12.2)$$

при любом целом m . Будучи периодической, $\Gamma^{(1)}(t, x)$ уже не может быть отличной от 0 только в $[a_k - 1, a_k]$. Однако дифференциальное уравнение вида (11.4)

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4}(e^{xt}\Gamma^{(1)}(t, x)) = e^{xt}U(t, x, t_0) \quad (12.3)$$

удовлетворяется при $t \in [a_k - 1, a_k]$, ибо там $\Gamma^{(1)}(t, x) = \Gamma(t, x)$, и может не удовлетворяться вне этого сегмента. Впредь будем рассматривать функции $\Gamma^{(1)}(t, x)$ такого типа при $U(v, x) = U(v, x, t_0)$, задаваемых соотношением (11.6). Пусть t_0, h, ξ_0 таковы, что

$$t_0 \pm (4h + \xi_0) \in \left(a_k - \frac{1}{2}, a_k\right) \quad (12.4)$$

(так что $t_0 > a_k - 1/2$). Построим по данному t_0 функцию $U(v, x, t_0)$ согласно (11.6). Тогда

$$U(v, x, t_0) = 0 \quad \text{при } v \leq a_k - \frac{1}{2}, \quad (12.5)$$

так что, согласно (11.2), имеем $\Gamma(t, x) = 0$ при $t \leq a_k - 1/2$ и

$$\Gamma^{(1)}(t, x) = 0, \quad t \in \left[m, m + \frac{1}{2}\right], \quad (12.6)$$

для любого целого m .

Введем теперь основную функцию

$$\Lambda(t, x) = \Gamma^{(1)}(t, x) + \Gamma^{(1)}(1 - t, x). \quad (12.7)$$

Это — четная функция аргумента t при каждом x . Далее в силу (12.2)

$$\Lambda(m, x) = 0 \quad (12.8)$$

при любом целом m . Рассмотрим подробнее поведение $\Lambda(t, x)$ в основном сегменте $[a_k - 1, a_k]$. Имеем, согласно (12.6),

$$\Gamma^{(1)}(1 - t, x) = \Gamma^{(1)}(a_k - t, x) = 0 \quad \text{при } t \in \left[a_k - \frac{1}{2}, a_k\right].$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \Lambda(t, x) &= \Gamma^{(1)}(t, x) \quad \text{при } t \in \left[a_k - \frac{1}{2}, a_k\right], \\ \Lambda(t, x) &= \Gamma^{(1)}(1 - t, x) \quad \text{при } t \in \left[a_k - 1, a_k - \frac{1}{2}\right]. \end{aligned} \quad (12.9)$$

13. Конкретизируем теперь выбор $W(\xi)$ в виде «стаканчика» И. М. Виноградова. При заданном t_0 будем считать $\xi_0 = \xi_0(t_0, x)$ заданной функцией x . В лемме И. М. Виноградова (см. п. 7) возьмем $r = 20$; $\Delta = \xi_0/100$; $\alpha = 0.5\Delta$; $\beta = \xi_0 - 0.5\Delta$. Далее, на основании (7.6) при $v \leq 18$

$$|W^{(v)}(\xi)| \leq c_{12}\xi_0^{-18}.$$

При заданном t_0 ξ_0 зависит от x . Полагая

$$\xi_0^{-18} = A_0(x), \quad (13.1)$$

найдем:

$$|W^{(\nu)}(\xi)| \leq c_{12} A_0(x), \quad (\nu \leq 18). \quad (13.2)$$

Нам нужно теперь подробнее рассмотреть действие оператора $\frac{\partial^4}{\partial t^4}$ на функцию $e^{xt} \Lambda(t, x)$. Сперва рассмотрим сегмент $t \in [-b, a_k - 1]$. Пусть $t \in [m, m+1] \subset [-b, a_k - 1]$. Тогда $\Lambda(t, x) = \Lambda(t + a_k - 1 - m, x)$. Если $t \in [m + 1/2, m+1]$, то, согласно (12.9),

$$\begin{aligned} \Lambda(t, x) &= \Gamma^{(1)}(t, x) = \Gamma(t + a_k - 1 - m, x) = \\ &= \frac{1}{6} \int_0^{t+a_k-1-m} \exp[x(v - (t + a_k - 1 - m))] (t + a_k - 1 - m - v)^3 U(v, x, t_0) dv. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Если $t \in [m, m + 1/2]$, то

$$\begin{aligned} \Lambda(t, x) &= \Gamma^{(1)}(1 - t, x) = \Gamma(a_k + m - t, x) = \\ &= \frac{1}{6} \int_0^{a_k+m-t} \exp[x(v - (a_k + m - t))] (a_k + m - t - v)^3 \cdot U(v, t_0, x) dv. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Заметим, что формулы (13.3) и (13.4) годны и в случае $m = a_k - 1$, $t \in [a_k - 1, a_k]$.

Л е м м а 13.

$$\left| \frac{\partial^4}{\partial t^4} (e^{xt} \Lambda(t, x)) \right| < c_{13} x^4 \exp(x(t + 4h)). \quad (13.5)$$

Доказательство. $\frac{\partial^4}{\partial t^4} (e^{xt} \Lambda(t, x))$ состоит из ограниченного числа членов вида $a e^{xt} x^\nu \frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu} \Lambda(t, x)$; $0 \leq \nu \leq 4$; $0 \leq \mu \leq 4$. Согласно (11.6), (13.3) и (13.4), $\frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu} \Lambda(t, x)$ состоит из ограниченного числа членов, получаемых от дифференцирования. При этом члены, содержащие $\exp[x(v - (t + a_k - 1 - m))]$ и $\exp[x(v - (a_k + m - t))]$, по модулю меньше 1, а $|U(v, x, t_0)| \leq c_{14} e^{4xh}$ (по (11.6)). Это и доказывает (13.5).

Мы будем пользоваться (13.5) при оценке одной части интеграла (10.6). Именно, из (13.5) заключаем:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-b}^{a_k-1} \frac{\partial^4}{\partial t^4} (e^{xt} \Lambda(t, x)) \Phi(t) dt \right| < \\ &< c_{13} x^4 \exp(x(a_k - 1 + 4h)) \int_{-b}^{a_k-1} |\Phi(t)| dt \leq c_{15} x^4 \exp[x(a_k - 1 + 4h)]. \end{aligned}$$

Таким образом (см. (10.6)),

$$F(\Lambda, u_0) = \int_{a_k-1}^{a_k} \frac{\partial^4}{\partial t^4} (e^{xt} \Lambda(t, x)) \Phi(t) dt + Bx^4 \exp[(a_k - 1 + 4h)x], \quad (13.6)$$

где B — ограниченная величина.

Теперь обратимся к основному сегменту $[a_k - 1, a_k]$. Имеем: при $t \in [a_k - 1/2, a_k]$ $\Lambda(t, x) = \Gamma^{(1)}(t, x)$ согласно (12.9) и, по (12.3),

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4} (e^{xt} \Lambda(t, x)) = e^{xt} U(t, x, t_0). \quad (13.7)$$

Теперь обратимся и к значениям $t \in [a_k - 1, a_k - 1/2]$. Для этих значений имеем:

$$\begin{aligned} \Lambda(t, x) &= \Gamma^{(1)}(1 - t, x) = \Gamma^{(1)}(-t, x) = \Gamma(2a_k - 1 - t, x) = \\ &= \frac{1}{6} \int_0^{2a_k-1-t} \exp[x(v - (2a_k - 1 - t))] (2a_k - 1 - t - v)^3 U(v, x, t_0) dv. \end{aligned}$$

Мы должны получить оценку для $\frac{\partial^4}{\partial t^4} (e^{xt} \Lambda(t, x))$. Применяя рассуждения, подобные тем, какие использовались для получения оценки (13.5), находим:

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4} (e^{xt} \Lambda(t, x)) < c_{15} x^4 \exp(x(t + 4h)). \quad (13.8)$$

Как явствует из предыдущего (см. (13.2)), периодическая функция $\Lambda(t, x)$ при каждом $x \geq 1$ дифференцируема по t по крайней мере 18 раз. При этом важно отметить, что при условии (12.4)

$$\Lambda_f^{(v)}(m, x) = 0 \quad (13.9)$$

для всех целых m и $v \leq 18$ (даже вообще для всех v , ибо целые числа m находятся в интервале, где $\Lambda(t, x) = 0$). Найдем оценку для производных $\Lambda(t, x)$. Достаточно оценить производные $\Gamma^{(1)}(t, x)$.

Лемма 14.

$$\left| \frac{\partial^v}{\partial t^v} \Gamma^{(1)}(t, x) \right| < c_{16} x^{18} A_0(x) e^{4hx} \quad (13.10)$$

при $0 \leq v \leq 18$.

Доказательство. $\Gamma^{(1)}(t, x)$ — периодическая функция, и потому можно считать $t \in [a_k - 1, a_k]$. Тогда

$$\Gamma^{(1)}(t, x) = \Gamma(t, x) = \frac{1}{6} \int_0^t e^{x(t-v)} (t-v)^3 U(v, x, t_0) dv.$$

По построению $U(v, x, t_0)$ имеем $\Gamma(t, x) = 0$ при $0 \leq t \leq t_0 - \xi_0$; и $\Gamma(t, x) = 0$ при $t_0 + 4h + \xi_0 \leq t \leq a_k$. Далее из выражения для $\Gamma(t, x)$, принимая во внимание (13.2), путем непосредственного

дифференцирования и оценивания $U(v, x, t_0)$ с использованием (11.6) получаем неравенство (13.10).

14. Функция $\Gamma^{(1)}(t, x)$, будучи периодической и дифференцируемой не менее 18 раз, разлагается в ряд Фурье:

$$\Gamma^{(1)}(t, x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos 2\pi m t + b_m \sin 2\pi m t. \quad (14.1)$$

Лемма 15.

$$|a_m| + |b_m| < \frac{c_{17} x^{18} A_0(x) e^{4hx}}{(m+1)^{16}}. \quad (14.2)$$

Доказательство. При $t=0$ и $t=1$ $\frac{d^v}{dt^v} \Gamma^{(1)}(t, x) = 0$ для всех целых $v \geq 0$. При $0 \leq v \leq 18$ и $t \in [0, 1]$ имеем оценку (13.10). На основании этого (14.2) следует из известных теорем теории рядов Фурье (см., например, [6], с. 605—606).

Теперь мы найдем оценки коэффициентов Фурье для основной функции

$$\Lambda(t, x) = \Gamma^{(1)}(t, x) + \Gamma^{(1)}(1-t, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m \cos 2\pi m t.$$

Очевидно, $\gamma_m = 2a_m$ (см. (14.1)); из (14.2) находим:

$$|\gamma_m| < \frac{c_{18} x^{18} A_0(x) e^{4hx}}{(m+1)^{16}}. \quad (14.3)$$

Далее, весьма важно отметить, что в силу

$$\Lambda(0, x) = \Lambda(1, x) = 0 \quad (14.4)$$

имеем:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m = \frac{\Lambda(0, x) + \Lambda(1, x)}{2} = 0. \quad (14.5)$$

Вернемся к формулам (10.6) и (10.7):

$$F(\Lambda, u_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m u_0(x, 2\pi m) = \int_{-b}^{a_k} \frac{\partial^4}{\partial t^4} (e^{x t} \Lambda(t, x)) \Phi(t) dt.$$

Далее, из (14.5) и (10.13) находим

$$F(\Lambda, u_0) = F_1(\Lambda, u_0), \quad (14.6)$$

и потому из (10.8), (10.14) и (14.3) получаем:

$$|F(\Lambda, u_0)| < c_{19} x^{20} A_0(x) \exp[x(\alpha + 4h)]. \quad (14.7)$$

Заметим здесь, что вместо $(m+1)^{20}$ в знаменателе (10.4) в (14.3) появляется $(m+1)^{16}$, но, как можно сразу видеть из вывода (10.15), это совершенно несущественно.

Обратимся теперь к формуле (13.6), выделяя из нее первый член

$$I = \int_{a_{k-1}}^{a_k} \frac{\partial^4}{\partial t^4} (e^{xt} \Lambda(t, x)) \Phi(t) dt. \quad (14.8)$$

Положим

$$I_1 = \int_{a_{k-1/2}}^{a_k} \frac{\partial^4}{\partial t^4} (e^{xt} \Lambda(t, x)) \Phi(t) dt,$$

$$I_2 = \int_{a_{k-1}}^{a_{k-1/2}} \frac{\partial^4}{\partial t^4} (e^{xt} \Lambda(t, x)) \Phi(t) dt,$$

так что $I = I_1 + I_2$. При этом в силу (13.8)

$$|I_2| < c_{20} x^4 \exp \left[x \left(a_k - \frac{1}{2} + 4h \right) \right]. \quad (14.9)$$

Теперь обратимся к I_1 . В силу (13.7) имеем:

$$I_1 = \int_{a_{k-1/2}}^{a_k} e^{xv} U(v, x, t_0) \Phi(v) dv. \quad (14.10)$$

Функция $U(v, x, t_0)$ выражается формулой (11.6). Имеем:

$$\begin{aligned} & \int_{a_{k-1/2}}^{a_k} e^{(4-j)hx} W(v - t_0 - jh) e^{xv} \Phi(v) dv = \\ &= \int_{t_0 + jh - \xi_0}^{t_0 + jh + \xi_0} \exp [x(v + (4-j)h)] W(v - t_0 - jh) \Phi(v) dv = \\ &= \exp [(t_0 + 4h)x] \int_{-\xi_0}^{\xi_0} e^{\xi x} W(\xi) \Phi(t_0 + jh + \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (14.11)$$

В силу (11.6) имеем из (14.10) и (14.11):

$$I_1 = \exp [(t_0 + 4h)x] \int_{-\xi_0}^{\xi_0} e^{\xi x} W(\xi) F(t_0 + \xi) d\xi, \quad (14.12)$$

где

$$F(t_0 + \xi) = \Delta^4 \Phi(t_0 + \xi) \quad (14.13)$$

при заданном значении h (см. (11.3)).

Впредь будем считать, что

$$t_0 \pm 5h \in \left[a_k - \frac{1}{2}, a_k \right]. \quad (14.14)$$

Наложим еще дополнительные условия на t_0 . Рассмотрим при заданном h измеримую функцию

$$F(\tau) = \Delta^4 \Phi(\tau). \quad (14.15)$$

В сегменте $\tau \in \left[a_k - \frac{1}{2} + 4h + \xi_0, a_k - 4h - \xi_0 \right]$ функция $F(\tau)$ будет суммируемой, так что почти все точки τ этого сегмента будут точками Лебега функции $F(\tau)$ (см. [5], с. 224). Мы будем требовать, чтобы t_0 была одной из точек Лебега, так что

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} \int_0^u |F(t_0) - F(t_0 + \xi)| d\xi = 0.$$

15. Перейдем к доказательству одной из основных лемм.

Лемма 16. Пусть $(a, b) \subset [a_k - 1/2, a_k]$. При всяком заданном достаточно малом $h \leq \delta_0(a, b)$ почти для всех точек $t_0 \in (a, b)$ будем иметь

$$F(t_0) = 0. \quad (15.1)$$

Доказательство. Пусть дан интервал $(a, b) \subset [a_k - 1/2, a_k]$ и h столь мало, что сегмент S

$$[a - 5h, b + 5h] \subset \left[a_k - \frac{1}{2}, a_k \right]. \quad (15.2)$$

Фиксируем какое-либо из таких $h > 0$ и рассмотрим соответствующую функцию $F(\tau)$ (см. (14.15)). Пусть $t_0 \in S$ — точка Лебега функции $F(t)$. Предположим, что

$$F(t_0) \neq 0, \quad (15.3)$$

и придем к противоречию.

Зададим $\varepsilon > 0$ (которое фиксируем в дальнейшем) и выберем $u_0 = u_0(t_0, \varepsilon)$ столь малым, что

$$\frac{1}{u} \int_0^u |F(t_0 + \xi) - F(t_0)| d\xi < \varepsilon \quad (15.4)$$

при $0 < u < u_0(t_0, \varepsilon)$.

Для определения «стаканчика» И. М. Виноградова $W(\xi)$ (см. п. 13) при заданном $x \geq 1$ положим:

$$\xi_0 = \min \left(u_0(t_0, \varepsilon), \frac{1}{x^2} \right). \quad (15.5)$$

Займемся оценкой снизу интеграла I_1 (см. (14.12)). Согласно (15.4),

$$\begin{aligned} \exp[(t_0 + 4h)x] \int_{-\xi_0}^{\xi_0} e^{\xi x} W(\xi) |F(t_0 + \xi) - F(t_0)| d\xi &\leq \\ &\leq 2\varepsilon \xi_0 \exp[(t_0 + 4h)x], \end{aligned} \quad (15.6)$$

ибо $e^{\xi x} \leq e^{1/x} = 1 + O(1/x)$ в силу (15.5) и $0 \leq W(\xi) \leq 1$. Далее, ввиду того что

$$\int_{-\xi_0}^{\xi_0} W(\xi) d\xi > \frac{\xi_0}{2}, \quad (15.7)$$

имеем:

$$\exp[(t_0 + 4h)x] \left| \int_{-\xi_0}^{\xi_0} e^{\xi x} W(\xi) F(t_0) d\xi \right| > \frac{1}{2} \xi_0 F(t_0) \exp[(t_0 + 4h)x]. \quad (15.8)$$

Сравнивая (14.12), (15.3), (15.6) и (15.8), найдем, что при достаточно малом $\varepsilon = \varepsilon(t_0)$ (не зависящем от x)

$$|I_1| > \frac{\xi_0}{4} |F(t_0)| \exp[(t_0 + 4h)x]. \quad (15.9)$$

Далее, учитывая (13.6) и (14.9), находим из (15.9):

$$|F(\Lambda, u_0)| > \frac{\xi_0}{4} |F(t_0)| \exp[(t_0 + 4h)x] + Bx^4 \times \\ \times \exp\left[\left(a_k - \frac{1}{2} + 4h\right)x\right] \quad (15.10)$$

(как и ранее, B — ограниченное число, не всегда одно и то же). Мы имеем: $t_0 \in [a_k - 1/2 + 5h, a_k - 5h]$. Выберем x столь большим, чтобы в соответствии с (15.5)

$$\xi_0 = \frac{1}{x^2}. \quad (15.11)$$

Тогда при $x > x_0 > 1$ из (15.10) получаем:

$$|F(\Lambda, u_0)| > \frac{1}{8} |F(t_0)| x^{-2} \exp[(t_0 + 4h)x]. \quad (15.12)$$

С другой стороны, оценим $|F(\Lambda, u_0)|$ сверху. В силу (14.7) имеем $|F(\Lambda, u_0)| < c_{19} x^{20} A_0(x) \exp[(\alpha + 4h)x]$, где, согласно (13.1) и (15.11), $A_0(x) = \xi_0^{-18} = x^{36}$. Таким образом,

$$|F(\Lambda, u_0)| < c_{19} x^{56} \exp[(\alpha + 4h)x] \quad (15.13)$$

при $x > x_0$, где ²⁾ $\alpha \leq a_1 \leq a_k - 1$. Сопоставляя (15.13) с (15.12), при $x \rightarrow \infty$ получаем $F(t_0) = 0$, что противоречит (15.3) и доказывает лемму.

16. Полученные результаты означают, что если $(a, b) \subset [a_k - 1/2, a_k]$, то для всякого заданного $h < h_0(a, b)$ для почти всех $\tau \in (a, b)$ имеем: $F(\tau) = \Delta^4 \Phi(\tau) = 0$. Отсюда следует, что почти для всех $t_0 \in [a_k - 1/2, a_k]$ $\Phi^{(3)}(t_0) = P_3(t_0)$, где $P_3(t_0)$ — полином степени ≤ 3 . Подробнее доказательство этого утверждения см. в работе [1] (п. 18, лемма 20; вместо сегмента $[a_k - 1/2, a_k]$ там речь

²⁾ Предполагается, что $k > 1$. О случае $k=1$ сказано ниже. (Прим. ред.).

идет о сегменте $[1/2, 1]$, что, разумеется, несущественно). Положим $P_3(t_0) = \alpha_0 t^3 + \alpha_1 t^2 + \alpha_2 t + \alpha_3$. Вернемся к п. 10 (формулы (10.1) и (10.2)). Положим:

$$I_1(z) = \int_{a_k-1/2}^{a_k} e^{zt} (\alpha_0 t^3 + \alpha_1 t^2 + \alpha_2 t + \alpha_3) dt, \quad (16.1)$$

$$I_2 = \int_{-b}^{a_k-1/2} e^{zt} \Phi(t) dt. \quad (16.2)$$

Имеем:

$$G_0(z) = z^4 I_1(z) + z^4 I_2(z). \quad (16.3)$$

Займемся $z^4 I_1(z)$. Прямым вычислением находим:

$$\begin{aligned} z^4 I_1(z) &= \exp[a_k z] (\beta_0 z^3 + \beta_1 z^2 + \beta_2 z + \beta_3) + \\ &+ \exp\left[\left(a_k - \frac{1}{2}\right)z\right] (\gamma_0 z^3 + \gamma_1 z^2 + \gamma_2 z + \gamma_3) \end{aligned}$$

(β_i, γ_i — реальные константы).

Лемма 17.

$$\beta_0 = \beta_1 = 0.$$

Доказательство. Из (16.2) выводим:

$$|z^4 I_2(z)| = B |z|^4 \exp\left[\left(a_k - \frac{1}{2}\right)x\right].$$

Далее, имеем: $z^4 I_1(z) = \exp[a_k z] (\beta_0 z^3 + \beta_1 z^2 + \beta_2 z + \beta_3) + B |z|^3 \times \times \exp[(a_k - 1/2)x]$. Таким образом,

$$G_0(z) = \exp[a_k z] (\beta_0 z^3 + \beta_1 z^2 + \beta_2 z + \beta_3) + B |z|^4 \exp\left[\left(a_k - \frac{1}{2}\right)x\right].$$

Используя (9.5), находим:

$$u_0(x, 0) = \exp[a_k x] (\beta_0 x^3 + \beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3) + B x^4 \exp\left[\left(a_k - \frac{1}{2}\right)x\right],$$

$$u_0(x, 2\pi m) = \exp[a_k x] (\beta_0 (x^3 - 12x\pi^2 m^2) +$$

$$+ \beta_1 (x^2 - 4\pi^2 m^2) + \beta_2 x + \beta_3) + B |z|^4 \exp\left[\left(a_k - \frac{1}{2}\right)x\right].$$

В силу (10.8) при $x \geq 1$

$$u_0(x, 0) - u_0(x, 2\pi m) = \exp[a_k x] \times$$

$$\times (12\beta_0 m^2 \pi^2 x + \beta_1 4\pi^2 m^2) + B |z|^4 \exp\left[\left(a_k - \frac{1}{2}\right)x\right] = B e^{ax} (x^2 + m^2),$$

откуда при $x \rightarrow \infty$ заключаем, что $\beta_0 = 0$ и $\beta_1 = 0$.

17. Переименуем β_3 в α_k , β_2 в β_k соответственно индексу k числа a_k . Из (16.3) имеем:

$$G_0(z) = \exp[a_k z] (\alpha_k + \beta_k z) + \exp\left[\left(a_k - \frac{1}{2}\right)z\right] \times \\ \times (\gamma_0 z^3 + \gamma_1 z^2 + \gamma_2 z + \gamma_3) + z^4 \int_{-b}^{a_k - 1/2} e^{zt} \Phi(t) dt. \quad (17.1)$$

Лемма 18. Существует полином $Q(t)$ степени ≤ 3 , такой, что

$$z^4 \int_0^{a_k - 1/2} e^{zt} Q(t) dt = \exp\left[\left(a_k - \frac{1}{2}\right)z\right] (\gamma_0 z^3 + \gamma_1 z^2 + \gamma_2 z + \gamma_3) + \gamma_4. \quad (17.2)$$

Подробное доказательство см. в работе [1] (п. 20, лемма 22; там берется сегмент $[0, 1/2]$ вместо $[0, a_k - 1/2]$, что несущественно). Положим

$$\Phi_1(t) = \Phi(t) + Q(t); \quad t \geq 0; \quad \Phi_1(t) = \Phi(t); \quad t < 0. \quad (17.3)$$

Имеем из (17.1)—(17.3):

$$G_1(z) = G_0(z) - \exp[a_k z] (\alpha_k + \beta_k z) - \gamma_4 = z^4 \int_{-b}^{a_k - 1/2} e^{zt} \Phi_1(t) dt. \quad (17.4)$$

Здесь $G_1(z)$ — целая функция, ведущая себя совершенно так же, как $G_0(z)$, в смысле интересующего нас поведения ее реальной части. Если $u_2(x, y) = \operatorname{Re} [\exp[a_k z] (\alpha_k + \beta_k z) - \gamma_4]$, то легко подсчитать, что $u_2(x, 0) - u_2(x, 2\pi m) = 0$ для целых m . Ввиду этого, полагая $G_1(z) = u_1(x, y) + i v_1(x, y)$, находим из (10.8):

$$|u_1(x, 2\pi m) - u_1(x, 0)| < c_9 e^{ax} (x^2 + m^2). \quad (17.5)$$

Поэтому мы можем действовать с помощью формулы (17.4), как и ранее.

При подходящей $\Lambda(t, x)$, периодической по t при каждом x , с периодом 1, четной и имеющей достаточно быстро сходящийся ряд Фурье, составляем, подобно (10.6), равенство

$$F(\Lambda, u_1) = \int_{-b}^{a_k - 1/2} \frac{\partial^4}{\partial t^4} (e^{xt} \Lambda(t, x)) \Phi_1(t) dt. \quad (17.6)$$

По формуле (11.6) составляем функцию $U(v, x, t_0)$, где

$$t_0 \pm 5h \in \left[a_k - 1; a_k - \frac{1}{2}\right]$$

и

$$\Gamma_1(t, x) = \frac{1}{6} \int_0^t e^{x(v-t)} (t-v)^3 U(v, x, t_0) dv. \quad (17.7)$$

Тогда получим $\Gamma_1(a_k - 1, x) = \Gamma_1(a_k, x) = 0$ (см. п. 11), и вообще $\Gamma_1(n, x) = 0$ при любом целом $n \geq 0$.

Вводим периодическую функцию $\Gamma_1^{(1)}(t, x)$, которая совпадает с $\Gamma_1(t, x)$ при любом x на сегменте $[a_k - 1, a_k]$ и далее продолжается периодически. Имеем $\Gamma_1^{(1)}(n, x) = 0$ при любом целом n , и каждое целое число n окружено интервалом, где $\Gamma_1^{(1)}(t, x) = 0$. Далее, $\Gamma_1^{(1)}(t, \lambda) = 0$ при $t \in [t_0 + 4h + \xi_0, a_k]$, так как оно не изменяется на этом сегменте. Составим, как в (12.7), основную функцию

$$\Lambda(t, x) = \Gamma_1^{(1)}(t, x) + \Gamma_1^{(1)}(1 - t, x).$$

Имеем: $\Lambda(t, x) = \Gamma_1^{(1)}(t, x) = \Gamma_1(t, x)$ при $t \in [a_k - 1, a_k - 1/2]$, ибо там $\Gamma_1^{(1)}(1 - t, x) = 0$. Это сильно облегчает дело. Из соотношения $\Lambda(t, x) = \Gamma_1(t, x)$ при $t \in [a_k - 1, a_k - 1/2]$ и (17.7) находим

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4} (e^{xt} \Lambda(t, x)) = \frac{\partial^4}{\partial t^4} (e^{xt} \Gamma_1(t, x)) = e^{xt} U(t, x, t_0),$$

откуда

$$F(\Lambda, u_1) = \int_{-b}^{a_k - 1/2} e^{xv} U(v, x, t_0) \Phi_1(v) dv.$$

Отсюда, как и ранее, приходим к выводу, что при любом $(a, b) \subset [a_k - 1, a_k - 1/2]$ и $h \leq \delta_0(a, b)$ заданном почти для всех $t \in (a, b)$

$$\Delta^4 \Phi_1(t) = 0.$$

Но $\Phi_1(t) = \Phi(t) + Q(t)$ при $t \in (a, b)$, где $Q(t)$ — кубический полином, $\Delta^4 Q(t) = 0$, так что $\Delta^4 \Phi(t) \approx 0$ при $t \in (a, b)$; $h \leq h_0(a, b)$. Отсюда, как и ранее, находим: $\Phi(t) \approx P_3(t)$ (кубический полином) при $t \in [a_k - 1, a_k - 1/2]$.

18. Используя (17.4), находим непосредственно:

$$G_1(z) = \exp \left[\left(a_k - \frac{1}{2} \right) z \right] (\gamma_0 z^3 + \gamma_1 z^2 + \gamma_2 z + \gamma_3) + \\ + \exp [(a_k - 1) z] (\delta_0 z^3 + \delta_1 z^2 + \delta_2 z + \delta_3) + z^4 \int_{-b}^{a_k - 1} e^{zt} \Phi_1(t) dt \quad (18.1)$$

(γ_i, δ_i — константы, не везде одни и те же).

Далее, как и в п. 17, вводим кубический полином $Q_1(t)$, такой, что

$$z^4 \int_0^{a_k - 1} e^{zt} Q_1(t) dt = \exp [(a_k - 1) z] (\delta_0 z^3 + \delta_1 z^2 + \delta_2 z + \delta_3) + \delta_4. \quad (18.2)$$

Имеем, таким образом,

$$G_1(z) = \exp \left[\left(a_k - \frac{1}{2} \right) z \right] (\gamma_0 z^3 + \gamma_1 z^2 + \gamma_2 z + \gamma_3) - \delta_4 + \\ + z^4 \int_{-b}^{a_k-1} e^{zt} \Phi_2(t) dt, \quad (18.3)$$

где $\Phi_2(t) = \Phi_1(t) + Q_1(t)$ ($t \geq 0$); $\Phi_2(t) = \Phi(t)$ ($t < 0$).

Лемма 19. В формуле (18.3)

$$\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0.$$

Доказательство. Из (18.3) имеем при $x \geq 1$:

$$G_1(z) = \exp \left[\left(a_k - \frac{1}{2} \right) z \right] (\gamma_0 z^3 + \gamma_1 z^2 + \gamma_2 z + \gamma_3) + B |z|^4 e^{x(a_k-1)}.$$

Полагая $y = (4m+2)\pi$ (m — целое число), находим:

$$u_1(x, 0) = \exp \left[\left(a_k - \frac{1}{2} \right) x \right] (\gamma_0 x^3 + \gamma_1 x^2 + \gamma_2 x + \gamma_3) + B x^4 e^{(a_k-1)x}; \\ u_1(x, (4m+2)\pi) = -\exp \left[\left(a_k - \frac{1}{2} \right) x \right] (\gamma_0 (x^3 - 3x(4m+2)^2 \pi^2) + \\ + \gamma_1 (x^2 - (4m+2)^2 \pi^2) + \gamma_2 x + \gamma_3) + B |z|^4 e^{x(a_k-1)}.$$

Из (17.5) при $x \rightarrow \infty$ находим $\gamma_0 = 0$, затем $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 0$. Таким образом, (18.3) превращается в соотношение

$$G_1(z) + \delta_4 = z^4 \int_{-b}^{a_k-1} e^{zt} \Phi_2(t) dt.$$

Полагая $G_1(z) + \delta_4 = G_2(z) = u_2(x, y) + i v_2(x, y)$, получим, как в (10.8) и (17.5),

$$|u_2(x, 2\pi m) - u_2(x, 0)| < c_9 e^{\alpha x} (x^2 + m^2),$$

и можем осуществить такие же рассуждения, какие были ранее, с заменой числа a_k на число a_{k-1} . Рассуждая последовательно таким же образом, придем наконец к формуле

$$G_0(z) = \sum_{n=1}^{a_k} \exp(nz) (\alpha_n + \beta_n z) + z^4 \int_{-b}^{\alpha} e^{zt} \Phi_0(t) dt,$$

где $\Phi_0(t)$ — функция, суммируемая с квадратом в $[-b, \alpha]$. При этом $a_1 > \alpha$. Надо заметить, что для сегмента $[\alpha, a_1]$ предыдущие рассуждения, разумеется, будут проходить лишь при $t_0 > \alpha$.

19. Из (10.9) находим

$$g(z) = P_3(z) + \sum_{n=1}^{a_k} \exp(nz) (\alpha_n + \beta_n z) + z^4 \int_{-b}^{\alpha} e^{\pi t} \Phi_0(t) dt, \quad (19.1)$$

где $P_3(z)$ — полином степени ≤ 3 .

Теорема 3 ч. I доказана. Мы докажем еще, что $\alpha_{a_k} \geq 0$, $\beta_{a_k} = 0$. Для этого заметим, что если $g(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то

$$u(x, 0) - u(x, y) \geq 0 \quad (19.2)$$

при всех y . Из (19.1) имеем при $x \geq 1$:

$$u(x, 0) - u(x, y) = e^{a_k x} (\alpha_{a_k} - \beta_{a_k} x) - \alpha_{a_k} e^{a_k x} \cos a_k y - \beta_{a_k} e^{a_k x} (x \cos a_k y - y \sin a_k y) + O(|z|^3 e^{(a_k-1)x}). \quad (19.3)$$

Пусть $\beta_{a_k} \neq 0$. Если $\beta_{a_k} > 0$, то при достаточно большом целом x и $y = 2\pi x^2 - \pi/2a_k$ неравенство (19.2) будет нарушено. Если $\beta_{a_k} < 0$, то при таком же x и $y = 2\pi x^2 + \pi/2a_k$ неравенство (19.2) также нарушится. Таким образом, $\beta_{a_k} = 0$ и (19.3) переходит в соотношение

$$u(x, 0) - u(x, y) = 2\alpha_{a_k} e^{a_k x} \sin^2 \frac{a_k y}{2} + B|z|^3 e^{(a_k-1)x},$$

откуда ясно, что для выполнения (19.2) необходимо условие $\alpha_{a_k} \geq 0$.

20. Мы доказали, таким образом, теорему 3 ч. I. Если в формуле (0.11) ч. I заменим t на $-t$, то получим б. д. закон со спектром, рациональным левее $(-\alpha)$, и мы можем сформулировать следующую теорему.

Т е о р е м а 3'. Пусть б. д. закон F имеет пуассонов спектр, ограниченный и рациональный левее точки $-\beta \leq 0$, так что его х. ф. имеет вид

$$\begin{aligned} \ln \varphi(t) = & \beta_0 i t - \gamma t^2 + \sum_{j=1}^m \lambda'_j \left(\exp \left(-\frac{i t a'_j}{q'} \nu \right) - 1 \right) + \\ & + \int_{-\beta}^0 \left(e^{i t u} - 1 - \frac{i t u}{1+u^2} \right) dG_1(u) + \int_0^a \left(e^{i t u} - 1 - \frac{i t u}{1+u^2} \right) dG_2(u), \end{aligned} \quad (20.1)$$

где $\frac{a'_j}{q'} > \beta$; a'_j , q' целые; $\nu \geq 0$; $\beta \geq 0$; $a \geq 0$; $G_1(u)$, $G_2(u)$ — неубывающие функции с обычными условиями. Тогда всем его компонентам отвечают х. ф. вида

$$\begin{aligned} \ln \varphi_1(t) = & P_3(it) + t^4 \int_{-\beta}^a e^{i t u} \Phi(u) du + \\ & + \sum_{n=1}^{a'_m} (\alpha'_n + \beta'_n i t) \left(\exp \left(-\frac{i t n \nu}{q'} \right) - 1 \right), \end{aligned} \quad (20.2)$$

где $P_3(z) = \gamma_0 z^3 + \gamma_1 z^2 + \gamma_2 z + \gamma_3$; $\Phi(t)$ — реальная суммируемая с квадратом функция; $\alpha'_{a'_m} \geq 0$, $\beta'_{a'_m} = 0$.

Если $\alpha = \beta = 0$ и весь спектр F рационален, то всем компонентам отвечают х. ф. вида

$$\begin{aligned} \ln \varphi_1(t) = & \sum_{n=1}^{a_k} (\alpha_n + \beta_n i t) \left(\exp\left(\frac{itn}{q}\mu\right) - 1 \right) + \\ & + \sum_{n=1}^{a'_{k'}} (\alpha'_n + \beta'_n i t) \left(\exp\left(-\frac{itn}{q'}\nu\right) - 1 \right) + P_3(it), \end{aligned} \quad (20.3)$$

где $\mu \geq 0$; $\nu \geq 0$; $\alpha_{a_k} \geq 0$, $\alpha'_{a'_{k'}} \geq 0$; $\beta_{a_k} = \beta'_{a'_{k'}} = 0$.

Разумеется, можно, не нарушая общности, считать $q' = q$, но в дальнейшем нам будет удобнее допускать их различие. Докажем еще, что $\gamma_0 = \gamma_3 = 0$; $\gamma_1 \geq 0$, так что

$$P_3(it) = -\gamma_1 t^2 + \gamma_2 it. \quad (20.4)$$

Для этого положим $it\mu/q = z$, так что получим из (20.3):

$$g(z) = \ln \varphi_1\left(-\frac{iq}{\mu}z\right) = \sum_{n=1}^k (\alpha_n + \beta_n z) (\exp nz - 1) + P_3(z) + \rho(z),$$

где $|\rho(z)| = B|z| \exp(-\alpha_0 x)$; $\alpha_0 > 0$; $x \geq 1$.

Положим $g(z) = u(x, y) + iv(x, y)$; пусть $y = 2m\pi$; m целое. Тогда

$$\begin{aligned} u(x, 0) - u(x, 2m\pi) = & -3\gamma_0 x (2\pi m)^2 + \gamma_1 (2\pi m)^2 + \\ & + B \exp(-\alpha_0 x) (|2\pi m| + x). \end{aligned}$$

Далее, $u(x, 0) - u(x, 2m\pi) \geq 0$. Отсюда при $x \rightarrow \infty$ находим $\gamma_0 = 0$. Если $\gamma_1 < 0$, то при $m = 1$, $x \rightarrow \infty$ получаем противоречие. Наконец, $\ln \varphi_1(0) = 0$, откуда $\gamma_3 = 0$, что и доказывает (20.4). Теперь удобнее переобозначить:

$$P_3(it) = P_2(it).$$

21. Мы можем перейти к доказательству достаточности условий теоремы 1 ч. I в случае конечного пуассонова спектра. Пусть случайная величина X имеет х. ф. $\varphi(t)$, такую, что

$$\begin{aligned} \ln \varphi(t) = & -\gamma t^2 + \sum_{n=0}^{N_1} z_n (\exp(-it\nu l_1 \dots l_n) - 1) + \\ & + \sum_{n=1}^{N_2} z_{-n} \left(\exp\left(-it \frac{\nu}{l_{-1} l_{-2} \dots l_{-n}}\right) - 1 \right) + \sum_{n=0}^{M_1} \lambda_n (\exp(it\mu k_1 \dots k_n) - 1) + \\ & + \sum_{n=1}^{M_2} \lambda_{-n} \left(\exp\left(it \frac{\mu}{k_{-1} k_{-2} \dots k_{-n}}\right) - 1 \right). \end{aligned} \quad (21.1)$$

Здесь x_i, λ_i положительны; $\nu > 0; \mu > 0; l_0 = k_0 = 1; l_i, k_i$ целые ≥ 2 ; компонента β_{it} полагается равной 0 без ограничения общности. Положим:

$$f(z) = \gamma z^2 + \sum_{n=0}^{N_1} x_n (\exp(-z \nu l_1 \dots l_n) - 1) + \\ + \sum_{n=1}^{N_2} x_{-n} \left(\exp \left(-z \frac{\nu}{l_{-1} l_{-2} \dots l_{-n}} \right) - 1 \right) + \sum_{n=0}^{M_1} \lambda_n (\exp(z \mu k_1 \dots k_n) - 1) + \\ + \sum_{n=1}^{M_2} \lambda_{-n} \left(\exp \left(\frac{z \mu}{k_{-1} k_{-2} \dots k_{-n}} \right) - 1 \right); \quad (21.2)$$

$$\mu_0 = \frac{\mu}{k_{-1} k_{-2} \dots k_{-M_2}}, \quad \nu_0 = \frac{\nu}{l_{-1} l_{-2} \dots l_{-N_2}}; \quad (21.3)$$

$$K_0 = k_{-1} k_{-2} \dots k_{-M_2}, \quad L_0 = l_{-1} l_{-2} \dots l_{-N_2}. \quad (21.4)$$

Тогда

$$f(z) = \gamma z^2 + \sum_{n=0}^{N_1} x_n (\exp(-z \nu_0 L_0 l_1 \dots l_n) - 1) + \\ + \sum_{n=1}^{M_1} \lambda_n (\exp(z \mu_0 K_0 k_1 \dots k_n) - 1) + \\ + \sum_{n=1}^{N_2} x_{-n} \left(\exp \left(-z \nu_0 \frac{L_0}{l_{-1} l_{-2} \dots l_{-n}} \right) - 1 \right) + \\ + \sum_{n=1}^{M_2} \lambda_{-n} \left(\exp \left(z \mu_0 \frac{K_0}{k_{-1} \dots k_{-n}} \right) - 1 \right). \quad (21.5)$$

Пусть X_1 — какая-либо компонента X и $\ln(\operatorname{E} \exp z X_1) = g_1(z)$. Согласно (20.3) и (20.4) запишем

$$g_1(z) = \gamma_1 z^2 + \gamma_2 z + \sum_{n=1}^r (\alpha_n + \beta_n z) (\exp(g_n \mu_0 z) - 1) + \\ + \left| \sum_{n=1}^{r'} (\alpha'_n + \beta'_n z) (\exp(-g'_n \nu_0 z) - 1) \right|, \quad (21.6)$$

где $\alpha_n + \beta_n z \not\equiv 0; \alpha'_n + \beta'_n z \not\equiv 0; g_n, g'_n$ целые; $\gamma_1 \geq 0$.

Нам нужно доказать, что $\alpha_n > 0, \alpha'_n > 0, \beta_n = \beta'_n = 0$. Будем считать, что $0 < g_1 < g_2 < \dots < g_r; 0 < g'_1 < \dots < g'_r$. Согласно предыдущему, $g_r \leq K_0 k_1 k_2 \dots k_{M_1}$. Полагая $g_1(z) = u_1(x, y) + i v_1(x, y)$, получим из (2.2):

$$0 \leq u_1(x, 0) - u_1(x, y) \leq \gamma y^2 + 2 \int_{-b}^a e^{xu} \sin^2 \frac{yu}{2} dG(u), \quad (21.7)$$

где $G(u)$ — кусочно-постоянная неубывающая функция с точками роста, определяемыми (21.5).

Мы имеем $X = X_1 + X_2$, где X_1 и X_2 — независимые компоненты и компонента X_2 отвечает $g_2(z) = g(z) - g_1(z)$. Пусть $\alpha_r + \beta_r z \neq 0$, и пусть

$$\frac{Q}{k} < g_r \leq Q, \quad (21.8)$$

где $\mu_0 Q/k$, $\mu_0 Q$ — соседние пуассоновы частоты в (21.5). По конструкции пуассоновых частот в (21.5), все частоты правее Q будут кратны Q , а частоты левее Q/k , будут делить Q/k . Теперь используем (21.7). Полагая $x_1 = \mu_0 x$; $y_1 = \mu_0 y$, имеем из (21.6) при $x \geq 1$:

$$u_1(x, 0) - u_1(x, y) = e^{g_r x_1} \left[2(\alpha_r + \beta_r x) \sin^2 \frac{g_r y_1}{2} + \beta_r y \sin(g_r y_1) \right] + B |y^2 + 1| e^{(g_r - 1)x_1}. \quad (21.9)$$

Далее, из (21.7) и (21.8) вытекает

$$0 \leq u_1(x, 0) - u_1(x, y) \leq \gamma y^2 + \sum_j \rho_{n_j} \sin^2 \left(\frac{Q n_j y_1}{2} \right) \exp(Q n_j x_1) + B \exp \left(\frac{Q}{k} x_1 \right), \quad (21.10)$$

где $\rho_{n_j} > 0$; n_j — целые числа, каждое из которых делит последующее. Докажем, что $g_r = Q$. Пусть это не так и $g_r < Q$. Положим $y_1 = 2\pi/Q$ в (21.9) и (21.10). Из (21.10) найдем:

$$0 \leq u_1(x, 0) - u_1 \left(x, \frac{2\pi}{Q\mu_0} \right) \leq \frac{4\gamma\pi^2}{(Q\mu_0)^2} + B \exp \left(\frac{Q}{k} x_1 \right). \quad (21.11)$$

Из (21.9) получим:

$$u_1(x, 0) - u_1 \left(x, \frac{2\pi}{Q\mu_0} \right) = \exp(g_r x_1) \left[2(\alpha_r + \beta_r x) \sin^2 \frac{\pi g_r}{Q} + \beta_r \frac{2\pi}{Q\mu_0} \sin \left(\frac{2\pi g_r}{Q} \right) \right] + B |y^2 + 1| \exp[(g_r - 1)x_1]. \quad (21.12)$$

Так как $0 < g_r < Q$, то $\sin^2(\pi g_r/Q) > 0$, а $Q/k < g_r$; $k \geq 2$. Если $\beta_r \neq 0$, то при $x \rightarrow \infty$ получается противоречие между (21.11) и (21.12). Таким образом, $\beta_r = 0$. Далее, если $\alpha_r \neq 0$, то при $x_1 \rightarrow \infty$ получается то же противоречие между (21.11) и (21.12). Итак, $\alpha_r + \beta_r z \equiv 0$, что противоречит допущению. Приходится допустить, что $g_r = Q$.

В (21.9) полагаем $g_r = Q$ и берем $y_1 = 2\pi/Qn_2$ в формуле (21.10). Отсюда находим:

$$0 \leq u_1(x, 0) - u_1 \left(x, \frac{2\pi}{Q\mu_0 n_2} \right) \leq \frac{4\pi^2 \gamma}{(Q\mu_0 n_2)^2} + \rho_{n_1} \sin^2 \frac{\pi n_1}{n_2} \exp(x_1 Q n_1) + B \exp \left(\frac{Q}{k} x_1 \right). \quad (21.13)$$

При $g_r = Q$ и $x_1 \rightarrow \infty$ согласование между (21.13) и (21.9) может быть только при $\beta_r = 0$. Итак, $\beta_r = 0$. Покажем, что $\alpha_r > 0$. Не может быть только $\alpha_r = 0$, так как $\alpha_r + \beta_r z \neq 0$. Пусть $\alpha_r < 0$. При $x \rightarrow \infty$, $y_1 = \pi/g_r$ из (21.9) получаем $u_1(x, 0) - u_1(x, \pi/\mu_0 g_r) < 0$, что невозможно. Итак, $\beta_r = 0$, $\alpha_r = 0$.

22. Допустим, что для чисел $r, r-1, \dots, r_1+1$ доказано, что соответствующие числа $\beta_r, \dots, \beta_{r_1+1}$ равны 0; $\alpha_r, \dots, \alpha_{r_1+1}$ неотрицательны, а соответствующие пуассоновы частоты (для $\alpha_i \neq 0$) совпадают с некоторыми из пуассоновых частот в (21.5) (напомним, что каждая из этих частот делит предыдущую). Пусть $\alpha_{r_1} + \beta_{r_1} z \neq 0$; соответствующий член в (21.6) будет $(\alpha_{r_1} + \beta_{r_1} z) \times \times (\exp(g_{r_1} \mu_0 z) - 1)$. Пусть

$$\frac{Q}{k} < g_{r_1} \leq Q; \quad k \geq 2, \quad (22.1)$$

где $Q\mu_0$ — одна из пуассоновых частот, встречающихся в (21.5), а $\mu_0 Q/k$ — соседняя частота. Докажем, что $g_{r_1} = Q$. Пусть это не так и $g_{r_1} < Q$. Заметим, что для числа $g_i > g_{r_1}$ числа $g_i \mu_0$ совпадают с некоторыми пуассоновыми частотами в (21.5) и каждое из них делит предыдущее. В силу этого из (21.6) находим

$$u_1(x, 0) - u_1(x, y) = \exp(g_{r_1} x_1) \left[2(\alpha_{r_1} + \beta_{r_1} x) \sin^2 \frac{g_{r_1} y_1}{2} + \beta_{r_1} y \sin(g_{r_1} y_1) \right] + \\ + 2 \sum_{j=r_1+1}^r \rho_{nj} \exp(g_j x_1) \sin^2 \frac{g_j y_1}{2} + B |y^2 + 1| \exp[(g_{r_1} - 1)x_1]. \quad (22.2)$$

Здесь, как и ранее, $x_1 = \mu_0 x$; $y_1 = \mu_0 y$. С другой стороны, воспользуемся (21.10), где Q взято из (22.1). Полагая $y_1 = 2\pi/Q$, из (21.10) имеем:

$$0 \leq u_1(x, 0) - u_1\left(x, \frac{2\pi}{Q\mu_0}\right) \leq \frac{4\pi^2}{(Q\mu_0)^2} + B \exp\left(\frac{Q}{k} x_1\right). \quad (22.3)$$

Далее, из (22.2), учитывая, что числа g_j ($j = r_1+1, \dots, r$) делятся, как следует из предыдущего, на Q , определяем:

$$u_1(x, 0) - u_1\left(x, \frac{2\pi}{Q\mu_0}\right) = \exp(g_{r_1} x_1) \left[2(\alpha_{r_1} + \beta_{r_1} x) \sin^2 \frac{\pi g_{r_1}}{Q} + \right. \\ \left. + \beta_{r_1} \frac{2\pi}{Q\mu_0} \sin\left(\frac{2\pi g_{r_1}}{Q}\right) \right] + B \exp[(g_{r_1} - 1)x_1]. \quad (22.4)$$

Так как $Q/k < g_{r_1} < Q$, то $\sin^2(\pi g_{r_1}/Q) > 0$. Отсюда видим, что если $\beta_{r_1} \neq 0$, то при $x \rightarrow \infty$ равенство (22.4) вступает в противоречие с (22.3).

