

В.И.КРЫЛОВ, Н.С.СКОБЛЯ

МЕТОДЫ
ПРИБЛИЖЕННОГО
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
ФУРЬЕ
И ОБРАЩЕНИЯ
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
ЛАПЛАСА

В. И. КРЫЛОВ, Н. С. СКОБЛЯ

МЕТОДЫ
ПРИБЛИЖЕННОГО
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ
И ОБРАЩЕНИЯ
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
ЛАПЛАСА

СПРАВОЧНАЯ КНИГА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1974

517.2
К 85
УДК 517.5

Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа (справочная книга).
В. И. Крылов, Н. С. Скобля. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1974.

Гармонический анализ и преобразование Лапласа очень часто применяются для решения многих теоретических и прикладных вопросов.

В книге содержится изложение большинства известных методов приближенного обращения преобразования Лапласа и вычисления интегралов Фурье.

Книга предназначена для научных и инженерно-технических работников, которым в их деятельности приходится иметь дело с теорией или приложениями преобразования Лапласа и интегралов Фурье. Она будет полезным справочником для работников вычислительных центров и конструкторских бюро.

В книге 2 рис., библи. 11 названий.

© Издательство «Наука», 1974.

К 20204—091
053(02)-74 83-74

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
-----------------------	---

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Глава 1. Введение	9
-----------------------------	---

§ 1.1. Основные понятия теории преобразования Лапласа (9). § 1.2. Комплексный интеграл, осуществляющий обращение преобразования Лапласа (15). § 1.3. Представление функций интегралом Лапласа (18). § 1.4. Некорректность задачи обращения преобразования Лапласа (22).

Глава 2. Некоторые аналитические методы обращения преобразования Лапласа	24
--	----

§ 2.1. Нахождение оригинала с помощью формулы обращения (24). § 2.2. Разложение оригинала в степенные ряды (27). § 2.3. Разложение оригинала в обобщенные степенные ряды (29).

Глава 3. Методы численного обращения преобразования Лапласа, основанные на использовании специальных разложений	31
---	----

§ 3.1. Обращение преобразования Лапласа с помощью многочленов, ортогональных на конечном промежутке (31). § 3.2. Обращение преобразования Лапласа с помощью ряда Фурье по синусам (52). § 3.3. Обращение преобразования Лапласа с помощью рядов по обобщенным многочленам Чебышева — Лагерра (54).

Глава 4. Методы вычисления интеграла Меллина при помощи интерполяционных квадратурных формул	59
--	----

§ 4.1. Общая теория интерполяционных методов (59) § 4.2. Интерполяционный метод с равноотстоящими узлами (62). § 4.3. Интерполяционный метод с неравноотстоящими узлами (63). § 4.4. Замечания о других интерполяционных методах. Применение отрезка ряда Тейлора (72). § 4.5. Некоторые теоремы о сходимости интерполирования (73). § 4.6. Теоремы о сходимости интерполяционных методов обращения (85).

Глава 5. Методы численного обращения преобразования Лапласа при помощи квадратурных формул, имеющих наивысшую степень точности	90
--	----

§ 5.1. Теория квадратурных формул (90). § 5.2. Ортогональные многочлены, связанные с квадратурной формулой наи-

высшей степени точности (97). § 5.3. Методы вычисления коэффициентов и узлов квадратурной формулы (112).

Глава 6. Методы обращения преобразования Лапласа с помощью квадратурных формул с равными коэффициентами 121

§ 6.1. Построение вычислительной формулы (121). § 6.2. Замечание о расположении узлов (124).

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ОБРАЩЕНИЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Глава 7. Введение 125

§ 7.1. Преобразования Фурье (126). § 7.2. Приведение интеграла типа Меллина к преобразованию Фурье (131).

Глава 8. Обращение преобразования Лапласа с помощью ряда Фурье 133

§ 8.1. Случай быстро убывающего оригинала $f(x)$ (133). § 8.2. Случай быстрого убывания модуля изображения $F(p)$ (135).

Глава 9. Интерполяционные формулы для вычисления интегралов Фурье 137

§ 9.1. Несколько предварительных замечаний (137). § 9.2. Вычислительные формулы, основанные на алгебраическом интерполировании функции $f(x)$ (138). § 9.3. Вычислительные формулы, основанные на интерполировании рациональными функциями (166).

Глава 10. Формулы для вычислений, имеющие наивысшую степень точности 192

§ 10.1. Введение (192). § 10.2. Построение формулы наивысшей степени точности (194).

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ВЫДЕЛЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ФУНКЦИИ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Глава 11. Выделение особенностей изображения $F(p)$ 202

§ 11.1. Введение (202). § 11.2. Устранение и ослабление особенностей изображения $F(p)$ (204). § 11.3. Замечание об увеличении скорости стремления к нулю изображения $F(p)$ (208). § 11.4. Таблица изображений $F(p)$ и соответствующих оригиналов $f(x)$ для построения особой части изображения $F_1(p)$ (209).

Глава 12. Выделение особенностей функции при преобразовании Фурье 213

§ 12.1. Устранение разрывов первого рода (214). § 12.2. Увеличение скорости стремления к нулю преобразуемой функции (217).

Литература 220

Список обозначений 221

Предметный указатель 222

ПРЕДИСЛОВИЕ

Проблема приближенного обращения преобразования Лапласа и, в особенности, численного его обращения возникла из потребности довести решение до числа в том случае, когда существующие таблицы функций и их изображений не дают возможности по изображению найти оригинал или требуют очень больших вычислений.

Было построено, особенно за два последних десятилетия, много способов обращения. Они опубликованы разрозненно в специальных журналах и книгах и известны, как правило, неширокому кругу лиц. Насколько осведомлены авторы, в научной литературе нет книг, содержащих систематическое изложение всех этих методов *).

Авторы хотели написать книгу, где было бы дано достаточно полное описание современного состояния проблемы обращения, и хотели сделать книгу полезной тем, кто применяет преобразование Лапласа к решению тех или иных задач. Первое из этих намерений можно было осуществить просто, так как литература по проблеме обращения еще невелика и сравнительно легко обозрима. Что же касается вопроса о полезности книги, то самый беспристрастный ответ здесь даст время, но авторы считают, что в этом отношении в адрес книги может быть сделано несколько замечаний. Наиболее важным из них, несомненно, будет справедливое замечание о недостаточной исследованности проблемы и о еще малом числе полученных результатов. Чтобы быть лучше понятыми читателями, не знакомыми с проблемой обращения преобразования

*) Некоторым исключением здесь является книга [8], но ее целью было объединение всех известных вспомогательных численных таблиц, предназначенных для вычисления интеграла Меллина. Математическая же теория обращения преобразования Лапласа в ней дана в очень сокращенном виде в форме краткого справочника, поясняющего таблицы.

Лапласа, авторы должны здесь сделать некоторые пояснения. Для этого авторы прибегли к нестрогим, но наглядным соображениям.

Проблема обращения есть не что иное, как задача отыскания решения $f(x)$ интегрального уравнения первого рода

$$\int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx = F(p), \quad (*)$$

где $F(p)$ считается известной функцией комплексного аргумента p , аналитической в некоторой полуплоскости вида $\operatorname{Re} p > \gamma$ ($\gamma < \infty$).

Равенство $(*)$ есть преобразование Лапласа функции $f(x)$ в $F(p)$. Ядро интеграла e^{-px} является целой аналитической функцией аргументов x и p с плавным изменением, и операция интегрирования, которая выполняет усреднение f с весом e^{-px} , может значительно сгладить особенности в поведении преобразуемой функции f .

В задаче обращения нужно по изображению $F(p)$, изменяющемуся, ввиду его аналитичности, очень плавно, восстановить все возможные неровности поведения оригинала $f(x)$. Поэтому можно ожидать, что аппарат, при помощи которого решается задача обращения, не может быть простым и грубым, а должен быть достаточно сложным и чувствительным даже к малым оттенкам в поведении $F(p)$, чтобы выполнить «тонкую работу» восстановления оригинала $f(x)$.

Обратим внимание еще на одно свойство проблемы обращения — на неустойчивость оригинала f относительно малых изменений изображения F . Такая неустойчивость становится видной при первом же взгляде на преобразование $(*)$. В самом деле, пусть f — заданный оригинал и F — соответствующее ему изображение. Подвергнем f любому изменению, быть может даже сильному, но на очень малом отрезке. Новый оригинал назовем f_1 . Такое изменение незначительно повлияет на интеграл и мало изменит изображение $F(p)$, так что новое изображение $F_1(p)$ будет близким к $F(p)$.

Мы могли бы построить новый оригинал f_1 , изменяя f не на одном участке полуоси $0 \leq x < \infty$, а на многих ее участках, но так, чтобы общая сумма длин этих участков

была бы достаточно малой величиной, все равно при этом новое изображение $F_1(p)$ можно было бы сделать сколь угодно близким к $F(p)$, так что близким изображениям $F(p)$ и $F_1(p)$ могут отвечать оригиналы $f(x)$ и $f_1(x)$, сильно отличающиеся между собой на многих участках полуоси $0 \leq x < \infty$.

Теперь можно более полно объяснить, в каком отношении содержание книги следует считать недостаточным, и попытаться указать причины, по которым авторы находят, что эти недостатки вряд ли могут быть устранены в ближайшие годы.

В настоящее время мы находимся в самой начальной стадии построения теории приближенного обращения преобразования Лапласа. В большинстве публикуемых работ либо указываются видоизменения уже известных методов вычислений, либо создаются новые вычислительные схемы, не имеющие аналогов в прошлом. Примерами методов первого вида могут служить методы вычисления комплексного интеграла Меллина, основанные на идее интерполирования или на идее Гаусса достижения наивысшей степени точности, и др. Использование же ортогональных многочленов для обращения преобразования возникло только в связи с преобразованием Лапласа и не имело близких аналогов в прошлом.

Построение вычислительного метода или указание на возможность построения есть лишь первый шаг в создании теории метода. За ним должно следовать выяснение условий сходимости правила, определение скорости сходимости, нахождение оценки погрешности априорной и апостериорной, выработка способов улучшения сходимости, если последняя окажется недостаточно быстрой, и т. д. Исследования проблемы обращения в этом направлении особенно важны ввиду ее неустойчивости.

Как читатель увидит из содержания книги, результаты такого рода получены в очень небольшом числе и лишь в самых простых случаях.

Главными причинами, препятствующими быстрому решению стоящих здесь задач, являются указанные выше два свойства проблемы обращения: неизбежная сложность математического аппарата обращения преобразования Лапласа и неустойчивость проблемы обращения относительно изменений функций F , которая должна вызвать ту или

иную форму неустойчивости в любом вычислительном процессе решения этой проблемы.

Недостаточная изученность правил приближенного обращения преобразования делает справочную книгу неполной во многих отношениях. По-видимому, трудно ожидать быстрого улучшения наших знаний в этих вопросах, и в ближайшие годы книгу, вероятно, невозможно будет освободить от такой неполноты.

До сих пор говорилось только об обращении преобразования Лапласа, о гармоническом же анализе не упоминалось вообще. Это связано с тем, что в книге гармонический анализ рассматривается только в той мере, в какой он связан с проблемой обращения, а именно, из гармонического анализа взяты только задачи вычисления интегралов Фурье, тесно связанные с обращением преобразования Лапласа, и вычисление интегралов Фурье есть для нас один из возможных методов решения проблемы обращения. Поэтому все сказанное об обращении относится и к вычислению интегралов Фурье.

Книга предназначена широкому кругу читателей, занимающихся теорией преобразования Лапласа или его научными и техническими приложениями. Поэтому авторы не стремились к лаконичности изложения и старались сделать его доступным не только для специалистов-математиков. Книга предполагает знакомство читателя с основами анализа и теории функций комплексного переменного в объеме втузовского курса математики с расширенной программой.

Авторы

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ

§ 1.1. Основные понятия теории преобразования Лапласа

В течение нескольких последних десятилетий в математике, механике и технике для решения многих задач стали особенно часто и успешно применяться операционные методы на основе преобразования Лапласа. Эти методы нашли широкое приложение в теории теплопроводности, в электро- и радиотехнике, при исследовании нестационарных явлений в электрических цепях, в задачах динамики систем автоматического регулирования, в теории линейных дифференциальных, интегральных и разностных уравнений и во многих других задачах.

Операционный метод решения задач можно подразделить на 4 этапа:

1) от искомой функции-оригинала $f(t)$ переходят к функции-изображению $F(p)$;

2) над $F(p)$ производят операции, соответствующие операциям над $f(t)$, после чего получают уравнение относительно $F(p)$, которое часто бывает значительно проще уравнения для оригиналов, например, обыкновенное дифференциальное уравнение заменяется алгебраическим, уравнение в частных производных — обыкновенным дифференциальным и т. д.;

3) полученное уравнение для изображений решают относительно $F(p)$;

4) от найденного изображения $F(p)$ переходят к оригиналу $f(t)$, который и является искомой функцией.

Во многих случаях самым трудным является 4-й этап — нахождение оригинала $f(t)$ по изображению $F(p)$, т. е. задача обращения преобразования Лапласа. Имеются

большие таблицы соответствий между оригиналами и изображениями, при помощи которых по данному изображению можно определить оригинал. Но эти таблицы охватывают далеко не все встречающиеся на практике случаи, притом часто значение оригинала выражается через очень сложные функции, которые трудно вычисляемы и не всегда табулированы. Тогда точное нахождение оригинала или невозможно, или нецелесообразно. В связи с этим возникает необходимость в построении приближенных методов обращения преобразования Лапласа, позволяющих вычислять оригинал в широком классе случаев. Этим методам и посвящена первая часть предлагаемой книги.

Теперь напомним некоторые хорошо известные факты из теории преобразования Лапласа.

Пусть на полуоси $0 \leq t < \infty$ дана функция $f(t)$, интегрируемая*) со своим абсолютным значением на всяком конечном отрезке $[a, b]$ ($0 \leq a < b < \infty$).

Введем комплексный параметр $p = \sigma + i\tau$ и определим преобразование Лапласа функции f равенством

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt; \quad (1.1.1)$$

при этом под значением несобственного интеграла по полуоси $[0, \infty)$ здесь понимают предел, к которому стремится интеграл по конечному отрезку $[0, B]$, когда $B \rightarrow \infty$, так что

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B f(t) e^{-pt} dt. \quad (1.1.2)$$

Говорят, что преобразование Лапласа применимо к функции f при значении параметра p , если для этого значения p сходится интеграл (1.1.1).

Можно проверить, что если преобразование (1.1.1) применимо к f при $p = p_0 = \sigma_0 + i\tau_0$, то оно применимо к f при всяком значении $p = \sigma + i\tau$, для которого $\operatorname{Re}(p - p_0) = \sigma - \sigma_0 > 0$. В самом деле, рассмотрим функ-

*) Здесь и ниже интеграл понимается в смысле Римана.

цию $\varphi(t) = \int_0^t f(u) e^{-p_0 u} du$. Если интеграл (1.1.1) сходится при $p = p_0$, то $\varphi(t)$ имеет конечный предел $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)$ и является, следовательно, ограниченной на полуоси $0 \leq t < \infty$:

$$|\varphi(t)| \leq Q < \infty.$$

Для доказательства сходимости интеграла (1.1.1) воспользуемся признаком Больцано — Коши. Возьмем три произвольных положительных числа a, b, c и будем считать $\operatorname{Re}(p - p_0) = \sigma - \sigma_0 \geq c$. В приведенных ниже вычислениях мы воспользовались интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{a+b} f(t) e^{-pt} dt \right| &= \\ &= \left| \int_a^{a+b} e^{-(p-p_0)t} d\varphi(t) \right| = \left| \varphi(t) e^{-(p-p_0)t} \right|_a^{a+b} + \\ &\quad + (p-p_0) \int_a^{a+b} \varphi(t) e^{-(p-p_0)t} dt \leq \\ &\leq e^{-ca} \cdot 2Q + |p-p_0| Q \int_a^\infty e^{-ct} dt = e^{-ca} \left(2 + \frac{|p-p_0|}{c} \right) Q. \end{aligned}$$

Последний член приведенной цепочки соотношений не зависит от b и для всякого фиксированного p при увеличении a станет меньше любого наперед заданного положительного числа. Поэтому для интеграла, стоящего под знаком предела в (1.1.2), признак Больцано — Коши выполняется и интеграл (1.1.1) сходится.

Более того, пусть p изменяется в ограниченной замкнутой области D , лежащей внутри полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$. Для $p \in D$ существуют, очевидно, такие числа c и M , что будут выполняться неравенства $\operatorname{Re}(p - p_0) = \sigma - \sigma_0 \geq c$ и $|p - p_0| \leq M$. Из полученных неравенств следует, что признак Больцано — Коши будет выполняться равномерно относительно параметра p , принадлежащего D . Так как интеграл $\int_0^b f(t) e^{-pt} dt$ есть, очевидно, целая аналитическая функция p , то из равномерной в D сходи-

мости его к интегралу (1.1.1) следует, что $F(p)$ является аналитической функцией, регулярной в D , а так как D есть любая внутренняя область полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, то функция $F(p)$ регулярна всюду в этой полуплоскости.

Рассмотрим теперь множество E всех действительных значений $p = \sigma$ параметра p , при которых преобразование Лапласа (1.1.1) применимо к функции f , и обозначим γ нижнюю грань (точную нижнюю границу значений σ) этого множества:

$$\gamma = \inf_E \sigma.$$

Значение величины γ выясняется следующими фактами.

1. Когда γ имеет конечное значение, то можно сказать, что преобразование Лапласа (1.1.1) применимо к f всюду в открытой полуплоскости $\operatorname{Re} p > \gamma$, при этом $F(p)$ будет регулярной функцией p по меньшей мере в этой полуплоскости и не будет применимо к f ни для одного значения p из полуплоскости $\operatorname{Re} p < \gamma$.

2. Когда $\gamma = -\infty$, преобразование Лапласа (1.1.1) применимо к f при всяком значении p и $F(p)$ будет функцией, регулярной на всей комплексной плоскости p .

3. Когда $\gamma = +\infty$, преобразование Лапласа (1.1.1) не применимо к f ни при каком значении p .

Число γ может быть названо *границей показателя сходимости*, и прямая $\operatorname{Re} p = \sigma = \gamma$ — *границей области сходимости* преобразования Лапласа.

В связи с изложенным обычно уточняют понятие о функции-оригинале. Функция f называется *функцией-оригиналом*, если она обладает следующими свойствами:

- 1) f определена на оси $-\infty < t < \infty$ и интегрируема с абсолютным значением на каждом конечном отрезке;
- 2) при $t < 0$ функция f обращается в нуль;
- 3) преобразование Лапласа применимо к f хотя бы при одном значении p .

Верна

Теорема 1. *Каждому оригиналу f соответствует такое число γ ($-\infty \leq \gamma < \infty$), что преобразование (1.1.1) применимо к f для всякого p , где $\operatorname{Re} p = \sigma > \gamma$; при этом $F(p)$ будет функцией, регулярной в полуплоскости $\operatorname{Re} p = \sigma > \gamma$. Преобразование (1.1.1) не применимо к f ни при каком p , для которого $\operatorname{Re} p < \gamma$.*

Функцию F называют *функцией-изображением по Лапласу* функции f .

Нахождение значения γ в некоторых случаях затруднительно. Можно указать простой признак, позволяющий во многих случаях оценить γ сверху.

Теорема 2. Если существуют два числа M ($0 \leq M < \infty$) и α ($-\infty < \alpha < \infty$) такие, что при всяких $t \geq 0$ выполняется неравенство

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \quad (1.1.3)$$

то $\alpha \geq \gamma$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{Re} p = \sigma > \alpha$,

$$\int_0^{\infty} |f(t) e^{-pt}| dt = \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt = \int_0^{\infty} M e^{-(\sigma-\alpha)t} dt = \frac{M}{\sigma-\alpha} < \infty.$$

Таким образом, при всяком действительном значении $p = \sigma$, большем α , интеграл (1.1.1) будет абсолютно сходящимся, и так как γ есть нижняя грань таких значений p , то должно быть $\gamma \leq \alpha$, что и требовалось.

Условие (1.1.3) выполняется для широкого класса функций, в частности, оно выполняется для большинства функций, встречающихся в приложениях; поэтому оригиналы f часто определяют несколько иначе, чем указано выше, а именно сохраняют два первых свойства определения оригинала, третье же свойство заменяют следующим:

Существуют числа M и α такие, что выполняется неравенство

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Обратим еще внимание на изменение изображения $F(p)$ при удалении точки p в бесконечность. Достаточной для дальнейшего изложения является

Теорема 3. Если интеграл (1.1.1) сходится абсолютно при значении $p = p_0 = \sigma_0 + i\tau_0$, то $F(p)$ стремится к нулю при удалении точки p в бесконечность по любому закону, лишь бы p оставалась в полуплоскости $\operatorname{Re} p = \sigma \geq \sigma_0$.

Доказательство. Пусть $p = \sigma + i\tau$ и $\sigma \geq \sigma_0$. По предположению интеграл (1.1.1) для $p_0 = \sigma_0 + i\tau_0$ абсолютно сходится, поэтому он будет сходитьсся и для взятого значения p . Возьмем положительное число A ,

значение которого определим ниже, и разложим интеграл (1.1.1) на два слагаемых:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^A f(t) e^{-pt} dt + \int_A^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = I_1 + I_2.$$

Оценим сначала второй из интегралов:

$$|I_2| \leq \int_A^{\infty} |f(t) e^{-p_0 t}| e^{-(\sigma - \sigma_0)t} dt \leq \int_A^{\infty} |f(t) e^{-p_0 t}| dt.$$

Если дано произвольное положительное число ε , число A можно выбрать так, чтобы последний член неравенств был меньше $\varepsilon/3$. Тогда будет $|I_2| < \varepsilon/3$ при всяком значении p , для которого $\operatorname{Re} p = \sigma \geq \sigma_0$.

Поэтому достаточно убедиться в том, что I_1 стремится к нулю при $p \rightarrow \infty$.

Функцию f считаем абсолютно интегрируемой на всяком конечном отрезке, в частности на $[0, A]$, и поэтому существует такая функция $g(t)$, определенная и непрерывно дифференцируемая на $[0, A]$, для которой выполняется неравенство

$$\int_0^A |f(t) - g(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для интеграла I_1 получим

$$I_1 = \int_0^A [f(t) - g(t)] e^{-pt} dt + \int_0^A g(t) e^{-pt} dt = I_3 + I_4.$$

Интеграл I_3 может быть оценен следующим путем:

$$|I_3| \leq \int_0^A |f(t) - g(t)| e^{-\sigma t} dt \leq \int_0^A |f(t) - g(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \frac{\varepsilon}{3}.$$

С целью оценить I_4 выполним предварительно интегрирование по частям:

$$I_4 = - \frac{1}{p} g(t) e^{-pt} \Big|_0^A + \frac{1}{p} \int_0^A g'(t) e^{-pt} dt.$$

Тогда

$$|I_4| \leq \frac{1}{|p|} [|g(0)| + |g(A)| e^{-\sigma_0 A}] + \\ + \frac{1}{|p|} \int_0^A |g'(t)| e^{-\sigma_0 t} dt = \frac{1}{|p|} M, \\ M = |g(0)| + |g(A)| e^{-\sigma_0 A} + \int_0^A |g'(t)| e^{-\sigma_0 t} dt.$$

Если $|p| > 3M/\varepsilon$, то $|I_4| < \varepsilon/3$ и

$$|I_1| \leq |I_3| + |I_4| < \frac{2}{3} \varepsilon.$$

Наконец, если воспользоваться полученной выше оценкой I_2 , можно сказать, что при $|p| > 3M/\varepsilon$ для $F(p)$ будет верно неравенство

$$|F(p)| \leq |I_1| + |I_2| < \frac{2}{3} \varepsilon + \frac{1}{3} \varepsilon = \varepsilon,$$

а так как ε есть произвольная положительная величина, отсюда следует, что $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$ ($\operatorname{Re} p = \sigma \geq \sigma_0$).

§ 1.2. Комплексный интеграл, осуществляющий обращение преобразования Лапласа

Укажем сейчас на один из возможных общих методов обращения преобразования Лапласа, когда такое обращение дается при помощи комплексного интеграла, в котором интегрирование выполняется вдоль некоторой прямой линии, параллельной мнимой оси комплексной плоскости.

Для получения правила обращения будем исходить из двойного интеграла Фурье. Пусть на действительной оси t ($-\infty < t < \infty$) задана произвольная функция $g(t)$. Говорят, что функция g представима двойным комплексным интегралом Фурье, если при всех значениях t ($-\infty < t < \infty$) выполняется равенство *)

$$\frac{1}{2} [g(t+0) + g(t-0)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau t} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\tau x} dx d\tau. \quad (1.2.1)$$

Равенство (1.2.1) называют *формулой Фурье*.

*) Условия, достаточные для представимости функции интегралом Фурье, будут указаны в гл. 7.

Внутренний интеграл по переменной x предполагается абсолютно сходящимся при всяких τ , что, очевидно, равносильно абсолютной интегрируемости $g(t)$. Внешний же интеграл понимается в смысле главного значения, т. е. как предел интеграла, взятого по симметричному относительно точки $\tau=0$ отрезку $[-b, b]$ при условии $b \rightarrow \infty$.

Установим связь между формулой Фурье (1.2.1) и обращением преобразования Лапласа. Допустим, что $f(t)$ есть произвольный оригинал, и предположим, что при некотором значении c произведение $f(t)e^{-ct}$ является абсолютно интегрируемой функцией на полуоси $[0, \infty)$. Положим $g(t) = f(t)e^{-ct}$. Отметим, что при отрицательных t функция f , а следовательно, и $g(t)$ равны нулю.

Будем считать, что функция $g(t)$ представима интегралом Фурье (1.2.1). Для упрощения записи будем считать, что в точках разрыва $g(t)$ выполняется равенство (это условие несущественно изменит задачу, так как множество точек разрыва функций f и g имеет меру нуль и изменение их значений на таком множестве не повлияет на величины интегралов)

$$g(t) = \frac{1}{2} [g(t+0) + g(t-0)].$$

Оно выполняется, очевидно, во всех точках непрерывности $g(t)$. Формула Фурье для функции g примет вид

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau t} \int_0^{\infty} g(x) e^{-i\tau x} dx d\tau,$$

или, если возвратиться к функции f ,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(c+i\tau)t} \int_0^{\infty} f(x) e^{-(c+i\tau)x} dx d\tau. \quad (1.2.2)$$

Рассмотрим преобразование Лапласа функции f :

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

На прямой $p = c + i\tau$ ($-\infty < \tau < \infty$), ввиду абсолютной интегрируемости $f(t)e^{-ct}$, оно сходится при всяких τ , и, значит, преобразование будет сходиться в полуплоскости

$\operatorname{Re} p = \sigma \geq c$. Кроме того, $F(p)$ будет регулярной аналитической функцией при $\operatorname{Re} p = \sigma > c$.

Представляет интерес значение изображения $F(p)$ при $\sigma = c$:

$$F(c + i\tau) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(c+i\tau)t} dt.$$

Изображение $F(p)$ стоит под знаком внутреннего интеграла в (1.2.2), так что для $f(t)$ верно равенство

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(c + i\tau) e^{(c+i\tau)t} d\tau.$$

Это и есть представление оригинала f через его изображение F , его предпочитают записывать при помощи комплексной переменной $p = \sigma + i\tau$. На прямой $p = c + i\tau$ ($-\infty < \tau < \infty$) будет $dp = i d\tau$, и полученное равенство переходит в следующее:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) e^{tp} dp. \quad (1.2.3)$$

Это равенство называется *формулой Меллина*.

Изложенное позволяет считать доказанной приводимую ниже теорему.

Теорема 4. Пусть оригинал $f(t)$ таков, что при некотором значении c функция $g(t) = f(t) e^{-ct}$ удовлетворяет условиям:

- 1) $g(t)$ абсолютно интегрируема на полуоси $[0, \infty)$;
- 2) $g(t)$ представима двойным интегралом Фурье.

Тогда верно представление (1.2.3) оригинала f через его изображение F ; при этом предполагается, что в точках разрыва функции f выполняется равенство

$$f(t) = \frac{1}{2} [f(t+0) + f(t-0)].$$

Таким образом, задача обращения преобразования Лапласа сводится к задаче вычисления контурного интеграла (1.2.3) от некоторой регулярной функции. Так как найти точное выражение интеграла (1.2.3) через известные функции удастся далеко не всегда, то можно попытаться строить правила численного нахождения его. Но эта задача доста-

точно трудна, так как, во-первых, контур интегрирования в интеграле (1.2.3) бесконечный, а, во-вторых, подынтегральная функция e^{pt} испытывает колебания на линии интегрирования, причем эти колебания будут тем сильнее, чем большее значение принимает параметр t .

С другой стороны, функция $F(p)$, стоящая под знаком интеграла, не является произвольной функцией, а есть изображение со всеми свойствами, о которых говорилось ранее. Этот факт в некоторой степени облегчает вычисление интеграла (1.2.3), так как свойства изображения $F(p)$ могут быть заранее учтены при построении правил численного обращения преобразования Лапласа.

Построению правил вычисления интеграла Меллина, учитывающих указанные свойства изображения, будут посвящены гл. 4—6 книги.

§ 1.3. Представление функций интегралом Лапласа

Приведем условия, достаточные для того, чтобы заданная функция комплексной переменной $F(p)$, аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$, служила изображением некоторого оригинала, т. е. чтобы она могла быть представлена сходящимся интегралом Лапласа.

Но прежде напомним без доказательства некоторые факты из теории функций комплексного переменного, необходимые нам в дальнейшем.

Лемма Жордана. Если на некоторой последовательности дуг окружностей C_{R_n} :

$$|p| = R_n, \quad \operatorname{Re} p < c \quad (R_n \rightarrow \infty, c \text{ фиксировано}),$$

функция $F(p)$ стремится к нулю равномерно относительно $\arg p$, то для любого положительного t

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_{R_n}} F(p) e^{pt} dp = 0. \quad (1.3.1)$$

Если те же условия выполнены на последовательности дуг окружностей C'_{R_n} :

$$|p| = R_n, \quad \operatorname{Re} p > c,$$

то для любого отрицательного t

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C'_{R_n}} F(p) e^{pt} dp = 0. \quad (1.3.2)$$

Теорема 5 (теорема Коши). Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D , то интеграл от нее вдоль любого замкнутого контура C , лежащего в D , равен нулю:

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

Теорема 6 (теорема о вычетах). Пусть однозначная функция $f(z)$ непрерывна на границе C области D и аналитична внутри этой области всюду, кроме конечного числа особых точек $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тогда

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(a_k), \quad (1.3.3)$$

где $\operatorname{res} f(a)$ — вычет функции f в особой точке a .

Вычет функции $f(z)$ в полюсе порядка n можно находить по формуле

$$\operatorname{res} f(a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z-a)^n f(z)). \quad (1.3.4)$$

Для полюсов первого порядка формула (1.3.4) упрощается:

$$\operatorname{res} f(a) = \lim_{z \rightarrow a} ((z-a) f(z)). \quad (1.3.5)$$

Если при этом в окрестности точки a функция $f(z)$ определена как частное двух аналитических в этой точке функций:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

причем $\varphi(a) \neq 0$, а $\psi(z)$ имеет в a нуль первого порядка (т. е. $\psi(a) = 0$, а $\psi'(a) \neq 0$), то формулу (1.3.5) можно заменить следующей:

$$\operatorname{res} f(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} (z-a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \quad (1.3.6)$$

Теперь вернемся к доказательству теоремы о представимости функции $F(p)$ интегралом Лапласа.

Теорема 7. Если функция $F(p)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$, стремится к нулю при $|p| \rightarrow \infty$ в любой полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq c > \alpha$ равномерно относительно $\arg p$ и интеграл

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) dp \quad (1.3.7)$$

абсолютно сходится, то $F(p)$ является изображением функции

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad (1.3.8)$$

т. е. может быть представлена сходящимся интегралом Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{pt} f(t) dt$$

для $\operatorname{Re} p > c$, при этом интеграл Лапласа сходится абсолютно.

Доказательство. Возьмем некоторое число p_0 такое, что $\operatorname{Re} p_0 > c$; тогда из (1.3.8) следует

$$\int_0^{\infty} e^{-p_0 t} f(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-p_0 t} \left(\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} F(p) dp \right) dt. \quad (1.3.9)$$

Рассмотрим внутренний интеграл. В нем $p = c + iy$, $dp = i dy$, следовательно, его можно переписать в виде

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} F(p) dp = ie^{ct} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyt} F(c + iy) dy.$$

Оценим последний интеграл:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyt} F(c + iy) dy \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |F(c + iy)| dy. \quad (1.3.10)$$

В силу условий теоремы интеграл (1.3.7) сходится абсолютно, поэтому интеграл в левой части неравенства (1.3.10) сходится равномерно относительно t , и, следовательно, в формуле (1.3.9) можно изменить порядок

интегрирования:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-p_0 t} f(t) dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) dp \int_0^{\infty} e^{(p-p_0)t} dt = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F(p)}{p-p_0} dp, \quad (1.3.11) \end{aligned}$$

причем последнее равенство верно, так как внутренний интеграл сходится в силу того, что $\operatorname{Re}(p-p_0) < 0$ и $t > 0$.

Рассмотрим дугу C_R : $|p|=R$, $\operatorname{Re} p > c$. В силу условий теоремы на этой дуге $\max |F(p)| = \alpha_R \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, следовательно,

$$\left| \int_{C_R} \frac{F(p)}{p-p_0} dp \right| \leq \frac{\alpha_R}{R-|p_0|} \pi R,$$

и этот интеграл стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что прямую интегрирования в (1.3.11) можно заменить замкнутым контуром $\tilde{C}_R$, составленным из дуги C_R и отрезка $[c+ib, c-ib]$, проходимого сверху вниз. Тогда формулу (1.3.11) можно записать в виде

$$\int_0^{\infty} e^{-p_0 t} f(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{C}_R} \frac{F(p)}{p-p_0} dp. \quad (1.3.12)$$

Знак минус мы опустили, так как поменяли направление движения по прямой. Интеграл в правой части формулы (1.3.12) вычислим, применяя теорему о вычетах. Функция $\frac{F(p)}{p-p_0}$ внутри контура $\tilde{C}_R$ имеет только одну особую точку — полюс первого порядка в точке $p=p_0$. Вычет ее в этой точке можно вычислить по формуле (1.3.6), он будет равен $F(p_0)$. Тогда по формуле (1.3.3) найдем

$$\int_0^{\infty} e^{-p_0 t} f(t) dt = F(p_0). \quad (1.3.13)$$

А так как p_0 — любая точка полуплоскости $\operatorname{Re} p > c$, то из (1.3.13) следует, что $F(p)$ представляется сходящимся интегралом Лапласа для всех p , для которых $\operatorname{Re} p > c$. Позже мы покажем, что этот интеграл будет и абсолютно сходящимся.

Покажем теперь, что если выполнены условия теоремы, то функция $f(t)$, представленная интегралом (1.3.8), будет обладать вторым свойством определения оригинала. В самом деле, при $t < 0$ по лемме Жордана

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C'_R} e^{pt} F(p) dp = 0,$$

следовательно, прямую интегрирования в формуле (1.3.8) можно заменить контуром $\tilde{C}_R$, который был определен выше. Тогда при $t < 0$ по теореме Коши получим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{C}_R} e^{pt} F(p) dp = 0,$$

так как подынтегральная функция аналитична внутри $\tilde{C}_R$. Значит, свойство 2) для f выполняется. Покажем, кроме того, что для функции f выполняется условие вида (1.1.3) при $\alpha = c$. Действительно, из (1.3.8) следует

$$\begin{aligned} |f(t)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} F(p) dp \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} e^{ct} \int_{-\infty}^{\infty} |F(c+iy)| dy = M e^{ct}, \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

так что неравенство (1.1.3) выполняется.

Теперь вернемся к интегралу (1.3.13) и покажем, что он абсолютно сходится. В самом деле, пусть $p_0 = x_0 + iy_0$; тогда в силу (1.3.14) и того, что $x_0 > c$,

$$\int_0^{\infty} |e^{-p_0 t} f(t)| dt \leq M \int_0^{\infty} e^{-(x_0 - c)t} dt = \frac{M}{x_0 - c}.$$

§ 1.4. Некорректность задачи обращения преобразования Лапласа

Задачу восстановления оригинала $f(t)$ по операторному изображению $F(p)$ можно рассматривать как задачу решения интегрального уравнения первого порядка

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = F(p), \quad (1.4.1)$$

которая относится к классу задач, получивших название *некорректных*. Эти задачи характеризуются двумя свойствами, сильно затрудняющими их решение: они разрешимы не при всех значениях числовых или функциональных параметров, определяющих их решение, и малым изменениям этих параметров может отвечать большое изменение решения (о неустойчивости задачи говорилось в предисловии, и здесь мы вынуждены отчасти повторить уже сказанное там). Поясним более подробно эти свойства для задачи обращения преобразования Лапласа и для соответствующего ей интегрального уравнения.

Для определенности рассмотрим случай, когда изображение $F(p)$ известно на действительной полуоси $p > \alpha$ и аргумент p есть действительная переменная. Уравнение (1.4.1) имеет решение не при всяких функциях $F(p)$, непрерывных или даже гладких для $p > \alpha$. В частности, оно неразрешимо, если $F(p)$ не является аналитической функцией при $p > \alpha$. Предположим теперь, что $F(p)$ является изображением некоторой функции f и уравнение (1.4.1) будет, следовательно, разрешимым. Заменим функцию $f(t)$ некоторой другой функцией $f_1(t)$, отличающейся от $f(t)$ возмущением, имеющим большую величину на достаточно малом участке, и совпадающей с $f(t)$ на остальной части полуоси $[0, \infty)$. Новому оригиналу f_1 будет отвечать изображение $F_1(p)$, мало отличающееся от $F(p)$ при всяких $p > \alpha$. Таким образом, малому изменению правой части уравнения (1.4.1) может соответствовать сколь угодно большое изменение решения f в равномерной метрике. Можно показать, что аналогичное будет иметь место и в других метриках.

Некорректность проблемы решения уравнения (1.4.1), которая равносильна обращению преобразования Лапласа, может затруднить численное решение, но не делает его невозможным. К решению уравнения (1.4.1) могут быть применены методы регуляризации решения, разработанные А. Н. Тихоновым, В. К. Ивановым и другими авторами. Мы не будем останавливаться на изложении этих методов.

Г Л А В А 2

НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

§ 2.1. Нахождение оригинала с помощью формулы обращения

В гл. 1 было показано, что если $f(t)$ является оригиналом, а $F(p)$ его изображением по Лапласу, то для вычисления оригинала по изображению можно пользоваться комплексным интегралом

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)e^{pt} dp, \quad (2.1.1)$$

где c есть абсцисса в полуплоскости абсолютной сходимости интеграла Лапласа. Правда, для непосредственного вычисления функции $f(t)$ использовать формулу (2.1.1) затруднительно, так как она требует знания функции $F(p)$ для комплексных значений $p = c + iy$ ($-\infty < y < \infty$) и интеграл является несобственным, с колеблющимся ядром. Но поскольку (2.1.1) является интегралом от аналитической функции, взятым по контуру в комплексной плоскости, его можно преобразовать, применив для этого методы, известные из теории функций комплексного переменного, например изменение пути интегрирования, вычисление вычетов и т. п. Такого рода преобразования в некоторых случаях позволяют получить практически удобное выражение для оригинала, из которого можно получить важные свойства функции, определяемой комплексным интегралом.

Методы вычисления оригинала при помощи таких преобразований комплексного интеграла (2.1.1) рассмотрим в следующих пунктах настоящего параграфа.

2.1.1. Разложение оригинала в ряды по показательным функциям. Для одного важного класса изображений $F(p)$ можно получить разложение оригинала в ряд, члены кото-

рого соответствуют особым точкам изображений. А именно, справедлива следующая

Теорема 1. Пусть 1) функция $F(p)$ мероморфна; 2) функция $F(p)$ аналитична в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$; 3) существует система окружностей

$$C_n: |p| = R_n, \quad R_1 < R_2 < \dots \quad (R_n \rightarrow \infty),$$

на которой $F(p)$ стремится к нулю равномерно относительно $\arg p$; 4) для любого $c > \alpha$ абсолютно сходится интеграл $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) dp$.

Тогда оригиналом $F(p)$ служит функция

$$f(t) = \sum_{p_k} \operatorname{res} F(p) e^{pt}, \quad (2.1.2)$$

где вычеты вычисляются по всем полюсам функции $F(p)$ и суммирование выполняется по группам полюсов, лежащих в кольцах между соседними окружностями C_n .

Доказательство. В условиях теоремы 1 справедлива теорема 7 гл. 1, согласно которой $F(p)$ является изображением функции

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} F(p) dp. \quad (2.1.3)$$

Обозначим через C'_n часть окружности C_n , расположенную левее прямой $\operatorname{Re} p = c$, через $c \pm ib_n$ — точки пересечения этой прямой с окружностью C_n и через Γ_n — замкнутый контур, составленный из отрезка $[c - ib_n, c + ib_n]$ и дуги C'_n и проходимый против часовой стрелки. Так как по лемме Жордана при $t > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C'_n} e^{pt} F(p) dp = 0,$$

то интеграл в формуле (2.1.3) можно заменить следующим интегралом:

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} e^{pt} F(p) dp. \quad (2.1.4)$$

Теперь, применяя теорему Коши о вычетах, получим

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p_k \in (\Gamma_n)} \operatorname{res} F(p) e^{pt},$$

где вычеты берутся во всех особых точках функции $F(p)$, лежащих внутри Γ_n . Полученное равенство доказывает теорему.

2.1.2. Частные случаи разложения оригинала в ряды по показательным функциям. Рассмотрим случай, когда функция $F(p)$ является дробно-рациональной функцией. Тогда имеет место

Теорема 2. Если функция $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ дробно-рациональна, причем степень многочлена $A(p)$ меньше степени многочлена $B(p)$, то оригиналом ее служит функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n_k-1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} \{F(p) (p-p_k)^{n_k} e^{pt}\}, \quad (2.1.5)$$

где p_k — полюсы $F(p)$, а n_k — их кратности, и сумма берется по всем полюсам.

Доказательство. Прежде всего заметим, что функция $F(p)$ будет изображением. Это следует из теоремы о разложении дробно-рациональной функции на простейшие дроби, линейности преобразования Лапласа и справедливости формулы

$$t^n e^{p_0 t} \doteq \frac{n!}{(p-p_0)^{n+1}}$$

(где справа стоит изображение, слева — его оригинал). Следовательно,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad (2.1.6)$$

где $c > \max_k \operatorname{Re} p_k$, p_k — полюсы функции $F(p)$.

Так же, как и в предыдущей теореме, интеграл (2.1.6) можно заменить интегралом (2.1.4), ибо в силу того, что $F(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$, применима лемма Жордана.

Применяя к интегралу (2.1.4) теорему о вычетах и формулу (1.3.4) для вычисления вычетов в полюсах, приходим к формуле (2.1.5).

В частности, если все полюсы простые, то формула (2.1.5) упрощается:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} \quad (2.1.7)$$

(мы воспользовались формулой (1.3.6) для вычисления вычетов в простых полюсах).

З а м е ч а н и е. Если многочлен $B(p)$ имеет действительные коэффициенты, то каждому его комплексному корню p отвечает комплексно сопряженный корень $\bar{p}$. Если и многочлен $A(p)$ имеет действительные коэффициенты, то тогда

$$\frac{A(\bar{p})}{B'(\bar{p})} e^{\bar{p}t} = \overline{\frac{A(p)}{B'(p)} e^{pt}}$$

и, следовательно, сумма выражений $\frac{A(p)}{B'(p)} e^{pt}$, вычисленная для комплексно сопряженных корней p_k и $\bar{p}_k$, будет равна $2 \operatorname{Re} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}$. Значит, формулу (2.1.7) можно в этом случае представить в виде

$$f(t) = \sum \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} + 2 \operatorname{Re} \sum \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t},$$

где в первом слагаемом суммирование ведется по всем действительным корням $B(p)$, а во втором слагаемом — по всем комплексным корням с положительными мнимыми частями.

§ 2.2. Разложение оригинала в степенные ряды

Предположим, что изображение $F(p)$ аналитично в бесконечно удаленной точке. Тогда, как известно из операционного исчисления, $F(\infty) = 0$. Разложим функцию $F(p)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки и покажем, что ее оригинал можно получить, взяв сумму оригиналов членов этого разложения. Зная, что оригиналом функции $1/p^n$ является функция $t^{n-1}/(n-1)!$, сформулируем следующую теорему.

Теорема 3. Если $F(p)$ аналитична в бесконечно удаленной точке и имеет в ее окрестности разложение Лорана

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}, \quad (2.2.1)$$

то оригиналом $F(p)$ служит функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1}, \quad (2.2.2)$$

которая является целой функцией.

Доказательство. По условию теоремы функция $F(p)$ аналитична в круге $|p| \geq R$. Положим $p = 1/q$ и

$F(p) = F\left(\frac{1}{q}\right) = \Phi(q)$. Функция $\Phi(q) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k q^k$ будет аналитична в круге $|q| \leq 1/R$, и для ее коэффициентов на основании неравенства Коши *) верны неравенства

$$|c_k| \leq MR^k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Из полученных неравенств для любого t находим

$$f(t) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \frac{|t|^{k-1}}{(k-1)!} \leq MR \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(R|t|)^k}{k!} = MR e^{R|t|}. \quad (2.2.3)$$

Отсюда видно, что ряд (2.2.2) сходится во всей плоскости t , т. е. $f(t)$ является целой функцией переменной t .

Из неравенства (2.2.3) непосредственно следует, что для $t > 0$

$$|f(t)| \leq Ce^{Rt}.$$

Таким образом, для функции $f(t)$ выполняется неравенство вида (1.1.3) и она является оригиналом.

Умножив ряд (2.2.2) на e^{-pt} , получим ряд, равномерно сходящийся для всех значений t . Значит, его можно почленно проинтегрировать по t в пределах от нуля до бесконечности. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt &= \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-pt} dt = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_0^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-pt} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}, \end{aligned}$$

т. е.

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}.$$

Теорема доказана.

*) Неравенство Коши для коэффициентов: если функция $f(z)$ аналитична в круге $D = |z - z_0| < R$ и непрерывна на границе этого круга, то справедливо неравенство $|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{Mn!}{R^n}$, где M — максимум модуля функции $f(z)$ в области D .

§ 2.3. Разложение оригинала в обобщенные степенные ряды

Теорема 3 может быть распространена на обобщенные степенные ряды (см. [2]). Здесь мы ограничимся наиболее простым случаем.

Теорема 4. Пусть $F(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} p < c$ (c — некоторое положительное число), и не имеет в конечной p -плоскости никаких особенностей, кроме начала координат $p=0$, которое является точкой разветвления степенного типа.

Тогда, если разложение $F(p)$ в обобщенный степенной ряд имеет вид

$$F(p) = p^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} c_k p^{k\beta}, \quad (2.3.1)$$

где β — положительное число, то оригиналом функции $F(p)$ будет ряд

$$f(t) = \frac{1}{t^{\alpha+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\Gamma(-\alpha - k\beta)} \frac{1}{t^{k\beta}}, \quad (2.3.2)$$

в котором вычеркнуты все члены с целыми неотрицательными $\alpha + k\beta$.

Доказательство. Рассмотрим замкнутый контур $C_{R,r}^*$, составленный из отрезка $[c-ib, c+ib]$, дуги C_R^* окружности $|p|=R$, $\operatorname{Re} p < c$, $\operatorname{Im} p < 0$, дуги C_r^* той же окружности, определяемой неравенствами $\operatorname{Re} p < c$ и $\operatorname{Im} p > 0$, двубережного разреза вдоль отрезка действительной оси $-R < \operatorname{Re} p < -r$ и окружности $c_r: |p|=r$.

