

517
8.85

В. И. КРЫЛОВ

ПРИБЛИЖЕННОЕ
ВЫЧИСЛЕНИЕ
ИНТЕГРАЛОВ

ОТЗЫВЫ И РЕЦЕНЗИИ



В. И. КРЫЛОВ

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1959

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
-----------------------	---

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Глава 1. Числа и многочлены Бернулли

§ 1. Числа Бернулли	7
§ 2. Многочлены Бернулли	9
§ 3. Периодические функции, связанные с многочленами Бернулли	17
§ 4. Разложение произвольной функции по многочленам Бернулли	19

Глава 2. Ортогональные многочлены

§ 1. Некоторые общие теоремы об ортогональных многочленах	21
§ 2. Многочлены Якоби и Лежандра	26
§ 3. Многочлены Чебышева	29
§ 4. Многочлены Чебышева — Эрмита	35
§ 5. Многочлены Чебышева — Лягерра	36

Глава 3. Интерполирование функций

§ 1. Конечные разности и разностные отношения	39
§ 2. Интерполирование по значениям функции	43
§ 3. Интерполирование с кратными узлами	47

Глава 4. Линейные нормированные пространства. Линейные операторы

§ 1. Линейные нормированные пространства	52
§ 2. Линейные операторы	56
§ 3. Сходимость последовательности линейных операторов	60

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Глава 5. Квадратурные суммы и задачи с-ними связанные. Остаток приближенной квадратуры

§ 1. Квадратурные суммы	63
§ 2. Замечание о приближенном интегрировании периодических функций	70
§ 3. Об остатке приближенной квадратуры и его представлении	72

Глава 6. Интерполяционные квадратуры

§ 1. Интерполяционные квадратурные формулы и их остаточные члены	76
--	----

§ 2. Формулы Ньютона — Котеса	79
§ 3. Некоторые простейшие формулы Ньютона — Котеса	88

Глава 7. Квадратуры наивысшей алгебраической степени точности

§ 1. Общие теоремы	95
§ 2. Постоянная весовая функция	102
§ 3. Интегралы вида $\int_a^b (b-x)^a (x-a)^b f(x) dx$ и их применение к вычислению кратных интегралов	108
§ 4. Интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) dx$	125
§ 5. Интегралы вида $\int_0^{\infty} x^v e^{-x} f(x) dx$	127

Глава 8. Квадратуры с наименьшей оценкой остатка

§ 1. О задаче минимизации остатка квадратуры	133
§ 2. Минимизация остатка в классах $L_q^{(r)}$	134
§ 3. Минимизация остатка в классах C_r	149
§ 4. Задача минимизации оценки остатка квадратуры с закрепленными узлами	153

Глава 9. Квадратурные формулы, содержащие наперед заданные узлы

§ 1. Некоторые общие теоремы	161
§ 2. Формулы частного вида	167
§ 3. Замечание о вычислении интегралов со знакопеременной весовой функцией	176

Глава 10. Квадратурные формулы с равными коэффициентами

§ 1. Нахождение узлов	181
§ 2. Единственность квадратурной формулы наивысшей алгебраической степени точности с равными коэффициентами	185
§ 3. Интегралы с постоянной весовой функцией	189

Глава 11. Увеличение точности квадратуры

§ 1. О двух направлениях в задаче увеличения точности	199
§ 2. Ослабление особенности интегрируемой функции	202
§ 3. Эйлеровы методы разложения остатка квадратуры	206
§ 4. Увеличение точности квадратуры при наличии короткого главного участка интегрирования в интегральном представлении остатка	228

Глава 12. Сходимость квадратурного процесса

§ 1. О проблеме сходимости квадратурного процесса	240
§ 2. Сходимость интерполяционных квадратур для аналитических функций	241
§ 3. Сходимость общего квадратурного процесса	261

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО
ИНТЕГРАЛА

Глава 13. Введение

§ 1. Предварительные замечания	271
§ 2. Погрешность вычислений	276
§ 3. Сходимость и устойчивость вычислительного процесса	282

Глава 14. Интегрирование функции, заданной таблицей значений

§ 1. Содержание задачи и один из методов ее решения	291
§ 2. Остаток	294

Глава 15. Вычисление неопределенного интеграла с малым числом значений интегрируемой функции

§ 1. Содержание задачи и некоторые общие теоремы о расчетной формуле	296
§ 2. Расчетные формулы частного вида	302

Глава 16. Методы вычисления, использующие несколько предшествующих значений интеграла

§ 1. Содержание задачи	312
§ 2. Условия, которые должны выполняться при достижении наивысшей степени точности	315
§ 3. Существование и число интерполирований наивысшей степени точности	318
§ 4. Остаток интерполирования и минимизация его оценки	319
§ 5. Условия положительности коэффициентов α_j	321
§ 6. Связь с задачей решения дифференциального уравнения при помощи многочлена	323
§ 7. Формулы частного вида	325

ПРЕДИСЛОВИЕ

Автор стремился к тому, чтобы книга могла ввести читателя в круг главных идей и результатов современной теории приближенного интегрирования и, кроме того, была бы полезным пособием для тех, кто имеет дело с вычислениями.

В книге рассматриваются вопросы вычисления только однократных интегралов. Более трудная и значительно менее исследованная задача вычисления многократных интегралов в ней почти совсем не затрагивается. Лишь в одном месте книги говорится о двойном и тройном интегралах в связи с приведением их к простым интегралам.

Но даже для простого интеграла автор отказался от изложения многих интересных тем. Так, например, в стороне остались задачи интегрирования быстро колеблющихся функций, вычисления контурных интегралов от аналитических функций, применение метода случайных испытаний и др. Книга посвящена преимущественно методу механических квадратур, когда интеграл находится как линейная комбинация конечного числа значений интегрируемой функции.

По содержанию своему книга разделяется на три части. В первой из них излагаются понятия и теоремы, встречающиеся в теории квадратур, но выходящие, по крайней мере частично, за рамки программы высших учебных заведений.

Вторая часть посвящена задаче вычисления определенного интеграла. По существу дела, здесь рассмотрены три следующие основные темы: теория построения формул механических квадратур при предположении достаточной гладкости интегрируемой функции, задача увеличения точности квадратуры и проблема сходимости квадратурного процесса.

В третьей части книги исследуется вопрос о вычислении неопределенного интеграла. Здесь автор ограничился преимущественно изучением проблемы построения расчетных формул. Кроме того, указаны признаки устойчивости и сходимости вычислительного процесса.

Мои товарищи по работе М. К. Гавурин и И. П. Мысовских просмотрели большую часть рукописи и я очень благодарен им за ряд замечаний и советов.

АН БССР. Октябрь 1957 г.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В первой части книги содержится изложение следующих частных вопросов математики, необходимых для построения теории отдельных задач приближенного интегрирования функций: числа и многочлены Бернулли, ортогональные многочлены, интерполирование, линейные операторы и проблема сходимости последовательности таких операторов. Результаты, приведенные здесь, можно найти в специальной литературе, но мы считали полезным изложить их в настоящей книге и освободить читателя от многочисленных и часто нелегко проверяемых литературных ссылок.

Все перечисленные вопросы рассмотрены только в той мере, как это нужно для чтения последующих глав.

ГЛАВА 1

ЧИСЛА И МНОГОЧЛЕНЫ БЕРНУЛЛИ

§ 1. Числа Бернулли

Многочлены и числа Бернулли ниже (в конце главы 6 и в § 3 главы 7) потребуются для построения формулы Эйлера — Маклорена и других сходных с ней формул, служащих для увеличения точности приближенных квадратур.

Числа Бернулли могут быть определены при помощи следующей производящей функции. Пусть t — комплексная переменная. Рассмотрим функцию

$$g(t) = \frac{t}{e^t - 1}. \quad (1.1.1)$$

Точки $t = 2k\pi i$, где k — любое целое число, являются нулями знаменателя. Все они простые, ибо производная знаменателя равна e^t и отлична от нуля при всяких конечных t . Точка $t = 0$ не является особой для $g(t)$, так как при $t = 0$ обращается в нуль и числитель отношения. В круге $|t| < 2\pi$ функция $g(t)$ регулярна и может быть там разложена в степенной ряд по степеням t . Запишем разложение в форме

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n, \quad |t| < 2\pi. \quad (1.1.2)$$

Числа B_n , определенные этим равенством, носят название *чисел Бернулли*.

Если в (1.1.2) обе части умножить на $e^t - 1 = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{t^v}{v!}$, то получится следующее равенство

$$\left(\frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n = t,$$

верное при всяких t из круга $|t| < 2\pi$. Оно говорит о том, что после перемножения степенных рядов, стоящих в левой части, сохраняется только первая степень t с коэффициентом, равным единице, коэффициенты же при степенях t выше первой все должны обратиться в нуль: $B_0 = 1$ и при $n = 2, 3 \dots$ должно быть

$$\frac{B_0}{n!} + \frac{B_1}{(n-1)!1!} + \frac{B_2}{(n-2)!2!} + \dots + \frac{B_{n-1}}{1!(n-1)!} = 0.$$

Последнее равенство позволяет последовательно вычислить все числа Бернулли. Ему можно придать другую форму, более удобную для записи. Умножив его на $n!$ и прибавив к обеим частям B_n , получим

$$\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} B_k = B_n.$$

Аналогия левой части с известным выражением для степени двучлена позволяет последнее равенство записать условно в виде

$$(B+1)^n = B_n, \quad (1.1.3)$$

если считать, что, после возведения двучлена $B+1$ в степень, показатели степени у B переходят в индексы чисел Бернулли.

Легко можно проверить, что все числа Бернулли с нечетными индексами, большими единицы, равны нулю:

$$B_{2k+1} = 0, \quad k > 0. \quad (1.1.4)$$

Для этого в (1.1.2) заменим t на $-t$:

$$\frac{-t}{e^{-t}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n}{n!} t^n.$$

С другой стороны

$$\frac{-t}{e^{-t}-1} = \frac{e^t t}{e^t - 1} = t + \frac{t}{e^t - 1} = t + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n,$$

и поэтому должно быть

$$t + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n}{n!} t^n.$$

Сравнение коэффициентов при t^n для $n > 1$ дает

$$B_n = (-1)^n B_n.$$

При n равном нечетному числу $2k+1$ ($k > 0$), отсюда следует.

$$B_{2k+1} = -B_{2k+1},$$

что равносильно (1.1.4).

Значения нескольких первых чисел Бернулли таковы:

$$\begin{aligned} B_0 &= 1, & B_1 &= -\frac{1}{2}, & B_2 &= \frac{1}{6}, & B_4 &= -\frac{1}{30}, & B_6 &= \frac{1}{42}, \\ B_8 &= -\frac{1}{30}, & B_{10} &= \frac{5}{66}, & B_{12} &= -\frac{691}{2730}, & B_{14} &= \frac{7}{6}, \\ B_{16} &= -\frac{3617}{510}, & B_{18} &= \frac{43867}{798}, & B_{20} &= -\frac{174611}{330}, \\ B_{22} &= \frac{854513}{138}, & B_{24} &= -\frac{236364091}{2730}, \\ B_{26} &= \frac{8553103}{6}, & B_{28} &= -\frac{23749461029}{870}, \\ B_{30} &= \frac{8615841276005}{14322}. \end{aligned}$$

Числа Бернулли четных номеров связаны с суммами четных отрицательных степеней натуральных чисел следующими замечательными равенствами:

$$B_{2k} = \frac{(-1)^{k-1} (2k)!}{2^{2k-1} \pi^{2k}} (1 + 2^{-2k} + 3^{-2k} + 4^{-2k} + \dots). \quad (1.1.5)$$

Из них видно, что при неограниченном росте k бернуллиевы числа B_{2k} будут весьма быстро возрастать и при больших k будет иметь малую относительную погрешность следующее приближенное равенство

$$B_{2k} \approx 2(-1)^{k-1} (2k)! (2\pi)^{-2k}.$$

Равенства (1.1.5) сразу следуют из полученных ниже разложений (1.3.17) многочленов Бернулли в тригонометрические ряды на отрезке $[0, 1]$.

§ 2. Многочлены Бернулли

Многочлены Бернулли можно определить различными способами. Для наших целей достаточно удобным является определение их при помощи производящей функции. Введем функцию

$$g(x, t) = e^{xt} \frac{t}{e^t - 1}. \quad (1.2.1)$$

Она отличается от (1.1.1) множителем e^{xt} , не обращающимся в нуль, и имеет те же особые точки, что и $g(t)$. В частности, она регулярна

в круге $|t| < 2\pi$ и может быть в нем разложена в ряд по степеням t :

$$g(x, t) = e^{xt} \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n. \quad (1.2.2)$$

Несколькими строками ниже мы убедимся в том, что функция $B_n(x)$ есть многочлен степени n . Он называется *многочленом Бернулли*.

Если в $g(x, t)$ множитель e^{xt} заменить рядом $\sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^v t^v}{v!}$ и $\frac{t}{e^t - 1}$ разложением (1.1.2), то получим тождество

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^v t^v}{v!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n, \quad |t| < 2\pi.$$

Сравнение коэффициентов при t^n приводит к равенству

$$\frac{B_n(x)}{n!} = \frac{x^n B_0}{n!} + \frac{x^{n-1} B_1}{(n-1)! 1!} + \dots + \frac{B_n}{n!}.$$

После умножения на $n!$ отсюда получается следующее выражение для $B_n(x)$

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} B_{n-k} x^k, \quad (1.2.3)$$

показывающее, что $B_n(x)$ действительно есть многочлен, старший член которого равен x^n . Выражение (1.2.3) может быть записано в весьма простой условной форме

$$B_n(x) = (x + B)^n, \quad (1.2.4)$$

если согласиться считать, что, после возведения двучлена $x + B$ в степень, показатели степени у B должны перейти в индексы чисел Бернулли.

Нам потребуется знакомство с некоторыми свойствами многочленов Бернулли.

1. Начальные значения многочленов Бернулли при $x=0$ равны соответствующим числам Бернулли:

$$B_n(0) = B_n, \quad (1.2.5)$$

что видно из (1.2.3).

2. Дифференцирование и интегрирование $B_n(x)$. Вычисляя производную по x от (1.2.2), найдем

$$t e^{xt} \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B'_n(x)}{n!} t^n.$$

Левая часть отличается от g только множителем t и поэтому должно быть

$$te^{xt} \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^{n+1}.$$

Ввиду единственности степенного разложения, из двух последних равенств вытекает

$$\frac{B'_n(x)}{n!} = \frac{B_{n-1}(x)}{(n-1)!}$$

или

$$B'_n(x) = nB_{n-1}(x). \quad (1.2.6)$$

Отсюда и из (1.2.5) сразу же следует правило интегрирования бернуллиевых многочленов

$$B_n(x) = B_n + n \int_0^x B_{n-1}(t) dt. \quad (1.2.7)$$

3. Теорема об умножении аргумента. Пусть m — любое целое положительное число

$$e^{mxt} \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(mx)}{n!} t^n.$$

Весьма простыми преобразованиями может быть получено другое разложение

$$\begin{aligned} e^{mxt} \frac{t}{e^t - 1} &= \frac{1}{m} e^{mxt} \frac{mt(1 + e^t + \dots + e^{(m-1)t})}{e^{mt} - 1} = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{m-1} \frac{e^{(x + \frac{s}{m})mt}}{e^{mt} - 1} = \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x + \frac{s}{m}) m^n}{n!} t^n. \end{aligned}$$

Из двух построенных разложений и следует теорема об умножении аргумента:

$$B_n(mx) = m^{n-1} \sum_{s=0}^{m-1} B_n\left(x + \frac{s}{m}\right). \quad (1.2.8)$$

4. Теоремы о представлении многочленов $B_n(x)$. Чтобы изучить поведение $B_n(x)$, удобно вместо x ввести новую переменную $z = x(1 - x)$. Покажем, что верны следующие утверждения о представлении бернуллиевых многочленов в переменной z .

Всякий многочлен $B_n(x)$ четного номера $n = 2k$ может быть разложен по степеням z :

$$(-1)^k [B_{2k}(x) - B_{2k}] = \sum_{v=0}^{k-2} F_{k,v} z^{k-v}, \quad (1.2.9)$$

причем $F_{k,0} = 1$, и $F_{k,\nu} > 0$ ($\nu = 1, 2, \dots, k-2$). Всякий бернуллиев многочлен нечетного номера $n = 2k - 1$ может быть представлен в форме

$$(-1)^k B_{2k-1}(x) = (1-2x) \sum_{\nu=0}^{k-2} H_{k,\nu} z^{k-1-\nu}, \quad (1.2.10)$$

где все коэффициенты $H_{k,\nu}$ ($\nu = 0, 1 \dots k-2$) положительны.

Проверим сначала утверждение о многочлене четной степени $B_{2k}(x)$. Для упрощения записи введем вспомогательную переменную ξ , положив $x = \frac{1}{2} + \xi$. Переменные ξ и z связаны между собой соотношением

$$z = x(1-x) = \frac{1}{4} - \xi^2.$$

Чтобы убедиться в том, что $B_{2k}(x)$ есть целый многочлен от переменной z , достаточно установить, что в разложении $B_{2k}(x)$ по степеням ξ будут содержаться только четные степени ξ .

Производящая функция (1.2.1) относительно переменной ξ будет иметь следующее выражение

$$g = e^{\left(\frac{1}{2} + \xi\right)t} \frac{t}{e^t - 1} = e^{\xi t} \frac{e^{\frac{1}{2}t}}{e^t - 1} = e^{\xi t} \frac{t}{e^{\frac{1}{2}t} - e^{-\frac{1}{2}t}} = e^{\xi t} \frac{\frac{1}{2}t}{\operatorname{sh} \frac{1}{2}t}.$$

$\frac{B_{2k}(x)}{(2k)!}$ есть коэффициент при t^{2k} в разложении g по степеням t .

Множитель $\frac{\frac{1}{2}t}{\operatorname{sh} \frac{1}{2}t}$ — четная функция t и в ряде для него по степеням t

будут содержаться только четные степени t . Чтобы получить, после

умножения его на $e^{\xi t} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\xi^\nu t^\nu}{\nu!}$, член с t^{2k} , мы должны из ряда для $e^{\xi t}$

брать члены только с четными степенями t . Но все они содержат также лишь четные степени ξ , и $B_{2k}(x)$ будет содержать только четные степени ξ .

Так как при $x = 0$ переменная z также обращается в нуль, то разность $B_{2k}(x) - B_{2k}$ будет многочленом от z без свободного члена и должно иметь место равенство

$$(-1)^k [B_{2k}(x) - B_{2k}] = \sum_{\nu=0}^{k-1} F_{k,\nu} z^{k-\nu}.$$

Нам осталось только проверить утверждения об $F_{k,\nu}$. Коэффициент в $B_{2k}(x)$ при старшей степени x^{2k} равен единице и поэтому должно быть $F_{k,0} = 1$. Кроме того, коэффициент при x в $B_{2k}(x)$ есть $2kB_{2k-1} = 0$, и так как первая степень x в правой части может

содержаться только в члене, отвечающем $v = k - 1$, то $F_{k, k-1} = 0$. Для нахождения остальных $F_{k, v}$ может быть построено рекуррентное соотношение. Вычислим от обеих частей (1.2.9) вторую производную по x . Так как

$$B_{2k}''(x) = 2k(2k-1)B_{2k-2}(x)$$

и так как операторы вычисления производных по x и по z связаны между собой следующими легко проверяемыми равенствами

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} &= \frac{dz}{dx} \frac{d}{dz} = (1-2x) \frac{d}{dz}, \\ \frac{d^2}{dx^2} &= (1-2x)^2 \frac{d^2}{dz^2} - 2 \frac{d}{dz} = (1-4z) \frac{d^2}{dz^2} - 2 \frac{d}{dz},\end{aligned}$$

то после вычислений получим:

$$\begin{aligned}(-1)^k 2k(2k-1)B_{2k-2}(x) &= \sum_{v=1}^{k-1} F_{k, v-1} (k+1-v)(k-v) z^{k-1-v} - \\ &- \sum_{v=0}^{k-2} F_{k, v} (2k-2v)(2k-2v-1) z^{k-1-v}.\end{aligned}$$

Сравнение его с разложением вида (1.2.9) для $B_{2k-2}(x)$:

$$(-1)^{k-1} [B_{2k-2}(x) - B_{2k-2}] = \sum_{v=0}^{k-2} F_{k-1, v} z^{k-1-v}$$

позволяет сказать, что при $v = 0, 1, \dots, k-2$ должно выполняться равенство:

$$\begin{aligned}(2k-2v)(2k-2v-1)F_{k, v} &= \\ &= 2k(2k-1)F_{k-1, v} + (k+1-v)(k-v)F_{k, v-1}.\end{aligned}$$

Отсюда, зная, что $F_{k, 0} = 1$ и $F_{k, k-1} = 0$ ($k = 1, 2, \dots$), мы сможем найти последовательно $F_{k, v}$ ($k = 3, 4, \dots$; $v = 1, 2, \dots, k-2$) и все они окажутся положительными.

Для доказательства верности утверждения о представлении $B_{2k-1}(x)$ достаточно вычислить производную по x от обеих частей (1.2.9):

$$(-1)^k 2kB_{2k-1}(x) = \sum_{v=0}^{k-2} F_{k, v} (1-2x)(k-v) z^{k-1-v}.$$

Отсюда видно, что равенство (1.2.10) является верным и

$$H_{k, v} = \frac{(k-v)F_{k, v}}{2k} > 0.$$

5. Симметрия распределения значений $B_n(x)$. Рассмотрим точку $x = \frac{1}{2}$ на оси x . Точки x и $1-x$ расположены симметрично относительно нее. Переменная $z = x(1-x)$ не изменит своего значения при замене x на $1-x$. Отсюда и из (1.2.9) вытекает,

что $B_{2k}(x)$ в точках x и $1-x$ принимает одинаковые значения

$$B_{2k}(1-x) = B_{2k}(x). \quad (1.2.11)$$

График многочлена $B_{2k}(x)$ будет линией, симметричной относительно прямой $x = \frac{1}{2}$.

В (1.2.10) множитель $\sum_{v=0}^{k-2} H_{k,v} z^{k-1-v}$ принимает одинаковые значения в точках x и $1-x$. Множитель $(1-2x)$ при замене x на $1-x$ сохраняет абсолютную величину, но изменяет знак. Поэтому

$$B_{2k-1}(1-x) = -B_{2k-1}(x). \quad (1.2.12)$$

График многочлена $B_{2k-1}(x)$ имеет центр симметрии в точке $x = \frac{1}{2}$.

При $x = 0$ из (1.2.11) получается

$$B_{2k}(1) = B_{2k}$$

и из (1.2.12) при $k \geq 2$ следует

$$B_{2k-1}(1) = -B_{2k-1}.$$

Каждый бернуллиев многочлен, кроме $B_1(x)$, на концах отрезка $[0, 1]$ принимает одинаковые значения

$$B_n(1) = B_n(0) = B_n. \quad (1.2.13)$$

6. Характер изменения многочленов Бернулли на отрезке $[0, 1]$. Нам потребуются значения $B_n\left(\frac{1}{2}\right)$, которые легко могут быть вычислены, например, при помощи теоремы об умножении аргумента. Если в (1.2.8) положить $m = 2$ и $x = \frac{1}{2}$, то получим

$$B_n(1) = 2^{n-1} \left[B_n\left(\frac{1}{2}\right) + B_n(1) \right].$$

Но так как

$$B_n(1) = B_n \quad (n > 1),$$

то при всяких n

$$B_n\left(\frac{1}{2}\right) = -(1 - 2^{-n+1}) B_n. \quad (1.2.14)$$

Для дальнейшего потребуется рассмотреть многочлены

$$y_n(x) = B_n(x) - B_n,$$

несущественно отличающиеся от $B_n(x)$ и более удобные для записи. Возьмем сначала многочлен четного номера $n = 2k$. Ввиду (1.2.9), имеем

$$(-1)^k y_{2k}(x) = \sum_{v=0}^{k-2} F_{k,v} z^{k-v}. \quad (1.2.15)$$

Точки $x = 0$ и $x = 1$ являются нулями $y_k(x)$:

$$y_{2k}(0) = B_{2k}(0) - B_{2k} = B_{2k} - B_{2k} = 0,$$

$$y_{2k}(1) = B_{2k}(1) - B_{2k} = B_{2k} - B_{2k} = 0.$$

Легко проверить, что при $k \geq 2$, оба нуля имеют вторую кратность, так как, например, для $x = 0$

$$y'_{2k}(0) = 2kB_{2k-1}(0) = 0,$$

$$y''_{2k}(0) = 2k(2k-1)B_{2k-2}(0) = 2k(2k-1)B_{2k-2} \neq 0.$$

Ввиду (1.2.11), аналогичное имеет место для $x = 1$. При $0 < x < 1$ переменная z будет лежать в границах $0 < z \leq \frac{1}{4}$ и, так как $F_{k,v} > 0$, то

$$(-1)^k y_{2k}(x) > 0, \quad 0 < x < 1.$$

Внутри отрезка $0 < x < 1$ многочлен $y_{2k}(x)$ обращается в нуль и имеет знак такой же, как $(-1)^k$.

Когда x изменяется от нуля до $\frac{1}{2}$, функция $z = x(1-x)$ будет возрастать от нуля до $\frac{1}{4}$ и при изменении x от $\frac{1}{2}$ до 1, функция z будет убывать от $\frac{1}{4}$ до нуля.

Как видно из (1.2.15) при изменении x от 0 до $\frac{1}{2}$ многочлен $(-1)^k y_{2k}(x)$ будет возрастать от нуля до $(-1)^k y_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = \left| B_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) - B_{2k} \right| = (2 - 2^{-2k+1}) |B_{2k}|$. Когда же x изменяется от $\frac{1}{2}$ до 1, $(-1)^k y_{2k}(x)$ будет убывать от указанного только что значения до нуля. Каждое значение $\alpha [0 < \alpha < (2 - 2^{-2k+1}) |B_{2k}|]$ многочлен $y_{2k}(x)$ на отрезке $[0, 1]$ будет принимать два раза, в точках, расположенных симметрично относительно $x = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим теперь многочлен $y_n(x)$ нечетного номера $n = 2k - 1$. Будем считать $k \geq 2$, тогда

$$\left. \begin{aligned} & y_{2k-1}(x) = B_{2k-1}(x) \\ & (-1)^k y_{2k-1}(x) = (1-x) \sum_{v=0}^{k-2} H_{k,v} z^{k-1-v}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.16)$$

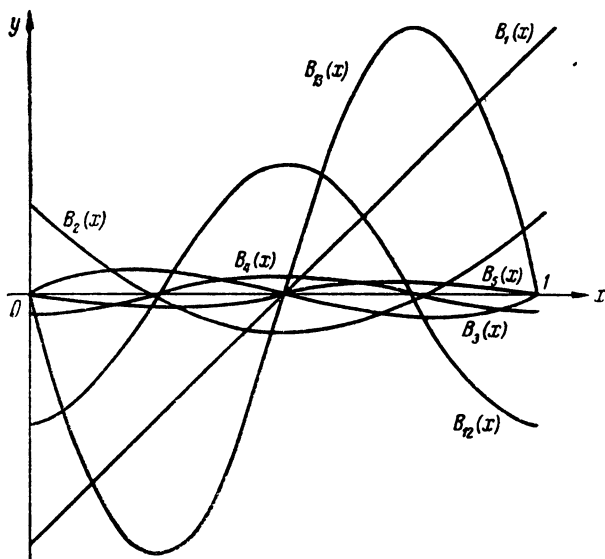
Точки $x = 0$ и $x = 1$ будут нулями $y_{2k-1}(x)$. Можно проверить, что обе эти точки есть однократные нули. Действительно,

$$y'_{2k-1}(0) = (2k-1)B_{2k-2}(0) \neq 0 \quad \text{и} \quad y'_{2k-1}(1) = (2k-1)B_{2k-2}(1) \neq 0.$$

Кроме того, из (1.2.16) следует, ввиду $H_{k,v} > 0$, что $x = \frac{1}{2}$ есть простой нуль $y_{2k-1}(x)$ и никаких других нулей при $0 < x < 1$ этот многочлен не имеет. Знак $y_{2k-1}(x)$ определяется неравенствами

$$(-1)^k y_{2k-1}(x) > 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < \frac{1}{2},$$

$$(-1)^k y_{2k-1}(x) < 0 \quad \text{при} \quad \frac{1}{2} < x < 1.$$



Черт. 1.

Ниже приведена таблица нескольких первых многочленов Бернулли

$$B_0(x) = 1,$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2},$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x,$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30},$$

$$B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x,$$

$$B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42},$$

$$B_7(x) = x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{6}x,$$

$$B_8(x) = x^8 - 4x^7 + \frac{14}{3}x^6 - \frac{7}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{30},$$

$$B_9(x) = x^9 - \frac{9}{2}x^8 + 6x^7 - \frac{21}{5}x^5 + 2x^3 - \frac{3}{10}x,$$

$$B_{10}(x) = x^{10} - 5x^9 + \frac{15}{2}x^8 - 7x^6 + 5x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{66}.$$

Чертеж 1 позволяет составить представление о поведении на отрезке $[0, 1]$ многочленов $B_n(x)$.

§ 3. Периодические функции, связанные с многочленами Бернулли

При исследовании некоторых вопросов, наряду с многочленами Бернулли, вводят 1-периодические функции $B_n^*(x)$, определенные равенствами

$$B_n^*(x) = B_n(x) \quad 0 \leq x < 1,$$

$$B_n^*(x+1) = B_n^*(x);$$

$B_0^*(x)$ есть постоянная, равная 1, $B_1^*(x)$ — разрывная функция и имеет скачок -1 в целых точках, $B_n^*(x)$ при $n > 1$ — непрерывные функции.

Построим тригонометрические ряды Фурье для $B_n^*(x)$. С этой целью построим ряд Фурье для производящей функции

$$g(x, t) = e^{xt} \frac{t}{e^t - 1}$$

при $0 \leq x < 1$. Воспользуемся записью ряда с помощью показательной функции:

$$g(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{i2\pi mx};$$

$$C_m = \int_0^1 g e^{-i2\pi mx} dx =$$

$$= \frac{t}{e^t - 1} \int_0^1 e^{xt} e^{-i2\pi mx} dx = \frac{t}{e^t - 1} \left[\frac{e^{x(t - i2\pi m)}}{t - i2\pi m} \right]_0^1 = \frac{t}{t - i2\pi m}.$$

Выделяя слагаемое $C_0 = 1$ и объединяя члены ряда, отвечающие значениям индекса m и $-m$, получим

$$g(x, t) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{t}{t - i2\pi m} e^{i2\pi mx} + \frac{t}{t + i2\pi m} e^{-i2\pi mx} \right].$$

Можно показать, что для любых значений x на отрезке $0 \leq x \leq$ ряд, стоящий в правой части равенства, будет сходиться при всяких t , отличных от $i2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \dots$). При этом, если взять любую ограниченную часть σ плоскости t и исключить из ряда несколько первых членов, имеющих полюсы в этой части плоскости то оставшийся после исключения ряд будет сходиться равномерно относительно t в σ .

Опираясь на это, легко можно оправдать возможность изменения порядка суммирования, которое, по ходу вычислений, сделано несколькими строками ниже при построении степенного ряда для g .

Если считать $|t| < 2\pi$ и разложить правую часть по степеням t то коэффициентом при t^n будет тригонометрический ряд для $\frac{B_n(x)}{n!}$. Он и будет давать представление $\frac{B_n^*(x)}{n!}$ при всех x

$$\begin{aligned} \frac{t}{t-i2\pi m} &= -\frac{t}{i2\pi m} \frac{1}{1-\frac{t}{i2\pi m}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{t}{i2\pi m}\right)^n, \\ \frac{t}{t+i2\pi m} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{t}{i2\pi m}\right)^n, \\ g(x, t) &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{(i2\pi m)^n} t^n e^{-i2\pi m x} - \frac{1}{(i2\pi m)^n} t^n e^{i2\pi m x} \right] = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(i2\pi)^n} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{m^n} e^{-i2\pi m x} - \frac{1}{m^n} e^{i2\pi m x} \right], \\ n > 1, \quad B_n^*(x) &= \frac{n!}{(2\pi i)^n} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{m^n} e^{-i2\pi m x} - \frac{1}{m^n} e^{i2\pi m x} \right]. \end{aligned}$$

Для четных и нечетных индексов вычисления дают следующие результаты

$$B_{2k}^*(x) = \frac{(-1)^{k-1} (2k)!}{2^{2k-1} \pi^{2k}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi m x}{m^{2k}}, \quad (1.3.1)$$

$$B_{2k+1}^*(x) = \frac{(-1)^{k-1} (2k+1)!}{2^{2k} \pi^{2k+1}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi m x}{m^{2k+1}}. \quad (1.3.2)$$

При $x=0$ отсюда получаются указанные выше ряды (1.1.5) для бернуллиевых чисел.

§ 4. Разложение произвольной функции по многочленам Бернулли

Теорема 1. Если f ν -кратно непрерывно дифференцируема на $[0, 1]$, то при любом $x \in [0, 1]$ имеет место равенство

$$f(x) = \int_0^1 f(t) dt + \sum_{k=1}^{\nu-1} \frac{B_k(x)}{k!} [f^{(k-1)}(1) - f^{(k-1)}(0)] - \\ - \frac{1}{\nu!} \int_0^1 f^{(\nu)}(t) [B_\nu^*(x-t) - B_\nu^*(x)] dt. \quad (1.4.1)$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\rho_\nu(x) = \rho_\nu = \frac{1}{\nu!} \int_0^1 f^{(\nu)}(t) B_\nu^*(x-t) dt.$$

Считая $\nu > 1$, выполним интегрирование по частям. Так как

$$\frac{d}{dt} B_\nu^*(x-t) = -\nu B_{\nu-1}^*(x-t),$$

$$B_\nu^*(x-1) = B_\nu^*(x) = B(x),$$

то

$$\rho_\nu = \frac{B_\nu^*(x)}{\nu!} [f^{(\nu-1)}(1) - f^{(\nu-1)}(0)] + \\ + \frac{1}{(\nu-1)!} \int_0^1 f^{(\nu-1)}(t) B_{\nu-1}^*(x-t) dt = \\ = \frac{B_\nu(x)}{\nu!} [f^{(\nu-1)}(1) - f^{(\nu-1)}(0)] + \rho_{\nu-1}.$$

Выполним это преобразование $\nu-1$ раз:

$$\rho_\nu = \sum_{k=2}^{\nu} \frac{B_k(x)}{k!} [f^{(k-1)}(1) - f^{(k-1)}(0)] + \rho_1.$$

Функция $B_1^*(x)$ имеет в целых точках скачок -1 , в остальных же точках имеет производную, равную $+1$

$$B_1^*(+0) - B_1^*(-0) = -1, \quad \frac{d}{dt} B_1^*(x-t) = -1.$$

Для вычисления ρ_1 положим сначала $0 < x < 1$

$$\begin{aligned}\rho_1(x) &= \int_0^x f'(t) B_1^*(x-t) dt + \int_x^1 f'(t) B_1^*(x-t) dt = \\ &= B_1^*(+0) f(x) - B_1^*(x) f(0) + \int_0^x f(t) dt + \\ &+ B_1^*(x-1) f(1) - f(x) B_1^*(-0) + \int_x^1 f(t) dt = \\ &= [B_1^*(+0) - B_1^*(-0)] f(x) + B_1(x) [f(1) - f(0)] + \int_0^1 f(t) dt.\end{aligned}$$

Для ρ_v ($v = 1, 2, \dots$) окончательно получаем

$$\begin{aligned}\rho_v &= \frac{1}{v!} \int_0^1 f^{(v)}(t) B_v^*(x-t) dt = \\ &= \sum_{k=1}^v \frac{B_k(x)}{k!} [f^{(k-1)}(1) - f^{(k-1)}(0)] - f(x) + \int_0^1 f(t) dt.\end{aligned}$$

Этот результат только формой записи отличается от (1.4.1). Доказательство было проведено для открытого отрезка $0 < x < 1$, но, по непрерывности, равенство (1.4.1) верно и для замкнутого отрезка $0 \leq x \leq 1$.

Если f задана на произвольном конечном отрезке $[a, b]$ и v -кратно непрерывно дифференцируема там, то ее разложение на $[a, b]$ по многочленам Бернулли получается из (1.4.1) при помощи линейного преобразования аргумента

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{h} \int_a^b f(t) dt + \sum_{k=1}^{v-1} \frac{h^{k-1} B_k\left(\frac{x-a}{h}\right)}{k!} [f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)] - \\ &- \frac{h^{v-1}}{v!} \int_a^b f^{(v)}(t) \left[B_v^*\left(\frac{x-t}{h}\right) - B_v^*\left(\frac{x-a}{h}\right) \right] dt, \quad h = b - a \quad (1.4.2)\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, гл. IV, Гостехиздат, 1952.

Стефенсен И. Ф., Теория интерполяции, гл. XII, Гостехиздат, 1935.

Харди Г., Расходящиеся ряды, гл. XIII, ИЛ, 1951.

ГЛАВА 2

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

§ 1. Некоторые общие теоремы об ортогональных многочленах

В книге будет уделено много места изучению интегралов вида

$$\int_a^b p(x) f(x) dx, \quad (2.1.1)$$

где $p(x)$ — определенная функция и f — произвольная функция некоторого широкого класса. Теория приближенного вычисления таких интегралов тесно связана с теорией ортогональных многочленов.

Функция $p(x)$ называется *дифференциальной весовой функцией* или, коротко, *весом*. Мы остановимся почти исключительно на случае неотрицательного веса, отступая от этого в редких случаях, которые каждый раз будут оговариваться.

Теория ортогональных многочленов для неотрицательного веса развита с большою степенью совершенства. Мы почерпнем из нее лишь небольшой запас сведений, необходимый для построения квадратурных формул некоторого частного вида.

Пусть $[a, b]$ — любой конечный или бесконечный отрезок. Для наших ближайших целей достаточно считать, что вес $p(x)$ подчиняется следующим двум ограничениям *):

1) $p(x)$ — неотрицательная, измеримая на $[a, b]$ и неэквивалентная нулю функция,

2) произведение $p(x)x^m$ при любом целом неотрицательном значении m есть суммируемая функция на $[a, b]$.

Функции f и g называются *ортогональными* на отрезке $[a, b]$ по весу $p(x)$, если произведение pfg суммируемо и

$$\int_a^b p(x) f(x) g(x) dx = 0. \quad (2.1.2)$$

*) Читатели, не знакомые с интегралом Лебега, могут считать вес неотрицательной функцией, могущей обращаться в нуль лишь в конечном числе точек и такой, что интеграл $\int_a^b p(x) |x|^m dx$ имеет конечное значение при $m = 0, 1, 2, \dots$

Доказательство. Рассмотрим те корни $P_n(x)$, которые имеют нечетную кратность и лежат внутри $[a, b]$. Пусть это будут

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m.$$

Достаточно показать, что число m таких корней не меньше n .

Допустим противоположное: $m < n$ и покажем, что это не совместимо с предположением об ортогональности. Составим многочлен степени m :

$$\rho(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_m).$$

Он имеет те же точки перемены знака внутри $[a, b]$, что и $P_n(x)$. Произведение $P_n(x)\rho(x)$ не изменяет знак на $[a, b]$ и поэтому интеграл $\int_a^b p(x)P_n(x)\rho(x)dx$ отличен от нуля. Так как степень $\rho(x)$ меньше n , это противоречит условию ортогональности $P_n(x)$ ко всякому многочлену меньшей степени.

Систему многочленов

$$P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x) \dots \quad (2.1.8)$$

называют *ортogonalной* и *нормированной*, коротко, *ортонормальной*, если выполняются требования:

1) $P_n(x)$ есть многочлен степени n ,

$$2) \int_a^b p(x)P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ 1 & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Условимся в дальнейшем многочлены ортонормальной системы обозначать так

$$P_n(x) = A_n x^n + B_n x^{n-1} + \dots \quad (2.1.9)$$

Покажем сейчас, что между тремя многочленами трех смежных номеров ортонормальной системы существует рекуррентное соотношение:

$$xP_n(x) = \frac{A_n}{A_{n+1}}P_{n+1}(x) + \left(\frac{B_n}{A_n} - \frac{B_{n+1}}{A_{n+1}}\right)P_n(x) + \frac{A_{n-1}}{A_n}P_{n-1}(x). \quad (2.1.10)$$

Действительно, произведение $xP_n(x)$ есть многочлен степени $n+1$ и поэтому может быть представлено в виде

$$x \cdot P_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{n,k} P_k(x).$$

Коэффициенты $c_{n,k}$ будут коэффициентами Фурье:

$$c_{n,k} = \int_a^b p(x) x \cdot P_n(x) P_k(x) dx.$$

Если $k < n-1$, то $xP_k(x)$ будет многочленом степени $k+1 < n$ и $c_{n,k} = 0$, так как $P_n(x)$ ортогонален ко всякому многочлену степени меньшей n

$$xP_n(x) = c_{n,n+1}P_{n+1}(x) + c_{n,n}P_n(x) + c_{n,n-1}P_{n-1}(x).$$

Подставим сюда вместо многочленов $P_s(x)$ ($s = n-1, n, n+1$) их разложения (2.1.9). Сравнение коэффициентов при старших степенях сразу же дает $c_{n,n+1} = \frac{A_n}{A_{n+1}}$. Кроме того, так как при любых n и k $c_{n,k} = c_{k,n}$, то $c_{n,n-1} = \frac{A_{n-1}}{A_n}$.

Значение $c_{n,n}$ мы получим, если сравним коэффициенты при x^n в предыдущем соотношении:

$$c_{n,n} = \frac{B_n}{A_n} - \frac{B_{n+1}}{A_{n+1}}.$$

Формулу (2.1.10) мы доказали для $n = 1, 2, \dots$, но она остается верной и для $n = 0$, если считать, что $A_{-1} = 0$ и $P_{-1}(x) \equiv 0$. Для вычисления коэффициентов квадратурных формул полезным является тождество Кристоффеля — Дарбу, которое мы сейчас получим. Умножим рекуррентное равенство (2.1.10) на $P_n(t)$

$$\begin{aligned} xP_n(x)P_n(t) &= \frac{A_n}{A_{n+1}}P_{n+1}(x)P_n(t) + \left(\frac{B_n}{A_n} - \frac{B_{n+1}}{A_{n+1}}\right)P_n(x)P_n(t) + \\ &+ \frac{A_{n-1}}{A_n}P_{n-1}(x)P_n(t). \end{aligned}$$

Возьмем сходное равенство, поменяв местами x и t и вычтем его почленно отсюда. Средние члены правых частей при этом сократятся

$$\begin{aligned} (x-t)P_n(x)P_n(t) &= \frac{A_n}{A_{n+1}}[P_{n+1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n+1}(t)] - \\ &- \frac{A_{n-1}}{A_n}[P_n(x)P_{n-1}(t) - P_{n-1}(x)P_n(t)]. \end{aligned}$$

Запишем такие равенства, заменяя n последовательно на $n-1, n-2, \dots, 0$. Складывая их все почленно, мы получим тождество Кристоффеля — Дарбу:

$$(x-t) \sum_{k=0}^n P_k(x)P_k(t) = \frac{A_n}{A_{n+1}}[P_{n+1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n+1}(t)]. \quad (2.1.11)$$

§ 2. Многочлены Якоби и Лежандра

Многочлены Якоби образуют ортогональную систему на отрезке $[-1, +1]$ по весу $p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$. Они зависят от двух параметров, которые мы обозначили α, β и при любых значениях этих параметров могут быть определены равенством:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}], \quad (2.2.1)$$

которое часто называют *формулой Родрига*. Обычно берут те ветви многозначных функций, входящих в эту формулу, для которых

$$\arg(1-x) = \arg(1+x) = 0 \quad \text{при} \quad -1 < x < +1.$$

В том, что (2.2.1) есть многочлен, степень которого не больше n :

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots,$$

можно убедиться, если производную $\frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}]$ вычислить по правилу Лейбница и внести в (2.2.1)

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} (\alpha+n) \dots$$

$$\dots (\alpha+n-k+1) (-1)^k (1-x)^{n-k} (\beta+n) \dots (\beta+k+1) (1+x)^k.$$

Старший член $a_n x^n$ можно найти, если в множителях $(1-x)^{n-k}$ и $(1+x)^k$ взять старшие члены, соответственно $(-1)^{n-k} x^{n-k}$ и x^k .

$$a_n x^n = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} (\alpha+n) \dots$$

$$\dots (\alpha+n-k+1) x^{n-k} (\beta+n) \dots (\beta+k+1) x^k.$$

Такой же результат получится, если применить правило Лейбница к вычислению производной порядка n , входящей в функцию

$$\frac{1}{2^n n!} x^{-\alpha} x^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} (x^{\alpha+n} x^{\beta+n}) = \frac{1}{2^n n!} x^{-\alpha-\beta} \frac{d^n}{dx^n} (x^{\alpha+\beta+2n}).$$

Поэтому

$$a_n = \frac{1}{2^n n!} (\alpha+\beta+2n) (\alpha+\beta+2n-1) \dots$$

$$\dots (\alpha+\beta+n+1) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{2^n n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1)}. \quad (2.2.2)$$

Будем считать параметры α, β действительными и $\alpha, \beta > -1$ *) и покажем, что многочлены Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) образуют ортогональную систему на отрезке $[-1, +1]$ по весу $p(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$

$$I_{n,m} = \int_{-1}^{+1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\alpha, \beta)}(x) dx = 0 \quad (m \neq n). \quad (2.2.3)$$

Обозначим, для сокращения записи,

$$y_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n},$$

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} y_n^{(n)}.$$

Считая, для определенности, $n \geq m$, заменим в $I_{n,m}$ многочлен $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ его выражением через y_n

$$I_{n,m} = \int_{-1}^{+1} y_n^{(n)} P_m^{(\alpha, \beta)}(x) dx.$$

Интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} I_{n,m} &= \left[y_n^{(n-1)} P_m^{(\alpha, \beta)}(x) - \int_{-1}^{+1} y_n^{(n-1)} [P_m^{(\alpha, \beta)}(x)]' dx = \right. \\ &= \left. - \int_{-1}^{+1} y_n^{(n-1)} [P_m^{(\alpha, \beta)}(x)]' dx. \right. \end{aligned}$$

Внеинтегральный член исчезает, ввиду $\alpha, \beta > -1$. n -кратное интегрирование по частям приведет к равенству

$$I_{n,m} = (-1)^n \int_{-1}^{+1} y_n [P_m^{(\alpha, \beta)}(x)]^{(n)} dx. \quad (2.2.4)$$

При $m < n$ имеем $[P_m^{(\alpha, \beta)}(x)]^{(n)} \equiv 0$ и, следовательно, $I_{n,m} = 0$, что доказывает ортогональность двух многочленов Якоби разных степеней.

*) При построении квадратурных формул для вычисления интегралов от аналитических функций комплексной переменной, достаточно считать $\operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta > -1$.

При $m = n$ равенство (2.2.3) дает

$$\begin{aligned}\delta_n = I_{n,n} &= \int_{-1}^{+1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta [P_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2 dx = \\ &= (-1)^n \int_{-1}^{+1} y_n^n n! a_n dx = \frac{n!}{2^n n!} a_n \int_{-1}^{+1} (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} dx.\end{aligned}$$

Последний интеграл приводится к эйлерову интегралу первого рода. Положим $x = 2t - 1$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} dx &= 2^{\alpha+\beta+2n+1} \int_0^1 t^{\beta+n} (1-t)^{\alpha+n} dt = \\ &= 2^{\alpha+\beta+2n+1} B(\alpha+n+1, \beta+n+1).\end{aligned}$$

Так как $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$,

то

$$\delta_n = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1) n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1)}. \quad (2.2.5)$$

Если $n=0$ и $\alpha+\beta+1=0$, то

$$\delta_0 = \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1).$$

Из (2.2.4) и (2.2.5) видно, что ортонормальную систему на $[-1, +1]$ по весу $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ образуют многочлены

$$p_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{\sqrt{\delta_n}}. \quad (2.2.6)$$

Старшие коэффициенты их равны

$$A_n = \frac{a_n}{\sqrt{\delta_n}}. \quad (2.2.7)$$

Многочлены Лежандра являются якобиевыми многочленами частного вида. Они отвечают значениям параметров $\alpha=0$, $\beta=0$. Формула (2.2.1) для них имеет вид

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}. \quad (2.2.8)$$

При помощи ее легко может быть найдено разложение $P_n(x)$ по степеням x

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n (n-1)! (n-2)!} x^{n-2} + \dots$$

Вес $p(x)$ для них равен единице и многочлены Лежандра ортогональны на $[-1, +1]$ с постоянным весом. Равенства (2.2.4) и (2.2.5) имеют вид:

$$\int_{-1}^{+1} P_n'(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1} & \text{при } m = n. \end{cases} \quad (2.2.9)$$

Ортонормальную систему на $[-1, +1]$ с постоянным весом образуют многочлены

$$p_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x). \quad (2.2.10)$$

Старшие коэффициенты их равны

$$A_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}. \quad (2.2.11)$$

§ 3. Многочлены Чебышева

Ниже будет показано, что многочлены первого рода Чебышева ортогональны на отрезке $[-1, +1]$ по весу $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Они могут быть определены следующей формулой

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (2.3.1)$$

Убедимся, прежде всего, в том, что функция (2.3.1) есть многочлен степени n , старший коэффициент которого есть 2^{n-1} :

$$T_n(x) = 2^{n-1} x^n + \dots \quad (2.3.2)$$

Будем исходить из элементарного тригонометрического равенства

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta \cos n\theta.$$

Положив в нем $\theta = \arccos x$, найдем следующее рекуррентное соотношение для функций $T_n(x)$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Для $T_0(x) = 1$ и $T_1(x) = x$ равенство (2.3.2), очевидно, верно. Рекуррентное же соотношение позволяет доказать его индуктивно для любых n .

Покажем, что для многочленов $T_n(x)$ верны равенства

$$I_{n,m} = \int_{-1}^{+1} \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } m = n. \end{cases} \quad (2.3.3)$$

Из них, в частности, видно, что $T_n(x)$ ($n = 0, 1, \dots$) образуют на отрезке $[-1, +1]$ ортогональную систему многочленов по весу

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Заменим в $I_{n,m}$ переменную интегрирования, положив $x = \cos \theta$, $\theta = \arccos x$. Можно считать, что при изменении x от -1 до $+1$, угол θ будет изменяться от π до 0 . Так как $T_n(x) = \cos n\theta$, $T_m(x) = \cos m\theta$ и $dx = -\sin \theta \cdot d\theta$, то

$$I_{m,n} = \int_0^\pi \cos n\theta \cos m\theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Вес $p(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ ($-1 \leq x \leq +1$) есть частный случай якобиева веса $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ при $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$. При заданном весе многочлены ортогональной системы определяются с точностью до постоянных множителей. Поэтому якобиевы многочлены $P_n^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x)$ могут отличаться от $T_n(x)$ только численными множителями

$$P_n^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x) = c_n T_n(x). \quad (2.3.4)$$

Для нахождения c_n достаточно сравнить старшие коэффициенты

$$\frac{\Gamma(2n)}{2^n n! \Gamma(n)} = c_n 2^{n-1},$$

$$c_n = \frac{\Gamma(2n)}{2^{2n-1} \Gamma(n) \Gamma(n+1)}.$$

Многочлены $T_n(x)$ были введены П. Л. Чебышевым в связи с решением следующей задачи.

Среди всех многочленов степени n , имеющих старший коэффициент, равный единице,

$$P(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots,$$

найти тот, который на отрезке $[-1, +1]$ наименее отклоняется от нуля по абсолютной величине, т. е. такой, для которого $\max_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)|$ имеет наименьшее значение

Покажем, что таким многочленом будет

$$\dot{T}_n(x) = 2^{-n+1} T_n(x) = 2^{-n+1} \cos(n \arccos x).$$

В самом деле, $\max_{[-1, +1]} |\dot{T}_n(x)| = 2^{-n+1}$ и имеют место равенства

$$\dot{T}_n\left(\cos \frac{m\pi}{n}\right) = 2^{-n+1} (-1)^m \quad (m = 0, 1, \dots, n).$$

Если бы существовал многочлен $P(x)$, удовлетворяющий условию $|P(x)| < 2^{-n+1}$ ($-1 \leq x \leq +1$), то разность $R(x) = \dot{T}_n(x) - P(x)$ была бы многочленом степени меньшей n , и такой, что $(-1)^m R(\cos \frac{m\pi}{n}) > 0$ ($m=0, 1, \dots, n$). На $[-1, +1]$ многочлен $R(x)$ должен был бы иметь по меньшей мере n корней, что невозможно, так как его степень меньше n .

Докажем теперь единственность многочлена, имеющего наименьшее отклонение. Пусть $P(x)$ — любой многочлен указанного вида, для которого $\max_{[-1, +1]} |P(x)| = \max_{[-1, +1]} |\dot{T}_n(x)| = 2^{-n+1}$. Разность $S(x) = P(x) - \dot{T}_n(x)$ будет иметь степень меньшую n . В точке $x_m = \cos \frac{m\pi}{n}$

$$S(x_m) = (-1)^m 2^{-m+1} - P(x_m)$$

и, ввиду $|P(x_m)| \leq 2^{-n+1}$,

$$(-1)^m S(x_m) \geq 0 \quad (m=0, 1, \dots, n).$$

Отсюда вытекает, что $S(x)$ имеет не меньше нежели n нулей, различных или совпадающих. Но так как степень $S(x)$ меньше n , то $S(x)$ есть тождественный нуль и $P(x) = T_n(x)$.

Многочленами второго рода Чебышева называются многочлены вида

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1) \arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} \quad (n=0, 1, \dots). \quad (2.3.5)$$

Можно показать, что функции $U_n(x)$ — действительно многочлены степени n , имеющие старшим коэффициентом 2^n . Будем исходить из простого тригонометрического тождества

$$\sin(n+2)\theta + \sin n\theta = 2 \cos \theta \sin(n+1)\theta.$$

Если положить в нем $\cos \theta = x$, $\theta = \arccos x$ и обе части разделить на $\sqrt{1-x^2}$, то получим рекуррентную формулу для U_n

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x). \quad (2.3.6)$$

Заметим, что $U_0(x) = 1$ и $U_1(x) = 2x$ имеют желаемую форму. На основании (2.3.6), при помощи индукции легко показать, что $U_n(x)$ — действительно многочлен вида $U_n(x) = 2^n x^n + \dots$.

Для $U_n(x)$ имеют место равенства

$$I_{n,m} = \int_{-1}^{+1} U_n(x) U_m(x) \sqrt{1-x^2} dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } m = n. \end{cases} \quad (2.3.7)$$

Многочлены $U_n(x)$ ($n=0, 1, \dots$) образуют на отрезке $[-1, +1]$ ортогональную систему по весу $p(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Если в интеграле

$$I_{n,m} = \int_{-1}^{+1} \frac{\sin(n+1) \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\sin(m+1) \arccos x \cdot \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

заменить переменную интегрирования, положив $x = \cos \theta$, то он примет вид

$$I_{n,m} = \int_0^\pi \sin(n+1)\theta \sin(m+1)\theta d\theta$$

и равенства (2.3.6) проверяются без затруднений.

Вес $p(x) = \sqrt{1-x^2}$ есть также якобиев вес при $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. Поэтому многочлен $U_n(x)$ может только постоянным множителем отличаться от многочлена Якоби $P_n^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x)$

$$P_n^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x) = E_n U_n(x). \quad (2.3.8)$$

Сравнение старших коэффициентов дает

$$E_n = \frac{(2n+1)!}{2^{2n} n! (n+1)!}.$$

Многочлены $U_n(x)$ обладают следующим минимальным свойством.

Среди всех многочленов $P(x)$ степени n со старшим коэффициентом, равным единице, $\frac{1}{2^n} U_n(x)$ доставляет наименьшее значение интегралу:

$$\int_a^b |P(x)| dx.$$

Для доказательства нам нужно будет установить некоторые вспомогательные теоремы.

1. Ниже нам потребуется тригонометрический ряд для функций *) $\sin x \operatorname{sign} \sin px$, где p — целое число. В теории рядов Фурье известно следующее разложение

$$\operatorname{sign} \sin x = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

*) Функция $\operatorname{sign} x$ есть знак x и определяется равенствами

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ +1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Отсюда видно, что

$$\operatorname{sign} \sin px = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)px}{2k+1}. \quad (2.3.9)$$

Если последнее равенство умножить на $\sin x$ и принять во внимание, что

$$2 \sin x \sin(2k+1)px = \cos[(2k+1)p-1]x - \cos[(2k+1)p+1]x,$$

то сразу же получим нужный тригонометрический ряд

$$\sin x \operatorname{sign} \sin px =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^{-1} \{ \cos[(2k+1)p-1]x - \cos[(2k+1)p+1]x \}.$$

2. Если n — целое положительное число, то при $r=0, 1, \dots, n-1$ выполняется равенство:

$$\int_{-1}^{+1} x^r \operatorname{sign} U_n(x) dx = 0. \quad (2.3.10)$$

После замены $x = \cos \theta$ (2.3.10) перейдет в

$$\int_0^{\pi} \cos^r \theta \sin \theta \operatorname{sign} \sin(n+1)\theta d\theta = 0.$$

Степени косинуса $\cos^r x$ ($r=0, 1, \dots, n-1$) линейно выражаются через косинусы кратных дуг $\cos m\theta$ ($m=0, 1, \dots, n-1$) и наоборот. Поэтому последние равенства равносильны таким

$$\int_0^{\pi} \cos m\theta \sin \theta \operatorname{sign} \sin(n+1)\theta d\theta = 0 \quad (m=0, 1, \dots, n-1)$$

или, ввиду четности функций, стоящих под знаком интеграла,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta \sin \theta \operatorname{sign} \sin(n+1)\theta d\theta = 0. \quad (2.3.11)$$

Тригонометрический ряд для $\sin \theta \operatorname{sign} \sin(n+1)\theta$ получится из (2.3.9) при $p=n+1$. Наименьшая частота, содержащаяся в ряду, появится в (2.3.9) при $k=0$; она равна $(n+1)-1=n$. Поэтому при $m=0, 1, \dots, n-1$ равенство (2.3.11) заведомо выполняется.

На основании (2.3.10) легко доказывается правильность высказанного выше утверждения о минимальном свойстве $U_n(x)$.

Обозначим, для сокращения записи, $\frac{1}{2^n} U_n(x) = P(x)$ и возьмем любой многочлен $P^*(x)$ степени n со старшим коэффициентом, равным единице:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} |P(x)| dx &= \int_{-1}^{+1} P(x) \operatorname{sign} U_n(x) dx = \\ &= \int_{-1}^{+1} P^*(x) \operatorname{sign} U_n(x) dx + \int_{-1}^{+1} (P(x) - P^*(x)) \operatorname{sign} U_n(x) dx. \end{aligned}$$

Последний из интегралов равен нулю, ввиду (2.3.10) и ввиду того, что разность $P(x) - P^*(x)$ есть многочлен, степени меньшей n

$$\int_{-1}^{+1} P^*(x) \operatorname{sign} U_n(x) dx \leq \int_{-1}^{+1} P^*(x) \operatorname{sign} P^*(x) dx = \int_{-1}^{+1} |P^*(x)| dx.$$

Следовательно,

$$\int_{-1}^{+1} |P(x)| dx \leq \int_{-1}^{+1} |P^*(x)| dx. \quad (2.3.12)$$

Это доказывает утверждение. Мы сделаем еще два замечания. Из проведенных рассуждений видно, что равенство в (2.3.12) возможно только в том случае, когда

$$\operatorname{sign} P^*(x) = \operatorname{sign} U_n(x) \quad \text{при} \quad -1 < x < 1.$$

Многочлен

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1) \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta},$$

где $x = \cos \theta$, имеет при $-1 < x < +1$ n корней $x_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Если $\operatorname{sign} P^*(x) = \operatorname{sign} U_n$, $-1 < x < +1$, то указанные точки x_k должны быть одновременно корнями $P^*(x)$. Многочлен $P^*(x)$ имеет степень n и потому кратности этих корней равны единице и других корней у $P^*(x)$ нет. Кроме того, так как $P^*(x)$ и $P(x) = \frac{1}{2^n} U_n(x)$ имеют одинаковые старшие коэффициенты, то должно быть

$$P^*(x) = P(x).$$

Равенство в (2.3.12) возможно только в том случае, когда $P^*(x) = P(x) = \frac{1}{2^n} U_n(x)$.

Вычислим еще минимальное значение интеграла (2.3.8)

$$\begin{aligned} 2^{-n} \int_{-1}^{+1} |U_n(x)| dx &= 2^{-n} \int_0^{\pi} |\sin(n+1)\theta| d\theta = \\ &= 2^{-n} (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \sin(n+1)\theta d\theta = 2^{-n} (n+1) \left[-\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{n+1}} = \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает

Теорема 2. Для любых многочленов степени n , имеющих старший коэффициент равный единице

$$P(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_0,$$

верно неравенство:

$$\int_{-1}^{+1} |P(x)| dx \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Равенство возможно в том и только в том случае, когда

$$P(x) = \frac{1}{2^n} U_n(x).$$

§ 4. Многочлены Чебышева — Эрмита

Многочлены Чебышева — Эрмита ортогональны на всей числовой оси $-\infty < x < \infty$ с весом $p(x) = e^{-x^2}$. Мы определим их формулой *):

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \quad (2.4.1)$$

Положим $\varphi = e^{-x^2}$. Тогда $\varphi^{(n)} = (-1)^n e^{-x^2} H_n(x)$. Вычисление производной дает

$$\varphi^{(n+1)} = (-1)^n [-2xH_n(x) + H'_n(x)] e^{-x^2}$$

и так как $\varphi^{(n+1)} = (-1)^{n+1} e^{-x^2} H_{n+1}(x)$, то

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x). \quad (2.4.2)$$

*) Иногда рассматривают другие многочлены Чебышева — Эрмита:

$$H_n^*(x) = (-1)^n e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Они связаны с многочленами (2.4.1) равенством $H_n^*(x) = 2^{-\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

Отсюда и из $H_0(x) = 1$, с помощью индукции, легко можно получить, что $H_n(x)$ есть многочлен степени n вида

$$H_n(x) = 2^n x^n + \dots$$

Для многочленов $H_n(x)$ верны равенства:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ 2^n \sqrt{\pi} n! & \text{при } m = n, \end{cases}$$

из которых видно, что $H_n(x)$ ($n = 0, 1, \dots$) образуют на всей оси $(-\infty, +\infty)$ ортогональную систему по весу e^{-x^2} .

Пусть $m \leq n$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n H_m dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(n)} H_m dx = \\ &= (-1)^n \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(n-1)} H_m + (-1)^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(n-1)} H'_m dx = \right. \\ &= (-1)^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(n-1)} H'_m dx = \dots = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi H_m^{(n)} dx. \end{aligned}$$

При $m < n$, $H_m^{(n)} \equiv 0$ и $I = 0$. Если же $m = n$, то

$$I = 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi dx = 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Ортонормальную систему образуют многочлены

$$h_n(x) = \frac{H_n(x)}{2^{\frac{n}{2}} \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{(\pi)^{\frac{1}{4}}}}. \quad (2.4.3)$$

Старшие коэффициенты их равны

$$A_n = 2^{\frac{n}{2}} (n!)^{-\frac{1}{2}} (\pi)^{-\frac{1}{4}}. \quad (2.4.4)$$

§ 5. Многочлены Чебышева — Лягерра

Эти многочлены ортогональны на полуоси $0 \leq x < \infty$ с весом $p(x) = x^\alpha e^{-x}$.

Пусть α — любое число. Выбор ветви многозначной функции x^α определим условием: $\arg x = 0$ при $x > 0$ и положим

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{\alpha+n} e^{-x}). \quad (2.5.1)$$

Вычислив производную по правилу Лейбница, найдем разложение $L_n^{(\alpha)}$ по степеням x

$$L_n^{(\alpha)}(x) = x^n - \frac{n}{1!}(n+\alpha)x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}(n+\alpha)(n+\alpha-1)x^{n-2} - \dots \quad (2.5.2)$$

Определенные равенством (2.5.1) или (2.5.2) функции называются *многочленами Чебышева — Лягерра*. Будем считать α действительным числом и $\alpha > -1$. Покажем, что $L_n^{(\alpha)}(x)$ обладают следующими свойствами:

$$I = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ n! \Gamma(n+\alpha+1) & \text{при } m = n. \end{cases} \quad (2.5.3)$$

Обозначим, для сокращения, $x^{\alpha+n} e^{-x} = \varphi_n$. $L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \varphi_n^{(n)}$. Считая $n \geq m$, заменим в I многочлен $L_m^{(\alpha)}$ его выражением через φ_n

$$\begin{aligned} I &= (-1)^n \int_0^\infty \varphi_n^{(n)} L_m^{(\alpha)} dx = \\ &= (-1)^n \varphi_n^{(n-1)} L_m^{(\alpha)} \Big|_0^\infty + (-1)^{n-1} \int_0^\infty \varphi_n^{(n-1)} [L_m^{(\alpha)}]' dx = \\ &= (-1)^{n-1} \int_0^\infty \varphi_n^{(n-1)} [L_m^{(\alpha)}]' dx. \end{aligned}$$

Внеинтегральный член исчезает, ввиду $\alpha > -1$.

Выполнив интегрирование по частям n раз, получим

$$I = \int_0^\infty \varphi_n [L_m^{(\alpha)}]^{(n)} dx.$$

При $m < n$, $[L_m^{(\alpha)}]^{(n)} \equiv 0$ и $I = 0$. Когда $m = n$,

$$I = n! \int_0^\infty \varphi_n dx = n! \int_0^\infty x^{\alpha+n} e^{-x} dx = n! \Gamma(\alpha+n+1).$$

Ортонормальными многочленами Чебышева — Лягерра будут

$$l_n^{(\alpha)}(x) = \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{[n! \Gamma(\alpha+n+1)]^{1/2}}. \quad (2.5.4)$$

Коэффициент при x^n в них равен

$$A_n = (n!)^{-\frac{1}{2}} \Gamma^{-\frac{1}{2}}(\alpha+n+1). \quad (2.5.5)$$

ЛИТЕРАТУРА

Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, гл. III и IV, Гостехиздат, 1954.

Натансон И. П., Конструктивная теория функций, ч. I и II, Гостехиздат, 1949.

Джексо́н Д., Ряды Фурье и ортогональные многочлены, гл. II, VII—X, ИЛ, 1948.

Szegő G., Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 1939, 23.

Чебышев П. Л., Теория механизмов, известных под названием параллелограммов, Собр. соч. т. 2, Изд. АН СССР, 1947.

Коркин А. Н. и Золотарев Е. И., Sur un certain minimum, Собр. соч. Е. И. Золотарева, 1, 138—153.

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

§ 1. Конечные разности и разностные отношения

При интерполировании функций, имеющем большое значение для приближенного вычисления интегралов, широко используется аппарат конечных разностей и разностных отношений. Мы приведем лишь начальные и самые необходимые сведения из теории разностей.

Будем считать, что мы рассматриваем функцию $f(x)$ и предположим, что известны ее значения для следующих равноотстоящих значений аргумента с шагом h

$$x_k = x_0 + kh \quad (k = 0, 1, 2, \dots);$$

$$f_0 = f(x_0), \quad f_1 = f(x_0 + h), \dots, f_k = f(x_0 + kh) \dots$$

Конечными разностями первого порядка от f называются величины:

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0, \quad \Delta f_1 = f_2 - f_1, \dots, \Delta f_n = f_{n+1} - f_n, \dots$$

Величины

$$\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0, \quad \Delta^2 f_1 = \Delta f_2 - \Delta f_1, \dots, \Delta^2 f_n = \Delta f_{n+1} - \Delta f_n, \dots$$

называются *разностями второго порядка* и т. д.

Разности порядка n определяются через разности предыдущего порядка равенствами

$$\Delta^n f_0 = \Delta^{n-1} f_1 - \Delta^{n-1} f_0, \quad \Delta^n f_1 = \Delta^{n-1} f_2 - \Delta^{n-1} f_1, \dots$$

Мы привели рекуррентное определение конечных разностей всех порядков. Можно найти выражение разности любого порядка непосредственно через значения функции

$$\Delta^n f_0 = f_n - \frac{n}{1!} f_{n-1} +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2!} f_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} f_{n-3} + \dots + (-1)^n f_0. \quad (3.1.1)$$

Для $n = 1$ это равенство очевидно и, при помощи индукции, легко доказывается для любых n .

Если ввести оператор увеличения аргумента на шаг h : $Ef(x) = f(x+h)$, так что $Ef_k = f_{k+1}$, то (3.1.1) можно записать в следующей простой символической форме

$$\Delta^n f_0 = (E - 1)^n f_0. \quad (3.1.2)$$

Полезно также отметить, что значение функции f_n любого номера n может быть выражено через начальное значение f_0 и разности Δf_0 , $\Delta^2 f_0$, ... в виде

$$f_n = f_0 + \frac{n}{1!} \Delta f_0 + \frac{n(n-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \dots + \Delta^n f_0. \quad (3.1.3)$$

При $n=1$ это равенство верно, ввиду $f_1 - f_0 = \Delta f_0$. Справедливость же его при всяких n может быть без труда доказана индуктивным путем. В символической форме, через степени оператора конечной разности, (3.1.3) записывается в форме

$$f_n = (1 + \Delta)^n f_0. \quad (3.1.4)$$

Равноотстоящие значения аргумента не всегда являются наиболее целесообразными для исследования функции. Более того в наблюдениях они не всегда возможны. Например, астрономические наблюдения связаны с погодой и их не всегда удастся проводить через равные промежутки времени.

Для неравноотстоящих значений аргумента конечные разности заменяют другими величинами, которые чаще всего называют *разделенными разностями* или *разностными отношениями*.

Пусть $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ — любые значения аргумента.

Разностные отношения первого порядка определяются равенствами:

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$f(x_2, x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}, \dots$$

Дроби

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0},$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1}, \dots$$

называются разностными отношениями второго порядка;

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_1, x_2, x_3) - f(x_0, x_1, x_2)}{x_3 - x_0}, \dots$$

есть разностные отношения третьего порядка и т. д. Функция $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ есть линейная функция $f(x_0), \dots, f(x_n)$. Можно показать, что

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{v=0}^n \frac{f(x_v)}{(x_v - x_0) \dots (x_v - x_{v-1})(x_v - x_{v+1}) \dots (x_v - x_n)}. \quad (3.1.5)$$

При $n = 1$ это равенство очевидно, так как

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}.$$

Допустив, что (3.1.5) верно для разностных отношений порядка n , проверим его для порядка $n + 1$:

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) &= \\ &= (x_{n+1} - x_0)^{-1} [f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) - f(x_0, x_1, \dots, x_n)] = \\ &= (x_{n+1} - x_0)^{-1} \left[\sum_{v=1}^{n+1} \frac{f(x_v)}{(x_v - x_1) \dots (x_v - x_{n+1})} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{v=0}^n \frac{f(x_v)}{(x_v - x_0) \dots (x_v - x_n)} \right] = \sum_{v=0}^{n+1} \frac{f(x_v)}{(x_v - x_0) \dots (x_v - x_{n+1})}. \end{aligned}$$

Равенство (3.1.5) можно записать более кратко, если ввести многочлен

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Тогда

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{v=0}^n \frac{f(x_v)}{\omega'(x_v)}. \quad (3.1.6)$$

При любой перестановке $x_0, x_1, \dots, x_n$ в правой части (3.1.5) переменится лишь порядок слагаемых и, поэтому, $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ есть симметричная функция своих аргументов $x_0, x_1, \dots, x_n$.

При помощи индукции может быть также проверена следующая формула, дающая выражение любого значения функции $f(x_n)$ через начальное значение $f(x_0)$ и разностные отношения $f(x_0, x_1, \dots, x_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$):

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(x_0) + (x_n - x_0)f(x_0, x_1) + \\ &\quad + (x_n - x_0)(x_n - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \dots \\ &\quad \dots + (x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Когда значения аргумента равноотстоящие, разностные отношения весьма просто выражаются через конечные разности функции

$$\begin{aligned} f(x_0, x_0 + h) &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta f_0}{h 1!}, \\ f(x_0, x_0 + h, x_0 + 2h) &= \frac{f(x_0 + h, x_0 + 2h) - f(x_0, x_0 + h)}{2h} = \frac{\Delta^2 f_0}{h^2 2!}, \\ &\dots \dots \dots \\ f(x_0, x_0 + h, \dots, x_0 + nh) &= \frac{\Delta^n f_0}{n! h^n}. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Для приложений часто полезно бывает знать, как связаны конечные разности и разностные отношения с производными. Пусть точки $x_0, x_1, \dots, x_n$ лежат на отрезке $[a, b]$.

Теорема 1. Если f имеет на $[a, b]$ непрерывную производную порядка n , то верно равенство:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n f^{(n)} \left[x_0 + \sum_{v=1}^n t_v (x_v - x_{v-1}) \right]. \quad (3.1.9)$$

Доказательство. Для $n=1$ оно просто проверяется:

$$\int_0^1 dt_1 f' [x_0 + t_1 (x_1 - x_0)] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_0, x_1).$$

Допустив, что оно верно для разностных отношений порядка $n-1$, покажем, что оно будет верным для отношений порядка n . Обозначим интеграл, стоящий справа в (3.1.9), знаком $I(x_0, x_1, \dots, x_n)$ и выполним в нем интегрирование по переменной t_n :

$$\begin{aligned} I(x_0, x_1, \dots, x_n) &= \\ &= \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-2}} dt_{n-1} (x_n - x_{n-1})^{-1} \{ f^{(n-1)} [x_0 + t_1 (x_1 - x_0) + \dots \\ &+ t_{n-2} (x_{n-2} - x_{n-3}) + t_{n-1} (x_n - x_{n-2})] - f^{(n-1)} [x_0 + t_1 (x_1 - x_0) + \dots \\ &+ t_{n-1} (x_{n-1} - x_{n-2})] \} = (x_n - x_{n-1})^{-1} [f(x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_n) - \\ &- f(x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1})] = (x_n - x_{n-1})^{-1} [f(x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_n) - \\ &- f(x_{n-1}, x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_n)] = f(x_{n-1}, x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_n) = \\ &= f(x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

Этим теорема доказана.

Из (3.1.9), как следствие, может быть получено другое, более простое, соотношение между $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ и $f^{(n)}$. Областью интегрирования в (3.1.9) является пирамида n -мерного пространства $(t_1, t_2, \dots, t_n)$, определяемая неравенствами:

$$0 \leq t_n \leq t_{n-1} \leq \dots \leq t_1 \leq 1. \quad (3.1.10)$$

Объем ее имеет значение

$$\int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n = \frac{1}{n!}.$$

Рассмотрим величину

$$\xi = x_0 + \sum_{v=1}^n t_v (x_v - x_{v-1}) = (1 - t_1) x_0 + (t_1 - t_2) x_1 + \dots + (t_{n-1} - t_n) x_{n-1} + t_n x_n.$$

Ввиду (3.1.10), множители при всех x_k будут неотрицательными. Так как сумма множителей равна единице, ξ будет средним взвешенным значением всех абсцисс x_k ($k=0, 1, \dots, n$), а потому, наверное, принадлежит отрезку $[a, b]$. Кроме того, точке, лежащей внутри пирамиды (3.1.10): $0 < t_n < t_{n-1} < \dots < t_1 < 1$, будет отвечать точка ξ , лежащая внутри $[a, b]$.

Применение теоремы о среднем значении к интегралу (3.1.10) позволяет высказать следующее утверждение.

Теорема 2. Если f имеет на $[a, b]$ непрерывную производную порядка n , то внутри $[a, b]$ существует такая точка ξ , что имеет место равенство

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}. \quad (3.1.11)$$

Связь между конечной разностью и производной сразу же вытекает из (3.1.8), (3.1.9) и (3.1.11):

$$\Delta^n f_0 = n! h^n \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n f^{(n)} \left(x_0 + h \sum_{v=1}^n t_v \right) = h^n f^{(n)}(\xi),$$

$$x_0 < \xi < x_0 + nh. \quad (3.1.12)$$

Отсюда, в частности, видно, что если уменьшить шаг h в λ раз, то можно ожидать, что конечная разность $\Delta^n f_0$ уменьшается, как правило, приблизительно в λ^n раз.

§ 2. Интерполирование по значениям функции

Допустим, что в $n+1$ произвольно расположенных точках $x_0, x_1, \dots, x_n$, которые всюду ниже мы будем называть узлами интерполирования, даны значения $f(x_k)$ функции f . Нужно построить многочлен, степени не больше n :

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = \sum_{v=0}^n a_v x^{n-v}, \quad (3.2.1)$$

который в узлах x_k принимал бы заданные значения $f(x_k)$ ($k=0, 1, \dots, n$):

$$P_n(x_k) = f(x_k). \quad (3.2.2)$$

Для определения коэффициентов a_n многочлена получится линейная система $n+1$ уравнений

$$\sum_{\nu=0}^n a_{\nu} x_k^{n-\nu} = f(x_k) \quad (k=0, 1, \dots, n).$$

Определитель ее есть определитель Вандермонда

$$W(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Он отличен от нуля, так как среди узлов x_k нет совпадающих. Поэтому, при любых значениях $f(x_k)$, может быть построен и только один многочлен $P_n(x)$, удовлетворяющий условиям (3.2.2).

В зависимости от целей, для которых предназначается $P_n(x)$, его можно представить в различных формах. Ниже приведены два наиболее часто применяемые представления $P_n(x)$.

Для узла x_k построим вспомогательный многочлен $\omega_k(x)$, определяемый условиями

$$\omega_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k. \end{cases} \quad (3.2.3)$$

Как сразу же видно, такой многочлен может быть записан в форме

$$\omega_k(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$$

или, если воспользоваться многочленом $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$,

$$\omega_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}. \quad (3.2.4)$$

Многочлены $\omega_k(x)$ называют *многочленами влияния узлов x_k или лагранжевыми коэффициентами*.

Интерполирующий многочлен $P_n(x)$ при помощи их запишется в следующей форме, принадлежащей Лагранжу:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} f(x_k). \quad (3.2.5)$$

Так как $\omega_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, n$) есть многочлен степени n , то (3.2.5) будет многочленом, степени не выше n . На основании (3.2.3) легко проверить, что он удовлетворяет условиям (3.2.2).

В некоторых вопросах вычислений лагранжево представление $P_n(x)$ является неудобным. Часто нельзя бывает заранее сказать сколько

нужно взять узлов x_k , чтобы достигнуть требуемой точности интерполирования. Допустим, что при принятом числе узлов нужная точность не была достигнута. Тогда вводят в вычисления дополнительно еще один, или несколько узлов. При введении же хотя бы одного дополнительного узла будут изменяться все члены формулы (3.2.5). Было бы желательно так изменить представление $P_n(x)$, чтобы, при введении нового узла, ранее вычисленные члены сохранялись и нужно было бы добавить еще один новый член.

Такому требованию удовлетворяет ньютоново представление интерполяционного многочлена:

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_n). \quad (3.2.6)$$

Правая часть (3.2.6) есть многочлен, степени не большей n . На основании (3.1.7), можно проверить, что он действительно удовлетворяет условиям (3.2.2). Непосредственно видно, что при $x = x_0$ правая часть приводится к $f(x_0)$. Для $x = x_1$ правая часть равна $f(x_0) + (x_1 - x_0)f(x_0, x_1) = f(x_1)$ и т. д.

Разность между $f(x)$ и интерполирующим многочленом $P_n(x)$ называют *остатком интерполирования* или *дополнительным членом интерполяционной формулы*:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = f(x) - \sum_{k=1}^n \frac{\omega(x)f(x_k)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}. \quad (3.2.7)$$

Значение $R_n(x)$ зависит от свойств функции f и от расположения x и узлов x_k . Можно ожидать тем меньшей погрешности $R_n(x)$ интерполирования, чем более гладкой будет f , в частности, чем более высоким порядком дифференцируемости она будет обладать. Когда же f есть аналитическая функция, то можно ожидать, что $R_n(x)$ будет тем меньше, чем дальше от x и x_k ($k = 0, 1, \dots, n$) будут лежать особые точки f .

В представлении (3.2.7) для $R_n(x)$, часто, трудно бывает увидеть какое влияние на значение остатка оказывают свойства f и было бы полезно получить другие представления $R_n(x)$, более удобные для оценки величины $R_n(x)$ в различных классах функций. Во многих случаях такие представления $R_n(x)$ построены*). Мы ограничимся тем, что приведем две простейшие теоремы о представлениях такого рода для остатка.

1) Пусть точка x и узлы x_k ($k = 0, 1, \dots, n$) лежат на отрезке $[a, b]$.

*) См. литературу к гл. III.

Теорема 3. Если f имеет производную порядка $n+1$ на $[a, b]$, то для остатка $R_n(x)$ интерполирования имеет место равенство:

$$R_n(x) = \omega(x) \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_n} dt_{n+1} f^{(n+1)} \left[x + \sum_{v=0}^n t_v (x_v - x_{v-1}) \right], \quad (3.2.8)$$

$$x_{-1} = x.$$

Доказательство. Высказанное утверждение может быть получено как следствие теоремы о представлении разностного отношения через производную и соответствующие ей равенства (3.1.9). Рассмотрим значения $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$, $f(x)$ функции f . На основании (3.1.7), последнее из них имеет следующее выражение через разностные отношения

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots \\ & \dots (x - x_{n-1}) f(x_0, x_1, \dots, x_n) + (x - x_0)(x - x_1) \dots \\ & \dots (x - x_n) f(x_0, x_1, \dots, x_n, x). \end{aligned}$$

Сумма всех членов правой части равенства, кроме последнего, есть ничто иное, как интерполяционный многочлен $P_n(x)$ в ньютоновой форме. Поэтому последний член правой части должен совпадать с остатком интерполирования:

$$P_n(x) = \omega(x) f(x_0, x_1, \dots, x_n, x) = \omega(x) f(x, x_0, x_1, \dots, x_n). \quad (3.2.9)$$

Если к $f(x, x_0, x_1, \dots, x_n)$ применить указанную выше теорему и равенство (3.1.9), то получим (3.2.8).

Применение теоремы о среднем значении к интегралу (3.2.8), позволяет высказать приводимую ниже теорему, дающую более простое представление остатка.

Теорема 4. Если f имеет на $[a, b]$ непрерывную производную порядка $n+1$, то внутри $[a, b]$ существует такая точка ξ , что имеет место равенство:

$$R_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \quad (3.2.10)$$

Его часто называют формулой Лагранжа для $R_n(x)$.

2) Допустим, что $f(z)$ — аналитическая функция комплексной переменной z , регулярная в некоторой области B , содержащей внутри себя x и x_k ($k=0, 1, \dots, n$). Для простоты, будем область B считать односвязной.

Теорема 5. Остаток интерполирования $f(z)$ в точке x может быть представлен в форме контурного интеграла

$$R_n(x) = \frac{\omega(x)}{2\pi i} \int_l \frac{f(z)}{\omega(z)(z-x)} dz, \quad (3.2.11)$$

где l — любая замкнутая линия, лежащая внутри B и содержащая x , x_k ($k=0, 1, \dots, n$) внутри себя.

Утверждение легко доказывается проверкой равенства (3.2.10). Для функции $\frac{f(z)}{\omega(z)(z-x)}$, стоящей под знаком интеграла, точки $z=x$, $z=x_k$ ($k=0, 1, \dots, n$) являются простыми полюсами. Если интеграл, стоящий справа в (3.2.10), вычислить при помощи вычетов, то сразу же получится представление (3.2.7) для остатка $R_n(x)$.

§ 3. Интерполирование с кратными узлами

Будем считать, что нам дано m различных узлов $x_1, x_2, \dots, x_m$. Рассмотрим некоторую функцию f и предположим, что в первом узле x_1 даны значения самой функции и всех производных от нее до порядка $\alpha_1 - 1$

$$f(x_1), f'(x_1), \dots, f^{(\alpha_1-1)}(x_1),$$

во втором узле x_2 даны значения f и производных до порядка $\alpha_2 - 1$

$$f(x_2), f'(x_2), \dots, f^{(\alpha_2-1)}(x_2) \text{ и т. д.}$$

Числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ называются *кратностями узлов* $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Общее число указанных исходных данных о функции f обозначим

$$n+1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m.$$

Нужно построить многочлен $P_n(f; x)$, степени не выше n , который удовлетворял бы условиям *)

$$P_n^{(i)}(f; x_k) = f^{(i)}(x_k), \quad \begin{cases} i=0, 1, \dots, \alpha_k-1, \\ k=1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Существование $P_n(f; x)$ мы установим, построив этот многочлен. Единственность $P_n(f; x)$ будет видна из построения. Она может быть также легко доказана на основании известных теорем алгебры. Допустив, что существуют два многочлена $P_n(f; x)$, удовлетворяющих условиям (3.3.1), рассмотрим разность между ними и обозначим ее $\varphi(x)$. $\varphi(x)$ есть многочлен, степени не выше n , и в узлах x_k будет удовлетворять условиям

$$\varphi^{(i)}(x_k) = 0, \quad \begin{cases} i=0, 1, \dots, \alpha_k-1, \\ k=1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

*) При записи условий, производная порядка нуль принимается равной самой функции f .

Каждый узел x_k будет нулем $\varphi(x)$ кратности не меньше α_k . Сумма кратностей таких нулей будет не меньше $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n + 1$. Но известно, что сумма кратностей нулей может быть больше степени многочлена только в том случае, когда он тождественно равен нулю: $\varphi = 0$, что доказывает единственность.

Интерполирующий многочлен $P_n(f; x)$ может быть, очевидно, записан в форме

$$P_n(f; x) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^{\alpha_k-1} L_{k,i}(x) f^{(i)}(x_k), \quad (3.3.2)$$

где $L_{k,i}(x)$ есть некоторые многочлены степени n . Для построения многочлена рассмотрим сначала случай аналитической функции f .

Будем считать $f(z)$ функцией комплексной переменной z , регулярной в некоторой области B , содержащей внутри себя точку x и узлы x_k ($k=1, \dots, m$). Как и выше, для простоты будем считать область B односвязной. Возьмем любую замкнутую линию l , лежащую внутри B и содержащую x и x_k внутри себя. Всюду внутри l функция f может быть представлена интегралом Коши:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(z)}{z-x} dz. \quad (3.3.3)$$

Равенство (3.3.3) позволяет изучение f свести к изучению элементарной функции $\frac{1}{z-x}$, которую часто называют ядром Коши.

Для нашей цели удобнее рассмотреть не интерполяционный многочлен для $\frac{1}{z-x}$, а остаток интерполирования

$$\begin{aligned} R_n\left(\frac{1}{z-x}; x\right) &= \frac{1}{z-x} - P_n\left(\frac{1}{z-x}; x\right) = \\ &= \frac{1}{z-x} - \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^{\alpha_k-1} L_{k,i}(x) \frac{i!}{(z-x_k)^{i+1}}. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Будем рассматривать (3.3.4) как функцию параметра z . Это — правильная рациональная дробь, для которой (3.3.4) есть разложение на сумму простых дробей. Заметим, попутно, что точка $z=x$ есть простой полюс $R_n\left(\frac{1}{z-x}; x\right)$ с вычетом, равным единице.

Приведем дроби в правой части (3.3.4) к общему знаменателю. Если обозначить

$$A(z) = \prod_{k=1}^m (z-x_k)^{\alpha_k},$$

то в результате приведения для R_n получим дробное представление вида:

$$R_n\left(\frac{1}{z-x}; x\right) = \frac{B(z, x)}{A(z)(z-x)}. \quad (3.3.5)$$

Так как дробь (3.3.5) — правильная, числитель $B(z, x)$ должен быть многочленом от z , степени не выше $n+1$. Убедимся в том, что $B(z, x)$ не зависит от z и равен $A(x)$. Для этой цели найдем разложение (3.3.5) при z , больших по модулю. Если $|z|$ есть большая

величина, то $\frac{1}{z-x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{z^{\nu+1}}$. Так как операция остатка R_n линейная, можно видеть, что

$$R_n\left(\frac{1}{z-x}; x\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{z^{\nu+1}} R_n(x^{\nu}; x).$$

Здесь $R_n(x^{\nu}; x)$ есть остаток интерполирования x^{ν} . Но, когда интерполируемая функция есть многочлен, степень которого не больше n , интерполирование будет точным и, поэтому,

$$R_n(x^{\nu}; x) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n,$$

$$R_n\left(\frac{1}{z-x}; x\right) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{z^{\nu+1}} R_n(x^{\nu}; x).$$

Наименьшая степень $\frac{1}{z}$, входящая в разложение (3.3.5) при больших $|z|$, должна быть $\frac{1}{z^{n+2}}$. Значит числитель $B(z, x)$ должен иметь степень, относительно z , на $n+2$ единицы меньше степени знаменателя и не должен, следовательно, зависеть от z : $B(z, x) = B(x)$. Кроме того, так как вычет (3.3.5) в полюсе $z=x$ равен единице, должно быть $B(x) = A(x)$ и

$$R_n\left(\frac{1}{z-x}; x\right) = \frac{A(x)}{A(z)(z-x)}. \quad (3.3.6)$$

Умножим теперь (3.3.4) на $\frac{f(z)}{2\pi i}$ и выполним интегрирование по l . Ввиду (3.3.3) и (3.3.6), получим выражение остатка интерполирования функции f в точке x в форме

$$R_n(f; x) = f(x) - \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{\alpha_k-1} L_{ki}(x) f^{(i)}(x_k) = \frac{A(x)}{2\pi i} \int_l \frac{f(z)}{A(z)(z-x)} dz. \quad (3.3.7)$$

Вычисляя интеграл (3.3.7) при помощи вычетов, можно найти интерполирующий многочлен (3.3.4):

$$P_n(f; x) = f(x) - R_n(f; x).$$

Вычет $\frac{A(z)f(z)}{A(z)(z-x)}$ в полюсе $z=x$ равен $f(x)$. Найдем вычет той же функции в полюсе $z=x_k$. При z близком к x_k будем иметь следующие степенные разложения по степеням $z-x_k$:

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f^{(s)}(x_k)}{s!} (z-x_k)^s,$$

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{(z-x_k) - (x-x_k)} = - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(z-x_k)^s}{(x-x_k)^{s+1}},$$

$$\frac{(z-x_k)^{\alpha_k}}{A(z)} = \sum_{s=0}^{\infty} c_s^{(k)} (z-x_k)^s.$$

Вычет функции

$$\frac{f(z)}{A(z)(z-x)} = \frac{1}{(z-x_k)^{\alpha_k}} \cdot \frac{(z-x_k)^{\alpha_k}}{A(z)} \cdot \frac{1}{z-x} \cdot f(z)$$

мы получим, если перемножим три выписанные ряда и найдем коэффициент при $(x-x_k)^{\alpha_k-1}$. Простые вычисления покажут, что этот коэффициент равен

$$- \sum_{i=0}^{\alpha_k-1} f^{(i)}(x_k) \frac{1}{i!} \sum_{s=0}^{\alpha_k-1-i} c_s^{(k)} (x-x_k)^{-\alpha_k+i+s}.$$

Для получения вычета $\frac{A(x)f(z)}{A(z)(z-x)}$, его мы должны умножить на $A(x)$.

Все эти вычисления дадут для $P_n(f; x)$ следующую формулу, принадлежащую Эрмиту

$$P_n(f; x) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^{\alpha_k-1} f^{(i)}(x_k) \frac{1}{i!} \frac{A(x)}{(x-x_k)^{\alpha_k}} \sum_{s=0}^{\alpha_k-1-i} c_s^{(k)} (x-x_k)^{i+s}. \quad (3.3.8)$$

Если f задана на действительной оси и не является аналитической функцией, то представление (3.3.8) интерполяционного многочлена для нее, очевидно, остается верным, но представление остатка $P_n(f; x)$ контурным интегралом — теряет свою силу.