Итак, $\beta_{r_1} = 0$. Если $\alpha_{r_1} \neq 0$, то при $x \rightarrow \infty$ снова получаем противоречие. Итак, $\alpha_{r_1} = 0$ и $\alpha_{r_1} + \beta_{r_1} z \equiv 0$, что невозможно.

Приходится допустить, что $g_{r_1} = Q$. В (22.2) полагаем $g_{r_1} = Q$ и берем $y_1 = 2\pi/Qn_2$ в формуле (21.10). Отсюда находим (21.13). С другой стороны, числа g_j ($j = r_1 + 1, \dots, r$) в (22.2) все делятся на Qn_2 , так что

$$u_1(x, 0) - u_1\left(x, \frac{2\pi}{Q\mu_0 n_2}\right) = e^{\varrho x_1} \left[2(\alpha_{r_1} + \beta_{r_1} x) \sin^2 \frac{\pi n_1}{n_2} + \beta_{r_1} \frac{2\pi}{Q\mu_0 n_2} \sin \frac{2\pi n_1}{n_2} \right] + B \exp[(g_{r_1} - 1)x_1]. \quad (22.5)$$

С другой стороны, из (21.10) при $y_1 = 2\pi/Qn_1$ находим:

$$0 \leq u_1(x, 0) - u_1\left(x, \frac{2\pi}{Q\mu_0 n_2}\right) \leq \frac{4\pi\gamma}{(Q\mu_0 n_2)^2} + \rho_{r_1} \sin^2\left(\frac{\pi n_1}{n_2}\right) \exp(Qx_1) + B \exp\left(\frac{Qx_1}{k}\right). \quad (22.6)$$

Сопоставляя (22.5) и (22.6), видим, что $\beta_{r_1} = 0$, иначе при $x \rightarrow \infty$ получится противоречие. Покажем, что $\alpha_{r_1} > 0$. Мы имеем $\alpha_{r_1} \neq 0$, иначе $\alpha_{r_1} + \beta_{r_1} z \equiv 0$, что невозможно. В (22.2) полагаем: $g_{r_1} = Q$, $\beta_{r_1} = 0$, $y_1 = 2\pi/g_{r_1+1}$. При этом

$$\sin^2 \frac{g_j y_1}{2} = 0 \quad (j = r_1 + 1, \dots, r), \quad \sin^2 \frac{g_{r_1} y_1}{2} = \sin^2 \frac{\pi g_{r_1}}{g_{r_1+1}} > 0.$$

При $\alpha_{r_1} < 0$ и $x \rightarrow \infty$ получаем

$$\left[u_1(x, 0) - u_1\left(x, \frac{2\pi}{g_{r_1+1}}\right) \right] < 0,$$

что невозможно. Итак, $\alpha_{r_1} > 0$, что и требовалось доказать.

23. Итак, в (21.6) $\alpha_n \geq 0$, $\beta_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots, r$); числа $g_n \mu_0$ входят в набор пуассоновых частот в (21.5). Заменяя z на $(-z)$ в (21.5) и рассматривая $g(-z)$ и $g_1(-z)$, получим на основании тех же рассуждений, что и ранее в (21.6): $\alpha'_n \geq 0$, $\beta'_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots, r'$); $-g'_n \nu_0$ входят в набор отрицательных пуассоновых частот в (21.5). Этим, очевидно, доказана достаточность условий теоремы 1 ч. I в случае конечного пуассонова спектра б. д. закона F .

Л и т е р а т у р а

1. Липник Ю. В. О разложении композиции законов Гаусса и Пуассона. — Теор. вероятн. и ее примен., 1957, т. 2, вып. 1, с. 34—59.
2. Райков Д. А. О разложении законов Гаусса и Пуассона. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1938, т. 2, № 1, с. 91—124.
3. Paley R., Wiener N. Fourier transforms in the complex domain. — Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 1934, vol. 19. 184 p.
4. Marcinkiewicz J. Sur une propriété de la loi de Gauss. — Math. Z., 1938, Bd 44, H. 4, S. 612—618.

5. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.—Л., 1950. 552 с.
6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. III. М.—Л., 1949. 783 с.

ТЕОРЕТИКО-ИНФОРМАЦИОННОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ В УСЛОВИЯХ ЛИНДЕБЕРГА

Теор. вероятн. и ее примен., 1959, т. 4, вып. 3, с. 311—321

0. В настоящей работе предлагается новое доказательство центральной предельной теоремы, основанное на теоретико-информационных свойствах суммирования случайных величин. Доказательство использует лишь элементарные средства анализа, однако по существу основывается на некоторых связях между информационными количествами К. Шеннона и Р. Фишера, и в этом отношении может представить самостоятельный интерес.

1. Рассмотрим класс $\mathfrak{X}$ одномерных случайных величин X , имеющих непрерывную плотность вероятности $p(x)$, удовлетворяющую условиям

$$\sup_x p(x) < \infty; \quad EX = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx = 0; \quad D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx < \infty. \quad (1.1)$$

Рассмотрим информационный функционал $I(X)$, определяемый соотношением

$$I(X) = - \left(\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln p(x) dx + \frac{1}{2} \ln \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx \right). \quad (1.2)$$

Далее будет доказано, что $I(X)$ всегда существует в классе $\mathfrak{X}$. Мы будем для краткости называть его энтропией случайной величины X . Мы видим, что первое слагаемое (1.2) совпадает с энтропией непрерывного распределения, введенного К. Шенноном (см. [1], гл. III, п. 19), второй же член равен $\ln D(X)/2$. Для нормальной плотности

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

энтропия по Шеннону равна $\ln(\sigma\sqrt{2\pi e})$, так что (с точностью до постоянного слагаемого) $I(X)$ есть разность энтропий по Шеннону для X и для нормальной случайной величины с той же дисперсией. Эта разность, как мы увидим далее, обладает определенными преимуществами по сравнению с энтропией по Шеннону.¹⁾

¹⁾ Как известно, последний вид энтропии для непрерывного распределения по существу не может обладать всеми полезными свойствами, присущими

Лемма 1. Пусть $\sup_x p(x) = L$; $D(X) = \sigma^2$. Тогда $I(X)$ существует (интегралы в (1.2) абсолютно сходятся) и

$$-|\ln L| - \ln \sigma \leq I(X) \leq \sigma^2 - \ln \sigma + C_1 \quad (1.3)$$

(в дальнейшем $C_1, C_2, \dots$ — абсолютные константы).

Левое неравенство здесь тривиально, правое же немедленно следует из разбиения множества $E(p(x) \leq 1)$ на множества

$$E(1 \geq p(x) > e^{-x^2}) \text{ и } E(p(x) \leq e^{-x^2}).$$

Лемма 2. Энтропия инвариантна относительно гомотетического преобразования, т. е. при любом $\alpha > 0$

$$I(\alpha X) = I(X). \quad (1.4)$$

Доказательство тривиально: при подстановке в (1.2) вместо $p(x)$ величины $(1/\alpha)p(x/\alpha)$ непосредственно приходим к (1.4). Мы можем теперь дополнить неравенства (1.3): если в (1.4) выбрать α_0 так, чтобы $\sigma = 1$, то при этом $L' = L/\alpha_0$ и из (1.3) находим

$$-\left| \ln \frac{L}{\alpha_0} \right| \leq I(X) \leq C_1 + 1. \quad (1.5)$$

2. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_m$ — последовательность независимых случайных величин с интегральными законами распределения $F_j(x)$, причем $EX_j = 0$; $0 < D(X_j) = b_j < \infty$; $b_1 + b_2 + \dots + b_m = B_m$. Пусть выполняется условие Линдеберга: при любом $\tau > 0$ и любом $\zeta > 0$

$$\frac{1}{B_m} \sum_{j=1}^m \int_{|x| > \tau \sqrt{B_m}} x^2 dF_j(x) < \zeta, \quad (2.1)$$

если $m > m_0(\tau, \zeta)$. В этих условиях надлежит доказать, что

$$\left| P\left(\frac{S_m}{\sqrt{B_m}} < x\right) - G(x) \right| < \varepsilon \quad (2.2)$$

при любом $\varepsilon > 0$, любых x и $m > m_1(\varepsilon)$. Здесь $S_m = X_1 + X_2 + \dots + X_m$. У такой суммы, вообще говоря, не будет существовать энтропии, и поэтому мы должны заменить ее другой. Сперва сделаем замену величин X_j на срезанные по следующему правилу: выбираем большое число T_0 , которое будет фиксировано в дальнейшем, и полагаем $X'_j = X_j$, если $|X_j| \leq T_0 \sqrt{B_j}$; $X'_j = 0$, если $|X_j| > T_0 \sqrt{B_j}$.

Пусть $S'_m = \sum_{j \leq m} X'_j$ и $B'_m = D(S'_m)$; тогда можно утверждать,

количеству информации, полученному для конечной схемы. В конце статьи будет указан другой путь доказательства, еще более близкий к теории информации.

что $P\left(\frac{S'_m}{\sqrt{B'_m}} < x\right)$ и $P\left(\frac{S_m}{\sqrt{B_m}} < x\right)$ будут равномерно по x сколь угодно близки при достаточно большом T_0 и больших m . Чтобы в этом убедиться, рассмотрим числа $m_0 = m$, $m_1 < m_0$, $m_2 < m_1$, $m_3 < m_2, \dots$, такие, что $B_{m_{i+1}} \sim B_{m_i}/2$ ($\sim$ — знак асимптотической эквивалентности). Мы можем выбрать k так, что $D(S'_{m_k}) \sim B_{m_k}/2^k$ будет достаточно мала сравнительно с B_{m_k} , и фиксировать это k . Затем замечаем, что при $m_k \leq j \leq m$ вероятность того, что хотя бы для одного j $|X_j| > T_0 \sqrt{B_j}$, не превосходит

$$\sum_{j=m_k}^m \frac{b_j}{T_0^2 B_j} \leq C_2 \frac{2^k}{T_0^2};$$

при достаточно большом T_0 это сколь угодно мало, и наше утверждение обосновано.

Далее, легко заметить, что условие Линдеберга типа (2.1) будет удовлетворяться для урезанных величин X'_j . Мы должны еще сгладить S'_j , чтобы у нее появилась энтропия. Для этого употребим вариант известного приема А. М. Ляпунова: к каждому слагаемому X'_j добавим нормальное слагаемое y'_j с $E y'_j = -E X'_j$ и дисперсией $\delta_0^2 b'_j$, где δ_0 — сколь угодно малая, но фиксированная константа. Полагая $X''_j = X'_j + y'_j$, заметим, что $E X''_j = 0$; для X''_j будут удовлетворяться условия Линдеберга: у суммы $S''_m = \sum_{j \leq m} X''_j$

будет существовать энтропия. Если распределение $\frac{S_m}{\sqrt{B''_m}}$ достаточно близко к нормальному ($B''_m = D(S''_m)$), то это же верно и для сумм $\frac{S'_m}{\sqrt{B'_m}}$ и $\frac{S_m}{\sqrt{B_m}}$.

3. Для упрощения записи переобозначим X''_j в X_j ; S''_m в S_m . Имеем: $I(S_m) = I\left(\frac{S_m}{\sqrt{B_m}}\right)$. Из (1.5) легко усматриваем, что для всех m

$$-C(\delta_0) \leq I(S_m) \leq C_3, \quad (3.1)$$

где $C(\delta_0)$ — константа, зависящая только от δ_0 .

Для дальнейшего будем рассматривать для случайных величин $X \in \mathfrak{X}$ также энтропию по Шеннону:

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln p(x) dx.$$

Таким образом,

$$I(X) = H(X) - \frac{1}{2} \ln D(X). \quad (3.2)$$

Укажем теперь схему дальнейших рассуждений. Пусть $\zeta_1, \zeta_2, \dots; \alpha_1, \alpha_2, \dots; \eta_1, \eta_2, \dots; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ — малые положительные числа, выбираемые каждое в соответствии с предыдущими; B — ограниченная функция, $|B| \leq C$, где C — абсолютная константа. При заданном $\zeta_1 = \zeta_1(\zeta)$ будем говорить, что для X_j условие Линдеберга выполняется индивидуально при $j \leq n$, если

$$\int_{|x| > \tau \sqrt{B_n}} x^2 dF_j(x) < \zeta_1 b_j. \quad (3.3)$$

Если выберем, например, $\zeta_1 = \sqrt{\zeta}$, то из (2.1) замечаем: для тех j , для которых (3.3) не выполняется,

$$\sum' b_j \leq \zeta_1 B_n. \quad (3.4)$$

т. е. подобные X_j будут иметь в совокупности относительно малую дисперсию. Далее мы вычисляем при $m > M_0$ приращение $I(S_{m+1}) - I(S_m)$. Пусть $\sigma_{m+1} = \sqrt{b_{m+1}/B_m}$.

Подробный расчет показывает, что

$$I(S_{m+1}) - I(S_m) = \frac{\sigma_{m+1}^2}{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{p'_m}{p_m} \right)^2 p_m dx - 1 \right) + B(\mu + \tau) \sigma_{m+1}^2. \quad (3.5)$$

Здесь $p_m(x)$ — плотность для $S_m/\sqrt{B_m}$, а $\mu = \zeta_1$, если индивидуальное условие Линдеберга (3.3) выполняется для X_{m+1} , и $\mu = 1$, если оно не выполняется. Выражение

$$F_m = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{p'_m}{p_m} \right)^2 p_m dx - 1 \quad (3.6)$$

для всех m неотрицательно: $F_m \geq 0$. При этом чем ближе F_m к 0, тем ближе $p_m(x)$ к

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad (3.7)$$

равномерно по x .

Грубо говоря, это поясняет теоретико-информационный смысл условий Линдеберга: если для X_{m+1} оно выполняется индивидуально, то на $(m+1)$ -м шаге энтропия суммы возрастает пропорционально σ_{m+1}^2 либо сумма весьма близка к нормальной. Для тех же X_{m+1} , для которых условие Линдеберга не выполняется индивидуально, энтропия суммы может и не возрастать, а сумма не обязана быть при этом близкой к нормальной.

Заметим, что числа F_m имеют вполне определенный статистический смысл: они тесно связаны с информационным количеством Фишера, известным в математической статистике. Имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x p_m(x) dx = 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_m(x) dx = 1. \quad (3.8)$$

Рассмотрим класс плотностей $\{p_m(x-\theta)\}$ со средним θ и дисперсией 1. Наблюдение x_1 с плотностью $p_m(x-\theta)$ будет несмещенной оценкой θ с дисперсией 1. Поэтому в силу неравенств Рао—Крамера

$$1 \geq \frac{1}{E\left(\frac{\partial \ln p_m(x_1 - \theta)}{\partial \theta}\right)^2}.$$

Это равносильно неравенству $F_m \geq 0$. Разумеется, подобное неравенство может быть выведено и совершенно элементарно.

4. Впредь будем считать $m > M_0$, где M_0 — столь большая константа, как это понадобится далее. Будем рассматривать прирост энтропии $I(S_{m+1}) - I(S_m)$. Мы увидим, что если количества F_m не очень малы, то из выполнения условия Линдеберга будет следовать возрастание энтропии уже при относительно небольших приращениях B_m . Но $I(S_m)$ ограничена сверху, так что F_m не могут быть все не очень малыми, откуда и будет следовать близость распределения $\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}$ к нормальному.

Имеем:

$$I(S_{m+1}) = I\left(\frac{S_{m+1}}{\sqrt{B_m}}\right) = I\left(\frac{S_m}{\sqrt{B_m}} + \frac{X_{m+1}}{\sqrt{B_m}}\right). \quad (4.1)$$

Обозначим $x_{m+1} = X_{m+1}/\sqrt{B_m}$; $D(x_{m+1}) = b_{m+1}/B_m = \sigma_{m+1}^2$; плотность для $\frac{S_m}{\sqrt{B_m}}$ — через $p_m(x)$, плотность для $\frac{S_{m+1}}{\sqrt{B_m}}$ — через $\pi_{m+1}(x)$. Пусть еще $Q_{m+1}(t)$ — плотность для X_{m+1} ; $q_{m+1}(t) = \sqrt{B_m} Q(t\sqrt{B_m})$ — плотность для x_{m+1} . Имеем:

$$\pi_{m+1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_m(x-t) q_{m+1}(t) dt, \quad (4.2)$$

$$-H\left(\frac{S_{m+1}}{\sqrt{B_m}}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi_{m+1}(x) \ln \pi_{m+1}(x) dx. \quad (4.3)$$

Расчет последнего выражения потребует некоторых подробных оценок $p_m(x)$ и ее производных; главные трудности вызваны наличием здесь члена $\ln \pi_{m+1}(x)$.

Перейдем к соответствующим оценочным леммам. Заметим, что $p_m(x)$ подчиняется условиям (3.8). Далее, вспоминая происхождение величин X'_j , переобозначенных в X_j , из величин X'_j и нормальных добавок и обозначая

$$V_m(x) = P\left(\frac{S'_m - ES'_m}{\sqrt{B_m}} < x\right),$$

заметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dV_m(x) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dV_m(x) = \frac{1}{1 + \delta_0^2}. \quad (4.4)$$

Последняя величина заключена между $4/5$ и 1 при всех m , если $\delta_0 < 1/2$, что будем полагать.

Лемма 3. При фиксированном δ_0 , $k=0, 1, 2, 3$ и любых z

$$p_m(x) < C_4; \quad p_m^{(k)}(x) = B p_m(x) \left(\ln \frac{C_4}{p_m(x)} \right)^{k/2}; \quad (4.5)$$

$$p^{(k)}(x-z) = B p_m(x) \exp \left(C_5 |z| \sqrt{\ln \frac{C_4}{p_m(x)}} \right). \quad (4.6)$$

Доказательство. Имеем:

$$p_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_0} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x-t)^2}{2\delta_0^2} \right] dV_m(t). \quad (4.7)$$

Отсюда сразу следует первое из соотношений (4.5). Далее, обозначим $\rho(x) = 8 \sqrt{\ln(C_4/p_m(x))}$ и разобьем (4.7) на

$$I_1(x) = \int_{|t-x| \leq \rho(x)} \quad \text{и} \quad I_2(x) = \int_{|t-x| > \rho(x)}.$$

Легко заметить, что

$$I_2(x) = B (p_m(x))^{3/2}, \quad \frac{d^k I_2(x)}{dx^k} = B (p_m(x))^{1/2}. \quad (4.8)$$

Отсюда, в частности, $p_m(x) = B I_1(x)$;

$$p_m^{(k)}(x) = \frac{B}{\sqrt{2\pi}\delta_0} \int_{|x-t| \leq \rho(x)} [e^{-(x-t)^2/2\delta_0^2}]^{(k)} dV_m(t),$$

что и дает вторую часть (4.5).

В (4.6) возьмем сначала $k=0$. Не нарушая общности, можно считать, что $p_m(x-z) \geq p_m(x)$, отсюда в силу предыдущего

$$\begin{aligned} p_m(x-z) &= B \int_{|t-z-x| \leq \rho(x-z)} \exp \left[-\frac{(x-z-t)^2}{2\delta_0^2} \right] dV_m(t) = \\ &= B \int_{|t-z-x| \leq \rho(x)} \exp \left[-\frac{(x-z-t)^2}{2\delta_0^2} \right] dV_m(t). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Положим $E(\xi) = \exp[-\xi^2/2\delta_0^2]$; тогда

$$E(x-z-t) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\delta_0^2} [(x-t)^2 + z^2 - 2z(x-t)] \right\}.$$

Отсюда

$$E(x - z - t) = BE(x - t) \exp(C_5 |z| \rho(x)).$$

Подставляя это в (4.9), находим требуемую оценку (4.6) при $k=0$. Аналогично действуем при $k=1, 2, 3$, беря

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} E(x - z - t) \right|.$$

Лемма 4. При заданном $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < 1/4$, имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (p_m(x))^{1-\varepsilon} dx < C(\varepsilon). \quad (4.10)$$

Для доказательства используем (3.8) и первое из соотношений (4.5). Разбивая множество $E(p_m(x) \leq 1)$ на

$$E\left(p_m(x) < \frac{1}{1+x^2}\right) \text{ и } E\left(1 \geq p_m(x) \geq \frac{1}{1+x^2}\right),$$

выводим (4.10).

Непосредственным следствием из (4.10) при любом $T_1 > 1$ будет

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_m(x) \exp\left(C_5 T_1 \sqrt{\ln \frac{C_4}{p_m(x)}}\right) dx < C(T_1),$$

где $C(T_1)$ зависит только от T_1 .

5. Мы можем теперь начать подсчет прироста энтропии $I(S_m)$. Обратимся к (4.2) и (4.3). Для упрощения записи переобозначим $Q_{m+1}(t)$, $q_{m+1}(t)$, σ_{m+1}^2 в $Q(t)$, $q(t)$, σ^2 . Пусть τ — заданное малое число, входящее в условие Линдеберга (2.1). Интеграл в правой части (4.2) разобьем на $\int_{|t| \leq \tau} + \int_{|t| > \tau}$. При $|t| \leq \tau$ имеем

$$p_m(x - t) = p_m(x) - tp'_m(x) + \frac{t^2}{2} p''_m(x) + \frac{t^3}{6} p'''_m(x - \theta t), \quad (5.1)$$

где $|\theta| \leq 1$. Применяя (4.6), найдем

$$\begin{aligned} \int_{|t| \leq \tau} p_m(x - t) q(t) dt &= \int_{|t| \leq \tau} q(t) dt \left(p_m(x) - tp'_m(x) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{t^2}{2} p''_m(x) \right) + \tau \sigma^2 R_1(x), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где

$$R_1(x) = B p_m(x) \exp(C_5 \rho(x)) \quad (5.3)$$

и, как и ранее,

$$\rho(x) = 8 \sqrt{\frac{C_4}{p_m(x)}}. \quad (5.4)$$

При $|t| > \tau$ берем ряд Тейлора в форме

$$p_m(x-t) = p_m(x) - t p'_m(x) + \frac{t^2}{2} p''_m(x) + \int_0^t p''_m(x-\xi) \xi d\xi. \quad (5.5)$$

Умножая на $q(t)$, интегрируя по $|t| > \tau$, объединяя с (5.2) и учитывая (3.8), найдем

$$\pi_{m+1}(x) = p_m(x) + \frac{p''_m(x)}{2} \sigma^2 + \tau \sigma^2 R_1(x) + R(x), \quad (5.6)$$

где

$$R(x) = \int_{|t| > \tau} q(t) dt \int_0^t p''_m(x-\xi) \xi d\xi. \quad (5.7)$$

Положим $R(x) = R_2(x) + R_3(x)$, где

$$R_2(x) = \int_{\tau < |t| \leq 4T_0} q(t) dt \int_0^t p''_m(x-\xi) \xi d\xi; \quad (5.8)$$

$$R_3(x) = \int_{|t| > 4T_0} q(t) dt \int_0^t p''_m(x-\xi) \xi d\xi; \quad (5.9)$$

T_0 — число, введенное в п. 2. Применяя (4.6), найдем:

$$R_2(x) = B \int_{\tau < |t| < 4T_0} t^2 q(t) dt p_m(x) \exp(C_6 T_0 \rho(x)). \quad (5.10)$$

Очевидно,

$$R_2(x) = B \sigma^2 p_m(x) \exp(C_6 T_0 \rho(x)).$$

Если же условие Линдеберга выполнено индивидуально, т. е. имеет место (3.3) (где нужно взять $m+1$ вместо n , $j = m+1$ и учесть, что $B_m \sim B_{m+1}$), то

$$R_2(x) = B \zeta_1 \sigma^2 p_m(x) \exp(C_6 T_0 \rho(x)). \quad (5.11)$$

Иначе

$$R_2(x) = B \mu \sigma^2 p_m(x) \exp(C_6 T_0 \rho(x)), \quad (5.12)$$

где $\mu = \zeta_1$, если условие (3.3) выполняется, и $\mu = 1$, если оно не выполняется.

Теперь рассмотрим поведение $R_3(x)$. Припомним, что X_{m+1} получилось из урезанной величины X'_{m+1} (с учетом переобозначения). Если $F(u) = P(X'_{m+1} - EX'_{m+1} < u)$, то

$$Q(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b'_{m+1}} \delta_0} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(z-u)^2}{2\delta_0^2 b'_{m+1}}\right] dF(u),$$

откуда при $|z| > 4T_0 \sqrt{B_m}$ имеем

$$Q(z) = \frac{B}{b'_{m+1}} \exp \left[-\frac{z^2}{4\delta_0^2 b'_{m+1}} \right] = \frac{B}{b_{m+1}} \exp \left[-\frac{z^2}{5b_{m+1}} \right]$$

и

$$g(t) = \sqrt{B_m} Q(t \sqrt{B_m}) = \frac{B}{\sigma^2} \exp \left[-\frac{t^2}{10\sigma^2} \right] \quad (5.13)$$

при $|t| > 4T_0$. Отсюда, используя (4.6), получаем

$$\begin{aligned} R_3(x) &= B \int_{|t| > 4T_0}^t |t| g(t) \int_0^t |p_m''(x - \xi)| d\xi dt = \\ &= B p_m(x) \exp \left[-\frac{T_0^2}{30\sigma^2} \right] \int_{|t| > 4T_0} \exp \left[-\frac{t^2}{20\sigma^2} + C_7 |t| \rho(x) \right] dt = \\ &= B p_m(x) \exp \left(-\frac{T_0^2}{30\sigma^2} \right) (p_m(x))^{-\Delta} = B (p_m(x))^{1-\Delta} \exp \left[-\frac{T_0^2}{30\sigma^2} \right], \end{aligned} \quad (5.14)$$

где Δ сколь угодно мало при m , а стало быть, B_m и $1/\sigma^2$ достаточно больших.

6. Обращаясь к подсчету $-H(S_{m+1}/\sqrt{B_m})$ по формуле (4.3), запишем:

$$\ln \pi_{m+1}(x) = \ln p_m(x) + \ln \frac{\pi_{m+1}(x)}{p_m(x)}.$$

Для дальнейшего разложения $\ln(\pi_{m+1}(x)/p_m(x))$ в ряд, как видно из формулы (5.6), нужно, чтобы величины (см. (4.5), (5.3), (5.12) и (5.14))

$$\sigma^2 \frac{1}{2} \frac{p_m''(x)}{p_m(x)} = \sigma^2 B (\rho(x))^2; \quad \tau \sigma^2 \frac{R_1(x)}{p_m(x)} B \tau \sigma^2 \exp(C_5 \rho(x));$$

$$\frac{R_2(x)}{p_m(x)} = B \mu \sigma^2 \exp(C_6 T_0 \rho(x)); \quad \frac{R_3(x)}{p_m(x)} = B \exp \left(-\frac{T_0^2}{30\sigma^2} \right) (p_m(x))^{-\Delta}$$

были в сумме меньше 1.

Пусть $\mathfrak{A}$ — множество точек x , где каждая из них меньше 0.01, а $\mathfrak{B}$ — дополнительное множество. В силу определения $\rho(x)$ очевидно, что при $x \in \mathfrak{B}$ будем иметь, например,

$$p_m(x) = B \sigma^{1000}. \quad (6.1)$$

Отсюда при сколь угодно малом фиксированном α

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{B}} \pi_{m+1}(x) \ln \pi_{m+1}(x) dx &= B \int_{\mathfrak{B}} (\pi_{m+1}(x))^{1-\alpha} dx = \\ &= B (\sigma^{1000})^{0.01} \int_{\mathfrak{B}} (p_m(x))^{(1-\Delta)(1-\alpha)-0.01} dx = B (\sigma^{1000})^{0.01} = B \sigma^{10} \end{aligned} \quad (6.2)$$

в силу леммы 4 (4.10) и (6.1).

На множестве $\mathfrak{A}$ можем разложить $\ln(\pi_{m+1}(x)/p_m(x))$ в ряд; получим:

$$\begin{aligned} \ln \pi_{m+1}(x) = \ln p_m(x) + \frac{p_m''(x) \sigma^2}{p_m(x) 2} + B \sigma^4 \left(\frac{p_m''(x)}{p_m(x)} \right)^2 + \\ + B \tau \sigma^2 \exp(C_5 \rho(x)) + B \mu \sigma^2 \exp(C_6 T_0 \rho(x)) + B \sigma^{1000} (p_m(x))^{-\Delta}. \end{aligned}$$

Далее, из (5.6)

$$\begin{aligned} \pi_{m+1}(x) = p_m(x) + \frac{p_m''(x)}{2} \sigma^2 + p_m(x) B \tau \sigma^2 \exp(C_5 \rho(x)) + \\ + B \mu \sigma^2 \exp(C_6 T_0 \rho(x)) + B \sigma^{1000} (p_m(x))^{-\Delta}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Пользуясь леммами 3 (4.5) и 4 (4.10), находим отсюда:

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{A}} \pi_{m+1}(x) \ln \pi_{m+1}(x) dx = \int_{\mathfrak{A}} \left(p_m(x) + \frac{p_m''(x)}{2} \sigma^2 \right) \left(\ln p_m(x) + \right. \\ \left. + \frac{p_m''(x)}{p_m(x)} \frac{\sigma^2}{2} \right) dx + B (\tau + \mu) \sigma^2. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Как и в доказательстве (6.2), получаем:

$$\int_{\mathfrak{B}} \left(p_m(x) + \frac{p_m''(x)}{2} \sigma^2 \right) \left(\ln p_m(x) + \frac{p_m''(x)}{p_m(x)} \frac{\sigma^2}{2} \right) dx = B \sigma^{1000}. \quad (6.5)$$

Объединяя это с (6.4), приходим к основной формуле:

$$\begin{aligned} -H \left(\frac{S_m}{\sqrt{B_m}} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(p_m(x) + \frac{p_m''(x)}{2} \sigma^2 \right) \left(\ln p_m(x) + \frac{p_m''(x)}{p_m(x)} \frac{\sigma^2}{2} \right) dx + \\ + B (\tau + \mu) \sigma^2. \end{aligned} \quad (6.6)$$

В этой формуле возможны дальнейшие упрощения: при раскрытии скобок член, содержащий σ^4 , как очевидно на основании предыдущего, будет иметь вид $B \tau \sigma^2$. Далее, $\int_{-\infty}^{\infty} p_m''(x) dx = 0$, ибо, очевидно, $p_m'(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Таким образом, имеем:

$$-H \left(\frac{S_{m+1}}{\sqrt{B_m}} \right) = -H \left(\frac{S_m}{\sqrt{B_m}} \right) + \frac{\sigma^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} p_m''(x) \ln p_m(x) dx + B (\tau + \mu) \sigma^2. \quad (6.7)$$

Далее,

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_m'' \ln p_m dx = p_m' \ln p_m \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{p_m'}{p_m} \right)^2 p_m dx. \quad (6.8)$$

В силу абсолютной сходимости интегралов в правой и левой частях (6.8) мы должны иметь, очевидно, $p'_m \ln p_m(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, так что первый член в (6.8) исчезает. Далее,

$$\frac{1}{2} \ln D\left(\frac{S_{m+1}}{\sqrt{B_m}}\right) - \frac{1}{2} \ln D\left(\frac{S_m}{\sqrt{B_m}}\right) = \frac{1}{2} \ln(1 + \epsilon^2) = \frac{\epsilon^2}{2} + B\epsilon^4. \quad (6.9)$$

Внося полученные результаты в (6.7), найдем:

$$I(S_{m+1}) - I(S_m) = F_m \frac{\epsilon^2}{2} + B(\tau + \mu)\epsilon^2, \quad (6.10)$$

где

$$F_m = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{p'_m}{p_m}\right)^2 p_m dx - 1$$

— то же, что и в (3.6).

7. Докажем, что $F_m \geq 0$. В силу абсолютной сходимости интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} x p'_m(x) dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} p_m(x) dx,$$

интегрируя по частям, заключаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} x p'_m(x) dx = -1.$$

Отсюда, по неравенству Коши—Буняковского,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_m(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{p'_m}{p_m}\right)^2 p_m dx > 1.$$

Так как первый интеграл равен 1, то это и дает неотрицательность F_m .

Лемма 5. Пусть $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Для всякого $\epsilon > 0$ найдется $\eta = \eta(\epsilon) \rightarrow 0$ вместе с ϵ , такое, что при $F_m < \epsilon$

$$\sup_x |p_m(x) - g(x)| < \eta(\epsilon).$$

Доказательство. Положим

$$f_1(x) = x \sqrt{p_m(x)}; \quad f_2(x) = \frac{p'_m(x)}{p_m(x)} \sqrt{p_m(x)};$$

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} (f_1(x))^2 dx = 1; \quad c = \int_{-\infty}^{\infty} (f_2(x))^2 dx; \quad b = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x) dx.$$

Пусть ξ — вспомогательная переменная. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\xi f_1(x) + f_2(x))^2 dx = (\xi + b)^2 + F_m. \quad (7.1)$$

Далее,

$$-b = - \int_{-\infty}^{\infty} x p'_m(x) dx = 1.$$

Полагая $\xi = -b = 1$, найдем из (7.1):

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f_1(x) + f_2(x))^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x + \frac{p'_m}{p_m}\right)^2 p_m dx = F_m < \varepsilon.$$

Учитывая свойства $p_m(x)$ и то, что $|p'_m(x)| < C_8$, отсюда без труда выводим лемму 5.

8. Формула (6.10) поясняет теоретико-информационный смысл условий Линдеберга $\mu = \xi_1$, если индивидуальное условие Линдеберга (3.3) выполняется, и $\mu = 1$, если оно не выполняется. В силу (3.3) и (3.4) можем сделать важное замечание: если рассмотрим при $j \leq n$ такие j , для которых (3.3) не выполняется при данных τ, ζ_1 , то сумма их дисперсий относительно мала в соответствии с (3.4). Рассматривая $B_n, B_{n'} \sim 2B_n, B_{n''} \sim 2B_{n'}, \dots$ при $n > M_0$, выбрасывая между 1 и n , между n и n' , между n' и n'' , ... такие j , для которых (3.3) не выполняется, и выбрасывая соответствующие X_j из сумм $S_n, S_{n'} - S_n, S_{n''} - S_{n'}$ и т. д., получим новую сумму; после нормирования ее соответствующее распределение будет отличаться от прежнего не более чем на малое число $\zeta_2 = \zeta_2(\zeta_1)$. Ввиду этого можем считать, что с самого начала все X_j удовлетворяют (3.3) и что в (6.10) можно положить $\mu = \zeta_1$. Полагая в (6.10) $B(\tau + \zeta_1) = \eta_0$, видим, что $I(S_{m+1}) - I(S_m) = F_m \sigma^2 / 2 + \theta \eta_0 \sigma^2$ ($|\theta| \leq 1$) при всех $m > M_0$. Отсюда замечаем, что либо $I(S_{m+1}) - I(S_m) > 0$, либо $F_m < 2\eta_0$. В последнем случае, согласно лемме 5, $p_m(x)$ близко к $g(x)$ и, как легко видеть, $I(S_m)$ близко к $G = \ln \sqrt{2\pi e}$, где $G = I(N_m)$ — энтропия соответствующей нормальной суммы.

Далее видно, что

$$|\Gamma - G| < \eta_1(\eta_0); \quad \Gamma = \sup_{m > M_0} I(S_m) \quad (8.1)$$

(в дальнейшем $\eta_i(\eta_0) \rightarrow 0$ вместе с η_0).²⁾

Пусть теперь $m > M_0$ выбрано так, что

$$0 \leq \Gamma - I(S_m) < \eta_2(\eta_0), \quad (8.2)$$

где $\eta_2(\eta_0)$ — заданное малое число и $\eta_2(\eta_0) > \eta_0$.

²⁾ Как указал автору И. В. Романовский, одно элементарное неравенство теории выпуклых функций показывает, что всегда $G \geq \Gamma$. Нестрогий вывод сходного факта имеется у Шеннона (см. [1], гл. III, п. 19).

На основании сказанного выше видим, что при $n > m$ либо $I(S_n)$ возрастает, так что $0 \leq \Gamma - I(S_n) < \eta_2$, либо $F_n \leq 2\eta_0$, так что в силу (8.1) $0 \leq \Gamma - I(S_n) < \eta_3(\eta_0)$. Итак, всегда $0 < \Gamma - I(S_n) < \eta_3(\eta_0)$ и $0 < \Gamma - I(S_n) < \eta_4(\eta_0)$; считаем $\eta_4 > \eta_0$. В силу (6.10) (где $\mu = \zeta_1$) заключаем, что если m_1 и m_2 таковы, что

$\sum_{n=m_1}^{m_2} \sigma_{n+1}^2 \geq \sqrt{\eta_4}$, то хотя бы одно из F_n при $m_1 \leq n \leq m_2$ будет меньше $C_7 \sqrt{\eta_4}$ и $p_n(x)$ будут близки к $g(x)$. Отсюда непосредственно следует, что все $p_n(x)$ будут близки к $g(x)$; точность такого приближения будет в конце концов определяться числом η_0 . Это и завершает доказательство.

Заметим, что возможен и другой вариант доказательства, основанный на изучении $I(S_{m+1}, S_m)$ — количества информации суммы о предыдущей сумме. Доказательство можно, по-видимому, распространить на многомерный случай и на некоторые виды нормированных пространств, а также на случай ненормальной сходимости.

Л и т е р а т у р а

1. Shannon C., Weaver W. The mathematical theory of communication. Urbana, 1949. 117 p.

О НЕКОТОРЫХ СВЯЗЯХ ИНФОРМАЦИОННЫХ КОЛИЧЕСТВ К. ШЕННОНА И Р. ФИШЕРА С ТЕОРИЕЙ СУММИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

Transactions 2 Prague conf. on inform. theory, statist.
decision functions, random processes. Prague, 1960, p. 313—327

0. Пусть $X = \|x_1, \dots, x_h\|^T$ — случайный вектор в евклидовом пространстве E_h , имеющий плотность вероятности $L(X, \Theta)$, зависящую от вектора параметров $\Theta = \|\theta_1, \dots, \theta_h\|^T$. Пусть существует вектор несмещенных статистик $S = \|s_1, \dots, s_h\|^T$, оценивающий Θ и имеющий корреляционную матрицу

$$B_{SS} = E[(S - \Theta)(S - \Theta)^T], \quad (0.1)$$

которую будем считать неособенной. При довольно широких аналитических условиях будет существовать информационная матрица Фишера

$$I(\Theta) = E \left\| \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_i} \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_j} \right\| = E \left\| - \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\| \quad (0.2)$$

и будет иметь место неравенство Рао—Крамера, которое можно записать в виде

$$I(\Theta) - B_{SS}^{-1} \geq 0. \quad (0.3)$$

Это неравенство играет основную роль в теории оценивания параметров. Информационная матрица Фишера появилась ранее информационного количества Шеннона, играющего столь большую роль в статистической теории передачи сообщений. Эти два понятия не чужды одно другому. Некоторые связи между ними указаны в работе С. Кульбака и Д. Лейблера [1]. В настоящей работе устанавливаются новые связи двух понятий. С их помощью удастся построить чисто теоретико-информационное доказательство центральной предельной теоремы для случайных векторов в условии Линдеберга.

1. Пусть имеем последовательность конечных схем h событий:

$$\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_h \\ p_{i1} & \dots & p_{ih} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Им отвечают энтропии

$$H_i = - \sum_{j=1}^h p_{ij} \lg p_{ij}.$$

Если $A_1, A_2, \dots, A_h$ — элементы конечной группы G порядка h , то схемы (1.1) определяют последовательность случайных величин X_i , заданных на группе G , и можно рассматривать сумму

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

(которая может считаться некоммутативной, несмотря на аддитивную запись). Пусть $H(S_n)$ — энтропия суммы. Если для всех i, j $p_{ij} > c_0 > 0$ (равномерная положительность вероятностей), то легко вывести, что распределение S_n будет приближаться к равномерному $(1/h, \dots, 1/h)$ со скоростью геометрической прогрессии, так как будет происходить размешивание вероятностей на каждом шагу. Энтропия $H(S_n)$ будет возрастать начиная с некоторого места и приближаться к максимальному значению $\lg h$ со скоростью геометрической прогрессии.

Аналогичные явления можно наблюдать для случая сходимости и к равномерному распределению на компактной группе. Для случая некомпактной группы положение много сложнее. Мы рассмотрим его лишь для нормальной сходимости в h -мерном евклидовом пространстве E_h ; можно думать, что подобные соображения можно перенести на некоторые случаи нормальной сходимости случайных объектов в банаховых пространствах.

2. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ — последовательность случайных векторов в евклидовом пространстве E_h , будем их записывать в виде $X_i = \|x_{i1}, \dots, x_{ih}\|^T$, будем считать, что существует $EX_i = \|0, \dots, 0\|^T$ и

$$E(X_i X_i^T) = \|E(x_{ik} x_{il})\| = \|b_{kl}(i)\|.$$

Обозначим (см. [2])

$$\sum_{n=1}^N b_{kk}(n) = B_{kk}(N) \rightarrow \infty;$$

$$\sum_{n=1}^N b_{kl}(n) = \beta_{kl}(N) \sqrt{B_{kk}(N) B_{ll}(N)}.$$

Пусть $\beta_{kl}(N) \rightarrow b_{kl}$ ($k, l = 1, 2, \dots, h$); будем считать, что

$$\|b_{kl}\| > 0. \quad (2.1)$$

Если $F_l(x_1, \dots, x_h)$ — интегральный закон распределения X_l , то будем считать, что выполнены условия Линдберга: при любом $\tau > 0$

$$\sum_{l=1}^N \int_{OI(\tau)} \sum_{k=1}^h \frac{x_k^2}{B_{kk}(N)} dF_l(x_1, \dots, x_h) \rightarrow 0, \quad (2.2)$$

где $I(\tau)$ есть область $|x_k| < \tau \sqrt{B_{kk}(N)}$. Обозначим через $B(N)$ диагональную матрицу

$$\left\| \begin{array}{cccc} B_{11}(N) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_{hh}(N) \end{array} \right\|;$$

в силу сказанного выше и (2.1) $B(N) > 0$ при $N > N_0$.

Составим $(B(N))^{-1/2} S_N$. Мы будем строить теоретико-информационное доказательство того, что распределение $(B(N))^{-1/2} S_N$ при $N \rightarrow \infty$ равномерно приближается к нормальному распределению с нулевыми средними и корреляционной матрицей $\|b_{kl}\|$. При этом выясняется некоторая своеобразная связь между информационными количествами Шеннона и Фишера.

Во избежание усложнения доказательства мы будем доказывать теорему при дополнительном, не вызываемом существом дела, условии: при всех $n; k, l = 1, 2, \dots, h$

$$\frac{b_{kk}(n)}{b_{ll}(n)} \asymp 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (2.3)$$

т. е. дисперсии компонент одного и того же слагаемого сравнимы по величине.

3. Подробный вывод для одномерного случая ($h=1$) дан в статье автора [3]. Для этого случая связи с математической статистикой выступают не так отчетливо, как для многомерного, который мы здесь рассмотрим. Довольно громоздкие оценки погрешностей в расчете приращения энтропии (на основе условия Линдберга) проводятся почти так же, как в одномерном случае, если только дисперсии компонент отдельных слагаемых по координатам не очень резко различаются одна от другой.

Рассмотрим класс $\mathcal{X}$ случайных h -мерных векторов $X = \|x_1, \dots, x_h\|^T$, имеющих плотность вероятности $p(X)$ при условиях

$$\sup_{X \in E_h} p(X) < \infty; \quad EX = \|0, \dots, 0\|^T; \quad B_{XX} = EXX^T > 0 \text{ и конечна.}$$

Тогда, как нетрудно вывести (см. [3]), будет существовать дифференциальная энтропия Шеннона:

$$H(X) = - \int_{E_h} p(X) \lg p(X) dX. \quad (3.1)$$

Это количество, как известно, не имеет непосредственного теоретико-информационного смысла. В частности, оно не инвариантно относительно однообразных преобразований X . Однако оно просто связано с понятием ϵ -энтропии А. Н. Колмогорова, имеющей уже отчетливый теоретико-информационный смысл (см. [4], с. 24, формула (9)).

Для наших целей понадобится, однако, функционал типа энтропии, инвариантный относительно неособенных линейных преобразований X . Для вектора X построим «сопровождающий» нормальный вектор X_1 . Для X_1 имеем (см. [5], гл. III, п. 19):

$$H(X_1) = \lg [(2\pi e)^{h/2} (\det B_{XX})^{1/2}].$$

Введем в рассмотрение разность

$$\begin{aligned} I(X) &= H(X) - H(X_1) + \lg (2\pi e)^{h/2} = \\ &= - \left(\int_{E_h} p(X) \lg p(X) dX + \frac{1}{2} \lg (\det B_{XX}) \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Информационный функционал $I(X)$, который мы будем далее называть для краткости просто энтропией, обладает некоторыми легко обнаруживаемыми полезными для дальнейшего свойствами. Как и в [3], доказываем следующую лемму.

Л е м м а 1. Пусть

$$\sup_{X \in E_h} p(X) = M; \quad \max_{i, j \leq h} E x_i x_j = b_0.$$

Тогда

$$-\frac{1}{2} \lg \det B_{XX} - \lg M \leq I(X) \leq -\frac{1}{2} \lg \det B_{XX} + h b_0 + C_0 \quad (3.3)$$

(в дальнейшем $C_0, C_1, \dots$ — положительные абсолютные константы).

Для нас важна доставляемая (3.3) верхняя граница энтропии $I(X)$.

4. Энтропия $I(X)$ является аффинным инвариантом. Именно, непосредственно проверяется лемма.

Л е м м а 2. Если A — неособенная $h \times h$ матрица, $Y = AX$, то

$$I(Y) = I(X). \quad (4.1)$$

В силу этого свойства при изучении энтропии нормированной суммы можно отбросить нормирующую матрицу. Но сперва нужно обеспечить существование энтропии у изучаемой суммы. Вернемся к исходной последовательности сумм $\{S_N\}$ и заменим ее некоторой последовательностью сумм, имеющих энтропию, сохраняющую предельные свойства $\{S_N\}$. Рассмотрим условие Линдберга (2.2). Мы будем говорить, что оно выполняется индивидуально относительно числа $\zeta_1 > 0$ и данного $\tau > 0$ для случайного вектора X_l , если

$$\int_{CI(\tau)} x_k^2 dF_l(x_1, \dots, x_h) < \zeta_1 b_{kk}(l), \quad k = 1, 2, \dots, h. \quad (4.2)$$

Пусть $\zeta_2 > 0$ — заданное малое число (в дальнейшем $\zeta_i > 0$ — такие же числа). В силу (2.2) при $N > N_0(\zeta_2, \tau)$

$$\sum_{l=1}^N \int_{CI(\tau)} \frac{x_k^2}{B_{kk}(N)} dF_l(x_1, \dots, x_h) < \zeta_2. \quad (4.3)$$

Пусть для данного $k \leq h$ числа $N_0, N_1, N_2, \dots, N_m$ выбраны так, что

$$B_{kk}(N_1) \sim 2B_{kk}(N_0), \dots, B_{kk}(N_m) \sim 2B_{kk}(N_{m-1}).$$

т. е. доля дисперсии суммы k -х компонент между N_{m-1} и N_m составляет асимптотически половину дисперсии предыдущей суммы. Если положим $\zeta_1 = \sqrt{\zeta_2}$, то из (4.2) и (4.3) явствует, что при данном k для тех l , для которых (4.2) не выполнено, сумма соответствующих дисперсий

$$\sum_{(l)} b_{kk}(l) < 4\zeta_1 B_{kk}(N_m). \quad (4.4)$$

Эти соображения годны для любых $k \leq h$; в силу (2.3) имеем

$$B_{kk}(N) \asymp B_{ll}(N), \quad k, l \leq h,$$

для всех N .