Так как функция $e^{pt} F(p)$ аналитична внутри контура $C_{R,r}^*$, то интеграл от этой функции вдоль контура $C_{R,r}^*$ равен нулю и, следовательно, интеграл вдоль отрезка $[c-ib, c+ib]$ можно заменить интегралом по остальной части контура. Кроме того, по лемме Жордана интеграл от $e^{pt} F(p)$ вдоль $C_R^* + C_r^*$ при $t > 0$ будет стремиться к нулю при $R \rightarrow \infty$, поэтому формулу обращения можно записать в виде

$$f(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R,r}^*} F(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r^*} F(p) e^{pt} dp, \quad (2.3.3)$$

где C_r^* — контур, составленный из двубережного разреза $-\infty < \operatorname{Re} p < -r$ и окружности $|p|=r$ без точки $p=-r$.

В формулу (2.3.3) подставим выражение (2.3.1) для $F(p)$, проинтегрируем почленно *) и получим

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r^*} p^{\alpha+k\beta} e^{pt} dp \right).$$

Введем новую переменную интегрирования, положив $z = pt$; так как $t > 0$, то вид контура интегрирования не изменится и мы получим

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{t^{\alpha+k\beta+1}} \int_{C_{rt}^*} z^{\alpha+k\beta} e^z dz. \quad (2.3.4)$$

Как известно из теории функций комплексного переменного, интегральное представление функции $1/\Gamma(x)$ имеет вид

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} e^z z^{-x} dz,$$

где C^* — контур вида C_{rt}^* , причем в точках $x=0, -1, -2, \dots$ эта функция обращается в нуль.

Поэтому формулу (2.3.4) можно записать в виде

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{1}{t^{\alpha+k\beta+1}} \frac{1}{\Gamma(-\alpha-k\beta)} = \frac{1}{t^{\alpha+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\Gamma(-\alpha-k\beta)} \frac{1}{t^{k\beta}};$$

где нужно вычеркнуть члены с целыми неотрицательными $\alpha + k\beta$. Теорема доказана.

*) Для возможности почленного интегрирования ряда вдоль бесконечной прямой требуются дополнительные условия. Достаточно, например, потребовать сходимости интеграла вдоль разреза $[-\infty, -r]$ от суммы ряда $|e^z| \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| |p|^{k\beta}$ (см., например, Г. Ватсон, Теория бесселевых функций, часть I, ИЛ, 1949, стр. 727).

Г Л А В А 3

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА, ОСНОВАННЫЕ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ СПЕЦИАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

§ 3.1. Обращение преобразования Лапласа с помощью многочленов, ортогональных на конечном промежутке

В этой главе будет построено несколько методов, дающих в большинстве случаев лишь принципиальную возможность выполнить обращение преобразования Лапласа при помощи рядов. Коэффициенты таких рядов могут быть найдены из бесконечных систем уравнений с треугольными матрицами, решаемых последовательно, или иными равносильными способами.

Эти системы неустойчивы относительно роста погрешностей. Задачи оценки погрешностей и выяснения условий сходимости реальных вычислительных процессов еще не исследованы.

3.1.1. Постановка задачи. Задачу обращения преобразования Лапласа можно решать методами, основанными на разложении оригинала в ряды по ортогональным функциям, в частности по многочленам Чебышева, Лежандра и Якоби. Эта задача, которая в окончательном своем виде сводится к проблеме моментов на конечном промежутке, была подвергнута изучению в работах многих авторов.

Рассмотрим постановку этой задачи в таком виде, как это сделано в работах В. М. Амербаева и в книге В. А. Диткина и А. П. Прудникова [4].

Пусть известно преобразование Лапласа $F(p)$ функции $f(t)$:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad (3.1.1)$$

где $f(t)$ — искомая функция, а $\beta(t)$ — неотрицательная, абсолютно интегрируемая на $[0, \infty)$ функция. Предположим, что функция $f(t)$ интегрируема на любом конечном отрезке $[0, T]$ и принадлежит классу $L_2(\beta(t), 0, \infty)$:

$$\int_0^{\infty} \beta(t) |f(t)|^2 dt < \infty. \quad (3.1.2)$$

Требуется по изображению $F(p)$ функции $\beta(t)f(t)$ построить функцию $f(t)$.

В интеграле (3.1.1) введем замену переменной $x = e^{-t}$; тогда он приведет к виду

$$F(p) = \int_0^1 x^p \omega(x) \varphi(x) dx, \quad (3.1.3)$$

где

$$\varphi(x) = f(-\ln x), \quad \omega(x) = \frac{\beta(-\ln x)}{x}.$$

В силу условий, которые наложены на функции $f(t)$ и $\beta(t)$, интеграл (3.1.3) сходится всюду в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq 0$, поэтому переменной p можно придать значения $0, 1, 2, \dots$ и получить «взвешенные моменты» функции $\varphi(x)$:

$$\mu_k = F(k) = \int_0^1 x^k \omega(x) \varphi(x) dx. \quad (3.1.4)$$

После этого решаемую задачу можно сформулировать так: найти функцию $\varphi(x)$ по ее «взвешенным моментам» μ_k , или, что то же самое, найти функцию $f(t)$ по значениям изображения функции $\beta(t)f(t)$ в целочисленных точках $p = k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). В частном случае эту задачу можно упростить и по первым $n+1$ «взвешенным моментам» искать многочлен

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$$

такой, чтобы его «взвешенные моменты» совпадали с заданными моментами функции $\varphi(x)$, т. е. чтобы выполнялись равенства

$$F(k) = \int_0^1 x^k \omega(x) q_n(x) dx = \mu_k \quad (0 \leq k \leq n). \quad (3.1.5)$$

Если такой многочлен существует, то изображения функций $\beta(t) q_n(e^{-t})$ и $\beta(t) f(t)$ совпадают в точках $p=k$ ($k=0, 1, \dots, n$) и $q_n(e^{-t})$ можно считать некоторым приближением к $f(t)$.

З а м е ч а н и е. Если $e_1, e_2, \dots, e_n$ — система векторов евклидова пространства, то *определителем Грама* для этой системы называется определитель

$$\begin{vmatrix} (e_1 e_1) & (e_1 e_2) & \dots & (e_1 e_n) \\ (e_2 e_1) & (e_2 e_2) & \dots & (e_2 e_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (e_n e_1) & (e_n e_2) & \dots & (e_n e_n) \end{vmatrix},$$

где $(e_k e_j)$ — скалярное произведение векторов e_k и e_j .

Для системы функций $f_i(x)$ ($i=1, 2, \dots, n$), для которой скалярное произведение определяется как $\int_a^b \omega(x) f_k(x) f_j(x) dx$, *определителем Грама* называется определитель

$$\begin{vmatrix} \int_a^b \omega f_1^2 dx & \int_a^b \omega f_1 f_2 dx & \dots & \int_a^b \omega f_1 f_n dx \\ \int_a^b \omega f_2 f_1 dx & \int_a^b \omega f_2^2 dx & \dots & \int_a^b \omega f_2 f_n dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_a^b \omega f_n f_1 dx & \int_a^b \omega f_n f_2 dx & \dots & \int_a^b \omega f_n^2 dx \end{vmatrix},$$

где ω и f_i — функции от x .

Определитель Грама всегда равен нулю или больше нуля. Он равен нулю тогда и только тогда, когда векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ или функции $f_1, f_2, \dots, f_n$ линейно зависимы.

А теперь покажем, что условия (3.1.5) однозначно определяют многочлен $q_n(x)$. В самом деле, равенства (3.1.5) представляют собой систему $n+1$ линейных алгебраических уравнений с $n+1$ неизвестными $c_0, c_1, \dots, c_n$ — коэффициентами многочлена $q_n(x)$. Определитель этой системы является определителем Грама функций $1, x, x^2, \dots, x^n$, и в силу того, что они линейно независимы, определитель отличен от нуля. А отсюда следует, что система (3.1.5) имеет решение и притом единственное. Значит, многочлен $q_n(x)$ существует и условия (3.1.5) определяют его единственным образом.

Отметим еще одно свойство многочлена $q_n(x)$. А именно, в классе многочленов степени не выше n многочлен $q_n(x)$, определяемый условиями (3.1.5), доставляет абсолютный минимум следующему функционалу:

$$J(c_0, c_1, \dots, c_n) = \int_0^1 \omega(x) \left[\varphi(x) - \sum_{k=0}^n c_k x^k \right]^2 dx. \quad (3.1.6)$$

В самом деле, запишем систему, полученную из условий минимальности функционала (3.1.6):

$$\frac{\partial J}{\partial c_k} = -2 \int_0^1 \omega(x) \left[\varphi(x) - \sum_{i=0}^n c_i x^i \right] x^k dx = 0,$$

или

$$\int_0^1 \omega(x) x^k q_n(x) dx = \int_0^1 \omega(x) x^k \varphi(x) dx \quad (k=0, 1, \dots, n).$$

Последняя система совпадает с системой (3.1.5), следовательно, на многочлене $q_n(x)$ функционал (3.1.6) имеет стационарное значение. Покажем, что $q_n(x)$ доставляет абсолютный минимум функционалу (3.1.6) в классе многочленов степени не выше n .

Пусть $P_n(x)$ — произвольный многочлен степени не выше n , причем $P_n(x) \not\equiv q_n(x)$. Представим $P_n(x)$ в виде

$$P_n(x) = q_n(x) + \varepsilon_n(x),$$

тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 \omega(x) [\varphi(x) - P_n(x)]^2 dx &= \int_0^1 \omega(x) [\varphi(x) - q_n(x)]^2 dx - \\ &- 2 \int_0^1 \omega(x) [\varphi(x) - q_n(x)] \varepsilon_n(x) dx + \int_0^1 \omega(x) \varepsilon_n^2(x) dx. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Второе слагаемое правой части (3.1.7) равно нулю в силу условия (3.1.5). Так как $P_n(x)$ не совпадает тождественно с $q_n(x)$ и $\varepsilon_n(x)$ не является, следовательно, тождественным нулем, последний член в (3.1.7) будет положительным и будет верно неравенство

$$\int_0^1 \omega(x) [\varphi(x) - P_n(x)]^2 dx > \int_0^1 \omega(x) [\varphi(x) - q_n(x)]^2 dx,$$

что и доказывает наше утверждение.

Обратим внимание на связь установленных результатов с рядами по ортогональным многочленам. Обозначим $p_n(x)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) систему многочленов, ортонормальных на $[0, 1]$ по весу $\omega(x)$, и рассмотрим соответствующий им обобщенный ряд Фурье для $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k p_k(x), \quad c_k = \int_0^1 \omega(x) \varphi(x) p_k(x) dx.$$

Возьмем конечную сумму n членов ряда

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k p_k(x).$$

Это есть многочлен степени не выше n , и его можно рассматривать как некоторое приближение к функции φ .

Можно легко указать экстремальное свойство такого приближения. Возьмем произвольные многочлены $\tilde{P}_n(x)$ степени n и среди таких многочленов найдем тот, который наименее уклоняется от φ в смысле среднего квадратичного. Мы уже знаем, что таким многочленом является $q_n(x)$; теперь покажем, что $q_n(x)$ совпадает с $S_n(x)$. Многочлен P_n можно разложить по многочленам p_k ($k=0, 1, \dots, n$):

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n A_k p_k(x).$$

Вычислим среднее квадратичное отклонение P_n от φ :

$$\begin{aligned} \delta_n^2 &= \int_0^1 \omega(x) [\varphi(x) - P_n(x)]^2 dx = \\ &= \int_0^1 \omega(x) \left[\varphi(x) - \sum_{k=0}^n A_k p_k(x) \right]^2 dx = \\ &= \int_0^1 \omega \varphi^2 dx - 2 \int_0^1 \omega \varphi \sum_{k=0}^n A_k p_k(x) dx + \int_0^1 \omega \left[\sum_{k=0}^n A_k p_k(x) \right]^2 dx = \\ &= \int_0^1 \omega \varphi^2 dx - 2 \sum_{k=0}^n A_k c_k + \sum_{k=0}^n A_k^2 = \\ &= \int_0^1 \omega \varphi^2 dx - \sum_{k=0}^n c_k^2 + \sum_{k=0}^n (A_k - c_k)^2. \end{aligned}$$

От выбора многочлена $P_n(x)$ в полученном равенстве зависит только последняя сумма, слагаемые которой все неотрицательные; поэтому δ_n^2 достигнет минимума в том и только в том случае, когда $A_k = c_k$ ($k = 0, 1, \dots, n$). Последнее означает, что многочлен P_n , доставляющий наименьшее значение δ_n^2 , т. е. $q_n(x)$, должен совпадать с $S_n(x)$:

$$q_n(x) \equiv S_n(x). \quad (3.1.8)$$

Из (3.1.8), в частности, следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k p_k(x)$$

и сходимость $q_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ ($n \rightarrow \infty$) равносильна возможности разложения функции $\varphi(x)$ в ряд по ортогональным многочленам $p_n(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k p_k(x).$$

Условия возможности такого разложения во многих случаях известны, и, пользуясь ими, можно получить условия, при которых оригинал $f(t)$ может быть найден как предел последовательности приближений $\beta(t) q_n(e^{-t})$ ($n = 1, 2, \dots$). Теперь рассмотрим некоторые частные случаи весовой функции $\omega(x)$.

3.1.2. Обращение преобразования Лапласа с помощью многочленов Якоби. Пусть весовая функция имеет вид

$$\omega(x) = x^\alpha (1-x)^\beta, \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1. \quad (3.1.9)$$

Построим многочлен $q_n(x)$. Но прежде рассмотрим так называемые *смещенные многочлены Якоби* $P_n^{*(\alpha, \beta)}(x)$. Они отличаются от многочленов Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ тем, что интервал их определения сведен к отрезку $[0, 1]$ вместо обычного $[-1, 1]$, т. е.

$$P_n^{*(\alpha, \beta)}(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(2x - 1).$$

Такие многочлены зависят от двух параметров, которые мы обозначили α, β , и при любых значениях этих параметров могут быть определены равенством

$$P_n^{*(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} x^{-\alpha} (1-x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} (x^{\alpha+n} (1-x)^{\beta+n}), \quad (3.1.10)$$

которое часто называют *формулой Родрига* для $P_n^{*(\alpha, \beta)}$. Многочлены $P_n^{*(\alpha, \beta)}(x)$ образуют ортогональную систему на $[0, 1]$ по весу $x^\alpha (1-x)^\beta$, и для них верны равенства

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta P_n^{*(\alpha, \beta)}(x) P_m^{*(\alpha, \beta)}(x) dx = 0, \quad n \neq m, \quad (3.1.11)$$

$$\begin{aligned} r_n &= \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta [P_n^{*(\alpha, \beta)}(x)]^2 dx = \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{n! (2n+\alpha+\beta+1) \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Ортонормированными многочленами, которые в п. 3.1.1 обозначены $p_k(x)$, здесь будут

$$p_k^{*(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{\sqrt{r_k}} P_k^{*(\alpha, \beta)}(x).$$

Коэффициенты c_k разложения $\varphi(x)$ по многочленам $p_k(x)$ имеют значения

$$\begin{aligned} c_k &= \int_0^1 \omega(x) \varphi(x) p_k(x) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{r_k}} \int_0^1 \omega(x) \varphi(x) P_k^{*(\alpha, \beta)}(x) dx = \frac{a_k}{\sqrt{r_k}}. \end{aligned}$$

Поэтому многочлен $q_n(x)$, совпадающий с частичной суммой $S_n(x)$ обобщенного ряда Фурье, имеет вид

$$q_n(x) = S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{r_k} P_k^{*(\alpha, \beta)}(x). \quad (3.1.13)$$

Можно построить простое выражение a_k через коэффициенты многочленов $P_k^{*(\alpha, \beta)}$ и величины $F(i)$. Пусть

$$P_k^{*(\alpha, \beta)}(x) = \sum_{i=0}^k \alpha_i^{(k)} x^i. \quad (3.1.14)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 a_k &= \int_0^1 \omega(x) \varphi(x) P_k^{*(\alpha, \beta)}(x) dx = \\
 &= \sum_{i=0}^k \alpha_i^{(k)} \int_0^1 \omega(x) x^i \varphi(x) dx = \\
 &= \sum_{i=0}^k \alpha_i^{(k)} \mu_i = \sum_{i=0}^k \alpha_i^{(k)} F(i). \quad (3.1.15)
 \end{aligned}$$

По этой формуле можно вычислять коэффициенты a_k разложения (3.1.13), так как числа $\alpha_i^{(k)}$ известны, а значения $F(i)$ заданы.

Таким образом, задача нахождения многочлена $q_n(x)$, который приближает функцию $\varphi(x)$, решена.

В п. 3.1.1 мы обращали внимание на то, что сходимость последовательности приближений $q_n(x)$ к $\varphi(x)$ равносильна возможности разложения $\varphi(x)$ в ряд по смещенным многочленам Якоби

$$\begin{aligned}
 f(t) = \varphi(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{r_k} P_k^{*(\alpha, \beta)}(x) = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n(x). \quad (3.1.16)
 \end{aligned}$$

Мы приведем сейчас теорему*), дающую условия, достаточные для возможности такого разложения. Сформулируем ее для обычных многочленов Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, рассматриваемых на отрезке $[-1, 1]$, но она просто переносится на разложение (3.1.16) по смещенным многочленам Якоби.

Сначала приведем теорему, дающую связь между частичными суммами ряда по многочленам Якоби и ряда Фурье.

Теорема 1. Пусть на отрезке $[-1, 1]$ дана измеримая функция $g(x)$, и пусть имеют конечные значения

*) См., например, Г. Сеге, Ортогональные многочлены, гл. IX, § 9.1, теорема 9.1.2, М., Физматгиз, 1962.

интегралы

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} |g(x)| dx < \infty, \\ \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha/2-1/4} (1+x)^{\beta/2-1/4} |g(x)| dx < \infty. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.17)$$

Если $S_n(x)$ означает n -ю частичную сумму ряда по многочленам Якоби для функции $g(x)$ и $\sigma_n(\cos \theta)$ означает n -ю частичную сумму ряда Фурье по косинусам для функции $G(\theta) = (1 - \cos \theta)^{\alpha/2+1/4} (1 + \cos \theta)^{\beta/2+1/4} g(\cos \theta)$, (3.1.18)

то в промежутке $-1 < x < 1$ верно соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n(x) - (1-x)^{-\alpha/2-1/4} (1+x)^{-\beta/2-1/4} \sigma_n(x)) = 0. \quad (3.1.19)$$

Оно выполняется равномерно относительно x на всяком отрезке вида $-1 + \varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 1$.

Из приведенной теоремы, в частности, следует, что если при каком-либо значении θ ($0 < \theta < \pi$) ряд Фурье для функции $G(\theta)$ сходится к $\frac{1}{2} [G(\theta+0) + G(\theta-0)]$, то при соответствующем значении $x = \cos \theta$ частичная сумма $S_n(x)$ будет стремиться к $\frac{1}{2} [g(x+0) + g(x-0)]$.

Что касается сходимости ряда Фурье, то для многих случаев является достаточной следующая *)

Теорема 2. Пусть $G(\theta)$ есть 2π -периодическая функция, интегрируемая с абсолютным значением на $[-\pi, \pi]$, и l есть произвольный отрезок на оси x . Если $G(\theta)$ имеет ограниченное изменение на l , то ряд Фурье для $G(\theta)$ сходится к значению $\frac{1}{2} [G(\theta+0) + G(\theta-0)]$ во всякой точке θ внутри l . Если $G(\theta)$, кроме того, непрерывна на l , то ряд Фурье сходится к $G(\theta)$ равномерно относительно θ на каждом отрезке, лежащем внутри l .

Функция $G(\theta)$, определенная равенством (3.1.18), является 2π -периодической и четной. Ряд Фурье для нее будет рядом по косинусам кратных дуг. К определению его

*) См., например, А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, т. I, гл. II, М., «Мир», 1965.

сходимости может быть применена только что сформулированная теорема. Будем считать, что отрезок l лежит внутри $[-\pi, \pi]$. Так как множитель, стоящий справа в (3.1.18) перед $g(\cos \theta)$, непрерывен на l и принимает значения, не меньшие положительного числа, то непрерывность $G(\theta)$ на l равносильна непрерывности там $g(\cos \theta)$. Кроме того, этот множитель, очевидно, имеет ограниченное изменение на l , и поэтому ограниченности изменений $G(\theta)$ и $g(\cos \theta)$ равносильны.

Если воспользоваться двумя приведенными теоремами, то относительно возможности разложения функции $\varphi(x)$ в ряд (3.1.16) по смещенным многочленам Якоби или, что равносильно, относительно сходимости последовательности приближений $q_n(x)$ к $\varphi(x)$ можно высказать приводимую ниже теорему.

Теорема 3. Пусть для функции $\varphi(x)$, $0 \leq x \leq 1$, выполняются условия:

1) имеют конечное значение интегралы

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta |\varphi(x)| dx,$$

$$\int_0^1 x^{\alpha/2-1/4} (1-x)^{\beta/2-1/4} |\varphi(x)| dx;$$

2) на отрезке $l=[c, d]$, лежащем внутри $[0, 1]$, $\varphi(x)$ имеет ограниченное изменение.

Тогда для всякой точки x , лежащей внутри l , верны равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{r_k} P_k^{*(\alpha, \beta)}(x) =$$

$$= \frac{1}{2} [\varphi(x+0) + \varphi(x-0)]. \quad (3.1.20)$$

Если, кроме того, $\varphi(x)$ непрерывна на l , то на всяком отрезке вида $c+\delta \leq x \leq d-\delta$ ($0 < \delta < \frac{1}{2}(d-c)$) равномерно относительно x будет верно равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{r_k} P_k^{*(\alpha, \beta)}(x) = \varphi(x). \quad (3.1.21)$$

Возвратимся, наконец, к исходной задаче о нахождении функции $f(t)$ по изображению $F(p)$, определенному

равенством (3.1.1). Для этого в равенстве вида (3.1.3) с весовой функцией $\omega(x) = x^\alpha (1-x)^\beta$ заменим переменную x , положив $x = e^{-t}$:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} e^{-(\alpha+1)t} (1-e^{-t})^\beta f(t) dt.$$

Такая же замена должна быть сделана в интегралах, участвующих в условии 1) теоремы 3. Вычисления опускаем ввиду их простоты.

Теорема 3 позволяет сказать, что для интересующей нас задачи верным является приводимое ниже утверждение.

Пусть по значениям в целых точках i ($i = 0, 1, 2, \dots$) изображения $F(p)$ и многочленам $P_k^{*(\alpha, \beta)}$ по правилам (3.1.15) и (3.1.12) вычислены величины r_k и a_k и составлены функции

$$q_n(e^{-t}) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{r_k} P_k^{*(\alpha, \beta)}(e^{-t}),$$

которые принимаются за приближения к $f(t)$.

Если выполняются условия:

1) имеют конечное значение интегралы

$$\int_0^\infty e^{-(\alpha+1)t} (1-e^{-t})^\beta |f(t)| dt,$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(\alpha+\frac{3}{2})t} (1-e^{-t})^{\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{4}} |f(t)| dt,$$

2) на отрезке $[c, d]$ ($0 < c < d < \infty$) функция $f(t)$ имеет ограниченное изменение,

то при всяком t , $c < t < d$, верно равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n(e^{-t}) = \sum_{k=0}^\infty \frac{a_k}{r_k} P_k^{*(\alpha, \beta)}(e^{-t}) =$$

$$= \frac{1}{2} [f(t+0) + f(t-0)].$$

Если же, кроме того, функция f непрерывна на $[c, d]$, то при всяком δ ($0 < \delta < \frac{1}{2}(d-c)$) равномерно относительно t на отрезке $c+\delta \leq t \leq d-\delta$ имеет место сходимость

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n(e^{-t}) = f(t).$$

В следующих трех пунктах будут рассмотрены частные случаи многочленов Якоби — многочлены Лежандра, многочлены Чебышева первого и второго рода, представляющие в вычислениях специальный интерес. В этих случаях вычисления могут быть выполнены с несколько большей полнотой.

3.1.3. Обращение преобразования Лапласа с помощью смещенных многочленов Лежандра. Рассмотрим частный случай весовой функции (3.1.9), когда $\alpha = \beta = 0$:

$$\omega(x) = 1 \quad \text{или} \quad \beta(t) = e^{-t}.$$

Многочленами, ортогональными на отрезке $[0, 1]$ с весом $\omega(x) = 1$, будут смещенные многочлены Лежандра $P_k^*(x)$. Они задаются формулой (3.1.10) при $\alpha = 0$, $\beta = 0$ или же формулой

$$\begin{aligned} P_k^*(x) &= (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}{k!} x^k = \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(n+k)!}{n!k!} x^k. \end{aligned}$$

Величина r_n в этом случае равна

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} = \\ &= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)}{n!(2n+1)\Gamma(n+1)} = \frac{1}{2n+1}, \end{aligned}$$

и разложение функции $f(t)$ по смещенным многочленам Лежандра имеет вид

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) a_k P_k^*(e^{-t}). \quad (3.1.22)$$

Величины a_k вычисляются по формуле (3.1.15), в которой $\alpha_k^{(k)}$ — коэффициенты смещенного многочлена Лежандра $P_k^*(x)$.

3.1.4. Обращение преобразования Лапласа с помощью смещенных многочленов Чебышева первого рода. Положим теперь $\alpha = \beta = -1/2$. Весовая функция имеет вид $\omega(x) = x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}$ и $\beta(t) = e^{-t/2}(1-e^{-t})^{-1/2}$. Смещенные многочлены Чебышева первого рода $T_n^*(x)$ являются ортогональной системой на $[0, 1]$ по весу $x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}$.

Многочлены Якоби $P_n^{*(-1/2, -1/2)}(x)$ отличаются от $T_n^*(x)$ только численным множителем, а именно

$$P_n^{*(-1/2, -1/2)}(x) = C_n T_n^*(x),$$

где

$$C_n = \frac{\Gamma(2n)}{2^{2n-1} \Gamma(n) \Gamma(n+1)}.$$

Многочлены $T_n^*(x)$ имеют вид

$$T_n^*(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} 2^k \frac{n(n+1) \dots (n-k-1)}{(2k-1)!!} x^k.$$

Значения r_n вычисляются по формулам

$$r_n = \int_0^1 x^{-1/2} (1-x)^{-1/2} [T_n^*(x)]^2 dx = \frac{\pi}{2} \quad (n \neq 0, r_0 = \pi),$$

а разложение функции $f(t)$ по смещенным многочленам Чебышева первого рода имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \left[a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_k^*(e^{-t}) \right]. \quad (3.1.23)$$

Коэффициенты a_k ($k=0, 1, \dots$) вычисляются по формуле (3.1.15), в которой $\alpha_i^{(k)}$ — коэффициенты смещенного многочлена Чебышева первого рода $T_k^*(x)$.

В вычислениях удобнее пользоваться тригонометрической записью многочленов $T_n^*(x)$, а именно:

$$T_n^*(x) = \cos [n \arccos (2x - 1)]. \quad (3.1.24)$$

Сделав замену переменной $2x - 1 = \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) и учитывая, что $x = e^{-t}$, $t = -2 \ln \cos \frac{\theta}{2}$, разложение (3.1.23) можно переписать в виде

$$f\left(-2 \ln \cos \frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \left[a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\theta \right]. \quad (3.1.25)$$

3.1.5. Обращение преобразования Лапласа с помощью смещенных многочленов Чебышева второго рода. Для $\alpha = \beta = 1/2$ весовая функция $\omega(x)$ и соответственно $\beta(t)$ имеют вид

$$\omega(x) = x^{1/2} (1-x)^{1/2}, \quad \beta(t) = e^{-3t/2} (1-e^{-t})^{1/2}.$$

Ортогональной системой многочленов по этому весу на отрезке $[0, 1]$ является система смещенных многочленов Чебышева второго рода $U_n^*(x)$, которая отличается от смещенных многочленов Якоби $P_n^{*(1/2, 1/2)}$ только постоянным множителем

$$P_n^{*(1/2, 1/2)}(x) = C_n U_n^*(x),$$

где

$$C_n = \frac{(2n+1)!}{2^{2n} n! (n+1)!}.$$

Многочлены $U_n^*(x)$ можно вычислять по формуле

$$U_n^*(x) = \frac{(-1)^n 2^n (2n+1)!!}{(n+2)(n+3)\dots(2n+1)} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{2^k (n+2)\dots(n+k+1)}{(2k+1)!!} x^k.$$

Для многочленов $U_n^*(x)$ величина r_n вычисляется по формуле

$$r_n = \int_0^1 x^{1/2} (1-x)^{1/2} [U_n^*(x)]^2 dx = \frac{\pi}{8},$$

а разложение $f(t)$ по этим многочленам имеет вид

$$f(t) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} a_k U_k^*(e^{-t}). \quad (3.1.26)$$

Коэффициенты a_k вычисляются по формуле (3.1.15), где $\alpha_i^{(k)}$ — коэффициенты смещенного многочлена Чебышева второго рода.

Для многочленов $U_n^*(x)$ также удобнее пользоваться тригонометрической записью

$$U_n^*(x) = \frac{\sin [(n+1) \arccos (2x-1)]}{2 \sqrt{x(1-x)}}. \quad (3.1.27)$$

Разложение (3.1.26) в этом случае примет вид

$$f\left(-2 \ln \cos \frac{\theta}{2}\right) = \frac{8}{\pi \sin \theta} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin (k+1) \theta, \quad (3.1.28)$$

где сделана та же замена переменной, что и в предыдущем случае.

3.1.6. Другой способ вычисления коэффициентов α_k . Вернемся к разложению функции $f(t)$ в ряд по смещенным многочленам Якоби, т. е. к формуле (3.1.16), и выясним, какое разложение функции $F(p)$, являющейся преобразованием Лапласа функции $\beta(t)f(t)$, соответствует разложению (3.1.16). Для этого разложим в ряд по смещенным многочленам Якоби функцию x^p ($\operatorname{Re} p \geq 0$):

$$x^p = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{r_k} P_k^{*(\alpha, \beta)}(x),$$

где

$$b_k = \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta x^p P_k^{*(\alpha, \beta)}(x) dx.$$

Для вычисления b_k воспользуемся формулой (3.1.10) для многочленов $P_k^{*(\alpha, \beta)}(x)$, тогда получим

$$\begin{aligned} b_k &= \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta x^p \frac{(-1)^k}{k!} x^{-\alpha} (1-x)^{-\beta} \times \\ &\times \frac{d^k}{dx^k} [x^{\alpha+k} (1-x)^{\beta+k}] dx = \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^p \frac{d^k}{dx^k} [x^{\alpha+k} (1-x)^{\beta+k}] dx \end{aligned}$$

Теперь, проинтегрировав по частям k раз, получим

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!} \int_0^1 x^{p+\alpha} (1-x)^{\beta+k} dx = \\ &= \frac{\Gamma(p+\alpha+1) \Gamma(k+\beta+1)}{\Gamma(p+\alpha+\beta+k+2)} \binom{p}{k}. \end{aligned}$$

Таким образом, разложение x^p по многочленам $P_n^{*(\alpha, \beta)}(x)$ имеет вид

$$x^p = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+\alpha+1) \Gamma(k+\beta+1)}{r_k \Gamma(k+p+\alpha+\beta+2)} \binom{p}{k} P_k^{*(\alpha, \beta)}(x), \quad (3.1.29)$$

где r_k определяется формулой (3.1.12).

З а м е ч а н и е. Обозначим $L_p^2(x)$ множество функций f , определенных на отрезке $[a, b]$ и интегрируемых там с квадратом по весу $p(x)$. Пусть ортонормируемая система функций $\varphi_k(x)$ ($k=1, 2, \dots$) замкнута в множестве $L_p^2(x)$, т. е. такова, что для $f \in L_p^2(x)$ верно

равенство Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \int_a^b p(x) f^2(x) dx, \quad f_k = \int_a^b p(x) f(x) \psi_k(x) dx. \quad (*)$$

Тогда для всяких двух функций $f(x)$ и $g(x)$, принадлежащих $L_p^2(x)$, верно обобщенное равенство Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k g_k = \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx. \quad (**)$$

Для доказательства рассмотрим функцию $f+g$. Так как она принадлежит $L_p^2(x)$, для нее, ввиду (*), верно равенство

$$\int_a^b p(x) [f(x) + g(x)]^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} (f_k + g_k)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} f_k g_k + \sum_{k=1}^{\infty} g_k^2$$

с другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x) [f(x) + g(x)]^2 dx &= \\ &= \int_a^b p(x) f^2(x) dx + 2 \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx + \int_a^b p(x) g^2(x) dx = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 + 2 \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx + \sum_{k=1}^{\infty} g_k^2. \end{aligned}$$

Из сравнения правых частей двух последних равенств сразу же следует (**).

Воспользуемся теперь обобщенным равенством Парсеваля, применив его к разложениям (3.1.16) и (3.1.29):

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta \varphi(x) x^p dx = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k b_k}{r_k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+\alpha+1) \Gamma(k+\beta+1)}{r_k \Gamma(p+\alpha+\beta+k+2)} \binom{p}{k} a_k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! (2k+\alpha+\beta+1) \Gamma(k+\alpha+\beta+1) \Gamma(p+\alpha+1) \Gamma(k+\beta+1)}{\Gamma(k+\alpha+1) \Gamma(k+\beta+1) \Gamma(p+\alpha+\beta+k+2)} \times \\ &\quad \times \binom{p}{k} a_k = \Gamma(p+\alpha+1) \sum_{k=0}^{\infty} (2k+\alpha+\beta+1) \times \\ &\quad \times \frac{k! \Gamma(k+\alpha+\beta+1) p(p-1) \dots (p-k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1) \Gamma(p+\alpha+\beta+k+2) k!} a_k = \Gamma(p+\alpha+1) \times \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} (2k+\alpha+\beta+1) \frac{\Gamma(k+\alpha+\beta+1) p(p-1) \dots (p-k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1) \Gamma(p+\alpha+\beta+k+2)} a_k. \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

З а м е ч а н и е. Неравенством Шварца — Буняковского (Буняковского — Коши) для сходящихся бесконечных рядов называется неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2,$$

где a_n и b_n — коэффициенты рядов.

Аналогом того же неравенства для сходящихся интегралов является неравенство

$$\int_a^b f(x) g(x) dx \leq \left(\int_a^b [f(x)]^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b [g(x)]^2 dx \right)^{1/2}.$$

Используя неравенство Шварца — Буняковского, можно показать, что последний ряд сходится абсолютно и равномерно в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq 0$.

В частности, если p положить равным целому положительному числу n , то разложение (3.1.30) примет вид

$$F(n) = n! \Gamma(n + \alpha + 1) \times \\ \times \sum_{k=0}^n \frac{(2k + \alpha + \beta + 1) \Gamma(k + \alpha + \beta + 1)}{(n - k)! \Gamma(k + \alpha + 1) \Gamma(n + \alpha + \beta + k + 2)} a_k. \quad (3.1.31)$$

Полагая в (3.1.31) $n = 0, 1, 2, \dots$, получим бесконечную треугольную систему уравнений относительно коэффициентов a_k . (Заметим, что предполагается $0! = 1$.)

Для того чтобы коэффициент при a_n в n -м уравнении системы сделать равным 1, систему (3.1.31) перепишем в виде

$$\frac{\Gamma(2n + \alpha + \beta + 1)}{n! \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} F(n) = \\ = \Gamma(n + \alpha + 1) \sum_{k=0}^n \frac{(2k + \alpha + \beta + 1) \Gamma(2n + \alpha + \beta + 1)}{(n - k)! \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} \times \\ \times \frac{\Gamma(k + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(k + \alpha + 1) \Gamma(n + \alpha + \beta + k + 2)} a_k. \quad (3.1.32)$$

Системой (3.1.32) можно пользоваться для нахождения коэффициентов a_k разложения (3.1.16).

В случае разложения по смещенным многочленам Лежандра в (3.1.32) положим $\alpha = \beta = 0$; тогда коэффициенты

a_k разложения (3.1.22) вычисляются из системы

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{n! \Gamma(n+1)} F(n) = \sum_{k=0}^n \frac{(2k+1) \Gamma(2n+1)}{(n-k)! \Gamma(n+k+2)} a_k$$

$$(n=0, 1, 2, \dots),$$

или

$$\binom{2n}{n} \Gamma(n) = \sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{2n+1} \binom{2n+1}{n-k} a_k. \quad (3.1.33)$$

Для разложений (3.1.25) и (3.1.28) по смещенным многочленам Чебышева первого и второго рода нельзя получить систему для определения a_k непосредственно из (3.1.32), так как эти многочлены отличаются от многочленов $P_k^*(-1/2, -1/2)(x)$ и $P_k^*(1/2, 1/2)(x)$ постоянным множителем. Но, проделав аналогичные выкладки, можно получить треугольные системы уравнений для определения коэффициентов a_k разложений (3.1.25) и (3.1.28). Для разложения (3.1.25) система имеет вид

$$2^{2n-1} F(n) = \frac{1}{2} \binom{2n}{n} a_0 + \sum_{k=1}^n \binom{2n}{n-k} a_k \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$(3.1.34)$$

для разложения (3.1.28) — вид

$$2^{2n} F(n) = \sum_{k=0}^n \frac{k+1}{n+1} \binom{2n+2}{n-k} a_k \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (3.1.35)$$

3.1.7. Замечание о приведении полуплоскости регулярности изображения к виду $\operatorname{Re} p \geq 0$ ($p \neq \infty$). Во всех предыдущих пунктах мы рассматривали задачу восстановления функции $f(t)$, если известно преобразование Лапласа $F(p)$ функции $f(t)$ с весовым множителем $\beta(t)$, т. е. функции $\beta(t)f(t)$, причем абсцисса абсолютной сходимости равнялась нулю. Но чаще всего на практике известно преобразование Лапласа $F(p)$ функции $f(t)$ с некоторой абсциссой абсолютной сходимости γ_a , не обязательно равной нулю, а именно известно, что преобразование рассматривается в условиях

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad \operatorname{Re} p \geq \gamma_0 > \gamma_a. \quad (3.1.36)$$

В этом случае поступаем следующим образом. Используя теоремы подобия и смещения для преобразования Лапласа, соотношение (3.1.36) перепишем в виде

$$hF(\gamma_0 + ph) = \int_0^{\infty} e^{-\gamma_0 t/h} f\left(\frac{t}{h}\right) e^{-pt} dt \quad (3.1.37)$$

для любого $h > 0$. Абсцисса абсолютной сходимости интеграла (3.1.37) будет равна нулю.

Теперь для того, чтобы получить разложение функции $f\left(\frac{t}{h}\right)$ в классе многочленов, ортогональных с весом $\beta(t)$, соотношению (3.1.37) придадим вид

$$hF(\gamma_0 + ph) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \beta(t) \varphi(t) dt, \quad (3.1.38)$$

где

$$\beta(t) \varphi(t) = f\left(\frac{t}{h}\right) e^{-\gamma_0 t/h}, \quad (3.1.39)$$

или

$$\varphi(t) = [\beta(t)]^{-1} f\left(\frac{t}{h}\right) e^{-\gamma_0 t/h}.$$

Для функции $\varphi(t)$ получим разложение по многочленам, ортогональным с весом $\beta(t)$, по схемам, описанным в предыдущих пунктах.

Тогда разложение для функции $f\left(\frac{t}{h}\right)$ получится умножением разложения для $\varphi(t)$ на $\beta(t) e^{\gamma_0 t/h}$, как видно из формулы (3.1.39).

Положим $h = \gamma_0 > \gamma_a$ и рассмотрим разложения функции $f\left(\frac{t}{h}\right) = \beta(t) e^t \varphi(t)$ по смещенным многочленам Лежандра, смещенным многочленам Чебышева первого и второго рода.

Для многочленов Лежандра $P_n^*(e^{-t})$ разложение для функции $\varphi(t)$ имеет вид (3.1.22), весовая функция $\beta(t) = e^{-t}$, поэтому

$$f\left(\frac{t}{h}\right) = \beta(t) e^t \varphi(t) = \varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) a_k P_k^*(e^{-t}). \quad (3.1.40)$$

Для многочленов Чебышева первого рода $T_n^*(e^{-t})$ весовая функция $\beta(t)$ имеет вид

$$\beta(t) = e^{-t/2} (1 - e^{-t})^{-1/2},$$

а функция $f\left(\frac{t}{h}\right)$ вычисляется по формуле

$$f\left(\frac{t}{h}\right) = \beta(t) e^t \varphi(t) = e^{t/2} (1 - e^{-t})^{-1/2} \varphi(t). \quad (3.1.41)$$

Если перейти к тригонометрической записи многочленов $T_n^*(e^{-t})$ и сделать замену переменной $t = -2 \ln \cos \frac{\theta}{2}$, то формула (3.1.41) примет вид

$$f\left(-\frac{2}{h} \ln \cos \frac{\theta}{2}\right) = \frac{2}{\sin \theta} \varphi\left(-2 \ln \cos \frac{\theta}{2}\right).$$

Так как разложение функции $\varphi(\theta)$ имеет вид (3.1.25), то разложение функции $f\left(-\frac{2}{h} \ln \cos \frac{\theta}{2}\right)$ будет следующим:

$$f\left(-\frac{2}{h} \ln \cos \frac{\theta}{2}\right) = \frac{2}{\pi \sin \theta} \left[a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\theta \right]. \quad (3.1.42)$$

Для многочленов Чебышева второго рода $U_n^*(e^{-t})$ весовая функция $\beta(t)$ имеет вид

$$\beta(t) = e^{-3t/2} (1 - e^{-t})^{1/2},$$

а функция $f\left(\frac{t}{h}\right)$ вычисляется следующим образом:

$$f\left(\frac{t}{h}\right) = \beta(t) e^t \varphi(t) = e^{-t/2} (1 - e^{-t})^{1/2} \varphi(t).$$

Если перейти к тригонометрической записи многочленов $U_n^*(e^{-t})$ и сделать замену переменной такую же, как и в предыдущем случае, то получим

$$f\left(-\frac{2}{h} \ln \cos \frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin \theta \varphi\left(-2 \ln \cos \frac{\theta}{2}\right).$$

Так как для φ имеет место разложение (3.1.28), то

$$f\left(-\frac{2}{h} \ln \cos \frac{\theta}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin(k+1)\theta. \quad (3.1.43)$$

Коэффициенты a_k разложений (3.1.40, 42, 43) вычисляются из соответствующих треугольных систем уравнений, при

этом в качестве моментов $F(k)$ (см. (3.1.4)) берутся числа

$$\mu_k = hF(h(k+1)), \quad k=0, 1, 2, \dots$$

В разложении (3.1.42) множитель $1/\sin \theta$ может оказывать сильное влияние на погрешности вычислений при значениях θ , близких к нулю. Поэтому этим разложением можно пользоваться, когда требуется вычислить значение $f(t)$ не на всей оси, а только в точке $t=t_0$ и ее окрестности. В этом случае можно выбрать параметр h так, чтобы замена $x=e^{-ht}$ перевела точку $t=t_0$ в $x=1/2$, т. е. $\theta=\pi/2$. Тогда влияние множителя $1/\sin \theta$ будет сведено к минимуму. Значение h будет равно $(\ln 2)/t_0$. При этом, если абсцисса абсолютной сходимости интеграла $\gamma_a \leq 0$, то на величину t_0 не накладывается никаких ограничений; если же $\gamma_a > 0$, то указанным методом можно пользоваться, если $0 < t_0 < (\ln 2)/\gamma_a$, так как $h=\gamma_0 > \gamma_a$.

Для всех описанных в этом параграфе методов характерен один существенный недостаток, заключающийся в следующем. Коэффициенты многочленов Лежандра, Чебышева первого и второго рода и других многочленов Якоби так же, как и коэффициенты треугольных систем линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов a_k , растут очень быстро с ростом k . Поэтому для того, чтобы коэффициенты разложения в ряд были вычислены хотя бы с умеренной точностью, значения исходных данных μ_k должны быть заданы с большой точностью.

З а м е ч а н и е. Ряд (3.1.43) представляет собой синус-ряд Фурье для функции $f\left(-\frac{2}{h} \ln \cos \frac{\theta}{2}\right)$. Может случиться, что коэффициенты a_k этого ряда будут убывать недостаточно быстро и ряд будет сходиться медленно. В этом случае можно улучшить сходимость ряда, если функции $F(p)$ и $f(t)$ удовлетворяют некоторым условиям. Из теории рядов Фурье известно, что если функция $f\left(-\frac{2}{h} \ln \cos \frac{\theta}{2}\right)$ достаточное число раз дифференцируема и обращается в нуль на концах отрезка $[0, \pi]$, то коэффициенты разложения этой функции в синус-ряд Фурье имеют порядок $(1/k^3)$. Поэтому можно попытаться представить изображение $F(p)$ в виде суммы так, чтобы оригинал для одного слагаемого вычислялся точно, а для

другого удовлетворял перечисленным выше условиям. Если будут справедливы равенства

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f_0,$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f_\infty$$

и пределы конечны, то $F(p)$ можно представить в виде

$$F(p) = F_1(p) + \left(\frac{f_\infty}{p} + \frac{f_0 - f_\infty}{p+1} \right).$$

Оригинал для слагаемого в скобках вычисляется точно, а оригинал $f_1(t)$ для функции $F_1(p)$ равен $f(t) - f_\infty - (f_0 - f_\infty)e^{-t}$ и, как функция θ , обращается в нуль на концах отрезка $[0, \pi]$. Синус-ряд Фурье для функции $f_1(t)$ будет сходиться быстрее, чем ряд для функции $f(t)$.

§ 3.2. Обращение преобразования Лапласа с помощью ряда Фурье по синусам

В этом параграфе мы изложим еще один способ нахождения оригинала по значениям изображения в равноотстоящих точках на действительной оси. Этот способ основан на двух допущениях, не ограничивающих, однако, его общности. Во-первых, предполагается, что изображение $F(p)$ существует при $\operatorname{Re} p > 0$. Это всегда можно сделать, если рассматривать вместо изображения $F(p)$ изображение $F(p+a)$ при достаточно больших a . Последнее равносильно умножению оригинала $f(t)$ на e^{-at} . Во-вторых, предполагается, что $f(0) = 0$. Этого можно достичь, положив $f_1(t) = f(t) - f(0)e^{-t}$, что равносильно замене изображения $F(p)$ изображением $F(p) - \frac{f(0)}{p+1}$.

Интеграл Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (3.2.1)$$

преобразуем при помощи подстановки

$$e^{-\sigma t} = \cos \theta, \quad (3.2.2)$$

где σ есть произвольное число, большее нуля. Тогда

$$f(t) = f\left(-\frac{1}{\sigma} \ln \cos \theta\right) = \varphi(\theta) \quad \left(0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.2.3)$$

$$\sigma F(\sigma) = \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{\rho/\sigma - 1} \sin \theta \varphi(\theta) d\theta. \quad (3.2.4)$$

Функцию $\varphi(\theta)$ разложим в ряд Фурье по синусам нечетных кратных дуг

$$\varphi(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin(2k+1)\theta, \quad (3.2.5)$$

коэффициенты c_k которого определяются обычным способом:

$$c_k = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \varphi(\theta) \sin(2k+1)\theta d\theta. \quad (3.2.6)$$

Чтобы выразить значения коэффициентов c_k через значения изображения $F(\rho)$, поступим следующим образом. В интеграле (3.2.4) положим $\rho = (2n+1)\sigma$ ($n=0, 1, \dots$), тогда получим

$$\sigma [F(2n+1)\sigma] = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} \theta \sin \theta \varphi(\theta) d\theta. \quad (3.2.7)$$

Ядро этого интеграла может быть представлено в виде линейной комбинации функций $\sin(2k+1)\theta$:

$$\cos^{2n} \theta \sin \theta =$$

$$= 2^{-2n} \sum_{k=0}^n \left[\binom{2n}{k} - \binom{2n}{k-1} \right] \sin[2(n-k)+1]\theta, \quad \binom{2n}{-1} = 0. \quad (3.2.8)$$

В интеграл (3.2.7) подставим выражения (3.2.5) и (3.2.8). Так как

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2\mu+1)\theta \sin(2\nu+1)\theta d\theta = \begin{cases} 0, & \mu \neq \nu, \\ \pi/4, & \mu = \nu, \end{cases}$$

то при фиксированном n останутся только члены, для которых $\nu = n-k$ ($k=0, 1, \dots, n$), т. е.

$$\sigma F[(2n+1)\sigma] = 2^{-2n} \frac{\pi}{4} \sum_{k=0}^n \left[\binom{2n}{k} - \binom{2n}{k-1} \right] c_{n-k},$$

или

$$\left[\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} \right] c_0 + \dots + \left[\binom{2n}{k} - \binom{2n}{k-1} \right] c_{n-k} + \dots + c_n = \\ = \frac{4^{n+1}}{\pi} \sigma F[(2n+1)\sigma],$$

или

$$\sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{2n+1} \binom{2n+1}{n-k} c_k = \frac{4^{n+1}}{\pi} \sigma F[(2n+1)\sigma]. \quad (3.2.9)$$

Подставив в это равенство последовательно $n=0, 1, \dots$, получим линейную систему уравнений с треугольной матрицей для определения коэффициентов c_k :

$$c_0 = \frac{4}{\pi} \sigma F(\sigma),$$

$$c_0 + c_1 = \frac{4^2}{\pi} \sigma F(3\sigma),$$

$$2c_0 + 3c_1 + c_2 = \frac{4^3}{\pi} \sigma F(5\sigma),$$

.....