В случае неаналитической функции f мы укажем другое представление остатка R_n , рассчитанное на функции достаточно высокого класса дифференцируемости.

Пусть точки x и $x_k (k=1, 2, \dots, m)$ лежат на некотором отрезке $[a, b]$.

Теорема 6. Если функция f имеет на $[a, b]$ производную порядка $n+1$, то внутри $[a, b]$ существует такая точка ξ , что для остатка $R_n(f; x)$ имеет место равенство:

$$R_n(f; x) = \frac{A(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \quad (3.3.9)$$

Теорема эта доказывается при помощи рассуждений, вполне сходных с теми, которые были проведены при получении (3.2.8), если к функции

$$F(z) = f(z) - P_n(f; z) - \frac{A(z)}{A(x)} [f(x) - P_n(f; x)]$$

применить следующую измененную теорему Ролля.

Пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_m$ и f удовлетворяет условиям

$$f^{(i)}(a_k) = 0, \quad \begin{cases} k = 1, 2, \dots, m, \\ i = 0, 1, \dots, \alpha_k - 1, \end{cases}$$

$$\sum \alpha_k = r.$$

Тогда, если f имеет на отрезке $[a_1, a_m]$ производную порядка r , между a_1 и a_m существует такая точка ξ , что $f^{(r)}(\xi) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

Уиттекер и Робинсон, Математическая обработка результатов наблюдений, Гостехиздат, 1933.

Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, гл. I и V, Гостехиздат, 1954. Изд. 2.

Ремез Е. И., ДАН СССР, 1940, 26, 2.

Hermite Ch., Sur la formule d'interpolation de Lagrange, Journ. für reine und angew. Math. 1878, 84.

ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. Линейные нормированные пространства

Для изучения некоторых задач теории квадратур большое значение имеет функциональный анализ. Он позволяет с единой точки зрения исследовать многие вопросы и получать большое число результатов из одного источника. Для целей, которые преследуются в дальнейшем изложении, потребуются лишь немногие понятия и теоремы функционального анализа. Им будут посвящены три ближайших параграфа.

Пусть $X = \{x\}$ — множество некоторых «элементов» x . Природа таких элементов может быть любой: это могут быть точки, линии, функции и т. п.

Множество X называется *линейным*, если над элементами этого множества определены две операции — сложение $x + y$ и умножение λx на число λ (действительное, или комплексное) такие, что результаты операций приводят снова к элементам множества X и выполняются аксиомы:

- 1) ассоциативность сложения $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- 2) коммутативность сложения $x + y = y + x$;
- 3) существует элемент θ , называемый *нулевым*, такой, что при всяком $x \in X$

$$x + \theta = x;$$

- 4) для каждого x из X существует элемент $-x$, называемый *противоположным*, такой, что $x + (-x) = \theta$;

- 5) ассоциативность умножения

$$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x;$$

- 6) верны два распределительных закона

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y;$$

- 7) $1 \cdot x = x$;
- 8) $0 \cdot x = \theta$;
- 9) если $\lambda x = \theta$ и $x \neq \theta$, то $\lambda = 0$.

Линейное множество X называется *линейным нормированным*, или *векторным* пространством, если для каждого элемента $x \in X$ определена норма $\|x\|$ — вещественное число, обладающее свойствами длины вектора:

- 1) $\|x\| \geq 0$ и $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$,
- 2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
- 3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

При помощи нормы может быть определена сходимость элементов: говорят, что $x_n \rightarrow x$, или $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, если $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Со сходимостью тесно связана полнота пространства. Если последовательность $x_n (n = 1, 2, \dots)$ сходится к некоторому элементу x , то для такой последовательности выполняется признак Больцано — Коши: для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$ и любых $m > 0$ будет

$$\|x_{n+m} - x_n\| < \varepsilon.$$

Обратное может быть неверным: если для последовательности $x_n (n = 1, 2, \dots)$ выполняется признак Больцано — Коши, то еще нельзя быть уверенным в том, что в X существует такой элемент x , к которому сходится x_n при $n \rightarrow \infty$.

Пространство X называется *полным* или типа B (по имени С. Банаха), если из выполнения для x_n признака Больцано — Коши следует существование в X такого элемента x , к которому сходится x_n при $n \rightarrow \infty$.

Приведем некоторые примеры банаховых пространств.

1. Пространство C . Пусть $[a, b]$ — любой конечный отрезок. Элементами C являются всевозможные непрерывные функции на $[a, b]$. Сложение элементов и умножение их на число есть обычное сложение функций и умножение на число. За норму функции $x = x(t)$ принимают

$$\|x\| = \max_t |x(t)|. \quad (4.1.1)$$

Сходимость элементов есть равномерная сходимость последовательности функций.

Пространство C полное. Из $\|x_{n+m} - x_n\| = \max_t |x_{n+m}(t) - x_n(t)| < \varepsilon$ следует сходимость последовательности функций $x_n(t) (n = 1, 2, \dots)$ при всяком t : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t)$ и так как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций есть также непрерывная функция, то $x(t) \in C$.

2. Пространство $L_p (p \geq 1)$ есть пространство измеримых на $[a, b]$ функций, суммируемых со степенью p . Сложение и

умножение на число есть также обычное сложение функций и умножение их на число. Норма определяется равенством

$$\|x\| = \left\{ \int_a^b |x(t)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}. \quad (4.1.2)$$

Функции эквивалентные, т. е. различающиеся между собой лишь на множестве точек, имеющем меру нуль, отождествляются.

Условия, которым должна удовлетворять норма, для (4.1.2) проверяются без труда. Выполнение условий 1 и 3 очевидно. Условие же 2 есть следствие известного неравенства Минковского для интегралов*):

$$\left\{ \int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \int_a^b |x(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_a^b |y(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Пространство L_p полное**).

3. Пространство L_2 суммируемых с квадратом функций есть частный случай L_p при $p=2$. Норма в L_2 есть

$$\|x\| = \left\{ \int_a^b x^2(t) dt \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (4.1.3)$$

Сходимость элементов здесь означает сходимость функций в смысле среднего квадратического отклонения.

4. Пространство L суммируемых на $[a, b]$ функций есть также частный случай L_p при $p=1$. Норма в L определяется так:

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)| dt \quad (4.1.4)$$

и имеет геометрический смысл площади между осью x и графиком функции $x(t)$.

5. V есть пространство функций ограниченного изменения на $[a, b]$ и обращающихся в нуль в точке a . За норму в V принимают полное изменение $x(t)$ на $[a, b]$

$$\|x\| = \text{Var } x(t). \quad (4.1.5)$$

*) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, Гостехиздат, 1947, V, п° 63, или Л. А. Люстерник и В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, Гостехиздат, 1951, дополнение 1, 347—348.

**) См., например, Л. А. Люстерник и В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, Гостехиздат, 1951, 35—37.

Сразу же видно, что условия 1 и 3 для нормы здесь выполняются. Выполнение второго условия следует из неравенства

$$\overset{b}{\text{Var}}_a [x(t) + y(t)] \leq \overset{b}{\text{Var}}_a x(t) + \overset{b}{\text{Var}}_a y(t).$$

Пространство V полное. В самом деле, пусть для последовательности элементов $x_n (n=1, 2, \dots)$ условие Больцано — Коши выполняется.

$$\begin{aligned} |x_{n+m}(t) - x_n(t)| &= \left| \int_a^t d[x_{n+m}(t) - x_n(t)] \right| \leq \\ &\leq \overset{b}{\text{Var}}_a [x_{n+m}(t) - x_n(t)] = \|x_{n+m} - x_n\| < \varepsilon, \\ n &> N(\varepsilon). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что последовательность функций $x_n(t)$ сходится при всяких $t \in [a, b]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t).$$

Из выполнения условия Больцано — Коши следует, что нормы $\|x_n\|$ ($n=1, 2, \dots$) ограничены сверху некоторым числом *)

$$\|x_n\| \leq M \quad (n=1, 2, \dots).$$

Разделим $[a, b]$ на части точками $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b$. Для функции $x_n(t)$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=0}^{k-1} |x_n(t_{i+1}) - x_n(t_i)| \leq \overset{b}{\text{Var}}_a x_n(t) = \|x_n\| \leq M.$$

Если перейти здесь к пределу при $n \rightarrow \infty$, то получим

$$\sum_{i=0}^{k-1} |x(t_{i+1}) - x(t_i)| \leq M,$$

откуда вытекает, что $\overset{b}{\text{Var}}_a x(t) \leq M$ и, следовательно, $x(t)$ есть элемент пространства V .

*) Возьмем $\varepsilon > 0$ и выберем N так, чтобы при $n, m > N$ было $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$. Фиксируем какое-либо значение $m > N$. $\|x_n\| \leq \|x_m\| + \|x_m - x_n\| < \|x_m\| + \varepsilon$. Пусть M — наибольшее из чисел $\|x_1\|, \dots, \|x_N\|, \|x_m\| + \varepsilon$. Тогда при всяких n будет

$$\|x_n\| \leq M.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и число N таково, что при $n, m > N$ будет $\rho(x_m, x_n) \leq \varepsilon$. Если в неравенствах

$$\sum_{i=0}^{k-1} |[x_m(t_{i+1}) - x_n(t_{i+1})] - [x_m(t_i) - x_n(t_i)]| \leq \\ \leq \underset{a}{\overset{b}{\text{Var}}} [x_m(t) - x_n(t)] = \rho(x_m, x_n) \leq \varepsilon$$

перейти к пределу при $m \rightarrow \infty$, то легко получить следующее неравенство

$$\sum_{i=0}^{k-1} |[x(t_{i+1}) - x_n(t_{i+1})] - [x(t_i) - x_n(t_i)]| \leq \varepsilon.$$

Так как это верно при любом выборе точек $t_i (i = 0, 1, \dots, k)$, то отсюда вытекает:

$$\underset{a}{\overset{b}{\text{Var}}} [x(t) - x_n(t)] = \rho(x, x_n) \leq \varepsilon,$$

и последовательность функций $x_n(t)$ сходится к $x(t)$ при норме (4.1.5).

§ 2. Линейные операторы

Пусть $X = \{x\}$ и $Y = \{y\}$ — два любых множества элементов x и y . Если каждому элементу x соответствует, по какому-либо правилу, некоторый элемент $y: y = H(x)$, то мы будем говорить, что задан оператор H . Множество X есть область его задания, а область значений H принадлежит Y .

В частном случае, когда Y есть множество действительных или комплексных чисел, и каждому элементу x соответствует некоторое число, оператор H называют *функционалом*.

Понятие оператора является прямым и далеко идущим обобщением понятия функции.

Если в множествах X и Y известны правила предельного перехода, то может быть определена непрерывность оператора. Оператор H называется *непрерывным*, если из $x_n \rightarrow x$ (в множестве X) следует $H(x_n) \rightarrow H(x)$ (в множестве Y).

Всюду ниже мы будем считать, что X и Y — линейные нормированные пространства. Оператор H называется *аддитивным*, если для любых двух элементов x_1 и x_2 из X будет *):

$$H(x_1 + x_2) = Hx_1 + Hx_2.$$

*) Скобки, в которых записан аргумент оператора, часто будут опускаться.

Оператор называется *линейным*, если он аддитивен и непрерывен.

Если существует число M такое, что при всяких x выполняется неравенство

$$\|Hx\| \leq M \|x\|,$$

тогда H называют *ограниченным* оператором. Докажем утверждение:

Для того, чтобы аддитивный оператор был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы он был ограниченным.

Необходимость. Допустим, что линейный оператор H неограничен и покажем, что это приводит к противоречию. Найдется последовательность элементов x_n такая, что

$$\|Hx_n\| \geq n \|x_n\|.$$

Построим элементы

$$x'_n = \frac{x_n}{n \|x_n\|}.$$

Очевидно, $x'_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

С другой стороны

$$Hx'_n = \frac{1}{n \|x_n\|} Hx_n$$

и

$$\|Hx'_n\| = \frac{1}{n \|x_n\|} \|Hx_n\| \geq 1;$$

$\|Hx'_n\| \not\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и оператор H не непрерывен в нулевом элементе θ .

Достаточность. Будем считать оператор H аддитивным и ограниченным и возьмем любой элемент x . Если $x_n \rightarrow x$, т. е. $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, то $\|Hx_n - Hx\| = \|H(x_n - x)\| \leq M \|x_n - x\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. $Hx_n \rightarrow Hx$ и оператор H непрерывен.

Если H — линейный оператор, то наименьшая из постоянных M удовлетворяющих неравенству

$$\|Hx\| \leq M \|x\|,$$

называется *нормой оператора* H и обозначается $\|H\|$:

$$\|H\| = \min M.$$

Для нахождения нормы в некоторых случаях может быть полезным следующее просто доказываемое равенство

$$\|H\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Hx\|. \quad (4.2.1)$$

Действительно, при $\|x\| \leq 1$, $\|Hx\| \leq \|H\| \|x\| \leq \|H\|$. Следовательно,

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Hx\| \leq \|H\| \quad (4.2.2)$$

По определению нормы, для всякого $\varepsilon > 0$ существует элемент x' такой, что

$$\|Hx'\| > (\|H\| - \varepsilon) \|x'\|.$$

Положим

$$x = \frac{x'}{\|x'\|},$$

$$\|Hx\| = \frac{1}{\|x'\|} \|Hx'\| > \frac{1}{\|x'\|} (\|H\| - \varepsilon) \|x'\| = \|H\| - \varepsilon.$$

Так как $\|x\| = 1$, то

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Hx\| > \|H\| - \varepsilon.$$

Ввиду произвола в выборе ε , отсюда и из (4.2.2) следует (4.2.1).
Найдем норму некоторых линейных функционалов, с которыми нам придется встретиться позже.

1. X — есть пространство $C[a, b]$.

Рассмотрим функционал

$$Fx = \int_a^b f(t) x(t) dt, \quad (4.2.3)$$

где $f(t)$ — измеримая и суммируемая на $[a, b]$ функция. Имеем,

$$\|F\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \left| \int_a^b f(t) x(t) dt \right| = \sup_{|x(t)| \leq 1} \int_a^b |f(t)| |x(t)| dt \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Рассмотрим функцию $\text{sign } f(t)$. Она измерима и $|\text{sign } f(t)| \leq 1$. Для нее

$$\int_a^b f(t) \text{sign } f(t) dt = \int_a^b |f| dt.$$

Так как $\text{sign } f$ есть измеримая функция, наверное существует такая непрерывная функция $x^*(t)$, для которой $|x^*(t)| \leq 1$ и которая отличается от $\text{sign } f$ на множестве сколь угодно малой меры. Такую функцию всегда можно выбрать так, чтобы $\int_a^b f x^* dt$ отличался бы

от $\int_a^b f \text{sign } f dt$ сколь угодно мало. Поэтому

$$\sup_{|x(t)| \leq 1} \int_a^b f x dt \geq \int_a^b |f| dt,$$

и следовательно

$$\|F\| = \int_a^b |f| dt. \quad (4.2.4)$$

2. X есть $L[a, b]$

$$Fx = \int_a^b f(t) x(t) dt. \quad (4.2.5)$$

Здесь f — непрерывная на $[a, b]$ функция. Норма в L определяется равенством (4.1.6). Имеем

$$|Fx| = \left| \int_a^b f x dt \right| \leq \max_t |f(t)| \int_a^b |x(t)| dt = \max_t |f(t)| \cdot \|x\|.$$

Отсюда видно, что $\|F\| \leq \max_t |f(t)|$.

Убедимся в том, что в полученной оценке для $\|F\|$ правая часть не может быть уменьшена. Пусть ε есть любое малое положительное число.

Обозначим $M = \max_t |f(t)|$ и допустим, что этот максимум достигается в точке ξ . Для определенности записи будем считать $f(\xi)$ положительным числом: $f(\xi) = M > 0$. Ввиду непрерывности $f(t)$, около ξ существует такой отрезок $\alpha < t < \beta$, в котором

$$f(t) > M - \varepsilon.$$

Определим функцию $x(t)$ равенствами

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \text{при } t \in (\alpha, \beta), \\ 0 & \text{при } t \notin (\alpha, \beta). \end{cases}$$

Очевидно

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)| dt = 1,$$

$$|Fx| = \left| \int_a^b f(t) x(t) dt \right| = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta f(t) dt > \frac{1}{\beta - \alpha} (M - \varepsilon) (\beta - \alpha) = M - \varepsilon.$$

Поэтому

$$\|F\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |Fx| > M - \varepsilon$$

и, так как ε есть произвольное число, отсюда и из раньше полученной оценки сверху для $\|F\|$ следует

$$\|F\| = M = \max_t |f(t)|. \quad (4.2.6)$$

3. Пусть X есть пространство V .

Рассмотрим функционал

$$Fx = \int_a^b f(t) dx(t), \quad (4.2.7)$$

где $f(t)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция, и покажем, что

$$\|F\| = \max_t |f(t)|, \quad (4.2.8)$$

$$|Fx| = \left| \int_a^b f dx \right| \leq \max_t |f(t)| \operatorname{Var}_a^b x(t) = \max_t |f(t)| \|x\|.$$

Будем считать, что $\max |f(t)|$ достигается в некоторой точке t_0 и предположим, что t_0 лежит внутри $[a, b]$. Взяв

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0, \\ \frac{1}{2} & \text{при } t = t_0, \\ 1 & \text{при } t > t_0, \end{cases}$$

можно убедиться, что полученная верхняя оценка для $|F(x)|$ достигается. Этим (4.2.8) доказано.

§ 3. Сходимость последовательности линейных операторов

Пусть X и Y — банаховы пространства. Рассмотрим последовательность линейных операторов $H_n (n=1, 2, \dots)$, заданных на X , значения которых принадлежат Y . Последовательность H_n будет называться *сходящейся*, если при всяком $x \in X$ будет сходиться последовательность элементов $y_n = H_n x$ (в пространстве Y). Обозначим $\lim H_n x = y = Hx$. Оператор H — аддитивный. Действительно, если в равенстве $H_n(x_1 + x_2) = H_n x_1 + H_n x_2$ перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$, то получим

$$H(x_1 + x_2) = Hx_1 + Hx_2.$$

Но можно показать, что оператор H будет линейным. Докажем предварительно лемму.

Лемма. Если последовательность операторов $H_n (n=1, 2, \dots)$ сходится, то нормы их $\|H_n\| (n=1, 2, \dots)$ ограничены в совокупности:

$$\|H_n\| \leq M. \quad (4.3.1)$$

Доказательство. Допустим противоположное. Множество элементов x , удовлетворяющих условию $\|x - x_0\| \leq \varepsilon$, назовем *замкнутым шаром* радиуса ε с центром x_0 и обозначим $S(x_0, \varepsilon)$. Покажем, что $\|H_n x\|$ не могут быть ограничены в совокупности ни в каком замкнутом шаре. Действительно, пусть

$$\|H_n x\| \leq K \quad (4.3.2)$$

для $n=1, 2, \dots$ и при всяких x из шара $S(x_0, \varepsilon)$. Для любого x из X элемент

$$x' = \frac{\varepsilon}{\|x\|} x + x_0$$

принадлежит $S(x_0, \varepsilon)$. Поэтому

$$\|H_n x'\| = \left\| \frac{\varepsilon}{\|x\|} H_n x + H_n x_0 \right\| \leq K$$

и

$$\frac{\varepsilon}{\|x\|} \|H_n x\| - \|H_n x_0\| \leq K.$$

Отсюда

$$\|H_n x\| \leq \frac{K + \|H_n x_0\|}{\varepsilon} \|x\|.$$

Последовательность элементов $H_n x_0$ сходится и нормы их $\|H_n x_0\|$ ограничены в совокупности. Должно, следовательно, существовать число K_1 , не зависящее от n и x , такое, что

$$\|H_n x\| \leq K_1 \|x\|.$$

Поэтому

$$\|H_n\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|H_n x\| \leq K_1,$$

а это противоречит допущению и неравенство (4.3.2) не может быть верным.

Возьмем любой замкнутый шар $S_0(x_0, \varepsilon)$. В нем последовательность $\|H_n x\|$ неограничена. Найдется, следовательно, такой оператор H_{n_1} и такой элемент $x_1 \in S_0$, что

$$\|H_{n_1} x_1\| > 1.$$

Ввиду непрерывности оператора H_{n_1} это неравенство будет выполняться в некотором замкнутом шаре $S_1(x_1, \varepsilon_1)$, содержащемся в S_0 . По аналогичной причине найдется оператор H_{n_2} и элемент $x_2 \in S_1$ такие, что

$$\|H_{n_2} x_2\| > 2$$

и т. д. Можно считать, что $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Для построенной последовательности элементов $x_1, x_2, \dots$ будет выполняться признак Больцано — Коши. Пространство X полное и последовательность будет сходиться к некоторому элементу $x^* \in X$

$$x_n \rightarrow x^*, \quad n \rightarrow \infty,$$

x^* будет принадлежать всем сферам $S_k (k = 1, 2, \dots)$.

При этом для элемента x^*

$$\|H_{n_k} x^*\| > k.$$

Последнее же противоречит тому, что последовательность $H_n x$ сходится для любого $x \in X$.

На основании леммы просто доказывается линейность предельного оператора H . Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в неравенстве

$$\|H_n x\| \leq M \|x\|,$$

получим

$$\|Hx\| \leq M \|x\|.$$

Оператор H ограничен и, ввиду аддитивности, непрерывен и линеен.

Условия, которым должны удовлетворять операторы последовательности H_n ($n=1, 2, \dots$) для того, чтобы она была сходящейся, указываются в следующей теореме С. Банаха.

Теорема 1. Для того, чтобы последовательность линейных операторов H_n ($n=1, 2, \dots$) была сходящейся, необходимо и достаточно выполнение двух условий:

- 1) нормы операторов $\|H_n\|$ ограничены в совокупности,
- 2) сходимость $H_n x$ имеет место для всякого x из множества E всюду плотного в X^*).

Доказательство. Необходимость второго условия очевидна, необходимость же первого вытекает из леммы.

Достаточность условий может быть проверена следующим путем. Пусть $\|H_n\| \leq M$. Возьмем произвольный $x \in X$ и найдем такой элемент $\bar{x} \in E$, что $\|x - \bar{x}\| < \frac{\varepsilon}{3M}$. Последовательность $H_n \bar{x}$ сходится по условию 2 и для больших n будет.

$$\|H_{n+m} \bar{x} - H_n \bar{x}\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|H_{n+m} x - H_n x\| &\leq \|H_{n+m} x - H_{n+m} \bar{x}\| + \|H_{n+m} \bar{x} - H_n \bar{x}\| + \\ &+ \|H_n \bar{x} - H_n x\| \leq 2M \|x - \bar{x}\| + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Поэтому последовательность $H_n x$ выполняет условие Больцано — Коши и, ввиду полноты Y , существует при каждом $x \in X$ предел $y = Hx = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n x$.

Как показано выше, предельный оператор H линейный.

ЛИТЕРАТУРА

Люстерник Л. А., Основные понятия функционального анализа, Усп. матем. наук, 1936, в. 1.

Люстерник Л. А. и Соболев В. И., Элементы функционального анализа, Гостехиздат, 1951.

Канторович Л. В., Функциональный анализ и прикладная математика, Усп. матем. наук, 1948 т. III, 6 (28).

*) Множество E называется *всюду плотным* в X , если каждый элемент $x \in X$ может быть приближен по норме сколь угодно точно элементами из E .

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

ГЛАВА 5

КВАДРАТУРНЫЕ СУММЫ И ЗАДАЧИ С НИМИ СВЯЗАННЫЕ. ОСТАТОК ПРИБЛИЖЕННОЙ КВАДРАТУРЫ

§ 1. Квадратурные суммы

Задачу нахождения численного значения однократного интеграла, ввиду известного ее геометрического значения, часто называют, для сокращения речи, квадратурой. В книге изучаются такие методы квадратур, которые позволяют приближенно вычислить интеграл при помощи конечного числа значений интегрируемой функции и производных от нее. Эти методы являются универсальными и могут применяться там, где другие методы вычисления интегралов оказываются бессильными. Кроме того, применение этих методов во многих случаях требует затраты меньшего вычислительного труда, сравнительно с другими методами.

Рассмотрим интеграл вида

$$\int_a^b p(x)f(x)dx;$$

$[a, b]$ — любой конечный или бесконечный отрезок числовой оси, f — произвольная функция некоторого класса. Для упрощения изложения допустим, в границах этой главы, что все функции f непрерывны. $p(x)$ есть некоторая фиксированная функция. Ее мы будем предполагать измеримой на $[a, b]$, неэквивалентной нулю и такой, что произведение ее на любую функцию f суммируемо на $[a, b]$. Какое либо предположение о знаке $p(x)$ в ближайшем изложении нам не потребуется.

Наиболее распространенными в приложениях являются квадратурные формулы, позволяющие приближенно находить значение интеграла в форме линейной комбинации нескольких значений функции

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (5.1.1)$$

Сумма $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$ ниже будет называться *квадратурной суммой*.

Равенства вида (5.1.1) получили название формул механических квадратур *). Они содержат следующие $2n + 1$ параметров, которыми можно распорядиться при их построении: n абсцисс, или „узлов“ x_k , n коэффициентов A_k и число узлов n . Все эти параметры надлежит выбрать так, чтобы формула (5.1.1) давала бы „достаточно малую погрешность“ для всех функций f из некоторого широкого класса. При описании идей, связанных с построением квадратурных сумм, мы не будем точно определять, что следует понимать под „малой погрешностью“ и сколь широким должен быть класс функций f . Точное содержание этих слов будет выяснено ниже.

Непосредственно ясно, что чем большее значение имеет n , тем большей точности можно достигнуть в равенстве (5.1.1) за счет выбора x_k и A_k . Поэтому, при построении формул приближенных квадратур, n считают произвольным, но фиксированным натуральным числом.

При применении (5.1.1) наибольшее количество труда, обычно, затрачивается на нахождение значений $f(x_k)$ ($k = 1, \dots, n$). После того, как $f(x_k)$ найдены, составление квадратурной суммы $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$, если n не будет очень большим, выполняется сравнительно легко. Поэтому естественно стремиться к тому, чтобы достигнуть нужной точности вычислений с возможно малым числом n узлов x_k . Для построения же квадратурных сумм это равносильно тому, чтобы при заданном n постараться возможно лучшим образом воспользоваться выбором x_k и A_k для повышения точности формулы (5.1.1). До настоящего времени исследования проводились преимущественно в следующих направлениях.

*) Формуле (5.1.1) легко придать механический смысл. Введем величину $P = \int_a^b p dx$ и запишем (5.1.1) в виде $P^{-1} \int_a^b p f dx \approx \sum_{k=1}^n B_k f(x_k)$. Здесь коэффициенты B_k будут отвлеченными числами. Условимся толковать их как „веса“, приписываемые соответствующим значениям $f(x_k)$. Если требовать, чтобы равенство было верным, когда f есть величина постоянная, то B_k должны быть подчинены условию $\sum_{k=1}^n B_k = 1$. Сумма $\sum_{k=1}^n B_k f(x_k)$ тогда будет иметь смысл среднего взвешенного значения, составленного из $f(x_k)$. Задача построения равенства приводится к такому нахождению весов B_k , чтобы среднее взвешенное значение из $f(x_k)$ было приближенно равно среднему интегральному значению f на отрезке $[a, b]$: $P^{-1} \int_a^b p f dx$.

1. Допустим, что нам заранее задан некоторый класс F функций f . Наряду с ним рассмотрим систему функций

$$\omega_m(x) \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (5.1.2)$$

таких, что произведения $p(x)\omega_m(x)$ суммируемы на $[a, b]$. Образует линейную комбинацию

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \omega_k(x).$$

При вычислении интеграла $\int_a^b pf dx$, за „расстояние“ между f и s_n можно принять величину

$$\rho(f, s_n) = \int_a^b |p(f - s_n)| dx. \quad (5.1.3)$$

Систему (5.1.2) будем считать полной в классе F , т. е. такой, что для каждой функции $f \in F$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такая линейная комбинация s_n , для которой $\rho(f, s_n) < \varepsilon$.

Ввиду неравенства

$$\left| \int_a^b pf dx - \int_a^b ps_n dx \right| \leq \int_a^b |p(f - s_n)| dx = \rho(f, s_n),$$

отсюда вытекает, что интеграл $\int_a^b pf dx$ может быть вычислен со сколь угодно высокой точностью, если интегрируемую функцию f заменить надлежаще выбранной линейной комбинацией s_n .

При этом, очевидно, можно достигнуть тем большей точности вычислений, чем большее число первых функций ω_k брать при образовании s_n .

Можно ожидать, что если мы выбором узлов x_k и коэффициентов A_k в формуле (5.1.1) достигнем хорошей точности в интегрировании функций ω_n , то тогда формула (5.1.1) должна будет также дать хороший по точности результат при вычислении интеграла от всякой функции $f \in F$. Эти несложные соображения имеют, разумеется, только наводящее значение и погрешность построенной формулы должна быть подвергнута точному анализу и оценке. Но они позволяют указать простой принцип выбора x_k и A_k : будем стремиться выбором x_k и A_k добиться того, чтобы формула (5.1.1) давала точный результат для возможно большего числа первых функций $\omega_n(x)$.

Говорят, что равенство (5.1.1) имеет степень точности m относительно функций (5.1.2), если оно верно для $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$:

$$\int_a^b p\omega_i dx = \sum_{k=1}^n A_k \omega_i(x_k) \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

и не верно для ω_{m+1} . Указанный выше путь выбора x_k и A_k есть путь повышения степени точности равенства (5.1.1). С этой точки зрения, особый интерес имеют формулы приближенных квадратур, которые обладают наивысшей возможной степенью точности. Такие формулы мы и будем иметь в виду в ближайшем изложении.

Если класс F задан, то при построении равенства (5.1.1), служащего для интегрирования функций f , остается еще произвол в выборе системы функций ω_n ($n=1, 2, \dots$). Требование полноты, которому должна удовлетворять система, не вполне определяет ее и оставляет еще широкие возможности выбора ω_n .

Приближенные квадратурные формулы, которые имеются в виду сейчас, учитывают свойства функций ω_n . Если мы хотим, чтобы такие формулы давали хорошую точность, нужно ω_n выбрать так, чтобы свойства ω_n были согласованы со свойствами f и можно думать, что погрешность (5.1.1) будет тем меньше, чем более точное приближение при помощи линейной комбинации s_n будет допускать функция f для фиксированного n .

Приведем теперь примеры выбора ω_n . Пусть $[a, b]$ есть любой конечный отрезок. Известно, что какова бы ни была функция f , непрерывная на $[a, b]$, для всякого $\varepsilon > 0$ существует многочлен $P(x)$, отличающийся от $f(x)$ при любых $x \in [a, b]$ меньше чем на ε :

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Это есть свойство полноты алгебраических многочленов в пространстве непрерывных функций C . Отсюда сразу же следует полнота системы многочленов и в смысле метрики (5.1.3).

Примем систему степеней x : $1, x, x^2, \dots$ — за функции ω_n и будем говорить, что равенство (5.1.1) имеет алгебраическую степень точности m , если оно верно для всевозможных многочленов степени m и не верно для многочленов степени $m+1$. Это равносильно тому, что равенство

$$\int_a^b p x^i dx = \sum_{k=1}^n A_k x_k^i$$

выполняется для $i=0, 1, \dots, m$ и не выполняется для $i=m+1$.

Можно ожидать, что (5.1.1) будет иметь тем меньшую погрешность для многих непрерывных на $[a, b]$ функций, чем выше будет его алгебраическая степень точности.

Система степеней x^n ($n = 0, 1, \dots$) является достаточно удобным основанием для построения квадратурных формул наивысшей степени точности для любого конечного отрезка $[a, b]$.

Допустим теперь, что отрезок интегрирования бесконечный, например, пусть это есть отрезок $0 \leq x < \infty$. Возьмем какое-нибудь подмножество F функций f , непрерывных на $[0, \infty)$. На каждом конечном отрезке $0 \leq x \leq b < \infty$ можно построить многочлен $P(x)$, приближающий f равномерно с любой наперед заданной точностью. Но $P(x)$ может не давать равномерного приближения f на всей полуоси и разность $f - P$ при больших x может иметь большие значения. Несмотря на это, если вес $p(x)$ достаточно быстро убывает при $x \rightarrow \infty$, может оказаться, что для любой $f \in F$ интеграл $\int_0^\infty |p(f - P)| dx$ может быть сделан сколь угодно малым, и система

степеней x^n тогда будет полной в классе F по метрике (5.1.3). В этом случае квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности также могут применяться для приближенного вычисления интегралов вида $\int_0^\infty p f dx$. С формулами такого рода мы ознакомимся ниже более подробно.

В связи с этим мы хотим остановить внимание читателя на одном примере, более отчетливо выясняющем как при выборе функций ω_n их свойства следует согласовать с классом F интегрируемых функций. Рассмотрим функции f , непрерывные и имеющие асимптотическое представление на отрезке $0 \leq x < \infty$ вида

$$f(x) \sim c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots$$

Каждый многочлен $P(x)$, степень которого больше нуля, неограниченно возрастает при $x \rightarrow \infty$, при этом порядок роста тем выше, чем старше степень многочлена. Поведение многочлена на полуоси $[0, \infty)$ существенно отличается от поведения ограниченных функций и многочлены, по-видимому, нельзя признать удачным средством приближения функций, ограниченных на $[0, \infty)$. Для некоторых весовых функций $p(x)$ может оказаться, что приближенные квадратуры наивысшей степени точности, в основании которых положена система степеней x^n , будут давать медленную сходимость при $n \rightarrow \infty$ к значению интеграла и для получения нужной точности может потребоваться большое число узлов.

Для приближения функций рассматриваемого типа по своему характеру более подходят рациональные функции некоторого частного вида, например, функции $(x+1)^{-k}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Можно предвидеть, что если за функции $\omega_k(x)$ принять указанные рациональные дроби и построить соответствующие им квадратурные

формулы наивысшей степени точности, то они должны, вообще говоря, дать лучшую точность при том же числе узлов n .

Остановимся, наконец, еще на одном случае выбора $\omega_n(x)$. Возьмем 2π -периодические функции и допустим, что вычислению подлежат интегралы вида

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

За функции ω_n тогда естественно выбрать тригонометрические функции $\cos kx$, $\sin kx$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Как оказывается, в этом последнем случае формулы наивысшей степени точности являются элементарными и строятся без затруднений. Ввиду простоты вопроса, мы не будем откладывать их построение до следующих глав. Однако, чтобы не прерывать изложения идей, связанных с выбором узлов и коэффициентов, выделим изучение таких формул в отдельный параграф и займемся ими немного ниже.

2. Допустим, что задан класс F функций f . Постараемся построить квадратурную формулу (5.1.1), которую можно было бы признать в смысле, выясняемом несколькими строками ниже, „наилучшей“ для заданного класса. Для каждой функции f погрешность формулы (5.1.1) имеет значение

$$R(f) = \int_a^b pf dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

За величину, характеризующую точность квадратурной формулы для всех функций f , может быть взята верхняя грань $|R(f)|$

$$R = \sup_f |R(f)|.$$

Здесь R зависит от x_k и A_k . Желая достигнуть возможно лучшей точности для всех функций $f \in F$, можно выбирать x_k и A_k так, чтобы R имело бы наименьшее возможное значение. Такую формулу ниже будем называть *формулой с наименьшей оценкой остатка в классе F* .

3. Указанные сейчас два направления в проблеме выбора узлов и коэффициентов, разумеется, не являются единственными. Можно строить квадратурные формулы, подчиняя выбор узлов и коэффициентов другим целям. Укажем еще на одну задачу такого рода. Предварительно заметим, что сделать формулу (5.1.1) верной для функции, сохраняющей постоянное значение на $[a, b]$, можно только за счет выбора коэффициентов A_k . Если потребовать, чтобы (5.1.1) была верной для $f \equiv 1$, то получится следующее условие:

$$\sum_{k=1}^n A_k = \int_a^b p(x) dx. \quad (5.1.4)$$

Предположим, что значения $f(x_k)$ функции f , входящие в квадратурную сумму, находятся из измерений и содержат случайные погрешности. Допустим, кроме того, что все $f(x_k)$ получены в результате измерений одинаковой точности.

Значение квадратурной суммы также будет содержать случайную погрешность. Можно поставить себе задачей так выбрать коэффициенты A_k , чтобы квадратурная сумма $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$, при выполнении условия (5.1.4), имела бы наименьшую квадратичную погрешность. Известно, что если аргументы $z_1, \dots, z_n$ линейной функции $y = a_1 z_1 + \dots + a_n z_n$ есть случайные величины, подчиняющиеся нормальным законам распределения с одной и той же квадратичной погрешностью, и если коэффициенты линейной функции подчинены условию $\sum_{k=1}^n a_k = 1$, то средняя квадратичная погрешность суммы будет иметь наименьшее значение в том случае, когда все коэффициенты равны между собой *). Поэтому квадратурная формула с равными коэффициентами

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx C [f(x_1) + \dots + f(x_n)] \quad (5.1.5)$$

будет иметь наименьшую квадратичную погрешность. Вместе с тем такие формулы особенно удобны при графических вычислениях, так как сумма ординат может быть снята с чертежа при помощи простейших графических приборов.

Упомянем еще об одном требовании, которое должно быть обязательно предъявлено к квадратурным суммам и имеет большое значение в приложениях. При вычислениях, почти всегда, приходится иметь дело с приближенными значениями $f(x_k)$, верными на некоторое число значащих цифр.

Пусть все значения $f(x_k)$ известны с погрешностями, не превосходящими по абсолютной величине числа ϵ . Вычисляя при помощи приближенных значений $f(x_k)$ квадратурную сумму $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$, мы

*) Если случайные переменные $z_1, \dots, z_n$ подчиняются нормальным законам распределения со средними квадратичными погрешностями $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ и y есть линейная функция от них: $y = a_1 z_1 + \dots + a_n z_n$, то y также подчиняется нормальному закону распределения со средней квадратичной погрешностью $\sum (a_1^2 \sigma_1^2 + \dots + a_n^2 \sigma_n^2)^{1/2}$ (см., например, С. Н. Бернштейн, Теория вероятностей, Гостехиздат, 1946, с. 269—272). Для $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n = \sigma$ будем иметь $\sum = \sigma (a_1^2 + \dots + a_n^2)^{1/2}$ и, при условии $a_1 + \dots + a_n = 1$, $\sum$ будет иметь минимум в том случае, когда все a_k одинаковы.

получим ее значение с погрешностью, которая должна быть оценена величиной

$$\varepsilon \sum_{k=1}^n |A_k|.$$

Такая оценка является точной и не может быть уменьшена. Если сумма $\sum_{k=1}^n |A_k|$ велика, то даже малые погрешности в значениях $f(x_k)$ могут вызвать большую погрешность в приближенном значении интеграла. При построении квадратурных формул, поэтому, всегда стремятся к тому, чтобы сумма абсолютных величин ее коэффициентов имела бы возможно малое значение.

В одном важном частном случае легко указать условие, при котором $\sum_{k=1}^n |A_k|$ будет иметь наименьшее возможное значение. Будем считать вес $p(x)$ неотрицательной функцией

$$p(x) \geq 0, \quad x \in [a, b].$$

Кроме того предположим, что квадратурная формула верна для $f \equiv 1$, что равносильно равенству (5.1.4) для коэффициентов A_k . Тогда, очевидно, $\sum_{k=1}^n |A_k|$ будет иметь наименьшее значение в том случае, когда все коэффициенты A_k будут положительными $A_k > 0$. Этот факт является одной из причин, в силу которых квадратурные формулы с положительными коэффициентами имеют особо важное значение для приложений.

§ 2. Замечание о приближенном интегрировании периодических функций

Пусть отрезок интегрирования $[a, b]$ — конечный. Всегда можно, путем линейного преобразования, привести его к отрезку $[0, 2\pi]$. Рассмотрим интеграл вида

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad (5.2.1)$$

где $f(x)$ есть 2π -периодическая функция. Как и выше, будем исследовать приближенные квадратурные формулы вида

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (5.2.2)$$

Здесь x_k принадлежат отрезку $0 \leq x < 2\pi$.

По очевидной причине, за аппарат для приближения периодических функций принимают не алгебраические, а тригонометрические многочлены. Напомним, что тригонометрическим многочленом степени m называют функцию следующего вида

$$T_m(x) = a_0 + \sum_{k=1}^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (5.2.3)$$

где a_0, a_k, b_k ($k = 1, \dots, m$) — некоторые постоянные.

Будем говорить, что формула (5.2.2) имеет тригонометрическую степень точности m , если она верна для всевозможных тригонометрических многочленов до степени m включительно и существует многочлен степени $m+1$, для которого она не верна.

Легко проверить, что каковы бы ни были узлы x_k и коэффициенты A_k , формула (5.2.2) не может быть верной для всех тригонометрических многочленов степени n .

Составим функцию

$$T(x) = \prod_{k=1}^n \sin^2 \frac{x - x_k}{2}.$$

Так как $\sin^2 \frac{x - x_k}{2} = \frac{1}{2} [1 - \cos(x - x_k)]$, то ясно, что $T(x)$ есть многочлен степени n . Для него квадратурная формула (5.2.2) не может

быть точной, так как $\int_0^{2\pi} T(x) dx > 0$, тогда как $\sum_{k=1}^n A_k T(x_k) = 0$,

ввиду того, что все узлы x_k являются корнями многочлена $T(x)$.

Тригонометрическая степень точности (5.2.2), поэтому, всегда меньше n и выбором A_k и x_k мы можем рассчитывать ее сделать, самое большее, равной $n-1$.

Оказывается, что наивысшая степень точности $n-1$ достигается простейшей квадратурной формулой с равными коэффициентами:

$$A_k = \frac{2\pi}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

и равноотстоящими узлами.

Рассмотрим на числовой оси любую сетку равноотстоящих точек с шагом $h = \frac{2\pi}{n}$. Пусть α есть точка сетки, ближайшая к нулю справа или совпадающая с нулем. Точки $\alpha + kh$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) лежат на отрезке $0 \leq x < 2\pi$. Примем их за узлы x_k и построим квадратурную формулу

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx \approx \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\alpha + (k-1) \frac{2\pi}{n}\right). \quad (5.2.4)$$

Покажем, что она является точной для всевозможных тригонометрических многочленов до степени $n-1$ включительно. Для этого достаточно показать, что равенство (5.2.4) будет точным для функций e^{imx} ($m=0, 1, \dots, n-1$). В случае $m=0$ утверждение, очевидно, верно. При $1 \leq m \leq n-1$

$$\int_0^{2\pi} e^{imx} dx = \frac{1}{im} (e^{im2\pi} - 1) = 0$$

и

$$\sum_{k=1}^n e^{im[\alpha + (k-1)h]} = e^{im\alpha} \sum_{k=1}^n e^{i(k-1)mh} = e^{im\alpha} \frac{e^{imnh} - 1}{e^{imh} - 1} = e^{im\alpha} \frac{e^{im2\pi} - 1}{e^{imh} - 1} = 0,$$

что и доказывает утверждение.

§ 3. Об остатке приближенной квадратуры и его представлении

Значение остатка квадратуры

$$R(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (5.3.1)$$

зависит как от выбора квадратурной формулы, которая определяется узлами x_k и коэффициентами A_k , так и от свойств интегрируемой функции f . Формула (5.3.1) есть одно из возможных представлений остатка, но оно недостаточно в том отношении, что при помощи него часто бывает весьма трудно проследить какое влияние на $R(f)$ оказывают те или иные структурные*) свойства f . Выражение (5.3.1) рассчитано на весьма широкий класс функций. Оно верно при любой

функции f , для которой имеет смысл $\int_a^b p f dx$ и которая имеет конечные значения в узлах x_k . Ввиду своей общности, оно не учитывает других свойств f .

Чтобы упростить задачу исследования $R(f)$, полезно построить иные представления остатка, которые позволяли бы легко проследить влияние, оказываемое на величину $R(f)$ такими свойствами функции f , как порядок ее дифференцируемости, степень удаленности от $[a, b]$ особых точек f и т. п. Среди представлений этого вида особое значение имеют представления, характерные для тех или иных структурных классов функций.

*) Под „структурными свойствами“ функции понимаются такие свойства, как ограниченность изменения, абсолютная непрерывность, выполнение условия Липшица, принадлежность к тому или иному классу дифференцируемости и т. п.

Будем считать, что нам задано множество F интегрируемых функций f . Остаток $R(f)$ есть функционал, определенный на множестве F . В функциональном анализе известны теоремы об общих формах линейных функционалов, определенных на некоторых конкретных линейных пространствах. Этими теоремами можно было бы воспользоваться для построения представления остаточных членов $R(f)$ во многих случаях множеств F^*).

Для задач, которые будут рассматриваться в дальнейшем, чтобы найти нужные представления остатка $R(f)$, достаточно было прибегнуть к простым средствам классического анализа, более быстро приводящим к цели.

Если рассматривается класс F функций, обладающих каким-либо структурным свойством, то часто можно указать такую формулу, которая способна представить всякую функцию класса F и может представлять функции только этого класса. Такую формулу называют *характерным представлением класса F* или его *структурной формулой*.

Если структурная формула класса F известна, то при помощи нее, принципиально говоря, могут быть получены все нужные сведения о классе F , в частности, может быть построено представление остатка квадратуры, характерное для функций класса F . Такие представления остатка будут ниже строиться каждый раз, когда это потребует по ходу рассуждений.

Сейчас же мы ограничимся только одним примером, поясняющим все сказанное выше.

Говорят, что функция f принадлежит классу $C_r[a, b]$, если она r раз непрерывно дифференцируема на $[a, b]$. Характерное представление функций этого класса доставляет формула Тейлора. Если $f \in C_r[a, b]$ и α — любая точка отрезка $[a, b]$, то

$$f(x) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(\alpha)}{i!} (x - \alpha)^i + \int_{\alpha}^x f^{(r)}(t) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt. \quad (5.3.2)$$

Для дальнейшего удобно заменить интеграл с переменной границей на определенный интеграл по отрезку $[a, b]$. Это можно сделать, если ввести „гасящую“ функцию, позволяющую уничтожить в определенном интеграле лишние участки интегрирования. Определим $E(x)$ равенствами

$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ \frac{1}{2} & \text{„ } x = 0, \\ 0 & \text{„ } x < 0. \end{cases}$$

*) См. литературу, указанную в конце главы.

Легко проверить, что равенство (5.3.2) может быть записано в форме

$$f(x) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(\alpha)}{i!} (x-\alpha)^i + \int_a^b f^{(r)}(t) \{E(x-t) - E(\alpha-t)\} \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt. \quad (5.3.3)$$

В правую часть (5.3.3) входят r численных параметров $f^{(i)}(\alpha)$ ($i=0, 1, \dots, r-1$) и функциональный параметр $f^{(r)}(t)$, являющийся непрерывной функцией на $[a, b]$.

Всякая функция f из $C_r[a, b]$ представима в форме (5.3.3). Наоборот, каковы бы ни были численные параметры $f^{(i)}(\alpha)$ ($i=0, 1, \dots, r-1$) и какова бы ни была непрерывная на $[a, b]$ функция $f^{(r)}(t)$, функция $f(x)$, определенная равенством (5.3.3), принадлежит $C_r[a, b]$.

Если промежуток интегрирования не совпадает со всей числовой осью, то часто, чтобы не вводить лишнего параметра, за α принимают один из концов $[a, b]$. Например, если за α принять левый конец a , то формула (5.3.3) упростится и примет вид:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i + \int_a^b f^{(r)}(t) E(x-t) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt, \quad (5.3.4)$$

$r \geq 1.$

Если это не будет вызывать неясности, в обозначениях классов функций знак отрезка $[a, b]$ будет опускаться. Возвратимся к остатку квадратуры (5.3.1); $R(f)$ является аддитивным функционалом, определенным на некотором множестве функций.

Пусть интегрируемая функция f принадлежит классу C_r . Ниже мы попытаемся определить, какое влияние на величину остатка и на сходимость квадратурного процесса может оказать r -кратная дифференцируемость f . Для этой цели целесообразно получить представление $R(f)$, характерное для класса C_r . Оно может быть найдено, если в (5.3.1) вместо f внести ее выражение (5.3.3):

$$R(f) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(\alpha)}{i!} R[(x-\alpha)^i] + R \left[\int_a^b f^{(r)}(t) \{E(x-t) - E(\alpha-t)\} \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt \right]. \quad (5.3.5)$$

Будем считать, что в двукратном интеграле

$$\int_a^b p(x) \int_a^b f^{(r)}(t) \{E(x-t) - E(\alpha-t)\} \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt dx,$$

входящем в последний член правой части равенства, допустима перемена порядка интегрирования. При принятых предположениях о весовой функции $p(x)$, это, наверное, возможно, если $[a, b]$ конечный отрезок. Тогда (5.3.5) преобразуется и примет форму

$$R(f) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(\alpha)}{i!} R[(x-\alpha)^i] + \int_a^b f^{(r)}(t) K(t) dt, \quad (5.3.6)$$

где ядро остатка $K(t)$ имеет вид

$$K(t) = \int_a^b p(x) \{E(x-t) - E(\alpha-t)\} \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dx - \\ - \sum_{k=1}^n A_k \{E(x_k-t) - E(\alpha-t)\} \frac{(x_k-t)^{r-1}}{(r-1)!} \dots \quad (5.3.7)$$

Если считать $t \neq \alpha$ и $t \neq x_k$ ($k=1, \dots, n$), то для $K(t)$ легко получить следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} t < \alpha, \quad K(t) &= - \int_a^t p(x) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dx + \sum_{x_k < t} A_k \frac{(x_k-t)^{r-1}}{(r-1)!}, \\ t > \alpha, \quad K(t) &= \int_t^b p(x) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dx - \sum_{x_k > t} A_k \frac{(x_k-t)^{r-1}}{(r-1)!}. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.8)$$

Аналогично может быть построено представление остатка для других классов функций, когда известны характерные их представления, например, для аналитических функций.

В главах 8 и 12 мы увидим, что специализированные представления остатка, о которых говорилось выше, позволяют достаточно просто решить задачу о нахождении точных оценок $R(f)$ и о сходимости квадратурных процессов для некоторых классов функций.

ЛИТЕРАТУРА

Radon, Restausdrücke bei Interpolations- und Quadraturformeln durch bestimmte Integrale, Monatshefte für Mathematik und Physik, 1935, 42, 389—396.

Ремез Е. Я., „1) О некоторых классах...“ Труды Инст. матем. АН УССР, 1940, 4, 47—82. 2) Об остаточных членах некоторых формул приближенного анализа, ДАН СССР, 1940, 26, 130—134.

Sard A., Integral Representations of Remainders, Duke Math. Journ. 15, 333—345.

Kneschke A., Theorie der genäherten Quadratur, J. reine und angew. Math. 187, 115—128.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ КВАДРАТУРЫ

§ 1. Интерполяционные квадратурные формулы и их остаточные члены

Для построения квадратурных сумм часто пользуются интерполированием функции. Во многих случаях построенные таким путем квадратурные формулы обладают хорошей точностью и достаточно удобны для применений.

Выберем на отрезке интегрирования $[a, b]$ n произвольных точек $x_1, x_2, \dots, x_n$ и интерполируем функцию f по ее значениям в этих точках *)

$$f(x) = P(x) + r(x), \quad (6.1.1)$$

$$P(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\omega(x)}{(x-x_k) \omega'(x_k)} f(x_k), \quad \omega(x) = (x-x_1) \dots (x-x_n). \quad (6.1.2)$$

Здесь $r(x)$ — остаток интерполирования.

Точное значение интеграла $\int_a^b p f dx$ будет

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \int_a^b p(x) P(x) dx + \int_a^b p(x) r(x) dx.$$

Если интерполирование (6.1.1) было достаточно точным и остаток $r(x)$ имел малые значения всюду на отрезке $[a, b]$, то вторым

*) Мы считаем, что функция f определена только в точках отрезка $[a, b]$ и должны поэтому предполагать x_k ($k = 1, \dots, n$) принадлежащими $[a, b]$. Если f известна и вне отрезка интегрирования, то x_k не обязательно все должны принадлежать $[a, b]$. Квадратурные суммы, содержащие узлы, расположенные вне $[a, b]$, особенно часто применяются при интегрировании аналитических функций.

членом в предыдущем равенстве можно пренебречь. После этого получится приближенное равенство

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (6.1.3)$$

где

$$A_k = \int_a^b p(x) \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} dx. \quad (6.1.4)$$

Квадратурные формулы (6.1.3), коэффициенты которых имеют значения (6.1.4), называются *интерполяционными*. Они могут быть охарактеризованы следующей простой теоремой.

Теорема 1. *Для того, чтобы квадратурная формула (5.1.1) была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы она была точной для всевозможных многочленов степени не выше $n-1$.*

Доказательство. Действительно, всякий многочлен $P(x)$ степени $\leq n-1$ может быть представлен в форме $P(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} P(x_k)$.

Если коэффициенты A_k имеют значения (6.1.4), то равенство (6.1.3), очевидно, будет точным для $P(x)$.

Заметим, что в указанном выше представлении $P(x)$ значения $P(x_k)$ могут быть любыми числами. Требование, чтобы (6.1.3) было точным для всех многочленов степени $\leq n-1$, равносильно тому, что при всяких $P(x_k)$ должно быть

$$\int_a^b p(x) \sum_{k=1}^n \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} P(x_k) dx = \sum_{k=1}^n A_k P(x_k).$$

Но тогда коэффициенты A_k должны иметь значения (6.1.4) и формула (6.1.3) будет интерполяционной.

Как видно из приведенной теоремы, коэффициенты A_k квадратурной формулы вполне определяются условием, чтобы формула давала точный результат всякий раз, когда f есть многочлен степени $\leq n-1$. Узлы же x_k квадратурной формулы при этом остаются произвольными и возможностью их выбора можно воспользоваться для достижения тех или иных целей.

Для остатка интерполяционной квадратуры верно все, что говорилось в § 3 главы 5 об остатке общей квадратурной формулы (5.1.1), но, кроме того, могут быть получены другие, немного более глубокие результаты.

Остаток квадратуры (6.1.3) равен интегралу от остатка $r(x)$

$$R(f) = \int_a^b p(x) r(x) dx = \int_a^b p(x) \omega(x) f(x, x_1, \dots, x_n) dx. \quad (6.1.5)$$

Это дает возможность воспользоваться, при его исследовании, всеми известными теоремами об остатке интерполирования. Например, если $f(x)$ будет n -кратно непрерывно дифференцируемой на $[a, b]$, то $r(x)$ можно представить формулой вида (3.2.8). При принятых сейчас обозначениях получится следующее выражение остатка $R(f)$:

$$R(f) = \int_a^b p(x) \omega(x) \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n f^{(n)} \left(x + \sum_{v=1}^n t_v (x_v - x_{v-1}) \right) dx, \quad (6.1.6)$$

$$x_0 = x.$$

Часто предпочитают пользоваться другим, более простым представлением $R(f)$, которое получается, если воспользоваться остатком интерполирования в лагранжевой форме $r(x) = \frac{\omega(x)}{n!} f^{(n)}(\xi)$, $a < \xi < b$:

$$R(f) = \frac{1}{n!} \int_a^b p(x) \omega(x) f^{(n)}(\xi) dx. \quad (6.1.7)$$

Нахождение точных оценок $R(f)$ из (6.1.7) затрудняет то обстоятельство, что не известна зависимость ξ от x .

Для функций, имеющих на $[a, b]$ производную порядка n , ограниченную по абсолютному значению числом M_n :

$$|f^{(n)}(x)| \leq M_n, \quad x \in [a, b], \quad (6.1.8)$$

из (6.1.6) вытекает оценка

$$|R(f)| \leq M_n \int_a^b |p(x) \omega(x)| dx. \quad (6.1.9)$$

Если $p(x) \omega(x)$ сохраняет знак на $[a, b]$, то оценка (6.1.9) является точной и улучшена быть не может. Попутно отметим, что точная оценка остатка для функций, удовлетворяющих условию (6.1.8), может быть, при любых $p(x)$ и узлах x_k ($k = 1, \dots, n$), легко получена из (5.3.10). Если положить $r = n$ и принять во внимание, что

при интерполяционной квадратуре остаток равен нулю для всякого многочлена степени $< n$, то для $R(f)$ получим

$$R(f) = \int_a^b f^{(n)}(t) K(t) dt, \quad (6.1.10)$$

где $K(t)$ имеет значение (5.3.6) при $r = n$.

Для функций вида (6.1.8) из (6.1.10) следует точная оценка $R(f)$:

$$|R(f)| \leq M_n \int_a^b |K(t)| dt. \quad (6.1.11)$$

§ 2. Формулы Ньютона — Котеса

Среди интерполяционных формул ранее всех были построены широко известные и часто применяемые формулы Ньютона — Котеса. Они относятся к случаю постоянного веса и конечного отрезка интегрирования. Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b f(x) dx. \quad (6.2.1)$$

Отрезок $[a, b]$ разделим на n одинаковых частей $h = \frac{b-a}{n}$. Построим интерполяционную квадратурную формулу с узлами $a, a+h, a+2h, \dots, a+nh=b$. Чтобы нахождение ее коэффициентов привести к вычислению величин, не зависящих от промежутка $[a, b]$, запишем формулу в виде

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \sum_{k=0}^n B_k^n f(a+kh). \quad (6.2.2)$$

Согласно (6.1.4), величины $B_k^n = (b-a)^{-1} A_k$ будут иметь значения

$$B_k^n = (b-a)^{-1} \int_a^b \frac{\omega(x)}{(x-a-kh)\omega'(a+kh)} dx,$$

где $\omega(x) = (x-a)(x-a-h) \dots (x-a-nh)$. Если ввести новую переменную t , положив $x = a+th$, то будет

$$\omega(x) = h^{n+1} t(t-1)(t-2) \dots (t-n), \quad x-a-kh = h(t-k),$$

$$\omega'(a+kh) = (-1)^{n-k} h^n k! (n-k)!, \quad \text{и таким образом,}$$

$$B_k^n = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!} \int_0^n t(t-1) \dots (t-k+1)(t-k-1) \dots$$

$$\dots (t-n) dt \quad (6.2.3)$$

Котесом были вычислены коэффициенты B_k^n для n от 1 до 10:

$$\begin{aligned}
 n=1; \quad B_0^1 &= B_1^1 = \frac{1}{2}; \\
 n=2; \quad B_0^2 &= B_2^2 = \frac{1}{6}, \quad B_1^2 = \frac{4}{6}; \\
 n=3; \quad B_0^3 &= B_3^3 = \frac{1}{8}, \quad B_1^3 = B_2^3 = \frac{3}{8}; \\
 n=4; \quad B_0^4 &= B_4^4 = \frac{7}{90}, \quad B_1^4 = B_3^4 = \frac{32}{90}, \quad B_2^4 = \frac{12}{90}; \\
 n=5; \quad B_0^5 &= B_5^5 = \frac{19}{288}, \quad B_1^5 = B_4^5 = \frac{75}{288}, \quad B_2^5 = B_3^5 = \frac{50}{288}; \\
 n=6; \quad B_0^6 &= B_6^6 = \frac{41}{840}, \quad B_1^6 = B_5^6 = \frac{216}{840}, \quad B_2^6 = B_4^6 = \frac{27}{840}; \\
 &B_3^6 = \frac{272}{840}; \\
 n=7; \quad B_0^7 &= B_7^7 = \frac{751}{17280}, \quad B_1^7 = B_6^7 = \frac{3577}{17280}, \quad B_2^7 = B_5^7 = \frac{1323}{17280}, \\
 &B_3^7 = B_4^7 = \frac{2989}{17280}; \\
 n=8; \quad B_0^8 &= B_8^8 = \frac{989}{28350}, \quad B_1^8 = B_7^8 = \frac{5888}{28350}, \quad B_2^8 = B_6^8 = \frac{-928}{28350}, \\
 &B_3^8 = B_5^8 = \frac{10496}{28350}, \quad B_4^8 = \frac{-4540}{28350}; \\
 n=9; \quad B_0^9 &= B_9^9 = \frac{2857}{89600}, \quad B_1^9 = B_8^9 = \frac{15741}{89600}, \quad B_2^9 = B_7^9 = \frac{1080}{89600}, \\
 &B_3^9 = B_6^9 = \frac{19344}{89600}, \quad B_4^9 = B_5^9 = \frac{5778}{89600}; \\
 n=10; \quad B_0^{10} &= B_{10}^{10} = \frac{16067}{598752}, \quad B_1^{10} = B_9^{10} = \frac{106300}{598752}, \quad B_2^{10} = B_8^{10} = \frac{-48525}{598752}, \\
 &B_3^{10} = B_7^{10} = \frac{272400}{598752}, \quad B_4^{10} = B_6^{10} = \frac{-260550}{598752}, \quad B_5^{10} = \frac{427368}{598752}.
 \end{aligned}$$

Из приведенной таблицы видно, что поведение коэффициентов B_k^n при изменении номера k , начиная с $n=4$ и, особенно, с $n=6$, вряд ли можно считать „правильным“. При $n=8$ встречаются отрицательные коэффициенты. Чтобы оценить формулы Ньютона — Котеса при большом числе узлов, получим асимптотические значения B_k^n для больших n *). С этой целью преобразуем интеграл $I = \int_0^n \frac{x(x-1)\dots(x-n)}{x-k} dx$, входящий в (6.23). Очевидно

$$x(x-1)\dots(x-n) = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-n)}.$$

*) См. Р. О. Кузьмин, К теории механических квадратур. Изв. Ленингр. политехн. ин-та, отд. техн., естеств., матем., т. XXXII, 1931.

Воспользовавшись известным свойством функции $\Gamma(z)$: $\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{\Gamma(1-z) \sin \pi z}{\pi}$, можно последнему равенству придать форму

$$x(x-1) \dots (x-n) = (-1)^n \frac{\Gamma(x+1) \Gamma(n+1-x) \sin \pi x}{\pi},$$

$$I = (-1)^n \int_0^n \frac{\Gamma(x+1) \Gamma(n+1-x) \sin \pi x}{\pi (x-k)} dx.$$

Разобьем интеграл на слагаемые по схеме:

$$\int_0^n = \int_0^3 + \int_3^{n-3} + \int_{n-3}^n = \alpha + \beta + \gamma.$$

Оценим сначала интеграл β . Из теории функции $\Gamma(z)$ известно, что при $z > 0$ $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ есть монотонная возрастающая функция*). Поэтому $\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} - \frac{\Gamma'(n+1-x)}{\Gamma(n+1-x)}$ при $-1 < x < \frac{n}{2}$ будет величиной отрицательной, а при $\frac{n}{2} < x < n+1$ — положительной. Отсюда следует, что $\lg \Gamma(x+1) \Gamma(n+1-x)$, а следовательно и $\Gamma(x+1) \Gamma(n+1-x)$ будет при $3 \leq x \leq n-3$ иметь наибольшее значение на концах этого отрезка:

$$0 < \Gamma(x+1) \Gamma(n+1-x) \leq \Gamma(4) \Gamma(n-2) = 6\Gamma(n-2).$$

Так как при всяких x имеем $\left| \frac{\sin \pi x}{\pi (x-k)} \right| \leq 1$, то

$$|\beta| \leq 6\Gamma(n-2)n = \frac{6\Gamma(n+1)}{(n-2)(n-1)} = O\left(\frac{\Gamma(n+1)}{n^2}\right).$$

При изучении интегралов α и γ будем считать $1 \leq k \leq n-1$. Достаточно исследовать интеграл α . Воспользовавшись формулой Тейлора и тем, что производная от функции $\psi_z = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ при больших z есть величина порядка $\frac{1}{z}$, будем иметь:

$$\ln \Gamma(n+1-x) = \ln \Gamma(n+1) - x \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

*) Это сразу же видно из известного разложения логарифмической производной функции $\Gamma(z)$:

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{z} - C + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+z} \right).$$

Отсюда *), ввиду того, что при больших z будет $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \ln z + O\left(\frac{1}{z}\right)$, получается

$$\Gamma(n+1-x) = \Gamma(n+1) e^{-x \ln n} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Для $0 \leq x \leq 3$ верно, очевидно, следующее равенство

$$\Gamma(x+1) \frac{\sin \pi x}{\pi(x-k)} = -\frac{x}{k} + O\left(\frac{x^2}{k}\right),$$

$$\alpha = \int_0^3 \Gamma(n+1) e^{-x \ln n} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \left[-\frac{x}{k} + O\left(\frac{x^2}{k}\right)\right] dx.$$

Так как

$$\int_0^3 e^{-x \ln n} x dx = \frac{1}{\ln^2 n} - \frac{1}{n^3} \left(\frac{3}{\ln n} + \frac{1}{\ln^2 n}\right)$$

и

$$\int_0^3 e^{-x \ln n} x^2 dx = \frac{2}{\ln^3 n} - \frac{1}{n^3} \left(\frac{9}{\ln n} + \frac{6}{\ln^2 n} + \frac{2}{\ln^3 n}\right),$$

то

$$\alpha = -\frac{\Gamma(n+1)}{k \ln^2 n} \left[1 + O\left(\frac{1}{\ln^2 n}\right)\right].$$

Аналогично, для интеграла γ можно получить

$$\gamma = (-1)^{n-1} \frac{\Gamma(n+1)}{(n-k) \ln^2 n} \left[1 + O\left(\frac{1}{\ln^2 n}\right)\right].$$

Если принять во внимание найденную оценку интеграла β , то для I получим следующее значение

$$I = \frac{(-1)^{n-1} \Gamma(n+1)}{\ln^2 n} \left[\frac{1}{k} + \frac{(-1)^n}{n-k}\right] \left[1 + O\left(\frac{1}{\ln^2 n}\right)\right].$$

Последнее приводит к такому асимптотическому представлению котесова коэффициента B_k^n при $1 \leq k \leq n-1$:

$$B_k^n = \frac{(-1)^{k-1} n!}{k! (n-k)! n \ln^2 n} \left[\frac{1}{k} + \frac{(-1)^n}{n-k}\right] \left[1 + O\left(\frac{1}{\ln^2 n}\right)\right]. \quad (6.2.4)$$

Сходные вычисления для B_0^n и B_n^n приведут к равенству:

$$B_0^n = B_n^n = \frac{1}{n \ln n} \left[1 + O\left(\frac{1}{\ln^2 n}\right)\right]. \quad (6.2.5)$$

Из полученных выражений для B_k^n видно, что при больших n в формуле Ньютона — Котеса будут встречаться как положительные, так и отрицательные коэффициенты, превосходящие по абсолютной величине сколь угодно большое число. Отсюда, в частности, следует, что при больших n , малые ошибки в значениях функции $f(a+kh)$ могут дать большую погрешность в квадратурной сумме. Поэтому рассматриваемые формулы мало пригодны для вычислений, когда число узлов в них будет большим.

*) См. например, Янке и Эмде, Таблицы функций, Гостехиздат, 1948, стр. 108—109.

Для формулы Ньютона — Котеса выражение (6.1.5) остатка $R(f)$ будет таким:

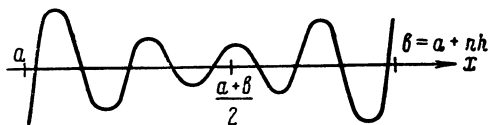
$$R(f) = \int_a^b \omega(x) f(x, a, a+h, \dots, a+nh) dx. \quad (6.2.6)$$

Как оказалось, (6.2.6) можно привести к весьма простому виду, значительно более удобному для приложений *).

Рассмотрим сначала тот случай, когда n — четное число и в формуле Ньютона — Котеса берется нечетное число узлов. Многочлен $\omega(x) = (x-a)(x-a-h) \dots (x-a-nh)$ будет обладать следующим свойством $\omega(a+z) = -\omega(a+nh-z)$ и график его будет линией, симметричной относительно середины отрезка $[a, b]$. Примерный вид графика изображен на черт. 2.

Введем функцию

$$\Omega(x) = \int_a^x \omega(t) dt. \quad \text{Заме-}$$



Черт. 2.

тим, прежде всего, что

$\Omega(a) = 0$ и $\Omega(a+nh) = \Omega(b) = 0$. Последнее равенство следует из указанного свойства симметрии значений $\omega(x)$. Покажем теперь, что $\Omega(x)$ не обращается в нуль нигде внутри $[a, b]$, для чего рассмотрим интегралы $I_\nu = \int_{a+\nu h}^{a+(\nu+1)h} \omega(x) dx$. Утверждение будет доказано,

если установить что последовательность чисел $I_0, I_1, \dots, I_{\frac{n}{2}-1}$ убывающая по абсолютной величине.

Если в интеграле $I_\nu = \int_{a+\nu h}^{a+(\nu+1)h} (x-a)(x-a-h) \dots (x-a-nh) dx$ заменить переменную x , положив $x = y+h$, то он преобразуется к виду

$$\begin{aligned} I_\nu &= \int_{a+(\nu-1)h}^{a+\nu h} (y-a+h) \dots (y-a) \dots (y-a-(n-1)h) dy = \\ &= \int_{a+(\nu-1)h}^{a+\nu h} \frac{y-a+h}{y-a-nh} \omega(y) dy = \frac{\eta-a+h}{\eta-a-nh} I_{\nu-1}, \end{aligned}$$

$$a+(\nu-1)h < \eta < a+\nu h.$$

*) См., например, Стефенсен, Теория интерполирования, гл. XV, ОНТИ, 1939, где такое преобразование проведено для интегралов немного более общего вида.

Чтобы было $|I_v| < |I_{v-1}|$, должно выполняться неравенство $\eta - a + h < nh - \eta + a$, или $\eta - a < \frac{n-1}{2} h$. Но последнее неравенство, очевидно, выполняется, ввиду

$$\eta < a + \nu h, \quad \eta - a < \nu h \leq \left(\frac{n}{2} - 1\right) h.$$

Преобразуем (6.2.6) интегрированием по частям и применим теорему о среднем значении

$$\begin{aligned} R(f) &= \left| \int_a^b \Omega(x) f(x, a, \dots, a + nh) dx - \right. \\ &\quad \left. - \int_a^b f'_x(x, a, \dots, a + nh) \Omega(x) dx = \right. \\ &= -f'_x(\eta, a, \dots, a + nh) \int_a^b \Omega(x) dx, \quad a < \eta < b. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} f(x, a, \dots, a + nh) &= \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_n} dt_{n+1} f^{(n+1)}(x + t_1(a-x) + \\ &\quad + h \sum_{v=2}^{n+1} t_v), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} f'_x(x, a, \dots, a + nh) &= \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_n} dt_{n+1} (1-t_1) f^{(n+2)}(x + t_1(a-x) + \\ &\quad + h \sum_{v=2}^{n+1} t_v) \end{aligned}$$

и применение теоремы о среднем значении к последнему интегралу дает

$$f'_x(\eta, a, \dots, a + nh) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}, \quad a < \xi < b.$$

Наконец,

$$\int_a^b \Omega(x) dx = \left| x \Omega(x) - \int_a^b x \Omega'(x) dx = - \int_a^b x \omega(x) dx. \right.$$

Этим доказано что для остатка интерполяционной квадратуры Ньютона — Котеса верно равенство

$$R(f) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b x \omega(x) dx. \quad (6.2.7)$$

Найдем еще знак множителя при $f^{(n+2)}(\xi)$. Функция $\Omega(x) = \int_a^x \omega(t) dt$ сохраняет знак на отрезке $[a, b]$ и, поэтому, достаточно выяснить ее знак в одной какой либо точке, например, $x = a + h$

$$\Omega(a+h) = \int_a^{a+h} \omega(t) dt.$$

При $a < t < a+h$, в произведении $\omega(t) = (t-a)(t-a-h) \dots (t-a-nh)$ первый множитель положителен, все же остальные — отрицательны и, стало быть, $\text{sign } \Omega(t) = (-1)^n$, $t \in (a, b)$.

Так как $\int_a^b x \omega(x) dx = - \int_a^b \Omega(x) dx$, то $\text{sign } \int_a^b x \omega(x) dx = (-1)^{n+1} = -1$ ввиду четности n .

Из изложенного вытекает

Теорема 2. Если число узлов $n+1$ в формуле (6.2.2) Ньютона — Котеса нечетное и функция f имеет на $[a, b]$ непрерывную производную порядка $n+2$, то внутри $[a, b]$ существует точка ξ такая, что для остатка $R(f)$ формулы верно равенство (6.2.7). Коэффициент при $f^{(n+2)}(\xi)$ — отрицателен.

Укажем на два следствия, вытекающих из этой теоремы.

1. Если число узлов $n+1$ в формуле (6.2.2) нечетное, то алгебраическая степень точности формулы равна $n+1$.

Как видно из представления остатка (6.2.7), формула (6.2.2) будет точной всякий раз, когда f есть многочлен, степени $\leq n+1$. Если же f есть многочлен степени $n+2$, то $f^{(n+2)}$ будет величиной, отличной от нуля и $R(f) \neq 0$.

2. Будем, как и выше, считать, что производная $f^{(n+2)}$ существует и есть непрерывная на $[a, b]$ функция и составим представление (5.3.6) остатка. Положим $r = n+2$ и, для простоты записи, будем считать $\alpha = a$. Так как степень точности (6.2.2) равна $n+1$, неинтегральные члены в (5.3.6) обращаются в нуль и для остатка получится выражение

$$R(f) = \int_a^b f^{(n+2)}(t) K(t) dt. \quad (6.2.8)$$

Ввиду $p(x) \equiv 1$, после простых вычислений ядру $K(t)$ можно придать форму

$$K(t) = \frac{(b-t)^{n+2}}{(n+2)!} - \sum_{k=1}^n A_k E(a+kh-t) \frac{(a+kh-t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Покажем, что ядро остатка $K(t)$ есть знакопостоянная неположительная функция на $[a, b]$.

Из (6.2.7) видно, что если $f^{(n+2)}$ не обращается в нуль ни в одной точке $[a, b]$, то $R(f) \neq 0$.

Если бы функция $K(t)$ изменяла знак на $[a, b]$, то, наверное, существовала бы непрерывная функция $f^{(n+2)}$, отличная от нуля на $[a, b]$ и такая, что $\int_a^b f^{(n+2)}(t) R(t) dt = 0$. По производной $f^{(n+2)}$ мы могли бы восстановить функцию f обычным путем. Для такой функции $R(f) = 0$, что противоречит предыдущему.

Так как в (6.2.7) коэффициент при $f^{(n+2)}(\xi)$ — отрицательный, ядро $K(t)$ должно быть неположительной функцией на $[a, b]$:

$$K(t) \leq 0.$$

Пусть теперь n — число нечетное, а число узлов в формуле (6.2.2) — четное. В этом случае многочлен $\omega(x)$ в точках, равноотстоящих от концов a и $b = a + nh$ отрезка, принимает одинаковые значения: $\omega(a + z) = \omega(a + nh - z)$. График многочлена будет линией, симметричной относительно прямой $x = \frac{a+b}{2}$, проходящей через середину отрезка и параллельной оси y .

Чтобы упростить выражение остатка (6.2.6), разделим отрезок $[a, b]$ на две части $[a, a + (n-1)h]$ и $[a + (n-1)h, b]$. На втором частичном отрезке многочлен $\omega(x)$ сохраняет знак и к интегралу по этому отрезку может быть применена теорема о среднем значении

$$R(f) = \int_a^{a+(n-1)h} \omega(x) f(x, a, \dots, a+nh) dx + \\ + \frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!} \int_{a+(n-1)h}^b \omega(x) dx = I + II.$$

Сосредоточим теперь свое внимание на первом из интегралов правой части. Отделим в многочлене $\omega(x)$ множитель $x - a - nh$ и положим $\omega(x) = (x - a - nh) \omega_1(x)$. По определению разностных отношений

$$f(a + nh, \dots, a, x) = \frac{f(a + (n-1)h, \dots, a, x) - f(a + nh, \dots, a)}{x - a - nh}$$

и, следовательно,

$$I = \int_a^{a+(n-1)h} \omega_1(x) f(x, a, \dots, a + (n-1)h) dx - \\ - f(a, \dots, a + nh) \int_a^{a+(n-1)h} \omega_1(x) dx.$$

Так как $\int_a^{a+(n-1)h} \omega_1(x) dx = 0$, на что было указано при исследовании случая четного n , второй член в выражении для I исчезает.

Первый же член есть интеграл вида (6.2.6) при нечетном числе узлов и его можно преобразовать так же, как в предыдущем случае:

$$I = \frac{f^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+1)!} \int_a^{a+(n-1)h} x \omega_1(x) dx.$$

Напомним также, что коэффициент при $f^{(n+1)}(\xi_2)$ здесь есть число отрицательное.

Ввиду $\int_a^{a+(n-1)h} \omega_1(x) dx = 0$, в предыдущем интеграле функцию $x \omega_1(x)$ можно заменить на $(x - a - nh) \omega_1(x) = \omega(x)$. Для остатка $R(f)$ получим

$$R(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+1)!} \int_a^{a+(n-1)h} \omega(x) dx + \frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!} \int_{a+(n-1)h}^b \omega(x) dx.$$

При $a + (n-1)h < x < b$, в произведении

$$\omega(x) = (x-a)(x-a-h) \dots (x-a-nh)$$

последний множитель — отрицательный, все же остальные — положи-

тельные и $\int_a^b \omega(x) dx < 0$. Ввиду того, что коэффициенты

при $f^{(n+1)}(\xi_2)$ и $f^{(n+1)}(\xi_1)$ в последнем выражении остатка отличны от нуля и одного знака, а $f^{(n+1)}$ есть непрерывная функция, между ξ_1 и ξ_2 существует такая точка ξ , что

$$R(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b \omega(x) dx. \quad (6.2.9)$$

Этим доказана

Теорема 3. Если число узлов $n+1$ в формуле Ньютона — Котеса (6.2.2) четное и f имеет непрерывную на $[a, b]$ производную порядка $n+1$, то внутри $[a, b]$ существует точка ξ такая, что для остатка $R(f)$ квадратуры (6.2.2) верно равенство (6.2.9). Коэффициент при $f^{(n+1)}(\xi)$ в нем есть число отрицательное.

Аналогично случаю нечетного числа узлов, отсюда вытекает два следующих утверждения:

1. Если число узлов $n+1$ в формуле (6.2.2) — четное, то алгебраическая степень точности (6.2.2) равна $n+1$.

2. Если число узлов $n+1$ в (6.2.2) — четное и функция f имеет непрерывную производную порядка $n+1$ на $[a, b]$, то остаток формулы (6.2.2) представим в форме

$$R(f) = \int_a^b f^{(n+1)}(t) K(t) dt, \quad (6.2.10)$$

где ядро остатка $K(t)$ есть знакпостоянная неположительная функция $[a, b]$:

$$K(t) = \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} - \sum_{k=1}^n A_k E(a+kh-t) \frac{(a+kh-t)^n}{n!}. \quad (6.2.11)$$

§ 3. Некоторые простейшие формулы Ньютона — Котеса

Формулы Ньютона — Котеса с большим числом узлов, по причинам, выясненным в предыдущем параграфе, редко применяются в вычислительной практике. Предпочитают пользоваться формулами с малым значением n . Для уменьшения же погрешности результата предварительно разбивают отрезок $[a, b]$ на достаточно большое число малых интервалов и к каждому из них применяют квадратурную формулу с малым числом узлов.

Положим сначала $n=1$. В этом случае интерполирование f выполняется по двум ее значениям на концах a и b отрезка интегрирования

Равенство (6.2.2) здесь приводится к известной формуле трапеций:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \left[\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b) \right]. \quad (6.3.1)$$

Так как $\omega(x) = (x-a)(x-b)$, то (6.2.9) для остатка даст

$$R = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \quad a < \xi < b. \quad (6.3.2)$$

Имея в виду в дальнейшем рассмотреть задачу об увеличении точности котесовых формул, построим для остаточного члена (6.3.1) и других формул, изучаемых ниже, интегральные представления, отличные от (6.2.11).

Считая f дважды непрерывно дифференцируемой функцией, разложим ее по многочленам Бернулли при помощи (1.4.2), положив там $v = 2$

$$f(x) = (b-a)^{-1} \int_a^b f(t) dt + B_1\left(\frac{x-a}{b-a}\right)[f(b) - f(a)] - \\ - \frac{(b-a)}{2} \int_a^b f''(t) \left[B_2^*\left(\frac{x-t}{b-a}\right) - B_2^*\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right] dt.$$

Ввиду того, что формула (6.3.1) для линейной функции дает точный результат, $R(f)$ равен остатку квадратуры интегрального члена правой части. При записи остатка здесь и в других формулах удобнее пользоваться не $B_v^*(z)$, а функциями $y_v^*(x) = B_v^*(z) - B_v$, несущественно от них отличающимися:

$$R(f) = -\frac{b-a}{2} \int_a^b f''(t) R_x \left[y_2^*\left(\frac{x-t}{b-a}\right) - y_2^*\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right] dt.$$

Знаком R_x обозначен остаток квадратуры по переменной x . В приводимых ниже вычислениях мы воспользовались известными правилами интегрирования многочленов Бернулли, 1-периодичностью y_n^* , B_n^* и равенством $y_n(1) = y_n(0) = 0$

$$R_x \left[y_2^*\left(\frac{x-t}{b-a}\right) - y_2^*\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right] = \int_a^b \left[y_2^*\left(\frac{x-t}{b-a}\right) - y_2^*\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right] dt - \\ - \frac{b-a}{2} \left\{ \left[y_2^*\left(\frac{a-t}{b-a}\right) - y_2^*(0) \right] + \left[y_2^*\left(\frac{b-t}{b-a}\right) - y_2^*(1) \right] \right\} = \\ = -(b-a) y_2^*\left(\frac{b-t}{b-a}\right), \\ R(f) = \frac{(b-a)^2}{2!} \int_a^b f''(t) y_2^*\left(\frac{b-t}{b-a}\right) dt. \quad (6.3.3)$$

Разобьем теперь отрезок $[a, b]$ на n одинаковых частей длины $h = \frac{b-a}{n}$, рассмотрим частичный отрезок $[a + kh, a + (k+1)h]$ и к нему применим формулу (6.3.1)

$$\int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f(x) dx = \frac{h}{2} \left[f(a+kh) + f(a+(k+1)h) \right] + \\ + \frac{h^2}{2!} \int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f''(t) y_2^*\left(\frac{a+kh-t}{h}\right) dt.$$

Ввиду 1-периодичности, $y_2^*\left(\frac{a+kh-t}{h}\right) = y_2^*\left(\frac{a-t}{h}\right)$. После суммирования по всем частичным отрезкам, получим формулу трапеций с остатком в виде определенного интеграла

$$\int_a^b f(x) dx = h \left[\frac{1}{2} f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n \right] + \frac{h^2}{2!} \int_a^b f''(t) y_2^*\left(\frac{a-t}{h}\right) dt, \quad (6.3.4)$$

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad f_k = f(a + kh).$$

Так как ядро остатка $y_2^*\left(\frac{a-t}{h}\right)$ знакопостоянное, к интегралу может быть применена теорема о среднем арифметическом значении, что для (6.3.4) дает

$$R(f) = -\frac{1}{12} \cdot \frac{(b-a)^3}{n^2} f''(\xi).$$

Перейдем к другому случаю и положим $n=2$. Интерполирование f выполняется по значениям в трех точках: a , $\frac{a+b}{2}$, b .

Квадратурная формула (6.2.2) будет такой

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \left[\frac{1}{6} f(a) + \frac{4}{6} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]. \quad (6.3.5)$$

Остаток может быть найден при помощи равенства (6.2.7)

$$R(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_a^b x(x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) (x-b) dx = -\frac{1}{90} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi). \quad (6.3.6)$$

Считая f четырежды непрерывно дифференцируемой на $[a, b]$ функцией, разложим ее по многочленам Бернулли:

$$\begin{aligned} f(x) = & (b-a)^{-1} \int_a^b f(t) dt + \\ & + \sum_{k=1}^3 \frac{(b-a)^{k-1}}{k!} B_k^*\left(\frac{x-a}{b-a}\right) [f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)] - \\ & - \frac{(b-a)^3}{4!} \int_a^b f^{(4)}(t) \left[y_4^*\left(\frac{x-t}{b-a}\right) - y_4^*\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right] dt. \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

Равенство (6.3.5) является точным для всякого многочлена третьей степени. Поэтому $R(f)$ будет равен остатку квадратуры последнего члена правой части равенства:

$$\begin{aligned}
 R(f) &= -\frac{(b-a)^3}{4!} \int_a^b f^{(4)}(t) R_x \left[y_4^* \left(\frac{x-t}{b-a} \right) - y_4^* \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right] dt. \quad (6.3.8) \\
 R_x \left[y_4^* \left(\frac{x-t}{b-a} \right) - y_4^* \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right] &= \int_a^b \left[y_4^* \left(\frac{x-t}{b-a} \right) - y_4^* \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right] dx - \\
 &- (b-a) \left\{ \frac{1}{6} \left[y_4^* \left(\frac{a-t}{b-a} \right) - y_4^*(0) \right] + \frac{4}{6} \left[y_4^* \left(\frac{\frac{a+b}{2}-t}{b-a} \right) - y_4^* \left(\frac{1}{2} \right) \right] + \right. \\
 &+ \frac{1}{6} \left[y_4^* \left(\frac{b-t}{b-a} \right) - y_4^*(1) \right] \left. \right\} = - (b-a) \left\{ \frac{1}{3} y_4^* \left(\frac{a-t}{b-a} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{3} y_4^* \left(\frac{\frac{1}{2}(b+a)-t}{b-a} \right) - \frac{1}{24} \right\}.
 \end{aligned}$$

В вычислениях мы воспользовались значением $B_n \left(\frac{1}{2} \right)$ (в 1.2.14) и нашли

$$\begin{aligned}
 y_4^* \left(\frac{1}{2} \right) &= B_4 \left(\frac{1}{2} \right) - B_4 = - (2 - 2^{-3}) B_4 = \frac{1}{16}, \\
 R(f) &= \frac{(b-a)^4}{4!} \int_a^b f^{(4)}(t) \left\{ \frac{1}{3} y_4^* \left(\frac{a-t}{b-a} \right) + \frac{2}{3} y_4^* \left(\frac{\frac{1}{2}(b+a)-t}{b-a} \right) - \frac{1}{24} \right\} dt. \quad (6.3.9)
 \end{aligned}$$

Считая n четным числом, разделим $[a, b]$ на n равных частей величины $h = \frac{b-a}{n}$. Возьмем удвоенный частичный отрезок $[a + (k-1)h, a + (k+1)h]$ и применим к нему формулу (6.3.5) с остатком (6.3.9):

$$\begin{aligned}
 \int_{a+(k-1)h}^{a+(k+1)h} f(x) dx &= 2h \left[\frac{1}{6} f_{k-1} + \frac{4}{6} f_k + \frac{1}{6} f_{k+1} \right] + \\
 &+ \frac{2}{9} h^4 \int_{a+(k-1)h}^{a+(k+1)h} f^{(4)}(t) \left\{ y_4^* \left(\frac{a+(k-1)h-t}{2h} \right) + 2y_4^* \left(\frac{a+kh-t}{2h} \right) - \frac{1}{8} \right\} dt.
 \end{aligned}$$

Применяя последнее равенство к отрезкам $[a, a+2h]$, $[a+2h, a+4h]$, ..., $[a+(n-2)h, a+nh]$ и суммируя результаты, получим хорошо известную формулу парабол или правило Симпсона:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [f_0 + f_n + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{n-2}) + \\ + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{n-1})] + \\ + \frac{2}{9} h^4 \int_a^b f^{(4)}(t) \left\{ y_4^* \left(\frac{a-t}{2h} \right) + 2y_4^* \left(\frac{a+h-t}{2h} \right) - \frac{1}{8} \right\} dt. \quad (6.3.10)$$

Остаточный член (6.3.10) только формой записи отличается от (6.2.10) и ядро остатка поэтому является знакопостоянной функцией t . Применение теоремы о среднем значении к интегралу, что можно сделать ввиду знакопостоянства ядра, позволяет представить остаточный член (6.3.10) в виде

$$R(f) = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi). \quad (6.3.11)$$

При $n=3$ получим формулу, которая называется иногда „правилом трех восьмых“.

$$\int_a^b f(x) dx \approx H \left[\frac{1}{8} f(a) + \frac{3}{8} f\left(a + \frac{1}{3} H\right) + \right. \\ \left. + \frac{3}{8} f\left(a + \frac{2}{3} H\right) + \frac{1}{8} f(a+H) \right], \quad (6.3.12)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega(x) &= (x-a) \left(x-a-\frac{1}{3}H\right) \left(x-a-\frac{2}{3}H\right) (x-a-H), \\ R(f) &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_a^b \omega(x) dx = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\xi), \\ H &= b-a. \end{aligned} \right\} \quad (6.3.13)$$

Чтобы получить нужное нам интегральное представление остатка $R(f)$, разложим f по многочленам Бернулли в виде (6.3.7). Ввиду того, что равенство (6.3.12) является точным для всех многочленов до третьей степени, для $R(f)$ получим выражение (6.3.8),

но с другим значением интегрируемой функции. В рассматриваемом случае будет *)

$$\begin{aligned} R_x &= \left[y_4^* \left(\frac{x-t}{H} \right) - y_4^* \left(\frac{x-a}{H} \right) \right] = \int_a^b \left[y_4^* \left(\frac{x-t}{H} \right) - y_4^* \left(\frac{x-a}{H} \right) \right] dx - \\ &\quad - H \left\{ \frac{1}{8} \left[y_4^* \left(\frac{a-t}{H} \right) - y_4^*(0) \right] + \frac{3}{8} \left[y_4^* \left(\frac{a-t}{H} + \frac{1}{3} \right) - y_4^* \left(\frac{1}{3} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{8} \left[y_4^* \left(\frac{a-t}{H} + \frac{2}{3} \right) - y_4^* \left(\frac{2}{3} \right) \right] + \frac{1}{8} \left[y_4^* \left(\frac{a-t}{H} + 1 \right) - y_4^*(1) \right] \right\} = \\ &= -\frac{H}{8} \left\{ 2y_4^* \left(\frac{a-t}{H} \right) + 3y_4^* \left(\frac{a-t}{H} + \frac{1}{3} \right) + 3y_4^* \left(\frac{a-t}{H} + \frac{2}{3} \right) - \frac{8}{27} \right\}. \end{aligned}$$

Для $R(f)$ получим

$$\begin{aligned} R(f) &= \frac{H^4}{4!8} \int_a^b f^{(4)}(t) \left\{ 2y_4^* \left(\frac{a-t}{H} \right) + 3y_4^* \left(\frac{a-t}{H} + \frac{1}{3} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 3y_4^* \left(\frac{a-t}{H} + \frac{2}{3} \right) - \frac{8}{27} \right\} dt. \quad (6.3.14) \end{aligned}$$

Пусть число n кратно трем. Разделим $[a, b]$ на n равных частей $h = \frac{b-a}{n}$. Возьмем строенный отрезок $[a + kh, a + (k+3)h]$ и применим к нему правило трех восьмых с остатком в форме (6.3.14)

$$\begin{aligned} \int_{a+kh}^{a+(k+3)h} f(x) dx &= \frac{3h}{8} \{ f[a + kh] + 3f[a + (k+1)h] + \\ &\quad + 3f[a + (k+2)h] + f[a + (k+3)h] \} + \\ &+ \frac{27h^4}{64} \int_{a+kh}^{a+(k+3)h} f^{(4)}(t) \left\{ 2y_4^* \left(\frac{a+kh-t}{3h} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 3y_4^* \left(\frac{a+kh-t}{3h} + \frac{1}{3} \right) + 3y_4^* \left(\frac{a+kh-t}{3h} + \frac{2}{3} \right) - \frac{8}{27} \right\} dt. \end{aligned}$$

*) При вычислениях мы воспользовались следующими равенствами:

а) Ввиду 1-периодичности, $y_4^*(z+1) = y_4^*(z)$

б) Положив в (1.2.8) $n=4$, $x=\frac{1}{3}$, $m=3$, найдем

$$B_4 = 3^3 \left[B_4 \left(\frac{1}{3} \right) + B_4 \left(\frac{2}{3} \right) + B_4(1) \right] = 3^3 \left[2B_4 \left(\frac{1}{3} \right) + B_4 \right],$$

$$B_4 \left(\frac{1}{3} \right) = B_4 \left(\frac{2}{3} \right) = -\frac{13}{27} B_4 = \frac{13}{810},$$

$$y_4^* \left(\frac{1}{3} \right) = y_4^* \left(\frac{2}{3} \right) = B_4 \left(\frac{1}{3} \right) - B_4 = \frac{7}{405}.$$

Записав такие равенства для отрезков $[a, a + 3h]$, $[a + 3h, a + 6h]$, ..., $[a + (n-3)h, a + nh]$ и сложив результаты, построим следующую формулу, аналогичную формуле Симпсона

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx = & \frac{3h}{8} \{ (f_0 + f_n) + 2(f_3 + f_6 + \dots + f_{n-3}) + \\ & + 3(f_1 + f_2 + f_4 + f_5 + \dots + f_{n-2} + f_{n-1}) \} + \\ & + \frac{27h^4}{64} \int_a^b f^{(4)}(t) \left\{ 2y_4^* \left(\frac{a-t}{3h} \right) + 3y_4^* \left(\frac{a-t}{3h} + \frac{1}{3} \right) + \right. \\ & \left. + 3y_4^* \left(\frac{a-t}{3h} + \frac{2}{3} \right) - \frac{8}{27} \right\} dt. \end{aligned} \quad (6.3.15)$$

К интегралу, представляющему остаток, здесь также может быть применена теорема о среднем значении и остаток формулы (6.3.5) может быть записан в форме

$$R(f) = - \frac{(b-a)^5}{80n^4} f^{(4)}(\xi), \quad a < \xi < b. \quad (6.3.16)$$

Когда число частичных отрезков n кратно 2 и 3, для вычисления интеграла может быть применено и правило парабол (6.3.10) и правило трех восьмых (6.3.15). Обе формулы имеют одинаковую алгебраическую степень точности и почти одинаково просты по своему строению. Вопрос о выборе какой либо одной из них может быть решен только ожидаемой погрешностью результата. Сравнение остаточных членов (6.3.11) и (6.3.16) показывает, что при применении правила трех восьмых можно ожидать погрешности приблизительно в два раза большей, нежели при применении правила парабол, что заставляет отдать предпочтение формуле (6.3.10).