Выбросим теперь все векторы X_l , для которых не выполняется условие (4.2) при каком-либо $k \leq h$. Для оставшихся векторов это условие будет выполняться. Вместе с тем если для суммы оставшихся векторов будет доказана нормальная сходимость, то из (4.4) простым применением неравенства Чебышева выведем, что распределение исходной нормированной суммы будет сколь угодно близко к нормальному при ζ_1 достаточно малом и $N > N_0(\zeta_1)$.

5. Оставшиеся векторы X_i будем нумеровать подряд (это сводится к соответственному переобозначению). Эти векторы нужно

заменить на такие, сумма которых S имеет энтропию $I(S)$. Для этого, следуя [3], сперва заменим векторы X_i «срезанными» X'_i следующим образом:

$$\begin{cases} x'_{ik} = x_{ik}, & \text{если } |x_{ik}| \leq T_0 \sqrt{B_{kk}(i)}, \\ x'_{ik} = 0, & \text{если } |x_{ik}| > T_0 \sqrt{B_{kk}(i)} \end{cases}$$

(заметим, что у них будут, вообще говоря, ненулевые компоненты). Беря достаточно большие T_0 , как подробно выведено в [3], достаточно доказать предельную теорему для суммы векторов X'_i , чтобы получить ее для исходной суммы.

Наконец, берем сколь угодно малую константу δ_0 и к каждому вектору X'_i добавляем независимый от него нормальный вектор Z_i с $EZ_i = -EX'_i$ и независимыми компонентами, дисперсии которых соответственно равны $\{B_{X_i X_i}\}_{kk} \delta_0^2$ ($k = 1, 2, \dots, h$). Новые векторы $X'_i + Z_i$ переобозначим в X_i с теми же обозначениями вторых моментов. Легко обнаруживается важное для дальнейшего обстоятельство, что для X_i будут выполнены индивидуальные условия Линдеберга в указанном выше смысле и что сумму векто-

ров $X_i: S_N = \sum_{i=1}^N X_i$ можно принимать за исходную для доказательства предельной теоремы.

6. Сумма S_m обладает энтропией $I(S_m)$. Будем рассматривать приращение этой энтропии при возрастании N . В силу аффинной инвариантности $I(S_m)$ имеем:

$$I(S_{m+1}) = I((B(m))^{-1/2} S_{m+1}) = I((B(m))^{-1/2} S_m + (B(m))^{-1/2} X_{m+1}). \quad (6.1)$$

Обозначим $x_{m+1} = (B(m))^{-1/2} X_{m+1}$, так что

$$Ex_{m+1} = \|0, \dots, 0\|^T, \quad (6.2)$$

$$B_{x_{m+1} x_{m+1}} = (B(m))^{-1/2} \|b_{kl}(m+1)\| (B(m))^{-1/2} = \Gamma_{m+1}.$$

Сумма $(B(m))^{-1/2} S_m$ (см. п. 2) имеет корреляционную матрицу $\|\beta_{kl}(m)\| \rightarrow \|b_{kl}\| > 0$. Корреляционную матрицу $B_{x_{m+1} x_{m+1}}$ (см. (6.2)) преобразуем в $\Gamma_{m+1} = \|\gamma_{kl}\|$. По конструкции $(B(m))^{-1/2} S_m$ она имеет плотность вероятности, ограниченную числом $C(\delta_0)$. Эту плотность обозначим $p_m(X)$; имеем (см. (3.3))

$$-C_0 \leq p_m(X) < C(\delta_0). \quad (6.3)$$

Эта оценка годна для любых $m \geq m_0$. Плотность для $(B(m))^{-1/2} S_{m+1}$ обозначим через $\pi_{m+1}(X)$, для нее также верна оценка (6.3), ибо $(B(m))^{-1/2} (B(m+1))^{1/2}$ стремится к единичной матрице при $m \rightarrow \infty$. Далее, пусть $Q_{m+1}(T)$ — плотность для X_{m+1} и

$$q_{m+1}(T) = (\det B(m))^{1/2} Q_{m+1}((B(m))^{1/2} T)$$

— плотность для x_{m+1} . Плотности $p_m(X)$, $\pi_{m+1}(X)$ и $Q_{m+1}(T)$ принадлежат случайным векторам, происшедшим от прибавления

к векторам, ограниченным с вероятностью 1. Ввиду этого для них и для их частных производных (которые все существуют) имеет место ряд оценок сверху и снизу, оправдывающих составление нужных функционалов от них. Такие оценки подробно выведены для одномерного случая ($h=1$) в работе [3]; для h -мерного случая они выводятся совершенно аналогично, и мы не будем их проводить, чтобы иметь возможность остановиться на математико-статистической и теоретико-информационной стороне вопроса.

7. Вводим в рассмотрение матрицу

$$I = E \left\| \frac{\partial \ln p_m}{\partial x_i} \frac{\partial \ln p_m}{\partial x_j} \right\| = -E \left\| \frac{\partial^2 \ln p_m}{\partial x_i \partial x_j} \right\|. \quad (7.1)$$

Т е о р е м а. Приращение энтропии $I(S_{m+1}) - I(S_m)$ имеет асимптотическое выражение

$$I(S_{m+1}) - I(S_m) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^h \{ \Gamma_{m+1} \}_{ij} \{ I - B_m^{-1} \}_{ij} + \\ + \Theta(m, \zeta_1, \tau) \text{Sp}(\Gamma_{m+1}), \quad (7.2)$$

где $\Theta(m, \zeta_1, \tau) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ и $\zeta_1 \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$. Здесь числа ζ_1 и τ взяты из индивидуальных условий Линдеберга (4.2); в дальнейшем $\Theta(m, \zeta_1, \tau)$ не всегда одно и то же; $\text{Sp}(\Gamma_{m+1})$ — след матрицы $\Gamma_{m+1} = E x_{m+1} x_{m+1}^T$; B_m — корреляционная матрица $(B(m))^{-1/2} S_m$.

Заметим теперь же, что если индивидуальные условия Линдеберга не выполняются, то имеет место такая же формула (7.2), но вместо $\Theta(m, \zeta_1, \tau)$ следует поставить число Θ , которое уже не обязано быть бесконечно малым вместе с τ и $1/m$. Это дает новое истолкование индивидуальных условий Линдеберга — они обеспечивают возможность выразить приращение энтропии суммы в первом приближении первым членом (7.2). Мы увидим далее, что этому можно придать и теоретико-информационный смысл.

Для доказательства этой теоремы действуем, как и в одномерном случае (см. [3], п. 5). Положим

$$T = \|t_1, \dots, t_h\|^T, \quad \frac{\partial}{\partial X} = \left\| \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_h} \right\|^T;$$

представим $p_m(X - T)$ в виде

$$p_m(X - T) = p_m(X) - \left(T^T \frac{\partial}{\partial X} \right) p_m(X) + \\ + \frac{1}{2} \left(T^T \frac{\partial}{\partial X} \right)^2 p_m(X) + R_m(X, T). \quad (7.3)$$

(T в индексе — знак транспонирования).

Имеем:

$$\pi_{m+1}(X) = \int_{E_h} p_m(X-T) q_{m+1}(T) dT. \quad (7.4)$$

Далее,

$$H((B(m))^{-1/2} S_{m+1}) = - \int_{E_h} \pi_{m+1}(X) \ln \pi_{m+1}(X) dX.$$

Действуя, как в работе [3] (п. 6), и используя аналогичные оценки, выводим из (7.3):

$$\begin{aligned} & H((B(m))^{-1/2} S_{m+1}) - H((B(m))^{-1/2} S_m) = \\ & = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \gamma_{ij} \int_{E_h} \left(\frac{\partial^2 p_m}{\partial x_i \partial x_j} \right) \ln p_m(X) dX + \Theta(m, \zeta_1, \tau) \operatorname{Sp} \Gamma_m. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Далее,

$$\int_{E_h} \left(\frac{\partial^2 p_m}{\partial x_i \partial x_j} \right) \ln p_m(X) dX = -E \left(\frac{\partial \ln p_m}{\partial x_i} \frac{\partial \ln p_m}{\partial x_j} \right) = E \left(\frac{\partial^2 \ln p_m}{\partial x_i \partial x_j} \right); \quad (7.6)$$

таким образом, в силу обозначений (7.1)

$$\begin{aligned} & H((B(m))^{-1/2} S_{m+1}) - H((B(m))^{-1/2} S_m) = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^h \{ \Gamma_{m+1} \}_{ij} \{ I_{ij} \} + \Theta(m, \zeta_1, \tau). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Рассмотрим приращения вторых членов в выражении для $I(S_m)$.
Имеем:

$$B_{S_{m+1}S_{m+1}} = B_{S_m S_m} + B_{X_{m+1} X_{m+1}}.$$

Далее,

$$(B(m))^{-1/2} B_{S_m S_m} (B(m))^{-1/2} = B_m.$$

Тогда $B_m \rightarrow \|b_{kl}\| > 0$ (см. п. 2),

$$(B(m))^{-1/2} B_{X_{m+1} X_{m+1}} (B(m))^{-1/2} = \Gamma_{m+1}.$$

Таким образом,

$$(B(m))^{-1/2} B_{S_{m+1}S_{m+1}} (B(m))^{-1/2} = B_m + \Gamma_{m+1}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \det [(B(m))^{-1/2} B_{S_{m+1}S_{m+1}} (B(m))^{-1/2}] &= (\det B_m) \sum_{i,j} \{ \Gamma_{m+1} \}_{ij} \{ B_m^{-1} \}_{ij} + \\ &+ \Theta(m) \operatorname{Sp} \Gamma_{m+1}, \end{aligned}$$

где $\Theta(m) \rightarrow 0$ вместе с $1/m$.

Беря половину логарифма этого выражения и вычитая из него половину логарифма $\det B_m$, найдем:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} \{\Gamma_{m+1}\}_{ij} \{B_m^{-1}\}_{ij} + \Theta(m) \operatorname{Sp} \Gamma_{m+1}.$$

Наконец, $B_m \rightarrow \|b_{ki}\| = B > 0$. Учитывая (7.7), приходим наконец к формуле (7.2).

8. Матрица I в выражении (7.2) есть частный случай информационной матрицы Фишера (0.2), а матрица $I - B^{-1}$ тесно связана с неравенством Рао—Крамера. В самом деле, если будем рассматривать класс плотностей $p_m(X - \Theta)$, где $\Theta = \|\theta_1, \dots, \theta_h\|^T$ — вектор параметров, то

$$I = - \left\| \frac{\partial^2 \ln p_m(X)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|$$

переходит в

$$I = - \left\| \frac{\partial^2 \ln p_m(X - \Theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\|,$$

если взять нулевые значения параметров. Вектор X , очевидно, будет несмещенной оценкой вектора Θ , его корреляционная матрица B_m сколь угодно близка к B , когда m достаточно велико. В силу известных неравенств Рао—Крамера (формула (0.3); доказательство см., например, в работе [6]) имеем:

$$I - B_m^{-1} \geq 0. \quad (8.1)$$

Таким образом, в формуле (7.2) матрица Γ_{m+1} положительна, а матрица $I - B_m^{-1}$ неотрицательна. Выражение

$$\sum_{i,j=1}^h \{\Gamma_{m+1}\}_{ij} \{I - B_m^{-1}\}_{ij} \quad (8.2)$$

есть полуинвариант Вороного от этих матриц; (7.2) доставляет нам новые связи информационных количеств Шеннона и Фишера. Пусть

$$A = \|a_{ij}\| \geq 0 \text{ и } C = \|c_{ij}\| \geq 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, h)$$

— две неотрицательно определенные симметрические матрицы. Полуинвариантом Вороного (обозначение (A, C)) называется выражение

$$(A, C) = \sum_{i,j} \{A\}_{ij} \{C\}_{ij} = \sum_{i,j} a_{ij} c_{ij}. \quad (8.3)$$

Это выражение играет большую роль в теории приведения положительных квадратичных форм; ему были даны важные применения Г. Ф. Вороным [7], Г. Минковским [8] и Б. А. Венковым [9].

Как оказывается, этому выражению можно придать непосредственный теоретико-вероятностный смысл, откуда будут следовать

его простейшие свойства. Пусть $X = \|x_1, \dots, x_h\|^T$ и $Y = \|y_1, \dots, y_h\|^T$ — два независимых случайных вектора с нулевыми средними и корреляционными матрицами: $EXX^T = C$; $EYY^T = A$. Непосредственно находим:

$$(A, C) = E(Y^T X X^T Y). \quad (8.4)$$

Отсюда немедленно следуют простейшие свойства полуинварианта.

1. $(A, C) \geq 0$; и если хотя бы одна из матриц A, C положительна, а другая неотрицательна и ненулевая, то имеем знак $>$.

2. Пусть $R = R_{hh}$ — квадратная матрица. Положим: $Y_1 = RY$; $X_1 = (R^*)^T X$, где R^* — взаимная к R матрица. Тогда

$$E(Y_1^T X_1 X_1^T \bar{Y}_1) = E(Y^T R^T (R^*)^T X X^T R^* R Y) = (\det R)^2 E(Y^T X X^T Y).$$

Таким образом,

$$(R A R^T, (R^*)^T C R) = (\det R)^2 (A, C).$$

3. Г. Минковский [8] доказал следующее несколько более глубокое свойство полуинварианта Вороного. Если $\det(A) = \det(C) > 0$, то $(A^*, A) \leq (A^*, C)$ и знак равенства будет лишь для $A = C$. Полуинвариант Вороного был применен также В. И. Смирновым (см. [10], с. 697) при исследовании условий единственности решения задачи Дирихле.

9. Возвращаясь к выражению (7.2), выразим входящий в него полуинвариант Вороного соответственно (8.4). Корреляционной матрице Γ_{m+1} (по построению положительной) отвечает случайный вектор x_{m+1} . Введем еще нормальный вектор $j = \|j_1, \dots, j_m\|^T$ с корреляционной матрицей $I = B_m^{-1}$, независимый от x_{m+1} . Тогда имеем:

$$I(S_{m+1}) - I(S_m) = \frac{1}{2} E(x_{m+1}^T j j^T x_{m+1}) + \Theta(m, \zeta_1, \tau) \text{Sp } I_{m+1}. \quad (9.1)$$

Мы видим, что первый член правой части положителен. Если он больше второго члена, то энтропия на $(m+1)$ -м шаге будет возрастать. Это поясняет теоретико-информационный смысл индивидуальных условий Линдберга — условие, чтобы энтропия суммы на $(m+1)$ -м шаге либо возрастала, либо весьма мало изменялась. Интегральные условия Линдберга, как пояснялось в п. 2, можно рассматривать как усреднение индивидуальных.

Отсюда можно вывести центральную предельную теорему (ср. [3]). Для того чтобы сделать это, убедимся сперва, что если полуинвариант $E(x_{m+1}^T j j^T x_{m+1})$ мал сравнительно со $\text{Sp } \Gamma_{m+1}$, то распределение вектора $(B(m))^{-1/2} S_m$ близко к нормальному с нулевыми средними и корреляционной матрицей $B = \|b_{kl}\|$. Пусть

$$E(x_{m+1}^T j j^T x_{m+1}) < \eta \text{Sp } \Gamma_{m+1}, \quad (9.2)$$

где $\eta > 0$ малое число.

Далее, у матрицы $Ejj^T = I - B_m^{-1} \geq 0$ все элементы ограничены (в силу оценок для $p_m(X)$ и ее частных производных, аналогичных соответствующим оценкам для одномерного случая в работе [3]). Таким образом,

$$Ejj^T = O(1). \quad (9.3)$$

В таком случае из (9.2) следует, что

$$\text{Sp}(jj^T) < \eta_1 = \eta_1(\eta), \quad (9.4)$$

где $\eta_1 = \eta_1(\eta) \rightarrow 0$ вместе с η . В самом деле, из (2.3), (9.3) и из того, что x_{m+1} содержат нормальное слагаемое с независимыми компонентами, дисперсии которых составляют не менее чем долю δ_0 от дисперсий компонент x_{m+1} , легко следует, что если (9.4) не выполняется, то и (9.2) не выполняется, если η_1 достаточно велико по отношению к η . Итак, из (9.2) следует (9.4).

Теперь имеем

$$Ejj^T = I - B_m^{-1} = -E \left\| \frac{\partial^2 \ln p_m}{\partial x_i \partial x_j} \right\| - (EXX^T)^{-1}, \quad (9.5)$$

где оба математических ожидания берутся при распределении $p_m(X)$. Положим $X = FY$, где F — ортогональная матрица. Заметим, что

$$\begin{aligned} &\text{в силу известных свойств гессiana} \left\| \frac{\partial^2 \ln p_m}{\partial x_i \partial x_j} \right\| \\ &-E \left\| \frac{\partial^2 \ln p_m}{\partial x_i \partial x_j} \right\| = -FE \left\| \frac{\partial^2 \ln p_m}{\partial y_i \partial y_j} \right\| F^{-1}, \end{aligned} \quad (9.6)$$

где p_m — плотность для нового вектора Y . Далее,

$$(EXX^T)^{-1} = FE(YY^T)^{-1}F^{-1}. \quad (9.7)$$

Выберем теперь ортогональную матрицу F так, чтобы EYY^T стала диагональной матрицей

$$\left\| \begin{array}{cccc} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_h \end{array} \right\|,$$

тогда из (9.4) получим

$$\sum_{i=1}^h \left(-E \frac{\partial^2 \ln p_m}{\partial y_i^2} - (Ey_i^2)^{-1} \right) < \eta_1, \quad (9.8)$$

где p_m — плотность для нового вектора Y ; математические ожидания берутся для новой плотности. Так как $I - B_m^{-1} \geq 0$, то имеем

$$0 \leq -E \frac{\partial^2 \ln p_m}{\partial y_i^2} - (Ey_i^2)^{-1} < \eta_1 \quad (i = 1, 2, \dots, h) \quad (9.9)$$

или

$$0 \leq \int_{E_h} \left(\frac{1}{\rho_m(Y)} \frac{\partial \rho_m(Y)}{\partial y_i} \right)^2 \rho_m(Y) dY \int_{E_h} y_i^2 \rho_m(Y) dY - 1 \leq \eta_2. \quad (9.10)$$

где $\eta_2 = \eta_2(\eta_1) \rightarrow 0$ вместе с η_1 . Далее рассуждаем, как в работе [3] (см. п. 7). Полагая

$$F_{im} = \int_{E_h} \left(\frac{1}{\rho_m(Y)} \frac{\partial \rho_m(Y)}{\partial y_i} \right)^2 \rho_m(Y) dY \int_{E_h} y_i^2 \rho_m(Y) dY - 1,$$

$$f_1(Y) = y_i \sqrt{\rho_m(Y)}, \quad f_2(Y) = \frac{\rho'_m(Y)}{\rho_m(Y)} \sqrt{\rho_m(Y)},$$

$$b = \int_{E_h} f_1(Y) f_2(Y) dY = \int_{E_h} y_i \frac{\partial \rho_m(Y)}{\partial y_i} dY = - \int_{E_h} y_i^2 \rho_m(Y) dY = -d_i,$$

имеем:

$$\int_{E_h} (\zeta f_1(Y) + f_2(Y))^2 dY = (\zeta + b)^2 + F_{im}.$$

Полагая далее $\zeta = -b = d_i$, находим из (9.10):

$$\int_{E_h} (d_i f_1(Y) + f_2(Y)) dY = \int_{E_h} \left(d_i y_i + \frac{1}{\rho_m(Y)} \frac{\partial \rho_m(Y)}{\partial y_i} \right)^2 \rho_m(Y) dY < \eta_2.$$

Отсюда, как и в работе [3], легко вывести, что

$$\frac{\partial \ln \rho_m(Y)}{\partial y_i} = -d_i y_i + \eta_3,$$

где $\eta_3 \rightarrow 0$ вместе с η_2 равномерно во всякой ограниченной области векторного пространства Y .

Отсюда непосредственно следует, что $\rho_m(Y)$ при $\eta_1 \rightarrow 0$ сколь угодно близко к нормальной плотности с нулевыми средними и корреляционной матрицей

$$\left\| \begin{array}{cccc} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_h \end{array} \right\|.$$

Следовательно, $p_m(X)$ сколь угодно близко к нормальной плотности с корреляционной матрицей $\|b_{kl}\|$ (так как $B_m \rightarrow \|b_{kl}\|$ при $m \rightarrow \infty$).

10. Теперь мы можем закончить доказательство предельной теоремы. Пусть $G = I(N)$ — энтропия h -мерного нормального распределения. При данных τ, ζ_1 в индивидуальных условиях Линдберга (4.2) рассмотрим изменение энтропии $I(S_m)$ при нарастании суммы дисперсий $\sum_{k=1} B_{kk}(m)$. В силу сказанного выше либо $I(S_m)$

возрастает, либо приращение $I(S_{m+1}) - I(S_m)$ весьма мало сравнительно со $\text{Sp } \Gamma_{m+1}$, а S_m близко к нормальному распределению, и тогда, как нетрудно видеть, $I(S_m)$ близко к G . Пусть $I_0 = \sup_m I(S_m)$. Выберем η_4 и m_1 так, что $0 \leq I_0 - I(S_{m_1}) < \eta_4$. Тогда, рассматривая $m \geq m_1$, легко устанавливаем, что $(G - I_0) < \eta_5$, где $\eta_5 \rightarrow 0$ вместе с $1/m$, τ , $\eta_1, \dots, \eta_4$.

Теперь выберем сколь угодно малое η_6 и введем числа $m_1, m_2, \dots, m_{l-1}, m_l$, такие, что $\sum_{k=1}^h B_{kk}(m_{l+1}) \sim (1 + \eta_6) \sum_{k=1}^h B_{kk}(m_l)$. При достаточно большом m_{l-1} рассмотрим изменение $I(S_m)$ при $m_{l-1} \leq m \leq m_l$. Если на каждом шагу m прирост $I(S_{m+1}) - I(S_m)$ не мал сравнительно со $\text{Sp } \Gamma_{m+1}$, то получим:

$$I(S_{m_{l+1}}) - I(S_{m_{l-1}}) > \frac{1}{2} \sum_{m=m_{l-1}}^{m_l} \text{Sp } \Gamma_{m+1} > \frac{1}{4} \eta_6 \sum_{k=1}^h B_{kk}(m_l).$$

Так как $I(S_m)$ ограничена сверху, то это невозможно (при достаточно большом m_l). Значит, найдется $n_0 \in [m_{l-1}, m_l]$, такое, что $I(S_{n_0+1}) - I(S_{n_0})$ мало сравнительно со $\text{Sp } (\Gamma_{m+1})$ и $(B(n_0))^{-1/2} S_{n_0}$ близко к нормальному распределению. Тогда и для всех $n \in [m_{l-1}, m_l]$ $(B(n))^{-1/2} S_n$ близки к нормальному распределению, ибо по конструкции сегмента $[m_{l-1}, m_l]$ их корреляционные параметры близки к параметрам $(B(n_0))^{-1/2} S_{n_0}$. Это и доказывает центральную предельную теорему. Таким образом, информационный функционал $I(S)$ пригоден для обоснования предельной теоремы.

Сделаем еще некоторые дополнительные замечания. Таким же образом можно вывести многомерную локальную теорему для плотностей, при этом, однако, нужны довольно жесткие дополнительные условия (такие, при которых локальную теорему нетрудно вывести из интегральной). Далее, подобные же рассуждения применимы и к зависимым величинам; в этом случае естественно потребовать в качестве достаточного условия нормальной сходимости возрастание в среднем энтропии $I(S_n)$. При этом получают условия, сходные с условиями М. Лева [11].

Отметим еще некоторое следствие из теоремы Г. Минковского о полуинварианте Вороного (см. [3], п. 9).

Возвращаясь к (7. 2), заметим, что, как следует из предыдущих рассуждений, $I - B_m^{-1} = 0$ тогда и только тогда, когда соответствующая плотность нормальна. Если она не нормальна, то прирост энтропии в первом приближении будет минимальным при заданном $\det(\Gamma_{m+1})$ тогда и только тогда, когда матрица Γ_{m+1} пропорциональна взаимной к $I - B_m^{-1}$. Далее подобные рассуждения можно пытаться делать и для некоторых сепарабельных банаховых пространств.

Л и т е р а т у р а

1. Kullback S., Leibler D. A. On information and sufficiency. — Ann. Math. Stat., 1951, vol. 22, N 1, p. 79—86.
2. Гнеденко Б. В. Элементы теории функций распределения случайных векторов. — Успехи мат. наук, 1944, т. 10, вып. 1, с. 230—244.
3. Линник Ю. В. Теоретико-информационное доказательство центральной предельной теоремы в условиях Линдберга. — Теор. вероятн. и ее примен., 1959, т. 4, вып. 3, с. 311—321.
4. Колмогоров А. Н. Теория передачи информации. Докл. на сессии АН СССР. М., 1956. 33 с.
5. Shannon C., Weaver W. The mathematical theory of communication. Urbana, 1949. 117 p.
6. Rao C. R. Advanced statistical methods in biometric research. New York, 1952. 390 p.
7. Вороной Г. Ф. Избранные труды. Т. 2. Киев, 1952. 391 с.
8. Minkowski H. Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz. — Ges. Abh. Bd 2. New York, 1967. 465 S.
9. Венков Б. А. О приведении положительных квадратичных форм. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1940, т. 4, № 1, с. 37—52.
10. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. IV. М., 1957. 812 с.
11. Loeve M. On sets of probability laws and their limit elements. — Univ. of California Publ. in Statistics, 1950, vol. 1, N 5, p. 53—87.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В сб.: Исследования по современным проблемам теории функций
комплексного переменного. Под ред. А. И. Маркушевича.
М., 1961, с. 49—57

0. Теория функций комплексного переменного за последнее время получила некоторые применения в теории вероятностей. Из этих применений наиболее важны ставшие классическими методы Н. Винера для решения задачи экстраполяции и фильтрации случайных стационарных процессов и последовательностей в случае рациональных спектральных плотностей. Они используют аппарат функций, регулярных в полуплоскости (или в круге). Другие применения широко используют метод перевала для изучения некоторых важных видов вероятностных законов или вывода новых предельных теорем [3—9]. Целые функции нашли применение в некоторых аналитических вопросах математической статистики [10, 11]. В настоящей статье рассматривается еще один круг применений теории функций комплексного переменного, связанный с задачами разложения безгранично делимых вероятностных законов на независимые слагаемые и с некоторыми обобщениями безгранично делимых законов в связи с методом перевала.

Как известно, основным асимптотическим орудием теории суммирования независимых случайных величин являются характеристические функции (в дальнейшем х. ф.)

$$\varphi(it) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x), \quad (0.1)$$

где $F(u) = P(X < u)$, P — знак вероятности; E — знак математического ожидания. Определенная таким образом х. ф. будет существовать для чисто мнимых значений it и, вообще говоря, только для них. Однако для ряда важнейших вероятностных законов эта функция является целой функцией $z = it$. Основными вероятностными законами являются законы Гаусса и Пуассона. Для законов Гаусса

$$\varphi(z) = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2} z^2 + az\right),$$

где a, σ — хорошо известные в вероятностном отношении параметры; для законов Пуассона

$$\varphi(z) = \exp(\lambda(e^{az} - 1) + \beta z)$$

(λ, α, β — параметры).

При операции сложения независимых случайных величин их х. ф. перемножаются; при перемножении произвольного числа х. ф. законов Гаусса и Пуассона с произвольными параметрами и переходе к пределу таких произведений получается класс безгранично делимых вероятностных законов. Всякое конечное произведение подобного рода будет, разумеется, целой функцией, причем бесконечного порядка, если только оно не сводится к одной х. ф. закона Гаусса. Это обстоятельство характерно для теории безгранично делимых законов — целые функции бесконечного порядка играют там особую роль.

Если х. ф. $\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zu} dF(u)$ целая, то ввиду неотрицательности $dF(u)$ она обладает важным для дальнейшего свойством «хребта»: полагая $z = x + iy$, имеем

$$|\varphi(z)| = |\varphi(x + iy)| \leq \varphi(x) \quad (0.2)$$

для всех (x, y) . Далее, если х. ф. $\varphi(z)$ — четная функция z , то

$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{2k}$, где $a_{2k} \geq 0$. Таким образом, теория целых х. ф. тесно связана с теорией степенных рядов с неотрицательными коэффициентами.

1. Пусть $\mathfrak{A}$ — множество х. ф. В частности, $e^z \in \mathfrak{A}$. Пусть $\varphi_1(z) \in \mathfrak{A}$, $\varphi_2(z) \in \mathfrak{A}$ и на мнимой оси

$$\varphi_1(z) \varphi_2(z) = e^z. \quad (1.1)$$

Легко вывести, что в этом случае ¹⁾

$$\varphi_i(z) = \exp a_i z, \quad a_1 + a_2 = 1. \quad (1.2)$$

¹⁾ Параметры a_i, b_i здесь и ниже предполагаются действительными. (Прим. ред.).

Другой хорошо известный пример (теорема Г. Крамера 1936 г.): если $\varphi_1(z) \in \mathfrak{A}$, $\varphi_2(z) \in \mathfrak{A}$ и

$$\varphi_1(z) \varphi_2(z) = e^{z^2}, \quad (1.3)$$

то

$$\varphi_i(z) = \exp(b_i z^2 + a_i z), \quad b_i \geq 0, \quad b_1 + b_2 = 1, \quad a_1 + a_2 = 0.$$

Эти примеры показывают, что при разложении функций из $\mathfrak{A}$ на множители из $\mathfrak{A}$ могут появиться неожиданно жесткие правила, управляющие таким разложением. Множители оказываются непременно того же типа, что и произведение, и описываются конечным числом параметров.

Так будет не всегда, но эти случаи интересны потому, что разложение функций из $\mathfrak{A}$ на множители из $\mathfrak{A}$ отвечает разложению случайных величин на независимые слагаемые. Автор в работах [12—15] исследовал подобные случаи и выявил достаточно широкий и естественно определенный класс их, но они еще не описаны полностью. При этом возникли исходные задачи из теории целых функций, излагаемые в настоящей статье.

Приведем несколько простейших примеров, найденных в работах [12—15].

1. Если в разложении ²⁾ (1.3) $\varphi(z) = \exp(z^2 + \lambda(e^z - 1))$, то

$$\begin{aligned} \varphi_i(z) &= \exp(b_i^2 z^2 + a_i z + \lambda_i(e^z - 1)), \\ b_1^2 + b_2^2 &= 1, \quad a_1 + a_2 = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda. \end{aligned} \quad (1.4)$$

2. Пусть

$$\varphi(z) = \exp(z^2 + \lambda_{-1}(e^{-z} - 1) + \lambda_1(e^z - 1) + \lambda_2(e^{mz} - 1) + \lambda_3(e^{kz} - 1)), \quad (1.5)$$

где $k \geq m$. Если k делится на m , получаем

$$\begin{aligned} \varphi_i(z) &= \exp(b_i^2 z^2 + \lambda_1^{(i)}(e^{-z} - 1) + \lambda_1^{(i)}(e^z - 1) + \lambda_2^{(i)}(e^{mz} - 1) + \\ &\quad + \lambda_3^{(i)}(e^{kz} - 1) + a_i z), \\ b_1^2 + b_2^2 &= 1, \quad a_1 + a_2 = 0, \quad \lambda_j^{(1)} + \lambda_j^{(2)} = \lambda_i, \quad (j=1, 2, 3). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Если k не делится на m , то множители $\varphi_i(z)$ совсем не обязаны быть вида (1.6) и их совокупность имеет весьма сложную структуру, особенно если k/m — иррациональное число.

2. Чтобы подойти к возникающим из этих задач вопросам из теории целых функций, рассмотрим краткую схему доказательства формул (1.4) в примере 1 (подробное доказательство см. в работе [16]). Пусть $\varphi_1 \in \mathfrak{A}$, $\varphi_2 \in \mathfrak{A}$ и на мнимой оси

$$\varphi_1(z) \varphi_2(z) = \exp(z^2 + \lambda(e^z - 1)). \quad (2.1)$$

Доказывается, что $\varphi_i(z)$ — целые функции, не имеющие нулей, стало быть,

$$\varphi_1(z) = \exp g(z), \quad \varphi_2(z) = \exp(z^2 + \lambda(e^z - 1) - g(z)), \quad (2.2)$$

где $g(z)$ — целая функция.

²⁾ Параметры λ , λ_i , $\lambda_j^{(i)}$ ниже предполагаются неотрицательными. (Прим. ред.).

Из свойства «хребта» (0. 2) выводится, что

$$|\varphi(z) \exp(\pm g(z))| \leq \varphi(x) \exp(\pm g(x)), \quad (2.3)$$

где годны оба знака. Полагаем $z = x + iy$, тогда $g(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, откуда выводим:

$$y^2 + 2\lambda e^x \sin^2 \frac{y}{2} \geq u(x, 0) - u(x, y) \geq 0. \quad (2.4)$$

Далее оказывается, что

$$u(x, 0) = O(x^2 + e^x). \quad (2.5)$$

Таким образом, требуется найти вид целой функции $g(z)$ по своеобразным неравенствам (2. 4), наложенным на ее действительную часть. Оказывается, что $g(z)$ — функция экспонентного типа, после этого применение известной теоремы Пэли—Винера [17] дает

$$g(z) = \lambda_1 e^z + P_2(z), \quad \lambda_1 \geq 0,$$

где $P_2(z)$ — квадратный полином. Таким образом, неравенства (2. 4) и (2. 5) жестко определяют целую функцию $g(z)$, при подстановке которой в (2. 2) получаем (1. 4).

Рассмотрим теперь более общий случай: $\varphi_1(z) \varphi_2(z) = \varphi(z)$, $\varphi \in \mathfrak{A}$,

$$\varphi(z) = \exp\left(z^2 + \sum_{k=1}^N \lambda_k (e^{m_k z} - 1)\right), \quad \lambda_k > 0. \quad (2.6)$$

Здесь $m_1 < m_2 < \dots < m_N$. Как и ранее, получаем $\varphi_1(z) = \exp g(z)$, где $g(z)$ — целая функция. В тех же обозначениях, что и прежде, находим:

$$-y^2 + 2 \sum_{k=1}^N \lambda_k e^{m_k x} \sin^2 \frac{m_k y}{2} \geq u(x, 0) - u(x, y) \geq 0, \quad (2.7)$$

$$u(x, 0) = O(x^2 + e^{m_N x}). \quad (2.8)$$

Если выполнено условие делимости

$$m_{k+1} \equiv 0 \pmod{m_k}, \quad (k = 1, 2, \dots, N-1), \quad (2.9)$$

то снова оказывается, что

$$g(z) = \sum_{k=1}^N \lambda'_k e^{m_k z} + P_2(z), \quad (\lambda'_k \geq 0). \quad (2.10)$$

Если же условия (2.9) не выполнены, то (2.10), вообще говоря, не имеет места и $g(z)$ может быть довольно сложного вида. Условия (2.9) являются в этом смысле необходимыми.

3. Интересен случай, когда в (2.6) $N = \infty$, так что

$$\varphi(z) = \exp \left[z^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (e^{m_k z} - 1) \right], \quad (3.1)$$

где $\lambda_k > 0$, $m_{k+1} > m_k$ и выполнено условие делимости (2.9). При этом ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ будем предполагать столь быстро сходящимся, что $\varphi(z)$ оказывается целой функцией. В этом случае $g(z)$ — тоже целая функция, но уже не экспоненциального типа. Снова имеют место неравенства, аналогичные (2.4) и (2.7):

$$y^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e^{m_k x} \sin^2 \frac{m_k y}{2} \geq u(x, 0) - u(x, y) \geq 0. \quad (3.2)$$

Возникает задача: что следует потребовать от ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$, такого, что (3.1) — целая функция с заданными m_k ($k=1, 2, \dots$), для того чтобы неравенства (3.2) снова жестко определяли $g(z)$ так, чтобы

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda'_k e^{m_k z} + P_2(z). \quad (3.3)$$

В работе [15]³⁾ удалось доказать, в частности, что если λ_k убывает столь быстро, что

$$\ln \ln \frac{1}{\lambda_k} > c m_k^{1+\alpha},$$

где $k \geq k_0$, $c > 0$, $\alpha > 0$ — какие-либо константы, то из неравенств (3.2) действительно следует (3.3). Однако это очень жесткое требование. Можно высказать гипотезу, что достаточно лишь, чтобы набор λ_k был таков, что $\varphi(z)$ в (3.1) — целая функция и выполнено условие делимости (2.9). Но пока не видно путей к доказательству или опровержению такого высказывания.⁴⁾

4. Перейдем теперь к одному вопросу из теории целых функций, возникающему из некоторого обобщения понятия безгранично делимого вероятностного закона в связи с методом перевала. Пусть $\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{z\xi} dF(\xi)$ — х. ф. безгранично делимого закона, и притом целая функция. В таком случае $\varphi(z)$ не имеет ну-

³⁾ Результат см. на с. 104—190. (Прим. ред.).

⁴⁾ Проблема до сих пор не решена. (Прим. ред.).

лей, так что $\varphi(z) = \exp g(z)$, где $g(z)$ — целая функция. Тогда при $\xi_2 \geq \xi_1$ имеем:

$$F(\xi_2) - F(\xi_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{-z\xi_2} - e^{-z\xi_1}}{-z} \varphi(z) dz \geq 0. \quad (4.1)$$

Здесь интегрирование идет по мнимой оси.⁵⁾

Основным свойством безгранично делимых законов является следующее: при любом $\alpha > 0$ образуем $(\varphi(z))^\alpha = \exp(\alpha g(z))$ и заменим в интеграле (4.1) $\varphi(z)$ на $(\varphi(z))^\alpha$. Результат интегрирования $F_\alpha(\xi_2) - F_\alpha(\xi_1)$ всегда будет неотрицателен:

$$F_\alpha(\xi_2) - F_\alpha(\xi_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{-z\xi_2} - e^{-z\xi_1}}{-z} (\varphi(z))^\alpha dz \geq 0. \quad (4.2)$$

Заметим, что целая функция $\varphi(z)$, а также функция $(\varphi(z))^\alpha = \exp(\alpha g(z))$ (при $\alpha > 0$) будут обладать свойством «хребта». Рассмотрим теперь примеры

$$\varphi_1(z) = \exp(z^2 + \lambda_1(e^{2z} - 1) + \lambda_2(e^{3z} - 1)).$$

Это х. ф. безгранично делимого закона. При любом $\alpha > 0$ интеграл вида (4.2) и его производная по параметру существуют и неотрицательны:

$$f_\alpha(\xi) = \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-z\xi} (\varphi_1(z))^\alpha dz \geq 0.$$

$$\varphi_2(z) = \exp(z^2 + \lambda_1(e^{2z} - 1) + \lambda_2(e^{3z} - 1) - \mu(e^z - 1)), \quad (4.3)$$

где $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\mu > 0$. При μ достаточно малом $\varphi_2(z)$ будет х. ф., но только не безгранично делимой (см. [13]). Это значит, что в (4.3) при подстановке $(\varphi_2(z))^\alpha$ вместо $(\varphi_1(z))^\alpha$ получим $f_\alpha(\xi) \geq 0$ при $\alpha=1$, но $f_\alpha(\xi)$ будет менять знак при достаточно малых значениях параметра α . Между тем $\varphi_2(z)$ обладает свойством «хребта» (0.2), так как она есть х. ф.; стало быть, и $(\varphi_2(z))^\alpha$ обладает свойством «хребта» при любых $\alpha > 0$, но уже не при любых α будет х. ф. Таким образом, необходимое свойство «хребта» еще не обеспечивает свойства быть х. ф.

Мы докажем, однако, теорему, согласно которой свойство «хребта» делает $\varphi(z)$ сходной с безгранично делимой х. ф.

Т е о р е м а. Пусть $\varphi(z) = \exp g(z)$ — целая четная функция без нулей порядка выше первого, действительная на действительной оси и имеющая свойство «хребта»:

$$|\varphi(z)| \leq \varphi(x).$$

⁵⁾ Интеграл понимается как $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-iT}^{iT}$. (Прим. ред.).

Тогда при любом $\alpha > 0$

$$f_{\alpha}(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{-z\xi} (\varphi(z))^{\alpha} dz > 0, \quad (4.4)$$

если этот интеграл сходится.

L — контур перевала, снимаемый далее.

Мы изложим кратко доказательство этой теоремы и возникающие здесь вопросы. При ξ действительном $e^{-z\xi}$, а стало быть, и $e^{-z\xi}(\varphi(z))^{\alpha}$ будет целой функцией без нулей, имеющей свойство «хребта». Далее, на действительной оси должна существовать хотя бы одна точка перевала $\xi_0(\alpha, \xi)$. Достаточно доказать, что $e^{-z\xi}(\varphi(z))^{\alpha}$ достигает минимума при $z=x$ (когда она по условию действительна). Для этого заметим, что при $z=x \rightarrow \infty$ $e^{-z\xi}(\varphi(z))^{\alpha}$ должна неограниченно возрастать, ибо в противном случае мы имели бы

$$|\varphi(z)| = O\left(\exp \frac{\xi}{\alpha} |x|\right) \text{ при } x > 0;$$

так как $\varphi(z)$ четна, то это же было бы верным при $z=x < 0$, но тогда, поскольку действительная ось есть «хребет» $\varphi(z)$, мы имели бы вообще $\varphi(z) = O(\exp(\xi/\alpha)|x|)$, что, по допущению, невозможно. Таким образом, на действительной оси найдутся точки перевала. Берем ту из них, где $|e^{-z\xi}(\varphi(z))^{\alpha}|$ минимально на всей действительной оси (любую, если их несколько). Уходим из нее в верхнюю полуплоскость по линии наискорейшего спуска (что возможно по свойству «хребта» действительной оси) и двигаемся по какой-либо линии наискорейшего спуска. Полученный контур (кусочно-аналитический) назовем L_1 . Он весь будет проходить в верхней полуплоскости, ибо не может пересекать реальную ось. В самом деле, при движении по L_1 $|e^{-z\xi}(\varphi(z))^{\alpha}|$ убывает, и так как в начальной точке L_1 при $z=\xi_0(\alpha, \xi)$ имеем минимум выражения $|e^{-z\xi}(\varphi(z))^{\alpha}|$ на всей действительной оси, то позже на эту ось мы попасть не сможем. Далее, на контуре L_1 $\operatorname{Im}(e^{-z\xi}(\varphi(z))^{\alpha}) = 0$, ибо мнимая часть $e^{-z\xi}(\varphi(z))^{\alpha}$ должна быть постоянной на линии наискорейшего спуска, а в начале L_1 она равна 0. Отсюда

$$\operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} e^{-z\xi} (\varphi(z))^{\alpha} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} e^{-z\xi} (\varphi(z))^{\alpha} dy.$$

В начале контура L_1 $dy > 0$, ибо контур уходит в верхнюю полуплоскость. Далее, он не пересекает действительной оси, и на нем действительное число $e^{-z\xi}(\varphi(z))^{\alpha} = |e^{-z\xi}(\varphi(z))^{\alpha}|$ не возрастает. Разбивая наш контур на части, где $dy \geq 0$ и $dy < 0$, легко обнаруживаем, что сумма интегралов по его частям с $dy > 0$ больше суммы интегралов по его частям с $dy < 0$, так что

$$\operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} e^{-z\xi} (\varphi(z))^{\alpha} dz > 0. \quad (4.5)$$

Затем присоединим к L_1 его зеркальное изображение относительно действительной оси L_2 . Тогда, пробегая по L_2 из ∞ к действительной оси, получим:

$$\int_{L_1} e^{-z\xi} (\varphi(z))^\alpha dz = - \int_{L_2} \overline{e^{-z\xi} (\varphi(z))^\alpha} dz > 0.$$

Отсюда

$$\operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} e^{-z\xi} (\varphi(z))^\alpha dz = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} e^{-z\xi} (\varphi(z))^\alpha dz > 0. \quad (4.6)$$

Беря в качестве L контур $L_2 + L_1$, пробегаемый от ∞ через действительную ось к ∞ , из (4.5) и (4.6) получаем (4.4).

5. Изложенная теорема может представить некоторый интерес в следующем отношении: каждой степени $\varphi(z)$ она ставит в соответствие некоторую (ненормированную) вероятностную плотность $f_\alpha(z)$ и тем самым дает аналог аппарата для изучения сложения независимых случайных величин, действующий для какого-то типа зависимых случайных величин.

Для выяснения действия этого аппарата желательно решить некоторые относящиеся сюда вопросы теории целых функций. Прежде всего надо выяснить, когда контур L можно сделать независимым от α и ξ . Разумеется, любую конечную часть контура L можно заменить другим спрямляемым контуром, так как подынтегральная функция целая. Но позволительно ли деформировать один из контуров, построенных по α , ξ , в другой, пока не ясно. Далее, интересно найти формулы обращения для интеграла $\int_L e^{-z\xi} (\varphi(z))^\alpha dz$. Они, вообще говоря, неоднозначны, так как

иногда интеграл не меняется от прибавления к подынтегральной функции некоторых других целых функций.

В заключение рассмотрим один пример. Пусть $\varphi(z) = \exp \alpha (e^z + e^{-z} - 2) - x$. ф. безгранично делимого закона. Применение формулы (4.2) с контуром по мнимой оси дает интегральное распределение $F(\xi)$; здесь получается композиция двух законов Пуассона и нет вероятностной плотности. Точка перевала (единственная) на действительной оси находится из уравнения $\alpha (e^x - e^{-x}) - \xi = 0$; контур L определяется уравнением $\alpha (e^x - e^{-x}) \sin y - y\xi = 0$, при $x \rightarrow \infty$ он асимптотически приближается к контуру

$$x=0, \quad |y| \leq \pi; \quad y = \pm \pi, \quad 0 < x < \infty;$$

интеграл сходится весьма быстро, и имеется плотность $f_\alpha(\xi) > 0$.

Л и т е р а т у р а

1. Wiener N. Interpolation, extrapolation and smoothing of stationary time series. Cambridge—New York, 1949. 163 p.
2. Я г л о м А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций. — Успехи мат. наук, 1952, т. 7, вып. 5, с. 3—168.

3. Линник Ю. В. Об устойчивых вероятностных законах с показателем, меньшим единицы. — ДАН СССР, 1954, т. 94, № 4, с. 619—621.
4. Золотарев В. М. Об аналитических свойствах устойчивых законов распределения. — Вестник ЛГУ, 1956, № 1. Сер. мат., мех., астрон., вып. 1, с. 49—52.
5. Daniels H. E. Saddlepoint approximations in statistics. — Ann. Math. Stat., 1954, vol. 25, N 1, p. 53—56.
6. Рихтер В. Локальные предельные теоремы для больших уклонений. — ДАН СССР, 1957, т. 115, № 1, с. 53—56.
7. Рихтер В. Уточнение одного неравенства С. Н. Бернштейна для больших уклонений. — Вестник ЛГУ, 1959, № 1. Сер. мат., мех., астрон., вып. 1, с. 24—29.
8. Рихтер В. Многомерные локальные предельные теоремы для больших уклонений. — Теор. вероятн. и ее примен., 1958, т. 3, вып. 1, с. 107—114.
9. Рихтер В. Предельное поведение распределения χ^2 в случае больших уклонений. — ДАН СССР, 1958, т. 119, № 4, с. 652—654.
10. Линник Ю. В. О полиномиальных статистиках в связи с аналитической теорией дифференциальных уравнений. — Вестник ЛГУ, 1956, № 1. Сер. мат., мех., астрон., вып. 1, с. 35—48.
11. Зингер А. А. Независимость квазиполиномиальных статистик и аналитические свойства распределений. — Теор. вероятн. и ее примен., 1958, т. 3, вып. 3, с. 265—284.
12. Линник Ю. В. Некоторые теоремы о разложении безгранично делимых законов. — ДАН СССР, 1957, т. 116, № 4, с. 549—551.
13. Линник Ю. В. О разложении безгранично делимых законов. — ДАН СССР, 1957, т. 116, № 5, с. 735—737.
14. Линник Ю. В. Общие теоремы о разложении безгранично делимых законов. 1. — Теор. вероятн. и ее примен., 1958, т. 3, вып. 1, с. 3—40. (Исправления к статье см.: там же, 1960, т. 5, вып. 3, с. 376).
15. Линник Ю. В. Об « α -разложениях» безгранично делимых вероятностных законов. — Вестник ЛГУ, 1959, № 1. Сер. мат., мех., астрон., вып. 1, с. 14—23.
16. Линник Ю. В. О разложении композиции законов Гаусса и Пуассона. — Теор. вероятн. и ее примен., 1957, т. 2, вып. 1, с. 34—59.
17. Paley R., Wiener N. Fourier transforms in the complex domain. — Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 1934, vol. 19. 184 p.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН ПРИ УЧЕТЕ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ. I—II

Теор. вероятн. и ее примен., 1961, т. 6, вып. 2, с. 145—163;
вып. 4, с. 377—391

I. Формулировки. Простейшие зоны локального нормального притяжения. «Узкие» простейшие зоны интегрального нормального притяжения

1. Здесь рассматриваются независимые одинаково распределенные случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ с $E(X_i)=0$; $D(X_i)=\sigma^2 < \infty$. Составляются нормированные суммы

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sigma \sqrt{n}}. \quad (1.1)$$

Из классической теории суммирования случайных величин (см. [1]) известно, что при всяком данном x и $n \rightarrow \infty$ имеем:

$$P(Z_n > x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2/2} du \rightarrow 0 \quad (1.2)$$

и соотношение (1.2) выполняется равномерно по x . Если x может возрасти вместе с n , то при $n \rightarrow \infty$ из (1.2) следует лишь, что $P(Z_n > x) \rightarrow 0$. В некоторых случаях желательно иметь более точную информацию о поведении $P(Z_n > x)$ — возникает проблема изучения вероятностей больших отклонений.