Выбор значения σ обуславливается величиной промежутка, для которого необходимо вычислить значение оригинала $f(t)$, σ следует выбирать малым для больших t и, наоборот, большим для малых t .

З а м е ч а н и е. Равенством (3.2.3) функция $\varphi(\theta)$ определена на отрезке $0 \leq \theta < \pi/2$. Тригонометрический ряд, стоящий справа в (3.2.5), представляет функции, обладающие двумя особенностями: эти функции являются нечетными, или, иначе говоря, имеющими в плоскости с декартовыми осями координат (θ, φ) график, симметричный относительно начала координат, и такими, что их график является симметричным относительно прямой $\theta = \pi/2$. Тригонометрический ряд (3.2.5) дает продолжение функции $\varphi(\theta)$, обладающее указанными свойствами симметрии, кроме того, 2π -периодическое, и является для продолженной функции рядом Фурье. К определению его сходимости применимы все известные теоремы о сходимости ряда Фурье.

§ 3.3. Обращение преобразования Лапласа с помощью рядов по обобщенным многочленам Чебышева — Лагерра

В предыдущих параграфах этой главы были рассмотрены методы обращения преобразования Лапласа, в которых оригинал $f(t)$ находился по значениям изображения $F(p)$ в равноотстоящих точках действительной оси. В на-

стоящем параграфе будет рассмотрен метод восстановления оригинала, использующий значение изображения $F(p)$ и значения его производных в одной точке.

Пусть задано преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (3.3.1)$$

Предположим, что функция $f(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\lambda} |f(t)|^2 dt < \infty, \quad (3.3.2)$$

где $\lambda > -1$.

Тогда из общей теории разложения функций в ряды по ортогональным многочленам известно, что ряд Фурье для функции $g(t) = t^{-\lambda} f(t)$ по обобщенным многочленам Чебышева — Лагерра

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{r_k} L_k^{(\lambda)}(t) \quad (3.3.3)$$

сходится в среднем к этой функции. Это означает, что для частичных сумм

$$S_N(t) = \sum_{k=0}^N \frac{a_k}{r_k} L_k^{(\lambda)}(t)$$

имеет место равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} |g(t) - S_N(t)|^2 t^{\lambda} e^{-t} dt = 0.$$

При некоторых дополнительных ограничениях, накладываемых на $g(t)$, которые мы здесь не приводим*), имеет место равенство

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{r_k} L_k^{(\lambda)}(t). \quad (3.3.4)$$

Обобщенные многочлены Чебышева — Лагерра ортогональны на полуоси $0 \leq x < \infty$ с весом $p(x) = x^{\lambda} e^{-x}$ и могут

*) См. Г. Сеге, Ортогональные многочлены, гл. IX, теорема 9.1.5, М., Физматгиз, 1962.

быть представлены формулами

$$L_k^{(\lambda)}(t) = \frac{1}{k!} t^{-\lambda} e^t \frac{d^k}{dt^k} (e^{-t} t^{k+\lambda}),$$

$$L_k^{(\lambda)}(t) = \sum_{m=0}^k \frac{\Gamma(k+\lambda+1)}{\Gamma(m+\lambda+1)} \frac{(-t)^m}{m! (n-m)!}$$

$$(\lambda > -1).$$

Свойство ортогональности многочленов $L_k^{(\lambda)}(t)$ имеет вид

$$\int_0^\infty e^{-t} t^\lambda L_k^{(\lambda)}(t) L_m^{(\lambda)}(t) dt = 0 \quad (k \neq m), \quad (3.3.5)$$

$$r_k = \int_0^\infty e^{-t} t^\lambda [L_k^{(\lambda)}(t)]^2 dt = \frac{\Gamma(k+\lambda+1)}{k!}. \quad (3.3.6)$$

Если функция $f(t)$ удовлетворяет условию (3.3.2), то преобразование Лапласа $F(p)$ будет аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 1/2$. В самом деле, в силу неравенства Шварца — Буняковского можно записать цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |e^{-pt} f(t)| dt &\leq \int_0^\infty t^\lambda e^{-t} e^{-(\operatorname{Re} p - 1)t} |g(t)| dt \leq \\ &\leq \left\{ \int_0^\infty t^\lambda e^{-t} e^{-2(\operatorname{Re} p - 1)t} dt \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^\infty t^\lambda e^{-t} |g(t)|^2 dt \right\}^{1/2} = \\ &= \left\{ \int_0^\infty t^\lambda e^{-t(2\operatorname{Re} p - 1)} dt \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^\infty e^{-t} t^{-\lambda} |f(t)|^2 dt \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что интеграл (3.3.1) при условии (3.3.2) сходится абсолютно и равномерно в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 1/2$. Следовательно, функция $F(p)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 1/2$.

Для определения коэффициентов a_k разложения (3.3.4) сделаем следующее. Функцию $e^{-(p-1)t}$ разложим в ряд по многочленам Чебышева — Лагерра:

$$e^{-(p-1)t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{r_k} L_k^{(\lambda)}(t), \quad (3.3.7)$$

где r_k вычисляется по формуле (3.3.6), а

$$b_k = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\lambda} e^{-(p-1)t} L_k^{(\lambda)}(t) dt.$$

Последнюю формулу преобразуем следующим образом:

$$b_k = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{\lambda} L_k^{(\lambda)}(t) dt.$$

Отсюда видно, что b_k есть преобразование Лапласа функции $t^{\lambda} L_k^{(\lambda)}(t)$, а, как известно (см. [4]), оно вычисляется по формуле

$$b_k = \frac{1}{p^{\lambda+1}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^k \frac{\Gamma(k + \lambda + 1)}{k!}.$$

Таким образом, разложение (3.3.7) принимает вид

$$e^{-(p-1)t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{\lambda+1}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^k L_k^{(\lambda)}(t). \quad (3.3.8)$$

Интеграл Лапласа (3.3.1) запишем в виде

$$F(p) = \int_0^{\infty} t^{\lambda} e^{-t} e^{-(p-1)t} g(t) dt. \quad (3.3.9)$$

Так как функция $g(t)$ разлагается в ряд (3.3.4), а функция $e^{-(p-1)t}$ — в ряд (3.3.8), то, применяя к интегралу (3.3.9) обобщенное равенство Парсеваля, получим

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{1}{p^{\lambda+1}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^k.$$

Введя замену переменной $1/p = z$, найдем

$$\frac{1}{z^{\lambda+1}} F\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (1-z)^k. \quad (3.3.10)$$

Так как мы показали, что функция $F(p)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 1/2$, то функция $F\left(\frac{1}{z}\right)$ аналитична в круге $|z - 1| < 1$, следовательно, и $\frac{1}{z^{\lambda+1}} F\left(\frac{1}{z}\right)$

аналитична в этом круге. Значит, коэффициенты a_k в формуле (3.3.10) являются коэффициентами ряда Тейлора функции $\frac{1}{z^{\lambda+1}} F\left(\frac{1}{z}\right)$ в точке $z=1$. Поэтому коэффициенты a_k могут быть вычислены по формуле

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \left\{ \frac{1}{z^{\lambda+1}} F\left(\frac{1}{z}\right) \right\}_{z=1}. \quad (3.3.11)$$

Таким образом, разложение оригинала $f(t)$ в ряд по обобщенным многочленам Чебышева — Лагерра имеет вид

$$f(t) = t^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{k!}{\Gamma(k+\lambda+1)} L_k^{(\lambda)}(t), \quad (3.3.12)$$

а коэффициенты a_k вычисляются по формуле (3.3.11).

Следует заметить, что если функция $F(p)$ имеет особые точки, расположенные далеко от начала координат, то преобразование $z=1/p$ переведет их в окрестность точки $z=0$, что может уменьшить величину радиуса сходимости ряда (3.3.10). А это может, вообще говоря, уменьшить скорость убывания коэффициентов a_k . Таким образом, если преобразование Лапласа имеет особые точки, расположенные далеко от начала координат, то ряд по обобщенным многочленам Чебышева — Лагерра для функции $f(t)$ может медленно сходиться и поэтому будет малоприменимым в практических приложениях, и, наоборот, можно ожидать быструю сходимость такого ряда, если особые точки функции $F(p)$ расположены в малой окрестности начала координат.

ГЛАВА 4

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛА МЕЛЛИНА ПРИ ПОМОЩИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

§ 4.1. Общая теория интерполяционных методов

Рассмотрим методы вычисления интеграла Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad (4.1.1)$$

основанные на замене подынтегральной функции $F(p)$ другой функцией, которая интерполирует $F(p)$ по значениям ее в нескольких точках.

Погрешность вычисления интеграла (4.1.1) будет зависеть, главным образом, от той точности, с которой мы сможем интерполировать функцию $F(p)$. Чтобы получить хорошую точность, важно согласовать способ интерполирования со свойствами функции $F(p)$, которая является не произвольной, а функцией-изображением.

Для интерполирования $F(p)$ можно распорядиться выбором узлов p_k , в которых берутся значения $F(p)$, а также выбором функций $\{\omega_\nu(p)\}$, положенных в основу интерполирования. Как известно, изображение $F(p)$ стремится к нулю, если точка p удаляется на бесконечность так, что действительная часть p при этом неограниченно увеличивается. В первую очередь здесь представляет интерес тот случай, когда $F(p)$ убывает по степенному закону. Поэтому будем предполагать, что $F(p)$ представима в виде $F(p) = \frac{1}{(p-a)^s} \varphi(p)$ ($s > 0$), где функция $\varphi(p)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$ и ограничена в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq c$ ($c > \alpha$). Если s — дробное число, то под $(p-a)^s$ понимается та ветвь, для которой $\arg(p-a) = 0$

при действительных $p > a$. Параметр a должен удовлетворять условию $\operatorname{Re} a \leq \alpha$ и выбирается так, чтобы функция $\varphi(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$ обладала «лучшими свойствами», чем функция $F(p)$. Под улучшением свойств функции будем понимать следующее. Функция $F(p)$, как изображение, является регулярной в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$. Особенности поведения $F(p)$ определяются ее особыми точками, лежащими в полуплоскости $\operatorname{Re} p \leq \alpha$, в частности их расположением. Изменение $F(p)$ при $\operatorname{Re} p > \alpha$ будет, вообще говоря, тем более гладким, чем меньше особых точек имеет $F(p)$, чем более простыми они будут и чем дальше от прямой $\operatorname{Re} p = \alpha$ эти точки расположены.

Параллельным переносом осей координат всегда можно сделать $a = 0 \leq \alpha < c$; поэтому будем предполагать, что функция $F(p)$ имеет вид

$$F(p) = \frac{1}{p^s} \varphi(p), \quad (4.1.2)$$

где $\varphi(p)$ регулярна при $\operatorname{Re} p > \alpha$ и непрерывна в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq \alpha$, включая бесконечно удаленную точку. Заменяя функцию $F(p)$ в интеграле (4.1.1) выражением (4.1.2), получим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} p^{-s} \varphi(p) dp. \quad (4.1.3)$$

Для интеграла (4.1.3) будем строить интерполяционную квадратурную формулу, основанную на интерполировании функции $\varphi(p)$. Ею мы выполним при помощи линейных комбинаций некоторой системы функций $\omega_v(p)$ ($v = 0, 1, \dots$). Выбор системы подчиним следующему условию полноты: какова бы ни была функция $\varphi(p)$ указанного выше вида, для любых *) $c > \alpha$ и $\varepsilon > 0$ должна существовать такая

линейная комбинация $S_n(p) = \sum_{v=0}^n a_v \omega_v(p)$, чтобы в области $\operatorname{Re} p \geq c$ выполнялось неравенство

$$\left| \varphi(p) - \sum_{v=0}^n a_v \omega_v(p) \right| < \varepsilon.$$

*) Как будет видно ниже, требование выполнения условия полноты при любых $c > \alpha$ может быть ослаблено и заменено предположением выполнения условия при достаточно больших c .

При наших предположениях относительно функции $\varphi(p)$ за $\omega_v(p)$ естественно взять не многочлены, а рациональные функции от p , ограниченные при $p \rightarrow \infty$, полюсы которых лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} p \leq \alpha$. Кроме этого, функции $\omega_v(p)$ должны удовлетворять еще существенному в практике счета требованию: вычисления с ними должны быть достаточно простыми. Наиболее же простыми вычисления будут в том случае, если за $\omega_v(p)$ принять отрицательные степени, т. е. p^{-v} ($v=0, 1, \dots$), и интерполировать функцию $\varphi(p)$ многочленами от $1/p$.

Что касается узлов p_k , то будем сейчас считать их произвольными, расположенными справа от прямой $\operatorname{Re} p = \alpha$. Частные случаи расположения узлов на действительной оси будут рассмотрены в следующих параграфах этой главы.

Возьмем точки $p_0, p_1, \dots, p_n$, лежащие в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$, и по ним построим многочлен $P_n\left(\frac{1}{p}\right)$, интерполирующий функцию $\varphi(p)$:

$$\varphi(p) = P_n\left(\frac{1}{p}\right) + r_n(p) = \sum_{k=0}^n l_k\left(\frac{1}{p}\right) \varphi(p_k) + r_n(p), \quad (4.1.4)$$

где

$$l_k\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{\omega_k\left(\frac{1}{p}\right)}{\omega_k\left(\frac{1}{p_k}\right)}, \quad (4.1.5)$$

$$\omega_k\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{\omega\left(\frac{1}{p}\right)}{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_k}\right)}, \quad \omega\left(\frac{1}{p}\right) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_i}\right).$$

Подставляя (4.1.4) в интеграл (4.1.3), получим следующую формулу для его вычисления:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} p^{-s} \left[\sum_{k=0}^n l_k\left(\frac{1}{p}\right) \varphi(p_k) + r_n(p) \right] dp = \\ &= \sum_{k=0}^n A_k(t) \varphi(p_k) + R_n, \quad (4.1.6) \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_k(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{tp} p^{-s} l_k\left(\frac{1}{p}\right) dp, \\ R_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{tp} p^{-s} r_n(p) dp. \end{aligned} \right\} \quad (4.1.7)$$

Отбросив в формуле (4.1.6) остаточный член R_n , получим приближенную формулу для вычисления оригинала по изображению.

Займемся теперь вычислением коэффициентов $A_k(t)$. Разложим многочлен $l_k\left(\frac{1}{p}\right)$ по степеням $\frac{1}{p}$:

$$l_k\left(\frac{1}{p}\right) = a_{k0} + \frac{a_{k1}}{p} + \frac{a_{k2}}{p^2} + \dots + \frac{a_{kn}}{p^n} = \sum_{j=0}^n a_{kj} p^{-j}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} A_k(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{tp} p^{-s} \sum_{j=0}^n a_{kj} p^{-j} dp = \\ &= \sum_{j=0}^n a_{kj} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{tp} p^{-s-j} dp = \sum_{j=0}^n \frac{a_{kj} t^{s+j-1}}{\Gamma(s+j)}. \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

При помощи (4.1.8) легко могут быть вычислены коэффициенты $A_k(t)$ для любых значений t . Для этого необходимо знать только значения a_{kj} , которые зависят лишь от выбранных узлов p_k . Для наиболее часто встречающихся способов выбора p_k значения a_{kj} могут быть вычислены заранее.

§ 4.2. Интерполяционный метод с равноотстоящими узлами

Рассмотрим случай равноотстоящих узлов p_k , расположенных на действительной полуоси $[\alpha, \infty)$:

$$p_k = \alpha + (k+1)h \quad (h > 0, k = 0, 1, \dots, n).$$

Не ограничивая общности задачи, всегда можно считать $h=1$, для чего достаточно выполнить замену переменной $p = \alpha + p'h$. После этого узлы p_k станут целыми числами: $p'_k = k+1$ ($k = 0, 1, \dots, n$).

В этом случае формула (4.1.6) без остаточного члена R_n с учетом равенства (4.1.8) примет следующий вид:

$$f(t) \approx \sum_{k=0}^n A_k(t) \varphi(k+1) = \sum_{k=0}^n \left\{ \sum_{j=0}^n \frac{a_{kj} t^{s+j-1}}{\Gamma(s+j)} \right\} \varphi(k+1). \quad (4.2.1)$$

Многочлены $l_k\left(\frac{1}{p}\right)$ в этом случае значительно упростятся и будут равны

$$\begin{aligned} l_k\left(\frac{1}{p}\right) &= \\ &= \frac{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{1}\right) \cdots \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{k}\right) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{k+2}\right) \cdots \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n+1}\right)}{\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{1}\right) \cdots \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) \cdots \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+1}\right)} = \\ &= \frac{(k+1)^n (p-1) \cdots (p-k) (p-k-2) \cdots (p-n-1)}{p^n k(k-1) \cdots 2 \cdot 1 (-1) (-2) \cdots (k-n)} = \\ &= \frac{(-1)^{n-k} (k+1)^n}{k! (n-k)!} \frac{(p-1) (p-2) \cdots (p-n-1)}{p^n (p-k-1)}. \quad (4.2.2) \end{aligned}$$

Коэффициенты a_{kj} разложения многочлена $l_k\left(\frac{1}{p}\right)$ по степеням $1/p$ могут быть легко вычислены.

Таблица значений a_{kj} ($k, j = 0, 1, \dots, n$) для $n = 1(1)15$ приведена в книге [8].

Для конкретных значений параметра s вместо коэффициентов a_{kj} могут быть протабулированы значения

$$b_{kj} = \frac{a_{kj}}{\Gamma(s+j)}.$$

Для частного случая параметра $s=1$ формула (4.2.1) была построена Г. Солзером. Им же были просчитаны значения коэффициентов $A_k(t)$ для некоторых значений t . Для этой же формулы К. Ширтлайф и Д. Стефенсон вычислили значения коэффициентов $c_{kj} = \frac{(k+1)a_{kj}}{j!}$ для $n = 1(1)9$.

§ 4.3. Интерполяционный метод с неравноотстоящими узлами

Равноотстоящие узлы, которые избраны в § 4.2 для интерполирования функции $\varphi(p)$ при вычислении интеграла Меллина, будут, очевидно, самыми простыми и удобными, но будут давать, по-видимому, не самый лучший результат в смысле точности.

А так как вычисление этого интеграла часто бывает связано с довольно трудными и сложными расчетами, то желательно попытаться выбрать на действительной оси узлы так, чтобы интерполирование функции $\varphi(p)$ было более точным, чем интерполирование по равноотстоящим узлам, и, следовательно, был более точным и результат вычисления интеграла Меллина.

Одно из возможных решений этой задачи мы теперь рассмотрим.

Как и в § 4.1, будем предполагать, что изображение $F(p)$ представимо в виде

$$F(p) = \frac{1}{(p-a)^s} \varphi(p);$$

тогда интеграл (4.1.1) примет вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} \frac{\varphi(p)}{(p-a)^s} dp. \quad (4.3.1)$$

Чтобы преобразовать бесконечную полуось $[\alpha, \infty)$, на которой выбираются узлы интерполирования, в конечный отрезок, выполним дробно-линейное преобразование

$$p = \frac{A + (A - 2\alpha)x}{1 - x}, \quad (4.3.2)$$

где A — действительное число, большее α . Это преобразование переведет полуось $[\alpha, \infty)$ в отрезок $[-1, 1]$, линия $\operatorname{Re} p = \alpha$ перейдет в единичную окружность $|x| = 1$, а полуплоскость $\operatorname{Re} p \geq \alpha$ — в единичный круг $|x| \leq 1$. Точка A преобразуется в центр $x=0$ единичного круга. Линия интегрирования $\operatorname{Re} p = c$ в интеграле (4.3.1) перейдет в окружность, лежащую внутри единичного круга и касающуюся его границы в точке $x=1$. Длина радиуса этой окружности будет зависеть от значения c . Если c будет приближаться к α , то она будет приближаться к единице. Наоборот, если c будет увеличиваться, то она будет уменьшаться и может стать как угодно малой. Функция $\varphi(p)$ преобразуется в функцию

$$\varphi(p) = \varphi\left(\frac{A + (A - 2\alpha)x}{1 - x}\right) = \Phi(x). \quad (4.3.3)$$

Так как $\varphi(p)$ была регулярной в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$, то функция $\Phi(x)$ будет регулярной в круге $|x| < 1$.

Для вычисления интеграла (4.3.1) мы будем теперь интерполировать функцию $\Phi(x)$ на линии интегрирования по ее значениям в $n+1$ точках x_k ($k=0, 1, \dots, n$) диаметра d единичного круга $|x| \leq 1$, лежащего на действительной оси. При этом постараемся точки x_k выбрать так, чтобы погрешность интерполирования была как можно меньше.

Следует заметить, что интеграл (4.3.1) является контурным интегралом от аналитической функции комплексной переменной p . Он мало зависит от линии интегрирования $\operatorname{Re} p = c$ ($c > \alpha$). В частности, c можно выбрать сколь угодно большим числом. Тогда линия интегрирования при преобразовании (4.3.2), как уже говорилось выше, перейдет в окружность малого радиуса, симметричную относительно диаметра d единичного круга $|x| \leq 1$ и касающуюся его окружности в точке $x=1$. Поэтому при интерполировании функции $\Phi(x)$ мы будем заинтересованы в получении хорошей точности, в особенности вблизи точки $x=1$.

Рассмотрим два способа выбора узлов x_k и выскажем наглядные, но не вполне строгие мотивы, которыми мы руководствовались, когда остановились именно на этих узлах.

При исследовании сходимости интерполяционных процессов для аналитических функций большое значение имеет предельная функция распределения узлов. Это понятие требует пояснений. Напомним его и, чтобы лучше выяснить содержание вопроса, начнем с более общего понятия функции распределения масс. Пусть на отрезке $[-1, 1]$ по произвольному закону распределена единичная масса. Возьмем произвольную точку x на $[-1, 1]$, лежащую левее точки 1, и обозначим $\mu(x)$ массу, лежащую строго левее точки x , т. е. принадлежащую открытому справа отрезку $[-1, x)$. Дополним это определение $\mu(x)$, положив $\mu(1)=1$.

Функция $\mu(x)$ обладает, очевидно, следующими свойствами:

- 1) $\mu(-1)=0$;
- 2) $\mu(x)$ есть монотонная неубывающая функция x , непрерывная слева для $x \in [-1, 1]$;
- 3) $\mu(1)=1$.

Всякую функцию $\mu(x)$, независимо от ее физического смысла, обладающую указанными тремя свойствами, называют *функцией распределения* для отрезка $[-1, 1]$.

Предположим, что дана последовательность функций распределения $\mu_n(x)$ ($n=0, 1, 2, \dots$). Говорят, что функция распределения $\mu(x)$ является *предельной* для заданной последовательности, если во всякой точке непрерывности $\mu(x)$ будет $\mu_n(x) \rightarrow \mu(x)$ ($n \rightarrow \infty$).

Пусть теперь на отрезке $[-1, 1]$ взято $n+1$ узлов интерполирования x_k ($k=0, 1, \dots, n$). Каждому узлу припишем массу $1/(n+1)$. Этим будет определена некоторая функция распределения масс $\mu(x)$, которую называют функцией распределения взятой системы узлов.

Рассмотрим, наконец, интерполяционный процесс, определяемый бесконечной треугольной таблицей узлов

$$X = \begin{pmatrix} x_0^{(0)} & & & \\ x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & & \\ x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \\ \dots & \dots & \dots & \end{pmatrix},$$

в строках которой стоят узлы интерполирования на отдельных шагах процесса. Возьмем строку номера n с узлами $x_k^{(n)}$ ($k=0, 1, \dots, n$) и назовем соответствующую им функцию распределения $\mu_n(x)$. Будем считать таблицу X такой, что последовательность $\mu_n(x)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) имеет предельную функцию распределения $\mu(x)$. Функция $\mu(x)$ называется *предельной функцией распределения узлов интерполирования*.

Особая роль при интерполировании аналитических функций принадлежит предельной функции распределения, которая называется *функцией Чебышева*:

$$\mu(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Если для наглядности считать, что $\mu(x)$ связана с распределением масс на $[-1, 1]$, то плотность распределения масс будет $\rho(x) = \mu'(x) = \pi^{-1} (1-x^2)^{-1/2}$ и массы будут, очевидно, расположены симметрично относительно точки $x=0$, разрежены вблизи середины отрезка $[-1, 1]$ и уплотнены у его концов.

Оказывается, что интерполяционные процессы с узлами, имеющими в качестве предельной функции распределения

узлов функцию Чебышева, являются наилучшими для интерполирования на $[-1, 1]$ аналитических функций в следующем смысле: какова бы ни была функция $g(x)$, аналитическая на отрезке $[-1, 1]$, интерполяционный процесс для нее будет сходиться всюду на отрезке $[-1, 1]$ и при этом равномерно относительно x . Кроме того, равномерная сходимость сохранится и в некоторой окрестности отрезка $-1 \leq x \leq 1$, но форма области сходимости будет зависеть от свойств $g(x)$ (см. [6]).

Поэтому при интерполировании функции $\Phi(x)$ естественно было взять такие узлы x_k ($k=0, 1, 2, \dots, n$) на отрезке $[-1, 1]$, для которых предельная функция распределения есть функция Чебышева.

Известно также, что корни любой системы многочленов, ортогональных на отрезке $[-1, 1]$ с любой суммируемой и почти везде положительной весовой функцией, будут иметь в качестве предельной функции распределения функцию Чебышева.

За узлы x_k ($k=0, 1, \dots, n$) при интерполировании $\Phi(x)$ можно взять корни многочлена степени $n+1$ из любой известной системы ортогональных многочленов, в частности корни многочленов Чебышева первого и второго рода, многочленов Лежандра и Якоби.

Задачу определенного выбора узлов x_k отложим до конца параграфа, теперь же будем считать их произвольными, расположенными на $[-1, 1]$.

По значениям функции $\Phi(x)$ в точках x_k ($k=0, 1, \dots, n$) построим интерполирующий ее многочлен

$$\begin{aligned} \Phi(x) &\approx \sum_{k=0}^n L_k(x) \Phi(x_k) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0) \dots (x-x_{k-1})(x-x_{k+1}) \dots (x-x_n)}{(x_k-x_0) \dots (x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1}) \dots (x_k-x_n)} \Phi(x_k). \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Вернемся от переменной x к старой переменной p

$$x = \frac{p-A}{p+A-2\alpha};$$

тогда

$$\varphi(p) \approx \sum_{k=0}^n l_k(p) \varphi(p_k), \quad (4.3.5)$$

где

$$p_k = \frac{A + (A - 2\alpha) x_k}{1 - x_k},$$

$$l_k(p) = L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{\frac{p-A}{p+A-2\alpha} - \frac{p_i-A}{p_i+A-2\alpha}}{\frac{p_k-A}{p_k+A-2\alpha} - \frac{p_i-A}{p_i+A-2\alpha}}.$$

Упростим выражение для $l_k(p)$. Так как

$$\frac{p-A}{p+A-2\alpha} - \frac{p_i-A}{p_i+A-2\alpha} = \frac{2(A-\alpha)(p-p_i)}{(p+A-2\alpha)(p_i+A-2\alpha)},$$

$$\frac{p_k-A}{p_k+A-2\alpha} - \frac{p_i-A}{p_i+A-2\alpha} = \frac{2(A-\alpha)(p_k-p_i)}{(p_k+A-2\alpha)(p_i+A-2\alpha)},$$

то

$$l_k(p) = \frac{(p_k+A-2\alpha)^n \omega_k(p)}{(p+A-2\alpha)^n \omega_k(p_k)}, \quad (4.3.6)$$

где

$$\omega_k(p) = \frac{\omega(p)}{p-p_k}, \quad \omega(p) = (p-p_0)(p-p_1)\dots(p-p_n).$$

Выражение (4.3.5) для функции $\varphi(p)$ подставим в интеграл (4.3.1) и получим следующую формулу для его приближенного значения:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} \frac{\varphi(p)}{(p-a)^s} dp \approx$$

$$\approx \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt}}{(p-a)^s} \sum_{k=0}^n l_k(p) \varphi(p_k) dp = \sum_{k=0}^n A_k(t) \varphi(p_k), \quad (4.3.7)$$

где

$$A_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} \frac{l_k(p)}{(p-a)^s} dp. \quad (4.3.8)$$

Интеграл в последней формуле можно свести к интегралу, вычисляемому при помощи известных таблиц для обращения преобразования Лапласа. Действительно, разложим многочлен $\omega_k(p)$ по степеням $p+A-2\alpha$:

$$\omega_k(p) = \sum_{j=0}^n b_{kj} (p+A-2\alpha)^{n-j};$$

тогда

$$l_k(p) = \sum_{j=0}^n a_{kj} (p + A - 2\alpha)^{-j}, \quad (4.3.9)$$

где

$$a_{kj} = \frac{(p_k + A - 2\alpha)^n}{\omega_k(p_k)} b_{kj}. \quad (4.3.10)$$

Подставляя (4.3.9) в формулу (4.3.8), получим

$$A_k(t) = \sum_{j=0}^n a_{kj} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt}}{(p + A - 2\alpha)^j (p - a)^s} dp. \quad (4.3.11)$$

Последний интеграл является табличным, выражающимся через вырожденную гипергеометрическую функцию (см. [3], стр. 231).

Окончательно для $A_k(t)$ получается следующее выражение:

$$A_k(t) = \sum_{j=0}^n a_{kj} \frac{t^{s+j-1}}{\Gamma(s+j)} e^{(2\alpha-A)t} {}_1F_1(s, s+j, (a+A-2\alpha)t). \quad (4.3.12)$$

Здесь ${}_1F_1$ есть вырожденная гипергеометрическая функция:

$${}_1F_1(\alpha, \beta, z) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+v)}{\Gamma(\beta+v) v!} z^v$$

$$(|z| < \infty).$$

Равенство (4.3.12) можно упростить для некоторых частных значений a и A . Например, если точки a и A будут расположены симметрично относительно α , т. е. если они будут связаны соотношением $\alpha = \frac{1}{2}(A + a)$, то

$$A_k(t) = \sum_{j=0}^n a_{kj} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} \frac{dp}{(p-a)^{s+j}} =$$

$$= \sum_{j=0}^n a_{kj} \frac{t^{s+j-1} e^{at}}{\Gamma(s+j)}. \quad (4.3.13)$$

Формулы (4.3.12) и (4.3.13) позволяют определить коэффициенты $A_k(t)$ квадратурного правила (4.3.7) для

любого значения t . Чтобы было удобнее пользоваться ими, можно составить таблицу значений a_{kj} , которые зависят от выбора узлов x_k , а также от параметров α и A .

Для α и A могут быть взяты соответственно значения 0 и 1, что не ограничивает общности, так как любые другие их значения приводятся к данным заменой переменной $p = \alpha + (A - \alpha)p'$.

Что же касается узлов x_k , то, как мы указывали в начале параграфа, их можно положить равными корням многочлена $(n+1)$ -й степени из любой системы ортогональных на отрезке $[-1, 1]$ многочленов.

В справочной книге [8] приведены значения a_{kj} в двух следующих случаях.

1. За узлы x_k ($k=0, 1, \dots, n$) были взяты корни многочлена Чебышева первого рода

$$T_{n+1}(x) = \cos[(n+1) \arccos x].$$

Коэффициенты a_{kj} формул (4.3.12) или (4.3.13), т. е. коэффициенты разложения $l_k(p)$ по обратным степеням $p+1$, можно вычислить следующим образом. Перейдем от переменной p к переменной $x = \frac{p-1}{p+1}$ и найдем $L_k(x)$:

$$\begin{aligned} L_k(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{k-1})(x-x_{k+1}) \dots (x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1) \dots (x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1}) \dots (x_k-x_n)} = \\ &= \frac{T_{n+1}(x)}{(x-x_k)T'_{n+1}(x_k)}. \end{aligned}$$

Разложим многочлен $\frac{T_{n+1}(x)}{x-x_k}$ по степеням $1-x$:

$$\frac{T_{n+1}(x)}{x-x_k} = \sum_{j=0}^n c_{kj} (1-x)^j; \quad (4.3.14)$$

тогда получим

$$L_k(x) = \frac{\sum_{j=0}^n c_{kj} (1-x)^j}{T'_{n+1}(x_k)} = \sum_{j=0}^n b_{kj} (1-x)^j,$$

где

$$b_{kj} = \frac{c_{kj}}{T'_{n+1}(x_k)}.$$

Возвращаясь к старой переменной p , найдем разложение

$l_k(p)$ по степеням $\frac{1}{p+1}$:

$$\left. \begin{aligned} l_k(p) &= \sum_{j=0}^n b_{kj} \left(1 - \frac{p-1}{p+1}\right)^j = \\ &= \sum_{j=0}^n b_{kj} \frac{2^j}{(p+1)^j} = \sum_{j=0}^n a_{kj} \frac{1}{(p+1)^j}, \\ a_{kj} &= b_{kj} 2^j = \frac{2^j c_{kj}}{T'_{n+1}(x_k)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.3.15)$$

Для вычисления коэффициентов a_{kj} нужно знать коэффициенты c_{kj} разложения $\frac{T_{n+1}(x)}{x-x_k}$ по степеням $(1-x)$. Их можно найти, например, следующим способом. В равенстве (4.3.14) положим $x=1$, тогда

$$c_{k0} = \frac{T_{n+1}(1)}{1-x_k}.$$

Теперь (4.3.14) перепишем в виде

$$\frac{T_{n+1}(x)}{x-x_k} - c_{k0} = \sum_{j=1}^n c_{kj} (1-x)^j.$$

Значение $x=1$ является корнем последнего многочлена, и мы можем понизить порядок многочлена на единицу, после этого получим

$$\left[\frac{T_{n+1}(x)}{x-x_k} - c_{k0} \right] (1-x)^{-1} = \sum_{j=1}^n c_{kj} (1-x)^{j-1}.$$

Снова положим $x=1$, тогда

$$c_{k1} = \left[\frac{T_{n+1}(x)}{x-x_k} - c_{k0} \right] (1-x)^{-1} \Big|_{x=1}.$$

Этот процесс продолжаем до тех пор, пока не найдем все c_{kj} . После этого по формулам (4.3.15) определяются все a_{kj} .

Численные значения a_{kj} и p_k для $n=1(1)14$ приведены в табл. 6 книги [8].

2. За узлы x_k были приняты корни многочленов Лежандра степени $n+1$. Коэффициенты a_{kj} и узлы $p_k = \frac{1+x_k}{1-x_k}$

можно вычислить совершенно аналогично предыдущему случаю.

В табл. 7 книги [8] приведены соответствующие значения a_{kj} и узлов $p_k = \frac{1+x_k}{1-x_k}$ для $n = 1(1)14$.

§ 4.4. Замечания о других интерполяционных методах. Применение отрезка ряда Тейлора

Для вычисления интеграла (4.3.1) выше применялось интерполирование по значениям функции в нескольких точках. Но для той же цели можно воспользоваться интерполированием другого типа, например интерполированием с кратными узлами, интерполированием по значениям функции и производных от нее в разных точках и т. д.

Мы остановимся на случае, когда интерполирование выполняется с одним кратным узлом. Тогда интерполирующий многочлен будет совпадать, как известно, с отрезком ряда Тейлора.

Возвратимся к интерполированию функции $\Phi(x)$, регулярной в круге $|x| < 1$. Выберем на отрезке $0 \leq x \leq 1$ точку ξ ($\xi < 1$). Функция $\Phi(x)$ будет регулярной в круге с центром ξ и радиусом, не меньшим $1 - \xi$. За приближенное значение $\Phi(x)$ в этом круге примем отрезок ее ряда Тейлора в точке ξ :

$$\Phi(x) \approx \sum_{v=0}^n \frac{(x-\xi)^v}{v!} \Phi^{(v)}(\xi).$$

Перейдем от переменной x к старой переменной p и от функции $\Phi(x)$ к функции $\varphi(p)$, причем для дальнейшего удобнее перейти от $\varphi(p)$ к функции

$$\psi(p) = (p + A - 2\alpha)^n \varphi(p) \approx \sum_{i=0}^n \frac{(p-\xi)^i}{i!} \psi^{(i)}(\xi),$$

$$\xi = \frac{A + (A - 2\alpha)\xi}{1 - \xi}.$$

Подставим последнее выражение в интеграл (4.3.1) и получим следующую формулу для его вычисления:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} \frac{\varphi(p)}{(p-a)^s} dp \approx \sum_{j=0}^n B_j(t) \psi^{(j)}(\xi), \quad (4.4.1)$$

где

$$B_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} \frac{(p-\zeta)^j}{j! (p+A-2\alpha)^n (p-a)^s} dp. \quad (4.4.2)$$

Если $(p-\zeta)^j$ разложить по степеням $(p+A-2\alpha)$, то полученные интегралы будут табличными и интеграл в формуле (4.4.2) может быть вычислен.

В частном случае, когда функция $\varphi(p)$ регулярна в бесконечно удаленной точке, она может быть разложена в ряд по отрицательным степеням p вида $\varphi(p) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v p^{-v}$.

В этом случае для вычисления интеграла (4.3.1) получится формула

$$f(t) \approx \sum_{v=0}^{\infty} a_v \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} \frac{dt}{p^v (p-a)^s}.$$

Последний интеграл является табличным:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} \frac{dt}{p^v (p-a)^s} = \frac{t^{s+v-1}}{\Gamma(s+v)} {}_1F_1(s, s+v, at).$$

§ 4.5. Некоторые теоремы о сходимости интерполирования

4.5.1. Введение. В предыдущих параграфах мы рассмотрели интерполяционные квадратурные формулы (4.1.6) и (4.3.7) для приближенного вычисления интеграла Меллина. Остаточные члены этих формул имеют вид

$$R_n(\varphi, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{tp} p^{-s} r_n(p) dp, \quad (4.5.1)$$

$$R_n(\varphi, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{tp} (p-a)^{-s} r_n(p) dp, \quad (4.5.2)$$

где $r_n(p)$ — погрешности интерполирования функций $\varphi(p)$.

Квадратурный процесс (4.1.6) или (4.3.7) будет сходящимся для функции $\varphi(p)$, если остаточные члены (4.5.1) или (4.5.2) будут стремиться к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Сходимость или расходимость указанного процесса зависит как от свойств функции $\varphi(p)$, так и от выбора

узлов p_k . Задача исследования сходимости заключается в выяснении связей между свойствами $\varphi(p)$ и узлами p_k , при которых можно быть уверенным в стремлении остаточного члена R_n к нулю.

Ниже, в § 4.6, будет рассмотрено решение этой задачи для некоторых конкретных узлов p_k и для некоторых частных классов функций $\varphi(p)$.

Из формул (4.5.1) и (4.5.2) видно, что надеяться на сходимость квадратурного процесса можно будет только при наличии сходимости интерполирования. Поэтому исследование начнем с изучения сходимости интерполирования.

Начиная с § 4.3, при построении правил вычисления мы выполняли интерполирование вспомогательной функции $\Phi(x) = \varphi(p)$ $\left(p = \frac{A + (A - 2\alpha)x}{1 - x}\right)$ при помощи целого многочлена от x . При принятых условиях $\alpha = 0$ и $A = 1$, не ограничивающих общности результатов, зависимость между Φ и φ будет $\Phi(x) = \varphi\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Интерполирование $\Phi(x)$ равносильно интерполированию $\varphi(p)$ при помощи рациональных функций, являющихся многочленами от $x = \frac{p-1}{p+1}$. Приближенное выражение для $\varphi(p)$ указано в равенствах (4.3.5), (4.3.6).

В интегральном представлении оригинала (4.3.1) вдоль линии интегрирования $p = c + i\sigma$ ($-\infty < \sigma < \infty$, $c > 0$) и справа от нее функция $\varphi(p)$ является регулярной всюду, кроме, может быть, бесконечно удаленной точки. При преобразовании $p = \frac{1+x}{1-x}$ линия $p = c + i\sigma$ перейдет в окружность, ортогональную к действительной оси комплексной плоскости x и проходящую через точки $\left(\frac{c-1}{c+1}\right)$, 1. Центр окружности лежит в точке $1 - \frac{1}{c+1} = 1 - \varepsilon$, и радиус равен $\frac{1}{c+1} = \varepsilon$. При $c > 0$ эта окружность, которую мы обозначим Γ_ε , лежит внутри круга $|x| \leq 1$, за исключением точки $x = 1$, и при неограниченном росте c она сжимается к $x = 1$.

На окружности Γ_ε и внутри нее функция $\Phi(x)$ регулярна всюду, исключая, может быть, точку $x = 1$, где

$\Phi(x)$ хотя и является, по предположению о $\varphi(p)$, непрерывной, но может быть не голоморфной.

Сходимость алгебраического интерполирования аналитических функций в замкнутой области при наличии особых точек на границе исследована недостаточно. Это в особенности относится к тому случаю, рассмотрением которого авторы ограничиваются в настоящей главе, когда узлы интерполирования берутся на действительном диаметре окружности Γ_ε , что равносильно расположению узлов на полуоси $\operatorname{Re} p \geq 0$ плоскости p . Трудность такой проблемы сходимости и малая ее изученность побудили авторов ограничиться рассмотрением узкого класса изображений $F(p)$ и оригиналов $f(t)$, когда $\varphi(p)$ является функцией, регулярной в бесконечно удаленной точке плоскости p . В этом случае соответствующая функция $\Phi(x)$ будет регулярной не только в единичном круге $|x| < 1$, но и в окрестности точки $x = 1$.

Как выяснится ниже, сделанное предположение позволяет дать ответ на многие вопросы о сходимости интерполирования $\Phi(x)$, а следовательно, и на вопросы о сходимости процесса приближенного вычисления оригинала $f(t)$.

З а м е ч а н и е. Мы говорим здесь об узком множестве оригиналов $f(t)$ на основании следующих соображений. Если $\varphi(p)$ регулярна при $|p| > R$, то изображение $F(p) = \varphi(p) p^{-s}$ представимо в этой области степенным рядом

$$F(p) = p^{-s} \sum_{n=0}^{\infty} c_n p^{-n}, \quad |p| > R. \quad (*)$$

Для коэффициентов c_n ряда верна приводимая ниже оценка: для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N = N(\varepsilon)$, что выполняется неравенство

$$|c_n| \leq N(R + \varepsilon)^n. \quad (**)$$

Всюду выше показатель s , входящий в равенство (*), считался положительным. В задаче же отыскания оригинала $f(t)$ для $F(p)$ имеющей представление (*), можно считать $s > 1$, так как при $0 < s \leq 1$ возможно выделить в ряду справа первый член $c_0 p^{-s}$. Для него оригинал известен, является табличным и равен $c_0 \frac{t^{s-1}}{\Gamma(s)}$. После

этого останется найти оригинал для $F(p) - \frac{c_0}{p^s} = p^{-s-1} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} p^{-n}$, соответствующего показателю $s+1$.

В выражении (4.1.1) для $f(t)$ выберем $c > R$. Тогда линия интегрирования $(c - i\infty, c + i\infty)$ будет лежать внутри области регулярно-

сти $\varphi(p)$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n p^{-n}$ на ней будет сходиться равномерно. Кроме того, так как в равенстве

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} \frac{1}{p^s} \sum_{n=0}^{\infty} c_n p^{-n} dp \quad (t \geq 0) \quad (***)$$

ядро $e^{pt} p^{-s}$ на линии интегрирования ограничено следующей величиной:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} e^{pt} p^{-s} \right| \leq \frac{1}{2\pi} e^{ct} \frac{1}{|p^s|},$$

и является, ввиду $s > 1$, абсолютно интегрируемым, в (***) возможно почленное интегрирование. Кроме того, так как оригиналы функций $c_n \frac{1}{p^{s+n}}$ известны и имеют значение $c_n \frac{t^{n+s-1}}{\Gamma(n+s)}$, для $f(t)$ получится представление в форме степенного ряда

$$f(t) = t^{s-1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{\Gamma(n+s)}.$$

Оценка же (**) для коэффициента c_n говорит о том, что степенной ряд, входящий в правую часть, сходится при всех конечных значениях t . Оригинал $f(t)$ отличается от целой функции частного вида

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{\Gamma(n+s)}$ лишь степенным множителем t^{s-1} . Функции такого вида далеко не исчерпывают все практически важные виды оригиналов.

4.5.2. Сходимость интерполяционного процесса вида (4.3.4). При построении такого процесса нам приходилось интерполировать функцию $\Phi(x)$ на линии интегрирования по ее значениям в $n+1$ точках x_k ($k=0, 1, \dots, n$) диаметра d круга $|x| \leq 1$, в который переходит полуплоскость $\operatorname{Re} p \geq \alpha$ при линейном преобразовании

$$p = \frac{A + (A - 2\alpha)x}{1 - x}.$$

Будем считать, что в данном преобразовании $A = 1$, $\alpha = 0$. Это не ограничивает общности, на что уже указывалось в § 4.3.

Далее, напомним, что линия интегрирования, на которой мы интерполируем функцию $\Phi(x)$ (если число c выбрать достаточно большим), является окружностью малого

радиуса, лежащей внутри единичного круга и касающейся его окружности в точке 1:

$$|x - (1 - \varepsilon)| = \varepsilon \quad (0 < \varepsilon \leq 1).$$

Сначала поставим такую задачу: выяснить, для какого класса функций $\Phi(x)$ интерполяционный процесс будет сходиться равномерно на линии интегрирования при любом выборе узлов на диаметре d единичного круга. Равномерная сходимость интерполирования будет главным образом зависеть от величины области регулярности функции $\Phi(x)$. Если эта область будет достаточно широкой вблизи диаметра d , то можно заранее предсказать, что интерполяционный процесс будет наверное равномерно сходиться, как бы ни выбирать узлы x_k на этом диаметре. Укажем теперь наименьшую область, в которой должна быть регулярной функция $\Phi(x)$, чтобы можно было гарантировать равномерную сходимость интерполирования на линии интегрирования при любых узлах на $[-1, 1]$.

Справедлива следующая

Теорема 1. Если функция $\Phi(x)$ регулярна в замкнутом круге $|x+1| \leq 2$ и в окрестности $|x-1| \leq 2\varepsilon$ ($0 < \varepsilon \leq 1$) точки $x=1$, то интерполяционный процесс (4.3.4), построенный по любым узлам, лежащим на диаметре d единичного круга, будет равномерно сходиться к $\Phi(x)$ на линии $|x - (1 - \varepsilon)| = \varepsilon$. Указанная область регулярности является наименьшей, обеспечивающей сходимость интерполирования при любой системе узлов на диаметре d круга $|x| \leq 1$.

Доказательство. Эта теорема сразу же следует из общей теоремы, доказанной В. И. Смирновым и Н. А. Лебедевым *). Напомним ее в той постановке, в которой задача решена этими авторами.