ЛИТЕРАТУРА

Кузьмин Р. О., К теории механических квадратур, Изв. Ленингр. политехн. ин-та, отд. техн., естеств., матем. т. XXXII, 1931.

Уиттекер и Робинсон, Математическая обработка результатов наблюдений, гл. VII, Гостехиздат, 1933.

Стефенсен, Теория интерполяции, гл. XV, ОНТИ, 1935.

КВАДРАТУРЫ НАИВЫСШЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ

§ 1. Общие теоремы

В начале этого параграфа мы сохраним о весе $p(x)$ те же предположения, что и в гл. 5.

Квадратурная формула

$$\int_a p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (7.1.1)$$

при фиксированном числе n узлов, содержит $2n$ параметров A_k и x_k ($k=1, 2, \dots, n$). Нашей задачей сейчас будет так выбрать эти параметры, чтобы формулу (7.1.1) сделать точной для многочленов возможно более высокой степени.

В § 1 гл. 6 было выяснено, что, при любом расположении x_k можно, за счет выбора коэффициентов A_k , достигнуть того, чтобы равенство (7.1.1) было бы точным для всех многочленов степени $\leq n-1$. Этим требованием коэффициенты A_k определяются вполне: формула (7.1.1) должна быть интерполяционной и ее коэффициенты должны иметь значения (6.1.4).

Для увеличения степени точности (7.1.1) в распоряжении вычислителя остается еще n узлов x_k . Можно надеяться на то, что выбором их степень точности формулы можно увеличить на n единиц и сделать формулу верной для всех многочленов степени $\leq 2n-1$. В каком случае это ожидание действительно оправдывается, мы увидим ниже.

Сейчас же выясним условия, которым должны удовлетворять A_k и x_k , чтобы формула имела степень точности, не меньшую $2n-1$.

Мы предпочтем иметь дело не с узлами x_k , а с многочленом $\omega(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$. Если известны x_k , то при помощи предыдущего равенства можно сразу же построить многочлен $\omega(x)$. Наоборот, пусть известен многочлен $\omega(x)$, например, пусть мы знаем его разложение по степеням x : $\omega(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots$. Вычисляя корни $\omega(x)$, мы найдем все x_k .

Заметим попутно, что если выбор узлов x_k мы хотим заменить на нахождение многочлена $\omega(x)$, то мы должны будем заботиться о том, чтобы корни $\omega(x)$ были действительными, различными и не выходили за границы $[a, b]$.

Теорема. Для того, чтобы формула (7.1.1) была точной для всех многочленов степени $\leq 2n-1$, необходимо и достаточно, чтобы она была интерполяционной и многочлен $\omega(x)$ был ортогонален по весу $p(x)$ ко всем многочленам $Q(x)$ степени $< n$:

$$\int_a^b p(x) \omega(x) Q(x) dx = 0.$$

Доказательство. Проверим сначала необходимость. Если формула (7.1.1) верна для многочленов степени $\leq 2n-1$, то она верна и для многочленов степени $\leq n-1$, и поэтому она должна быть интерполяционной.

Пусть $Q(x)$ — любой многочлен степени $\leq n-1$. Произведение $f(x) = \omega(x) Q(x)$ есть многочлен степени $\leq 2n-1$ и для него равенство (7.1.1) должно быть точным. Но $f(x_k) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) и потому

$$\int_a^b p(x) \omega(x) Q(x) dx = 0,$$

что доказывает необходимость ортогональности.

Убедимся теперь в достаточности указанных условий. Пусть f — произвольный многочлен степени $\leq 2n-1$. Разделив f на ω по обычным правилам, мы сможем представить f в форме

$$f = Q\omega + \rho,$$

где Q и ρ — многочлены степеней $\leq n-1$. Кроме того, так как $\omega(x_k) = 0$, то

$$f(x_k) = \rho(x_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \int_a^b p(x) \omega(x) Q(x) dx + \int_a^b p(x) \rho(x) dx.$$

Первый из интегралов правой части равен нулю по условию ортогональности. Так как степень $\rho(x)$ не больше $n-1$, а формула (7.1.1) интерполяционная, то должно быть точным равенство

$$\int_a^b p(x) \rho(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k \rho(x_k).$$

Ввиду же $f(x_k) = p(x_k)$, должно быть верным также такое равенство

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k),$$

и формула (7.1.1) действительно будет точной для произвольных многочленов степени $\leq 2n - 1$.

Вопрос о возможности построения такой формулы прежде всего связан с существованием многочлена $\omega(x)$ степени n , обладающего свойством ортогональности (7.1.2). Если весовая функция $p(x)$ изменяет знак на $[a, b]$, то многочлен $\omega(x)$ может не существовать. Кроме того, если он существует, то корни его могут не удовлетворять указанным выше требованиям.

Подчиним вес $p(x)$ до конца этого параграфа дополнительному ограничению и будем считать его неотрицательной функцией на $[a, b]$:

$$p(x) \geq 0.$$

В этом случае, как известно из теории ортогональных многочленов *), многочлен $\omega(x)$ степени n , ортогональный по весу $p(x)$ ко всем многочленам меньших степеней, будет существовать при всяких n . Корни $\omega(x)$ будут действительными, различными и лежать внутри отрезка $[a, b]$.

Всё перечисленное позволяет высказать следующее утверждение.

Если вес $p(x) \geq 0$, то квадратурная формула (7.1.1), точная для всяких многочленов степени $\leq 2n - 1$, существует при всех $n = 1, 2, \dots$

До сих пор осталось невыясненным будет ли $2n - 1$ наивысшей алгебраической степенью точности формулы (7.1.1). Если $p(x)$ знакопеременная функция, то это может оказаться неверным. Но для знакопостоянного веса легко доказывается

Теорема 2. *Если $p(x) \geq 0$, то ни при каком выборе x_k и A_k равенство (7.1.1) не может быть верным для всех многочленов степени $2n$.*

Доказательство. Для многочлена $f(x) = \omega^2(x)$, имеющего степень $2n$, интеграл $\int_a^b p(x) f(x) dx > 0$, так как вес $p(x)$ неотрицателен и неэквивалентен нулю. Квадратурная же сумма $\sum A_k f(x_k)$ равна нулю, ввиду $f(x_k) = 0$. Поэтому для $f = \omega^2$ равенство (7.1.1) не может быть верным.

Займемся теперь построением квадратурной формулы, имеющей наивысшую степень точности. С этой целью рассмотрим систему

*) См. гл. 2, § 1.

ортогональных на $[a, b]$ многочленов $P_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) по весу $p(x)$. Для определенности, будем считать их нормированными. Возьмем из этой системы многочлен степени n . Он может отличаться от $\omega(x)$ только постоянным множителем. Корни $P_n(x)$ будут узлами x_k ($k = 1, \dots, n$) разыскиваемой квадратурной формулы.

Коэффициенты A_k определяются равенством (6.1.4), или равносильным ему равенством

$$A_k = \int_a^b p(x) \frac{P_n(x)}{(x - x_k) P'_n(x_k)} dx. \quad (7.1.2)$$

Для вычисления интеграла (7.1.2) воспользуемся тождеством Дарбу — Кристоффеля (2.1.11) и положим в нем $t = x_k$. После деления на $x - x_k$, оно примет вид

$$\sum_{s=0}^{n-1} P_s(x) P_s(x_k) = - \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{P_n(x) P_{n+1}(x_k)}{x - x_k}.$$

Здесь знаком a_n обозначен старший коэффициент в $P_n(x)$.

Умножим на $p(x)$ и интегрируем по $[a, b]$. Интеграл $P_s(x_k) \times \int_a^b p(x) P_s(x) dx$ равен нулю при $s \geq 1$, так как многочлены $P_s(x)$ ортогональны, и равен 1 при $s = 0$, ввиду нормированности P_0 . Поэтому после интегрирования получится равенство

$$1 = - \frac{a_n}{a_{n+1}} P_{n+1}(x_k) \int_a^b p(x) \frac{P_n(x)}{x - x_k} dx.$$

Отсюда для A_k будем иметь

$$A_k = - \frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{1}{P'_n(x_k) P_{n+1}(x_k)}. \quad (7.1.3)$$

Найденное выражение A_k может быть немного упрощено. Возьмем трехчленное рекуррентное соотношение (2.1.10) между ортонормированными многочленами и подставим в него вместо x корень x_k многочлена $P_n(x)$. В результате получится равенство, которое, при принятом сейчас обозначении старшего коэффициента в $P_n(x)$, запишется так:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} P_{n+1}(x_k) + \frac{a_{n-1}}{a_n} P_{n-1}(x_k) = 0.$$

Последнее дает возможность преобразовать (7.1.3) к виду

$$A_k = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{1}{P'_n(x_k) P_{n-1}(x_k)}. \quad (7.1.4)$$

Весьма существенно, что все коэффициенты квадратурной формулы, имеющей наивысшую степень точности $2n - 1$, положительны. Это сразу следует из теоремы:

Теорема 3. Если квадратурная формула (7.1.1.) верна для всех возможных многочленов степени $2n - 2$, то все ее коэффициенты A_k положительны.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = \left[\frac{\omega(x)}{x - x_i} \right]^2$. Это — многочлен степени $2n - 2$ и для него равенство (7.1.1) должно быть верным. Но

$$f(x_k) = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq i, \\ \omega^2(x_i) & \text{при } k = i, \end{cases}$$

и значит

$$\int_a^b p(x) \left[\frac{\omega(x)}{x - x_i} \right]^2 dx = A_i \omega^2(x_i),$$

$$A_i = \int_a^b p(x) \left[\frac{\omega(x)}{(x - x_i) \omega'(x_i)} \right]^2 dx > 0,$$

что доказывает утверждение.

Перейдем теперь к изучению остатка квадратуры. Напомним, что отрезок интегрирования $[a, b]$ мог быть любым отрезком конечной или бесконечной длины. Функция f предполагается такой, что произведение pf суммируемо на $[a, b]$.

Теорема 4. Если f имеет непрерывную производную порядка $2n$ на $[a, b]$, то существует такая точка $\eta \in [a, b]$, что для остатка квадратуры наивысшей степени точности верно равенство

$$R(f) = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \int_a^b p(x) \omega^2(x) dx, \quad (7.1.5)$$

$$a \leq \eta \leq b.$$

Доказательство. Построим интерполяционный многочлен $H(x)$ степени $\leq 2n - 1$, удовлетворяющий условиям

$$H(x_k) = f(x_k), \quad H'(x_k) = f'(x_k).$$

В силу последней теоремы § 2 гл. 3, остаток интерполирования $r(x) = f(x) - H(x)$ имеет следующее представление

$$r(x) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \omega^2(x),$$

где ξ — некоторая точка, лежащая между x и узлами x_k ,

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \int_a^b p(x) H(x) dx + \frac{1}{(2n)!} \int_a^b p(x) f^{(2n)}(\xi) \omega^2(x) dx.$$

Сходимость последнего интеграла вытекает из сходимости двух предыдущих. Так как квадратурная формула верна для всех многочленов степени $\leq 2n-1$, а степень $H(x)$ также $\leq 2n-1$, то

$$\int_a^b p(x) H(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k H(x_k) = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

и для остатка квадратуры поэтому получается такое равенство:

$$R(f) = \frac{1}{(2n)!} \int_a^b f^{(2n)}(\xi) \cdot p(x) \omega^2(x) dx.$$

Исходя отсюда, путем обычных рассуждений, можно показать, что существует точка $\eta \in [a, b]$, для которой имеет место формула (7.1.5)*). Укажем еще на один факт, связанный с интегральным представлением остатка квадратуры наивысшей степени точности. Для него верно всё, что говорилось в § 3 гл. 5 об остатке любой квадратурной формулы. Будем, как выше, считать f имеющей на $[a, b]$ непрерывную производную порядка $2n$. Допустим, кроме того, что для остатка $R(f)$ имеет место равенство (5.3.10) при $r = 2n$

$$R(f) = \int_a^b f^{(2n)}(t) K(t) dt \quad (7.1.6)$$

Если отрезок $[a, b]$ конечный, такое представление остатка, наверное, возможно.

Из (7.1.5) видно, что если $f^{(2n)}(x)$ отлична от нуля на $[a, b]$, то $R(f)$ не обращается в нуль и имеет тот же знак, что и $f^{(2n)}$. Так как это верно для любой функции $f^{(2n)}$, обладающей указанным свойством, то ядро $K(t)$ остатка в (7.1.6) должно сохранять свой знак на $[a, b]$ и быть неотрицательным.

Теорема о сходимости квадратурного процесса, сформулированная несколькими строками ниже, может быть получена как следствие более общего результата, установленного в гл. 12.

*) Если $m = \inf_{[a, b]} f^{(2n)}$ и $M = \sup_{[a, b]} f^{(2n)}$, то $m \int_a^b p \omega^2 dx \leq \int_a^b p f^{(2n)}(\xi) \omega^2 dx \leq M \int_a^b p \omega^2 dx$. Поэтому должно быть $\int_a^b f^{(2n)}(\xi) p \omega^2 dx = T \int_a^b p \omega^2 dx$, где $m \leq T \leq M$. Отсюда легко придти к заключению о существовании точки η .

Мы докажем эту теорему, не откладывая ее до гл. 12, так как все рассуждения сейчас будут основываться на соображениях значительно более простых, чем те, которые применяются в гл. 12.

Пусть $p(x)$ — неотрицательная весовая функция на $[a, b]$ и $\omega_n(x)$ ($n = 0, 1, \dots$) — принадлежащая ей система ортогональных многочленов. Пусть, далее, $x_k^{(n)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) — корни многочлена $\omega_n(x)$ и $A_k^{(n)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) — соответствующие им коэффициенты квадратурной формулы наивысшей степени точности. Тогда имеет место

Теорема 5. Если отрезок $[a, b]$ — конечный и функция f непрерывна на нем, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) = \int_a^b p(x) f(x) dx. \quad (7.1.7)$$

Доказательство. Так как f непрерывна на $[a, b]$, при любом $\varepsilon > 0$ найдется такой многочлен $P(x)$, что для всяких $x \in [a, b]$ будет

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon. \quad (7.1.8)$$

Очевидно

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b p f dx - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \right| \leq \left| \int_a^b p f dx - \int_a^b p P dx \right| + \\ & + \left| \int_a^b p P dx - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} P(x_k^{(n)}) \right| + \left| \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} P(x_k^{(n)}) - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \right|. \end{aligned}$$

Но, ввиду (7.1.8),

$$\left| \int_a^b p f dx - \int_a^b p P dx \right| < \varepsilon \int_a^b p dx$$

и

$$\left| \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} P(x_k^{(n)}) - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \right| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} = \varepsilon \int_a^b p dx.$$

Кроме того, если m — степень многочлена $P(x)$, то, при $2n-1 \geq m$, будет

$$\int_a^b p P dx = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} P'(x_k^{(n)})$$

и для таких n

$$\left| \int_a^b p f dx - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \right| < 2\varepsilon \int_a^b p dx,$$

что и доказывает (7.1.7).

§ 2. Постоянная весовая функция

Формула Гаусса является исторически первой найденной формулой наивысшей степени точности. Она служит для вычисления интегралов вида

$$\int_a^b f(x) dx, \quad (7.2.1)$$

взятых по конечному отрезку $[a, b]$ с постоянным весом.

Линейным преобразованием всякий конечный отрезок $[a, b]$ может быть преобразован в какой-либо стандартный отрезок. Чтобы сделать более простым использование свойств симметрии узлов x_k и коэффициентов A_k , за такой стандартный отрезок мы примем $[-1, +1]$ и будем считать, что интеграл (7.2.1) приведен к виду

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx. \quad (7.2.2)$$

Ортогональную систему многочленов с постоянным весом на отрезке $[-1, +1]$ образуют многочлены Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

Для построения квадратурной формулы с n узлами

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}), \quad (7.2.3)$$

имеющей наивысшую степень точности $2n - 1$, узлы ее мы должны взять в корнях многочлена Лежандра степени n :

$$P_n(x_k^{(n)}) = 0.$$

Коэффициенты $A_k^{(n)}$ формулы могут быть найдены при помощи равенств (7.1.3) и (7.1.4). Заметим, что при записи этих равенств мы пользовались нормированными многочленами. Поэтому при применении (7.1.3.) и (7.1.4) мы должны пользоваться многочленами

$p_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x)$, старшие коэффициенты которых равны $a_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$ [см. (2.2.10) и (2.2.11)]. Простые вычисления дадут для $A_k^{(n)}$ следующие значения:

$$A_k^{(n)} = -\frac{2}{(n+1) P_{n+1}(x_k^{(n)}) P'_n(x_k^{(n)})} = \frac{2}{n P_{n-1}(x_k^{(n)}) P'_n(x_k^{(n)})}. \quad (7.2.4)$$

В них могут быть внесены некоторые упрощения, если воспользоваться известным в теории многочленов Лежандра соотношением *):

$$(1-x)^2 P'_n(x) = (n+1)[xP_n(x) - P_{n+1}(x)] = n[P_{n-1}(x) - xP_n(x)].$$

Положив здесь $x = x_k^{(n)}$, получим следующую систему равенств

$$[1 - (x_k^{(n)})^2] P'_n(x_k^{(n)}) = -(n+1)P_{n+1}(x_k^{(n)}) = nP_{n-1}(x_k^{(n)}),$$

позволяющую исключить из (7.2.4) любую из величин P'_n , P_{n+1} или P_{n-1} . Равенство (7.2.4) можно привести, например, к виду

$$A_k^{(n)} = \frac{2}{[1 - (x_k^{(n)})^2][P'_n(x_k^{(n)})]^2}. \quad (7.2.5)$$

Ниже приведены узлы и коэффициенты гауссовой формулы для $n = 1(1)16$ **).

$n = 1$	
$x_1^{(1)} = 0$	$A_1^{(1)} = 2$
$n = 2$	
$x_2^{(2)} = -x_1^{(2)} = 0,57735\ 02691\ 89626,$	$A_1^{(2)} = A_2^{(2)} = 1$
$n = 3$	
$x_2^{(3)} = 0$	$A_2^{(3)} = 0,88888\ 88888\ 88889 = \frac{8}{9}$
$x_3^{(3)} = -x_1^{(3)} = 0,77459\ 66692\ 41483$	$A_1^{(3)} = A_3^{(3)} = 0,55555\ 55555\ 55556 = \frac{5}{9}$
$n = 4$	
$x_3^{(4)} = -x_2^{(4)} = 0,33998\ 10435\ 84856$	$A_2^{(4)} = A_3^{(4)} = 0,65214\ 51548\ 62546$
$x_4^{(4)} = -x_1^{(4)} = 0,86113\ 63115\ 94053$	$A_1^{(4)} = A_4^{(4)} = 0,34785\ 48451\ 37454$
$n = 5$	
$x_3^{(5)} = 0$	$A_3^{(5)} = 0,56888\ 88888\ 88889$
$x_4^{(5)} = -x_2^{(5)} = 0,53846\ 93101\ 05683$	$A_2^{(5)} = A_4^{(5)} = 0,47862\ 86704\ 99366$
$x_5^{(5)} = -x_1^{(5)} = 0,90617\ 98459\ 38664$	$A_1^{(5)} = A_5^{(5)} = 0,23692\ 68850\ 56189$
$n = 6$	
$x_4^{(6)} = -x_3^{(6)} = 0,23861\ 91860\ 83197$	$A_3^{(6)} = A_4^{(6)} = 0,46791\ 39345\ 72691$
$x_5^{(6)} = -x_2^{(6)} = 0,66120\ 93864\ 66265$	$A_2^{(6)} = A_5^{(6)} = 0,36076\ 15730\ 48139$
$x_6^{(6)} = -x_1^{(6)} = 0,93246\ 95142\ 03152$	$A_1^{(6)} = A_6^{(6)} = 0,17132\ 44923\ 79170$

*) См., например, Гобсон, Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, 1954, н° 20.

**) Lowan A., Davids N., Levenson A., Tables of the zeros of the Legendre polynomials of order 1—16 and the weight coefficients for Gauss, mechanical quadrature formula, Bull. Am. Math. Soc. 1942, 48 1943, 49.

Запись $n = 1(1)16$ означает, что n меняется от $n = 1$ до $n = 16$ с интервалом в 1.

$n = 7$

$$\begin{aligned}
x_4^{(7)} &= 0 & A_4^{(7)} &= 0,41795\ 91836\ 73469 \\
x_5^{(7)} &= -x_3^{(7)} = 0,40584\ 51513\ 77397 & A_3^{(7)} &= A_5^{(7)} = 0,38183\ 00505\ 05119 \\
x_6^{(7)} &= -x_2^{(7)} = 0,74153\ 11855\ 99394 & A_2^{(7)} &= A_6^{(7)} = 0,27970\ 53914\ 89277 \\
x_7^{(7)} &= -x_1^{(7)} = 0,94910\ 79123\ 42759 & A_1^{(7)} &= A_7^{(7)} = 0,12948\ 49661\ 68870
\end{aligned}$$

 $n = 8$

$$\begin{aligned}
x_5^{(8)} &= -x_4^{(8)} = 0,18343\ 46424\ 95650 & A_4^{(8)} &= A_5^{(8)} = 0,36268\ 37833\ 78362 \\
x_6^{(8)} &= -x_3^{(8)} = 0,52553\ 24099\ 16329 & A_3^{(8)} &= A_6^{(8)} = 0,31370\ 66458\ 77887 \\
x_7^{(8)} &= -x_2^{(8)} = 0,79666\ 64774\ 13627 & A_2^{(8)} &= A_7^{(8)} = 0,22238\ 10344\ 53374 \\
x_8^{(8)} &= -x_1^{(8)} = 0,96028\ 98564\ 97536 & A_1^{(8)} &= A_8^{(8)} = 0,10122\ 85362\ 90376
\end{aligned}$$

 $n = 9$

$$\begin{aligned}
x_5^{(9)} &= 0 & A_5^{(9)} &= 0,33023\ 93550\ 01260 \\
x_6^{(9)} &= -x_4^{(9)} = 0,32425\ 34234\ 03809 & A_4^{(9)} &= A_6^{(9)} = 0,31234\ 70770\ 40003 \\
x_7^{(9)} &= -x_3^{(9)} = 0,61337\ 14327\ 00590 & A_3^{(9)} &= A_7^{(9)} = 0,26061\ 06964\ 02935 \\
x_8^{(9)} &= -x_2^{(9)} = 0,83603\ 11073\ 26636 & A_2^{(9)} &= A_8^{(9)} = 0,18064\ 81606\ 94857 \\
x_9^{(9)} &= -x_1^{(9)} = 0,96816\ 02395\ 07626 & A_1^{(9)} &= A_9^{(9)} = 0,08127\ 43883\ 61574
\end{aligned}$$

 $n = 10$

$$\begin{aligned}
x_6^{(10)} &= -x_5^{(10)} = 0,14887\ 43389\ 81631 & A_5^{(10)} &= A_6^{(10)} = 0,29552\ 42247\ 14753 \\
x_7^{(10)} &= -x_4^{(10)} = 0,43339\ 53941\ 29247 & A_4^{(10)} &= A_7^{(10)} = 0,26926\ 67193\ 09996 \\
x_8^{(10)} &= -x_3^{(10)} = 0,67940\ 95682\ 99024 & A_3^{(10)} &= A_8^{(10)} = 0,21908\ 63625\ 15982 \\
x_9^{(10)} &= -x_2^{(10)} = 0,86506\ 33666\ 88985 & A_2^{(10)} &= A_9^{(10)} = 0,14945\ 13491\ 50581 \\
x_{10}^{(10)} &= -x_1^{(10)} = 0,97390\ 65285\ 17172 & A_1^{(10)} &= A_{10}^{(10)} = 0,06667\ 13443\ 08688
\end{aligned}$$

 $n = 11$

$$\begin{aligned}
x_6^{(11)} &= 0 & A_6^{(11)} &= 0,27292\ 50867\ 77901 \\
x_7^{(11)} &= -x_5^{(11)} = 0,26954\ 31559\ 52345 & A_5^{(11)} &= A_7^{(11)} = 0,26280\ 45445\ 10247 \\
x_8^{(11)} &= -x_4^{(11)} = 0,51909\ 61292\ 06812 & A_4^{(11)} &= A_8^{(11)} = 0,23319\ 37645\ 91990 \\
x_9^{(11)} &= -x_3^{(11)} = 0,73015\ 20055\ 74049 & A_3^{(11)} &= A_9^{(11)} = 0,18629\ 02109\ 27734 \\
x_{10}^{(11)} &= -x_2^{(11)} = 0,88706\ 25997\ 68095 & A_2^{(11)} &= A_{10}^{(11)} = 0,12558\ 03694\ 64905 \\
x_{11}^{(11)} &= -x_1^{(11)} = 0,97822\ 86581\ 46057 & A_1^{(11)} &= A_{11}^{(11)} = 0,05566\ 85671\ 16174
\end{aligned}$$

 $n = 12$

$$\begin{aligned}
x_7^{(12)} &= -x_6^{(12)} = 0,12523\ 34085\ 11469 & A_6^{(12)} &= A_7^{(12)} = 0,24914\ 70458\ 13403 \\
x_8^{(12)} &= -x_5^{(12)} = 0,36783\ 14989\ 98180 & A_5^{(12)} &= A_8^{(12)} = 0,23349\ 25365\ 38355 \\
x_9^{(12)} &= -x_4^{(12)} = 0,58731\ 79542\ 86617 & A_4^{(12)} &= A_9^{(12)} = 0,20316\ 74267\ 23066 \\
x_{10}^{(12)} &= -x_3^{(12)} = 0,76990\ 26741\ 94305 & A_3^{(12)} &= A_{10}^{(12)} = 0,16007\ 83285\ 43346
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{11}^{(12)} &= -x_2^{(12)} = 0,90411\ 72563\ 70475 & A_2^{(12)} &= A_{11}^{(12)} = 0,10693\ 93259\ 95318 \\x_{12}^{(12)} &= -x_1^{(12)} = 0,98156\ 06342\ 46719 & A_1^{(12)} &= A_{12}^{(12)} = 0,04717\ 53363\ 86512\end{aligned}$$

 $n = 13$

$$\begin{aligned}x_7^{(13)} &= 0 & A_7^{(13)} &= 0,23255\ 15532\ 30874 \\x_8^{(13)} &= -x_6^{(13)} = 0,23045\ 83159\ 55135 & A_6^{(13)} &= A_8^{(13)} = 0,22628\ 31802\ 62897 \\x_9^{(13)} &= -x_5^{(13)} = 0,44849\ 27510\ 36447 & A_5^{(13)} &= A_9^{(13)} = 0,20781\ 60475\ 36889 \\x_{10}^{(13)} &= -x_4^{(13)} = 0,64234\ 93394\ 40340 & A_4^{(13)} &= A_{10}^{(13)} = 0,17814\ 59807\ 61946 \\x_{11}^{(13)} &= -x_3^{(13)} = 0,80157\ 80907\ 33310 & A_3^{(13)} &= A_{11}^{(13)} = 0,13887\ 35102\ 19787 \\x_{12}^{(13)} &= -x_2^{(13)} = 0,91759\ 83992\ 22978 & A_2^{(13)} &= A_{12}^{(13)} = 0,09212\ 14998\ 37728 \\x_{13}^{(13)} &= -x_1^{(13)} = 0,98418\ 30547\ 18588 & A_1^{(13)} &= A_{13}^{(13)} = 0,04048\ 40047\ 65316\end{aligned}$$

 $n = 14$

$$\begin{aligned}x_8^{(14)} &= -x_7^{(14)} = 0,10805\ 49487\ 07344 & A_8^{(14)} &= A_7^{(14)} = 0,21526\ 38534\ 63158 \\x_9^{(14)} &= -x_6^{(14)} = 0,31911\ 23689\ 27890 & A_9^{(14)} &= A_6^{(14)} = 0,20519\ 84637\ 21296 \\x_{10}^{(14)} &= -x_5^{(14)} = 0,51524\ 86363\ 58154 & A_{10}^{(14)} &= A_5^{(14)} = 0,18553\ 83974\ 77938 \\x_{11}^{(14)} &= -x_4^{(14)} = 0,68729\ 29048\ 11685 & A_{11}^{(14)} &= A_4^{(14)} = 0,15720\ 31671\ 58194 \\x_{12}^{(14)} &= -x_3^{(14)} = 0,82720\ 13150\ 69765 & A_{12}^{(14)} &= A_3^{(14)} = 0,12151\ 85706\ 87903 \\x_{13}^{(14)} &= -x_2^{(14)} = 0,92843\ 48836\ 63574 & A_{13}^{(14)} &= A_2^{(14)} = 0,08015\ 80871\ 59760 \\x_{14}^{(14)} &= -x_1^{(14)} = 0,98628\ 38086\ 96812 & A_{14}^{(14)} &= A_1^{(14)} = 0,03511\ 94603\ 31752\end{aligned}$$

 $n = 15$

$$\begin{aligned}x_8^{(15)} &= 0 & A_8^{(15)} &= 0,20257\ 82419\ 25561 \\x_9^{(15)} &= -x_7^{(15)} = 0,20119\ 40939\ 97435 & A_9^{(15)} &= A_7^{(15)} = 0,19843\ 14853\ 27111 \\x_{10}^{(15)} &= -x_6^{(15)} = 0,39415\ 13470\ 77563 & A_{10}^{(15)} &= A_6^{(15)} = 0,18616\ 10000\ 15562 \\x_{11}^{(15)} &= -x_5^{(15)} = 0,57097\ 21726\ 08539 & A_{11}^{(15)} &= A_5^{(15)} = 0,16626\ 92058\ 16994 \\x_{12}^{(15)} &= -x_4^{(15)} = 0,72441\ 77313\ 60170 & A_{12}^{(15)} &= A_4^{(15)} = 0,13957\ 06779\ 26154 \\x_{13}^{(15)} &= -x_3^{(15)} = 0,84820\ 65834\ 10427 & A_{13}^{(15)} &= A_3^{(15)} = 0,10715\ 92204\ 67172 \\x_{14}^{(15)} &= -x_2^{(15)} = 0,93727\ 33924\ 00706 & A_{14}^{(15)} &= A_2^{(15)} = 0,07036\ 60474\ 88108 \\x_{15}^{(15)} &= -x_1^{(15)} = 0,98799\ 25180\ 20485 & A_{15}^{(15)} &= A_1^{(15)} = 0,03075\ 32419\ 96117\end{aligned}$$

 $n = 16$

$$\begin{aligned}x_9^{(16)} &= -x_8^{(16)} = 0,09501\ 25098\ 37637 & A_9^{(16)} &= A_8^{(16)} = 0,18945\ 06104\ 55069 \\x_{10}^{(16)} &= -x_7^{(16)} = 0,28160\ 35507\ 79259 & A_{10}^{(16)} &= A_7^{(16)} = 0,18260\ 34150\ 44924 \\x_{11}^{(16)} &= -x_6^{(16)} = 0,45801\ 67776\ 57227 & A_{11}^{(16)} &= A_6^{(16)} = 0,16915\ 65193\ 95003 \\x_{12}^{(16)} &= -x_5^{(16)} = 0,61787\ 62444\ 02644 & A_{12}^{(16)} &= A_5^{(16)} = 0,14959\ 59888\ 16577 \\x_{13}^{(16)} &= -x_4^{(16)} = 0,75540\ 44083\ 55003 & A_{13}^{(16)} &= A_4^{(16)} = 0,12462\ 89712\ 55534\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
x_{14}^{(16)} = -x_3^{(16)} = 0,86563\,12023\,87832 & A_{14}^{(16)} = A_3^{(16)} = 0,09515\,85116\,82493 \\
x_{15}^{(16)} = -x_2^{(16)} = 0,94457\,50230\,73233 & A_{15}^{(16)} = A_2^{(16)} = 0,06225\,35239\,38648 \\
x_{16}^{(16)} = -x_1^{(16)} = 0,98940\,09349\,91650 & A_{16}^{(16)} = A_1^{(16)} = 0,02715\,24594\,11754
\end{array}$$

Если интегрируемая функция f имеет на $[-1, +1]$ непрерывную производную порядка $2n$, то для нахождения остатка гауссовой формулы может быть применено равенство (7.1.5). В нем мы должны считать $p(x) \equiv 1$ и за $\omega(x)$ принять многочлен степени n , ортогональный на $[-1, +1]$ с постоянным весом к любому многочлену меньшей степени и имеющий старший коэффициент, равный единице. Многочлен $\omega(x)$ может отличаться от многочлена Лежандра $P_n(x)$ только постоянным множителем, и так как старший коэффициент $P_n(x)$ есть $\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$, то

$$\omega(x) = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} P_n(x).$$

Ввиду

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1},$$

из (7.1.5) для остатка формулы Гаусса вытекает следующее представление

$$R(f) = \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)(2n)!} \left[\frac{(n!)^2}{(2n)!} \right]^2 f^{(2n)}(\eta), \quad (7.2.6)$$

$$\eta \in [-1, +1].$$

Пример 1. Пусть нужно вычислить интеграл

$$J = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2 \approx 0,69314718 \dots$$

Применим для этой цели формулу Гаусса с пятью узлами. Желая воспользоваться приведенной выше таблицей узлов и коэффициентов, приведем предварительно отрезок интегрирования $[0, 1]$ к стандартному отрезку $[-1, +1]$. Для этого достаточно положить

$$t = \frac{1}{2}(1+x);$$

$$J = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{3+x}.$$

Полагая в формуле Гаусса $n=5$, получим

$$J \approx A_1^{(5)}(3+x_1^{(5)})^{-1} + A_2^{(5)}(3+x_2^{(5)})^{-1} + \dots + A_5^{(5)}(3+x_5^{(5)})^{-1}.$$

Подставив сюда вместо $A_k^{(5)}$ и $x_k^{(5)}$ ($k = 1, 2, \dots, 5$) их значения из таблицы и выполнив вычисления на 8 значащих цифр, для интеграла найдем приближенное значение

$$J \approx 0,69314717.$$

Пример 2. Интегральное уравнение

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x, s) y(s) ds$$

часто приближенно решают при помощи замены его на „близкую“ алгебраическую линейную систему. Такую систему можно построить, например, если заменить интеграл какой-либо квадратурной суммой:

$$y(x) = f(x) + \sum_{j=1}^n A_j K(x, x_j) y(x_j) + R(x).$$

Если положить здесь последовательно $x = x_1, x_2, \dots, x_n$, получим систему равенств

$$y(x_i) = f(x_i) + \sum_{j=1}^n A_j K(x_i, x_j) y(x_j) + R(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Отбрасывая в правых частях неизвестные остатки $R(x_i)$, построим систему n алгебраических уравнений с n приближенными значениями $\tilde{y}(x_i)$ неизвестной функции $y(x)$:

$$\tilde{y}(x_i) = f(x_i) + \sum_{j=1}^n A_j K(x_i, x_j) \tilde{y}(x_j) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (7.2.7)$$

Чем более точной была взятая квадратурная формула, тем меньше будут отброшенные величины $R(x_i)$ и тем, следует ожидать, ближе к точному решению интегрального уравнения будет решение алгебраической системы (7.2.7).

Трудность решения системы (7.2.7) быстро возрастает с числом уравнений n . Поэтому при приведении интегрального уравнения к алгебраической системе часто пользуются квадратурными формулами, дающими высокую точность для гладких функций при небольшом числе узлов, в частности, формулами наивысшей алгебраической степени точности.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$y(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{xt} y(t) dt = \frac{1}{2x} (e^x - 1)$$

и для приближенного решения воспользуемся формулой Гаусса при $n = 2$. Узлы и коэффициенты Гаусса для отрезка $[0, 1]$ легко могут

быть найдены при помощи таблицы, если выполнить замену переменной $t = \frac{1+\xi}{2}$, $-1 \leq \xi < +1$, и будут такими: $A_1^{(2)} = A_2^{(2)} = \frac{1}{2}$, $x_1^{(2)} \approx 0,2113$, $x_2^{(2)} \approx 0,7887$.

Система (7.2.7) для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2} K_{1,1}\right) \tilde{y}_1 - \frac{1}{2} K_{1,2} \tilde{y}_2 &= f_1, \\ -\frac{1}{2} K_{2,1} \tilde{y}_1 + \left(1 - \frac{1}{2} K_{22}\right) \tilde{y}_2 &= f_2, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{y}_i = \tilde{y}(x_i^{(2)}), \quad K_{i,j} = K(x_i^{(2)}, x_j^{(2)}), \quad K(t, x) = \frac{1}{2} e^{xt}, \quad f_i = f(x_i^{(2)}),$$

или, после вычисления всех коэффициентов,

$$\begin{aligned} 0,7386 \tilde{y}_1 - 0,2954 \tilde{y}_2 &= 0,4434, \\ -0,2954 \tilde{y}_1 + 0,5343 \tilde{y}_2 &= 0,2384. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\tilde{y}_1 = \tilde{y}(x_1^{(2)}) = 0,9997, \quad \tilde{y}_2 = \tilde{y}(x_2^{(2)}) = 0,9990.$$

Точное решение уравнения, что легко проверяется подстановкой, есть $y(x) = 1$.

§ 3. Интегралы вида $\int_a^b (b-x)^\alpha (x-a)^\beta f(x) dx$ и их применение к вычислению кратных интегралов

Пусть $[a, b]$ любой конечный отрезок и на нем задана весовая функция $p(x) = (b-x)^\alpha (x-a)^\beta$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$. При изучении интегралов $\int_a^b (b-x)^\alpha (x-a)^\beta f(x) dx$ и, особенно, для составления таблиц узлов и коэффициентов квадратурных формул, служащих для его вычисления, приводят, обычно, отрезок интегрирования $[a, b]$ к стандартному отрезку $[-1, +1]$ линейным преобразованием $x = (a+b)/2 + t(b-a)/2$, $-1 \leq t \leq +1$.

Будем считать, что такое приведение выполнено и ограничимся рассмотрением интеграла

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta f(x) dx. \quad (7.3.1)$$

Ортогональной системой многочленов на отрезке $[-1, +1]$, соответствующей весу $p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, является система много-

членов Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Желая построить квадратурную формулу с n узлами

$$\int_{-1}^{+1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (7.3.2)$$

имеющую наивысшую степень точности $2n-1$, мы должны считать, что узлы ее x_k совпадают с корнями якобиева многочлена степени n

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x_k) = 0.$$

Коэффициенты A_k должны быть найдены при помощи равенств (7.1.3) или (7.1.4).

Нормированные многочлены Якоби есть *)

$$p_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \delta_n^{-\frac{1}{2}} P_n^{(\alpha, \beta)}(x),$$

где

$$\delta_n = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1) n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1)}.$$

Старшие коэффициенты их

$$a_n = \delta^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{2^n n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1)}.$$

Простые вычисления дают для коэффициента A_k следующее значение

$$A_k = \frac{(\alpha+\beta+2n) 2^{\alpha+\beta} \Gamma(\alpha+n) \Gamma(\beta+n)}{n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1) P_n^{(\alpha, \beta)'}(x_k) P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x_k)}. \quad (7.3.3)$$

Оно может быть немного упрощено, если воспользоваться известным в теории якобиевых многочленов равенством **)

$$\begin{aligned} & (\alpha+\beta+2n)(1-x^2) \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \\ & = -n[(\alpha+\beta+2n)x + \beta - \alpha] P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + 2(\alpha+n)(\beta+n) P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x). \end{aligned}$$

Полагая здесь $x = x_k$, найдем

$$(\alpha+\beta+2n)(1-x_k^2) P_n^{(\alpha, \beta)'}(x_k) = 2(\alpha+n)(\beta+n) P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x_k),$$

что дает возможность исключить $P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x_k)$ и привести (7.3.3) к форме

$$A_k = 2^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1) (1-x_k^2) [P_n^{(\alpha, \beta)'}(x_k)]^2}. \quad (7.3.4)$$

*) См. (2.2.2), (2.2.5) и (2.2.7).

**) См., например, Szegő, Orthogonal polynomials, Am. Math. Soc. Coll. Publ., 23, 1939.

Старший коэффициент многочлена $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ имеет величину (2.2.2). Поэтому многочлен $\omega(x)$ для изучаемой квадратурной формулы связан с $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ равенством

$$\omega(x) = \frac{2^n n! \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)} P_n^{(\alpha, \beta)}(x).$$

Если f имеет на отрезке $[-1, +1]$ непрерывную производную порядка $2n$, то остаточный член формулы (7.3.2) будет

$$\begin{aligned} R(f) &= \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \left[\frac{2^n n! \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)} \right]^2 \int_{-1}^{+1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta [P_n^{(\alpha, \beta)}(x)]^2 dx = \\ &= \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \cdot \frac{2^{\alpha+\beta+2n+1} n! \Gamma(\alpha + n + 1) \Gamma(\beta + n + 1) \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}{(\alpha + \beta + 2n + 1) \Gamma^2(\alpha + \beta + 2n + 1)}, \\ &\quad (-1 < \eta < +1). \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

Рассмотрим теперь частные случаи квадратурных формул с якобиевым весом.

1) При $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ весовая функция будет $p(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ и соответствующие многочлены Якоби будут только постоянными множителями отличаться от многочленов Чебышева первого рода [см. (2.3.4)]

$$P_n^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x) = C_n T_n(x) = C_n \cos(n \arccos x).$$

Корни T_n , являющиеся узлами квадратурной формулы, имеют значения

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Коэффициенты A_k легко подсчитываются. Так как

$$T'_n(x_k) = \sin(n \arccos x_k) \cdot \frac{n}{\sqrt{1-x_k^2}} = \frac{(-1)^{k-1} n}{\sqrt{1-x_k^2}},$$

то

$$(1-x_k^2) \left[P_n^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x_k) \right]^2 = C_n^2 (1-x_k^2) T_n'^2(x_k) = C_n^2 n^2$$

и

$$A_k = 2^n \frac{\Gamma^2\left(n + \frac{1}{2}\right)}{n! \Gamma(n) C_n^2 n^2}.$$

Правая часть равенства не зависит от k и, поэтому, все A_k будут одинаковы. Обозначим общую величину их буквой A . Численное значение A может быть найдено на основании последнего равенства.

Но проще его найти, если воспользоваться тем, что квадратурная формула должна дать точный результат для $f \equiv 1$ и, стало быть, должны быть верными равенства

$$\sum_{k=1}^n A_k = nA = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

Отсюда

$$A = \frac{\pi}{n}.$$

Квадратурная формула наивысшей степени точности с весом $p(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ будет иметь вид *)

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\cos \frac{2k-1}{2n} \pi\right) + R(f). \quad (7.3.6)$$

Из (7.3.5) можно получить следующее выражение остатка

$$R(f) = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \cdot \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}, \quad -1 < \eta < 1.$$

2) Пусть $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ и $p(x) = \sqrt{1-x^2}$. Соответствующие многочлены Якоби $P_n\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)(x)$ только постоянными множителями отличаются от многочленов Чебышева второго рода [см. (2.3.7)]

$$P_n\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)(x) = \frac{(2n+1)!}{2^{2n} n! (n+1)!} U_n(x),$$

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1) \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Корни $P_n\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)(x)$ суть $x_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Коэффициенты A_k могут быть подсчитаны при помощи (7.3.4):

$$A_k = \frac{\pi}{n+1} \sin^2 \frac{k\pi}{n+1}.$$

Квадратурная формула имеет вид

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2} f(x) dx = \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{k\pi}{n+1} f\left(\cos \frac{k\pi}{n+1}\right) + R(f). \quad (7.3.7)$$

*) Она была найдена Мелером в (1864 г.) Ознакомившись с ней по курсу анализа Эрмита, П. Л. Чебышев поставил задачу о построении квадратурных формул с равными коэффициентами для любой весовой функции $p(x)$. С результатами достигнутыми в этом направлении, мы ознакомимся позже, в главе 10.

Остаток $R(f)$ легко находится, если воспользоваться (7.3.5)

$$R(f) = \frac{\pi}{2^{2n}} \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}, \quad -1 < \eta < 1.$$

3) Пусть $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$, $p(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Многочлены Якоби $P_n^{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x)$, как и в обоих предыдущих случаях, имеют простое выражение через тригонометрические функции. Для любого многочлена $Q(x)$, степени меньшей n , должно быть выполнено условие ортогональности

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} P_n^{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x) Q(x) dx = \\ = \int_{-1}^{+1} (1-x) P_n^{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x) Q(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим многочлен $S(x) = (1-x) P_n^{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x)$. Степень его равна $n+1$ и он ортогонален на $[-1, +1]$ по весу $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ко всякому многочлену $Q(x)$ степени $< n$. Если его разложить по многочленам Чебышева первого рода $T_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, n+1$), то в разложении, ввиду указанной ортогональности, должны обратиться в нуль все коэффициенты при многочленах $T_k(x)$ до степени $n-1$ включительно и разложение должно иметь форму $S(x) = C_n T_n(x) + C_{n+1} T_{n+1}(x)$. Кроме того, так как $S(x)$ должен нацело делиться на $1-x$, при $x=1$ должно быть $S(1) = C_n T_n(1) + C_{n+1} T_{n+1}(1) = C_n + C_{n+1} = 0$. Поэтому $C_{n+1} = -C_n$ и

$$P_n^{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x) = C_n \frac{T_{n+1}(x) - T_n(x)}{x-1}.$$

Сравнение старших коэффициентов [см. (2.2.2) и (2.3.2)] позволяет найти C_n :

$$C_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}.$$

Если положить $x = \cos \theta$ и воспользоваться тем, что $T_k(x) = \cos k \arccos x = \cos k\theta$, то для изучаемого многочлена Якоби получаем:

$$P_n^{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} \theta}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

Корни его есть

$$X_k = \cos \frac{2k\pi}{2n+1} \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Квадратурные коэффициенты, вычисленные по (7.3.4) для $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$, будут

$$A_k = \frac{4\pi}{2n+1} \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}.$$

Для весовой функции $p(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ квадратурная формула будет следующей

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} f(x) dx = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1} f\left(\cos \frac{2k\pi}{2n+1}\right) + R(f). \quad (7.3.8)$$

Остаточный член ее имеет вид:

$$R(f) = \frac{\pi}{2^{2n}(2n)!} f^{(2n)}(\eta), \quad -1 < \eta < 1.$$

4) Примем $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = +\frac{1}{2}$ и рассмотрим интеграл $\int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx$. Многочлены $\Pi_n(x)$, ортогональные по весу $\sqrt{x}$

на отрезке $[0, 1]$, тесно связаны с многочленами Лежандра P_k . Положим $k = 2n + 1$ и возьмем многочлены Лежандра нечетных индексов $P_{2n+1}(y)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Они являются нечетными функциями y и отношение $P_{2n+1}(y)/y$ будет зависеть только от y^2 . Заменяем y^2 на x и покажем, что за $\Pi_n(x)$ могут быть приняты следующие многочлены

$$\Pi_n(x) = \frac{P_{2n+1}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.$$

Действительно, после замены переменной интегрирования $x = y^2$ получим следующую систему равенств:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{x} \Pi_n(x) \Pi_m(x) dx &= \int_0^1 P_{2n+1}(\sqrt{x}) P_{2m+1}(\sqrt{x}) \frac{dx}{\sqrt{x}} = \\ &= 2 \int_0^1 P_{2n+1}(y) P_{2m+1}(y) dy = \int_{-1}^1 P_{2n+1}(y) P_{2m+1}(y) dy = 0. \end{aligned}$$

Этим доказана ортогональность $\Pi_n(x)$.

В квадратурной формуле наивысшей степени точности

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f) \quad (7.3.9)$$

узлы x_k являются квадратами положительных корней y_k лежандрова многочлена $P_{2n+1}(y)$:

$$x_k = y_k^2.$$

Покажем, кроме того, что коэффициенты A_k весьма просто выражаются через сходственные коэффициенты гауссовой формулы (7.2.3) с $2n+1$ узлами

$$A_k = \int_0^1 \sqrt{x} \frac{\Pi_n(x)}{(x-x_k) \Pi'_n(x_k)} dx.$$

Так как

$$x_k = y_k^2 \quad \text{и} \quad \Pi'_n(x_k) = \frac{P'_{2n+1}(y_k)}{2y_k^2},$$

после подстановки в интеграл вместо $\Pi_n(x)$ его выражения через P_{2n+1} и замены переменной $x = y^2$, получим

$$A_k = 2y_k^2 \int_0^1 \frac{P_{2n+1}(y)}{P'_{2n+1}(y_k)} \cdot \frac{2y}{y^2 - y_k^2} dy.$$

Если воспользоваться равенством

$$\frac{2y}{y^2 - y_k^2} = \frac{1}{y - y_k} + \frac{1}{y + y_k}$$

и в интеграле, содержащем дробь $\frac{1}{y + y_k}$, заменить y на $-y$, то можно легко привести A_k к виду

$$A_k = 2y_k^2 \int_{-1}^{+1} \frac{P_{2n+1}(y)}{(y - y_k) P'_{2n+1}(y_k)} dy. \quad (7.3.10)$$

Рассмотрим теперь гауссову формулу (7.2.3) с $2n+1$ узлами и перенумеруем корни y_k многочлена Лежандра $P_{2n+1}(y)$ от номера $-n$ до $+n$

$$\int_{-1}^{+1} f(y) dy \approx \sum_{k=-n}^n A_k^{(2n+1)} f(y_k).$$

Коэффициенты ее $A_k^{(2n+1)}$ будут равны значениям интеграла, стоящего множителем при $2y_k^2$ в (7.3.10). Поэтому

$$A_k = 2y_k^2 A_k^{(2n+1)} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Остаточный член $R(f)$ формулы (7.3.9) может быть найден при помощи общего представления (7.1.5) для остатка, если принять во

внимание, что старший коэффициент многочлена $\Pi_n(x)$ такой же, как у $P_{2n+1}(y)$ и поэтому здесь

$$\omega(x) = \frac{2^{2n+1} [(2n+1)!]^2}{(4n+2)!} \Pi_n(x) = \frac{2^{2n+1} [(2n+1)!]^2}{(4n+2)!} \frac{P_{2n+1}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.$$

Остаточный член $R(f)$ имеет значение

$$R(f) = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \cdot \frac{2}{4n+3} \left\{ \frac{2^{2n+1} [(2n+1)!]^2}{(4n+2)!} \right\}^2, \quad 0 < \eta < 1.$$

Ниже приведены значения x_k и A_k формулы (7.3.9) для $n = 1(1)7$

$n = 1$

$$x_1 = 0,6 \qquad A_1 = 0,666 \ 6667 = \frac{2}{3}$$

$n = 2$

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0,289 \ 949 \ 2 & A_1 = 0,277 \ 556 \ 0 \\ x_2 = 0,821 \ 161 \ 9 & A_2 = 0,389 \ 110 \ 7 \end{array}$$

$n = 3$

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0,164 \ 710 \ 3 & A_1 = 0,125 \ 782 \ 7 \\ x_2 = 0,549 \ 868 \ 5 & A_2 = 0,307 \ 602 \ 4 \\ x_3 = 0,900 \ 805 \ 8 & A_3 = 0,233 \ 281 \ 6 \end{array}$$

$n = 4$

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0,105 \ 140 \ 3 & A_1 = 0,065 \ 680 \ 49 \\ x_2 = 0,376 \ 224 \ 5 & A_2 = 0,196 \ 096 \ 3 \\ x_3 = 0,698 \ 948 \ 0 & A_3 = 0,252 \ 527 \ 3 \\ x_4 = 0,937 \ 334 \ 3 & A_4 = 0,152 \ 362 \ 5 \end{array}$$

$n = 5$

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0,072 \ 653 \ 51 & A_1 = 0,038 \ 187 \ 22 \\ x_2 = 0,269 \ 460 \ 8 & A_2 = 0,125 \ 673 \ 2 \\ x_3 = 0,533 \ 122 \ 0 & A_3 = 0,198 \ 630 \ 8 \\ x_4 = 0,786 \ 880 \ 1 & A_4 = 0,197 \ 633 \ 4 \\ x_5 = 0,956 \ 931 \ 3 & A_5 = 0,106 \ 542 \ 0 \end{array}$$

$n = 6$

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0,053 \ 111 \ 03 & A_1 = 0,024 \ 036 \ 27 \\ x_2 = 0,201 \ 145 \ 7 & A_2 = 0,083 \ 602 \ 63 \\ x_3 = 0,412 \ 612 \ 7 & A_3 = 0,147 \ 010 \ 6 \\ x_4 = 0,642 \ 527 \ 4 & A_4 = 0,178 \ 460 \ 1 \\ x_5 = 0,841 \ 986 \ 8 & A_5 = 0,155 \ 130 \ 2 \\ x_6 = 0,968 \ 616 \ 3 & A_6 = 0,078 \ 426 \ 90 \end{array}$$

$$n = 7$$

$x_1 = 0,040\ 479\ 06$	$A_1 = 0,016\ 064\ 64$
$x_2 = 0,155\ 355\ 3$	$A_2 = 0,057\ 842\ 19$
$x_3 = 0,326\ 009\ 2$	$A_3 = 0,108\ 410\ 6$
$x_4 = 0,524\ 781\ 0$	$A_4 = 0,146\ 488\ 1$
$x_5 = 0,719\ 454\ 4$	$A_5 = 0,154\ 192\ 3$
$x_6 = 0,878\ 481\ 4$	$A_6 = 0,123\ 630\ 5$
$x_7 = 0,976\ 129\ 2$	$A_7 = 0,060\ 038\ 27$

5) Аналогично может быть построена формула наивысшей степени точности для веса $p(x) = x^{-\frac{1}{2}}$

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f), \quad (7.3.11)$$

соответствующая $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{1}{2}$.

Многочлены $S_n(x)$, ортогональные на $[0, 1]$ с весом $p(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, связаны с многочленами Лежандра $P_k(x)$ равенством

$$S_n(x) = P_{2n}(\sqrt{x}).$$

Поэтому абсциссы x_k в (7.3.11) равны квадратам положительных корней y_k лежандрова многочлена $P_{2n}(y)$:

$$x_k = y_k^2 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Рассмотрим гауссову формулу (7.2.3) с $2n$ узлами и перенумеруем корни y_k многочлена $P_{2n}(y)$ в порядке роста номерами $k = -n, -n+1, \dots, n$, $k \neq 0$:

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \approx \sum_{k=-n}^n{}' A_k^{(2n)} f(x_k).$$

Знак ' у суммы $\sum$ поставлен в знак того, что значение $k = 0$ должно быть пропущено.

Коэффициенты A_k (7.3.11) связаны с гауссовыми коэффициентами равенством

$$A_k = 2A_k^{(2n)} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Остаточный член $R(f)$ имеет форму

$$R(f) = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \cdot \frac{2}{4n+1} \left\{ \frac{2^{2n} [(2n)!]^2}{(4n)!} \right\}, \quad 0 < \eta < 1.$$

Численные значения x_n и A_n приведены в таблице для $n=1(1)7$

$n=1$

$$x_1 = 0,333\ 333\ 3 = \frac{1}{3} \quad A_1 = 2,000\ 000\ 0$$

$n=2$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,115\ 587\ 1 & A_1 &= 1,304\ 290\ 3 \\ x_2 &= 0,741\ 555\ 7 & A_2 &= 0,695\ 709\ 7 \end{aligned}$$

$n=3$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,056\ 939\ 12 & A_1 &= 0,935\ 827\ 8 \\ x_2 &= 0,437\ 197\ 9 & A_2 &= 0,721\ 523\ 1 \\ x_3 &= 0,869\ 499\ 4 & A_3 &= 0,342\ 649\ 0 \end{aligned}$$

$n=4$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,033\ 648\ 27 & A_1 &= 0,725\ 367\ 6 \\ x_2 &= 0,276\ 184\ 3 & A_2 &= 0,627\ 413\ 3 \\ x_3 &= 0,634\ 677\ 5 & A_3 &= 0,444\ 762\ 1 \\ x_4 &= 0,922\ 156\ 6 & A_4 &= 0,202\ 457\ 1 \end{aligned}$$

$n=5$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,022\ 163\ 57 & A_1 &= 0,591\ 048\ 4 \\ x_2 &= 0,187\ 831\ 6 & A_2 &= 0,538\ 533\ 4 \\ x_3 &= 0,461\ 597\ 4 & A_3 &= 0,438\ 172\ 7 \\ x_4 &= 0,748\ 334\ 6 & A_4 &= 0,298\ 902\ 7 \\ x_5 &= 0,948\ 493\ 9 & A_5 &= 0,133\ 342\ 7 \end{aligned}$$

$n=6$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,015\ 683\ 4 & A_1 &= 0,498\ 294\ 1 \\ x_2 &= 0,135\ 300\ 0 & A_2 &= 0,466\ 985\ 1 \\ x_3 &= 0,344\ 942\ 4 & A_3 &= 0,406\ 334\ 9 \\ x_4 &= 0,592\ 750\ 1 & A_4 &= 0,320\ 156\ 7 \\ x_5 &= 0,817\ 428\ 0 & A_5 &= 0,213\ 878\ 7 \\ x_6 &= 0,963\ 461\ 3 & A_6 &= 0,094\ 350\ 67 \end{aligned}$$

$n=7$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,011\ 675\ 87 & A_1 &= 0,430\ 527\ 7 \\ x_2 &= 0,101\ 832\ 7 & A_2 &= 0,410\ 396\ 9 \\ x_3 &= 0,265\ 481\ 2 & A_3 &= 0,371\ 076\ 8 \\ x_4 &= 0,472\ 371\ 5 & A_4 &= 0,314\ 406\ 3 \\ x_5 &= 0,684\ 262\ 0 & A_5 &= 0,243\ 037\ 1 \\ x_6 &= 0,861\ 991\ 3 & A_6 &= 0,160\ 316\ 2 \\ x_7 &= 0,972\ 755\ 8 & A_7 &= 0,070\ 238\ 9 \end{aligned}$$

Один из возможных и часто применяемых методов вычисления интегралов, взятых по многомерным областям, состоит в том, что

такой интеграл приводят, по обычным правилам анализа, к нескольким последовательно находимым простым интегралам и затем к вычислению каждого простого интеграла применяют какую-либо формулу приближенных квадратур. Поясним это простым примером. Пусть нужно вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma,$$

где область интегрирования σ есть прямоугольник $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$. Интеграл I может быть приведен к следующим двум простым интегралам

$$I = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx.$$

Заменив интеграл по y квадратурной суммой с m узлами y_i и коэффициентами B_i ($i = 1, \dots, m$) и интеграл по x квадратурной суммой с n узлами x_j и коэффициентами A_j ($j = 1, \dots, n$), получим следующее правило для вычисления I :

$$I \approx \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m A_j B_i f(x_j, y_i).$$

При применении его необходимо найти значения функции f в $m \cdot n$ точках. Число этих значений может быть велико, даже если числа m и n не будут „большими“.

Для описанного сейчас способа вычисления двойного интеграла несущественно, что область интегрирования есть прямоугольник. Такие же рассуждения могут быть развиты для весьма широкого класса областей и для них мы также столкнемся с проблемой „большого числа узлов“.

Та же проблема, очевидно, имеет не меньшее значение для интегралов более высокой кратности. Для вычисления кратных интегралов, быть может даже в степени более высокой, чем для простых интегралов, важна задача возможно большего уменьшения числа узлов, необходимых для получения требуемой точности результата. Для достижения этой цели следует использовать весь произвол, находящийся в распоряжении вычислителя: выбор системы координат, выбор квадратурных формул, которые будут применяться к вычислению простых интегралов, он может также воспользоваться свойствами области интегрирования и т. д.

Рассмотрим сейчас некоторые частные вопросы такого рода.

6) Пусть рассматривается двойной интеграл в полярной системе координат

$$I = \iint_{\sigma} F(r, \varphi) r dr d\varphi.$$

Допустим, что область интегрирования σ определяется неравенствами

$$\alpha \leq \varphi \leq \beta, \quad 0 \leq r \leq R = R(\varphi).$$

Если ввести вспомогательную переменную ρ , положив $r = \rho R$, $0 \leq \rho \leq 1$, то интеграл I можно записать в форме

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \int_0^1 F(\rho R, \varphi) \rho d\rho \right\} R^2 d\varphi.$$

Отсюда видно, что для вычисления двойного интеграла в полярных координатах, при помощи приведения его к интегрированию по координатам r и φ , существенный интерес представляет рассмотрение интеграла

$$\int_0^1 f(x) x dx. \quad (7.3.12)$$

Если мы хотим построить квадратурную формулу

$$\int_0^1 f(x) x dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f),$$

имеющую наивысшую степень точности, мы должны будем узлы ее взять в корнях многочлена $\Pi_n(x)$, ортогонального на отрезке $[0, 1]$ по весу $p(x) = x$ ко всякому многочлену степени $\leq n-1$. Коэффициенты A_k могут быть вычислены по общему правилу (7.1.3) или (7.1.4).

Для нахождения x_k и A_k можно воспользоваться полученными раньше результатами для весовой функции $(1-z)^\alpha (1+z)^\beta$. Выполним в интеграле (7.3.12) замену переменной, положив $x = \frac{1-z}{2}$, $-1 \leq z \leq +1$,

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 f(x) x dx &= \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} F(z) (1-z) dz, \\ F(z) &= f\left(\frac{1-z}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (7.3.13)$$

После преобразования $\Pi_n(x)$ перейдет в многочлен степени n от z , ортогональный на отрезке $[-1, +1]$ по весу $1-z$ ко всякому многочлену степени $\leq n-1$, и будет отличаться от многочлена Якоби $P_n^{(1,0)}(z)$ лишь постоянным множителем

$$\Pi_n(x) = C P_n^{(1,0)}(z).$$

Отсюда видно, что узлы x_k формулы (7.3.7) должны быть связаны с корнями z_n якобиева многочлена $P_n^{(1,0)}(z)$ равенствами

$$x_k = \frac{1 - z_k}{2} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Для коэффициентов A_k при помощи (7.3.8), (7.3.2) и (7.3.4) для $\alpha = 1$, $\beta = 0$ может быть получено следующее общее выражение

$$A_k = \frac{1}{(1 - z_k^2) [P_n^{(1,0)'}(z_k)]^2}.$$

Значения узлов и коэффициентов формулы (7.3.7) для $n = 1(1)6$ указаны в приводимой таблице.

$n = 1$

$$x_1 = 0,666 \ 666 \ 7 \qquad A_1 = 0,500 \ 000 \ 0$$

$n = 2$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,355 \ 051 \ 0 & A_1 &= 0,181 \ 958 \ 6 \\ x_2 &= 0,844 \ 949 \ 0 & A_2 &= 0,318 \ 041 \ 4 \end{aligned}$$

$n = 3$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,212 \ 340 \ 5 & A_1 &= 0,069 \ 826 \ 97 \\ x_2 &= 0,590 \ 533 \ 2 & A_2 &= 0,229 \ 241 \ 2 \\ x_3 &= 0,911 \ 412 \ 0 & A_3 &= 0,200 \ 931 \ 9 \end{aligned}$$

$n = 4$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,139 \ 759 \ 9 & A_1 &= 0,031 \ 180 \ 97 \\ x_2 &= 0,416 \ 409 \ 6 & A_2 &= 0,129 \ 847 \ 6 \\ x_3 &= 0,723 \ 157 \ 0 & A_3 &= 0,203 \ 464 \ 6 \\ x_4 &= 0,942 \ 895 \ 8 & A_4 &= 0,135 \ 506 \ 9 \end{aligned}$$

$n = 5$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,098 \ 535 \ 08 & A_1 &= 0,015 \ 747 \ 91 \\ x_2 &= 0,304 \ 535 \ 7 & A_2 &= 0,073 \ 908 \ 87 \\ x_3 &= 0,562 \ 025 \ 2 & A_3 &= 0,146 \ 387 \ 0 \\ x_4 &= 0,801 \ 986 \ 6 & A_4 &= 0,167 \ 174 \ 6 \\ x_5 &= 0,960 \ 190 \ 1 & A_5 &= 0,096 \ 781 \ 59 \end{aligned}$$

$n = 6$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,073 \ 054 \ 33 & A_1 &= 0,008 \ 738 \ 30 \\ x_2 &= 0,230 \ 766 \ 1 & A_2 &= 0,043 \ 955 \ 15 \\ x_3 &= 0,441 \ 328 \ 5 & A_3 &= 0,098 \ 661 \ 15 \\ x_4 &= 0,663 \ 015 \ 3 & A_4 &= 0,140 \ 792 \ 6 \\ x_5 &= 0,851 \ 921 \ 4 & A_5 &= 0,135 \ 542 \ 5 \\ x_6 &= 0,970 \ 683 \ 6 & A_6 &= 0,072 \ 310 \ 34 \end{aligned}$$

7) При вычислении тройного интеграла в шаровых координатах

$$I = \int_V \int f(r, \vartheta, \varphi) r^2 dr d\vartheta d\varphi,$$

путем приведения его к интегрированию по координатам r, ϑ, φ , во многих случаях для интегрирования по радиусу r полезную помощь оказывают интегралы вида

$$\int_0^1 f(x) x^2 dx. \quad (7.3.14)$$

Подобно предыдущему, можно установить, что в квадратурной форме наивысшей точности, служащей для вычисления (7.3.14),

$$\int_0^1 f(x) x^2 dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f), \quad (7.3.15)$$

узлы x_k должны быть связаны с корнями $z_1, z_2, \dots, z_n$ якобиева многочлена $P_n^{(2,0)}(z)$ соотношениями

$$x_k = \frac{1 - z_k}{2},$$

коэффициенты же A_k должны иметь значения:

$$A_k = \frac{1}{(1 - z_k^2) [P_n^{(2,0)}(z_k)]^2}.$$

8) Рассмотрим двойной интеграл в декартовых координатах

$$I = \int_{\sigma} \int f(x, y) dx dy. \quad (7.3.16)$$

Функцию f в дальнейшем мы будем считать непрерывной и достаточно гладкой в σ .

При некоторых предположениях об области σ интеграл I , как известно, можно привести к двукратному (повторному) интегралу

$$I = \int_a^b F(x) dx, \quad (7.3.17)$$

$$F = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (7.3.18)$$

Здесь $y_1(x), y_2(x), a$ и b имеют хорошо известные значения. Считая, что интеграл (7.3.18) может быть вычислен при всех нужных нам в дальнейшем значениях x , мы займемся исключительно вопросом вычисления интеграла (7.3.17). Функция $F(x)$ зависит как от интегрируемой функции f , так и от формы области σ .

Можно предвидеть, что среди формул наивысшей степени точности гауссова квадратурная формула не всегда даст наилучший результат, так как она рассчитана на интегрирование с постоянным весом и не будет учитывать влияние на F формы области σ .

Легко понять, что естественным весом для вычисления (7.3.17) будет следующая функция. Построим сечение области σ прямой, проходящей через точку x и параллельной оси ординат. Длина сечения равна разности $y_2(x) - y_1(x)$. Чем большую длину будет оно иметь, тем большее влияние на образование двойного интеграла будет иметь узкая полоска около этого сечения. Поэтому при вычислении интеграла I за вес можно принять

$$p(x) = y_2(x) - y_1(x) \quad (7.3.19)$$

и преобразовать I к виду:

$$I = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)] \Phi(x) dx, \quad (7.3.20)$$

$$\Phi(x) = \frac{F(x)}{y_2(x) - y_1(x)}.$$

Вес (7.3.19) будет во многих случаях достаточно точно учитывать влияние на I формы области интегрирования и, при достаточно гладких функциях $f(x, y)$, должен привести к благоприятным по точности результатам. Но такой полный учет влияния формы области на выбор квадратурной формулы, повидимому, не целесообразно делать, так как тогда для каждой области пришлось бы вычислять свою систему узлов и коэффициентов. Задачу выбора весовой функции для интеграла I можно упростить на основании следующих простых соображений. Рассмотрим интеграл

$$I_1 = \int_a^b p(x) f(x) dx$$

и предположим, что для его вычисления мы хотим применить квадратурную формулу с n узлами наивысшей степени точности

$$I_1 = \int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(y_k). \quad (7.3.21)$$

Узлы ее лежат в нулях многочлена степени n из ортогональной системы многочленов, принадлежащей весу $p(x)$. Равенство (7.3.21) будет, вообще говоря, иметь тем меньшую погрешность, чем более точное приближение многочленом степени $2n - 1$ будет допускать функция f .

Предположим теперь, что $p(x)$ мы представили в форме произведения

$$p(x) = \rho(x) q(x),$$

где $q(x)$ — положительная, не обращающаяся в нуль функция. Присоединим множитель $q(x)$ к интегрируемой функции $f(x)$: $q(x)f(x) = F(x)$ и рассмотрим интеграл I_1 с весовой функцией $\rho(x)$

$$I_1 = \int_a^b \rho(x) F(x) dx.$$

Пользуясь корнями z_k многочлена степени n из ортогональной системы, принадлежащей весу $\rho(x)$, построим для него квадратурную формулу с n узлами, также наивысшей степени точности

$$I_1 = \int_a^b \rho(x) F(x) dx \approx \sum_{k=1}^n B_k F(x_k). \quad (7.3.22)$$

Если $q(x)$ — медленно изменяющаяся функция, имеющая производные высокого порядка, или даже аналитическая функция, особые точки которой лежат далеко от отрезка $[a, b]$, то можно ожидать, что функции $f(x)$ и $F(x) = q(x)f(x)$ будут допускать приближение многочленами степени $2n-1$, близкое по точности. Поэтому можно надеяться на то, что формулы (7.3.21) и (7.3.22), служащие для вычисления одного и того же интеграла I_1 , будут иметь приблизительно одинаковые погрешности и мы мало потеряем или приобретем в точности, если перейдем от интеграла (7.3.21) с весовой функцией $\rho(x)$ к интегралу (7.3.22) с весом $\rho(x)$.

Это позволяет при вычислении интеграла (7.3.17) переходить от „естественной“ весовой функции $\rho(x) = y_2(x) - y_1(x)$ к другому, более простому весу. Такой переход, во многих случаях, не будет связан со значительной потерей точности. Новая, более простая весовая функция может быть выбрана одинаковой для нескольких областей, что значительно облегчит задачу построения квадратурных формул.

Пусть отрезок $[a, b]$ интегрирования — конечный и пусть можно выбрать показатели α и β так, чтобы отношение

$$q(x) = \frac{y_2(x) - y_1(x)}{(x-a)^\beta (b-x)^\alpha}, \quad a \leq x \leq b$$

было ограничено сверху и снизу положительными числами

$$0 < m \leq q(x) \leq M < \infty.$$

В этом случае для вычисления интеграла (7.3.17) можно воспользоваться весом $(x-a)^\beta (b-x)^\alpha$:

$$I = \int_a^b (x-a)^\beta (b-x)^\alpha \Psi(x) dx,$$

где

$$\Psi(x) = (x-a)^{-\beta} (b-x)^{-\alpha} F(x).$$

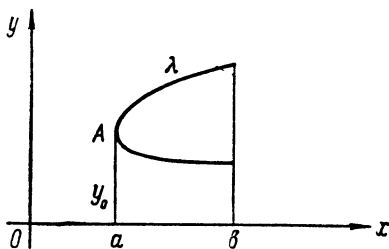
Например, если область интегрирования имеет форму, изображенную на черт. 3, причем контур области λ имеет в точке A с прямой $x=a$ соприкосновение первого порядка*), то можно считать $\alpha=0$, $\beta=\frac{1}{2}$ и за весовую функцию принять **)

$$p(x) = \sqrt{x-a}.$$

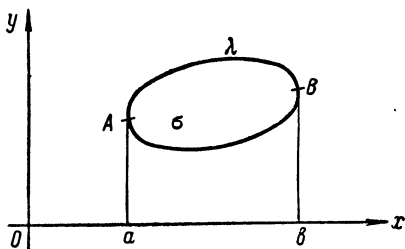
Интеграл

$$I = \int_a^b \sqrt{x-a} \psi(x) dx, \quad \psi(x) = (x-a)^{-\frac{1}{2}} F(x)$$

может быть вычислен при помощи формулы (7.3.9).



Черт. 3.



Черт. 4.

Если область σ имеет вид, изображенный на черт. 4, и контур ее λ с прямыми $x=a$ и $x=b$ также имеет соприкосновение первого порядка, то за весовую функцию можно принять

$$p(x) = \sqrt{(x-a)(b-x)}.$$

К вычислению интеграла

$$I = \int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)} \psi(x) dx,$$

$$\psi(x) = [(x-a)(b-x)]^{-\frac{1}{2}} F(x)$$

может быть применено равенство (7.3.11).

*) H. Berthod — Laborowski et H. Mineur, Sur calcul numérique des intégrales doubles, C. R. Paris, 1949, 229, n° 19, 919 — 921.

**) Если принять ординату y за независимую переменную, то уравнение контура λ вблизи точки A может быть записано в форме $x = a + c_2(y - y_0)^2 + c_3(y - y_0)^3 + \dots$, $c_2 \neq 0$.

§ 4. Интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) dx$

Ортогональную систему многочленов на всей оси $-\infty \leq x \leq +\infty$ по весу $p(x) = e^{-x^2}$ образуют многочлены Чебышева — Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

В квадратурной формуле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f), \quad (7.4.1)$$

имеющей наивысшую алгебраическую степень точности $2n-1$, узлы должны лежать в корнях многочлена $H_n(x)$:

$$H_n(x_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Коэффициенты A_k легко вычисляются на основании (7.1.3), если воспользоваться тем, что нормированные многочлены Чебышева — Эрмита имеют выражения (2.4.3) и их старшие коэффициенты имеют значения (2.4.4.):

$$A_k = - \frac{2^{n+1} n! \pi^{\frac{1}{2}}}{H'_n(x_k) H_{n+1}(x_k)}.$$

Если в равенстве (2.4.2) положить $x = x_k$, то найдем $H_{n+1}(x_k) = -H'_n(x_k)$, что дает возможность преобразовать A_k к форме:

$$A_k = \frac{2^{n+1} n! \pi^{\frac{1}{2}}}{H_n'^2(x_k)}. \quad (7.4.2)$$

Так как для изучаемой квадратуры $\omega(x) = 2^{-n} H_n(x)$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \omega^2(x) dx = 2^{-2n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2^{-n} n! \pi^{\frac{1}{2}},$$

равенство (7.1.5.) для остатка $R(f)$ формулы (7.4.1) дает

$$R(f) = \frac{n! \pi^{\frac{1}{2}}}{2^n (2n)!} f^{(2n)}(\eta). \quad (7.4.3)$$

При $n = 1$ (1) 10 узлы x_k и коэффициенты A_k таковы *):

$$n = 1$$

$$x_1 = 0$$

$$A_1 = 1,772 \ 453 \ 850 \ 906$$

$$n = 2$$

$$x_2 = -x_1 = 0,707 \ 106 \ 781 \ 187 \quad A_1 = A_2 = 0,886 \ 226 \ 925 \ 453$$

$$n = 3$$

$$x_2 = 0 \quad A_2 = 1,181 \ 635 \ 900 \ 604$$

$$x_3 = -x_1 = 1,224 \ 744 \ 871 \ 392 \quad A_1 = A_3 = 0,295 \ 408 \ 975 \ 151$$

$$n = 4$$

$$x_3 = -x_2 = 0,524 \ 647 \ 623 \ 275 \quad A_2 = A_3 = 0,804 \ 914 \ 090 \ 006$$

$$x_4 = -x_1 = 1,650 \ 680 \ 123 \ 886 \quad A_1 = A_4 = 0,081 \ 312 \ 835 \ 447 \ 3$$

$$n = 5$$

$$x_3 = 0 \quad A_3 = 0,945 \ 308 \ 720 \ 483$$

$$x_4 = -x_2 = 0,958 \ 572 \ 464 \ 614 \quad A_2 = A_4 = 0,393 \ 619 \ 323 \ 152$$

$$x_5 = -x_1 = 2,020 \ 182 \ 870 \ 456 \quad A_1 = A_5 = 0,019 \ 953 \ 242 \ 059 \ 0$$

$$n = 6$$

$$x_4 = -x_3 = 0,436 \ 077 \ 412 \quad A_3 = A_4 = 0,724 \ 629 \ 595$$

$$x_5 = -x_2 = 1,335 \ 849 \ 074 \quad A_2 = A_5 = 0,157 \ 067 \ 320$$

$$x_6 = -x_1 = 2,350 \ 604 \ 974 \quad A_1 = A_6 = 0,004 \ 530 \ 009 \ 90$$

$$n = 7$$

$$x_4 = 0 \quad A_4 = 0,810 \ 264 \ 618$$

$$x_5 = -x_3 = 0,816 \ 287 \ 883 \quad A_3 = A_5 = 0,425 \ 607 \ 253$$

$$x_6 = -x_2 = 1,673 \ 551 \ 629 \quad A_2 = A_6 = 0,054 \ 515 \ 582 \ 8$$

$$x_7 = -x_1 = 2,651 \ 961 \ 357 \quad A_1 = A_7 = 0,000 \ 971 \ 781 \ 245$$

$$n = 8$$

$$x_5 = -x_4 = 0,381 \ 186 \ 990 \quad A_4 = A_5 = 0,661 \ 147 \ 013$$

$$x_6 = -x_3 = 1,157 \ 193 \ 712 \quad A_3 = A_6 = 0,207 \ 802 \ 326$$

$$x_7 = -x_2 = 1,981 \ 656 \ 757 \quad A_2 = A_7 = 0,017 \ 077 \ 983 \ 0$$

$$x_8 = -x_1 = 2,930 \ 637 \ 420 \quad A_1 = A_8 = 0,000 \ 199 \ 604 \ 071$$

$$n = 9$$

$$x_5 = 0 \quad A_5 = 0,720 \ 235 \ 216$$

$$x_6 = -x_4 = 0,723 \ 551 \ 019 \quad A_4 = A_6 = 0,432 \ 651 \ 559$$

$$x_7 = -x_3 = 1,468 \ 553 \ 289 \quad A_3 = A_7 = 0,088 \ 474 \ 527 \ 4$$

$$x_8 = -x_2 = 2,266 \ 580 \ 585 \quad A_2 = A_8 = 0,004 \ 943 \ 624 \ 28$$

$$x_9 = -x_1 = 3,190 \ 993 \ 202 \quad A_1 = A_9 = 0,000 \ 039 \ 606 \ 977 \ 4$$

*) Greenwood and Miller, Zeros of the Hermite polynomials and weight for Gauss mechanical quadrature formula, Bull. Amer. Math. soc. 1948, 54, n° 8, стр. 765—769. Исправления см., Math. tables and other aids to comput., 1951, 5 n° 34, стр. 82.

$$n = 10$$

$x_6 = -x_5 = 0,342 \ 901 \ 327$	$A_6 = A_6 = 0,610 \ 862 \ 634$
$x_7 = -x_4 = 1,036 \ 610 \ 830$	$A_4 = A_7 = 0,240 \ 138 \ 611$
$x_8 = -x_3 = 1,756 \ 683 \ 649$	$A_3 = A_8 = 0,033 \ 874 \ 394 \ 5$
$x_9 = -x_2 = 2,532 \ 731 \ 674$	$A_2 = A_9 = 0,001 \ 343 \ 645 \ 75$
$x_{10} = -x_1 = 3,436 \ 159 \ 119$	$A_1 = A_{10} = 0,000 \ 007 \ 640 \ 432 \ 86$

Применим к вычислению интеграла

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} I_0(x) dx = \sqrt{\pi} \exp \frac{1}{8} \cdot I_0\left(\frac{1}{8}\right)$$

формулу (7.4.1) для $n = 5$, воспользовавшись значениями x_k и A_k ($k = 1, 2, \dots, 5$), приведенными в таблице, и выполнив вычисления на 4 значащие цифры, найдем для квадратурной суммы

$$A_1 f(x_1) + \dots + A_5 f(x_5) = 1,570.$$

Точное значение интеграла на 4 знака равно 1,563,

§ 5. Интегралы вида $\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} f(x) dx$

Как было выяснено в § 5 гл. 2, ортогональными на полуоси $[0, \infty)$ по весу $p(x) = x^{\alpha} e^{-x}$ ($\alpha > -1$) являются многочлены Лягерра

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{\alpha+n} e^{-x}).$$

В квадратурной формуле наивысшей степени точности

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f) \quad (7.5.1)$$

узлы x_k должны лежать в корнях многочлена Лягерра степени n .

Нормированные многочлены Лягерра есть

$$l_n^{(\alpha)}(x) = \Gamma^{-\frac{1}{2}}(n+1) \Gamma^{-\frac{1}{2}}(\alpha+n+1) L_n^{(\alpha)}(x).$$

Ввиду (2.5.2), старшие коэффициенты их равны

$$a_n = \Gamma^{-\frac{1}{2}}(n+1) \Gamma^{-\frac{1}{2}}(\alpha+n+1).$$

Поэтому (7.1.3) для A_k даст следующее значение

$$A_k = - \frac{n! \Gamma(\alpha+n+1)}{L_n^{(\alpha)'}(x_k) L_{n+1}^{(\alpha)}(x_k)}.$$

В теории многочленов Лягерра известно рекуррентное равенство

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (x - \alpha - n - 1)L_n^{(\alpha)}(x) - xL_n^{(\alpha)'}(x).$$

Если в нем положить $x = x_k$, то получим $L_{n+1}(x_k) = -x_k L_n^{(\alpha)'}(x_k)$, что позволяет привести найденное выражение для A_k к виду

$$A_k = \frac{n! \Gamma(\alpha + n + 1)}{x_k [L_n^{(\alpha)'}(x_k)]^2}. \quad (7.5.2)$$

Ниже приведена таблица узлов и коэффициентов для $n = 1(1)15$, *) соответствующая случаю $\alpha = 0$ и предназначенная для вычислений при помощи квадратурной формулы вида

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (7.5.3)$$

$n = 1$

$$x_1 = 1,000\ 000\ 000\ 000 \quad A_1 = 1,000\ 000\ 000\ 000$$

$n = 2$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,585\ 786\ 437\ 627 & A_1 &= 0,853\ 553\ 390\ 593 \\ x_2 &= 3,414\ 213\ 562\ 373 & A_2 &= 0,146\ 446\ 609\ 407 \end{aligned}$$

$n = 3$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,415\ 774\ 556\ 783 & A_1 &= 0,711\ 093\ 009\ 929 \\ x_2 &= 2,294\ 280\ 360\ 279 & A_2 &= 0,278\ 517\ 733\ 569 \\ x_3 &= 6,289\ 945\ 082\ 937 & A_3 &= 0,(1)\ 103\ 892\ 565\ 016 \end{aligned}$$

$n = 4$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,322\ 547\ 689\ 619 & A_1 &= 0,603\ 154\ 104\ 342 \\ x_2 &= 1,745\ 761\ 101\ 158 & A_2 &= 0,357\ 418\ 692\ 438 \\ x_3 &= 4,536\ 620\ 296\ 921 & A_3 &= 0,(1)\ 388\ 879\ 085\ 150 \\ x_4 &= 9,395\ 070\ 912\ 301 & A_4 &= 0,(3)\ 539\ 294\ 705\ 561 \end{aligned}$$

$n = 5$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,263\ 560\ 319\ 718 & A_1 &= 0,521\ 755\ 610\ 583 \\ x_2 &= 1,413\ 403\ 059\ 107 & A_2 &= 0,398\ 666\ 811\ 083 \\ x_3 &= 3,596\ 425\ 771\ 041 & A_3 &= 0,(1)\ 759\ 424\ 496\ 817 \\ x_4 &= 7,085\ 810\ 005\ 859 & A_4 &= 0,(2)\ 361\ 175\ 867\ 992 \\ x_5 &= 12,640\ 800\ 844\ 276 & A_5 &= 0,(4)\ 233\ 699\ 723\ 858 \end{aligned}$$

*) H. E. Salzer and R. Zucker, Table of the zeros and weight factors of the first fifteen Laguerre polynomials, Bull. Am. Mat. Soc., T. 55 1949, n° 10, стр. 1004—1012.

Число, стоящее в скобках после целой части, означает число нулей между запятой, отделяющей целую часть, и первой значащей цифрой.

$n=6$

$x_1 = 0,222$	846	604	179	$A_1 =$	0,458	964	673	950
$x_2 = 1,188$	932	101	673	$A_2 =$	0,417	000	830	772
$x_3 = 2,992$	736	326	059	$A_3 =$	0,113	373	382	074
$x_4 = 5,775$	143	569	105	$A_4 =$	0,(1)	103	991	974
$x_5 = 9,837$	467	418	383	$A_5 =$	0,(3)	261	017	202
$x_6 = 15,982$	873	980	602	$A_6 =$	0,(6)	898	547	906

 $n=7$

$x_1 = 0,193$	043	676	560	$A_1 =$	0,409	318	951	701
$x_2 = 1,026$	664	895	339	$A_2 =$	0,421	831	277	862
$x_3 = 2,567$	876	744	951	$A_3 =$	0,147	126	348	658
$x_4 = 4,900$	353	084	526	$A_4 =$	0,(1)	206	335	144
$x_5 = 8,182$	153	444	563	$A_5 =$	0,(2)	107	401	014
$x_6 = 12,734$	180	291	798	$A_6 =$	0,(4)	158	654	643
$x_7 = 19,395$	727	862	263	$A_7 =$	0,(7)	317	031	547

 $n=8$

$x_1 = 0,170$	279	632	305	$A_1 =$	0,369	188	589	342
$x_2 = 0,903$	701	776	799	$A_2 =$	0,418	786	780	814
$x_3 = 2,251$	086	629	866	$A_3 =$	0,175	794	986	637
$x_4 = 4,266$	700	170	288	$A_4 =$	0,(1)	333	434	922
$x_5 = 7,045$	905	402	393	$A_5 =$	0,(2)	279	453	623
$x_6 = 10,758$	516	010	181	$A_6 =$	0,(4)	907	650	877
$x_7 = 15,740$	678	641	278	$A_7 =$	0,(6)	848	574	671
$x_8 = 22,863$	131	736	889	$A_8 =$	0,(8)	104	800	117

 $n=9$

$x_1 = 0,152$	322	227	732	$A_1 =$	0,336	126	421	798
$x_2 = 0,807$	220	022	742	$A_2 =$	0,411	213	980	424
$x_3 = 2,005$	135	155	619	$A_3 =$	0,199	287	525	371
$x_4 = 3,783$	473	973	331	$A_4 =$	0,(1)	474	605	627
$x_5 = 6,204$	956	777	877	$A_5 =$	0,(2)	559	962	661
$x_6 = 9,372$	985	251	688	$A_6 =$	0,(3)	305	249	767
$x_7 = 13,466$	236	911	092	$A_7 =$	0,(5)	659	212	302
$x_8 = 18,833$	597	788	992	$A_8 =$	0,(7)	411	076	933
$x_9 = 26,374$	071	890	927	$A_9 =$	0,(10)	329	087	403

 $n=10$

$x_1 = 0,137$	793	470	540	$A_1 =$	0,308	441	115	765
$x_2 = 0,729$	454	549	503	$A_2 =$	0,401	119	929	155
$x_3 = 1,808$	342	901	740	$A_3 =$	0,218	068	287	612
$x_4 = 3,401$	433	697	855	$A_4 =$	0,(1)	620	874	560
$x_5 = 5,552$	496	140	064	$A_5 =$	0,(2)	950	151	697
$x_6 = 8,330$	152	746	764	$A_6 =$	0,(3)	753	008	388
$x_7 = 11,843$	785	837	900	$A_7 =$	0,(4)	282	592	334

$x_8 = 16,279$	257	831	378	$A_8 = 0,(6)$	424	931	398	496
$x_9 = 21,996$	585	811	981	$A_9 = 0,(8)$	183	956	482	398
$x_{10} = 29,920$	697	012	274	$A_{10} = 0,(12)$	991	182	721	961

 $n = 11$

$x_1 = 0,125$	796	442	188	$A_1 =$	0,284	933	212	894
$x_2 = 0,665$	418	255	839	$A_2 =$	0,389	720	889	528
$x_3 = 1,647$	150	545	872	$A_3 =$	0,232	781	831	849
$x_4 = 3,091$	138	143	035	$A_4 = 0,(1)$	765	644	535	462
$x_5 = 5,029$	284	401	580	$A_5 = 0,(1)$	143	932	827	674
$x_6 = 7,509$	887	863	807	$A_6 = 0,(2)$	151	888	084	648
$x_7 = 10,605$	950	999	547	$A_7 = 0,(4)$	851	312	243	547
$x_8 = 14,431$	613	758	064	$A_8 = 0,(5)$	229	240	387	957
$x_9 = 19,178$	857	403	215	$A_9 = 0,(7)$	248	635	370	277
$x_{10} = 25,217$	709	339	678	$A_{10} = 0,(10)$	771	262	693	369
$x_{11} = 33,497$	192	847	176	$A_{11} = 0,(13)$	288	377	586	832

 $n = 12$

$x_1 = 0,115$	722	117	358	$A_1 =$	0,264	731	371	055
$x_2 = 0,611$	757	484	515	$A_2 =$	0,377	759	275	873
$x_3 = 1,512$	610	269	776	$A_3 =$	0,244	082	011	320
$x_4 = 2,833$	751	337	744	$A_4 = 0,(1)$	904	492	222	117
$x_5 = 4,599$	227	639	418	$A_5 = 0,(1)$	201	023	811	546
$x_6 = 6,844$	525	453	115	$A_6 = 0,(2)$	266	397	354	187
$x_7 = 9,621$	316	842	457	$A_7 = 0,(3)$	203	231	592	663
$x_8 = 13,006$	054	993	306	$A_8 = 0,(5)$	836	505	585	682
$x_9 = 17,116$	855	187	462	$A_9 = 0,(6)$	166	849	387	654
$x_{10} = 22,151$	090	379	397	$A_{10} = 0,(8)$	134	239	103	052
$x_{11} = 28,487$	967	250	984	$A_{11} = 0,(11)$	306	160	163	504
$x_{12} = 37,099$	121	044	467	$A_{12} = 0,(15)$	814	807	746	743

 $n = 13$

$x_1 = 0,107$	142	388	472	$A_1 =$	0,247	188	708	430
$x_2 = 0,566$	131	899	040	$A_2 =$	0,365	688	822	901
$x_3 = 1,398$	564	336	451	$A_3 =$	0,252	562	420	058
$x_4 = 2,616$	597	108	406	$A_4 =$	0,103	470	758	024
$x_5 = 4,238$	845	929	017	$A_5 = 0,(1)$	264	327	544	156
$x_6 = 6,292$	256	271	140	$A_6 = 0,(2)$	422	039	604	027
$x_7 = 8,815$	001	941	187	$A_7 = 0,(3)$	411	881	770	473
$x_8 = 11,861$	403	588	811	$A_8 = 0,(4)$	235	154	739	815
$x_9 = 15,510$	762	037	704	$A_9 = 0,(6)$	731	731	162	025
$x_{10} = 19,884$	635	663	880	$A_{10} = 0,(7)$	110	884	162	570
$x_{11} = 25,185$	263	864	678	$A_{11} = 0,(10)$	677	082	669	221
$x_{12} = 31,800$	386	301	947	$A_{12} = 0,(12)$	115	997	995	991
$x_{13} = 40,723$	008	669	266	$A_{13} = 0,(16)$	224	509	320	389

$n = 14$

$x_1 = 0,099$	747	507	033	$A_1 =$	0,231	815	577	145
$x_2 = 0,526$	857	648	852	$A_2 =$	0,353	784	691	598
$x_3 = 1,300$	629	121	251	$A_3 =$	0,258	734	610	245
$x_4 = 2,430$	801	078	731	$A_4 =$	0,115	482	893	557
$x_5 = 3,932$	102	822	293	$A_5 =$	0,(1)	331	920	921
$x_6 = 5,825$	536	218	302	$A_6 =$	0,(2)	619	286	943
$x_7 = 8,140$	240	141	565	$A_7 =$	0,(3)	739	890	377
$x_8 = 10,916$	499	507	366	$A_8 =$	0,(4)	549	071	946
$x_9 = 14,210$	805	011	161	$A_9 =$	0,(5)	240	958	576
$x_{10} = 18,104$	892	220	218	$A_{10} =$	0,(7)	580	154	398
$x_{11} = 22,723$	381	628	269	$A_{11} =$	0,(9)	681	931	469
$x_{12} = 28,272$	981	723	248	$A_{12} =$	0,(11)	322	120	775
$x_{13} = 35,149$	443	660	592	$A_{13} =$	0,(14)	422	135	244
$x_{14} = 44,366$	081	711	117	$A_{14} =$	0,(18)	605	237	502

 $n = 15$

$x_1 = 0,093$	307	812	017	$A_1 =$	0,218	234	885	940
$x_2 = 0,492$	691	740	302	$A_2 =$	0,342	210	177	923
$x_3 = 1,215$	595	412	071	$A_3 =$	0,263	027	577	942
$x_4 = 2,269$	949	526	204	$A_4 =$	0,126	425	818	106
$x_5 = 3,667$	622	721	751	$A_5 =$	0,(1)	402	068	649
$x_6 = 5,425$	336	627	414	$A_6 =$	0,(2)	856	387	780
$x_7 = 7,565$	916	226	613	$A_7 =$	0,(2)	121	243	614
$x_8 = 10,120$	228	568	019	$A_8 =$	0,(3)	111	674	392
$x_9 = 13,130$	282	482	176	$A_9 =$	0,(5)	645	992	676
$x_{10} = 16,654$	407	708	330	$A_{10} =$	0,(6)	222	631	690
$x_{11} = 20,776$	478	899	449	$A_{11} =$	0,(8)	422	743	038
$x_{12} = 25,623$	894	226	729	$A_{12} =$	0,(10)	392	189	726
$x_{13} = 31,407$	519	169	754	$A_{13} =$	0,(12)	145	651	526
$x_{14} = 38,530$	683	306	486	$A_{14} =$	0,(15)	148	302	705
$x_{15} = 48,026$	085	572	686	$A_{15} =$	0,(19)	160	059	490

1. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{x}{1 - e^{-2x}} dx.$$

Точное его значение есть

$$I = \frac{1}{8} \pi^2 = 1,2337 \dots$$

Для приближенного вычисления I применим формулу (7.5.3), взяв в ней пять узлов. Если воспользоваться приведенной таблицей x_k и A_k для $n = 5$ и выполнить вычисления, то для квадратурной суммы

получим следующее значение, которое мы приведем на 5 знаков

$$A_1 f(x_1) + \dots + A_5 f(x_5) = 1,2338.$$

Оно лишь на единицу пятой значащей цифры отличается от точного значения интеграла.