Подобные вопросы появляются, например, в математической статистике [2], теории информации [3], аналитической арифметике [4, 5]. Они изучались А. Я. Хинчиным [6], Н. В. Смирновым [7], Г. Крамером [8], В. В. Петровым [9], В. Рихтером [10—12] и др. Данная работа содержит подробный вывод результатов, кратко изложенных в моем докладе [13]. В ней будут трактоваться вопросы нормальной сходимости в случае интегральных и локальных теорем, а также (в ч. III) — некоторые предельные теоремы, действующие на всей оси (при любых значениях x).

Пусть $\Psi(n) \rightarrow \infty$ — какая-либо монотонная функция. Последовательность сегментов $[0, \Psi(n)]$ будет называться зоной (интегрального) нормального притяжения (з. н. п.), если

$$\frac{P(Z_n > x)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2/2} du} \rightarrow 1 \quad (1.3)$$

равномерно по $x \in [0, \Psi(n)]$. Для случая, когда Z_n имеет плотность вероятности $p_{Z_n}(x)$, будем рассматривать зоны равномерного локального нормального притяжения (з. р. л. н. п.).

Зона $[0, \Psi(n)]$ будет называться з. р. л. н. п., если

$$\frac{p_{Z_n}(x)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}} \rightarrow 1 \quad (1.4)$$

равномерно по $x \in [0, \Psi(n)]$. Аналогично определяются з. р. л. н. п. вида $[-\Psi(n), 0]$.

Как будет видно из дальнейшего, особую роль будут играть з. н. п. $[0, \Psi(n)]$ и $[-\Psi(n), 0]$, где

$$\Psi(n) = o(n^{1/6}). \quad (1.5)$$

Такие зоны будем называть «узкими».

В данной части работы мы изучим обширный класс узких з. р. л. н. п., узких з. н. п. и из з. р. л. н. п. и з. н. п., не яв-

ляющихся, вообще говоря, узкими, рассмотрим зоны $[0, \Psi(n)]$ и $[-\Psi(n), 0]$, где $\Psi(n) = n^\alpha$ ($\alpha > 0$ — константа).

Обозначения: $E_1, E_2, \dots$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$; $\eta_1, \eta_2, \dots$; $\xi_0, \xi_1, \dots$ — малые положительные константы, выбираемые каждая по предыдущим; $c_0, c_1, \dots$; $C_0, C_1, \dots$; $K_0, K_1, \dots$ — положительные константы, выбираемые аналогично; B — ограниченное число, не всегда одно и то же.

2. Зоны $[0, \Psi(n)]$, $[-\Psi(n), 0]$, где $\Psi(n) = n^\alpha$ ($\alpha > 0$ — константа) будем называть простейшими. Из зон, не являющихся узкими, мы будем трактовать только простейшие.

Узкие зоны $[0, \Lambda(n)]$, $[-\Lambda(n), 0]$ (где $\Lambda(n) = o(n^{1/2})$ — монотонная функция) в дальнейшем у нас будут связаны с неубывающей непрерывной функцией $h(x)$, заданной при $x \geq 2$. Мы будем рассматривать три класса таких функций; естественность рассмотрения именно этих классов будет обоснована далее.

Класс I: функции $h(x)$ при условиях

$$(\ln x)^{2+\xi_0} \leq h(x) \leq x^{1/2} \quad (2.1)$$

($\xi_0 > 0$ сколь угодно мало). Далее, если положить

$$h(x) = \exp(H(\ln x)),$$

то $H(z)$ должна быть монотонной дифференцируемой функцией, и притом должно быть

$$H'(z) \leq 1; H'(z) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \infty; \quad (2.2)$$

$$H'(z) \exp H(z) > c_1 z^{1+\xi_1}. \quad (2.3)$$

Класс II: неубывающие непрерывные функции $h(x)$ при условиях

$$\rho_0(x) \ln x \leq h(x) \leq (\ln x)^2; h(x) = M(x) \ln x = N(\ln x) \ln x;$$

$$N'(z) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \infty; \quad (2.4)$$

в дальнейшем $\rho_0(x), \rho_1(x), \dots, \rho_i(x)$ — заданные сколь угодно медленно возрастающие функции.

Класс III: функции $h(x)$ при условиях

$$3 \ln x \leq h(x) \leq M \ln x, \quad (2.5)$$

где $M \geq 3$ — константа.

3. Локальные предельные теоремы мы будем доказывать для класса случайных величин X_j , обладающих ограниченной непрерывной плотностью вероятности $g(x)$ (этот класс назовем классом (d)). Надо заметить, что предложенный здесь метод доказательства предельных теорем с учетом больших отклонений гораздо проще в применении к локальным теоремам, чем к интегральным. Это объясняется тем, что локальные теоремы мы будем доказывать для класса (d) , тогда как интегральные теоремы — без ограничения на случайные величины X_j (помимо существования дисперсии).

Сформулируем сперва некоторые теоремы, имеющие место для простейших зон. Все локальные теоремы у нас будут формулироваться только для величин X_j класса (d) .

Теорема 1. Если для любого $\alpha < 1/2$ зоны $[0, n^\alpha]$ и $[-n^\alpha, 0]$ суть з. р. л. н. п., то все переменные X_j нормальны.

(В ч. III настоящей работы аналогичная теорема доказывается для зон интегрального нормального притяжения).

Таким образом, интересны лишь простейшие зоны, отвечающие $\alpha < 1/2$. Теорема 1 следует из более сложной теоремы 2.

Теорема 2. Пусть $\rho(n) \rightarrow \infty$ — монотонная сколь угодно медленно возрастающая функция; $0 < \alpha < 1/2$. Если $\alpha < 1/6$, то необходимым условием для того, чтобы обе зоны $[0, n^\alpha \rho(n)]$, $[-n^\alpha \rho(n), 0]$ были з. р. л. н. п., будет:

$$\text{Е exp} |X_j|^{4\alpha/(2\alpha+1)} < \infty. \quad (3.1)$$

Это условие и достаточно для того, чтобы зоны $[0, n^\alpha/\rho(n)]$ и $[-n^\alpha/\rho(n), 0]$ были з. р. л. н. п.

Если $1/6 \leq \alpha < 1/2$, рассмотрим ряд критических чисел

$$\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{3}{10}, \dots, \frac{1}{2} \frac{s+1}{s+3}, \dots \quad (3.2)$$

Пусть $\frac{1}{2} \frac{(s+1)}{(s+3)} \leq \alpha < \frac{1}{2} \frac{(s+2)}{(s+4)}$. Если зоны $[0, n^\alpha \rho(n)]$, $[-n^\alpha \rho(n), 0]$ суть з. р. л. н. п., должно иметь место условие (3.1) и все моменты X_j до $(s+3)$ -го включительно должны совпадать с моментами нормального закона. Эти два условия достаточны для того, чтобы зоны $[0, n^\alpha/\rho(n)]$, $[-n^\alpha/\rho(n), 0]$ были з. р. л. н. п.

Теорема 3. Если $\alpha < 1/6$, то для того, чтобы зоны $[0, n^\alpha \rho(n)]$, $[-n^\alpha \rho(n), 0]$ были з. н. п. (интегральными), необходимо выполнение условия (3.1). Оно достаточно для того, чтобы зоны $[0, n^\alpha/\rho(n)]$, $[-n^\alpha/\rho(n), 0]$ были з. н. п. и сходимость (1.3) в этих зонах была равномерна.

4. В этой части работы мы будем трактовать лишь простейшие зоны. Остановимся на условии (3.1).

Лемма 1. Пусть $0 < \alpha < 1/2$. Условие (3.1) необходимо для того, чтобы зоны $[0, n^\alpha \rho(n)]$, $[-n^\alpha \rho(n), 0]$ были з. н. п.

В самом деле, пусть условие (3.1) нарушено. Тогда существует последовательность $x_m \rightarrow \infty$, такая, что либо

$$P(X_1 > x_m) > \exp(-2x_m^{4\alpha/(2\alpha+1)}), \quad (4.1)$$

либо

$$P(X_1 < -x_m) > \exp(-2x_m^{4\alpha/(2\alpha+1)}). \quad (4.2)$$

Пусть (4.1) имеет место. Для достаточно большого m выберем n , такое, что $x_m = \sigma n^{1/2+\alpha} \rho(n) + \theta$; $|\theta| \leq 1$. Зона $[0, n^\alpha \rho(n)]$ должна быть з. н. п., и мы должны иметь

$$P\left(Z_n > \frac{n^\alpha \rho(n)}{2}\right) < \exp\left(-\frac{n^{2\alpha} (\rho(n))^2}{16}\right). \quad (4.3)$$

Но событие $Z_n > n^{\alpha} \rho(n)/2$ наверное произойдет, если случатся два независимых события:

$$X_1 > \sigma n^{1/2+\alpha} \rho(n) + \theta, \left| \frac{X_2 + X_3 + \dots + X_n}{\sigma \sqrt{n}} \right| < 1.$$

Отсюда, по центральной предельной теореме и (4.1),

$$\mathbf{P}\left(Z_n > \frac{n^{\alpha} \rho(n)}{2}\right) > c_0 \mathbf{P}(X_1 > x_m) > c_0 \exp[-c_1 n^{2\alpha} (\rho(n))^{4\alpha/(2\alpha+1)}]. \quad (4.4)$$

Так как $\alpha < 1/2$, $4\alpha/(2\alpha+1) < 1$, то (4.4) противоречит (4.3). Случай (4.2) трактуется аналогично.

Лемма 2. В условии леммы 1 условие (3.1) необходимо для того, чтобы зоны $[0, n^{\alpha} \rho(n)]$, $[-n^{\alpha} \rho(n), 0]$ были з. р. л. н. п.

Разумеется, речь идет о случайных величинах класса (d). Заметим, что лемму 2 нельзя непосредственно вывести из леммы 1, так как локальная равномерная сходимости в указанных выше зонах не дает полных сведений о $\mathbf{P}(Z_n > x)$.

Пусть (3.1) не выполняется. Покажем, что тогда существует последовательность $x_m \rightarrow \infty$, таких, что либо

$$\int_{x_m}^{2x_m} g(x) dx > \exp(-4x_m^{4\alpha/(2\alpha+1)}), \quad (4.5)$$

либо

$$\int_{-2x_m}^{-x_m} g(x) dx > \exp(-4x_m^{4\alpha/(2\alpha+1)}). \quad (4.6)$$

В самом деле, если такой последовательности нет, то при любых $x \geq 0$

$$\int_x^{2x} g(x) dx = B \exp(-4x^{4\alpha/(2\alpha+1)}) \quad (4.7)$$

и аналогичное условие имеет место для $x < 0$. Тогда

$$\int_x^{2x} \exp(x^{4\alpha/(2\alpha+1)}) g(x) dx = B \exp(-x^{4\alpha/(2\alpha+1)}), \quad (x > 0).$$

Полагая $x=1, 2, 4, \dots, 2^s, \dots$ и проводя то же рассуждение для $x < 0$, придем к (3.1), что противоречиво. Итак, (4.5) или (4.6) имеют место. Пусть имеем (4.5), полагаем $x_m = \sigma n^{1/2+\alpha} \rho(n) + \theta$, $|\theta| < 1$. Так как $[0, n^{\alpha} \rho(n)]$ есть з. р. л. н. п., то

$$\mathbf{P}\left(\frac{n^{\alpha} \rho(n)}{2} \leq Z_n \leq \frac{5}{2} n^{\alpha} \rho(n)\right) < \exp(-n^{2\alpha} (\rho(n))^2 c_2). \quad (4.8)$$

Событие, указанное в скобках в левой части (4.8), наверное произойдет, если $x_m \leq X_1 \leq 2x_m$; $|(X_2 + X_3 + \dots + X_n)/\sigma \sqrt{n}| < 1$. Далее рассуждаем, как в доказательстве леммы 1. Таким образом, необходимость условия (3.1) в теоремах 2 и 3 доказана.

5. Переходим к доказательству теоремы 2. Примем условие (3.1), причем будем задавать его в ослабленной форме

$$E \exp(A | X_j |^{4\alpha/(2\alpha+1)}) < \infty, \quad (5.1)$$

где $A < 1$ — константа. При этом, не нарушая общности, будем считать $\sigma^2 = 1$. Из (5.1) следует существование всех моментов. Пусть задано $\alpha < 1/2$. Если $\alpha \geq 1/6$, рассмотрим ряд чисел (3.2). Пусть

$$\frac{1}{2} \frac{s+1}{s+3} \leq \alpha < \frac{1}{2} \frac{s+2}{s+4}. \quad (5.2)$$

Если первое неравенство не обращается в равенство, рассмотрим центральные моменты X_j $\mu_3, \mu_4, \dots, \mu_{s+3}$ и семиинварианты $\chi_3 = \mu_3, \chi_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2, \chi_5 = \mu_5 - 10\mu_3\mu_2, \dots, \chi_{s+3}$. Если же имеет место равенство, то берем моменты $\mu_3, \dots, \mu_{s+2}$ и семиинварианты $\chi_3, \dots, \chi_{s+2}$. Пока остановимся на случае, когда в (5.2) нет равенства. Допустим теперь, что первый исчезающий семиинвариант есть $\chi_a, 3 \leq a \leq s+3$, так что

$$\chi_r = 0 \quad (r < a = s_0 + 3), \quad \chi_{s_0+3} \neq 0. \quad (5.3)$$

Здесь $s_0 \leq s$. Мы можем сделать, таким образом, предположение, что $a = s_0 + 3 \geq 3$ (к случаю $a < 1/6$ или к случаю знака равенства в (5.2) мы вернемся позже).

Величины X_j принадлежат классу (d), т. е. имеют непрерывную и ограниченную плотность вероятности $g(x)$. Положим $\varphi(t) =$

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} g(x) dx$, так что $\varphi(t)$ — х. ф. X_j . При этом $|\varphi(t)|^2$ будет

х. ф. $X_1 - X'_1$, где X'_1 одинаково распределено с X_1 и независимо от него; величина $X_1 - X'_1$ имеет плотность вероятности (ибо $g(x)$ ограничена); стало быть, $|\varphi(t)|^2$ имеет неотрицательное преобразование Фурье. В таком случае, согласно одной теореме теории интегралов Фурье (см. [14], с. 20), $|\varphi(t)|^2 \in L_1(-\infty, \infty)$, так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 dt < \infty. \quad (5.4)$$

Нормированная сумма Z_n имеет плотность вероятности $p_{Z_n}(x)$. Имеем:

$$p_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(t))^n \exp(-i\sqrt{n}tx) dt. \quad (5.5)$$

Далее, $|\varphi(t)| < 1$ при $t \neq 0$ и $\varphi(t) \rightarrow 0$ при $|t| \rightarrow \infty$. Таким образом, если $0 < \varepsilon_0 < 1$, то

$$p_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} (\varphi(t))^n \exp(-i\sqrt{n}tx) dt + R_1, \quad (5.6)$$

где

$$|R_1| = B \exp(-\varepsilon_1 n). \quad (5.7)$$

В силу условия (5.1) функция $\varphi(t)$ бесконечно дифференцируема на всей оси. При любом $T > 0$, $|t| \leq T$, $p > 0$ целом имеем

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{t\varphi'(0)}{1!} + \dots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \varphi^{(p-1)}(0) + \frac{t^p}{p!} R_p(t), \quad (5.8)$$

где

$$|R_p(t)| \leq 2 \sup_{|t| \leq T} |\varphi^{(p)}(t)|. \quad (5.9)$$

Далее, $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = -1$, так что при $|t| \leq \varepsilon_0$ и подходящем ε_0 в силу (5.8)

$$|\varphi(t)| \leq 1 - \frac{t^2}{4}. \quad (5.10)$$

Положим теперь

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{s_0 + 3} < \alpha, \quad (5.11)$$

$$\mu_1 = \frac{1}{2} - \alpha_1 = \frac{1}{s_0 + 3}. \quad (5.12)$$

Из (5.10) замечаем, что при $n^{-\mu_1} \leq |t| \leq \varepsilon_0$

$$|\varphi(t)|^n \leq \left(1 - \frac{n^{-2\mu_1}}{4}\right)^n = B \exp(-c_3 n^{2\alpha_1}). \quad (5.13)$$

6. Функция $\varphi(t)$ бесконечно дифференцируема, но, вообще говоря, не аналитическая (и даже не квазианалитическая). Нам будут нужны оценки для $\varphi^{(q)}(t)$ при больших q . Имеем:

$$|\varphi^{(q)}(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x|^q g(x) dx. \quad (6.1)$$

Положим

$$k = \frac{1 + 2\alpha}{4\alpha}. \quad (6.2)$$

Тогда из (5.1) получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(A|x|^{1/k}) g(x) dx < \infty. \quad (6.3)$$

Отсюда при любом $x \geq 1$ выводим $\exp(Ax^{1/k}) \int_x^\infty g(u) du < \infty$ и аналогичное соотношение для $x \leq -1$. После этого легко находим:

$$|\varphi^{(q)}(t)| = B^q \Gamma(kq). \quad (6.4)$$

Положим $K(t) = \ln \varphi(t)$, $K(0) = 0$ ($|t| \leq n^{-\mu_1}$). Из (5.6) и (5.13) выводим:

$$p_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int_{-n^{-\mu_1}}^{n^{-\mu_1}} \exp(nK(t) - \sqrt{n} itx) dt + B \exp(-c_4 n^{-2\alpha_1}). \quad (6.5)$$

Из (5.10) видим, что при $|t| \leq \varepsilon_0$

$$K(t) = B. \quad (6.6)$$

Нам нужны будут оценки для $K^{(q)}(t_0)$ при $|t_0| \leq \varepsilon_0/2$. Положим

$$\tilde{\varphi}_q(t + t_0) = \varphi(t_0) + \frac{t\varphi'(t_0)}{1!} + \dots + \frac{t^q \varphi^{(q)}(t_0)}{q!}. \quad (6.7)$$

Тогда получим:

$$K^{(q)}(t_0) = (\ln \tilde{\varphi}(t + t_0))^{(q)}|_{t=0}. \quad (6.8)$$

В самом деле, для расчета $K^{(q)}(t_0)$ нам нужны только производные $\varphi^{(p)}(t_0)$ при $p \leq q$, которые совпадают с $\tilde{\varphi}^{(p)}(t_0)$. Если C_ρ — круг $|t| \leq \rho$, где полином $\tilde{\varphi}_q(t + t_0)$ не имеет нулей, то $\ln \tilde{\varphi}(t + t_0)$ — функция, аналитическая в круге $|t| \leq \rho$ и

$$K^{(q)}(t_0) = \frac{q!}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{\ln \tilde{\varphi}(t + t_0)}{t^{q+1}} dt. \quad (6.9)$$

Обратимся теперь к (6.7). Соотношение (6.4) дает:

$$\frac{\varphi^{(p)}(t_0)}{p!} = B \exp(Bp + (k-1)p \ln p). \quad (6.10)$$

Теперь в качестве C_ρ избирается окружность

$$|t| = \exp(-K_0 - (k-1) \ln q). \quad (6.11)$$

В этом круге

$$\sum_{p=1}^q \frac{\varphi^{(p)}(t_0)}{p!} t^p = B \sum_{p=1}^q \exp(Bp - K_0 p + (k-1)p(\ln p - \ln q)). \quad (6.12)$$

При достаточно большом K_0 абсолютная величина (6.12) не превосходит $1/4$. Отсюда и из (5.8) имеем (при достаточно большом K_0) при $|t| \leq \varepsilon_0/2$:

$$K^{(q)}(t_0) = B \exp(Bq + kq \ln q). \quad (6.13)$$

Далее, при $|t| \leq n^{-\mu_1}$

$$K(t) = K(0) + \frac{tK'(0)}{1!} + \dots + \frac{t^m K^m(0)}{m!} + R_m(t), \quad (6.14)$$

где при $|t| \leq n^{-\mu_1}$

$$|R_m(t)| \leq B \exp\{m(B + (k-1)\ln m - \mu_1 \ln n)\}. \quad (6.15)$$

Теперь выберем целое число m вида

$$m = \left[\frac{n^{2\alpha_1}}{K_1} \right], \quad (6.16)$$

где K_1 — достаточно большая константа, которую выберем далее. Имеем, учитывая, что $k = (1 + 2\alpha)/4\alpha$, $\mu_1 = 1/2 - \alpha_1$:

$$\begin{aligned} B \exp(Bm + (k-1)m \ln m - \mu_1 m \ln n) &= \\ &= B \exp\left(Bm + (k-1)m \ln m - \left(\frac{1}{2} - \alpha_1\right)m \ln n\right) = \\ &= B \exp\left(Bm + m\left(\frac{1-2\alpha}{4\alpha}(2\alpha \ln n - \ln K_1) - \left(\frac{1}{2} - \alpha_1\right) \ln n\right)\right) = \\ &= B \exp\left[m\left(B - (\alpha - \alpha_1) \ln n - \frac{1-2\alpha}{4\alpha} \ln K_1\right)\right]. \end{aligned} \quad (6.17)$$

$\alpha \geq \alpha_1$; $1 - 2\alpha > 0$, так что (6.17) и (6.15) имеют оценку

$$B \exp(-\varepsilon_1 n^{2\alpha_1}), \quad (6.18)$$

если K_1 выбрано достаточно большим. Здесь $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(K_1)$.

7. Положим $\Psi_r = K^{(r)}(0)$; известно, что величины Ψ_r лишь степенями i^r отличаются от семиинвариантов X_j . Ввиду этого $\Psi_r = 0$ при $3 \leq r < s_0 + 3$. Имеем:

$$nK(t) = -\frac{nt^2}{2} + n \sum_{r=s_0+3}^m \Psi_r \frac{t^r}{r!} + B \exp(-\varepsilon_1 n^{2\alpha_1}). \quad (7.1)$$

Далее, $\operatorname{Re} nK(t) \leq 0$ при $|t| \leq n^{-\mu_1}$. Полагая

$$K_{s_0+3}(t) = \sum_{r=s_0+3}^m \frac{\Psi_r}{r!} t^r, \quad (7.2)$$

найдем из (6.5), (6.14) и (6.18):

$$\begin{aligned} p_{Z_n}(x) &= \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int_{-n^{-\mu_1}}^{n^{-\mu_1}} \exp\left(-n \frac{t^2}{2} + nK_{s_0+3}(t) - i\sqrt{n}tx\right) dt + \\ &\quad + B \exp(-\varepsilon_2 n^{2\alpha_1}). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Займемся теперь целой функцией

$$\exp(nK_{s_0+3}(t)) = 1 + \sum_{r=s_0+3}^{\infty} \frac{\chi_r t^r}{r!} \quad (7.4)$$

(где через χ_r обозначены коэффициенты). Важно отметить (это следует из (7.2)), что

$$\chi_{s_0+3} = n\Psi_{s_0+3}. \quad (7.5)$$

Далее, согласно (6.13) (при $t_0=0$), если $|t| \leq n^{-\mu_1}$, $r \leq m$, то

$$\frac{t^r \Psi_r}{r!} = B \exp \left[r \left(B + \frac{1-2a}{4a} \ln r - \mu_1 \ln n \right) \right]. \quad (7.6)$$

При $r \leq C_1$ и $|t| \leq n^{-\mu_1}$ (7.6) дает

$$B n^{-r\mu_1}. \quad (7.7)$$

При $r > C_1$ замечаем, что если $\ln r \leq E_1 \ln n$, то (7.6) дает

$$B n^{-E_1 r}. \quad (7.8)$$

Если же $\ln r > E_1 \ln n$, то, согласно (6.17) и (6.18), для (7.6) найдем оценку

$$B \exp(-E_1 r) (n^{E_1} \leq r \leq m). \quad (7.9)$$

Таким образом, на окружности $|t| \leq n^{-\mu_1}$ имеем

$$nK_{s_0+3}(t) = Bn \sum_{r=s_0+3}^{C_1} n^{-r\mu_1} + \frac{B}{n} = Bn \sum_{r=s_0+3}^{C_1} n^{-r/(s_0+3)} = B \quad (7.10)$$

ввиду (5.12).

Отсюда имеем, снова применяя интеграл Коши по окружности $|t| = n^{-\mu_1}$ и пользуясь (7.10):

$$\chi_r = B r! n^{r\mu_1}. \quad (7.11)$$

Отдельно отметим, что в силу (7.5) и того, что $\Psi_{s_0+3} \neq 0$, χ_{s_0+3} имеет точный порядок n . Пусть теперь

$$|t| \leq \eta_1 n^{-\mu_1}. \quad (7.12)$$

Тогда $\chi_r t^r / r! = B \eta_1^r (r = s_0 + 3, s_0 + 4, \dots)$; при m , выбранном согласно (6.16),

$$B \eta_1^m = B \exp \left(n^{2a_1} \frac{\ln \eta_1}{K_1} \right) = B \exp(-\epsilon_2 n^{2a_1}), \quad (7.13)$$

где

$$\epsilon_2 = - \frac{\ln \eta_1}{K_1}.$$

8. Возвращаясь к (5.13) и (6.5), заменим $n^{-\mu_1}$ (6.5) на $\eta_1 n^{-\mu_1}$, тогда (7.3) примет вид

$$p_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int_{-\eta_1 n^{-\mu_1}}^{\eta_1 n^{-\mu_1}} \exp\left(-\frac{nt^2}{2}\right) \exp(nK_{s_0+3}(t)) \exp(-itx\sqrt{n}) dt + \\ + B \exp(-c_4 \eta_1^2 n^{2\alpha_1}), \quad (8.1)$$

откуда, учитывая (7.4) и (7.13), найдем:

$$p_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int_{-\eta_1 n^{-\mu_1}}^{\eta_1 n^{-\mu_1}} \exp\left(-\frac{nt^2}{2}\right) \left(1 + \sum_{r=s_0+3}^m \frac{\chi_r}{r!} t^r\right) \exp(-itx\sqrt{n}) dt + R_1, \quad (8.2)$$

где

$$R_1 = B \exp(-c_4 \eta_1^2 n^{2\alpha_1}) + B \exp(-\varepsilon_3 n^{2\alpha_1}) \quad (8.3)$$

при

$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_2}{2} = \frac{\ln \eta_1^{-1}}{2K_1}. \quad (8.4)$$

Сделаем замену $\xi = t\sqrt{n}$; тогда найдем:

$$p_{Z_n}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\eta_1 n^{1/2-\mu_1}}^{\eta_1 n^{1/2-\mu_1}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \left(1 + \sum_{r=s_0+3}^m \frac{\chi_r}{r!} \left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)^r\right) \exp(-i\xi x) d\xi + R_1. \quad (8.5)$$

Для $r \leq m$, как нетрудно убедиться,

$$\int_{\eta_1 n^{1/2-\mu_1}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \frac{\chi_r}{r!} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r \xi^r d\xi = B \frac{r! n^{\mu_1 r}}{r!} n^{-r/2} \int_{\eta_1 n^{1/2-\mu_1}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \xi^r d\xi = \\ = B^r \exp\left(-\frac{\eta_1^2}{4} n^{1-2\mu_1}\right) \Gamma\left(\frac{r}{2}\right) n^{-(1/2-\mu_1)r}. \quad (8.6)$$

Далее, имеем при $r \leq m$:

$$B^r \Gamma\left(\frac{r}{2}\right) n^{r(1/2-\mu_1)} = B \exp\left(Br + \frac{r}{2} \ln r - r\left(\frac{1}{2} - \mu_1\right) \ln n\right) = \\ = B \exp\left(Br + r\left(\alpha_1 \ln n - \frac{1}{2} \ln K_1 - \alpha_1 \ln n\right)\right) = \\ = B \exp\left(Br - \frac{r}{2} \ln K_1\right) = B \exp(-c_5 r). \quad (8.7)$$

Суммируя в (8.6) по $r \leq m$, найдем оценку

$$B \exp\left(-\frac{\eta_1^2}{4} n^{2\alpha_1}\right). \quad (8.8)$$

Такое же выражение получается для интеграла по интервалу $(-\infty, -\eta_1 n^{1/2-\mu_1})$, так что вместо (8.2) найдем

$$p_{Zn}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \left(1 + \sum_{r=s_0+3}^m \frac{\chi_r}{r!} \left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)^r\right) \exp(-i\xi x) d\xi + R_2, \quad (8.9)$$

где R_2 имеет ту же оценку (8.3), что и R_1 .

9. Таким образом, нам надлежит рассмотреть при $r \leq m$ выражение

$$n^{-r/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/2} e^{i\xi x} \xi^r d\xi = n^{-r/2} H_r^{(0)}(x) e^{-x^2/2}, \quad (9.1)$$

где $H_r^{(0)}(x)$ — полиномы Эрмита от аргумента ax при подходяще выбранном $a > 0$ и нормирующем множителе.

Пусть теперь

$$0 < x < \zeta n^{\alpha_1} = \zeta n^{1/2-\mu_1}. \quad (9.2)$$

Мы будем рассматривать при $C_2 < r \leq m$ оценки выражений (9.1). Для полиномов Эрмита $H_q(x)$ имеем следующее выражение (см. [15]):

$$H_q(x) = q! \sum_{s=0}^{[q/2]} \frac{(-1)^s (2x)^{q-2s}}{s! (q-2s)!}. \quad (9.3)$$

Отсюда ($x \geq 0$ и, кроме того, мы считаем $0^0 = 1$)

$$H_q^{(0)}(x) = B^q q! \max_{s \leq q/2} \frac{x^{q-2s}}{s! (q-2s)!}. \quad (9.4)$$

Полагая $s = \rho q$, $0 \leq \rho \leq 1/2$, находим для (9.4) оценку

$$\begin{aligned} & B \exp q \left(B + (1-2\rho) \left(\left(\frac{1}{2} - \mu_1 \right) \ln n + \ln \zeta \right) - \rho \ln q - (1-2\rho) \ln q + \right. \\ & \quad \left. + \ln q - \rho \ln \rho - (1-2\rho) \ln (1-2\rho) \right) = \\ & = B \exp q \left(B + (1-2\rho) \left(\left(\frac{1}{2} - \mu_1 \right) \ln n + \ln \zeta \right) - \rho \ln q - (1-2\rho) \ln q + \ln q \right). \end{aligned}$$

Это следует умножить на

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^q = \exp \left(-\frac{q}{2} \ln n \right) \quad (9.5)$$

и на

$$\frac{\chi_q}{q!} = B \exp (\mu_1 q \ln n). \quad (9.6)$$

В итоге находим оценку

$$\begin{aligned} B \exp q \left(B + (1 - 2\rho) \left(\frac{1}{2} - \mu_1 \right) \ln n - \left(\frac{1}{2} - \mu_1 \right) \ln n + \rho \ln q + (1 - 2\rho) \ln \zeta \right) = \\ = B \exp q (B + (1 - 2\rho) \ln \zeta - \rho \ln K_1). \end{aligned} \quad (9.7)$$

Если $\rho \leq 1/4$, то при достаточно малом $\zeta (1 - 2\rho) \ln \zeta$ достаточно велико; при $\rho > 1/4$ и достаточно большом K_1 достаточно велико $\rho \ln K_1$. Таким образом, при $q = r$ для суммы членов в (8.9), отвечающих $C_2 \leq r \leq m$, имеем оценку

$$B e^{-x^2/2} \exp(-C_3). \quad (9.8)$$

Рассмотрим теперь члены (8.9), где

$$s_0 + 4 \leq r \leq C_2. \quad (9.9)$$

Для них получится оценка

$$B e^{-x^2/2} \sum_{r=s_0+4}^{C_2} \frac{\chi_r}{r!} \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right)^r = B e^{-x^2/2} \left(\frac{x n^{\mu_1}}{\sqrt{n}} \right)^{s_0+4}. \quad (9.10)$$

Наконец, при $r = s_0 + 3$ имеем

$$\frac{\chi_{s_0+3}}{(s_0+3)!} H_{s_0+3}^{(0)}(x) e^{-x^2/2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{s_0+3} = \frac{a_0}{(s_0+3)!} \Psi_{s_0+3} e^{-x^2/2} n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right)^{s_0+3} (1 + o(1)) \quad (9.11)$$

при $n \rightarrow \infty$ ($a_0 > 0$ — константа). Поэтому имеем из (8.9)

$$\begin{aligned} p_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} + \frac{a_0}{(s_0+3)!} \Psi_{s_0+3} e^{-x^2/2} n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right)^{s_0+3} (1 + o(1)) + \\ + B e^{-x^2/2} \left(\frac{x n^{\mu_1}}{\sqrt{n}} \right)^{s_0+4} + R_2, \end{aligned} \quad (9.12)$$

где R_2 имеет оценку (8.3).

10. Пусть

$$0 < x < \frac{n^{1/2-\mu_1}}{\rho_1(n)} = \frac{n^{\alpha_1}}{\rho_1(n)}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right)^{s_0+3} = B n n^{-(s_0+3)/(\rho_1(n))} \frac{1}{(\rho_1(n))^{s_0+3}} = \frac{B}{(\rho_1(n))^{s_0+3}}; \\ \left(\frac{x n^{\mu_1}}{\sqrt{n}} \right)^{s_0+4} = B \frac{1}{(\rho_1(n))^{s_0+4}}. \end{aligned}$$

Ввиду этого из (9.12) следует, что зона $[0, n^{\alpha_1}/\rho_1(n)]$ будет з. р. л. н. п. Совершенно аналогично $[-n^{\alpha_1}/\rho_1(n), 0]$ будет з. р. л. н. п.

Если $\alpha_1 = \alpha$, $s_0 + 3 = s + 3$ и $\Psi_{s+3} = 0$, то мы видим, что зоны $[0, n^\alpha/\rho_1(n)]$ и $[-n^\alpha/\rho_1(n), 0]$ суть з. р. л. н. п. Если же $\alpha > \alpha_1$ и $\Psi_{s_0+3} \neq 0$, мы можем вывести из (9.12), что $[0, n^\alpha]$ не будет з. р. л. н. п. В самом деле, если это не так, то, ввиду того что $\alpha_1 < \alpha$, зона $[0, n^{\alpha_1}]$ должна быть з. р. л. н. п. Положим

$$x = \zeta n^{1/2 - \mu_1} = \zeta n^{\alpha_1},$$

где ζ достаточно малая (соответственно предыдущему, см. (9.2)) положительная константа. Из (9.11) находим

$$p_{Z_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} + \frac{a_0}{s_0 + 3} \Psi_{s_0+3} e^{-x^2/2} \zeta^{s_0+3} (1 + \gamma_1) + R_2,$$

где $|\gamma_1| < 1/2$. Отсюда видно, что в силу $\Psi_{s_0+3} \neq 0$ зона $[0, n^\alpha]$ не может быть з. р. л. н. п.

Случай, когда в (5.2) появляется знак равенства, трактуется совершенно так же, надлежит лишь рассматривать $\Psi_3, \Psi_4, \dots, \Psi_{s+2}$. Случай $\alpha < 1/6$ также ясен из предыдущих рассуждений.

Таким образом, если $[0, n^\alpha], [-n^\alpha, 0]$ суть з. р. л. н. п., то семиинварианты $\kappa_3, \kappa_4, \dots, \kappa_{s+3}$ должны все исчезать; как известно, отсюда следует, что моменты $\mu_3, \mu_4, \dots, \mu_{s+3}$ должны совпадать с нормальными. Это доказывает теорему 2. Теорема 1 легко следует из нее: в условиях теоремы 1, ссылаясь на теорему 2, мы получаем, что все семиинварианты X_j начиная с третьего исчезают, т. е. все моменты совпадают с нормальными. Так как в данном случае решение проблемы моментов единственно, то все X_j должны быть нормальными.

11. Переходим к интегральным предельным теоремам. Будем доказывать теорему 3. Имеем $\alpha < 1/6$. Примем необходимое условие в форме (5.1), будем считать $\sigma = 1$.

Пусть $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, при каждом n введем вспомогательное нормальное слагаемое, полагая

$$Y_n \in N(0, n^\alpha) \text{ с х. ф. } \Psi_n(t) = \exp(-n^{2\alpha} t^2/2).$$

Положим

$$Z'_n = \frac{S_n + Y_n}{\sqrt{n}}. \quad (11.1)$$

Пусть

$$1 \leq x \leq \frac{n^\alpha}{\rho(n)}. \quad (11.2)$$

Покажем, что если (11.2) есть з. н. п. для величин Z'_n , то она будет з. н. п. и для величин $S_n/\sqrt{n} = Z_n$. Имеем:

$$\frac{Y_n}{\sqrt{n}} \in N(0, n^{\alpha-1/2}). \quad (11.3)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} + \frac{Y_n}{\sqrt{n}} > x\right) &= \mathbf{P}\left(\left|\frac{Y_n}{\sqrt{n}}\right| \leq n^{2\alpha-1/2}\right) \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} + \frac{Y_n}{\sqrt{n}} > x \mid \left|\frac{Y_n}{\sqrt{n}}\right| \leq n^{2\alpha-1/2}\right) + \\ &+ \mathbf{P}\left(\left|\frac{Y_n}{\sqrt{n}}\right| > n^{2\alpha-1/2}\right) \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} + \frac{Y_n}{\sqrt{n}} > x \mid \left|\frac{Y_n}{\sqrt{n}}\right| > n^{2\alpha-1/2}\right). \end{aligned} \quad (11.4)$$

Кроме того, в силу (11.3)

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{Y_n}{\sqrt{n}}\right| > n^{2\alpha-1/2}\right) = \frac{B}{n^\alpha} \exp\left(-\frac{1}{2} n^{2\alpha}\right) = o(1) \int_x^\infty e^{-u^2/2} du \quad (11.5)$$

при условии (11.2) и $n \rightarrow \infty$.

Ввиду этого из (11.5) заключаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} + \frac{Y_n}{\sqrt{n}} > x \mid \left|\frac{Y_n}{\sqrt{n}}\right| \leq n^{2\alpha-1/2}\right) &= \\ = \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} + \frac{Y_n}{\sqrt{n}} > x\right) (1 + o(1)) + o(1) \int_x^\infty e^{-u^2/2} du \end{aligned} \quad (11.6)$$

при условии (11.2). При том же условии имеем:

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > x\right) \geq \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} + \frac{Y_n}{\sqrt{n}} > x + n^{2\alpha-1/2} \mid \left|\frac{Y_n}{\sqrt{n}}\right| \leq n^{2\alpha-1/2}\right) \quad (11.7)$$

($2\alpha - 1/2 < 1/3 - 1/2 < 0$).

Пусть теперь известно, что в условиях (11.2)

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} + \frac{Y_n}{\sqrt{n}} > x\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2/2} du.$$

Тогда из (11.6) и (11.7) находим:

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq x\right) \geq (1 + o(1)) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x+n^{2\alpha-1/2}}^\infty e^{-u^2/2} du + o(1) \int_x^\infty e^{-u^2/2} du. \quad (11.8)$$

Полагая $\gamma = n^{2\alpha-1/2}$, рассмотрим оценку

$$\int_x^{x+\gamma} e^{-u^2/2} du = B_\gamma \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \exp(x|\gamma|) (1 + o(1)). \quad (11.9)$$

Так как $\alpha < 1/6$, то $|x\gamma| < n^{3\alpha-1/2} < n^{-\epsilon}$; $\gamma = n^{2\alpha-1/2} < n^{-\epsilon}/x$ и (11.9) имеет оценку

$$\frac{B}{x} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) n^{-\epsilon}. \quad (11.10)$$

Ввиду этого (11.8) дает

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > x\right) \geq (1 + o(1)) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2/2} du. \quad (11.11)$$

Заменим в (11.7) знак $\geq$ на $\leq$ и $n^{2\alpha-1/2}$ на $-n^{2\alpha-1/2}$; получим наряду с (11.11) неравенство

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} S_n > x\right\} \leq (1 + o(1)) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2/2} du.$$

Аналогично действуем для зоны $[-n^\alpha/\rho(n), -1]$; в зоне $[-1, 1]$ действуют классические теоремы. Итак, дело приводится к обоснованию (11.7).

12. Пусть $x_1 \in [1, n^\alpha/\rho(n)]$, $x_2 = n^K$, где $K > 0$ будет указано далее. Положим

$$1 - F_n(x_2) = \mathbf{P}(X_1 + \dots + X_n + Y_n > x_2 \sqrt{n}). \quad (12.1)$$

Событие в правой части (12.1) влечет хотя бы одно из событий $X_j > x_2/(2\sqrt{n})$; $Y_n > x_2/(2\sqrt{n})$. В силу (2.1) и (11.3) при достаточно большом K величина (11.8) получит оценку

$$o(1) \int_{n^\alpha}^{\infty} e^{-u^2/2} du. \quad (12.2)$$

Имеем далее:

$$\begin{aligned} F_n(x_2) - F_n(x_1) &= \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(t))^n \Psi_n(t) [\exp(-\sigma \sqrt{n} i t x_2) - \exp(-\sigma \sqrt{n} i t x_1)] \frac{dt}{t}. \end{aligned} \quad (12.3)$$

При $|t| > \varepsilon_0$

$$\Psi_n(t) = B \exp\left(-\frac{n^{2\alpha} t^2}{2}\right) = B \exp\left(-\frac{n^{2\alpha} \varepsilon_0^2}{2}\right), \quad (12.4)$$

так что с погрешностью, указанной в (12.4), можем полагать, что пределы интегрирования в (12.3) будут от $-\varepsilon_0$ до ε_0 .

Далее имеем:

$$\left| \frac{(\exp(-\sigma \sqrt{n} i t x_2) - \exp(-\sigma \sqrt{n} i t x_1))}{t} \right| = B x_2 \sqrt{n} = B n^{K+1}. \quad (12.5)$$

Отсюда получим:

$$\begin{aligned} F_n(x_2) - F_n(x_1) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-n^{-\mu}}^{n^{-\mu}} \Psi_n(t) (\varphi(t))^n \times \\ &\times [\exp(-\sigma \sqrt{n} i t x_2) - \exp(-\sigma \sqrt{n} i t x_1)] \frac{dt}{t} + B \exp(c_6 n^{2\alpha}). \end{aligned}$$

Рассуждаем, как в п. 7 и 8, и сохраняем те же обозначения, но полагаем

$$m = \frac{n^{2\alpha}}{\rho_0(n)}, \quad \sigma = 1. \quad (12.6)$$

где $\rho_0(n)$ будет указано в дальнейшем. Получим

$$F_n(x_2) - F_n(x_1) = \frac{i}{2\pi} \int_{-n^{-\mu}}^{n^{-\mu}} \exp\left[-\frac{1}{2}(n + n^{2\alpha})t^2\right] \left(1 + \sum_{r=3}^m \frac{\chi_r t^r}{r!}\right) \times \\ \times [\exp(-\sqrt{n}itx_2) - \exp(-\sqrt{n}itx_1)] \frac{dt}{t} + B \exp(-c_7 n^{2\alpha}). \quad (12.7)$$

Делаем замену $\xi = t\sqrt{n}$; вместо (12.7) получим

$$F_n(x_2) - F_n(x_1) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}(1 + n^{-2\mu})\xi\right] \left(1 + \sum_{r=3}^m \frac{\chi_r}{r!} \left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)^r\right) \times \\ \times [\exp(-i\xi x_2) - \exp(-i\xi x_1)] \frac{d\xi}{\xi} + B \exp(-c_8 n^{2\alpha}). \quad (12.8)$$

13. Положим $\xi \sqrt{n^{-2\mu} + 1} = v$; $(1 + n^{-2\mu})^{1/2} = 1 + Bn^{-2\mu} = 1 + \rho$. Имеем:

$$F_n(x_2) - F_n(x_1) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) \left(1 + \sum_{r=3}^m \frac{\chi_r}{r!} \frac{v(1+\rho)^r}{(\sqrt{n})^r}\right) \times \\ \times [\exp(-ivx_2(1+\rho)) - \exp(-ivx_1(1+\rho))] \frac{dv}{v} + B \exp(-c_8 n^{2\alpha}). \quad (13.1)$$

Рассмотрим результаты раскрытия скобок в (13.1). Первый член дает

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1(1+\rho)}^{x_2(1+\rho)} e^{-u^2/2} du.$$

Далее,

$$x_1 \rho = B \frac{n^\alpha}{\rho(n)} n^{-2\mu} = B \frac{n^{2\alpha-1}}{\rho(n)} = o(1).$$

Ввиду этого первый член получит вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{\infty} e^{-u^2/2} du (1 + o(1)). \quad (13.2)$$

Перейдем к оценке следующих членов, содержащих полиномы Эрмита. Сперва рассмотрим значения r :

$$3 \leq r \leq C_1. \quad (13.3)$$

Мы должны оценить (см. п. 7, 8)

$$\int_{x_1}^{x_2} H_r^{(0)}(x) e^{-x^2/2} dx. \quad (13.4)$$

При $3 \leq r \leq C_1$ (13.4) имеет оценку

$$B x_1^{r-1} e^{-x_1^2/2}. \quad (13.5)$$

Так как $\chi_r = B r! n^{r/2}$ (7.11) и x подчинен (11.2), то в условиях (13.3)

$$\left| \frac{\chi_r}{r!} \frac{1}{(\sqrt{n})^r} H_r^{(0)}(x) \right| = B x_1^{r-1} e^{-x_1^2/2} \frac{n^{r/2}}{(\sqrt{n})^r} = \frac{B}{x_1} e^{-x_1^2/2} \left(\frac{x_1 n^{1/2}}{\sqrt{n}} \right)^r. \quad (13.6)$$

Но

$$\left| \frac{x_1 n^{1/2}}{\sqrt{n}} \right| < \frac{1}{\rho(n)}, \quad (13.7)$$

так что (13.6) дает

$$\frac{B}{\rho(n)} \int_{x_1}^{\infty} e^{-u^2/2} du. \quad (13.8)$$

Теперь пусть

$$C_1 \leq r \leq m. \quad (13.9)$$

Будем рассматривать

$$H_r^{(0)}(x) = B r! \sum_{s \leq r/2} \frac{x^{r-2s}}{s! (r-2s)!}, \quad (13.10)$$

$$\int_{x_1}^{\infty} e^{-x^2/2} H_r^{(0)}(x) dx = B r! \sum_{s \leq r/2} \frac{1}{s! (r-2s)!} \int_{x_1}^{\infty} e^{-u^2/2} u^{r-2s} du. \quad (13.11)$$

Имеем при $1 \leq x \leq n^{1/2}/\rho(n)$:

$$\int_x^{\infty} e^{-u^2/2} u^Q du = B^Q e^{-x^2/2} \sum_{t=1}^Q x^{Q-t} Q(Q-1) \dots (Q-t+1).$$

Полагая $Q = r - 2s$, найдем:

$$\begin{aligned} \int_x^{\infty} e^{-u^2/2} H_r^{(0)}(u) du &= \frac{1}{x} e^{-x^2/2} B r! \sum_{s \leq r/2} \frac{1}{s! (r-2s)!} \times \\ &\times \sum_{t=0}^{Q-1} x^{Q-1-t} Q(Q-1) \dots (Q-t) = \frac{1}{x} e^{-x^2/2} B r! \times \\ &\times \sum_{s \leq r/2} \frac{1}{s! (r-2s)!} \sum_{t=0}^{Q-1} x^{Q-1-t} Q^t. \end{aligned} \quad (13.12)$$

14. Положим, как в п. 9,

$$r = q, \quad s = \rho q, \quad 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}, \quad Q = r(1 - 2\rho).$$

Для (13.12) без первых множителей при $1 \leq x \leq n^{\alpha/\rho}(n)$ и при данном t получим оценку:

$$B \exp(Bq + q(1 - 2\rho) - t - 1)(\alpha \ln n - \rho(n) - \rho q \ln q - \rho q \ln \rho - (1 - 2\rho)q \ln q - q(1 - 2\rho) \ln(1 - 2\rho) + q \ln q + t \ln q + t \ln(1 - 2\rho)). \quad (14.1)$$

Это выражение надлежит умножить на

$$\frac{\chi_q}{q!} \frac{1}{(\sqrt{n})^q} = B \exp(-\alpha \ln n). \quad (14.2)$$

Множитель, содержащий t , здесь

$$B \exp[t(\ln q - \alpha \ln n - \ln \rho(n))] = B \exp[t(\ln m - \alpha \ln n - \ln \rho(n))]. \quad (14.3)$$

При этом $\ln m = \alpha \ln n - \ln \rho_0(n) + \theta$, $|\theta| \leq 1$. Будем считать, что $\ln \rho_0(n) < (1/2) \ln \rho(n)$; тогда (14.3) получит оценку

$$B(\rho_1(n))^{-t}$$

и суммирование (14.1) по t при учете сказанного в п. 9 дает оценку

$$B(\rho_2(n))^{-q}.$$

Суммируя по $q \geq C_1$, получим оценку $B(\rho_2(n))^{-1}$. Это дает нам погрешность, которую следует добавить к (13.2) в виде

$$o(1) \int_{x_1}^{\infty} e^{-u^{2/2}} du.$$

Аналогично рассматриваются зоны $[-n^{\alpha/\rho}(n), -1]$. Этим доказана теорема 3.