Пусть F, B, G — три непустых множества точек комплексной плоскости z , причем $F \subset G, B \subset G$. Будем говорить, что выполняется условие $\{F, B, G\}$, если для всякой функции $f(z)$, регулярной на G , при любом выборе узлов интерполирования $z_k^{(n)}$ ($k=1, 2, \dots, n+1$; $n=1, 2, \dots$) из любого ограниченного подмножества $F^* \subset F$ последова-

*) См. В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев, Конструктивная теория функций комплексного переменного, гл. I, § 3, М., «Наука», 1964.

тельность интерполяционных многочленов $P_n(z)$ для функции $f(z)$ равномерно сходится к $f(z)$ при $n \rightarrow \infty$ на всяком ограниченном подмножестве $B^* \subset B$.

Доказано, что если F и B — два замкнутых ограниченных множества точек плоскости z , K_ξ — наименьший замкнутый круг, содержащий множество B и имеющий центр в точке $\xi \in F$, то множество $G = \bigcup_{\xi \in F} K_\xi$ является

наименьшим замкнутым множеством, для которого выполняется условие $\{F, B, G\}$.

В нашем случае множество F — отрезок $-1 \leq x \leq 1$, множество B — окружность $|x - (1 - \varepsilon)| = \varepsilon$. Чтобы найти множество G , построим два наименьших замкнутых круга с центрами в точках $x = -1$, $x = 1$, содержащих линию $|x - (1 - \varepsilon)| = \varepsilon$. Первый круг определяется неравенством $|x + 1| \leq 2$, второй — неравенством $|x - 1| \leq 2\varepsilon$. Сумма их и будет искомым множеством G .

Замечание. В условиях теоремы 1 равномерная сходимость будет иметь место не только на окружности $|x - (1 - \varepsilon)| = \varepsilon$, но и внутри ее.

Если перейти из плоскости x в плоскость p и от функции $\Phi(x)$ к функции $\varphi(p)$, то теорему 1 можно сформулировать так:

Теорема 1а. Если функция $\varphi(p)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq -1/2$ и в области $|p + 1| \geq 1/\varepsilon$ ($0 < \varepsilon \leq 1$), то интерполяционный процесс (4.3.5), построенный по любым узлам, лежащим на действительной полуоси $\operatorname{Re} p \geq 0$, будет равномерно сходиться к $\varphi(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq 1/\varepsilon$. Указанная область регулярности $\varphi(p)$ будет наименьшей, обеспечивающей сходимость интерполирования при $\operatorname{Re} p \geq 1/\varepsilon$ по любой системе узлов на неотрицательной действительной полуоси.

Теперь поставим другую задачу. Известно, что функция $\Phi(x)$ регулярна в единичном круге $|x| \leq 1$. Предположим, кроме этого, что она регулярна в окрестности $|x - 1| \leq 2\varepsilon$ точки $x = 1$. Попытаемся определить наибольший отрезок, принадлежащий диаметру d круга $|x| \leq 1$, такой, чтобы интерполяционный процесс (4.3.4), построенный по любым узлам из этого отрезка, сходиллся бы равномерно к функции $\Phi(x)$ на линии $|x - (1 - \varepsilon)| = \varepsilon$ для любой функции $\Phi(x)$, регулярной в указанной ранее области.

Теорема 2. Если функция $\Phi(x)$ регулярна в круге $|x| \leq 1$ и в окрестности $|x-1| \leq 2\varepsilon$ ($0 < \varepsilon \leq 1$) точки $x=1$, то интерполяционный процесс (4.3.4), построенный по любым узлам, лежащим на отрезке $[0, 1]$, будет равномерно сходиться к $\Phi(x)$ на окружности $|x-(1-\varepsilon)| = \varepsilon$.

Отрезок $[0, 1]$ будет наибольшим множеством, принадлежащим диаметру d круга, обеспечивающим равномерную сходимость интерполирования по любым узлам, взятым на этом множестве, для функций, регулярных в указанной области.

Эта теорема может быть доказана на основании результата, принадлежащего В. И. Смирнову и Н. А. Лебедеву (см. сноску на стр. 77). Ими установлено, что если B и G — два множества точек конечной плоскости *) z , причем B — замкнутое ограниченное непустое множество, G отлично от конечной плоскости и $B \subset G$, то наибольшим замкнутым множеством F , для которого выполняется условие $\{F, B, G\}$, является множество центров всех замкнутых кругов K таких, что $K \subset G$ и $B \subset K$.

В нашей теореме G — сумма кругов $|x| \leq 1$ и $|x-1| \leq 2\varepsilon$, B — окружность $|x-(1-\varepsilon)| = \varepsilon$. Искомое множество F — множество центров кругов, содержащих B и содержащихся в G . Кроме того, мы наложили требование, чтобы эти центры принадлежали диаметру d единичного круга. Тогда очевидно, что множество F — замкнутый отрезок $[0, 1]$.

Если вновь перейти от плоскости x к плоскости p , то теорема 2 будет следующей.

Теорема 2а. Если функция $\varphi(p)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq 0$, а также в области $|p+1| \geq 1/\varepsilon$, то интерполяционный процесс (4.3.5), построенный по любым узлам, расположенным на действительной оси так, что $p_k \geq 1$ ($k=1, 2, \dots, n$), равномерно сходится к $\varphi(p)$ на прямой $\operatorname{Re} p = 1/\varepsilon - 1$. Полуось $[1, \infty]$ будет наибольшей областью на действительной оси, обеспечивающей равномерную сходимость интерполирования по любым узлам, лежащим на ней, для функций $\varphi(p)$, регулярных в указанной выше области.

В теореме 1 мы указали наименьшую область, в которой функция $\Phi(x)$ должна быть регулярной, для того

*) Конечной плоскостью называется комплексная плоскость, из которой удалена точка ∞ .

чтобы интерполяционный процесс сходиллся равномерно на линии интегрирования для любых узлов, расположенных на диаметре d единичного круга. Предположим теперь, что узлы выбираются не произвольными на этом диаметре, а имеют вполне определенное распределение. В этом случае возникает задача определения области регулярности функции, обеспечивающей равномерную сходимость интерполирования на линии интегрирования $|x - (1 - \varepsilon)| = \varepsilon$.

Для исследования сходимости интерполирования большое значение имеет следующий логарифмический потенциал (см. [6], стр. 239):

$$u(x) = \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu(t),$$

где $\mu(t)$ — предельная функция распределения узлов.

Рассмотрим линию уровня $u(x) = c_1$. При большом по абсолютной величине отрицательном значении c_1 такая линия будет содержать внутри себя отрезок $[-1, 1]$ и достаточно большую область вблизи него, в частности и линию интегрирования $|x - (1 - \varepsilon)| = \varepsilon$. Назовем эту линию уровня l_{c_1} , а часть плоскости, ограниченную ею, обозначим B_{c_1} . Когда c_1 будет возрастать, B_{c_1} будет уменьшаться. Определим число λ как точную верхнюю границу значений c_1 , при которых отрезок $[-1, 1]$ и линия интегрирования $|x - (1 - \varepsilon)| = \varepsilon$ лежат внутри B_{c_1} . При $c_1 < \lambda$ линия уровня l_{c_1} будет содержать внутри себя $[-1, 1]$ и линию интегрирования. Открытую область плоскости x , в которой $u(x) < \lambda$, назовем κ , а дополнение к ней β .

Теорема 3. Если функция $\Phi(x)$ регулярна в некоторой области D , содержащей внутри себя β , то интерполяционный процесс (4.3.4), построенный по узлам с предельной функцией распределения $\mu(x)$, при $n \rightarrow \infty$ будет сходиться равномерно на линии интегрирования $|x - (1 - \varepsilon)| = \varepsilon$, более того, он будет сходиться равномерно во всей области β .

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично доказательству теоремы о сходимости интерполирования на отрезке $[a, b]$ с узлами, расположенными на этом же отрезке (см. [6], стр. 240—242).

Рассмотрим частный случай, когда предельная функция распределения узлов является функцией Чебышева. Так

будет, например, в том случае, когда узлами являются корни многочленов Чебышева, Лежандра, Якоби. Логарифмический потенциал будет иметь в этом случае вид (см. [6], стр. 246)

$$u(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-t|} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \ln \frac{2}{|x + \sqrt{x^2 - 1}|}.$$

Линии уровня $u(x) = c_1$ при $c_1 < \ln 2$ будут эллипсами с фокусами $(-1, 1)$ и полуосями $a = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right)$, $b = \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right)$, где $c_1 = \ln \frac{2}{\rho}$, $\rho > 1$.

При $\rho = \frac{\sqrt{2\varepsilon + \varepsilon}}{\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}}$ линия уровня $u(x) = c_1 = \ln \frac{2}{\rho}$ будет содержать внутри себя отрезок $[-1, 1]$ и окружность $|x - (1 - \varepsilon)| = \varepsilon$, причем последняя касается линии уровня в двух симметричных относительно действительной оси точках. Следовательно, множество β будет состоять из эллипса с фокусами $(-1, 1)$ и полуосями

$$a = \sqrt{\frac{2}{2-\varepsilon}}, \quad b = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}$$

и части плоскости, лежащей внутри его. Это дает возможность высказать следующую теорему.

Теорема 4. Если функция $\Phi(x)$ регулярна в замкнутой области β , состоящей из эллипса с фокусами в точках $-1, 1$ и полуосями $a = \sqrt{\frac{2}{2-\varepsilon}}$, $b = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}$ и области, лежащей внутри его, то интерполяционный процесс (4.3.4), построенный по узлам, имеющим в качестве предельной функции распределения узлов функцию Чебышева, при $n \rightarrow \infty$ будет сходиться равномерно в указанном выше эллипсе и, в частности, на окружности $|x - (1 - \varepsilon)| = \varepsilon$.

Эта теорема является частным случаем теоремы 3.

Замечание. Если число ε взять достаточно малым, что мы можем сделать, выбрав достаточно большим s , то указанный в теореме эллипс только в окрестности точек -1 и 1 будет выходить за пределы окружности $|x| = 1$. А так как функция $\Phi(x)$ является регулярной в круге $|x| < 1$, то для выполнения условий теоремы 4 достаточно требовать регулярности $\Phi(x)$ в окрестности точек $x = -1$, $x = 1$, например в окрестностях $|x - 1| \leq 2\varepsilon$, $|x + 1| \leq 2\varepsilon$,

Снова перейдем от переменной x к переменной p и от функции $\Phi(x)$ к функции $\varphi(p)$. Будет иметь место следующая

Теорема 4а. Если функция $\varphi(p)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$, в окрестности $|p| \leq 1/R$ точки $p=0$ и в окрестности $|p| \geq R$ бесконечно удаленной точки, то интерполяционный процесс (4.3.5), построенный по узлам

$p_k = \frac{1+x_k}{1-x_k}$, где точки x_k на отрезке $[-1, 1]$ имеют в качестве предельной функции распределения узлов функцию Чебышева, будет сходиться равномерно при $n \rightarrow \infty$ на линии

$\operatorname{Re} p = c$, где $c \geq R_1$ и R_1 есть некоторое число, не меньшее R .

З а м е ч а н и е. В условиях теоремы равномерная сходимость интерполирования будет иметь место не только на линии интегрирования $\operatorname{Re} p = c$, но также в некоторой области D , в которую переходит область β теоремы 4 при преобразовании $p = \frac{1+x}{1-x}$, в частности, равномерная сходимость будет иметь место в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq c$, в окрестности действительной полуоси $0 < p < \infty$ и в окрестностях точек $p=0$ и $p=\infty$, т. е. $|p| \leq 1/R_1$ и $|p| \geq R_1$ при некотором R_1 .

4.5.3. Сходимость интерполяционного процесса вида (4.1.4). Прежде всего выполним преобразование $p = 1/x$. Оно переведет полуплоскость $\operatorname{Re} p \geq \alpha$ в круг радиуса $1/(2\alpha)$ с центром в точке $1/(2\alpha)$. Полупрямая $\alpha \leq p < \infty$ перейдет в диаметр d_1 этого круга, лежащий на действительной оси, линия интегрирования $\operatorname{Re} p = c$, где $c > \alpha$, на которой мы интерполируем функцию, перейдет в окружность, лежащую внутри указанного выше круга и касающуюся его окружности в точке $x=0$. Если c выбрать достаточно большим, то радиус этой окружности можно сделать сколь угодно малым. Функция $\varphi(p)$, регулярная в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$, преобразуется в функцию $\Phi(x)$, регулярную в круге $\left| x - \frac{1}{2\alpha} \right| < \frac{1}{2\alpha}$.

Интерполирование функции $\varphi(p)$ (см. (4.1.4)) по узлам, лежащим на действительной оси $\operatorname{Re} p > \alpha$, станет алгебраическим интерполированием функции $\Phi(x)$ по узлам, лежащим на диаметре d_1 круга $\left| x - \frac{1}{2\alpha} \right| \leq \frac{1}{2\alpha}$:

$$\Phi(x) \approx \sum_{k=0}^n l_k(x) \Phi(x_k). \quad (4.5.3)$$

В этом случае могут быть сформулированы следующие теоремы.

Теорема 5. Если функция $\Phi(x)$ регулярна в круге $|x - \frac{1}{2\alpha}| < \frac{1}{2\alpha}$ и в окрестности $|x| \leq 2\varepsilon$ ($2\varepsilon < \frac{1}{2\alpha}$) точки $x=0$, то интерполяционный процесс (4.5.3), построенный по любым узлам, лежащим на отрезке $[0, \frac{1}{2\alpha}]$, будет равномерно сходиться к $\Phi(x)$ на линии $|x - \varepsilon| = \varepsilon$, которую можно принять за линию интегрирования. Отрезок $[0, \frac{1}{2\alpha}]$ будет наибольшим, принадлежащим диаметру d_1 , обеспечивающим равномерную сходимость интерполирования по любым узлам, лежащим на нем, для функций, регулярных в указанной области.

Эта теорема доказывается на основании теоремы В. И. Смирнова и Н. А. Лебедева, которую мы привели при доказательстве теоремы 2. Здесь множество G — сумма кругов $|x - \frac{1}{2\alpha}| < \frac{1}{2\alpha}$ и $|x| \leq 2\varepsilon$, множество B — окружность $|x - \varepsilon| = \varepsilon$. Чтобы построить F , необходимо найти множество центров кругов, содержащих B и принадлежащих G и, кроме того, таких, центры которых лежат на отрезке $[0, 1/\alpha]$. Очевидно, что этим множеством будет отрезок $[0, 1/(2\alpha)]$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В условиях теоремы 5 равномерная сходимость интерполирования имеет место не только на контуре $|x - \varepsilon| = \varepsilon$, но также внутри его.

Если перейти к старой переменной p и функции $\varphi(p)$, то теорему 5 можно сформулировать так:

Теорема 5а. Если функция $\varphi(p)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$ и в окрестности $|p| \geq R$ бесконечно удаленной точки, то интерполяционный процесс (4.1.4), построенный по любым узлам p_k ($k=0, 1, \dots, n$), лежащим на действительной оси так, что $p_k \geq 2\alpha$, будет равномерно сходиться к $\varphi(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq c$, если c выбрать таким, что $c \geq R$.

Полуось $[2\alpha, \infty]$ будет наибольшей областью на действительной оси, обеспечивающей равномерную сходимость интерполирования по любым узлам, лежащим на ней, для функций $\varphi(p)$, регулярных в указанной выше области.

Следствие. Если функция $\varphi(p)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq 1/2$ и окрестности бесконечно удаленной

точки $|p| \geq R$, то по теореме 5а интерполяционный процесс будет сходиться равномерно в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq c \geq R$ по любым узлам, лежащим на действительной полуоси $[1, \infty]$, в частности, он будет сходиться равномерно и для равноотстоящих узлов $p_k = k+1$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$; $n=1, 2, \dots$), рассмотренных в § 4.2.

При доказательстве теоремы о сходимости квадратурного процесса для равноотстоящих узлов нам, как и выше, потребуется равномерная сходимость интерполирования не только в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq c$, но также и в некоторой окрестности $|p| \geq R_1$ бесконечно удаленной точки. Для достижения этого предположим, как в § 4.2, что функция $\varphi(p)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$. Кроме того, допустим, что она регулярна в области $|p| \geq R$. Тогда равномерная сходимость интерполирования как для равноотстоящих узлов, так и для любых других узлов, лежащих на полуоси $[1, \infty]$, будет иметь место не только в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq c$, но также в более широкой области. Чтобы показать это, перейдем к переменной $x = 1/p$; тогда функция $\Phi(x)$ будет регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} x > 0$ и в области $|x| \leq 1/R$. Узлы интерполирования $x_k = \frac{1}{p_k} = \frac{1}{k+1}$ ($k=0, 1, \dots, n$) будут лежать на отрезке $[0, 1]$.

Справедлива

Теорема 6. Если функция $\Phi(x)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} x > 0$ и в окрестности $|x| \leq 1/R$ нулевой точки, то интерполяционный процесс (4.5.3), построенный по узлам $x_k = \frac{1}{k+1}$ ($k=0, 1, \dots, n$) или по любым другим узлам, лежащим на отрезке $[0, 1]$, будет сходиться равномерно в области V , являющейся пересечением двух кругов $|x| \leq 1/R$ и $|x-1| \leq \sqrt{1+1/R^2}$. Область V будет наибольшей областью, для которой имеет место равномерная сходимость интерполирования при любой системе узлов из $[0, 1]$.

Доказательство. Эта теорема сразу же следует из теоремы В. И. Смирнова и Н. А. Лебедева (см. сноску на стр. 77). В ней установлено, что если F и G — два замкнутых множества точек плоскости z и $F \subset G$, а K_ξ — наибольший замкнутый круг, содержащийся в G и имеющий центр в точке $\xi \in F$, то множество $B = \bigcap_{\xi \in F} K_\xi$ является

наибольшим множеством, для которого выполняется условие $\{F, B, G\}$ (см. стр. 77).

В нашем случае множество G — правая полуплоскость и область $|x| \leq 1/R$, множество F — отрезок $[0, 1]$. Чтобы найти множество B , построим два наибольших замкнутых круга, содержащихся в G и с центрами в точках $x=0$ и $x=1$. Этими кругами будут $|x| \leq 1/R$ и $|x-1| \leq \sqrt{1+1/R^2}$. Искомым множеством B будет пересечение этих кругов. Теорема доказана.

Таким образом, равномерная сходимость интерполирования будет иметь место не только на контуре интегрирования $|x - \frac{1}{2c}| = \frac{1}{2c}$ и внутри его, если $c \geq R$, но также в более широкой области, в частности в круге $|x| \leq 1/R_1 < 1/R$, где

$$\frac{1}{R_1} = \sqrt{1 + \frac{1}{R^2}} - 1 = \frac{\sqrt{R^2 + 1} - R}{R}.$$

Если же перейти к переменной p , то можно сказать, что равномерная сходимость имеет место не только в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq c$, но и в области $|p| \geq R_1$, где

$$R_1 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + 1} - R} > R.$$

§ 4.6. Теоремы о сходимости интерполяционных методов обращения

Результаты о сходимости интерполирования, полученные выше, позволяют высказать некоторые теоремы о сходимости квадратурных процессов (4.3.7) и (4.1.6) при $n \rightarrow \infty$.

На основании теоремы 4а можно доказать следующую теорему.

Теорема 7. Пусть функция $\varphi(p)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$, а также в окрестности бесконечно удаленной точки $|p| \geq R$ и в окрестности нулевой точки $|p| \leq 1/R$.

Тогда интерполяционный квадратурный процесс (4.3.7), построенный по узлам $p_k = \frac{1+x_k}{1-x_k}$, где узлы x_k имеют на отрезке $[-1, 1]$ распределение Чебышева, будет сходиться при $n \rightarrow \infty$ к $f(t)$ при всех значениях t , при этом

равномерно относительно t на любом конечном отрезке $0 \leq t \leq T < \infty$, т. е.

$$R_n(\varphi, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} (p-a)^{-s} r_n(p) dp \rightarrow 0 \quad (4.6.1)$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно t для $0 \leq t \leq T < \infty$ для всяких T .

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $s > 1$. Представление (4.6.1) остаточного члена $R_n(\varphi, t)$ имеет особенность, облегчающую исследование сходимости: интеграл, стоящий справа, в значительной мере не зависит от выбора c ввиду регулярности интегрируемой функции в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$ и ограниченности $r_n(p)$ в окрестности бесконечно удаленной точки. В частности, число c может быть взято сколь угодно большим. Выберем $c \geq R$ и оставим за собой право увеличить c , если это потребуется. На основании теоремы 4а можно сказать, что остаток интерполирования $r_n(p)$ будет сходиться равномерно к нулю на линии интегрирования при $n \rightarrow \infty$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N , не зависящий от p , что для $n \geq N$ будет $|r_n(p)| \leq \varepsilon$.

Преобразуем интеграл, выражающий остаточный член $R_n(\varphi, t)$, положив $p = c + i\sigma$:

$$R_n(\varphi, t) = \frac{e^{ct}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma t} (c - a + i\sigma)^{-s} r_n(c + i\sigma) d\sigma.$$

Теперь оценим его:

$$\begin{aligned} |R_n(\varphi, t)| &= \frac{e^{ct}}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma t} (c - a + i\sigma)^{-s} r_n(c + i\sigma) d\sigma \right| \leq \\ &\leq \frac{e^{ct}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\sigma t} (c - a + i\sigma)^{-s} r_n(c + i\sigma) d\sigma| \leq \\ &\leq \varepsilon \frac{e^{cT}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma}{[(c-a)^2 + \sigma^2]^{s/2}} \quad (0 \leq t \leq T). \quad (4.6.2) \end{aligned}$$

Последний несобственный интеграл будет сходящимся, так как $s > 1$. Таким образом, из (4.6.2) вытекает, что $R_n(\varphi, t)$ будет стремиться к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Остается рассмотреть случай $0 < s \leq 1$. Остаточный член $R_n(\varphi, t)$ преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} R_n(\varphi, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} (p-a)^{-s} r_n(p) dp = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} (p-a)^{-s} [r_n(\infty) + r_n(p) - r_n(\infty)] dp = \\ &= \frac{r_n(\infty)}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} (p-a)^{-s} dp + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} (p-a)^{-s} [r_n(p) - r_n(\infty)] dp. \quad (4.6.3) \end{aligned}$$

Интеграл в первом слагаемом равен $\frac{e^{at} t^{s-1}}{\Gamma(s)}$, а погрешность интерполирования $r_n(\infty)$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, следовательно, первое слагаемое стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Второе слагаемое перепишем следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} (p-a)^{-s} p^{-1} \{p[r_n(p) - r_n(\infty)]\} dp. \quad (4.6.4)$$

Покажем, что функция $p[r_n(p) - r_n(\infty)]$ будет равномерно сходиться к нулю при $n \rightarrow \infty$ на линии интегрирования $\operatorname{Re} p = c$.

По условию теоремы функция $\varphi(p)$ регулярна в окрестности бесконечно удаленной точки $|p| \geq R$, следовательно, и погрешность интерполирования $r_n(p)$ и функция $r_n(p) - r_n(\infty)$ будут регулярны в этой окрестности. Кроме того, функция $r_n(p) - r_n(\infty)$ в этой окрестности будет стремиться к нулю, как $1/p$, а значит, и $p[r_n(p) - r_n(\infty)]$ будет регулярной функцией в области $|p| \geq R$. Из замечания к теореме 4а известно, что $r_n(p)$ сходится равномерно к нулю при $n \rightarrow \infty$ в области $|p| \geq R_1$ при некотором $R_1 > R$. Рассмотрим значение функции $p[r_n(p) - r_n(\infty)]$ на границе этой области при $n \rightarrow \infty$. Погрешность $r_n(p)$ равномерно относительно p стремится к нулю, и, кроме того, $r_n(\infty) \rightarrow 0$, а модуль p остается равным R_1 . Следовательно, вся функция равномерно сходится

к нулю на границе области $|p| \geq R_1$. А так как эта функция является регулярной в замкнутой области $|p| \geq R_1$, то из принципа максимума модуля сразу же следует равномерная сходимость и внутри области.

Если c выбрано так, что $c \geq R_1$, то доказано, что функция $p[r_n(p) - r_n(\infty)]$ равномерно сходится к нулю на $\text{Re } p = c$.

Таким образом, доказано, что функция $p[r_n(p) - r_n(\infty)]$ равномерно сходится к нулю при $n \rightarrow \infty$ на линии интегрирования $\text{Re } p = c$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N , не зависящее от p , что при $n \geq N$ верно неравенство $|p[r_n(p) - r_n(\infty)]| \leq \varepsilon$.

Оценим интеграл (4.6.4):

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} (p-a)^{-s} p^{-1} p[r_n(p) - r_n(\infty)] dp \right| \leq \\ \leq \varepsilon \frac{e^{ct}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma}{[(c-a)^2 + \sigma^2]^{s/2} (c^2 + \sigma^2)^{1/2}}. \quad (4.6.5)$$

Последний несобственный интеграл сходится при $s > 0$, значит, и второе слагаемое в (4.6.3) будет стремиться к нулю при $n \rightarrow \infty$ для любого $s > 0$. Теорема доказана.

Замечание. В теореме 7 сходимость квадратуры доказана для узлов p_k , у которых $x_k = \frac{p_k - 1}{p_k + 1}$ имеют предельную функцию распределения узлов $\mu(x)$, совпадающую с функцией Чебышева. Аналогичная теорема может быть доказана и для узлов p_k , имеющих предельную функцию распределения узлов x_k общего вида. Отличие будет состоять лишь в том, что область регулярности функции $\varphi(p)$ должна быть другой, а именно, $\varphi(p)$ должна быть регулярной в области D , в которую переходит область β при преобразовании $x = \frac{p-1}{p+1}$.

Для квадратурного процесса (4.1.6) на основании теоремы 6 может быть доказана

Теорема 8. Если функция $\varphi(p)$ регулярна в полуплоскости $\text{Re } p > 0$, а также в окрестности бесконечно удаленной точки $|p| \geq R$, то интерполяционный квадратурный процесс (4.1.6), построенный по узлам $p_k = k+1$ ($k=0, 1, \dots, n$), будет сходиться, если с выбрать

таким, что $c \geq R$, т. е.

$$R_n(\varphi, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} p^{-s} r_n(p) dp \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство теоремы совершенно аналогично доказательству теоремы 7.

Следует заметить, что в условиях теоремы 8 квадратурный процесс (4.1.6) будет сходиться не только для равноотстоящих узлов, но и для любых других узлов, расположенных на действительной полуоси $[1, \infty)$.

ГЛАВА 5

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА ПРИ ПОМОЩИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ, ИМЕЮЩИХ НАИВЫСШУЮ СТЕПЕНЬ ТОЧНОСТИ

§ 5.1. Теория квадратурных формул

Для вычисления интеграла Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} F(p) dt \quad (5.1.1)$$

в гл. 4 были построены интерполяционные квадратурные формулы, точные для многочленов степени $n-1$ от аргументов $\frac{1}{p}$ или $\frac{1}{p-A-2\alpha}$. Такая степень точности при заданных узлах интерполирования в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$ достигалась за счет выбора квадратурных коэффициентов A_k .

При построении квадратурных формул естественно выбирать не только коэффициенты, но и узлы. Можно надеяться, что их выбором степень точности формулы можно увеличить. В этой главе будет построена квадратурная формула наивысшей степени точности в классе рациональных функций частного вида.

Но прежде чем строить такую формулу, преобразуем интеграл (5.1.1), чтобы параметры квадратурной формулы не зависели от α и t . Для этого сделаем замену переменной $p = p'/t + \alpha$. После этой замены интеграл (5.1.1) преобразуется к виду

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{\alpha t}}{t} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^{p' F^*} (p') dp',$$
$$\varepsilon > 0, F^* (p') = F\left(\frac{p'}{t} + \alpha\right).$$

Так как функция $F(p)$ была регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$, функция $F^*(p')$ будет регулярной справа от мнимой оси $\operatorname{Re} p' > 0$, а ε может быть любым положительным числом. Таким образом, вычисление интеграла Меллина сводится к вычислению интеграла

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} e^p F^*(p) dp, \quad (5.1.2)$$

где переменная интегрирования снова обозначена через p .

Функция $F^*(p)$, как функция-изображение, кроме регулярности в правой полуплоскости, обладает еще тем свойством, что она стремится к нулю при удалении p на бесконечность так, что $\operatorname{Re} p \rightarrow \infty$. Допустим, кроме этого, что $F^*(p)$ стремится к нулю, как некоторая степень $1/p$, т. е. предположим, что $F^*(p)$ представима в виде

$$F^*(p) = \frac{1}{p^s} \varphi(p), \quad (5.1.3)$$

где $s > 0$, а функция $\varphi(p)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$ и имеет конечное предельное значение при $p \rightarrow \infty$:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \varphi(p) = \varphi(\infty).$$

Подставим выражение (5.1.3) в интеграл (5.1.2):

$$J(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} e^p p^{-s} \varphi(p) dp. \quad (5.1.4)$$

Для вычисления этого интеграла будем строить квадратурную формулу следующего вида:

$$J(s) \approx \sum_{k=1}^n A_k \varphi(p_k). \quad (5.1.5)$$

В формуле (5.1.5) произвольными величинами являются коэффициенты A_k и узлы p_k . Выбором их можно распорядиться. Будем пытаться выбирать их так, чтобы формула (5.1.5) была точной для любого многочлена степени $2n-1$ от переменной $1/p$. Необходимое и достаточное условие для этого дает следующая

Теорема 1. Для того чтобы квадратурная формула (5.1.5) была точной для всех многочленов степени $2n-1$ от переменной $x=1/p$, необходимо и достаточно выполнение двух условий:

1. Формула (5.1.5) должна быть интерполяционной, т. е. ее коэффициенты A_k должны иметь значения

$$A_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{e-i\infty}^{e+i\infty} e^p p^{-s} l_k\left(\frac{1}{p}\right) dp, \quad (5.1.6)$$

где

$$l_k\left(\frac{1}{p}\right) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_j}\right) / \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \left(\frac{1}{p_k} - \frac{1}{p_j}\right).$$

2. Для всякого многочлена $Q\left(\frac{1}{p}\right)$ степени не выше $n-1$ должно выполняться равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{e-i\infty}^{e+i\infty} e^p p^{-s} \omega_n\left(\frac{1}{p}\right) Q\left(\frac{1}{p}\right) dp = 0, \quad (5.1.7)$$

где

$$\omega_n\left(\frac{1}{p}\right) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_k}\right).$$

Доказательство теоремы проводится совершенно аналогично доказательству соответствующей теоремы о квадратурах наивысшей алгебраической степени точности (см. [6], стр. 117).

Необходимость. Если формула (5.1.5) верна для многочленов степени $2n-1$ от переменной $x=1/p$, то она верна и для многочленов степени $n-1$ от $1/p$, и поэтому она должна быть интерполяционной. Необходимость первого условия доказана.

Пусть теперь $Q\left(\frac{1}{p}\right)$ — любой многочлен степени не выше $n-1$. Произведение $\psi\left(\frac{1}{p}\right) = \omega_n\left(\frac{1}{p}\right) Q\left(\frac{1}{p}\right)$ есть многочлен степени не выше $2n-1$, и для него формула (5.1.5)

должна быть точной:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^p p^{-s} \psi\left(\frac{1}{p}\right) dp &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^p p^{-s} \omega_n\left(\frac{1}{p}\right) Q\left(\frac{1}{p}\right) dp = \\ &= \sum_{k=1}^n A_k \omega_n\left(\frac{1}{p_k}\right) Q\left(\frac{1}{p_k}\right). \end{aligned}$$

Последняя сумма равна нулю, так как $\omega_n\left(\frac{1}{p_k}\right) = 0$. Это доказывает необходимость условия (5.1.7).

Достаточность. Пусть $\psi\left(\frac{1}{p}\right)$ — произвольный многочлен степени $2n-1$. Разделив его на $\omega_n\left(\frac{1}{p}\right)$, получим равенство

$$\psi\left(\frac{1}{p}\right) = Q\left(\frac{1}{p}\right) \omega_n\left(\frac{1}{p}\right) + \rho\left(\frac{1}{p}\right),$$

где Q и ρ — многочлены от $1/p$ степени не выше $n-1$. Так как $\omega_n\left(\frac{1}{p_k}\right) = 0$, то

$$\psi\left(\frac{1}{p_k}\right) = \rho\left(\frac{1}{p_k}\right) \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (5.1.8)$$

Интеграл от функции $\psi\left(\frac{1}{p}\right)$ представим в виде суммы двух следующих интегралов:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^p p^{-s} \psi\left(\frac{1}{p}\right) dp &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^p p^{-s} \omega_n\left(\frac{1}{p}\right) Q\left(\frac{1}{p}\right) dp + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^p p^{-s} \rho\left(\frac{1}{p}\right) dp. \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

Первый интеграл в правой части равен нулю по условию ортогональности. Так как степень $\rho\left(\frac{1}{p}\right)$ не выше $n-1$, а формула (5.1.5) интерполяционная, то должно

быть точным равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^p p^{-s} \rho\left(\frac{1}{p}\right) dp = \sum_{k=1}^n A_k \rho\left(\frac{1}{p_k}\right).$$

Учитывая (5.1.8) и (5.1.9), получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^p p^{-s} \psi\left(\frac{1}{p}\right) dp = \sum_{k=1}^n A_k \psi\left(\frac{1}{p_k}\right),$$

и формула (5.1.5) действительно будет точной для произвольных многочленов степени $2n-1$ от $1/p$. Теорема доказана.

Таким образом, вопрос о возможности построения квадратурной формулы (5.1.5), точной для произвольных многочленов степени $2n-1$, связан с существованием многочлена $\omega_n\left(\frac{1}{p}\right)$ степени n , обладающего свойством ортогональности (5.1.7).

Покажем, что этот многочлен существует и условие (5.1.7) определяет его единственным образом. Будем искать многочлен $\omega_n(x) = \omega_n\left(\frac{1}{p}\right)$ в виде разложения по степеням x :

$$\omega_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n.$$

Условие ортогональности (5.1.7) равносильно выполнению системы равенств

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^p \omega_n(x) x^{s+m} dp = 0, \quad m=0, 1, \dots, n-1. \quad (5.1.10)$$

Так как $\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^p x^u dp = \frac{1}{\Gamma(u)}$, то система (5.1.10)

преобразуется в систему

$$\frac{1}{\Gamma(s+n+m)} + \frac{a_1}{\Gamma(s+n+m-1)} + \dots + \frac{a_n}{\Gamma(s+m)} = 0, \\ m=0, 1, \dots, n-1. \quad (5.1.11)$$

Действительно, рассмотрим алгебраическое дополнение элемента y :

$$\begin{vmatrix} (x^{s+n-2})' & (x^{s+n-2})'' & \dots & (x^{s+n-2})^{(n)} \\ (x^{s+n-1})' & (x^{s+n-1})'' & \dots & (x^{s+n-1})^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x^{s+2n-3})' & (x^{s+2n-3})'' & \dots & (x^{s+2n-3})^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Из элементов первого, второго, ..., n -го столбцов вынесем за знак определителя соответственно x^{s+n-3} , x^{s+n-4} , ..., x^{s-2} . Затем из элементов строк оставшегося определителя вынесем множители 1, x , ..., x^{n-1} . В итоге получим определитель $x^{n(n+s-3)} D$, где D равно

$$\begin{vmatrix} s+n-2 & (s+n-2)M & \dots & [(s+n-2) \dots (s-1)] \\ s+n-1 & (s+n-1)M & \dots & [(s+n-1) \dots s] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s+2n-3 & (s+2n-3)M & \dots & [(s+2n-3) \dots (s+n-2)] \end{vmatrix} = c_n^n,$$

и буквой M обозначен множитель, на единицу меньший предыдущего.

Совершенно аналогично устанавливается, что алгебраические дополнения элементов y' , y'' , ..., $y^{(n)}$ равны соответственно

$$c_{n-1}^n x^{n(s+n-3)+1}, c_{n-2}^n x^{n(s+n-3)+2}, \dots, c_0^n x^{n(s+n-3)+n}.$$

Этим доказывается разложение (5.1.13).

Уравнение (5.1.13) является уравнением Эйлера и имеет две особые точки: $x=0$, $x=\infty$.

Выпишем определитель Вронского для решений x^{s+n-2} , x^{s+n-1} , ..., x^{s+2n-3} этого уравнения:

$$\begin{aligned} W(x^{s+n-2}, \dots, x^{s+2n-3}) &= \\ &= \begin{vmatrix} x^{s+n-2} & (s+n-2)x^{s+n-3} & \dots & [(s+n-2) \dots s]x^{s-1} \\ x^{s+n-1} & (s+n-1)x^{s+n-2} & \dots & [(s+n-1) \dots (s+1)]x^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{s+2n-3} & (s+2n-3)x^{s+2n-4} & \dots & [(s+2n-3) \dots (s+n-1)]x^{s+n-2} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

Так как решения x^{s+n-2} , x^{s+n-1} , ..., x^{s+2n-3} уравнения (5.1.13) линейно независимы, то определитель (5.1.14) может равняться нулю только в особых точках уравнения, т. е. в точках $x=0$ и $x=\infty$. В остальных точках он отличен от нуля, в частности, и в точке $x=1$. Но при

$x=1$ определитель $W(x^{s+n-2}, \dots, x^{s+2n-3})$ совпадает с определителем Δ , и поэтому $\Delta \neq 0$, следовательно, система (5.1.12) имеет единственное решение.

Таким образом, существование и единственность многочлена $\omega_n\left(\frac{1}{p}\right)$ доказаны.

Так как весовая функция в (5.1.7) зависит от параметра s , то и многочлен $\omega_n\left(\frac{1}{p}\right)$ тоже будет зависеть от s . Будем обозначать его $\omega_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right)$. Чтобы закончить исследование возможности построения формулы (5.1.5), точной для многочленов степени $2n-1$ от $1/p$, необходимо показать, что все корни многочленов $\omega_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right)$ при любых $s > 0$ лежат в правой полуплоскости. Этот вопрос будет рассмотрен в следующем параграфе.

Квадратурная формула (5.1.5) наивысшей степени точности для интеграла (5.1.4) в частном случае $s=1$ была построена Г. Солзером (см. [8]).

§ 5.2. Ортогональные многочлены, связанные с квадратурной формулой наивысшей степени точности

5.2.1. Явное выражение многочленов $\omega_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right)$. Для получения явного выражения $\omega_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right)$ рассмотрим следующий многочлен степени n :

$$\begin{aligned} P_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right) &= (-1)^n e^{-p} p^{n+s-1} \frac{d^n}{dp^n} (e^p p^{-n-s+1}) = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k} (n+s-1) \dots (n+s+k-2)}{p^k}, \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

который мы записали в виде, аналогичном формуле Родрига для многочленов Лежандра.

Покажем, что для этого многочлена выполняется условие ортогональности

$$\int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^p p^{-s} P_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right) p^{-m} dp = 0 \quad (m=0, 1, \dots, n-1), \quad (5.2.2)$$

что равносильно условию (5.1.7).

Для доказательства этого в интеграле (5.2.2) заменим $P_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right)$ его выражением (5.2.1) и выполним интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^p p^{-s} P_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right) p^{-m} dp &= \\ &= (-1)^n \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} p^{n-m-1} \frac{d^n}{dp^n} (e^p p^{-n-s+1}) dp = \\ &= (-1)^n p^{n-m-1} \frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} (e^p p^{-n-s+1}) \Big|_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} - \\ &\quad - (-1)^n (n-m-1) \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} p^{n-m-2} \frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} (e^p p^{-n-s+1}) dp. \end{aligned}$$

Легко показать, что первый член полученного выражения равен нулю, так как каждое его слагаемое, полученное после дифференцирования произведения $e^p p^{-n-s+1}$, будет иметь вид $e^p p^{-k}$ ($k \geq s$) и ввиду того, что функция e^p остается ограниченной на линии интегрирования, будет стремиться к нулю при удалении точки p в бесконечность вдоль прямой интегрирования.

Выполнив интегрирование по частям $n-m-1$ раз, для интеграла (5.2.2) получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \pm (n-m-1)! \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \frac{d^{m+1}}{dp^{m+1}} (e^p p^{-n-s+1}) dp &= \\ &= \pm (n-m-1)! \frac{d^m}{dp^m} (e^p p^{-n-s+1}) \Big|_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty}. \end{aligned}$$

А так как $s > 0$, $n \geq 1$, то полученное выражение тоже будет равно нулю. Таким образом, многочлен $P_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right)$, заданный равенством (5.2.1), удовлетворяет условию ортогональности (5.1.7), а ввиду единственности многочлена, удовлетворяющего этому условию, можно заключить, что многочлен $P_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right)$ будет отличаться от $\omega_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right)$ только постоянным множителем, равным старшему коэффициенту $P_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right)$:

$$P_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right) = (n+s-1)(n+s) \dots (2n+s-2) \omega_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right).$$

5.2.2. Рекуррентное соотношение для многочленов $P_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right)$. Для многочленов $P_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right)$ можно получить рекуррентную формулу, связывающую три многочлена $P_{n-1}^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right)$, $P_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right)$, $P_{n+1}^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right)$, подобно тому, как это делается для обычных ортогональных многочленов. Возьмем произведение $\frac{1}{p} P_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right)$; оно является многочленом степени $n+1$ от $1/p$ и может быть представлено как линейная комбинация многочленов $P_0^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right)$, $P_1^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right)$, ..., $P_{n+1}^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right)$:

$$\frac{1}{p} P_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{nk} P_k^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right). \quad (5.2.3)$$

Коэффициенты этого разложения можно определить по формуле

$$c_{nk} = \frac{\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^p p^{-s} \frac{1}{p} P_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right) P_k^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right) dp}{\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^p p^{-s} \left[P_k^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right)\right]^2 dp}, \quad (5.2.4)$$

из которой видно, что если $k < n-1$, то $\frac{1}{p} P_k^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right)$ — многочлен степени ниже n и по условию (5.1.7) интеграл в числителе (5.2.4) равен нулю. Таким образом, в соотношении (5.2.3) могут быть отличными от нуля только $c_{n, n-1}$, c_{nn} , $c_{n, n+1}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} P_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right) &= c_{n, n-1} P_{n-1}^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right) + \\ &+ c_{nn} P_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right) + c_{n, n+1} P_{n+1}^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right). \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Переменную $1/p$ обозначим x и соотношение (5.2.5) перепишем в виде

$$P_{n+1}^{(s)}(x) = (a_n x + b_n) P_n^{(s)}(x) + c_n P_{n-1}^{(s)}(x). \quad (5.2.6)$$

Так как нам известно явное выражение $P_n^{(s)}(x)$, коэффициенты a_n , b_n , c_n определяются просто. Приравнявая

коэффициенты при x^{n+1} в правой и левой частях соотношения (5.2.6), получим $(n+s)(n+s+1)\dots(2n+s) = = a_n(n+s-1)(n+s)\dots(2n+s-2)$. Отсюда

$$a_n = \frac{(n+s)(n+s+1)\dots(2n+s-2)(2n+s-1)(2n+s)}{(n+s-1)(n+s)\dots(2n+s-2)} = \\ = \frac{(2n+s)(2n+s-1)}{n+s-1}.$$

Для определения b_n приравняем коэффициенты при x^n в обеих частях равенства (5.2.6):

$$-(n+1)(n+s)(n+s-1)\dots(2n+s-1) = \\ = -a_n n(n+s-1)(n+s)\dots(2n+s-3) + \\ + b_n(n+s-1)(n+s)\dots(2n+s-2).$$

Отсюда следует

$$b_n = -\frac{(n+1)(n+s)\dots(2n+s-2)(2n+s-1)}{(n+s-1)(n+s)\dots(2n+s-2)} + \\ + \frac{(2n+s-1)(2n+s)}{(n+s-1)} \frac{n(n+s-1)(n+s)\dots(2n+s-3)}{(n+s-1)(n+s)\dots(2n+s-3)(2n+s-2)} = \\ = -\frac{(n+1)(2n+s-1)}{n+s-1} + \frac{(2n+s-1)(2n+s)n}{(2n+s-2)(n+s-1)} = \\ = -\frac{(2n+s-1)(s-2)}{(2n+s-2)(n+s-1)}.$$

Наконец, определим c_n , сравнивая, например, свободные члены в правой и левой частях равенства (5.2.6):

$$(-1)^{n+1} = b_n(-1)^n + c_n(-1)^{n-1},$$

$$c_n = 1 + b_n = 1 - \frac{(2n+s-1)(s-2)}{(2n+s-2)(n+s-1)} = \\ = \frac{(2n+s-2)(n+s-1) - (2n+s-1)(s-2)}{(2n+s-2)(n+s-1)} = \frac{n(2n+s)}{(2n+s-2)(n+s-1)}.$$

Таким образом, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. Любые три последовательных многочлена $P_n^{(s)}(x)$ связаны рекуррентным соотношением:

$$(2n+s-2)(n+s-1)P_{n+1}^{(s)}(x) = \\ = [(2n+s)(2n+s-1)(2n+s-2)x - \\ - (s-2)(2n+s-1)]P_n^{(s)}(x) + n(2n+s)P_{n-1}^{(s)}(x). \quad (5.2.7)$$

5.2.3. Дифференциальное уравнение, решением которого являются многочлены $P_n^{(s)}(x)$. Для многочленов $P_n^{(s)}(x)$ можно указать линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами, которому они удовлетворяют.

В самом деле, для $P_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right)$, как мы уже установили, имеет место условие ортогональности

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} e^p p^{-s} P_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right) Q\left(\frac{1}{p}\right) dp = 0,$$

где $Q\left(\frac{1}{p}\right)$ — произвольный многочлен степени не выше $n-1$. Если перейти к переменной $x = 1/p$, то это условие примет вид

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{1/x} x^{s-2} P_n^{(s)}(x) Q(x) dx = 0, \quad (5.2.8)$$

где C — окружность радиуса $1/(2\varepsilon)$ с центром в точке $x = 1/(2\varepsilon)$.

Для вывода дифференциального уравнения рассмотрим следующий интеграл:

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_C [e^{1/x} x^s P_n^{(s)'}(x)]' x^k dx.$$

Интегрированием по частям получаем

$$J = \frac{1}{2\pi i} [x^k e^{1/x} x^s P_n^{(s)'}(x)]_C - \frac{k}{2\pi i} \int_C x^{k-1} e^{1/x} x^s P_n^{(s)'}(x) dx.$$

Первый член правой части обращается в нуль, так как если перейти снова к переменной p , то выражение $\frac{1}{p^{k+s}} e^p P_n^{(s)'}\left(\frac{1}{p}\right)$ при стремлении p к бесконечности по прямой $\operatorname{Re} p = \varepsilon$ будет стремиться к нулю. Если $k=0$, то и интеграл J равен нулю.

Если же $k > 0$, то интегрируем еще раз по частям:

$$J = -\frac{k}{2\pi i} [x^{k-1} e^{1/x} x^s P_n^{(s)}(x)]_C + \\ + \frac{k}{2\pi i} \int_C e^{1/x} x^{s-2} P_n^{(s)}(x) [(k+s-1)x^k - x^{k-1}] dx.$$

Первое слагаемое правой части снова обращается в нуль. Рассмотрим второе слагаемое. В квадратных скобках под знаком интеграла стоит некоторый многочлен степени k , следовательно, в силу условия (5.2.8) интеграл равен нулю при $k=1, 2, \dots, n-1$. Таким образом, мы доказали, что при $k=0, 1, \dots, n-1$ интеграл J равен нулю:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi i} \int_C [e^{1/x} x^s P_n^{(s)'}(x)]' x^k dx = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C [-e^{1/x} x^{s-2} P_n^{(s)'}(x) + s e^{1/x} x^{s-1} P_n^{(s)'}(x) + \\ &\quad + e^{1/x} x^s P_n^{(s)''}(x)] x^k dx = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{1/x} x^{s-2} [x^2 P_n^{(s)''}(x) + (sx-1) P_n^{(s)'}(x)] x^k dx = 0. \end{aligned}$$

Последнее равенство означает, что многочлен степени n , стоящий в квадратных скобках, ортогонален с весом $e^{1/x} x^{s-2}$ к x^k для $k=0, 1, \dots, n-1$. Отсюда можно заключить, что этот многочлен отличается от $P_n^{(s)}(x)$ лишь постоянным множителем γ_n :

$$x^2 P_n^{(s)''}(x) + (sx-1) P_n^{(s)'}(x) = \gamma_n P_n^{(s)}(x).$$

Для определения множителя γ_n достаточно сравнить в последней формуле коэффициенты при x^n :

$$\begin{aligned} n(n-1)(n+s-1)\dots(2n+s-2) + \\ + sn(n+s-1)\dots(2n+s-2) = \gamma_n(n+s-1)\dots(2n+s-2). \end{aligned}$$

Отсюда $n(n-1) + sn = \gamma_n$, или $\gamma_n = n(n+s-1)$.