2. Пусть дан интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x + e^{-x} - 1} = \int_0^{\infty} x e^{-x} [1 + e^{-2x} - e^{-x}]^{-1} dx = 1,17 \dots$$

При его приближенном вычислении за вес естественно принять

$$p(x) = x e^{-x},$$

что соответствует $\alpha = 1$ в (7.5.1). За $f(x)$ должна быть взята функция $f(x) = [1 + e^{-2x} - e^{-x}]^{-1}$. Возьмем на отрезке интегрирования только два узла: $n = 2$. Соответствующий весу $x e^{-x}$ многочлен Чебышева — Лягерра второй степени легко находится из (2.5.2):

$$L_2^{(1)}(x) = x^2 - 6x + 6.$$

Корни его есть $x_1 = 3 - \sqrt{3}$ и $x_2 = 3 + \sqrt{3}$. Коэффициенты A_1 и A_2 вычисляются при помощи (7.5.2) и имеют значения

$$A_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}; \quad A_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}.$$

Подсчеты дают для I приближенное значение

$$I \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) = 1,20,$$

отличающееся от точного в третьей значащей цифре.

ЛИТЕРАТУРА

Gauss C. F., *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*, Werke, 1814, 3, 163—196.

Christoffel, Ueber die Gaussische Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben, *Journ. für reine und angew. Mat.* 1858, 55, 61—82.

Brownin, Phil. Mag. 1849, 34, 262.

Марков А. А., Исчисление конечных разностей.

Сонин Н. Я., О приближенном вычислении определенных интегралов и входящих при этом вычислении целых функций. Варшавские университетские известия, 1887.

Stieltjes T., Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mecaniques. *Ann. Ec. Norm.* 1884, 1, 409—426.

Геронимус Я. Л. Теория ортогональных многочленов (обзор достижений отечественной математики), Гостехиздат, 1950.

Mehler, Bemerkungen zur Theorie der mechanischen Quadratur, *Journ. für reine und angew. Math.* 1864, 63.

Поссе К. А. 1) О функциях, подобных функциям Лежандра, 1872. 2) Sur quelques applications des fractions continues algebriques, 1886.

КВАДРАТУРЫ С НАИМЕНЬШЕЙ ОЦЕНКОЙ ОСТАТКА

§ 1. О задаче минимизации остатка квадратуры

В шестой главе мы ознакомились с квадратурами, имеющими наивысшую алгебраическую степень точности. Можно было заранее предвидеть, что такие квадратуры дадут малую погрешность, если интегрируемая функция f допускает хорошее приближение ее многочленами невысоких степеней, в частности, если f будет аналитической функцией в достаточно широкой области около отрезка $[a, b]$ интегрирования. Многолетний опыт их применения показал, в широком классе случаев, их превосходство в точности, сравнительно с другими видами квадратурных формул.

Но эти формулы не являются универсальными и в вычислительной практике известны случаи, когда они дают результаты худшие, чем более элементарные формулы: прямоугольников, трапеций, Симпсона и др. Это обычно происходит в тех случаях, когда функция f имеет невысокий порядок дифференцируемости, или является аналитической функцией, особые точки которой расположены близко к отрезку интегрирования.

В теории квадратур возникла потребность построения формул, которые были бы приспособлены для вычисления интегралов от функций, принадлежащих наперед заданному классу, особенно принадлежащих классам низкого порядка дифференцируемости.

О задаче построения таких формул говорилось в § 1 гл. 5 и мы кратко напомним ее сейчас. Пусть дан класс функций $\{f\} = F$. Для каждой функции $f \in F$ остаток квадратуры $R(f)$ имеет вполне определенное численное значение

$$R(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (8.1.1)$$

За величину, характеризующую точность квадратурной формулы для всех без исключения функций класса F , может быть принято число

$$R = \sup_f |R(f)| = \sup_f \left| \int_a^b p f dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \right|. \quad (8.1.2)$$

Оно зависит от x_k и A_k и нужно воспользоваться всеми имеющимися возможностями выбора узлов и коэффициентов для того, чтобы придать R возможно малое значение. Мы станем на крайнюю точку зрения и будем стремиться к тому, чтобы придать R наименьшее значение. На выбор x_k и A_k , обычно, налагаются некоторые ограничительные условия. Виды условий могут быть весьма разнообразными, в частности они связаны с выбором класса F функций f и могут зависеть также от способа задания этих функций. Ниже приведены два примера таких условий.

1. Если функции f заданы таблично на некоторой системе точек, то мы будем сильно стеснены в выборе узлов x_k и должны считать, что x_k берутся только из числа табличных значений аргумента.

2. Пусть мы хотим построить квадратурную формулу, имеющую наименьшую оценку остатка для всех функций с непрерывной производной порядка r , удовлетворяющей условию $|f^{(r)}| \leq M_r$. Чтобы можно было выполнить оценку остатка для таких функций, мы должны считать, что квадратурная формула верна для всевозможных многочленов степени $\leq r-1$. Последнее равносильно выполнению следующих r равенств:

$$\sum_{k=1}^n A_k x_k^i = \int_a^b p x^i dx \quad (i = 0, 1, \dots, r-1). \quad (8.1.3)$$

В границах восьмой главы отрезок интегрирования мы будем предполагать конечным. Этого достаточно для частных задач, рассматриваемых ниже. Линейным преобразованием $[a, b]$ всегда можно свести к отрезку $[0, 1]$. Такое преобразование мы будем считать выполненным.

§ 2. Минимизация остатка в классах $L_q^{(r)}$

Условимся говорить, что f принадлежит классу $L_q^{(r)}$ ($q \geq 1$), если f имеет на $[0, 1]$ абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ и производная порядка r суммируема со степенью q на $[0, 1]$.

Всякая функция $f \in L_q^{(r)}$ может быть представлена в форме

$$f(x) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + \int_0^1 f^{(r)}(t) E(x-t) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt, \quad (8.2.1)$$

где $f^{(i)}(0)$ есть числа и $f^{(r)}(t)$ — некоторая измеримая и суммируемая на $[0, 1]$ со степенью q функция. Верно и обратное: при любых числах $f^{(i)}(0)$ и любой $f^{(r)}(t) \in L_q$, функция f , определенная равенством (8.2.1), принадлежит $L_q^{(r)}$.

Будем рассматривать интеграл $\int_0^1 \rho(x) f(x) dx$, где $f \in L_q^{(r)}$.

В ближайших рассуждениях нам достаточно считать весовую функцию $\rho(x)$ измеримой и суммируемой на $[0, 1]$.

Пусть для приближенного вычисления интеграла была взята некоторая квадратурная сумма

$$\int_0^1 \rho f dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (8.2.2)$$

Желая получить формулу, которую можно было бы считать „наилучшей“ для всех функций $f \in L_q^{(r)}$ ($q \geq 1$), мы примем, что равенство (8.2.2) является точным для всевозможных многочленов степени $< r$. Если воспользоваться представлением (8.2.1) функций класса $L_q^{(r)}$, то остаток $R(f)$ квадратуры можно привести к виду:

$$R(f) = \int_0^1 \rho f dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = \int_a^b f^{(r)}(t) K(t) dt, \quad (8.2.3)$$

$$K(t) = \int_t^1 \rho(x) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dx - \sum_{k=1}^n A_k E_k(x_k - t) \frac{(x_k - t)^{r-1}}{(r-1)!}. \quad (8.2.4)$$

Рассмотрим теперь множество $F = \{f\}$ функций f , удовлетворяющих условию

$$\left\{ \int_0^1 |f^{(r)}|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} \leq M_r.$$

Согласно неравенству Гельдера, для $R(f)$ в классе F имеет место оценка

$$|R(f)| \leq \left[\int_0^1 |f^{(r)}|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \cdot \left[\int_0^1 |K|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \leq M_r \left[\int_0^1 |K|^p dt \right]^{\frac{1}{p}},$$

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right).$$

Функция $f^{(r)}(t) = M_r \left[\int_a^b |K|^p dt \right]^{-\frac{1}{q}} |K(t)|^{\frac{p}{q}} \operatorname{sign} K$ принадлежит множеству F и, как легко видеть, для нее в полученном неравенстве имеет место знак равенства. Поэтому правая часть неравенства будет точной верхней границей $|R(f)|$ на множестве E :

$$R = \sup_F |R(f)| = M_r \left\{ \int_0^1 |K(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}. \quad (8.2.5)$$

От выбора x_k и A_k здесь зависит только $\int_0^1 |K(t)|^p dt$. Нашей целью будет так выбрать x_k и A_k , чтобы интеграл $\int_0^1 |K|^p dt$ имел наименьшее значение. Если такие x_k и A_k существуют, то они будут доставлять наименьшее значение R при всяких M_r и соответствующую им квадратурную формулу можно считать „наилучшей“ во всем классе *) $L_q^{(r)}$.

Задача минимизации $\int_0^1 |K|^p dt$ может быть истолкована как задача наилучшего приближения в метрике L_p (см. гл. 4, § 1) функции

$\int_t^1 \rho(x) \cdot \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dx$ при помощи функций вида

$$\sum_{k=1}^n A_k E(x_k - t) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!}.$$

При произвольных $\rho(x)$, r и n такая задача в конечном виде не может быть решена. Мы остановимся на некоторых частных случаях, когда решение может быть найдено при помощи простых средств.

Предварительно необходимо ознакомиться с некоторыми фактами теории приближения функций. Пусть на отрезке $[0, 1]$ задана некоторая функция $f \in L_p$. Рассмотрим, кроме того, функции $\varphi_k \in L_p$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Последние мы будем предполагать линейно независимыми на $[0, 1]$, понимая под этим, что равенство

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \right|^p dx = 0$$

возможно лишь в том случае, когда все a_k равны нулю. Это равносильно тому, что равенство $\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) = 0$ может выполняться на

*) $R(f) = \int_0^1 f^{(r)} K dt$ есть линейный функционал, заданный на множе-

стве $f^{(r)} \in L_q$. Интеграл $\left\{ \int_0^1 |K|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}$ есть норма $R(f)$ в пространстве L_q и

поставленная задача, если высказать ее в терминах функционального анализа, есть задача построения квадратурной формулы (8.2.2) с наименьшей нормой остатка.

множестве точек, меры большей нуля, в том и только в том случае, когда $a_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Погрешность ϵ приближения f линейной комбинацией $s = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k$ определяется равенством

$$\epsilon^p = \int_0^1 |f - s|^p dx = I.$$

Выясним условия, при которых ϵ^p будет иметь наименьшее значение. На основании известных теорем анализа бесконечно малых можно утверждать, что для значений a_k , доставляющих минимум I , должны выполняться равенства

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = p \int_0^1 |f - s|^{p-1} \operatorname{sign}(f - s) \varphi_i dx = 0 \quad (8.2.6)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Убедимся теперь в том, что, при выполнении условий (8.2.6), линейная комбинация s действительно дает наилучшее приближение f . Возьмем любую другую линейную комбинацию $s^* = \sum_{k=1}^n a_k^* \varphi_k$. Мы должны по-

казать, что $I \leq I^* = \int_0^1 |f - s^*|^p dx$. Имеем

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 |f - s|^p dx = \int_0^1 |f - s|^{p-1} [f - s] \operatorname{sign}(f - s) dx = \\ &= \int_0^1 |f - s|^{p-1} [f - (s - s^*) - s^*] \operatorname{sign}(f - s) dx. \end{aligned}$$

Ввиду (8.2.6), будет

$$I = \int_0^1 |f - s|^{p-1} [f - s^*] \operatorname{sign}(f - s) dx. \quad (8.2.7)$$

Интеграл не может уменьшиться, если $\operatorname{sign}(f - s)$ заменить на $\operatorname{sign}(f - s^*)$. Поэтому

$$I \leq \int_0^1 |f - s|^{p-1} |f - s^*| dx. \quad (8.2.8)$$

Применим неравенство Гельдера *)

$$I \leq \left\{ \int_0^1 |f - s^*|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \left\{ \int_0^1 |f - s|^p dx \right\}^{\frac{p-1}{p}} = I^{*\frac{1}{p}} I^{\frac{p-1}{p}}. \quad (8.2.9)$$

Отсюда вытекает $I^{\frac{1}{p}} \leq I^{*\frac{1}{p}}$ и $I \leq I^*$, что и требовалось.

Покажем, наконец, что линейная комбинация s , доставляющая I наименьшее значение, единственная. Нужно проверить, что из $I = I^*$ следует $a_k = a_k^*$ ($k = 1, 2, \dots, n$). При $I = 0$ это очевидно, так как из равенства $f = s$ при почти всех x следует

$$I^* = \int_0^1 |f - s^*|^p dx = \int_0^1 |s - s^*|^p dx = 0.$$

Поэтому при почти всех x $s = s^*$ и, ввиду независимости φ_k , отсюда вытекает $a_k = a_k^*$. Будем считать $|f - s|$ величиной положительной на множестве точек, меры большей нуля.

Равенство $I = I^*$ возможно, как видно из рассуждений, при помощи которых было получено (8.2.9), если выполнены два условия: 1) при почти всех значениях x должно быть

$$|f - s|^{p-1} [f - s^*] \operatorname{sign}(f - s) = |f - s|^{p-1} |f - s^*|, \quad (8.2.10)$$

что необходимо для того, чтобы при переходе от (8.2.7) к (8.2.8) сохранился знак равенства; 2) в неравенстве Гельдера, которое было применено при переходе от (8.2.8) к (8.2.9), должен быть верным

*) См., например, И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, 1950, гл. VII, § 6, стр. 174—175. Если $F \in L_p$ и $G \in L_q$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то произведение FG суммируемо и справедливо неравенство

$$\int_0^1 FG dx \leq \left\{ \int_0^1 |F|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \left\{ \int_0^1 |G|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}}. \quad (a)$$

Для дальнейшего изложения существенно отметить, что знак $=$ может иметь место в том и только в том случае, когда выполняются два условия:

1) $\frac{|F|^p}{\int_0^1 |F|^p dx} = \frac{|G|^q}{\int_0^1 |G|^q dx}$ и 2) почти всюду на $[0, 1]$ знаки F и G совпадают.

При применении (a) в основном тексте было принято $F = |f - s^*|$ и $G = |f - s|^{p-1}$.

знак $=$. Условия этого указаны в сноске и применительно к интегралу (8.2.8) они дают

$$\frac{|f-s|^p}{\int_0^1 |f-s|^p dx} = \frac{|f-s^*|^p}{\int_0^1 |f-s^*|^p dx}$$

почти всюду.

Но так как $I = \int_0^1 |f-s|^p dx = I^* = \int_0^1 |f-s^*|^p dx$, то почти всюду должно быть

$$|f-s| = |f-s^*|. \quad (8.2.11)$$

Но $|f-s| > 0$ на множестве положительной меры и из (8.2.10) и (8.2.11) следует, что на множестве положительной меры

$$f-s = f-s^* \quad \text{или} \quad s = s^*,$$

что возможно, ввиду независимости φ_k , только в том случае, когда $a_k = a_k^*$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Будем считать вес постоянным: $p(x) \equiv 1$ и рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f). \quad (8.2.12)$$

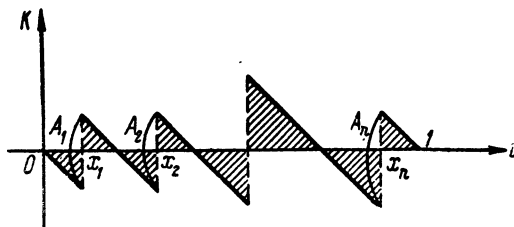
Предположим f абсолютно непрерывной и производную f' суммируемой со степенью q . Это соответствует случаю $r = 1$. Формулу (8.2.12) мы будем считать точной без остатка $R(f)$, если $f = 1$, что налагает следующее условие на коэффициенты: $\sum A_k = 1$. Остаток $R(f)$ в классе $L_q^{(1)}$ имеет точную оценку

$$R = \sup_f |R(f)| = M_1 \left\{ \int_0^1 |K(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad M_1^q = \int_0^1 |f'|^q dx;$$

$$K(t) = 1 - t - \sum_{k=1}^n A_k E(x_k - t).$$

Ядро остатка $K(t)$ есть кусочно линейная функция со старшим коэффициентом, равным -1 , для которой узлы x_k являются точками разрыва. Скачок $K(t)$ в узле x_k равен коэффициенту A_k . Если x_k лежат внутри отрезка $[0, 1]$, то на концах его $t = 0$ и $t = 1$ ядро обращается в нуль. График $K(t)$ изображен на черт. 5.

Задача минимизации интеграла $\int_0^1 |K(t)|^p dt$ имеет следующий геометрический смысл: нужно определить, при каком положении точек разрыва x_k ($k=1, 2, \dots, n$) и при каких величинах скачков A_k ($k=1, 2, \dots, n$), подчиненных ограничению $\sum A_k = 1$, ордината площади, заштрихованной на чертеже, будет иметь наименьшее среднее значение степени p . Ответ легко предвидеть: минимум будет достигнут тогда, когда площадь будет состоять из $2n$ равных треугольников.



Черт. 5.

Узлы x_k должны быть расположены в точках $x_k = \frac{2k-1}{2n}$ ($k=1, 2, \dots, n$). Коэффициенты A_k все должны быть одинаковы, и так как сумма их равна 1, то $A_k = \frac{1}{n}$ ($k=1, 2, \dots, n$).

Указанное предвидение легко может быть подтверждено вычислениями, на которых мы не будем останавливаться.

Соответствующая квадратурная формула имеет вид:

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + R(f) \quad (8.2.13)$$

и является хорошо известной формулой прямоугольников с ординатами в средних точках, или формулой касательных. Остаток ее в классе $L_q^{(1)}$ имеет оценку

$$|R(f)| \leq M_1 \frac{1}{2n \sqrt[p]{p+1}}, \quad M_1 = \left\{ \int_0^1 |f'|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right).$$

Положим теперь $r=2$ и рассмотрим класс $L_q^{(2)}$ функций с абсолютно непрерывной первой производной и производной второго порядка, суммируемой со степенью q .

Будем считать, что квадратурная сумма (8.2.12) дает точное значение интеграла, когда f есть многочлен нулевой и первой степени.

Это накладывает два ограничения на выбор A_k и x_k :

$$\sum_{k=1}^n A_k = \int_0^1 1 dx = 1. \quad (8.2.14)$$

$$\sum_{k=1}^n A_k x_k = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

При выполнении (8.2.14), остаток $R(f)$ имеет в классе $L_q^{(2)}$ следующую точную оценку

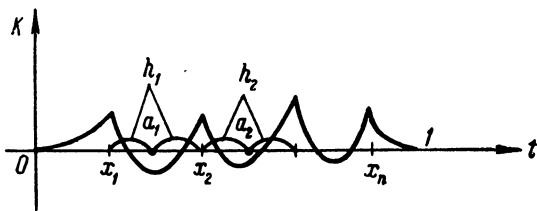
$$|R(f)| \leq M_2 \left\{ \int_0^1 |K(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad M_2 = \left\{ \int_0^1 |f''|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}};$$

$$K(t) = \frac{(1-t)^2}{2} - \sum_{k=1}^n A_k E(x_k - t)(x_k - t). \quad (8.1.15)$$

Для дальнейшего полезно подсчитать значения ядра $K(t)$ на участках $[0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_n, 1]$:

$$K(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & \text{при } 0 \leq t \leq x_1, \\ \frac{(1-t)^2}{2} - \sum_{k=i+1}^n A_k (x_k - t) & \text{при } x_i \leq t \leq x_{i+1}, \\ \frac{(1-t)^2}{2} & \text{при } x_n \leq t \leq 1; \end{cases}$$

$K(t)$ есть непрерывная функция t на $[0, 1]$. Первая производная $K'(t)$



Черт. 6.

имеет разрывы первого рода в точках x_k и величины скачков $K'(t)$ определяются равенствами:

$$K'(x_k + 0) - K'(x_k - 0) = -A_k. \quad (8.2.16)$$

На каждом из указанных выше отрезков $K(t)$ есть квадратный многочлен со старшим членом $\frac{1}{2} t^2$.

Примерный график $K(t)$ изображен на черт. 6.

Обратимся к задаче минимизации интеграла

$$U = \int_0^1 |K(t)|^p dt$$

при уравнениях связи (8.2.14). Будем считать, что минимальное значение U существует и к разысканию его может быть применено обычное в анализе правило множителей Лагранжа. Найденные результаты позже будут оправданы. Составим вспомогательную функцию

$$F = U + \lambda_1 \left(\sum_{k=1}^n A_k - 1 \right) + \lambda_2 \left(\sum_{k=1}^n A_k x_k - \frac{1}{2} \right),$$

вычислим частные производные от нее по x_i и A_i и приравняем их нулю:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = -A_i p \int_0^1 |K(t)|^{p-1} S(t) E(x_i - t) dt + \lambda_2 A_i = 0, \quad (8.2.17)$$

$$S(t) = \text{sign } K(t);$$

$$\frac{\partial F}{\partial A_i} = -p \int_0^1 |K(t)|^{p-1} S(t) E(x_i - t)(x_i - t) dt + \lambda_1 + \lambda_2 x_i = 0. \quad (8.2.18)$$

Здесь A_i считаются отличными от нуля, так как, в противном случае, квадратурная сумма содержала бы меньше чем n узлов. Равенство (8.2.17) можно сократить на A_i :

$$\int_0^{x_i} |K(t)|^{p-1} S(t) dt = \frac{\lambda_2}{p}.$$

Придавая i значения $1, 2, \dots, n$, найдем

$$\int_0^{x_1} |K|^{p-1} S(t) dt = \frac{\lambda_2}{p},$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |K|^{p-1} S(t) dt = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (8.2.19)$$

Равенство (8.2.18) приводится, при помощи (8.2.17), к виду

$$p \int_0^{x_i} |K|^{p-1} S(t) t dt + \lambda_1 = 0,$$

откуда видно, что

$$\int_0^{x_i} |K|^{p-1} S(t) t dt = -\frac{\lambda_1}{p},$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |K|^{p-1} S(t) t dt = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (8.2.20)$$

Из уравнений (8.2.19) и (8.2.20) вытекает, что на каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 1, \dots, n-1$) функция $K(t)$ есть многочлен второй степени со старшим членом $\frac{1}{2}t^2$, наименее отклоняющийся от нуля в метрике L_p . Чтобы найти такой многочлен, рассмотрим сначала отрезок $[-1, 1]$ и будем искать на нем многочлен вида $T_2(x) = x^2 + mx + r$, наименее уклоняющийся от нуля:

$$\int_{-1}^{+1} |T_2(x)|^p dx = \min.$$

Сразу же видно, что в таком многочлене $m = 0$. Действительно, если заменить в интеграле x на $-x$, то найдем, что $T_2(-x)$ также будет наименее отклоняться от нуля. Но такой многочлен может быть только один:

$$T_2(x) = T_2(-x)$$

и, следовательно, $m = 0$.

Осталось найти еще свободный член r .

Для T_2 должны выполняться условия

$$\int_{-1}^{+1} |T_2|^{p-1} \operatorname{sign} T_2 dx = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} |T_2|^{p-1} x \operatorname{sign} T_2 dx = 0. \quad (8.2.21)$$

Второе из них есть тождество. Из первого же следует, что $\operatorname{sign} T_2$ должен изменять знак внутри $[-1, 1]$. Мы положим, поэтому, $r = -l^2$, $0 < l < 1$, $T_2(x) = x^2 - l^2$ и перепишем первое условие в форме

$$-\int_0^l (l^2 - x^2)^{p-1} dx + \int_l^1 (x^2 - l^2)^{p-1} dx = 0.$$

Если положить $x = l\sqrt{t}$, то можно привести его к виду

$$\int_1^{\frac{1}{l^2}} t^{-\frac{1}{2}} (t-1)^{p-1} dt = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(p)}{\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)}. \quad (8.2.22)$$

Из этого уравнения должно быть найдено l . При возрастании l от 0 до 1, левая часть его будет убывать от ∞ до 0, и уравнение будет иметь одно и только одно решение.

Чтобы перейти к отрезку $[x_i, x_{i+1}]$, введем координату его середины $a_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ и обозначим через h_i половину его длины $h_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}$. Тогда многочлен второй степени со старшим членом $\frac{1}{2}t^2$, наименее отклоняющийся от нуля в метрике L_p на $[x_i, x_{i+1}]$, каким является $K(t)$ на этом отрезке, запишется так

$$K(t) = \frac{h_i^2}{2} T_2\left(\frac{t - a_i}{h_i}\right) = \frac{h_i^2}{2} \left[\left(\frac{t - a_i}{h_i}\right)^2 - l^2 \right], \quad x_i \leq t \leq x_{i+1}.$$

В точке $t = x_i = a_i - h_i$ он принимает значение

$$K(x_i) = \frac{h_i^2}{2} (1 - l^2).$$

Аналогично, если рассмотреть $K(t)$ на участке $[x_{i-1}, x_i]$ и найти его значение в точке $t = x_i$, то получим

$$K(x_i) = \frac{h_{i-1}^2}{2} (-l^2).$$

Ввиду непрерывности $K(t)$, оба значения должны совпадать. Откуда следует, что

$$h_{i-1} = h_i \quad (i = 2, \dots, n).$$

Общую величину всех h_i обозначим через h . Во всех узлах x_i будет

$$K(x_i) = \frac{h^2}{2} (1 - l^2).$$

Возьмем, наконец, отрезок $0 \leq t \leq x_1$. Здесь $K(t) = \frac{t^2}{2}$ и в точке $t = x_1$ должно быть

$$K(x_1) = \frac{x_1^2}{2} = \frac{h^2}{2} (1 - l^2) \quad \text{и} \quad x_1 = h \sqrt{1 - l^2}.$$

Наконец, рассмотрев ядро на крайнем правом отрезке $[x_n, 1]$, для его длины мы получим следующее значение

$$1 - x_n = h \sqrt{1 - l^2}.$$

Так как сумма длин всех участков $[0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_n, 1]$ равна 1, то должно быть

$$2h \sqrt{1-l^2} + (n-1)2h = 1$$

и

$$h = \frac{1}{2} [\sqrt{1-l^2} + n - 1]^{-1},$$

$$x_k = x_1 + 2h(k-1) = [\sqrt{1-l^2} + 2(k-1)]h. \quad (8.2.23)$$

Для вычисления коэффициентов A_k можно воспользоваться равенством (8.2.16). На отрезке $x_i \leq t \leq x_{i+1}$

$$K(t) = \frac{h^2}{2} \left[\left(\frac{t-a_i}{h} \right)^2 - l^2 \right],$$

$$K'(t) = t - a_i,$$

$$K'(x_i + 0) = K'(a_i - h + 0) = -h,$$

$$K'(x_{i+1} - 0) = K'(a_i + h - 0) = +h.$$

Следовательно,

$$A_i = 2h, \quad i = 2, 3, \dots, n-1. \quad (8.2.24)$$

Сходные вычисления в узлах x_1 и x_n дадут

$$A_1 = A_n = (1 + \sqrt{1-l^2})h. \quad (8.2.25)$$

Найдем еще значение интеграла $\int_0^1 |K(t)|^p dt$. Имеем

$$\int_0^1 |K|^p dt = \int_0^{x_1} \left(\frac{t^2}{2} \right)^p dt + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| \frac{h^2}{2} T_2 \left(\frac{t-a_i}{h} \right) \right|^p dt + \int_{x_n}^1 \left[\frac{(1-t)^2}{2} \right]^p dt.$$

Легко проверяется, что

$$\int_0^{x_1} \frac{t^{2p}}{2^p} dt = \int_{x_n}^1 \frac{(1-t)^{2p}}{2^p} dt = h^{2p+1} \frac{(1-l^2)^{p+\frac{1}{2}}}{(2p+1)2^p},$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| \frac{h^2}{2} T_2 \left(\frac{t-a_i}{h} \right) \right|^p dt = \frac{h^{2p+1}}{2^p} \int_{-1}^{+1} |T_2(x)|^p dx,$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{+1} |T_2|^p dx = |T_2|^p x \Big|_{-1}^{+1} - p \int_{-1}^{+1} |T_2|^{p-1} \operatorname{sign}(T_2) T_2' x dx = \\ &= 2(1-l^2)^p - 2p \int_{-1}^{+1} |T_2|^{p-1} \operatorname{sign}(T_2) x^2 dx. \end{aligned}$$

Если под знаком последнего интеграла заменим x^2 на $x^2 - l^2 + l^2 = T_2 + l^2$, то получим

$$I = 2(1 - l^2)^p - 2pI - 2pl^2 \int_{-1}^{+1} |T_2|^{p-1} \operatorname{sign} T_2 dx.$$

Но, как видно из (8.2.21), интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, равен нулю и, следовательно,

$$I = \frac{2(1 - l^2)^p}{2p + 1},$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |K(t)|^p dt &= h^{2p+1} \frac{(1 - l^2)^{p+\frac{1}{2}}}{(2p+1) \cdot 2^{p-1}} + (n-1) h^{2p+1} \frac{(1 - l^2)^p}{(2p+1) 2^{p-1}} = \\ &= h^{2p+1} (1 - l^2)^p \frac{\sqrt{1 - l^2} + n - 1}{(2p+1) \cdot 2^{p-1}} = h^{2p} \frac{(1 - l^2)^p}{(2p+1) 2^p}. \quad (8.2.26) \end{aligned}$$

Остаток $R(f)$ формулы (8.2.12) с узлами (8.2.23) и коэффициентами (8.2.24—25) будет иметь следующую оценку для функций $f \in L_p^{(2)}$

$$|R(f)| \leq M_2 \frac{h^2(1 - l^2)}{2\sqrt[2p]{2p+1}}, \quad M_2 = \left\{ \int_0^1 [f'']^q \right\}^{\frac{1}{q}}. \quad (8.2.27)$$

Убедимся теперь в том, что найденные узлы x_k и коэффициенты A_k действительно дают наименьшее значение интегралу (8.2.26).

Пусть x_k^* и A_k^* — любые другие узлы и коэффициенты и $K^*(t)$ — соответствующее им ядро остатка. Мы должны показать, что

$$\int_0^1 |K^*|^p dt \geq h^{2p} \frac{(1 - l^2)^{2p}}{(2p+1) \cdot 2^p}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |K^*|^p dt &= \int_0^{x_1^*} \left(\frac{t^2}{2}\right)^p dt + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i^*}^{x_{i+1}^*} |K^*|^p dt + \int_{x_n^*}^1 \left[\frac{(1-t)^2}{2}\right]^p dt = \\ &= \frac{x_1^{*2p+1}}{(2p+1) 2^p} + \frac{(1 - x_n^*)^{2p+1}}{(2p+1) 2^p} + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i^*}^{x_{i+1}^*} |K^*|^p dt. \end{aligned}$$

На каждом из отрезков $[x_i^*, x_{i+1}^*]$ ядро $K^*(t)$ есть некоторый квадратичный многочлен со старшим членом $\frac{1}{2} t^2$. Заменим его на много-

член с тем же старшим членом и наименее отклоняющимся от нуля на $[x_i^*, x_{i+1}^*]$ в метрике L_p . Если обозначить $a_i^* = \frac{1}{2}(x_i^* + x_{i+1}^*)$ и $h_i^* = \frac{1}{2}(x_{i+1}^* - x_i^*)$, то такой многочлен будет $\frac{h_i^{*2}}{2} T_2\left(\frac{t - a_i^*}{h_i^*}\right)$.

После указанной замены, последнее равенство перейдет в неравенство

$$\int_0^1 |K^*|^p dt \geq \frac{x_1^{*2p+1} + (1 - x_n^*)^{2p+1}}{(2p+1) 2^p} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{h_i^{*2}}{2}\right)^p \int_{x_i^*}^{x_{i+1}^*} \left| T_2\left(\frac{t - a_i^*}{h_i^*}\right) \right|^p dt.$$

Знак равенства возможен только в том случае, когда на всех отрезках $[x_i^*, x_{i+1}^*]$ $K^*(t)$ будет многочленом, наименее отклоняющимся от нуля. Но тогда, как было выяснено выше, будет $x_k^* = x_k$ и $A_k^* = A_k$.

Интеграл, стоящий под знаком суммы, был вычислен раньше в других обозначениях и имеет величину $\frac{2(1-l^2)^p}{2p+1}$. Поэтому

$$\int_0^1 |K^*|^p dt \geq \frac{x_1^{*2p+1} + (1 - x_n^*)^{2p+1}}{(2p+1) 2^p} + \frac{(1-l^2)^p}{(2p+1) 2^{3p}} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1}^* - x_i^*)^{2p+1}. \quad (8.2.28)$$

Если в сумме $U_n = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1}^* - x_i^*)^{2p+1}$ фиксировать x_1^* и x_n^* , то, как функция от $x_2^*, \dots, x_{n-1}^*$, она имеет наименьшее значение, когда все частичные отрезки $[x_i^*, x_{i+1}^*]$ будут равны между собой: $x_{i+1}^* - x_i^* = \frac{x_n^* - x_1^*}{n-1}$. С достаточной степенью простоты в этом можно убедиться путем индукции. Положим $n=3$ и рассмотрим $u_3 = (x_3^* - x_2^*)^{2p+1} + (x_2^* - x_1^*)^{2p+1}$. Условие стационарности u_3 :

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_2^*} = (2p+1) [(x_2^* - x_1^*)^{2p} - (x_3^* - x_2^*)^{2p}] = 0$$

равносильно

$$x_2^* - x_1^* = x_3^* - x_2^* \quad (8.2.29)$$

и так как

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^{*2}} = (2p+1) 2p [(x_2^* - x_1^*)^{2p-1} + (x_3^* - x_2^*)^{2p-1}] > 0,$$

то u_3 , при соблюдении (8.2.29), действительно имеет собственный минимум.

Будем считать, что высказанное утверждение верно для суммы u_{n-1} и проверим его для u_n :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{i=1}^{n-2} (x_{i+1}^* - x_i^*)^{2p+1} + (x_n^* - x_{n-1}^*)^{2p+1} \geqslant \\ &\geqslant (n-2) \left(\frac{x_{n-1}^* - x_1^*}{n-2} \right)^{2p+1} + (x_n^* - x_{n-1}^*)^{2p+1} = v. \end{aligned}$$

Найдем минимум v как функции от x_{n-1}^* . Из равенства

$$\frac{\partial v}{\partial x_{n-1}^*} = (2p+1) \left[\left(\frac{x_{n-1}^* - x_1^*}{n-2} \right)^{2p} - (x_n^* - x_{n-1}^*)^{2p} \right] = 0$$

следует, что отрезок $[x_{n-1}^*, x_n^*]$ должен иметь такую же длину, что и все предыдущие отрезки $[x_i^*, x_{i+1}^*]$:

$$x_n^* - x_{n-1}^* = \frac{x_{n-1}^* - x_1^*}{n-2}. \quad (8.2.30)$$

Ввиду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_{n-1}^{*2}} = (2p+1) \cdot 2p \left[\left(\frac{x_{n-1}^* - x_1^*}{n-2} \right)^{2p-1} + (x_n^* - x_{n-1}^*)^{2p-1} \right] > 0,$$

v , при условии (8.2.30), имеет собственный минимум и, следовательно,

$$u_n \geqslant (n-1) \left(\frac{x_n^* - x_1^*}{n-1} \right)^{2p+1}.$$

Заменяя в (8.2.28) u_n ее наименьшим значением, получим такую оценку

$$\int_0^1 |K^*|^p dt \geqslant \frac{x_1^{*2p+1} + (1-x_n^*)^{2p+1}}{(2p+1) 2^p} + \frac{(1-l^2)^p}{(2p+1) 2^{3p}} \cdot \frac{(x_n^* - x_1^*)^{2p+1}}{(n-1)^{2p}} = w. \quad (8.2.31)$$

Подобно предыдущему, при помощи простых теорем анализа можно убедиться в том, что w достигает наименьшего значения при

$$x_1^* = 1 - x_n^* = \frac{\sqrt{1-l^2}}{2(\sqrt{1-l^2} + n-1)} = h\sqrt{1-l^2}$$

и это значение есть

$$\min w = \frac{(1-l^2)^p h^{2p}}{2^p (2p+1)}.$$

Окончательно получаем неравенство

$$\int_0^1 |K^*|^p dt \geq \frac{(1-l^2)^p h^{2p}}{2^p (2p+1)} = \int_0^1 |K|^p dt.$$

Из рассуждений видно, что знак равенства здесь может иметь место в том и только в том случае, когда x_k^* и A_k^* будут совпадать со значениями (8.2.23—25).

Дополним изложенное одним замечанием. Именно, покажем, что квадратурная сумма $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$ при $n \rightarrow \infty$, будет стремиться к значению интеграла $\int_0^1 f dx$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = \int_0^1 f dx,$$

какова бы ни была функция f , интегрируемая на $[0,1]$ в смысле Римана.

Для этого достаточно показать, что $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$ есть риманова интегральная сумма, что равносильно выполнению неравенств

$$A_1 + \dots + A_{k-1} \leq x_k \leq A_1 + \dots + A_k \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Последние неравенства проверяются весьма легко, так как, если в них подставить вместо x_k и A_k найденные значения, мы получим следующие очевидные неравенства:

$$(1 + \sqrt{1-l^2})h + (\sqrt{1-l^2} + 2(k-2))h \leq (\sqrt{1-l^2} + 2(k-1))h \leq \\ \leq (1 + \sqrt{1-l^2})h + (\sqrt{1-l^2} + 2(k-1))h.$$

§ 3. Минимизация остатка в классах C_r

Выше [гл. 5, § 3] мы условились говорить, что функция f принадлежит классу C_r , если она имеет непрерывную производную порядка r на $[0,1]$. Характерное представление функций $f \in C_r$ дается равенством

$$f(x) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + \int_0^1 f^{(r)}(t) E(x-t) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt, \quad (8.3.1)$$

где $f^{(i)}(0)$ — любые числа и $f^{(r)}(t)$ — произвольная функция, непрерывная на $[0,1]$.

Для построения квадратурной формулы

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^k A_k f(x_k), \quad (8.3.2)$$

имеющей наименьшую оценку остатка в C_r , мы должны считать, что равенство (8.3.2) является точным для любого многочлена, степени $< r$. Тогда остаток (8.3.2) может быть представлен в следующем виде

$$R(f) = \int_0^1 f^{(r)}(t) K(t) dt, \quad (8.3.3.)$$

где

$$K(t) = \frac{(1-t)^r}{r!} - \sum_{k=1}^n A_k E(x_k - t) \frac{(x_k - t)^{r-1}}{(r-1)!}.$$

Рассмотрим множество F функций $f \in C_r$, удовлетворяющих условию $|f^{(r)}| \leq M_r$. На F верна оценка

$$|R(f)| \leq M_r \int_0^1 |K(t)| dt.$$

Можно легко убедиться в том, что правая часть неравенства есть верхняя грань $|R(f)|$ на F . Для этого достаточно f взять такой, чтобы всюду, кроме точек разрыва,

$$f^{(r)}(t) = M_r \operatorname{sign} K(t).$$

Для нее

$$R(f) = M_r \int_0^1 |K(t)| dt.$$

Эта функция не принадлежит F , так как $f^{(r)}$ может иметь разрывы первого рода, но ее, вместе с производными до второго порядка включительно, всегда можно приблизить с любой степенью точности в метрике L при помощи функции из F . Поэтому в неравенстве для $|R(f)|$ правая часть не может быть уменьшена

$$R = \sup_F |R(f)| = M_r \int_0^1 |K(t)| dt. \quad (8.3.4)$$

Мы должны так подобрать x_k и A_k , чтобы $\int_0^1 |K(t)| dt$ имел бы наименьшее значение, при выполнении условий

$$\sum_{k=1}^n A_k x_k^i = \frac{1}{i+1} \quad (i = 0, 1, \dots, r-1). \quad (8.3.5)$$

Как и в предыдущем параграфе, мы остановимся только на двух частных случаях задачи.

Положим $r=1$ и рассмотрим класс функций, непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$. В этом случае мы должны требовать, чтобы квадратурная формула давала точный результат для постоянной величины, что равносильно выполнению уравнения связи

$$\sum_{k=1}^n A_k = 1.$$

Ядро $K(t)$ имеет значение

$$K(t) = 1 - t - \sum_{k=1}^n A_k E(x_k - t).$$

График его изображен на черт. 5. Интеграл $\int_0^1 |K(t)| dt$ численно равен арифметическому значению площади, заштрихованной на чертеже. Наименьшее значение эта площадь будет, очевидно, иметь в том случае, когда она будет состоять из $2n$ одинаковых треугольников. Поэтому наименьшую оценку остатка на множестве F при всяком M_1 будет иметь формула касательных (8.2.13).

Минимальное значение указанной площади равно $\frac{1}{4n}$ и, стало быть, остаток $R(f)$ формулы (8.2.13) в классе C_1 имеет оценку

$$|R(f)| \leq M_1 \cdot \frac{1}{4n}, \quad |f'(x)| \leq M_1.$$

Возьмем теперь класс дважды непрерывно дифференцируемых функций и положим, в соответствии с этим, $r=2$. Узлы и коэффициенты должны быть подчинены двум условиям (8.2.14), означающим, что квадратурная формула должна дать точный результат для всякой линейной функции.

Ядро остатка $K(t)$ указано в равенстве (8.2.15). Несколькими строками ниже этого равенства приведены значения ядра на отрезках $[x_k, x_{k+1}]$. Считая, что минимум $u = \int_0^1 |K(t)| dt$ существует, применим к его нахождению известные правила разыскания экстремумов функции. Составим вспомогательную функцию

$$F = U + \lambda_1 \left(\sum_{k=1}^n A_k - 1 \right) + \lambda_2 \left(\sum_{k=1}^n A_k x_k - \frac{1}{2} \right)$$

и приравняем нулю ее частные производные по узлам x_i и коэффициентам A_i :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = -A_i \int_0^1 S(t) E(x_i - t) dt + \lambda_2 A_i = 0, \quad (8.3.6)$$

$$S(t) = \text{sign } K(t),$$

$$\frac{\partial F}{\partial A_i} = - \int_0^1 S(t) E(x_i - t) (x_i - t) dt + \lambda_1 + \lambda_2 x_i = 0 \quad (8.3.7)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Отсюда видно, что для каждого отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ должно быть

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} S(t) dt = 0, \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} t S(t) dt = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Следовательно, на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ ядро $K(t)$ есть многочлен второй степени со старшим членом $\frac{1}{2}t^2$, наименее уклоняющийся от нуля в метрике L на $[x_i, x_{i+1}]$.

В § 3 гл. 2 было доказано, что среди многочленов степени n со старшим членом x^n наименее отклоняться от нуля в метрике L на $[-1, +1]$ будет многочлен

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} U_n(x) = \frac{\sin(n+1) \arccos x}{2^n \sqrt{1-x^2}}.$$

В частности, при $n=2$ это будет многочлен

$$P_2(x) = x^2 - \frac{1}{4}.$$

Когда от отрезка $-1 \leq x \leq +1$ мы перейдем к $x_i \leq t \leq x_{i+1}$ при помощи линейного преобразования $t = \alpha_i + h_i x$, $\alpha_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$, $h_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}$ и приведем после этого старший коэффициент к $\frac{1}{2}$, то для $K(t)$ получим следующее представление

$$K(t) = \frac{h_i^2}{2} P_2\left(\frac{t - \alpha_i}{h_i}\right), \quad x_i \leq t \leq x_{i+1}.$$

Если исходить из этого представления ядра $K(t)$ и повторить рассуждения, проделанные по аналогичному вопросу в предыдущем

параграфе, то можно доказать справедливость перечисляемых ниже утверждений.

1. Узлы и коэффициенты должны иметь значения

$$x_i = \frac{\sqrt{3} + 4(i-1)}{2} h, \quad h = [\sqrt{3} + 2(n-1)]^{-1},$$

$$A_i = 2h \quad (i = 2, \dots, n-1),$$

$$A_1 = A_n = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} h.$$

2. Указанные x_i и A_i действительно доставляют наименьшее значение интегралу $\int_0^1 |K(t)| dt$ и такие значения являются единственными.

3. Остаток $R(f)$ квадратурной формулы при указанных x_i и A_i имеет в классе C_2 оценку

$$|R(f)| \leq M_2 \frac{h^2}{8}, \quad |f''| \leq M_2.$$

4. Квадратурная сумма $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$ есть сумма Римана и для всякой интегрируемой на $[0,1]$ в смысле Римана функции будет

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = \int_0^1 f dx.$$

§ 4. Задача минимизации оценки остатка квадратуры с закрепленными узлами

Перейдем сейчас к изучению задачи построения квадратурной формулы с заданными узлами и с минимальной оценкой остатка. Рассмотрим наиболее часто встречающийся в приложениях случай равноотстоящих узлов и постоянной весовой функции. Будем считать, что отрезок интегрирования $[0,1]$ разделен на n равных частей $h = \frac{1}{n}$.

В квадратурной формуле

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (8.4.1)$$

можно распорядиться выбором $n+1$ коэффициентов A_k . Если потребовать, чтобы равенство (8.4.1) было точным для всевозможных

многочленов степени n , то, как было выяснено в гл. 6, коэффициенты A_k определяются вполне и (8.4.1) совпадает с интерполяционной формулой Ньютона — Котеса. Будем считать, что формула (8.4.1) дает точный результат для многочленов степени $r-1 < n$. Это накладывает следующие ограничения на выбор A_k

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=0}^n A_k &= 1, \\ \sum_{k=1}^n A_k k^i &= \frac{n^i}{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, r-1. \end{aligned} \right\} \quad (8.4.2)$$

Если производная порядка $r-1$ от f есть абсолютная непрерывная функция, то остаток квадратуры представим в форме

$$\left. \begin{aligned} R(f) &= \int_0^1 f^{(r)}(t) K(t) dt, \\ K(t) &= \frac{(1-t)^r}{r!} - \sum_{k=1}^n A_k E\left(\frac{k}{n} - t\right) \frac{\left(\frac{k}{n} - t\right)^{r-1}}{(r-1)!}. \end{aligned} \right\} \quad (8.4.3)$$

Среди $n+1$ чисел A_k остаются произвольными $n+1-r$ и выбором их нужно воспользоваться для уменьшения оценки погрешности квадратуры.

Ниже будут рассмотрены два случая минимизации такой оценки.

Возьмем сначала функции класса $L_q^{(1)}$ и выберем те из них, для которых

$$\left\{ \int_0^1 |f'|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} \leq M_1.$$

Если считать, что квадратурная формула будет точной в случае $f = \text{const}$ и, следовательно, ее коэффициенты удовлетворяют первому из условий (8.4.2), то для таких функций будет верна следующая оценка остатка

$$\begin{aligned} |R(f)| &\leq \left\{ \int_0^1 |f'|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} \cdot \left\{ \int_0^1 |K|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq M_1 \left\{ \int_0^1 |K|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} = \\ &= \sup_f |R(f)|. \end{aligned}$$

От чисел A_k в оценке зависит лишь интеграл $\int_0^1 |K(t)|^p dt$ и коэффициенты A_k нужно выбрать так, чтобы придать интегралу наи-

меньшее значение. Ядро остатка $K(t)$ здесь имеет значение:

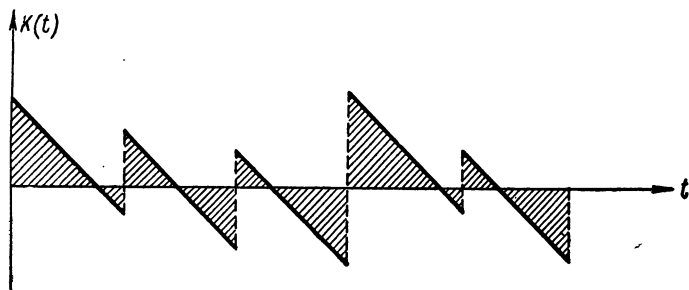
$$K(t) = 1 - t - \sum_{k=1}^n A_k E\left(\frac{k}{n} - t\right);$$

оно является линейной функцией на каждом из отрезков $\frac{i-1}{n} < t < \frac{i}{n}$ ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$K(t) = 1 - t - \sum_{k=i}^n A_k.$$

В точках $t = \frac{i}{n}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) $K(t)$ имеет разрыв первого рода со скачком A_i и предельные значения его на концах отрезка $[0, 1]$ равны A_0 и $-A_n$.

Схематический график $K(t)$ приведен на черт. 7.



Черт. 7.

Нам нужно определить при каких величинах скачков A_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) и граничных значениях A_0 и $-A_n$, подчиненных ограничению $\sum_{i=0}^n A_i = 1$, ордината $K(t)$ площади, заштрихованной на чертеже, будет иметь наименьшее среднее значение степени p . Несложными вычислениями можно проверить, что это будет в том случае, когда указанная площадь будет состоять из $2n$ равных прямоугольных треугольников.

Отсюда сразу же следует, что

$$A_0 = A_n = \frac{1}{2n}, \quad A_1 = A_2 = \dots = A_{n-1} = \frac{1}{n}.$$

Разыскиваемая квадратурная формула является хорошо известной формулой трапеций

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{2} f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{2} f(1) \right] + R(f)$$

и остаток ее $R(f)$ будет иметь оценку

$$|R(f)| \leq \frac{M_1}{2n(p+1)^{\frac{1}{p}}}, \quad M_1 = \left\{ \int_0^1 |f'|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению квадратурных формул с наименьшей оценкой остатка в классах функций более высокого порядка дифференцируемости и ограничимся исключительно случаем классов $L_2^{(r)}$ ($r \geq 2$), когда задача определения коэффициентов A_k имеет простое решение.

Будем считать квадратурную формулу точной для многочленов степени $< r$, что равносильно выполнению равенств (8.4.2). Остаток представим в форме (8.4.3). На множестве функций f , удовлетворяющих условию

$$\left\{ \int_0^1 [f^{(r)}]^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq M_r,$$

его оценка будет

$$R(f) \leq M_r \left\{ \int_0^1 K^2(t) dt \right\}^{\frac{1}{2}} = \sup_r |R(f)|.$$

От A_k здесь зависит $I = \int_0^1 K^2(t) dt$ и, при принятом в настоящей главе порядке идей, нашей задачей будет так выбрать A_k , чтобы придать I наименьшее возможное значение. Это есть задача о минимуме многочлена второй степени от A_k при линейных связях (8.4.2). Интеграл I не зависит от A_0 . Кроме того, A_0 входит в первое уравнение связи (4.8.2). При нахождении минимума I это уравнение мы можем отбросить, так как оно не налагает никаких ограничений на A_k ($k = 1, 2, \dots, n$) и будет служить для вычисления A_0 , когда будут найдены все A_k ($k \geq 1$). Другие уравнения связи

$$\sum_{k=1}^n A_k k^i = \frac{n^i}{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, r-1)$$

являются независимыми и могут быть решены относительно любых $r-1$ коэффициентов A_k , например, относительно $A_1, \dots, A_{r-1}$.

В интеграле I члены второй степени относительно A_k получаются при вычислении интеграла

$$\sigma(A_1, \dots, A_n) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^n A_k E\left(\frac{k}{n} - t\right) \left(\frac{k}{n} - t\right)^{r-1} \right]^2 dt.$$

Квадратичная форма $\sigma(A_1, \dots, A_n)$ является определенной положительной, так как, очевидно, $\sigma(A_1, \dots, A_n) \geq 0$, при этом равенство $\sigma(A_1, \dots, A_n) = 0$ может выполняться только в том случае, когда при всяких $t \in [0, 1]$

$$\sum_{k=1}^n A_k E\left(\frac{k}{n} - t\right) \left(\frac{k}{n} - t\right)^{r-1} = 0,$$

что возможно лишь при условии $A_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Исходя из этого факта, путем обычных для алгебры рассуждений можно показать, что задача о минимуме

$$I = \int_0^1 K^2(t) dt,$$

при соблюдении уравнений связи (8.4.2), имеет решение и такое решение единственное. Если записать обычные условия экстремума I , то получится система линейных уравнений для нахождения A_k . Сард и Меверс *) вычислили значения коэффициентов A_k и интегралов

$I = \int_0^1 K^2(t) dt$ для $[r = 2, m = 1(1)20]$, $[r = 3, m = 2(1)12]$ и $[r = 4, m = 2(1)9]$. Числа, найденные ими для формулы (8.4.1), приведены в помещаемых ниже таблицах

$r = 2$

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
δ	2	16	30	112	190	624	994	3 104	4 770
$A_0\delta = A_m\delta$	1	3	4	11	15	41	56	153	209
$A_1\delta = A_{m-1}\delta$		10	11	32	43	118	161	440	601
$A_2\delta = A_{m-2}\delta$				26	37	100	137	374	511
$A_3\delta = A_{m-3}\delta$						106	143	392	535
$A_4\delta = A_{m-4}\delta$								386	529
$m^5 I$	1	1	1	1	5	77	39	22	7
	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{160}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{5}{456}$	$\frac{77}{6\,240}$	$\frac{39}{2\,840}$	$\frac{22}{1\,455}$	$\frac{7}{424}$

*) Am. I. Math. 1949, 71, № 1, 80—91 и I. Math. and Phys. 1950, 29, № 2, 118—123.

Продолжение

m	10	11	12	13	14	15
δ	14 480	21 758	64 848	95 966	282 352	413 250
$A_0 \delta = A_m \delta$	571	780	2 131	2 911	7 953	10 864
$A_1 \delta = A_{m-1} \delta$	1 642	2 243	6 128	8 371	22 870	31 241
$A_2 \delta = A_{m-2} \delta$	1 396	1 907	5 210	7 117	19 444	26 561
$A_3 \delta = A_{m-3} \delta$	1 462	1 997	5 456	7 453	20 362	27 815
$A_4 \delta = A_{m-4} \delta$	1 444	1 973	5 390	7 363	20 116	27 479
$A_5 \delta = A_{m-5} \delta$	1 450	1 979	5 408	7 387	20 182	27 569
$A_6 \delta = A_{m-6} \delta$			5 402	7 381	20 164	27 545
$A_7 \delta = A_{m-7} \delta$					20 170	27 551
$m^5 I$	$\frac{311}{17\,376}$	$\frac{763}{39\,560}$	$\frac{419}{20\,265}$	$\frac{9\,773}{442\,920}$	$\frac{28\,381}{1\,210\,080}$	$\frac{8\,213}{330\,600}$

m	16	17	18	19	20
δ	1 204 288	1 747 906	5 056 272	7 290 718	20 966 960
$A_0 \delta = A_m \delta$	29 681	40 545	110 771	151 316	413 403
$A_1 \delta = A_{m-1} \delta$	85 352	116 593	318 538	435 131	1 188 800
$A_2 \delta = A_{m-2} \delta$	72 566	99 127	270 820	369 947	1 010 714
$A_3 \delta = A_{m-3} \delta$	75 992	103 807	283 606	387 413	1 058 432
$A_4 \delta = A_{m-4} \delta$	75 074	102 553	280 180	382 733	1 045 646
$A_5 \delta = A_{m-5} \delta$	75 320	102 889	281 098	383 987	1 049 072
$A_6 \delta = A_{m-6} \delta$	75 254	102 799	280 852	383 651	1 048 154
$A_7 \delta = A_{m-7} \delta$	75 272	102 823	280 918	383 741	1 048 400
$A_8 \delta = A_{m-8} \delta$	75 266	102 817	280 900	383 717	1 048 334
$A_9 \delta = A_{m-9} \delta$			280 906	383 723	1 048 352
$A_{10} \delta = A_{m-10} \delta$					1 048 346
$m^5 I$	$\frac{2\,468}{94\,085}$	$\frac{170\,393}{6\,169\,080}$	$\frac{162\,977}{5\,618\,080}$	$\frac{699\,869}{23\,023\,320}$	$\frac{8\,331}{262\,087}$

$$r = 3$$

m	2	3	4	5	6	7	8
δ	6	24	240	1560	930	607 152	643 104
$A_0\delta = A_m\delta$	1	3	21	112	55	30 927	28 603
$A_1\delta = A_{m-1}\delta$	4	9	76	379	192	106 573	99 124
$A_2\delta = A_{m-2}\delta$			46	289	132	76 573	69 874
$A_3\delta = A_{m-3}\delta$					172	89 503	85 684
$A_4\delta = A_{m-4}\delta$							76 534
m^7I	$\frac{1}{1\ 890}$	$\frac{11}{8\ 960}$	$\frac{11}{12\ 600}$	$\frac{73}{69\ 888}$	$\frac{11}{10\ 850}$	$\frac{134\ 081}{124\ 899\ 840}$	$\frac{3\ 961}{3\ 617\ 460}$

m	9	10	11	12
δ	4 700 880	34 572 870	2 789 581 080	143 254 032
$A_0\delta = A_m\delta$	186 016	1 230 777	90 294 905	4 250 217
$A_1\delta = A_{m-1}\delta$	643 081	4 259 404	312 347 051	14 705 148
$A_2\delta = A_{m-2}\delta$	457 051	3 016 564	221 544 971	10 423 398
$A_3\delta = A_{m-3}\delta$	549 131	3 656 464	267 523 241	12 607 228
$A_4\delta = A_{m-4}\delta$	515 161	3 358 804	247 986 521	11 640 978
$A_5\delta = A_{m-5}\delta$		3 528 844	255 093 851	12 084 348
$A_6\delta = A_{m-6}\delta$				11 831 398
m^7I	$\frac{662\ 807}{584\ 998\ 400}$	$\frac{507\ 029}{435\ 618\ 162}$	$\frac{3\ 062\ 211\ 497}{2\ 556\ 270\ 662\ 400}$	$\frac{1\ 028\ 343}{835\ 648\ 520}$

$$r = 4$$

m	2	3	4	5	6	7
δ	6	24	28 992	432 840	19 740 084	167 985 552
$A_0\delta = A_m\delta$	1	3	2 349	29 392	1 082 811	8 013 897
$A_1\delta = A_{m-1}\delta$	4	9	9 932	110 209	4 409 946	31 412 443
$A_2\delta = A_{m-2}\delta$			4 430	76 819	2 225 043	18 665 443
$A_3\delta = A_{m-3}\delta$					4 304 484	25 900 993
m^9I	$\frac{1}{9\ 072}$	$\frac{13}{17\ 920}$	$\frac{6\ 557}{36\ 529\ 920}$	$\frac{61\ 633}{193\ 912\ 320}$	$\frac{210\ 047}{921\ 203\ 920}$	$\frac{56\ 097\ 271}{207\ 342\ 167\ 040}$

Продолжение

m	8	9
δ	12 298 253 184	291 277 352 304
$A_0\delta = A_m\delta$	509 110 987	10 764 281 184
$A_1\delta = A_{m-1}\delta$	2 040 010 996	42 647 140 119
$A_2\delta = A_{m-2}\delta$	1 105 566 730	24 253 340 709
$A_3\delta = A_{m-3}\delta$	1 867 200 148	37 040 022 813
$A_4\delta = A_{m-4}\delta$	1 254 475 462	30 933 891 327
m^9I	2 876 254 589	18 892 720 083
	<u>11 621 849 258 880</u>	<u>72 495 696 573 440</u>

ЛИТЕРАТУРА

Никольский С. М., К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами, Усп. матем. наук, 1950, V, в 2, 165—177.

Sard A., Best approximate integration formulas, best approximation formulas, Am. I. Math. 1949, 71, n° 1, 80—91.

Meyers and Sard, Best approximate integration formulas, J. of Math. and Physik, 1950, 29, n° 2, 118—123.

Шайдаева Т. А., Наиболее точные квадратуры для некоторых классов функций, Диссертация, Ленинградский гос. университет, 1954.

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ, СОДЕРЖАЩИЕ НАПЕРЕД ЗАДАНИЕ УЗЛЫ

§ 1. Некоторые общие теоремы

В прикладных задачах иногда возникает необходимость построения таких квадратурных формул, часть узлов которых задается заранее, другая же часть узлов может быть взята произвольно и выбором таких узлов можно распоряжаться для достижения тех или иных целей.

Рассмотрим, например, граничную задачу на отрезке $a \leq x \leq b$ для дифференциального уравнения второго порядка

$$L(y) + \lambda p(x)y = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + (\lambda p(x) - q(x))y = -f(x) \quad (9.1.1)$$

при условиях

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \quad (9.1.2)$$

Если известна функция Грина $G(x, \xi)$ для оператора $L(y)$ при условиях (9.1.2), решение граничной задачи может быть приведено к решению интегрального уравнения *)

$$\left. \begin{aligned} y(x) &= F(x) + \lambda \int_a^b G(x, \xi) p(\xi) y(\xi) d\xi, \\ F(x) &= \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.3)$$

Допустим теперь, что мы хотим приближенно решить уравнение (9.1.3) путем применения механических квадратур к интегралу, стоящему в правой части равенства. При выборе квадратурной формулы естественно принять во внимание, что значения функции $y(x)$ на концах

*) См. напр., В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, Гостехиздат, 1954, 519—521.

отрезка $[a, b]$ нам известны из условий (9.1.2) и взять формулу вида

$$\int_a^b f(x) dx \approx Af(a) + Bf(b) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k),$$

содержащую два фиксированных узла a и b . Прочие узлы x_k ($k=1, \dots, n$) являются произвольными.

Выше был взят случай „двухточечной“ граничной задачи. Если бы задача была „многоточечной“, то могла возникнуть потребность построения квадратурной формулы, содержащей более двух заданных заранее узлов.

Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \sum_{l=1}^m B_l f(a_l), \quad (9.1.4)$$

в которой m узлов $a_1, \dots, a_m$ фиксированы. Она содержит $2n + m$ параметров A_k, x_k ($k=1, \dots, n$) и B_l ($l=1, \dots, m$). Попробуем их выбрать так, чтобы равенство (9.1.4) стало точным для многочленов возможно более высокой степени.

Введем два многочлена, связанных с узлами a_l и x_k :

$$\Omega(x) = (x - a_1) \dots (x - a_m),$$

$$\omega(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n).$$

За счет выбора коэффициентов A_k и B_l , формулу (9.1.4) можно сделать верной для многочленов степени $n + m - 1$. Для этого ее достаточно взять интерполяционной. Достичь же того, чтобы равенство (9.1.4) было верным для многочленов более высокой степени, можно только за счет специального подбора x_k .

Теорема 1. *Для того чтобы формула (9.1.1) была точной для многочленов степени $2n + m - 1$, необходимо и достаточно, чтобы 1) она была интерполяционной и чтобы 2) многочлен $\omega(x)$ был ортогонален на отрезке $[a, b]$ по весу $p(x)\Omega(x)$ ко всякому многочлену $Q(x)$ степени $< n$.*

Доказательство. Необходимость первого условия очевидна, так как, если формула (9.1.4) верна для всех многочленов степени $n + m - 1$, то она должна быть интерполяционной. Необходимость второго условия проверяется, если положить $f = \Omega\omega Q$. f есть многочлен, степень которого $\leq 2n + m - 1$. Для него равенство (9.1.4) должно быть точным и так как f в точках a_l и x_k исчезает, квадратурная сумма для такой функции f обратится в нуль и должно будет выполняться равенство

$$\int_a^b p(x) \Omega(x) \omega(x) Q(x) dx = 0. \quad (9.1.5)$$

Пусть f есть произвольный многочлен степени $2n + m - 1$. Его можно представить в форме $f = \Omega(x)\omega(x)Q(x) + r(x)$, где $Q(x)$ и $r(x)$ будут многочленами, степени $\leq n - 1$ и $\leq n + m - 1$ соответственно. При этом, очевидно, $f(a_l) = r(a_l)$ ($l = 1, \dots, m$) и $f(x_k) = r(x_k)$ ($k = 1, \dots, n$).

Если выполнено условие ортогональности (9.1.5) и формула (9.1.4) — интерполяционная, то будет верной следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned} \int_a^b pf dx &= \int_a^b p\Omega\omega Q dx + \int_a^b pr dx = \int_a^b pr dx = \sum_{k=1}^n A_k r(x_k) + \\ &+ \sum_{l=1}^m B_l r(a_l) = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \sum_{l=1}^m B_l f(a_l). \end{aligned}$$

Этим доказана достаточность условий теоремы.

Таким образом, построение квадратурной формулы (9.1.4), верной для алгебраических многочленов степени $2n + m - 1$ приводится к нахождению многочлена $\omega(x)$ степени n , ортогонального на $[a, b]$ по весу $p\Omega$ ко всякому многочлену меньшей степени. Корни многочлена $\omega(x)$ должны быть действительными, различными и принадлежать отрезку $[a, b]$. Кроме того, они должны быть отличны от фиксированных узлов a_l ($l = 1, \dots, m$).

Допустим, что многочлен $\omega(x)$, обладающий указанными свойствами, существует. Тогда формула (9.1.4), верная для многочленов степени $2n + m - 1$, может быть построена. Сделаем еще замечание об ее алгебраической степени точности. Получим представление остатка, позволяющее легко судить об этом. Выполним интерполирование f на $[a, b]$ при помощи многочлена $H(x)$ степени $\leq 2n + m - 1$ по следующим условиям

$$\begin{aligned} H(a_l) &= f(a_l) \quad (l = 1, \dots, m), \\ H(x_k) &= f(x_k), \quad H'(x_k) = f'(x_k) \quad (k = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Если f имеет производную порядка $2n + m$ во всех точках отрезка $[a, b]$, то остаток интерполирования $r(x) = f(x) - H(x)$ представим в форме

$$r(x) = \Omega(x)\omega^2(x) \frac{f^{(2n+m)}(\xi)}{(2n+m)!}, \quad a < \xi < b.$$

Для остатка квадратуры $R(f)$ справедливо равенство $R(f) = R(H) + R(r)$. Так как формула (9.1.4) верна для всех многочленов степени $2n + m - 1$, то $R(H) = 0$. Кроме того, во всех узлах a_l и

$x_k r(x)$ обращается в нуль и поэтому квадратурная сумма для $r(x)$ исчезает

$$\sum_{k=1}^n A_k r(x_k) + \sum_{l=1}^m B_l r(a_l) = 0.$$

Следовательно,

$$R(f) = R(r) = \int_a^b p r dx = \int_a^b p(x) \Omega(x) \omega^2(x) \frac{f^{(2n+m)}(\xi)}{(2n+m)!} dx. \quad (9.1.5)$$

Отсюда видно, что если

$$I = \int_a^b p \Omega \omega^2 dx \neq 0,$$

то степень точности формулы (9.1.4) равна $2n + m - 1$.

Действительно, при наших предположениях (9.1.4) дает точный результат для всех многочленов степени $2n + m - 1$. Когда же f есть многочлен степени $2n + m$, то $f^{(2n+m)}$ есть величина постоянная, отличная от нуля и для такой функции f

$$R(f) = \frac{f^{(2n+m)}}{(2n+m)!} \int_a^b p \Omega \omega^2 dx \neq 0.$$

Если $I = 0$, то алгебраическая степень точности (9.1.4) будет больше $2n + m - 1$. Легко может быть указан признак для суждения о степени точности в этом исключительном случае, на чем мы не будем останавливаться.

Так как формула (9.1.4) является интерполяционной, ее коэффициенты A_k и B_l должны иметь следующие значения:

$$A_k = \int_a^b p(x) \frac{\omega(x) \Omega(x)}{(x - x_k) \omega'(x_k) \Omega(x_k)} dx, \quad (9.1.6)$$

$$B_l = \int_a^b p(x) \frac{\omega(x) \Omega(x)}{(x - a_l) \omega(a_l) \Omega'(a_l)} dx. \quad (9.1.7)$$

Для коэффициента A_k можно дать другое представление, более удобное для вычисления, нежели (9.1.6). Допустим, что существует единственная система многочленов $\Pi_s(x)$ ($s = 1, 2, \dots$), где Π_s имеет степень s , ортонормированная по весу $\rho(x) = p(x) \Omega(x)$ на $[a, b]$. Многочлен $\Pi_n(x)$ может отличаться от $\omega(x)$ только постоянным множителем

$$A_k = \frac{1}{\Pi'_n(x_k) \Omega(x_k)} \int_a^b \rho(x) \frac{\Pi_n(x)}{x - x_k} dx.$$

Интеграл $\int_a^b \rho(x) \frac{\Pi_n(x)}{x-x_k} dx$ был вычислен в § 1 гл. 7 в других обозначениях. Для него были получены следующие два выражения:

$$\int_a^b \rho(x) \frac{\Pi_n(x)}{x-x_k} dx = -\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n \Pi_{n+1}(x_k)} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1} \Pi_{n-1}(x_k)}.$$

Под α_n здесь подразумевается старший коэффициент многочлена $\Pi_n(x)$:

$$\Pi_n(x) = \alpha_n x^n + \dots,$$

$$A_k = -\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n \Pi'_n(x_k) \Pi_{n+1}(x_k) \Omega(x_k)} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1} \Pi'_n(x_k) \Pi_{n-1}(x_k) \Omega(x_k)}. \quad (9.1.8)$$

Для вычисления коэффициентов A_k может быть полезным следующее замечание. Если сравнить (9.1.8) с выражениями (7.1.3) и (7.1.4) для коэффициентов формулы наивысшей алгебраической степени точности, то будет ясно, что A_k для формулы (9.1.4) будут отличаться только множителем $\frac{1}{\Omega(x_k)}$ от соответствующих коэффициентов в квадратурной формуле с весовой функцией $\rho(x) = p(x) \Omega(x)$

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A'_k f(x_k),$$

верной для многочленов степени $2n-1$.

Построение формулы (9.1.4) при всяких n , как видно из изложенного, требует умения находить систему многочленов, ортогональных на $[a, b]$ по весу $p(x) \Omega(x)$. В некоторых случаях здесь может принести пользу указанная несколькими строками ниже теорема о преобразовании ортогональной системы многочленов при умножении веса на многочлен. Эту теорему мы сформулируем с той степенью общности, которая будет достаточной для наших целей.

Для облегчения записи будем рассматривать многочлены со старшими коэффициентами, равными единице. Чтобы отличить их от нормированных многочленов, примененных в предыдущем изложении, будем их обозначать $\tilde{P}_s(x)$ или $\tilde{\Pi}_s(x)$.

Пусть $\Omega(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_m)$ есть любой многочлен с простыми корнями $a_1, a_2, \dots, a_m$.

Наряду с заданной весовой функцией $p(x)$ будем рассматривать весовую функцию $\rho(x) = p(x) \Omega(x)$.

Будем считать, что существует система многочленов $\tilde{P}_s(x) = x^s + \dots$ ($s=0, 1, \dots$), ортогональных на $[a, b]$ по весу $p(x)$ такая, что $\int_a^b p(x) \tilde{P}_s^2 dx \neq 0$.

существует при всяком n . Корни его x_k действительные, простые и все лежат внутри $[a, b]$. В частности, они во всех трех случаях отличны от фиксированных узлов, расположенных на концах $[a, b]$.

Поэтому квадратурные формулы (9.1.4), точные для всевозможных многочленов степени $2n + m - 1$, в случаях Маркова могут быть построены при любых n . Так как $p\Omega^2$ сохраняет знак на $[a, b]$

и $\int_a^b p\Omega^2 dx \neq 0$, алгебраическая степень точности таких формул будет равна $2n + m - 1$.

Построение начнем с первого случая: $m = 1, a_1 = a$:

$$\int_a^b pf dx = Af(a) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f). \quad (9.2.1)$$

Наивысшая степень точности формулы равна $2n$.

Здесь $\Omega(x) = x - a$; x_k — корни многочлена $\Pi_n(x)$ степени n , ортогонального на $[a, b]$ по весу $\rho(x) = (x - a)p(x)$ ко всякому многочлену степени $< n$. Если $P_s(x)$ ($s = 0, 1, \dots$) образуют ортогональную систему многочленов по весу $\rho(x)$, то, согласно (9.1.9), $\Pi_n(x)$ может быть записан в форме

$$\begin{aligned} \Pi_n(x) &= K_n \frac{1}{x-a} \begin{vmatrix} P_{n+1}(x), & P_{n+1}(a) \\ P_n(x), & P_n(a) \end{vmatrix} = \\ &= \frac{K_n}{x-a} [P_{n+1}(x)P_n(a) - P_n(x)P_{n+1}(a)], \end{aligned}$$

где K_n — некоторая постоянная, отличная от нуля. Равенства (9.1.8) дают достаточно удобное средство для вычисления коэффициентов A_k :

$$A_k = - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n(x_k - a) \Pi'_n(x_k) \Pi_{n+1}(x_k)} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}(x_k - a) \Pi'_n(x_k) \Pi_{n-1}(x_k)}. \quad (9.2.2)$$

Пользуясь (9.1.7), для A найдем

$$A = \Pi_n^{-1}(a) \int_a^b p(x) \Pi_n(x) dx. \quad (9.2.3)$$

Покажем, что все коэффициенты формулы (9.2.1) положительны. В качестве интегрируемой функции возьмем многочлен степени $2n - 1$:

$$f = (x - a) \left[\frac{\omega(x)}{x - x_i} \right]^2.$$

Он принимает следующие значения в узлах a, x_k :

$$f(a) = 0, \quad f(x_k) = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq i, \\ (x_i - a) \omega'^2(x_i) & \text{при } k = i. \end{cases}$$

Так как степень точности формулы (9.2.1) равна $2n$, то должно быть верным равенство

$$\int_a^b p(x)(x-a) \left[\frac{\omega(x)}{x-x_i} \right]^2 dx = A_i(x_i-a) \omega'^2(x_i)$$

и, следовательно,

$$A_i = \frac{1}{(x_i-a) \omega'^2(x_i)} \int_a^b p(x)(x-a) \left[\frac{\omega(x)}{x-x_i} \right]^2 dx > 0.$$

Аналогично, если положить $f = \omega^2(x)$, то для коэффициента A получим

$$A = \omega^{-2}(a) \int_a^b p(x) \omega^2(x) dx > 0.$$

Если f имеет непрерывную производную порядка $2n+1$, то остаток $R(f)$ формулы (9.2.1) может быть, согласно (9.1.5), представлен в форме

$$R(f) = \int_a^b p(x)(x-a) \omega^2(x) \frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} dx,$$

или, так как $p(x-a) \omega^2$ сохраняет знак на $[a, b]$,

$$R(f) = \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!} \int_a^b p(x)(x-a) \omega^2(x) dx, \quad a < \eta < b. \quad (9.2.4)$$

Более подробно остановимся на случае, когда весовая функция $p(x)$ есть величина постоянная: $p(x) \equiv 1$. Чтобы воспользоваться при вычислениях якобиевыми многочленами, будем считать, что отрезок интегрирования $[a, b]$ приведен к отрезку $[-1, 1]$ и рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = Af(-1) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f), \quad (9.2.5)$$

имеющую степень точности $2n$. $\Omega(x) = 1+x$. Многочлен $\omega(x) = (x-x_1) \dots (x-x_n)$ должен быть ортогонален на $[-1, 1]$ по весу $1+x$ ко всякому многочлену меньшей степени и поэтому может отличаться от многочлена Якоби $P_n^{(0,1)}(x)$ только постоянным множителем, равным обратной величине старшего коэффициента

$$\omega(x) = \frac{2^n n! \Gamma(n+2)}{\Gamma(2n+2)} P_n^{(0,1)}(x).$$

Узлы x_k должны быть, следовательно, корнями $P_n^{(0,1)}(x)$. Коэффициенты A_k могут быть легко найдены, если воспользоваться замечанием, сделанным по поводу равенств (9.1.8). Квадратурная формула (7.3.2.) с якобиевым весом $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, содержащая n узлов и верная для многочленов степени $2n-1$, имеет коэффициенты (7.3.4.). Их мы должны вычислить для случая $\alpha=0, \beta=1$ и затем для нахождения A_k , входящих в формулу (9.2.5.), приписать коэффициенту (7.3.4.) с тем же индексом k множитель $\frac{1}{\Omega(x_k)} = \frac{1}{1+x_k}$. Это дает:

$$A_k = \frac{4}{(1+x_k)(1-x_k^2)[P_n^{(0,1)'}(x_k)]^2}. \quad (9.2.6)$$

При вычислении A можно воспользоваться формулой (9.1.7), положив в ней $p=1$, $\Omega=1+x$, $a_i=-1$:

$$A = \int_{-1}^1 \frac{\omega(x)}{\omega(-1)} dx = [P_n^{(0,1)}(-1)]^{-1} \int_{-1}^1 P_n^{(0,1)}(x) dx.$$

Последний интеграл и численный множитель, стоящий перед ним, легко могут быть найдены при помощи известных свойств многочленов Якоби $P_n^{(0,1)}(x)$ и равны соответственно $\frac{(-1)^{n2}}{(n+1)}$ и $(-1)^n(n+1)$.

$$A = \frac{2}{(n+1)^2}. \quad (9.2.7)$$

Остаток $R(f)$ может быть подсчитан на основании общего выражения (9.2.4):

$$R(f) = \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!} \int_{-1}^1 (1+x) \omega^2(x) dx, \quad -1 < \eta < 1.$$

Интеграл, входящий в остаток $R(f)$, находится без труда

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1+x) \omega^2(x) dx &= \left[\frac{2^n n! (n+1)!}{(2n+1)!} \right]^2 \int_{-1}^1 (1+x) [P_n^{(0,1)}(x)]^2 dx = \\ &= \frac{2}{n+1} \left[\frac{2^n n! (n+1)!}{(2n+1)!} \right]^2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$R(f) = \frac{2}{n+1} \left[\frac{2^n n! (n+1)!}{(2n+1)!} \right]^2 \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}; \quad -1 < \eta < 1. \quad (9.2.8)$$

Узлы и коэффициенты формулы (9.2.5) для $n = 1(1)6$ приведены ниже *):

$n = 1$

$$\begin{array}{ll} A = 0,5 \\ x_1 = -0,3333 \quad 3333 & A_1 = 1,5 \end{array}$$

$n = 2$

$$\begin{array}{ll} A = 0,2222 \quad 2222 \\ x_1 = -0,2898 \quad 9794 & A_1 = 1,0249 \quad 7166 \\ x_2 = 0,6898 \quad 9794 & A_2 = 0,7528 \quad 0612 \end{array}$$

$n = 3$

$$\begin{array}{ll} A = 0,125 \\ x_1 = -0,5753 \quad 189 & A_1 = 0,6576 \quad 886 \\ x_2 = 0,1810 \quad 663 & A_2 = 0,7763 \quad 870 \\ x_3 = 0,8228 \quad 241 & A_3 = 0,4409 \quad 244 \end{array}$$

$n = 4$

$$\begin{array}{ll} A = 0,08 \\ x_1 = -0,7204 \quad 803 & A_1 = 0,4462 \quad 078 \\ x_2 = 0,1671 \quad 809 & A_2 = 0,6236 \quad 530 \\ x_3 = 0,4463 \quad 140 & A_3 = 0,5627 \quad 120 \\ x_4 = 0,8857 \quad 916 & A_4 = 0,2874 \quad 271 \end{array}$$

$n = 5$

$$\begin{array}{ll} A = 0,0555 \quad 556 \\ x_1 = -0,8029 \quad 298 & A_1 = 0,3196 \quad 408 \\ x_2 = -0,3909 \quad 286 & A_2 = 0,4853 \quad 872 \\ x_3 = 0,1240 \quad 504 & A_3 = 0,5209 \quad 268 \\ x_4 = 0,6039 \quad 732 & A_4 = 0,4169 \quad 013 \\ x_5 = 0,9203 \quad 803 & A_5 = 0,2015 \quad 884 \end{array}$$

$n = 6$

$$\begin{array}{ll} A = 0,0408 \quad 1633 \\ x_1 = -0,8538 \quad 913 & A_1 = 0,2392 \quad 274 \\ x_2 = -0,5384 \quad 678 & A_2 = 0,3809 \quad 498 \\ x_3 = -0,1173 \quad 430 & A_3 = 0,4471 \quad 098 \\ x_4 = 0,3260 \quad 306 & A_4 = 0,4247 \quad 038 \\ x_5 = 0,7038 \quad 428 & A_5 = 0,3182 \quad 042 \\ x_6 = 0,9413 \quad 672 & A_6 = 0,1489 \quad 885 \end{array}$$

*) Результаты найдены мл. науч. сотр. Ленинградского отделения Математического института АН СССР Р. Б. Аккерман и К. Е. Черниным.

Обратимся к третьему случаю, когда два заранее заданных узла лежат на границах промежутка интегрирования $a_1 = a$, $a_2 = b$:

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = Af(a) + Bf(b) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f). \quad (9.2.9)$$

Наивысшая степень точности такой формулы равна $2n + 1$; $\Omega(x) = (x - a)(x - b)$; x_k — корни многочлена $\Pi_n(x)$ степени n , ортогонального на $[a, b]$ по весу $\rho(x) = (x - a)(x - b)p(x)$ ко всякому многочлену меньшей степени.

Многочлен $\Pi_n(x)$ через многочлены $P_n(x)$, ортогональные по весу $p(x)$, выражается следующим образом:

$$\Pi_n(x) = \frac{K_n}{(x-a)(x-b)} \begin{vmatrix} P_{n+2}(x) & P_{n+2}(a) & P_{n+2}(b) \\ P_{n+1}(x) & P_{n+1}(a) & P_{n+1}(b) \\ P_n(x) & P_n(a) & P_n(b) \end{vmatrix}.$$

Коэффициенты A_k , A и B вычисляются при помощи равенств (9.1.8) и (9.1.7):

$$A_k = - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n \Pi'_n(x_k) \Pi_{n+1}(x_k) (x_k - a)(x_k - b)} = \\ = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1} \Pi'_n(x_k) \Pi_{n-1}(x_k) (x_k - a)(x_k - b)}, \quad (9.2.10)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= [\omega(a)(a-b)]^{-1} \int_a^b p(x)(x-b)\omega(x)dx, \\ B &= [\omega(b)(b-a)]^{-1} \int_a^b p(x)(x-a)\omega(x)dx, \\ \omega(x) &= (x-x_1) \dots (x-x_n). \end{aligned} \right\} \quad (9.2.11)$$

Если рассмотреть квадратурную формулу с весовой функцией $\rho(x) = p(x)(x-a)(x-b)$:

$$\int_a^b p(x)(x-a)(x-b)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k'' f(x_k),$$

верную для многочленов степени $2n - 1$, то коэффициенты A_k формулы (9.2.8) будут отличаться от A_k'' множителем $\frac{1}{(x_k - a)(x_k - b)}$. Можно показать, что A_k , A и B положительны. Чтобы убедиться в этом, достаточно применить формулу (9.2.9) к многочленам

$$(x-a)(x-b) \left[\frac{\omega(x)}{x-x_i} \right]^2, \quad (b-x)\omega^2(x) \quad \text{и} \quad (x-a)\omega^2(x).$$

Остаточный член $R(f)$ (9.2.9) представим в форме

$$R(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \int_a^b p(x)(x-a)(x-b)\omega^2(x)dx.$$

Как выше, остановимся на случае постоянной весовой функции $p(x)$ и будем считать, что отрезок интегрирования есть $[-1, 1]$:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = Af(-1) + Bf(1) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f), \quad (9.2.12)$$

$$\Omega(x) = 1 - x^2.$$

Многочлен $\omega(x)$ ортогонален на $[-1, 1]$ с весом $1 - x^2$ ко всякому многочлену степени $< n$ и, с точностью до легко определяемого численного множителя, должен совпадать с якобиевым многочленом $P_n^{(1,1)}(x)$:

$$\omega(x) = \frac{2^n n! \Gamma(n+3)}{\Gamma(2n+3)} P_n^{(1,1)}(x).$$

Путем, аналогичным тому, который применен в первом случае, вычисляются коэффициенты и остаток формулы (9.2.12):

$$\begin{aligned} A_k &= 8 \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{(1-x_k^2)^2 [P_n^{(1,1)'}(x_k)]^2}, \\ A &= B = \frac{2}{(n+1)(n+2)}, \\ R(f) &= \frac{8(n+1)}{(2n+3)(n+2)} \left[\frac{2^n n! (n+2)!}{(2n+3)!} \right]^2 \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}, \\ &\quad -1 < \eta < 1. \end{aligned}$$

Приведем*) числовые величины узлов и коэффициентов для $n = 1(1)15$

	$n = 1$	
		$A = B = 0,3333 \ 3333$
$x_1 = 0$		$A_1 = 1,3333 \ 3333$
	$n = 2$	
		$A = B = 0,1666 \ 6667$
$x_2 = -x_1 = 0,4472 \ 1360$		$A_1 = A_2 = 0,8333 \ 3333$
	$n = 3$	
		$A = B = 0,1$
$x_3 = -x_1 = 0,6546 \ 5367$		$A_3 = A_1 = 0,5444 \ 4444$
$x_2 = 0$		$A_2 = 0,7111 \ 1111$

*) Таблица составлена мл. научн. сотр. Ленинградского отделения Математического института АН СССР Р. Б. Аккерман.