II. Узкие зоны локального и интегрального нормального притяжения

0. Мы будем следовать обозначениям ч. I. Будем изучать узкие зоны локальной нормальной сходимости для величин X_j класса (d) (см. ч. I). Нам будет удобнее исходить не из зон $[0, \Psi(n)]$ и $[-\Psi(n), 0]$, а из функций $h(x)$, описанных в п. 1 ч. I. Рассмотрим условие

$$B \exp h(|X_j|) < \infty. \quad (0.1)$$

Пусть задана функция $h(x)$ класса I из ч. I. Она подчинена указанным в ч. I условиям:

$$(\lg x)^{2+\varepsilon_0} \leq h(x) \leq x^{1/2}, \quad (x \geq 1), \quad (0.2)$$

$h(x) = \exp(H(\lg x))$, где $H(z)$ монотонна, дифференцируема,

$$H'(z) \leq 1, \quad H'(z) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty, \quad (0.3)$$

$$H'(z) \exp H(z) > c_1 z^{1+\varepsilon_1}. \quad (0.4)$$

Определим новую положительную функцию $\Lambda(n)$ посредством уравнения

$$h(\sqrt{n} \Lambda(n)) = (\Lambda(n))^2. \quad (0.5)$$

Теорема 1. Условие (0.1), где $h(x)$ принадлежит классу I, необходимо для того, чтобы зоны $[0, \Lambda(n)\rho(n)]$, $[-\Lambda(n)\rho(n), 0]$ были з. р. л. н. п., и достаточно для того, чтобы зоны $[0, \Lambda(n)/\rho(n)]$; $[-\Lambda(n)/\rho(n), 0]$ были з. р. л. н. п.

Теорема 2. Для з. н. п. (интегральных) верно такое же высказывание, как в теореме 1, и сходимость в соответствующих зонах равномерна.

Для $h(x)$, принадлежащих классу II, определим $\Lambda(n)$ из условия $\Lambda(n) = \sqrt{h(n)} = \sqrt{M(n) \lg n}$. В силу свойств $h(n)$ так определенная $\Lambda(n)$ будет отличаться от $\rho(n)$ лишь множителем $\Lambda(n)$, определенным из уравнения (0.5). Далее имеют место следующие теоремы.

Теорема 3. Если $h(x)$ принадлежит классу II, то для з. р. л. н. п. верно высказывание, аналогичное теореме 1 при указанной выше функции $\Lambda(n)$.

Теорема 4. Для $h(x)$ из класса II и указанных выше $\Lambda(n)$ для з. н. п. верно высказывание, аналогичное теореме 3.

Для $h(x)$ класса III имеем самые узкие зоны. Здесь полагаем $\Lambda(n) = \sqrt{\lg n}$.

Теорема 5. Для $h(x)$ класса III и $\Lambda(n) = \sqrt{\lg n}$ в отношении з. р. л. н. п. и величин $X_j \in (d)$ верно такое же высказывание, как в теореме 1, а в отношении з. н. п. — такое же высказывание, как в теореме 2.

1. Выясним сперва целесообразность условий (0.2), (0.3) и (0.4), наложенных на $h(x)$.

Условие $h(x) \geq (\lg x)^{2+\varepsilon_0}$ (значение которого еще прояснится в дальнейшем) обеспечивает то, что зоны не самые узкие, и его можно сравнить с условием $E \exp 3 \lg |X_j| < \infty$, которое обеспечивает лишь существование третьего момента. Условие $h(x) \leq x^{1/2}$ указывает на то, что зоны узкие (см. п. 1 ч. I). Согласно теореме 3 ч. I, зонам $[0, n^\alpha (\rho(n))^{\pm 1}]$, $[-n^\alpha (\rho(n))^{\pm 1}, 0]$ при $\alpha < 1/6$ отвечает условие вида (3.1) (из ч. I): при $\alpha < 1/6$ показатель $4\alpha/(2\alpha+1)$ в этом условии $< 1/2$. Естественно считать $h(x)$ монотонной, дифференцируемой и представлять ее в виде $h(x) = \exp(H(\lg x))$ при $x \geq 1$, где $H(z)$ — такая же функция. Если еще предположить $h'(x)$ монотонной (что естественно), то это приводит к условию

(0.3) (узость зоны). Нарушение (0.4) при указанной монотонности $h'(x)$ привело бы к нарушению левого неравенства в (0.2).

2. Обратимся к доказательству необходимости условия (0.1) для того, чтобы $[0, \Lambda(n)\rho(n)]$, $[-\Lambda(n)\rho(n), 0]$ были з. н. п. Пусть указанные зоны будут з. н. п. Тогда при $n > n_0$ имеем (ибо $\Lambda(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$):

$$P\left(Z_n > \frac{\Lambda(n)\rho(n)}{2}\right) < \exp\left(-\frac{(\Lambda(n)\rho(n))^2}{16}\right). \quad (2.1)$$

Пусть условие (0.1) не выполнено. Тогда найдется последовательность $x_m \rightarrow \infty$, такая, что либо

$$P(X_1 > x_m) > \exp(-2h(x_m)), \quad (2.2)$$

либо

$$P(X_1 < -x_m) > \exp(-2h(|x_m|)). \quad (2.3)$$

Пусть выполнено (2.2). Для достаточно большого m выберем n , такое, что $x_m = \sigma n^{1/2} \Lambda(n)\rho(n) + \theta$, $|\theta| \leq 1$. Событие, указанное в (2.1), наверное произойдет, если случатся два независимых события:

$$X_1 > \sigma n^{1/2} \Lambda(n)\rho(n) + \theta, \quad |(X_2 + X_3 + \dots + X_n)/\sigma \sqrt{n}| < 1.$$

Отсюда, по центральной предельной теореме и (2.2), имеем:

$$\begin{aligned} P\left(Z_n > \frac{\Lambda(n)\rho(n)}{2}\right) &> c_0 P(X_1 > x_m) > c_0 \exp(-2h(x_m)) = \\ &= c_0 \exp[-2h(\sigma \sqrt{n} \Lambda(n)\rho(n) + \theta)] > c_0 \exp[-2h(2\sigma \sqrt{n} \Lambda(n)\rho(n))]. \end{aligned}$$

При ξ , η достаточно больших согласно условию (0.3)

$$h(\xi\eta) = \exp H(\lg \xi + \lg \eta) \leq \exp(H(\lg \xi) + o(\lg \eta)) = h(\xi) \eta^{o(1)}.$$

Полагая $\xi = \sqrt{n} \Lambda(n)$, $\eta = 2\sigma\rho(n)$, найдем

$$2h(2\sigma \sqrt{n} \Lambda(n)\rho(n)) = 2(\Lambda(n))^2 (\rho(n))^{o(1)},$$

что противоречит (2.1). Аналогичное рассуждение проводится для случая (2.3). Если $X_j \in (d)$ (см. [1]), то условие (0.1) необходимо для того, чтобы $[0, \Lambda(n)\rho(n)]$ и $[-\Lambda(n)\rho(n), 0]$ были обе з. р. л. н. п. Доказательство проводится аналогично предыдущему при учете рассуждений п. 4 ч. I.

3. Перейдем к вопросу о достаточности условия (0.1) для того, чтобы зоны $[0, \Lambda(n)\rho(n)]$ и $[-\Lambda(n)\rho(n), 0]$ были з. р. л. н. п. при $X_j \in (d)$. Мы можем в условии (0.1) рассматривать функцию $ah(x)$ вместо $h(x)$ (положительные константы) и поэтому, не нарушая общности, считать $\sigma = 1$. При данном $\rho(n)$ будем определять функцию $\Lambda_\rho(n)$ из уравнения

$$h\left(\Lambda_\rho(h) \frac{\sqrt{n}}{\rho(n)}\right) = (\Lambda_\rho(n))^2. \quad (3.1)$$

Если мы докажем, что зона $[0, \Lambda_p(n)]$ есть з. р. л. н. п., то зона $[0, \Lambda(n)/\rho(n)]$ тоже будет таковой, так как она уже. В самом деле, полагая $\Lambda_p(n) = \Lambda(n) \gamma(n)$, находим из (0.5), (3.1) и рассуждений п. 2:

$$(\gamma(n) (\rho(n))^{-1})^{o(1)} = (\gamma(n))^2, \quad \gamma(n) = \left(\frac{1}{\rho(n)} \right)^{o(1)}.$$

Положим

$$\lg \Lambda_p(n) = X_p(n), \quad (3.2)$$

и получим из (3.1)

$$H \left(\lg \Lambda_p(n) + \lg \left(\frac{\sqrt{n}}{\rho(n)} \right) \right) = 2X_p(n). \quad (3.3)$$

Полагая теперь

$$l_p(n) = \lg \left(\frac{\sqrt{n}}{\rho(n)} \right) = \frac{1}{2} \lg n - \rho_1(n), \quad (3.4)$$

имеем:

$$H(X_p(n) + l_p(n)) = 2X_p(n), \quad X_p(n) + l_p(n) = H^{-1}(2X_p(n)). \quad (3.5)$$

Определим далее малое число μ из условия

$$n^{1-2\mu} = e^B (\Lambda_p(n))^2 = e^B \exp(2X_p(n)) \quad (3.6)$$

(B , как и в ч. I, — ограниченное число, не всегда одно и то же). Поскольку

$$(1 - 2\mu) \lg n = B + 2X_p(n), \quad (3.7)$$

$$\mu \lg n = B + \frac{(\lg n)}{2} - X_p(n) = l_p(n) + X_p(n) + \rho_2(n) - 2X_p(n),$$

то, учитывая (3.5), найдем

$$\mu \lg n = H^{-1}(2X_p(n)) + \rho_2(n) - 2X_p(n), \quad (3.8)$$

тогда как (3.7) дает

$$\mu = \frac{1}{2} - \frac{X_p(n)}{\lg(n)} + \frac{B}{\lg n}.$$

4. Теперь получим в обозначениях ч. I (см. ч. I, формулы (5.6), (6.5)):

$$p_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int_{-n^{-\mu}}^{n^{-\mu}} (\varphi(t))^n \exp(-itz \sqrt{n}) dt + B \exp(-c_1 e^{2X_p(n)}). \quad (4.1)$$

Имея в виду применение метода ч. I, мы хотим оценить $\varphi^{(q)}(t)$ при $|t| \leq n^{-\mu}$:

$$\varphi^{(q)}(t) = B \int_1^\infty x^q \exp(-h(x)) dx = B \int_1^\infty \exp(q \lg x - h(x)) dx. \quad (4.2)$$

Установим теперь, что

$$xh'(x) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty. \quad (4.3)$$

Действительно,

$$h(x) = \exp H(\lg x), \quad xh'(x) = \frac{dh(x)}{d \lg x} = \exp H(\lg x) H'(\lg x) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty$$

в силу (0.4). Подынтегральная функция в (4.2) в экспоненте имеет вид $q \lg x - h(x)$, а ее производная $q/x - h'(x)$. Составим уравнение перевала

$$xh'(x) = q. \quad (4.4)$$

В силу (4.3) оно имеет единственное решение при $q > q_0$. Это решение обозначим $Q_0(q)$.

Лемма 1. *Справедлива оценка вида*

$$\int_1^\infty x^q \exp(-h(x)) dx = B \exp(Bq + q \lg Q_0(q) - h(Q_0(q))). \quad (4.5)$$

Найдем абсциссу $x = x_1$, такую, что при $x \geq x_1$

$$h(x) \geq 2q \lg x, \quad h(x) - q \lg x \geq \frac{h(x)}{2}. \quad (4.6)$$

Так как $h(x) \geq (\lg x)^{2+\xi_0}$ согласно (0.2), то (4.6) наверное будет выполнено, если $(\lg x)^{2+\xi_0} \geq 2q \lg x$, $\lg x \geq (2q)^{1/(1+\xi_0)}$, $x \geq \exp(2q)^{1/(1+\xi_0)} = x_1$; так как при $x \geq x_1$ $h(x) - q \lg x \geq h(x)/2 \geq (\lg x)^{2+\xi_0}/2$, то мы имеем

$$\int_{x_1}^\infty x^q \exp(-h(x)) dx = B.$$

Функция $q \lg x - h(x)$ имеет максимум при $x = Q_0(q)$ и далее убывает (см. (4.4)), так что

$$\int_1^\infty x^q \exp(-h(x)) dx = B \exp(Bq + q \lg Q_0(q) - h_1(Q_0(q))).$$

Привлекая лемму 1, получаем:

$$\frac{\varphi^{(q)}(t)}{q!} = B \exp q \left(B + \lg Q_0(q) - \frac{1}{q} h(Q_0(q)) - \lg q \right).$$

Полагая (как в ч. I, (6.7))

$$\tilde{\varphi}_q(t+t_0) = \varphi(t_0) + \frac{t\varphi'(t_0)}{1!} + \dots + \frac{t^q \varphi^{(q)}(t_0)}{q!},$$

получим при $K(t) = \lg \varphi(t)$, ($|t| \leq \varepsilon_0$):

$$K^{(q)}(t_0) = (\lg \tilde{\varphi}_q(t+t_0))^q|_{t=0}.$$

5. Положим

$$L(q) = \lg Q_0(q) - \frac{1}{q} h(Q_0(q)) - \lg q \quad (5.1)$$

и покажем, что $L(q)$ — неубывающая функция q . Из равенства

$$Q_0(q) h'(Q_0(q)) = q \quad (5.2)$$

простым подсчетом выводим, что

$$L'(q) = \frac{1}{q} \left(\frac{1}{q} h(Q_0(q)) - 1 \right). \quad (5.3)$$

Достаточно доказать теперь, что $h(Q_0(q)) \geq q$, или $h(Q_0(q)) \geq Q_0(q) h'(Q_0(q))$, или $d \lg h(y) / d \lg y \leq 1$, т. е. $H'(z) \leq 1$, что отвечает (0.3). Итак, $L(q)$ монотонна. Из (4.9) выводим:

$$\frac{\varphi^{(q)}(t_0)}{q!} t^q = B |t|^q \exp(Bq + qL(q)). \quad (5.4)$$

Выберем контур $|t| = e^{-\nu}$ так, чтобы на нем (5.4) оказалось достаточно малым. Положим

$$\nu = \nu(q) = c_1 + L(q), \quad (5.5)$$

где c_1 достаточно велико. Тогда при $|t| = e^{-\nu}$

$$B \exp(Bq - c_1 q - qL(q) + qL(q)) = B \exp\left(-\frac{c_1}{2} q\right) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^q, \quad (5.6)$$

$$\frac{t \varphi'(t_0)}{1!} + \frac{t^2 \varphi''(t_0)}{2!} + \dots + \frac{t^q \varphi^{(q)}(t_0)}{q!} \leq \frac{1}{2}, \quad (5.7)$$

так что

$$\frac{3}{2} \geq |\tilde{\varphi}_q(t)| \geq \frac{1}{2}. \quad (5.8)$$

Отсюда при $|t_0| \leq n^{-\mu}$ получаем:

$$\begin{aligned} K^{(q)}(t_0) &= \frac{q!}{2\pi i} \oint_{|t|=e^{-\nu}} \lg \tilde{\varphi}_q(t) \frac{dt}{t^{q+1}} = Bq! \oint_{|t|=e^{-\nu}} \frac{|dt|}{|t|^{q+1}} = \\ &= Bq! \exp(q\nu(q)) = B \exp(Bq + q \lg Q_0(q) - h(Q_0(q))), \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} &\sup_{|t| \leq n^{-\mu}} |K^{(m)}(t) t^m / m!| = \\ &= B \exp \left\{ m \left(B + \lg Q_0(m) - \frac{1}{m} h(Q_0(m)) - \lg m - \mu \lg n \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Определим теперь m с помощью равенств

$$\lg Q_0(m) = H^{-1}(2X_p(n)); \quad (5.11)$$

$$\exp H(\lg Q_0(m)) = h(Q_0(m)) = \exp[2X_p(n)]. \quad (5.12)$$

Подставим (5.11) и (5.12) в (5.10) и, учитывая (3.8), приведем (5.10) к виду

$$B \exp \left\{ m \left(B - \rho_2(n) + 2X_\rho(n) - \lg m - \frac{1}{m} \exp 2X_\rho(n) \right) \right\} = \\ = B \exp \{ m (B - \rho_2(n) - \exp(2X_\rho(n) - \lg m) + 2X_\rho(n) - \lg m) \}. \quad (5.13)$$

Покажем теперь, что

$$2X_\rho(n) - \lg m \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (5.14)$$

В силу (5.2)

$$\exp H(\lg Q_0(m)) H'(\lg \varphi_0(m)) = Q_0(m) h'(Q_0(m)) = m. \quad (5.15)$$

Из (5.11) находим: $H(\lg Q_0(m)) = 2X_\rho(n)$. Подставим это равенство в (5.15),

$$\exp(2X_\rho(n)) H'(\lg Q_0(m)) = \exp(2X_\rho(n)) H'(X_\rho(n) + l_\rho(n)) = m.$$

Отсюда в силу (0.3)

$$2X_\rho(n) - \lg m = -\lg H'(X_\rho(n) + l_\rho(n)) \rightarrow \infty.$$

Привлекая (5.14), получаем для (5.13) оценку

$$B \exp(-c_2 \exp(2X_\rho(n))).$$

Заметим, что в силу (3.6) $\exp(2X_\rho(n)) = Bn^{1-2\mu}$.

6. Теперь (5.10) дает

$$\sup_{|t| \leq n^{-\mu}} \left| K^{(m)}(t) \frac{t^m}{m!} \right| = B \exp(-c_2 \exp(2X_\rho(n))), \quad (6.1)$$

так что при $|t| \leq n^{-\mu}$

$$K(t) = -\frac{t^2}{2} + \sum_{r=3}^m \Psi_r \frac{t^r}{r!} + B \exp(-c_2 \exp 2X_\rho(n)), \quad (6.2)$$

где

$$\Psi_r = K^{(r)}(0) = B \exp(Br + r \lg Q_0(r) - h(Q_0(r))). \quad (6.3)$$

Ввиду того что

$$2X_\rho(n) \geq H\left(\lg\left(\frac{\sqrt{n}}{\rho(n)}\right)\right) = \lg h\left(\frac{\sqrt{n}}{\rho(n)}\right) > \exp(2X_\rho(n)) \geq \\ \geq h\left(\frac{\sqrt{n}}{\rho(n)}\right) > \left(\lg\left(\frac{\sqrt{n}}{\rho(n)}\right)\right)^{2+\varepsilon_0},$$

$$n \exp(-c_2 \exp 2X_\rho(n)) = B \exp(-c_3 \exp 2X_\rho(n)),$$

так что

$$nK(t) = nK_2(t) + B \exp(-c_4 n^{1-2\mu}), \quad (6.4)$$

где

$$K_2(t) = -\frac{t^2}{2} + \sum_{r=3}^m \Psi_r \frac{t^r}{r!}. \quad (6.5)$$

Отсюда легко выводим

$$p_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int_{-n^{-\mu}}^{n^{-\mu}} \exp\left(-\frac{nt^2}{2} + K_3(t) - i\sqrt{n}tx\right) dt + \\ + B \exp(-c_4 n^{1-2\mu}), \quad (6.6)$$

где

$$K_3(t) = \sum_{r=3}^m \Psi_r \frac{t^r}{r!}. \quad (6.7)$$

Займемся целой функцией

$$\exp(nK_3(t)). \quad (6.8)$$

Положим $\mu_1 = \mu - \omega_n$, где малое число ω_n определяется следующим образом: если $\exp(2X_p(n))/m \geq \lg n$, то полагаем $\omega_n = 1/100$, а если $\exp(2X_p(n))/m < \lg n$, то берем $\omega_n = \frac{1}{100} \frac{\exp 2X_p(n)}{m \lg n}$.

При $r \leq m$ и $|t| \leq n^{-\mu_1}$ рассмотрим

$$\frac{\Psi_r t^r}{r!} = B \exp r \left(B + \lg \varphi(r) - \frac{1}{r} h(Q_0(r)) - \lg r - \mu_1 \lg n \right). \quad (6.9)$$

Заметим теперь, что $X_p(n) = o(\lg n)$, как видно из (3.3) и (0.3) (ибо, согласно (0.3), $H(z) = o(z)$). Ввиду этого из (3.7) вытекает, что

$$\mu = \frac{1}{2} + o(1), \quad \mu \geq 0.49 + o(1). \quad (6.10)$$

Поэтому при $3 \leq r < c_3$

$$n \frac{\Psi_r t^r}{r!} = o(1). \quad (6.11)$$

Перейдем к случаю $c_3 \leq r \leq m$. Выделим значения $c_3 \leq r \leq (\lg n)^{1+\xi_1/2}$ и докажем оценку

$$\lg Q_0(r) = B \exp r^{1/(1+\xi_1)}. \quad (6.12)$$

Из (0.4) имеем: $xh'(x) > (\lg x)^{1+\xi_1}$. Ввиду этого из равенства $Q_0(r)h'(Q_0(r)) = r$ следует: $(\lg Q_0(r))^{1+\xi_1} < r$, $Q_0(r) < \exp r^{1/(1+\xi_1)}$, что и доказывает (6.12). При указанных значениях r из (6.9) имеем:

$$B \exp r (B + r^{1/(1+\xi_1)} - 0.48 \lg n) = B n^{-0.48r}. \quad (6.13)$$

Суммирование этих выражений по $c_3 \leq r \leq (\lg n)^{1+\xi_1/2}$ дает

$$Bn^{-2}. \quad (6.14)$$

Теперь пусть $(\lg n)^{1+\xi_1/2} < r \leq m$. В силу монотонности функции $L(r)$ (см. п. 5) (6.9) не превосходит

$$B \exp r \left(B + \lg Q_0(m) - \frac{1}{m} h(Q_0(m)) - \lg m - \mu_1 \lg n \right). \quad (6.15)$$

Учитывая (5.10) и (5.13), получим оценку для (6.15):

$$B \exp r \left(B - \frac{1}{2m} \exp 2X_p(n) - \rho_2(n) + \omega_n \lg n \right). \quad (6.16)$$

Откуда, учитывая определение числа ω_n , находим для (6.9):

$$B \exp r \left(-\frac{\rho_2(n)}{2} - \frac{1}{8} \lg n \right) + B \exp r \left(-\frac{\rho_2(n)}{2} - \frac{1}{8m} \exp 2X_p(n) \right). \quad (6.17)$$

Суммируя эти выражения по r , $(\lg n)^{1+\xi_1/2} \leq r \leq m$, для соответствующей части $K_3(t)$ получаем оценку

$$Bn^{-2}. \quad (6.18)$$

Собирая вместе оценки (6.11), (6.14) и (6.18), находим: при $|t| = n^{-\mu_1}$

$$nK_3(t) = B \exp nK_3(t) = B. \quad (6.19)$$

7. Положим

$$\exp nK_3(t) = \sum_{r=3}^{\infty} \chi_r \frac{t^r}{r!}, \quad (7.1)$$

тогда в соответствии с (6.19)

$$\chi_r = \frac{r!}{2\pi i} \oint_{|t|=n^{-\mu_1}} \frac{\exp(nK_3(t))}{t^{r+1}} dt = Br! n^{\mu_1}, \quad (7.2)$$

$$\frac{\chi_r}{r!} t^r = Bn^{r(\mu_1-\mu)} = B \exp(-2\omega_n r \lg n) \quad \text{при } r \geq m, \quad |t| < n^{-\mu_1}. \quad (7.3)$$

Числа ω_n имеют различные значения в зависимости от поведения $\exp[2X_p(n)]/m$, как описано в п. 6. Каждый из этих случаев приводит к оценке

$$B \sum_{r=m}^{\infty} \exp\left(-\frac{r}{100m} \exp[2X_p(n)]\right) = B \exp\left(-\frac{1}{200} \exp[2X_p(n)]\right). \quad (7.4)$$

Таким образом,

$$\exp[nK_3(t)] = 1 + \sum_{r=3}^m \frac{\chi_r t^r}{r!} + B \exp(-c_4 \exp[2X_p(n)]), \quad (7.5)$$

$$p_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int_{-n^{-\mu}}^{n^{-\mu}} \exp\left(-\frac{nt^2}{2} - itx\sqrt{n}\right) \left(1 + \sum_{r=3}^m \frac{\chi_r t^r}{r!}\right) dt + \\ + B \exp(-c_5 e^{2X_p(n)}), \quad (7.6)$$

$$p_{Z_n}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n^{1/2-\mu}}^{n^{1/2-\mu}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2} - i\xi x\right) \left(1 + \sum_{r=3}^m \frac{\chi_r}{r!} \left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)^r\right) d\xi + \\ + B \exp(-c_6 e^{2X_p(n)}). \quad (7.7)$$

Рассмотрим теперь

$$\int_{n^{1/2-\mu}}^{\infty} e^{-\xi^2/2} \frac{\chi_r}{r!} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r \xi^r d\xi. \quad (7.8)$$

Следуя п. 8 ч. I, получим для (7.8) оценку при $r \leq m$:

$$B \exp\left(-\frac{1}{4} n^{1-2\mu}\right) \exp r \left(B + \frac{\lg r}{2} - \left(\frac{1}{2} - \mu_1\right) \lg n\right) = \\ = B \exp\left(-\frac{1}{4} n^{1-2\mu}\right) \exp r \left(B + \frac{\lg m}{2} - \left(\frac{1}{2} - \mu_1\right) \lg n\right). \quad (7.9)$$

Далее, так как

$$\exp(2X_p(n)) = B n^{1-2\mu}, \quad X_p(n) = \left(\frac{1}{2} - \mu\right) \lg n + B,$$

то

$$\frac{1}{2} \lg m - \left(\frac{1}{2} - \mu_1\right) \lg n = \frac{1}{2} \lg m - \left(\frac{1}{2} - \mu\right) \lg n + \\ + (\mu_1 - \mu) \lg n = \frac{1}{2} \lg m - X_p(n) + B - \omega_n < \frac{1}{2} \lg m - X_p(n) \rightarrow -\infty.$$

Суммируя оценки (7.9) по $r=3, 4, \dots, m$, найдем погрешность

$$B \exp\left(-\frac{1}{4} n^{1-2\mu}\right) = B \exp(-c_4 \exp 2X_p(n)).$$

Оценивая таким же образом интеграл по $(-\infty, -n^{1/2-\mu})$, приходим к формуле

$$p_{Z_n}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2} - i\xi x\right) \left(1 + \sum_{r=3}^m \frac{\chi_r}{r!} \left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)^r\right) d\xi + \\ + B \exp(-c_5 \exp(2X_p(n))).$$

8. Изучим теперь при $3 \leq r \leq m$ (см. ч. I, п. 9)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\xi^2/2 - i\xi x) \xi^r d\xi = H_r^{(0)}(x) e^{-x^2/2}. \quad (8.1)$$

При $3 \leq r \leq c_3$ имеем для (8.1) оценку:

$$B e^{-x^2/2} \sum_{r=3}^{c_3} \frac{|\chi_r|}{r!} |x|^r \frac{1}{(\sqrt{n})^r}. \quad (8.2)$$

При

$$|x| \leq \frac{n^{1/2-\mu}}{\rho(n)} \quad (8.3)$$

(8.1) получает оценку

$$B e^{-x^2/2} \sum_{r=3}^{c_3} n^{r\mu_1} n^{r(1/2-\mu)} n^{-r/2} \frac{1}{(\rho_1(n))^2} = B e^{-x^2/2} \frac{1}{(\rho_1(n))^3}. \quad (8.4)$$

Пусть теперь $c_3 < r \leq m$. Полагаем $r = q$, $s = \rho q$ ($0 \leq \rho \leq 1/2$). Следуя п. 9 (см. (9.7) в ч. I), получим при $c_4 \leq q \leq m$:

$$\begin{aligned} \frac{\chi_q}{q!} n^{-q/2} H_q^{(0)}(x) &= B \sup_{\rho} q (B - (1 - 2\rho) \lg \rho_1(n) + \\ &+ \rho \lg q - \rho (1 - 2\mu) \lg n + (\mu_1 - \mu) \lg n). \end{aligned} \quad (8.5)$$

Так как $\exp(2X_{\rho}(n))/m \rightarrow \infty$, то $B_n^{-2\mu}/m \rightarrow \infty$, откуда $\lg q \leq \lg m \leq B + (1 - 2\mu) \lg n$. Таким образом, $\rho \lg q - \rho (1 - 2\mu) \lg n = B - v(n)$, где $v(n) \geq 0$. Затем (см. п. 6) $(\mu_1 - \mu) \lg n = -\omega_n \lg n \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow -\infty$. Так что (8.5) получает оценку

$$B \exp(-c_4 q).$$

Если $q \geq \rho_2(n)$, то сумма таких оценок при $\rho_2(n) < q < m$ складывается в оценку

$$\frac{B}{\rho_3(n)}.$$

Далее, пусть $\rho_2(n)$ выбрано так, что

$$\lg q \leq \frac{(1 - 2\mu) \lg n}{2} = \left(\frac{1}{2} - \mu\right) \lg n$$

(заметим, что $(1 - 2\mu) \lg n \rightarrow \infty$). Тогда (8.5) получит оценку

$$\begin{aligned} \sup_{\rho} \left(B \exp(-q(1 - 2\rho) \lg \rho_1(n)) + B \exp\left(-q\rho\left(\frac{1}{2} - \mu\right) \lg n\right) \right) = \\ = B \exp(-q\rho_3(n)). \end{aligned}$$

Суммируя последнее выражение по $3 \leq q \leq \rho_2(n)$, получим оценку

$$\frac{B}{\rho_4(n)}.$$

Это и доказывает локальную предельную теорему для зон $[0, n^{1/2-\mu}/\rho_1(n)]$ и $[-n^{1/2-\mu}/\rho_1(n), 0]$. Далее, в силу (3.1) и (3.6) $\Lambda_\rho(n) = \exp(X_\rho(n)) = e^B n^{1/2-\mu}$. Это доказывает теорему 1.

9. Перейдем к интегральной теореме 2, следуя п. 11–14 ч. I. Пусть X_j теперь случайные величины общего вида $EX_j=0$, $D(X_j)=1$. Пусть $h(x)$ — функция класса I и выполнено условие (0.1). Вначале следуем п. 3. Определим μ из условия (3.6) и положим $\alpha=1/2-\mu$. Будем доказывать, что зоны $[0, n^\alpha/\rho_5(n)]$ и $[-n^\alpha/\rho_5(n), 0]$ суть з. н. п. Остановимся на первой из них. Будем следовать обозначениям и рассуждениям п. 11–14 ч. I, указывая лишь существенные отличия. Для нас важно, что (см. (3.3))

$$n^{1/2-\mu} = n^\alpha = e^B \exp(X_\rho(n)) > \left(h\left(\frac{\sqrt{n}}{\rho(n)}\right) \right)^{1/2} > (\lg n)^{1+\xi_0/2}. \quad (9.1)$$

Следуя рассуждениям и обозначениям п. 11–14 ч. I, вводим Y_n , $\Psi_n(t)$ и приходим к формуле (12.3) ч. I.

Заметим, что $n^{2\alpha} = n^{1-2\mu} > (\lg n)^{2+\xi_0}$, так что

$$n^{K+1} \exp(-c_6 n^{2\alpha}) = \exp(-c_7 n^{2\alpha}) \quad (9.2)$$

(см. ч. I, формула (12.5)). Ввиду этого имеют место формулы (12.7), (12.8), (13.1)–(13.5) ч. I. Для χ_r берется оценка (7.2) ч. I. Следуя п. 13 ч. I, приходим к формуле (13.11). Нам придется, однако, далее дать более точную оценку в этой формуле. Она записывается так:

$$\int_{x_1}^{\infty} e^{-x^2/2} H_q^{(0)}(x) dx = B^q q! \sum_{s \leq q/2} \frac{1}{q!(q-2s)!} \int_{x_1}^{\infty} e^{-u^2/2} u^{q-2s} du. \quad (9.3)$$

При $1 \leq x_1 \leq n^\alpha/\rho_6(n)$, $Q=q-2s=q(1-2\rho)$ по методу перевала легко находим оценку ($Q \geq 1$)

$$\int_{x_1}^{\infty} e^{-u^2/2} u^Q du = B^Q x_1^{Q-1} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2} + \frac{1}{2} Q \left| \lg \frac{Q}{x_1^2} \right| + \frac{1}{2} Q\right). \quad (9.4)$$

Мы видим, что если $x_1^2 \geq m \geq Q$, $x_1 \geq \sqrt{m} \geq \sqrt{Q}$, то (9.4) приводит к оценке

$$B^Q x_1^{Q-1} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2}\right). \quad (9.5)$$

Рассуждая, как в п. 8, придем к доказательству интегральной предельной теоремы для зоны $[\sqrt{m}, n^{\alpha}/\rho_2(n)]$. Пусть теперь $x_1 < \sqrt{m}$. Тогда (9.4) оцениваем величиной

$$B^q x_1^{q-1} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2}\right) \exp\left(\frac{1}{2} Q \lg Q\right). \quad (9.6)$$

При $s = \rho q$, $0 \leq \rho \leq 1/2$ берем соответствующий член (9.3), учитывая оценку (9.9) из ч. I и оценки $\chi_q/q! = B \exp(\mu_1 q \lg n)$, $n^{-q/2} = \exp(-q \lg n/2)$, которые нужно умножить на этот член. В результате при умножении на $x_1 \exp(-x_1^2/2)$ имеем следующую оценку (см. п. 9 ч. I; $x_1 \leq \sqrt{m}$):

$$\begin{aligned} & B \exp q \left(B + (1 - 2\rho) \frac{1}{2} \lg m - \rho \lg q - (1 - 2\rho) \lg q + \lg q - \right. \\ & \quad \left. - \rho \lg \rho - (1 - 2\rho) \lg(1 - 2\rho) - \frac{1}{2} \lg n + \mu_1 \lg n \right) = \\ & = B \exp q \left(B + \left(\frac{1}{2} - \rho \right) \lg m + \rho \lg q - \rho \lg \rho - (1 - 2\rho) \lg(1 - 2\rho) - \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{1}{2} - \mu_1 \right) \lg n \right) = B \exp q \left(B + \frac{1}{2} \lg m - \left(\frac{1}{2} - \mu \right) \lg n - \omega_n \lg n \right). \quad (9.7) \end{aligned}$$

Далее, $(1/2 - \mu) \lg n - \lg m/2 \rightarrow \infty$, $\omega_n \lg n \rightarrow \infty$ (см. п. 8). Поэтому (9.7) имеет оценку

$$B \exp(-q\rho_7(n)).$$

Суммируя эту оценку по $3 \leq q \leq m$, найдем оценку

$$\frac{B}{\rho_8(n)},$$

которая и доказывает интегральную теорему для зоны $[1, \sqrt{m}]$. Зона $[-n^{\alpha}/\rho_6(n), -1]$ трактуется аналогично, а зона $[-1, 1]$ отвечает известным теоремам. Тем самым теорема 2 доказана.

10. Перейдем к теоремам 3—5. Они касаются самых узких зон. Функции $h(x)$ класса III (см. ч. I, формула (2.5)), удовлетворяющие условию

$$3 \lg x \leq h(x) \leq M \lg x, \quad (10.1)$$

где M — константа, отвечают случаю существования третьего момента, но, вообще говоря, несуществованию моментов начиная с некоторого номера. В этом случае классическими средствами (см. [1]) можно установить, что $[0, \sqrt{\lg n/\rho(n)}]$ и $[-\sqrt{\lg n/\rho(n)}, 0]$ будут з. р. л. н. п. для величин класса (d) и з. н. п. вообще и что зоны $[0, \sqrt{\lg n/\rho(n)}]$; $[-\sqrt{\lg n/\rho(n)}, 0]$ не будут таковыми, если не все моменты существуют. Это и составляет содержание теоремы 5. К тем же результатам можно прийти и пользуясь описанными ниже средствами.

Остановимся на теоремах 3 и 4, относящихся к функциям класса II. Для этих функций имеем (см. ч. I, п. 2)

$$\rho_0(x) \lg x \leq h(x) < (\lg x)^2, \quad (10.2)$$

причем

$$h(x) = M(x) \lg x = N(\lg x) \lg x, \quad (10.3)$$

где

$$N'(z) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty. \quad (10.4)$$

Положим

$$\Lambda(n) = \sqrt{M(n)} \sqrt{\lg n}. \quad (10.5)$$

Если зоны $[0, \Lambda(n)\rho(n)]$ и $[-\Lambda(n)\rho(n), 0]$ являются з. р. л. н. п. (разумеется, речь идет о величинах $X_j \in (d)$) или з. н. п., то должно быть выполнено условие (0.1). Это доказывается так же, как соответствующее утверждение в п. 2.

Перейдем теперь к доказательству достаточности условия (0.1) для того, чтобы зоны $[0, \Lambda(n)/\rho(n)]$ и $[-\Lambda(n)/\rho(n), 0]$ были бы з. р. л. н. п.

Пусть $\mu > 0$ — положительное число, которое будет фиксировано далее; $X_j \in (d)$; имеем:

$$p_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int_{-n^{-\mu}}^{n^{-\mu}} (\varphi(t))^n \exp(-itx\sqrt{n}) dt + B \exp(-c_8 n^{1-2\mu}). \quad (10.6)$$

Следуя п. 4, займемся оценкой

$$\varphi^{(q)}(t) = B \int_1^{\infty} x^q \exp(-h(x)) dx = B \int_1^{\infty} \exp(q \lg x - h(x)) dx. \quad (10.7)$$

Пусть $Q(q)$ — решение уравнения

$$h(x) = (q+4) \lg x, \quad \text{т. е.} \quad M(x) = q+4. \quad (10.8)$$

Тогда

$$\int_{Q(q)}^{\infty} \exp(q \lg x - h(x)) dx = B \int_{Q(q)}^{\infty} \frac{dx}{x^4} = B, \quad (10.9)$$

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \exp(q \lg x - h(x)) dx &= BQ(q) \exp(q \lg Q(q)) = \\ &= B \exp((q+1) \lg Q(q)). \end{aligned} \quad (10.10)$$

Будем пользоваться этой грубой оценкой для $\varphi^{(q)}(t)$, достаточной для наших целей. Из (10.8) находим

$$Q(q) = M^{-1}(q+4), \quad (10.11)$$

так что (10.10) дает:

$$\varphi^{(q)}(t) = B \exp(q+1) \lg M^{-1}(q+4). \quad (10.12)$$

Следуя п. 4, находим отсюда:

$$K^{(q)}(0) = B \exp(q+1) \lg M^{-1}(q+4), \quad (10.13)$$

$$\sup_{|t| \leq n^{-\mu}} \left| K^{(m)}(t) \frac{t^m}{m!} \right| = B \exp(\lg M^{-1}(m+4) - \mu m \lg n). \quad (10.14)$$

11. Теперь выберем μ согласно условию

$$n^{1-2\mu} = (\Lambda(n))^2 = M(n) \lg n. \quad (11.1)$$

Таким образом,

$$\mu = \frac{1}{2} - \frac{X(n)}{\lg n} + \frac{B}{\lg n}, \quad X(n) = \lg \Lambda(n) = O(\lg \lg n). \quad (11.2)$$

Пусть $\tau = 10^{-6}$. Выберем m при условии

$$\lg M^{-1}(m+4) = \frac{\tau \mu \lg n}{2} + B. \quad (11.3)$$

Тогда в силу (10.4)

$$m+4 = M(n^{\tau \mu / 2}) = N\left(\frac{\tau \mu}{2} \lg n\right) \asymp N(\lg n) = M(n). \quad (11.4)$$

Теперь из формулы (10.14) получаем, согласно (11.2), (11.4):

$$\begin{aligned} \sup_{|t| \leq n^{-\mu}} \left| K^{(m)}(t) \frac{t^m}{m!} \right| &= B \exp\left(-\left(\mu - \frac{\tau}{2}\right) \lg n + B\right) m = \\ &= B \exp(-c_8 M(n) \lg n) = B \exp(-c_8 (\Lambda(n))^2). \end{aligned} \quad (11.5)$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} p_{Z_n}(x) &= \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int_{-n^{-\mu}}^{n^{-\mu}} \exp\left(-\frac{nt^2}{2} + nK_3(t) - i\sqrt{n}tx\right) dt + \\ &\quad + B \exp(-c_8 (\Lambda(n))^2), \end{aligned} \quad (11.6)$$

$$K_3(t) = \sum_{r=3}^m \Psi_r \frac{t^r}{r!}. \quad (11.7)$$

Нам нужно теперь заняться целой функцией $\exp nK_3(t)$. Положим

$$\mu_1 = 0.99\mu \quad (11.8)$$

и оценим $nK_3(t)$ при $|t| \leq n^{-\mu_1}$. Для $r \leq c_3$ имеем $\Psi_r = B$ и

$$n \sum_{3 \leq r \leq c_3} \frac{t^r}{r!} \Psi_r = B \frac{n}{n^{3\mu_1}} = O(1). \quad (11.9)$$

Далее, при $c_3 < r \leq m$ имеем в силу (10.13):

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_r t^r}{r!} &= B \exp((r+1) \lg M^{-1}(r+4) - \mu_1 r \lg n - r \lg r) = \\ &= B \exp\left(-r \frac{\mu_1 \lg n}{10}\right) = B n^{-r\mu_1/10}. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Из (11.9) и (11.10) при $|t| \leq n^{-\mu_1}$ выводим

$$nK_3(t) = B$$

и отсюда, с помощью интеграла Коши (см. (7.2)), —

$$\chi_r = Br! n^{r\mu_1}.$$

При $r \geq m$, $|t| \leq m^{-\mu_1}$ из (11.10) находим:

$$\sum_{r=m}^{\infty} \frac{\chi_r t^r}{r!} = B \exp(-0.005m \lg n) = B \exp(-c_0 M(n) \lg n) = B \exp(-c_0 (\Lambda(n))^2).$$

12. Отсюда:

$$\begin{aligned} p_{Z_n}(x) &= \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int_{-n^{-\mu}}^{n^{-\mu}} \exp\left(-\frac{nt^2}{2} - itx\sqrt{n}\right) \left(1 + \sum_{r=3}^m \frac{\chi_r}{r!} t^r\right) dt + \\ &+ B \exp(-c_{10} (\Lambda(n))^2). \end{aligned} \quad (12.1)$$

Делаем подстановку $\xi = t\sqrt{n}$:

$$\begin{aligned} p_{Z_n}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-n^{1/2-\mu}}^{n^{1/2-\mu}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2} - i\xi x\right) \left(1 + \sum_{r=3}^m \frac{\chi_r}{r!} \left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)^r\right) d\xi + \\ &+ B \exp(-c_{10} (\Lambda(n))^2). \end{aligned} \quad (12.2)$$

При данном $r \leq m$ рассмотрим

$$\frac{\chi_r}{r! (\sqrt{n})^r} \int_{n^{1/2-\mu}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \xi^r d\xi = B^* \Gamma\left(\frac{r}{2}\right) n^{-(1/2-\mu_1)r} \exp\left(-\frac{1}{4} n^{1-2\mu}\right). \quad (12.3)$$

Выделяя множитель $\exp(-n^{1-2\mu}/4)$, оценим второй множитель в (12.3). Учитывая (11.4), имеем:

$$B^* \Gamma\left(\frac{r}{2}\right) n^{-(1/2-\mu_1)r} = B \exp r \left(B + \frac{\lg r}{2} - \left(\frac{1}{2} - \mu_1\right) \lg n\right), \quad (12.4)$$

$$\lg r - \left(\frac{1}{2} - \mu_1\right) \lg n \leq \frac{1}{2} \lg m - \left(\frac{1}{2} - \mu_1\right) \lg n \leq -\frac{1}{4} \lg n. \quad (12.5)$$

Поэтому (12.3) имеет оценку $Bn^{-r/4}$, и сумма по $r > c_3$ дает $o(1)$. Далее, $n^{1-2\mu} = (\Lambda(n))^2$, так что из (12.2) находим:

$$p_{Z_n}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2} - i\xi x\right) \left(1 + \sum_{r=3}^m \frac{\chi_r}{r!} \left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)^r\right) d\xi + \\ + B \exp(-c_{10}(\Lambda(n))^2); \quad (12.6)$$

из (12.6) выделяется член $(1/\sqrt{2\pi})e^{-x^2/2}$; здесь

$$0 \leq x \leq \frac{n^{1/2-\mu}}{\rho_7(n)} = \frac{\Lambda(n)}{\rho_7(n)}. \quad (12.7)$$

При $3 \leq r \leq c_3$ сумма соответствующих членов будет равна

$$o(1)e^{-x^2/2}. \quad (12.8)$$

При $c_3 < r \leq m$, следуя п. 8, приходим к рассмотрению выражения

$$r(B - (1 - 2\rho) \lg \rho_7(n) + \rho \lg r - \rho(1 - 2\mu) \lg n - (\mu - \mu_1) \lg n). \quad (12.9)$$

Здесь $\lg r \leq \lg m = B \lg \lg n$ (см. (11.4)). Ввиду этого (12.9) дает оценку

$$Bn^{-r(\mu - \mu_1)}.$$

Суммирование по $c_3 \leq r \leq m$ дает погрешность

$$\frac{B}{n^2},$$

после чего из (12.6) следует:

$$p_{Z_n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) (1 + o(1)).$$

Аналогично трактуется зона $[-\Lambda(n)/\rho_7(n), 0]$.

13. Интегральная теорема доказывается совершенно так же, как в п. 9, здесь достаточно грубых оценок, выведенных в п. 10—12. Также существенно (см. п. 9), что $(\Lambda(n))^2 = M(n) \lg n \geq \geq \rho_0(n) \lg n$ (см. (10.2)). Ввиду этого

$$n^{K+1} \exp(-c_{11}(\Lambda(n))^2) = \exp(-c_{12}(\Lambda(n))^2)$$

(см. ч. I, формула (12.5)), и мы можем рассуждать далее, как в п. 9.

Л и т е р а т у р а

1. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.—Л., 1949. 264 с.
2. Chernoff H. Large sample theory: parametric case. — Ann. Math. Stat., 1956, vol. 27, N 1, p. 1—22.
3. Wolfowitz J. Information theory for mathematicians. — Ann. Math. Stat., 1958, vol. 29, N 2, p. 351—356.