Таким образом, доказана

Теорема 3. Многочлен $P_n^{(s)}(x)$, определяемый формулой (5.2.1), является решением линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

$$x^2 P_n^{(s)''}(x) + (sx-1) P_n^{(s)'}(x) - n(n+s-1) P_n^{(s)}(x) = 0. \quad (5.2.9)$$

5.2.4. Интегральное представление многочленов $P_n^{(s)}(x)$.

Покажем, что многочлены $P_n^{(s)}(x)$ имеют следующее интегральное представление:

$$P_n^{(s)}(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+s-1)} \int_0^\infty t^{n+s-2} (1-xt)^n e^{-t} dt. \quad (5.2.10)$$

Проверим это, вычислив интеграл, стоящий в правой части (5.2.10):

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+s-1)} \int_0^\infty t^{n+s-2} (1-xt)^n e^{-t} dt &= \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+s-1)} \int_0^\infty t^{n+s-2} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (xt)^{n-k} e^{-t} dt = \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+s-1)} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^{n-k} \int_0^\infty t^{2n+s-k-2} e^{-t} dt = \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+s-1)} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \Gamma(2n+s-k-1) x^{n-k}. \end{aligned}$$

Полученное выражение совпадает с формулой (5.2.1) для многочленов $P_n^{(s)}(x)$, что и доказывает утверждение (5.2.10).

5.2.5. Производящая функция для многочленов $P_n^{(s)}(x)$.

Многочлены $P_n^{(s)}(x)$ можно рассматривать как коэффициенты разложения в ряд Тейлора некоторой аналитической функции, которая называется *производящей функцией* этих многочленов.

Для нахождения ее рассмотрим функцию $\frac{e^z}{z^{n+s-1}}$. Она аналитична во всей плоскости z , кроме точек $z=0$ и $z=\infty$; поэтому в любой точке p плоскости z , кроме указанных двух точек, ее можно представить интегралом Коши:

$$\frac{e^p}{p^{n+s-1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{e^z}{z^{n+s-1}} \frac{dz}{z-p},$$

где l — замкнутый контур, охватывающий точку p и лежащий в области аналитичности функции $\frac{e^z}{z^{n+s-1}}$.

Производная n -го порядка от этой функции будет представляться формулой

$$\frac{d^n}{dp^n} \left(\frac{e^p}{p^{n+s-1}} \right) = \frac{n!}{2\pi i} \int_l \frac{e^z}{z^{n+s-1}} \frac{dz}{(z-p)^{n+1}}. \quad (5.2.11)$$

Выполним преобразование

$$z = \frac{p}{2} (\sqrt{1-t} + 1). \quad (5.2.12)$$

Оно переведет точку $z=p$ в точку $t=0$. В плоскости t сделаем разрез вдоль положительной действительной оси от точки $t=1$ до бесконечности и будем рассматривать ту ветвь $\sqrt{1-t}$, для которой $\arg(1-t)=0$ для действительных $t < 1$. Контур интегрирования l перейдет в контур λ , охватывающий точку $t=0$. Интеграл (5.2.11) после преобразования (5.2.12) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dp^n} \left(\frac{e^p}{p^{n+s-1}} \right) &= \\ &= -\frac{nl}{2\pi i} \int_{\lambda} \frac{e^{\frac{p}{2}(\sqrt{1-t}+1)}}{\left(\frac{p}{2}\right)^{n+s-1} (\sqrt{1-t}+1)^{n+s-1}} \frac{\frac{p}{4} \frac{dt}{\sqrt{1-t}}}{\left(\frac{p}{2}\right)^{n+1} (\sqrt{1-t}-1)^{n+1}} = \\ &= -\frac{nl \frac{p}{4}}{2\pi i \left(\frac{p}{2}\right)^{2n+s}} \int_{\lambda} \frac{e^{\frac{p}{2}(\sqrt{1-t}+1)}}{(\sqrt{1-t}+1)^{s-2} \sqrt{1-t}} \frac{dt}{(-t)^{n+1}} = \\ &= \frac{(-1)^n nl}{4\pi i \left(\frac{p}{2}\right)^{2n+s-1}} \int_{\lambda} \frac{e^{\frac{p}{2}(\sqrt{1-t}+1)}}{(\sqrt{1-t}+1)^{s-2} \sqrt{1-t}} \frac{dt}{t^{n+1}}. \quad (5.2.13) \end{aligned}$$

Подставляя теперь выражение (5.2.13) вместо n -й производной в явное выражение (5.2.1) для многочленов $P_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right)$, получим

$$\begin{aligned} P_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right) &= \\ &= (-1)^n e^{-p} p^{n+s-1} \frac{(-1)^n nl}{4\pi i \left(\frac{p}{2}\right)^{2n+s-1}} \int_{\lambda} \frac{e^{\frac{p}{2}(\sqrt{1-t}+1)}}{(\sqrt{1-t}+1)^{s-2} \sqrt{1-t}} \frac{dt}{t^{n+1}} = \\ &= \frac{2^{2n+s-2} nl}{p^n 2\pi i} \int_{\lambda} \frac{e^{\frac{p}{2}(\sqrt{1-t}-1)}}{(\sqrt{1-t}+1)^{s-2} \sqrt{1-t}} \frac{dt}{t^{n+1}}, \end{aligned}$$

или

$$\frac{P_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right) p^n}{2^{2n} nl} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda} \frac{2^{s-2} e^{\frac{p}{2}(\sqrt{1-t}-1)}}{(\sqrt{1-t}+1)^{s-2} \sqrt{1-t}} \frac{dt}{t^{n+1}}. \quad (5.2.14)$$

Рассмотрим функцию

$$F(t) = \frac{2^{s-2} e^{\frac{p}{2}(\sqrt{1-t}-1)}}{(\sqrt{1-t}+1)^{s-2} \sqrt{1-t}};$$

она аналитична в точке $t=0$; значит, в окрестности этой точки она может быть представлена своим рядом Тейлора

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

где

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda} \frac{F(t)}{t^{n+1}} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda} \frac{2^{s-2} e^{\frac{p}{2}(\sqrt{1-t}-1)}}{(\sqrt{1-t}+1)^{s-2} \sqrt{1-t}} \frac{dt}{t^{n+1}} = \frac{P_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right) p^n}{2^{2n} n!}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{2^{s-2} e^{\frac{p}{2}(\sqrt{1-t}-1)}}{(\sqrt{1-t}+1)^{s-2} \sqrt{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n P_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right)}{2^{2n} n!} t^n.$$

Введя новую переменную $t_1 = pt/4$ и положив $1/p = x$, последнюю формулу можно записать в виде

$$\frac{2^{s-2} e^{\frac{1}{2x}(\sqrt{1-4tx}-1)}}{(\sqrt{1-4tx}+1)^{s-2} \sqrt{1-4tx}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n^{(s)}(x)}{n!} t^n, \quad (5.2.15)$$

где переменная снова обозначена t .

Функция, стоящая слева в выражении (5.2.15), является производящей функцией для многочленов $P_n^{(s)}(x)$.

5.2.6. Распределение корней многочленов $P_n^{(s)}(x)$.

В конце предыдущего параграфа мы указали, что для завершения исследования возможности построения квадратной формулы (5.1.5), точной для многочленов степени $2n-1$ от $1/p$, необходимо показать, что корни многочленов $\omega_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right)$ или корни многочленов $P_n^{(s)}(x)$, отличающихся от $\omega_n^{(s)}(x)$ только постоянным множителем, лежат в правой полуплоскости при всех $s > 0$.

В этом пункте рассмотрим данный вопрос для некоторых частных значений s . Докажем следующую теорему.

Теорема 4. Все корни многочленов

$$P_n^{(s)}(x) = P_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right) = (-1)^n e^{-p} p^{n+s-1} \frac{d^n}{dp^n} \left(\frac{e^p}{p^{n+s-1}} \right)$$

при всех целых $s \geq 2$ лежат в правой полуплоскости, т. е. вещественные части всех корней положительны.

Доказательство. Сначала возьмем $s=2$. При доказательстве будем пользоваться некоторыми теоремами, известными из алгебры. Напомним *) их:

а) Для того чтобы вещественные части всех корней многочлена

$$Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_0$$

с вещественными коэффициентами были бы одного знака, необходимо и достаточно, чтобы корни многочленов

$$f(x) = b_n x^n - b_{n-2} x^{n-2} + b_{n-4} x^{n-4} - \dots,$$

$$\varphi(x) = b_{n-1} x^{n-1} - b_{n-3} x^{n-3} + b_{n-5} x^{n-5} - \dots$$

были бы все вещественные и разделялись.

б) Если все корни многочленов $F(x) = \lambda f(x) + \mu \varphi(x)$ вещественны при любых вещественных λ и μ , то корни многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ вещественны и разделяются.

Запишем многочлен $P_n^{(2)}(x)$ в виде

$$P_n^{(2)}(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0. \quad (5.2.16)$$

Нам необходимо доказать, что вещественные части всех корней многочлена (5.2.16) одного знака. Для этого, на основании только что сформулированных теорем а) и б), достаточно установить справедливость следующих фактов:

1) все корни многочленов

$$Q_n(x) = a_n x^n - a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-4} x^{n-4} - \dots,$$

$$R_{n-1}(x) = a_{n-1} x^{n-1} - a_{n-3} x^{n-3} + a_{n-5} x^{n-5} - \dots$$

вещественны и разделяются;

2) все корни многочленов

$$P_n^{(\lambda, \mu)}(x) = \lambda a_n x^n + \mu a_{n-1} x^{n-1} - \lambda a_{n-2} x^{n-2} -$$

$$- \mu a_{n-3} x^{n-3} + \lambda a_{n-4} x^{n-4} + \mu a_{n-5} x^{n-5} - \dots$$

будут вещественны при любых вещественных λ и μ .

*) См. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, М., «Наука», 1968, стр. 106, 108.

Из (5.2.7) видно, что многочлен $P_n^{(2)}(x)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$P_n^{(2)}(x) = 2(2n-1)xP_{n-1}^{(2)}(x) + P_{n-2}^{(2)}(x), \quad (5.2.17)$$

причем $P_0 = 1$, $P_1(x) = 2x - 1$.

Теперь найдем рекуррентное соотношение для многочленов $P_n^{(\lambda, \mu)}(x)$. Запишем многочлен $P_n^{(2)}(x)$ в виде

$$P_n^{(2)}(x) = A_n(x) + B_n(x) + C_n(x) + D_n(x),$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_n(x) &= a_n x^n + a_{n-4} x^{n-4} + a_{n-8} x^{n-8} + \dots, \\ B_n(x) &= a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-5} x^{n-5} + a_{n-9} x^{n-9} + \dots, \\ C_n(x) &= a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-6} x^{n-6} + a_{n-10} x^{n-10} + \dots, \\ D_n(x) &= a_{n-3} x^{n-3} + a_{n-7} x^{n-7} + a_{n-11} x^{n-11} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.2.18)$$

Тогда многочлен $P_n^{(\lambda, \mu)}(x)$ можно записать следующим образом:

$$P_n^{(\lambda, \mu)}(x) = \lambda [A_n(x) - C_n(x)] + \mu [B_n(x) - D_n(x)].$$

Рекуррентное соотношение (5.2.17) примет вид

$$\begin{aligned} A_n(x) + B_n(x) + C_n(x) + D_n(x) &= \\ &= 2(2n-1)x[A_{n-1}(x) + B_{n-1}(x) + C_{n-1}(x) + D_{n-1}(x)] + \\ &\quad + A_{n-2}(x) + B_{n-2}(x) + C_{n-2}(x) + D_{n-2}(x). \end{aligned}$$

Отсюда и из равенств (5.2.18) и подобных равенств для $P_{n-1}^{(2)}(x)$ и $P_{n-2}^{(2)}(x)$ получаем

$$\begin{aligned} A_n(x) &= 2(2n-1)x A_{n-1}(x) + C_{n-2}(x), \\ B_n(x) &= 2(2n-1)x B_{n-1}(x) + D_{n-2}(x), \\ C_n(x) &= 2(2n-1)x C_{n-1}(x) + A_{n-2}(x), \\ D_n(x) &= 2(2n-1)x D_{n-1}(x) + B_{n-2}(x). \end{aligned}$$

Умножим первое и третье равенства соответственно на λ и $-\lambda$, а второе и четвертое на μ и $-\mu$ и сложим их:

$$\begin{aligned} \lambda [A_n(x) - C_n(x)] + \mu [B_n(x) - D_n(x)] &= \\ &= 2(2n-1)x\lambda [A_{n-1}(x) - C_{n-1}(x)] + \lambda [C_{n-2}(x) - A_{n-2}(x)] + \\ &\quad + 2(2n-1)x\mu [B_{n-1}(x) - D_{n-1}(x)] + \mu [D_{n-2}(x) - B_{n-2}(x)]. \end{aligned}$$

Полученному равенству придадим вид

$$\begin{aligned} & \lambda [A_n(x) - C_n(x)] + \mu [B_n(x) - D_n(x)] = \\ & = 2(2n-1)x \{ \lambda [A_{n-1}(x) - C_{n-1}(x)] + \mu [B_{n-1}(x) - D_{n-1}(x)] \} - \\ & \quad - \{ \lambda [A_{n-2}(x) - C_{n-2}(x)] + \mu [B_{n-2}(x) - D_{n-2}(x)] \}. \end{aligned}$$

Последнее равенство есть не что иное, как рекуррентное соотношение для $P_n^{(\lambda, \mu)}(x)$, а именно:

$$P_n^{(\lambda, \mu)}(x) = 2(2n-1)xP_{n-1}^{(\lambda, \mu)}(x) - P_{n-2}^{(\lambda, \mu)}(x), \quad (5.2.19)$$

где

$$\begin{aligned} P_0^{(\lambda, \mu)}(x) &= \lambda, & P_1^{(\lambda, \mu)}(x) &= 2\lambda x - \mu & \text{при } \lambda \neq 0, \\ P_0^{(0, \mu)}(x) &= 0, & P_1^{(0, \mu)}(x) &= -\mu & \text{при } \lambda = 0. \end{aligned}$$

Случай $\mu = 0$, $\lambda = 0$ тривиален, и его из рассмотрения исключаем. Таким образом, получаем последовательность многочленов

$$P_n^{(\lambda, \mu)}(x), \quad P_{n-1}^{(\lambda, \mu)}(x), \quad \dots, \quad P_0^{(\lambda, \mu)}(x) \quad \text{при } \lambda \neq 0 \quad (5.2.20)$$

или

$$P_n^{(0, \mu)}(x), \quad P_{n-1}^{(0, \mu)}(x), \quad \dots, \quad P_1^{(0, \mu)}(x) \quad \text{при } \lambda = 0, \quad (5.2.21)$$

причем во второй последовательности $P_n^{(0, \mu)}(x)$ будет многочленом степени $n-1$.

Эта последовательность многочленов обладает следующими свойствами:

1) Последний многочлен последовательности есть отличная от нуля постоянная, а именно, в первой последовательности это есть λ , во второй μ .

2) Ни при каком значении x два рядом стоящих многочлена последовательности не обращаются в нуль.

В самом деле, пусть x_1 является корнем $P_n^{(\lambda, \mu)}(x)$ и $P_{n-1}^{(\lambda, \mu)}(x)$; тогда ввиду (5.2.19) x_1 будет корнем и многочлена $P_{n-2}^{(\lambda, \mu)}(x)$. Рассуждая так дальше, мы пришли бы в конце концов к тому, что этот общий корень был бы корнем и многочлена $P_0^{(\lambda, \mu)}(x)$ в последовательности (5.2.20) или $P_1^{(\lambda, \mu)}(x)$ в последовательности (5.2.21), что невозможно, так как эти многочлены есть отличные от нуля постоянные.

3) Если какой-нибудь из многочленов последовательности обращается в нуль при вещественном значении x , то два соседних с ним многочлена имеют при этом x значения разных знаков. Действительно, из формулы (5.2.19)

видно, что если $P_{n-1}^{(\lambda, \mu)}(x) = 0$, то

$$P_n^{(\lambda, \mu)}(x) = -P_{n-2}^{(\lambda, \mu)}(x).$$

Таким образом, эта последовательность многочленов образует обобщенный ряд Штурма. Из алгебры известно, что если обозначить через $u(x)$ число перемен знака в ряду этих многочленов при заданном значении x , а через r — число вещественных корней многочлена $P_n^{(\lambda, \mu)}(x)$, то будем иметь $r \geq u(-\infty) - u(\infty)$. А так как последовательность $P_n^{(\lambda, \mu)}(x)$ содержит многочлены всех степеней с коэффициентами при старших членах одного и того же знака, то $u(\infty) = 0$, а $u(-\infty) = n$ в последовательности (5.2.20) и $u(-\infty) = n - 1$ в последовательности (5.2.21). Следовательно, все корни многочлена $P_n^{(\lambda, \mu)}(x)$ не только вещественны при любых вещественных λ и μ , но, кроме того, просты и корни $P_{n-1}^{(\lambda, \mu)}(x)$ взаимно разделяются с корнями $P_n^{(\lambda, \mu)}(x)$.

Отсюда на основании теорем а) и б) (см. стр. 106) мы можем сделать вывод, что вещественные части всех корней многочлена $P_n^{(s)}(x)$ одного знака. Этот знак может быть только плюсом, так как коэффициент при x^{n-1} в $P_n^{(s)}(x)$ отрицательный. Таким образом, доказано, что все корни многочлена $P_n^{(s)}(x)$ при $s = 2$ лежат в правой полуплоскости.

Перейдем теперь к параметру $s = 3$. Из явного выражения (5.2.1) для многочленов $P_n^{(s)}(x)$ видно, что многочлен $P_n^{(3)}(x)$ можно получить из многочлена $P_n^{(2)}(x)$, если коэффициенты a_k последнего умножить на $\frac{n+k+1}{n+1}$. Пусть для $s = 2$ многочлен $P_n^{(2)}(x)$ имеет вид (5.2.16), тогда для $s = 3$ многочлен $P_n^{(3)}(x)$ имеет следующий вид:

$$P_n^{(3)}(x) = \frac{2n+1}{n+1} a_n x^n + \frac{2n}{n+1} a_{n-1} x^{n-1} + \\ + \frac{2n-1}{n+1} a_{n-2} x^{n-2} + \dots + \frac{n+2}{n+1} a_1 x + \frac{n+1}{n+1} a_0. \quad (5.2.22)$$

Для дальнейшего нам потребуются следующая известная из анализа теорема **).

*) См. Ф. Гантмахер, Теория матриц, М., «Наука», 1967, стр. 471.

**) См. Г. Полиа, Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, т. II, М., Гостехиздат, 1956, стр. 77.

в) Пусть

$$f(z) = b_0 + \binom{n}{1} b_1 z + \binom{n}{2} b_2 z^2 + \binom{n}{3} b_3 z^3 + \dots \\ \dots + \binom{n}{n-1} b_{n-1} z^{n-1} + b_n z^n$$

— многочлен n -й степени, все нули которого лежат в «круге» *) K ; далее,

$$g(z) = c_0 + \binom{n}{1} c_1 z + \binom{n}{2} c_2 z^2 + \binom{n}{3} c_3 z^3 + \dots \\ \dots + \binom{n}{n-1} c_{n-1} z^{n-1} + c_n z^n$$

— многочлен n -й степени с нулями $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. Тогда каждый нуль γ многочлена $h(z)$, составленного из $f(z)$ и $g(z)$:

$$h(z) = b_0 c_0 + \binom{n}{1} b_1 c_1 z + \binom{n}{2} b_2 c_2 z^2 + \binom{n}{3} b_3 c_3 z^3 + \dots \\ \dots + \binom{n}{n-1} b_{n-1} c_{n-1} z^{n-1} + b_n c_n z^n, \quad (5.2.23)$$

имеет вид $\gamma = -\beta_v k$, где v — индекс ($1 \leq v \leq n$), а k — некоторая точка в K .

Составляя комбинацию вида (5.2.23) из многочлена $P_n^{(2)}(x)$ и многочлена

$$Q(x) = \frac{2n+1}{n+1} x^n + \binom{n}{n-1} \frac{2n}{n+1} x^{n-1} + \binom{n}{n-2} \frac{2n-1}{n+1} x^{n-2} + \dots \\ \dots + \binom{n}{1} \frac{n+2}{n+1} x + \frac{n+1}{n+1}, \quad (5.2.24)$$

получим многочлен $P_n^{(3)}(x)$.

Корни многочлена $P_n^{(3)}(x)$ лежат, как уже доказано, в правой полуплоскости. Определим теперь корни многочлена $Q(x)$. Докажем, что $Q(x)$ имеет вид

$$Q(x) = \frac{1}{n+1} (x+1)^{n-1} [(2n+1)x + n+1]. \quad (5.2.25)$$

*) Под «кругом» понимается либо замкнутая внутренняя, либо замкнутая внешняя область окружности, либо замкнутая полуплоскость.

Для этого сравним коэффициенты при x^k в выражениях (5.2.24) и (5.2.25) для многочлена $Q(x)$. Коэффициент при x^k в выражении (5.2.24) равен $\frac{n+k+1}{n+1} C_n^k$. Вычислим коэффициент при x^k в выражении (5.2.25):

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} [(n+1) C_{n-1}^k + (2n+1) C_n^{k-1}] &= \\ &= \frac{1}{n+1} \left[(n+1) \frac{n-k}{n} C_n^k + (2n+1) \frac{k}{n} C_n^k \right] = \\ &= \frac{C_n^k}{n(n+1)} [(n+1)(n-k) + k(2n+1)] = \\ &= \frac{C_n^k}{n(n+1)} (n^2 + nk + n) = \frac{n+k+1}{n+1} C_n^k. \end{aligned}$$

Следовательно, многочлен $Q(x)$ действительно имеет вид (5.2.25). Из (5.2.25) сразу видно, что все корни многочлена $Q(x)$ отрицательны: $x_1 = -\frac{n+1}{2n+1}$ и $x = -1$ — корень кратности $n-1$.

Таким образом, корни многочлена $P_n^{(2)}(x)$ лежат в правой полуплоскости, а корни $Q(x)$ отрицательны. На основании теоремы в) корни многочлена $P_n^{(3)}(x)$, являющегося комбинацией $P_n^{(2)}(x)$ и $Q(x)$, также будут лежать в правой полуплоскости.

Зная, что корни многочлена $P_n^{(3)}(x)$ имеют положительные вещественные части, совершенно аналогично можно доказать, что корни многочлена $P_n^{(4)}(x)$ тоже имеют положительные вещественные части, и т. д.

Это можно доказать и другим способом. Для многочленов $P_n^{(s)}(x)$ имеет место интегральное представление (5.2.10). Продифференцируем указанное равенство по x , получим

$$\begin{aligned} P_n^{(s)'}(x) &= \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n+s-1)} \int_0^\infty n t^{n+s-1} (1-xt)^{n-1} e^{-t} dt = \\ &= n(n+s-1) \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n+s)} \int_0^\infty t^{n+s-1} (1-xt)^{n-1} e^{-t} dt = \\ &= n(n+s-1) P_{n-1}^{(s+2)}(x). \end{aligned} \quad (5.2.26)$$

Известно, что если корни многочлена расположены в некоторой полуплоскости, то все корни его производной

расположены в той же полуплоскости. На основании этого из формулы (5.2.26) видно, что если корни многочленов $P_n^{(s)}(x)$ при $s=2$ и $s=3$ расположены в правой полуплоскости, то корни всех многочленов при целых s , больших 2, тоже расположены в правой полуплоскости. Теорема 4 доказана.

В теореме 4 установлено, что корни многочленов $P_n^{(s)}(x)$ имеют положительные вещественные части при всех целых $s \geq 2$. Для других положительных значений параметра s , в частности для положительных рациональных, этот вопрос остается открытым. Однако в тех вычислениях (см. [8]), которые были проведены для $s=0,01$ (0,01) 3 и $n=1$ (1) 10, корни всегда лежали в правой полуплоскости, причем их действительные части росли вместе с ростом s .

На этом можно закончить исследование свойств ортогональных многочленов, связанных с квадратурной формулой наивысшей степени точности для обращения преобразования Лапласа.

Следует заметить, что эти многочлены являются частным случаем так называемых многочленов Бесселя $y_n(x, a, b)$ при $a=s$, $b=-1$, которые были исследованы в работах Г. Крола и О. Фринка, В. А. Аль-Салама.

§ 5.3. Методы вычисления коэффициентов и узлов квадратурной формулы

В § 5.1 было указано, что коэффициенты A_k квадратурной формулы наивысшей степени точности для обращения преобразования Лапласа имеют значения (5.1.6) или в другой записи

$$A_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} e^{p} p^{-s} \frac{P_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right)}{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_k}\right) P_n^{(s)'}\left(\frac{1}{p_k}\right)} dp, \quad (5.3.1)$$

где производная от многочлена $P_n^{(s)}\left(\frac{1}{p}\right)$ берется по переменной $x=1/p$.

Для вычисления этого интеграла воспользуемся равенством, являющимся аналогом известного тождества Кристоффеля — Дарбу. Получим это равенство.

Перепишем рекуррентное соотношение (5.2.7) для многочленов $P_n^{(s)}(x)$ в виде

$$xP_n(x) = B_n P_{n+1}(x) + C_n P_n(x) + D_n P_{n-1}(x), \quad (5.3.2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} B_n &= \frac{n+s-1}{(2n+s)(2n+s-1)}, \\ C_n &= \frac{s-2}{(2n+s)(2n+s-2)}, \\ D_n &= -\frac{n}{(2n+s-1)(2n+s-2)}, \end{aligned} \right\} \quad (5.3.3)$$

а индекс s здесь и в дальнейшем ради простоты записи опущен.

Умножим равенство (5.3.2) на $P_n(t)$:

$$xP_n(x)P_n(t) = B_n P_{n+1}(x)P_n(t) + C_n P_n(x)P_n(t) + D_n P_{n-1}(x)P_n(t). \quad (5.3.4)$$

В равенстве (5.3.4) поменяем местами переменные x и t и полученное равенство вычтем из (5.3.4). Средние члены правых частей при этом взаимно уничтожаются. После этого получим

$$(x-t)P_n(x)P_n(t) = B_n [P_{n+1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n+1}(t)] + D_n [P_{n-1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n-1}(t)].$$

Запишем аналогичные равенства для $n-1, n-2, \dots, 1, 0$:

$$(x-t)P_{n-1}(x)P_{n-1}(t) = B_{n-1} [P_n(x)P_{n-1}(t) - P_{n-1}(x)P_n(t)] + D_{n-1} [P_{n-2}(x)P_{n-1}(t) - P_{n-1}(x)P_{n-2}(t)],$$

$$(x-t)P_{n-2}(x)P_{n-2}(t) = B_{n-2} [P_{n-1}(x)P_{n-2}(t) - P_{n-2}(x)P_{n-1}(t)] + D_{n-2} [P_{n-3}(x)P_{n-2}(t) - P_{n-2}(x)P_{n-3}(t)],$$

.....

$$(x-t)P_1(x)P_1(t) = B_1 [P_2(x)P_1(t) - P_1(x)P_2(t)] + D_1 [P_0(x)P_1(t) - P_1(x)P_0(t)],$$

$$(x-t)P_0(x)P_0(t) = B_0 [P_1(x)P_0(t) - P_0(x)P_1(t)].$$

Преобразуем полученную систему равенств в эквивалентную ей, изменив указанным в нижеследующей записи

способом ее коэффициенты:

$$\begin{aligned}
 (x-t) P_{n-1}(x) P_{n-1}(t) &= \\
 &= B_{n-1} [P_n(x) P_{n-1}(t) - P_{n-1}(x) P_n(t)] + \\
 &\quad + D_{n-1} [P_{n-2}(x) P_{n-1}(t) - P_{n-1}(x) P_{n-2}(t)], \\
 \frac{D_{n-1}}{B_{n-2}} (x-t) P_{n-2}(x) P_{n-2}(t) &= \\
 &= D_{n-1} [P_{n-1}(x) P_{n-2}(t) - P_{n-2}(x) P_{n-1}(t)] + \\
 &\quad + \frac{D_{n-1} D_{n-2}}{B_{n-2}} [P_{n-3}(x) P_{n-2}(t) - P_{n-2}(x) P_{n-3}(t)], \\
 &\dots \dots \dots \\
 \frac{D_{n-1} D_{n-2} \dots D_2}{B_{n-2} B_{n-3} \dots B_1} (x-t) P_1(x) P_1(t) &= \\
 &= \frac{D_{n-1} D_{n-2} \dots D_2}{B_{n-2} B_{n-3} \dots B_2} [P_2(x) P_1(t) - P_1(x) P_2(t)] + \\
 &\quad + \frac{D_{n-1} D_{n-2} \dots D_1}{B_{n-2} B_{n-3} \dots B_1} [P_0(x) P_1(t) - P_1(x) P_0(t)], \\
 \frac{D_{n-1} D_{n-2} \dots D_1}{B_{n-2} B_{n-3} \dots B_0} (x-t) P_0(x) P_0(t) &= \\
 &= \frac{D_{n-1} D_{n-2} \dots D_1}{B_{n-2} B_{n-3} \dots B_1} [P_1(x) P_0(t) - P_0(x) P_1(t)].
 \end{aligned}$$

Складывая теперь выписанные равенства почленно, получим искомое тождество

$$\begin{aligned}
 (x-t) \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m P_m(x) P_m(t) &= \\
 &= B_{n-1} [P_n(x) P_{n-1}(t) - P_{n-1}(x) P_n(t)], \quad (5.3.5)
 \end{aligned}$$

где

$$\alpha_m = \frac{D_{n-1} D_{n-2} \dots D_{1+m}}{B_{n-2} B_{n-3} \dots B_m}, \quad m=0, 1, \dots, n-2; \quad \alpha_{n-1} = 1.$$

Положим в выражении (5.3.5) $t = x_k = \frac{1}{p_k}$, где x_k — корень многочлена $P_n(x)$. После деления на $x - x_k = \frac{1}{p} - \frac{1}{p_k}$ оно примет вид

$$\sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m P_m(x) P_m(x_k) = B_{n-1} \frac{P_n(x) P_{n-1}(x_k)}{x - x_k}.$$

Умножим его на $e^p p^{-s}$ и проинтегрируем. Интеграл

$$P_m(x_k) \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} e^p p^{-s} P_m\left(\frac{1}{p}\right) dp$$

равен нулю при $m \geq 1$ в силу условия ортогональности (5.1.7) и равен $\frac{1}{\Gamma(s)}$ при $m=0$. Поэтому после интегрирования получится равенство

$$\alpha_0 \frac{1}{\Gamma(s)} = B_{n-1} P_{n-1}(x_k) \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} e^p p^{-s} \frac{P_n\left(\frac{1}{p}\right)}{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_k}\right)} dp.$$

Разделим его на $P'_n(x_k)$:

$$\begin{aligned} \alpha_0 \frac{1}{\Gamma(s) P'_n(x_k)} &= \\ &= B_{n-1} P_{n-1}(x_k) \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} e^p p^{-s} \frac{P_n\left(\frac{1}{p}\right)}{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_k}\right) P'_n\left(\frac{1}{p_k}\right)} dp. \end{aligned}$$

Последний интеграл есть не что иное, как коэффициент квадратурной формулы A_k , следовательно,

$$A_k = \frac{\alpha_0}{B_{n-1} \Gamma(s) P_{n-1}(x_k) P'_n(x_k)}. \quad (5.3.6)$$

Остается вычислить α_0/B_{n-1} :

$$\frac{\alpha_0}{B_{n-1}} = \frac{D_{n-1} D_{n-2} \dots D_1}{B_{n-1} B_{n-2} \dots B_1 B_0}.$$

Для этого вычислим сначала отношение D_{n-1}/B_{n-1} :

$$\begin{aligned} \frac{D_{n-1}}{B_{n-1}} &= - \frac{(n-1)(2n+s-2)(2n+s-3)}{(2n+s-3)(2n+s-4)(n+s-2)} = \\ &= - \frac{(n-1)(2n+s-2)}{(2n+s-4)(n+s-2)}, \quad B_0 = \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_0}{B_{n-1}} &= \\ &= \frac{(-1)^{n-1} (n-1)! (2n+s-2) (2n+s-4) \dots (2+s) s}{(2n+s-4) \dots (2+s) s (n+s-2) (n+s-3) \dots (1+s) s} = \\ &= \frac{(-1)^{n-1} (n-1)! (2n+s-2)}{(n+s-2) (n+s-3) \dots (1+s) s} = \\ &= \frac{(-1)^{n-1} (n-1)! (2n+s-2) \Gamma(s)}{\Gamma(n+s-1)}. \quad (5.3.7) \end{aligned}$$

Подставляя выражение (5.3.7) в формулу (5.3.6) для A_k , получим следующую формулу:

$$A_k = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)! (2n+s-2)}{\Gamma(n+s-1) P_{n-1}(x_k) P'_n(x_k)}, \quad (5.3.8)$$

которой можно пользоваться для вычисления коэффициентов квадратурной формулы.

Перейдем теперь к методу вычисления узлов квадратурной формулы ρ_k . Обратные степени этих узлов — числа $x_k = \frac{1}{\rho_k}$, как было найдено выше, являются корнями многочленов $P_n^{(s)}(x)$. Поэтому для их вычисления можно находить коэффициенты многочленов $P_n^{(s)}(x)$, а потом тем или иным методом находить их корни. Но этот способ связан с большими вычислительными трудностями: во-первых, для каждого значения параметра s нужно определять коэффициенты многочленов $P_n^{(s)}(x)$ по рекуррентной формуле, а во-вторых, вычисление корней многочлена $P_n^{(s)}(x)$ по методу Ньютона связано с большой потерей точности, особенно при больших значениях n .

Чтобы избежать вычисления коэффициентов многочленов $P_n^{(s)}(x)$ и избавиться от большой потери точности при вычислениях, можно воспользоваться другим методом вычисления узлов квадратурной формулы. Для корней x_k многочленов $P_n^{(s)}(x)$ можно построить простую систему алгебраических уравнений, содержащую лишь x_k и параметр s . Для этого достаточно исходить из дифференциального уравнения, которому удовлетворяют многочлены $P_n^{(s)}(x)$:

$$x^2 P_n^{(s)''}(x) + (sx-1) P_n^{(s)'}(x) - n(n+s-1) P_n^{(s)}(x) = 0. \quad (5.3.9)$$

В уравнении (5.3.9) положим $x = x_k$, тогда в нем исчезнет третий член левой части. Полученное уравнение разделим на $x_k^2 P_n^{(s)'}(x_k)$, что возможно, так как многочлен $P_n^{(s)}(x)$ не имеет нулевого корня и не имеет кратных корней. Действительно, из явного выражения (5.2.1) видно, что свободный член многочлена $P_n^{(s)}(x)$ не равен нулю, значит, $x_k \neq 0$. Далее, из (5.3.9) следует, что если $P_n^{(s)'}(x_k) = 0$, то и $P_n^{(s)''}(x_k) = 0$. Дифференцируя уравнение (5.3.9) n раз, получим, что и

$$P_n^{(s)'''}(x_k) = 0, \quad P_n^{(s)IV}(x_k) = 0, \quad \dots, \quad P_n^{(s)(n)}(x_k) = 0.$$

Последнее равенство неверно, так как $P_n^{(s)(n)}(x_k)$ есть отличная от нуля постоянная. Следовательно, $P_n^{(s)'}(x_k) \neq 0$.

Уравнение (5.3.9) после указанных преобразований примет вид

$$\frac{P_n^{(s)''}(x_k)}{P_n^{(s)'}(x_k)} + \frac{s}{x_k} - \frac{1}{x_k^2} = 0. \quad (5.3.10)$$

Преобразуем выражение $\frac{P_n^{(s)''}(x_k)}{P_n^{(s)'}(x_k)}$. Для этого запишем многочлен $P_n^{(s)}(x)$ в виде

$$P_n^{(s)}(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = a \prod_{m=1}^n (x - x_m).$$

Тогда

$$P_n^{(s)'}(x) = a \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n (x - x_m),$$

$$P_n^{(s)'}(x_k) = a \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n (x_k - x_m),$$

$$P_n^{(s)''}(x) = a \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i, j}}^n (x - x_m),$$

$$P_n^{(s)''}(x_k) = 2a \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j, k}}^n (x_k - x_m).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{P_n^{(s)''}(x_k)}{P_n^{(s)'}(x_k)} = \frac{2a \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j, k}}^n (x_k - x_m)}{a \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n (x_k - x_m)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{2}{(x_k - x_j)}.$$

Теперь уравнение (5.3.10) можно записать в виде

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{2}{x_k - x_j} + \frac{s}{x_k} - \frac{1}{x_k^2} = 0. \quad (5.3.11)$$

Заменим x_k на $\frac{1}{p_k}$ и сделаем несложные преобразования в равенстве (5.3.11):

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{2p_k p_j}{p_j - p_k} + s p_k - p_k^2 &= 0, \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{2p_j}{p_j - p_k} + s - p_k &= 0, \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n 2 \left(1 + \frac{p_k}{p_j - p_k} \right) + s - p_k &= 0, \\ 2(n-1) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{2p_k}{p_j - p_k} + s - p_k &= 0, \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{2}{p_k - p_j} + 1 - \frac{2n + s - 2}{p_k} &= 0. \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

Записав равенство (5.3.12) для всех k ($k = 1, 2, \dots, n$), получим систему уравнений для определения узлов квадратурной формулы p_k .

Равенство (5.3.12) приобретает простой физический смысл, если воспользоваться некоторой электростатической аналогией. Предположим, что в точку 0 комплексной плоскости помещен электрический заряд отрицательной массы $-(2n+s-2)$. Наряду с ним рассмотрим n свободных зарядов с положительной массой 2 и комплексные координаты, их назовем p_k ($k=1, 2, \dots, n$). Будем считать, что они действуют друг на друга с силой, обычной для плоского электрического поля, когда численное значение силы обратно пропорционально первой степени расстояния и коэффициент пропорциональности равен произведению масс зарядов. Кроме того, будем считать, что к каждому свободному заряду p_k приложена внешняя сила, имеющая величину 2, параллельная действительной оси и направленная в положительном направлении этой оси. В состоянии равновесия системы равнодействующие всех сил, приложенных к каждому из свободных зарядов, должны равняться нулю:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{2 \cdot 2}{p_k - p_j} - \frac{2(2n+s-2)}{p_k - 0} + 2 = 0.$$

Если равенство сократить на множитель 2 и перейти к комплексно сопряженным величинам, получится система (5.3.12).

Равенство (5.3.12) является системой уравнений, из которой могут быть найдены узлы квадратурной формулы. Так как узлы p_k являются числами комплексными, то, представив p_k в виде $p_k = s_k + i\sigma_k$, систему (5.3.12) можно преобразовать, отделив в ней действительную и мнимую части. После этого получится следующая система уравнений для определения s_k и σ_k :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{2(s_k - s_j)}{(s_k - s_j)^2 + (\sigma_k - \sigma_j)^2} + 1 - \frac{(2n+s-2)s_k}{s_k^2 + \sigma_k^2} &= 0, \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{2(\sigma_k - \sigma_j)}{(s_k - s_j)^2 + (\sigma_k - \sigma_j)^2} - \frac{(2n+s-2)\sigma_k}{s_k^2 + \sigma_k^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.13)$$

Система (5.3.13) состоит из $2n$ уравнений. На самом же деле их будет всего n , так как числа p_k являются комплексно сопряженными числами:

$$p_2 = \bar{p}_1, p_4 = \bar{p}_3, \dots$$

Следовательно,

$$s_2 = s_1, s_4 = s_3, \dots; \sigma_2 = -\sigma_1, \sigma_4 = -\sigma_3, \dots$$

В таблицах 1 и 2 книги [8] приведены значения узлов и коэффициентов квадратурной формулы (5.1.5), имеющей наивысшую степень точности, для $s=1, 2, 3, 4, 5$; $n=1(1)15$ с 20 верными знаками и для $s=0,01(0,01)3$; $n=1(1)10$ с 7—8 верными знаками.

ГЛАВА 6

МЕТОДЫ ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА С ПОМОЩЬЮ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ С РАВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 6.1. Построение вычислительной формулы

Будем предполагать, что задача обращения преобразования Лапласа снова сведена к вычислению интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} e^p p^{-s} \varphi(p) dp. \quad (6.1.1)$$

Для вычисления его построим квадратурную формулу с равными коэффициентами

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} e^p p^{-s} \varphi(p) dp \approx C_n \sum_{k=1}^n \varphi(p_k). \quad (6.1.2)$$

Неизвестными величинами, выбором которых можно распорядиться, в формуле (6.1.2) являются числа C_n и p_k ($k=1, 2, \dots, n$). Выберем их так, чтобы формула (6.1.2) была точной для любого многочлена степени n от переменной $1/p$. Это требование равносильно тому, чтобы формула (6.1.2) была точной для функций $\varphi(p) = 1/p^k$ ($k=0, 1, \dots, n$). Множитель C_n определим из условия, чтобы равенство (6.1.2) было точным для функции $\varphi(p) \equiv 1$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} e^p p^{-s} dp = nC_n,$$

следовательно,

$$C_n = \frac{1}{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} e^p p^{-s} dp = \frac{1}{n\Gamma(s)}. \quad (6.1.3)$$

Найдя все A_k , можно построить многочлен $\omega_n(x)$. Определяя же его корни x_k , найдем все узлы $p_k = 1/x_k$ квадратурной формулы (6.1.4).

§ 6.2. Замечание о расположении узлов

Для частного значения параметра $s = 1$ формула (6.1.4) была построена Г. Солзером. Им же были вычислены для этого параметра s многочлены $\omega_n(x)$ при $n = 1(1)10$ и определены их корни x_k и, следовательно, узлы $p_k = 1/x_k$ квадратурной формулы. Узлы p_k приведены в таблице с 8 верными знаками в книге [8].

По смыслу задачи узлы p_k формулы (6.1.4) должны лежать в области определения и регулярности функции $\varphi(p)$, т. е. в правой полуплоскости.

Как видно из таблицы, начиная с некоторого n , две из точек p_k переходят в левую полуплоскость. С возрастанием n , по-видимому, все больше точек p_k будет переходить в левую полуплоскость, так как действительные части p_k убывают с ростом n . Этот факт затрудняет применение формулы (6.1.4) к вычислениям.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ОБРАЩЕНИЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

ГЛАВА 7

ВВЕДЕНИЕ

Как известно и как будет показано ниже, задача вычисления интеграла Меллина может быть приведена к преобразованию Фурье. Последнее же является классическим аппаратом исследования широкого круга прикладных задач, и было предложено много способов для его численного осуществления. Каждый из таких способов можно, принципиально говоря, применить к решению проблемы обращения. Обзор главнейших из них будет дан в гл. 9, 10. Сейчас же мы хотим еще раз обратить внимание на то, что все эти методы имеют один принципиальный недостаток, а именно, они не учитывают того, что под знаком интеграла Меллина стоит не произвольная функция $F(p)$ с комплексными значениями, а функция-изображение, которая заведомо обладает некоторыми заранее известными свойствами, такими, например, как регулярность в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$ ($\alpha \leq c$), стремление к нулю при удалении точки p в бесконечность и др. В этом отношении вычислительные методы обращения, которые рассматривались в первой части книги, являются более предпочтительными, так как в них в той или иной мере учитывались свойства изображения.

Несмотря на указанный недостаток, мы сохранили в книге вопрос о вычислении интеграла Меллина путем приведения его к интегралу Фурье на основании следующих соображений. Во-первых, это есть один из возможных методов счета, когда узлы квадратурной формулы берутся на линии интегрирования $p = c + i\tau$ ($-\infty < \tau < \infty$). Во-вторых, этот метод может быть полезным в практике вычислений, хотя бы как параллельный и контрольный для других.

§ 7.1. Преобразования Фурье

Ниже мы будем рассматривать двойной интеграл Фурье

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(x-t) dt, \quad (7.1.1)$$

считая функцию f абсолютно интегрируемой на числовой оси $-\infty < t < \infty$. Внутренний интеграл по аргументу t будет абсолютно сходиться при всех действительных значениях x и u , и при том равномерно.

Что же касается сходимости двойного интеграла (7.1.1) и его численного значения, то достаточной является приводимая ниже теорема 1 (см., например, [10], стр. 22). Для лучшего понимания ее полезно сделать следующее замечание.

Замечание. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $f(x)$ с конечными значениями. Разобьем $[a, b]$ на конечное число частей точками $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$. Составим сумму

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|.$$

Она имеет смысл суммы абсолютных значений изменения f на частичных отрезках $[x_{k+1}, x_k]$ и зависит от точек x_k ($k = 1, 2, \dots, n-1$). Верхняя грань всевозможных сумм $V(x_0, x_1, \dots, x_n)$

$$\text{Var}_{a \leq x \leq b}(f) = \sup_{x_1, \dots, x_{n-1}} V(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

называется *полным абсолютным изменением f на отрезке $[a, b]$* . Если $\text{Var}_{a \leq x \leq b}(f)$ имеет конечное значение, то говорят, что f является *функцией с ограниченным (конечным) изменением на $[a, b]$* .

Теорема 1. Пусть $f(t)$ абсолютно интегрируема на оси $-\infty < t < \infty$. Если f на некотором отрезке $[a, b]$, содержащем внутри себя точку x , имеет ограниченное изменение, то верно равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(x-t) dt. \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

Если же f имеет ограниченное изменение на $[a, b]$ и непрерывна там, то

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(x-t) dt, \quad (7.1.3)$$

при этом двойной интеграл сходится к $f(x)$ равномерно относительно x во всякой замкнутой внутренней части $[a, b]$.

Равенства (7.1.2) и (7.1.3) называются *формулами Фурье*.

В дальнейшем всюду будем считать, что $f(t)$ имеет ограниченное изменение в любом конечном интервале оси t . Тогда для всех конечных значений x будет выполняться равенство (7.1.2). Кроме того, для упрощения записи будем считать, что все разрывы f являются «правильными» и во всех точках x выполняется соотношение $f(x) = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$. Равенства (7.1.2) и (7.1.3) будут при этом условии иметь одинаковый вид, и ниже мы будем пользоваться равенством (7.1.3).

Интегралу Фурье можно придать более симметричную форму, если воспользоваться комплексными величинами и заменить тригонометрическую функцию ее выражением через показательные функции:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(x-t) dt &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [e^{i u(x-t)} + e^{-i u(x-t)}] dt. \end{aligned}$$

Если выполнить почленное интегрирование и в первом из интегралов заменить переменную u на $-u$, можно привести формулу Фурье (7.1.3) к виду *)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i x u} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i u t} dt. \quad (7.1.4)$$

*) В формуле Фурье (7.1.3) под интегралом по переменной u , взятым по полуоси $0 \leq u < \infty$, понимается предел, к которому стремится интеграл по отрезку $0 \leq u < A$, когда A неограниченно возрастает. В соответствии с этим в (7.1.4) интеграл по оси $-\infty < u < \infty$ понимается в смысле его «главного значения» как предел, к которому стремится интеграл, взятый по симметричному отрезку $-A \leq u \leq A$, когда $A \rightarrow \infty$.