$n = 4$

$$\begin{array}{ll}
 A = B = 0,0666 \ 6666 \ 7 & \\
 x_4 = -x_1 = 0,7650 \ 5532 & A_4 = A_1 = 0,3784 \ 7496 \\
 x_3 = -x_2 = 0,2852 \ 3152 & A_3 = A_2 = 0,5548 \ 5837
 \end{array}$$

 $n = 5$

$$\begin{array}{ll}
 A = B = 0,0476 \ 1904 \ 8 & \\
 x_5 = -x_1 = 0,8302 \ 2390 & A_5 = A_1 = 0,2768 \ 2605 \\
 x_4 = -x_2 = 0,4688 \ 4879 & A_4 = A_2 = 0,4317 \ 4538 \\
 x_3 = 0 & A_3 = 0,4876 \ 1905
 \end{array}$$

 $n = 6$

$$\begin{array}{ll}
 A = B = 0,0357 \ 1428 \ 6 & \\
 x_6 = -x_1 = 0,8717 \ 4015 & A_6 = A_1 = 0,2107 \ 0423 \\
 x_5 = -x_2 = 0,5917 \ 0018 & A_5 = A_2 = 0,3411 \ 2268 \\
 x_4 = -x_3 = 0,2092 \ 9922 & A_4 = A_3 = 0,4124 \ 5881
 \end{array}$$

 $n = 7$

$$\begin{array}{ll}
 A = B = 0,0277 \ 7777 \ 8 & \\
 x_7 = -x_1 = 0,8997 \ 5800 & A_7 = A_1 = 0,1654 \ 9536 \\
 x_6 = -x_2 = 0,6771 \ 8628 & A_6 = A_2 = 0,2745 \ 3872 \\
 x_5 = -x_3 = 0,3631 \ 1746 & A_5 = A_3 = 0,3464 \ 2851 \\
 x_4 = 0 & A_4 = 0,3715 \ 1927
 \end{array}$$

 $n = 8$

$$\begin{array}{ll}
 A = B = 0,0222 \ 2222 \ 2 & \\
 x_8 = -x_1 = 0,9195 \ 3391 & A_8 = A_1 = 0,1333 \ 0599 \\
 x_7 = -x_2 = 0,7387 \ 7386 & A_7 = A_2 = 0,2248 \ 8934 \\
 x_6 = -x_3 = 0,4779 \ 2495 & A_6 = A_3 = 0,2920 \ 4268 \\
 x_5 = -x_4 = 0,1652 \ 7896 & A_5 = A_4 = 0,3275 \ 3976
 \end{array}$$

 $n = 9$

$$\begin{array}{ll}
 A = B = 0,0181 \ 8181 \ 8 & \\
 x_9 = -x_1 = 0,9340 \ 0143 & A_9 = A_1 = 0,1096 \ 1227 \\
 x_8 = -x_2 = 0,7844 \ 8347 & A_8 = A_2 = 0,1871 \ 6989 \\
 x_7 = -x_3 = 0,5652 \ 3533 & A_7 = A_3 = 0,2480 \ 4811 \\
 x_6 = -x_4 = 0,2957 \ 5814 & A_6 = A_4 = 0,2868 \ 7913 \\
 x_5 = 0 & A_5 = 0,3002 \ 1759
 \end{array}$$

 $n = 10$

$$\begin{array}{ll}
 A = B = 0,0151 \ 5151 \ 5 & \\
 x_{10} = -x_1 = 0,9448 \ 9927 & A_{10} = A_1 = 0,0916 \ 8452 \ 1 \\
 x_9 = -x_2 = 0,8192 \ 7932 & A_9 = A_2 = 0,1579 \ 7471 \\
 x_8 = -x_3 = 0,6328 \ 7615 & A_8 = A_3 = 0,2125 \ 0842 \\
 x_7 = -x_4 = 0,3995 \ 3094 & A_7 = A_4 = 0,2512 \ 7560 \\
 x_6 = -x_5 = 0,1365 \ 5293 & A_6 = A_5 = 0,2714 \ 0524
 \end{array}$$

$n = 11$

	$A = B = 0,0128 \ 2051 \ 3$
$x_{11} = -x_1 = 0,9533 \ 0985$	$A_{11} = A_1 = 0,0778 \ 0168 \ 7$
$x_{10} = -x_2 = 0,8463 \ 4757$	$A_{10} = A_2 = 0,1349 \ 8193$
$x_9 = -x_3 = 0,6861 \ 8847$	$A_9 = A_3 = 0,1836 \ 4686$
$x_8 = -x_4 = 0,4829 \ 0982$	$A_8 = A_4 = 0,2207 \ 6779$
$x_7 = -x_5 = 0,2492 \ 8693$	$A_7 = A_5 = 0,2440 \ 1579$
$x_6 = 0$	$A_6 = 0,2519 \ 3085$

 $n = 12$

	$A = B = 0,0109 \ 8901 \ 1$
$x_{12} = -x_1 = 0,9599 \ 3505$	$A_{12} = A_1 = 0,0668 \ 3728 \ 3$
$x_{11} = -x_2 = 0,8678 \ 0105$	$A_{11} = A_2 = 0,1165 \ 8665$
$x_{10} = -x_3 = 0,7288 \ 6860$	$A_{10} = A_3 = 0,1600 \ 2185$
$x_9 = -x_4 = 0,5506 \ 3940$	$A_9 = A_4 = 0,1948 \ 2615$
$x_8 = -x_5 = 0,3427 \ 2401$	$A_8 = A_5 = 0,2191 \ 2625$
$x_7 = -x_6 = 0,1163 \ 3187$	$A_7 = A_6 = 0,2316 \ 1279$

 $n = 13$

	$A = B = 0,0095 \ 2380 \ 95$
$x_{13} = -x_1 = 0,9652 \ 4592$	$A_{13} = A_1 = 0,0580 \ 2992 \ 2$
$x_{12} = -x_2 = 0,8850 \ 8205$	$A_{12} = A_2 = 0,1016 \ 6004$
$x_{11} = -x_3 = 0,7635 \ 1967$	$A_{11} = A_3 = 0,1405 \ 1171$
$x_{10} = -x_4 = 0,6062 \ 5322$	$A_{10} = A_4 = 0,1727 \ 8965$
$x_9 = -x_5 = 0,4206 \ 3805$	$A_9 = A_5 = 0,1969 \ 8723$
$x_8 = -x_6 = 0,2153 \ 5396$	$A_8 = A_6 = 0,2119 \ 7360$
$x_7 = 0$	$A_7 = 0,2170 \ 4810$

 $n = 14$

	$A = B = 0,0083 \ 3333 \ 33$
$x_{14} = -x_1 = 0,9695 \ 6804$	$A_{14} = A_1 = 0,0508 \ 5036 \ 9$
$x_{13} = -x_2 = 0,8992 \ 0054$	$A_{13} = A_2 = 0,0893 \ 9368 \ 9$
$x_{12} = -x_3 = 0,7920 \ 0828$	$A_{12} = A_3 = 0,1242 \ 5539$
$x_{11} = -x_4 = 0,6523 \ 8872$	$A_{11} = A_4 = 0,1540 \ 2699$
$x_{10} = -x_5 = 0,4860 \ 5941$	$A_{10} = A_5 = 0,1774 \ 9190$
$x_9 = -x_6 = 0,2998 \ 3047$	$A_9 = A_6 = 0,1936 \ 9005$
$x_8 = -x_7 = 0,1013 \ 2627$	$A_8 = A_7 = 0,2019 \ 5830$

 $n = 15$

	$A = B = 0,0073 \ 5294 \ 12$
$x_{15} = -x_1 = 0,9731 \ 3217$	$A_{15} = A_1 = 0,0449 \ 2195 \ 0$
$x_{14} = -x_2 = 0,9108 \ 8001$	$A_{14} = A_2 = 0,0791 \ 9826 \ 3$
$x_{13} = -x_3 = 0,8156 \ 9624$	$A_{13} = A_3 = 0,1105 \ 9290$
$x_{12} = -x_4 = 0,6910 \ 2899$	$A_{12} = A_4 = 0,1379 \ 8776$
$x_{11} = -x_5 = 0,5413 \ 8540$	$A_{11} = A_5 = 0,1603 \ 9465$

$$\begin{array}{ll} x_{10} = -x_6 = 0,3721 \ 7443 & A_{10} = A_6 = 0,1770 \ 0426 \\ x_9 = -x_7 = 0,1895 \ 1198 & A_9 = A_7 = 0,1872 \ 1635 \\ x_8 = 0 & A_8 = 0,1906 \ 6186 \end{array}$$

§ 3. Замечание о вычислении интегралов со знакопеременной весовой функцией

Построение квадратурных формул с заданными узлами тесно связано с задачей о приведении знакопеременной весовой функции к весовой функции постоянного знака.

Возьмем интеграл вида

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \quad (9.3.1)$$

и будем считать, что $p(x)$ изменяет знак на отрезке интегрирования. Предположим, что внутри $[a, b]$ $p(x)$ имеет конечное число точек перемены знака*): $a_1, a_2, \dots, a_m$.

Построим многочлен $P(x)$ степени $< m$, интерполирующий f по ее значениям в точках a_l :

$$\left. \begin{aligned} P(a_l) &= f(a_l) \quad (l = 1, 2, \dots, m), \\ f(x) &= P(x) + r(x), \\ P(x) &= \sum_{l=1}^m \frac{\Omega(x)}{(x-a_l)\Omega'(a_l)} f(a_l). \end{aligned} \right\} \quad (9.3.2)$$

Остаток интерполирования $r(x)$ представим в форме [см. (3.2.9)]: $r(x) = (x-a_1) \dots (x-a_m) f(a_1, \dots, a_m, x) = \Omega(x) f(a_1, \dots, a_m, x)$, где $f(a_1, \dots, a_m, x)$ есть разностное отношение, составленное для узлов $a_1, \dots, a_m, x$.

Интеграл (9.3.1) может быть разложен на два слагаемых следующего вида

$$\begin{aligned} \int_a^b p f dx &= \int_a^b p P dx + \int_a^b p \Omega f(a_1, \dots, a_m, x) dx = \\ &= \sum_{l=1}^m \alpha_l f(a_l) + \int_a^b p(x) f(a_1, \dots, a_m, x) dx, \end{aligned} \quad (9.3.3)$$

$$\alpha_l = \int_a^b p(x) \frac{\Omega(x)}{(x-a_l)\Omega'(a_l)} dx. \quad (9.3.4)$$

*) На каждом из отрезков $[a, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_m, b]$ $p(x)$ сохраняет знак и имеет противоположные знаки на смежных отрезках.

Для нас особый интерес представляет последний из интегралов в (9.3.3). Функция $\rho(x) = p(x)\Omega(x)$, входящая в него, будет сохранять знак на $[a, b]$, так как точки a_l ($l = 1, \dots, m$) будут точками перемены знака для каждого из множителей p и Ω . Примем ρ за новую весовую функцию. К вычислению интеграла

$$\int_a^b \rho f(a_1, \dots, a_m, x) dx$$

может быть применен любой из методов вычисления интегралов со знакопостоянным весом. В частности для этого могут быть взяты квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности. Как и в предыдущих параграфах, обозначим через $\Pi_n(x)$ многочлен степени n из ортогональной системы, принадлежащей весу $\rho = p\Omega$. Рассмотрим квадратурную формулу с n узлами, верную для многочленов степени $2n - 1$:

$$\int_a^b \rho f(a_1, \dots, a_m, x) dx \approx \sum_{k=1}^n \beta_k f(a_1, \dots, a_m, x_k), \quad (9.3.5)$$

$$\begin{aligned} \Pi_n(x_k) &= 0 \quad (k = 1, \dots, n), \quad \beta_k = \int_a^b \rho^{(x)} \frac{\Pi_n(x)}{(x - x_k) \Pi'_n(x_k)} dx = \\ &= \int_a^b p(x) \frac{\Omega(x) \omega(x)}{(x - x_k) \omega'(x_k)} dx, \quad \omega(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n). \end{aligned}$$

Для первоначального интеграла (9.3.1) мы получим тогда следующее правило приближенного вычисления:

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{l=1}^m \alpha_l f(a_l) + \sum_{k=1}^n \beta_k f(a_1, \dots, a_m, x_k). \quad (9.3.6)$$

Легко выяснить, что алгебраическая степень точности полученного равенства равна $2n + m - 1$.

Пусть, в самом деле, f — произвольный многочлен степени $\leq 2n + m - 1$. Равенство (9.3.3) есть тождество и выполняется при всякой функции f , для которой имеют смысл все члены, входящие в это равенство. Для f разностное отношение $f(a_1, \dots, a_m, x)$ будет многочленом, степень которого на m единиц меньше степени f и не превзойдет $2n - 1$.

Так как (9.3.5) имеет степень точности $2n - 1$, то для $f(a_1, \dots, a_m, x)$ оно будет выполняться точно, а вместе с ним будет точно выполняться и (9.3.6). С другой стороны, если в качестве f взять многочлен степени $2n + m$:

$$f = \Omega(x) \omega^2(x),$$

то для него (9.3.6) не может быть верным. Действительно, для $f = \Omega \omega^2$ интерполирующий многочлен $P(x)$ обращается в тождественный нуль и из равенства (9.3.2) следует $f(a_1, \dots, a_m, x) = \omega^2(x)$. Все члены правой части равенства (9.3.6) для $f = \Omega \omega^2$ исчезают. Интеграл же, стоящий в левой части, будет положительным ввиду того, что произведение $p\Omega$ сохраняет знак на $[a, b]$:

$$\int_a^b pf \, dx = \int_a^b p\Omega \omega^2 \, dx > 0.$$

Обратим сейчас внимание на величины $f(a_1, \dots, a_m, x_k)$ и зависимость их от f . Если корни $x_k (k = 1, \dots, n)$ многочлена $\Pi_n(x)$, являющиеся узлами квадратурной формулы (9.3.6), отличны от $a_l (l = 1, \dots, m)$, то разностные отношения $f(a_1, \dots, a_m, x_k)$ будут такими:

$$f(a_1, \dots, a_m, x_k) = \frac{f(x_k) - P(x_k)}{\Omega(x_k)}. \quad (9.3.7)$$

Тогда $f(a_1, \dots, a_m, x)$ зависят только от следующих значений функции f : $f(x_k), f(a_l) (l = 1, \dots, m)$.

Если в формулу (9.3.6) подставить вместо $f(a_1, \dots, a_m, x_k)$ их значения (9.3.7), то будет ясно, что (9.3.6), после объединения членов с одинаковыми значениями $f(x_k)$ и $f(a_l)$ преобразуется к виду (9.1.4).

При сделанном предположении об x_k формула (9.3.6) будет, следовательно, частным случаем квадратурной формулы (9.1.4), узлы которой a_l , задаваемые заранее, располагаются в точках перемены знака весовой функции $p(x)$.

Отметим попутно, что если узел x_k совпадает с каким-либо из узлов a_l , то $\Omega(x_k) = 0$ и равенство (9.3.7) теряет смысл. Оно должно быть заменено таким:

$$f(a_1, \dots, a_m, x_k) = \frac{f'(x_k) - P'(x_k)}{\Omega'(x_k)},$$

которое получается из (9.3.7) при помощи правила Лопиталья. Разностное отношение $f(a_1, \dots, a_m, x_k)$ здесь будет зависеть не только от значений $f(a_l) (l = 1, \dots, m)$, но и от значения производной $f'(x_k)$. В этом случае квадратурная формула (9.3.6) будет давать прибли-

женное выражение интеграла $\int_a^b pf \, dx$ не только через значения функции f , но через значения производной f' в узлах x_k , совпадающих с точками перемены знака $p(x)$.

Пусть, например, $m = 1$ и $p(x)$ имеет только одну точку a_1 перемены знака внутри $[a, b]$. Интерполирующий многочлен $P(x)$

здесь будет величиной постоянной: $P(x) = f(a_1)$ и равенство (9.3.3) имеет форму

$$\int_a^b pf \, dx \approx f(a_1) \int_a^b p \, dx + \int_a^b p(x)(x - a_1)f(a_1, x), \quad (9.3.8)$$

$$f(a_1, x) = \frac{f(x) - f(a_1)}{x - a_1}.$$

Если все x_k отличны от a_1 , то расчетная формула (9.3.6) будет такой

$$\int_a^b pf \, dx \approx f(a_1) \int_a^b p \, dx + \sum_{k=1}^n \beta_k \frac{f(x_k) - f(a_1)}{x_k - a_1}.$$

Если же один из узлов x_k , например x_1 , совпадает с a_1 , то расчетная формула изменится и примет следующий вид:

$$\int_a^b pf \, dx \approx f(a_1) \int_a^b p \, dx + \beta_1 f'(a_1) + \sum_{k=2}^n \beta_k \frac{f(x_k) - f(a_1)}{x_k - a_1}.$$

Допустим, что нам нужно вычислить интеграл

$$\int_{-1}^1 xe^x \, dx = 2e^{-1} = 0,735 \, 76 \dots$$

За весовую функцию $p(x)$ примем множитель x : $p(x) = x$. Единственная точка перемены знака $p(x)$ есть $x = 0$. Равенство (9.3.8) для рассматриваемого интеграла будет:

$$\int_{-1}^1 xe^x \, dx = e^0 \int_{-1}^1 x \, dx + \int_{-1}^1 x^2 f(0, x) \, dx = \int_{-1}^1 x^2 f(0, x) \, dx,$$

$$f(0, x) = \frac{e^x - 1}{x}.$$

Для вычисления последнего интеграла применим квадратурную формулу наивысшей алгебраической степени точности с двумя узлами. Многочлен $\Pi_2(x)$ второй степени из ортогональной системы на $[-1, 1]$ по весу $\rho(x) = x^2$, как легко проверить, есть $\Pi_2(x) = c(3 - 5x^2)$. Корни его таковы:

$$x_1 = -q, \quad x_2 = q, \quad q = \frac{\sqrt{15}}{5} = 0,774 \, 596 \, 7 \dots$$

Расчетная формула для интеграла будет

$$\int_{-1}^1 x^2 f(0, x) \, dx \approx \beta_1 f(0, x_1) + \beta_2 f(0, x_2).$$

Коэффициенты β_1 и β_2 должны быть одинаковы ввиду того, что значения весовой функции $\rho = x^2$ распределены симметрично относительно точки $x = 0$, и могут быть найдены из условия

$$\beta_1 + \beta_2 = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3},$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{3},$$

$$\int_{-1}^1 x^2 f(0, x) dx \approx \frac{1}{3} \left[\frac{e^{x_1} - 1}{x_1} + \frac{e^{x_2} - 1}{x_2} \right] = \frac{e^q - e^{-q}}{3q} = \approx 0,735\ 36.$$

Этот результат меньше чем на $0,06\%$ отличается от точного значения.

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С РАВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 1. Нахождение узлов

Большое удобство квадратурных формул с равными коэффициентами

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx c_n \sum_{k=1}^n f(x_k) \quad (10.1.1)$$

при численных и, особенно, при графических расчетах, привлекло к ним внимание многих ученых и побудило их заняться разработкой теории этих формул.

Формула (10.1.1) содержит $n+1$ параметров $c_n, x_1, \dots, x_n$ и выбором их можно надеяться сделать равенство точным для всевозможных многочленов степени $\leq n$, или, что равносильно, для степеней x от нулевой до x^n включительно *).

Требование точного выполнения (10.1.1) для $f \equiv 1$ доставит следующее уравнение

$$\int_a^b p dx = c_n \cdot n,$$

откуда может быть найден коэффициент c_n :

$$c_n = \frac{1}{n} \int_a^b p dx. \quad (10.1.2)$$

Если, кроме того, потребовать, чтобы (10.1.1) точно выполнялось для $f = x, x^2, \dots, x^n$, то получим для нахождения узлов x_k

*) Квадратурные формулы с равными коэффициентами часто называют *формулами Чебышева* в связи с тем, что он впервые в общем случае рассмотрел задачу о построении таких формул.

отрезок интегрирования $[a, b]$, а с ним и узлы x_k , лежали в круге $|z| \leq \rho$. Тогда при $|z| > \rho$

$$\frac{1}{z-x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{z^{\nu+1}}$$

и

$$\int_a^b \frac{p(x)}{z-x} dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{z^{\nu+1}} \int_a^b p(x) x^{\nu} dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mu_{\nu}}{z^{\nu+1}}.$$

Здесь через μ_{ν} обозначен момент порядка ν весовой функции p . Аналогично

$$\frac{1}{z-x_k} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x_k^{\nu}}{z^{\nu+1}}$$

и

$$\frac{\omega'(z)}{\omega(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z-x_k} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{s_{\nu}}{z^{\nu+1}}, \quad s_{\nu} = x_1^{\nu} + \dots + x_n^{\nu},$$

$$R\left(\frac{1}{z-x}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mu_{\nu} - c_n s_{\nu}}{z^{\nu+1}}. \quad (10.1.7)$$

Мы считаем, что формула (10.1.1) является точной для всех степеней x от нулевой до x^n . Поэтому [см. (10.1.2) и (10.1.3)] $\mu_{\nu} - c_n s_{\nu} = 0$, $\nu = 0, 1, \dots, n$ и в последнем разложении первый отличный от нуля член будет содержать $\frac{1}{z}$ по крайней мере в степени $n+2$:

$$\int_a^b \frac{p(x)}{z-x} dx - c_n \frac{\omega'(z)}{\omega(z)} = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\mu_{\nu} - c_n s_{\nu}}{z^{\nu+1}}.$$

Интегрирование по z и простые преобразования приведут к равенству:

$$\omega(z) e^{\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{s_{\nu} - c_n^{-1} \mu_{\nu}}{\nu z^{\nu}}} = A e^{c_n^{-1} \int_a^b p(x) \ln(z-x) dx}, \quad (10.1.8)$$

в котором A есть некоторая постоянная величина.

Так как разложение $\exp \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{s_{\nu} - c_n^{-1} \mu_{\nu}}{\nu z^{\nu}}$ по степеням $\frac{1}{z}$ будет отличаться от 1 только степенями z , более низкими чем z^{-n} , ясно, что, если разложить правую часть равенства (10.1.8) по степеням $\frac{1}{z}$

при больших $|z|$, то целая часть такого разложения будет совпадать с $\omega(z)$:

$$\omega(z) = \text{цел. ч. } A e^{\frac{1}{n} \int_a^b p(x) \ln(z-x) dx} \quad (10.1.9)$$

Постоянный множитель A легко может быть найден, если принять во внимание, что старший член в $\omega(z)$ есть z^n . Мы не станем останавливаться на этом частном вопросе, так как множитель A не оказывает влияния на корни правой части (10.1.9).

Как говорилось выше, построить формулу (10.1.1), верную для многочленов степени $\leq n$, можно в том и только в том случае, когда корни многочлена $\omega(z)$ действительны, различны и принадлежат отрезку $[a, b]$ *).

Многочлен $\omega(z)$, очевидно, вполне определяется весовой функцией $p(x)$ и представляет интерес выяснить, при каких $p(x)$ и каких значениях n корни $\omega(x)$ будут обладать указанными свойствами. Решение этой задачи в общем случае, по-видимому, не известно. Ниже будут рассмотрены два частных случая весовой функции $p(x)$, когда может быть получен исчерпывающий ответ.

§ 2. Единственность квадратурной формулы наивысшей алгебраической степени точности с равными коэффициентами

В седьмой главе, при рассмотрении квадратурных формул наивысшей алгебраической степени точности, для весовой функции $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 \leq x \leq 1$ была построена квадратурная формула (7.3.2)

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\cos \frac{2k-1}{2n} \pi\right),$$

точная для многочленов степени $\leq 2n-1$. Число узлов n может быть любым. Весьма замечательно, что коэффициенты этой формулы одинаковы.

В связи с указанной формулой возникает следующий естественный вопрос: существуют ли на $[-1, 1]$ весовые функции $p(x)$, отличные от $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и такие, что соответствующие им квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности также будут иметь одинаковые коэффициенты?

Отрицательный ответ в этой задаче впервые был дан К. А. Поссе и после него Н. Я. Сониным.

Докажем сейчас более общую теорему, принадлежащую Я. Л. Герониму, из которой теорема К. А. Поссе сразу следует.

*) Интегрируемая функция f считается заданной только на $[a, b]$, а потому квадратурные формулы, узлы которых лежат вне $[a, b]$, не рассматриваются.

Пусть на отрезке $[-1, 1]$ задана положительная почти везде весовая функция $p(x)$. Возьмем соответствующую ей систему ортогональных многочленов $\omega_n(x) = x^n + \beta_n x^{n-1} + \gamma_n x^{n-2} + \dots$ ($n=0, 1, \dots$). Обозначим через $x_k^{(n)}$ ($k=1, \dots, n$) корни $\omega_n(x)$ и рассмотрим квадратурную формулу с равными коэффициентами, узлы которой совпадают с $x_k^{(n)}$

$$\int_{-1}^1 p(x) f(x) dx \approx c_n \sum_{k=1}^n f(x_k^{(n)}). \quad (10.2.1)$$

Теорема 1. Если для любого значения $n=1, 2, \dots$ существует постоянная c_n , такая, что формула (10.2.1) будет точной для $f=1$, $f=x$, $f=x^2$, то вес $p(x)$ совпадает с весом Чебышева $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать

$$\mu_0 = \int_{-1}^1 p(x) dx = 1.$$

Требование, чтобы квадратурная формула давала точный результат для $f=1$, определяет множитель c_n :

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = c_n \cdot n,$$

$$c_n = \frac{1}{n}.$$

Полагая в (10.2.1) последовательно $f=x$ и $f=x^2$, придем к двум следующим равенствам:

$$\mu_1 = \int_{-1}^1 p x dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^{(n)} = -\frac{1}{n} \beta_n, \quad n=1, 2, \dots,$$

$$\mu_2 = \int_{-1}^1 p x^2 dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [x_k^{(n)}]^2 = \frac{1}{n} \left\{ \left[\sum_{k=1}^n x_k^{(n)} \right]^2 - \right.$$

$$\left. - 2 \sum_{k < l} x_k^{(n)} x_l^{(n)} \right\} = \frac{1}{n} (\beta_n^2 - 2\gamma_n), \quad n=2, 3, \dots$$

Отсюда можно найти два первых коэффициента $\omega_n(x)$:

$$\beta_n = -n\mu_1, \quad \gamma_n = \frac{1}{2} [\beta_n^2 - n\mu_2] = \frac{n}{2} [n\mu_1^2 - \mu_2],$$

$$n=1, 2, \dots, \gamma_1 = 0.$$

В § 1 главы 2 было показано, что между ортогональными многочленами трех смежных номеров существует рекуррентное соотношение. Если его записать для нормированных многочленов $P_n(x)$, то оно имеет форму (2.1.10). Рассматриваемые нами многочлены $\omega_n(x)$ отличаются только численными

*) Точное выполнение равенства (10.2.1) для $f=x^2$ необходимо лишь при $n > 1$.

множителями от многочленов $P_n(x)$ тех же индексов. Если принять во внимание, что старший член в $\omega_1(x)$ имеет коэффициентом единицу, то рекуррентное соотношение для $\omega_n(x)$ можно записать в такой форме

$$\begin{aligned} x\omega_0(x) &= \omega_1(x) + \alpha_0, \\ x\omega_n(x) &= \omega_{n+1}(x) + \alpha_n\omega_n(x) + \lambda_n\omega_{n-1}(x), \\ n &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Зная β_n и γ_n можно найти коэффициенты α_n и λ_n . Действительно, сравнивая между собой коэффициенты при x^n в левой и правой частях последнего равенства, найдем

$$\begin{aligned} \beta_n &= \beta_{n+1} + \alpha_n, \\ \alpha_n &= \beta_n - \beta_{n+1} = -n\mu_1 + (n+1)\mu_1 = \mu_1. \end{aligned}$$

Все α_n ($n = 0, 1, \dots$) имеют одинаковое значение μ_1 . Его, для простоты, обозначим через α :

$$\alpha_n = \alpha \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Сравнение коэффициентов при x^{n-1} в тех же равенствах дает:

$$\gamma_n = \gamma_{n+1} + \alpha_n\beta_n + \lambda_n, \quad \lambda_n = \gamma_n - \gamma_{n+1} - \alpha_n\beta_n.$$

Простые вычисления дают следующие значения для λ_n , при записи которых была введена новая величина σ :

$$\lambda_1 = \mu_2 - \mu_1 = \frac{\sigma^2}{2}, \quad \lambda_n = \frac{1}{2} [\mu_2 - \mu_1] = \frac{\sigma^2}{4}, \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Таким образом, рекуррентные соотношения для многочленов ω_n будут:

$$\left. \begin{aligned} \omega_0(x) &= 1, \quad \omega_1(x) = x - \alpha, \\ x\omega_n(x) &= \omega_{n+1}(x) + \alpha\omega_n(x) + \frac{\sigma^2}{4}\omega_{n-1}(x), \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (10.2.2)$$

Вспомним теперь (см. гл. 2, § 3), что для многочленов первого рода Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos x) = 2^{n-1}x^n + \dots$ рекуррентные соотношения имеют форму:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \quad T_1(x) = x, \\ xT_n(x) &= \frac{1}{2}T_{n+1}(x) + \frac{1}{2}T_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Приведем старший коэффициент в $T_n(x)$ к единице и рассмотрим многочлены $\tilde{T}_n(x) = 2^{-n+1}T_n(x)$, $\tilde{T}_0 = T_0$. Рекуррентные соотношения для $\tilde{T}_n(x)$ будут:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_0(x) &= 1, \quad \tilde{T}_1(x) = x, \\ x\tilde{T}_n(x) &= \tilde{T}_{n+1}(x) + \frac{1}{4}\tilde{T}_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Наконец, если аргумент x заменить на $\frac{x-\alpha}{\sigma}$ и ввести многочлены $T_n^*(x) = \sigma^n \tilde{T}_n\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right)$, то для них получаются следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} T_0^*(x) &= 1, \quad T_1^*(x) = x - \alpha, \\ (x - \alpha)T_n^*(x) &= T_{n+1}^*(x) + \frac{\sigma^2}{4}T_{n-1}^*(x). \end{aligned}$$

Они совпадают с (10.2.2) и так как последние вполне определяют $\omega_n(x)$ ($n = 0, 1, \dots$), то

$$\omega_n(x) = T_n^*(x) = \sigma^n \tilde{T}_n\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right) = \frac{\sigma^n}{2^{n-1}} T_n\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right),$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Корни многочленов $T_n(x)$ равны $\cos \frac{2k-1}{2n} \pi$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Они лежат внутри отрезка $[-1, 1]$ и расположены там всюду плотно. Отсюда следует, что корни $\omega_n(x)$ лежат на отрезке $[\alpha - \sigma, \alpha + \sigma]$ и при этом всюду плотно.

С другой стороны, в гл. 2 было показано, что корни многочленов любой ортогональной системы с положительной весовой функцией всегда лежат внутри отрезка ортогональности. В теории ортогональных многочленов известно также, что они расположены на отрезке ортогональности всюду плотно*). Поэтому корни рассматриваемых многочленов $\omega_n(x)$ принадлежат $[-1, 1]$ и образуют там всюду плотное множество.

Должно, следовательно, быть $\alpha = 0$, $\sigma = 1$ и

$$\omega_0(x) = T_0(x) = 1, \quad \omega_n(x) = 2^{-n+1} T_n(x) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Многочлены $T_n(x)$ образуют на $[-1, +1]$ ортогональную систему по весу $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и для доказательства теоремы нам осталось только убедиться

в том, что ортогональные многочлены, в случае конечного отрезка ортогональности, определяют соответствующую им весовую функцию, с точностью до множителя и до значений на множестве точек меры нуль, однозначно.

В самом деле, пусть $p(x)$ и $p_1(x)$ — две весовые функции, относительно которых многочлены $\omega_n(x)$ ортогональны на $[-1, 1]$. Умножая $p(x)$ и $p_1(x)$, если это потребуется, на постоянные множители, можно считать, что

$\int_{-1}^1 p dx = \int_{-1}^1 p_1 dx = 1$. Ввиду ортогональности $\omega_0(x)$ и $\omega_n(x)$ ($n > 0$), должно быть

$$\int_{-1}^1 p \omega_n dx = 0, \quad \int_{-1}^1 p_1 \omega_n dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Отсюда сразу же следует, что для разности $p - p_1 = \varphi$ должны выполняться равенства

$$\int_{-1}^1 \varphi \omega_n dx = 0 \quad (n = 0, 1, \dots),$$

что равносильно

$$\int_{-1}^1 \varphi x^n dx = 0. \quad (n = 0, 1, \dots)$$

*) Известна более точная теорема: если отрезок ортогональности есть $[-1, 1]$ и весовая функция $p(x)$ суммируема, почти везде положительна, то предельная функция распределения нулей ортогональных многочленов совпадает с функцией распределения Чебышева

$$\pi^{-1} \int_{-1}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Но, как известно *), система степеней $x^n (n = 0, 1, \dots)$ полна в L и из последних равенств вытекает, что функция $\varphi = p - p_1$ эквивалентна нулю.

§ 3. Интегралы с постоянной весовой функцией

Остановим теперь свое внимание на наиболее часто встречающемся случае, когда весовая функция постоянна. Считая отрезок интегрирования приведенным к $[-1, 1]$, рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx c_n \sum_{k=1}^n f(x_k). \quad (10.3.1)$$

Коэффициенты c_n и узлы x_k выберем так, чтобы она давала точный результат для многочленов степени n . Коэффициент c_n определится из требования, чтобы (10.3.1) была точной для $f=1$ и будет иметь значение

$$c_n = \frac{2}{n}.$$

Так как

$$\int_{-1}^1 x^k dx = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1},$$

система уравнений вида (10.1.3) для определения узлов $x_1, \dots, x_n$ будет такой:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0, \\ s_2 &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \frac{n}{3}, \\ s_3 &= x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = 0, \\ s_4 &= x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4 = \frac{n}{5}, \\ . &. \\ s_n &= x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n = \frac{n}{2} \cdot \frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1}. \end{aligned} \right\} (10.3.2)$$

Она дает численные значения сумм s_k степеней узлов x_k ($k = 1, \dots, n$) от $k = 1$ до $k = n$.

*) См., например, И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, Гостехиздат, 1949, гл. III, § 1.

Коэффициенты многочлена $\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ должны быть найдены из системы (10.1.6), которая в рассматриваемом случае имеет форму:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 0, \\ \frac{n}{3} + 2A_2 &= 0, \\ A_3 &= 0, \\ \frac{n}{5} + \frac{n}{3} A_2 + 4A_4 &= 0, \\ A_5 &= 0, \\ \frac{n}{7} + \frac{n}{5} A_2 + \frac{n}{3} A_4 + 6A_6 &= 0, \\ A_7 &= 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (10.3.3)$$

Все A_k нечетных номеров равны нулю и в многочлен $\omega(x)$ будут входить либо только четные, либо только нечетные степени x :

$$\omega(x) = x^n + A_2 x^{n-2} + A_4 x^{n-4} + \dots$$

Корни $\omega(x)$, являющиеся узлами формулы (10.3.1), располагаются на отрезке $[-1, 1]$ симметрично относительно точки $x=0$. В частности, если n есть число нечетное, то один из корней обязательно равен нулю.

Попутно отметим следующий факт. Пусть n — число четное: $n = 2m$. Соответствующие значения x_k должны удовлетворять системе

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n &= \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

Ввиду же того, что $n+1 = 2m+1$ есть число нечетное, а x_k ($k=1, \dots, n$) расположены симметрично относительно $x=0$, будет выполняться также равенство

$$x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + \dots + x_n^{n+1} = 0,$$

откуда вытекает, что формула (10.3.1) будет точной не только для многочленов степени n , но также для многочленов степени $n+1$.

Построим теперь формулы (10.3.1) для нескольких первых значений n .

При $n=1$ многочлен $\omega(x) = x$ и $c_1 = 2$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 2f(0).$$

Когда $n=2$, коэффициент $c_2=1$ и система уравнений (10.3.3) для определения A_1, A_2 есть

$$\begin{aligned} A_1 &= 0, \\ \frac{2}{3} + 2A_2 &= 0, \quad A_2 = -\frac{1}{3}, \\ \omega(x) &= x^2 - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \int_{-1}^1 f(x) dx &\approx f\left(-3^{-\frac{1}{2}}\right) + f\left(3^{-\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}$$

Пусть $n=3$. $c_3 = \frac{2}{3}$. Уравнения для A_1, A_2, A_3 будут

$$\begin{aligned} A_1 &= 0, \\ 1 + 2A_2 &= 0, \\ A_3 &= 0, \\ \omega(x) &= x^3 - \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

Узлы формулы, следовательно, таковы:

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

и

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{2}{3} \left[f\left(-2^{-\frac{1}{2}}\right) + f(0) + f\left(2^{-\frac{1}{2}}\right) \right].$$

При $n=4$ имеем $c_4 = \frac{1}{2}$ и систему для A_k :

$$\begin{aligned} A_1 &= 0, \\ \frac{4}{3} + 2A_2 &= 0, \\ A_3 &= 0, \\ \frac{4}{5} + \frac{3}{5}A_2 + 4A_4 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} A_2 &= -\frac{2}{3}, \quad A_4 = \frac{1}{45}, \\ \omega(x) &= x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{45}. \end{aligned}$$

Корни $\omega(x)$ суть:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{5}}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{3\sqrt{5}}},$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{3\sqrt{5}}}, \quad x_4 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{5}}}.$$

Продолжая такие вычисления дальше, получим при

$$n=5 \quad \omega(x) = x^5 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{7}{12}x,$$

$$n=6 \quad \omega(x) = x^6 - x^4 + \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{105},$$

$$n=7 \quad \omega(x) = x^7 - \frac{7}{6}x^5 + \frac{119}{360}x^3 - \frac{149}{1480},$$

$$n=9 \quad \omega(x) = x^9 - \frac{3}{2}x^7 + \frac{27}{40}x^5 - \frac{57}{560}x^3 + \frac{53}{22400}x.$$

При $n=8$ среди корней многочлена $\omega(x)$ будут комплексные числа и формула Чебышева (10.3.1) с действительными узлами не может быть построена.

Ниже приведена таблица абсцисс формулы (10.3.1)

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{2}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]$$

для $n = 1(1)7, 9$.

$n=1$

$$x_1 = 0$$

$n=2$

$$x_2 = -x_1 = 0,577\,350$$

$n=3$

$$x_3 = -x_1 = 0,701\,107 \quad x_2 = 0$$

$n=4$

$$x_4 = -x_1 = 0,794\,654$$

$$x_3 = -x_2 = 0,187\,592$$

$n=5$

$$x_5 = -x_1 = 0,832\,498$$

$$x_4 = -x_2 = 0,374\,541$$

$$x_3 = 0$$

$n=6$

$$x_6 = -x_1 = 0,866\,247$$

$$x_5 = -x_2 = 0,422\,519$$

$$x_4 = -x_3 = 0,266\,635$$

$n=7$

$$x_7 = -x_1 = 0,883\,862$$

$$x_6 = -x_2 = 0,529\,657$$

$$x_5 = -x_3 = 0,323\,912$$

$$x_4 = 0$$

$n=9$

$$x_9 = -x_1 = 0,911\,589$$

$$x_8 = -x_2 = 0,601\,019$$

$$x_7 = -x_3 = 0,528\,762$$

$$x_6 = -x_4 = 0,167\,906$$

$$x_5 = 0$$

Вычисление узлов было продолжено для нескольких значений n , больших 9, но каждый раз оказывалось, что некоторые из корней $\omega(x)$ были комплексными и формула Чебышева (10.3.1) не могла быть построена. Однако в общем виде вопрос о возможности или невозможности построения формулы (10.3.1) для $n > 9$ оставался открытым до работ С. Н. Бернштейна, в которых он путем остроумных оценок, относящихся к более общим вопросам, показал, что построить формулу Чебышева (10.3.1) для $n > 9$, верную для многочленов степени n , невозможно. Ниже будут изложены с некоторыми упрощениями его исследования.

Докажем предварительно несколько лемм.

Лемма 1. Пусть формула

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \quad (10.3.4)$$

точна для всякого многочлена степени $2m-1$ при $m < n$. Обозначим через ξ_m наибольший корень многочлена Лежандра $P_m(x)$ степени m . Тогда, если считать узлы x_k перенумерованными в порядке возрастания, будет:

$$x_n > \xi_m.$$

Доказательство. Положим

$$f(x) = \frac{P_m^2(x)}{x - \xi_m}.$$

Многочлен $\frac{P_m(x)}{x - \xi_m}$ имеет степень $m-1$ и поэтому он на верное ортогонален на $[-1, 1]$ к $P_m(x)$, так что

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0.$$

С другой стороны, степень $f(x)$ равна $2m-1$ и для $f(x)$ равенство (10.3.4) должно быть точным. Стало быть

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) = 0.$$

Многочлен $f = \frac{P_m^2}{x - \xi_m}$ имеем m различных корней и не все слагаемые последней суммы равны нулю. Среди них должны быть как положительные, так и отрицательные. Но $f(x)$ принимает положительные значения только при $x > \xi_m$. Значит найдется такой узел x_k , что $x_k > \xi_m$. А тогда и для наибольшего узла должно быть $x_n > \xi_m$.

В последующих рассуждениях многое будет основано на сличении (10.3.4) с квадратурной гауссовой формулой наивысшей степени точности с m узлами

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &\approx \sum_{i=1}^m A_i f(\xi_i), \\ P_m(\xi_i) &= 0 \quad (i = 1, \dots, m), \quad A_i = \frac{2}{(1 - \xi_i^2) [P'_m(\xi_i)]^2}. \end{aligned} \right\} \quad (10.3.5)$$

Лемма 2. Если формула (10.3.4) верна для всяких многочленов степени $2m-1$, где $m < n$, то

$$A_m > \frac{2}{n}. \quad (10.3.6)$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = \left[\frac{P_m(x)}{(x - \xi_m) P'_m(\xi_m)} \right]^2.$$

В точке ξ_m f принимает значение 1, в прочих же узлах ξ_i , $i < m$, f обращается в нуль. Поэтому квадратурная сумма (10.3.5) для многочлена f сведется к одному лишь слагаемому

$$A_m f(\xi_m) = A_m.$$

Степень f равна $2m-2$ и обе формулы (10.3.4) и (10.3.5) должны для $\int_{-1}^1 f dx$ дать точное значение. Поэтому, наверное, будет

$$\frac{2}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = A_m.$$

Ввиду того, что $f(x) \geq 0$ при всяких x , отсюда, в частности, вытекает

$$\frac{2}{n} f(x_n) \leq A_m, \quad (10.3.7)$$

$$f(x) = [P'_m(\xi_m)]^{-1} (x - \xi_1)^2 \dots (x - \xi_{m-1})^2.$$

Как сразу же видно из написанного выражения для $f(x)$, при $x \geq \xi_m$ f есть возрастающая функция x и, ввиду $x_n > \xi_m$, будет $f(x_k) > f(\xi_m) = 1$, что, совместно с (10.3.7), доказывает утверждение леммы.

Чтобы оценить коэффициент

$$A_m = \frac{2}{(1 - \xi_m^2) [P'_m(\xi_m)]^2}$$

формулы (10.3.5), нам необходимо сейчас установить вспомогательные неравенства для ξ_m и $P'_m(\xi_m)$.

Лемма 3. При любом значении m для наибольшего корня ξ_m многочлена $P_m(x)$ выполняется неравенство:

$$1 - \xi_m < \frac{3}{m(m+1)}. \quad (10.3.8)$$

Доказательство. Будем исходить из дифференциального уравнения для $P_m(x)$

$$\frac{d}{dx} [(1 - x^2) P'_m(x)] + m(m+1) P_m(x) = 0.$$

Если проинтегрировать обе части равенства в границах от ξ_m до 1, то получим

$$(1 - \xi_m^2) P'_m(\xi_m) = m(m+1) \int_{\xi_m}^1 P_m(x) dx.$$

Разложим многочлен $P_m(x)$, стоящий под знаком интеграла, по степеням $x - \xi_m$

$$P_m(x) = \sum_{i=1}^m \frac{(x - \xi_m)^i}{i!} P_m^{(i)}(\xi_m)$$

и выполним интегрирование

$$(1 - \xi_m^2) P_m'(\xi_m) = m(m+1) \sum_{i=1}^m \frac{(1 - \xi_m)^{i+1}}{(i+1)!} P_m^{(i)}(\xi_m).$$

Между каждыми двумя соседними корнями ξ_j, ξ_{j+1} многочлена $P_m(x)$ лежит корень производной $P_m'(x)$. Таких корней $m-1$ штук и никаких других корней $P_m'(x)$ не имеет. Между ними будут лежать все $m-2$ корня второй производной и т. д. и, вообще говоря, все корни производной $P_m^{(i)}(x)$ любого порядка i находятся между ξ_1 и ξ_m и, стало быть, лежат слева от ξ_m . Поэтому $P_m^{(i)}(\xi_m) > 0$ и все слагаемые суммы, стоящей в правой части последнего равенства, положительны. Для получения оценки ξ_m с нужной нам степенью точности, достаточно в сумме сохранить лишь два первых члена и отбросить остальные. Если, кроме того, обе части сократить предварительно на $1 - \xi_m$, то получим такое неравенство

$$(1 + \xi_m) P_m'(\xi_m) > m(m+1) \left[\frac{1}{2} (1 - \xi_m) P_m'(\xi_m) + \frac{1}{6} (1 - \xi_m)^2 P_m''(\xi_m) \right].$$

Значение $P_m''(\xi_m)$ легко находится из уравнения

$$(1 - x^2) P_m'' - 2x P_m' + m(m+1) P_m = 0,$$

для чего достаточно положить в нем $x = \xi_m$:

$$P_m''(\xi_m) = \frac{2\xi_m}{1 - \xi_m^2} P_m'(\xi_m). \quad (10.3.9)$$

Подстановка этого значения в неравенство и сокращение на $P_m'(\xi_m)$ дает:

$$1 + \xi_m > m(m+1) \left[\frac{1}{2} (1 - \xi_m) + \frac{1}{3} \cdot \frac{\xi_m (1 - \xi_m)}{1 + \xi_m} \right].$$

Неравенство усилится, если во втором члене, стоящем в скобках, знаменатель $1 + \xi_m$ заменить большей величиной 2:

$$1 + \xi_m > m(m+1) \left[\frac{1}{2} (1 - \xi_m) + \frac{1}{6} \xi_m (1 - \xi_m) \right].$$

Отсюда, обозначая для сокращения $m(m+1) = \lambda$, получим:

$$\lambda \xi_m^2 + 2(3 + \lambda) \xi + 6 - 3\lambda > 0. \quad (10.3.10)$$

Образуем уравнение

$$\lambda z^2 + 2(3 + \lambda) z + 6 - 3\lambda = 0,$$

$$z = \frac{\pm \sqrt{4\lambda^2 + 9 - 3 - \lambda}}{\lambda}.$$

Мы должны избрать положительное значение z . Если ξ_m удовлетворяет неравенству (10.3.10), то ξ_m должно быть взято больше z

$$\xi_m > \frac{\sqrt{4\lambda^2 + 9} - 3 - \lambda}{\lambda}.$$

Отбросим слагаемое 9 под знаком корня:

$$\begin{aligned} \xi_m &> 1 - \frac{3}{\lambda} = 1 - \frac{3}{m(m+1)}, \\ 1 - \xi_m &< \frac{3}{m(m+1)}. \end{aligned}$$

Этим лемма 3 доказана.

Лемма 4. Для значения производной $P'_m(\xi_m)$ многочлена Лежандра $P_m(x)$ в наибольшем корне $x = \xi_m$ выполняется неравенство:

$$P'_m(\xi_m) > \frac{2}{3(1-\xi_m)} \left[1 - \frac{\Gamma(m+4)}{288 \Gamma(m-2)} (1-\xi_m)^3 \right]. \quad (10.3.11)$$

Доказательство. Установим сначала нужное соотношение между корнем ξ_m и $P'_m(\xi_m)$.

Воспользовавшись тейлоровой формулой с остатком в виде интеграла, разложим $P_m(x)$ по степеням $x - \xi_m$, ограничив себя только тремя членами формулы:

$$P_m(x) = P'_m(\xi_m)(x - \xi_m) + \frac{1}{2} P''_m(\xi_m)(x - \xi_m)^2 + \frac{1}{2} \int_{\xi_m}^x P'''_m(t)(x - t)^2 dt.$$

Положим здесь $x = 1$ и примем во внимание, что $P_m(1) = 1$:

$$1 = P'_m(\xi_m)(1 - \xi_m) + \frac{1}{2} P''_m(\xi_m)(1 - \xi_m)^2 + \frac{1}{2} \int_{\xi_m}^1 P'''_m(t)(1 - t)^2 dt. \quad (10.3.12)$$

Рассмотрим $P'''_m(t)$. При доказательстве леммы 3 выяснилось, что все корни P''_m лежат левее ξ_m . Поэтому на отрезке $[\xi_m, 1]$ $P'''_m(x)$ будет монотонной возрастающей функцией и своего наибольшего значения достигнет при $x = 1$. Величину $P'''_m(1)$ легко найти при помощи дифференциального уравнения

$$(1 - x^2) P''_m(x) - 2x P'_m(x) + m(m+1) P_m(x) = 0.$$

Положив здесь $x = 1$, найдем

$$P'_m(1) = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Дифференцируем уравнение:

$$(1 - x^2) P'''_m(x) - 4x P''_m(x) + (m+2)(m-1) P'_m(x) = 0$$

и вновь положим $x = 1$

$$P''_m(1) = \frac{(m+2)(m-1)}{4} P'_m(1) = \frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{8}.$$

Дифференцируем вторично

$$(1-x^2)P_m^{(4)}(x) - 6xP_m'''(x) + (m+3)(m-2)P_m''(x) = 0$$

и опять подставим $x=1$:

$$P_m'''(1) = \frac{(m+3)(m-2)}{6} P_m''(1) = \frac{(m+3)(m+2) \dots (m-2)}{48} = \frac{\Gamma(m+4)}{48\Gamma(m-2)}.$$

Заменив в (10.3.12) $P_m''(\xi_m)$ ее выражением (10.3.9) и $P_m'''(t)$, найденным наибольшим значением на $[\xi_m, 1]$, придем к следующему неравенству:

$$P_m'(\xi_m)(1-\xi_m) \left[1 + \frac{\xi_m}{1+\xi_m} \right] + \frac{\Gamma(m+4)}{48\Gamma(m-2)} \frac{(1-\xi_m)^3}{3!} > 1.$$

Отсюда, ввиду $\frac{\xi_m}{1+\xi_m} < \frac{1}{2}$, вытекает (10.3.11).

Теперь легко находится оценка для $A_m = \frac{2}{(1-\xi_m^2)[P_m'(\xi_m)]^2}$.

Заменим в знаменателе $P_m'(\xi_m)$ меньшей величиной, стоящей справа в (10.3.11)

$$A_m < \frac{9(1-\xi_m)}{2(1+\xi_m)} \left[1 - \frac{\Gamma(m+4)}{288\Gamma(m-2)} (1-\xi_m)^3 \right]^{-2}.$$

Достаточным будет более грубое неравенство, которое легко отсюда получается. A_m будем рассматривать для $m \geq 6$. С увеличением m величина ξ_m возрастает и, так как $\xi_6 = 0,93246\dots$, мы вправе считать $1+\xi_m > 1,93$.

Заменим, кроме того, всюду $1-\xi_m$ большим числом $\frac{3}{m(m+1)}$. Оценим теперь выражение, стоящее в фигурных скобках

$$(m+3)(m-2) = m(m+1) - 6 < m(m+1),$$

$$(m+2)(m-1) = m(m+1) - 2 < m(m+1),$$

$$\frac{\Gamma(m+4)}{\Gamma(m-2)} = (m+3)(m+2)(m+1)m(m-1)(m-2) < m^3(m+1)^3,$$

$$1 - \frac{\Gamma(m+4)}{288\Gamma(m-2)} (1-\xi_m)^3 > 1 - \frac{m^3(m+1)^3}{288} \frac{3^3}{m^3(m+1)^3} = \frac{29}{32},$$

$$A_m < \frac{27 \cdot 32^2}{2 \cdot 1,93 \cdot 29^2} \cdot \frac{1}{m(m+1)} \approx \frac{8,517}{m(m+1)}. \quad (10.3.13)$$

Теорема 2. При $n \geq 10$ не существует формулы вида (10.3.4), верной для многочленов степени n .

Доказательство. Будем рассматривать те значения n , при которых формула (10.3.4) существует. Предположим, что n есть число нечетное:

$$n = 2m - 1. \text{ Так как } m = \frac{1}{2}(n+1) \text{ и } m(m+1) = \frac{(n+1)(n+3)}{4}, \text{ для } A_m$$

должно выполняться неравенство $A_m = \frac{4 \cdot 8,517}{(n+1)(n+3)}$. Ввиду леммы 2, должно также быть

$$\frac{4 \cdot 8,517}{(n+1)(n+3)} > \frac{2}{n}$$

или

$$\begin{aligned} n^2 - 13,034n + 3 &< 0, \\ n &< 13. \end{aligned}$$

Таким образом, при $n \geq 13$ формула (10.3.4) не существует. Но при $n = 11$ она также не существует, так как тогда $m = 6$, $A_6 = 0,173 \dots$, $\frac{2}{11} = 0,1818$ и неравенство $\frac{2}{11} < A_6$ не выполняется.

Допустим теперь, что число узлов n четное. Тогда формула (10.3.4) должна быть точной для многочленов степени $n + 1$. Положим $n + 1 = 2m - 1$, $m = \frac{n+2}{2}$. Ввиду (10.3.13) и (10.3.6), будем иметь

$$\frac{4 \cdot 8,517}{(n+2)(n+4)} > \frac{2}{n},$$

откуда

$$n < 11.$$

Значит при $n > 10$ формула (10.3.4) не существует. При $n = 10$ она также не существует, так как неравенство

$$A_6 = 0,173 \dots > \frac{2}{10} = 0,2,$$

очевидно, не верно.

ЛИТЕРАТУРА

Чебышев П. Л., О квадратурах, Полн. собр. соч., т. III, Изд. АН СССР, 1948, 49—62.

Поссе К. А., Sur les quadratures, Nouv. Ann. de Math. т. 26, 1875, 49—62.

Сонин Н. Я., О приближенном вычислении определенных интегралов и входящих при этом вычислении целых функций, Варшавские университетские известия, 1887. 1—76.

Геронимус Я. Л., О формулах квадратур Гаусса и Чебышева, ДАН СССР, 51, 1946, 655—658.

Кузьмин Р. О., О распределении корней полиномов, связанных с квадратурами Чебышева, Изв. АН СССР, 1938, 427—444.

Геронимус Я. Л., Теория ортогональных многочленов, Гостехиздат, 1950.

Бернштейн С. Н., 1) О формулах квадратур Котеса и Чебышева, 2) Об одной системе неопределенных уравнений, Собр. соч. т. II, стр. 200—204 и 236—242.

Salzer H. E., Equally weighted quadrature formulas over semiinfinite and infinite intervals, J. Math. and Phys., 1955, 34, n° 1, 54—63.

УВЕЛИЧЕНИЕ ТОЧНОСТИ КВАДРАТУРЫ

§ 1. О двух направлениях в задаче увеличения точности

Пусть рассматривается некоторая вполне определенная квадратурная формула

$$\int_a^b P(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (11.1.1)$$

Весовая функция $p(x)$, коэффициент A_k и узлы x_k предполагаются фиксированными. f есть любая функция, для которой имеют смысл обе части приближенного равенства (11.1.1).

Нас сейчас будет интересовать остаток формулы (11.1.1)

$$R(f) = \int_a^b p f dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (11.1.2)$$

Увеличить точность приближенной квадратуры это — значит выделить из остатка $R(f)$ такую его часть, которую можно, при выполнении некоторых условий, считать „главной частью“ и добавить ее к квадратурной сумме $\sum_k A_k f(x_k)$.

Величина остатка $R(f)$ зависит как от вида квадратурной формулы, т. е. от $p(x)$, A_k и x_k , так и от свойств интегрируемой функции f . От них должны зависеть также и правила увеличения точности. Можно строить такие правила, рассчитанные на классы квадратурных формул, близких по своим свойствам, или же на классы функций, обладающих некоторыми общими структурными свойствами.

Задача увеличения точности ниже будет рассматриваться в двух следующих направлениях.

1. Большинство применяемых в практических вычислениях формул механических квадратур рассчитаны на интегрирование функций,

обладающих той или иной степенью гладкости. Так, например, можно ожидать, что формула парабол

$$\int_a^b f dx \approx \frac{h}{3} [f_0 + f_n + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{n-2}) + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{n-1})]$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

даст при вычислениях хороший по точности результат, если интегрируемая функция f будет непрерывной на всем отрезке $[a, b]$ и на каждом вдвоенном отрезке $[a, a+2h]$, $[a+2h, a+4h]$, ... может быть достаточно точно приближена многочленом второй или третьей степени.

Аналогично, при применении квадратурной формулы наивысшей алгебраической степени точности с n узлами

$$\int_a^b f dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

можно наверное рассчитывать получить результат, близкий к истинному значению, если функция f допускает хорошее приближение на всем отрезке интегрирования $[a, b]$ алгебраическим многочленом степени $2n-1$.

Применить формулы вида (11.1.1) к вычислению несобственных интегралов от неограниченных функций не всегда возможно, так как одно или несколько значений $f(x_k)$ ($k=1, 2, \dots, n$) в сумме $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$ могут оказаться бесконечными. Но даже если применение формулы будет возможным, то погрешность ее может иметь большие значения. С большой погрешностью можно встретиться также при применении таких квадратурных формул к вычислению интегралов от непрерывных функций, у которых одна из производных невысокого порядка будет неограниченной. Аналогичное может обнаружиться и при интегрировании аналитических функций, если их особые точки лежат вблизи отрезка $[a, b]$.

Заметное улучшение точности вычисления интеграла здесь может принести особый прием предварительного преобразования интегрируемой функции, который может быть назван методом ослабления особенности. Мы должны разбить интегрируемую функцию $f(x)$ на два слагаемых

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

так, чтобы $f_1(x)$ содержала в себе „все“ особенности функции $f(x)$ или „главную часть“ этих особенностей. При этом функция $f_1(x)$

должна быть такой, чтобы интеграл $\int_a^b p(x)f_1(x)dx$ легко вычислялся точно.

Функция же $f_2(x)$ не должна иметь особенностей, или, по меньшей мере, ее особенности должны быть настолько „слабее“ особенностей $f(x)$, чтобы интеграл $\int_a^b pf_2 dx$ мог быть с достаточной точностью вычислен по одной из формул приближенных квадратур.

Способы выделения и ослабления особенностей функций многообразны и некоторые из них будут рассмотрены в следующем параграфе.

2. Квадратурные формулы, обычно, позволяют найти интеграл с любой точностью, если взять достаточно большое число узлов n . Когда заранее указана точность вычисления, то определить, сколько следует взять узлов для того, чтобы достигнуть такой точности, можно, принципиально говоря, если воспользоваться известными в теории квадратур оценками остатка $R(f)$. Но следует иметь в виду, что такие оценки обычно бывают рассчитаны на широкие классы функций и не учитывают индивидуальные свойства интегрируемой функции f . Поэтому оценки будут давать, как правило, преувеличенное значение для числа узлов и найденное так значение n можно, по-видимому, принять только как ориентировочное.

При составлении плана вычислений обычно назначают число узлов n , приняв во внимание не только указанную оценку, но и многие другие соображения, в частности пользуются уже накопленным вычислительным опытом, аналогией с другими интегралами, или выполняют вычисления двумя различными способами и т. д. При этом для назначенного n можно часто лишь ожидать, что погрешность не будет превосходить предписанного значения, но неоспоримой убежденности в этом может не быть. Тогда возникает потребность в проверке полученного результата*) и в увеличении его точности, если она окажется меньшей, чем требуемая.

Интегрируемая функция f считается сейчас достаточно „гладкой“, так что большое значение погрешности $R(f)$ квадратуры может быть вызвано только недостаточной точностью взятой квадратурной формулы.

Для увеличения точности формулы мы должны определить какое дополнительное слагаемое следует добавить к правой части приближенного равенства (11.1.1) для того, чтобы новая квадратурная формула, полученная после этого, имела точность, большую чем (11.1.1).

*) Проверка точности результата часто является трудной задачей. Методы такой проверки в книге не рассматриваются.

Этот новый член формулы должен, очевидно, быть главной частью остатка $R(f)$. Но одним только этим условием он не вполне определяется, так как из $R(f)$ можно выделить много „главных частей“, отличающихся между собой „малыми“ слагаемыми. Среди дополнительных условий, определяющих разыскиваемую главную часть, должны обязательно находиться условия ее эффективной вычислимости и простоты.

Методы выделения главной части должны быть связаны со свойствами остатка и с некоторыми методами такого рода мы ознакомимся в следующих параграфах настоящей главы.

Допустим теперь, что каким-либо путем новый член формулы (11.1.1) был найден. Если добавление к его квадратурной сумме исправит прежний результат до требуемой точности, то на этом улучшение формулы заканчивается. Если же на первом шаге требуемая точность не будет достигнута, то следует найти остаток вновь построенной квадратурной формулы и из него в свою очередь выделить главную часть и т. д.

Так как, вообще говоря, нельзя заранее сказать, сколько необходимо выполнить таких шагов для получения желаемого результата, нужно для остатка (11.1.2) исходной формулы построить ряд из „главных частей“ последовательных порядков.

§ 2. Ослабление особенности интегрируемой функции

Как говорилось в § 1, улучшение точности квадратуры при помощи ослабления особенности основано на таком разложении интегрируемой функции f на две части $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, чтобы функция f_1 содержала все, или „почти все“, особенности f и интеграл от нее $\int_a^b p f_1 dx$ находился точно, а интеграл от второй части $\int_a^b p f_2 dx$ мог быть вычислен механическими квадратурами с достаточно малой погрешностью.

Правила разложения f зависят от характера особенностей этой функции и веса $p(x)$. Мы ограничимся тем, что рассмотрим несколько простых случаев такого разложения.

1. Пусть дан интеграл

$$\int_a^b (x - x_1)^\alpha \varphi(x) dx, \quad (11.2.1)$$

где x_1 есть некоторая точка, лежащая на отрезке $[a, b]$, или вблизи него. Для определенности изложения будем считать, что x_1 принадлежит $[a, b]$. Показатель степени α предположим большим — 1 и отличным от целого числа. Кроме того, допустим, что функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и в точке x_1 имеет производные до некоторого порядка m , причем $\varphi(x_1) \neq 0$.

При $\alpha < 0$ заданный интеграл будет несобственным, если же $\alpha > 0$, то интегрируемая функция не будет иметь производные в точке x_1 , начиная с некоторого порядка, и формулы механических квадратур, поэтому, могут давать большую погрешность вычисления.

Выделим из тейлорова разложения функции $\varphi(x)$ около точки x_1 некоторое число $k < m$ первых членов и разобьем интегрируемую функцию f на две части

$$f(x) = (x - x_1)^\alpha \varphi(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

где

$$f_1(x) = (x - x_1)^\alpha \left[\varphi(x_1) + \frac{\varphi'(x_1)}{1!} (x - x_1) + \dots + \frac{\varphi^{(k-1)}(x_1)}{(k-1)!} (x - x_1)^{k-1} \right]$$

и

$$f_2(x) = (x - x_1)^\alpha \left[\varphi(x) - \varphi(x_1) - \frac{\varphi'(x_1)}{1!} (x - x_1) - \dots - \frac{\varphi^{(k-1)}(x_1)}{(k-1)!} (x - x_1)^{k-1} \right].$$

В соответствии с этим заданный интеграл также будет разложен на две части

$$\int_a^b (x - x_1)^\alpha \varphi(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx.$$

Первый из интегралов вычисляется точно элементарным путем. Функция же $f_2(x)$, стоящая под знаком второго интеграла, имеет в точке x_1 порядок дифференцируемости на k единиц выше, нежели исходная функция $f = (x - x_1)^\alpha \varphi$. Поэтому интеграл $\int_a^b f_2 dx$ может быть вычислен с большей точностью, чем (11.2.1), если воспользоваться какой-либо формулой механических квадратур.

Рассмотрим в качестве примера интеграл

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4} = 0,785\,398\,163\dots$$

На верхней границе интегрирования $x=1$ функция $\sqrt{1-x^2}$ имеет алгебраическую особенность. Выделим из нее множитель $\sqrt{1-x}$, другой же множитель $\sqrt{1+x}$ разложим по степеням $x-1$ и возьмем два члена разложения:

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{2} \left(1 - \frac{1-x}{4} \right) + \left[\sqrt{1+x} - \sqrt{2} \left(1 - \frac{1-x}{4} \right) \right].$$

Рассматриваемый интеграл при этом разобьется на два новых интеграла. Первый из них вычисляется с помощью первообразной функции

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{2} \sqrt{1-x} \left(1 - \frac{1-x}{4}\right) dx = \sqrt{2} \frac{17}{30} = 0,801\,388 \dots$$

Второй интеграл

$$I_2 = \int_1^3 \sqrt{1-x} \left[\sqrt{1+x} - \sqrt{2} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}x \right) \right] dx$$

вычислим путем применения формулы парабол (6.3.5) с одной промежуточной ординатой

$$f_2(0) = 1 - \frac{3}{4} \sqrt{2} = -0,060\,660,$$

$$4f_2\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} - \frac{7}{2} = -0,035\,898,$$

$$f_2(1) = 0,$$

$$I_2 \approx \frac{1}{6} \left[f_2(0) + 4f_2\left(\frac{1}{2}\right) + f_2(1) \right] = -0,016\,035,$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = I_1 + I_2 \approx 0,785\,353.$$

Ошибка результата в пятом знаке. Применение формулы парабол с одной и тремя промежуточными ординатами непосредственно к заданному интегралу дает соответственно 0,637 и 0,744 с погрешностями в первом и во втором знаках.

II. Сходные преобразования могут быть выполнены в том случае, когда интегрируемая функция имеет алгебраические особенности в нескольких точках. Пусть интеграл имеет форму

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b (x-x_1)^{\alpha_1} (x-x_2)^{\alpha_2} \dots (x-x_n)^{\alpha_n} \varphi(x) dx. \quad (11.2.2)$$

Объединим все множители, кроме первого,

$$(x-x_2)^{\alpha_2} \dots (x-x_n)^{\alpha_n} \varphi(x)$$

и разложим полученное произведение в ряд Тейлора по степеням $(x-x_1)$. Взяв из этого ряда k_1 первых членов, мы, подобно предыдущему, разложим подинтегральную функцию на два слагаемых

$$f(x) = f_1(x) + [f(x) - f_1(x)],$$

где $f_1(x)$ есть сумма нескольких степенных функций, а $f(x) - f_1(x)$ имеет в точке x_1 производные более высокого порядка, чем $f(x)$. Аналогично составляются разложения, отвечающие другим особым точкам $x_2, \dots, x_n$:

$$f(x) = f_k(x) + [f(x) - f_k(x)] \quad k = 2, 3, \dots$$

Когда это сделано, мы можем заданный интеграл разбить на два:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] dx + \\ &+ \int_a^b [f(x) - f_1(x) - f_2(x) - \dots - f_n(x)] dx, \end{aligned}$$

причем первый интеграл легко вычисляется точно.

Функция, стоящая под знаком второго интеграла, может иметь производные более высоких порядков, чем f , и применение квадратурных формул к этому интегралу даст более точный результат, чем для (11.2.2).

III. Формула Тейлора может быть использована для ослабления особенности всякий раз, когда интеграл имеет вид

$$\int_a^b \psi(x) \varphi(x) dx,$$

где $\psi(x)$ имеет особенность в некоторой точке x_1 и такова, что интегралы $\int_a^b \psi(x)(x - x_1)^i dx$ легко находятся точно, а функция $\varphi(x)$ несколько раз дифференцируема в точке x_1 . Таким будет, например, интеграл

$$\int_a^b (x - x_1)^\alpha |g^p| x - x_1 | \varphi(x) dx,$$

где $\alpha > -1$ и p — целое число.

IV. Остановимся еще на интеграле

$$\int_a^b \psi[\varphi(x)] dx, \quad (11.2.3)$$

в котором функция $\psi(t)$ имеет особенность в точке $t = 0$, а $\varphi(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, обращающаяся в нуль в точке $x = x_1$ и такая, что $\varphi'(x_1) = A \neq 0$.

Тогда, для ослабления особенности интегрируемой функции, ее можно разложить на две части

$$\psi[\varphi(x)] = \psi[A(x - x_1)] + \{\psi[\varphi(x)] - \psi[A(x - x_1)]\}$$

и, если интеграл от первого слагаемого $\int_a^b \psi [A(x - x_1)] dx$ может быть вычислен точно, такое разбиение облегчит применение механических квадратур.

Пример. Возьмем интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2} \lg 2 \approx 1,089 \, 045.$$

Интегрируемая функция имеет логарифмическую особенность при $x=0$. Выделим из функции $\sin x$ первый член ее разложения в ряд по степеням x и разобьем интеграл на две следующие части

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \frac{\sin x}{x} \, dx = I_1 + I_2,$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg x \, dx = \frac{\pi}{2} \left(\lg \frac{\pi}{2} - 1 \right) \approx -0,861 \, 451.$$

Функция $\lg \frac{\sin x}{x}$ не имеет особых точек при $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Для вычисления I_2 была применена формула парабол с тремя ординатами:

$$I_2 \approx \frac{\pi}{12} \left(y(0) + 4y\left(\frac{\pi}{4}\right) + y\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = -0,228 \, 189.$$

Окончательно

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \sin x \, dx = I_1 + I_2 \approx 1,089 \, 640.$$

§ 3. Эйлеровы методы разложения остатка квадратуры

Сейчас рассмотрим задачу увеличения точности квадратуры при помощи выделения из ее остатка главной части. Способы выделения зависят от свойств остатка и могут быть весьма разнообразными.

Ниже мы остановимся только на двух методах разложения остатка, первый из которых тесно связан с широко известными формулами Эйлера — Маклорена.

Простейшей формулой эйлера вида следует, по-видимому, считать формулу, служащую для увеличения точности элементарной формулы прямоугольников. Она является другой формой записи разложения произвольной функции по многочленам Бернулли.

Пусть функция f задана на конечном отрезке $[a, b]$ и имеет там непрерывные производные до порядка ν . В первой главе было показано, что для такой функции имеет место равенство (1.4.2), дающее представление f через многочлены Бернулли $B_k(x)$ и периодическую функцию $B_\nu^*(x)$. Найдем оттуда $\int_a^b f(t) dt$ и запишем равенство в следующей форме:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt = & (b-a)f(x) - (b-a)B_1\left(\frac{x-a}{b-a}\right)[f(b)-f(a)] - \\ & - \frac{(b-a)^2}{2!}B_2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)[f'(b)-f'(a)] - \dots - \\ & \dots - \frac{(b-a)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}B_{\nu-1}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)[f^{(\nu-2)}(b)-f^{(\nu-2)}(a)] + \\ & + \frac{(b-a)^\nu}{\nu!} \int_a^b f^{(\nu)}(t) \left[B_\nu^*\left(\frac{x-t}{b-a}\right) - B_\nu^*\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right] dt. \quad (11.3.1) \end{aligned}$$

Первый член правой части $(b-a)f(x)$ дает приближенное значение интеграла $\int_a^b f(t) dt$, вычисленное по формуле прямоугольников с одной ординатой в точке x . Приближенное равенство $\int_a^b f dt \approx (b-a)f(x)$ будет давать, наверное, точный результат только в том случае, когда f сохраняет постоянное значение.

Если к $(b-a)f(x)$ присоединить второй член правой части, то полученное после этого равенство

$$\int_a^b f(t) dt \approx (b-a)f(x) - (b-a)B_1\left(\frac{x-a}{b-a}\right)[f(b)-f(a)]$$

будет точным для любых линейных функций. Если добавить третий член, то новое равенство будет давать точный результат для всякого многочлена второй степени и т. д. Присоединяя справа по одному новому члену из (11.3.1), мы каждый раз будем, как правило, увеличивать алгебраическую точность квадратурной формулы на единицу. Можно ожидать, что при этом, по крайней мере в некоторых случаях, будет уменьшаться погрешность приближенного равенства и добавление новых членов позволит увеличить точность квадратуры.

Последний, интегральный член справа в (11.3.1) является остаточным членом квадратурной формулы. Его исследование будет проведено ниже.

Равенство (11.3.1) имеет более широкое значение, чем то, на которое мы указали выше и позволяет, принципиально говоря, построить равенства, позволяющие увеличивать точность любых других квадратурных формул, служащих для вычисления интегралов с постоянной весовой функцией. Рассмотрим произвольную формулу

механических квадратур для $\int_a^b f dt$ и запишем ее в виде

$$\int_a^b f(t) dt \approx (b - a) \sum_{k=1}^n P_k f(x_k). \quad (11.3.2)$$

Допустим, что она точна для случая, когда f есть постоянная величина, так что $\sum_{k=1}^n P_k = 1$. Вполне очевидно, что (11.3.2) есть линейная комбинация n элементарных формул прямоугольников

$$\int_a^b f dt \approx (b - a) f(x_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

с весовыми коэффициентами P_k . Поэтому, линейно комбинируя с теми же коэффициентами P_k несколько равенств вида (11.3.1), составленных для $x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_n$, мы сможем получить новое равенство, позволяющее повышать точность приближенной формулы (11.3.2).

Оказывается, что аналогичные равенства могут быть построены также для квадратурных формул, служащих для вычисления интегралов $\int_a^b p f dx$ с любой суммируемой весовой функцией $p(x)$. Эти равенства формально весьма просто получаются, если воспользоваться теоремой о разложении по многочленам Бернулли и особого рода интегральными представлениями остатка квадратурной формулы. Но если встать на этот путь, то будет не вполне ясным в каких случаях можно ожидать, что полученные формулы действительно позволят увеличить точность квадратуры и когда их применение может, наоборот, ухудшить результат.

Мы предпочтем исходить из некоторых наглядных соображений, которые будут изложены ниже. Найденные правила увеличения точности могут применяться в широком классе случаев, независимо от таких соображений. Сами же эти соображения могут оказать пользу при выявлении условий, при которых формулам эйлера вида следует отдать предпочтение перед другими правилами увеличения точности.

Будем считать, как выше, отрезок $[a, b]$ конечным и предположим, что f имеет на $[a, b]$ непрерывные производные до порядка

$m + s$. Здесь m и s есть целые положительные числа, роль которых будет ясна из дальнейшего.

Возьмем квадратурную формулу

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f) \quad (11.3.3)$$

и рассмотрим ее остаток $R(f)$. Допустим, что степень точности формулы равна $m - 1$.

Функцию f можно представить следующей формулой Тейлора:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i + \int_a^x f^{(m)}(t) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} dt = P_{m-1}(x) + \\ + \int_a^b f^{(m)}(t) E(x-t) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} dt.$$

Так как $R(P_{m-1}) = 0$, $R(f)$ будет совпадать с остатком квадратуры интеграла в последнем равенстве:

$$R(f) = \int_a^b p(x) \int_a^b f^{(m)}(t) E(x-t) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} dt dx - \\ - \sum_{k=1}^n A_k \int_a^b f^{(m)}(t) E(x_k-t) \frac{(x_k-t)^{m-1}}{(m-1)!} dt.$$

Изменим порядок интегрирования в двухкратном интеграле, что при принятых нами предположениях о конечности $[a, b]$, непрерывности $f^{(m)}$ и суммируемости $p(x)$, наверное, возможно. Это даст нам возможность построить представление $R(f)$, которое явится исходным для анализа остатка и, в частности, для выделения из него «главной части»:

$$R(f) = \int_a^b f^{(m)}(t) K(t) dt. \quad (11.3.4)$$

Ядро остатка $K(t)$ имеет значение

$$K(t) = \int_a^b p(x) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} dx - \sum_{k=1}^n A_k E(x_k-t) \frac{(x_k-t)^{m-1}}{(m-1)!} \quad (11.3.5)$$

Когда $K(t)$ есть «мало изменяющаяся» функция, главным значением K , оказывающим наибольшее влияние на образование численного

значения $R(f)$, будет среднее значение ядра. Для выделения из $R(f)$ главной части достаточно положить

$$K(t) = C_0 + [K(t) - C_0], \quad \text{где} \quad C_0 = (b-a)^{-1} \int_a^b K(t) dt.$$

$$R(f) = C_0 \int_a^b f^{(m)}(t) dt + \int_a^b f^{(m)} [K - C_0] dt =$$

$$= C_0 [f^{(m-1)}(b) - f^{(m-1)}(a)] + \int_a^b f^{(m+1)}(t) L_1(t) dt,$$

$$L_1(t) = \int_a^t [C_0 - K(x)] dx.$$

Если ядро $L_1(t)$ вновь полученного интеграла также есть «мало изменяющаяся» функция, из $\int_a^b f^{(m+1)} L_1 dt$ в свою очередь может быть выделена «главная часть» и т. д.

После s -кратного выделения из остатка последовательных главных частей, мы приведем рассматриваемую квадратурную формулу (11.3.3) к следующей формуле эйлера вида, которая и решает поставленную задачу об увеличении точности (11.3.3) при предположениях о малой изменяемости функций $L_0 = K, L_1, L_2, \dots$:

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + C_0 [f^{(m-1)}(b) - f^{(m-1)}(a)] + \dots +$$

$$+ \dots C_{s-1} [f^{(m+s-2)}(b) - f^{(m+s-2)}(a)] + R_s(f), \quad (11.3.6)$$

$$C_i = (b-a)^{-1} \int_a^b L_i(t) dt, \quad L_{i+1}(t) = \int_a^t [C_i - L_i(x)] dx, \quad L_0(t) = K(t),$$

$$R_s(f) = \int_a^b f^{(m+s)}(t) L_s(t) dt. \quad (11.3.6')$$

Равенства (11.3.6') дают возможность последовательно находить C_i и L_i . Но легко можно указать представления C_i и L_i непосредственно через ядро $K(t)$. Для этого возвратимся к исходной квадратурной формуле (11.3.3) и заменим в ней остаток $R(f)$ его интегральным выражением

$$R(f) = \int_a^b f^{(m)}(t) K(t) dt.$$

Если в $R(f)$ вместо $f^{(m)}(t)$ под знак интеграла поставить ее разложение по многочленам Бернулли

$$\begin{aligned} f^{(m)}(t) = & (b-a)^{-1} \int_a^b f^{(m)}(x) dx + \\ & + \sum_{i=1}^{s-1} \frac{(b-a)^{i-1}}{i!} B_i \left(\frac{t-a}{b-a} \right) [f^{(m+i-1)}(b) - f^{(m+i-1)}(a)] - \\ & - \frac{(b-a)^{s-1}}{s!} \int_a^b f^{(m+s)}(x) \left[B_s^* \left(\frac{t-x}{b-a} \right) - B_s^* \left(\frac{t-a}{b-a} \right) \right] dx \end{aligned}$$

и затем выполнить почленное интегрирование, то получится новое равенство

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt = & \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + (b-a)^{-1} \int_a^b K(t) dt \times \\ & \times [f^{(m-1)}(b) - f^{(m-1)}(a)] + \sum_{i=1}^{s-1} \frac{(b-a)^{i-1}}{i!} \int_a^b K(t) B_i \left(\frac{t-a}{b-a} \right) dt \times \\ & \times [f^{(m+i-1)}(b) - f^{(m+i-1)}(a)] - \frac{(b-a)^{s-1}}{s!} \int_a^b K(t) \int_a^b f^{(m+s)}(x) \times \\ & \times \left[B_s^* \left(\frac{t-x}{b-a} \right) - B_s^* \left(\frac{t-a}{b-a} \right) \right] dt dx, \end{aligned}$$

которое должно совпадать с (11.3.6), какова бы ни была функция f , непрерывно дифференцируемая $m+s$ раз на $[a, b]$. Но последнее может быть в том и только в том случае, когда равны коэффициенты при одинаковых скобках $[f^{(m+i-1)}(b) - f^{(m+i-1)}(a)]$ и равны множители при $f^{(m+s)}$ в интегральных выражениях остаточных членов:

$$C_i = \frac{(b-a)^{i-1}}{i!} \int_a^b K(t) B_i \left(\frac{t-a}{b-a} \right) dt, \quad (11.3.7)$$

$$L_s(t) = - \frac{(b-a)^{s-1}}{s!} \int_a^b K(x) \left[B_s^* \left(\frac{x-t}{b-a} \right) - B_s^* \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right] dx. \quad (11.3.8)$$

C_i и L_i имеют весьма простой смысл. Если сравнить (11.3.7) с интегральным представлением остатка $R(f)$ (11.3.4), то будет ясно, что C_i есть остаток квадратуры некоторой функции, у которой производная порядка m равна $\frac{(b-a)^{i-1}}{i!} B_i \left(\frac{t-a}{b-a} \right)$.

Если вспомнить правило дифференцирования многочленов Бернулли (1.2.6), то будет ясно, что за такую функцию можно принять

$$\frac{(b-a)^{m+i-1}}{(m+i)!} B_{m+i} \left(\frac{t-a}{b-a} \right), \text{ так что}$$

$$C_i = \frac{(b-a)^{m+i-1}}{(m+i)!} R \left[B_{m+i} \left(\frac{t-a}{b-a} \right) \right] =$$

$$= \frac{(b-a)^{m+i-1}}{(m+i)!} \left\{ \int_a^b p(t) B_{m+i} \left(\frac{t-a}{b-a} \right) dt - \sum_{k=1}^n A_k B_{m+i} \left(\frac{x_k-a}{b-a} \right) \right\}. \quad (11.3.9)$$

Этот результат во многих случаях дает удобное средство для вычисления C_i .

Аналогично для $L_s^{(t)}$ можно получить

$$L_s(t) = -\frac{(b-a)^{m+s-1}}{(m+s)!} R_x \left[B_{m+s}^* \left(\frac{x-t}{b-a} \right) - B_{m+s}^* \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right]. \quad (11.3.10)$$

Знак x , поставленный у R_x , указывает на то, что вычисляется остаток квадратуры по переменной x .

Перейдем к построению частных формул эйлера вида и начнем с получения первой формулы Эйлера—Маклорена*), служащей для увеличения точности формулы трапеций.

Рассмотрим сначала простейшую формулу трапеций

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] + R(f). \quad (11.3.11)$$

Степень алгебраической точности ее равна единице и мы должны поэтому положить $m=2$. Чтобы построить для нее равенство (11.3.6), нужно, прежде всего, посчитать коэффициенты C_i . В данном случае наиболее просто, по-видимому, воспользоваться представлениями (11.3.9)

Так как многочлены $B_n(x)$ $n=2, 3, \dots$ принимают в точках $x=0$ и $x=1$ одинаковые значения, то

$$\int_a^b B_{2+i} \left(\frac{t-a}{b-a} \right) dt = \frac{b-a}{i+3} [B_{i+3}(1) - B_{i+3}(0)] = 0,$$

$$C_i = -\frac{(b-a)^{i+2}}{(i+2)!} \cdot \frac{1}{2} [B_{i+2}(0) + B_{i+2}(1)] =$$

$$= -\frac{(b-a)^{i+2}}{(i+2)!} \cdot \frac{1+(-1)^{i+2}}{2} B_{i+2}.$$

*) Относительно других формул Эйлера—Маклорена см. И. Ф. Стефенсен, Теория интерполирования, гл. XIII, ОНТИ, 1935.

Все числа Бернулли нечетных индексов, кроме B_1 , равны нулю, поэтому $C_1 = C_3 = C_5 = \dots = 0$. Для коэффициентов C_i четных индексов $i = 2k$ имеем

$$C_{2k} = -\frac{(b-a)^{2k+2}}{(2k+2)!} B_{2k+2}. \quad (11.3.12)$$

Несколько первых C_{2k} таковы:

$$C_0 = -\frac{(b-a)^2}{12}, \quad C_2 = \frac{(b-a)^4}{120}, \quad C_4 = -\frac{(b-a)^6}{30240},$$

$$C_6 = \frac{(b-a)^8}{1209600}, \quad C_8 = -\frac{(b-a)^{10}}{47900160}.$$

Займемся теперь остатком $R_s(f)$ (11.3.6) и найдем ядро $L_s(t)$ при помощи (11.3.10):

$$L_s(t) = -\frac{(b-a)^{s+1}}{(s+2)!} \left\{ \int_a^b \left[B_{s+2}^* \left(\frac{x-t}{b-a} \right) - B_{s+2}^* \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right] dx - \right. \\ \left. - \frac{b-a}{2} \left[\left(B_{s+2}^* \left(\frac{a-t}{b-a} \right) - B_{s+2}^*(0) \right) + \left(B_{s+2}^* \left(\frac{b-t}{b-a} \right) - B_{s+2}^*(1) \right) \right] \right\}.$$

Ввиду $(b-a)$ — периодичности функции $B_{s+2}^* \left(\frac{x-t}{b-a} \right)$,

$$\int_a^b B_{s+2}^* \left(\frac{x-t}{b-a} \right) dx = \int_a^b B_{s+2}^* \left(\frac{x-a}{b-a} \right) dx$$

и интегральный член в выражении $L_s(t)$ равен нулю. Кроме того, так как

$$B_{s+2}^* \left(\frac{a-t}{b-a} \right) = B_{s+2}^* \left(\frac{b-t}{b-a} \right) \quad \text{и} \quad B_{s+2}^*(0) = B_{s+2}^*(1) = B_{s+2},$$

то

$$L_s(t) = \frac{(b-a)^{s+2}}{(s+2)!} \left[B_{s+2}^* \left(\frac{b-t}{b-a} \right) - B_{s+2} \right] = \frac{(b-a)^{s+2}}{(s+2)!} y_{s+2}^* \left(\frac{b-t}{b-a} \right).$$

Образуем теперь ряд (11.3.6) для формулы трапеций (11.3.11). Приняв во внимание, что члены с коэффициентами C_i нечетных индексов должны отсутствовать, запишем этот ряд в форме:

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] - \\ - \sum_{k=1}^{v-1} \frac{(b-a)^{2k}}{(2k)!} B_{2k} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] + \rho_{2v}(f), \quad (11.3.13)$$

где остаток $\rho_{2\nu}(f)$ равен либо

$$\rho_{2\nu}(f) = \frac{(b-a)^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!} \int_a^b f^{(2\nu-1)}(t) y_{2\nu-1}^* \left(\frac{b-t}{b-a} \right) dt, \quad (11.3.14)$$

либо

$$\rho_{2\nu}(f) = \frac{(b-a)^{2\nu}}{(2\nu)!} \int_a^b f^{(2\nu)}(t) y_{2\nu}^* \left(\frac{b-t}{b-a} \right) dt, \quad (11.3.14)$$

в зависимости от того, будет ли f иметь на $[a, b]$ непрерывную производную порядка $2\nu-1$ или 2ν .

Ниже мы всюду будем считать, что для остатка $\rho_{2\nu}(f)$ верно представление (11.3.14) и преобразуем его к форме, более удобной для нашей цели. Заменим в нем переменную t , положив $t = a + (b-a)u$, и $0 \leq u \leq 1$. Воспользовавшись тем, что $y_{2\nu}^* \left(\frac{b-t}{b-a} \right) = y_{2\nu}^*(1-u) = B_{2\nu}(1-u) - B_{2\nu} = B_{2\nu}(u) - B_{2\nu} = y_{2\nu}(u)$, получим

$$\begin{aligned} \rho_{2\nu}(f) &= \frac{(b-a)^{2\nu+1}}{(2\nu)!} \int_0^1 f^{(2\nu)}(a + (b-a)u) [B_{2\nu}(u) - B_{2\nu}] du = \\ &= \frac{(b-a)^{2\nu+1}}{(2\nu)!} \int_0^1 f^{(2\nu)}(a + (b-a)u) y_{2\nu}(u) du. \end{aligned} \quad (11.3.15)$$

Чтобы получить правило увеличения точности общей формулы трапеций (6.3.4), разделим теперь отрезок $[a, b]$ на любое число n равных частей длины $h = \frac{b-a}{n}$ и к частичному отрезку $[a + ph, a + (p+1)h]$ применим равенство (11.3.12):

$$\begin{aligned} \int_{a+ph}^{a+(p+1)h} f(x) dx &= \frac{h}{2} \{ f[a + ph] + f[a + (p+1)h] \} - \\ &- \sum_{k=1}^{p-1} \frac{h^{2k}}{(2k)!} B_{2k} \{ f^{(2k-1)}[a + (p+1)h] - f^{(2k-1)}[a + ph] \} + \rho_{2\nu}^{(p)}(f), \\ \rho_{2\nu}^{(p)}(f) &= \frac{h^{2\nu+1}}{(2\nu)!} \int_0^1 f^{(2\nu)}(a + ph + hu) y_{2\nu}(u) du. \end{aligned}$$

При сложении таких равенств, отвечающих всем частичным отрезкам ($p = 0, 1, \dots, n-1$), слагаемые в суммах $\sum_{k=1}^{p-1}$, отвечающие точкам

деления, лежащим внутри $[a, b]$, взаимно уничтожаются и останутся только слагаемые, отвечающие точкам a и b .

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= T_n - \sum_{k=1}^{v-1} \frac{h^{2k}}{(2k)!} B_{2k} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] + \rho_{2v}(f) = \\ &= T_n - \frac{h^2}{12} [f'(b) - f'(a)] + \frac{h^4}{720} [f'''(b) - f'''(a)] - \\ &- \frac{h^6}{30 \cdot 240} [f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)] + \frac{h^8}{120 \cdot 960} [f^{(7)}(b) - f^{(7)}(a)] - \\ &- \frac{h^{10}}{47 \cdot 900 \cdot 160} [f^{(9)}(b) - f^{(9)}(a)] + \dots + \rho_{2v}(f), \quad (11.3.16) \end{aligned}$$

причем

$$T_n = h \left[\frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + \frac{1}{2} f(b) \right]$$

и

$$\begin{aligned} \rho_{2v}^{(f)} &= \frac{h^{2v+1}}{(2v)!} \int_0^1 y_{2v}(u) \sum_{p=0}^{n-1} f^{(2v)}(a+ph+hu) du = \\ &= \frac{h^{2v+1}}{(2v)!} \int_0^1 [B_{2v}(u) - B_{2v}] \sum_{p=0}^{n-1} f^{(2v)}(a+hp+hu) du. \end{aligned}$$

(11.3.16) и есть знаменитая формула Эйлера — Маклорена, устанавливающая связь между интегралом $\int_a^b f(x) dx$ и суммой значений функции f в равноотстоящих точках:

$$\begin{aligned} S_n &= f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + \\ &+ f(b) = h^{-1} T_n + \frac{1}{2} [f(a) + f(b)]. \end{aligned}$$

В задачах вычислений она может служить как для нахождения сумм значений функции S_n , так и для нахождения интеграла. Мы ее будем применять только для второй цели.

Если неограниченно увеличивать v , то сумма $-\sum_{k=1}^{v-1}$ в пределе даст ряд

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{2k}}{(2k)!} B_{2k} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)]. \quad (11.3.17)$$

Вспомним, что, начиная с некоторого номера, числа Бернулли B_{2k} быстро возрастают и при больших k имеют значения

$$B_{2k} \approx 2(-1)^{k-1} (2k)! (2\pi)^{-2k}.$$

Ряд (11.3.17) будет сходиться для весьма узкого класса функций, составляющих лишь малую часть функций, встречающихся в приложениях. Несмотря на этот недостаток, формулу Эйлера—Маклорена все же применяют в вычислениях, так как часто оказывается, что ее остаток $\rho_{2\nu}(f)$ для нескольких первых значений ν имеет малую величину и добавление нескольких первых членов суммы к T_n нередко значительно повышает точность формулы трапеций.

Об остатке $\rho_{2\nu}(f)$ докажем три следующих простых теоремы.

Теорема 1. Если $f^{(2\nu)}(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что для $\rho_{2\nu}(f)$ выполняется равенство:

$$\rho_{2\nu}(f) = -\frac{h^{2\nu+1} n!}{(2\nu)!} B_{2\nu} f^{(2\nu)}(\xi) \quad (11.3.18)$$

Доказательство. При изучении многочленов Бернулли в гл. 1 § 2, было установлено, что функция $Y_{2\nu}(u)$ на $0 < u < 1$ сохраняет знак: $(-1)^\nu Y_{2\nu}(u) > 0$, $0 < u < 1$. Рассмотрим интеграл

$$I_\nu = \int_0^1 (-1)^\nu y_{2\nu}(u) \sum_{p=0}^{n-1} f^{(2\nu)}(a + hp + hu) du.$$

Наибольшее и наименьшее значение $f^{(2\nu)}$ на $[a, b]$ обозначим соответственно M и m . Для I_ν очевидно верны оценки

$$(-1)^\nu nm \int_0^1 y_{2\nu}(u) du \leq I_\nu \leq (-1)^\nu nM \int_0^1 y_{2\nu}(u) du$$

и так как

$$\begin{aligned} \int_0^1 y_{2\nu}(u) du &= \int_0^1 [B_{2\nu}(u) - B_{2\nu}] du = \\ &= \frac{1}{2\nu+1} [B_{2\nu+1}(1) - B_{2\nu+1}(0)] - B_{2\nu} = B_{2\nu}, \end{aligned}$$

то

$$I_\nu = (-1)^{\nu+1} n P B_{2\nu},$$

где $m \leq P \leq M$. По непрерывности $f^{(2\nu)}$, наверное существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что $f^{(2\nu)}(\xi) = P$ и

$$I_\nu = (-1)^{\nu+1} n B_{2\nu} f^{(2\nu)}(\xi).$$

Отсюда следует (11.3.18), ввиду $\rho_{2\nu}(f) = (-1)^\nu \frac{h^{2\nu+1}}{(2\nu)!} I_\nu$.