4. Л и н н и к Ю. В. Цепи Маркова в аналитической арифметике кваaternionов и матриц. — Вестник ЛГУ, 1956, № 13. Сер. мат., мех., астроном., вып. 3, с. 63—68.
5. Л и н н и к Ю. В. Пять лекций о некоторых вопросах теории чисел и теории вероятностей. — Magyar tud. akad. mat. kutato közl., 1959, vol. 4, N 3—4, p. 225—258.
6. K h i n c h i n A. J. Über einen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Math. Ann., 1929, vol. 101, S. 745—752.
7. С м и р н о в Н. В. О вероятностях больших уклонений. — Мат. сб., 1933, т. 40, вып. 4, с. 443—454.
8. G r a m e r H. Sur un nouveau théorème limite de la théorie des probabilités. — Actual. sci. et industr., Paris, 1938, N 736, p. 5—23.
9. П е т р о в В. В. Обобщение предельной теоремы Крамера. — Успехи мат. наук, 1954, т. 9, вып. 4, с. 196—202.
10. Р и х т е р В. Локальная предельная теорема для больших уклонений. — ДАН СССР, 1957, т. 115, № 1, с. 53—56.
11. Р и х т е р В. Локальные предельные теоремы для больших уклонений. — Теор. вероятн. и ее примен., 1957, т. 2, вып. 2, с. 214—229.
12. Р и х т е р В. Многомерные локальные предельные теоремы для больших уклонений. — Теор. вероятн. и ее примен., 1958, т. 3, вып. 1, с. 107—114.
13. L i n n i k Y u. V. On the probability of large deviations for the sums of independent variables. — Proceedings of the 4 Berkeley sympos. on math. statistics and probability. Vol. 2. Berkeley—Los-Angeles, 1961, p. 289—306.
14. B o c h n e r S., C h a n d r e s e k h a r a n K. Fourier transforms. Princeton, 1949. 219 p.
15. B a t e m a n H. Higher transcendental functions. Vol. 2. New York, 1953. 396 p.

О ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН

Proceedings of the 4 Berkeley sympos. on math. statistics and probability. Vol. 2. Berkeley—Los-Angeles, 1961, p. 289—306

1. Введение

Классическая теория суммирования независимых случайных величин [1] в ее простейшем случае рассматривает нарастающие суммы $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Для должным образом нормированных и центрированных сумм $Z_n = S_n/B_n - A_n$ изучается предельное поведение вероятностных мер, порожденных $\{Z_n\}$ на вещественной оси.

Наиболее общими являются интегральные теоремы о предельном поведении

$$P\{Z_n < x\}. \quad (1.1)$$

Хотя теория локальных предельных теорем довольно хорошо развита (см. [1]), она не является столь законченной, как теория интегральных предельных теорем. Предельные теоремы для выражения (1.1) обычно предполагают, что $n \rightarrow \infty$, а x — фиксированное число.

Однако многие задачи, встречающиеся в столь различных отраслях наук, как математическая статистика [2, 3], теория информации [4, 5], статистическая физика полимеров [6], химия каучука [7] и даже аналитическая теория чисел [8], требуют некоторой информации о предельном поведении (1.1), не содержащейся в классических предельных теоремах. Требуется информация относительно асимптотического поведения

$$P\{Z_n > x\} \quad (1.2)$$

для «больших значений» x , т. е. $x = x_n$, возрастающих при возрастании n ; соответствующие задачи можно назвать задачами о вероятностях больших отклонений. Так как вероятности событий такого типа, вообще говоря, малы, то обычные методы доказательства предельных теорем (характеристические функции, дифференциальные уравнения в частных производных) слишком грубы для получения удовлетворительных общих результатов и желаемые асимптотические результаты рассмотрены в литературе при некоторых весьма жестких условиях, налагаемых на величины X_j .

Первая теорема о вероятностях больших отклонений была опубликована А. Я. Хинчиным [9] в 1929 г. и относилась к частному случаю бернуллиевских величин. Этот же случай трактовал Н. В. Смирнов [10]. В 1938 г. появилась фундаментальная работа Г. Крамера [11], содержащая первый результат общего типа в теории больших отклонений. Этот результат был улучшен В. Феллером [12] и В. В. Петровым [13].

Здесь мы сформулируем результат В. В. Петрова, ограничиваясь для простоты случаем одинаково распределенных величин. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — последовательность независимых одинаково распределенных величин с

$$E(X_j) = 0, \quad D(X_j) = \sigma^2, \\ S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad Z_n = \frac{S_n}{\sigma \sqrt{n}}, \quad (1.3)$$

$$F_n(x) = P\{Z_n < x\}, \quad G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du.$$

Условие (C) Г. Крамера (см. [11])

$$E \exp(a |X_j|) < \infty \quad (1.4)$$

должно выполняться для некоторого $a > 0$. Тогда при $x \geq 1$, $x = o(\sqrt{n})$ и $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - G(x)} = \exp \left[\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right] \left[1 + o \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right], \quad (1.5)$$

$$\frac{F_n(-x)}{G(-x)} = \exp \left[-\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right] \left[1 + o \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right], \quad (1.6)$$

где $\lambda(z)$ — степенной ряд, включающий в себя кумулянты величин X_j и сходящийся при $|z| < \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$. Позднее В. Рихтер [14—16] ввел метод перевала в теорию больших уклонений. Для одного частного случая это было сделано ранее Г. Даниельсом [2]. При выполнении условия Г. Крамера (С) В. Рихтер вывел ряд локальных предельных теорем для больших уклонений, установил связь между методом Крамера и методом перевала и исследовал необходимость условия (С) для выполнения (1.5) и (1.6) при $x = o(\sqrt{n})$.

Все результаты, полученные до сих пор, использовали условие (С) Крамера. Аналитический смысл условия (С) заключается в том, что характеристическая функция (в дальнейшем х. ф.) X_j является аналитической в некоторой окрестности нуля, а значит, и в соответствующей полосе. Это дает возможность применить теорию аналитических функций и метод перевала.

Если условие (С) нарушено, то методы, применяемые до сих пор, недостаточны. Цель этой статьи — дать некоторые приложения нового подхода, позволяющего получить довольно общие результаты. Из класса задач, к которым применим этот метод, здесь мы рассмотрим только задачу о нормальной сходимости и задачу о предельных теоремах, справедливых для всех x при $n \rightarrow \infty$.

2. Зона нормального притяжения: интегральные предельные теоремы

Мы рассмотрим здесь задачу о нормальной сходимости для больших уклонений для простоты только в случае независимых одинаково распределенных величин. Пусть $X_1, \dots, X_n, \dots$ — независимые одинаково распределенные величины с $E(X_j) = 0$, $D(X_j) = 1$, $Z_n = (X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$. Пусть $\Psi(n) \rightarrow \infty$ — любая монотонная функция. Последовательность сегментов $[0, \Psi(n)]$ будем называть зоной нормального притяжения (з. н. п.), если при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{P\{Z_n > x\}}{(1/\sqrt{2\pi}) \int_x^\infty e^{-u^2/2} du} \rightarrow 1 \quad (2.1)$$

для любого $x \in [0, \Psi(n)]$. З. н. п. $[-\Psi(n), 0]$ определяется аналогично. Это определение не требует, чтобы сходимость была равномерной, хотя во всех полученных теоремах сходимость равномерна.¹⁾

¹⁾ На самом деле в этом определении сходимость надлежит считать равномерной на $[0, \Psi(n)]$. Неравномерная сходимость — тривиальное следствие центральной предельной теоремы. (Прим. ред.).

При выполнении условия (С) Крамера для любой функции $\Psi(n) = o(n^{1/6})$ обе зоны, $[0, \Psi(n)]$ и $[-\Psi(n), 0]$, будут з. н. п. Зоны с $\Psi(n) = o(n^{1/6})$ будут называться узкими зонами. Две первые теоремы относятся к зонам с $\Psi(n) = n^\alpha$, где $\alpha > 0$ постоянная.

Теорема 1. Если для любого $\alpha < 1/2$ зона $[0, n^\alpha]$ и зона $[-n^\alpha, 0]$ суть з. н. п., то все величины X_j нормальны.

Конечно, это условие также достаточно для того, чтобы зоны $[0, n^\alpha]$ и $[-n^\alpha, 0]$ были з. н. п. Последний факт тривиален.

Таким образом, мы видим, что достаточно исследовать значения $\alpha < 1/2$.

Теорема 2. Пусть $\rho(n)$ — монотонная сколь угодно медленно возрастающая функция, и пусть $0 < \alpha < 1/2$. Если $\alpha < 1/6$, то необходимым условием для того, чтобы зоны $[0, n^\alpha \rho(n)]$ и $[-n^\alpha \rho(n), 0]$ были з. н. п., будет условие

$$E \exp [X_j]^{4\alpha/(2\alpha+1)} < \infty. \quad (2.2)$$

Это условие и достаточно для того, чтобы зоны $[0, n^\alpha/\rho(n)]$ и $[-n^\alpha/\rho(n), 0]$ были з. н. п., причем сходимость в этих зонах будет равномерной. Если $1/6 \leq \alpha < 1/2$, то рассмотрим последовательность критических чисел

$$\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{3}{10}, \dots, \frac{1}{2} \frac{s+1}{s+3}, \dots, \rightarrow \frac{1}{2}. \quad (2.3)$$

Пусть

$$\frac{1}{2} \frac{s+1}{s+3} \leq \alpha < \frac{1}{2} \frac{s+2}{s+4}. \quad (2.4)$$

Если зоны $[0, n^\alpha \rho(n)]$ и $[-n^\alpha \rho(n), 0]$ суть з. н. п., то должно выполняться условие (2.2) и все моменты X_j до $(s+3)$ -го включительно должны совпадать с моментами нормального закона. Эти два условия достаточны для того, чтобы зоны $[0, n^\alpha/\rho(n)]$ и $[-n^\alpha/\rho(n), 0]$ были з. н. п. Сходимость в этих зонах равномерна.

Так как нормальный закон полностью определяется последовательностью его моментов, теорема 1 немедленно следует из теоремы 2.

Рассмотрим теперь узкие зоны с $\Psi(n) = o(n^{1/6})$, отличные от зон $[0, n^\alpha]$. Необходимое условие для того, чтобы зоны $[0, \Psi(n)\rho(n)]$ и $[-\Psi(n)\rho(n), 0]$ были з. н. п., и достаточное условие для того, чтобы зоны $[0, \Psi(n)/\rho(n)]$ и $[-\Psi(n)/\rho(n), 0]$ были з. н. п., имеют вид

$$E \exp h(|X_j|) < \infty, \quad (2.5)$$

где $h(x)$ — монотонная функция, зависящая от $\Psi(n)$.

Для нас проще описать $\Psi(n)$ через $h(x)$. Рассмотрим несколько классов функций $h(x)$. Будем предполагать, что функция $h(x)$ положительна, монотонна и дифференцируема.

Класс I будет обозначать функции $h(x)$, удовлетворяющие условию

$$(\lg x)^{2+\varepsilon_0} \leq h(x) \leq x^{1/2}, \quad x \geq 1. \quad (2.6)$$

Здесь $\varepsilon_0 > 0$ — любое малое фиксированное число. Функции, растущие быстрее $x^{1/2}$, при исследовании узких зон не потребуются.

Класс II состоит из функций $h(x)$, удовлетворяющих условию

$$\rho_1(x) \lg x \leq h(x) \leq (\lg x)^{2+\varepsilon_0}, \quad (2.7)$$

где $x \geq 1$; $\rho_1(x)$, $\rho_2(x)$, ... обозначают в дальнейшем положительные монотонные функции, возрастающие сколь угодно медленно.

Класс III состоит из функций $h(x)$, таких, что

$$3 \lg x \leq h(x) \leq M \lg x, \quad (2.8)$$

где $M \geq 3$ постоянная. Неравенство $M \geq 3$ связано с существованием третьего момента.

Рассмотрим теперь функции класса I, определенные посредством условия (2.6). Положим

$$h(x) = \exp [H(\lg x)]. \quad (2.9)$$

Тогда $H(z)$ — монотонная дифференцируемая функция. Введем следующие дополнительные условия:

$$H'(z) \leq 1, \quad (2.10)$$

$$H'(z) \exp H(z) \rightarrow \infty, \quad z \rightarrow \infty. \quad (2.11)$$

Эти условия следуют из (2.6), если предположить, что $H'(z)$ монотонна; мы принимаем эти условия, чтобы упростить результаты.

Для данной функции $h(x)$ из класса I, удовлетворяющей дополнительным условиям (2.10) и (2.11), или из класса II определим новую функцию $\Lambda(n)$ посредством уравнения

$$h[\sqrt{n} \Lambda(n)] = [\Lambda(n)]^2.$$

Теорема 3. Условие

$$E \exp h(|X_j|) < \infty,$$

где $h(x)$ принадлежит классу I с (2.10) и (2.11) или классу II, необходимо для того, чтобы зоны $[0, \Lambda(n)\rho(n)]$ и $[-\Lambda(n)\rho(n), 0]$, были з. н. п., и достаточно для того, чтобы зоны $[0, \Lambda(n)/\rho(n)]$ и $[-\Lambda(n)/\rho(n), 0]$ были з. н. п. Сходимость в этом случае равномерна.

Перейдем теперь к функциям $h(x)$, принадлежащим классу III. Этот случай может быть изучен классическими методами [1]. Для полноты сформулируем следующий результат.

Теорема 4. Условие (2.13), где $h(x)$ принадлежит классу III, необходимо для того, чтобы зоны $[0, \rho(n)(\lg n)^{1/2}]$ и $[-\rho(n)(\lg n)^{1/2}, 0]$

были з. н. п., и достаточно для того, чтобы зоны $[0, (\lg n)^{1/2}/\rho(n)]$ и $[-(\lg n)^{1/2}/\rho(n), 0]$ были з. н. п.

Таким образом, если $E|X_j|^M = \infty$ при фиксированном M , то з. н. п. не может быть существенно шире, чем $[0, (\lg n)^{1/2}]$. Случай $E|X_j|^3 = \infty$ (третий момент не существует) изучался многими авторами (литературу см. в работе [1]).

Случай (2. 8) — класса III функций $h(x)$ — соответствует медленно убывающим «вероятностям хвостов» $P\{X_j > x\}$. В этом случае, как будет показано ниже, имеют место предельные теоремы нового типа — предельные теоремы, справедливые для всей x -оси.

3. Локальные предельные теоремы

В предыдущем пункте мы рассматривали интегральные предельные теоремы. Теперь перейдем к локальным предельным теоремам о нормальной сходимости. Эти теоремы обычно рассматриваются для случайных величин, имеющих вероятностную плотность, или целочисленных величин. Можно рассматривать также вероятностные меры на кольце целых чисел алгебраического числового поля. Здесь мы ограничимся классом (d) всех случайных величин, имеющих ограниченную непрерывную плотность $g(x)$. Тогда Z_n (см. § 2) также имеет непрерывную плотность $p_{Z_n}(x)$. Зону $[0, \Psi(n)]$ будем называть зоной равномерного локального нормального притяжения (з. р. л. н. п.), если

$$\frac{p_{Z_n}(x)}{(1/\sqrt{2\pi}) e^{-x^2/2}} \rightarrow 1$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно $x \in [0, \Psi(n)]$. З. р. л. н. п. $[-\Psi(n), 0]$ определяется аналогично.

Т е о р е м а 5. *Для величин X_j из класса (d) з. р. л. н. п. ведут себя относительно необходимых и достаточных условий, приведенных в теоремах 1—4, так же, как з. н. п. для общих случайных величин в теоремах 1—4.*

Локальные предельные теоремы для больших уклонений доказываются методом, изложенным здесь, значительно легче, чем соответствующие интегральные теоремы, так как существование плотности $g(x)$ сильно облегчает доказательство.

4. Доказательство необходимости условия (2.2)

Мы приведем здесь доказательства только в простейших случаях с тем, чтобы изложить новый метод в наиболее ясной форме; доказательства всех теорем 1—5 хотя и не отличаются в существенном, но более сложны и будут опубликованы в дальнейшем. В частности, мы будем рассматривать только зоны $[0, n^\alpha]$ и $[-n^\alpha, 0]$ с $0 < \alpha < 1/2$ и только локальные предельные теоремы. Однако,

так как в части необходимости интегральные теоремы почти тривиальны, мы начнем с этой части доказательства.

Пусть зоны $[0, n^\alpha \rho(n)]$ и $[-n^\alpha \rho(n), 0]$ — з. н. п. Докажем, что

$$E \exp[|X_j|^{4\alpha/(2\alpha+1)}] < \infty. \quad (4.1)$$

Допустим, что (4.1) не имеет места. Тогда легко видеть, что существует или последовательность $x_m \rightarrow \infty$, такая, что

$$P\{X_1 > x_m\} > \exp[-2x_m^{4\alpha/(2\alpha+1)}], \quad (4.2)$$

или последовательность $-x_m \rightarrow -\infty$, такая, что

$$P\{X_1 < -x_m\} > \exp[-2x_m^{4\alpha/(2\alpha+1)}]. \quad (4.3)$$

Предположим, что (4.2) справедливо. Для достаточно больших m выберем n так, чтобы $x_m = n^{\alpha+1/2} \rho(n)$. Зона $[0, n^\alpha \rho(n)]$ — з. н. п., поэтому должно выполняться неравенство

$$P\left\{Z_n > \frac{n^\alpha \rho(n)}{2}\right\} < \exp\left\{-\frac{n^{2\alpha} [\rho(n)]^2}{16}\right\}. \quad (4.4)$$

С другой стороны, событие $Z_n > n^\alpha \rho(n)/2$ на вероятное произойдет, если произойдут одновременно два независимых события, $X_1 > n^{\alpha+1/2} \rho(n)$ и $|(X_2 + X_3 + \dots + X_n)/\sqrt{n}| < 1$. Отсюда, по центральной предельной теореме ($c_0 > 0$ постоянная),

$$P\left\{Z_n > \frac{n^\alpha \rho(n)}{2}\right\} > c_0 P\{X_1 > n^{\alpha+1/2} \rho(n)\} > c_0 \exp\{-2n^{2\alpha} [\rho(n)]^{4\alpha/(2\alpha+1)}\} \quad (4.5)$$

ввиду (4.2). Так как $\alpha < 1/2$, то $4\alpha/(2\alpha+1) < 1$ и (4.5) противоречит (4.4). Случай (4.3) рассматривается аналогично. Доказательство необходимости (4.1) для того, чтобы зоны $[0, n^\alpha \rho(n)]$ и $[-n^\alpha \rho(n), 0]$ были з. р. л. н. п., проводится аналогично.

5. Доказательство достаточности при $0 < \alpha < 1/6$

Перейдем теперь к локальной предельной теореме. Пусть величины X_j обладают ограниченной непрерывной плотностью $g(x)$. Введем некоторые обозначения. Буквой B будем обозначать ограниченные функции от рассматриваемых параметров, не всегда одинаковые. $\delta_0, \delta_1, \dots; \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots$ будут обозначать малые положительные постоянные; $C_0, C_1, \dots; c_0, c_1, \dots$ — положительные постоянные. Запишем:

$$\varphi(t) = E e^{itX_j} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it u} g(u) du. \quad (5.1)$$

Функция $|\varphi(t)|^2$ — неотрицательное преобразование Фурье, и, следовательно (ср. [17], с. 20), имеем $|\varphi(t)|^2 \in L_1(-\infty, \infty)$, так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 dt < \infty. \quad (5.2)$$

Отсюда получаем, что

$$p_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(t)]^n e^{-\sqrt{n} itx} dt. \quad (5.3)$$

Пусть (4.1) выполнено. Допустим сначала, что $\alpha < 1/6$. Мы должны доказать, что $[0, n^\alpha/\rho(n)]$ и $[-n^\alpha/\rho(n), 0]$ — з. р. л. н. п. Будем изучать только первую зону, вторая рассматривается аналогично. Выберем x так, чтобы

$$0 \leq x \leq \frac{n^\alpha}{\rho(n)}. \quad (5.4)$$

Ввиду (4.1) функция $\varphi(t)$ бесконечно дифференцируема на всей оси, и, следовательно, при любом $T > 0$ и целом $p > 0$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{t\varphi'(0)}{1!} + \dots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \varphi^{(p-1)}(0) + \frac{t^p}{p!} R_p(t), \quad (5.5)$$

где

$$|R_p(t)| \leq 2 \sup_{|t| \leq T} |\varphi^{(p)}(t)|. \quad (5.6)$$

Более того, $\varphi'(0) = 0$; $\varphi''(0) = -1$. Отсюда следует, что при $|t| < \varepsilon_0$

$$\varphi(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + Bt^3; \quad |\varphi(t)| \leq 1 - \frac{t^2}{4}. \quad (5.7)$$

Далее, ввиду существования ограниченной непрерывной плотности $g(x)$ имеем при $|t| > \varepsilon_0$:

$$|\varphi(t)| < 1; \quad \varphi(t) \rightarrow 0, \quad \text{когда } t \rightarrow \pm \infty. \quad (5.8)$$

Комбинируя (5.2), (5.3) и (5.8), получаем, что

$$p_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} |\varphi(t)|^n e^{-\sqrt{n} itx} dt + B e^{-C_0 n}. \quad (5.9)$$

Положим

$$\mu = \frac{1}{2} - \alpha. \quad (5.10)$$

Ввиду (5.7) при $n^{-\mu} \leq |t| \leq \varepsilon_0$

$$|\varphi(t)|^n \leq \left(1 - \frac{n^{-2\mu}}{4}\right)^n = B \exp(-C_1 n^{1-2\mu}) = B \exp(-C_1 n^{2\alpha}). \quad (5.11)$$

Отсюда и из (5.9) получаем, что

$$p_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int_{-n^{-\mu}}^{n^{-\mu}} [\varphi(t)]^n \exp(-\sqrt{n} itx) dt + B \exp(-\delta_0 n^{2\alpha}). \quad (5.12)$$

6. Аппроксимация $\varphi(t)$

Функция (5.5), вообще говоря, не является аналитической, и, следовательно, ее ряд Тейлора расходится. Мы должны выбрать подходящее приближение для нее на сегменте $|t| \leq n^{-\mu}$, т. е. выбрать подходящее p в формуле (5.5). Нам необходимо оценить $\varphi^{(q)}(0)$ при $q \leq p$. Имеем:

$$\varphi^{(q)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} (ix)^q g(x) dx. \quad (6.1)$$

Отсюда

$$|\varphi^{(q)}(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x|^q g(x) dx. \quad (6.2)$$

Полагая $k = (1 + 2\alpha)/4\alpha$, получим из (4.1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(|x|^{1/k}) g(x) dx < \infty, \quad (6.3)$$

откуда легко находим:

$$|\varphi^{(q)}(t)| = B^q \Gamma(kq). \quad (6.4)$$

Пусть $K(t) = \lg \varphi(t)$, где $K(0) = 0$, $|t| \leq n^{-\mu}$. Из (5.12) получаем, что

$$p_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int_{-n^{-\mu}}^{n^{-\mu}} \exp[nK(t) - \sqrt{n} itx] dt + B \exp(-\delta_0 n^{2\alpha}). \quad (6.5)$$

Более того, из (5.7) заключаем, что при $|t| \leq \varepsilon_0$

$$K(t) = B. \quad (6.6)$$

Нам необходимо оценить $K^{(q)}(t_0)$ при $|t_0| \leq \varepsilon_0/2$. Полагая

$$\bar{\varphi}(t + t_0) = \varphi(t_0) + \frac{t\varphi'(t_0)}{1!} + \dots + \frac{t^q \varphi^{(q)}(t_0)}{q!}, \quad (6.7)$$

имеем:

$$K^{(q)}(t_0) = [\lg \bar{\varphi}(t + t_0)]^{(q)}. \quad (6.8)$$

Чтобы вычислить $K^{(q)}(t_0) = [\lg \varphi(t)]^{(q)}$ при $t = t_0$, необходимы только производные $\varphi^{(p)}(t_0)$ с $p \leq q$, а они совпадают с $\tilde{\varphi}^{(p)}(t_0)$. Если C_ρ — круг $|t| \leq \rho$, в котором $\tilde{\varphi}(t + t_0)$ не имеет нулей, то $\tilde{\varphi}(t + t_0)$ является аналитической функцией при $|t| \leq \rho$ и

$$K^{(q)}(t_0) = \frac{q!}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{\lg \tilde{\varphi}(t + t_0)}{t^{q+1}} dt. \quad (6.9)$$

Рассмотрим теперь (6.7). Из (6.4) имеем:

$$\frac{\varphi^{(p)}(t_0)}{p!} = B \exp[Bp + (k-1)p \lg p]. \quad (6.10)$$

Выберем в качестве C_ρ круг

$$|t| \leq \exp[C_0 - (k-1) \lg q]. \quad (6.11)$$

При достаточно больших C_0 внутри C_ρ

$$\left| \sum_{p=1}^q \frac{\varphi^{(p)}(t_0)}{p!} t^p \right| < \frac{1}{4}, \quad (6.12)$$

как легко видеть из (6.10) и (6.11). Следовательно, на C_ρ

$$\frac{1}{2} < |\tilde{\varphi}(t + t_0)| < \frac{3}{2} \quad (6.13)$$

ввиду (5.7). Отсюда и из (6.9) при $|t_0| \leq \varepsilon_0/2$ получаем:

$$K^{(q)}(t_0) = B \exp(Bq + kq \lg q). \quad (6.14)$$

Запишем теперь разложение (5.5), заменив в нем функцию $\varphi(t)$ на $K(t)$, и положим

$$\rho = m = \left[\frac{n^{2\alpha}}{\rho_1(n)} \right], \quad (6.15)$$

где функция $\rho_1(n)$ будет выбрана позднее в зависимости от $\rho(n)$. Отсюда при $|t| \leq n^{-\mu}$, как в (5.6),

$$\begin{aligned} \left| \frac{t_m R_m(t)}{m!} \right| &= B \exp m [B + (k-1) \lg m - \mu \lg n] = \\ &= B \exp m [B - (k-1) \lg \rho_1(n)] \end{aligned} \quad (6.16)$$

согласно определению m , μ и k . Кроме того, $k = (2\alpha + 1)/4\alpha > 1$, так как $\alpha < 1/2$; в действительности $\alpha < 1/6$. Поэтому при $|t| \leq n^{-\mu}$

$$nK(t) = -n \frac{t^2}{2} + n \sum_{r=3}^m \Psi_r \frac{t^r}{r!} + B \exp \left(-\delta_1 \frac{n^{2\alpha}}{\rho_1(n)} \right). \quad (6.17)$$

Тогда $\operatorname{Re} nK(t) \leq 0$ при $|t| \leq n^{-\mu}$. Полагая

$$K_3(t) = \sum_{r=3}^m \Psi_r \frac{t^r}{r!}, \quad (6.18)$$

получаем, что

$$p_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int_{-n^{-\mu}}^{n^{-\mu}} \exp \left[-\frac{nt^2}{2} + nK_3(t) - \sqrt{n} itx \right] dt + B \exp \left[-\delta_2 \frac{n^{2\alpha}}{\rho_1(n)} \right]. \quad (6.19)$$

Рассмотрим целую функцию

$$\exp [nK_3(t)] = 1 + \sum_{r=3}^{\infty} \frac{\chi_r t^r}{r!}. \quad (6.20)$$

При $\alpha < 1/6$, $\mu = 1/2 - \alpha$ и $|t| \leq n^{-\mu}$ имеем: $n\Psi_3(t^3/3!) = Bn^{-\epsilon_1}$. Принимая это во внимание и используя оценку, аналогичную (6.14),

$$\Psi_r = K^{(r)}(0) = B \exp(Br + kr \lg r), \quad r \geq 3, \quad (6.21)$$

получим после несложных вычислений:

$$nK_3(t) = B, \quad |t| \leq 2n^{-\mu}, \quad (6.22)$$

$$\chi_r = \frac{r!}{2\pi i} \oint_{|t|=2n^{-\mu}} \exp [nK_3(t)] \frac{dt}{t^{r+1}} = Br! 2^{-r} n^{\mu r}, \quad (6.23)$$

$$\exp [nK_3(t)] = 1 + \sum_{r=3}^m \frac{\chi_r t^r}{r!} + B2^{-m}, \quad |t| \leq n^{-\mu}. \quad (6.24)$$

7. Окончание доказательства

Подставляя (6.24) в (6.19) и принимая во внимание (6.15), найдем, что

$$p_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int_{-n^{-\mu}}^{n^{-\mu}} \exp \left(-\frac{nt^2}{2} \right) \left(1 + \sum_{r=3}^m \frac{\chi_r}{r!} t^r \right) \exp(-itx \sqrt{n}) dt + B \exp \left(-\delta_3 \frac{n^{2\alpha}}{\rho_1(x)} \right). \quad (7.1)$$

Следующий шаг доказательства — расширение пределов интегрирования в (7.1) от $-\infty$ до ∞ . Полагая $\xi = t\sqrt{n}$, получим:

$$p_{Z_n}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n^{1/2-\mu}}^{n^{1/2-\mu}} \exp \left(-\frac{\xi^2}{2} \right) \left[1 + \sum_{r=3}^m \frac{\chi_r}{r!} \left(\frac{\xi}{\sqrt{n}} \right)^r \right] \exp(-i\xi x) d\xi + B \exp \left[-\delta_3 \frac{n^{2\alpha}}{\rho_1(n)} \right]. \quad (7.2)$$

Для того чтобы получить требуемое расширение предела интегрирования, мы оценим (при $3 \leq r \leq m$)

$$\int_{n^{1/2-\mu}}^{\infty} e^{-\xi^2/2} \frac{\chi_r}{r!} n^{-r/2} \xi^r d\xi = B^r \exp\left(-\frac{1}{4} n^{1-2\mu}\right) \Gamma\left(\frac{r}{2}\right) n^{(\mu-1/2)r}. \quad (7.3)$$

Далее,

$$\begin{aligned} B^r \Gamma\left(\frac{r}{2}\right) n^{(\mu-1/2)r} &= B \exp\left[Br + \frac{r}{2} \lg r - r\left(\frac{1}{2} - \mu\right) \lg n\right] = \\ &= B \exp r \left[B + \frac{1}{2} \lg m - \left(\frac{1}{2} - \mu\right) \lg n\right] = B \exp\left[-\frac{r}{2} \lg \rho_1(n)\right]. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Суммируя в (7.3) по $r \leq m$, находим:

$$\sum_{3 \leq r \leq m} \int_{n^{1/2-\mu}}^{\infty} e^{-\xi^2/2} \frac{\chi_r}{r!} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r \xi^r d\xi = B \exp(-\delta_4 n^{2\alpha}). \quad (7.5)$$

Конечно, интеграл $\int_{-\infty}^{-n^{1/2-\mu}}$ имеет такую же оценку, и мы получаем:

$$\begin{aligned} p_{Z_n}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \left[1 + \sum_{r=3}^{\infty} \frac{\chi_r}{r!} \left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)^r\right] \exp(-i\xi x) d\xi + \\ &+ B \exp\left(-\delta_3 \frac{n^{2\alpha}}{\rho_1(n)}\right). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Таким образом, мы приходим к выражению

$$n^{-r/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/2} e^{-i\xi x} \xi^r d\xi = n^{-r/2} H_r^{(0)}(x) e^{-x^2/2}, \quad (7.7)$$

где $3 \leq r \leq m$, $H_r^{(0)}(x)$ — полиномы Эрмита [от аргумента ax при подходяще выбранном $a > 0$]. Пусть теперь

$$|x| \leq \frac{n^\alpha}{\rho(n)}. \quad (7.8)$$

При любой постоянной C_1 и $3 \leq r < C_1$ выражение (7.7) имеет значение

$$B e^{-x^2/2} \left[\frac{1}{\rho(n)}\right]^r. \quad (7.9)$$

Суммируя по $r = 3, 4, \dots; r < C_1$, получаем оценку

$$B e^{-x^2/2} \frac{1}{[\rho(n)]^3}. \quad (7.10)$$

Рассмотрим теперь $C_1 \leq r \leq m$. Для полиномов Эрмита $H_q(x)$ имеем следующее выражение (см. [18], с. 193):

$$H_q(x) = q! \sum_{s=0}^{[q/2]} \frac{(-1)^s (2x)^{q-2s}}{s! (q-2s)!}. \quad (7.11)$$

Отсюда ($x \geq 0$; считаем $0^0 = 1$)

$$|H_q^{(0)}(x)| = B^q q! \max_{s \leq q/2} \frac{x^{q-2s}}{s! (q-2s)!}. \quad (7.12)$$

Пусть $s = qr$ с $0 \leq r \leq 1/2$, где $0 \leq x \leq n^{\alpha/\rho}(n)$ и $C_1 < q \leq m$. Тогда (7.12) имеет оценку

$$B \max_r \exp q \{B + (1-2r) [\alpha \lg n - \lg \rho(n)] - \\ - r \lg q - r \lg \rho - (1-2r) \lg q - (1-2r) \lg(1-2r) + \lg q\}. \quad (7.13)$$

Умножая (7.13) на $n^{-q/2} = \exp[-(q \lg n)/2]$ и на

$$\frac{\chi_q}{q!} = B n^{q\mu} = B \exp(q\mu \lg n), \quad (7.14)$$

после элементарных вычислений получим:

$$B \max_r \exp q [B - (1-2r) \lg \rho(n) + r \lg q - r 2\alpha \lg n]. \quad (7.15)$$

Так как $\lg q \leq \lg m = 2\alpha \lg n - \lg \rho_1(n) + B$, то (7.15) можно заменить на

$$B \max_r \exp q [B - (1-2r) \lg \rho(n) - r \lg \rho(n)]. \quad (7.16)$$

Если $\rho > 1/4$, то $\rho \lg \rho(n) > \lg \rho(n)/4$; если $\rho \leq 1/4$, тогда $(1-2\rho) \lg \rho(n) \geq \lg \rho(n)/2$. Отсюда (7.16) можно заменить на

$$B [\rho(n)]^{-\frac{1}{2}q}, \quad C_1 < q = m. \quad (7.17)$$

Подставляя эту оценку в (7.6) и суммируя по q , находим:

$$p_{Z_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \left[1 + \frac{B}{\rho(n)} \right] + B \exp \left[-\delta_3 \frac{n^{2\alpha}}{\rho_1(n)} \right]. \quad (7.18)$$

Заметим, что C_1 выбирается достаточно большим, $C_1 > 1/\epsilon_2$. Равенство (7.18) справедливо при $0 \leq x \leq n^{\alpha/\rho}(n)$. Взяв теперь $\rho_1(n) = \rho(n)$, получаем требуемое:

$$p_{Z_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \left(1 + \frac{B}{\rho(n)} \right), \quad 0 \leq x \leq \frac{n^{\alpha}}{\rho(n)}.$$

Случай, когда $-n^{\alpha/\rho}(n) \leq x \leq 0$, рассматривается аналогично.

8. Доказательство достаточности для $1/6 \leq \alpha < 1/2$

Перейдем теперь к случаю $1/6 \leq \alpha < 1/2$. Схема рассуждений остается в основных чертах той же самой, как в предыдущем случае, когда $\alpha < 1/6$; мы обратим внимание на рассуждения, существенно отличающиеся от предыдущей схемы. Пусть $1/6 \leq \alpha < 1/2$, и пусть условие (4.1) выполнено. Ввиду (4.1) и (5.7) $K(t) = \lg \varphi(t)$ имеет все производные при $|t| \leq \varepsilon_0$ и $\Psi_r = K^{(r)}(0)$, умноженное на подходящую степень $i = \sqrt{-1}$, совпадает с r -м кумулянтном X_j . Как известно ([19], с. 61—63), r -й кумулянт зависит только от моментов до r -го порядка включительно и наоборот. Если третий, четвертый, ..., r -й кумулянты равны нулю, в то время как $EX_j = 0$ и $D(X_j) = 1$, то все моменты до r -го совпадают с моментами нормального закона $N(0, 1)$. Рассмотрим последовательность критических чисел (2.3) и допустим, что

$$\frac{1}{2} \frac{s+1}{s+3} \leq \alpha < \frac{1}{2} \frac{s+2}{s+4}.$$

Рассмотрим числа $\Psi_3, \Psi_4, \dots, \Psi_{s+3}$. Если все эти числа — нули (и, таким образом, первые $(s+3)$ момента X_j совпадают с моментами нормального распределения), то мы рассуждаем так же, как в предыдущем случае. Положим $\mu = 1/2 - \alpha$, откуда $\mu \leq 1/3$, и проведем предыдущие вычисления. Теперь вместо (6.17) имеем

$$nK(t) = -\frac{nt^2}{2} + n \sum_{r=s+4}^m \Psi_r \frac{t^r}{r!} + B \exp \left[-\delta_1 \frac{n^{2\alpha}}{\rho_1(n)} \right]$$

при $|t| \leq n^{-\mu}$. Так как $\mu = 1/2 - \alpha \geq 1/(s+3)$, то

$$n\Psi_{s+4} \frac{t^{s+4}}{(s+4)!} = Bn^{1-(s+4)I(s+3)} = B^{-1I(s+3)}.$$

Рассуждая так же, как в п. 7, мы получаем локальную предельную теорему при $0 \leq x \leq n^{\alpha/\rho}(n)$ и $-n^{\alpha/\rho}(n) \leq x \leq 0$.

9. Доказательство необходимости для $1/6 \leq \alpha < 1/2$

Предположим теперь, что не все $\Psi_3, \Psi_4, \dots, \Psi_{s+3}$ равны нулю; пусть Ψ_{s_0+3} — первое ненулевое число, $s_0 \leq s$. Положим

$$\mu = \frac{1}{s_0 + 3}. \quad (9.1)$$

Можно показать, что в этом случае нет локальной нормальной сходимости даже в зоне $[0, n^{1/2-\mu}]$, которая, очевидно, меньше

зоны $[0, n^{\alpha} p(n)]$. Выберем $m = [n^{1-2\mu}/C_2]$ с достаточно большим C_2 . Рассуждая так же, как в п. 6 и 7, получим:

$$p_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int_{-n^{-\mu}}^{n^{-\mu}} \exp\left[-\frac{nt^2}{2} + K_{s_0+3}(t) - i\sqrt{n}tx\right] dt + B \exp(-\delta n^{1-2\mu}). \quad (9.2)$$

В рассматриваемом случае

$$K_{s_0+3}(t) = \sum_{r=s_0+3}^m \frac{\Psi_r t^r}{r!}. \quad (9.3)$$

Далее,

$$\exp[nK_{s_0+3}(t)] = 1 + \sum_{r=s_0+3}^{\infty} \frac{\chi_r t^r}{r!}. \quad (9.4)$$

Важно отметить, что

$$\chi_{s_0+3} = n\Psi_{s_0+3}, \quad \Psi_{s_0+3} \neq 0. \quad (9.5)$$

Взяв теперь

$$x_0 = \eta n^{1/2-\mu}, \quad (9.6)$$

где η достаточно мало, и рассуждая так же, как в п. 7, получим

$$p_{Z_n}(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_0^2/2} + \frac{1}{2\pi} \frac{\chi_{s_0+3}}{(s_0+3)!} H_{s_0+3}^{(0)}(x_0) e^{-x_0^2/2} \frac{1}{(\sqrt{n})^{s_0+3}} + B e^{-x_0^2/2} \eta^{s_0+4} \quad (9.7)$$

при достаточно малых $\eta > 0$. Учитывая (9.5), мы видим, что второй член в правой части (9.7) имеет вид

$$a_0 \Psi_{s_0+3} \frac{1}{(s_0+3)!} e^{-x_0^2/2} \eta^{s_0+3} [1 + o(1)]$$

при $n \rightarrow \infty$, где $a_0 \neq 0$. Поэтому локальная нормальная сходимости не имеет места в зоне $[0, n^{1/2-\mu}]$, а также в зоне $[0, n^{\alpha} p(n)]$. Отсюда если имеет место локальная нормальная сходимости в зонах $[0, n^{\alpha}]$ и $[-n^{\alpha}, 0]$ при всех $\alpha < 1/2$, то все Ψ_r равны нулю и, следовательно, все X_j нормальны.

10. Интегральная теорема на всей x -оси

Имеется интересный класс вероятностных плотностей $g(x)$, для которого интегральная предельная теорема для сумм Z_n справедлива на всей x -оси. Рассмотрим класс всех четных непрерывных вероятностных плотностей $g(x)$, таких, что при $x \geq 1$

$$P\{X_1 > x\} = \int_x^{\infty} g(u) du = \frac{A_a}{x^a} + \frac{A_{a+1}}{x^{a+1}} + \dots + \frac{A_{4a+5}}{x^{4a+5}} + o\left(\frac{1}{x^{4a+5+\varepsilon}}\right), \quad (10.1)$$

где $a \geq 3$ целое, A_j постоянные. Заметим, что условие четности принимается только ради простоты. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — случайные величины с вероятностной плотностью из этого класса. Тогда $E(X_j) = 0$. Положим $D(X_j) = \sigma^2$, $Z_n = (X_1 + \dots + X_n)/\sigma\sqrt{n}$.

Теорема 6. При $x \geq 1$ и $n \rightarrow \infty$ имеем равномерно по x

$$\frac{P\{Z_n > x\}}{(1/\sqrt{2\pi}) \int_x^\infty e^{-u^2/2} du + r(x, \sqrt{n})} \rightarrow 1, \quad (10.2)$$

где $r(x, \sqrt{n})$ — рациональная функция обоих аргументов, определенная через коэффициенты $A_a, \dots, A_{4a+5}$. При $x \geq n^{3/2+1/a} \lg n$ имеем:

$$r(x, \sqrt{n}) \sim n P\{X_1 > \sigma x \sqrt{n}\} = n \int_{\sigma x \sqrt{n}}^\infty g(u) du. \quad (10.3)$$

Ввиду четности $g(x)$ аналогичное соотношение имеет место при $x \leq -1$, а при $-1 < x < 1$ действует классическая предельная теорема.

Простые примеры приложения теоремы 6 дают рациональные плотности. Например, если $g(x) = 2/\pi (x^2 + 1)^2$, так что $D(X_j) = 1$, имеем

$$\frac{P\{Z_n > x\}}{(1/\sqrt{2\pi}) \int_x^\infty e^{-u^2/2} du + (2/3\pi \sqrt{n}) (1/x^3)} \rightarrow 1 \quad (10.4)$$

при $x \geq 1$, $n \rightarrow \infty$ и

$$\frac{2}{3\pi \sqrt{n}} \frac{1}{x^3} \sim n P\{X_1 > x \sqrt{n}\} \quad (10.5)$$

при $x \geq n^{3/2+1/4} \lg n$.

Приведем кратко основные моменты доказательства. Возьмем $\sigma = 1$. Случай

$$x \geq n^{3/2+1/a} \lg n \quad (10.6)$$

рассматривается элементарными методами. Если $y > n$, тогда событие $S_n > y$ предполагает по крайней мере выполнение одного из событий $X_j > y/n$. Пусть $H_{k, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}$ при $k \leq n$ обозначает гипотезы, состоящие в том, что $X_{\alpha_1} > y/n$, $X_{\alpha_2} > y/n, \dots, X_{\alpha_k} > y/n$, а для остальных X_j эти неравенства не имеют места. Отсюда

$$\begin{aligned} P\{S_n > y\} &= \sum_{(\alpha_1)} P\{H_{1, \alpha_1}\} P\{S_n > y \mid H_{1, \alpha_1}\} + \\ &+ \sum_{k \geq 2} \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} P\{H_{k, \alpha_1, \dots, \alpha_k}\} P\{S_n > y \mid H_{k, \alpha_1, \dots, \alpha_k}\}, \end{aligned} \quad (10.7)$$

где суммирование проводится по всем упорядоченным наборам чисел $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$. Учитывая (10.1), легко подсчитать, что при

$$y \geq n^{2+1/\alpha} \lg n \quad (10.8)$$

двойная сумма в правой части (10.7) имеет меньший порядок, чем первый член, так что

$$\begin{aligned} P\{S_n > y\} &\sim \sum_{(\alpha_1)} P\{H_{1, \alpha_1}\} P\{S_n > y | H_{1, \alpha_1}\} = \\ &= nP\{H_{11}\} P\{S_n > y | H_{11}\}. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Далее, легко видеть, что

$$P\{S_n > y | H_{1, 1}\} \sim P\left\{X_1 > y | X_1 > \frac{y}{n}\right\}. \quad (10.10)$$

Подставив (10.10) в (10.9), получим

$$P\{S_n > y\} \sim nP\{X_1 > y\}, \quad y > n^{2+1/\alpha} \lg n$$

или

$$P\{Z_n > x\} \sim nP\{X_1 > x\sqrt{n}\} \quad (10.11)$$

при

$$x \geq n^{1/2+1/\alpha} \lg n. \quad (10.12)$$

Теперь нужно исследовать поведение $P\{Z_n > x\}$ при $1 \leq x \leq n^{3/2+1/\alpha} \lg n$. Это можно сделать методами из п. 6 и 7. Пусть $\varphi(t)$ — характеристическая функция. Функция $\gamma(t)$ будет называться радиальным продолжением $\varphi(t)$ для луча $t \geq 0$, если она определена в некоторой окрестности точки $t=0$ и совпадает с $\varphi(t)$ в этой окрестности при $t \geq 0$ (аналогично находится радиальное продолжение для луча $t \leq 0$). Например, характеристическая функция $\varphi(t) = (|t|+1) \exp(-|t|)$, отвечающая плотности $g(x) = 2/\pi (x^2+1)^2$, имеет два радиальных продолжения: $\gamma(t) = (t+1) \exp(-t)$ при $t \geq 0$ и $\gamma(t) = (-t+1) \exp(t)$ при $t \leq 0$. Оба радиальных продолжения — целые функции (хотя и различные). Заметим, что они не являются четными, в то время как $\varphi(t)$ четна.

11. Продолжение доказательства

Интегрированием по частям в (10.1) находим, что при $t \geq 0$ $\varphi(t)$ имеет радиальное продолжение $\gamma(t)$, дифференцируемое по крайней мере $b=4a+2$ раза. Перейдем к вычислению $p_{Z_n}(x)$ (интегральная теорема будет получена в дальнейшем интегрированием). Так как $g(x)$ четна, то $\varphi(t)$ вещественна и

$$p_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty |\varphi(t)|^n e^{-\sqrt{n}itx} dt. \quad (11.1)$$

Применяя рассуждения § 5 (см. (5.9)), получим:

$$\begin{aligned} p_{Z_n}(x) &= \frac{\sqrt{n}}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\varepsilon_0} [\varphi(t)]^n e^{-\sqrt{n} i t x} dt + B e^{-c_0 n} = \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\varepsilon_0} [\gamma(t)]^n e^{-\sqrt{n} i t x} dt + B e^{-c_0 n}. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Далее,

$$\varphi(t) = \gamma(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + O(t^3), \quad 0 \leq t \leq \varepsilon_0. \quad (11.3)$$

Отсюда

$$p_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\lg n / \sqrt{n}} [\gamma(t)]^n e^{-\sqrt{n} i t x} dt + B e^{-\delta_0 \lg^2 n}. \quad (11.4)$$

Кроме того, при $|t| < \varepsilon_0$

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \gamma_0(t) + B|t|^b, \\ \gamma_0(t) &= -\frac{t^2}{2} + \sum_{q=3}^{b-1} \frac{\gamma^{(q)}(0)}{q!} t^q + B t^q. \end{aligned} \quad (11.5)$$

При $|t| < \lg n / \sqrt{n}$ имеем

$$\gamma(t) = \gamma_0(t) + B_\varepsilon n^{-b/2+\varepsilon}, \quad (11.6)$$

где $\varepsilon > 0$ любое, а B_ε зависит от ε .

Далее, при $0 \leq t \leq \lg n / \sqrt{n}$

$$K(t) = \lg \gamma(t) = \lg \gamma_0(t) + B_\varepsilon n^{-b/2+\varepsilon} \quad (11.7)$$

и

$$\lg \gamma_0(t) = -\frac{t^2}{2} + \sum_{q=3}^{b-1} \Psi_q \frac{t^q}{q!} + B t^b. \quad (11.8)$$

При $0 \leq t \leq \lg n / \sqrt{n}$ имеем $B n t^b = B_\varepsilon n^{-b/2+1+\varepsilon}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} p_{Z_n}(x) &= \frac{\sqrt{n}}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\lg n / \sqrt{n}} \exp n \left(-\frac{t^2}{2} + \sum_{q=3}^{b-1} \Psi_q \frac{t^q}{q!} - \sqrt{n} i t x \right) dt + \\ &+ B_\varepsilon n^{-b/2+1+\varepsilon}. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Полагая $K_3(t) = \sum_{q=3}^{b-1} \Psi_q t^q / q!$, получим:

$$n K_3(t) = B_\varepsilon n^{-1/2+\varepsilon}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\lg n}{\sqrt{n}}. \quad (11.10)$$

Отсюда

$$\exp [nK_3(t)] = 1 + K_4(t, n) + B_\epsilon n^{-b/2+1+\epsilon}, \quad (11.11)$$

где

$$K(t, n) = \sum_{q=1}^b \frac{[nK_3(t)]^q}{q!}. \quad (11.12)$$

Полагая $t = \xi \sqrt{n}$, получим:

$$p_{Z_n}(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\lg n} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \left[1 + K_4\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}, n\right)\right] \exp(-i\xi x) d\xi + \\ + B_\epsilon n^{-b/2+1+\epsilon}. \quad (11.13)$$

Расширяя предел интегрирования до $\xi = \infty$ (погрешность оценивается тривиально), имеем:

$$p_{Z_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) K_4\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}, n\right) \times \\ \times \exp(-i\xi x) d\xi + B_\epsilon n^{-b/2+1+\epsilon}. \quad (11.14)$$

Функция $K_4(\xi/\sqrt{n}, n)$ является полиномом относительно $\xi/\sqrt{n}$. Таким образом, вычисление (11.14) сводится к вычислению интегралов

$$E(x, r) = \int_0^\infty e^{-\xi^2/2} e^{i\xi x} \xi^r d\xi \quad (11.15)$$

при больших значениях x . При четном r интеграл

$$E(x, r) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-\xi^2/2} e^{i\xi x} \xi^r d\xi$$

легко выражается через $\exp(-x^2/2)$ и полиномы Эрмита (ср. с выражением (7.7)). При нечетном r , по-видимому, не существует представления интеграла через элементарные функции, но при больших x (11.15) можно легко вычислить интегрированием по частям. Так, при $r=1$ имеем $E(x, r) \sim 1/x^2$.