Это равенство кратко называют *комплексной формулой Фурье*. С ней связаны взаимные, или двойственные, соотношения между парами функций

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iut} dt, \quad (7.1.5)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) e^{-ixu} du. \quad (7.1.6)$$

Первое из равенств называется *комплексным преобразованием Фурье* *) и переводит оригинал f в изображение φ . Второе равенство дает правило перехода от изображения φ к оригиналу f .

Приведем еще две формулы Фурье частного вида, но такие, что они в совокупности равносильны общей формуле (7.1.3). Если воспользоваться известным выражением для косинуса разности двух аргументов, равенству (7.1.3) можно придать вид, аналогичный разложению функции в ряд Фурье:

$$f(x) = \int_0^{\infty} [a(u) \cos ux + b(u) \sin ux] du, \quad (7.1.7)$$

$$a(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ut dt,$$

$$b(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ut dt.$$

*) Чтобы придать формулам преобразования и его обращения более симметричный вид, равенства (7.1.5—6) часто изменяют и записывают несколько иначе:

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iut} dt,$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) e^{-ixu} du.$$

Так как численный множитель в первом равенстве для нашего изложения значения не имеет и лишь осложняет запись, мы избрали для правил форму (7.1.5—6). Аналогичные замечания можно сделать о приводимых ниже косинус- и синус-преобразованиях Фурье.

Когда f есть четная функция, то

$$a(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos ut \, dt, \quad b(u) = 0$$

и (7.1.7) переходит в *косинус-формулу Фурье*:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos xu \, du \int_0^{\infty} f(t) \cos ut \, dt \quad (0 \leq x < \infty). \quad (7.1.8)$$

Аналогично, если f есть нечетная функция, то (7.1.7) переходит в *синус-формулу Фурье*:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin ux \, du \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \, dt \quad (0 \leq x < \infty). \quad (7.1.9)$$

Общую формулу Фурье (7.1.3) можно рассматривать как комбинацию частных формул (7.1.8—9). В самом деле, всякую функцию f можно представить как сумму ее четной и нечетной частей:

$$f(x) = g(x) + h(x), \quad g(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)],$$

$$h(x) = \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)].$$

Внутренний интеграл формулы (7.1.3) будет иметь следующее выражение через g и h :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(x-t) dt &= 2 \cos xu \int_0^{\infty} g(t) \cos ut \, dt + \\ &+ 2 \sin xu \int_0^{\infty} h(t) \sin ut \, dt. \end{aligned}$$

Поэтому из формулы (7.1.3) получим

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) + h(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos xu \, du \int_0^{\infty} g(t) \cos ut \, dt + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin xu \, du \int_0^{\infty} h(t) \sin ut \, dt \end{aligned}$$

и общая формула Фурье есть действительно сумма косинус-формулы для $g(x)$ и синус-формулы для $h(x)$.

С косинус-формулой Фурье (7.1.8) связано соотношение между парой функций f и φ_c :

$$\varphi_c(u) = \int_0^{\infty} f(t) \cos ut \, dt \quad (0 \leq x < \infty), \quad (7.1.10)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi_c(u) \cos xu \, du. \quad (7.1.11)$$

Первое из этих равенств есть косинус-преобразование оригинала f в изображение φ_c , второе же равенство обращает это преобразование.

С синус-формулой Фурье (7.1.9) также связано двойственное соотношение между функциями f и φ_s :

$$\varphi_s(u) = \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \, dt \quad (0 \leq x < \infty), \quad (7.1.12)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi_s(u) \sin xu \, du. \quad (7.1.13)$$

Равенство (7.1.12) есть синус-преобразование Фурье, и (7.1.13) — его обращение.

Как можно видеть, комплексное преобразование Фурье (7.1.5) легко приводится к преобразованиям (7.1.10) и (7.1.12). Заменяем в (7.1.5) функцию $f(t)$ ее разложением на четную и нечетную части: $f(x) = g(x) + h(x)$, где $g(x)$ и $h(x)$ указаны выше:

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iut} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [g(t) + h(t)] [\cos ut + i \sin ut] dt = \\ &= 2 \int_0^{\infty} g(t) \cos ut \, dt + 2i \int_0^{\infty} h(t) \sin ut \, dt = \\ &= 2g_c(u) + 2ih_s(u), \end{aligned}$$

и комплексное преобразование (7.1.5), следовательно, есть простая линейная комбинация косинус- и синус-преобразований Фурье.

§ 7.2. Приведение интеграла типа Меллина к преобразованию Фурье

Укажем на связь между обращением преобразования Лапласа и преобразованием Фурье. Рассмотрим интеграл Меллина

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) e^{xp} dp \quad (-\infty < x < \infty) \quad (7.2.1)$$

при единственном предположении о функции $F(p)$: будем считать ее заданной и абсолютно интегрируемой на прямой $p = c + i\tau$ ($-\infty < \tau < \infty$). Интеграл сходится равномерно относительно x на оси $-\infty < x < \infty$ и является там непрерывной функцией x .

Если в (7.2.1) внести вместо p его значение $p = c + i\tau$ на линии интегрирования и принять во внимание, что в величине $e^{xp} = e^{cx} e^{ix\tau}$ множитель e^{cx} от переменной интегрирования не зависит, можно (7.2.1) преобразовать к виду

$$e^{-cx} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(c + i\tau) e^{ix\tau} d\tau, \quad (7.2.2)$$

показывающему, что вычисление интеграла Меллина $f(x)$ приводится к комплексному преобразованию Фурье функции $F(c + i\tau)$.

Этот простой факт позволяет для преобразования Меллина применить все известные методы численного преобразования Фурье.

В § 7.1 мы обращали внимание на то, что преобразование Фурье функции $F(c + i\tau)$ легко приводится к более простым косинус- и синус-преобразованиям четной и нечетной частей функции $F(c + i\tau)$:

$$F(c + i\tau) = g(\tau) + h(\tau),$$

$$g(\tau) = \frac{1}{2} [F(c + i\tau) + F(c - i\tau)],$$

$$\begin{aligned}
 h(\tau) &= \frac{1}{2} [F(c + i\tau) - F(c - i\tau)], \\
 e^{-cx} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [g(\tau) + h(\tau)] e^{i x \tau} d\tau = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} g(\tau) \cos x\tau d\tau + \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} h(\tau) \sin x\tau d\tau = \\
 &= \frac{1}{\pi} [g_c(x) + i h_s(x)]. \quad (7.2.3)
 \end{aligned}$$

Изложенное дает возможность привести вычисление интегралов Меллина к вычислению косинус-и синус-преобразований Фурье. Преимущественно на этих последних преобразованиях мы остановим в дальнейшем все внимание.

ГЛАВА 8

ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА С ПОМОЩЬЮ РЯДА ФУРЬЕ

Изложение вопроса о применении гармонического анализа к обращению преобразования Лапласа начнем с рассмотрения случаев, которые можно считать вырожденными, когда задача вычислений упрощается и интегральное преобразование Фурье может быть заменено рядом Фурье. Это наверно можно сделать в двух случаях, либо когда функция $f(x)$ быстро убывает по абсолютной величине при удалении x в бесконечность, либо когда ее изображение $F(c + i\tau)$, стоящее под знаком интеграла (7.2.2), быстро стремится к нулю при возрастании $|\tau|$. При изложении ограничимся лишь описанием вычислительных схем, так как проблемы сходимости и оценки погрешности трудны и еще не изучены.

§ 8.1. Случай быстро убывающего оригинала $f(x)$

Для сокращения записи введем обозначения

$$f(x)e^{-cx} = g(x), \quad F(c + i\tau) = G(\tau).$$

При помощи их преобразование Лапласа

$$F(c + i\tau) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(c + i\tau)t} dt$$

и его обращение (7.2.2) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} G(\tau) &= \int_0^{\infty} g(t) e^{-i\tau t} dt, \\ g(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) e^{ix\tau} d\tau. \end{aligned} \tag{8.1.1}$$

Предположим теперь, что оригинал $f(t)$, а следовательно, и функция $g(t)$ обращаются в нуль или имеют пренебрежимо малые значения всюду вне конечного отрезка $[0, T]$. Разложим $g(t)$ в ряд Фурье на $[0, T]$ и запишем разложение в комплексной форме:

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}, \quad (8.1.2)$$

где $\omega = 2\pi/T$ и

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) e^{-ik\omega t} dt. \quad (8.1.3)$$

Так как $g(t)$ имеет вне $[0, T]$ исчезающе малую величину, можно приближенно считать

$$c_k \approx \frac{1}{T} \int_0^{\infty} g(t) e^{-ik\omega t} dt = \frac{1}{T} G(k\omega). \quad (8.1.4)$$

Погрешность этого равенства имеет значение

$$\frac{1}{T} G(k\omega) - c_k = \frac{1}{T} \int_T^{\infty} g(t) e^{-ik\omega t} dt$$

и может быть оценена следующим неравенством:

$$\left| \frac{1}{T} G(k\omega) - c_k \right| \leq \frac{1}{T} \int_T^{\infty} |g(t)| dt. \quad (8.1.5)$$

Если в (8.1.2) вместо c_k внести их приближенные значения (8.1.4), получим следующее выражение $g(t)$ через значения изображения F в равноотстоящих точках $c + ik\omega$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

$$f(t) e^{-ct} = g(t) \approx \frac{\omega}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(c + ik\omega) e^{ik\omega t}. \quad (8.1.6)$$

При применении этого равенства к вычислениям важно, чтобы функция $F(c + ik\omega)$ достаточно быстро убывала при неограниченном возрастании абсолютного значения k . В некоторых случаях этого можно добиться путем предварительной подготовки изображения $F(p)$ и ускорения стремления к нулю $F(p)$ при $p \rightarrow \infty$. Для ознакомления с задачей такой подготовки мы отсылаем читателя к третьей части книги, посвященной этой задаче.

§ 8.2. Случай быстрого убывания модуля изображения $F(p)$

Функцию $G(\tau) = F(c + i\tau)$ будем считать абсолютно интегрируемой на оси $-\infty < \tau < \infty$ и пренебрежимо малой вне конечного отрезка $[-T \leq \tau \leq T]$. Что же касается ее поведения на самом отрезке $[-T, T]$, то $G(\tau)$ на нем есть регулярная аналитическая функция со значениями, равными нулю с принятой точностью на концах отрезка. Она может быть разложена в ряд Фурье. Разложение запишем в комплексной форме:

$$G(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\Omega\tau}, \quad \Omega = \frac{\pi}{T}, \quad (8.2.1)$$

$$c_m = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T G(t) e^{im\Omega t} dt. \quad (8.2.2)$$

Так как вне $[-T, T]$ функция $G(\tau)$ считается пренебрежимо малой, верно с принятой точностью равенство

$$g(x) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T G(\tau) e^{ix\tau} d\tau \quad (-T \leq x \leq T), \quad (8.2.3)$$

погрешность которого может быть грубо оценена при помощи неравенства

$$\begin{aligned} \left| g(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T G(\tau) e^{ix\tau} d\tau \right| &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{-T} G(\tau) e^{ix\tau} d\tau + \int_T^{\infty} G(\tau) e^{ix\tau} d\tau \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_T^{\infty} [|G(\tau)| + |G(-\tau)|] d\tau. \end{aligned}$$

Внесем в интеграл (8.2.3) вместо $G(\tau)$ разложение (8.2.1) и выполним почленное интегрирование ряда *).

*) В задаче обращения функция $G(\tau) = F(c + i\tau)$ будет аналитической на отрезке $-T \leq \tau \leq T$, но может принимать различные значения на его концах. Ряд Фурье будет сходиться равномерно относительно τ к $G(\tau)$ на отрезке вида $[-T + \delta, T - \delta]$ при всяком положительном δ и сходиться ограниченно к $G(\tau)$ на полуинтервалах $(-T, -T + \delta]$, $[T - \delta, T)$. Почленное интегрирование ряда является возможным.

Если принять во внимание равенство

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T e^{i(x-k\Omega)\tau} d\tau &= \frac{1}{i(x-k\Omega)} [e^{i(x-k\Omega)T} - e^{-i(x-k\Omega)T}] = \\ &= (-1)^k 2T \frac{\sin xT}{xT - k\pi}, \quad x \neq k\Omega, \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

для оригинала $f(x)$ получим следующее приближенное выражение:

$$\begin{aligned} f(x)e^{-cx} = g(x) &\approx \frac{T}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (-1)^k \frac{\sin xT}{xT - k\pi}, \quad (8.2.5) \\ x &\neq k \frac{\pi}{T}, \quad -T < x < T. \end{aligned}$$

Когда $x = m \frac{\pi}{T} = m\Omega$, то, как следует сразу же из равенств (8.2.2–3), для функции $f(x)$ получаем значение

$$f(m\Omega) e^{-cm\Omega} \approx \frac{T}{\pi} c_m. \quad (8.2.6)$$

Применение (8.2.5) к вычислению оригинала требует вычисления коэффициентов Фурье (8.2.2) функции $F(c + i\tau)$. Для ознакомления с методами таких вычислений мы отсылаем к специальной литературе (см. [7], [9]).

ГЛАВА 9

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ

§ 9.1. Несколько предварительных замечаний

Для численного осуществления преобразования Фурье, т. е. для вычисления интегралов

$$\varphi_c(u) = \int_0^{\infty} f(t) \cos ut \, dt, \quad (9.1.1)$$

$$\varphi_s(u) = \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \, dt, \quad (9.1.2)$$

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iut} \, dt, \quad (9.1.3)$$

могут быть применены многие известные классические правила интегрирования, такие, например, как формулы трапеций, парабол и другие, основанные на формулах Котеса, Гаусса и т. д.

Мы не будем останавливаться на таких правилах по двум причинам: во-первых, эти формулы, так же как и их погрешности, хорошо известны и изучены достаточно подробно; во-вторых, все они имеют существенный недостаток, на который полезно обратить сейчас внимание, чтобы пояснить причины, побудившие не ограничиваться указанными правилами, а строить другие формулы, более удобные для вычисления интегралов Фурье.

Формулы, которые выше имелись в виду, получены при помощи замены интегрируемой функции на всем отрезке интегрирования или его частях на алгебраический многочлен невысокой степени. Поэтому они будут давать, наверное, хорошую точность, если интегрируемая функция является достаточно гладкой и не быстро изменяющейся,

В интеграле (9.1.1) интегрируемой функцией является произведение $f(t) \cos ut$. Если параметр u есть большое число, то функция $\cos ut$ будет быстро колебаться и для того, чтобы более или менее точно проследить за изменением произведения $f(t) \cos ut$ и получить значение интеграла с допустимой погрешностью, даже при медленно изменяющейся функции $f(t)$, нужно будет взять в формуле квадратур большое число узлов. Последнее же может сделать вычисления трудными или даже невыполнимыми. Аналогичное можно сказать об интегралах (9.1.2 — 3).

Применение общих квадратурных формул может иметь лишь ограниченное значение: они могут практически быть полезными для вычислений интегралов (9.1.1 — 3) только для небольших значений u .

Чтобы построить правила вычислений, пригодные при изменении u в широких границах, необходимо заранее учитывать наличие множителей $\cos ut$, $\sin ut$, e^{iut} . Это можно сделать, принимая, например, такие множители за весовые функции.

Кроме того, так как u может принимать много значений, часть из которых предвидеть заранее не всегда можно, правила вычислений желательно построить так, чтобы они содержали параметр u в буквенном виде и были удобны для счета при любых, в частности при больших, значениях u .

Будем считать функцию $f(t)$ настолько быстро стремящейся к нулю при $|t| \rightarrow \infty$, что обеспечивается сходимость интегралов $\int_0^{\infty} |f(x)| dx$ или $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$. Ради определенности часто будем предполагать, что при больших значениях $|t|$ выполняется неравенство

$$|f(t)| \leq A |t|^{-1-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0. \quad (9.1.4)$$

§ 9.2. Вычислительные формулы, основанные на алгебраическом интерполировании функции $f(x)$

Алгебраическое интерполирование, т. е. интерполирование при помощи целых алгебраических многочленов, успешно применяется для приближения непрерывных и достаточно гладких функций на конечных отрезках. Если же отрезок, на котором надлежит приближать функцию f ,

является полуосью или всей осью и функция абсолютно интегрируема там или даже удовлетворяет условию (9.1.4), то алгебраическое интерполирование не может дать хорошего приближения. В основание интерполирования тогда должна быть положена другая система функций, например система рациональных функций, непрерывных на оси или полуоси и стремящихся к нулю при неограниченном росте $|t|$. На таком интерполировании остановимся ниже. При применении же алгебраического интерполирования мы должны будем разделить полуось или ось на бесконечное множество конечных отрезков и прибегнуть к кусочному, не обязательно даже «сращенному» интерполированию*).

9.2.1. Вспомогательные формулы. Изложение начнем с получения простых вспомогательных формул, служащих для вычисления интегралов от функций, содержащих тригонометрические множители.

Пусть $[a, b]$ — произвольный конечный отрезок и $l(x)$ — алгебраический многочлен степени n . При помощи n -кратного интегрирования по частям легко получается следующее равенство:

$$\begin{aligned} \int_a^b l(x) e^{ipx} dx &= \\ &= e^{ipb} \left[-\frac{il(b)}{p} + \frac{l'(b)}{p^2} + \frac{il''(b)}{p^3} - \frac{l'''(b)}{p^4} - \dots \right] - \\ &\quad - e^{ipa} \left[-\frac{il(a)}{p} + \frac{l'(a)}{p^2} + \frac{il''(a)}{p^3} - \frac{l'''(a)}{p^4} - \dots \right] = \\ &= e^{ip \frac{b+a}{2}} \left\{ \left[-\frac{il(b)}{p} + \frac{l'(b)}{p^2} + \frac{il''(b)}{p^3} - \frac{l'''(b)}{p^4} - \dots \right] e^{ip \frac{b-a}{2}} - \right. \\ &\quad \left. - \left[-\frac{il(a)}{p} + \frac{l'(a)}{p^2} + \frac{il''(a)}{p^3} - \frac{l'''(a)}{p^4} - \dots \right] e^{-ip \frac{b-a}{2}} \right\}. \quad (9.2.1) \end{aligned}$$

Если считать $l(x)$ действительным многочленом, заменить показательные функции их выражениями Эйлера через

*) Так, называют алгебраическое интерполирование, когда на каждом из отрезков строится свой интерполирующий многочлен, при этом многочлены выбираются так, чтобы в точках соприкосновения двух соседних участков соответствующие им многочлены и производные от них до некоторого порядка имели одинаковые значения. Такое интерполирование иногда называют, сохраняя английский термин, *сплайн-интерполированием*.

тригонометрические и сравнить действительную и мнимую части, получатся полезные формулы для вычисления интегралов с тригонометрическими множителями:

$$\begin{aligned} \int_a^b l(x) \cos px \, dx = & \cos p \frac{a+b}{2} \left\{ \left[\frac{l(b)+l(a)}{p} - \frac{l''(b)+l''(a)}{p^3} + \dots \right] \sin p \frac{b-a}{2} + \right. \\ & \left. + \left[\frac{l'(b)-l'(a)}{p^2} - \frac{l'''(b)-l'''(a)}{p^4} + \dots \right] \cos p \frac{b-a}{2} \right\} + \\ & + \sin p \frac{b+a}{2} \left\{ \left[\frac{l(b)-l(a)}{p} - \frac{l''(b)-l''(a)}{p^3} + \dots \right] \cos p \frac{b-a}{2} - \right. \\ & \left. - \left[\frac{l'(b)+l'(a)}{p^2} - \frac{l'''(b)+l'''(a)}{p^4} + \dots \right] \sin p \frac{b-a}{2} \right\}, \quad (9.2.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b l(x) \sin px \, dx = & \sin p \frac{b+a}{2} \left\{ \left[\frac{l(b)+l(a)}{p} - \frac{l''(b)+l''(a)}{p^3} + \dots \right] \sin p \frac{b-a}{2} + \right. \\ & \left. + \left[\frac{l'(b)-l'(a)}{p^2} - \frac{l'''(b)-l'''(a)}{p^4} + \dots \right] \cos p \frac{b-a}{2} \right\} - \\ & - \cos p \frac{b+a}{2} \left\{ \left[\frac{l(b)-l(a)}{p} - \frac{l''(b)-l''(a)}{p^3} + \dots \right] \cos p \frac{b-a}{2} - \right. \\ & \left. - \left[\frac{l'(b)+l'(a)}{p^2} - \frac{l'''(b)+l'''(a)}{p^4} + \dots \right] \sin p \frac{b-a}{2} \right\}. \quad (9.2.3) \end{aligned}$$

Равенства (9.2.2–3) были получены в предположении, что $l(x)$ есть произвольный многочлен с действительными коэффициентами. Но так как равенства верны при произвольных действительных коэффициентах многочлена $l(x)$, то они будут верными и для комплексных коэффициентов и, следовательно, для любого комплексного $l(x)$.

9.2.2. Построение формул для вычислений. Идея построения интерполяционных правил весьма проста. Для определенности рассмотрим косинус-преобразование (9.1.1). Полуось интегрирования $[0, \infty)$ разделим на конечные отрезки точками $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_k < \dots$. Возьмем один из отрезков $[a_k, a_{k+1}]$ и интерполируем на нем функцию f , считая ее достаточно гладкой, при помощи алгебраического многочлена. Изберем, например, интерполирование по значениям функции. Выберем на $[a_k, a_{k+1}]$ $n_k + 1$ произвольно расположенных узлов x_j^k ($j = 0, 1, \dots, n_k$; $a_k \leq x_0^k < \dots < x_{n_k}^k \leq a_{k+1}$) и выполним интерполирование

по значениям $f(x_j^k) = f_j^{(k)}$ с помощью многочлена $P_k(x)$ степени n_k :

$$P_k(x) = \sum_{j=0}^{n_k} \frac{\omega_k(x)}{(x-x_j^k)\omega_k'(x_j^k)} f_j^{(k)} = \sum_{j=0}^{n_k} l_j^{(k)}(x) f_j^{(k)},$$

$$\omega_k(x) = (x-x_0^k) \dots (x-x_{n_k}^k),$$

$$f(x) = P_k(x) + r_k(x). \quad (9.2.4)$$

Рассмотрим теперь интеграл вида (9.1.1), взяв его не по полуоси $[0, \infty)$, а по отрезку $[a_k, a_{k+1}]$, и заменим в нем функцию $f(x)$ интерполирующим многочленом $P_k(x)$. После этого получим приближенное равенство

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) \cos ut \, dt \approx \int_{a_k}^{a_{k+1}} P_k(t) \cos ut \, dt =$$

$$= \sum_{j=0}^{n_k} f_j^{(k)} \int_{a_k}^{a_{k+1}} l_j^{(k)}(t) \cos ut \, dt.$$

Суммируя такие равенства по всем частичным отрезкам, построим приближенное выражение для косинус-преобразования Фурье:

$$\Phi_c(u) = \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt \approx \sum_{k=0}^\infty \sum_{j=0}^{n_k} f_j^{(k)} \int_{a_k}^{a_{k+1}} l_j^{(k)}(t) \cos ut \, dt. \quad (9.2.5)$$

Каждый из интегралов, стоящих под знаком двойной суммы, может быть вычислен, например, с помощью формулы (9.2.2).

Если обозначить $r_k(x) = f(x) - P_k(x)$ погрешность интерполирования на отрезке $[a_k, a_{k+1}]$, то погрешность равенства (9.2.5) будет иметь следующее значение:

$$R_c(u) = \sum_{k=0}^\infty \int_{a_k}^{a_{k+1}} r_k(t) \cos ut \, dt. \quad (9.2.6)$$

Это представление $R_c(u)$ может быть, по крайней мере в некоторых случаях, использовано для получения оценки погрешности приближенного представления (9.2.5) для $\Phi_c(u)$. Например, из (9.2.6) очевидным образом вытекает

следующая равномерная относительно u оценка $R_c(u)$:

$$|R_c(u)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |r_k(t)| dt. \quad (9.2.7)$$

В этой записи предполагаем, что правая часть неравенства имеет конечное значение. Величина правой части зависит от выбора точек a_k , чисел n_k , узлов интерполирования $x_j^{(k)}$ и свойств функции f , в частности от наличия у нее производных достаточно высокого порядка и от скорости стремления их к нулю при неограниченном возрастании t .

Исследование приближенного представления (9.2.5) для $\varphi_c(u)$ в общем виде является сложным и имеет преимущественно теоретическое значение. Ограничимся тем, что рассмотрим представление в нескольких простых частных случаях.

Предположим, что полуось $[0, \infty)$ разделена точками $x_k = kh$ ($h > 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$) на равные отрезки длины h . Будем, кроме того, считать, что известны значения функции f в точках деления: $f(x_k) = f(kh) = f_k$.

I. Правила вычислений, основанные на линейном интерполировании. Рассмотрим сначала аналог правила трапеций. Возьмем отрезок $[kh, (k+1)h]$ и выполним линейное интерполирование функции f по двум ее значениям на концах отрезка:

$$f(x) = \frac{x - (k+1)h}{-h} f_k + \frac{x - kh}{h} f_{k+1} + r_k(x, f). \quad (9.2.8)$$

Погрешность интерполирования $r_k(x, f)$, если f имеет непрерывную вторую производную, представима, как известно, в форме *)

$$r_k(x, f) = h^2 \int_0^1 f''(kh + h\tau) [(\xi - \tau)E(\xi - \tau) - \xi(1 - \tau)] d\tau, \quad (9.2.9)$$

$$x = x_k + h\xi = h(k + \xi),$$

*) Такое представление можно получить, если воспользоваться формулой Тейлора с остаточным членом в форме интеграла

$$f(x) = f_k + (x - x_k) f'_k + \int_{x_k}^x f''(t) (x - t) dt = f_k + (x - x_k) f'_k + \varphi(x).$$

Так как линейная функция $f_k + (x - x_k) f'_k$ интерполируется точно,

где $E(x)$ есть «гасящая функция», служащая для устранения излишних участков интегрирования и определенная равенствами

$$E(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Умножим обе части равенства (9.2.8) на $\cos ux$ и проинтегрируем по отрезку $[kh, (k+1)h]$. При помощи интегрирования по частям или на основании (9.2.2) легко может быть вычислен интеграл с интерполирующим многочленом:

$$\begin{aligned} \int_{kh}^{(k+1)h} \left[-\frac{x-(k+1)h}{h} f_k + \frac{x-kh}{h} f_{k+1} \right] \cos ux \, dx = \\ = \frac{1}{u} f_{k+1} \sin u(k+1)h - \frac{1}{u} f_k \sin ukh + \\ + \frac{1}{u^2 h} (f_{k+1} - f_k) [\cos u(k+1)h - \cos ukh]. \end{aligned}$$

Можно видеть, что при суммировании по всем отрезкам $[kh, (k+1)h]$ (если принять во внимание, что $f_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$) члены с синусами исчезнут. Что же касается

погрешности интерполирования f и φ совпадают. Но

$$r_k(x, \varphi) = \varphi(x) + \frac{x-x_{k+1}}{h} \varphi(x_k) - \frac{x-x_k}{h} \varphi(x_{k+1}),$$

а так как $\varphi(x_k) = 0$, то

$$\begin{aligned} r_k(x, f) = r_k(x, \varphi) &= \int_{x_k}^x f''(t)(x-t) \, dt - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(t) \frac{x-x_k}{h} (x_{k+1}-t) \, dt = \\ &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(t) \left[(x-t) E(x-t) - \frac{1}{h} (x-x_k)(x_{k+1}-t) \right] dt. \end{aligned}$$

После этого останется заменить переменные x и t , положив $x = x_k + h\xi$, $t = x_k + h\tau$ ($0 \leq \xi, \tau \leq 1$), чтобы получить равенство (9.2.9).

членов с косинусами, то они дадут внеинтегральные слагаемые для косинус-преобразования.

Наконец, если в интеграл с погрешностью $r_k(x, f)$ вместо переменной интегрирования x ввести переменную ξ , положив $x = kh + h\xi$, получим выражение для погрешности в форме двойного интеграла, и после суммирования по отрезкам $[kh, (k+1)h]$ ($k=0, 1, \dots$) для $\varphi_c(u)$ будет получено следующее точное представление *):

$$\begin{aligned} \varphi_c(u) = & \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt = \frac{1 - \cos uh}{u^2 h} f_0 + \\ & + 2 \frac{1 - \cos uh}{u^2 h} \sum_{k=1}^\infty f_k \cos ukh + R_c(u), \quad (9.2.10) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_c(u) = & h^3 \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\tau [(\xi - \tau) E(\xi - \tau) - \xi(1 - \tau)] \times \\ & \times \sum_{k=0}^\infty f''(kh + h\tau) \cos u(kh + h\xi). \end{aligned}$$

Если здесь отбросить остаточный член $R_c(u)$, получится формула приближенного косинус-преобразования по значениям оригинала f в равноотстоящих точках.

Приведенное выражение для погрешности R_c формулы позволяет получить ее оценки и указать порядок малости относительно h при некоторых предположениях о функции f . Получим простейшую из таких оценок. Предварительно отметим, что ядро двойного интеграла, стоящее в квадратных скобках, имеет значения

$$(\xi - \tau) E(\xi - \tau) - \xi(1 - \tau) = \begin{cases} -\tau(1 - \xi) & \text{при } \tau < \xi, \\ -\xi(1 - \tau) & \text{при } \tau > \xi. \end{cases}$$

Оно отрицательно в области интегрирования $0 < \xi, \tau < 1$.

*) При записи мы считали функцию $f(x)$ и вторую производную $f''(x)$ настолько быстро убывающими при $x \rightarrow \infty$, чтобы ряды, участвующие в представлении, сходились абсолютно и равномерно. Аналогичное имеется в виду и для других представлений в § 9.2.

Двойной интеграл от ядра вычисляется легко:

$$\int_0^1 d\xi \int_0^1 [(\xi - \tau) E(\xi - \tau) - \xi(1 - \tau)] d\tau = -\frac{1}{12}.$$

Это позволяет оценить R_c следующим образом:

$$\begin{aligned} |R_c| &\leq h^3 \int_0^1 d\xi \int_0^1 [\xi(1 - \tau) - \\ &\quad - (\xi - \tau) E(\xi - \tau)] \sum_{k=0}^{\infty} |f''(kh + h\tau)| d\tau = \\ &= \frac{h^3}{12} \sum_{k=0}^{\infty} |f''(kh + h\theta)|, \quad 0 < \theta < 1. \quad (9.2.11) \end{aligned}$$

Оценка суммы зависит от свойств второй производной f'' . Предположим, что для f'' выполняется неравенство

$$|f''(x)| \leq \frac{B}{(a+x)^\alpha}, \quad \alpha > 1, \quad a > 0.$$

В этом случае

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f''(kh + h\tau)| \leq B \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a + kh + h\tau)^\alpha} < B \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a + kh)^\alpha}.$$

Если избраны h и a , значение последней суммы может быть найдено путем вычислений и в некоторых случаях при помощи табулированных функций.

Полученная оценка может быть заменена более простой, но менее точной.

Приводимые ниже неравенства являются очевидными и могут быть получены, если в левом интеграле заменить t его наименьшим значением, а в правом — наибольшим значением:

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{(a+ht)^\alpha} < \frac{1}{(a+kh)^\alpha} < \int_{k-1}^k \frac{dt}{(a+ht)^\alpha}.$$

Отсюда, если суммировать по значениям k от 1 до ∞ и затем добавить к левой части полученных неравенств

$$\int_0^1 \frac{dt}{(a+ht)^\alpha} < \frac{1}{a^\alpha},$$

а к средней и последней частям $\frac{1}{a^\alpha}$, найдем

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(a+ht)^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)ha^{\alpha-1}} < \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(a+kh)^\alpha} < \frac{1}{a^\alpha} + \frac{1}{(\alpha-1)ha^{\alpha-1}}.$$

Построенные неравенства говорят о том, что рассматриваемая сумма является величиной порядка $1/h$ при малых h . Для R_c из найденных неравенств вытекает оценка

$$|R_c| \leq \frac{h^2}{12} \left[\frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}} + \frac{h}{a^\alpha} \right]. \quad (9.2.12)$$

Представление (9.2.11) для R_c может служить источником оценок другого вида, которые также могут оказаться полезными в некоторых случаях. Из приведенного выше выражения для ядра двойного интеграла видно, что оно принимает значения, не большие $1/2$ по абсолютной величине. Поэтому для R_c верно неравенство

$$\begin{aligned} |R_c(u)| &\leq \frac{1}{2} h^3 \int_0^1 d\xi \int_0^1 \sum_{k=0}^\infty |f''(kh+h\tau)| d\tau = \\ &= \frac{1}{2} h^3 \int_0^1 \sum_{k=0}^\infty |f''(kh+h\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f''(kh+h\tau)| d\tau &= \\ &= \frac{1}{h} \int_{kh}^{(k+1)h} |f''(t)| dt = \frac{1}{h} \text{Var}_{kh \leq t \leq (k+1)h} f'(t), \end{aligned}$$

а так как

$$\sum_{k=0}^\infty \text{Var}_{kh \leq t \leq (k+1)h} f'(t) = \text{Var}_{0 \leq t < \infty} f'(t),$$

для $R_c(u)$ получится оценка вида

$$|R_c(u)| \leq \frac{1}{2} h^2 \text{Var}_{0 \leq t < \infty} f'(t). \quad (9.2.13)$$

Она особенно просто применяется в тех случаях, когда $f'(t)$ есть монотонная или кусочно-монотонная функция с просто определяемыми отрезками ее монотонности.

Путем, сходным с изложенным, могут быть получены правила, основанные на линейном интерполировании f ,

для приближенных синус- и комплексного преобразований Фурье. Ограничимся тем, что приведем только сами правила, опуская все рассуждения, связанные с их получением.

Для синус-преобразования (9.1.2) верно следующее представление его через значения функции f в точках $x_k = kh$ ($k = 0, 1, \dots$):

$$\varphi_s(u) = \frac{1}{u} \left(1 - \frac{1}{uh} \sin uh \right) f_0 + \\ + 2 \frac{1 - \cos uh}{u^2 h} \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin ukh + R_s(u), \quad (9.2.14)$$

$$R_s(u) = h^3 \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\tau [(\xi - \tau) E(\xi - \tau) - \\ - \xi(1 - \tau)] \sum_{k=0}^{\infty} f''(kh + h\tau) \sin u(kh + h\xi).$$

Правило приближенного вычисления получится, если в равенстве (9.2.14) отбросить остаточный член $R_s(u)$. Он является погрешностью метода.

Остаточный член R_s по строению сходен с R_c в (9.2.10) и отличается от него тем, что в его представлении функция $\cos u(kh + h\xi)$ заменена на $\sin u(kh + h\xi)$. При получении оценок R_c абсолютная величина $\cos u(kh + h\xi)$ была заменена единицей. То же можно сделать с функцией $\sin u(kh + h\xi)$ при оценке R_s . Поэтому для $R_s(u)$ верны оценочные неравенства вида (9.2.11–13), а именно:

Если функция f имеет непрерывную вторую производную на $[0, \infty)$, достаточно быстро убывающую при $x \rightarrow \infty$, то

$$|R_s(u)| \leq \frac{h^3}{12} \sum_{k=0}^{\infty} |f''(kh + h\theta)|, \quad 0 < \theta < 1, \quad (9.2.15)$$

$$|R_s(u)| \leq \frac{1}{2} h^2 \operatorname{Var}_{0 \leq t < \infty} f'(t). \quad (9.2.16)$$

Если для второй производной выполняется неравенство

$$|f''(x)| \leq B(a+x)^{-\alpha} \quad (\alpha > 1, a > 0),$$

то

$$|R_s(u)| \leq \frac{1}{12} h^2 \left[\frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}} + \frac{h}{a^\alpha} \right]. \quad (9.2.17)$$

Наконец, для комплексного преобразования (9.2.3) имеет место представление через значения f в равноотстоящих

точках $x_k = kh$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iut} dt =$$

$$= 2 \frac{1 - \cos uh}{u^2 h} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-iukh} + R(u), \quad (9.2.18)$$

$$R(u) = h^3 \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\tau [(\xi - \tau) E(\xi - \tau) -$$

$$- \xi(1 - \tau)] \sum_{k=-\infty}^{\infty} f''(kh + h\tau) e^{-iu(kh + h\xi)}.$$

Вычислительное правило получается, если в равенстве (9.2.18) отбросить остаточный член $R(u)$. Последний имеет смысл погрешности правила, и для него из указанного представления вытекают оценки

$$|R(u)| \leq \frac{1}{12} h^3 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f''(kh + h\theta)|, \quad 0 < \theta < 1, \quad (9.2.19)$$

$$|R(u)| \leq \frac{1}{2} h^2 \operatorname{Var}_{-\infty < t < \infty} f'(t). \quad (9.2.20)$$

Если для второй производной $f(x)$ верно неравенство

$$|f''(x)| \leq B(a + |x|)^{-\alpha} \quad (\alpha > 1, a > 0, -\infty < x < \infty),$$

то

$$|R(u)| \leq \frac{1}{6} h^2 \left[\frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}} + \frac{h}{a^\alpha} \right]. \quad (9.2.21)$$

II. Правила вычислений, основанные на интерполировании второй степени. Возьмем отрезок $[kh, (k+2)h]$ длины $2h$ и интерполируем функцию f по ее значениям f_k, f_{k+1}, f_{k+2} в точках $kh, (k+1)h, (k+2)h$ многочленом второй степени:

$$f(x) = \frac{(x-x_{k+1})(x-x_{k+2})}{(-h)(-2h)} f_k + \frac{(x-x_k)(x-x_{k+2})}{(-h)h} f_{k+1} +$$

$$+ \frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{h \cdot 2h} f_{k+2} + r_k(x). \quad (9.2.22)$$

Для получения погрешности $r_k(x)$ в необходимом виде воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в форме

интеграла, применив при его записи гасящую функцию E :

$$\begin{aligned} f(x) &= f_k + (x - x_k) f'_k + \frac{1}{2} (x - x_k)^2 f''_k + \frac{1}{2} \int_{x_k}^x f'''(t) (x - t)^2 dt = \\ &= P_2(x) + \frac{1}{2} \int_{x_k}^{x_{k+2}} f'''(t) (x - t)^2 E(x - t) dt = P_2(x) + \psi(x). \end{aligned}$$

Так как многочлен $P_2(x)$ интерполируется точно, погрешности интерполирования $f(x)$ и $\psi(x)$ совпадают. Интегральное же выражение $\psi(x)$ позволяет эту погрешность привести к погрешности интерполирования элементарной функции $(x - t)^2 E(x - t)$:

$$\begin{aligned} r_k(x) &= \frac{1}{2} \int_{x_k}^{x_{k+2}} f'''(t) \left[(x - t)^2 E(x - t) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(x - x_k)(x - x_{k+2})}{h^2} (x_{k+1} - t)^2 E(x_{k+1} - t) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})}{h^2} (x_{k+2} - t)^2 \right] dt. \end{aligned}$$

Первый член в интерполяционном многочлене, отвечающий узлу x_k :

$$\frac{(x - x_{k+1})(x - x_{k+2})}{(-h)(-2h)} (x_k - t)^2 E(x_k - t),$$

опущен под знаком интеграла, так как $E(x_k - t) = 0$ при $x_k < t \leq x_{k+2}$. В последнем члене в квадратных скобках множитель $E(x_{k+2} - t)$ не указан, так как он равен единице при всяких $t < x_{k+2}$.

Упростим представление погрешности $r_k(x)$, для чего введем переменные ξ , τ , положив $x = x_k + h\xi$, $t = x_k + h\tau$ ($0 \leq \xi$, $\tau \leq 2$):

$$\begin{aligned} r_k(x) &= \frac{h^3}{2} \int_0^2 f'''(x_k + h\tau) \left[(\xi - \tau)^2 E(\xi - \tau) + \right. \\ &\quad \left. + \xi(\xi - 2)(1 - \tau)^2 E(1 - \tau) - \frac{1}{2} \xi(\xi - 1)(2 - \tau)^2 \right] dt. \quad (9.2.23) \end{aligned}$$

Умножим обе части равенства (9.2.22) на $\cos ux$, проинтегрируем по отрезку $[x_k, x_{k+2}]$ и результат просуммируем почленно по четным значениям k ($k = 0, 2, 4, \dots$). После этого получим следующее точное представление косинус-преобразования Фурье через значения функций

f_k ($k=0, 1, \dots$):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_c(u) &= \int_0^\infty f(x) \cos ux \, dx = \\ &= \alpha_2 f_0 + \gamma_2 \sum_{k=0}^\infty f_{2k+1} \cos (2k+1) \theta + \\ &\quad + 2\alpha_2 \sum_{k=1}^\infty f_{2k} \cos 2k\theta + R_c, \\ \theta &= uh, \quad h^{-1}\alpha_2 = \frac{3}{2} \theta^{-2} + \frac{1}{2} \theta^{-2} \cos 2\theta - \theta^{-3} \sin 2\theta, \\ h^{-1}\gamma_2 &= 4\theta^{-2} [\theta^{-1} \sin \theta - \cos \theta], \end{aligned} \right\} \quad (9.2.24)$$

$$\begin{aligned} R_c &= \int_{x_k}^{x_{k+2}} r_k(x) \, dx = \frac{h^4}{2} \int_0^2 d\xi \int_0^2 d\tau \left[(\xi - \tau)^2 E(\xi - \tau) + \right. \\ &\quad \left. + \xi(\xi - 2)(1 - \tau)^2 E(1 - \tau) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \xi(\xi - 1)(2 - \tau)^2 \right] \sum_{k=0}^\infty f'''(x_{2k} + h\tau) \cos u(x_{2k} + h\xi). \end{aligned} \quad (9.2.25)$$

Чтобы выполнить оценку R_c , необходимо предварительно ознакомиться с некоторыми свойствами ядра двойного интеграла, которое стоит в квадратных скобках. Областью интегрирования является квадрат $0 \leq \xi, \tau \leq 2$, и его для наших целей удобно разделить на 6 участков прямыми линиями $\xi = \tau, \tau = 1, \xi = 1$. Нумерация этих участков указана на рис. 1. Знаки ядра на границах участков легко определяются по указанному выражению ядра, и они также указаны на рисунке. Знаки же и оценки ядра внутри участков исследуются ниже.

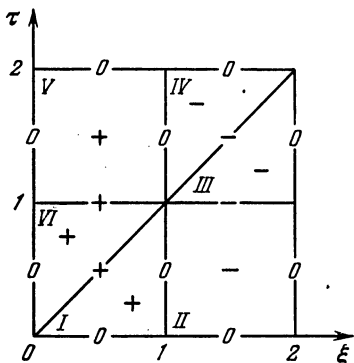


Рис. 1.

Участок I. Он определяется неравенствами $0 \leq \tau \leq \xi \leq 1$. Ядро, которое мы обозначим $K(\xi, \tau) = K$, здесь

имеет значение

$$\begin{aligned} K &= (\xi - \tau)^2 + \xi(\xi - 2)(1 - \tau)^2 - \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)(2 - \tau)^2 = \\ &= \frac{1}{2}(\xi - 1)(\xi - 2)\tau^2. \end{aligned} \quad (9.2.26)$$

Оно, очевидно, неотрицательно, так как множители $\xi - 1$ и $\xi - 2$ оба неположительны. Кроме того, ввиду того, что $(\xi - 1)(\xi - 2) < 2$ и $\tau^2 \leq 1$, для ядра верны неравенства

$$0 \leq K(\xi, \tau) \leq 1.$$

Участок II. Здесь $0 \leq \tau \leq 1$, $1 \leq \xi \leq 2$. Ядро K имеет также выражение (9.2.26), отличие состоит в том, что множитель $\xi - 1$ принимает неотрицательные значения и ядро K , следовательно, будет неположительным. Так как $\tau^2 \leq 1$, $2 - \xi \leq 1$ и $\xi - 1 \leq 1$, для ядра справедлива оценка

$$0 \geq K(\xi, \tau) \geq -1.$$

Участок III. На нем $1 \leq \tau \leq \xi \leq 2$. Ядро имеет значение

$$\begin{aligned} K(\xi, \tau) &= (\xi - \tau)^2 - \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)(2 - \tau)^2 = \\ &= \frac{1}{2}(2 - \xi)(1 + \xi)\tau^2 + 2\xi(\xi - 2)\tau - \xi(\xi - 2). \end{aligned}$$

При каждом фиксированном значении ξ из полуинтервала $1 \leq \xi < 2$ графиком функции $K(\xi, \tau)$ в плоскости с осями K, τ будет парабола*), обращенная вогнутостью в сторону положительных K . На границе участка ядро K принимает неположительные значения, так как

$$\text{при } \tau = \xi \quad K(\xi, \xi) = -\frac{1}{2}\xi(\xi - 1)(2 - \xi)^2 \leq 0;$$

при $\tau = 1$

$$K(\xi, 1) = (\xi - 1)^2 - \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) = (\xi - 1)\left(\frac{1}{2}\xi - 1\right) \leq 0;$$

$$\text{при } \xi = 2 \quad K(2, \tau) = (2 - \tau)^2 - (2 - \tau)^2 = 0.$$

Поэтому во всех точках участка III

$$K(\xi, \tau) \leq 0.$$

*) Здесь и ниже имеется в виду парабола с осью симметрии, параллельной оси K .

С другой стороны,

$$K(\xi, \tau) \geq -\frac{1}{2} \xi (\xi - 1) (2 - \tau)^2 \geq -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1^2 = -1,$$

и, следовательно, во всех точках участка

$$0 \geq K(\xi, \tau) \geq -1.$$

Участок IV. Для него $1 \leq \xi \leq \tau \leq 2$, $K(\xi, \tau) = -\frac{1}{2} \xi (\xi - 1) (2 - \tau)^2$.

Очевидно,

$$0 \geq K(\xi, \tau) \geq -1.$$

Участок V. Здесь $0 \leq \xi \leq 1 \leq \tau \leq 2$, $K(\xi, \tau) = -\frac{1}{2} \xi (\xi - 1) (2 - \tau)^2$.

Ядро имеет такое же выражение, как и для участка IV, с тем различием, что здесь множитель $\xi - 1$ отрицателен. Ядро $K(\xi, \tau)$ будет неотрицательным и удовлетворять неравенствам

$$0 \leq K(\xi, \tau) \leq 1.$$

Участок VI. На нем $0 \leq \xi \leq \tau \leq 1$, $K(\xi, \tau) = \xi (\xi - 2) (1 - \tau)^2 - \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) (2 - \tau)^2 = \xi \left[-\frac{1}{2} (3 - \xi) \tau^2 + 2\tau - \xi \right]$.

При каждом фиксированном значении ξ графиком ядра в плоскости K, τ является парабола, обращенная выпуклостью в сторону положительных K .