Теорема 2. Если $f^{(2\nu)}$ непрерывна и сохраняет знак на $[a, b]$, то для $\rho_{2\nu}(f)$ верно равенство

$$\rho_{2\nu}(f) = -\theta \left(2 - 2^{-2\nu+1}\right) \frac{h^{2\nu} B_{2\nu}}{(2\nu)!} [f^{(2\nu-1)}(b) - f^{(2\nu-1)}(a)] \quad (11.3.19)$$

$$0 < \theta < 1.$$

Доказательство. Действительно в § 2 гл. 1 показывалось, что $(-1)^k y_{2k}(x)$ сохраняет знак на $[0, 1]$, возрастает при $0 \leq x < \frac{1}{2}$ и убывает при $\frac{1}{2} < x \leq 1$, наибольшего же значения достигает при $x = \frac{1}{2}$ и оно равно

$$(-1)^k y_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = -(-1)^k (2 - 2^{-2k+1}) B_{2k}.$$

Поэтому $\rho_{2\nu}(f)$ (11.3.17) имеет тот же знак, что и

$$y_{2\nu}\left(\frac{1}{2}\right) \frac{h^{2\nu+1}}{(2\nu)!} \int_0^1 \sum_{p=0}^{n-1} f^{(2\nu)}(a + hp + hu) du$$

и по абсолютному значению меньше этой величины, так что

$$\rho_{2\nu}(f) = \theta y_{2\nu}\left(\frac{1}{2}\right) \frac{h^{2\nu+1}}{(2\nu)!} \int_0^1 \sum_{p=0}^{n-1} f^{(2\nu)}(a + hp + hu) du, \quad 0 < \theta < 1.$$

Но

$$y_{2\nu}\left(\frac{1}{2}\right) = -(2 - 2^{-2k+1}) B_{2k}$$

и

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{p=0}^{n-1} f^{(2\nu)}(a + hp + hu) du &= \\ &= h^{-1} \sum_{p=0}^{n-1} \{ f^{(2\nu-1)}[a + h(p+1)] - f^{(2\nu-1)}[a + hp] \} = \\ &= h^{-1} [f^{(2\nu-1)}(b) - f^{(2\nu-1)}(a)], \end{aligned}$$

что доказывает равенство (11.3.19).

Из него в частности видно, что $\rho_{2\nu}(f)$, в условиях второй теоремы, имеет знак такой же, что и первый отброшенный член в ряде Эйлера — Маклорена и по абсолютной величине меньше удвоенного абсолютного значения этого члена.

Оказывается, что при некоторых предположениях о функции f для остатка $\rho_{2\nu}(f)$ формулы Эйлера—Маклорена верна теорема, аналогичная теореме об остатке знакопеременного ряда.

Теорема 3. Если f имеет на $[a, b]$ непрерывную производную порядка $2\nu+2$ и при всяких $x \in [a, b]$ либо

$$f^{(2\nu)}(x) \geq 0 \quad \text{и} \quad f^{(2\nu+2)}(x) \leq 0$$

либо

$$f^{(2\nu)}(x) \leq 0 \quad \text{и} \quad f^{(2\nu+2)}(x) \geq 0,$$

то $\rho_{2\nu}(f)$ имеет тот же знак, что и

$$-\frac{h^{2\nu}B_{2\nu}}{(2\nu)!} [f^{(2\nu-1)}(b) - f^{(2\nu-1)}(a)]$$

и по абсолютной величине не больше этого члена.

Доказательство. Остатки $\rho_{2\nu}(f)$ и $\rho_{2\nu+2}(f)$ связаны друг с другом очевидным равенством

$$\rho_{2\nu}(f) = -\frac{h^{2\nu}B_{2\nu}}{(2\nu)!} [f^{(2\nu-1)}(b) - f^{(2\nu-1)}(a)] + \rho_{2\nu+2}(f),$$

которое можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{h^{2\nu+1}}{(2\nu)!} \int_0^1 y_{2\nu}(u) \sum_{p=0}^{n-1} f^{(2\nu)}(a+hp+hu) du + \\ + \frac{h^{2\nu+3}}{(2\nu+2)!} \int_0^1 [-y_{2\nu+2}(u)] \sum_{p=0}^{n-1} f^{(2\nu+2)}(a+hp+hu) du = \\ = -\frac{h^{2\nu}B_{2\nu}}{(2\nu)!} [f^{(2\nu)}(b) - f^{(2\nu)}(a)]. \end{aligned}$$

По условию теоремы $f^{(2\nu)}$ и $f^{(2\nu+2)}$ имеют одинаковые знаки. В § 2 гл. 1 выяснялось, что на отрезке $[0, 1]$ $Y_{2\nu}(u)$ и $-Y_{2\nu+2}(u)$ также имеют одинаковые знаки. Поэтому оба члена левой части последнего равенства имеют один и тот же знак. Знаки их должны совпадать со знаком правой части и абсолютное значение каждого из них не может быть больше абсолютной величины правой части.

Пусть нужно вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \lg 2.$$

Здесь $a=0$, $b=1$. Разделим отрезок $[0,1]$ на 10 равных частей и, в соответствии с этим, положим $n=10$, $h=0,1$. В формуле

Эйлера — Маклорена сохраним, кроме T_n , еще два члена, что отвечает $\nu = 3$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx T_n - \frac{h^2}{12} [f'(1) - f'(0)] + \frac{h^4}{720} [f'''(1) - f'''(0)],$$

$$T_n = 0,1 \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,2} + \dots + \frac{1}{1,9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right] = 0,693\,771\,403,$$

$$- \frac{h^2}{12} [f'(1) - f'(0)] = - \frac{1}{1200} \left[1 - \frac{1}{4} \right] = -0,000625,$$

$$\frac{h^4}{720} [f'''(1) - f'''(0)] = \frac{10^{-4} \cdot 6}{720} \left[1 - \frac{1}{24} \right] = 0,000\,000\,781 \dots$$

Правая часть приближенного равенства имеет значение

$$0,693\,771\,403 - 0,000\,625 + 0,000\,000\,781 = 0,693\,147\,184.$$

Оценим погрешность. Для этого заметим, что производные шестого порядка $f^{(6)} = \frac{6!}{(1+x)^7}$ и восьмого порядка $f^{(8)} = \frac{8!}{(1+x)^9}$ обе положительны на отрезке $[0,1]$ и для оценки остатка $\rho_6(f)$ можно воспользоваться теоремой 3. Образует первый отброшенный член формулы:

$$- \frac{h^6}{30\,240} [f^{(6)}(1) - f^{(6)}(0)] = - \frac{120 \cdot 10^{-6}}{30\,240} \left[1 - \frac{1}{64} \right] \approx -0,000\,000\,004.$$

Поэтому с точностью до $0,5 \cdot 10^{-8}$ можно положить

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,693\,147\,18.$$

Построим теперь формулу эйлера вида для увеличения точности правила парабол (6.3.10). Для этой цели возьмем простейшую формулу парабол

$$\int_a^{a+2h} f(x) dx = \frac{h}{3} (f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)) + R(f) \quad (11.3.20)$$

и для нее построим равенство (11.3.6).

Алгебраическая степень точности (11.3.20) равна 3 и нужно считать $m = 4$.

Для нахождения коэффициентов C_i вновь воспользуемся их выражением (11.3.9)

$$C_i = \frac{(2h)^{i+3}}{(i+4)!} \left\{ \int_a^{a+2h} B_{i+4} \left(\frac{t-a}{2h} \right) dt - \frac{h}{3} \left[B_{i+4}(0) + 4B_{i+4} \left(\frac{1}{2} \right) + B_{i+4}(1) \right] \right\} = \frac{(2h)^{i+4}}{3(i+4)!} (1 - 2^{-i-2}) B_{i+4}.$$

Ввиду $B_{2k+1} = 0$ ($k = 1, 2, \dots$), отличными от нуля будут только C_i с четными индексами i .

Для составления остатка $R_s(f)$, найдем $L_s(t)$:

$$L_s(t) = -\frac{(2h)^{s+3}}{(s+4)!} \left\{ \int_a^{a+2h} \left[B_{s+4}^* \left(\frac{x-t}{2h} \right) - B_{s+4} \left(\frac{x-a}{2h} \right) \right] dx - \right. \\ \left. - \frac{h}{3} \left[B_{s+4}^* \left(\frac{a-t}{2h} \right) - B_{s+4}(0) + 4 \left(B_{s+4}^* \left(\frac{a+h-t}{2h} \right) - B_{s+4} \left(\frac{1}{2} \right) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + B_{s+4} \left(1 + \frac{a-t}{2h} \right) - B_{s+4}(1) \right] \right\}.$$

Интеграл, входящий в построенное выражение для L_s , равен нулю. Если вместо функции B_{s+4}^* ввести функцию y_{s+4}^* , то для $L_s(t)$ получится:

$$L_s(t) = \frac{(2h)^{s+4}}{3(s+4)!} \left\{ y_{s+4} \left(1 + \frac{a-t}{2h} \right) + 2 \left[y_{s+4} \left(\frac{1}{2} + \frac{a-t}{2h} \right) - y_{s+4} \left(\frac{1}{2} \right) \right] \right\}.$$

Внесем в остаток $R_s(f) = \int_a^{a+2h} f^{(s+4)}(t) L_s(t) dt$ найденное представление $L_s(t)$ и заменим переменную t , положив $t = a + 2hu$ ($0 \leq u \leq 1$).

$$R_s(t) = \frac{(2h)^{s+5}}{(s+4)!} \int_0^1 f^{(s+4)}(a+2hu) \left\{ y_{s+4}(1-u) + \right. \\ \left. + 2 \left[y_{s+4}^* \left(\frac{1}{2} - u \right) - y_{s+4} \left(\frac{1}{2} \right) \right] \right\} du.$$

Это дает возможность записать равенство (11.3.6) для формулы парабол (11.3.20) в виде

$$\int_a^{a+2h} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)] + \\ + \sum_{k=2}^{v-1} \frac{(2h)^{2k}}{3(2k)!} (1 - 2^{-2k+2}) B_{2k} \cdot [f^{(2k-1)}(a+2h) - f^{(2k-1)}(a)] + \rho_{2v}(f). \\ (11.3.20')$$

Остаток $\rho_{2v}(f)$ может быть представлен в виде либо

$$\rho_{2v}(f) = \frac{(2h)^{2v}}{3(2v-1)!} \int_0^1 f^{(2v-1)}(a+2hu) \left\{ y_{2v-1}(1-u) + \right. \\ \left. + 2 y_{2v-1}^* \left(\frac{1}{2} - u \right) \right\} du,$$

либо

$$\rho_{2\nu}(f) = \frac{(2h)^{2\nu+1}}{3(2\nu)!} \int_0^1 f^{(2\nu)}(a+2hu) \left\{ y_{2\nu}(u) + \right. \\ \left. + 2 \left[y_{2\nu}^* \left(\frac{1}{2} - u \right) - y_{2\nu} \left(\frac{1}{2} \right) \right] \right\} du,$$

смотря по тому, будет ли f иметь непрерывную производную порядка $2\nu-1$ или 2ν . Ниже мы будем считать, что $f^{(2\nu)}$ существует и непрерывна и будем пользоваться вторым выражением остатка.

Перейдем к общей формуле парабол (6.3.10). Разделим отрезок интегрирования $[a, b]$ на n равных частей, считая n четным числом. Выделим двоянный частичный отрезок $[a+2hp, a+2h(p+1)]$ и применим к нему равенство (11.3.20'). Если после этого суммировать полученные равенства по p от нуля до $\frac{n}{2}-1$, получим разыскиваемый результат:

$$\int_a^b f(x) dx = U_n + \sum_{k=2}^{\nu-1} \frac{(2h)^{2k}}{3(2k)!} (1-2^{-2k+2}) B_{2k} \cdot [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] + \\ + \rho_{2\nu}(f) = U_n - \frac{h^4}{180} [f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)] + \frac{h^6}{1512} [f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)] - \\ - \frac{h^8}{14400} [f^{(7)}(b) - f^{(7)}(a)] + \dots + \rho_{2\nu}(f), \quad (11.3.21)$$

где

$$U_n = \frac{h}{3} \left\{ f(a) + f(b) + 2[f(a+2h) + \dots + f(a+(n-2)h)] + \right. \\ \left. + 4[f(a+h) + \dots + f(a+(n-1)h)] \right\},$$

$$\rho_{2\nu}(f) = \frac{(2h)^{2\nu+1}}{3(2\nu)!} \int_0^1 \left\{ y_{2\nu}(u) + 2 \left[y_{2\nu}^* \left(\frac{1}{2} - u \right) - y_{2\nu} \left(\frac{1}{2} \right) \right] \right\} \times \\ \times \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}-1} f^{(2\nu)}(a+2ph+2hu) du. \quad (11.3.22)$$

Для исследования остатка $\rho_{2\nu}(f)$ необходимо предварительно рассмотреть ядро интеграла

$$F(u) = y_{2\nu}(u) + 2 \left[y_{2\nu}^* \left(\frac{1}{2} - u \right) - y_{2\nu} \left(\frac{1}{2} \right) \right].$$

Лемма: Функция $\varphi_{2\nu+1}(x) = y_{2\nu+1}(x) - 2y_{2\nu+1} \left(\frac{1}{2} - x \right)$ внутри отрезка $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ не имеет нулей ни при каких значениях $\nu \geq 1$ и имеет там знак, определяемый неравенством

$$(-1)^\nu \varphi_{2\nu+1}(x) > 0, \quad 0 < x < \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Будем считать $\nu \geq 1$. Так как $y_{2\nu+1}(0) = y_{2\nu+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, то, очевидно, $x = 0$ и $x = \frac{1}{2}$ будут нулями $\varphi_{2\nu+1}(x)$.

Допустим, вопреки утверждению леммы, что точка α ($0 < \alpha < \frac{1}{2}$) есть нуль функции $\varphi_{2\nu+1}$. Тогда внутри каждого из отрезков $[0, \alpha]$ и $[\alpha, \frac{1}{2}]$ $\varphi'_{2\nu+1}$ будет иметь хоть один нуль. Следовательно, вторая производная $\varphi''_{2\nu+1}$ имеет внутри $[0, \frac{1}{2}]$ по меньшей мере один нуль.

Но $\varphi''_{2\nu+1} = (2\nu+1)(2\nu) \left[y_{2\nu-1}(x) - 2y_{2\nu-1}\left(\frac{1}{2} - x\right) \right] = (2\nu+1)2\nu\varphi_{2\nu-1}(x)$.

Таким образом, из допущения, что $\varphi_{2\nu+1}$ имеет внутри $(0, \frac{1}{2})$ нуль следует, что $\varphi_{2\nu-1}$ также имеет нуль внутри $(0, \frac{1}{2})$. Продолжая эти рассуждения, можно придти к заключению, что φ_3 должна иметь внутри $(0, \frac{1}{2})$ корень. Но, как легко проверить, $\varphi_3 = 3x^2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ и не обращается в нуль внутри $(0, \frac{1}{2})$. Полученное противоречие доказывает лемму. Чтобы определить знак $\varphi_{2\nu+1}(x)$ на $(0, \frac{1}{2})$, достаточно вычислить $\varphi_{2\nu+1}$ в точке $x = \frac{1}{4}$:

$$\varphi_{2\nu+1}\left(\frac{1}{4}\right) = -y_{2\nu+1}\left(\frac{1}{4}\right).$$

В § 2 главы 1 было показано, что при

$$0 < x < \frac{1}{2} \quad (-1)^{\nu+1} y_{2\nu+1}(x) > 0.$$

Поэтому

$$(-1)^\nu \varphi_{2\nu+1}(x) > 0 \quad \left(0 < x < \frac{1}{2}\right).$$

Считая $0 \leq u \leq \frac{1}{2}$, возвратимся к $F(u) = y_{2\nu} + 2\left[y_{2\nu}\left(\frac{1}{2} - u\right) - y_{2\nu}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$ и рассмотрим $(-1)^{\nu-1} F(u)$.

$$\begin{aligned} (-1)^{\nu-1} F'(u) &= 2\nu(-1)^{\nu-1} \left[y_{2\nu-1}(u) - 2y_{2\nu-1}\left(\frac{1}{2} - u\right) \right] = \\ &= 2\nu(-1)^{\nu-1} \varphi_{2\nu-1}(u). \end{aligned}$$

В силу леммы, $(-1)^{\nu-1} F'(u) > 0$, стало быть $(-1)^{\nu-1} F(u)$ есть монотонная возрастающая функция при $0 \leq u \leq \frac{1}{2}$. Так как, кроме того, $F(0) = 0$, то $F(u) > 0$ при $0 < u \leq \frac{1}{2}$.

Чтобы судить о поведении $F(u)$ на отрезке $\frac{1}{2} \leq u \leq 1$, достаточно показать, что значения $F(u)$ распределены симметрично относительно $u = \frac{1}{2}$: $F(1-u) = F(u)$.

Действительно

$$F(1-u) = y_{2\nu}(1-u) + 2 \left[y_{2\nu}^* \left(u - \frac{1}{2} \right) - y_{2\nu} \left(\frac{1}{2} \right) \right],$$

$$y_{2\nu}(1-u) = y_{2\nu}(u).$$

$$y_{2\nu}^* \left(u - \frac{1}{2} \right) = y_{2\nu}^* \left(u + \frac{1}{2} \right) = y_{2\nu}^* \left(\frac{1}{2} - u \right).$$

Следовательно

$$F(1-u) = y_{2\nu}(u) + 2 \left[y_{2\nu}^* \left(\frac{1}{2} - u \right) - y_{2\nu} \left(\frac{1}{2} \right) \right] = F(u).$$

Отсюда вытекает, что на отрезке $\frac{1}{2} \leq u < 1$ $(-1)^{\nu-1} F(u)$ есть монотонная убывающая функция с положительными значениями. $(-1)^{\nu-1} F(u)$ достигает наибольшего значения на отрезке $[0, 1]$ в точке $u = \frac{1}{2}$ и это значение есть

$$\max_{[0, 1]} (-1)^{\nu-1} F(u) = -(-1)^{\nu-1} y_{2\nu} \left(\frac{1}{2} \right) = (-1)^{\nu-1} 2(1 - 2^{-2\nu}) B_{2\nu} \quad (11.3.23)$$

Указанные выше свойства ядра $F(u)$ позволяют доказать об остатке $\rho_{2\nu}(f)$ (11.3.22) три теоремы, аналогичные сходственным теоремам об остатке формулы Эйлера — Маклорена.

Доказательство этих теорем мы опускаем, так как для этого достаточно повторить доказательства теорем I, II, III с небольшими изменениями.

Теорема 4. Если функция f имеет непрерывную производную порядка 2ν на $[a, b]$, то внутри $[a, b]$ существует такая точка ξ , что для остатка $\rho_{2\nu}(f)$ формулы (11.3.21) верно равенство:

$$\rho_{2\nu}(f) = \frac{nh(2h)^{2\nu}}{3(2\nu)!} (1 - 2^{-2\nu+2}) B_{2\nu} f^{(2\nu)}(\xi). \quad (11.3.24)$$

Сравним это представление остатка (11.3.21) с выражением (11.3.18) для остатка формулы Эйлера — Маклорена (11.3.18). Если производная $f^{(2\nu)}(x)$ сохраняет знак на $[a, b]$, то остатки формул (11.3.21) и (11.3.18) имеют разные знаки. Отсюда вытекает следующее полезное для вычислений правило:

Когда производная $f^{(2\nu)}(x)$ сохраняет знак на $[a, b]$, то точное значение интеграла $\int_a^b f(x) dx$ заключается между приближенными

значениями, найденными по формулам (11.3.18) и (11.3.21), если отбросить в них остаточные члены $\rho_{2\nu}(f)$.

Теорема 5. Если производная $f^{(2\nu)}$ сохраняет знак на $[a, b]$, то остаток $\rho_{2\nu}(f)$ формулы (11.3.21) представим в виде:

$$\rho_{2\nu}(f) = 2\theta \frac{(2h)^{2\nu}}{3(2\nu)!} (1 - 2^{-2\nu}) B_{2\nu} [f^{(2\nu-1)}(b) - f^{(2\nu-1)}(a)] \quad (0 < \theta < 1). \quad (11.3.25)$$

Из (11.3.25) видно, что остаток $\rho_{2\nu}(f)$ формулы (11.3.21) имеет тот же знак, что и первый отбрасываемый член

$$\frac{(2h)^{2\nu}}{3(2\nu)!} (1 - 2^{-2\nu+2}) B_{2\nu} [f^{(2\nu-1)}(b) - f^{(2\nu-1)}(a)]$$

и по абсолютной величине меньше удвоенного арифметического значения этого члена.

Теорема 6. Если функция f имеет производную порядка $2\nu + 2$ и при всяких x на $[a, b]$ либо

$$f^{(2\nu)}(x) \geq 0 \quad \text{и} \quad f^{(2\nu+2)}(x) \geq 0,$$

либо

$$f^{(2\nu)}(x) \leq 0 \quad \text{и} \quad f^{(2\nu+2)}(x) \leq 0,$$

то остаток $\rho_{2\nu}(f)$ формулы (11.3.21) имеет тот же знак, что первый отбрасываемый член

$$\frac{(2h)^{2\nu}}{3(2\nu)!} (1 - 2^{-2\nu+2}) B_{2\nu} [f^{(2\nu-1)}(b) - f^{(2\nu-1)}(a)]$$

и не больше его по абсолютной величине.

Ниже приводятся ряды вида (11.3.6), служащие для увеличения степени точности некоторых частных квадратурных формул.

1. Для формулы Котеса с 4 ординатными (правило $3/8$ Ньютона)

$$\begin{aligned} \int_a^{a+3h} f(x) dx &\sim \frac{3}{8} h [f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + f(a+3h)] + \\ &+ \sum_{k=2} \frac{(3h)^{2k}}{8(2k)!} (1 - 3^{-2k+2}) B_{2k} [f^{(2k-1)}(a+3h) - f^{(2k-1)}(a)] = \\ &= \frac{3}{8} h [f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + f(a+3h)] - \\ &- \frac{h^4}{80} [f^{(3)}(a+3h) - f^{(3)}(a)] + \frac{h^6}{336} [f^{(5)}(a+3h) - f^{(5)}(a)] - \\ &- \frac{13h^8}{19200} [f^{(7)}(a+3h) - f^{(7)}(a)] + \dots \quad (11.3.26) \end{aligned}$$

2. Рассмотрим интеграл, взятый по отрезку $[-1, 1]$ с весом $p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ ($\alpha, \beta > -1$) и квадратурную формулу с n

узлами для него, имеющую наивысшую степень точности $2n-1$. Узлы ее расположены в нулях Якобиева многочлена степени n .

Формула (11.3.6) для него будет иметь вид:

$$\int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} f(x) dx \sim \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \\ + C_0 [f^{(2n-1)}(1) - f^{(2n-1)}(-1)] + C_1 [f^{(2n)}(1) - f^{(2n)}(-1)] + \dots$$

Коэффициенты C_0 и C_1 имеют значения

$$C_0 = \frac{2^{\alpha+\beta+2n} \cdot n!}{(2n)! (\alpha + \beta + 2n + 1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + \beta + n + 1) \Gamma(\alpha + n + 1) \Gamma(\beta + n + 1)}{\Gamma^2(\alpha + \beta + 2n + 1)} \\ C_1 = \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta + 2n} \left[\frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta + 2n + 2} + 2n \right] \frac{n! 2^{\alpha+\beta+2n}}{(2n+1)!} \times \\ \times \frac{\Gamma(\alpha + \beta + n + 1) \Gamma(\alpha + n + 1) \Gamma(\beta + n + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1) \Gamma(\alpha + \beta + 2n + 2)}.$$

Для ультрасферического случая $\beta = \alpha$ коэффициенты C_i нечетных индексов равны нулю и

$$C_0 = \frac{2^{2n} n! \Gamma(2\alpha + n + 1)}{(2n)! (2\alpha + 2n + 1)} \left[\frac{2^n \Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(2\alpha + 2n + 1)} \right]^2, \\ C_2 = \frac{2^{2n} n! \Gamma(2\alpha + n + 1)}{(2n+2)!} \left[\frac{2^n \Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(2\alpha + 2n + 1)} \right]^2 \times \\ \times \left[\frac{2n^2 + 2(2\alpha + 1)n + 2\alpha - 1}{(2\alpha + 2n - 1)(2\alpha + 2n + 1)(2\alpha + 2n + 3)} + \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)}{(2\alpha + 2n - 1)(2\alpha + 2n + 1)} - \frac{(n+1)(2n+1)}{3(2\alpha + 2n + 1)} \right].$$

3. В частности для квадратурной формулы Гаусса, узлы которой лежат в корнях многочлена Лежандра, формула Эйлерова вида будет:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \sim \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \frac{1}{(2n+1)!} \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \right]^2 \times \\ \times [f^{(2n-1)}(1) - f^{(2n-1)}(-1)] + \frac{1}{(2n+2)!} \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \right]^2 \times \\ \times \left[\frac{2n^2 + 2n - 1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} + \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{n+1}{3} \right] \times \\ \times [f^{(2n+1)}(1) - f^{(2n+1)}(-1)] + \dots$$

При применении эйлеровых формул к вычислениям необходимо находить значения производных от функции f на концах отрезка $[a, b]$, что во многих случаях может представлять затруднения. Можно построить другие формулы для увеличения точности квадратуры, в которых поправочные члены выражаются через разности или значения

функции вместо производных. Такие формулы могут быть весьма разнообразными, так как замена производных конечными разностями может быть сделана многими способами. Ниже рассмотрен лишь один пример замены такого вида, достаточный для того, чтобы ознакомиться с характером формул указанного типа.

Пусть мы хотим вычислить производные функции f в точке a . Для этого интерполируем f по ее значениям в нескольких точках. Вид интерполяционного многочлена определяется, прежде всего, выбором узлов. Будем считать, что для интерполирования можно пользоваться только значениями f в равноотстоящих точках $a + kh$ ($k = 0, 1, \dots$), принадлежащих отрезку $[a, b]$.

Воспользуемся ньютоновым представлением интерполяционного многочлена (3.2.6), приняв в нем следующий порядок узлов: $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, $\dots$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f(a, a+h) + \\ + (x-a)(x-a-h)f(a, a+h, a+2h) + \dots + \rho(x),$$

где $\rho(x)$ — остаток интерполирования. Для равноотстоящих узлов разностные отношения просто выражаются через разности:

$$f(a, a+h, \dots, a+kh) = h^k k! \Delta^k f_0, \quad f_0 = f(a).$$

Вводя для облегчения записи новую переменную $t = \frac{x-a}{h}$, $x = a + ht$, получим хорошо известную формулу Ньютона — Грегори, построенную для интерполирования вблизи начала таблицы значений функции

$$f(x) = f(a + ht) = f_0 + \frac{t}{1!} \Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \\ + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots + \rho(x).$$

Вычисляя от обеих частей равенства производные и полагая $x = a$, $t = 0$, найдем

$$hf'(a) = \Delta f_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 f_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 f_0 - \frac{1}{4} \Delta^4 f_0 + \frac{1}{5} \Delta^5 f_0 - \dots + \rho'(a)$$

$$h^2 f''(a) = \Delta^2 f_0 - \Delta^3 f_0 + \frac{11}{12} \Delta^4 f_0 - \frac{5}{6} \Delta^5 f_0 + \dots$$

$$h^3 f^{(3)}(a) = \Delta^3 f_0 - \frac{3}{2} \Delta^4 f_0 + \frac{7}{4} \Delta^5 f_0 - \dots$$

$$h^4 f^{(4)}(a) = \Delta^4 f_0 - 2\Delta^5 f_0 + \dots$$

$$h^5 f^{(5)}(a) = \Delta^5 f_0 - \dots$$

.....

Аналогично, для нахождения значений производных $f^{(k)}(b)$ ($k = 1, 2, \dots$) интерполируем f в окрестности точки $b = a + nh$, используя для этого то же представление интерполяционного много-

члена (3.2.6) и полагая в нем $x_0 = a + nh$, $x_1 = a + (n-1)h$, $x_2 = a + (n-2)h$, ...:

$$f(x) = f(a + nh) + (x - a - nh)f(a + nh, a + (n-1)h) + \\ + (x - a - nh)(x - a - (n-1)h) \times \\ \times f(a + nh, a + (n-1)h, a + (n-2)h) + \dots + \rho(x)$$

или

$$f(a + th) = f_n + \frac{t}{1!} \Delta f_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 f_{n-2} + \\ + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} \Delta^3 f_{n-3} + \dots + \rho(x).$$

Отсюда получим

$$hf'(b) = \Delta f_{n-1} + \frac{1}{2} \Delta^2 f_{n-2} + \frac{1}{3} \Delta^3 f_{n-3} + \frac{1}{4} \Delta^4 f_{n-4} + \\ + \frac{1}{5} \Delta^5 f_{n-5} + \dots + \rho'_1(b),$$

$$h^2 f''(b) = \Delta^2 f_{n-2} + \Delta^3 f_{n-3} + \frac{11}{12} \Delta^4 f_{n-4} + \frac{5}{6} \Delta^5 f_{n-5} + \dots$$

$$h^3 f^{(3)}(b) = \Delta^3 f_{n-3} + \frac{3}{2} \Delta^4 f_{n-4} + \frac{7}{4} \Delta^5 f_{n-5} + \dots$$

$$h^4 f^{(4)}(b) = \Delta^4 f_{n-4} + 2 \Delta^5 f_{n-5} + \dots$$

$$h^5 f^{(5)}(b) = \Delta^5 f_{n-5} + \dots$$

.....

Предположим теперь, что мы хотим преобразовать формулу Эйлера — Маклорена (11.3.16), заменив в ней значения производных на конечные разности. Подставив вместо $f^{(2k-1)}(a)$ и $f^{(2k-1)}(b)$ только что найденные выражения, после некоторых вычислений получим следующую формулу Грегори:

$$\int_a^{a+nh} f(x) dx = T_n - \frac{h}{12} (\Delta f_{n-1} - \Delta f_0) - \frac{h}{24} (\Delta^2 f_{n-2} + \Delta^2 f_0) - \\ - \frac{19h}{720} (\Delta^3 f_{n-3} - \Delta^3 f_0) - \frac{3h}{160} (\Delta^4 f_{n-4} + \Delta^4 f_0) - \frac{863h}{60480} (\Delta^5 f_{n-5} - \Delta^5 f_0) - \\ - \frac{275h}{24192} [\Delta^6 f_{n-6} + \Delta^6 f_0] - \dots - C_k h (\Delta^k f_{n-k} + (-1)^k \Delta^k f_0) + R_1(f). \\ (11.3.27)$$

Можно показать, что

$$C_k = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \int_0^1 x(x-1) \dots (x-k) dx$$

§ 4. Увеличение точности квадратуры при наличии короткого главного участка интегрирования в интегральном представлении остатка

Как выше, будем рассматривать механическую квадратуру с произвольной весовой функцией $p(x)$:

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f) \quad (11.4.1)$$

Если алгебраическая степень точности (11.4.1) равна $m-1$ и f имеет на $[a, b]$ непрерывную производную порядка m , остаток $R(f)$ представим во многих случаях в форме *) (11.3.4):

$$R(f) = \int_a^b f^{(m)}(x) K(x) dx, \quad (11.4.2)$$

где ядро $K(x)$ не зависит от f .

Предположим, что на $[a, b]$ существует участок $[\alpha, \beta]$, вне которого $K(x)$ имеет пренебрежимо малые значения или, по меньшей мере, быстро убывает при удалении от $[\alpha, \beta]$. В образовании численного значения интеграла (11.4.2) интегрирование по $[\alpha, \beta]$ будет тогда играть главную роль. Пусть, кроме того, $f^{(m)}$ „мало изменяется“ на $[\alpha, \beta]$, или, что, по существу дела, равносильно, $[\alpha, \beta]$ имеет „малую длину“. В этих предположениях, для выделения главной части из остатка $R(f)$, достаточно разложить $f^{(m)}$ на два слагаемых, положив $f^{(m)}(x) = f^{(m)}(\alpha_0) + [f^{(m)}(x) - f^{(m)}(\alpha_0)]$, где α_0 есть некоторая точка главного участка интегрирования $[\alpha, \beta]$:

$$R(f) = f^{(m)}(\alpha_0) \int_a^b K(t) dt + \int_a^b [f^{(m)}(x) - f^{(m)}(\alpha_0)] K(x) dx.$$

Остается еще произвол в выборе α_0 . Когда ядро $K(x)$ сохраняет знак, за α_0 естественно принять координату той точки оси x , около которой сосредоточены значения $K(x)$, наибольшие по абсолютной величине, и считать α_0 равным средней абсциссе по весу $K(x)$:

$$\alpha_0 = \left[\int_a^b K dx \right]^{-1} \cdot \int_a^b x K(x) dx.$$

Предположим, что f имеет непрерывные производные до порядка $m+2s$ и преобразуем последнее выражение для $R(f)$. Разложим

*) Такое представление остатка, возможно всякий раз, когда допустимо изменение порядка интегрирования в двухкратном интеграле, входящем в выражение $R(f)$, предшествующем (11.3.4).

$f^{(m)}(x) - f^{(m)}(\alpha_0)$ при помощи формулы Тейлора, взяв в ней два члена

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) - f^{(m)}(\alpha_0) &= f^{(m+1)}(\alpha_0)(x - \alpha_0) + \\ &+ \int_{\alpha_0}^x f^{(m+2)}(t)(x - t) dt = f^{(m+1)}(\alpha_0)(x - \alpha_0) + \\ &+ \int_a^b f^{(m+2)}(t)[E(x - t) - E(\alpha_0 - t)](x - t) dt. \end{aligned}$$

Подставим это выражение $f^{(m)}(x) - f^{(m)}(\alpha_0)$ в $R(f)$ и выполним интегрирование. Ввиду выбора α_0 , $\int_a^b K(t)(t - \alpha_0) dt = 0$ и мы будем иметь

$$\begin{aligned} R(f) &= C_0 f^{(m)}(\alpha_0) + \int_a^b f^{(m+2)}(t) K_1(t) dt \\ C_0 &= \int_a^b K(x) dx, \quad K_1(t) = \int_a^b K(x)[E(x - t) - E(\alpha_0 - t)](x - t) dx. \end{aligned}$$

Если повторить такие преобразования s раз, получится приводимая ниже формула, позволяющая в некоторых случаях последовательно увеличивать точность механической квадратуры:

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x)f(x) dx &= \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + C_0 f^{(m)}(\alpha_0) + C_1 f^{(m+2)}(\alpha_1) + \dots \\ &\dots + C_{s-1} f^{(m+2s-2)}(\alpha_{s-1}) + \int_a^b f^{(m+2s)}(x) K_s(x) dx \quad (11.4.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_0(x) &= K(x), \quad K_{i+1}(x) = \int_a^b K_i(t)[E(t - x) - E(\alpha_i - x)](t - x) dt \\ C_i &= \int_a^b K_i dx, \quad \alpha_i = C_i^{-1} \int_a^b x K_i(x) dx. \end{aligned}$$

По поводу ядер $K_i(x)$ полезно отметить следующее. Из рекуррентного соотношения для них сразу получаются такие равенства

$$K_{i+1}(x) = \begin{cases} \int_a^x K_i(t)(x - t) dt, & a \leq x < \alpha_i \\ \int_x^b K_i(t)(t - x) dt, & \alpha_i < x \leq b \end{cases}$$

Отсюда видно, что если ядро $K_i(x)$ сохраняет знак при $a \leq x \leq b$, то ядро $K_{i+1}(x)$ также сохраняет знак при $a \leq x \leq b$, причем знаки K_i и K_{i+1} одинаковы. В частности, если исходное ядро $K_0(x) = K(x)$ остатка (11.4.2) было положительным, то будут положительными все ядра $K_i(x)$ $i = 1, 2, \dots$.

Рассмотрим квадратурную формулу с n узлами, имеющую наивысшую степень точности $2n - 1$ и служащую для вычисления интегралов с весовой функцией $(1 - x)^p(1 + x)^q$, $p, q > -1$:

$$\int_{-1}^1 (1 - x)^p (1 + x)^q f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f). \quad (11.4.4)$$

Узлы ее лежат в нулях многочлена Якоби $P_n^{(p, q)}(x)$. Будем считать их перенумерованными в порядке роста $-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1$.

Убедимся сначала в том, что при больших p или q в интегральном представлении остатка $R(f)$ действительно будет существовать короткий главный участок интегрирования. Достаточная для наших целей качественная картина может быть получена, если воспользоваться электростатической аналогией для корней $P_n^{(p, q)}(x)$.

Известно, что многочлен $P_n^{(p, q)}(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению *)

$$P_n^{(p, q)'}(x) + \left(\frac{p+1}{x-1} + \frac{q+1}{x+1} \right) P_n^{(p, q)}(x) + \frac{n(p+q+n+1)}{1-x^2} P_n^{(p, q)}(x) = 0.$$

Положим здесь $x = x_k$. При этом исчезнет третий член левой части. Разделим, кроме того, на $P_n^{(p, q)'}(x_k)$, что можно сделать, так как $P_n^{(p, q)}(x_k) \neq 0$. После этого получится равенство

$$\sum_{i \neq k} \frac{2}{x_k - x_i} + \frac{p+1}{x_k - 1} + \frac{q+1}{x_k + 1} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (11.4.5)$$

имеющее простой физический смысл. Пусть изучается плоское электростатическое поле, в котором заряды взаимодействуют с силами, пропорциональными их массам и обратно пропорциональными первым степеням расстояния между ними. Если заряды масс m' и m'' лежат на оси x и имеют координаты x' и x'' , то сила, с которой масса m' действует на массу m'' будет равна

$$\lambda \frac{m' m''}{x'' - x'}.$$

Поместим в точки $+1$ и -1 электрические заряды масс $p+1$ и $q+1$ соответственно и закрепим их. Кроме того, возьмем n зарядов

*) В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, часть 2, ГИТТЛ, 1949, 382—384.

массы 2, поместим их внутрь отрезка $[-1, +1]$ и будем считать, что они могут свободно перемещаться вдоль оси x . Координаты свободных зарядов обозначим x_k ($k=1, 2, \dots, n$). Если такая система помещена в вязкую среду, то через некоторое время в ней наступит состояние равновесия. Уравнения равновесия получатся, если мы запишем, что для каждого свободного заряда равнодействующая всех воздействий, которые он испытывает со стороны других зарядов системы, равна нулю. Для свободного заряда номера k это дает:

$$\lambda \sum_{i \neq k} \frac{2 \cdot 2}{x_k - x_i} + \lambda \frac{2(p+1)}{x_k - 1} + \lambda \frac{2(q+1)}{x_k + 1} = 0. \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Уравнение равновесия только множителем $\lambda \cdot 2$ отличается от (11.4.5). Поэтому корни многочлена Якоби $P_n^{(p, q)}(x)$ будут совпадать с координатами положений равновесия свободных зарядов.

Когда массы $p+1$ или $q+1$ закрепленных зарядов будут „большими“, они с значительной силой будут отталкивать от себя свободные заряды и вынудят их сконцентрироваться на „малом“ участке отрезка $[-1, 1]$. Поэтому участок $[x_1, x_n]$, на котором располагаются все корни $P_n^{(p, q)}(x)$, будет иметь малую длину. Когда p значительно больше q , $[x_1, x_n]$ будет „малым“ отрезком вблизи точки -1 . Наоборот, если $q \gg p$, $[x_1, x_n]$ будет лежать вблизи точки $+1$. В общем же случае положение участка $[x_1, x_n]$ будет зависеть от p и q .

Для квадратурной формулы (11.4.4) остаток $R(f)$, ввиду конечности отрезка интегрирования и положительности весовой функции, наверное представим в форме (11.4.2). Ядро остатка $K(x)$, имеющее в общем случае вид (11.3.5), для изучаемой формулы будет:

$$K(x) = \int_x^1 (1-t)^p (1+t)^q \frac{(t-x)^{2n-1}}{(2n-1)!} dt - \sum_{k=1}^n A_k E(x_k - x) \frac{(x_k - x)^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

В частности, когда точка x лежит вне участка $[x_1, x_n]$:

$$K(x) = \int_{-1}^x (1-t)^p (1+t)^q \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} dx, \quad \text{для } -1 \leq x \leq x_1,$$

и

$$K(x) = \int_x^1 (1-t)^p (1+t)^q \frac{(t-x)^{2n-1}}{(2n-1)!} dt, \quad \text{для } x_n \leq x \leq 1.$$

Остановимся, например, на случае $x_n \leq x \leq 1$. Множитель $1+t$ заключен в границах $1+x_n \leq 1+t \leq 2$. Поэтому $K(x)$ будет находиться между числами

$$(1+x_n)^q \int_x^1 (1-t)^p \frac{(t-x)^{2n-1}}{(2n-1)!} dt =$$

$$= (1+x_n)^q \cdot \frac{(1-x)^{p+2n}}{(2n+1)!} \int_0^1 (1-u)^p u^{2n-1} du = (1+x_n)^q C (1-x)^{p+2n}$$

и

$$2^q \int_x^1 (1-t)^p \frac{(t-x)^{2n-1}}{(2n-1)!} dt = 2^q C (1-x)^{p+2n}.$$

При возрастании x от x_n до 1 $K(x)$ будет стремиться к нулю как $(1-x)^{p+2n}$. Если p большое число, то стремление к нулю будет весьма быстрым. Если же p не будет большим числом, а показатель степени q большим, то x_n будет близко к единице и множитель $(1-x)^{p+2n}$ также будет малой величиной.

Изложенные, соображения имеют только качественный характер. Но они позволяют надеяться, что увеличение точности квадратуры (11.4.4) указанным выше методом будет тем успешнее, чем больше будут p или q .

Формула (11.4.3) для интеграла (11.4.5) будет такой:

$$\int_{-1}^1 (1-x)^p (1+x)^q f(x) dx =$$

$$= \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + C_0 f^{(2n)}(\alpha_0) + C_1 f^{(2n+2)}(\alpha_1) + \dots$$

$$\dots + C_{s-1} f^{(2n+2s-2)}(\alpha_{s-1}) + \int_{-1}^1 f^{(2n+2s)}(x) K_s(x) dx. \quad (11.4.6)$$

Коэффициент первого поправочного члена $C_0 = \int_{-1}^1 K(x) dx$ есть погрешность квадратуры некоторой функции, производная которой порядка $2n$ равна 1. За такую функцию может быть взята

$$f = \frac{a_n^{-2}}{(2n)!} P_n^{(p,q)^2}(x),$$

где a_n есть старший коэффициент $P_n^{(p, q)}(x)$. Так как $P_n^{(p, q)}(x_k) = 0$, то

$$C_0 = R(f) = \frac{1}{(2n)! a_n^2} \left[\int_{-1}^1 (1-x)^p (1+x)^q P_n^{(p, q)^2}(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k P_n^{(p, q)^2}(x_k) \right] = \frac{1}{(2n)! a_n^2} \int_{-1}^1 (1-x)^p (1+x)^q P_n^{(p, q)^2}(x) dx.$$

Или, ввиду того что a_n и интеграл от квадрата якобиева многочлена, имеют известные значения (2.2.2) и (2.2.5),

$$C_0 = \frac{2^{p+q+1} 2n+1 n! \Gamma(p+n+1) \Gamma(q+n+1) \Gamma(p+q+n+1)}{(2n)! \Gamma(p+q+2n+1) \Gamma(p+q+2n+2)}.$$

Вычислим еще α_0 . Заметим, что в выражении $\alpha_0 = C_2^{-1} \int_{-1}^1 xK(x) dx$

интеграл $\int_{-1}^1 xK(x) dx$ есть остаток приближенного интегрирования по формуле (11.4.4) такой функции f , производная которой порядка $2n$ равна x . Пусть $P_n^{(p, q)}(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots$. За f может быть принят многочлен $f(x) = \frac{1}{(2n+1)! a_n^2} \left[x - 2 \frac{b_n}{a_n} \right] P_n^{(p, q)^2}(x)$. Ввиду $f(x_k) = 0$, будет

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 xK(x) dx &= R(f) = \int_{-1}^1 (1-x)^p (1+x)^q f dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = \\ &= \frac{1}{(2n+1)! a_n^2} \left\{ \int_{-1}^1 (1-x)^p (1+x)^q x P_n^{(p, q)^2}(x) dx - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{b_n}{a_n} \int_{-1}^1 (1-x)^p (1+x)^q P_n^{(p, q)^2}(x) dx \right\}. \end{aligned} \quad (11.4.7)$$

Второй интеграл в скобках встречался несколькими строками раньше и равен $C_0 (2n)! a_n^2$. Два старшие коэффициента a_n и b_n многочлена $P_n^{(p, q)}(x)$ также известны и имеют значения*)

$$a_n = \frac{\Gamma(p+q+2n+1)}{2^n n! \Gamma(p+q+n+1)} \quad \text{и} \quad b_n = n(p-q) \frac{\Gamma(p+q+2n)}{2^n n! \Gamma(p+q+n+1)}.$$

*) См. напр., Д. Джексона, Ряды Фурье и ортогональные многочлены, ИЛ, 1948 гл. VIII, п. 3.

Поэтому

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{n(p-q)}{p+q+2n}.$$

Перейдем к вычислению первого интеграла в скобках. В теории многочленов Якоби известно следующее рекуррентное соотношение *)

$$\begin{aligned} (p+q+2n)(p+q+2n+1)(p+q+2n+2)xP_n^{(p,q)}(x) = \\ = 2(n+1)(p+q+n+1)(p+q+2n)P_{n+1}^{(p,q)}(x) + (q^2-p^2) \times \\ \times (p+q+2n+1)P_{n-1}^{(p,q)}(x) + 2(p+n)(q+n)(p+q+2n+2)P_n^{(p,q)}(x). \end{aligned}$$

Если обе части равенства умножить на $(1-x)^p(1+x)^q P_n^{(p,q)}(x)$ и интегрировать по отрезку $[-1, 1]$, отсюда сразу же получится:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x)^p(1+x)^q x P_n^{(p,q)^3}(x) dx = \\ = \frac{q^2 p^2}{(p+q+2n)(p+q+2n+2)} \int_{-1}^1 (1-x)^p(1+x)^q P_n^{(p,q)^3}(x) dx = \\ = \frac{(q^2-p^2)(2n)! a_n^2}{(p+q+2n)(p+q+2n+2)} C_0. \end{aligned}$$

Подставив все указанные частные результаты в (11.4.7), найдем для $\int_{-1}^1 xK(x) dx$

$$\int_{-1}^1 xK(x) dx = \frac{q-p}{2n+1} \left\{ \frac{p+q}{(p+q+2n)(p+q+2n+2)} + \frac{2n}{p+q+2} \right\} C_0,$$

и после несложных вычислений для $\alpha_0 = C_0^{-1} \int_{-1}^1 xK(x) dx$

$$\alpha_0 = \frac{q-p}{2n+1} \left\{ \frac{n}{p+q+2n} + \frac{n+1}{p+q+2n+2} \right\}.$$

В ультрасферическом случае $p=q$ все α_k ($k=0, 1, \dots$) обращаются в нуль и формула (11.4.6) будет такой:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x^2)^p f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \\ + \frac{2^{2p+2n+1} n! \Gamma^2(p+n+1) \Gamma(2p+n+1)}{(2n)! \Gamma(2p+2n+1) \Gamma(2p+2n+2)} \{ f^{(2n)}(0) + \\ + \frac{1}{2 \cdot (2n+1)(2n+2)} \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2p+2n+3} + \frac{(n-1)n}{2p+2n-1} \right] f^{(2n+2)}(0) + \dots \} \end{aligned}$$

*) См. предыдущ. сноску гл. VIII н° 5.

Пусть нужно вычислить интеграл

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^2 e^x dx = 8e - 56e^{-1} \approx 1,145\,006$$

Здесь $p = q = 2$. Положим $n = 1$, т. е. возьмем только один узел:

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^2 f(x) dx = A_1 f(x_1) + \frac{8}{105} \left\{ f^{(2)}(0) + \frac{1}{36} f^{(4)}(0) + \dots \right\}.$$

В силу четности весовой функции $(1-x^2)^2$, очевидно будет $x_1 = 0$. Кроме того

$$A_1 = \int_{-1}^1 (1-x^2)^2 dx = \frac{16}{15} \approx 1,066\,667.$$

Первый член формулы

$$A_1 f(x_1) = \frac{16}{15} \cdot 1 \approx 1,066\,667$$

дает весьма неточное значение интеграла. Если присоединить к нему второй член, то сумма их

$$A_1 f(x_1) + \frac{8}{105} f^{(2)}(0) = \frac{16}{15} + \frac{8}{105} = \frac{8}{7} \approx 1,142\,857$$

даст интеграл с тремя верными знаками. Сумма же трех членов

$$A_1 f(x_1) + \frac{8}{105} f^{(2)}(0) + \frac{2}{945} f^{(4)}(0) = \frac{8}{7} + \frac{2}{945} = \frac{1\,082}{945} \approx 1,144\,974$$

будет отличаться от точного значения интеграла в шестом знаке.

Метод выделения из интеграла нескольких „последовательных главных частей“, который был описан в § 4 в связи с увеличением точности механических квадратур, тесно связан с известной проблемой конструктивной теории функций, которую обычно называют задачей интерполирования производными последовательных порядков, или задачей Абеля — Гончарова^{*}).

Пусть на отрезке $[a, b]$ определена функция f , имеющая $n+1$ производных и взяты $n+1$ точек $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$. Нужно найти многочлен $P(x)$ степени $\leq n$, удовлетворяющий условиям

$$P^{(i)}(\xi_i) = f^{(i)}(\xi_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (11.4.8)$$

Легко найти явное выражение для $P(x)$. Последнее из условий (11.4.8)

$$P^{(n)}(x) = f^{(n)}(\xi_n)$$

^{*}) В. Л. Гончаров, Теория интерполирования и приближения функций, гл. 1 и 18, 1954. См. также М. А. Евграфов, Интерполяционная задача Абеля — Гончарова, ГИТТЛ, 1954.

является тождеством относительно x , т. к. степень P не больше n . Интегрируем его в границах от ξ_{n-1} до x и воспользуемся при этом предпоследним условием (11.4.8):

$$P^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(\xi_{n-1}) + \int_{\xi_{n-1}}^x dt_n \cdot f^{(n)}(\xi_n).$$

Продолжая интегрировать дальше и учитывая при этом условия (11.4.8), после n шагов найдем

$$\begin{aligned} P(x) = & f(\xi_0) + f'(\xi_1) \int_{\xi_0}^x dt_1 + f''(\xi_2) \int_{\xi_0}^x dt_1 \int_{\xi_1}^{t_1} dt_2 + \dots \\ & \dots + f^{(n)}(\xi_n) \int_{\xi_0}^x dt_1 \int_{\xi_1}^{t_1} dt_2 \dots \int_{\xi_{n-1}}^{t_{n-1}} dt_n \dots \end{aligned} \quad (11.4.9)$$

Вводя обозначения

$$L_0(x) = 1, \quad L_i(x) = \int_{\xi_0}^x dt_1 \int_{\xi_1}^{t_1} dt_2 \dots \int_{\xi_{i-1}}^{t_{i-1}} dt_i,$$

можно записать $P(x)$ в форме

$$P(x) = \sum_{i=0}^m f^{(i)}(\xi_i) L_i(x). \quad (11.4.10)$$

Рассмотрим теперь остаток интерполирования

$$r(x) = f(x) - P(x).$$

При некоторых предположениях о функции f , для него может быть построено другое представление, более удобное для исследований и оценок.

Пусть точка x и узлы ξ_k ($k = 0, 1, \dots, n$) принадлежат отрезку $[a, \beta]$.

Если функция f имеет непрерывную производную порядка $n+1$ на $[a, \beta]$, то остаток интерполирования $r(x)$ представим в виде:

$$r(x) = \int_{\xi_0}^x dt_1 \int_{\xi_1}^{t_1} dt_2 \dots \int_{\xi_n}^{t_n} f^{(n+1)}(t_{n+1}) dt_{n+1}. \quad (11.4.11)$$

Справедливость этого вытекает из того обстоятельства, что в узлах ξ_i остаток $r(x)$ должен удовлетворять условиям

$$r(\xi_0) = 0, \quad r'(\xi_1) = 0, \dots, \quad r^{(n)}(\xi_n) = 0$$

и, кроме того, для него должно выполняться тождество:

$$r^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

Возвратимся теперь к разложению остатка квадратуры (11.4.1):

$$R(f) = \int_a^b f^{(m)}(x) K(x) dx \quad (11.4.12)$$

Пусть, пользуясь некоторыми соображениями, для выделения „первой главной части“ из $R(f)$ мы избрали некоторую точку ξ_0 и разделили $f^{(m)}(x)$ на две части, положив

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= f^{(m)}(\xi_0) + [f^{(m)}(x) - f^{(m)}(\xi_0)] = f^{(m)}(\xi_0) + \int_{\xi_0}^x f^{(m+1)}(t) dt = \\ &= f^{(m)}(\xi_0) + \int_a^b f^{(m+1)}(t) [E(x-t) - E(\xi_0-t)] dt. \end{aligned}$$

Напомним, что раньше избранную точку мы обозначали α_0 и подбирали ее специальным образом стремясь к тому, чтобы в первой выделенной части остатка была сконцентрирована возможно большая его часть. Сейчас мы не будем рассматривать вопрос о выборе ξ_0 и оставим эту точку произвольной.

Подставив указанное разложение $f^{(m)}$ в (11.4.12), получим остаток $R(f)$ в форме

$$\begin{aligned} R(f) &= f^{(m)}(\xi_0) \mathcal{D}_0 + \int_a^b f^{(m+1)}(x) N_1(x) dx, \\ \mathcal{D}_0 &= \int_a^b K(x) dx, \quad N_1(x) = \int_a^b K(t) [E(t-x) - E(\xi_0-x)] dt. \end{aligned}$$

Пусть вновь с целью выделить из $R(f)$ „вторую главную часть“ мы опять избрали некоторую точку ξ_1 и разложили $f^{(m+1)}(x)$ на две части

$$f^{(m+1)}(x) = f^{(m+1)}(\xi_1) + [f^{(m+1)}(x) - f^{(m+1)}(\xi_1)]$$

и т. д. После нескольких таких преобразований мы получим следующее разложение $R(f)$:

$$\begin{aligned} R(f) &= \mathcal{D}_0 f^{(m)}(\xi_0) + \mathcal{D}_1 f^{(m+1)}(\xi_1) + \dots + \mathcal{D}_{s-1} f^{(m+s-1)}(\xi_{s-1}) + \\ &\quad + \int_a^b f^{(m+s)}(x) N_s(x) dx, \quad (11.4.13) \\ N_0(x) &= K(x), \quad N_{i+1}(x) = \int_a^b N_i(t) [E(t-x) - E(\xi_i-x)] dt, \\ \mathcal{D}_i &= \int_a^b N_i(x) dx. \end{aligned}$$

Построенное сейчас разложение остатка, принципиально говоря, имеет ту же природу, что и разложение $R(f)$, которое было сделано раньше при построении формулы (11.4.3). Различие состоит лишь в том, что раньше выбор точек $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ был подчинен определенным целям, теперь же избираемые точки $\xi_0, \xi_1, \dots$ мы оставляем произвольными и не налагаем на них никаких ограничений. Но вполне ясно, что если выбрать точки ξ_i особым образом, а именно считать $\xi_0 = \alpha_0, \xi_2 = \alpha_1, \dots$, то новое разложение (11.4.13) остатка $R(f)$ совпадает с его прежним разложением.

Равенство (11.4.13) может быть получено другим путем, тесно связанным с указанной выше задачей Абеля — Гончарова. Примем точки $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{s-1}$

за узлы и выполним интерполирование функции $f^{(m)}(x)$ последовательными производными в них:

$$f^{(m)}(x) = \sum_{i=0}^{s-1} f^{(m+i)}(\xi_i) L_i(x) + r(x). \quad (11.4.14)$$

Если внести это разложение $f^{(m)}(x)$ в (11.4.12), получим новое представление остатка $R(f)$

$$R(f) = \sum_{i=0}^{s-1} f^{(m+i)}(\xi_i) \int_a^b K(x) L_i(x) dx + \int_a^b K(x) r(x) dx. \quad (11.4.15)$$

Оно, очевидно, должно совпадать с (11.4.13) для всякой $m+s$ раз непрерывно дифференцируемой функции f . Поэтому должно быть

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i &= \int_a^b K(x) L_i(x) dx, \\ \int_a^b f^{(m+s)}(x) N_s(x) dx &= \int_a^b K(x) r(x) dx. \end{aligned} \quad (11.4.16)$$

Такая связь интерполирования $f^{(m)}$ с проблемой разложения остатка квадратуры по „главным частям“ полезна в теории квадратур в частности в следующем отношении.

Если функция f дифференцируема бесконечное число раз, в равенстве (11.4.13) мы можем s увеличить неограниченно. В пределе из суммы $\sum_{i=0}^{s-1} \mathcal{D}_i f^{(m+i)}(\xi_i)$ получится бесконечный ряд

$$R(f) \sim \mathcal{D}_0 f^{(m)}(\xi_0) + \mathcal{D}_1 f^{(m+1)}(\xi_1) + \dots \quad (11.4.17)$$

Вопрос о сходимости этого ряда к $R(f)$ равносильен тому, чтобы при $s \rightarrow \infty$ было

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_a^b f^{(m+s)}(x) N_s(x) dx = 0.$$

Последнее же ввиду (11.4.16), в свою очередь равносильно тому, чтобы

$$\int_a^b K(x) r(x) dx \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty.$$

Таким образом вопрос о возможности разложения остатка $R(f)$ в ряд (11.4.16) по „главным частям“, то есть вопрос о справедливости равенства

$$R(f) = \mathcal{D}_0 f^{(m)}(\xi_0) + \mathcal{D}_1 f^{(m+1)}(\xi_1) + \dots \quad (11.4.18)$$

тесно связан с вопросом о сходимости интерполирования Абеля—Гончарова (11.4.14) к функции $f^{(m)}$ при $s \rightarrow \infty$.

В частности, если отрезок $[a, b]$ конечный и

$$r(x) = f^{(m)}(x) - \sum_{i=0}^{s-1} f^{(m+i)}(\xi_i) L_i(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } s \rightarrow \infty$$

равномерно относительно x , то разложение (11.4.18) наверное возможно.

Для ознакомления с проблемой сходимости интерполирования последовательными производными мы отсылаем читателя к специальной литературе *).

ЛИТЕРАТУРА

Крылов А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, 1933.

Канторович Л. В., О приближенном вычислении некоторых типов определенных интегралов и других применениях метода выделения особенностей, Математический сборник, 1934, 41, в. 2, 235—245.

Стефенсен И. Ф., Теория интерполирования, гл. XIII, ОНТИ, 1935.

Крылов В. И., Увеличение точности механических квадратур. Формулы эйлерова вида, ДАН СССР, 1954, 96, № 3.

Крылов В. И., Увеличение точности механических квадратур при наличии главного участка интегрирования малой длины в интегральном представлении остатка квадратуры. ДАН СССР, 1955, 101, № 6.

Смирнов В. Н., Увеличение точности формул механических квадратур типа Чебышева — Эрмита. Увеличение точности квадратур Чебышева — Лягерра, Сборник трудов Куйбышевского индустриального института, 1955, № 5, О квадратурных формулах Гаусса, там же, 1956, в. 6.

*) См. напр. книгу М. А. Евграфова, Интерполяционная задача Абеля — Гончарова, в которой приведена библиография задачи.

СХОДИМОСТЬ КВАДРАТУРНОГО ПРОЦЕССА

§ 1. О проблеме сходимости квадратурного процесса

В этой главе будет рассматриваться последовательность квадратурных формул, число узлов n в которых может принимать все целые значения $n = 1, 2, \dots$. Такая последовательность определяется двумя треугольными матрицами: матрицей узлов

$$X = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)}, x_2^{(2)} \\ \dots \dots \dots \\ x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots x_n^{(n)} \\ \dots \dots \dots \end{vmatrix} \quad (12.1.1)$$

и матрицей коэффициентов

$$A = \begin{vmatrix} A_1^{(1)} \\ A_1^{(2)}, A_2^{(2)} \\ \dots \dots \dots \\ A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \dots A_n^{(n)} \\ \dots \dots \dots \end{vmatrix}. \quad (12.1.2)$$

Возьмем квадратурную формулу, соответствующую строкам номера n этих матриц

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) + R_n(f) = Q_n(f) + R_n(f). \quad (12.1.3)$$

и условимся говорить, что квадратурный процесс, определяемый матрицами X и A , сходится для функции f , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) = \int_a^b p(x) f(x) dx. \quad (12.1.4)$$

Сходимость или расхождение процесса зависит как от свойств интегрируемой функции f , так и от выбора квадратурных формул,

и задача исследования сходимости в общем виде состоит в выяснении таких связей между свойствами f и свойствами матриц X и A , при которых можно быть уверенным в сходимости процесса.

Две основные проблемы теории сходимости могут быть высказаны в следующих словах.

1. Заданы матрицы X и A и нужно определить для какого класса F функций f можно гарантировать выполнение (12.1.4).

2. Задан класс F функций f и нужно определить каким условиям должны удовлетворять матрицы X и A , чтобы можно было гарантировать сходимость квадратурного процесса для всех функций $f \in F$.

В последующих параграфах будет рассмотрено решение каждой из этих задач для некоторых частных случаев, имеющих существенное значение в теории квадратур и их приложениях.

Мы ограничимся изучением сходимости для случая конечного отрезка интегрирования и не будем затрагивать более трудную проблему сходимости квадратурных формул для несобственных интегралов с бесконечными пределами.

§ 2. Сходимость интерполяционных квадратур для аналитических функций

Чтобы упростить доказательства теорем этого параграфа и придать им общность, мы будем сейчас, вместо интеграла $\int_a^b p(x)f(x)dx$, рассматривать интеграл Стильтеса. Допустим, что на отрезке $[a, b]$ задана некоторая функция $\sigma(x)$ с ограниченным изменением и возьмем интеграл $\int_a^b f(x)d\sigma(x)$. Выберем на $[a, b]$ n точек $x_k^{(n)}$ ($k = 1, \dots, n$) и построим интерполяционную квадратурную формулу

$$\int_a^b f(x)d\sigma(x) = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) + R_n(f), \quad (12.2.1)$$

$$\omega_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k^{(n)}), \quad A_k^{(n)} = \int_a^b \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k^{(n)}) \omega_n'(x_k^{(n)})} d\sigma(x).$$

Последовательность таких формул вполне определяется матрицей узлов (12.1.1).

Замечательно, что можно указать эффективные и простые признаки для суждения о сходимости интерполяционных квадратурных процессов для аналитических функций. Такие признаки могут быть сформулированы при помощи функции, которая имеет смысл предельной функции распределения узлов $x_k^{(n)}$ ($k = 1, \dots, n$) при $n \rightarrow \infty$.

Узлы $x_k^{(n)}$ предполагаются лежащими на отрезке $[a, b]$ и в соответствии с этим мы определим функцию распределения только на этом отрезке.

Представим себе, что единичная масса произвольным образом распределена на $[a, b]$. Если x есть любая точка отрезка, не совпадающая с правым концом $x = b$, то под значением функции $\mu(x)$ в точке x условимся понимать сумму всех масс, лежащих строго левее точки x . В частности, так как левее точки a нет масс, то $\mu(a) = 0$. Если же $x = b$, то, по определению, считаем $\mu(b) = 1$.

Функция $\mu(x)$ должна, очевидно, обладать следующими свойствами:

1. При $x = a$ $\mu(a) = 0$;
2. $\mu(x)$ есть монотонная неубывающая функция x , непрерывная слева в каждой точке внутри $[a, b]$;
3. При $x = b$ $\mu(b) = 1$.

Перечисленные свойства мы примем за определение и всякую функцию $\mu(x)$, обладающую этими свойствами, будем называть функцией распределения на отрезке $[a, b]$.

Пусть дана последовательность функций распределения $\mu_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$. Условимся говорить, что $\mu_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$ сходится в основном к функции $\mu(x)$, если $\mu_n(x) \rightarrow \mu(x)$ во всякой точке непрерывности *) $\mu(x)$.

Возьмем теперь строку номера n матрицы X .

$$x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}.$$

Будем считать, что узлы $x_k^{(n)}$ перенумерованы в порядке роста. Припишем каждому из них массу, равную $\frac{1}{n}$. Этим взятой строке матрицы X будет поставлена в соответствие функция распределения $\mu_n(x)$.

Если существует функция $\mu(x)$, обладающая перечисленными выше свойствами, к которой в основном сходится последовательность $\mu_n(x)$:

$$\mu_n(x) \rightarrow \text{оснв. } \mu(x), \quad n \rightarrow \infty,$$

то $\mu(x)$ будем называть предельной функцией распределения для матрицы X .

Мы остановимся исключительно на том случае, когда такая функция $\mu(x)$ существует **).

*) Заметим, что в точках $x = a$ и $x = b$ выполняются равенства $\mu_n(a) = \mu(a) = 0$ и $\mu_n(b) = \mu(b) = 1$ и сходимость на концах отрезка $[a, b]$ имеет место всегда.

**) В силу известной теоремы о выборе для функций распределения, от случая существования $\mu(x)$ легко можно перейти к случаю любой матрицы X .

Обозначим $r_n(x)$ остаток интерполирования f по ее значениям в узлах $x_k^{(n)}$ ($k = 1, \dots, n$):

$$r_n(x) = f(x) - \sum_{k=1}^n \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k^{(n)}) \omega_n'(x_k^{(n)})} f(x_k^{(n)}) = f(x) - L_n(x).$$

Остаток квадратуры (12.2.1) $R_n(f)$ равен интегралу от остатка интерполирования

$$R_n(f) = \int_a^b r_n(x) d\sigma(x).$$

Сходимость квадратуры тесно связана со сходимостью интерполирования, в частности, если $r_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно $x \in [a, b]$, то и $R_n(f) \rightarrow 0$, т. е. будет сходиться и квадратурный процесс. Исследование сходимости квадратурного процесса (12.2.1) мы начнем с изучения сходимости интерполирования.

Будем считать, что функция $f(z)$ является аналитической функцией переменной z , регулярной в некоторой односвязной области B комплексной плоскости z , содержащей отрезок $[a, b]$ действительной оси внутри себя. Обозначим l произвольный замкнутый спрямляемый контур, лежащий в B и такой, что $[a, b]$ лежит внутри его.

Остаток интерполирования $r_n(x)$ может быть представлен [см. (3.2.11)] в форме следующего контурного интеграла

$$r_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\omega_n(x)}{\omega_n(z)} \frac{f(z)}{z - x} dz, \quad (12.2.2)$$

где x есть любая точка, лежащая внутри l . Пусть $\mu(x)$ есть предельная функция распределения узлов матрицы X . Для исследования $r_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$ большое значение имеет следующий логарифмический потенциал

$$u(z) = \int_a^b \lg \frac{1}{|z - t|} d\mu(t). \quad (12.2.3)$$

$u(z)$ есть гармоническая функция, регулярная в комплексной плоскости всюду, кроме бесконечно далекой точки и отрезка $[a, b]$. Когда точка z удаляется на бесконечность, $u(z)$ будет стремиться к $-\infty$.

Рассмотрим линии уровня

$$u(z) = C.$$

Если C есть большое по абсолютной величине отрицательное число, линия уровня будет содержать внутри себя отрезок интегрирования $[a, b]$ и будет „близкой“ к окружности большого радиуса. Назовем эту линию l_C и обозначим B_C часть плоскости, лежащую

внутри ее. При возрастании C множество B_C будет уменьшаться. Введем число λ , равное точной верхней границе значений C , при которых $[a, b]$ лежит внутри B_C . При всяком $C < \lambda$ линия уровня l_C будет содержать $[a, b]$ внутри себя.

Рассмотрим также открытую область плоскости z , в которой $u(z) < \lambda$. Назовем ее κ и дополнение к ней обозначим β .

Теорема 1. Если функция $f(z)$ есть аналитическая функция, регулярная в некоторой области $\mathcal{D}$, содержащей внутри себя β , то

$$r_n(x) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

равномерно относительно $x \in \beta$.

Доказательство. Так как β лежит внутри $\mathcal{D}$, наверное существует число $C' < \lambda$ такое, что соответствующая ему область $B_{C'} + l_{C'}$ также лежит внутри $\mathcal{D}$.

Возьмем произвольное число C'' между C' и λ : $C' < C'' < \lambda$. Линия уровня $l_{C''}$ будет лежать внутри $l_{C'}$ и будет содержать β , а следовательно и $[a, b]$, внутри себя.

Примем $l_{C'}$ за контур интегрирования в интегральном представлении $r_n(x)$. Будем, кроме того, считать, что точка x лежит на $l_{C''}$.

Если обозначить M наибольшее значение $|f|$ на $l_{C'}$ и δ — расстояние между $l_{C'}$ и $l_{C''}$, то будет верна оценка

$$|r_n(x)| \leq \frac{M}{2\pi\delta} \int_{l_{C'}} \frac{|\omega_n(x)|}{|\omega_n(z)|} ds.$$

Рассмотрим отдельно $|\omega_n(z)|^{-1}$.

$$|\omega_n(z)|^{-1} = \exp \sum_{k=1}^n \lg \frac{1}{|z - x_k^{(n)}|}.$$

Припишем, как выше, каждому узлу $x_k^{(n)}$ ($k = 1, \dots, n$) массу $\frac{1}{n}$ и введем соответствующую функцию распределения $\mu_n(x)$. Очевидно,

$$\int_a^b \lg \frac{1}{|z - t|} d\mu_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lg \frac{1}{|z - x_k^{(n)}|}$$

и поэтому

$$|\omega_n(z)|^{-1} = \exp n \int_a^b \lg \frac{1}{|z - t|} d\mu_n(t).$$

При $n \rightarrow \infty$ $\mu_n(t)$ будет сходиться в основном к предельной функции распределения узлов $\mu(t)$. Точка z лежит вне $[a, b]$ и $\lg \frac{1}{|z - t|}$ есть непрерывная функция $t \in [a, b]$. Согласно известной теореме

о предельном переходе для интеграла Стильеса, которую часто называют второй теоремой Хелли, будет верным следующее *)

$$\int_a^b \lg \frac{1}{|z-t|} d\mu_n(t) \rightarrow \int_a^b \lg \frac{1}{|z-t|} d\mu(t) = C' \quad n \rightarrow \infty.$$

В интеграле величина z играет роль параметра и сходимость будет равномерной относительно $z \in l_{C'}$. Чтобы убедиться в последнем, достаточно проследить за ходом обычных доказательств теоремы Хелли. Существует, следовательно, такое n' , что при $n > n'$ и для любых $z \in l_{C'}$ будут справедливы неравенства

$$C' - \frac{1}{3}(C'' - C') < \int_a^b \lg \frac{1}{|z-t|} d\mu_n(t) < C' + \frac{1}{3}(C'' - C').$$

Аналогично, при $x \in l_{C''}$ равномерно относительно x будет

$$\int_a^b \lg \frac{1}{|x-t|} d\mu_n(t) \rightarrow \int_a^b \lg \frac{1}{|x-t|} d\mu(t) = C'', \quad n \rightarrow \infty.$$

Существует, стало быть, такое n'' , что при $n > n''$ и при всяких $x \in l_{C''}$ выполняются неравенства

$$C'' - \frac{1}{3}(C'' - C') < \int_a^b \lg \frac{1}{|x-t|} d\mu_n(t) < C'' + \frac{1}{3}(C'' - C').$$

Взяв $n_0 = \max(n', n'')$, можно утверждать, что при $n > n_0$ и для любых $z \in l_{C'}$, $x \in l_{C''}$ будет иметь место оценка

$$\begin{aligned} \int_a^b \lg \frac{1}{|z-t|} d\mu_n(t) - \int_a^b \lg \frac{1}{|x-t|} d\mu_n(t) &< \left[C' + \frac{1}{3}(C'' - C') \right] - \\ &- \left[C'' - \frac{1}{3}(C'' - C') \right] = -\frac{1}{3}(C'' - C'). \end{aligned}$$

Отсюда получается оценка для отношения $\omega_n(x)/\omega_n(z)$:

$$\frac{|\omega_n(x)|}{|\omega_n(z)|} < e^{-\frac{n}{3}(C'' - C')}.$$

*) В. И. Гливенко, Интеграл Стильеса, ОНТИ, 1936, № 14. См. также И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, гл. 8, § 7, ГТТИ, где теорема Хелли доказана при предположениях, немного отличных от требования сходимости μ_n к μ в основном. Но легко можно видеть, что это доказательство, с некоторыми изменениями, переносится и на случай сходимости μ_n к μ в основном.

Для остатка интерполирования $r_n(x)$ получим

$$|r_n(x)| < \frac{Ms}{2\pi\delta} e^{-\frac{n}{3}(C''-C')}, \quad n > n_0, \quad x \in l_{C''}. \quad (12.2.3')$$

Здесь s — длина линии $l_{C'}$.

Из (12.2.3') вытекает, что при $n \rightarrow \infty$ $r_n(x) \rightarrow 0$ равномерно на $l_{C''}$. Но, так как $r_n(x)$ есть аналитическая функция, регулярная в области $l_{C''} + B_{C''}$, то равномерное стремление $r_n(x)$ к нулю будет во всей области $l_{C''} + B_{C''}$. В частности, это будет верно и на множестве β , лежащем внутри $l_{C''}$.

Доказанная теорема об интерполировании позволяет высказать соответствующую ей теорему о сходимости интерполяционного квадратурного процесса.

Теорема 2. Пусть $[a, b]$ есть конечный отрезок. Если $f(x)$ есть аналитическая функция, регулярная в некоторой области, содержащей множество β внутри себя, то, при любой функции $\sigma(x)$, интерполяционно квадратурный процесс, определяемый равенством (12.2.1), сходится:

$$R_n(f) = \int_a^b r_n(x) d\sigma(x) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Остановимся на случае, когда предельная функция $\mu(x)$ соответствует равномерному распределению единичной массы на $[a, b]$:

$$\mu(x) = \frac{(x-a)}{(b-a)} \quad a \leq x \leq b. \quad (12.2.4)$$

К такой функции $\mu(x)$ приводит, например, изучение сходимости квадратурных процессов с равноотстоящими узлами, в частности, квадратурных процессов Ньютона — Котеса.

Для облегчения записи будем считать отрезок $[a, b]$ приведенным к $[0, 1]$.

$$\mu(x) = x.$$

Логарифмический потенциал (12.2.3) здесь будет

$$u(z) = \int_0^1 \lg \frac{1}{z-t} dt.$$

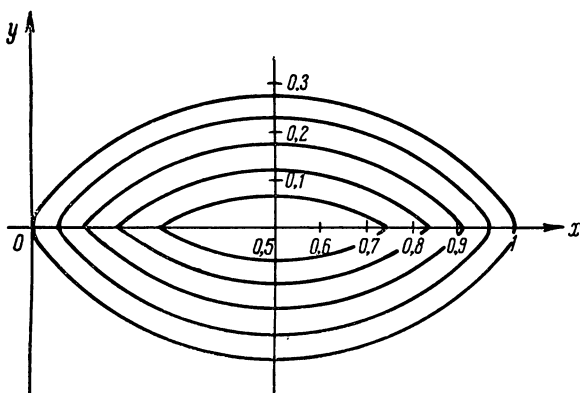
Так как

$$\int_0^1 \lg |z-t| dt = \operatorname{Re} \int_0^1 \lg (z-t) dt = \operatorname{Re} \{ (1-z) \lg (1-z) + z \lg z - 1 \},$$

то

$$u(z) = \operatorname{Re} \{1 - z \lg z - (1 - z) \lg (1 - z)\} = \\ = 1 - x \lg \sqrt{x^2 + y^2} - (1 - x) \lg \sqrt{(1 - x)^2 + y^2} + y \operatorname{arctg} \frac{y}{x - x^2 - y^2}.$$

Линии уровня $u(z) = C$ изображены на чертеже 8. Множество β состоит из линии уровня, проходящей через концы отрезка $[0, 1]$ и области, лежащей внутри нее.



Черт. 8.

Наибольший горизонтальный размер β равен единице, а наибольший размер по вертикали — около 0,5 и получается он в сечении β прямой $x = 0,5$.

Из изложенного выше, в частности, видно, что наверное гарантировать сходимость интерполяционного квадратурного процесса Ньютона — Котеса, имеющего равноотстоящие узлы, можно только в том случае, если интегрируемая функция f будет аналитической функцией, регулярной в достаточно широкой области около отрезка $[0, 1]$, а именно в такой, чтобы она содержала внутри себя указанную область β .

Рассмотрим еще два вопроса теории сходимости интерполяционных квадратур, которые, в известном смысле, являются крайними случаями доказанной выше теоремы.

Можно заранее предвидеть, что если f будет функцией, регулярной в весьма широкой области около отрезка $[a, b]$, то квадратурный процесс будет наверное сходиться, как бы ни выбирать узлы $x_k^{(n)}$ ($k = 0, 1, \dots, n$) и какой бы ни была функция $\sigma(x)$. Попытаемся теперь определить наименьшую область, в которой должна быть регулярной f , чтобы можно было гарантировать сходимость процесса для любых $x_k^{(n)}$ и при всяких $\sigma(x)$.

Изучим предварительно сходную проблему для интерполяционной задачи

Опишем около точек a и b , как около центров, круги радиуса, равного $b - a$, и обозначим χ замкнутую область, являющуюся теоретико-множественной суммой двух таких кругов.

Теорема 3. Если аналитическая функция $f(z)$ регулярна в области κ , то, каковы бы ни были узлы интерполирования на $[a, b]$, будет иметь место сходимость интерполирования

$$L_n(x) \rightarrow f(x), \quad n \rightarrow \infty$$

равномерно относительно $x \in [a, b]$.

Область регулярности κ является наименьшей, обеспечивающей сходимость интерполирования при любой матрице узлов $x_k^{(n)}$.

Доказательство. Пусть x и t суть две любые точки отрезка $[a, b]$ и z произвольная точка плоскости. Если z лежит вне κ , то, очевидно, будет

$$\left| \frac{x-t}{z-t} \right| < 1. \text{ Если же } z \text{ принадлежит области } \kappa, \text{ то наверное найдутся}$$

$$\text{такие } x \text{ и } t \text{ на } [a, b], \text{ что будет } \left| \frac{x-t}{z-t} \right| \geq 1.$$

Докажем первую часть теоремы. Так как f предполагается регулярной в замкнутой области κ , она будет регулярной и в некоторой более широкой области. Поэтому наверное существует замкнутая линия l , содержащая κ внутри себя и такая, что f будет регулярна как на ней самой, так и всюду внутри ее. Остаток интерполирования представим контурным интегралом

$$r_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\omega_n(x)}{\omega_n(z)} \frac{f(z)}{z-x} dz.$$

Ввиду того, что x и $x_k^{(n)}$ лежат на $[a, b]$ и z лежит на l , будет выполняться неравенство

$$\left| \frac{x - x_k^{(n)}}{z - x_k^{(n)}} \right| < 1.$$

Более того, наверное существует число $q < 1$, не зависящее от $x, x_k^{(n)} \in [a, b]$ и $z \in l$, такое, что

$$\left| \frac{x - x_k^{(n)}}{z - x_k^{(n)}} \right| \leq q < 1.$$

Поэтому при всяких $x \in [a, b]$ и $z \in l$ будет

$$\left| \frac{\omega_n(x)}{\omega_n(z)} \right| \leq q^n,$$

и для остатка квадратуры получится оценка

$$|r_n(x)| \leq \frac{q^n}{2\pi} \max_{z \in l} \int_l \frac{|f(z)|}{|z-x|} ds = A_0 q^n.$$

Отсюда следует, что $r_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно x .

Убедимся теперь в том, что область регулярности κ является наименьшей и не может быть сужена. Для этого достаточно показать, что, какова бы ни была точка $\alpha \in \kappa$, всегда найдется такая функция f , регулярная в κ , везде, кроме точки α , и такая система узлов $x_k^{(n)}$, что интерполяционный процесс для f будет расходиться в некоторой точке $x \in [a, b]$.

Пусть, в самом деле, α есть любая точка κ . Мы вправе считать, что α лежит вне $[a, b]$. Рассмотрим функцию $f = \frac{1}{z-\alpha}$. Она регулярна на всей

плоскости z , кроме точки $z = \alpha$. За контур l в интегральном представлении остатка $r_n(x)$ примем линию, состоящую из окружности Γ большого радиуса с центром, например, в точке a , из малой окружности γ около точки α и из разреза, соединяющего Γ и γ .

Интегралы по сторонам разреза сократятся и мы получим

$$r_n(x) = r_n\left(\frac{1}{z-\alpha}, x\right) = \frac{\omega_n(x)}{2\pi i} \int_{\Gamma+\gamma} \frac{dz}{\omega_n(z)(z-\alpha)(z-x)}.$$

Интеграл по Γ равен нулю, ввиду того, что интегрируемая функция $\frac{1}{\omega_n(z)(z-\alpha)(z-x)}$ имеет на бесконечности нуль выше второй кратности. Интеграл по γ берется в направлении по движению часовой стрелки и равен вычету в точке α интегрируемой функции, умноженному на $-2\pi i$

$$r_n\left(\frac{1}{z-\alpha}, x\right) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n(\alpha)(x-\alpha)}.$$

Так как $\alpha \in \mathbb{C}$, наверное существуют такие x и t , лежащие на $[a, b]$, что $\left|\frac{x-t}{\alpha-t}\right| \geq 1$. Фиксируем значение x и возьмем все узлы интерполирования совпадающими с t . Интерполирование должно выполняться по значениям $f = \frac{1}{z-\alpha}$ и ее производных до порядка $n-1$ в точке t . Интерполирующий многочлен будет отрезком тейлорова ряда для $\frac{1}{z-\alpha}$ около точки t . Многочлен $\omega_n(z)$ равен

$$\omega_n(z) = (z-t)^n.$$

Остаток интерполирования имеет значение

$$r_n\left(\frac{1}{z-\alpha}, x\right) = \left(\frac{x-t}{\alpha-t}\right)^n \frac{1}{x-\alpha}.$$

Ввиду $\left|\frac{x-t}{\alpha-t}\right| \geq 1$, r_n при $n \rightarrow \infty$ не будет стремиться к нулю и интерполирование функции $\frac{1}{z-\alpha}$ в точке x будет расходящимся.

Мы указали пример расходящегося эрмитовского интерполирования с одним n -кратным узлом. Но совершенно ясно, что если $x_k^{(n)}$ ($k = 1, \dots, n$) выбрать весьма близко к t и считать, что при $n \rightarrow \infty$ узлы $x_k^{(n)}$ достаточно быстро будут приближаться к t , можно построить пример расходящегося интерполяционного процесса с разными узлами. Вторая часть теоремы доказана.

Из изложенного сразу же получается теорема о сходимости квадратурного процесса.

Теорема 4. Если f есть аналитическая функция, регулярная в области γ , интерполяционный квадратурный процесс, определяемый равенством (12.2.1), сходится

$$R_n(f) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

каковы бы ни были узлы $x_k^{(n)}$ и какова бы ни была функция $\sigma(x)$ с ограниченным изменением на $[a, b]$.

Область регулярности χ есть наименьшая область, обеспечивающая сходимость квадратурного процесса (12.2.1) при любых узлах $x_k^{(n)}$ и произвольной функции $\sigma(x)$.

Доказательство. Если f регулярна в χ , то остаток интерполирования ее при любых узлах $x_k^{(n)}$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно x . Поэтому остаток квадратуры $R_n(f) = \int_a^b r_n(x) d\sigma(x)$ также будет при $n \rightarrow \infty$ стремиться к нулю, какова бы ни была функция $\sigma(x)$ с ограниченным изменением на $[a, b]$.

Для доказательства второй части утверждения теоремы достаточно показать, что если из χ отбросить хотя бы одну точку, то найдутся такие функции f и σ и такие узлы $x_k^{(n)}$, что $R_n(f)$ не будет стремиться к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Выберем функцию $\sigma(x)$ кусочно постоянной, имеющей единственный скачок величины 1 в некоторой точке x отрезка $[a, b]$. Тогда

$$R_n(f) = \int_a^b r_n(x) d\sigma(x) = r_n(x).$$

Для такой $\sigma(x)$ сходимость квадратурного процесса равносильна сходимости интерполирования в точке x . Но, как видно из доказательства предыдущей теоремы, если из χ удалить хоть одну точку a , то для функции $f = \frac{1}{z-a}$ можно указать такую точку x и такие узлы $x_k^{(n)}$, что $r_n(x)$ не будет стремиться к нулю при $n \rightarrow \infty$ и квадратурный процесс, следовательно, будет расходиться.

С целью упростить запись, будем считать, что отрезок интегрирования $[a, b]$ приведен к $[-1, 1]$. Функция распределения $\mu(x)$ называется функцией Чебышева, если

$$\mu(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \quad (12.2.5)$$

Пусть матрица X имеет предельную функцию распределения узлов и эта функция есть (12.2.5). Так будет, например, в том случае, когда за узлы $x_k^{(n)}$ ($k = 1, \dots, n$; $n = 1, 2, \dots$) принимаются корни системы многочленов, ортогональных на отрезке $[-1, 1]$ с любой суммируемой почти везде положительной весовой функцией $p(x)$. С таким выбором узлов выше мы встречались при построении квадратурных формул, имеющих наивысшую алгебраическую степень точности.

Рассмотрим логарифмический потенциал

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|z-t|} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \quad (12.2.6)$$

$u(z)$ есть действительная часть функции комплексной переменной

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \lg \frac{1}{z-t} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \quad (12.2.7)$$

В комплексной плоскости z проведем разрез вдоль действительной оси от точки 1 к $-\infty$ и выберем ту ветвь логарифма, для которой $\arg(z-t)=0$ при действительных z , больших чем t ,

$$F'(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dt}{(z-t)\sqrt{1-t^2}}.$$

Последний интеграл легко вычисляется путем нахождения первообразной функции и имеет значение

$$F'(z) = -\frac{1}{\sqrt{z^2-1}},$$

причем выбирается та ветвь корня, которая принимает положительные значения при $z > 1$.

$$F(z) = \lg \frac{C}{z + \sqrt{z^2-1}}.$$

Постоянная C находится из условия, что функция (12.2.7) при больших z имеет представление вида

$$F(z) = \lg \frac{1}{z} + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

Это дает $C=2$ и окончательно

$$\begin{aligned} F(z) &= \lg \frac{2}{z + \sqrt{z^2-1}}, \\ u(z) &= \lg \frac{2}{|z + \sqrt{z^2-1}|}. \end{aligned} \quad (12.2.8)$$

Линии уровня

$$u(z) = C$$

при $C < \lg 2$ будут замкнутыми линиями, охватывающими отрезок $[-1, 1]$. При $C = \lg 2$ линия уровня совпадает с самим отрезком $[-1, 1]$. Множество β будет состоять только из отрезка интегрирования $[-1, 1]$. Последнее дает возможность высказать следующую теорему.

Теорема 5. Если матрица X имеет в качестве предельной функции распределения узлов функцию Чебышева (12.2.5), то:

1) соответствующий ей интерполяционный процесс сходится для всякой функции, аналитической на $[-1, +1]$ и при этом равномерно относительно $x \in [-1, 1]$;

2) *квадратурный процесс, определяемый равенством (12.2.1), при $[a, b] = [-1, 1]$ сходится для любой функции $f(x)$, аналитической на $[-1, 1]$, какова бы ни была функция $\sigma(x)$ с ограниченным изменением на $[-1, 1]$.*

В связи с этим весьма интересно отметить, что верны теоремы, которые могут быть названы обратными для только что установленной теоремы. Докажем сейчас первую из таких теорем.

Теорема *) 6. *Если матрица X такова, что интерполирование по узлам $x_k^{(n)}$ ($k = 1, \dots, n$; $n = 1, 2, \dots$) сходится во всех точках отрезка $[-1, 1]$ для всякой функции f , аналитической на $[-1, 1]$, то для матрицы X существует предельная функция распределения узлов и это есть функция (12.2.5).*

Для доказательства нам потребуется ознакомиться с некоторыми свойствами логарифмического потенциала. Рассмотрим последовательность функций распределения, отвечающих строкам матрицы X : $\mu_1(x), \mu_2(x), \dots$. По теореме Хелли **), из нее всегда можно выбрать частичную последовательность, сходящуюся в основном к некоторой функции распределения. Последнюю мы обозначим $\mu(x)$. В дальнейшем будем считать, что индекс n пробегает такую последовательность целых чисел, для которых $\mu_n(x) \rightarrow \mu(x)$ в осн.

Теорема будет доказана, если мы установим, что $\mu(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Интеграл

$$u(x) = \int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|x-t|} d\mu(t), \quad (12.2.9)$$

при x , лежащем на отрезке $[-1, 1]$, является несобственным и мы условимся в следующем его понимании. Введем функцию $\lg_N x$, определив ее равенствами

$$\lg_N x = \begin{cases} \lg x & \text{при } \lg x \leq N \\ N & \text{при } \lg x > N. \end{cases}$$

Функция $\lg_N \frac{1}{|x-t|}$ ограничена и непрерывна при $t \in [-1, 1]$. Интеграл $\int_{-1}^1 \lg_N \frac{1}{|x-t|} d\mu(t)$ есть неубывающая функция N . По определению полагаем

$$U(x) = \int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|x-t|} d\mu(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \lg_N \frac{1}{|x-t|} d\mu(t).$$

Лемма 1. *Если $\mu(t)$ имеет в точке $x \in [-1, 1]$ производную, то интеграл (12.2.8) в этой точке конечен.*

*) L. Kalmár, Az interpolációról, Mathematikai es physikai lapok. 1926, 32, 120, где аналогичная теорема доказана для более общего утверждения.

**) В. И. Гливиенко, Интеграл Стильеса, ОНТИ, 1936, n° 13.

Доказательство. Пусть x лежит внутри $[-1, 1]$. Считая N большим, выделим около точки x отрезок $x - \delta \leq t \leq x + \delta$, где $\delta = e^{-N}$,

$$u(x) = \int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|x-t|} d\mu(t) = \\ = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-1}^{x-\delta} \lg \frac{1}{x-t} d\mu + \int_{x+\delta}^1 \lg \frac{1}{t-x} d\mu + N [\mu(x+\delta) - \mu(x-\delta)] \right\}.$$

После интегрирования по частям в фигурных скобках, получим, если принять во внимание, что $\lg \delta = -N$, $\mu(1) = 1$, $\mu(-1) = 0$,

$$u(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \lg \frac{1}{1-x} + \int_{-1}^{x-\delta} \frac{\mu(t)}{x-t} dt + \int_{x+\delta}^1 \frac{\mu(t)}{x-t} dt \right\} = \\ = \lg \frac{1}{1-x} + \text{чл. гн.} \int_{-1}^1 \frac{\mu(t)}{x-t} dt.$$

Так как $\mu(t)$ в точке x имеет производную, гл. зн. $\int_{-1}^1 \frac{\mu(t)}{x-t} dt$ существует и имеет конечную величину.

Аналогично проверяется утверждение леммы в случае, когда точка x лежит в каком-либо из концов отрезка $[-1, 1]$.

Так как производная $\mu'(t)$ существует почти везде, интеграл (12.2.8) имеет на $[-1, 1]$ почти везде конечное значение.

Рассмотрим логарифмический потенциал $u(z) = \int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|z-t|} d\mu(t)$.

Пусть x лежит на отрезке $[-1, 1]$ и будем считать, что точка $z = x + iy$ приближается к x по вертикали.

Лемма 2. При любом значении $x \in [-1, 1]$ верно равенство

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|z-t|} d\mu(t) = \int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|x-t|} d\mu(t) \quad (12.2.10)$$

независимо от того, конечное или бесконечное значение имеет интеграл, стоящий справа.

Доказательство. Выделим около x малый отрезок $x - \varepsilon \leq t \leq x + \varepsilon$ и обозначим E_ε часть $[-1, 1]$, остающаяся после удаления из $[-1, 1]$ отрезка $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$. При малых значениях y для всяких $t \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$

$|z - t| < 1$. Тогда $\lg \frac{1}{|z - t|} > 0$ и так как $\mu(t)$ неубывающая функция, то должно быть верным неравенство

$$\int_{E_\varepsilon} \lg \frac{1}{|z - t|} d\mu(t) \leq \int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|z - t|} d\mu(t).$$

В интеграле по E_ε допустим предельный переход при $y \rightarrow 0$ под знаком интеграла. Если принять, кроме того, во внимание, что $\lg \frac{1}{|z - t|} < \lg \frac{1}{|x - t|}$, после предельного перехода получим

$$\begin{aligned} \int_{E_\varepsilon} \lg \frac{1}{|x - t|} d\mu(t) &\leq \liminf_{y \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|z - t|} d\mu(t) \leq \\ &\leq \limsup_{y \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|z - t|} d\mu(t) \leq \int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|x - t|} d\mu(t). \end{aligned}$$

Но при $\varepsilon \rightarrow 0$ $\int_{E_\varepsilon} \lg \frac{1}{|x - t|} d\mu(t) \rightarrow \int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|x - t|} d\mu(t)$ независимо от того, конечное или бесконечное значение имеет последний интеграл. Поэтому $\liminf_{y \rightarrow 0} \int_{-1}^1$ и $\limsup_{y \rightarrow 0} \int_{-1}^1$ должны совпадать и иметь значение, одинаковое с $\int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|x - t|} d\mu(t)$.