Нам нужно показать, что формула (11.14) справедлива при x , удовлетворяющих неравенству

$$1 \leq x \leq n^{3/2+1/a} \lg n.$$

Сравнивая $nP\{X_1 > x\sqrt{n}\}$ (см. также (10.12)) с остаточным членом $B_\epsilon n^{-b/2+1+\epsilon}$ в (11.14), мы выводим, что $n^{-b/2+1+\epsilon}$ должно быть меньше $n(n^{2+1/a+\epsilon})^{-a} = n^{-2a-\epsilon'}$, откуда $b/2 - 1 > 2a$ или $b > 4a + 2$. При этом

условии мы получаем, что локальная теорема справедлива до $n^{3/2+1/\alpha+}$ равномерно; отсюда интегрированием получаем интегральную теорему. Соотношение (10.11) позволяет получить интегральную теорему для всей x -оси.

12. Заключительные замечания

Условие четности предполагалось только ради простоты окончательных формулировок; если оно не выполнено, то (11. 14) содержит интегралы $\int_{-\infty}^0$ вместе с $\int_0^{\infty}$. Кроме того, аналогичную предельную теорему на всей оси можно получить для величин X_j , таких, что

$$P\{X_j > x\} = \int_{v=a}^{a_1} \frac{dG(v)}{x^v} + O\left(\frac{1}{x^{a_1+\varepsilon}}\right), \quad x \geq 1,$$

где $a_1 > 4a+5$ и $G(v)$ — функция ограниченной вариации. Аналогичное соотношение должно выполняться при отрицательных x .

Новый метод, изложенный здесь, приложим также к независимым величинам, имеющим неодинаковые распределения, и к исследованию ненормальной сходимости. Этим методом может быть изучено также асимптотическое поведение вероятностей больших отклонений порядковых статистик.

Л и т е р а т у р а

1. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.—Л., 1949. 264 с.
2. Daniels H. Saddlepoint approximations in statistics. — Ann. Math. Stat., 1954, vol. 25, N 4, p. 631—650.
3. Chernoff H. Large sample theory: parametric case. — Ann. Math. Stat., 1956, vol. 27, N 1, p. 1—22.
4. Добрушин Р. Л. Общая формулировка основной теоремы Шеннона в теории информации. — Успехи мат. наук, 1959, т. 14, вып. 6, с. 3—104.
5. Wolfowitz J. Information theory for mathematicians. — Ann. Math. Stat., 1958, vol. 29, N 2, p. 351—356.
6. Волкенштейн М. В., Птицын О. Б. Статистическая физика линейной полимерной цепочки. — Успехи физ. наук, 1953, т. 49, вып. 4, с. 501—568.
7. Treloar L. Physics of rubber elasticity. Oxford, 1949. 256 p.
8. Линник Ю. В. Цепи Маркова в аналитической арифметике кватернионов и матриц. — Вестник ЛГУ, 1956, № 13. Сер. мат., мех., астроном., вып. 3, с. 63—68.
9. Khinchin A. J. Über einer neuen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Math. Ann., 1929, vol. 101, S. 745—752.
10. Смирнов Н. В. О вероятностях больших отклонений. — Мат. сб., 1933, т. 40, вып. 4, с. 443—454.
11. Cramer H. Sur un nouveau théorème limite de la théorie des probabilités. — Actual. Sci. et industr., Paris, 1938, N 736, p. 5—23.

12. Feller W. Generalization of a probability theorem of Cramer. — Trans Amer. Math. Soc., 1943, vol. 54, p. 361—372.
13. Петров В. В. Обобщение предельной теоремы Крамера. — Успехи мат. наук, 1954, т. 9, вып. 4, с. 195—202.
14. Рихтер В. Локальные предельные теоремы для больших уклонений. — ДАН СССР, 1957, т. 115, № 1, с. 53—56.
15. Рихтер В. Локальные предельные теоремы для больших уклонений. — Теор. вероятн. и ее примен., 1957, т. 2, вып. 2, с. 214—229.
16. Рихтер В. Многомерные локальные предельные теоремы для больших уклонений. — Теор. вероятн. и ее примен., 1958, т. 3, вып. 1, с. 107—114.
17. Bochner S., Chandrasekharan K. Fourier transforms. Princeton, 1949. 219 p.
18. Bateman H. Higher transcendental functions. Vol. 2. New York, 1953. 396 p.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН ПРИ УЧЕТЕ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

III. «Широкие» простейшие зоны интегрального равномерного нормального притяжения

Теор. вероятн. и ее примен., 1962, т. 7, вып. 2, с. 121—134

0. Как и в ч. I, рассматриваем независимые одинаково распределенные случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$; считаем $E(X_i)=0$; $D(X_i)=1$; сохраняем обозначения ч. I.

Рассматриваем зоны $[0, n^\alpha]$, $[-n^\alpha, 0]$, где $\alpha > 1/6$. Зона $[0, n^\alpha]$ будет называться зоной интегрального равномерного нормального притяжения (з. р. н. п.), если при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{P(Z_n > x)}{(1/\sqrt{2\pi}) \int_x^\infty e^{-u^2/2} du} \rightarrow 1 \quad (0.1)$$

равномерно по $x \in [0, n^\alpha]$; аналогичное определение вводится для зоны $[-n^\alpha, 0]$.

Как в ч. I, $\rho(n), \rho_1(n), \dots, \rho_n(n), \dots$ будут заданными монотонными возрастающими до ∞ функциями; обычно каждая из них выбирается в зависимости от всех предыдущих. Мы будем здесь доказывать следующие теоремы.

Т е о р е м а 1. Если для любого $\alpha < 1/2$ зоны $[0, n^\alpha]$ и $[-n^\alpha, 0]$ суть з. р. н. п., то все переменные X_j нормальны.

Таким образом, достаточно рассматривать значение $\alpha < 1/2$. Теорема 1 следует из теоремы 2.

Т е о р е м а 2. Пусть $\rho(n) \rightarrow \infty$ — монотонная сколь угодно медленно растущая функция; $1/6 \leq \alpha < 1/2$. Рассмотрим ряд критических чисел:

$$\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{3}{10}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2} \frac{s+1}{s+3} \dots \rightarrow \frac{1}{2}. \quad (0.2)$$

Пусть

$$\frac{1}{2} \frac{s+1}{s+3} \leq \alpha < \frac{1}{2} \frac{s+2}{s+4}.$$

Для того чтобы зоны $[0, n^\alpha \rho(n)]$, $[-n^\alpha \rho(n), 0]$ были з. р. н. н., необходимо, чтобы

$$E \exp |X_j|^{4\alpha/(2\alpha+1)} < \infty \quad (0.3)$$

и чтобы все моменты X_j вплоть до $(s+3)$ -го совпадали с моментами нормального закона. Эти два условия достаточны для того, чтобы зоны $[0, n^\alpha \rho(n)]$, $[-n^\alpha \rho(n), 0]$ были з. р. н. н.

Заметим, что теорема 1 непосредственно следует из теоремы 2. Необходимость условия (0.3) уже доказана в ч. I (п. 4, лемма 1).

1. Мы замечаем, что формулировка теоремы 2 полностью аналогична формулировке теоремы 2 из ч. I для случая локальной нормальной равномерной сходимости. Однако употреблявшийся в ч. I метод здесь не будет действовать. При доказательстве локальных теорем предполагалось, что величины $X_j \in (d)$ — классу величин с ограниченной плотностью, поэтому для них х. ф. $\varphi(t)$ обладают удобными свойствами: $\varphi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm\infty$, $|\varphi(t)| \neq 1$ при $t \neq 0$. При внимательном рассмотрении условий применимости этого метода выясняется, что он без труда будет действовать, если $|\varphi(t)| \neq 1$ при $t \neq 0$ и $|\varphi(t)| < c < 1$ при $|t| > C$ (в дальнейшем $C_i, \varepsilon_i, a_i, b_i$ — положительные константы; $\varepsilon_i, \eta_i, \xi_i$ — малые положительные константы). Последние свойства будут выполняться, если, например, $F(x) = P(X_j < x)$ содержит абсолютно непрерывную компоненту. В этом случае теорема 2 может быть доказана методом ч. I.

2. Перейдем к доказательству достаточности условий в формулировке теоремы 2. Таким образом, помимо условия (0.3), мы принимаем, что

$$\psi_3 = \psi_4 = \dots = \psi_{s+3} = 0, \quad (2.1)$$

где ψ_i — семиинварианты X_j .

Мы начнем с доказательства следующей леммы.

Лемма 1. При

$$x \geq \frac{n^\alpha}{\rho_1(n)} \quad (2.2)$$

$$P(S_n > x \sqrt{n}) < C_1 \exp \left(-c_1 \frac{n^{2\alpha}}{(\rho_1(n))^2} \right), \quad (2.3)$$

и аналогичная оценка имеет место при $x \leq -n^\alpha/\rho_1(n)$.

Как мы видим, здесь требуется оценка вероятности, значительно более грубая, чем та, которую давала бы интегральная предельная теорема. Для доказательства такой грубой оценки годны методы п. 11—13 ч. I. Укажем, как надо видоизменять рассужде-

ния п. 11—13 ч. I, чтобы прийти к оценке (2.3). Очевидно, достаточно считать в ней $2x = 2x_1 = n^\alpha / \rho_1(n)$. Как в п. 11 ч. I, вводим дополнительное нормальное слагаемое $Y_n \in N(0, n^\alpha)$ с х. ф. $\psi_n(t) = \exp(-n^{2\alpha} t^2 / 2)$ и рассматриваем $Z'_n = (S_n + Y_n) / \sqrt{n}$. При этом $D(Z'_n) = 1 + n^{2\alpha-1}$, а старшие семиинварианты $Z_n = S_n / \sqrt{n}$ совпадают с таковыми же для Z'_n .

Допустим, что при

$$x \in \left[\frac{n^\alpha}{4\rho_1(n)}, \frac{n^\alpha}{2\rho_1(n)} \right]$$

удалось доказать оценку

$$P(Z'_n > x) < C_2 \exp\left(-c_2 \frac{n^{2\alpha}}{(\rho_1(n))^2}\right). \quad (2.4)$$

Покажем, что тогда верно и (2.3). Из формул (11.4), (11.5) и (11.6) ч. I выводим:

$$P\left(Z'_n > x \mid \left| \frac{Y_n}{\sqrt{n}} \right| \leq n^{2\alpha-1/2}\right) = (1 + o(1)) P(Z'_n > x) + B \exp\left(-\frac{n^{2\alpha}}{2}\right). \quad (2.5)$$

Из (2.5) находим:

$$P\left(Z'_n > x \mid \left| \frac{Y_n}{\sqrt{n}} \right| \leq n^{2\alpha-1/2}\right) = B \exp\left(-c_2 \frac{n^{2\alpha}}{(\rho_1(n))^2}\right). \quad (2.6)$$

Полагая $x = 3n^\alpha / 8\rho_1(n)$ и следуя (11.7) (ч. I), получаем:

$$P(Z_n > x) < P\left(Z'_n > x - n^{2\alpha-1/2} \mid \left| \frac{Y_n}{\sqrt{n}} \right| \leq n^{2\alpha-1/2}\right).$$

Далее, $\alpha < 1/2$ и $2\alpha - 1/2 < \alpha$, так что при достаточно большом n $x + n^{2\alpha-1/2} < 1.01x$, (2.4)–(2.6) приводят к оценке (2.3). Надлежит обосновать оценку (2.4). Для этого следуем в точности п. 12 и 13 ч. I. Отличие от излагаемых там рассуждений будет лишь в том, что у нас $\alpha \geq 1/6$ и при выводе формулы (13.2) ч. I нельзя считать $3\alpha - 1 < 0$. Однако $\alpha < 1/2$, $3\alpha - 1 < \alpha$ и вместо (13.2) ч. I можно поставить оценку

$$B \int_{x_1/2}^{\infty} e^{-u^2/2} du = B \exp\left(-c_2 \frac{n^{2\alpha}}{\rho_1^2(n)}\right).$$

Дальнейшие рассуждения п. 13 и 14 ч. I не меняются, и мы приходим к (2.4) и, как было показано, к (2.3). Заменяя X_j на $-X_j$, приходим к оценке для отрицательных значений x .

Нам понадобится некоторое усиление леммы 1. Пусть n_1 — целое число; $1 \leq n_1 \leq n$; $S_{n_1} = X_1 + \dots + X_{n_1}$ и n_1 удовлетворяет (2.2).

Л е м м а 2. Справедливо неравенство

$$P(S_{n_1} > x \sqrt{n}) < C_3 \exp\left(-c_3 \frac{n^{2\alpha}}{(\rho_1(n))^2}\right).$$

Аналогичное соотношение имеет место для отрицательных x .

Для доказательства положим: $S_n = S_{n_1} + T_{n_1}$; $T_{n_1} = X_{n_1+1} + \dots + X_n$. Имеем

$$P\left(S_n > \frac{x}{2} \sqrt{n}\right) \geq P(S_{n_1} > x \sqrt{n}) P\left(|T_{n_1}| < \frac{x}{3} \sqrt{n}\right) > c_4 P(S_{n_1} > x \sqrt{n})$$

и применяем неравенство (2.3) с заменой $\rho_1(n)$ на $\rho_1(n)/2$, что, очевидно, не нарушает общности.

3. Для дальнейшего заменим величины X_i при $i \leq n$ на $X'_i = X_i + \Delta_i$, где Δ_i — независимые нормальные малые добавки

$$\Delta_i \in N\left(0, \frac{1}{n^{10}}\right). \quad (3.1)$$

Обозначим $S'_n = X'_1 + X'_2 + \dots + X'_n$. Мы видим, что $D(S'_n) = D(S_n) + \frac{1}{n^{10}}$; старшие семиинварианты S'_n совпадают с таковыми же для S_n . Легко видеть, что если соотношение (0.1) доказано при замене последовательности $\{S_n\}$ на последовательность $\{S'_n\}$ для зон $[0, n^\alpha/\rho(n)]$ и $[-n^\alpha/\rho(n), 0]$, то оно же будет верно и для основной последовательности $\{S_n\}$.

Таким образом, мы можем заниматься последовательностью $\{S'_n\}$. При этом для нас будет удобным появление плотности вероятности $p(x)$ ($i \leq n$) у величин X'_i . Легко заметить, что в силу (3.1) $p(x)$ — непрерывная функция, причем для X'_i

$$0 < p(x) \leq n^{10} \quad (i \leq n) \quad (3.2)$$

(разумеется, $p(x)$ зависит от n , но не от $i \leq n$).

Далее мы будем применять некоторое видоизменение метода Крамера [1]. Мы будем употреблять функции $\rho_2(n)$, $\rho_3(n)$, ..., которые детально фиксируем в дальнейшем. Введем положительный параметр h , удовлетворяющий условию

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq h \leq \frac{n^{\alpha-1/2}}{\rho_2(n)}, \quad (3.3)$$

и функцию

$$e_1(\xi) = \begin{cases} e^\xi & \text{при } |\xi| \leq \frac{n^{2\alpha}}{\rho_3(n)}, \\ 0 & \text{при } |\xi| > \frac{n^{2\alpha}}{\rho_3(n)}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Наряду со случайными величинами $X'_i (i \leq n)$ введем преобразованные случайные величины $\bar{X}_i$ с законом распределения

$$\bar{V}(x) = P(\bar{X}_i < x) = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^x e_1(hy) p(y) dy \quad (i \leq n), \quad (3.5)$$

где

$$R = \int e_1(hy) p(y) dy. \quad (3.6)$$

Разумеется, существует плотность вероятности

$$\bar{V}'(x) = \frac{1}{R} e_1(hx) p(x).$$

Для $S'_{n_1} = X'_1 + \dots + X'_{n_1}$ будет также существовать плотность вероятности, которую мы обозначим $f_{n_1}(x)$; для суммы $\bar{S}_{n_1} = \bar{X}_1 + \dots + \bar{X}_{n_1} (n_1 \leq n)$ будет существовать плотность вероятности $\bar{f}_{n_1}(x)$. Для всех значений ξ имеем:

$$\bar{f}_1(\xi) = R^{-1} e_1(h\xi) f_1(\xi). \quad (3.7)$$

Допустим, для значения $n_1 < n$ обнаружено, что при всех ξ

$$\bar{f}_{n_1}(\xi) = R^{-n_1} e_1(h\xi) f_{n_1}(\xi) + \theta_{\rho_{n_1}}, \quad (3.8)$$

где θ — такое, что $|\theta| \leq 1$ (не всегда одно и то же), а ρ_{n_1} — некоторая оценка погрешности. Посмотрим, что можно при этом сказать относительно соотношения между $\bar{f}_{n_1+1}(\xi)$ и $f_{n_1+1}(\xi)$.

4. Имеем:

$$\bar{f}_{n_1+1}(\xi) = \frac{1}{R} \int \bar{f}_{n_1}(\xi - z) e_1(hz) p(z) dz. \quad (4.1)$$

Подставляя сюда (3.8), находим:

$$\begin{aligned} \bar{f}_{n_1+1}(\xi) &= R^{-n_1-1} \int e_1(h(\xi - z)) e_1(hz) f_{n_1}(\xi - z) p(z) dz + \\ &+ \frac{1}{R} \int \theta_{\rho_{n_1}} e_1(hz) p(z) dz. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Ввиду (3.6) это переписывается так (при ином θ и $|\theta| \leq 1$):

$$\bar{f}_{n_1+1}(\xi) = R^{-n_1-1} \int e_1(h(\xi - z)) e_1(hz) f_{n_1}(\xi - z) p(z) dz + \theta_{\rho_{n_1}}. \quad (4.3)$$

Займемся теперь первым членом в правой части:

$$R^{-n_1-1} \int e_1(h(\xi - z)) e_1(hz) f_{n_1}(\xi - z) p(z) dz. \quad (4.4)$$

Мы будем его сравнивать с интегралом

$$R^{-n_1-1} e_1(h\xi) \int f_{n_1}(\xi - z) p(z) dz = R^{-n_1-1} e_1(h\xi) f_{n_1+1}(\xi). \quad (4.5)$$

Область интегрирования $(-\infty, \infty)$ в (4.4) разбиваем на множество

$$\mathfrak{Q} = \left\{ z : |z| \leq \frac{n^\alpha \sqrt{n}}{\rho_4(n)}, \quad |\xi - z| \leq \frac{n^\alpha \sqrt{n}}{\rho_4(n)} \right\} \quad (4.6)$$

и дополнительное множество $\bar{\mathfrak{Q}}$.

Найдем оценку для

$$R^{-n_1-1} \int_{\bar{\mathfrak{Q}}} |e_1(h(\xi - z)) e_1(hz) - e_1(h\xi)| f_{n_1}(\xi - z) p(z) dz. \quad (4.7)$$

При этом будем считать, что

$$\rho_4(n) < (\rho_3(n))^{1/3}. \quad (4.8)$$

Из (3.4) находим, что $e_1(hu) < \exp(n^{2\alpha}/\rho_3(n))$ для любых u , так что

$$|e_1(h(\xi - z)) e_1(hz) - e_1(h\xi)| < \exp \frac{2n^{2\alpha}}{\rho_3(n)}. \quad (4.9)$$

Далее, так же как и оценка (3.2), очевидна оценка

$$0 \leq f_{n_1}(\xi - z) \leq n^{10}. \quad (4.10)$$

Таким образом, для (4.7) получаем оценку

$$R^{-n_1-1} \exp\left(\frac{2n^{2\alpha}}{\rho_3(n)}\right) n^{10} \left(\int_{|\xi-z| > n^\alpha \sqrt{n}/\rho_4(n)} f_{n_1}(\xi - z) dz + \int_{|z| > n^\alpha \sqrt{n}/\rho_4(n)} p(z) dz \right). \quad (4.11)$$

Легко заметить, что лемма 2 (скажем, с заменой c_3 на $c_3/2$) применима и к суммам S'_{n_1} . Поэтому сумма интегралов в скобках в оценке (4.11) не превосходит

$$2C_3 \exp\left(-c_4 \frac{n^{2\alpha}}{(\rho_4(n))^2}\right) < 2C_3 \exp\left(-c_4 \frac{n^{2\alpha}}{(\rho_3(n))^{2/3}}\right) \quad (4.12)$$

в силу (4.8). Таким образом, (4.11) не превосходит

$$2C_3 R^{-n_1-1} \exp\left(-c_5 \frac{n^{2\alpha}}{(\rho_3(n))^{2/3}}\right) \quad (4.13)$$

при достаточно больших n ; можно, например, положить $c_5 = c_4/2$.

Далее, будем считать, что в формуле (3.3) $\rho_2(n)$ выбрано так, что

$$\rho_2(n) = (\rho_3(n))^{10}. \quad (4.14)$$

В таком случае при z , принадлежащем множеству $\mathfrak{A}$ (см. (4.6)),

$$|hz| < \frac{n^{2\alpha}}{(\rho_3(n))^{10}}; \quad |h(\xi - z)| < \frac{n^{2\alpha}}{(\rho_3(n))^{10}}$$

и на основании (3.4) $e_1(h(\xi - z))e_1(hz) - e_1(h\xi) = 0$. Ввиду этого (4.4) равно

$$R^{-n_1-1}e_1(h\xi)f_{n_1+1}(\xi) + 2\theta C_3 R^{-n_1-1} \exp\left(-c_5 \frac{n^{2\alpha}}{(\rho_3(n))^{2/3}}\right).$$

5. Таким образом, имеем:

$$f_{n_1+1}(\xi) = R^{-n_1-1}e_1(h\xi)f_{n_1+1}(\xi) + 2\theta C_3 R^{-n_1-1} \exp\left(-c_5 \frac{n^{2\alpha}}{(\rho_3(n))^{2/3}}\right) + \theta \rho_{n_1}. \quad (5.1)$$

Сумма двух последних членов дает новую погрешность, имеющую вид $\theta \rho_{n_1}$. Мы можем исходить из формулы (3.7), где погрешность $\theta \rho_1 = 0$, и, действуя шаг за шагом согласно формуле (5.1), получим наконец для любых значений ξ

$$f_n(\xi) = R^{-n}e_1(h\xi)f_n(\xi) + \theta \rho_n, \quad (5.2)$$

где

$$\rho_n = 2(R^{-1} + R^{-2} + \dots + R^{-n}) \exp\left(-c_5 \frac{n^{2\alpha}}{(\rho_3(n))^{2/3}}\right). \quad (5.3)$$

Из (5.2) выводим: для тех значений ξ , для которых $e_1(h\xi) \neq 0$, имеем:

$$f_n(\xi) = R^n e_1(-h\xi) f_n(\xi) + \theta R^n e_1(-h\xi) \rho_n. \quad (5.4)$$

Так как $e_1(hu) < \exp\{n^{2\alpha}/\rho_3(n)\}$ для любых значений u , то из (5.3) и (5.4) выводим: при $e_1(h\xi) \neq 0$

$$f_n(\xi) = R^n e_1(-h\xi) f_n(\xi) + \theta \rho'_n, \quad (5.5)$$

где

$$\rho'_n = 2(1 + R + \dots + R^n) \exp\left(-c_6 \frac{n^{2\alpha}}{(\rho_3(n))^{2/3}}\right). \quad (5.6)$$

Если $e_1(h\xi) \neq 0$, то, согласно (3.4), должно быть $|h\xi| \leq n^{2\alpha}/\rho_3(n)$; в силу (3.3) и (4.14), имеем:

$$|\xi| \leq \frac{\rho_2(n) n^{2\alpha+1/2}}{\rho_3(n)} \leq n^{2\alpha+1/2} (\rho_3(n))^9 \leq n^2. \quad (5.7)$$

Пусть u — любое число; рассмотрим

$$W_n(u) = \int_{-\infty}^u f_n(\xi) d\xi. \quad (5.8)$$

Область интегрирования разобьем на область $\mathfrak{A}$, где $e_1(h\xi) \neq 0$, и дополнительную область $\mathfrak{A}'$. Согласно (5.5) и (5.7), имеем:

$$\int_{\mathfrak{A}} f_n(\xi) d\xi = R^n \int_{\mathfrak{A}} e_1(-h\xi) f_n(\xi) d\xi + \theta n^{2\alpha} \rho'_n \quad (5.9)$$

или, так как при $\xi \in \bar{\mathfrak{A}}$ $e_1(-h\xi) = 0$,

$$\int_{\bar{\mathfrak{A}}} f_n(\xi) d\xi = R^n \int_{-\infty}^u e_1(-h\xi) f_n(\xi) d\xi + \theta n^2 \rho'_n. \quad (5.10)$$

Для выражения

$$\int_{\bar{\mathfrak{A}}} f_n(\xi) d\xi \quad (5.11)$$

дадим оценку сверху. Если $e_1(h\xi) = 0$, то в силу (3.3) и (4.14)

$$|\xi| \geq \frac{n^{\alpha+1/2}}{\rho_3(n)} \rho_2(n) = n^{\alpha+1/2} (\rho_3(n))^{\theta}. \quad (5.12)$$

Согласно лемме 2. отсюда следует

$$\int_{\bar{\mathfrak{A}}} f_n(\xi) d\xi < C_3 \exp\left(-c_3 \frac{n^{2\alpha}}{(\rho_1(n))^2}\right), \quad (5.13)$$

где $\rho_1(n)$ — заданная сколь угодно медленно растущая функция (по которой надо выбрать и константы C_3, c_3). Положим $\rho_1(n) = (\rho_3(n))^{1/\alpha}$, тогда погрешность (5.13) окажется при достаточно большом n меньше погрешности (5.6). Складывая (5.13) с (5.6), приходим к основной формуле:

$$W_n(u) = \int_{-\infty}^u f_n(\xi) d\xi = R^n \int_{-\infty}^u e_1(-h\xi) f_n(\xi) d\xi + 2\theta n^2 \rho'_n. \quad (5.14)$$

6. Рассмотрим $\bar{W}_n(\xi) = \mathbf{P}(\bar{X}_1 + \dots + \bar{X}_n < \xi) = \int_{-\infty}^{\xi} f_n(v) dv$. Для случайной величины $\bar{X}_i$ при $i \leq n$ интегральным законом распределения будет

$$\bar{V}(x) = \mathbf{P}(\bar{X}_i < x) = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^x e_1(hy) p(y) dy. \quad (6.1)$$

Очевидно, при достаточно большом n

$$\bar{\sigma}^2 = \mathbf{D}(\bar{X}_i) > 0, \quad \bar{m} = \mathbf{E}(\bar{X}_i) \neq \infty \quad (i \leq n). \quad (6.2)$$

Положим $F_n(u) = W_n(u\sqrt{n})$; $\bar{F}_n(u) = W_n(\bar{m}n + \bar{\sigma}u\sqrt{n})$. Из (5.14) найдем

$$F_n(u) = R^n \int_{-\infty}^{u\sqrt{n}} e_1(-h\xi) d\bar{W}_n(\xi) + \theta \rho_{2n}, \quad (6.3)$$

где

$$\rho_{2n} = 2n^2 \rho'_n. \quad (6.4)$$

Положим в (6.3) $u = \infty$; $F_n(u) = 1$, затем $u = x \geq 1$, и вычтем одно равенство из другого. Получим:

$$1 - F_n(x) = R^n \int_{x\sqrt{n}}^{\infty} e_1(-h\xi) d\bar{W}_n(\xi) + 2\theta_{\rho_{2n}}. \quad (6.5)$$

Поскольку $x \geq 1$, $h\xi \geq 0$, $e_1(-h\xi) = e^{-h\xi}$ при $h\xi < n^{2\alpha}/\rho_3(n)$ и $e_1(-h\xi) = 0$ при больших значениях ξ можем написать

$$1 - F_n(x) = R^n \int_{x\sqrt{n}}^{\infty} e^{-h\xi} d\bar{W}_n(\xi) + \theta_{\rho_{3n}}, \quad (6.6)$$

где

$$\rho_{3n} = 2\rho_{2n} + R^n \int_{x_0}^{\infty} e^{-h\xi} d\bar{W}_n(\xi) \text{ и } x_0 = \frac{n^{2\alpha}}{h\rho_3(n)}. \quad (6.7)$$

При этом

$$\int_{x_0}^{\infty} e^{-h\xi} d\bar{W}_n(\xi) \leq \exp\left(-\frac{n^{2\alpha}}{\rho_3(n)}\right) \int_{x_0}^{\infty} d\bar{W}_n(\xi) \leq \exp\left(-\frac{n^{2\alpha}}{\rho_3(n)}\right), \quad (6.8)$$

так что

$$\rho_{3n} = 2\rho_{2n} + R^n \exp\left(-\frac{n^{2\alpha}}{\rho_3(n)}\right). \quad (6.9)$$

7. В формуле (6.6) положим $\xi = \bar{m}n + \bar{\nu}v\sqrt{n}$; $v = (\xi - \bar{m}n)/\bar{\nu}\sqrt{n}$. Тогда (6.6) дает:

$$1 - F_n(x) = R^n e^{-h\bar{m}n} \int_{(x-\bar{m}\sqrt{n})/\bar{\nu}}^{\infty} e^{-h\bar{\nu}v\sqrt{n}} dF_n(v) + \theta_{\rho_{3n}}. \quad (7.1)$$

Исследуем более подробно выражение

$$R = \int_{-\infty}^{+\infty} e_1(hy) p(y) dy \quad (7.2)$$

и найдем для него приближенное выражение в виде отрезка степенного ряда. Положим $\rho_5(n) = (\rho_3(n))^{1/3}$; $y_n = n^{\alpha+1/2}/\rho_5(n)$. Согласно лемме 2 и (3.4) имеем

$$R = \int_{|y| \leq y_n} e_1(hy) p(y) dy + \theta_{\rho_{4n}}, \quad (7.3)$$

где

$$\rho_{4n} = C_4 \exp\left(-c_7 \frac{n^{2\alpha}}{(\rho_3(n))^{2/3}}\right). \quad (7.4)$$

В силу (3.3) и (3.4) имеем: при $|y| \leq y_n$ $e_1(hy) = e^{hy}$, так что

$$R = \int_{|y| \leq y_n} e^{hy} p(y) dy + \theta_{p_{4n}}. \quad (7.5)$$

Оценим величину R сверху; сперва покажем, что

$$R < C_5. \quad (7.6)$$

Положим $P(y) = \int_y^\infty p(z) dz$; $y \geq 0$. Согласно (0.3) и (3.1) находим из рассуждений, следующих после формулы (6.3) в ч. I:

$$P(y) < C_6 \exp(-c_8 y^{4\alpha/(2\alpha+1)}). \quad (7.7)$$

Используя (7.7), интегрируем (7.5) по частям. При $1 \leq y \leq y_n$

$$hy - c_8 y^{4\alpha/(2\alpha+1)} < -\frac{c_8}{2} y^{4\alpha/(2\alpha+1)}, \quad (7.8)$$

как нетрудно подсчитать с помощью условия (3.3) и определения y_n . Аналогичные оценки годны при $y < 0$, и мы получаем (7.6). Вообще если $|\theta(y)| \leq 1$ — непрерывная функция, заданная на сегменте $[-y_n, y_n]$, то тем же путем приходим к неравенству

$$\int_{|y| \leq y_n} \exp(hy\theta(y)) p(y) dy < C_5. \quad (7.9)$$

8. Теперь можно получить более точную информацию относительно R . Пусть $K > 0$ — целая константа. Разлагая первый член в правой части (7.5) в ряд Маклорена с удержанием K членов, получим:

$$R = \sum_{p=0}^K \frac{h^p}{p!} \int_{|y| \leq y_n} y^p p(y) dy + \frac{h^{K+1}}{(K+1)!} \int_{|y| \leq y_n} \exp(hy\theta(y)) p(y) dy + \theta_{p_{4n}}. \quad (8.1)$$

Пусть

$$K = \left[\frac{10}{1/2 - \alpha} \right] + 1. \quad (8.2)$$

Заметим еще, что при $p < K$

$$\left| \int_{|y| > y_n} y^p p(y) dy \right| < C_6 \exp\left(-c_9 \frac{n^{2\alpha}}{(p_5(n))^2}\right) < \frac{C_6}{n^{10}} \quad (8.3)$$

при достаточно большом n . Учитывая еще (7.9), найдем из (8.1) с помощью (7.4), (8.2) и (8.3):

$$R = 1 + \sum_{p=2}^K \alpha_p \frac{h^p}{p!} + \theta \frac{C_7}{n^{10}}, \quad (8.4)$$

где α_p — начальные моменты $X'_i (i \leq n)$.

Далее,

$$\bar{m} = EX_i = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{+\infty} ye^{hy} p(y) dy. \quad (8.5)$$

Действуя, как при получении оценки (7.4) и формулы (7.5), получим

$$m = R^{-1} \int_{|y| \leq y_n} ye^{hy} p(y) dy + \theta \rho_{5n}, \quad (8.6)$$

где

$$\rho_{5n} = C_4 \exp\left(-c_0 \frac{n^{2\alpha}}{(\rho_3(n))^{2/3}}\right), \quad (8.7)$$

откуда, рассуждая, как при выводе (8.4), найдем:

$$\bar{m} = R^{-1} \left(\sum_{p=2}^K \alpha_p \frac{h^{p-1}}{(p-1)!} \right) + \theta \frac{C_7}{n_0}. \quad (8.8)$$

Нам нужна еще величина $\bar{\sigma}^2 = D(\bar{X}_i) = EX_i^2 - \bar{m}^2$. Как и для (8.8), имеем:

$$E(X_i^2) = R^{-1} \left(\sum_{p=2}^K \alpha_p \frac{h^{p-2}}{(p-2)!} \right) + \theta \frac{C_7}{n^8}. \quad (8.9)$$

Если теперь подставим сюда равенство (8.4), то выразим $\bar{m}$ и $\bar{\sigma}^2$ отрезками степенного ряда. Здесь полезно заметить, что если положим $R_1 = \int_{|y| \leq y_n} e^{hy} p(y) dy$, то главные члены $\bar{m}$ и $\bar{\sigma}^2$ получатся

из выражений соответственно R'_1/R_1 и $(R'_1/R_1)' = (R''_1 R_1 - (R'_1)^2)/R_1^2$ (см. [1]). Таким образом, находим:

$$\ln R = \sum_{p=2}^K \gamma_p \frac{h^p}{p!} + \theta \frac{c_7}{n^9}, \quad (8.10)$$

$$\bar{m} = \sum_{p=2}^K \gamma_p \frac{h^{p-1}}{(p-1)!} + \theta \frac{c_7}{n^8}, \quad (8.11)$$

$$\bar{\sigma}^2 = \sum_{p=2}^K \gamma_p \frac{h^{p-2}}{(p-2)!} + \theta \frac{c_7}{n^7}. \quad (8.12)$$

Здесь γ_p — семиинварианты для X'_i .

По условиям (2.1) и (3.1) имеем:

$$\gamma_2 = 1 + \frac{1}{n^{20}}; \quad \gamma_j = 0 \quad (j = 3, 4, \dots, s+3). \quad (8.13)$$

При этом $s+3$ — максимальное число, для которого $(s+1)/(s+3) \leq 2\alpha$. Таким образом,

$$\frac{1}{s+4} < \frac{1}{2} - \alpha \leq \frac{1}{s+3} \quad (8.14)$$

и из (3.3), (8.10) и (8.11) находим:

$$\ln R = \frac{\gamma_2}{2} h^2 + \theta C_8 n^{-(s+1)/(s+3)}, \quad (8.15)$$

$$\bar{m} = \gamma_2 h + \theta C_3 n^{-1} (\gamma_2(n))^{-s-3}. \quad (8.16)$$

Отсюда при учете (8.13) —

$$h = \bar{m} + \theta C_8 n^{-1} (\gamma_2(n))^{-s-3}. \quad (8.17)$$

9. Обращаясь к формуле (7.1), выберем теперь h так, чтобы

$$x - \bar{m} \sqrt{n} = 0, \quad \bar{m} = \frac{x}{\sqrt{n}}, \quad (9.1)$$

где

$$1 \leq x \leq n^\alpha / \rho_7(n), \quad \rho_7(n) \geq (\rho_2(n))^{20}. \quad (9.2)$$

Из (8.17) находим после этого

$$h = \frac{x}{\sqrt{n}} + \theta C_8 n^{-1} (\rho_2(n))^{-s-3}, \quad (9.3)$$

что ввиду (9.2) согласуется с условием (3.3). Далее, $R^n \exp(-h\bar{m}n) = \exp(n(\ln R - h\bar{m}))$. Из (8.15) и (8.16) находим $n(\ln R - h\bar{m}) = -n h^2/2 + \theta h$, или

$$n(\ln R - h\bar{m}) = -\frac{x^2}{2} + \theta \frac{x}{\sqrt{n}}, \quad (9.4)$$

при достаточно большом n . Теперь из (7.1) находим:

$$1 - F_n(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2} + \theta \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \int_0^\infty e^{-h^2 \sqrt{n} v} d\bar{F}_n(v) + \theta \rho_{3n}. \quad (9.5)$$

Теперь при расчете первого члена правой части (9.5) можем почти дословно следовать рассуждениям работы Г. Крамера [1]. Имеем:

$$\bar{F}_n(v) = \mathbf{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - \bar{m}n}{\sqrt{n}} < v\right). \quad (9.6)$$

При этом $E\bar{X}_i = \bar{m}$; $D(\bar{X}_i) = \gamma_2 = 1 + 1/n^{20}$. Так же как (8.8) и (8.9), доказываем, что

$$E(|\bar{X}_i - \bar{m}|^3) < C_9. \quad (9.7)$$

Заметим, что в (9.6) уклонение суммы нормировано $\sqrt{n}$, а не $\sqrt{n(1+n^{-20})}$. Мы можем применить центральную предельную теорему для схемы серий $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n$ (можно в (9.6) заменить v на $v\sqrt{1+n^{-20}}$). Тогда получим [1]

$$\bar{F}_n(v) = \Phi(v) + Q_n(v), \quad |Q_n(v)| < \frac{C_{10} \ln(n)}{\sqrt{n}}, \quad (9.8)$$

где $\Phi(v)$ — интегральный простейший нормальный закон. Отсюда

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-h\bar{s}\sqrt{n}y} d\bar{F}_n(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-h\bar{s}\sqrt{n}y - \frac{y^2}{2}\right) dy - \\ &- Q_n(0) + h\bar{s}\sqrt{n} \int_0^\infty e^{-h\bar{s}\sqrt{n}y} Q_n(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-h\bar{s}\sqrt{n}y - \frac{y^2}{2}\right) dy + \\ &+ \theta C_{10} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Далее вычисляем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-h\bar{s}\sqrt{n}y - \frac{y^2}{2}\right) dy &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{h^2\bar{s}^2 n}{2}\right) \int_{h\bar{s}\sqrt{n}}^\infty e^{-u^2/2} du = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} h\bar{s}\sqrt{n}} \left(1 + \frac{\theta C_{10}}{h\bar{s}\sqrt{n}}\right) \end{aligned} \quad (9.10)$$

(см., например, [2], с. 409—410). Теперь применяем (3.3), (8.12) и (9.3), откуда находим для (9.10) выражение

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}x} (1 + \theta C_{11}h). \quad (9.11)$$

Подставляя его в (9.5), получаем:

$$\begin{aligned} 1 - F_n(x) &= \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}x} (1 + \theta C_{11}h) \left(1 + \theta C_{12} \frac{x}{\sqrt{n}}\right) + \\ &+ \theta_{p_{3n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2/2} du \left(1 + \theta C_{13} \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \left(1 + \theta \frac{C_{14}}{x}\right) + \theta_{p_{3n}}. \end{aligned} \quad (9.12)$$

10. Выражение (9.12) годно для x при условии (9.2). Мы будем применять его лишь для значений

$$n^{1/7} \leq x \leq \frac{n^\alpha}{p_7(n)}, \quad (10.1)$$

ибо при $0 \leq x \leq n^{1/6-\varepsilon} (\varepsilon > 0)$ интегральная предельная теорема следует уже из условия (0.3), как показано в ч. I. Далее, $\rho_7(n)$ может быть выбрано равным $(\rho_2(n))^{20}$; согласно (4.14), $\rho_2(n) = (\rho_3(n))^{10}$, но $\rho_3(n)$ может быть выбрано как любая сколь угодно медленно растущая функция, так что общность (10.1) не ограничивается. Итак, имеем в условиях (10.1)

$$1 - F_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2/2} du \left(1 + \frac{\theta C_{15}}{n^\beta} \right) + \theta \rho_{3n}, \quad (10.2)$$

где $\beta = \min(1/7, 1/2 - \alpha)$.

Остается еще оценить ρ_{3n} , пользуясь (6.9) и (8.4). Займемся ρ_{2n} . Согласно (5.6), (6.4) и (8.10) находим:

$$\rho_{2n} < 4n^3 \exp(n \ln R) \exp\left(-c_6 \frac{n^{2\alpha}}{(\rho_3(n))^{2/3}}\right),$$

$$n \ln R < c_{10} n h^2 < c_{11} x^2 < c_{11} \frac{n^{2\alpha}}{(\rho_7(n))^2},$$

$$\rho_7(n) = (\rho_2(n))^{10} = (\rho_3(n))^{200}.$$

Таким образом,

$$\rho_{2n} < C_{15} \exp\left(-c_{12} \frac{n^{2\alpha}}{(\rho_3(n))^{2/3}}\right).$$

Совершенно так же для второго члена в правой части (6.9) получаем оценку

$$C_{16} \exp\left(-c_{12} \frac{n^{2\alpha}}{\rho_3(n)}\right).$$

Таким образом,

$$\rho_{3n} < 2C_{16} \exp\left(-c_{12} \frac{n^{2\beta}}{\rho_3(n)}\right).$$

Подставляя эту оценку в (10.2), находим для x при условии (10.1) требуемую интегральную теорему. Как уже было сказано, при $0 \leq x \leq n^{1/7}$ она доказана в ч. I. Для рассмотрения значений $x < 0$ достаточно рассмотреть переменные $-X_i$ вместо X_i .

11. Переходим теперь к обоснованию необходимости условия (2.1) для того, чтобы зоны $[0, n^\alpha \rho(n)]$, $[-n^\alpha \rho(n), 0]$ были з. р. н. п. Пусть для некоторого $s_0 \leq s$

$$\psi_s = \psi_4 = \dots = \psi_{s+2} = 0; \quad \psi_{s_0+3} \neq 0. \quad (11.1)$$

Полагая $\alpha_1 = 1/2 - 1/(s_0 + 3) = 1/2 - \mu_1$, введем дополнительное слагаемое $\tilde{Y}_n \in N(0, n^{\alpha_1})$ с х. ф.

$$\psi_n(t) = \exp\left(-\frac{n^{2\alpha_1} t^2}{2}\right). \quad (11.2)$$

Сумма $(X_1 + \dots + X_n + Y_n)/\sqrt{n}$ имеет плотность вероятности

$$\tilde{F}'_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(t))^n \psi_n(t) \exp(-\sqrt{n} itx) dt. \quad (11.3)$$

Следуя выкладкам ч. I, приведшим к формуле (7.3), найдем, сохраняя обозначения ч. I,

$$\begin{aligned} \tilde{F}'_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int_{-n^{-\mu_1}}^{n^{-\mu_1}} \exp\left(-\frac{n+n^{2\alpha_1}}{2} t^2 + nK_{s_0+3}(t) - \sqrt{n} itx\right) dt + \\ + B \exp(-\varepsilon_1 n^{2\alpha_1}). \end{aligned} \quad (11.4)$$

Следуя выкладкам ч. I (п. 7—10), находим для $1 \leq x \leq n^\alpha \xi$ (где ξ — любая достаточно малая константа) выражение

$$\begin{aligned} \tilde{F}'_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+n^{2\alpha_1-1})} \exp\left(-\frac{x^2}{2(1+n^{2\alpha_1-1})}\right) + \\ + \frac{a_0}{(s_0+3)!} \psi_{s_0+3} \exp\left(-\frac{x^2}{2(1+n^{2\alpha_1-1})}\right) \xi^{s_0+3} (1+\gamma_1) + R_1, \end{aligned} \quad (11.5)$$

где

$$|\gamma_1| \leq \frac{1}{2}; \quad |R_1| = B \exp(-\varepsilon_1 n^{2\alpha_1}); \quad a_0 \neq 0; \quad \psi_{s_0+3} \neq 0. \quad (11.6)$$

Положим: $x_1 = \xi n^{\alpha_1}/2$; $x_2 = \xi n^{\alpha_1}$. Интегрируя (11.5) по x , найдем, учитывая, что $\xi^{s_0+3} = n(x/\sqrt{n})^{s_0+3}$,

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \tilde{F}'_n(x) dx = \tilde{F}_n(x_2) - \tilde{F}_n(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+n^{2\alpha_1-1})} \int_{x_1}^{x_2} \exp\left(-\frac{x^2}{2(1+n^{2\alpha_1-1})}\right) dx + \\ + \frac{a_0 \psi_{s_0+3}}{(s_0+3)!} \int_{x_1}^{x_2} \exp\left(-\frac{x^2}{2(1+n^{2\alpha_1-1})}\right) n \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{s_0+3} (1+\gamma_x) + \\ + B \exp\left(-\frac{2\varepsilon_1}{3} n^{2\alpha_1}\right), \end{aligned} \quad (11.7)$$

где $|\gamma_x| \leq 1/2$. Отношение добавок в (11.7) к первому члену правой части будет больше величины $C_{13} \xi^{s_0+3} = \xi_1$, если ξ достаточно мало по сравнению с ε_1 , что будем предполагать.

12. Пусть теперь зоны $[0, n^{\alpha_p}(n)]$ и $[-n^{\alpha_p}(n), 0]$ будут з. р. н. п. Рассмотрим поведение $(S_n + Y_n)/\sqrt{n}$ с законом распределения $\tilde{F}_n(x)$. Пусть $Y_n/\sqrt{n} \in N(0, n^{\alpha_1-1/2})$ имеет нормальную плотность $g_1(x)$.

Тогда для любых значений x найдем $\tilde{F}_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(x-z) g_1(z) dz$,

и нас будет интересовать разность $d_n = \tilde{F}_n(x_2) - \tilde{F}_n(x_1)$. Пусть $\varepsilon_2 > 0$. Имеем:

$$\int_{|z| > n^{\alpha - \varepsilon_2}} F_n(x - z) g_1(z) dz = B \exp\left(-\frac{1}{4} n^{1-2\varepsilon_2}\right). \quad (12.1)$$

Если же $x_1 \leq x \leq x_2$, то, по условию, при $|z| \leq n^{\alpha_1 - \varepsilon_2}$

$$F_n(x - z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x-z} e^{-u^2/2} du (1 + \eta(x - z)), \quad (12.2)$$

где $|\eta(x - z)| < \varepsilon_3$, $x_1 \leq x \leq x_2$ и ε_3 может быть выбрано сколь угодно малым при $n \rightarrow \infty$. Из (12.1) и (12.2) легко выводим при $|\theta| \leq 1$:

$$\tilde{F}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1 + n^{2\alpha_1 - 1})} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2(1 + n^{2\alpha_1 - 1})}\right) du (1 + \theta\varepsilon_4), \quad (12.3)$$

и ε_4 может быть сделано сколь угодно малым при $n \rightarrow \infty$. Из (12.3) находим:

$$d_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1 + n^{2\alpha_1 - 1})} \int_{x_1}^{x_2} \exp\left(-\frac{u^2}{2(1 + n^{2\alpha_1 - 1})}\right) du (1 + 2\theta\varepsilon_4). \quad (12.4)$$

Если ε_2 достаточно мало сравнительно с членом $\xi_1 = C_{13} \xi_0^{s_0+3}$, то (12.4) противоречит (11.7). Таким образом, (11.7) невозможно при условии (2.1) действительно необходимы.