На границе участка K всюду неотрицательно, так как

$$K(\xi, \xi) = \frac{1}{2} (1 - \xi) (2 - \xi) \xi^2 \geq 0 \quad \text{при } \xi = \tau;$$

$$K(0, \tau) = 0 \quad \text{при } \xi = 0;$$

$$K(\xi, 1) = \frac{1}{2} \xi (1 - \xi) \geq 0 \quad \text{при } \tau = 1.$$

Поэтому во всех точках участка ядро неотрицательно. Наконец, в указанном выше выражении ядра слагаемое $\xi (\xi - 2) (1 - \tau)^2$ неположительно, и, стало быть,

$$0 \leq K(\xi, \tau) \leq \frac{1}{2} \xi (1 - \xi) (2 - \tau)^2 \leq 1.$$

Из рассмотрения ядра на всех участках следует нужное нам неравенство

$$|K(\xi, \tau)| \leq 1.$$

Оно дает возможность получить приводимую ниже оценку остаточного члена R_c :

$$\begin{aligned} |R_c(u)| &\leq \frac{h^4}{2} \int_0^2 d\xi \int_0^2 d\tau \sum_{k=0}^{\infty} |f'''(x_{2k} + h\tau)| = \\ &= h^4 \int_0^2 d\tau \sum_{k=0}^{\infty} |f'''(x_{2k} + h\tau)|. \end{aligned} \quad (9.2.27)$$

Если обратить внимание на то, что

$$\int_0^2 d\tau \sum_{k=0}^{\infty} |f'''(x_{2k} + h\tau)| = \frac{1}{h} \int_0^{\infty} |f'''(x)| dx = \frac{1}{h} \text{Var}_{0 \leq x < \infty} f''(x),$$

получится оценка

$$|R_c(u)| \leq h^3 \text{Var}_{0 \leq x < \infty} f''(x) = h^3 \int_0^{\infty} |f'''(x)| dx. \quad (9.2.28)$$

В этой оценке интеграл может быть заменен большей величиной, получаемой следующим способом:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |f'''(x)| dx &= h \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} |f'''(x_k + ht)| dt \leq \\ &\leq h \max_{0 \leq t \leq 1} \sum_{k=0}^{\infty} |f'''(x_k + ht)|, \end{aligned}$$

что позволяет заменить (9.2.28) другой, более грубой оценкой, но более удобной, по крайней мере в некоторых случаях, для вычислений:

$$|R_c(u)| \leq h^4 \max_{0 \leq t \leq 1} \sum_{k=0}^{\infty} |f'''(x_k + ht)|. \quad (9.2.29)$$

Для синус-преобразования Фурье сходные формулы для вычислений и оценки погрешности будут иметь такой

вид:

$$\begin{aligned}\varphi_s(u) &= \int_0^\infty f(x) \sin ux \, dx = \\ &= \beta_2 f_0 + \gamma_2 \sum_{k=0}^\infty f_{2k+1} \sin (2k+1)\theta + \\ &\quad + 2\alpha_2 \sum_{k=1}^\infty f_{2k} \sin 2k\theta + R_s(u), \quad (9.2.30) \\ h^{-1}\beta_2 &= \theta^{-1} - \theta^{-3} + \frac{1}{2} \theta^{-2} \sin 2\theta + \theta^{-3} \cos 2\theta\end{aligned}$$

(значения параметров θ , α_2 , γ_2 указаны в равенстве (9.2.24)),

$$\begin{aligned}R_s(u) &= \frac{h^4}{2} \int_0^2 d\xi \int_0^2 d\tau \left[(\xi - \tau)^2 E(\xi - \tau) + \right. \\ &\quad \left. + \xi(\xi - 2)(1 - \tau)^2 E(1 - \tau) - \frac{1}{2} \xi(\xi - 1)(2 - \tau)^2 \right] \times \\ &\quad \times \sum_{k=0}^\infty f'''(x_{2k} + h\tau) \sin u(x_{2k} + h\xi), \\ |R_s(u)| &\leq h^3 \int_0^\infty |f'''(x)| \, dx = h^3 \operatorname{Var}_{0 \leq x < \infty} f''(x), \\ |R_s(u)| &\leq h^4 \max_{0 \leq t \leq 1} \sum_{k=0}^\infty |f'''(x_k + ht)|.\end{aligned}$$

Наконец, для комплексного преобразования Фурье аналогичные правила и оценки будут такими:

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-iux} \, dx = \\ &= 2\alpha_2 \sum_{k=-\infty}^\infty f_{2k} e^{-i2k\theta} + \gamma_2 \sum_{k=-\infty}^\infty f_{2k+1} e^{-i(2k+1)\theta} + R(u), \quad (9.2.31) \\ R(u) &= \frac{h^4}{2} \int_0^2 d\xi \int_0^2 d\tau \left[(\xi - \tau)^2 E(\xi - \tau) + \right. \\ &\quad \left. + \xi(\xi - 2)(1 - \tau)^2 E(1 - \tau) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \xi(\xi - 1)(2 - \tau)^2 \right] \sum_{k=-\infty}^\infty f'''(x_{2k} + h\tau) e^{-i(x_{2k} + h\xi)u}, \quad (9.2.32)\end{aligned}$$

$$|R(u)| \leq h^3 \int_{-\infty}^{\infty} |f'''(x)| dx = h^3 \operatorname{Var}_{-\infty < x < \infty} f''(x),$$

$$|R(u)| \leq h^4 \max_{0 \leq \tau \leq 1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f'''(x_k + h\tau)|.$$

III. Правила, основанные на интерполировании третьей степени. Выше были рассмотрены правила, в основе которых лежит линейное и квадратное интерполирование. Они являются аналогами котесовых правил трапеций и парабол. Но можно, очевидно, построить для преобразований Фурье аналоги правил Котеса любых порядков. Чем выше степень точности таких правил, тем более сложными они будут, и сложность их с увеличением степени быстро возрастает. Мы приведем только правила, отвечающие интерполированию третьей степени, являющиеся аналогами «правила трех восьмых» Ньютона — Котеса.

Возьмем 4 точки $x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}$ и выполним интерполирование f по ее значениям в этих точках:

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{(x - x_{k+1})(x - x_{k+2})(x - x_{k+3})}{-h(-2h)(-3h)} f_k + \\ & + \frac{(x - x_k)(x - x_{k+2})(x - x_{k+3})}{h(-h)(-2h)} f_{k+1} + \\ & + \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})(x - x_{k+3})}{2h \cdot h(-h)} f_{k+2} + \\ & + \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})(x - x_{k+2})}{3h \cdot 2h \cdot h} f_{k+3} + r_3(x). \end{aligned}$$

Умножение этого равенства на $\cos ux$ и интегрирование по отрезку $[x_k, x_k + 3h]$ с последующим суммированием по значениям $k = 0, 3, 6, \dots$ приводит к представлению косинус-преобразования через значения $f_0, f_1, \dots$:

$$\begin{aligned} \varphi_c(u) = & \int_0^{\infty} f(x) \cos ux dx = \\ = & \alpha_3 f_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma_3 \cos 3k\theta - \delta_3 \sin 3k\theta) f_{3k+1} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_3 \cos 3k\theta + \delta_3 \sin 3k\theta) f_{3k-1} + \\ & + 2\alpha_3 \sum_{k=1}^{\infty} f_{3k} \cos 3k\theta + R_c(u), \end{aligned} \quad (9.2.33)$$

$$\begin{aligned}
 R_c(u) = & \frac{h^5}{6} \int_0^3 d\xi \int_0^3 d\tau \left[(\xi - \tau)^3 E(\xi - \tau) - \right. \\
 & - \frac{1}{2} \xi (\xi - 2) (\xi - 3) (1 - \tau)^3 E(1 - \tau) + \\
 & + \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) (\xi - 3) (2 - \tau)^3 E(2 - \tau) - \\
 & \left. - \frac{1}{6} \xi (\xi - 1) (\xi - 2) (3 - \tau)^3 \right] \times \\
 & \times \sum_{k=0}^{\infty} f^{IV}(x_{3k} + h\tau) \cos u(x_{3k} + h\xi).
 \end{aligned}$$

Для синус- и комплексного преобразований Фурье такие представления будут следующими:

$$\begin{aligned}
 \varphi_s(u) = & \int_0^{\infty} f(x) \sin ux \, dx = \\
 = & \beta_3 f_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma_3 \sin 3k\theta + \delta_3 \cos 3k\theta) f_{3k+1} + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_3 \sin 3k\theta - \delta_3 \cos 3k\theta) f_{3k-1} + \\
 & + 2\alpha_3 \sum_{k=1}^{\infty} f_{3k} \sin 3k\theta + R_s(u), \quad (9.2.34)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_s(u) = & \frac{h^5}{6} \int_0^3 d\xi \int_0^3 d\tau \left[(\xi - \tau)^3 E(\xi - \tau) - \right. \\
 & - \frac{1}{2} \xi (\xi - 2) (\xi - 3) (1 - \tau)^3 E(1 - \tau) + \\
 & + \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) (\xi - 3) (2 - \tau)^3 E(2 - \tau) - \\
 & \left. - \frac{1}{6} \xi (\xi - 1) (\xi - 2) (3 - \tau)^3 \right] \sum_{k=0}^{\infty} f^{IV}(x_{3k} + h\tau) \sin u(x_{3k} + h\xi);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi(u) = & \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} \, dx = (\gamma_3 - i\delta_3) \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{3k+1} e^{-i3k\theta} + \\
 & + (\gamma_3 + i\delta_3) \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{3k-1} e^{-i3k\theta} + \\
 & + 2\alpha_3 \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{3k} e^{-i3k\theta} + R(u), \quad (9.2.35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R(u) = & \frac{h^5}{6} \int_0^3 d\xi \int_0^3 d\tau \left[(\xi - \tau)^3 E(\xi - \tau) - \right. \\
 & - \frac{1}{2} \xi (\xi - 2) (\xi - 3) (1 - \tau)^3 E(1 - \tau) + \\
 & + \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) (\xi - 3) (2 - \tau)^3 E(2 - \tau) - \\
 & \left. - \frac{1}{6} \xi (\xi - 1) (\xi - 2) (3 - \tau)^3 \right] \sum_{k=-\infty}^{\infty} f^{IV}(x_k + h\tau) e^{-i(x_{3k} + h\xi)u}.
 \end{aligned}$$

В равенствах (9.2.33 – 35) коэффициенты α_3 , β_3 , γ_3 , δ_3 имеют значения:

$$\left. \begin{aligned}
 \theta &= uh, \\
 h^{-1}\alpha_3 &= \frac{11}{6} \theta^{-2} - \theta^{-4} + \left(\theta^{-4} - \frac{1}{3} \theta^{-2} \right) \cos 3\theta + \theta^{-3} \sin 3\theta, \\
 h^{-1}\beta_3 &= \theta^{-1} - 2\theta^{-3} + \left(\theta^{-4} - \frac{1}{3} \theta^{-2} \right) \sin 3\theta - \theta^{-3} \cos 3\theta, \\
 h^{-1}\gamma_3 &= 3\theta^{-4} - 3\theta^{-2} + 3 \left(\frac{1}{2} \theta^{-2} - \theta^{-4} \right) \cos 3\theta - 4\theta^{-3} \sin 3\theta, \\
 h^{-1}\delta_3 &= 5\theta^{-3} + 3 \left(\frac{1}{2} \theta^{-2} - \theta^{-4} \right) \sin 3\theta + 4\theta^{-3} \cos 3\theta.
 \end{aligned} \right\} \quad (9.2.36)$$

Выше были приведены вычислительные формулы, полученные с помощью интерполирования функции f по значениям, которые она принимает в узлах x_k . Можно попытаться увеличить точность вычислений, привлекая к интерполированию не только значения функции f , но также значения ее производных до некоторого порядка. Интерполирование в этом случае будет с «кратными узлами» или эрмитовского типа. В общем виде оно имеет сложную форму, и для простоты записи остановимся только на случае двойных узлов, когда интерполирование выполняется по значениям f и первой производной f' . Будем, как и раньше, считать узлы равноотстоящими: $x_k = kh$ ($k = 0, 1, \dots; h > 0$). Возьмем $n+1$ узлов $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n}$ и построим многочлен $P_{2n+1}(x)$ степени $2n+1$, удовлетворяющий условиям

$$\begin{aligned}
 P_{2n+1}(x_{k+i}) &= f_{k+i}, \\
 P'_{2n+1}(x_{k+i}) &= f'_{k+i} \quad (j = 0, 1, \dots, n).
 \end{aligned}$$

Явное выражение такого многочлена хорошо известно в теории интерполирования*), и на его получении мы не будем останавливаться. Соответствующее представление функции f будет следующим:

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{\omega^2(x)}{(x-x_{k+j})^2 [\omega'(x_{k+j})]^2} \times \\ \times \left\{ \left[1 - \frac{\omega''(x_{k+j})}{\omega'(x_{k+j})} (x-x_{k+j}) \right] f_{k+j} + \right. \\ \left. + (x-x_{k+j}) f'_{k+j} \right\} + r_n^{(k)}(x) = \\ = \sum_{j=0}^n H_j^{(k)}(x) + r_n^{(k)}(x), \quad (9.2.37)$$

$$\omega(x) = (x-x_k)(x-x_{k+1}) \dots (x-x_{k+n}).$$

Если обе части равенства (9.2.37) умножить на $\cos ux$, проинтегрировать по отрезку $[kh, (k+n)h]$ и результаты суммировать по значениям k , кратным n ($k=0, n, 2n, \dots$), получится представление косинус-преобразования Фурье через значения f_k и f'_k вида

$$\varphi_c(u) = \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k^0(u) f_k + \alpha_k^1(u) f'_k] + R_c(u). \quad (9.2.38)$$

Коэффициенты $\alpha_k^0(u)$ и $\alpha_k^1(u)$ могут быть выражены через ядро преобразования $\cos ux$ и коэффициенты $H_j^{(k)}(x)$ интерполирования, остаточный же член $R_c(u)$ представления выражается через $\cos ux$ и погрешности $r_n^{(k)}(x)$ на всех отрезках интерполирования $[jn, (j+1)n]$ ($j=0, 1, \dots$).

Изложенные общие соображения приведены, чтобы выявить идеи, на основании которых строятся вычислительные формулы вида (9.2.38). Для вычислений же большее значение имеют частные случаи таких формул, отвечающие нескольким первым значениям n .

IV. Случай интерполирования третьей степени с двумя двукратными узлами. Возьмем отрезок $[kh, (k+1)h]$ и интерполируем на нем f по значениям $f_k, f_{k+1}, f'_k, f'_{k+1}$ с помощью многочлена третьей

*) См., например, И. С. Березин и Н. П. Жидков, Методы вычислений, изд. 2-е, т. 1, гл. 2, § 11, п. 1, М., «Наука», 1966

степени:

$$f(x) = \frac{(x-x_{k+1})^2}{h^2} \left[\left(1 + 2 \frac{x-x_k}{h} \right) f_k + (x-x_k) f'_k \right] + \\ + \frac{(x-x_k)^2}{h^2} \left[\left(1 - 2 \frac{x-x_{k+1}}{h} \right) f_{k+1} + \right. \\ \left. + (x-x_{k+1}) f'_{k+1} \right] + r_k(x). \quad (9.2.39)$$

Для получения нужного выражения погрешности $r_k(x)$ можно воспользоваться, как и выше, формулой Тейлора

$$f(x) = f_k + (x-x_k) f'_k + \frac{1}{2} (x-x_k)^2 f''_k + \\ + \frac{1}{6} (x-x_k)^3 f'''_k + \frac{1}{6} \int_{x_k}^x f^{IV}(t) (x-t)^3 = \\ = P_3(x) + \frac{1}{6} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f^{IV}(t) (x-t)^3 E(x-t) dt.$$

Так как многочлен $P_3(x)$ интерполируется точно, погрешности интерполирования f и интегрального члена правой части равенства совпадают. Последнее же приводит нахождение остатка для f к нахождению остатка для функции $(x-t)^3 E(x-t)$:

$$r_k(x) = \frac{1}{6} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f^{IV}(t) \left\{ (x-t)^3 E(x-t) - \right. \\ \left. - \frac{(x-x_k)^2}{h^2} \left[\left(1 - 2 \frac{x-x_{k+1}}{h} \right) (x_{k+1}-t)^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + 3(x-x_{k+1})(x_{k+1}-t)^2 \right] \right\} dt.$$

Для упрощения записи положим $x = x_k + h\xi$, $t = x_k + h\tau$ ($0 \leq \xi, \tau \leq 1$) и получим

$$r_k(x) = \frac{h^4}{6} \int_0^1 f^{IV}(x_k + h\tau) \{ (\xi - \tau)^3 E(\xi - \tau) - \\ - \xi^2 [(3 - 2\xi)(1 - \tau)^3 + 3(\xi - 1)(1 - \tau)^2] \} d\tau = \\ = \frac{h^4}{6} \int_0^1 f^{IV}(x_k + h\tau) \{ (\xi - \tau)^3 E(\xi - \tau) + \\ + \xi^2 (1 - \tau)^2 [(3 - 2\xi)\tau - \xi] \} d\tau.$$

Умножая (9.2.39) на $\cos ux$, интегрируя по отрезку $[kh, (k+1)h]$ и суммируя результаты по $k=0, 1, 2, \dots$, построим представление $\varphi_c(u)$, из которого путем отбрасывания остаточного члена получается вычислительное правило для нахождения $\varphi_c(u)$ по значениям f_k и f'_k :

$$\varphi_c(u) = \int_0^\infty f(x) \cos ux \, dx = \alpha'_1 f_0 - \gamma'_1 f'_0 + 2\alpha'_1 \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos k\theta - \\ - 2\delta'_1 \sum_{k=1}^{\infty} f'_k \sin k\theta + R_c(u), \quad (9.2.40)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \theta &= uh, \\ h^{-1}\alpha'_1 &= 12\theta^{-4}(1 - \cos \theta) - 6\theta^{-3} \sin \theta, \\ h^{-2}\gamma'_1 &= \theta^{-2} - 6\theta^{-4} + 2\theta^{-3} \sin \theta + 6\theta^{-4} \cos \theta, \\ h^{-2}\delta'_1 &= 4\theta^{-3} - 6\theta^{-4} \sin \theta + 2\theta^{-3} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (9.2.41)$$

В представлении $R_c(u)$ переменная x заменена на каноническую переменную $\xi = h^{-1}(x - x_k)$, $x = x_k + h\xi$:

$$R_c(u) = \frac{h^5}{6} \int_0^1 \int_0^1 \{(\xi - \tau)^3 E(\xi - \tau) + \xi^2(1 - \tau)^2[(3 - 2\xi)\tau - \xi]\} \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} f^{IV}(x_k + h\tau) \cos u(x_k + h\xi) \, d\tau \, d\xi. \quad (9.2.42)$$

Для оценки R_c выясним сначала некоторые свойства ядра двойного интеграла, которое стоит в фигурных скобках. Обозначим его $K(\xi, \tau)$:

$$K(\xi, \tau) = \begin{cases} (\xi - \tau)^3 + \xi^2(1 - \tau)^2[(3 - 2\xi)\tau - \xi], & 0 < \tau < \xi < 1, \\ \xi^2(1 - \tau)^2[(3 - 2\xi)\tau - \xi], & 0 < \xi < \tau < 1. \end{cases}$$

Заметим сначала, что предельные значения ядра на границе квадрата интегрирования $[0 \leq \xi, \tau \leq 1]$ равны нулю (рис. 2). Это сразу же следует из приведенных выражений ядра. Отметим также, что на диагонали OB квадрата ядро имеет положительные значения:

$$K(\xi, \xi) = 2[\xi(1 - \xi)]^3 > 0 \quad (0 < \xi < 1).$$

Знак ядра в треугольнике OBC , лежащем выше диагонали OB , определяется знаком билинейного многочлена $(3-2\xi)\tau-\xi$. При любом фиксированном ξ ($0 < \xi < 1$) при росте τ от ξ до 1 многочлен возрастает, начиная от значения $(3-2\xi)\xi-\xi = 2\xi(1-\xi) > 0$ до $3(1-\xi) > 0$. Поэтому ядро $K(\xi, \tau) \geq 0$ при $\xi \leq \tau \leq 1$, $0 \leq \xi \leq 1$. Кроме того, обычными средствами анализа доказывается, что в $\triangle OBC$ ядро достигает своего наибольшего значения в середине диагонали $D(1/2, 1/2)$, при этом

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq \xi \leq \tau \leq 1} K(\xi, \tau) &= \\ &= K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}. \end{aligned}$$

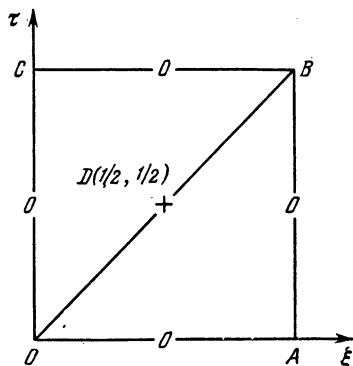


Рис. 2.

В треугольнике OAB , лежащем ниже диагонали OB , ядро есть многочлен от τ третьей степени:

$$(\xi-\tau)^3 + \xi^2(1-\tau)^2[(3-2\xi)\tau-\xi] = (1-\xi)^2\tau^2[3\xi-(1+2\xi)\tau].$$

Знак его определяется выражением, находящимся в квадратных скобках. Так как $\xi \leq 1$ и $\tau \leq \xi$, то

$$3\xi - (1+2\xi)\tau \geq 2\xi - 2\xi^2 \geq 0.$$

Поэтому в области $0 \leq \tau \leq \xi \leq 1$ ядро неотрицательно.

Обычными способами разыскания экстремумов функции в замкнутых областях показывается, что ядро достигает своего наибольшего значения в точке $D(1/2, 1/2)$ и

$$\max_{0 \leq \tau \leq \xi \leq 1} K(\xi, \tau) = K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}.$$

Наконец, легко вычисляется двойной интеграл от ядра:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 d\xi \int_0^1 d\tau \{ (\xi-\tau)^3 E(\xi-\tau) + \xi^2(1-\tau)^2 [(3-2\xi)\tau-\xi] \} = \\ &= \int_0^1 d\xi \left\{ \int_0^\xi (\xi-\tau)^3 + \xi^2 \int_0^1 (1-\tau)^2 [(3-2\xi)\tau-\xi] d\tau \right\} = \frac{1}{120}. \quad (9.2.43) \end{aligned}$$

Указанные выше свойства ядра позволяют получить оценки $R_c(u)$, сходные с теми, которые были найдены

в случае интерполирования по значениям функции. Если в представлении (9.2.42) для $R_c(u)$ заменить ядро и $|\cos u(x_k + h\xi)|$ превосходящими величинами $1/32$ и 1 соответственно, то получим оценку

$$\begin{aligned} |R_c(u)| &\leq \frac{h^5}{6} \cdot \frac{1}{32} \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\tau \sum_{k=0}^{\infty} |f^{IV}(x_k + h\tau)| = \\ &= \frac{h^4}{192} \int_0^{\infty} |f^{IV}(x)| dx = \frac{h^4}{192} \text{Var}_{0 \leq x < \infty} f'''(x). \end{aligned} \quad (9.2.44)$$

Если же в интеграле заменить все слагаемые бесконечной суммы их абсолютными значениями, заменить $|\cos u(x_k + h\xi)|$ единицей и затем, пользуясь положительностью ядра, применить к интегралу теорему о среднем взвешенном значении, найдем неравенство

$$\begin{aligned} |R_c(u)| &\leq \frac{h^5}{6} \sum_{k=0}^{\infty} |f^{IV}(x_k + h\vartheta)| \times \\ &\times \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\tau \{ (\xi - \tau)^3 E(\xi - \tau) + \xi^2 (1 - \tau)^2 [(3 - 2\xi)\tau - \xi] \} = \\ &= \frac{h^5}{720} \sum_{k=0}^{\infty} |f^{IV}(x_k + h\vartheta)|, \quad 0 < \vartheta < 1. \end{aligned} \quad (9.2.45)$$

Аналогичные рассуждения для синус- и комплексного преобразований Фурье дадут следующие их выражения через значения f_k и f'_k :

$$\begin{aligned} \varphi_s(u) = \int_0^{\infty} f(x) \sin ux dx &= \beta'_1 f_0 + \delta'_1 f'_0 + 2\alpha'_1 \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin k\theta + \\ &+ 2\delta'_1 \sum_{k=1}^{\infty} f'_k \cos k\theta + R_s(u), \end{aligned} \quad (9.2.46)$$

$$\begin{aligned} R_s(u) &= \frac{h^5}{6} \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\tau \{ (\xi - \tau)^3 E(\xi - \tau) + \\ &+ \xi^2 (1 - \tau)^2 [(3 - 2\xi)\tau - \xi] \} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} f(x_k + h\tau) \sin u(x_k + h\xi), \end{aligned} \quad (9.2.47)$$

$$|R_s(u)| \leq \frac{h^4}{192} \int_0^\infty |f^{IV}(x)| dx = \frac{h^4}{192} \text{Var}_{0 \leq x < \infty} f'''(x),$$

$$|R_s(u)| \leq \frac{h^5}{720} \sum_{k=0}^\infty |f^{IV}(x_k + h\vartheta)|, \quad 0 < \vartheta < 1,$$

$$\begin{aligned} \varphi(u) = \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-iux} dx = 2\alpha'_1 \sum_{k=-\infty}^\infty f_k e^{-ik\theta} - \\ - 2i\delta'_1 \sum_{k=-\infty}^\infty f'_k e^{-ik\theta} + R(u). \end{aligned} \quad (9.2.48)$$

Значения α'_1 , γ'_1 , δ'_1 , θ указаны в равенствах (9.2.41), кроме того,

$$h^{-1}\beta'_1 = 6\theta^{-3} \cos \theta - 12\theta^{-4} \sin \theta + \theta^{-3}(6 + \theta^2),$$

$$\begin{aligned} R(u) = \frac{h^5}{6} \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\tau \{ (\xi - \tau)^3 E(\xi - \tau) + \\ + \xi^2(1 - \tau)^2 [(3 - 2\xi)\tau - \xi] \sum_{k=-\infty}^\infty f(x_k + h\tau) e^{-iu(x_k + h\xi)} \}, \end{aligned} \quad (9.2.49)$$

$$|R(u)| \leq \frac{h^4}{192} \int_{-\infty}^\infty |f^{IV}(x)| dx = \frac{h^4}{192} \text{Var}_{-\infty < x < \infty} f'''(x),$$

$$|R(u)| \leq \frac{h^5}{720} \sum_{k=-\infty}^\infty |f^{IV}(x_k + h\vartheta)|, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

V. Правило вычисления, основанное на интерполировании функции с тремя двукратными узлами. Возьмем точки x_k , x_{k+1} , x_{k+2} и интерполируем f по значениям f_k , f'_k , f_{k+1} , f'_{k+1} , f_{k+2} , f'_{k+2} :

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{j=0}^2 \frac{\omega_k^2(x)}{(x - x_{k+j})^2 [\omega'_k(x_{k+j})]^2} \times \\ \times \left\{ \left[1 - \frac{\omega'_k(x_{k+j})}{\omega'_k(x_{k+j})} (x - x_{k+j}) \right] f_{k+j} + \right. \\ \left. + (x - x_{k+j}) f'_{k+j} \right\} + r_k(x), \end{aligned} \quad (9.2.50)$$

$$\omega_k(x) = (x - x_k)(x - x_{k+1})(x - x_{k+2}).$$

Для изучения погрешности интерполирования откажемся от интегрального ее представления, которое применяли в предыдущих случаях, ввиду его относительной сложности, и воспользуемся известным выражением $r_k(x)$ в форме Лагранжа:

$$r_k(x) = \frac{\omega^2(x)}{6!} f^{VI}(x_k + \vartheta_k h), \quad 0 \leq \vartheta_k \leq 2. \quad (9.2.51)$$

Оно быстрее приведет нас к цели, но даст несколько более грубую оценку, так как точное значение ϑ_k не известно.

Если умножить (9.2.50) почленно на $\cos ux$, интегрировать по отрезку $[x_k, x_{k+2}]$ и суммировать затем результаты по четным значениям k ($k=0, 2, 4, \dots$), получится следующее выражение для $\varphi_c(u)$:

$$\begin{aligned} \varphi_c(u) = & \int_0^\infty f(x) \cos ux \, dx = \alpha'_2 f_0 + \gamma'_2 \sum_{k=0}^\infty f_{2k+1} \cos(2k+1)\theta + \\ & + 2\alpha'_2 \sum_{k=1}^\infty f_{2k} \cos 2k\theta - \delta'_2 f'_0 - \eta'_2 \sum_{k=0}^\infty f'_{2k+1} \sin(2k+1)\theta - \\ & - 2\xi'_2 \sum_{k=1}^\infty f'_{2k} \sin 2k\theta + R_c(u). \quad (9.2.52) \end{aligned}$$

Значения коэффициентов $\alpha'_2, \gamma'_2, \dots$ приведены в конце параграфа, и

$$\begin{aligned} R_c(u) = & \frac{h^7}{6!} \int_0^2 \xi^2 (\xi-1)^2 (\xi-2)^2 \sum_{k=0}^\infty f^{VI}(x_{2k} + \vartheta_{2k} h) \times \\ & \times \cos u(x_{2k} + h\xi) \, d\xi. \quad (9.2.53) \end{aligned}$$

Отсюда вытекает следующая равномерная относительно u оценка $R_c(u)$:

$$\begin{aligned} |R_c(u)| & \leq \\ & \leq \frac{h^7}{6!} \int_0^2 \xi^2 (\xi-1)^2 (\xi-2)^2 \, d\xi \sum_{k=0}^\infty \max_{0 \leq \vartheta \leq 2} |f^{VI}(x_k + \vartheta h)| = \\ & = \frac{1}{9450} h^7 \sum_{k=0}^\infty \max_{0 \leq \vartheta \leq 2} |f^{VI}(x_k + \vartheta h)|. \quad (9.2.54) \end{aligned}$$

Для синус-преобразования Фурье сходное правило вычислений и его погрешность будут следующими:

$$\begin{aligned} \varphi_s(u) = \int_0^\infty f(x) \sin ux \, dx = & \beta'_2 f_0 + \gamma'_2 \sum_{k=0}^\infty f_{2k+1} \sin(2k+1)\theta + \\ & + 2\alpha'_2 \sum_{k=1}^\infty f_{2k} \sin 2k\theta + \zeta'_2 f'_0 + \eta'_2 \sum_{k=0}^\infty f'_{2k+1} \cos(2k+1)\theta + \\ & + 2\zeta'_2 \sum_{k=1}^\infty f'_{2k} \cos 2k\theta + R_s(u), \quad (9.2.55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_s(u) = \frac{h^7}{6!} \int_0^2 \xi^2 (\xi-1)^2 (\xi-2)^2 \times \\ \times \sum_{k=0}^\infty f^{VI}(x_{2k} + h\vartheta_{2k}) \sin u(x_{2k} + h\xi) d\xi, \quad (9.2.56) \end{aligned}$$

$$|R_s(u)| \leq \frac{1}{9450} h^7 \sum_{k=0}^\infty \max_{0 \leq \vartheta \leq 2} |f^{VI}(x_{2k} + h\vartheta)|.$$

Для комплексного преобразования Фурье аналогичные правило и оценка имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi(u) = \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-iux} \, dx = & 2\alpha'_2 \sum_{k=-\infty}^\infty f_{2k} e^{-i2k\theta} + \\ & + \gamma'_2 \sum_{k=-\infty}^\infty f_{2k+1} e^{-i(2k+1)\theta} - 2i\zeta'_2 \sum_{k=-\infty}^\infty f'_{2k} e^{-i2k\theta} - \\ & - i\eta'_2 \sum_{k=-\infty}^\infty f'_{2k+1} e^{-i(2k+1)\theta} + R(u), \quad (9.2.57) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(u) = \frac{h^7}{6!} \int_0^2 \xi^2 (\xi-1)^2 (\xi-2)^2 \times \\ \times \sum_{k=-\infty}^\infty f^{VI}(x_{2k} + h\vartheta_{2k}) e^{-iu(x_{2k} + h\xi)} d\xi, \quad (9.2.58) \end{aligned}$$

$$|R(u)| \leq \frac{1}{9450} h^7 \sum_{k=-\infty}^\infty \max_{0 \leq \vartheta \leq 1} |f^{VI}(x_{2k} + h\vartheta)|.$$

Параметры $\alpha'_2, \beta'_2, \dots, \theta$, входящие в равенства (9.2.52, 55, 57), имеют следующие значения:

$$\theta = uh,$$

$$h^5 u^6 \alpha'_2 = \theta (156 - 7\theta^2) \sin \theta \cos \theta + \\ + 3 (60 - 17\theta^2) \cos^2 \theta - 15 (12 - 5\theta^2),$$

$$h^5 u^6 \beta'_2 = \theta (\theta^4 + 8\theta^2 - 24) + \theta (7\theta^2 - 156) \cos^2 \theta + \\ + 3 (60 - 17\theta^2) \sin \theta \cos \theta,$$

$$h^5 u^6 \gamma'_2 = 16\theta (3 - \theta^2) \sin \theta - 48\theta^2 \cos \theta,$$

$$h^4 u^6 \delta'_2 = 2\theta (\theta^2 - 24) \sin \theta \cos \theta + \\ + 15 (\theta^2 - 4) \cos^2 \theta + \theta^4 - 27\theta^2 + 6\theta,$$

$$h^4 u^6 \zeta'_2 = \theta (5\theta^2 - 12) + 15 (4 - \theta^2) \sin \theta \cos \theta + \\ + 2\theta (\theta^2 - 24) \cos^2 \theta,$$

$$h^4 u^6 \eta'_2 = 16\theta (\theta^2 - 15) \cos \theta + 48 (5 - 2\theta^2) \sin \theta.$$

§ 9.3. Вычислительные формулы, основанные на интерполировании рациональными функциями

9.3.1. Введение. Выбор интерполирования, его погрешность. В начале главы мы обращали внимание на то, что интерполирование алгебраическими многочленами хотя и приводит к практически полезным вычислительным правилам, но не всегда является удобным средством для вычислений. Оно требует разбиения полуоси или оси интегрирования на бесконечное число конечных отрезков, количество которых зависит, в частности, от скорости убывания функции f при $|x| \rightarrow \infty$. Если убывание f недостаточно быстрое, то таких отрезков может потребоваться много, и это затруднит вычисления или сделает их в некоторых случаях невозможными.

Чтобы избежать необходимости деления области интегрирования на конечные части, нужно изменить систему функций, на которой основано интерполирование. Выбор такой системы зависит, во-первых, от области интегрирования, что в нашей задаче означает, будет ли это вся ось x или полуось $x \geq 0$. Мы будем рассматривать только косинус- и синус-преобразования Фурье и в соответствии с этим считать, что областью интегрирования является полуось $x \geq 0$. Такое предположение не является ограничением задачи, так как комплексное преобразование Фурье легко приводится к косинус- и синус-преобразованиям.

Во-вторых, выбор зависит от свойств множества функций, подлежащих интерполированию. Выше мы условились рассматривать функции f , удовлетворяющие при больших x условию $|f(x)| \leq Ax^{-s}$, $s > 1$. Среди них выделим функции, часто встречающиеся в приложениях и представимые в форме

$$f(x) = \frac{F(x)}{(1+x)^s}, \quad s > 1, \quad (9.3.1)$$

где $F(x)$ непрерывна на полуоси $[0, \infty)$ и имеет конечный предел $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = F(\infty)$. Функцию $F(x)$, обладающую такими свойствами, будем называть непрерывной на замкнутой полуоси $[0, \infty]$ и предельное значение $F(\infty)$ считать ее значением в бесконечно удаленной точке.

Для приближения таких функций F могут быть приняты многие системы простейших функций, ограниченных на полуоси $[0, \infty)$. Чтобы сделать вычисления возможно более простыми, примем за основные функции систему простых дробей $\frac{1}{(1+x)^m}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) и будем интерполировать при помощи многочленов от аргумента $\frac{1}{1+x}$:

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^n \frac{a_m}{(1+x)^m}. \quad (9.3.2)$$

Такие многочлены в множестве функций $F(x)$, непрерывных на замкнутой полуоси $[0, \infty]$, образуют полную систему в метрике C . В самом деле, преобразование аргумента $z = \frac{1}{1+x}$ переводит полуось $[0, \infty]$ в замкнутый отрезок $[0, 1]$ оси z . Функция $F(x)$, непрерывная на $[0, \infty]$, перейдет в функцию $\psi(z)$, непрерывную на $[0, 1]$, рациональные функции $P_n(x)$ перейдут в многочлены $p_n(z)$ от z . После этого остается сослаться на теорему Вейерштрасса о полноте множества алгебраических многочленов в классе функций, непрерывных на конечном замкнутом отрезке.

Возьмем теперь на полуоси $[0, \infty)$ $n+1$ точек x_k ($0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n < \infty$) и коэффициенты a_k функции P_n выберем так, чтобы ее значения в точках x_k совпадали со значениями F :

$$P_n(x_k) = \sum_{i=0}^n a_i (1+x_k)^{-i} = F(x_k) \quad (k = 0, 1, \dots, n). \quad (9.3.3)$$

Эти равенства дают линейную систему уравнений для коэффициентов a_i . Определитель ее является определителем Вандермонда от аргументов $\frac{1}{1+x_k}$ ($k=0, 1, \dots, n$), он отличен от нуля, так как все x_k различны между собой. Система имеет единственное решение, и существует, следовательно, единственная рациональная функция $P_n(x)$ вида (9.3.2), удовлетворяющая условиям (9.3.3).

При решении системы (9.3.3) коэффициенты a_i будут найдены как линейные функции величин $F(x_k)$ ($k=0, 1, \dots, n$). Подстановка их в (9.3.2) покажет, что P_n есть также линейная функция $F(x_k)$:

$$P_n(x) = l_0(x)F(x_0) + l_1(x)F(x_1) + \dots + l_n(x)F(x_n). \quad (9.3.4)$$

Здесь $l_k(x)$ — многочлены степени n от $\frac{1}{1+x}$. Они являются функциями влияния узлов интерполирования x_k и удовлетворяют, очевидно, условиям

$$l_i(x_k) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k, \end{cases}$$

определяющим их единственным образом.

Сразу же видно, что

$$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x_j} \right) \left[\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \left(\frac{1}{1+x_k} - \frac{1}{1+x_j} \right) \right]^{-1}. \quad (9.3.5)$$

После несложных преобразований для $l_k(x)$ получатся другие выражения, показывающие, что коэффициенты $l_k(x)$ отличаются весьма простыми множителями от хорошо известных интерполяционных множителей Лагранжа:

$$\left. \begin{aligned} l_k(x) &= \frac{(1+x_k)^n}{(1+x)^n} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k) \omega'_{n+1}(x_k)}, \\ \omega_{n+1}(x) &= \prod_{j=0}^n (x-x_j). \end{aligned} \right\} \quad (9.3.6)$$

В дальнейшем для вычислений с рациональными функциями $P_n(x)$ полезно найти разложение $P_n(x)$ по степеням $\frac{1}{1+x}$. В удобной форме оно может быть построено следую-

щим простым путем. Разложим многочлен $\frac{\omega_{n+1}(x)}{x-x_k}$ по степеням $1+x$:

$$\frac{\omega_{n+1}(x)}{x-x_k} = \sum_{l=0}^n c_l^{(k)} (1+x)^l,$$

и внесем разложение в (9.3.6) и (9.3.4):

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n F(x_k) \sum_{l=0}^n c_l^{(k)} \frac{(1+x_k)^n}{\omega'_{n+1}(x_k)} \frac{1}{(1+x)^{n-l}}. \quad (9.3.7)$$

Во внутренней сумме множители, стоящие перед $(1+x)^{-n+l}$, зависят только от узлов x_i ($i=0, 1, \dots, n$), и для употребительных систем узлов они могут быть вычислены заранее и табулированы.

Обратимся теперь к исследованию погрешности интерполирования $r_n(x) = F(x) - P_n(x)$. Ее точные интегральные представления для классов функций достаточно высокой гладкости через производные от функции F построены для интерполирования по любой системе координатных функций *). Нужное нам представление может быть получено из этих общих результатов как частный случай. Но такой путь требует знания читателями общих результатов или их изложения авторами, что заняло бы много места, и мы предпочли получить необходимые представления иным, более коротким путем, воспользовавшись связью нашей задачи с интерполированием алгебраическими многочленами. Напомним, что если заменить переменную, положив $z = \frac{1}{1+x}$, $x = \frac{1}{z} - 1$, то полуось $0 \leq x \leq \infty$ перейдет в единичный отрезок $1 \geq z \geq 0$ оси z , многочлен $P_n(x)$ (см. (9.3.2)) перейдет в целый алгебраический многочлен от z степени n :

$$P_n(x) = P_n\left(\frac{1}{z} - 1\right) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = p_n(z). \quad (9.3.8)$$

Функция $F(x)$ преобразуется в некоторую функцию аргумента z :

$$F(x) = F\left(\frac{1}{z} - 1\right) = \psi(z),$$

*) См., например, И. С. Березин и Н. П. Жидков, Методы вычислений, изд. 2-е, т. I, гл. 2, § 4, М. «Наука», 1966.

узлы интерполирования x_k перейдут в узлы $z_k = (1 + x_k)^{-1}$ ($1 \geq z_0 > z_1 > \dots > z_n > 0$), и на оси z получим задачу интерполирования $\psi(z)$ многочленом (9.3.8). Погрешность интерполирования в этой новой задаче совпадает с погрешностью $r_n(x)$:

$$\rho_n(z) = \psi(z) - p_n(z) = F(x) - P_n(x) = r_n(x).$$

Но выражение для остатка $\rho_n(z)$ хорошо известно. Воспользуемся формулой Тейлора для $\psi(z)$, считая, что $\psi(z)$ имеет на $[0, 1]$ непрерывную производную порядка $n+1$:

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \psi(1) + (z-1)\psi'(1) + \dots + \frac{1}{n!}(z-1)^n\psi^{(n)}(1) + \\ &\quad + \frac{1}{n!} \int_1^z \psi^{(n+1)}(\tau)(z-\tau)^n d\tau = \\ &= \Pi_n(z) + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_z^1 \psi^{(n+1)}(\tau)(\tau-z)^n d\tau = \\ &= \Pi_n(z) + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_0^1 \psi^{(n+1)}(\tau)(\tau-z)^n E(\tau-z) d\tau. \end{aligned}$$

Многочлен Π_n интерполируется точно, и $\rho_n(z)$ совпадает с погрешностью интерполирования интегрального члена. Так как

$$\begin{aligned} \rho_n(z) &= \psi(z) - \sum_{k=0}^n \Lambda_k(z) \psi(z_k), \\ \Lambda_k(z) &= \frac{\Omega(z)}{(z-z_k)'(z_k)}, \quad \Omega(z) = \prod_{j=0}^n (z-z_j), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \rho_n(z) &= \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_0^1 \psi^{(n+1)}(\tau) \left\{ (\tau-z)^n E(\tau-z) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^n \Lambda_k(z) (\tau-z_k)^n E(\tau-z_k) \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (9.3.9)$$

Для получения $r_n(x)$ возвратимся к прежней числовой оси x . Положим $\tau = \frac{1}{1+t}$, $t = \frac{1}{\tau} - 1$. Ввиду того, что

$d\tau = -\frac{1}{(1+t)^2} dt$, между операторами дифференцирования по τ и по t верно равенство

$$\frac{d}{d\tau} = -(1+t)^2 \frac{d}{dt}. \quad (9.3.10)$$

Применив его $n+1$ раз к функции $\psi(\tau) = F(t)$, получим следующее правило вычисления производной по переменной τ :

$$\psi^{(n+1)}(\tau) = (-1)^{n+1} (1+t)^2 \frac{d}{dt} (1+t)^2 \frac{d}{dt} \dots (1+t)^2 \frac{d}{dt} F(t).$$

Легко можно видеть, что после выполнения дифференцирования получится равенство приводимого ниже вида, в котором мы не станем сейчас вычислять коэффициенты $a_1, \dots, a_n$:

$$\begin{aligned} \psi^{(n+1)}(\tau) &= (-1)^{n+1} (1+t)^{n+1} [(1+t)^{n+1} F^{(n+1)}(t) + \\ &\quad + a_1 (1+t)^n F^{(n)}(t) + a_2 (1+t)^{n-1} F^{(n-1)}(t) + \dots \\ &\quad \dots + a_{n-1} (1+t)^2 F''(t) + a_n (1+t) F'(t)] = \\ &= (-1)^{n+1} (1+t)^{n+1} L_{n+1}(F). \end{aligned} \quad (9.3.11)$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение $\psi^{(n+1)}(\tau) = 0$. Общее его решение есть многочлен от τ степени n с произвольными коэффициентами, в качестве же полной системы независимых решений можно взять $1, \tau, \tau^2, \dots, \tau^n$.

Этому уравнению эквивалентно уравнение

$$\begin{aligned} L_{n+1}(F) &= (1+t)^{n+1} F^{(n+1)}(t) + a_1 (1+t)^n F^{(n)}(t) + \\ &+ a_2 (1+t)^{n-1} F^{(n-1)}(t) + \dots + a_n (1+t) F'(t) = 0. \end{aligned} \quad (9.3.12)$$

Оно является уравнением Эйлера*) с особыми точками $t = -1$ и $t = \infty$. Полная система $n+1$ линейно независимых решений его, в которые при преобразовании $\tau = (1+t)^{-1}$ переходят степени τ^i ($i = 0, 1, \dots, n$), есть $1, (1+t)^{-1}, (1+t)^{-2}, \dots, (1+t)^{-n}$. Это дает возможность указать простой путь для вычисления a_j ($j = 1, 2, \dots, n$).

Если записать уравнение (9.3.12) и затем присоединить к нему результаты подстановок в него решений $(1+t)^{-1}$,

*) Уравнение Эйлера порядка n с особыми точками $x=0$ и $x=\infty$ есть

$$A_0 x^n y^{(n)} + A_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + A_n y = 0.$$

Уравнение (9.3.12) отличается от него заменой переменной $x = 1+t$.

$(1+t)^{-2}, \dots, (1+t)^{-n}$, получится, после некоторых упрощений, следующая система $n+1$ равенств:

$$(1+t)^{n+1}F^{(n+1)} + a_1(1+t)^nF^{(n)} + \\ + a_2(1+t)^{n-1}F^{(n-1)} + \dots + a_n(1+t)F' = 0,$$

$$(n+1)! - a_1n! + a_2(n-1)! - \dots + (-1)^n a_11! = 0,$$

$$(n+2)! - a_1(n+1)! + a_2n! - \dots + (-1)^n a_12! = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(2n)! - a_1(2n-1)! + a_2(2n-2)! - \dots + (-1)^n a_1n! = 0.$$

Ее можно рассматривать как однородную линейную систему уравнений относительно величин $1, a_1, a_2, \dots, a_n$, образующих ненулевое решение системы. Определитель системы должен обращаться в нуль, что дает иную запись уравнения (9.3.12):

$$\begin{vmatrix} (1+t)^{n+1}F^{(n+1)} & (1+t)^nF^{(n)} & (1+t)^{n-1}F^{(n-1)} & \dots & (1+t)F' \\ (n+1)! & -n! & (n-1)! & \dots & (-1)^n 1! \\ (n+2)! & -(n+1)! & n! & \dots & (-1)^n 2! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (2n)! & -(2n-1)! & (2n-2)! & \dots & (-1)^n n! \end{vmatrix} = 0. \quad (9.3.13)$$

Если разложить определитель по элементам первой строки, должно получиться уравнение, отличающееся от (9.3.12) постоянным множителем. Поэтому коэффициенты $a_1, a_2, \dots$ должны быть равны соответственно отношению алгебраических дополнений элементов первой строки детерминанта (9.3.13), начиная со второго, к алгебраическому дополнению первого элемента строки. Это необходимо сделать, так как в (9.3.12) коэффициент при производной высшего порядка приведен к $(1+t)^{n+1}$.

Возвратимся теперь к преобразованию интеграла (9.3.9) к старым переменным x, t и положим $\tau = \frac{1}{1+t}$, $z = \frac{1}{1+x}$. При этом $\psi^{(n+1)}(\tau)$ перейдет в $(-1)^{n+1}(1+t)^{n+1}L_{n+1}(F)$.

По поводу ядра интеграла (9.3.9), стоящего в фигурных скобках, полезно сделать предварительное замечание, поясняющее его значение. Мы присоединим к ядру множитель $(n!)^{-1}$.

В функции $\frac{1}{n!}(\tau-z)^n E(\tau-z)$ будем рассматривать z как независимую переменную и τ — как параметр. При

$z < \tau$, когда $E(\tau - z) = 1$, эта функция есть решение уравнения $\frac{d^{n+1}y}{dz^{n+1}} = 0$, удовлетворяющее в точке $z = \tau$ условиям $y(\tau) = y'(\tau) = \dots = y^{(n-1)}(\tau) = 0$ и $y^{(n)}(\tau) = 1$. При $z > \tau$, когда $E(\tau - z) = 0$, это решение продолжено тождественным нулем. Само же ядро есть погрешность интерполирования такой функции алгебраическим многочленом степени n по значениям в узлах z_k ($k = 0, 1, \dots, n$).