Перейдем к изучению $u_n(x) = \int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|x - t|} d\mu_n(t)$. Если $x = x_k^{(n)}$, то

полагаем $u_n(x) = \infty$.

Лемма 3. Почти везде на отрезке $-1 \leq x \leq 1$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|x - t|} d\mu_n(t) = \int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|x - t|} d\mu(t). \quad (12.2.11)$$

Доказательство. По определению функции $\lg_N x$ верно неравенство

$$\int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|x - t|} d\mu_n(t) \leq \int_{-1}^1 \lg_N \frac{1}{|x - t|} d\mu_n(t).$$

Предельный переход при $n \rightarrow \infty$ дает

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|x-t|} d\mu_n(t) \cong \int_{-1}^1 \lg_N \frac{1}{|x-t|} d\mu(t).$$

Ввиду того, что полученное неравенство верно при всяких N , отсюда следует

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|x-t|} d\mu_n(t) \cong \int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|x-t|} d\mu(t). \quad (12.2.12)$$

Найдем теперь оценку сверху величины, стоящей слева в (12.2.12).

Функция $\int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|x-t|} d\mu_n(t)$ ограничена снизу числом $\lg \frac{1}{2}$ и при любых $\alpha, \beta \in [-1, 1]$, ввиду теоремы Фату, верны неравенства:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|x-t|} d\mu_n(t) dx &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|x-t|} d\mu_n(t) = \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 d\mu_n(t) \int_{\alpha}^{\beta} \lg \frac{1}{|x-t|} dx. \end{aligned}$$

В последнем интеграле допустим предельный переход под знаком интеграла, так как $\int_{\alpha}^{\beta} \lg \frac{1}{|x-t|} dx$ есть непрерывная функция t :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|x-t|} d\mu_n(t) dx \leq \int_{-1}^1 d\mu(t) \int_{\alpha}^{\beta} \lg \frac{1}{|x-t|} dx.$$

Функция $\lg \frac{1}{|x-t|}$ ограничена снизу числом $\lg \frac{1}{2}$ и, на основании теоремы Фубини, в правой части неравенства можно изменить порядок интегрирования

$$\int_{\alpha}^{\beta} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|x-t|} d\mu_n(t) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|x-t|} d\mu(t).$$

Неравенство верно при всяких $\alpha, \beta \in [-1, 1]$. Следовательно, почти везде на $-1 \leq x \leq 1$ должно быть

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|x-t|} d\mu_n(t) \leq \int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|x-t|} d\mu(t) \dots \quad (12.2.12*)$$

Из сравнения (12.2.12) и (12.2.12*) сразу же вытекает утверждение леммы 3.

Обозначим E множество точек на $[-1, 1]$, в которых выполняется (12.2.11) и, кроме того, интеграл $\int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|x-t|}$ конечен. E отличается от отрезка $[-1, 1]$ разве лишь на множество меры нуль.

Лемма 4. Если матрица X такова, что при n , пробегающем указанные выше значения, остаток интерполирования $r_n(x)$ стремится к нулю при любом $x \in [-1, 1]$ и для любой функции вида $f = \frac{1}{x-a}$, где a лежит вне отрезка $[-1, 1]$, то потенциал (12.2.9) сохраняет постоянные значения на множестве E .

Доказательство. Допустим противоположное и покажем, что тогда наверное существует функция вида $f = \frac{1}{x-a}$, для которой остаток интерполирования не будет стремиться к нулю.

Пусть x_1 и x_2 два значения, принадлежащие E , для которых (12.2.9) принимает разные значения. Для определенности записи будем считать

$$u(x_1) < u(x_2).$$

Обозначим $u(x_2) - u(x_1) = \delta$ и возьмем произвольное $\varepsilon < \delta$. Рассмотрим прямую линию, проходящую через точку x_2 параллельно мнимой оси. При приближении точки z вдоль этой прямой к x_2 $u(z)$ будет стремиться к $u(x_2)$ по лемме 2. Попутно отметим, что при приближении z к x_2 $\lg \frac{1}{|z-t|}$ для всякого t будет возрастать. Так как, кроме того, $\mu(t)$ есть неубывающая функция, то при приближении z к x_2 $u(z)$ также будет возрастать.

На взятой прямой существует, следовательно, такая точка $z_2 \neq x_2$, что

$$u(x_2) - \frac{1}{3}\varepsilon < u(z_2) < u(x_2).$$

Фиксируем z_2 и построим функцию

$$f(x) = \frac{1}{x - z_2}.$$

Остаток интерполирования ее есть

$$r_n(x) = r_n\left(\frac{1}{x - z_2}, x\right) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n(z_2)(x - z_2)}.$$

Значение остатка в точке $x = x_1$ равно

$$\begin{aligned} r_n(x_1) &= \frac{\omega_n(x_1)}{\omega_n(z_2)(x_1 - z_2)}, \\ |r_n(x_1)| &= \frac{1}{|x_1 - z_2|} \frac{|\omega_n(x_1)|}{|\omega_n(z_2)|} = \\ &= \exp n \left[\int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|z_2 - t|} d\mu_n(t) - \int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|x_1 - t|} d\mu_n(t) \right] = \\ &= \frac{1}{|x_1 - z_2|} e^{n[u_n(z_2) - u_n(x_1)]}. \end{aligned}$$

По лемме 3, существует бесконечная последовательность значений n , для которых

$$|u_n(x_1) - u(x_1)| < \frac{1}{3} \varepsilon.$$

Поэтому наверное существует также бесконечное множество n , для которых

$$\begin{aligned} u_n(z_0) - u_n(x_1) &= u(z_0) - u(x_1) - [u(z_0) - u_n(z_0)] - [u_n(x_1) - u(x_1)] > \\ &> \delta - \frac{1}{3} \varepsilon - \frac{1}{3} \varepsilon - \frac{1}{3} \varepsilon = \delta - \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Для таких n

$$|r_n(x_1)| > \frac{1}{|x_1 - z_0|} e^{n(\delta - \varepsilon)}$$

и интерполирование функции $f = \frac{1}{x - z_0}$ в точке x_1 , следовательно, расходится.

В доказываемой теореме считалось, что интерполирование сходится на отрезке $[-1, 1]$ для всякой функции, аналитической на $[-1, 1]$. В частности это будет для функций вида $f = \frac{1}{x - \alpha}$, $\alpha \in [-1, 1]$ и, в условиях этой теоремы, $u(x)$ также будет сохранять постоянное значение на E , и, следовательно, почти везде на $[-1, 1]$.

Чтобы завершить доказательство теоремы, нам осталось еще доказать следующую лемму.

Лемма 5. Если логарифмический потенциал (12.2.9) почти везде на $[-1, 1]$ сохраняет постоянное значение, то $\mu(t)$ есть функция распределения Чебышева:

$$\mu(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Доказательство. Рассмотрим потенциал

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|z-t|} d\mu(t) \quad (12.2.13)$$

всюду в плоскости z . С целью воспользоваться для доказательства леммы известными теоремами теории интеграла Пуассона и тригонометрических рядов, перейдем от плоскости z к кругу.

Проведем в плоскости z разрез по прямолинейному отрезку $[-1, 1]$ и будем различать два борта разреза. Преобразуем (12.2.13) в интеграл, взятый по контуру λ , состоящему из обоих бортов разреза. Для этого достаточно представить (12.2.13) в форме

$$u(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \lg \frac{1}{|z-t|} d\mu(t) - \frac{1}{2} \int_1^{-1} \lg \frac{1}{|z-t|} d\mu(t)$$

и ввести функцию $v(t)$, определив ее на λ равенствами

$$v(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu(t) & \text{на верхнем борте разреза} \\ 1 - \frac{1}{2} \mu(t) & \text{на нижнем борте разреза.} \end{cases} \quad (12.2.14)$$

Тогда

$$u(z) = \int_{\lambda} \lg \frac{1}{|z-t|} dv(t). \quad (12.2.15)$$

Интегрирование по верхнему борту выполняется от точки -1 к 1 и по нижнему борту — в обратном направлении.

В плоскости $\zeta = \rho e^{i\varphi}$ возьмем круг $|\zeta| \leq 1$. Он преобразуется на плоскость z с разрезом $[-1, 1]$ при помощи функции

$$z = \frac{1}{2} (\zeta + \zeta^{-1}).$$

Точка $\tau = e^{i\psi}$ окружности перейдет в точку $t = \frac{1}{2} (\tau + \tau^{-1}) = \frac{1}{2} (e^{i\psi} + e^{-i\psi}) = \cos \psi$. Изменению ψ от $-\pi$ до π будет отвечать обход контура λ в указанном выше направлении. Функция $v(t)$, определенная на λ , перейдет в функцию

$$v(t) = v(\cos \psi) = F(\psi), \quad -\pi \leq \psi \leq \pi$$

полярного угла ψ .

Контурный интеграл (12.2.15) при переходе к плоскости ζ преобразуется в следующий интеграл по окружности круга

$$\begin{aligned} u(z) &= \int_{-\pi}^{\pi} \lg \left| \frac{2\zeta}{1 - 2\zeta \cos \psi + \zeta^2} \right| dF(\psi) = \\ &= \lg 2 |\zeta| + \int_{-\pi}^{\pi} \lg \frac{1}{|\zeta - e^{i\psi}| |\zeta - e^{-i\psi}|} dF(\psi) = \lg 2 |\zeta| + I(\zeta). \end{aligned}$$

$I(\zeta)$ разлагается на сумму двух логарифмических потенциалов, гармонических в круге $|\zeta| < 1$.

$$I(\zeta) = \int_{-\pi}^{\pi} \lg \frac{1}{|\zeta - e^{i\psi}|} dF(\psi) + \int_{-\pi}^{\pi} \lg \frac{1}{|\zeta - e^{-i\psi}|} dF(\psi) = I_1(\zeta) + I_2(\zeta).$$

Ввиду равноправности $I_1(\zeta)$ и $I_2(\zeta)$, достаточно изучить только потенциал $I_1(\zeta)$. Можно проверить, что функция $I_1(\zeta)$ представима интегралом Пуассона —

Лебега *). Пусть E есть любое измеримое множество на отрезке $[-\pi, \pi]$ с мерой $mE \leq \delta$.

$$\begin{aligned} \int_E I_1(\rho e^{i\varphi}) d\varphi &= \int_E \int_{-\pi}^{\pi} \lg \frac{1}{|\rho e^{i\varphi} - e^{i\psi}|} dF(\psi) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_E \lg \frac{1}{|\rho e^{i\varphi} - e^{i\psi}|} d\varphi \right] dF(\psi). \end{aligned}$$

Изменение порядка интегрирования было возможным в силу теоремы Фубини, так как функция $\lg \frac{1}{|\zeta - e^{i\psi}|}$ ограничена снизу числом $\lg \frac{1}{2}$. Для внутреннего интеграла верны оценки

$$\left| \int_E \lg \frac{1}{|\rho e^{i\varphi} - e^{i\psi}|} d\varphi \right| \leq \int_E \lg \frac{1}{|\sin(\varphi - \psi)|} d\varphi \leq \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \lg \frac{1}{|\sin x|} dx.$$

Поэтому наверное для всякого заданного $\varepsilon > 0$ можно $\delta(\varepsilon)$ выбрать так, чтобы было

$$\left| \int_E I_1(\rho e^{i\varphi}) d\varphi \right| < \varepsilon \quad \rho < 1.$$

Отсюда, по известному признаку, указанному в сноске, следует, что $I_1(\zeta)$ представима интегралом Пуассона — Лебега.

$I_2(\zeta)$, а следовательно и $I(\zeta)$, также будут представимы интегралом Пуассона — Лебега.

При приближении точки $z = x + iy$ к отрезку $[-1, 1]$ вдоль прямой, параллельной мнимой оси, $u(z)$ будет почти при всяких x стремиться к постоянной величине. Указанные прямые, при переходе к кругу $|\zeta| < 1$, преобразуются в некоторые пути, ортогональные к окружности $|\zeta| = 1$. При приближении вдоль них к границе круга $u(z)$ почти всюду будет стремиться

*) Функция $v(\zeta)$ называется представимой интегралом Пуассона — Лебега, если она гармоническая в круге $|\zeta| < 1$ и если существует такая суммируемая на $[-\pi, \pi]$ функция $f(\varphi)$, что $u(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\psi - \varphi) + \rho^2} d\psi$.

Известна теорема: для того, чтобы гармоническая в круге $|\zeta| < 1$ функция $v(\zeta)$ была представима интегралом Пуассона — Лебега, необходимо и достаточно, чтобы семейство функций $F_\rho(\alpha) = \int_0^\alpha v(\rho e^{i\varphi}) d\varphi$ было равномерно абсолютно непрерывно по α , т. е. чтобы при всех $\rho < 1$ и $\varepsilon > 0$ существовало такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всякого множества E с мерой $mE < \delta(\varepsilon)$ было $\left| \int_E v(\rho e^{i\varphi}) d\varphi \right| < \varepsilon$. Известно также, что когда точка ζ

приближается к некоторой точке $\psi = \psi_0$ окружности по любому пути, некасательному к окружности, то при почти всех значениях ψ_0 $u(\zeta) \rightarrow f(\psi_0)$. См., напр. И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, гл. 1, § 3, Гостехиздат, 1950.

к постоянной величине, и так как $\lg 2|\zeta|$ будет при этом стремиться к $\lg 2$, то $I(\zeta)$ будет почти всюду на окружности иметь предельные значения, равные постоянной величине. Ввиду того, что $I(\zeta)$ представима через них интегралом Пуассона — Лебега, $I(\zeta)$ постоянна всюду в круге. Но, очевидно, $I(0) = 0$ и, следовательно, всюду в круге

$$I(\zeta) = 0.$$

Легко видеть, что разложения функций $\lg \frac{1}{|\zeta - e^{i\psi}|}$ и $\lg \frac{1}{|\zeta - e^{-i\psi}|}$, $\zeta = \rho e^{i\varphi}$ в ряды по степеням ρ при $\rho < 1$ суть

$$\lg \frac{1}{|\zeta - e^{i\psi}|} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \rho^k \cos k(\varphi - \psi)$$

и

$$\lg \frac{1}{|\zeta - e^{-i\psi}|} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \rho^k \cos k(\varphi + \psi).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I(\varphi) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \rho^k [\cos k(\varphi - \psi) + \cos k(\varphi + \psi)] dF(\psi) = \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \rho^k \cos k\varphi \int_{-\pi}^{\pi} \cos k\psi dF(\psi) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos k\psi dF(\psi) &= \left[F(\psi) \cos k\psi + k \int_{-\pi}^{\pi} F(\psi) \sin k\psi d\psi \right]_{-\pi}^{\pi} = \\ &= (-1)^k [F(\pi) - F(-\pi)] + k\pi b_k = 0. \end{aligned}$$

Здесь b_k обозначен коэффициент Фурье при $\sin k\psi$ функции $F(\psi)$. $F(\pi) = 1$, $F(-\pi) = 0$, следовательно

$$b_k = -\frac{(-1)^k}{k\pi}.$$

Из определений функции $\gamma(t)$ и $F(\psi)$ видно, что

$$F(\psi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu(\cos \psi), & -\pi \leq \psi \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{2} \mu(\cos \psi), & 0 \leq \psi \leq \pi. \end{cases}$$

Четная часть $F(\psi)$ есть

$$\frac{1}{2} [F(\psi) + F(-\psi)] = \frac{1}{2}.$$

Коэффициенты Фурье a_k при $\cos k\psi$ для $F(\psi)$ будут иметь значения

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Таким образом, для $F(\psi)$ получим

$$F(\psi) = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\pi} \sin k\psi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \psi.$$

Если вернуться к плоскости z и переменной $t = \cos \psi$, то несложные вычисления покажут, что

$$\mu(t) = 1 - \frac{1}{\pi} \arccos t = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Этим теорема доказана.

Сходная с ней теорема в теории квадратур приведена ниже.

Теорема 7. Если интерполяционный квадратурный процесс, определяемый равенствами (12.2.1) при $[a, b] = [-1, 1]$, сходится при всякой функции $\sigma(x)$ с ограниченным изменением и для любой функции $f(x)$, аналитической на $[-1, 1]$, то для матрицы узлов X существует предельная функция распределения узлов и она совпадает с (12.2.5).

Доказательство. Рассмотрим остаток квадратуры

$$R_n(f) = \int_{-1}^1 r_n(x) d\sigma(x).$$

Здесь $r_n(x)$ есть остаток интерполирования. Возьмем произвольную точку x на $[-1, 1]$. За σ примем кусочно постоянную функцию с единственным скачком величины 1 в точке x . Для такой σ $R_n(f) = r_n(x)$ и сходимость квадратурного процесса равносильна сходимости интерполирования. После этого, чтобы закончить доказательство, достаточно сослаться на предыдущую теорему.

§ 3. Сходимость общего квадратурного процесса

Перейдем к изучению общего квадратурного процесса (12.1.3), определяемого матрицей узлов (12.1.1) и матрицей коэффициентов (12.1.2). Вес $p(x)$ может быть любой суммируемой функцией. Будем считать, что задан некоторый класс F функций f . Нашей целью будет выяснить условия, которым следует подчинить X и A для того, чтобы квадратурный процесс сходиллся для всех функций заданного класса. Такая задача изучалась для многих классов F . Мы остановимся лишь на некоторых результатах исследований такого рода, наиболее простых и важных для теории квадратур.

Всюду в рамках этого параграфа отрезок интегрирования считается конечным.

Теорема 8. Для того, чтобы квадратурный процесс (12.1.3) сходиллся для всякой функции f , непрерывной на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно выполнение двух условий:

- 1) процесс сходится для всякого многочлена;

2) существует число K такое, что при $n = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство *):

$$\sum_{k=1}^n |A_k^{(n)}| \leq K. \quad (12.3.1)$$

Доказательство. Если на множестве функций непрерывных на $[a, b]$ определить норму следующим способом: $\|f\| = \max_{[a, b]} |f(x)|$, то такое множество мы можем рассматривать как линейное нормированное пространство C типа B . Квадратурная сумма $Q_n(f) = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$ и интеграл $I(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx$ есть два линейных функционала, определенных на C . Значения $Q_n(f)$ и $I(f)$ принадлежат числовому пространству, которое также является пространством типа B .

К задаче выяснения условий сходимости квадратурного процесса $Q_n(f) \rightarrow I(f)$, $n \rightarrow \infty$ может быть применена теорема С. Банаха о сходимости последовательности линейных операторов (см. гл. 4 § 3). Напомним, что необходимым и достаточным условием сходимости является выполнение двух требований: 1) сходимость на множестве элементов, всюду плотном в пространстве, где определены операторы, и 2) ограниченность в совокупности норм операторов.

За множество всюду плотное в C , по теореме Вейерштрасса о возможности сколь угодно точного равномерного приближения всякой непрерывной функции многочленами, может быть принято множество алгебраических многочленов и первым требованием в рассматриваемой задаче будет требование сходимости квадратурного процесса для всякого многочлена.

Норма функционала $Q_n(f)$ имеет значение

$$\|Q_n\| = \sup_{|f| \leq 1} \left| \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \right| = \sum_{k=1}^n |A_k^{(n)}|.$$

Выполнение неравенства (12.3.1) есть требование ограниченности в совокупности норм функционалов $Q_n(f)$. Высказанная теорема этим доказана.

Две формулированные ниже теоремы являются простыми следствиями теоремы 8.

Теорема 9. Если все коэффициенты $A_k^{(n)}$ неотрицательны, то для сходимости квадратурного процесса для любой непрерывной функции необходимо и достаточно, чтобы он сходил для всякого многочлена.

*) Достаточность условий была доказана В. А. Стекловым, необходимостью — Г. Пойа.

Доказательство. Необходимость условия теоремы очевидна. Достаточность же условия видна из того, что для многочлена нулевой степени $f = 1$ должно быть

$$Q_n(1) \rightarrow \int_a^b p dx, \quad n \rightarrow \infty.$$

Поэтому значения $Q_n(1)$ $n = 1, 2, \dots$ ограничены:

$$Q_n(1) \leq K.$$

Но

$$\sum_{k=1}^n |A_k^{(n)}| = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} = Q_n(1) \leq K,$$

и поэтому выполняется не только первое, но и второе условие теоремы 8 и процесс сходится для всякой непрерывной функции.

Теорема 10. Для сходимости интерполяционного квадратурного процесса для любой непрерывной функции необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\sum_{k=1}^n |A_k^{(n)}| \leq K < \infty.$$

Второе условие теоремы 8 является также условием теоремы 10, первое же условие наверное выполнено, так как если f есть многочлен, то когда n станет больше степени многочлена, будет выпол-

няться равенство $Q_n(f) = \int_a^b pf dx$.

Выясним теперь условия сходимости квадратурного процесса в классах дифференцируемых функций.

Условимся, как выше, нумеровать узлы в порядке роста и введем кусочно постоянную функцию $F_{n0}(x)$, характеризующую распределение узлов и значения коэффициентов:

$$F_{n0}(x) = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} E(x - x_k^{(n)}).$$

Наряду с ней будем рассматривать первообразные функции любого порядка r , удовлетворяющие начальным условиям $F_{nr}^{(j)}(a) = 0$ ($j = 0, 1, \dots, r-1$):

$$\begin{aligned} F_{nr}(x) &= \int_a^x F_{n0}(t) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt = \\ &= \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} E(x - x_k^{(n)}) \frac{(x - x_k^{(n)})^r}{r!}. \end{aligned} \quad (12.3.2)$$

Теорема 11. Для того, чтобы квадратурный процесс (12.3.1) при $n \rightarrow \infty$ сходиллся для всякой функции $f \in C_r[a, b]$, необходимо и достаточно выполнение условий:

- 1) процесс сходится для всякого многочлена;
- 2) полные вариации первообразных функций порядка r $F_{nr}(x)$ $n = 1, 2, \dots$ ограничены в совокупности:

$$\text{Var} F_{n,r}(t) \leq M.$$

Доказательство. Если $f \in C_r[a, b]$ при $r \geq 1$, то, разлагая f по формуле Тейлора около точки b , мы сможем представить функцию в форме

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(b)}{i!} (x-b)^i + \int_b^x f^{(r)}(t) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt = \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(b)}{i!} (x-b)^i + (-1)^r \int_a^b f^{(r)}(t) E(t-x) \frac{(t-x)^{r-1}}{(r-1)!} dt. \end{aligned}$$

Наоборот, каковы бы ни были числа $f^{(i)}(b)$ и непрерывная на $[a, b]$ функция $f^{(r)}(t)$, $f(x)$, определенная такой формулой, принадлежит $C_r[a, b]$.

Остаток квадратуры $R_n(f)$ дается следующей формулой, характерной для класса $C_r[a, b]$:

$$\begin{aligned} R_n(f) &= \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(b)}{i!} R_n[(x-b)^i] + \\ &+ (-1)^r \int_a^b f^{(r)}(t) \left[\int_a^b p(x) E(t-x) \frac{(t-x)^{r-1}}{(r-1)!} dx - \right. \\ &- \left. \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} E(t-x_k^{(n)}) \frac{(t-x_k^{(n)})^{r-1}}{(r-1)!} \right] dt = \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(b)}{i!} R_n[(x-b)^i] + \\ &+ (-1)^r \int_a^b f^{(r)}(t) \left[\int_a^t p(x) \frac{(t-x)^{r-1}}{(r-1)!} dx - F_{n,r-1}(t) \right] dt \dots \quad (12.3.3) \end{aligned}$$

Сходимость квадратурного процесса, ввиду независимости параметров формулы $f^{(i)}(b)$ ($i = 0, 1, \dots, r-1$) и $f^{(r)}(t)$, равносильна тому, что при $n \rightarrow \infty$

$$R_n[(x-b)^i] \rightarrow 0, \quad i = 0, 1, \dots, r-1 \quad (12.3.4)$$

и

$$R_n^*(f^{(r)}) = \int_a^b f^{(r)}(t) \left[\int_a^t p(x) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dx - F_{n,r-1}(t) \right] dt \rightarrow 0. \quad (12.3.5)$$

(12.3.4) означают, что квадратурный процесс должен сходиться для всякого многочлена степени $\leq r-1$.

Условие (12.3.5) должно выполняться при любой непрерывной функции $f^{(r)}$. Если на множестве функций $f^{(r)}$ ввести норму $\|f^{(r)}\| = \max_t |f^{(r)}(t)|$, то мы можем его рассматривать как про-

странство C . По теореме Банаха, стремление $R_n^*(f^{(r)})$ к нулю при $n \rightarrow \infty$ равносильно выполнению двух требований:

1. Функционал $R_n^*(f^{(r)})$ должен стремиться к нулю на множестве элементов, всюду плотном в C . За такое множество можно принять множество многочленов. Но требование $R_n^*(f^{(r)}) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, когда $f^{(r)}$ есть полином любой степени, совместно с (12.3.4) эквивалентно тому, что квадратурный процесс должен сходиться для всякого многочлена.

2. Нормы функционалов $R_n^*(f^{(r)})$, $n = 1, 2, \dots$ должны быть ограничены в совокупности:

$$\|R_n^*\| = \int_a^b \left| \int_a^t p(x) \frac{(t-x)^{r-1}}{(r-1)!} dx - F_{n,r-1}(t) \right| dt \leq L, \quad n = 1, 2, \dots$$

Заметив, что $\int_a^b \left| \int_a^t p \frac{(t-x)^{r-1}}{(r-1)!} dx \right| dt$ не зависит от n , можем

сказать, что ограниченность норм $\|R_n^*\|$ равносильна ограниченности в совокупности интегралов от $|F_{n,r-1}(t)|$:

$$\int_a^b |F_{n,r-1}(t)| dt \leq M, \quad n = 1, 2, \dots$$

Так как $\frac{d}{dt} F_{n,r}(t) = F_{n,r-1}(t)$, последние неравенства означают

$$\text{Var}_a^b F_{n,r}(t) \leq M, \quad n = 1, 2, \dots$$

Можно убедиться в том, что все изложенное остается верным и в случае $r=0$.

Этим закончено доказательство теоремы 11.

Отметим частный случай теоремы. Рассмотрим класс непрерывно дифференцируемых функций на $[a, b]$, что отвечает случаю $r=1$.

$F_{n0}(t)$ есть кусочно постоянная функция, принимающая на участках между узлами $x_k^{(n)}$ указываемые ниже значения:

$$F_{n0}(t) = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} E(t - x_k^{(n)}) = \begin{cases} 0 & \text{при } a \leq t < x_1^{(n)} \\ A_1^{(n)} & \text{при } x_1^{(n)} < t < x_2^{(n)} \\ A_1^{(n)} + A_2^{(n)} & \text{при } x_2^{(n)} < t < x_3^{(n)} \\ \dots & \dots \\ A_1^{(n)} + \dots + A_n^{(n)} & \text{при } x_n^{(n)} < t \leq b \end{cases}$$

Отсюда видно, что

$$\begin{aligned} \text{Var } F_{n1}(t) &= \int_a^b |F_{n0}(t)| dt = |A_1^{(n)}| (x_2^{(n)} - x_1^{(n)}) + |A_1^{(n)} + A_2^{(n)}| \times \\ &\times (x_3^{(n)} - x_2^{(n)}) + \dots + |A_1^{(n)} + \dots + A_n^{(n)}| (b - x_n^{(n)}). \end{aligned}$$

Поэтому можно высказать следующую теорему:

Теорема 12. Для того, чтобы квадратурный процесс (12.1.3) сходиллся для любой непрерывно дифференцируемой функции, необходимо и достаточно выполнение условий:

- 1) процесс сходится для всякого многочлена;
- 2) существует число M такое, что при $n = 1, 2, \dots$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |A_1^{(n)}| (x_2^{(n)} - x_1^{(n)}) + |A_1^{(n)} + A_2^{(n)}| (x_3^{(n)} - x_2^{(n)}) + \dots \\ \dots + |A_1^{(n)} + \dots + A_n^{(n)}| (b - x_n^{(n)}) \leq M. \end{aligned} \quad (12.3.6)$$

Будем говорить, что f принадлежит классу $A_r[a, b]$, $r = 0, 1, \dots$, если производная $f^{(r)}$ порядка r от f есть абсолютно непрерывная функция.

Характерное представление $f \in A_r[a, b]$ без труда строится при помощи формулы Тейлора и может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}(b)}{i!} (x-b)^i + \int_b^x f^{(r+1)}(t) \frac{(x-t)^r}{r!} dt = \\ &= \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}(b)}{i!} (x-b)^i + (-1)^{r+1} \int_a^b f^{(r+1)}(t) E(t-x) \frac{(t-x)^r}{r!} dt. \end{aligned} \quad (12.3.7)$$

Здесь $f^{(i)}(b)$ $i = 0, 1, \dots, r$ могут быть любыми числами и $f^{(r+1)}$ есть произвольная функция, суммируемая на $[a, b]$.

Теорема 13. Для сходимости квадратурного процесса (12.1.3) при всякой функции $f \in A_r[a, b]$ необходимо и достаточно выполнение условий:

- 1) процесс сходится для всякого многочлена,
- 2) первообразные функции $F_{nr}(t)$ порядка r для $F_{n0}(t)$ ограничены в совокупности;

$$|F_{nr}(t)| \leq M, \quad a \leq x \leq b; \quad n = 1, 2, \dots \quad (12.3.8)$$

Доказательство. Если $f \in A_r[a, b]$, для остатка квадратуры $R_n(f)$, при помощи (12.3.7), легко получается выражение

$$R_n(t) = \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}(b)}{i!} R_n[(x-b)^i] + (-1)^{r+1} \int_a^b f^{(r+1)}(t) \times \\ \times \left\{ \int_a^t p(x) \frac{(t-x)^r}{r!} dx - F_{n,r}(t) \right\} dt.$$

Это равенство является структурной формулой остатка $R_n(t)$ для функций $f \in A_r[a, b]$.

Сходимость квадратурного процесса в классе $A_r[a, b]$, ввиду произвола чисел $f^{(i)}(b)$, $i = 0, 1, \dots, r$ и функции $f^{(r+1)}$, равносильно тому, что должно быть

$$R_n[(x-b)^i] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad i = 0, 1, \dots, r \quad (12.3.9)$$

и

$$R_n^*(f^{(r+1)}) = \int_a^b f^{(r+1)}(t) \left\{ \int_a^t p(x) \frac{(t-x)^r}{r!} dx - F_{n,r}(t) \right\} dt \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty. \quad (12.3.10)$$

Дальнейшие рассуждения будут в значительной мере повторять те, которые были проделаны при доказательстве теоремы 8. Введем на множестве производных $f^{(r+1)}$ норму

$$\|f^{(r+1)}\| = \int_a^b |f^{(r+1)}(t)| dt.$$

После этого оно станет нормированным пространством L типа B . К сходимости функционала $R_n^*(f^{(r+1)}) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ применима теорема С. Банаха. За множество всюду плотное в L можно принять множество многочленов. Требование стремления $R_n^*(f^{(r+1)})$ для всякого многочлена $f^{(r+1)}$, совместно с (12.3.9), равносильно требованию сходимости квадратурного процесса для любых многочленов. Норма функционала $R_n^*(f^{(r+1)})$ имеет значение [см. гл. 4, § 2 (4.2.6)]

$$\|R_n^*\| = (b-a) \max_t \left| \int_a^t p(x) \frac{(t-x)^r}{r!} dx - F_{n,r}(t) \right|.$$

Интеграл $\int_a^t p(x) \frac{(t-x)^r}{r!} dx$ не зависит от n и требование ограничен-

ности в совокупности норм $\|R_n^*\|$, $n = 1, 2, \dots$, эквивалентно существованию числа M такого, что при $n = 1, 2, \dots$ будет

$$|F_{n,r}(t)| \leq M, \quad a \leq t \leq b.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим частный случай $r = 0$ и соответствующий ему класс абсолютно непрерывных функций $A_0[a, b]$. Функция $F_{n0}(t)$ кусочно постоянна и на отрезках $[a, x_1^{(n)}], [x_1^{(n)}, x_2^{(n)}], \dots, [x_n^{(n)}, b]$ принимает значения соответственно равные $0, A_1^{(n)}, A_1^{(n)} + A_2^{(n)}, \dots, A_1^{(n)} + \dots + A_n^{(n)}$. Применение общей теоремы V к рассматриваемому частному случаю позволяет высказать следующую теорему*).

Теорема 14. Для сходимости квадратурного процесса (12.1.3) при всякой функции f , абсолютно непрерывной на $[a, b]$, необходимо и достаточно выполнение двух условий:

- 1) процесс сходится для всякого многочлена,
- 2) частичные суммы квадратурных коэффициентов

$$A_1^{(n)}, A_1^{(n)} + A_2^{(n)}, \dots, A_1^{(n)} + A_2^{(n)} + \dots + A_n^{(n)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

ограничены в совокупности:

$$\left| \sum_{k=1}^i A_k^{(n)} \right| \leq M < \infty, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (12.3.11)$$

Изучим условия сходимости еще для одного класса функций. Будем говорить, что f принадлежит классу $V_r[a, b]$, если производная порядка r $f^{(r)}$ имеет ограниченное изменение на $[a, b]$. Структурное представление класса $V_r[a, b]$ для $r \geq 1$ также может быть получено из формулы Тейлора и его можно записать в виде:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}(b)}{i!} (x-b)^i + \int_b^x \frac{(x-t)^r}{r!} df^{(r)}(t) = \\ &= \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}(b)}{i!} (x-b)^i + (-1)^{(r+1)} \int_a^b E(t-x) \frac{(t-x)^r}{r!} df^{(r)}(t). \end{aligned} \quad (12.3.12)$$

Параметрами здесь являются числа $f^{(i)}(b)$, могущие иметь любые значения, и произвольная функция $f^{(r)}$ с ограниченным изменением на $[a, b]$.

Теорема 15. Для сходимости квадратурного процесса (12.1.3) в классе $V_r[a, b]$ при $r \geq 1$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1. Процесс сходится для всех многочленов степени $\leq r$.
2. Первообразные функции $F_{nr}(x)$ порядка r для $F_{n0}(x)$ ограничены в совокупности

$$|F_{nr}(x)| \leq M < \infty, \quad a \leq x \leq b, \quad n = 1, 2, \dots \quad (12.3.13)$$

3. При всех значениях $t \in [a, b]$ должно быть

$$F_{nr}(t) \rightarrow \int_a^t p(x) \frac{(t-x)^r}{r!} dx, \quad n \rightarrow \infty.$$

*). Доказана впервые С. М. Лозинским в немного другой форме. ИАН СССР, сер. матем., 4, 1940.

Доказательство. Если $f \in V_r[a, b]$, остаток квадратуры $R_n(f)$ для нее, при помощи формулы (12.3.12), приводится к следующему виду:

$$R_n(f) = \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}(b)}{i!} R_n[(x-b)^i] + \\ + (-1)^{r+1} \int_a^b \left\{ \int_a^t p(x) \frac{(t-x)^r}{r!} dx - F_{nr}(t) \right\} df^{(r)}(t).$$

Сходимость квадратуры для всех функций из $V_r[a, b]$, в силу независимости структурных параметров $f^{(i)}(b)$ $i = 0, 1, \dots, r$ и $f^{(r+1)}(t)$, равносильна выполнению равенств:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n[(x-b)^i] = 0, \quad i = 0, \dots, r \quad (12.3.14)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^*(f^{(r)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left\{ \int_a^t p(x) \frac{(t-x)^r}{r!} dx - F_{nr}(t) \right\} df^{(r)}(t) = 0. \quad (12.3.15)$$

Первое из них означает, что процесс должен сходиться для всех многочленов степени $\leq r$. Сосредоточим внимание на втором равенстве. Функционал $R_n^*(f^{(r)})$ определен на линейном множестве функций ограниченного изменения $f^{(r)}$. Не изменяя величины интеграла $R_n^*(f^{(r)})$, всегда можно считать, что $f^{(r)}(a) = 0$. Введем в этом множестве норму, положив $\|f^{(r)}\| = \bar{\text{Var}}_a^b f^{(r)}$. После этого указанное множество мы можем рассматривать как линейное пространство V типа B . Если $R_n^*(f^{(r)}) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ при всяких $f^{(r)}$ из V , то, по теореме Банаха, нормы всех функционалов R_n^* должны быть ограничены в совокупности

$$\|R_n^*\| \leq N, \quad n = 1, 2, \dots \quad (12.3.16)$$

Но

$$\|R_n^*\| = \max_t \left| \int_a^t p(x) \frac{(t-x)^r}{r!} dx - F_{nr}(t) \right|.$$

Ввиду же независимости $\int_a^t p(x) \frac{(t-x)^r}{r!} dx$ от n , условие (12.3.16) эквивалентно существованию такого числа M , чтобы было выполнено второе условие теоремы.

Для проверки необходимости третьего условия возьмем произвольное $x \in [a, b]$ и положим $f^{(r)}$ кусочно постоянной с единственным скачком величины 1 в точке x . Для такой $f^{(r)}$

$$R_n^*(f^{(r)}) = \int_a^x p(u) \frac{(x-u)^r}{r!} du - F_{nr}(x).$$

По взятой $f^{(r)}$ можно восстановить, с точностью до аддитивного многочлена степени $n-1$, который не имеет значений в рассуждениях, функцию f . Для нее квадратурный процесс должен сходиться и должно быть

$$R_n^*(f^{(r)}) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Последнее же означает выполнение третьего условия теоремы.

Этим доказана необходимость всех трех условий. Столь же просто проверяется их достаточность. Первое из условий теоремы равносильно (12.3.14). Осталось убедиться лишь в том, что из второго и третьего условий вытекает (12.3.15). Действительно, из этих условий следует, что функция, стоящая под знаком интеграла Стильеса (12.3.15)

$$\Phi_n(t) = \int_a^b p(x) \frac{(t-x)^r}{r!} dx - F_{nr}(t).$$

ограничена по модулю некоторым числом при любых $t \in [a, b]$ и $n = 1, 2, \dots$ и стремится к нулю, когда $n \rightarrow \infty$, при всех t . Если же преобразовать интеграл Стильеса к интегралу Лебега по обычным правилам, то при помощи известных теорем о предельном переходе в интеграле Лебега*) можно убедиться в том, что равенство (12.3.15) верно.

ЛИТЕРАТУРА

Натансон И. П., Конструктивная теория функций, ч. III, гл. V, Гостехиздат, 1949.

Геронимус Я. Л., Теория ортогональных многочленов, гл. II, §§ 27—28, Гостехиздат, 1950.

Стеклов В. А., 1) О приближенном вычислении определенных интегралов при помощи формул механических квадратур, ИАН, 1916, 6, 10. 2) „Sur l'approximation des fonctions à l'aide des polynomes de Tchebycheff et sur les quadratures“, ИАН, 1917, 11. 3) Remarques sur les quadratures“, ИАН, 1918, 12.

Кузьмин Р. О., К теории механических квадратур, Изв. Ленингр. Политехнического ин-та. Отд. техники, естествознания и математики. 1931, 33.

Поля (P o l y a), Ueber die Konvergenz von Quadraturverfahren, Math. Z. 1933, 37, 264—286.

Микеладзе Ш., Численное интегрирование, УМН, 1948, 3.

Лозинский С. М., О формулах механических квадратур, ИАН, 1940, 4.

Крылов В. И. 1) Об определении наименьшей области, голоморфность в которой обеспечивает сходимость эрмитовского интерполирования при любой системе узлов, ДАН, 1951, 78, № 5. 2) Сходимость механических квадратур в классах функций различного порядка дифференцируемости, ДАН, 1955, 101, № 5.

*) Известна, например, следующая теорема: Если функции $f_n(x)$ измеримы на $[a, b]$ и при всех n $|f_n(x)| \leq N < \infty$ и если почти везде на $[a, b]$ $f_n(x) \rightarrow f(x)$, $n \rightarrow \infty$, то

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

ГЛАВА 13

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Предварительные замечания

Задача вычисления интеграла с переменными границами изучена в значительно меньшей степени, нежели аналогичная задача для определенного интеграла, которая рассматривалась во второй части книги.

Ниже приведено несколько примеров интегралов с переменными границами, встречающихся в приложениях. Будем иметь в виду тот случай, когда переменной является только одна граница интегрирования, вторая же граница фиксирована.

К простейшему интегралу такого вида приводит задача нахождения первообразной функции. Если дана функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[x_0, X]$, то любая первообразная для нее представима следующей формулой:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad x \in [x_0, X] \quad (13.1.1)$$

и вычисление первообразной равносильно нахождению значений интеграла $\int_{x_0}^x f(t) dt$.

Более сложным примером является следующий интеграл, встречающийся во многих прикладных вопросах:

$$y(x) = \int_a^x K(x-t) f(t) dt \quad (13.1.2)$$

В нем $K(x-t)$ имеет смысл весовой функции и значения этого веса на отрезке интегрирования $a \leq t \leq x$ распределены так, что они зависят только от расстояния $x-t$ от верхней границы x , f есть произвольная функция некоторого класса.

Наконец, в интегральном уравнении Вольтерра

$$f(x) = \varphi(x) + \int_a^x K(x, t) f(t) dt$$

и некоторых других задачах приходится иметь дело с интегралом

$$y(x) = \int_a^x K(x, t) f(t) dt, \dots, \quad (13.1.3)$$

в котором весовая функция $K(x, t)$ может зависеть от x и t произвольным образом.

Методы вычисления указанных интегралов должны быть согласованы со свойствами соответствующих им весовых функций. Например, расчетные схемы, построенные для (13.1.3), принципиально говоря, могут быть применены к вычислению интеграла (13.1.1), имеющему более частную форму. Но их для (13.1.1), по-видимому, нельзя будет признать наилучшими, так как они не будут рассчитаны на то, что весовая функция в (13.1.1) сохраняет постоянное значение. Для каждого из указанных интегралов должны быть развиты свои способы их вычислений.

Мы остановим внимание на интеграле (13.1.1) и в дальнейшем будем заниматься исключительно задачей вычисления первообразной функции.

Пусть нужно будет вычислить значения (13.1.1) для заданной сетки значений аргумента x : x_k ($k = 0, 1, 2, \dots$). Предположим, что вычисления начаты, доведены до шага номера n и составлена *) сле-

дующая таблица значений $y(x_n) = y_n$. Нахождению подлежит y_{n+1} . Для этого могут быть использованы любые ранее найденные значения y_k $k \leq n$ и те значения f , которые разрешено вводить в вычисления.

Если функция f задана таблицей своих значений в узлах x_k , мы при вычислениях будем весьма стеснены в выборе значений f и проблема построения метода тогда будет принадлежать области дискретного анализа.

Одно из возможных решений задачи в этих условиях приведено в четырнадцатой главе.

Предположим теперь, что при нахождении y_{n+1} нам предоставлена возможность произвольно выбирать те точки, в которых берутся значения f , и мы ограничили себя только числом таких значений.

*) В книге не рассматриваются вопросы составления начала и конца таблицы значений $y(x)$ и изучается только задача продолжения таблицы.

Выбором точек тогда можно воспользоваться для получения возможно малой погрешности в y_{n+1} . Обычно стремятся распорядиться указанным произволом так, чтобы достигнуть наивысшей алгебраической степени точности. Так поступают по аналогии с задачей вычисления определенного интеграла, где этот путь был плодотворным и привел к ряду ценных результатов. На путь повышения степени точности мы многократно будем становиться в дальнейшем.

Напомним, что построение квадратурных формул наивысшей алгебраической степени точности связано с задачей получения определенного интеграла с погрешностью, не превышающей заданной величины, при возможно малом числе значений интегрируемой функции и, следовательно, с возможно малой затратой работы. В неопределенном интегрировании есть еще другой путь для сбережения вычислительного труда: можно стремиться к тому, чтобы каждое значение интегрируемой функции f применялось для нахождения не одного, а многих значений первообразной функции $y(x)$.

В двух последних главах книги сделаны попытки решить задачу о построении таких методов, которые позволяют использовать значения f или y_k на нескольких шагах вычислений. Исследования проведены в двух частных случаях и далеко не исчерпывают всей проблемы.

Укажем еще на одну особенность задачи вычисления интеграла с переменной границей. Обычно такие вычисления выполняются на большое число шагов. Допустим, что для нахождения значений функции $y(x)$ нами принято какое-то правило. На каждом шаге вычислений, при нахождении следующего нужного нам значения y_{n+1} , мы совершим некоторую погрешность. Эти погрешности от шага к шагу будут накапливаться и, как правило, величина погрешности будет возрастать при увеличении числа шагов. Закон роста погрешности зависит от принятой вычислительной схемы и, если схема избрана недостаточно удачной, рост погрешности может быть весьма быстрым и уже через небольшое число шагов погрешность может достигнуть значительной величины.

Приведем весьма простой пример, показывающий сколь быстрым может быть такой рост и насколько осторожным следует быть при выборе схемы для вычислений на много шагов. Методы счета, дающие удовлетворительные результаты на малом числе шагов, могут оказаться совершенно непригодными, когда число шагов становится большим.

Пусть для вычисления $y(x_{n+1})$ мы хотим воспользоваться двумя предшествующими значениями функции y : $y(x_n)$ и $y(x_{n-1})$ и двумя значениями производной: $y'(x_n) = f_n$ и $y'(x_{n-1}) = f_{n-1}$. Здесь естественно выполнить интерполирование $y(x_{n+1})$ по указанным значениям. Это есть эрмитово интерполирование с двумя двухкратными узлами x_n и x_{n-1} . Интерполяционная формула, как можно проверить при помощи (3.3.8), будет

$$y(x_{n+1}) = -4y(x_n) + 5y(x_{n-1}) + h(4f_n + 2f_{n-1}) + r_n.$$

Отбрасывая остаток r_n , получим следующую приближенную расчетную формулу

$$y_{n+1} = -4y_n + 5y_{n-1} + h(4f_n + 2f_{n-1}) \quad (13.1.4)$$

Она точна для всевозможных алгебраических многочленов третьей степени. Ее применение требует знания двух начальных значений y : y_0 и $y_1 = y(x_1)$. Вычислим при помощи ее значения интеграла

$$y(x) = \int_0^x e^t dt = e^x - 1$$

на отрезке $[0, 1]$. Взяв сначала $h = 0,2$ и считая $y(0) = 0$ и $y(0,2) \approx 0,22140$ известными, получим, после вычислений, следующую таблицу. Наряду с найденными приближенными значениями функции в ней указаны также их погрешности.

x	f	y	Погрешность
0,0	1,000 00	0,000 00	
0,2	1,221 40	0,221 40	
0,4	1,491 82	0,491 52	+0,000 30
0,6	1,822 12	0,822 94	—0,000 82
0,8	2,225 54	1,220 26	+0,005 28
1,0	2,718 28	1,742 94	—0,024 66

Из результатов видно, что погрешность весьма быстро растет при удалении от начала таблицы. Все значения y_n вычислены с запасными знаками для того, чтобы показать, что большие погрешности вызваны не недостаточной точностью вычислений, а другой причиной.

Легко можно убедиться в том, что быстрый рост погрешностей не вызван большой величиной шага h и не может быть исправлен путем уменьшения шага. Действительно, пусть, желая получить более точные значения интеграла, мы уменьшим шаг вдвое и положим $h = 0,1$.

Примем, как выше, известными два первых значения: $y(0) = 1$, $y(0,1) \approx 0,10517$ и составим новую таблицу.

x	f	y	Погрешность
0,0	1,000 00	0,000 00	
0,1	1,105 17	0,105 17	
0,2	1,221 40	0,221 39	+0,000 01
0,3	1,349 86	0,349 88	—0,000 02
0,4	1,491 82	0,491 65	+0,000 17
0,5	1,648 72	0,649 50	—0,000 78
0,6	1,822 12	0,818 10	+0,004 02
0,7	2,013 75	1,036 10	—0,022 35
0,8	2,225 54	1,116 02	+0,109 52
0,9	2,459 60	2,010 39	—0,550 79
1,0		—1,032 51	+2,750 79

Уменьшение шага позволило уточнить только одно из найденных раньше значений функции: $y(0,4)$. Погрешности же других значений сильно возросли и рост их оказался настолько быстрым, что в конце таблицы ошибка превысила значение функции.

Проверим теперь, что быстрый рост погрешности здесь зависит исключительно от неудачного выбора расчетной формулы. Вычислим тот же интеграл другим способом. В равенстве

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f dt$$

применим к интегралу простейшую формулу трапеций и отбросим остаток:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} h (f_n + f_{n+1}). \quad (13.1.5)$$

Полученное равенство наверное дает точный результат только в том случае, когда функция f линейная и алгебраическая степень точности ее ниже, чем у (13.1.4). Можно было бы ожидать, что значения y_n , найденные при помощи нее, будут менее точными, чем приближенные значения, найденные при помощи (13.1.4). Как видно

x	Значения y , найденные по формуле (13.1.5)	Погрешность
0,0	0,000 00	
0,1	0,105 26	—0,000 09
0,2	0,221 59	19
0,3	0,350 15	29
0,4	0,492 23	41
0,5	0,649 26	54
0,6	0,822 80	68
0,7	1,014 59	84
0,8	1,226 56	102
0,9	1,460 82	122
1,0	1,719 71	143

из приведенной таблицы, для нескольких первых шагов это действительно так и будет. Но в вычислениях при помощи (13.1.5) погрешности растут намного медленнее и значительно слабее искажают результат, чем в предшествующем случае.

Уже через небольшое число шагов становится ясным, что при счете на „большом промежутке“ следует предпочесть формулу (13.1.5).

§ 2. Погрешность вычислений

Точные значения функции

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt$$

в узлах сетки x_k ($k = 0, 1, \dots$) будем обозначать $y(x_k)$. Пусть для нахождения их принята некоторая вычислительная схема. Приближенное значение $y(x_k)$, найденное по этой схеме, обозначим через y_k .

Предположим, что для вычисления y_{n+1} мы воспользовались несколькими предшествующими значениями y из числа $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-p}$ и $m = m(n)$ значениями f в точках $\xi_{n,j}$ ($j = 1, \dots, m$).

Рассмотрим расчетную формулу следующего достаточно общего для наших целей вида *)

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^p A_{n,i} y_{n-i} + \sum_{j=1}^m B_{n,j} f(\xi_{n,j}) \quad (13.2.1)$$

Если вместо приближенных значений y_k подставить сюда точные значения функции $y(x_k)$, равенство не будет выполняться и для точного его выполнения в правую часть необходимо ввести дополнительный член

$$y(x_{n+1}) = \sum_{i=0}^p A_{n,i} y(x_{n-i}) + \sum_{j=1}^m B_{n,j} f(\xi_{n,j}) + r_n. \quad (13.2.2)$$

r_n в дальнейшем будем называть погрешностью формулы (13.2.1). При написании (13.2.1) предполагалось, что вычисления ведутся с неокругленными числами, что бывает весьма редко. Формула должна быть дополнена указанием правила округления и если операцию округления условиться обозначать фигурными скобками, заключающими в себе округляемую величину, то действительная расчетная формула запишется так

$$y_{n+1} = \left\{ \sum_{i=0}^p A_{n,i} y_{n-i} + \sum_{j=1}^m B_{n,j} f(\xi_{n,j}) \right\}_n. \quad (13.2.3)$$

*) Коэффициенты $A_{n,i}$ и $B_{n,j}$ этого равенства могут зависеть от n и расчетная формула может изменяться с каждым шагом. Равным образом вместе с n может изменяться и величина шага $x_{n+1} - x_n = h_n$. Равенство (13.2.1) есть уравнение в конечных разностях для y_k и для дальнейшего необходимо лишь то, что уравнение имеет некоторый фиксированный порядок $p+1$.

Индекс n , поставленный у скобок, указывает на то, что правило округления на каждом шаге может быть своим.

Применение (13.2.3) требует знания величин $y_0, y_1, \dots, y_p$. В дальнейшем они будут считаться известными. Рассмотрим погрешность приближенного значения y_k :

$$\varepsilon_k = y(x_k) - y_k$$

и составим для нее разностное уравнение.

Если обозначить через $-\alpha_n$ погрешность, допущенную при округлении, указанном в правой части (13.2.3), то для y_{n+1} вместо (13.2.3) можно написать

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^p A_{n,i} y_{n-i} + \sum_{j=1}^m B_{n,j} f(\xi_{n,j}) - \alpha_n. \quad (13.2.4)$$

Почленное вычитание из (13.2.2) дает

$$\varepsilon_{n+1} = \sum_{i=0}^p A_{n,i} \varepsilon_{n-i} + r_n + \alpha_n. \quad (13.2.5)$$

Начальные значения погрешности ε_k ($k=0, 1, \dots, p$), отвечающие приближенным значениям y_k ($k=0, 1, \dots, p$), образующим начало расчетной таблицы, будем предполагать известными. Все дальнейшие значения ε_k ($k > p$) последовательно найдутся при помощи уравнения (13.2.5).

ε_n ($n > p$) определяется, во-первых, начальными значениями $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_p$, во-вторых, погрешностью округлений α_k ($k < n$) и, наконец, погрешностью формулы (13.2.1) r_k ($k < n$).

Для анализа погрешности полезно разделить влияние на ε_n всех этих величин. Для достижения такой цели будем искать ε_n в форме суммы трех слагаемых, которые определяются перечисляемыми ниже условиями

$$\varepsilon_n = E_n + E'_n + E''_n. \quad (13.2.6)$$

Здесь E_n есть решение однородного уравнения

$$E_{n+1} = \sum_{i=0}^p A_{n,i} E_{n-i}, \quad (13.2.7)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$E_k = \varepsilon_k, \quad k=0, 1, \dots, p. \quad (13.2.8)$$

E'_n удовлетворяет неоднородному уравнению

$$E'_{n+1} = \sum_{i=0}^p A_{n,i} E'_{n-i} + \alpha_n \quad (13.2.9)$$

и имеет нулевые начальные значения

$$E'_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, p. \quad (13.2.10)$$

E''_{n+1} есть решение неоднородного уравнения

$$E''_{n+1} = \sum_{i=0}^p A_{n,i} E''_{n-i} + r_n \quad (13.2.11)$$

также с нулевыми начальными значениями

$$E''_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, p. \quad (13.2.12)$$

E_n учитывает влияние на ε_n начальных погрешностей $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_p$. E'_n и E''_n зависят от погрешностей округления α_n и погрешностей r_n формулы (13.2.1) соответственно.

Простое и достаточное для наших целей выражение для E_n через ε_k ($k < p$) может быть построено следующим путем. Обозначим E_n^i решение однородного уравнения (12.2.7), выполняющее условия

$$E_k^0 = \begin{cases} 0, & k \neq i; \\ 1 & k = i; \end{cases} \quad i, k = 0, 1, \dots, p.$$

Тогда, очевидно,

$$E_n = E_n^0 \varepsilon_0 + E_n^1 \varepsilon_1 + \dots + E_n^p \varepsilon_p. \quad (13.2.13)$$

Отсюда легко может быть получена оценка E_n . Точные значения погрешностей ε_k ($k \leq p$) редко являются известными, но бывает известно, что они по абсолютной величине не превосходят некоторое число, обозначенное нами ε :

$$|\varepsilon_k| \leq \varepsilon, \quad k \leq p. \quad (13.2.14)$$

Если считать, что начальные погрешности ε_k могут иметь любые значения, удовлетворяющие условию (13.2.14), из равенства (13.2.13) для ε_n получится следующая точная оценка

$$|E_n| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^p |E_n^k|. \quad (13.2.15)$$

(13.2.13) или (13.2.15) позволяют выяснить, с какой точностью должны быть найдены начальные значения ε_k ($k \leq p$), чтобы E_n не превзошло предписанной заранее величины.

Займемся теперь второй частью E'_n погрешности. Она должна быть найдена из уравнения (13.2.9) и начальных условий (13.2.10). Сразу же видно, что E'_n является линейной комбинацией $\alpha_p, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{n-1}$:

$$E'_n = \sum_{k=p}^{n-1} E_{n,k} \alpha_k. \quad (13.2.16)$$

Коэффициент $E_{n,k}$ учитывает влияние, которое оказывает на E'_n погрешность округления, равная единице и сделанная при вычислении правой части (13.2.3) для $n=k$. $E_{n,k}$ является функцией Грина, или функцией влияния для формулированной выше задачи с начальными условиями.

В теории разностных уравнений *) дается явное выражение $E_{n,k}$ через независимые решения однородного уравнения (13.2.9). Мы не приводим это выражение ввиду его громоздкости.

Для дальнейшего полезно лишь заметить, что $E_{n,k}$, очевидно, есть решение уравнения

$$E_{n+1} = \sum_{i=0}^p A_{n,i} E_{n-i} + \delta_n^k, \quad (13.2.17)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$E_i = 0, \quad i = 0, 1, \dots, p.$$

δ_n^k — символ Кронкера:

$$\delta_n^k = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ 1, & n = k. \end{cases}$$

Исследование суммы (13.2.16) позволит судить, как между собой должны быть связаны число шагов n и правило округления, чтобы значение E'_n не превышало заданной величины.

Пусть известно, что на всех шагах вычисления погрешность α_n не превосходит значения α :

$$|\alpha_n| \leq \alpha.$$

Из (13.2.16), при этом условии, вытекает следующее неравенство для E'_n :

$$|E'_n| \leq \alpha \sum_{k=p}^{n-1} |E_{n,k}|. \quad (13.2.18)$$

Величины E_n и E'_n зависят от точности вычислений начальных значений $y_0, y_1, \dots, y_p$ и правой части разностного уравнения. Увеличивая эту точность, мы можем сделать E_n и E'_n по модулю меньше любой наперед заданной границы при всяких $n \leq N$.

Обратимся, наконец, к последней части E''_n погрешности. Разностное уравнение (13.2.11) для нее получается из уравнения (13.2.9) для E'_n заменой свободного члена α_n на r_n . Начальные же значения

*) См. А. А. Марков, Исчисление конечных разностей, отдел II, § 19, 1911, или А. О. Гельфанд, Исчисление конечных разностей, гл. III, § 3, ОНТИ, 1936, № 6.

для E'_n и E''_n совпадают. Поэтому для E''_n должно быть верным представление вида (13.2.16) с заменой в нем α_n на r_n :

$$E''_n = \sum_{k=p}^{n-1} E_{n,k} r_k, \quad (13.2.19)$$

E''_n зависит исключительно от свойств расчетной формулы (13.2.1), или, если говорить более точно, от ее погрешности r_k , свойств коэффициентов $A_{n,i}$ и от числа шагов n .

Ниже, при изучении сходимости процесса, сумма $\sum_{k=p}^{n-1} E_{n,k} r_k$ будет рассмотрена более подробно.

В качестве примера выполним анализ погрешности разностного уравнения (13.1.4), которое в § 1 было применено к вычислению интеграла $y = \int_0^x e^t dt$.

Соответствующее ему уравнение вида (13.2.5) для ϵ_n будет таким:

$$\epsilon_{n+1} = -4\epsilon_n + 5\epsilon_{n-1} + r_n + \alpha_n.$$

Это есть неоднородное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и свободным членом $r_n + \delta_n$. При решении его начальные значения погрешности ϵ_0 и ϵ_1 мы должны считать известными.

Найдем сначала часть E_n погрешности, зависящую от ϵ_0 и ϵ_1 . Однородное уравнение для E_n есть

$$E_{n+1} = -4E_n + 5E_{n-1}.$$

Его решение, удовлетворяющее начальным условиям $E_0 = \epsilon_0$ и $E_1 = \epsilon_1$ имеет вид:

$$E_n = \frac{1}{6}(\epsilon_1 + 5\epsilon_0) + \frac{(-1)^n}{6}(\epsilon_0 - \epsilon_1)5^n.$$

Если $\epsilon_0 - \epsilon_1 \neq 0$, E_n с увеличением n будет быстро возрастать. При $n = 10$, т. е. всего только через 9 шагов вычислений, коэффициент при $\epsilon_0 - \epsilon_1$ достигнет величины $\frac{5^{10}}{6} \approx 1,5 \cdot 10^6$, что может грозить потерей шести десятичных разрядов в точности.

Теперь разыщем другую часть E'_n погрешности, зависящую от ошибок округлений.

Неоднородное уравнение вида (13.27.9) для E'_n будет таким:

$$E'_{n+1} = -4E'_n + 5E'_{n-1} + \alpha_n.$$

Решение, имеющее нулевые начальные значения $E'_0 = 0$, $E'_1 = 0$ легко находится

$$\begin{aligned} E'_n &= \frac{1}{6} \sum_{t=0}^{n-1} [1 - (5)^{n-t-1}] \alpha_{t+1} = \\ &= \frac{1}{6} \{ [1 - (-5)^{n-1}] \alpha_1 + [1 - (-5)^{n-2}] \alpha_2 + \dots \} \end{aligned}$$

Сразу же видно, что при увеличении n E'_n может быстро возрастать, подобно E_n , и увеличиться во много раз даже через небольшое число шагов. Аналогичное можно сказать и о E''_n .

Насколько быстро на самом деле может возрастать погрешность ϵ_n для расчетной формулы (13.1.4), видно из примера, приведенного в конце § 1.

Возвратимся к общей задаче исследования погрешности ϵ_n . Характер изменения ϵ_n с ростом n существенно зависит от коэффициентов $A_{n,i}$.

Рассмотрим сейчас один частный случай, когда все коэффициенты $A_{n,i}$ неотрицательны. Допустим, кроме того, что

$$\sum_{i=0}^p A_{n,i} = 1. \quad (13.2.20)$$

Это означает, что при вычислениях без округлений формула дает точный результат в том случае, когда $f \equiv 0$ и функция y сохраняет постоянное значение.

При сделанных предположениях можно найти весьма простую и эффективную оценку ϵ_n . Предположим, что начальные погрешности $\epsilon_0, \dots, \epsilon_p$ по абсолютной величине не превосходят ϵ :

$$|\epsilon_i| \leq \epsilon$$

и покажем, что при любом n верно неравенство

$$|\epsilon_n| \leq \epsilon + \sum_{k=p}^{n-1} |\alpha_k + r_k|. \quad (13.2.21)$$

Для $n = p + 1$ оно легко проверяется

$$\begin{aligned} |\epsilon_{p+1}| &= \left| \sum_{i=0}^p A_{p,i} \epsilon_i + \alpha_p + r_p \right| \leq \sum_{i=0}^p A_{p,i} \epsilon + |\alpha_p + r_p| = \\ &= \epsilon + |\alpha_p + r_p|. \end{aligned}$$

Допустив, что неравенство верно для всех ϵ_i , $i \leq n$, проверим, что оно выполняется и для ϵ_{n+1} .

$$|\epsilon_{n+1}| \leq \sum_{i=0}^p A_{n,i} |\epsilon_{n-i}| + |\alpha_n + r_n|.$$

Заменив под знаком суммы каждое $|\varepsilon_{n-i}|$ превосходящей величиной $\varepsilon + \sum_{i=0}^{n-1} |\alpha_i + r_i|$, получим

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq \sum_{i=p}^{n-1} |\alpha_i + r_i| + |\alpha_n + r_n| \varepsilon,$$

что завершает доказательство справедливости утверждения.

Из (13.2.21) видно, что для расчетных схем с неотрицательными коэффициентами $A_{n,i}$ погрешность ε_n будет „медленно возрастающей“ функцией n . В этом отношении указанные формулы весьма благоприятны для вычислений.

§ 3. Сходимость и устойчивость вычислительного процесса

Ближайшей нашей целью будет выяснение содержания некоторых понятий, связанных с проблемой сходимости. Чтобы упростить изложение, такое выяснение мы проведем на случае расчетной формулы частного вида, наиболее часто встречающегося в приложениях. Допустим, что отрезок $[x_0, X]$, на котором разыскивается первообразная функция $y(x)$, конечный и что значения $y(x)$ находятся на сетке равноотстоящих точек с шагом h :

$$x_k = x_0 + kh, \quad k = 0, 1, \dots, N, \\ x_0 + Nh \leq X < x_0 + (N+1)h.$$

Такую сетку ниже будем обозначать S_h .

Предположим, что для вычислений принята формула, коэффициенты $A_{n,i}$ которой не зависят от индекса n :

$$y(x_{n+1}) = \sum_{i=0}^p A_i y(x_i) + \sum_{j=1}^m B_{n,j} f(\xi_{n,j}) + r_n. \quad (13.3.1)$$

Расчетное правило отсюда получится, если в правой части отбросить r_n и округлить оставшуюся сумму на принятое число значащих цифр.

$$y_{n+1} = \left\{ \sum_{i=0}^p A_i y_{n-i} + \sum_{j=1}^m B_{n,j} f(\xi_{n,j}) \right\}_n. \quad (13.3.2)$$

Считая $y_0, \dots, y_p$ известными и находя y_n , ($n > p$) из уравнения (13.3.2), мы определим в точках сетки S_n приближенное значение y_n для $y(x_n)$.

За расстояние $\rho(y, y_n)$ между $y(x)$ и функцией y_n ($n = 0, 1, \dots, N$), определенной на S_h , примем, имея ввиду изучение равномерной сходимости, наибольшую абсолютную величину погрешности $\varepsilon_n = y(x_n) - y_n$:

$$\rho(y, y_n) = \max_n |\varepsilon_n| = \max_n |y(x_n) - y_n|.$$

Условимся говорить, что вычислительный процесс сходится, если при $h \rightarrow 0$ будет

$$\rho(y, y_n) \rightarrow 0. \quad (13.3.3)$$

Погрешность ϵ_n зависит от ошибок $\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_p$ начальных значений y_k ($k=0, 1, \dots, p$), ошибок округлений α_n в правых частях и погрешностей r_n формулы (13.3.1). Разложим, как это сделано выше, ϵ_n на три части, учитывающие влияние на ϵ_n величин каждого из указанных видов

$$\epsilon_n = E_n + E'_n + E''_n.$$

Требования, которым удовлетворяют E_n, E'_n, E''_n были перечислены в предыдущем параграфе.

При выяснении условий сходимости вычислительного процесса, ввиду независимости величин ϵ_i ($i \leq p$), α_n и r_n , мы должны требовать, чтобы при $h \rightarrow 0$ стремилась бы к нулю, в принятой метрике, каждая из частей погрешности ϵ_n , иначе говоря, чтобы выполнялись при $h \rightarrow 0$ три следующих соотношения

$$\max_n |E_n| \rightarrow 0, \quad \max_n |E'_n| \rightarrow 0, \quad \max_n |E''_n| \rightarrow 0 \quad (13.3.4)$$

Рассмотрим сначала величины E_n и E'_n . Они зависят от погрешностей ϵ_i ($i \leq p$) и α_n . Непосредственно ясно, что при любом фиксированном h точность вычисления начальных значений y_i ($i \leq p$) и правых частей (13.3.2) всегда можно увеличить настолько, чтобы сделать $\max_n |E_n|$ и $\max_n |E'_n|$ сколь угодно малыми. Поэтому выяснение условий, при которых будут выполняться два первые соотношения (13.3.4), носит не принципиальный, а скорее технический характер: нужно определить как с уменьшением h должна увеличиваться точность вычисления начальных значений y_i ($i \leq n$) и правых частей (13.3.2), чтобы части общей погрешности ϵ_n , зависящие от указанных величин, стремились бы к нулю в принятом смысле. Такое исследование дает нам одно из средств для испытания практической пригодности вычислительной схемы и, несмотря на технический характер вопроса, оно имеет большое значение. Если окажется, что с уменьшением h указанная точность должна быстро возрастать, то такая вычислительная схема должна быть отвергнута, как малоприменимая в приложениях.

С этой точки зрения мы должны отдать предпочтение вычислительным схемам, для которых точность нахождения y_i ($i \leq p$) и правых частей (13.3.2) должна увеличиваться наиболее медленно при $h \rightarrow 0$. Ту же самую мысль обычно высказывают в других словах. Рассмотрим, для определенности, E_n . Допустим, что в начальных значениях y_i ($i \leq p$) мы допустили некоторые погрешности ϵ_i . При вычислении следующих y_i ($i > p$) погрешность будет возрастать от шага к шагу. Закон роста погрешности будет, очевидно, зависеть от выбора вычислительной схемы. Наибольший интерес представляют

вычислительные схемы, в которых скорость роста погрешности E_n будет минимальной. В теории приближенного решения дифференциальных уравнений методы, имеющие наименьший порядок роста погрешности, называются устойчивыми. В предыдущем изложении речь шла об устойчивости относительно погрешностей в начальных значениях функции $y_i (i \leq p)$. Сходным образом может быть определена устойчивость относительно погрешностей округления α_n , иначе говоря, относительно погрешностей правой части (13.3.2).

Возвратимся к E_n . Однородное уравнение для E_n вида (13.2.7), в случае вычислительной формулы (13.3.2), будет уравнением с постоянными коэффициентами

$$E_{n+1} = \sum_{i=0}^p A_i E_{n-i} \quad (13.3.5)$$

Решение его, удовлетворяющее начальным условиям $E_i = \varepsilon_i (i \leq p)$, представимо в виде [см. (13.2.13)]:

$$E_n = E_n^0 \varepsilon_0 + E_n^1 \varepsilon_1 + \dots + E_n^p \varepsilon_p, \quad (13.3.6)$$

где E_n^i есть решение того же однородного уравнения и имеет следующие начальные значения

$$E_n^i = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}; \quad i, k = 0, 1, \dots, p.$$

Закон роста E_n связан с тем, как быстро будут изменяться E_n^i при увеличении n . Если считать, что начальные погрешности ограничены по абсолютному значению числом ε и в остальном произвольны:

$$|\varepsilon_i| \leq \varepsilon, \quad (13.3.7)$$

то для E_n будет верна следующая точная оценка

$$|E_n| \leq \varepsilon \sum_{i=0}^p |E_n^i|. \quad (13.3.8)$$

Будем считать, что изучаемая формула (13.3.1) является верной без r_n , когда $f \equiv 0$ и y есть постоянная величина. Такое предположение выполняется во всех случаях, имеющих практическое значение. Коэффициенты A_i тогда должны удовлетворять условию

$$\sum_{i=0}^p A_i = 1. \quad (13.3.9)$$

Последнее говорит о том, что $E_n = 1$ есть решение однородного уравнения (13.3.5). Такое решение, очевидно, равно сумме всех E_n^i :

$$1 = E_n^0 + E_n^1 + \dots + E_n^p.$$

Поэтому при всяких n будет выполняться неравенство

$$\sum_{i=0}^p |E_o^i| \geq 1.$$

Можно привести примеры, когда при $n \rightarrow \infty$ $\sum_{i=0}^p |E_n^i|$ будет неограниченно возрастать и тогда может оказаться, что E_n тоже будет неограниченной величиной.

Наиболее благоприятным для вычислений значений y_n , в смысле порядка роста E_n , является, очевидно, тот случай, когда сумма $\sum_{i=0}^p |E_n^i|$ будет ограниченной *) для $n > p$. Все изложенное приводит к следующему определению.

Уравнение (13.3.2) называется устойчивым относительно погрешностей начальных значений y_i ($i \leq p$), если существует такое число M , что при любых n будет выполняться неравенство

$$|E_n| \leq M\varepsilon, \quad (13.3.10)$$

если только $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon$, $i = 0, 1, \dots, p$.

Заметим, что ограниченность E_n ($n = 0, 1, \dots$) при условии $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon$ равносильна ограниченности всех E_n^i ($i = 0, 1, \dots, p$). Действительно, если все E_n^i ограничены, то будет, ввиду (13.3.6), ограничена и E_n .

Возьмем произвольное $k \leq p$ и положим все ε_k ($k \neq i$, $k \leq p$) равными нулю. Тогда

$$E_n = E_n^i \varepsilon_i$$

и из ограниченности E_n следует ограниченность E_n^i .

Общее решение (13.3.4) определяется алгебраическим уравнением $\lambda^{p+1} = \sum_{i=0}^p A_i \lambda^{p-i}$. Если корни его суть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ кратностей $k_1, k_2, \dots, k_m$, то функции

$$\lambda_i^n n^j \quad (j = 0, 1, \dots, k_i - 1; i = 1, 2, \dots, m) \quad (13.3.11)$$

образуют полную систему линейно независимых решений.

Решения E_n^i ($i = 0, 1, \dots, p$) получаются из (13.3.11) линейным преобразованием с неособенной матрицей и поэтому ограниченность при $n = 0, 1, \dots$ всех E_n^i равносильна ограниченности решений (13.3.11). Последнее же будет в том и только в том случае, когда

*) Для наших целей достаточно лишь факта ограниченности $\sum_{i=0}^n |E_n^i|$; вопрос же о нахождении наименьшего значения границы этого коэффициента сейчас для нас не имеет значения.

среди λ_i нет чисел больших 1 по модулю, и если $|\lambda_i| = 1$, то тогда $k_i = 1$. Отсюда следует

Теорема 1. Для того, чтобы уравнение (13.3.2) было устойчивым относительно погрешностей начальных значений $y_i (i \leq p)$, необходимо и достаточно выполнение условий:

1. Среди корней уравнения $\lambda^{p+i} = \sum_{i=0}^p A_i \lambda^{p-1}$ нет больших единицы по модулю.

2. Корни, по модулю равные единице, должны быть простыми.

Обратимся к изучению E'_n . На образование значения E'_n оказывают влияние погрешности округления $\alpha_p, \dots, \alpha_{n-1}$ и через них E'_n выражается следующим образом [см. (13.2.16)]

$$E'_n = \sum_{k=p}^{n-1} E_{n,k} \alpha_k.$$

Коэффициент $E_{n,k}$, как функция n , должен удовлетворять уравнению (13.2.17), которое в изучаемом случае будет таким

$$E'_{n+1} = \sum_{i=0}^p A_i E'_{n-i} + \delta_n^k \quad (13.3.12)$$

и иметь начальные значения:

$$E_{i,k} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, p. \quad (13.3.13)$$

Можно установить простую связь $E_{n,k}$ с решением E_n^p , введенным выше. При $n < k$ уравнение (13.3.12) будет однородным и, ввиду нулевых начальных значений, $E_{n,k}$ будет равняться нулю при всяких $n \leq k$. Кроме того, $E_{k+1,k} = 1$, что сразу же вытекает из (13.3.12), если там положить $n = k$. Когда $n > k$ уравнение (13.3.12) также будет однородным.

Будем рассматривать $E_{n,k}$ при $n \geq k - p + 1$. Ввиду изложенного, можно сказать, что $E_{n,k}$ будет иметь начальные значения

$$E_{k-p+1,k} = 0, \dots, E_{k,k} = 0, E_{k+1,k} = 1$$

и удовлетворять однородному уравнению

$$E_{n+1} = \sum_{i=0}^p A_i E_{n-i}. \quad (13.3.14)$$

Но, как сразу же видно, тем же условиям удовлетворяет также $E_{n+p-k-1}^p$ и, в силу единственности решения с указанными начальными значениями, $E_{n,k}$ и $E_{n+p-k-1}^p$ должны совпадать.

Для E'_n поэтому получится

$$E'_n = \sum_{k=p}^{n-1} \alpha_k E_{n+p-k-1}^p. \quad (13.3.15)$$

Будем считать, что верхняя грань α для погрешности округления α_n задана одинаковой для всех шагов вычислений, так что при любых n $|\alpha_n| \leq \alpha$.

$$\begin{aligned} |E'_n| &\leq \alpha \sum_{k=p}^{n-1} |E_{n+p-k-1}^p|, \\ \max_n |E'_n| &\leq \alpha \sum_{k=p}^{N-1} |E_{N+p-k-1}^p| = \alpha \sum_{k=p}^{N-1} |E_k^p|. \end{aligned} \quad (13.3.16)$$

Если считать, что погрешности α_n могут иметь любые значения, удовлетворяющие условию $|\alpha_n| \leq \alpha$, то оценка является точной и равенство достигается для $n = N$, когда $\alpha_k = \alpha \operatorname{sign} E_{N+p-k-1}^p$.

Так как $E_p^p = 1$, при всяких $N \geq p + 1$ будет $\sum_{k=p}^{N-1} |E_k^p| \geq 1$. При стремлении h к нулю N будет неограниченно возрастать. Значение $\sum_{k=p}^{N-1} |E_k^p|$ будет зависеть от поведения решения E_k^p для $k \rightarrow \infty$.

Рассмотрим частные решения однородного уравнения (13.3.14)

$$E_n^p, E_{n+1}^p, \dots, E_{n+p}^p. \quad (13.3.17)$$

Их начальные значения для $n = 0, 1, \dots, p$ образуют следующую таблицу

$$\begin{array}{ccccccc} 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & 1, & \\ 0, & 0, & \dots, & 0, & 1, & E_{p+1}^p, & \\ 1, & E_{p+1}^p, & \dots, & E_{2p-2}^p, & E_{2p-1}^p, & E_{2p}^p. & \end{array}$$

Определитель ее отличен от нуля и поэтому решения (13.3.17) линейно независимы. Но если так, то они получатся из решений E_n^i ($i = 0, 1, \dots, p$) линейным преобразованием с неособенной матрицей.

Поэтому ограниченность E_n^i ($i = 0, 1, \dots, p$) равносильна ограниченности решения (13.3.17).

Если принять во внимание, что, при предположении (13.3.9),

$$\sum_{i=0}^p |E_n^i| \geq 1, \quad n = 0, 1, \dots,$$

то будет ясно, что в смысле возможно медленного роста $\sum_{k=p}^{N-1} |E_k^p|$ при $N \rightarrow \infty$ наиболее благоприятным будет тот случай, когда все слагаемые E_k^p суммы будут ограничены некоторым числом. Тогда $\sum_{k=p}^{N-1} |E_k^p|$ будет величиной порядка $O(N)$. Ввиду изложенного, примем нижеследующее определение.

Уравнение (13.3.2) называется устойчивым относительно погрешностей округлений α_n , если существует такое число M_1 , не зависящее от h , что при всяких $N > p$ будет выполняться неравенство

$$|E'_n| \leq M_1 N \alpha, \quad (n = p+1, \dots, N-1), \quad (13.3.18)$$

если только $|\alpha_n| \leq \alpha$.

Простая теорема, дающая достаточные условия устойчивости, может быть высказана так:

Теорема 2. Для того, чтобы (13.3.2) было устойчивым относительно погрешностей округлений, достаточным является выполнение условий:

1) уравнение $\lambda^{p+1} = \sum_{i=0}^p A_i \lambda^{p-i}$ не имеет корней, больших единицы по модулю,

2) корни этого уравнения, равные единице по модулю, являются простыми.

Доказательство. Решения (13.3.11) в условиях теоремы будут ограничены при $n \geq 0$. Но они образуют полную систему решений и E_n^p суть их линейная комбинация. Поэтому наверное существует такое число M_1 , что для $n \geq 0$ будет

$$|E_n^p| \leq M_1.$$

Отсюда и из (13.3.15) сразу же следует утверждение теоремы.

Займемся теперь изучением части E''_n ошибки вычислений. E''_n зависит от погрешности r_n формулы (13.3.1). Ошибка ε_n будет совпадать с E''_n , если вычисления выполняются с точными начальными значениями $y_k = y(x_k)$, ($k = 0, 1, \dots, p$), и правые части (13.3.2) находятся без округлений: $\alpha_n = 0$ ($n \geq p$).

Будем говорить, что формула (13.3.1) допускает сходящийся вычислительный процесс, если

$$\max_n |E''_n| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0. \quad (13.3.19)$$

Равенство (13.2.19) для E''_n , ввиду $E_{n,k} = E_{n+p-k-1}^p$, примет форму

$$E''_n = \sum_{k=p}^{n-1} r_k E_{n+p-k-1}^p. \quad (13.3.20)$$

Таково явное выражение E''_n через значения r_k погрешности вычислительной формулы.

При оценке E''_n предположим, что r есть верхняя граница для абсолютной величины погрешности r_n на всем отрезке $[x_0, X]$, так что при любых n ($0 \leq n \leq N$) выполняются неравенства

$$|r_n| \leq r. \quad (13.3.21)$$

Тогда для E''_n имеет место оценка (13.3.21)

$$|E''_n| \leq r \sum_{k=p}^{n-1} |E_{n+p-k-1}^p| = r \sum_{k=p}^{n-1} |E_k^p|. \quad (13.3.22)$$

Следовательно

$$\max_n |E''_n| \leq r \sum_{k=p}^{N-1} |E_k^p|. \quad (13.3.23)$$

Множители r и $\sum_{k=p}^{N-1} |E_k^p|$, стоящие в правой части неравенства, вообще говоря, зависят от шага h и изучение характера этой зависимости позволяет во многих случаях сделать заключение о поведении $\max_n |E''_n|$ при $n \rightarrow \infty$. В частности из оценки (13.3.23) очевидным образом вытекает следующая простая

Теорема 3. Если при $h \rightarrow 0$ будет

$$r \sum_{k=p}^{N-1} |E_k^p| \rightarrow 0,$$

то уравнение (13.3.2) допускает сходящийся вычислительный процесс.

Остановимся еще на случае, указанном в двух предшествующих теоремах, когда наверное можно гарантировать устойчивость (13.3.2) относительно начальных погрешностей и погрешностей округления, а именно, будем считать, что среди корней уравнения $\lambda^{p+1} = \sum_{i=0}^p A_i \lambda^{p-i}$ нет больших по модулю единицы и корни его, равные единице по модулю, являются простыми.

Как выяснилось выше, тогда существует наверное такое число M_1 , что при всяких $n \geq 0$ будет $|E_n^p| \leq M_1$. Отсюда и из (13.3.23) следует такая оценка для $\max_n |E''_n|$:

$$\max_n |E''_n| \leq r M_1 (N - p) \leq M_1 r N. \quad (13.3.24)$$

Из нее сразу же получается

Теорема 4. Если уравнение $\lambda^{p+1} = \sum_{k=0}^p A_k \lambda^{p-k}$ не имеет корней, больших единицы по модулю и корни его, равные по модулю единице, являются простыми, уравнение (13.3.2) допускает сходящийся вычислительный процесс всякий раз, когда

$$\frac{r}{h} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0$$

Рассмотрим, наконец, случай, на котором мы остановились в конце второго параграфа, когда коэффициенты вычислительной формулы A_k суть неотрицательные числа:

$$A_k \geq 0,$$

удовлетворяющие условию

$$\sum_{k=0}^p A_k = 1.$$

При таких условиях ошибка вычислений ε_n удовлетворяет неравенству [см. (13.2.20)]

$$|\varepsilon_n| \leq \varepsilon + \sum_{k=p}^{n-1} |\alpha_k + r_k|, \quad n > p,$$

где $\varepsilon \geq |\varepsilon_i|$, $i = 0, 1, \dots, p$.

Отсюда легко получаются оценки для слагаемых E_n , E'_n , E''_n в разложении ε_n . Заметим, что по самому смыслу этих величин, при $\alpha_k = 0$ и $r_k = 0$ ($k \geq p$) ε_n должно совпадать с E_n и поэтому должно быть

$$|E_n| \leq \varepsilon, \quad n > p. \quad (13.3.25)$$

Аналогично

$$|E'_n| \leq \sum_{k=p}^{n-1} |\alpha_k|, \quad n > p, \quad (13.3.26)$$

$$|E''_n| \leq \sum_{k=p}^{n-1} |r_k|, \quad n > p. \quad (13.3.27)$$

Если же $|\alpha_k| \leq \alpha$ и $|r_k| \leq r$, $p < n \leq N$, то для E'_n и E''_n будут верны оценки

$$|E'_n| \leq (n-p)\alpha \leq N\alpha, \quad (13.3.28)$$

$$|E''_n| \leq (n-p)r \leq Nr. \quad (13.3.29)$$

Неравенства позволяют высказать теорему:

Теорема 5. Если коэффициенты A_k ($k = 0, 1, \dots, p$) неотрицательны и удовлетворяют условию $\sum_{k=0}^p A_k = 1$, уравнение (13.3.2) устойчиво относительно погрешностей начальных значений ε_k ($k \leq p$) и погрешностей округлений α_k ($k \geq p$). Если, кроме того, при $h \rightarrow 0$ будет

$$\frac{r}{h} \rightarrow 0,$$

то уравнение (13.3.2) допускает сходящийся вычислительный процесс.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ТАБЛИЦЕЙ ЗНАЧЕНИЙ

§ 1. Содержание задачи и один из методов ее решения

Пусть в равноотстоящих точках $x_n = x_0 + nh$ на отрезке $x_0 \leq x \leq X$ нужно вычислить значения интеграла

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad (14.1.1)$$

функция f предполагается известной в той же, или в более широкой системе равноотстоящих значений аргумента. Эта задача рассматривалась в большом числе работ и известны многие методы ее решения. Особенно большое внимание было уделено ей в связи с тем, что она соприкасается с проблемой Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. В самом деле, если дано уравнение $y' = f(x, y)$ и нужно найти его решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, то такая задача может быть заменена решением равносильного ей интегрального уравнения

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (14.1.2)$$

После этого возможность применения численного неопределенного интегрирования к решению дифференциального уравнения становится очевидной *).

В этой главе будет рассмотрен один из возможных методов вычисления значений функции (14.1.1). Он приводит к простым

*) Обе указанные задачи существенно различаются в следующем отношении. При вычислении интеграла (14.1.1) функция f считается известной во всех точках сетки на отрезке $[x_0, X]$ и для нахождения каждого значения $y(x)$ можно пользоваться любыми значениями f . В случае же интеграла (14.1.2) известными будут значения функции $f(x, y)$ для табличных точек, предшествующих x , значения же $f(x, y)$ для точек, следующих за x , мы не имеем права вводить в вычисления.

расчетным схемам и, как правило, дает хорошую точность, если функция f будет достаточно „гладкой“ на отрезке интегрирования и вблизи него.

Предположим, что вычисления начаты и доведены до узла $x_n = x_0 + nh$ включительно. Пусть для нахождения следующего значения $y(x_{n+1})$ функции (16.1.1) мы хотим воспользоваться только одним значением y непосредственно предшествующим $y(x_{n+1})$:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt. \quad (14.1.3)$$

Для вычисления интеграла интерполируем f на отрезке $[x_n, x_{n+1}]$. В условиях изучаемой задачи, целесообразно за узлы интерполирования принять табличные узлы, ближайшие к промежутку $x_n < x < x_{n+1}$, взяв одинаковое число их с той и другой стороны от указанного промежутка.

Применим интерполяционную формулу Ньютона (3.2.6), расположив в ней узлы в порядке $x_n, x_n + h, x_n - h, x_n + 2h, x_n - 2h, \dots$

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_n) + (x - x_n)f(x_n, x_n + h) + (x - x_n)(x - x_n - h) \times \\ & \times f(x_n, x_n + h, x_n - h) + (x - x_n)(x - x_n - h)(x - x_n + h) \times \\ & \times f(x_n, x_n + h, x_n - h, x_n + 2h) + \dots \end{aligned}$$

Или, если ввести новую переменную, положив $x = x_n + uh$, и выразить разностные отношения через конечные разности,

$$\begin{aligned} f(x_n + uh) = & f_n + \frac{u}{1!} \Delta f_n + \frac{u(u-1)}{2!} \Delta^2 f_{n-1} + \frac{(u+1)u(u-1)}{3!} \times \\ & \times \Delta^3 f_{n-1} + \frac{(u+1)u(u-1)(u-2)}{4!} \Delta^4 f_{n-2} + \dots \end{aligned}$$

Для придания членам этого равенства формы, симметричной относительно середины $x_n + \frac{1}{2}h$ промежутка, преобразуем разности четного порядка при помощи тождеств

$$\begin{aligned} f_n = & \frac{1}{2} [f_{n+1} + f_n] - \frac{1}{2} [f_{n+1} - f_n] = \frac{1}{2} [f_{n+1} + f_n] - \frac{1}{2} \Delta f_n \\ \Delta^2 f_{n-1} = & \frac{1}{2} [\Delta^2 f_n + \Delta^2 f_{n-1}] - \frac{1}{2} [\Delta^2 f_n - \Delta^2 f_{n-1}] = \\ = & \frac{1}{2} [\Delta^2 f_n + \Delta^2 f_{n-1}] - \frac{1}{2} \Delta^3 f_{n-1} \\ . & \end{aligned}$$

В результате получим *)

$$f(x_n + uh) = \frac{f_n + f_{n+1}}{2} + \frac{u - \frac{1}{2}}{1!} \Delta f_n + \frac{u(u-1)}{2!} \frac{\Delta^2 f_{n-1} + \Delta^2 f_n}{2} + \\ + \frac{\left(u - \frac{1}{2}\right) u(u-1)}{3!} \Delta^3 f_{n-1} + \dots + \frac{(u+k-1) \dots (u-k)}{(2k)!} \times \\ \times \frac{\Delta^{2k} f_{n-k} + \Delta^{2k} f_{n-k+1}}{2} + \frac{\left(u - \frac{1}{2}\right) (u+k-1) \dots (u-k)}{(2k+1)!} \Delta^{2k+1} f_{n-k} + r(x). \quad (14.1.4)$$

Подстановка построенного представления функции f в интеграл

$$\int_{x_n}^{x_n+h} f(t) dt = h \int_0^1 f(x_n + uh) du \text{ приведет к следующему выражению}$$

для $y(x_{n+1})$:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \left[\frac{f_n + f_{n+1}}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 f_{n-1} + \Delta^2 f_n}{2} + \right. \\ + \frac{11}{720} \frac{\Delta^4 f_{n-2} + \Delta^4 f_{n-1}}{2} - \frac{191}{60480} \frac{\Delta^6 f_{n-3} + \Delta^6 f_{n-2}}{2} + \dots \\ \left. \dots + C_k \frac{\Delta^{2k} f_{n-k} + \Delta^{2k} f_{n-k+1}}{2} \right] + R_{n,k}, \quad (14.1.5)$$

$$C_k = \frac{1}{(2k)!} \int_0^1 (u+k-1) \dots (u-k) du, \quad R_{n,k} = \int_{x_n}^{x_n+h} r(x) dx.$$

Расчетная формула отсюда получится, если избрать какое-либо значение k и отбросить остаток $R_{n,k}$.