Л и т е р а т у р а

1. C r a m e r H. Sur un nouveau théorème limite de la théorie des probabilités. — Actual. sci. et industr., Paris, 1938, N 736, p. 5—23. (Русск. пер.: Успехи мат. наук, 1944, вып. 10, с. 166—178).
2. К р а м е р Г. Математические методы статистики. М., 1948. 632 с.

И. А. Ибрагимов, И. В. Островский, В. В. Петров

О РАБОТАХ Ю. В. ЛИННИКА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Первая из работ Ю. В. Линника по теории вероятностей, заметка [1], содержащая краткое изложение результатов первой статьи тома, появилась в 1947 г. К тому времени он уже был известным математиком, автором многих превосходных исследований по теории чисел. С этих пор работа в области теории вероятностей, математической статистики и теории чисел ведется одновременно, причем идеи и методы одной из них плодотворно используются при исследовании проблем другой (ср., например, статьи [2] и [3]). Исследования Ю. В. Линника в различных областях объединял также и единый аналитический подход. Для него и аналитическая теория чисел, и теория вероятностей были в значительной степени тем, что А. Вейль в предисловии к русскому изданию книги [4] называет прикладным анализом.

Настоящий обзор посвящен работам Ю. В. Линника по теории вероятностей и не затрагивает работ по математической статистике. Конечно, между двумя этими областями исследования нет четкой границы и порой трудно сказать, нужно ли относить данную работу к теории вероятностей или к математической статистике. Здесь мы руководствовались классификацией, принадлежащей самому Ю. В. Линнику (см. [5]). Все вероятностные работы Ю. В. Линника посвящены либо предельным теоремам теории вероятностей, либо арифметике законов распределения.

Предельные теоремы. Как уже упоминалось, в первых работах Ю. В. Линника по теории вероятностей рассматривается проблема оценки остаточного члена в центральной предельной теореме для сумм независимых случайных величин — задача, в течение многих десятилетий привлекавшая внимание математиков начиная с П. Л. Чебышева и А. М. Ляпунова.

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — последовательность независимых случайных величин с математическими ожиданиями, равными нулю, и пусть $E|X_n|^3 < \infty$ для всех n . Положим:

$$S_n = \sum_{j=1}^n X_j, \quad B_n = \sum_{j=1}^n EX_j^2, \quad L_n = B_n^{-3/2} \sum_{j=1}^n E|X_j|^3,$$

$$F_n(x) = P\{S_n < x\sqrt{B_n}\}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

В мемуаре 1901 г. А. М. Ляпунов показал, что если $L_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $F_n(x) \rightarrow \Phi(x)$ и, кроме того, справедлива оценка $F_n(x) - \Phi(x) = O(L_n |\ln L_n|)$. В 1945 г. была опубликована работа Эссеена [6], содержащая доказательство неравенства $|F_n(x) - \Phi(x)| \leq AL_n$ при всех x и n , где A — абсолютная постоянная. Пример последовательности симметричных независимых случайных величин, каждая из которых имеет лишь два значения, -1 и 1 , показывает, что $A \geq 1/\sqrt{2\pi}$.

Предполагая симметричность распределений и выполнение некоторых других условий, одни из которых относятся к поведению моментов рассматриваемых случайных величин и гарантируют выполнение условия $L_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а другие обеспечивают малую вероятность малой окрестности нуля для этих случайных величин, Ю. В. Линник получил оценку

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} L_n (1 + \varepsilon_n(M)) \quad (1)$$

для $|x| \leq M$ и любого фиксированного M , где $\varepsilon_n(M) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Эта оценка является оптимальной в некотором смысле. Доказательство неравенства (1) является весьма сложным и использует наряду с традиционным аппаратом характеристических функций новые приемы исследования, часть из которых применялась ранее И. М. Виноградовым в аналитической теории чисел. Позднее в работе В. В. Петрова [7] были смягчены некоторые условия, наложенные на поведение распределений рассматриваемых случайных величин, и исследован эффект отказа от условия малой вероятности нуля для случайных величин.

К проблематике теории суммирования независимых случайных величин, являвшейся одной из наиболее важных в теории вероятностей для петербургско-ленинградской математической школы, Ю. В. Линник вернулся в цикле работ «Предельные теоремы для сумм независимых величин. . .», I—III, «О вероятности больших отклонений. . .» и [8, 9], опубликованных в 1959—1962 гг. и посвященных предельным теоремам для вероятности больших отклонений сумм независимых случайных величин. Теоремы этого типа позволяют, в частности, оценить относительную ошибку приближения функции распределения нормированной суммы

$\sum_{j=1}^n X_j$ независимых случайных величин $F_n(x)$ нормальным распределением $\Phi(x)$ и исследовать асимптотическое поведение отношения хвостовых вероятностей $(1 - F_n(x))/(1 - \Phi(x))$ и $(F_n(-x))/\Phi(-x)$ при $x = x_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). Такого рода результаты имеют важное значение для математической статистики, теории информации и ряда других областей. До работ Ю. В. Линника предельные теоремы для вероятностей больших отклонений, доказанные А. Я. Хинчиным [10, 11], Н. В. Смирновым [12], Г. Крамером [13], В. Феллером [14], В. В. Петровым [15] и В. Рихтером [16], были

получены в предположении о том, что рассматриваемые случайные величины удовлетворяют условию Крамера. Условие Крамера означает существование производящей функции моментов случайной величины в некоторой окрестности нуля, иначе говоря, оно означает аналитичность характеристической функции этой случайной величины в некоторой полосе, содержащей действительную прямую. Ю. В. Линник разработал новые методы, позволившие исследовать вероятности больших отклонений сумм независимых слагаемых в случае нарушения условия Крамера. При помощи этих методов Ю. В. Линником были получены, в частности, следующие глубокие результаты.

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих одинаковое распределение с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией $\sigma^2 > 0$. Пусть $F_n(x) = P \left\{ \sum_{j=1}^n X_j < x\sigma\sqrt{n} \right\}$, $\rho(n)$ — функция, удовлетворяющая условию $\rho(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Если $0 < \alpha \leq 1/6$, то условие

$$E \exp \{ |X_1|^{4\alpha/(2\alpha+1)} \} < \infty \quad (2)$$

достаточно для того, чтобы

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} \rightarrow 1, \quad \frac{F_n(-x)}{\Phi(-x)} \rightarrow 1 \quad (3)$$

равномерно относительно x в области $0 \leq x \leq n^\alpha / \rho(n)$, и необходимо для того, чтобы соотношения (3) имели место равномерно относительно x в области $0 \leq x \leq n^\alpha \rho(n)$. Если же $1/6 < \alpha < 1/2$, то условия (2) и

$$\gamma_m = 0 \quad (m = 3, \dots, s+2) \quad (4)$$

достаточны для того, чтобы соотношения (3) имели место равномерно относительно x в области $0 \leq x \leq n^\alpha / \rho(n)$, и необходимы для того, чтобы эти соотношения имели место равномерно относительно x в области $0 \leq x \leq n^\alpha \rho(n)$. Здесь γ_m — кумулянт порядка m случайной величины X_1 , а s есть целое неотрицательное число, определяемое неравенствами $s/(2(s+2)) < \alpha < (s+1)/(2(s+3))$. Заметим, что при $\alpha = 1/2$ условие (2) есть условие Крамера, а при $\alpha < 1/2$ представляет собой ослабление условия Крамера.

Наряду с этими интегральными предельными теоремами в работах «Предельные теоремы для сумм независимых величин. . .», I—III, «О вероятности больших отклонений. . .» и [9] содержатся соответствующие локальные предельные теоремы. Глубоко изучены узкие зоны нормальной сходимости (3), в которых можно еще более ослабить условие Крамера. Ю. В. Линником впервые получены предельные теоремы для больших отклонений на всей оси, т. е. теоремы об асимптотическом поведении вероятностей вида $P \left\{ \sum_{j=1}^n X_j \geq x \right\}$, где $X_1, \dots, X_n$ — независимые случайные вели-

чины, без ограничений на порядок роста x . Изложение ряда результатов Ю. В. Линника, связанных с предельными теоремами для вероятностей больших уклонений сумм независимых случайных величин, содержится в монографии И. А. Ибрагимова и Ю. В. Линника [17].

Этот цикл работ Ю. В. Линника получил большой отклик в советской и зарубежной литературе. В. В. Петров [18] при условии (2) и $\alpha < 1/2$ исследовал зоны, в которых вместо нормальной сходимости (3) имеют место более общие асимптотические соотношения, связанные с отрезками ряда Крамера. Л. В. Осипов [19] нашел условия, необходимые и достаточные для того, чтобы соотношения (3) (или только что упомянутые более общие асимптотические соотношения) выполнялись в области $0 \leq x \leq bn^\alpha$ равномерно относительно x , где $\alpha < 1/2$ и b — положительные постоянные. Вероятности больших уклонений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин в случае предельного устойчивого закона были изучены Хейди [20]. Предельные теоремы для больших уклонений сумм независимых неодинаково распределенных случайных величин, обобщающие теоремы Ю. В. Линника, были получены В. В. Петровым [18], В. Вольфом [21, 22] и Н. Н. Амосовой [23]. В работах С. В. Нагаева [24], Рубина и Сетурамана [25], Н. Н. Амосовой [26, 27], А. Д. Сластникова [28] и Л. Падица [29] исследованы предельные теоремы для вероятностей умеренных уклонений сумм независимых слагаемых. Обобщения теорем Ю. В. Линника об узких зонах нормальной сходимости получены В. Вольфом [21, 30]. Многомерные предельные теоремы для вероятностей больших уклонений при условиях типа условия Ю. В. Линника (2) были получены Л. В. Осиповым [31] и Л. Вилкаускасом [32]. Вероятности больших уклонений сумм независимых случайных величин при нарушении условия Крамера были также предметом исследований В. М. Золотарева [33], С. В. Нагаева [34], Пергела [35], В. В. Петрова [36], А. В. Нагаева [37, 38], Р. Рудзкиса, Л. Саулиса и В. Статулявичуса [39] и других математиков.

В работах «Теоретико-информационное доказательство центральной предельной теоремы. . .» и «О некоторых связях информационных количеств К. Шеннона и Р. Фишера с теорией суммирования. . .» Ю. В. Линник предлагает неожиданный метод доказательства центральной предельной теоремы теории вероятностей. Он основан на одном экстремальном свойстве нормального закона по отношению к информации Фишера и некоторых связях между энтропией Шеннона и информацией Фишера. Если рассматривается задача оценки параметра сдвига θ по наблюдению X с плотностью распределения $p(x - \theta)$ на прямой, то информация Фишера этой задачи имеет вид

$$I(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|p'(x)|^2}{p(x)} dx.$$

В классе распределений с фиксированной дисперсией она достигает минимума на нормальном распределении.

Пусть опять $X_1, X_2, \dots$ — независимые случайные величины со средним нуль и дисперсиями $EX_j^2 = \sigma_j^2$.

Без потери общности можно считать, что величины X_j имеют ограниченную плотность распределения. Пусть $p_m(x)$ — плотность распределения нормированной суммы $B_m^{-1} \sum_{j=1}^m X_j$, $B_m^2 = \sum_{j=1}^m \sigma_j^2$. Ю. В. Линник вводит еще функционал

$$J(p) = - \left(\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln p(x) dx + \frac{1}{2} \ln \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx \right),$$

являющийся аффинно инвариантным вариантом энтропии Шеннона, и доказывает, что функционалы $J(p_m)$ и $I(p_m)$ связаны соотношением

$$J(p_{m+1}) - I(p_m) = \frac{\sigma_{m+1}^2}{2} (I(p_m) - 1) + \mu \sigma_{m+1}^2,$$

где μ — мало для большинства индексов m . Далее доказывается, что $\sup_m J(p_m) < \infty$ и что, следовательно, для больших m $I(p_m) \sim 1$. Отсюда с помощью характеристики нормального закона можно вывести, что распределение с плотностью p_m должно сближаться с нормальным распределением. Ю. В. Линник полагал, что его метод можно применить к суммированию случайных величин в нормированном пространстве, к выводу других предельных теорем. Кажется, никто еще не пытался этого сделать.

Предельные теоремы для неоднородных цепей Маркова. Этой проблематике посвящены работы «К теории неоднородных цепей Маркова» и «Многомерные интегральный и локальный законы для неоднородных цепей Маркова». В первой из них рассматривается последовательность серий случайных величин $X_{1n}, \dots, X_{nn}$, связанных в цепь Маркова с конечным числом состояний, и изучается, когда нормированные суммы $\bar{S}_n = (S_n - A_n)B_n^{-1/2}$, где

$$S_n = \sum_{j=1}^n X_{jn}, \quad A_n = ES_n, \quad B_n = DS_n,$$

имеют предельное нормальное распределение. Это старая задача, которую начал изучать в 1910 г. А. А. Марков [40].

Потребовав, чтобы все вероятности перехода

$$p_{in}^{(h)} = P \{ X_{hn} = a_{in}^{(h)} \mid X_{h-1,n} = a_{in}^{(h-1)} \}$$

были ограничены снизу положительным числом c , А. А. Марков, используя метод моментов, доказал асимптотическую нормальность величин $\bar{S}_n$. Трудный случай, когда нижняя грань $p_{in}^{(h)}$, оста-

ваясь положительной, может стремиться к нулю с ростом n , А. А. Марков оставил открытым для других исследователей.

Дальнейший шаг в решении задачи сделал С. Н. Бернштейн. Пусть

$$\alpha^{(n)} = \inf_{i, l, h} p_{i, l, h}^{(h)}.$$

Ограничиваясь случаем цепей с двумя состояниями, С. Н. Бернштейн доказал асимптотическую нормальность сумм $\bar{S}_n$ сперва в предположении $\alpha^{(n)} n^{1/7-\varepsilon} \rightarrow \infty$ для какого-нибудь $\varepsilon > 0$ [41], затем в предположении $\alpha^{(n)} n^{1/5-\varepsilon} \rightarrow \infty$ [42] и, наконец, в работах [43, 44] в предположении $\alpha^{(n)} n^{1/3-\varepsilon} \rightarrow \infty$. Развивая методы С. Н. Бернштейна, Н. А. Сапогов [45] показал, что достаточно потребовать лишь, чтобы $\alpha^{(n)} n^{1/3} \rightarrow \infty$. В то же время еще в работе [42] С. Н. Бернштейн привел примеры цепей Маркова, для которых $\lim \alpha^{(n)} n^{1/3} = c$, $0 < c < \infty$, и предельное распределение $\bar{S}_n$ не является нормальным. Тем самым для цепей с двумя состояниями задача получила полное решение. Однако методы цитированных работ С. Н. Бернштейна позволяли изучать лишь цепи с двумя состояниями. Для цепей с числом состояний, большим двух, из работ С. Н. Бернштейна [46] и Н. А. Сапогова [47] следовало, что сходимость распределений $\bar{S}_n$ к нормальному закону имеет место, если $\alpha^{(n)} n^{1/5-\varepsilon} \rightarrow \infty$. Как пишет Ю. В. Линник в работе «К теории неоднородных цепей Маркова», роль числа $1/3$ для многозначных цепей оставалась неясной. В этой работе он как раз и показал, что если цепи Маркова $\{X_{j_n}\}$ имеют произвольное конечное число состояний, равномерно ограниченное по n , и $|X_{j_n}| < K$, то сумма $\bar{S}_n$ асимптотически нормальна, если $\alpha^{(n)} n^{1/3-\varepsilon} \rightarrow \infty$ для какого-нибудь числа $\varepsilon > 0$.

Дальнейшее развитие исследований этой проблемы происходило следующим образом. Р. Л. Добрушин [48, 49] показал, что асимптотическая нормальность $\bar{S}_n$ сохраняется при условии $\alpha^{(n)} n^{1/3} \rightarrow \infty$. Кроме того, он рассмотрел цепи с произвольным множеством состояний, установив, как для них определяется характеристика $\alpha^{(n)}$:

$$\alpha^{(n)} = \min_{i=1, \dots, n-1} (1 - \sup_{R, \varphi, \psi} |P\{X_{i+1, n} \in R | X_{in} = \varphi\} - P\{X_{i+1, n} \in R | X_{in} = \psi\}|).$$

Р. Л. Добрушин изучил также случай неограниченных величин X_{j_n} . Б. А. Лифшиц, комбинируя работы Р. Л. Добрушина и С. Н. Бернштейна, показал, что моменты сумм $\bar{S}_n$ сходятся к моментам предельного нормального распределения. Он же нашел, что требование $\alpha^{(n)} n^{1/3} \rightarrow \infty$ можно в определенном смысле ослабить [50, 51]. В работах ученика Ю. В. Линника В. А. Статулявичуса [52] и многих других работах представителей литовской школы найдены асимптотические разложения для распределений $\bar{S}_n$, доказаны теоремы о больших отклонениях и т. д.

В работе «Многомерные интегральный и локальный законы. . .» Ю. В. Линник доказывает предельную теорему для вероятностей заданного числа попаданий неоднородной цепи Маркова в те или иные состояния. Можно предполагать, что рассматриваются случайные величины $X_1, X_2, \dots$, связанные в неоднородную цепь Маркова и принимающие своими значениями векторы $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_{h+1} = (0, 0, \dots, 0, 1)$. Сумма $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ как раз и показывает, сколько раз цепь Маркова будет попадать в $e_1, e_2, \dots, e_{h+1}$. Ю. В. Линник предполагает, что цепь удовлетворяет условию (A) Деблина — найдется число $\lambda > 0$, такое, что для всех m, k, i, j

$$P\{X_m = e_j \mid X_{m-1} = e_i\} \geq \lambda P\{X_k = e_j \mid X_{k-1} = e_i\}$$

— и некоторым требованиям невырожденности (случайное блуждание $\{S_n\}$ не сосредоточено на собственной подгруппе решетки целых чисел в R^h и т. п.). В этих условиях он доказывает (предположим для простоты, что все состояния цепи образуют один существенный класс), что равномерно по $m = (m_1, \dots, m_{h+1})$

$$P\{S_n = m\} = (2\pi)^{-h/2} (D_{1n} \dots D_{hn})^{-1/2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} Q \left(\frac{m_1 - C_{1n}}{\sqrt{D_{1n}}}, \dots, \frac{m_h - C_{hn}}{\sqrt{D_{hn}}} \right) \right\} + O(N^{-h/2} (\ln N)^{-1/4}).$$

Здесь C_{in} и D_{in} — соответственно среднее и дисперсия i -й компоненты сумм S_n , а Q — квадратичная форма с определителем Δ .

Результаты этой работы были усилены В. А. Статулявичусом. В работе [53] он указал асимптотические разложения по n для $P\{S_n = m\}$. В дальнейших работах (см. [52]) В. А. Статулявичус получил локальные теоремы в более общей постановке, указал локальные теоремы для вероятностей больших отклонений. Работа В. А. Статулявичуса в свою очередь была продолжена его литовскими учениками.

Арифметика законов распределения. Теория разложений вероятностных распределений (в дальнейшем в. р.), называемая иногда арифметикой в. р., занимается вопросами факторизации в подгруппе $\mathcal{P}$ в. р. с операцией свертки. Эта область теории вероятностей возникла в середине 30-х годов. Первым относящимся к ней результатом была теорема о факторизации распределения Гаусса, высказанная в 1935 г. П. Леви и доказанная в 1936 г. Г. Крамером. В 1937—1938 гг. в этой области интенсивно работали А. Я. Хинчин, П. Леви и Д. А. Райков, получившие некоторые фундаментальные результаты. Потом наступило почти 20-летнее затишье, окончившееся в 1957 г. появлением цикла работ Ю. В. Линника: «Об одном аналитическом обобщении теоремы Крамера. . .» (совместно с А. А. Зингером), «О разложении композиции законов Гаусса и Пуассона», «Общие теоремы о разложении

безгранично делимых законов», I—II, «Еще об обобщениях теоремы Г. Крамера» (совместно с В. П. Скитовичем), «Об „ α -разложениях“ безгранично делимых вероятностных законов» [54—56].

В этих работах впервые были получены общие результаты по одной из центральных проблем теории — проблеме описания класса I_0 — и открыты новые пути ее исследования, связанные с применением современного аппарата теории целых функций. Кроме того, в них была обобщена теория разложений, названная Ю. В. Линником теорией α -разложений, и положено начало изучению разложения в. р. в свертку знакопеременных мер. Отметим также, что в них впервые была высказана идея приложения теории разложений в. р. к построению теории суммирования случайных величин без условия предельной пренебрегаемости.

Основные результаты и методы упомянутых работ были изложены в монографии Ю. В. Линника [54], содержащей исчерпывающее описание теории разложений в. р. и постановки актуальных проблем. Выход в свет этой монографии привлек к работе в теории разложений многих математиков. Основное внимание в течение последующего десятилетия было направлено на дальнейшее развитие методов Ю. В. Линника и решение поставленных им проблем. О результатах можно судить по монографии Ю. В. Линника и И. В. Островского [57] и более поздним работам [58, 59]. Дать сколько-нибудь полный обзор результатов, полученных к настоящему времени с помощью идей и методов работ этого цикла, не представляется возможным в краткой статье.

Исследования Ю. В. Линника по теории разложений в. р. можно отнести к трем направлениям: 1) проблема описания класса I_0 , 2) α -разложения, 3) разложения в свертку знакопеременных мер. Мы дадим краткое описание этих исследований и работ, непосредственно их продолжающих.

1. Проблема описания класса I_0 — класса в. р., не имеющих неразложимых¹⁾ делителей в $\mathcal{P}$, возникла в связи с факторизационной теоремой А. Я. Хинчина, гласящей, что любое в. р. P допускает представление

$$P = P_0 * P_1 * P_2 * \dots,$$

где $P_0 \in I_0$, а $P_1, P_2, \dots$ — неразложимые распределения (их множество может быть пустым, конечным или счетным). А. Я. Хинчин показал, что класс I_0 является собственным подклассом класса всех безгранично делимых распределений (в дальнейшем б. д. р.) и что его можно определять как класс тех б. д. р., которые имеют лишь б. д. делители в $\mathcal{P}$. Для характеристических функций (в дальнейшем х. ф.) б. д. р. известно представление

$$\varphi(t) = \exp \left\{ i\beta t - \gamma t^2 + \int_{(-\infty, \infty) \setminus \{0\}} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \nu(dx) \right\}, \quad (5)$$

¹⁾ В. р. P называется неразложимым, если любой его делитель в $\mathcal{P}$ имеет вид либо $P * \varepsilon_a$, либо ε_a , где ε_a — в. р., сосредоточенное в точке a .

где $\beta \in R$, $\gamma \in R^+$, $\nu(E)$ — неотрицательная мера, удовлетворяющая условию $\int_{(-\infty, \infty) \setminus \{0\}} x^2 (1+x^2)^{-1} \nu(dx) < \infty$. Поэтому проблема

описания класса I_0 состоит в выделении соответствующего подкласса в классе х. ф., допускающих представление (5).

До работ Ю. В. Линника было известно, что I_0 принадлежат распределение Гаусса (Крамер, 1936 г.), распределение Пуассона (Райков, 1937 г.), были изучены условия принадлежности I_0 решетчатых б. д. р., являющихся свертками конечного числа распределений Пуассона (Леви, 1937—1938 гг.), и указаны условия принадлежности I_0 некоторых специальных классов дискретных нерешетчатых сверток конечного числа распределений Пуассона (Райков, 1938 г.).

В работе «О разложении композиции законов Гаусса и Пуассона» Ю. В. Линник доказал принадлежность I_0 свертки распределений Гаусса и Пуассона. Для этого им был применен новый подход к изучению делителей в. р. с целыми х. ф. (Этот подход изложен им в докладе «Некоторые вопросы теории целых функций. . .» на Всесоюзной конференции по теории функций). Он основан на следующем свойстве целых х. ф., которое Ю. В. Линник назвал свойством хребта:

$$|\varphi(t)| \leq |\varphi(i \operatorname{Im} t)|.$$

Это свойство позволяет во многих случаях свести задачу об описании делителей в. р. P с целой х. ф. $\varphi(t)$ к чисто теоретико-функциональной задаче: описать совокупность всех целых функций $\varphi_1(t)$, удовлетворяющих условию

$$1 \leq |\varphi_1(i \operatorname{Im} t)/\varphi_1(t)| \leq |\varphi(i \operatorname{Im} t)/\varphi(t)|.$$

В случае, когда в. р. P является б. д. р., задача сводится к описанию всех целых функций $g(t)$, реальная часть которых удовлетворяет условию

$$0 \leq \operatorname{Re} \{g(i \operatorname{Im} t) - g(t)\} \leq \gamma (\operatorname{Re} t)^2 + \\ + 2 \int_{(-\infty, \infty) \setminus \{0\}} e^{-x \operatorname{Im} t} \sin^2 \left(\frac{1}{2} x \operatorname{Re} t \right) \nu(dx).$$

Для решения последней задачи Ю. В. Линник разработал специальный метод.²⁾

В работе «Общие теоремы о разложении безгранично делимых законов» Ю. В. Линник получил общий результат об условиях принадлежности I_0 б. д. р. с гауссовой компонентой (т. е. таких, у которых в (5) имеем $\gamma > 0$). Этому результату позднее была придана такая формулировка. Обозначим через $\mathcal{L}$ класс всех б. д. р.,

²⁾ Этот метод был позднее упрощен И. В. Островским [60].

у которых носитель меры ν , фигурирующей в представлении (5), содержится во множестве вида

$$\{\mu_{k1}\}_{k=-\infty}^{\infty} \cup \{\mu_{k2}\}_{k=-\infty}^{\infty},$$

где $\mu_{k1} < 0$, $\mu_{k2} > 0$, а числа $\mu_{k+1, r} / \mu_{kr}$ ($r = 1, 2$; $k = 0, \pm 1, \dots$) — натуральные, отличные от единицы. Если б. д. р. с гауссовой компонентой принадлежит I_0 , то оно необходимо принадлежит $\mathcal{Q}$. Таким образом, для б. д. р. с гауссовой компонентой принадлежность I_0 связана с весьма жесткими условиями арифметического характера на носитель меры ν .

Для б. д. р. без гауссовой компоненты принадлежность классу $\mathcal{Q}$ не является необходимым условием принадлежности I_0 — это следует из результатов Леви и Райкова 1937—1938 гг. Однако, как недавно показал А. Е. Фрынтов [61], принадлежность $\mathcal{Q}$ остается необходимым условием принадлежности I_0 для тех б. д. р. без гауссовой компоненты, у которых мера ν достаточно сильно сконцентрирована в окрестности нуля, а именно выполнены два условия:

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} (\ln r)^{-1} \ln \nu([1/r, 2/r]) > 1, \quad \liminf_{r \rightarrow \infty} (\ln r)^{-1} \ln \nu([-2/r, -1/r]) > 1.$$

Оказалось также (см. [62]), что необходимым условием принадлежности I_0 решетчатого б. д. р. является представимость в виде свертки распределения класса $\mathcal{Q}$ и конечного числа распределений Пуассона. (Относительно разложений решетчатых б. д. р. см. также [63, 64]).

В работе «Об „ α -разложениях“ безгранично делимых вероятностных законов» Ю. В. Линник с помощью подхода, разработанного им в статье «О разложении композиции законов Гаусса и Пуассона», исследовал вопрос о том, в какой мере принадлежность $\mathcal{Q}$ является достаточным условием принадлежности I_0 . Им установлено, что б. д. р. класса $\mathcal{Q}$ (не обязательно с гауссовой компонентой) принадлежит I_0 , если мера ν достаточно быстро убывает на бесконечности:

$$\nu(\{x: |x| > y\}) = O(\exp(-\exp y^{1+K})), \quad y \rightarrow \infty, \quad \forall K > 0. \quad (6)$$

В докладе «Некоторые вопросы теории целых функций...» Ю. В. Линник выдвинул гипотезу, что условие (6) можно заменить значительно более слабым:

$$\nu(\{x: |x| > y\}) = O(\exp(-Ky)), \quad y \rightarrow +\infty, \quad \forall K > 0. \quad (7)$$

Эта гипотеза до сих пор не доказана и не опровергнута. И. В. Островский показал [65], что условие (6) можно заменить условием

$$\nu(\{x: |x| > y\}) = O(\exp(-Ky^2)), \quad y \rightarrow +\infty, \quad \forall K > 0. \quad (8)$$

Дальнейшее ослабление условия дано в работе А. Е. Фрынтлова и Г. П. Чистякова [62], их условие имеет вид:

$$\nu(\{x: |x| > y\}) = O(\exp(-Ky \ln y)), \quad y \rightarrow +\infty, \quad \exists K > 0. \quad (9)$$

Заметим, что, как показали А. А. Гольдберг и И. В. Островский [66], одна принадлежность $\mathcal{Q}$ еще не обеспечивает принадлежности I_0 . В построенном ими примере мера ν удовлетворяет условию, отличающемуся от (7) заменой квантора $\forall$ квантором $\exists$.

2. Перейдем к исследованиям Ю. В. Линника по теории α -разложений. Впервые разложения вида

$$\varphi(t) = \{\varphi_1(t)\}^{\alpha_1} \{\varphi_2(t)\}^{\alpha_2} \dots \{\varphi_n(t)\}^{\alpha_n}, \quad (10)$$

где $\varphi(t)$, $\varphi_1(t)$, $\dots$, $\varphi_n(t)$ — х. ф.; $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — положительные числа, встретились в работе А. А. Зингера и Ю. В. Линника «Об одном аналитическом обобщении теоремы Крамера. . .» в связи с теоремой Скитовича—Дармуа о характеристизации распределения Гаусса независимостью двух линейных статистик от повторной выборки. Такие разложения позволили найти отличный от известного ранее и более простой путь к доказательству этой теоремы. Трудность, возникающая при изучении разложений вида (10), обусловлена тем, что они, если только не все числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ рациональны, не сводятся к разложениям в. р. в свертку в. р. Поэтому многие методы теории разложений в. р. здесь неприменимы.

Основам общей теории α -разложений посвящена работа Ю. В. Линника «Еще об обобщениях теоремы Г. Крамера». В этой работе α -разложением х. ф. $\varphi(t)$ называется разложение вида (10), справедливое на некоторой последовательности реальных значений $t = t_k \rightarrow 0$.³⁾ Ю. В. Линник получает для α -разложений следующий фундаментальный результат, аналогичный теореме Леви—Райкова из теории разложений в. р. Если х. ф. $\varphi(t)$ аналитична в круге $|t| < R$, то и х. ф. $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ аналитичны в том же круге. Этот результат делает возможным применение для изучения α -делителей целой х. ф. аппарата, который применялся для изучения делителей в. р. с целыми х. ф. С помощью этого аппарата Ю. В. Линник изучает проблему, аналогичную проблеме описания класса I_0 , — об описании класса б. д. р., имеющих только б. д. α -делители. Он установил, что этому классу принадлежит б. д. р. класса $\mathcal{Q}$, у которых носитель меры ν ограничен. Условие ограниченности носителя меры ν было позднее заменено И. В. Островским [65] условием (4), а А. Е. Фрынтовым и Г. П. Чистяковым [62] — условием (9).

³⁾ Приводимая ниже более общая формулировка взята из книги Ю. В. Линника [54]. Обобщение не потребовало существенного изменения доказательства. Заметим, что функцию $\varphi(t)$ в (10) можно не предполагать х. ф., а считать лишь, что $\varphi(t) = \varphi(-t)$.

В монографии [54] Ю. В. Линником была поставлена задача изучения счетных и континуальных α -разложений. Она рассматривалась в работах Б. Рамачандрана [67] и Л. В. Мамай [68]. Этими авторами получены аналоги теоремы об аналитичности α -делителей х. ф., аналитической в круге, и аналоги теоремы Крамера о факторизации распределения Гаусса.

Г. П. Чистяков доказал [69], что если функция $\varphi(t)$ аналитична в полукруге $\{\operatorname{Im} t > 0, |t| < R\}$, то из справедливости равенства (10) в некотором интервале $(-\delta, \delta)$ следует, что в том же полукруге аналитичны и все х. ф. $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$. Для доказательства этого факта понадобился метод, существенно отличный от метода Ю. В. Линника [56].

3. Разложения в. р. в свертку знакопеременных мер (зарядов) были впервые рассмотрены в работе Ю. В. Линника и В. П. Скидовича «Еще об обобщениях теоремы Г. Крамера». В этой работе было показано, что если V_1 и V_2 — знакопеременные меры, удовлетворяющие условиям ${}^4)V_j(R)=1$,

$$|V_j|(\{x: |x| > y\}) = O(\exp(-y^{1+K})), \quad y \rightarrow +\infty, \quad \forall K > 0, \quad (11)$$

то из равенства

$$V_1 * V_2 = \Phi,$$

где Φ — распределение Гаусса, следует, что V_1 и V_2 — распределения Гаусса (быть может, вырожденные). При этом условие (11) нельзя существенно ослабить, заменив его на

$$|V_j|(\{x: |x| > y\}) = O(\exp(-Ky \ln y)), \quad y \rightarrow +\infty, \quad \forall K > 0.$$

В дальнейшем разложения в свертку знакопеременных мер изучались рядом авторов [69–73]; в основном речь шла о разложениях распределения Гаусса. Результат, содержащий одновременно и теорему Крамера, и теорему Линника–Скидовича, был получен Г. П. Чистяковым [74]. Пусть V_1 и V_2 — две знакопеременные меры, удовлетворяющие условиям:

$$1) V_j(R) = 1,$$

$$2) V_j^\ominus(\{x: |x| > y\}) = O(\exp(-Ky \ln y)), \quad y \rightarrow +\infty, \quad \forall K > 0$$

(через $V_j^\ominus$ обозначена отрицательная вариация меры V_j),

$$3) \text{ при всех } \tau, \quad -\infty < \tau < \infty, \text{ отличен от нуля интеграл}$$

$$I(\tau, V_j) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau x} dV_j(x), \quad j = 1, 2.$$

Если имеет место условие (8), то V_1 и V_2 — распределения Гаусса (быть может, вырожденные). В условии 2) квантор V нельзя заменить квантором $\mathbb{A}$, а условие 3) нельзя отбросить.

⁴⁾ Ниже через $|V_j|$ обозначается полная вариация меры V_j .

Отметим также, что в ряде работ развивалась теория разложения вероятностных распределений случайных векторов (см., например, [75, 76], а также гл. VI монографии [57]).

Л и т е р а т у р а

1. Л и н н и к Ю. В. О точности приближения к гауссову распределению суммы независимых случайных величин. — ДАН СССР, 1947, т. 55, № 7, с. 575—577.
2. Л и н н и к Ю. В. Применение цепей Маркова в арифметике кватернионов. — Успехи мат. наук, 1954, т. 9, вып. 4, с. 203—260.
3. Л и н н и к Ю. В. Об одном применении теории алгебраических чисел к математической статистике. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1971, т. 112, ч. 1, с. 22—39.
4. В е й л ь А. Основы теории чисел. М., 1972. 408 с.
5. Л и н н и к Ю. В. Теория вероятностей и математическая статистика. — В кн.: Математика в Петербургском—Ленинградском университете. Л., 1970, с. 243—255.
6. E s s e e n C.-G. Fourier analysis of distribution functions. — Acta Math., 1945, vol. 77, p. 1—125.
7. П е т р о в В. В. О точных оценках в предельных теоремах. — ДАН СССР, 1955, т. 104, № 2, с. 180—182.
8. Л и н н и к Ю. В. Пять лекций о некоторых вопросах теории чисел и теории вероятностей. — Magyar tud. akad. mat. kutato közl., 1959, vol. 4, № 3—4, p. 225—256.
9. Л и н н и к Ю. В. Новые предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. — ДАН СССР, 1960, т. 133, № 6, с. 1291—1293.
10. K h i n t c h i n A. J. Über die positiven und negativen Abweichungen des arithmetischen Mittels. — Math. Ann., 1929, Bd 101, S. 381—385.
11. K h i n t c h i n A. J. Über einen neuen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Math. Ann., 1929, Bd 101, S. 745—752.
12. С м и р н о в Н. В. О вероятностях больших уклонений. — Мат. сб., 1933, т. 40, вып. 4, с. 443—454.
13. C r a m e r H. Sur un nouveau théoreme limite de la théorie des probabilités. — Actual. sci. et industr., Paris, 1938, N 736, p. 5—23.
14. F e l l e r W. Generalization of a probability limit theorem of Cramer. — Trans Amer. Math. Soc., 1943, vol. 54, N 3, p. 361—372.
15. П е т р о в В. В. Обобщение предельной теоремы Крамера. — Успехи мат. наук, 1954, т. 9, вып. 4, с. 195—202.
16. Р и х т е р В. Локальные предельные теоремы для больших уклонений. — Теор. вероятн. и ее примен., 1957, т. 2, вып. 2, с. 214—229.
17. И б р а г и м о в И. А., Л и н н и к Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М., 1965. 524 с.
18. П е т р о в В. В. Предельные теоремы для больших уклонений при нарушении условия Крамера. I, II. — Вестник ЛГУ, 1963, № 19. Сер. мат., мех., астрон., вып. 4, с. 49—68; 1964, № 1. Сер. мат., мех., астрон., вып. 1, с. 58—75.
19. О с и п о в Л. В. О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин. — Теор. вероятн. и ее примен., 1972, т. 17, вып. 2, с. 320—341; 1973, т. 18, вып. 3, с. 679.
20. H e y d e C. C. On large deviation probabilities in the case of attraction to a non-normal stable law. — Sankhyā. Ser. A, 1968, vol. 3, part 30, p. 253—258.
21. В о л ь ф В. О вероятностях больших уклонений для случая нарушения условия Крамера. — Math. Nachrichten, 1975, Bd 70, S. 197—215.
22. W o l f W. Über Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen. — Math. Nachrichten, 1974, Bd 62, S. 261—288.

23. Амосова Н. Н. Некоторые предельные теоремы для вероятностей больших уклонений. — Теор. вероятн. и мат. статистика, 1974, № 10, с. 12—28.
24. Нагаев С. В. Некоторые предельные теоремы для больших уклонений. — Теор. вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, вып. 2, с. 231—254.
25. Rubin H., Sethuraman J. Probabilities of moderate deviations. — Sankhyā. Ser. A, 1965, vol. 2—4, part 27, p. 325—346.
26. Амосова Н. Н. О предельных теоремах для вероятностей умеренных уклонений. — Вестник ЛГУ, 1972, № 13. Сер. мат., мех., астрон., вып. 3, с. 5—14.
27. Амосова Н. Н. О вероятностях умеренных уклонений. — Записки науч. семинаров ЛОМИ, 1979, т. 85, с. 6—16.
28. Сластников А. Д. Предельные теоремы для вероятностей умеренных уклонений. — Теор. вероятн. и ее примен., 1978, т. 23, № 2, с. 340—357.
29. Paditz L. Abschätzungen der Konvergenzgeschwindigkeit zur Normalverteilung unter Voraussetzung einseitiger Momente. — Math. Nachrichten, 1978, Bd 82, S. 131—156.
30. Wolf W. Asymptotische Entwicklungen für Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1977, Bd 40, S. 239—256.
31. Осинов Л. В. Многомерные предельные теоремы для больших уклонений. — Теор. вероятн. и ее примен., 1975, т. 20, вып. 1, с. 40—57.
32. Вилкаускас Л. Большие уклонения в зонах Линника в многомерном случае на некоторых областях. — Литовский мат. сб., 1965, т. 5, № 1, с. 24—43.
33. Золотарев В. М. Об одной новой точке зрения на предельные теоремы, учитывающие большие уклонения. — Труды VI Всесоюз. совещ. по теор. вероятн. и мат. статистике. Вильнюс, 1962, с. 43—47.
34. Nagaeв S. V. Large deviations for sums of independent random variables. — Proceedings 6 Prague conf. on inform. theory, statist. decision functions, random processes. Prague, 1973, p. 657—674.
35. Pergel J. On a big deviation problem. — Magyar tud. akad. mat. kutato közl., 1963, vol. 8, N 3, p. 303—308.
36. Петров В. В. О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин. — Теор. вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, вып. 2, с. 310—322.
37. Нагаев А. В. Интегральные предельные теоремы с учетом больших уклонений, когда не выполнено условие Крамера. I, II. — Теор. вероятн. и ее примен., 1969, т. 14, вып. 1, с. 51—63; вып. 2, с. 203—216.
38. Нагаев А. В. Предельные теоремы, учитывающие большие уклонения, при нарушении условия Крамера. — Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1969, № 6, с. 17—22.
39. Рудзкис Р., Саулис Л., Статулявичус В. Общая лемма о вероятностях больших уклонений. — Литовский мат. сб., 1978, т. 18, № 2, с. 99—116.
40. Марков А. А. Исследование общего случая испытаний, связанных в цепь. — Записки имп. Акад. наук, 1910. Сер. 8, т. 25. 28 с. (См. также: Марков А. А. Избранные труды. М., 1951, с. 465—503).
41. Bernstein S. Sur le théoreme limite du calcul des probabilités. — Math. Ann., 1922, Bd 85, S. 237—241. (Русск. пер.: Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. Т. IV. М., 1964, с. 66—70).
42. Bernstein S. Sur l'extension du théoreme limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendentes. — Math. Ann., 1926, Bd 97, S. 1—59. (Русск. пер.: Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. Т. IV. М., 1964, с. 121—176).
43. Bernstein S. Sur les sommes de quantités dépendentes. — Изв. АН СССР. Сер. 6, 1926, т. 20, № 15—17, с. 1459—1478. (Русск. пер.: Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. Т. IV. М., 1964, с. 177—191).

44. Bernstein S. Addition a l'article «Sur les sommes de quantités dépendentes». — ДАН СССР. Сер. А, 1928, № 4, с. 55—60. (Русск. пер.: Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. Т. IV. М., 1964, с. 192—196).
45. Сапогов Н. А. О сингулярных цепях Маркова. — ДАН СССР, 1947, т. 58, № 2, с. 193—196.
46. Bernstein S. Détermination d'une limite interieure de la dispersion des sommes de grandeurs liées en chaîne singulière. — Мат. сб., 1936, т. 1, № 1, с. 29—37. (Русск. пер.: Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. Т. IV. М., 1964, с. 322—330).
47. Сапогов Н. А. Предельная теорема Лапласа—Ляпунова для сингулярной цепи Маркова. — ДАН СССР, 1947, т. 58, № 9, с. 1905—1908.
48. Добрушин Р. Л. Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. — ДАН СССР, 1955, т. 102, № 1, с. 5—8.
49. Добрушин Р. Л. Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. I, II. — Теор. вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, вып. 1, с. 72—89; вып. 4, с. 365—425.
50. Лифшиц Б. А. О сходимости моментов в центральной предельной теореме для неоднородных цепей Маркова. — Теор. вероятн. и ее примен., 1975, т. 20, вып. 4, с. 755—771.
51. Лифшиц Б. А. О центральной предельной теореме для сумм случайных величин, связанных в цепь. — Теор. вероятн. и ее примен., 1978, т. 23, вып. 2, с. 295—312.
52. Статулявичус В. А. Предельные теоремы для сумм случайных величин, связанных в цепь Маркова. I—III. — Литовский мат. сб., 1969, т. 9, № 2, с. 345—361; № 3, с. 635—672; 1970, т. 10, № 1, с. 161—169.
53. Статулявичус В. А. Асимптотическое разложение для неоднородных цепей Маркова. — ДАН СССР, 1957, т. 112, № 2, с. 206.
54. Линник Ю. В. Разложения вероятностных законов. Л., 1960. 263 с.
55. Линник Ю. В. Некоторые теоремы о разложении безгранично делимых законов. — ДАН СССР, 1957, т. 116, № 4, с. 549—551.
56. Линник Ю. В. О разложении безгранично делимых законов. — ДАН СССР, 1957, т. 116, № 5, с. 735—737.
57. Линник Ю. В., Островский И. В. Разложения случайных величин и векторов. М., 1972. 479 с.
58. Лившиц Л. З., Островский И. В., Чистяков Г. П. Арифметика вероятностных законов. — В кн.: Итоги науки. Т. 12. Теор. вероятн., мат. статист., теор. киберн. М., 1975, с. 5—42.
59. Ostrovskii I. V. The arithmetic of probability distributions. — J. Multivar. Anal., 1977, vol. 7, N 4, p. 475—490.
60. Островский И. В. О разложении композиции законов Гаусса и Пуассона. — Успехи мат. наук, 1965, т. 20, вып. 4, с. 166—171.
61. Фрынтов А. Е. О факторизации безгранично делимых распределений. — Теор. вероятн. и ее примен., 1975, т. 20, вып. 3, с. 661—664.
62. Фрынтов А. Е., Чистяков Г. П. О безгранично делимых распределениях класса I_0 . — Теор. функций, функц. анализ и их прилож., 1979, т. 32, с. 91—97.
63. Островский И. В. О разложениях решетчатых безгранично делимых законов. — Вестник ЛГУ, 1964, № 19. Сер. мат., мех., астрон., вып. 4, с. 51—60.
64. Фрынтов А. Е., Чистяков Г. П. О принадлежности классу I_0 решетчатых вероятностных распределений. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1977, т. 41, № 2, с. 462—475.
65. Островский И. В. Некоторые теоремы о разложениях вероятностных законов. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1965, т. 79, с. 198—235.
66. Гольдберг А. А., Островский И. В. Применение теоремы У. К. Хеймана к одному вопросу теории разложений вероятностных законов. — Укр. мат. журн., 1967, т. 19, № 3, с. 104—106.
67. Ramachandran B. Advanced theory of characteristic functions. Calcutta, 1967. 208 p.

68. М а м а й Л. В. Разложения континуального типа для характеристических функций. — Вестник ЛГУ, 1965, № 1. Сер. мат., мех., астроном., вып. 1, с. 34—46.
69. Ч и с т я к о в Г. П. Об α -разложениях характеристических функций, являющихся предельными значениями аналитических функций. — Мат. сб., 1978, т. 107, вып. 2, с. 275—288.
70. Л а д о х и н В. И. Теоремы Крамера, Линдберга, Чебышева для комплексных распределений. — ДАН СССР, 1968, т. 181, № 3, с. 542—545.
71. Я к о в л е в а Н. И. Разложение некоторых безгранично делимых функций распределения в композицию функций ограниченной вариации. — Укр. мат. журн., 1978, т. 30, № 2, с. 273—278.
72. G r u n k e m e i e r G. Decomposition of functions of bounded variation. — Ann. Probability, 1975, vol. 3, N 2, p. 329—337.
73. L a h a R. G. On the decomposition of a class of functions of bounded variation. — Canad. J. Math., 1964, vol. 16, N 3, p. 479—483.
74. Ч и с т я к о в Г. П. Разложение нормального закона в композицию функций ограниченной вариации. — Мат. заметки, 1976, т. 19, № 1, с. 133—147.
75. Л и в ш и ц Л. З. Достаточные условия, при которых двумерный безгранично делимый закон имеет только безгранично делимые компоненты. — Теор. функций, функц. анализ и их прилож., 1970, т. 12, с. 36—59.
76. О с т р о в с к и й И. В. Многомерный аналог теоремы Ю. В. Линника о разложениях композиции законов Гаусса и Пуассона. — Теор. вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, вып. 4, с. 742—745.
77. C u r p e n s R. On the decomposition of infinitely divisible characteristic functions of several variables. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1969, Bd 12, S. 59—72.

Юрий Владимирович Линник

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

Теория вероятностей

Утверждено к печати

Ордена Ленина Математическим институтом им. В. А. Стеклова АН СССР

Редактор издательства М. В. Хотимская

Художник Д. С. Данилов. Технический редактор Г. А. Бессонова

Корректоры Е. Ю. Вахтина, Н. И. Журавлева, Л. Я. Комм и Т. Г. Эдельман

ИБ № 8991

Сдано в набор 10.12.80. Подписано к печати 03.04.81. М-18642. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типографская № 1. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Печ. л. 21¹/₂+ +1 вкл. (1¹/₈ п. л.). Усл. печ. л. 21.62. Уч.-изд. л. 21.61. Тираж 2400. Изд. № 7625. Тип. зак. 2037. Цена 2 р. 50 к.

Ленинградское отделение издательства «Наука». 199164, Ленинград, В-164,
Менделеевская лин., 1

Ордена Трудового Красного Знамени Первая типография издательства «Наука»
199034, Ленинград, В-34, 9 линия, 12