Рассмотрим пример вычислений. Пусть нужно на отрезке $[0, 1]$ вычислить значения интеграла

$$y(x) = \int_0^x J_1(t) dt = 1 - J_0(x).$$

J_0 и J_1 суть бесселевы функции первого рода. Примем $h=0,2$. В (14.1.5) сохраним члены с разностями до четвертого порядка. Расчетная формула будет:

$$y_{n+1} = y_n + 0,2 \left[\frac{f_n + f_{n+1}}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 f_{n-1} + \Delta^2 f_n}{2} + \frac{11}{720} \frac{\Delta^4 f_{n-2} + \Delta^4 f_{n-1}}{2} \right] \\ y_0 = 0, \quad f(x) = J_1(x).$$

Таблица конечных разностей функции $f = J_1$, необходимая для вычислений по этой формуле, имеет следующий вид:

*) В теории интерполирования это равенство называется формулой Бесселя.

x	f	$\Delta f \cdot 10^7$	$\Delta^2 f \cdot 10^7$	$\Delta^3 f \cdot 10^7$	$\Delta^4 f \cdot 10^7$
$x_{-2} = -0,4$	—0,196 026 6	96 525 8	+2 975 0	—2 975 0	000 0
$x_{-1} = -0,2$	—0,099 500 8	99 500 8	000 0	—2 975 0	98 6
$x_0 = 0,0$	000 000 0	99 500 8	— 2 975 0	—2 876 4	194 4
$x_1 = 0,2$	0,099 500 8	96 525 8	— 5 851 4	—2 682 0	283 0
$x_2 = 0,4$	0,196 026 6	90 674 4	— 8 533 4	—2 399 0	361 3
$x_3 = 0,6$	0,286 701 0	82 141 0	—10 932 4	—2 037 7	427 9
$x_4 = 0,8$	0,368 842 0	71 208 6	—12 970 1	—1 609 8	
$x_5 = 1,0$	0,440 050 6	58 238 5	—14 579 9		
$x_6 = 1,2$	0,498 289 1	43 658 6			
$x_7 = 1,4$	541 947 7				

При составлении ее необходимо было вычислить значения f в точках $x_{-1} = -0,2$ и $x_{-2} = -0,4$, выходящих за границу $x = 0$ отрезка интегрирования $[0, 1]$. Как при помощи этой таблицы находятся значения интеграла $y(x)$, ниже показано на примере вычисления $y(0, 2)$:

$$\begin{aligned}
 y(0, 2) = y(0) + h \left[\frac{f(0) + f(0, 2)}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 f(-0, 2) + \Delta^2 f(0)}{2} + \right. \\
 \left. + \frac{11}{720} \frac{\Delta^4 f(-0, 4) + \Delta^4 f(-0, 2)}{2} \right] = 0 + 0,2 \left[\frac{0 + 0,0995008}{2} - \right. \\
 \left. - \frac{1}{12} \frac{0 - 0,0029750}{2} + \frac{11}{720} \frac{0 + 0,0000986}{2} \right] = 0,0099750
 \end{aligned}$$

В результате получены следующие приближенные значения $y(x)$:

x	$y = \int_0^x J_1(t) dt$
0,0	0,000 000 0
0,2	0,009 975 0
0,4	0,039 601 7
0,6	0,087 995 1
0,8	0,153 712 6
1,0	0,234 802 3

От значений интеграла, точных на семь знаков, отличается только $y(0, 4)$ на единицу седьмого знака*). Все знаки остальных значений совпадают с точными.

§ 2. Остаток

Старшая конечная разность, входящая в (14.1.4) имеет порядок $2k+1$ и для составления всех членов этой формулы необходимо знать значения функции f в $2k+2$ точках $x_n - kh, \dots, x_n + (k+1)h$. Если предположить, что функция f имеет на отрезке $[x_n - kh, x_n + (k+1)h]$, непрерыв-

*) См., например, Ватсон, Теория бесселевых функций, 4. 2, ИИЛ, 1949, 18—19.

ную производную порядка $2k+2$, остаток $r(x)$ интерполирования (14.1.4) может быть найден при помощи теоремы, приведенной в § 2 гл. III, и имеет значение

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{[x-x_n+kh][x-x_n+(k-1)h] \dots [x-x_n-(k+1)h]}{(2k+2)!} f^{(2k+2)}(\eta) = \\ &= h^{2k+2} \frac{(u+k)(u+k-1) \dots (u-k-1)}{(2k+2)!} f^{(2k+2)}(\eta). \\ x_n - kh &< \eta < x_n + (k+1)h. \end{aligned}$$

Это дает возможность найти для дополнительного члена $R_{n,k}$ формулы (14.1.5) следующее значение

$$\begin{aligned} R_{n,k} &= h \int_0^1 r(x_n + uh) du = \\ &= \frac{h^{2k+3}}{(2k+2)!} \int_0^1 (u+k)(u+k-1) \dots (u-k-1) f^{(2k+2)}(\eta) du. \end{aligned}$$

Так как множитель $(u+k)(u+k-1) \dots (u-k-1)$ сохраняет на отрезке $[0, 1]$ знак, к последнему интегралу может быть применена теорема о среднем значении, что приводит к следующему утверждению:

Если f имеет непрерывную производную порядка $2k+2$ на отрезке $[x_n - kh, x_n + (k+1)h]$, для остатка $R_{n,k}$ в равенстве (14.1.5) верно представление

$$R_{n,k} = h^{2k+3} \frac{f^{(2k+2)}(\xi)}{(2k+2)!} \int_0^1 (u+k)(u+k-1) \dots (u-k-1) du, \quad (14.2.1)$$

где ξ есть некоторая внутренняя точка отрезка $[x_n - kh, x_n + (k+1)h]$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА С МАЛЫМ ЧИСЛОМ ЗНАЧЕНИЙ ИНТЕГРИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ

§ 1. Содержание задачи и некоторые общие теоремы о расчетной формуле

Здесь, как и выше, будет рассматриваться задача вычисления неопределенного интеграла

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt \dots \quad (15.1.1)$$

для равноотстоящих значений аргумента $x_k = x_0 + kh$ ($k = 0, 1, \dots$), но, в отличие от предположений предыдущей главы, сейчас мы допустим, что точки, в которых берутся значения функции, не обязаны совпадать с узлами x_k и могут лежать в любом месте области определения f .

Напомним, что при вычислении интеграла (15.1.1) при помощи формул вида (13.2.1), главная часть труда, обычно, расходуется на нахождение значений функции f и можно указать два пути, позволяющие экономить вычислительный труд. Можно стремиться к достижению возможно высокой степени точности при помощи выбора узлов, в которых берутся значения f , и можно стремиться к тому, чтобы каждое значение f применялось для нахождения не одного, а нескольких значений неопределенного интеграла, так чтобы на каждый шаг вычислений приходилось бы возможно меньшее число значений f .

В дальнейшем изложении, при построении расчетных формул, мы воспользуемся обоими указанными возможностями. Вновь остановимся на том случае, когда для разыскания следующего значения y_{n+1} интеграла привлекается только одно его предшествующее значение y_n . Тогда

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt$$

и нахождение y_{n+1} приводится к вычислению $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt$.

Чтобы коэффициенты расчетной формулы не зависели от номера шага n , мы должны считать, что узлы на оси x расположены h -периодически. Точки $\alpha + kh$, отвечающие различным целым значениям k , в дальнейшем будем называть сходственными.

Предположим, что для вычисления интеграла на отрезке $[x_n, x_{n+1}]$ было взято m узлов $\alpha, \beta, \dots, \lambda: x_n \leq \alpha < \beta < \dots < \lambda < x_{n+1}$. Ниже они будут называться основными. Пусть, кроме того, взято

a узлов $\alpha + p_i h$ ($i = 1, \dots, a$), сходственных α ,

b узлов $\beta + q_i h$ ($i = 1, \dots, b$), сходственных β ,

$\dots \dots \dots$

l узлов $\lambda + t_i h$ ($i = 1, \dots, l$), сходственных λ .

Распределение дополнительных узлов между табличными точками x_k определяется числами $p_i, q_i, \dots, t_i$, которые могут иметь любые целые значения, отличные от нуля. Общее число всех узлов назовем $N + 1$:

$$m + a + b + \dots + l = N + 1.$$

Рассмотрим формулу вида

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt \approx A_0 f(\alpha) + \sum_{i=1}^a A_i f(\alpha + p_i h) + \dots \\ \dots + L_0 f(\lambda) + \sum_{i=1}^l L_i f(\lambda + t_i h). \end{aligned} \quad (15.1.2)$$

Если числа $p_i, \dots, t_i$ считать заданными, она определяется узлами $\alpha, \dots, \lambda$ и коэффициентами $A_i, \dots, L_i$ ($i = 0, 1, \dots$). Их мы выберем так, чтобы равенство (15.1.2) имело возможно более высокую алгебраическую степень точности.

При всяких $\alpha, \dots, \lambda, p_i, \dots, t_i$ формулу (15.1.2) всегда можно сделать верной для любых многочленов степени N . Для этого достаточно взять ее интерполяционной, т. е. такой, чтобы ее коэффициенты были равны интегралам от соответствующих множителей в интерполяционной формуле Лагранжа для интерполирования f по ее значениям в узлах $\alpha, \alpha + p_i h, \dots, \lambda, \lambda + t_i h$. Этим требованием коэффициенты $A_i, \dots, L_i$ вполне определятся и дальнейшее повышение степени точности возможно только за счет выбора $\alpha, \dots, \lambda$. Ниже будет показано, что для любых $p_i, \dots, t_i$ при помощи подбора $\alpha, \dots, \lambda$, формулу (15.1.2) можно сделать точной для всех многочленов степени $m + N$ и число $m + N$ есть наивысшая возможная степень точности.

Введем следующие многочлены, связанные с узлами формулы

$$\begin{aligned} \omega(x) &= (x - \alpha) \dots (x - \lambda), \\ \omega_\alpha(x) &= \prod_{i=1}^a (x - \alpha - p_i h), \dots \omega_\lambda(x) = \prod_{i=1}^l (x - \lambda - t_i h), \\ \Omega(x) &= \omega_\alpha(x) \dots \omega_\lambda(x). \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \omega_\alpha(x) &= \prod_{i=1}^a (x - \alpha - p_i h), \dots \omega_\lambda(x) = \prod_{i=1}^l (x - \lambda - t_i h), \\ \Omega(x) &= \omega_\alpha(x) \dots \omega_\lambda(x). \end{aligned}} \right\} \quad (15.1.3)$$

Теорема 1. *Каковы бы ни были узлы $\alpha, \dots, \lambda$ и числа $p_i \dots t_i$, квадратурная формула (15.1.2) не может быть точной для всех многочленов степени $m + N + 1$.*

Доказательство. Для доказательства достаточно рассмотреть многочлен $f = \Omega(x) \omega^2(x)$. Степень его равна $m + N + 1$. Так как все узлы формулы являются корнями $\Omega \omega^2$, квадратурная сумма, стоящая справа в (15.1.2), для такой функции f обратится в нуль.

Интеграл же $\int_{x_n}^{x_{n+1}} \Omega \omega^2 dx$ отличен от нуля, т. к. многочлен $f = \Omega \omega^2$ сохраняет знак на отрезке интегрирования и отличен от тождественного нуля. Поэтому равенство (15.1.2) для $f = \Omega \omega^2$ не может быть верным.

Алгебраическая степень точности (15.1.2) всегда меньше, чем $m + N + 1$ и, самое большее, может быть равна $m + N$.

Теорема 2. *Для того, чтобы формула (15.1.2) была верной для всех многочленов степени $m + N$, необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

- 1) формула должна быть интерполяционной;
- 2) для любого многочлена $Q(x)$, степени меньшей m , должно выполняться равенство

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \Omega(x) \omega(x) Q(x) dx = 0. \quad (15.1.4)$$

Доказательство. Необходимость первого условия очевидна. Для проверки необходимости второго условия, возьмем произвольный многочлен $Q(x)$, степени меньшей m , и положим $f = \Omega(x) \omega(x) Q(x)$. Это есть многочлен самое большее степени $m + N$. Для него равенство (12.1.2) должно быть точным. Но f во всех узлах квадратурной суммы обращается в нуль. Поэтому должно быть верным равенство (15.1.4).

Предположим теперь, что оба условия теоремы выполняются и пусть f есть произвольный многочлен степени $m + N$. Разделив f на $\Omega \omega$, мы можем представить f в форме $f = \Omega \omega Q + r$, где Q и r есть многочлены, степеней меньше чем m и $N + 1$ соответственно.

Заметим попутно, что так как во всех узлах формулы произведение $\Omega\omega$ обращается в нуль, многочлены f и r должны в этих узлах принимать одинаковые значения.

Ввиду того, что степень r не больше N и формула интерполяционная, должна быть верной следующая цепь равенств, доказывающая достаточность условий теоремы

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f dx &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} \Omega\omega Q dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} r dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} r dx = \\ &= A_0 r(\alpha) + \sum_{i=1}^a A_i r(\alpha + p_i h) + \dots = A_0 f(\alpha) + \sum_{i=1}^a A_i f(\alpha + p_i h) + \dots \end{aligned}$$

Теорема 2 приводит вопрос о существовании квадратурной формулы (15.1.2), имеющей наивысшую алгебраическую степень точности $m+N$, к вопросу о существовании чисел $\alpha, \dots, \lambda$ таких, чтобы соответствующие им многочлены ω и Ω удовлетворяли условию (15.1.4).

Теорема 3. *Каковы бы ни были числа $p_i, \dots, t_i$, основные узлы $\alpha, \dots, \lambda$ всегда могут быть выбраны так, чтобы соответствующая им квадратурная формула (15.1.2) имела наивысшую алгебраическую степень точности $m+N$.*

Доказательство. Возьмем любую систему чисел $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, удовлетворяющую неравенствам

$$x_n \leq \alpha \leq \beta \leq \dots \leq \lambda \leq x_{n+1} \quad (15.1.5)$$

и построим по ним многочлены $\omega(x)$ и $\Omega(x)$. $\Omega(x)$ сохраняет знак на отрезке $[x_n, x_{n+1}]$. Примем его за весовую функцию и рассмотрим соответствующую ей систему многочленов $P_k(x)$, ортогональных на $[x_n, x_{n+1}]$. Среди них выберем многочлен $P_m(x)$ степени m . Для определенности записи, допустим, что его старший коэффициент равен единице:

$$P_m(x) = x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots$$

При любом многочлене Q , степени $< m$, будет верно равенство

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \Omega(x) P_m(x) Q(x) dx = 0. \quad (15.1.6)$$

Корни $P_m(x)$ все действительные, простые и лежат внутри отрезка $[x_n, x_{n+1}]$. Назовем их $\xi_1, \dots, \xi_m$ и будем считать, что они перенумерованы в порядке роста $x_n < \xi_1 < \dots < \xi_m < x_{n+1}$. Если окажется, что $\xi_1 = \alpha, \xi_2 = \beta, \dots, \xi_m = \lambda$, то P_m совпадает с ω и для многочленов Ω и ω будет выполнено условие (15.1.4). Соответствующая таким Ω и ω формула (15.1.2) будет иметь наивысшую алгебраическую степень точности $m+N$.

Построим систему линейных уравнений для нахождения коэффициентов P_k ($k=1, \dots, m$). Свойство ортогональности (15.1.6), вполне характеризующее P_m , равносильно выполнению равенств

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \Omega(x) P_m(x) x^i dx = 0 \quad i=0, 1, \dots, m-1,$$

или, если сюда внести вместо P_m его разложение по степеням x , $c_{m+i} + c_{m+i-1}p_1 + c_{m+i-2}p_2 + \dots + c_i p_m = 0$, $i=0, 1, \dots, m-1$

$$c_k = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \Omega(x) x^k dx \quad (15.1.7)$$

$\Omega(x)$ есть многочлен от $\alpha, \dots, \lambda$. Поэтому числа c_k также будут многочленами от $\alpha, \dots, \lambda$.

Определитель системы (15.1.7)

$$D = \begin{vmatrix} c_0, c_1, \dots, c_{m-1} \\ c_1, c_2, \dots, c_m \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ c_{m-1}, c_m, \dots, c_{2m-2} \end{vmatrix}$$

есть вместе с тем определитель положительной квадратичной формы

$$\varphi_m(z_1, \dots, z_m) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \Omega(x) \left(\sum_{i=1}^m x^{i-1} z_i \right)^2 dx$$

и он заведомо отличен от нуля при всяких $\alpha, \dots, \lambda$ из области (15.1.5). Коэффициенты p_k ($k=1, \dots, m$) будут рациональными функциями от $\alpha, \dots, \lambda$ непрерывными в области (15.1.5).

Рассмотрим корни $P_m(x): \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$. Они непрерывно зависят от коэффициентов p_k и будут, следовательно, непрерывными функциями $\alpha, \dots, \lambda$ в области (15.1.5):

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \varphi_1(\alpha, \dots, \lambda) \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \xi_m &= \varphi_m(\alpha, \dots, \lambda) \end{aligned} \quad (15.1.8)$$

Этим равенствам можно придать следующий геометрический смысл. Введем m -мерное числовое пространство $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ и обозначим его ρ_m . Равенства (15.1.8) можно истолковать как преобразование точки $(\alpha, \dots, \lambda)$ из ρ_m в некоторую новую точку $(\xi_1, \dots, \xi_m) \in \rho_m$. Условия (15.1.5), которым подчинены числа $\alpha, \dots, \lambda$, выделяют в ρ_m m -мерную замкнутую пирамиду. Так как числа ξ_k в свою очередь выполняют неравенства $x_n < \xi_1 < \dots < \xi_m < x_{n+1}$, то равенства (15.1.8) дают однозначное и непрерывное преобразование указанной пирамиды

в себя. По известной теореме Брауэра*) при таком преобразовании на верное существует неподвижная точка и, стало быть, существуют такие значения $\alpha, \dots \lambda$, для которых $\xi_1 = \alpha, \dots \xi_m = \lambda$ и $P_m(x) = \omega(x)$. Поэтому на верное существуют $\alpha, \dots \lambda$, удовлетворяющие неравенствам $x_n < \alpha < \dots < \lambda < x_{n+1}$, при которых выполняются (15.1.4), что и доказывает теорему 3.

Единственность таких значений $\alpha, \dots \lambda$ в общем случае остается невыясненной.

Рассмотрим еще остаток квадратуры (15.1.2) и найдем его простейшее представление.

Пусть $[a', b']$ есть отрезок, содержащий в себе $[x_n, x_{n+1}]$ и все узлы формулы (15.1.2).

Теорема 4. Если f имеет на $[a', b']$ непрерывную производную порядка $m + N + 1$ и если формула (15.1.2) имеет степень точности $m + N$, то на $[a', b']$ существует такая точка ξ , что для остатка $R(f)$ формулы (15.1.2) верно равенство:

$$R(f) = \frac{f^{(m+N+1)}(\xi)}{(m+N+1)!} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \Omega(x) \omega^2(x) dx. \quad (15.1.9)$$

Доказательство. Выполним интерполирование f по следующим данным. Предположим, что в каждом основном узле $\alpha, \dots \lambda$ заданы как значение f , так и значение производной f' , а в каждом узле вида $\alpha + p_i h, \dots \lambda + t_i h$ известно только значение самой функции f . Всего будет $m + N + 1$ известных значений. Интерполирующий многочлен, который мы обозначим $H(x)$, будет иметь степень $\leq m + N$:

$$f(x) = H(x) + r(x).$$

В условиях теоремы, для остатка интерполирования $r(x)$ верно следующее представление [гл. III, § 3].

$$r(x) = \frac{f^{(m+N+1)}(\eta)}{(m+N+1)!} \Omega(x) \omega^2(x),$$

где η есть точка, лежащая внутри отрезка, содержащего в себе узлы интерполирования и точку x .

Очевидно $R(f) = R(H) + R(r)$. Но $H(x)$ имеет степень $\leq m + N$ и $R(H) = 0$. Поэтому $R(f) = R(r)$. Квадратурная сумма для $r(x)$

*) Пусть в ρ_m дано $m + 1$ точек, не лежащих в $(m - 1)$ -мерной плоскости. Многогранник, имеющий эти точки своими вершинами, называется m -мерной пирамидой. Брауэром была доказана следующая теорема: „При любом однозначном и непрерывном отображении m -мерной пирамиды на себя имеется по меньшей мере одна неподвижная точка“. Brouwer „Ueber Abbildung von Mannigfaltigkeiten“ Math. Ann. 71 1912. См. также В. В. Немыцкий и, Метод неподвижных точек, Усп. мат. наук, 1936, 1, 153.

обращается в нуль ввиду того, что остаток $r(x)$ равен нулю во всех узлах формулы и $R(r)$ будет совпадать со значением интеграла от $r(x)$:

$$R(f) = R(r) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} r(x) dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{f^{(m+N+1)}(\eta)}{(m+N+1)!} \Omega(x) \omega^2(x) dx.$$

Так как $\Omega(x) \omega^2(x)$ сохраняет знак на $[x_n, x_{n+1}]$, отсюда следует утверждение теоремы 4.

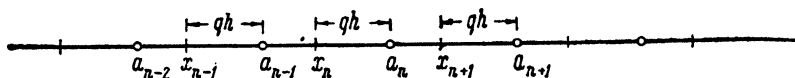
§ 2. Расчетные формулы частного вида *)

Ниже будут рассматриваться расчетные формулы, служащие для вычисления значений неопределенного интеграла $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt$ и требующие по одному, два или три значения функции f на каждый шаг, или, иначе говоря, формулы, содержащие по одному, два, три основных узла и некоторое число сходственных с ними узлов.

Все такие формулы могут быть построены единообразным способом и процесс их построения описан подробно только в одном случае в остальных же случаях приведены лишь окончательные результаты.

1. Начнем со случая одного значения f на каждый шаг. Изучение его приведет к построению формулы, известной еще Гауссу и полученной им в другой задаче и иным путем.

Пусть на участке $[x_n, x_n + h]$ за основной узел принята точка $a_n = x_n + qh$, $0 \leq q < 1$. Схема расположения узлов изображена на чертеже 9.



Черт. 9.

Предположим, что для построения формулы вида (15.1.2) привлекаются по k штук узлов, сходственных a_n , ближайших предшествующих a_n и следующих за a_n . В формуле будет участвовать всего $2k+1$ узлов. Мы можем распорядиться в ней выбором только одного

*) Значения коэффициентов и узлов квадратурных формул, приведенных в § 2, вычислены мл. научным сотрудником Ленинградского отделения Мат. ин-та АН СССР М. А. Филипповой.

параметра q и наивысшая степень точности формулы равна $2k+1$. Чтобы достигнуть ее, формулу нужно выбрать интерполяционной и выполнить условие ортогональности (15.1.4), которое в рассматриваемом случае запишется так:

$$\int_{x_n}^{x_n+h} \Omega(x) \omega(x) dx = 0, \quad (15.2.1)$$

$$\begin{aligned} \Omega(x) \omega(x) &= (x-a_n)(x-a_{n-1})(x-a_{n+1}) \dots (x-a_{n-k})(x-a_{n+k}) = \\ &= [x-x_n-qh][(x-x_n-qh)^2-h^2] \dots [(x-x_n-qh)^2-k^2h^2]. \end{aligned}$$

Легко показать, что уравнение (15.2.1) имеет решение $q = \frac{1}{2}$ и это решение единственное при $0 \leq q \leq 1$.

Преобразуем интеграл (15.2.1) к новой переменной, положив $x = x_n + hq + ht$,

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{x_n+h} \Omega(x) \omega(x) dx &= h^{2k+2} \int_{-q}^{1-q} \pi(t) dt, \\ \pi(t) &= t(t^2-1^2) \dots (t^2-k^2). \end{aligned}$$

(15.2.1) заменится равносильным уравнением

$$\varphi(q) = \int_{-q}^{1-q} \pi(t) dt = 0. \quad (15.2.2)$$

Так как $\pi(t)$ есть нечетная функция t , то $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-1/2}^{1/2} \pi(t) dt = 0$ и $q = \frac{1}{2}$ является корнем уравнения (15.2.2).

$$\varphi'(q) = \pi(1-q) - \pi(-q).$$

Но $\pi(1-q)$ и $\pi(-q)$ имеют противоположные знаки при $0 < q < 1$ и $\varphi'(q)$, следовательно, сохраняет знак на промежутке $0 < q < 1$. Отсюда следует единственность корня $q = \frac{1}{2}$ на $0 \leq q \leq 1$

$$a_n = x_n + \frac{1}{2} h.$$

Для интерполирования f на $[x_n, x_n+h]$ по ее значениям в узлах $a_m [m = n-k, \dots, n+k]$, воспользуемся интерполяционной формулой

Ньютона (3.2.6), расположив в ней узлы в следующем порядке:

$$\begin{aligned}
 & a_n, a_n + h, a_n - h, a_n + 2h, a_n - 2h, \dots \\
 & f(x) = f(a_n) + (x - a_n)f'(a_n, a_n + h) + (x - a_n)(x - a_n - h) \times \\
 & \quad \times f''(a_n, a_n + h, a_n - h) + (x - a_n)(x - a_n - h)(x - a_n + h) \times \\
 & \quad \times f'''(a_n, a_n + h, a_n - h, a_n + 2h) + \dots + r(x) = \\
 & = f(a_n) + \frac{x - a_n}{1! h} \Delta f(a_n) + \frac{(x - a_n)(x - a_n - h)}{2! h^2} \Delta^2 f(a_n - h) + \dots \\
 & \quad \dots + \frac{(x - a_n + kh) \dots (x - a_n - kh)}{(2k + 1)! h^{2k+1}} \Delta^{2k+1} f(a_n - kh) + r(x).
 \end{aligned}$$

Подстановка этого выражения $f(x)$ в равенство

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_n+h} f(t) dt$$

и несложные вычисления приведут к следующему результату:

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} = y_n + h \left[f(a_n) + \frac{1}{24} \Delta^2 f(a_n - h) - \frac{17}{5760} \Delta^4 f(a_n - 2h) + \right. \\
 \left. + \frac{367}{967680} \Delta^6 f(a_n - 3h) - \frac{27859}{464486400} \Delta^8 f(a_n - 4h) + \right. \\
 \left. + \frac{1295803}{122624409600} \Delta^{10} f(a_n - 5h) + \dots + c_k \Delta^{2k} f(a_n - kh) \right] + R_{n,k}.
 \end{aligned}$$

$$c_k = \frac{1}{(2k)!} \int_{-1/2}^{1/2} t^2 (t^2 - 1^2) \dots [t^2 - (k-1)^2] dt. \quad (15.2.3)$$

Остаток интерполирования $r(x)$, если предположить, что f имеет непрерывную производную порядка $2k+2$ на отрезке $[a_k - (k+1)h, a_k + kh]$, будет равен (гл. 3, § 2)

$$r(x) = \frac{[x - a_k + (k+1)h] \dots (x - a_k - kh)}{(2k+2)!} f^{(2k+2)}(\eta).$$

Здесь η есть внутренняя точка указанного отрезка. Для остаточного члена $R_{n,k}$ формулы (15.2.3) отсюда, после интегрирования и замены

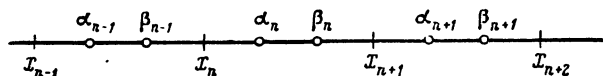
$$x = a_n + th = x_n + \frac{1}{2}h + th,$$

найдем

$$R_{n,k} = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2k+2)!} \int_{-1/2}^{1/2} t^2 (t^2 - 1^2) \dots (t^2 - k^2) dt. \quad (15.2.4)$$

II. Рассмотрим несколько наиболее простых способов вычисления, требующих два значения функции f на каждый шаг. Пусть на отрезке $[x_n, x_n + h]$ взяты два основных узла α_n, β_n .

Схема узлов такова:



Черт. 10.

Допустим, что кроме α_n и β_n берется еще по k сходственных им узлов, ближайших к отрезку $[x_n, x_n + h]$ справа и слева от него, так что к вычислению привлекается всего $2k + 2$ узлов. Наивысшая степень точности, которая может быть достигнута при построении формулы, равна $2k + 3$.

В изучаемом случае $\omega(x) = (x - \alpha_n)(x - \beta_n)$. Произведение $\Omega(x)\omega(x)$ будет содержать $2k + 2$ множителя и иметь следующую форму:

$$\Omega(x)\omega(x) = (x - \alpha_n)(x - \beta_n)(x - \alpha_{n+1})(x - \beta_{n-1})(x - \beta_{n+1})(x - \alpha_{n-1}) \dots$$

Условие ортогональности (15.1.4), из которого должны быть найдены α_n и β_n , здесь приводится к двум уравнениям

$$\int_{x_n}^{x_n+h} \Omega \omega dx = 0, \quad \int_{x_n}^{x_n+h} x \Omega \omega dx = 0. \quad (15.2.5)$$

Построение формул начнем со случая $k = 1$. Кроме двух узлов α_n и β_n на промежутке $[x_n, x_n + h]$, берутся по одному узлу в двух соседних промежутках $[x_n - h, x_n]$ и $[x_n + h, x_n + 2h]$.

Чтобы привести задачу нахождения α_n и β_n к каноническому отрезку, выполним линейное преобразование

$$z = \frac{2}{h}x - \left(1 + \frac{2}{h}x_n\right),$$

переводящее $[x_n - h, x_n]$, $[x_n, x_n + h]$, ... соответственно в $[-3, -1]$, $[-1, 1]$, Середина отрезка $[x_n, x_n + h]$ перейдет в точку $z = 0$. Точки, соответствующие $x = \alpha_n$ и $x = \beta_n$, назовем p и q . В переменной z многочлены ω и Ω будут такими

$$\omega(x) = (x - \alpha_n)(x - \beta_n) = \frac{h^2}{4}(z - p)(z - q)$$

$$\begin{aligned} \Omega(x)\omega(x) &= (x - \alpha_n)(x - \beta_n)(x - \alpha_{n+1})(x - \beta_{n-1}) = \\ &= \frac{h^4}{16}(z - q + 2)(z - p)(z - q)(z - p - 2). \end{aligned}$$

Уравнения (15.2.5), являющиеся записью условия ортогональности $\Omega\omega$ на $[x_n, x_n+h]$ к 1 и x , заменяются в переменной z условиями ортогональности $\Omega\omega$ на $[-1, 1]$ к 1 и z

$$\int_{-1}^1 (z-q+2)(z-p)(z-q)(z-p-2) dz = 0,$$

$$\int_{-1}^1 z(z-q+2)(z-p)(z-q)(z-p-2) dz = 0$$

или, после интегрирования и сокращений,

$$p^2(1-6q+3q^2)+2p(3q^2-4q-1)+\left(q^2+2q-\frac{17}{5}\right)=0,$$

$$(p+q)\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{3}(pq+q-p-2)\right]=0. \quad (15.2.6)$$

Из второго уравнения находим два значения p :

$$p_1 = \frac{q - \frac{7}{5}}{1 - q}, \quad p_2 = -q.$$

Числа p и q должны удовлетворять условиям

$$-1 < p < q < 1.$$

Для p_1 неравенство $-1 < p_1$, как легко видеть, не может быть выполнено и значение p_1 должно быть, поэтому, отброшено.

Подставив $p = p_2 = -q$ в первое из равенств (15.2.6), получим уравнение для q :

$$3q^4 - 12q^3 + 10q^2 + 4q - 3,4 = 0.$$

Так как $p = -q$ и должно быть $p < q$, то $q > 0$ и нужно найти корень уравнения, лежащий на промежутке $(0, 1)$. Можно показать, что на таком промежутке существует только один корень

$$q \approx 0,5333\ 2384\ 75.$$

Основными узлами на отрезке $[x_n, x_n+h]$, следовательно, должны быть

$$\alpha_n = x_n + \frac{1}{2}(1-q)h = x_n + h \cdot 0,2333\ 3807\ 63,$$

$$\beta_n = x_n + \frac{1}{2}(1+q)h = x_n + h \cdot 0,766\ 6192\ 37.$$

Интерполируем f по ее значениям в узлах $\beta_{n-1}, \alpha_n, \beta_n, \alpha_{n+1}$

$$f(x) = \frac{(x-\alpha_n)(x-\beta_n)(x-\alpha_{n+1})}{(\beta_{n-1}-\alpha_n)(\beta_{n-1}-\beta_n)(\beta_{n-1}-\alpha_{n+1})}f(\beta_{n-1}) + \dots +$$

$$+ r(x) = P(x) + r(x).$$

Тогда

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_n+h} f(t) dt = y_n + \int_{x_n}^{x_n+h} P(t) dt + R_n.$$

Вычисление интеграла от P приводит к следующей расчетной формуле

$$y_{n+1} = y_n + h \{ 0,4869\,0231\,79 [f(\alpha_n) + f(\beta_n)] + \\ + 0,0130\,976\,821 [f(\beta_{n-1}) + f(\alpha_{n+1})] \} + R_n. \quad (15.2.7)$$

Для нахождения остатка можно воспользоваться его общим представлением (15.1.9). Применительно к рассматриваемому случаю там нужно положить $m=2$, $N+1=4$,

$$\Omega\omega^2 = (x - \beta_{n-1})(x - \alpha_n)^2(x - \beta_n)^2(x - \alpha_{n+1}).$$

Несложные подсчеты дадут следующий результат:

$$R_n = -\frac{14,73\,2017}{4\,838\,400} h^7 f^{(6)}(\xi) = -0,0000\,0305 h^7 f^{(6)}(\xi). \quad (15.2.8)$$

$$x_n - h < \xi < x_n + h$$

Положим теперь $k=2$. К двум основным узлам на промежутке $[x_n, x_n+h]$ присоединяются по два в каждом соседнем промежутке $[x_n-h, x_n]$ и $[x_n+h, x_n+2h]$. Схема узлов и их обозначения указаны на чертеже (см. черт. 10).

Наивысшая алгебраическая степень точности равна 7.

Узлы квадратурной формулы будут такими:

$$\alpha_n = x_n + h \cdot 0,2389\,6172\,10, \quad \beta_n = x_n + h \cdot 0,7610\,3827\,90.$$

Расчетная формула есть:

$$y_{n+1} = y_n + h \{ 0,4830\,9244\,04 [f(\alpha_n) + f(\beta_n)] + \\ + 0,0173\,7142\,26 [f(\beta_{n-1}) + f(\alpha_{n+1})] - 0,0004\,6386\,30 \times \\ \times [f(\alpha_{n-1}) + f(\beta_{n+1})] \} + R_n. \quad (15.2.9)$$

Для остатка R верна оценка

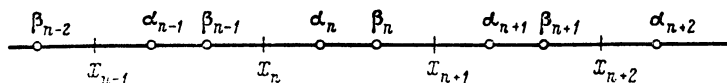
$$|R_n| \leq 0,0000\,0008\,h^9 M_8$$

$$M_8 = \max_x |f^{(8)}(x)|, \quad \alpha_{n-1} \leq x \leq \beta_{n+1}.$$

Для всех приводимых ниже формул вычислялись узлы, расположенные симметрично относительно середины отрезка $[x_n, x_n+h]$. Отсутствие несимметрично расположенных узлов, дающих наивысшую степень точности, не проверялось.

Положим $k=3$. К двум узлам на промежутке $[x_n, x_n+h]$ присоединяются по два узла в ближайших соседних промежутках $[x_n-h, x_n]$, $[x_n+h, x_n+2h]$ и по одному узлу в следующих соседних промежутках $[x_n-2h, x_n-h]$ и $[x_n+2h, x_n+3h]$.

Расположение узлов и их обозначения приведены на чертеже 11.



Черт. 11.

Наивысшая степень точности равна 9. Расчетная формула имеет вид:

$$y_{n+1} = y_n + h \{ 0,4825 \ 9372 \ 50 [f(\alpha_n) + f(\beta_n)] + \\ + 0,0179 \ 7222 \ 21 [f(\beta_{n-1}) + f(\alpha_{n+1})] - 0,0005 \ 7826 \ 47 \times \\ \times [f(\alpha_{n-1}) + f(\beta_{n+1})] + 0,0000 \ 123177 [f(\beta_{n-2}) + f(\alpha_{n+2})] \} + R_n. \quad (15.2.10)$$

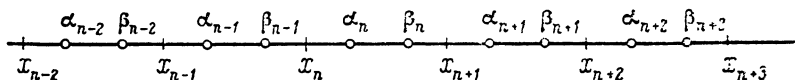
Узлы ее суть

$$\alpha_n = x_n + h \cdot 0,2396 \ 3009 \ 31, \quad \beta_n = x_n + h \cdot 0,7603 \ 6990 \ 69.$$

Для остатка R_n справедлива оценка

$$|R_n| \leq 0,0000 \ 0000 \ 3h^{11} M_{10}, \\ M_{10} = \max_x |f^{(10)}(x)|, \quad \beta_{n-2} \leq x \leq \alpha_{n+2}.$$

Наконец, примем $k=4$ и к двум основным узлам α_n и β_n присоединим еще восемь узлов, лежащих по четыре слева и справа от $[x_n, x_n+h]$ в двух парах соседних промежутков $[x_n-2h, x_n-h]$, $[x_n-h, x_n]$ и $[x_n+h, x_n+2h]$, $[x_n+2h, x_n+3h]$ (см. черт. 12)



Черт. 12.

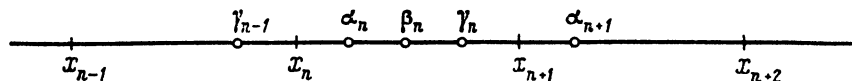
Наивысшая алгебраическая степень точности равна 11 и квадратурная формула, для которой эта точность достигается, есть

$$y_{n+1} = y_n + h \{ 0,4791 \ 1316 \ 68 [f(\alpha_n) + f(\beta_n)] + \\ + 0,0215 \ 3229 \ 32 [f(\beta_{n-1}) + f(\alpha_{n+1})] - 0,0013 \ 6329 \ 27 \times \\ \times [f(\alpha_{n-1}) + f(\beta_{n+1})] + 0,0001 \ 2360 \ 65 [f(\beta_{n-2}) + f(\alpha_{n+2})] - \\ - 0,0000 \ 0577 \ 38 [f(\alpha_{n-2}) + f(\beta_{n+2})] \} + R_n \\ |R_n| \leq 0,0000 \ 0000 \ 011 \ h^{13} M_{12} \quad (15.2.11) \\ M_{12} = \max_x |f^{(12)}(x)|, \quad \alpha_{n-2} \leq x \leq \beta_{n+2}$$

$$\alpha_n = x_n + h \cdot 0,2434 \ 6008 \ 65, \quad \beta_n = x_n + h \cdot 0,7565 \ 3991 \ 35$$

III. В заключение приведем несколько квадратурных формул, требующих три значения функции f на каждый шаг вычислений.

Пусть на отрезке $[x_n, x_n + h]$ (см. черт. 13) берутся три узла $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$. Предположим сначала, что к ним присоединяются по одному

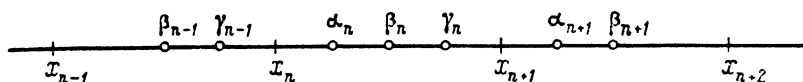


Черт. 13.

ближайшему узлу на двух соседних отрезках $[x_n - h, x_n]$ и $[x_n + h, x_n + 2h]$. Наивысшая возможная степень точности равна 7 и соответствующая квадратурная формула такова:

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + h \{ 0,4001 \ 0365 \ 66f(\beta_n) + 0,2934 \ 8934 \ 91 \times \\
 &\quad \times [f(\alpha_n) + f(\gamma_n)] + 0,0064 \ 5882 \ 26 [f(\gamma_{n-1}) + f(\alpha_{n+1})] \} + R_n \\
 \alpha_n &= x_n + h \cdot 0,1351 \ 8355 \ 61 \\
 \beta_n &= x_n + h \cdot 0,5 \\
 \gamma_n &= x_n + h \cdot 0,8648 \ 1644 \ 39 \\
 |R_n| &\leq 0,0000 \ 0000 \ 24 \ h^6 \ M_8 \\
 M_8 &= \max_x |f^{(8)}(x)|, \quad \gamma_{n-1} \leq x \leq \alpha_{n+1}.
 \end{aligned} \tag{15.2.11}$$

Если в соседних с $[x_n, x_n + h]$ отрезках $[x_n - h, x_n]$ и $[x_n + h, x_n + 2h]$ (см. черт. 14) берется по два узла, то наивысшая алгебраическая степень точности формулы равна 9.

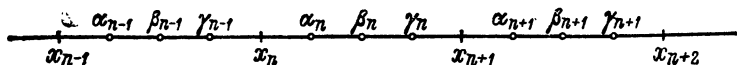


Черт. 14.

Расчетная формула имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + h \{ 0,3876 \ 2754 \ 18f(\beta_n) + 0,2978 \ 1275 \ 62 \times \\
 &\quad \times [f(\alpha_n) + f(\gamma_n)] + 0,0084 \ 8089 \ 32 [f(\gamma_{n-1}) + f(\alpha_{n+1})f(\alpha_{n+1})] - \\
 &\quad - 0,0001 \ 0742 \ 03 [f(\beta_{n-1}) + f(\beta_{n+1})] \} + R_n \\
 \alpha_n &= x_n + h \cdot 0,1414 \ 5832 \ 89 \\
 \beta_n &= x_n + h \cdot 0,5 \\
 \gamma_n &= x_n + h \cdot 0,8585 \ 4167 \ 11 \\
 |R_n| &\leq 0,0000 \ 0000 \ 0002 \ h^{11} M_{10} \\
 M_{10} &= \max_x |f^{(10)}(x)|, \quad \beta_{n-1} \leq x \leq \beta_{n+1}
 \end{aligned} \tag{15.2.12}$$

Наконец, когда на отрезках $[x_n - h, x_n]$ и $[x_n + h, x_n + 2h]$ (см. черт. 15) взять по три узла, получится формула, приводимая ниже и имеющая степень точности, равную 11.



Черт. 15.

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} = & y_n + h \{ 0,3813 \ 4284 \ 93 f(\beta_n) + 0,2998 \ 6684 \ 13 \times \\
 & \times [f(\alpha_n) + f(\gamma_n)] + 0,0096 \ 7804 \ 71 [f(\gamma_{n-1}) + f(\alpha_{n+1})] - \\
 & - 0,0002 \ 2289 \ 47 [f(\beta_{n-1}) + f(\beta_{n+1})] + \\
 & + 0,0000 \ 0658 \ 16 [f(\alpha_{n-1}) + f(\gamma_{n+1})] \} + R_n, \\
 & \alpha_n = x_n + h \cdot 0,1446 \ 9855 \ 58, \\
 & \beta_n = x_n + h \cdot 0,5, \\
 & \gamma_n = x_n + h \cdot 0,8553 \ 0144 \ 42, \\
 & |R_n| \leq 0,0000 \ 0000 \ 0000 \ 3 \ h^{13} \ M_{12}, \\
 & M_{12} = \max_x |f^{(12)}(x)|, \quad \alpha_{n-1} \leq x \leq \gamma_{n+1}.
 \end{aligned} \tag{15.2.13}$$

Пример. Вычислялся эллиптический интеграл 1-го рода.

$$y(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} \quad \text{при } k^2 = 0,5.$$

Вычисления проводились по формуле (15.2.7) с шагом $h = 0,1$. Формула содержит 4 узла и степень точности ее равна 5. На каждый шаг $h = 0,1$ вычисления требовали двух значений интегрируемой функции.

Для сравнения интеграл был вычислен также по формуле [см. (14.1.5)]:

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} = & y_n + h \left[\frac{f_n + f_{n+1}}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 f_{n-1} + \Delta^2 f_n}{2} + \right. \\
 & \left. + \frac{11}{720} \cdot \frac{\Delta^4 f_{n-2} + \Delta^4 f_{n-1}}{2} - \dots \right] \dots \tag{15.2.14}
 \end{aligned}$$

Здесь шаг был принят в два раза меньшим $h = 0,05$ с тем, чтобы на каждый отрезок длины 0,1 приходилось бы также два значения f . Было взято два варианта формулы (15.2.14)

1) с четырьмя узлами $x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$

2) с шестью узлами $x_{n-2}, x_{n-1}, \dots, x_{n+3}$

В первом случае формула (15.2.14) содержит столько же узлов, что и (15.2.7). В последнем же случае, она имеет ту же алгебраическую степень точности 5, как и (15.2.7). Точные значения интеграла взяты

из известных таблиц Лежандра*). Погрешности найденных значений напечатаны увеличенными в 10^{10} раз

x	Точное значение $y(x)$	Найденное по формуле (15.2.7)	Погрешность $\times 10^{10}$
0,0	0,	0,	0
0,1	0,1002 5119 46	0,1002 5119 47	— 1
0,2	0,2020 3892 48	0,2020 3892 51	— 3
0,3	0,3070 5493 05	0,3070 5493 12	— 7
0,4	0,4173 4515 97	0,4173 4516 12	— 15
0,5	0,5356 2273 28	0,5356 2273 70	— 42
0,6	0,6658 4782 54	0,6658 4783 90	— 1 36
0,7	0,8144 8928 40	0,8144 8934 76	— 6 36
0,8	0,9939 0712 63	0,9939 0739 32	— 16 69

x	Значение, найденное по формуле (15.2.14) с 4 узлами	Погреш- ность $\times 10^{10}$	Значение, найденное по формуле (15.2.14) с 6 узлами	Погреш- ность $\times 10^{10}$
0,00	0		0	
0,05	0,0500 3121 82		0,0500 3128 81	
0,10	0,1002 5105 23	14 23	0,1002 5119 65	— 19
0,15	0,1508 5266 47		0,1508 5289 27	
0,20	0,2020 3860 18	32 30	0,2020 3892 97	— 49
0,25	0,2540 2625 15		0,2540 2670 37	
0,30	0,3070 5432 81	60 24	0,3070 5494 16	— 1 11
0,35	0,3613 9094 30		0,3613 9177 30	
0,40	0,4173 4405 30	110 67	0,4173 4518 61	— 2 64
0,45	0,4752 7550 59		0,4752 7707 68	
0,50	0,5356 2057 49	215 79	0,5356 2280 57	— 7 29
0,55	0,5989 1615 32		0,5989 1942 55	
0,60	0,6658 4306 44	476 10	0,6658 4807 73	— 25 19
0,65	0,7372 9250 74		0,7373 5064 71	
0,70	0,8144 7623 23	1305 17	0,8144 9056 09	— 127 69
0,75	0,8991 2206 67		0,8992 0046 74	
0,80	0,9938 5271 13	5441 50	0,9939 2099 17	— 1386 54

* A. M. Legendre, Legendres Tafeln der elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung, Stuttgart 1931.

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ НЕСКОЛЬКО ПРЕДШЕСТВУЮЩИХ ЗНАЧЕНИЙ ИНТЕГРАЛА

§ 1. Содержание задачи

В двух предыдущих главах были рассмотрены отдельные вопросы теории методов численного неопределенного интегрирования, когда для нахождения следующего значения интеграла используется только одно его предыдущее значение. Расчетные схемы, отвечающие таким методам, всегда устойчивы относительно начальных ошибок и ошибок округлений. Действительно, при естественном требовании, что вычисления были точными для $f \equiv 0$ и функции $y(x)$, сохраняющей постоянное значение, расчетная формула должна иметь вид:

$$y_{n+1} = y_{n-k} + \sum_{j=1}^m B_{nj} f(\xi_{nj}) + r_n.$$

Она принадлежит к числу формул с положительными коэффициентами A_i и обладает устойчивостью обоих указанных типов, как было выяснено в конце главы 13.

Разработка методов расчета, которые для нахождения y_{n+1} пользуются не одно, а несколько предшествующих значений y_k ($k \leq n$) является задачей более трудной, так как стремление достигнуть наивысшую алгебраическую степень точности здесь не всегда может быть совмещено с требованием устойчивости вычислительной схемы.

Ниже будет рассмотрен один из способов построения расчетных формул, когда такое совмещение возможно.

Пусть для вычисления на отрезке $x_0 \leq x \leq X$ функции

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt$$

принята произвольная сетка точек

$$x_k (k = 0, 1, \dots, N; \quad x_k < x_{k+1}).$$

Допустим, что вычисления доведены до точки x_n и последнее найденное значение есть $y(x_n)$. При вычислении следующего значения $y(x_{n+1})$ можно воспользоваться любыми уже найденными значениями

$y(x_k)$ ($k \leq n$) и несколькими значениями $y' = f$. Будем считать, что производная y' известна всюду на отрезке $[x_0, X]$ и мы ничем не стеснены в выборе узлов, где берутся значения f , кроме числа таких значений.

Это есть задача интерполирования функции y в одной фиксированной точке x_{n+1} по нескольким значениям самой функции и производной от нее $y' = f(x)$. Из дальнейшего изложения будет ясно, что в задаче полезно различать узлы трех перечисленных ниже видов.

Пусть $y(z)$ есть любая функция, определенная и дифференцируемая на некотором отрезке $[a, b]$. Возьмем на $[a, b]$ $r + s + l$ различных точек

$$\begin{array}{ccccccc} \xi_1, & \xi_2, & \dots & \xi_r, & & & \\ \xi_{r+1}, & \xi_{r+2}, & \dots & \xi_{r+s}, & & & \\ \xi_{r+s+1}, & \xi_{r+s+2}, & \dots & \xi_{r+s+l}. & & & \end{array} \quad (16.1.1)$$

Будем считать, что в первых r из них известны значения функции $y(z)$:

$$y(\xi_1), \dots, y(\xi_r),$$

в следующих s — как значения функции, так и значения производной

$$y(\xi_j), y'(\xi_j) \quad j = r+1, \dots, r+s,$$

и в остальных l — значения только производной:

$$y'(\xi_j) \quad j = r+s+1, \dots, r+s+l.$$

Узлы, указанные в первой, второй и третьей строках таблицы (16.1.1), станем называть соответственно простыми, двойными и дополнительными. Предположим, что, кроме того, взята точка $x \in [a, b]$ отличная от всех простых и двойных узлов. Но мы не исключаем заранее возможность ее совпадения с одним из дополнительных узлов. Выберем произвольно $r+s$ чисел α_j ($j = 1, 2, \dots, r+s$) и $s+l$ чисел β_j ($j = r+1, \dots, r+s+l$), значения которых будут определены позже, и рассмотрим равенство

$$y(x) = \sum_{j=1}^{r+s} \alpha_j y(\xi_j) + \sum_{j=r+1}^{r+s+l} \beta_j y'(\xi_j) + R. \quad (16.1.2)$$

Если отбросить R , получим приближенное равенство, могущее служить для вычисления $y(x)$:

$$y(x) \approx \sum_{j=1}^{r+s} \alpha_j y(\xi_j) + \sum_{j=r+1}^{r+s+l} \beta_j y'(\xi_j) \dots \quad (16.1.3)$$

Степень точности его определяется как обычно: говорят, что (16.1.3) имеет алгебраическую степень точности m , если оно выполняется точно для всех степеней аргумента $y(z) = z^k$, от $k = 0$ до $k = m$ и не верно для $y = z^{m+1}$. Выясним какую наивысшую степень точности

может иметь (16.1.3) и каковы условия ее достижения. Верхняя граница для m дается следующей простой теоремой.

Теорема 1. При любых α_j , β_j и любом расположении точек ξ_j и x степень точности m (16.1.3) всегда меньше $r + 2s + 2l$:

$$m < r + 2s + 2l.$$

Доказательство. Достаточно показать, что всегда существует многочлен степени не выше $r + 2s + 2l$, для которого равенство (16.1.3) не верно.

Допустим сначала, что ни один дополнительный узел не совпадает с x и рассмотрим многочлен

$$y(z) = (z - \xi_1) \dots (z - \xi_r) (z - \xi_{r+1})^2 \dots (z - \xi_{r+s+l})^2 = A(z). \quad (16.1.4)$$

Степень его равна $r + 2s + 2l$.

Непосредственно видно, что $A(\xi_j) = 0$ при $j = 1, \dots, r + s + l$ и $A'(\xi_j) = 0$ при $j \geq r + 1$. Правая часть (16.1.3) для такой функции y обращается в нуль. Левая же часть $y(x) = A(x) \neq 0$ ввиду $x \neq \xi_j$ и равенство (16.1.3) не может быть верным.

Пусть теперь один из дополнительных узлов, например ξ_{r+s+l} , совпадает с x . Введем многочлен $B(z)$ степени $r + 2s + 2l - 2$:

$$\frac{1}{2} B(z) = \frac{A(z)}{(z - \xi_{r+s+l})^2}.$$

Когда $B'(x) \neq 0$, положим

$$y(z) = B(z) \left[z - x - \frac{B(x)}{B'(x)} \right].$$

Это есть многочлен степени $r + 2s + 2l - 1$. Правая часть (16.1.3) для него, как нетрудно проверить, обращается в нуль. Левая же часть $y(x) = -B^2(x)/B'(x) \neq 0$ и равенство (16.1.3) не выполняется. В этом случае степень точности (16.1.3) меньше, чем $r + 2s + 2l - 1$.

Если $B'(x) = 0$, то достаточно положить $y(z) = B(z)$, чтобы равенство (16.1.3) также не выполнялось. Здесь степень точности (16.1.3) должна быть меньше $r + 2s + 2l - 2$.

Из теоремы следует, что степень точности m равенства (16.1.3) самое большее может быть равна $r + 2s + 2l - 1$. Позже будет установлено, что значение $m = r + 2s + 2l - 1$ действительно может быть достигнуто путем надлежащего выбора коэффициентов α_j , β_j и дополнительных узлов ξ_j ($j > r + s$).

Из приведенного же выше доказательства теоремы видно, что когда какой-либо дополнительный узел ξ_j ($j > r + s$) совпадает с x , степень точности (16.1.3) обязательно меньше $r + 2s + 2l - 1$ и на верное не достигает своего наибольшего значения. Поэтому всюду

б удем считать все узлы ξ_j отличными от точки x .

§ 2. Условия, которые должны выполняться при достижении наивысшей степени точности

Если потребовать, чтобы (16.1.3) было точным для степеней x^k при $k=0, 1, \dots, r+2s+2l-1$, получится следующая система $r+2s+2l$ уравнений

$$\sum_{j=1}^{r+s} \alpha_j \xi_j^k + \sum_{j=r+1}^{r+s+l} \beta_j k \xi_j^{k-1} = x^k \quad (k=0, 1, \dots, r+2s+2l-1). \quad (16.2.1)$$

Система исследуется простыми средствами, если ее сравнить с решением вспомогательной интерполяционной задачи.

Пусть в простых узлах даны значения функции

$$y(\xi_j) \quad j=1, \dots, r. \quad (16.2.2)$$

В двойных и во всех дополнительных узлах даны как значения функции, так и значения производной

$$y(\xi_j), \quad y'(\xi_j) \quad j=r+1, \dots, r+s+l. \quad (16.2.3)$$

По всем этим величинам нужно интерполировать значение y в точке x . Взяв произвольные числа α'_j ($j=1, \dots, r+s+l$) и β'_j ($j=r+1, \dots, r+s+l$), составим, подобно предыдущему, приближенное равенство

$$y(x) \approx \sum_{j=1}^{r+s+l} \alpha'_j y(\xi_j) + \sum_{j=r+1}^{r+s+l} \beta'_j y'(\xi_j). \quad (16.2.4)$$

Здесь можно распорядиться выбором $r+2s+2l$ коэффициентов α'_j , β'_j . Потребуем, чтобы равенство (16.2.4) было точным для степеней аргумента $y=z^k$ от $k=0$ до $k=r+2s+2l-1$. Это даст систему $r+2s+2l$ линейных уравнений для α'_j , β'_j :

$$\sum_{j=1}^{r+s+l} \alpha'_j \xi_j^k + \sum_{j=r+1}^{r+s+l} \beta'_j k \xi_j^{k-1} = x^k \quad (k=0, 1, \dots, r+2s+2l-1). \quad (16.2.5)$$

Определитель системы, если коэффициенты при величинах α'_j поместить в первые $r+s+l$ столбцов и коэффициенты при β'_j — в следующие $s+l$, запишется так

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, & 1, & \dots, & 1, & 0, & \dots, & 0 \\ \xi_1, & \xi_2, & \dots, & \xi_{r+s+l}, & 1, & \dots, & 1 \\ \xi_1^2, & \xi_2^2, & \dots, & \xi_{r+s+l}^2, & 2\xi_{r+1}, & \dots, & 2\xi_{r+s+l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Относительно него известно, что он отличен от нуля *), если только $\xi_i \neq \xi_j$ ($i, j = 1, \dots, r+s+l$; $i \neq j$). Последнее условие в рассматриваемой задаче выполняется.

Ввиду этого система (16.2.5) имеет и при этом единственное решение, каковы бы ни были точки ξ_j , различные между собой. Связь между системами (16.2.1) и (16.2.5) дается следующими двумя легко проверяемыми утверждениями.

1. Пусть система (16.2.1) имеет решение. Это решение единственное и для значений неизвестных α'_j и β'_j , удовлетворяющих системе (16.2.5), верны равенства

$$\begin{aligned}\alpha'_j &= \alpha_j, \quad j = 1, \dots, r+s, \\ \alpha'_{r+s+l} &= 0, \dots, \alpha'_{r+s+l} = 0, \\ \beta'_j &= \beta_j, \quad j = r+1, \dots, r+s.\end{aligned}\tag{16.2.6}$$

Действительно, предположим что числа α_j ($j = 1, \dots, r+s$) и β_j ($j = r+1, \dots, r+s+l$) образуют решение системы (16.2.1). Присоединим к ним еще l чисел $\alpha_{r+s+1} = 0, \dots, \alpha_{r+s+l} = 0$. Полученная система $r+2s+2l$ чисел будет, как сразу же видно, удовлетворять системе (16.2.5) и поэтому должны, ввиду единственности решения системы (16.2.5), выполняться равенства (16.2.6).

2. Если числа α'_j и β'_j образуют решения системы (15.2.5) и при этом выполнены условия

$$\alpha'_{r+s+1} = 0, \dots, \alpha'_{r+s+l} = 0,\tag{16.2.7}$$

система (16.2.1) имеет решение и верны равенства[†]

$$\begin{aligned}-\alpha_j &= \alpha'_j & j &= 1, \dots, r+s, \\ \beta_j &= \beta'_j & j &= r+1, \dots, r+s+l.\end{aligned}\tag{16.2.8}$$

Для доказательства достаточно заметить, что если выполнены условия (16.2.7), уравнения (16.2.5) совпадут с (16.2.1).

Решение системы (16.2.5) легко строится при помощи известных теорем теории интерполирования. Пусть $y(x)$ есть многочлен сте-

*) В этом можно просто убедиться, если взять определитель Вандермонда порядка $r+2s+2l$ от переменных $\xi_1, \dots, \xi_{r+2s+2l}$:

$$W(\xi_1, \dots, \xi_{r+2s+2l}) = \prod_{\substack{i > j \\ i, j=1 \\ r+2s+2l}}^{r+2s+2l} (\xi_i - \xi_j), \tag{*}$$

вычислить от него смешанную производную по $\xi_{r+s+l+1}, \dots, \xi_{r+2s+2l}$ и положить затем $\xi_{r+s+l+1} = \xi_{r+1}, \dots, \xi_{r+2s+2l} = \xi_{r+s+l}$. После выполнения всех операций получится Δ . Но все указанные операции равносильны тому, чтобы в произведении (*) вычеркнуть множители $(\xi_{r+s+l+j} - \xi_{r+j})$ ($j = 1, \dots, s+l$). Оставшееся после этого новое произведение будет, очевидно, отличным от нуля.

пени $\leq r + 2s + 2l - 1$. Когда α'_j и β'_j удовлетворяют уравнениям (16.2.5), равенство (16.2.4) для $y(x)$ должно выполняться точно. Величина x может иметь в нем любое значение. Оно дает интерполирование $y(x)$ по значениям этого многочлена в точках ξ_j ($j \leq r + s + l$) и по значениям производной y' в точках ξ_j ($r + 1 \leq j \leq r + s + l$). Это есть интерполирование с r простыми узлами ξ_j ($j \leq r$) и $s + l$ двойными узлами ξ_j ($r < j \leq r + s + l$). Интерполяционный многочлен может быть представлен формулой Эрмита (3.3.8), которая в разбираемом случае будет иметь вид:

$$y(x) = \sum_{j=1}^r \frac{A(x)}{(x - \xi_j) A'(\xi_j)} y(\xi_j) + \sum_{j=r+1}^{r+s+l} \frac{A_j(x)}{A_j(\xi_j)} \left[1 - (x - \xi_j) \frac{A'_j(\xi_j)}{A_j(\xi_j)} \right] y(\xi_j) + \sum_{j=r+1}^{r+s+l} \frac{A_j(x)}{A_j(\xi_j)} (x - \xi_j) y'(\xi_j), \quad (16.2.9)$$

$$A_j(x) = A(x)/(x - \xi_j)^2.$$

Правые части (16.2.4) и (16.2.9) должны совпадать и, ввиду произвола значений $y(\xi_j)$ и $y'(\xi_j)$, коэффициенты α'_j и β'_j должны быть равны соответствующим коэффициентам в (16.2.9).

Условия (16.2.7) разрешимости системы (16.2.1) запишутся поэтому так:

$$\frac{A_j(x)}{A_j(\xi_j)} \left[1 - \frac{A'_j(\xi_j)}{A_j(\xi_j)} (x - \xi_j) \right] = 0 \quad j = r + s + 1, \dots, r + s + l,$$

или, после сокращения на $A_j(x)/A_j(\xi_j)$ и деления на $x - \xi_j$,

$$\sum_{k=r+s+1}^{r+s+l} \frac{2}{\xi_j - \xi_k} + \sum_{k=1}^r \frac{2}{\xi_j - \xi_k} + \sum_{k=r+1}^{r+s} \frac{2}{\xi_j - \xi_k} + \frac{1}{\xi_j - x} = 0. \quad (16.2.10)$$

Знак ', поставленный у первой суммы, означает, что в ней должно быть пропущено слагаемое, отвечающее значению $k = j$.

Изложенное в § 2 позволяет высказать следующую теорему:

Теорема 2. Для того, чтобы равенство (16.1.3) имело наивысшую алгебраическую степень точности $r + 2s + 2l - 1$, необходимо и достаточно выполнение условий:

1. ξ_j и x должны удовлетворять системе l уравнений (16.2.10),
2. Коэффициенты α_j и β_j должны иметь значения

$$\alpha_j = \frac{A(x)}{(x - \xi_j) A'(\xi_j)}, \quad j = 1, \dots, r$$

$$\alpha_j = \frac{A_j(x)}{A_j(\xi_j)} \left[1 - (x - \xi_j) \frac{A'_j(\xi_j)}{A_j(\xi_j)} \right], \quad j = r + 1, \dots, r + s \quad (16.2.11)$$

$$\beta_j = \frac{A_j(x)}{A_j(\xi_j)} (x - \xi_j), \quad j = r + 1, \dots, r + s + l.$$

§ 3. Существование и число интерполирований наивысшей степени точности

Исследование системы (16.2.10) можно выполнить вполне наглядным путем, если воспользоваться некоторой электростатической аналогией *). В комплексной плоскости возьмем две точки z_1 и z_2 и поместим в них электрические заряды масс e_1 и e_2 . Будем считать, что они действуют друг на друга с силой, обычной для плоского электрического поля, когда численное значение силы обратно пропорционально первой степени расстояния и пропорционально массам зарядов.

Считая коэффициент пропорциональности равным единице, для силы, с которой заряд в z_1 действует на заряд в z_2 , получим значение

$$\frac{e_1 e_2}{z_2 - z_1}.$$

Предположим теперь, что в плоскости взяты $r+s+1$ точек $x, \xi_1, \dots, \xi_{r+s}$. В точки $x, \xi_1, \dots, \xi_r$ помещены заряды единичной массы, а в точки $\xi_{r+1}, \dots, \xi_{r+s}$ — заряды массы два и все эти точки закреплены. Наряду с ними рассмотрим l свободных зарядов массы 2. Комплексные координаты их назовем $\xi_{r+s+1}, \dots, \xi_{r+s+l}$.

В состоянии равновесия системы равнодействующие всех сил, приложенных к каждому из свободных зарядов, должны равняться нулю

$$\sum'_{k=r+s+1}^{r+s+l} \frac{2 \cdot 2}{\xi_j - \xi_k} + \sum_{k=1}^r \frac{2 \cdot 1}{\xi_j - \xi_k} + \sum_{k=r+1}^{r+s} \frac{2 \cdot 2}{\xi_j - \xi_k} + \frac{2 \cdot 1}{\xi_j - x} = 0.$$

Если здесь сократить на 2 и перейти к комплексным сопряженным величинам, получатся равенства (16.2.10), являющиеся условиями того, что (16.1.3) имеет наивысшую степень точности.

Указанная аналогия делает очевидными нижеследующие утверждения **) о системе (16.2.10).

1. Если $x, \xi_1, \dots, \xi_{r+s}$ суть любые комплексные числа и если $\xi_{r+s+1}, \dots, \xi_{r+s+l}$ удовлетворяют системе (16.2.10), то точки $\xi_{r+s+1}, \dots, \xi_{r+s+l}$ лежат в наименьшем выпуклом многоугольнике, содержащем $x, \xi_1, \dots, \xi_{r+s}$. В частности, когда $x, \xi_1, \dots, \xi_{r+s}$ суть действительные числа, точки $\xi_{r+s+1}, \dots, \xi_{r+s+l}$ лежат внутри наименьшего отрезка, содержащего x и ξ_j ($j = 1, \dots, r+s$).

*) Сходная аналогия указана в § 4 гл. 11 для корней многочлена Якоби.

**) Они могут быть доказаны арифметическим путем, подобно тому, как это было сделано Т. Стильтесом в аналогичном случае при рассмотрении им задачи о существовании решения дифференциального уравнения в форме многочлена (Собр. сочинений Groningen, 1914, v. 1, p. 434—439). О связи изучаемой интерполяционной задачи с дифференциальными уравнениями будет сказано в § 6.

2. Пусть $x, \xi_1, \dots, \xi_{r+s}$ действительны и различны. На числовой оси между соответствующими точками будет $r+s$ промежутков. Предположим, что заранее указан закон распределений дополнительных узлов по этим промежуткам, т. е. указано сколько дополнительных узлов должно находиться в каждом промежутке. Число способов распределения легко подсчитывается и равно $\frac{(r+s+l-1)!}{l!(r+s-1)!}$. Существует решение системы (16.2.10), для которого дополнительные узлы имеют заранее предписанный закон распределения между $x, \xi_1, \dots, \xi_{r+s}$.

3. Условимся отождествлять решения (16.2.10), получающиеся друг из друга перестановкой $\xi_{r+s+1}, \dots, \xi_{r+s+l}$. Тогда для каждого закона распределения дополнительных узлов по промежуткам между $x, \xi_1, \dots, \xi_{r+s}$ система (16.2.10) будет иметь только одно решение.

Результаты, полученные в последних двух параграфах, позволяют высказать об интерполяционном равенстве (16.1.3) формулируемую ниже теорему,

Теорема 3. *Каковы бы ни были наперед заданные $x, \xi_1, \dots, \xi_{r+s}$, действительные и различные между собой, дополнительные узлы $\xi_{r+s+1}, \dots, \xi_{r+s+l}$ всегда можно выбрать $\frac{(r+s+l-1)!}{l!(r+s-1)!}$ способами так, чтобы равенство (16.1.3) имело наивысшую алгебраическую степень точности $m=r+2s+2l-1$. При этом, если заранее указать сколько из общего числа l дополнительных узлов должно принадлежать каждому из промежутков между $x, \xi_1, \dots, \xi_{r+s}$, то среди возможных способов выбора вспомогательных узлов всегда существует один и только один способ, для которого эти узлы имеют предписанное распределение.*

§ 4. Остаток интерполирования и минимизация его оценки

Рассмотрим остаток интерполяционной формулы (16.1.3):

$$R(y) = y(x) - \sum_{j=1}^{r+s} \alpha_j y(\xi_j) - \sum_{j=r+1}^{r+s+l} \beta_j y'(\xi_j). \quad (16.4.1)$$

Допустим, что для нее выполняются уравнения (16.2.10) и она имеет наивысшую степень точности $r+2s+2l-1$. При этом предположении интерполирование (16.1.3) совпадает с вспомогательным интерполированием (16.2.4), имеющим ту же степень точности $r+2s+2l-1$ и рассмотренным в § 2. Последнее имеет r простых узлов ξ_j ($j=1, \dots, r$) и $s+l$ двойных узлов ξ_j ($j=r+1, \dots, r+s+l$). Его остаток, если считать, что функция y имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную порядка $r+2s+2l$, может быть найден

при помощи теоремы, приведенной в конце второй главы и имеет значение

$$R(y) = \frac{A(x)}{(r+2s+2l)!} y^{(r+2s+2l)}(\xi), \quad \xi \in [a, b] \dots \quad (16.4.2)$$

$$A(x) = (x - \xi_1) \dots (x - \xi_r)(x - \xi_{r+1})^2 \dots (x - \xi_{r+s+l})^2. \quad (16.4.3)$$

Он будет совпадать с остатком (16.4.1).

В классе функций, определенном неравенством

$$|f^{(r+2s+2l)}(z)| \leq M, \quad z \in [a, b],$$

для остатка $R(y)$ имеет место точная оценка

$$|R(y)| \leq \frac{|A(x)|}{(r+2s+2l)!} \cdot M. \quad (16.4.4)$$

Наивысшая степень точности $r+2s+2l-1$ может быть достигнута не одним, а многими, вообще говоря, способами и число их равно $(r+s+l-1)!/[l!(r+s-1)!]$. Произвол в выборе одного из таких способов может быть использован для уменьшения остатка.

В оценке (16.4.4) от выбора узлов зависит только множитель $|A(x)|$ и можно стремиться к тому, чтобы придать ему возможно малое значение,

Для задачи вычисления неопределенного интеграла, в том виде как она была сформулирована в начале § 1, точкой интерполирования x был табличный узел x_{n+1} . Простые и двойные узлы ξ_j ($j = 1, \dots, r+s$) должны быть выбраны из числа табличных узлов, предшествующих x_{n+1} : x_k ($k \leq n$).

Для дополнительных узлов ξ_j ($j > r+s$) необходимо указать закон их распределения по промежуткам между x_{n+1} и ξ_j ($j \leq r+s$).

Допустим, для определенности, что дополнительные узлы перенумерованы в порядке роста координат.

Если воспользоваться электростатической аналогией, указанной в § 3, решению задачи о минимуме $|A(x)|$ можно придать вполне наглядную форму. Это обстоятельство позволяет не проводить строгого арифметического доказательства результата и ограничиться только кратким описанием наглядной стороны задачи.

Допустим на некоторое время, что простые и двойные узлы как-то избраны, закреплены и можно распорядиться только распределением дополнительных узлов. Рассмотрим множители

$$x_{n+1} - \xi_{r+s+1}, \dots, x_{n+1} - \xi_{r+s+l}, \quad (16.4.5)$$

отвечающие им в разложении $A(x_{n+1})$.

Они имеют смысл расстояний от свободных зарядов, находящихся в точках ξ_j ($j > r+s$) до заряда в точке x_{n+1} . Все они достигнут наименьшего значения в том положении равновесия, когда свободные заряды будут помещены в промежуток, прилежащий к x_{n+1} . Это верно при любом положении закрепленных зарядов ξ_j ($j \leq r+s$) слева от x_{n+1} .

Будем считать, что все свободные заряды находятся в указанном промежутке и займемся выбором положений закрепленных зарядов. Для уменьшения соответствующих им множителей

$$x_{n+1} - \xi_1, \dots, x_{n+1} - \xi_r, (x_{n+1} - \xi_{r+1})^2, \dots, (x_{n+1} - \xi_{r+s})^2$$

в $A(x_{n+1})$, также как и для дальнейшего возможного уменьшения множителей (16.4.5), выгодно, очевидно, закрепленные заряды ξ_j ($j \leq r+s$) разместить так, чтобы электрические массы расположились бы возможно ближе к x_{n+1} : двойные заряды ξ_j ($j = r+1, \dots, r+s$) нужно поместить в s табличных узлов $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-s+1}$, ближайших к x_{n+1} , и единичные заряды — в следующие за ними ближайшие узлы $x_{n-s}, \dots, x_{n-s-r+1}$.

Изложенные простые соображения приводят к формулируемому ниже правилу выбора узлов, которое принято для всех частных случаев в § 7.

Оценка остатка (16.4.4) достигает своего наименьшего значения если:

- 1) *дополнительные узлы помещены внутрь промежутка $[x_n, x_{n+1}]$,*
- 2) *двойные узлы взяты в точках $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-s+1}$,*
- 3) *за простые узлы приняты $x_{n-s}, \dots, x_{n-s-r+1}$.*

§ 5. Условия положительности коэффициентов α_j

В теории неопределенного интегрирования интерполяционные формулы (16.1.3) с положительными коэффициентами α_j играют, ввиду устойчивости соответствующих им вычислительных схем, особенно важную роль. Выясним при каких условиях можно достигнуть положительности коэффициентов α_j для формул, имеющих наивысшую алгебраическую степень точности.

Пусть ξ_j ($1 \leq j \leq r$) есть один из простых узлов. Рассмотрим соответствующий ему коэффициент α_j [см. (16.2.11)]:

$$\alpha_j = \frac{A(x)}{(x - \xi_j) A'(\xi_j)}.$$

Мы должны считать $x = x_{n+1}$. Узлы ξ_k ($k = 1, \dots, r+s+1$) предполагаются расположенными так, как это указано в конце предыдущего параграфа. Ввиду того, что $A(x_{n+1})$ и $x_{n+1} - \xi_j$ положительны, знак α_j совпадает со знаком $A'(\xi_j)$:

$$A'(\xi_j) = (\xi_j - \xi_1) \dots (\xi_j - \xi_{j-1}) (\xi_j - \xi_{j+1}) \dots (\xi_j - \xi_r) (\xi_j - \xi_{r+1})^2 \dots \dots (\xi_j - \xi_{r+s+1})^2.$$

Отсюда видно что значения $A'(\xi_j)$, отвечающие двум соседним простым узлам, будут иметь противоположные знаки.

Стремясь сделать все коэффициенты положительными, мы должны поэтому полагать либо $r=0$ и не брать ни одного простого узла, либо $r=1$ и взять лишь один простой узел.

Возьмем теперь двойной узел ξ_j ($r < j \leq r+s$). Отвечающий ему коэффициент α_j , если в (16.2.9) положить $x = x_{n+1}$, будет таким:

$$\alpha_j = \frac{A_j(x_{n+1})(\xi_j - x_{n+1})}{A_j(\xi_j)} \left[\frac{1}{\xi_j - x_{n+1}} + \frac{A'_j(\xi_j)}{A_j(\xi_j)} \right]$$

$$A_j(z) = A(z)/(z - \xi_j)^2.$$

Так как ξ_k лежат левее x_{n+1} , а простые узлы ξ_k ($k \leq r$) расположены левее всех двойных узлов, множитель, стоящий перед прямой скобкой, всегда отрицателен. Условием неотрицательности α_j будет неравенство

$$\frac{1}{\xi_j - x_{n+1}} + \frac{A'_j(\xi_j)}{A_j(\xi_j)} = \frac{1}{\xi_j - x_{n+1}} + \sum_{k=1}^r \frac{1}{\xi_j - \xi_k} + \sum_{k=r+1}^{r+s+l} \frac{2}{\xi_j - \xi_k} \leq 0 \dots$$

(16.5.1)

Оно имеет простой физический смысл. Возвратимся к электростатической аналогии условий достижения наивысшей степени точности и рассмотрим систему электрических зарядов, о которых говорилось в третьем параграфе. В точке ξ_j расположена масса 2 и величина, стоящая слева в (16.5.1), есть половина численного значения равнодействующей всех сил отталкиваний, которое испытывает этот заряд со стороны прочих зарядов системы.

Неравенство (16.5.1) означает, что такая равнодействующая может быть направлена только в отрицательную сторону по числовой оси.

Точка x_{n+1} и все дополнительные узлы лежат всегда справа от ξ_j и заряды, в них расположенные, будут отталкивать заряд в ξ_j налево по оси. Отсюда с очевидностью вытекает утверждение, дающее ответ на вопрос о возможности сделать все коэффициенты α_j для двойных узлов неотрицательными.

Каковы бы ни были r и s , существует такое l_0 , что при всяких $l \geq l_0$ все коэффициенты α_j ($j = r+1, \dots, r+s$) будут не меньше нуля.

Предположим, что значения функции $y(x)$ вычисляются на сетке равноотстоящих точек $x_k = x_0 + kh$ ($k = 0, 1, \dots$). Пусть, например, взят один двойной узел ($s = 1$) в точке $\xi_2 = x_n$ и один простой узел ($r = 1$) в точке $\xi_1 = x_{n-1}$. Коэффициент α_1 , отвечающий простому узлу заведомо положителен. Условие положительности α_2 запишется в форме неравенства

$$\frac{1}{x_n - x_{n+1}} + \frac{1}{x_n - x_{n-1}} + \sum_{j=3}^{2+l} \frac{2}{x_n - \xi_j} = \sum_{j=3}^{2+l} \frac{2}{x_n - \xi_j} < 0.$$

«Оно выполняется при $l \geq 1$, так как все $\xi_j > x_n$ ».

Допустим теперь, что простых узлов нет ($r=0$) и взяты два двойных узла ($s=2$) в точках x_n и x_{n-1} . Условия положительности коэффициентов α_1 и α_2 будут такими:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_{n-1}-x_{n+1}} + \frac{2}{x_{n-1}-x_n} + \sum_{j=3}^{2+l} \frac{2}{x_{n-1}-\xi_j} &= -\frac{1}{2h} - \frac{2}{h} + \\ &+ \sum_{j=3}^{2+l} \frac{2}{x_{n-1}-\xi_j} < 0 \\ \frac{1}{x_n-x_{n+1}} + \frac{2}{x_n-x_{n-1}} + \sum_{j=3}^{2+l} \frac{2}{x_n-\xi_j} &= -\frac{1}{h} + \frac{2}{h} + \sum_{j=3}^{2+l} \frac{2}{x_n-\xi_j} < 0 \\ x_n < \xi_j < x_n + h, \quad j &= 3, \dots, 2+l. \end{aligned}$$

Они также выполняются при всяких $l \geq 1$.

§ 6. Связь с задачей решения дифференциального уравнения при помощи многочлена

Покажем, что уравнения (16.2.10) равносильны условию существования у некоторого дифференциального уравнения решения в форме многочлена степени l .

Напомним, что (16.2.10) получено после сокращения из предшествующего ему равенства и может быть записано в форме

$$A_j(\xi_j) + (\xi_j - x) A'_j(\xi_j) = \left\{ \frac{d}{dz} [(z-x) A_j(z)] \right\}_{z=\xi_j} = 0,$$

или, если подставить сюда вместо $A_j(z)$ его значение $A_j(z) = A(z)/(z-\xi_j)^2$

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{(z-x) A(z)}{(z-\xi_j)^2} \right]_{z=\xi_j} = 0, \quad (j = r+s+1, \dots, r+s+l) \dots \quad (16.6.1)$$

Сейчас нам удобнее воспользоваться другими обозначениями. Введем многочлены $\sigma(z)$ и $\Pi_l(z)$, отвечающие двойным и дополнительным узлам:

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= (z-\xi_{r+1}) \dots (z-\xi_{r+s}), \\ \Pi_l(z) &= (z-\xi_{r+s+1}) \dots (z-\xi_{r+s+l}). \end{aligned}$$

В ближайших рассуждениях x по своей роли ничем не будет отличаться от простых узлов $\xi_1, \dots, \xi_r$. Объединим x с ними и положим

$$\begin{aligned} p(z) &= (z-x)(z-\xi_1) \dots (z-\xi_r), \\ (z-x) A(z) &= p(z) \sigma^2(z) \Pi_l^2(z) \end{aligned}$$

(16.6.1) примет форму

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{p \sigma^2 \Pi_l^2}{(z-\xi_j)^2} \right]_{z=\xi_j} = 0,$$

или, после несложных вычислений,

$$\Pi_l'(\xi_j) \left\{ \frac{d}{dz} \left[p \sigma^2 \frac{d\Pi_l}{dz} \right] \right\}_{z=\xi_j} = 0.$$

Значения $z = \xi_j$ ($j > r + s$) являются простыми корнями $\Pi_l(z)$, поэтому $\Pi_l'(\xi_j) \neq 0$ и должно быть

$$\left\{ \frac{d}{dz} \left[p z^2 \frac{d\Pi_l}{dz} \right] \right\}_{z=\xi_j} = 0, \quad (j > r + s) \dots \quad (16.6.2)$$

Это говорит о том, что каждый корень $\Pi_l(z)$ является одновременно корнем $(p z^2 \Pi_l')'$. Ввиду простоты корней $\Pi_l'(z)$, $(p z^2 \Pi_l')'$ должен нацело делиться на $\Pi_l(z)$.

Кроме того, $(p z^2 \Pi_l')'$ делится на $\sigma(z)$ и так как корни $\sigma(z)$ отличны от корней $\Pi_l(z)$, то $(p z^2 \Pi_l')'$ нацело делится на произведение $\sigma \Pi_l$. Степень $(p z^2 \Pi_l')'$ равна $r + 2s + l - 1$. После деления его на $\sigma \Pi_l$ получится многочлен степени $r + s - 1$. Обозначим его $\rho(z)$:

$$[p(z) \sigma^2(z) \Pi_l'(z)]' = \rho(z) \sigma(z) \Pi_l(z). \quad (16.6.3)$$

Последнее равенство можно рассматривать как дифференциальное уравнение второго порядка относительно $\Pi_l(z)$ и можно высказать утверждение:

Если выполняются условия (16.2.10), то существует такой многочлен $\rho(z)$ степени $r + s - 1$, что $\Pi_l(z)$ будет решением дифференциального уравнения (16.6.3).

Доказательство обратного утверждения потребует нескольких предварительных замечаний об аналитических свойствах решений уравнения (16.6.3).
 С И В (16.6.3) выполнить дифференцирование и обе части разделить на $p z^2$, то оно примет форму

$$\begin{aligned} \Pi_l''(z) + \left(\sum_{k=1}^r \frac{1}{z - \xi_k} + \sum_{k=r+1}^{r+s} \frac{2}{z - \xi_k} + \frac{1}{z - x} \right) \Pi_l'(z) + \\ + \left(\sum_{k=1}^{r+s} \frac{a_k}{z - \xi_k} + \frac{a_l}{z - x} \right) \Pi_l(z) = 0. \quad (16.6.4) \\ \sum_{k=0}^{r+s} a_k = 0. \end{aligned}$$

Особые точки уравнения суть $x, \xi_1, \dots, \xi_{r+s}, \infty$. Все они регулярные*). Рассмотрим любую из точек x или ξ_k .

Алгебраическое уравнение, которое обычно называют определяющим и от корней которого зависит аналитическое строение канонических решений в окрестности этой точки, для нее будет либо $\alpha(\alpha - 1) + \alpha = \alpha^2 = 0$, либо $\alpha(\alpha - 1) + 2\alpha = \alpha(\alpha + 1) = 0$. Оно имеет либо двукратный корень $\alpha = 0$, либо корни $\alpha = 0$ и $\alpha = -1$. В обоих случаях одно из канонических решений будет голоморфным в особой точке и отличным там от нуля, второе же решение — неограниченным в окрестности этой точки.

Будем теперь $\rho(z)$ считать таким, что уравнение (16.6.3) имеет решение в виде целого многочлена степени l . Для всех особых точек x и ξ_j оно будет голоморфным каноническим решением и поэтому будет заведомо отличным от нуля в каждой из них. Корни $\Pi_l(z)$ отличны от x и ξ_k , но тогда они простые, так как вне особых точек решение (16.6.4) не может иметь кратных корней. Обозначим их $\xi_{r+s+1}, \dots, \xi_{r+s+l}$.

*) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, Гостехиздат, 1949, 3, ч. II, п° 98.

Положим в (16.6.4) z равным какому-либо из этих корней ξ_j . При этом последний член с $\Pi_l(z)$ исчезнет. Если, кроме того, обе части разделить на $\Pi'_l(\xi_j)$, то получится равенство

$$\frac{\Pi''_l(\xi_j)}{\Pi'_l(\xi_j)} + \sum_{k=1}^r \frac{1}{\xi_j - \xi_k} + \sum_{k=r+1}^{r+s} \frac{2}{\xi_j - \xi_k} + \frac{1}{\xi_j - x} = 0$$

$$(j = r + s + 1, \dots, r + s + l).$$

Оно только формой записи отличается от (16.2.10). Отсюда вытекает справедливость утверждения:

Если $p(z)$ таково, что уравнение (16.6.3) имеет решение в виде многочлена степени l , то корни этого многочлена $\xi_{r+s+1}, \dots, \xi_{r+s+l}$ удовлетворяют системе уравнений (16.2.10).

Таким образом нахождение узлов, при которых интерполирование (16.1.3) имеет наивысшую алгебраическую степень точности, равносильно разысканию решения дифференциального уравнения (16.6.3) в виде многочлена степени l и определению его корней.

§ 7. Формулы частного вида*)

Каждая частная формула наивысшей степени точности определяется тремя параметрами r, s, l . В этом параграфе будут приведены такие формулы для нескольких первых значений r, s, l . Коэффициенты расчетных формул вычислялись при помощи равенств (16.2.11), для нахождения узлов было использовано дифференциальное уравнение**) (16.6.3). Сетка точек x_n предполагается равноотстоящей с шагом h .

1. $r=1, s=0$. Здесь берется одно значение функции $y(x)$ в точке x_n и l значений производной в дополнительных узлах между x_n и x_{n+1} . Последние выбираются так, чтобы расчетная формула имела наивысшую степень точности. Результат равносильно представлению $y(x_{n+1})$ через $y(x_n)$ в виде

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt \dots \quad (16.7.1)$$

и последующему вычислению интеграла посредством квадратурной формулы Гаусса

$$y_{n+1} = y_n + h [B_1 f_1(x_n + ht^{(1)}) + \dots + B_l f(x_n + ht^{(l)})],$$

где B_k и $t^{(k)}$ коэффициенты и узлы Гаусса для отрезка $[0, 1]$.

*) Значения коэффициентов и узлов были вычислены младшим научным сотрудником Ленинградского отделения Математического института АН СССР К. Е. Черным. Контроль, которому подвергались все результаты, позволяет думать, что погрешность не превышает единицы последней значащей цифры.

**) Труды Математического института АН СССР, 1951, 38. В. И. Крылов, Интерполирование наивысшего порядка точности в задаче неопределенного интегрирования.

2. $r=0$, $s=1$. Берется одно значение функции $y(x)$ и одно значение производной $y'(x)=f(x)$ в точке x_n . Кроме того, взяты значения производной в l дополнительных узлах между x_n и x_{n+1} . Наивысшая степень точности равна $2l+1$. Расчетная формула получится, если в равенстве (16.7.1) применить к интегралу квадратурную формулу А. А. Маркова с одним фиксированным узлом в точке x_n и l узлами внутри отрезка интегрирования.

Значения узлов и коэффициентов при $l=1, 2, \dots, 6$ для канонического отрезка интегрирования $[-1, +1]$ приведены в § 2 гл. 9.

3. $r=1$, $s=1$. Для вычислений берется значение функции y в точке x_n затем значение функции y и производной $y'=f$ в точке x_n и l значений производной в дополнительных узлах между x_n и x_{n+1} . Наивысшая степень точности равна $2l+2$.

$$y_{n+1} = A_{-1}y_{n-1} + A_0y_n + h \left[B_0f(x_n) + \sum_{j=1}^l B_jf(x_n + ht^{(j)}) \right] + R.$$

Для остатка R может быть получено следующее представление

$$R = \theta \frac{2h^{2l+3}}{(2l+3)!} \left[\frac{l!(l+1)!}{(2l+1)!} \right]^2 f^{(2l+2)}(\xi).$$

$$0 < \theta < 1, \quad x_{n-1} < \xi < x_{n+1}.$$

При $l=1, 2, 3, 4$ узлы и коэффициенты имеют значения

$$l=1$$

$$\begin{aligned} A_{-1} &= 0,0294 \ 3725 \\ A_0 &= 0,9705 \ 6275, \end{aligned} \quad B_0 = 0,3431 \ 458$$

$$t_1 = 2^{-\frac{1}{2}} = 0,7071 \ 068$$

$$B_1 = 0,6862 \ 915$$

$$l=2$$

$$\begin{aligned} A_{-1} &= 0,0011 \ 13587 \\ A_0 &= 0,9988 \ 86413 \end{aligned} \quad B_0 = 0,1334 \ 818$$

$$t^{(1)} = 0,3879 \ 073$$

$$t^{(2)} = 0,8593 \ 118$$

$$B_1 = 0,5221 \ 058$$

$$B_2 = 0,3455 \ 260$$

$$l=3$$

$$\begin{aligned} A_{-1} &= 0,0000 \ 4136 \ 036 \\ A_0 &= 0,9999 \ 5863 \ 964 \end{aligned} \quad B_0 = 0,0709 \ 5688$$

$$t^{(1)} = 0,2312 \ 666$$

$$t^{(2)} = 0,6124 \ 982$$

$$t^{(3)} = 0,9177 \ 954$$

$$B_1 = 0,3458 \ 379$$

$$B_2 = 0,3776 \ 724$$

$$B_3 = 0,2055 \ 739$$

$$l=4$$

$$\begin{aligned} A_{-1} &= 0,0000 \ 0147 \ 9556 \\ A_0 &= 0,9999 \ 9852 \ 0444 \end{aligned} \quad B_0 = 0,0440 \ 7358$$

$$t^{(1)} = 0,1507 \ 625$$

$$B_1 = 0,2361 \ 168$$

$$\begin{aligned}t^{(2)} &= 0,4352 \ 756 \\t^{(3)} &= 0,7366 \ 581 \\t^{(4)} &= 0,9462 \ 337\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_2 &= 0,3128 \ 314 \\B_3 &= 0,2713 \ 300 \\B_4 &= 0,1356 \ 498\end{aligned}$$

4. $r=0$, $s=2$. В точках x_{n-1} , x_n взяты значения функции и производной и, кроме того, в l дополнительных узлах внутри $[x_n, x_{n+1}]$ берутся значения производной. Формула имеет вид

$$y_{n+1} = A_{-1}y_{n-1} + A_0y_n + h \times \\ \times \left[B_{-1}f(x_{n-1}) + B_0f(x_n) + \sum_{j=1}^l B_j f(x_n + ht^{(j)}) \right] + R.$$

Наивысшая степень точности ее есть $2l+3$. Остаток R представим в форме

$$R = \theta h^{2l+4} \cdot \frac{4}{(2l+4)!} \left[\frac{l!(l+1)!}{(2l+1)!} \right]^2 f^{(2l+3)}(\xi).$$

$$0 < \theta < 1, \quad x_{n-1} < \xi < x_{n+1}$$

Узлы и коэффициенты для $l=1, 2, 3, 4$ приведены в таблице

$l=1$

$$\begin{array}{ll}A_{-1} = 0,1625 \ 0915 & B_{-1} = 0,0445 \ 3258 \ 4 \\A_0 = 0,8374 \ 9085 & B_0 = 0,4921 \ 8941 \\t^{(1)} = 0,7403 \ 1242 & B_1 = 0,6257 \ 8716\end{array}$$

$l=2$

$$\begin{array}{ll}A_{-1} = 0,0077 \ 6632 \ 6 & B_{-1} = 0,0015 \ 6068 \ 9 \\A_0 = 0,9922 \ 3367 & B_0 = 0,1640 \ 716 \\t^{(1)} = 0,4207 \ 573 & B_1 = 0,5242 \ 954 \\t^{(2)} = 0,8717 \ 520 & B_2 = 0,3178 \ 386\end{array}$$

$l=3$

$$\begin{array}{ll}A_{-1} = 0,0003 \ 6262 \ 95 & B_{-1} = 0,0000 \ 5699 \ 653 \\A_0 = 0,9996 \ 3737 \ 05 & B_0 = 0,0814 \ 3433 \\t^{(1)} = 0,2515 \ 111 & B_1 = 0,3609 \ 307 \\t^{(2)} = 0,6333 \ 509 & B_2 = 0,3658 \ 920 \\t^{(3)} = 0,9235 \ 139 & B_3 = 0,1920 \ 437\end{array}$$

$l=4$

$$\begin{array}{ll}A_{-1} = 0,0000 \ 1576 \ 632 & B_{-1} = 0,0000 \ 0203 \ 0483 \\A_0 = 0,9999 \ 8423 \ 368 & B_0 = 0,0488 \ 5024 \\t^{(1)} = 0,1627 \ 293 & B_1 = 0,2491 \ 361 \\t^{(2)} = 0,4540 \ 978 & B_2 = 0,3124 \ 621 \\t^{(3)} = 0,7493 \ 776 & B_3 = 0,2613 \ 448 \\t^{(4)} = 0,9492 \ 874 & B_4 = 0,1282 \ 206\end{array}$$

Владимир Иванович Крылов
Приближенное вычисление интегралов

Редактор *Г. П. Акилов*
Техн. редактор *Р. Г. Польская*
Корректор *Е. А. Максимова*

Сдано в набор 15/IX 1958 г.
Подписано к печати 6/II 1959 г.
Формат 60×92¹/₁₆. Бум. л. 10,25. Печатных л. 20,5.
Уч.-изд. л. 20,88. Тираж 12 000 экз. Т-00914.
Цена книги 12 р. 45 к. Зак. № 3508.

Государственное издательство
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский пр., 15

Типография № 2 им. Евг. Соколовой
УПП Ленсовнархоза.
Ленинград. Измайловский пр., 29.