В переменных x, t отдельные части ядра будут иметь следующие выражения:

$$\begin{aligned}(\tau - z)^n &= \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+x} \right)^n = \frac{(x-t)^n}{(1+t)^n (1+x)^n}, \\ E(\tau - z) &= E \left[\frac{x-t}{(1+t)(1+x)} \right] = E(x-t), \\ \Lambda_k(z) &= \frac{(z-z_0) \dots (z-z_{k-1})(z-z_{k+1}) \dots (z-z_n)}{(z_k-z_0) \dots (z_k-z_{k-1})(z_k-z_{k+1}) \dots (z_k-z_n)} = \\ &= \prod_{j \neq k} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x_j} \right) \left[\prod_{j \neq k} \left(\frac{1}{1+x_k} - \frac{1}{1+x_j} \right) \right]^{-1} = \\ &= \frac{(1+x_k)^n}{(1+x)^n} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k) \omega'_{n+1}(x_k)}, \\ \omega_{n+1} &= \prod_{j=0}^n (x-x_j), \quad d\tau = -\frac{dt}{(1+t)^2}.\end{aligned}$$

Подстановка их в интеграл (9.3.9) дает для погрешности интерполирования $r_n(x)$ приводимое ниже значение

$$\begin{aligned}r_n(x) &= \int_0^\infty L_{n+1}(F) \frac{1}{n! (1+x)^n} \left\{ (x-t)^n E(x-t) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^n \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k) \omega'_{n+1}(x_k)} (x_k-t)^n E(x_k-t) \right\} \frac{dt}{1+t}.\end{aligned}\quad (9.3.14)$$

Величина, стоящая внутри фигурных скобок под знаком интеграла, есть не что иное, как погрешность алгебраического интерполирования по переменной x функции $(x-t)^n E(x-t)$ по значениям ее в узлах x_k . Когда t меньше $x, x_0, \dots, x_n$, то интерполирование точное и величина в фигурных скобках в (9.3.14) обращается в нуль. Когда же t больше $x, x_0, \dots, x_n$, все «гасящие» функции $E(x-t), E(x_k-t)$ равны нулю, и она также равна нулю. Величина в фигурных скобках может принимать значения,

отличные от нуля, только на отрезке, где располагаются $x, x_0, \dots, x_n$. Поэтому интеграл по полуоси $0 \leq t < \infty$, при условии непрерывности $L_{n+1}(f)$, является, по сути дела, собственным.

9.3.2. Общее интерполяционное квадратурное правило. Для удобства записи объединим косинус- и синус-преобразования Фурье в одном интеграле с показательной функцией

$$\varphi_e(u) = \int_0^{\infty} e^{iux} f(x) dx. \quad (9.3.15)$$

Если f есть действительная функция, косинус- и синус-преобразования f будут соответственно действительной и мнимой частью $\varphi_e(u)$.

Выше предполагалось, что $f(x) = F(x)(1+x)^{-s}$ ($s > 1$) и $F(x)$ есть непрерывная и достаточно гладкая функция на полуоси $0 \leq x \leq \infty$.

Интерполируем функцию F при помощи многочлена $P_n(x)$ степени n от $(1+x)^{-1}$ и запишем $P_n(x)$ в форме (9.3.7).

Заменив в интеграле (9.3.15) оригинал f его выражением

$$f(x) = (1+x)^{-s} F(x) = (1+x)^{-s} [P_n(x) + r_n(x)],$$

получим для $\varphi_e(u)$ следующее представление, которое после отбрасывания остаточного члена R_n может служить вычислительным правилом для φ_e :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_e(u) &= \int_0^{\infty} e^{iux} (1+x)^{-s} F(x) dx = \\ &= \int_0^{\infty} e^{iux} (1+x)^{-s} [P_n(x) + r_n(x)] dx = \\ &= \sum_{k=0}^n F(x_k) \sum_{l=0}^n \frac{c_l^{(k)} (1+x_k)^n}{\omega'(x_k)} \times \\ &\quad \times \int_0^{\infty} e^{iux} (1+x)^{-n+l-s} dx + R_n(u), \\ R_n(u) &= \int_0^{\infty} e^{iux} (1+x)^{-s} r_n(x) dx. \end{aligned} \right\} \quad (9.3.16)$$

Здесь коэффициенты $A_{kl} = \frac{c_l^{(k)} (1+x_k)^n}{\omega'(x_k)}$ зависят только от узлов x_k и не зависят ни от s , ни от функции F . Их можно табулировать для наиболее употребительных систем узлов.

Интегралы $\int_0^\infty e^{iux} (1+x)^{-n+l-s} dx$ зависят лишь от частоты u и от s , т. е. от быстроты убывания $f(x)$ при неограниченном возрастании x . В п. 9.3.5 мы укажем правила вычисления этих интегралов.

Из представления для погрешности $R_n(u)$ в (9.3.16) просто получается равномерная относительно u оценка через погрешность интерполирования $r_n(x)$:

$$|R_n(u)| \leq \int_0^\infty \frac{|r_n(x)|}{(1+x)^s} dx. \quad (9.3.17)$$

Из нее вытекает теорема о сходимости вычислительного процесса, соответствующего (9.3.16).

Пусть процесс определяется бесконечной треугольной таблицей узлов интерполирования

$$X = \begin{pmatrix} x_0^{(0)} & & & \\ x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ x_0^{(n)} & x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (9.3.18)$$

Предположим, что интерполирование (9.3.7) функции F выполняется по узлам $x_k^{(n)}$ ($k=0, 1, \dots, n$), принадлежащим строке номера n таблицы X . Допустим теперь, что $n \rightarrow \infty$; тогда имеет место следующая

Теорема 1. Пусть выполняются условия:

1) интерполяционный процесс (9.3.7), определяемый таблицей узлов (9.3.18), сходится для функции $F(x)$ при почти всех значениях x на полуоси $0 \leq x < \infty$;

2) погрешность $r_n(x)$ интерполирования при всех достаточно больших n удовлетворяет условию

$$|r_n(x)| \leq M < \infty \quad (0 \leq x < \infty).$$

Тогда сстаточный член $R_n(u)$ соответствующего вычислительного процесса (9.3.16) для преобразования $\varphi_e(u)$

стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно u на оси $-\infty < u < \infty$.

Эта теорема есть непосредственное следствие известной теоремы о предельном переходе в интеграле Лебега *): если последовательность суммируемых на множестве E функций $g_n(x)$ сходится почти везде на E к суммируемой на E функции $g(x)$ и существует суммируемая на E функция $h(x)$ такая, что при всяких n и $x \in E$ выполняется неравенство $|g_n(x)| \leq h(x)$, то

$$\int_E g_n(x) dx \rightarrow \int_E g(x) dx.$$

Для нахождения оценок погрешности $R_n(u)$ в зависимости от свойств функции $F(x)$ может быть полезно, по крайней мере в некоторых случаях, иное представление $R_n(x)$, получающееся из (9.3.16) путем замены $r_n(x)$ его представлением вида (9.3.14):

$$\begin{aligned} R_n(u) = & \int_0^\infty dx e^{iux} \frac{1}{n! (1+x)^{n+s}} \int_0^\infty L_{n+1}(F) \times \\ & \times \left\{ (x-t)^n E(x-t) - \sum_{k=0}^n \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k) \omega'_{n+1}(x_k)} \times \right. \\ & \left. \times (x_k-t)^n E(x_k-t) \right\} \frac{dt}{1+t}. \quad (9.3.19) \end{aligned}$$

Сделаем еще замечание о знаке ядра двойного интеграла

$$\begin{aligned} K^*(x, t) = & \frac{1}{n! (1+x)^{n+1} (1+t)} \left\{ (x-t)^n E(x-t) - \right. \\ & \left. - \sum_{k=0}^n \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k) \omega'_{n+1}(x_k)} (x_k-t)^n E(x_k-t) \right\} = \\ & = \frac{1}{n! (1+x)^{n+1} (1+t)} K(x, t). \end{aligned}$$

Знак его совпадает со знаком выражения $K(x, t)$, стоящего в фигурных скобках. Это выражение встречалось

*) См., например, И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, изд. 2-е, гл. VI, § 3, М., Гостехиздат, 1957, стр. 166—167.

в равенстве (9.3.9). Напомним, что оно является ядром в интегральном представлении погрешности следующей задачи алгебраического интерполирования.

Пусть узлы x_k ($k=0, 1, \dots, n$) и точка x интерполирования лежат на отрезке $[a, b]$ и функция $g(x)$ интерполируется по ее значениям $g(x_k)$ многочленом $p_n(x)$ степени n . Если $g(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную производную порядка $n+1$, то погрешность интерполирования $\rho_n(x) = g(x) - p_n(x)$ представима через производную порядка $n+1$ от g в форме

$$\rho_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^b g^{(n+1)}(t) K(x, t) dt. \quad (9.3.20)$$

С другой стороны, для $\rho_n(x)$ известно представление Лагранжа

$$\rho_n(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!} g^{(n+1)}(\xi), \quad a \leq \xi \leq b, \quad (9.3.21)$$

откуда следует, что если производная $g^{(n+1)}(x)$ отлична от нуля на $[a, b]$, то $\rho_n(x)$ не обращается в нуль ни в одной точке x , кроме узлов x_k ($k=0, 1, \dots, n$). Поэтому при каждом фиксированном значении x , отличном от узлов x_k , ядро $K(x, t)$, как функция от t , не изменяет свой знак при $a \leq t \leq b$, так как если бы ядро $K(x, t)$ изменяло знак, то существовала бы такая функция $g^{(n+1)}(\tau)$, сохраняющая знак, для которой интеграл (9.3.20) обращался бы в нуль, чего не может быть ввиду $x \neq x_k$ ($k=0, 1, \dots, n$).

Кроме того, если считать $g(x)$ многочленом степени $n+1$, для которого $g^{(n+1)}(x) = 1$, то из обоих представлений погрешности $\rho_n(x)$ следует

$$\frac{1}{n!} \int_a^b K(x, t) dt = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!}.$$

Стало быть, при каждом фиксированном x знак ядра $K(x, t)$ совпадает со знаком $\omega_{n+1}(x)$.

9.3.3. Случай равноотстоящих узлов. За узлы интерполирования примем равноотстоящие точки $x_k = kh$ ($k=0, 1, 2, \dots; h > 0$). В этом случае $\omega_{n+1}(x) = x(x-h)\dots(x-nh)$,

коэффициенты $c_l^{(k)}$ определяются из равенства

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{n+1}(x)}{x-x_k} &= x(x-h)\dots[x-(k-1)h][x-(k+1)h]\dots(x-nh) = \\ &= \sum_{l=0}^n c_l^{(k)} (1+x)^l \quad (k=0, 1, \dots, n). \end{aligned}$$

В равномерном случае

$$\begin{aligned} \omega^l(x_k) &= kh(k-1)h\dots h(-h)(-2h)\dots(-1)(n-k)h = \\ &= h^n (-1)^{n-k} k! (n-k)!, \\ A_{kl} &= \frac{c_l^{(k)} (1+kh)^n}{(-1)^{n-k} h^n k! (n-k)!}. \end{aligned} \quad (9.3.22)$$

При составлении числовых таблиц для A_{kl} всегда можно считать $h=1$, так как всякое другое значение h приводится к единице линейным преобразованием независимой переменной *) $x=hx'$.

Правило вычислений (9.3.16) в случае равноотстоящих узлов принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi_e(u) &= \int_0^\infty e^{iux} \frac{F(x)}{(1+x)^s} dx = \\ &= \sum_{k=0}^n F(kh) \sum_{l=0}^n A_{kl} \int_0^\infty e^{iux} (1+x)^{-n-s+l} dx + R_n(u). \end{aligned} \quad (9.3.23)$$

Проблема сходимости вычислительного процесса, когда $R_n(u) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, иначе говоря, проблема возможности сколь угодно точного вычисления $\varphi_e(u)$ по правилу (9.3.23) здесь является весьма своеобразной и требует пояснений. В предыдущем пункте отмечалось, что в основе вопроса сходимости $R_n(u)$ к нулю лежит сходимость интерполирования функции $F(x)$ рациональной функцией $P_n(x)$ (см. (9.3.4)) и для равномерного стремления $R_n(u)$ к нулю достаточно, чтобы $P_n(x)$ почти везде на $[0, \infty]$ ограниченно сходилась к $F(x)$.

Чтобы сделать изложение наглядным, вернемся к переменной z , положив $z = \frac{1}{1+x}$. Замкнутая полуось $0 \leq x \leq \infty$ перейдет в замкнутый отрезок $1 \geq z \geq 0$. Функция $F(x)$, которую мы предполагали непрерывной на полуоси $0 \leq x \leq \infty$, преобразуется в некоторую функцию

*) Таблицы значений A_{kl} ($k, l=0, 1, \dots, n$) для $n=1(1)15$ и $h=1$ с 10 знаками можно найти в книге [7].

$\psi(z) = F\left(\frac{1}{z} - 1\right)$, непрерывную на единичном отрезке $0 \leq z \leq 1$, а $P_n(x)$ — в некоторый алгебраический многочлен $p_n(z)$ степени n , интерполирующий $\psi(z)$ по значениям $\psi_k = \psi(z_k)$ в узлах $z_k = \frac{1}{1+kh}$ ($k=0, 1, \dots, n$).

При увеличении n старые узлы сохраняются и к ним добавляются еще новые. Если рассмотреть все множество узлов интерполирования z_k ($k=0, 1, 2, \dots$), то они образуют монотонную убывающую последовательность, сходящуюся к нулю.

Проблему сходимости интерполирования необходимо рассматривать только в таких множествах функций, когда каждая функция вполне определяется значениями, которые она принимает на счетном множестве всех узлов. Если это условие не выполняется и если существует несколько функций, которые принимают одинаковые значения во всех узлах интерполирования и, следовательно, обладают одинаковыми интерполирующими их многочленами, то вопрос о сходимости интерполирования не имеет обычного смысла.

Когда рассматривают вопрос о сходимости интерполирования для множества всех функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, или для множества функций, имеющих непрерывные производные до некоторого фиксированного порядка m , то принимают во внимание, что каждая такая функция определяется своими значениями на счетном множестве точек, всюду плотном на $[a, b]$. В соответствии с этим в исследованиях сходимости интерполирования таких функций всегда предполагается, что узлы интерполирования $z_i^{(k)}$ ($i=0, 1, \dots, k$; $k=0, 1, 2, \dots$) лежат на $[a, b]$ также всюду плотно.

В рассматриваемой нами задаче таблица узлов интерполирования имеет вид

$$Z = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_0 & z_1 \\ z_0 & z_1 & z_2 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (9.3.24)$$

Строки ее — отрезки последовательности узлов $z_0, z_1, z_2, \dots, [z_k = (1+kh)^{-1}]$, сходящейся к единственной точке сгущения $z=0$. Простейшим и естественным множеством функций, которые определяются значениями на такой

последовательности, является множество аналитических функций, для которых все узлы интерполирования и предельная точка их лежат внутри области регулярности. На таком множестве функций мы остановим свое внимание и будем считать, что функция $\psi(z)$ регулярна в области комплексной плоскости z , содержащей внутри себя отрезок $[0, 1]$. Чем шире будет эта область и чем дальше, следовательно, от $[0, 1]$ будут лежать особые точки $\psi(z)$, тем более плавным будет поведение $\psi(z)$ на отрезке $[0, 1]$ и тем более вероятной будет сходимость интерполирования к $\psi(z)$ на $[0, 1]$. Поэтому естественно поставить вопрос о нахождении наименьшей области, регулярность $\psi(z)$ в которой обеспечивала бы такую сходимость. В теории интерполирования доказывается, что наименьшей такой областью является замкнутый круг единичного радиуса с центром в начале координат *): $|z| \leq 1$, при этом сходимость в круге и, в частности, на его радиусе $0 \leq r \leq 1$ будет равномерной. Мы не станем приводить доказательство этого результата и ограничимся только пояснением наглядной стороны существа вопроса, что можно сделать сравнительно просто.

Вопрос о сходимости определяется поведением интерполирующего многочлена $p_n(z)$ при больших значениях номера n . Но если n велико, то подавляющее число узлов будет близко к предельной точке $z=0$ и интерполирование будет близким к интерполированию с единственным узлом $z=0$, имеющим кратность n . Последнее же дается отрезком ряда Тейлора

$$S_n(z) = \psi(0) + \frac{z}{1!} \psi'(0) + \dots + \frac{z^n}{n!} \psi^{(n)}(0).$$

Если множество функций характеризовать только областью регулярности и не делать никаких специальных предположений о поведении функции в этой области, то сходимость $S_n(z) \rightarrow \psi(z)$ на замкнутом отрезке $[0, 1]$ можно, наверное, гарантировать только в том случае, когда $\psi(z)$ регулярна в круге $|z| \leq 1$.

Приведенные соображения, разумеется, нельзя считать доказательством нужного утверждения, но они, по мнению авторов, достаточно просто и наглядно подтверждают если не его справедливость, то его вероятность.

*) См., например, [6], гл. 12, § 2, стр. 237—242.

Теперь возвратимся к старой переменной $x = \frac{1}{z} - 1$. Функция $\psi(z)$ перейдет в функцию $\Psi(z) = \psi\left(\frac{1}{1+x}\right) = F(x)$, регулярную в некоторой области, содержащей внутри себя замкнутую полуось $0 \leq x \leq \infty$, в частности бесконечно удаленную точку $x = \infty$. Единичный круг $|z| \leq 1$ преобразуется в область $\frac{1}{|1+x|} \leq 1$, или $|1+x| \geq 1$, являющуюся замкнутой внешностью круга радиуса 1 с центром в точке -1 .

Изложенное выше позволяет высказать следующее утверждение.

Когда функция $F(x)$ является аналитической, регулярной в области $|1+x| \geq 1$, то интерполяционный процесс для нее по равноотстоящим узлам $x_k = kh$ ($k = 0, 1, \dots$) при помощи многочлена $P_n(x)$ степени n от $\frac{1}{1+x}$ (см. (9.3.4)) сходится равномерно в указанной области.

Это дает возможность сказать, что имеет место

Теорема 2. *Если функция $F(x)$ регулярна в области $|1+x| \geq 1$ комплексной плоскости x , то вычислительный процесс, получающийся из равенства (9.3.23) при отбрасывании там остаточного члена $R_n(u)$, сходится при $n \rightarrow \infty$ к $\varphi_e(u)$ равномерно относительно u на оси $-\infty < u < \infty$.*

9.3.4. Интерполяционные правила вычислений, связанные с корнями ортогональных многочленов. Сходимость интерполяционного квадратурного процесса с равноотстоящими узлами (9.3.23) для очень узкого класса функций побудила строить другие правила вычислений, более благоприятные в отношении области сходимости и достаточно несложные в смысле вычислений. Можно стремиться также к тому, чтобы они позволяли воспользоваться имеющимися числовыми таблицами. Такое построение может быть выполнено несколькими путями, два из которых будут указаны в настоящем пункте и третий — в § 10.2.

При выборе вычислительного правила, если стремиться сохранить его интерполяционно-квадратурный тип, необходимо было считаться с известными результатами по теории интерполирования и теории квадратур. Выбор можно сделать на основе двух следующих соображений, первое из которых уже встречалось читателю в гл. 4.

I. При интерполировании на конечном отрезке, например на $[-1, 1]$, особенно благоприятными относительно сходимости являются такие таблицы узлов:

$$Z = \begin{pmatrix} z_0^{(0)} & & \\ z_0^{(1)} & z_1^{(1)} & \\ z_0^{(2)} & z_1^{(2)} & z_2^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (9.3.25)$$

которые имеют предельную плотность распределения Чебышева

$$\rho(z) = \frac{1}{\pi} (1 - z^2)^{-1/2}. \quad (9.3.26)$$

Например, интерполяционный процесс с такой таблицей будет сходиться равномерно на отрезке $[-1, 1]$ для любой функции, аналитической на $[-1, 1]$, включая и его концы -1 и 1 .

Наиболее изученными таблицами такого рода являются таблицы корней ортогональных многочленов *). Большое значение для приложений имеют многочлены Якоби, отвечающие весовой функции

$$\rho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \quad (\alpha, \beta > -1),$$

позволяющей учитывать степенные особенности на концах отрезка $[-1, 1]$. Среди них особенно важную роль в задаче интерполирования играют многочлены Чебышева первого рода. Интерполяционный процесс, в котором за узлы принимаются корни такого многочлена степени n , сходится равномерно на $[-1, 1]$ для всякой функции $\varphi(z)$, модуль непрерывности которой $\omega(\delta)$ удовлетворяет условию **) $\omega(\delta) \ln \delta \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow 0$).

В теории интерполирования доказывается также, что такой интерполяционный процесс будет, как упоминалось выше, равномерно сходиться к $\varphi(z)$, если $\varphi(z)$ есть абсолютно непрерывная на $[-1, 1]$ функция.

II. В теории приближенных квадратур известно, что при вычислении интеграла с весовой функцией можно

*) Известно, что если весовая функция $\rho(z)$ почти везде на отрезке $[-1, 1]$ положительна, то таблица корней соответствующей ей системы ортогональных многочленов всегда имеет предельную плотность распределения (9.3.26).

**) См. И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, гл. III, § 1, М., Гостехиздат, 1949, стр. 542.

в вычислительной формуле *)

$$\int_a^b p(z) \varphi(z) dz \approx \sum_{k=1}^n A_k \varphi(z_k) \quad (9.3.27)$$

значительно увеличить алгебраическую степень точности, если специальным образом вычислять узлы z_k в формуле и коэффициенты A_k , а именно доказывается, что если весовая функция $p(z)$ знакопостоянна, то при помощи выбора z_k и A_k равенство (9.3.27) можно сделать выполняющимся точно, когда $\varphi(z)$ есть произвольный многочлен степени $2n-1$, при этом z_k и A_k определяются единственным образом: z_k должны быть корнями многочлена $P_n(z)$ степени n из ортогональной системы многочленов, отвечающей весу $p(z)$, и

$$A_k = \int_a^b p(z) \frac{P_n(z)}{(z-z_k) P'_n(z_k)} dz.$$

Последнее означает, что правило квадратур (9.3.27) должно быть интерполяционным.

Отметим также, что формула (9.3.27) сходится в очень широком множестве функций: если отрезок $[a, b]$ конечный, весовая функция знакопостоянна на нем и не эквивалентна нулю, то для сходимости

$$\sum_{k=1}^n A_k \varphi(z_k) \rightarrow \int_a^b p(z) \varphi(z) dz \quad (n \rightarrow \infty)$$

достаточно, чтобы $\varphi(z)$ была ограниченной и множество точек разрыва ее имело меру нуль. Обратимся к интегралу $\varphi_e(u)$ (9.3.15) и возьмем его в форме

$$\varphi_e(u) = \int_0^{\infty} e^{iux} F(x) \frac{dx}{(1+x)^s} \quad (s > 1). \quad (9.3.28)$$

Функцию $F(x)$ будем, как и выше, считать непрерывной и достаточно гладкой на замкнутой полуоси $[0, \infty]$. Множитель $(1+x)^{-s}$ имеет единственную особенность — нуль

*) Вес $p(z)$ предполагается таким, что интегралы

$$\int_a^b p(z) z^m dz \quad (m=0, 1, \dots)$$

являются абсолютно сходящимися.

степени s в бесконечно удаленной точке. Его мы присоединим ниже к весовой функции. Величина $e^{iux} = \cos ux + + i \sin ux$ определяет колебания подынтегрального выражения. Она комплексная, и ее действительная и мнимая части знакопеременны. Все это затрудняет возможность отнести e^{iux} к весу обычным путем, без предварительного преобразования, и затем, при построении правила квадратур, стремиться к достижению наивысшей возможной степени алгебраической точности. Что можно сделать в этом направлении, будет видно в следующем параграфе, сейчас же этот множитель мы отнесем на некоторое время к интегрируемой функции.

Чтобы преобразовать (9.3.28) к интегралу с классической весовой функцией, заменим переменную x , положив $x = \frac{1-t}{1+t}$, $t = \frac{1-x}{1+x}$. Полуось $0 \leq x \leq \infty$ перейдет в отрезок $[-1, 1]$, и интеграл (9.3.28) примет форму

$$\varphi_e(u) = 2^{1-s} \int_{-1}^1 e^{iu \frac{1-t}{1+t}} F\left(\frac{1-t}{1+t}\right) (1+t)^{s-2} dt. \quad (9.3.29)$$

Степенной множитель $(1+t)^{s-2}$ может быть принят за весовую функцию $\rho(t) = (1+t)^{s-2}$. Она является частным случаем веса Якоби $(1-t)^\alpha (1+t)^\beta$ для $\alpha = 0$, $\beta = s-2$. Оставшуюся же часть подынтегрального выражения примем за интегрируемую функцию

$$\psi(t) = e^{iu \frac{1-t}{1+t}} F\left(\frac{1-t}{1+t}\right).$$

После этого интеграл (9.3.29) может быть вычислен по правилу интегрирования с весом Якоби:

$$\varphi_e(u) = 2^{1-s} \int_{-1}^1 \psi(t) (1+t)^{s-2} dt \approx 2^{1-s} \sum_{k=1}^n A_k \psi(t_k). \quad (9.3.30)$$

Здесь t_k — корни многочлена Якоби $J_n^{(0, s-2)}(t)$ степени n и A_k — соответствующие этим корням квадратурные коэффициенты. Численные значения t_k и A_k могут быть взяты из опубликованных таблиц *).

*) См. В. И. Крылов, А. А. Воробьева, Таблицы для вычисления интегралов от функций со степенными особенностями, Минск, «Наука и техника», 1971 и В. И. Крылов, В. В. Лугин, Л. А. Янович, таблицы с тем же названием, Минск, Изд-во АН БССР, 1963.

Так как $F(x) = F\left(\frac{1-t}{1+t}\right)$ предполагается непрерывной на полуоси $0 \leq x \leq \infty$ и показательный множитель $\exp iu \frac{1-t}{1+t}$ ограничен по модулю единицей и непрерывен при $-1 < t \leq 1$, функция $\psi(t)$ будет ограничена и непрерывна при $-1 < t \leq 1$. Поэтому при неограниченном росте n для всякого значения u будет иметь место сходимость вычислительного процесса (9.3.30):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1-s} \sum_{k=1}^n A_k \psi(t_k) = 2^{1-s} \int_{-1}^1 \psi(t) (1+t)^{s-2} dt = \varphi_e(u).$$

Изложенный сейчас способ вычисления есть, очевидно, не что иное, как перенесение на интеграл (9.3.29) идеи интегрирования наивысшей степени точности с весом Якоби, при этом здесь вес учитывает лишь скорость убывания $f(x) = \frac{F(x)}{(1+x)^s}$ при удалении x на бесконечность. Об этом способе мы говорим, чтобы указать на его существенный недостаток для вычисления $\varphi_e(x)$ и пояснить возможный путь ослабления этого недостатка.

Напомним, что правило наивысшей степени точности (9.3.30) предполагает у интегрируемой функции $\psi(t)$ наличие на замкнутом отрезке интегрирования $[-1, 1]$ непрерывной производной порядка не ниже $2n$, принимающей небольшие значения. При соблюдении этого условия можно рассчитывать на получение хорошей точности. Если же такая производная отсутствует, правило может не дать высокой точности и будет уступать в этом отношении другим правилам, обладающим меньшей степенью точности. Множитель $F\left(\frac{1-t}{1+t}\right)$ мы предполагали достаточно гладким; что же касается второго множителя $\exp iu \frac{1-t}{1+t}$, то его колебания при $t \rightarrow -1$ неограниченно ускоряются и точка $t = -1$ является точкой разрыва для него. Поэтому $\psi(t)$ вблизи $t = -1$ будет неточно приближаться алгебраическими многочленами, и хотя правило (9.3.30), принципиально говоря, дает возможность вычислить $\varphi_e(u)$ сколь угодно точно, но для достижения заданной точности может потребовать большого значения n .

Сохраним в формуле (9.3.30) узлы t_k , считая их корнями многочлена $J_n^{(0, s-2)}(t)$. Этим мы в какой-то степени

оставим их согласованными со скоростью стремления $f(x)$ к нулю при $x \rightarrow \infty$. Что же касается коэффициентов A_k , то выберем их, не стремясь к достижению наивысшей степени точности, а учитывая колебания функции $\psi(t)$. Отнесем колеблющийся множитель $\exp iu \frac{1-t}{1+t}$ к весу и положим

$$p^*(t) = e^{iu \frac{1-t}{1+t}} (1+t)^{s-2}, \quad \psi^*(t) = F\left(\frac{1-t}{1+t}\right).$$

Интерполируем теперь $\psi^*(t)$ по значениям в узлах t_k :

$$\psi^*(t) = \sum_{k=1}^n l_k^*(t) \psi^*(t_k) + r_n^*(t), \quad (9.3.31)$$

$$l_k^*(t) = \frac{\Omega^*(t)}{(t-t_k) \Omega^{*'}(t_k)},$$

$$\Omega^*(t) = (t-t_1) \dots (t-t_n) = \frac{1}{q_n} J_n^{(0, s-2)}(t).$$

Здесь q_n — коэффициент при старшей степени t в многочлене $J_n^{(0, s-2)}(t)$.

Если внести в (9.3.29) вместо $\psi^*(t)$ и $p^*(t)$ их значения, получим следующее выражение $\varphi_e(u)$ через значения $\psi^*(t_k)$:

$$\begin{aligned} \varphi_e(u) &= 2^{1-s} \int_{-1}^1 p^*(t) \psi^*(t) dt = \\ &= \sum_{k=1}^n A_k^* \psi^*(t_k) + R_n^*, \quad (9.3.32) \\ A_k^* &= 2^{1-s} \int_{-1}^1 p^*(t) l_k^*(t) dt, \\ R_n^* &= 2^{1-s} \int_{-1}^1 p^*(t) r_n^*(t) dt. \end{aligned}$$

Оно, после отбрасывания R_n^* , дает приближенное расчетное правило для $\varphi_e(u)$.

При построении интерполяционных квадратурных правил их узлы, принципиально говоря, можно выбирать про-

извольнo или пользоваться этим произволом для достижения каких-либо частных целей. В правиле (9.3.32) сделана попытка согласовать этот выбор с характером убывания $f(x)$ при возрастании x .

Приведем еще один пример выбора узлов t_k , но начнем изложение с общих соображений. В интеграле (9.3.29) за весовую функцию примем $p^*(t)$ и за интегрируемую функцию — $\psi^*(t) = F\left(\frac{1-t}{1+t}\right)$.

Возьмем произвольный многочлен Якоби $J_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ степени n с индексами $\alpha, \beta > -1$. Корни его, которые обозначим по-прежнему t_k ($k=1, 2, \dots, n$), примем за узлы интерполирования функции $\psi^*(t)$, не заботясь временно о подыскании наилучших узлов или, если говорить точнее, наиболее подходящих значений α, β .

Интерполяционная формула будет иметь тот же вид (9.3.31), что и выше, но с другим смыслом t_k :

$$\begin{aligned}\psi^*(t) &= \sum_{k=1}^n L_k^*(t) \psi^*(t_k) + r_n^*(t), \\ L_k^*(t) &= \frac{\Omega^*(t)}{(t-t_k) \Omega^{*'}(t_k)}, \\ \Omega^*(t) &= \prod_{k=1}^n (t-t_k) = \frac{1}{q_n^{(\alpha, \beta)}} J_n^{(\alpha, \beta)}(t), \\ L_k^*(t) &= \frac{1}{t-t_k} J_n^{(\alpha, \beta)}(t) [J_n^{(\alpha, \beta)'}(t_k)]^{-1}; \quad (9.3.33)\end{aligned}$$

$q_n^{(\alpha, \beta)}$ есть коэффициент при t^n в многочлене $J_n^{(\alpha, \beta)}(t)$.

Для получения необходимых расчетных формул*) возвратимся к прежней переменной x , положив $x = \frac{1-t}{1+t}$. Значения x , отвечающие $t = t_k$, обозначим $x_k = \frac{1-t_k}{1+t_k}$.

*) Некоторые результаты, которые мы получим, содержатся как частные случаи в равенствах (9.3.4—7). Но, так как для расчетов полезно сохранить возможность пользоваться классическими многочленами Якоби, все необходимые формулы нами получены независимо от указанных равенств.

Последующие вычисления не нуждаются в пояснениях:

$$\begin{aligned}\Omega^*(t) &= \prod_{j=1}^n (t - t_j) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{1-x}{1+x} - \frac{1-x_j}{1+x_j} \right) = \\ &= \frac{(-1)^n 2^n}{(1+x)^n} \prod_{j=1}^n \left(\frac{x-x_j}{1+x_j} \right) = \frac{2^n}{(1+x)^n} \frac{\omega_n(x)}{\omega_n(-1)}, \\ \omega_n(x) &= \prod_{j=1}^n (x - x_j), \\ \Omega^{*'}(t_k) &= \prod_{j \neq k} (t_k - t_j) = \prod_{j \neq k} \left(\frac{1-x_k}{1+x_k} - \frac{1-x_j}{1+x_j} \right) = \\ &= - \frac{2^{n-1}}{(1+x_k)^{n-2}} \frac{\omega'_n(x_k)}{\omega_n(-1)}, \\ t - t_k &= \frac{1-x}{1+x} - \frac{1-x_k}{1+x_k} = - \frac{2(x-x_k)}{(1+x)(1+x_k)}, \\ L_k^*(t) &= \frac{1}{t-t_k} J_n^{(\alpha, \beta)}(t) [J_n^{(\alpha, \beta)'}(t_k)]^{-1} = \\ &= \left(\frac{1+x_k}{1+x} \right)^{n-1} \frac{\omega_n(x)}{(x-x_k) \omega'_n(x_k)} = l_k(x), \quad (9.3.34) \\ \psi^*(t_k) &= F(x_k), \quad dx = - \frac{2}{(1+t)^2} dt.\end{aligned}$$

Подстановка в интеграл (9.3.29) вместо функции $\psi^*(t) = F\left(\frac{1-t}{1+t}\right) = F(x)$ ее интерполяционного представления (9.3.33) приведет к следующему равенству для $\varphi_e(u)$:

$$\varphi_e(u) = \sum_{k=1}^n 2^{1-s} F(x_k) \int_{-1}^1 e^{iu \frac{1-t}{1+t}} L_k^*(t) (1+t)^{s-2} dt + R_n^*(u), \quad (9.3.35)$$

$$R_n^*(u) = 2^{1-s} \int_{-1}^1 e^{iu \frac{1-t}{1+t}} r_n^*(t) (1+t)^{s-2} dt.$$

Коэффициент $L_k^*(t)$ является многочленом степени $n-1$ от t . Разложим его по степеням двучлена $t+1$:

$$L_k^*(t) = \sum_{l=0}^{n-1} a_l^{(k)} (t+1)^l.$$

Такое разложение может быть построено по обычным алгебраическим правилам. Если внести это разложение

в (9.3.35), вычисление $\varphi_e(u)$ будет приведено к нахождению нескольких простых интегралов, зависящих от u и s :

$$\varphi_e(u) = \sum_{k=1}^n F(x_k) \sum_{l=0}^{n-1} a_l^{(k)} 2^{1-s} \int_{-1}^1 e^{i u \frac{1-t}{1+t}} (1+t)^{s+l-2} dt + R_n^*(u). \quad (9.3.36)$$

После возвращения к переменной x равенства (9.3.35 — 36) будут следующими:

$$\varphi_e(u) = \sum_{k=1}^n F(x_k) \int_0^\infty e^{i u x} l_k(x) \frac{dx}{(1+x)^s} + R_n(u), \quad (9.3.37)$$

где $R_n(u) = R_n^*(u)$.

Если $l_k(x)$ разложить по степеням $\frac{1}{1+x}$:

$$l_k(x) = \left(\frac{1+x_k}{1+x} \right)^{n-1} \frac{\omega_n(x)}{(x-x_k) \omega'_n(x_k)} = \sum_{l=0}^{n-1} b_l^{(k)} (1+x)^{-l},$$

то после почленного интегрирования представление $\varphi_e(u)$ примет вид

$$\varphi_e(u) = \sum_{k=1}^n F(x_k) \sum_{l=0}^{n-1} b_l^{(k)} \int_0^\infty e^{i u x} (1+x)^{-s-l} dx + R_n(u). \quad (9.3.38)$$

О вычислении интегралов, стоящих справа, будет сказано в следующем пункте, сейчас же в нескольких строках скажем о выборе параметров α, β веса Якоби. В противоположность формуле (9.3.30), когда выбор узлов был согласован с характером убывания $f(x)$ ($x \rightarrow \infty$), свое внимание уделим сейчас интерполированию $\psi^*(t) = F\left(\frac{1-t}{1+t}\right)$.

В принятых предположениях $\psi^*(t)$ может быть произвольной непрерывной и достаточно гладкой на $[-1, 1]$ функцией. Поэтому в первую очередь должны быть рассмотрены многочлены Чебышева первого рода $T_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$), и корни многочлена степени n приняты за узлы интерполирования. Многочлены $T_n(x)$ являются частным случаем многочленов Якоби при $\alpha = \beta = -1/2$. Таблица значений коэффициентов $b_l^{(k)}$ в (9.3.38) для узлов Чебышева приведена в книге [7] (табл. IV).

Несколько меньшее, но все же большое значение имеет случай, когда за узлы интерполирования принимаются

корни многочлена Лежандра степени n . Значение выбора таких узлов связано с тем, что интерполяционные квадратурные формулы с этими узлами имеют наивысшую степень точности при постоянной весовой функции и являются весьма полезными при интегрировании функций без особенностей. Таблица коэффициентов $b_l^{(k)}$ для таких узлов приведена в той же книге [7] (табл. III).

9.3.5. О вычислении интегралов $J_{m+\alpha} = \int_0^\infty e^{iux} \times (1+x)^{-m-\alpha} dx$. В рассматриваемом интеграле m есть целое неотрицательное число и $0 \leq \alpha < 1$. Мы получим правило вычислений лишь для интегралов с показательной функцией e^{iux} . Сходные правила для интегралов с тригонометрическими функциями $\cos ux$ и $\sin ux$ получатся из него, если разделить в нем вещественную и мнимую части.

Можно построить рекуррентное правило для уменьшения значения m , воспользовавшись интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} J_{m+\alpha} &= \int_0^\infty e^{iux} \frac{dx}{(1+x)^{m+\alpha}} = \\ &= - \frac{e^{iux}}{(m-1+\alpha)(1+x)^{m-1+\alpha}} \Big|_0^\infty + \frac{i u}{m-1+\alpha} \int_0^\infty e^{iux} \frac{dx}{(1+x)^{m-1+\alpha}} = \\ &= \frac{1}{m-1+\alpha} + \frac{i u}{m-1+\alpha} \int_0^\infty e^{iux} \frac{dx}{(1+x)^{m-1+\alpha}}, \\ J_{m+\alpha} &= \frac{1}{m-1+\alpha} + \frac{i u}{m-1+\alpha} J_{m-1+\alpha}. \end{aligned} \quad (9.3.39)$$

Это соотношение позволяет ограничиться получением правил для вычисления J_α ($0 < \alpha \leq 1$).

Преобразуем J_α заменой переменной $1+x=t$:

$$J_\alpha = e^{-iu} \int_1^\infty e^{iut} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Когда $\alpha = 1$, получится равенство

$$\begin{aligned} J_1 &= e^{-iu} \left[\int_1^\infty \frac{\cos ut}{t} dt + i \int_1^\infty \frac{\sin ut}{t} dt \right] = \\ &= -e^{-iu} [\text{ci}(u) + i \text{si}(u)]. \end{aligned} \quad (9.3.40)$$

Здесь $\text{ci}(u)$ и $\text{si}(u)$ — интегральные косинус и синус, для которых составлены подробные числовые таблицы. При $0 < \alpha < 1$ из приводимых ниже равенств получается нужное правило для вычисления рассматриваемого интеграла *):

$$\int_1^{\infty} e^{iux} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \int_0^{\infty} e^{iux} \frac{dx}{x^{\alpha}} - \int_0^1 e^{iux} \frac{dx}{x^{\alpha}},$$

$$\int_0^{\infty} e^{iux} \frac{dx}{x^{\alpha}} = u^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) e^{i \frac{\pi}{2} (1-\alpha)}, \quad u > 0, \quad (9.3.41)$$

$$\int_0^1 e^{iux} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iu)^k}{k!} \int_0^1 x^{k-\alpha} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iu)^k}{k!} \frac{1}{(k+1-\alpha)},$$

$$J_{\alpha} = \int_0^{\infty} e^{iux} \frac{dx}{(1+x)^{\alpha}} = u^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) e^{i \left[\frac{\pi}{2} (1-\alpha) - u \right]} +$$

$$+ e^{-iu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iu)^k}{k! (k+1-\alpha)}. \quad (9.3.42)$$

*) О соотношении (9.3.41) см. в книге: М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, М., «Наука», 1973.

ГЛАВА 10

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ, ИМЕЮЩИЕ НАИВЫСШУЮ СТЕПЕНЬ ТОЧНОСТИ

§ 10.1. Введение

Задачи о построении формул наивысшей степени точности для косинус- и синус-преобразований Фурье изучаются сходным путем, но имеют различные решения.

Будем считать оригинал $f(x)$ представимым в виде $f(x) = (1+x)^{-s} F(x)$, где $s > 1$ и функция $F(x)$ непрерывна на полуоси $0 \leq x < \infty$.

Рассмотрим косинус-преобразование Фурье

$$\varphi_c(u) = \int_0^{\infty} f(x) \cos ux \, dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos ux}{(1+x)^s} F(x) \, dx.$$

Множитель $(1+x)^{-s} \cos ux$ примем за весовую функцию и будем строить для вычисления интеграла квадратурную формулу вида

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ux}{(1+x)^s} F(x) \, dx \approx \sum_{k=1}^n A_k F(x_k). \quad (10.1.1)$$

Она имеет $2n$ параметров A_k и x_k , и их можно пытаться выбрать так, чтобы равенство (10.1.1) выполнялось точно, когда $F(x)$ есть произвольный многочлен от $(1+x)^{-1}$ степени $2n-1$, или, что равносильно, для $2n$ простых дробей $(1+x)^{-i}$ ($i=0, 1, \dots, 2n-1$) выполнялись соотношения

$$\int_0^{\infty} (1+x)^{-s-i} \cos ux \, dx = \sum_{k=1}^n A_k (1+x_k)^{-i} \quad (10.1.2)$$

$$(i=0, 1, \dots, 2n-1).$$

Эти равенства образуют систему $2n$ уравнений для нахождения параметров, линейную относительно A_k и

нелинейную относительно x_k . Если ее решить, то уже при небольших значениях n окажется, что узлы x_k будут лежать вне полуоси интегрирования $[0, \infty)$.

Причиной такого недостатка является знакопеременность *) весовой функции $(1+x)^{-s} \cos ux$, и, чтобы освободиться от него, достаточно сделать весовую функцию знакостоянной.

В изучаемой задаче это может быть выполнено при помощи элементарного преобразования:

$$\int_0^{\infty} \cos ux f(x) dx = \int_0^{\infty} (1 + \cos ux) f(x) dx - \int_0^{\infty} f(x) dx = I_c^1 - I_c^2.$$

Интеграл I_c^2 имеет простую форму и преобразованием $x = \frac{1-t}{1+t}$ приводится к интегралу с весовой функцией Якоби с параметрами 0, $s-2$:

$$I_c^2 = \int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{F(x)}{(1+x)^s} dx = 2^{1-s} \int_{-1}^1 F\left(\frac{1-t}{1+t}\right) (1+t)^{s-2} dt.$$

Он может быть вычислен при помощи формул наивысшей алгебраической степени точности, коэффициенты и узлы которых табулированы в достаточно широких границах.

Сосредоточим свое внимание на интеграле I_c^1 . Он зависит от параметра u . Чтобы сделать узлы и коэффициенты формулы для его вычисления не зависящими от u , выполним преобразование $ux = x'$ ($u \geq 0$), приводящее параметр под знаком косинуса к единице и переводящее его из веса в интегрируемую функцию:

$$I_c^1 = \int_0^{\infty} (1 + \cos x) \frac{1}{u} f\left(\frac{x}{u}\right) dx = \int_0^{\infty} (1 + \cos x) X(x) dx, \quad (10.1.3)$$

$$X(x) = \frac{1}{u} f\left(\frac{x}{u}\right).$$

*) В теории квадратурных правил наивысшей алгебраической степени точности, к которым приводится наша задача путем замены переменной $x = \frac{1-t}{1+t}$, известно, что если весовая функция знакостоянна, то узлы квадратурной формулы лежат всегда внутри отрезка интегрирования.

Предположим, что $X(x)$ представима в виде

$$X(x) = \frac{F(x)}{(1+x)^s} \quad (s > 1), \quad (10.1.4)$$

где $F(x)$ непрерывна на полуоси $0 \leq x \leq \infty$. Тогда задача будет состоять в том, чтобы установить правило вычисления интеграла

$$I_c^1 = \int_0^\infty (1 + \cos x) X(x) dx = \int_0^\infty \frac{1 + \cos x}{(1+x)^s} F(x) dx \quad (10.1.5)$$

с положительной весовой функцией $1 + \cos x$ или $(1 + \cos x)(1+x)^{-s}$.

§ 10.2. Построение формулы наивысшей степени точности

Такие формулы могут иметь различный вид в зависимости в первую очередь от того, какими свойствами обладает подынтегральное выражение и как в связи с ними выбирается весовая функция. Мы будем говорить об одном из правил, которое рассчитано на множество функций $X(x)$, представимых в форме (10.1.4).

Примем за вес множитель $1 + \cos x$. Он учитывает колебания подынтегральной функции в (10.1.3), но не связан с характером убывания $X(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Это последнее обстоятельство будет нами учтено при выборе системы функций, относительно которой будет достигаться наивысшая степень точности.

В соответствии с избранным весом рассмотрим интеграл I_c^1 (см. (10.1.5)) и построим для него правило вычислений вида

$$I_c^1 = \int_0^\infty (1 + \cos x) X(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k X(x_k). \quad (10.2.1)$$

Параметры A_k, x_k выберем так, чтобы равенство точно выполнялось для функций $(1+x)^{-s-i}$ ($s > 0; i = 0, 1, 2, \dots, 2n-1$) или, что равносильно, для всех функций вида

$$(1+x)^{-s} \sum_{j=0}^{2n-1} c_j (1+x)^{-j} = (1+x)^{-s-2n+1} P_{2n-1}(x),$$

где $P_{2n-1}(x)$ — произвольный многочлен от x степени

$2n-1$:

$$\int_0^{\infty} \frac{1 + \cos x}{(1+x)^{2n-1+s}} P_{2n-1}(x) dx = \\ = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{(1+x_k)^{2n-1+s}} P_{2n-1}(x_k) = \sum_{k=1}^n B_k P_{2n-1}(x_k). \quad (10.2.2)$$

Задача разыскания B_k , x_k , а следовательно, и параметров A_k , x_k привелась к классической проблеме построения на полуинтервале $[0, \infty)$ квадратурной формулы наивысшей алгебраической степени точности с положительной весовой функцией $(1 + \cos x)(1+x)^{-2n+1-s}$.

Все интегралы, участвующие в последующих рассуждениях, предполагаются абсолютно сходящимися. Пусть рассматривается интеграл по конечному или бесконечному отрезку $[a, b]$ и весовая функция $p(x)$ является знакопостоянной и не эквивалентной нулю. Допустим, что для вычисления интеграла применяется формула

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n B_k f(x_k). \quad (10.2.3)$$

Для того чтобы формула (10.2.3) была точной для всех многочленов степени $2n-1$, необходимо и достаточно выполнение условий:

1) коэффициенты B_k имеют значения

$$B_k = \int_a^b p(x) \frac{\omega(x)}{(x-x_k) \omega'(x_k)} dx, \quad (10.2.4)$$

$$\omega(x) = \prod_{k=1}^n (x-x_k),$$

т. е. правило интегрирования (10.2.3) является интерполяционным;

2) многочлен $\omega(x)$ ортогонален на $[a, b]$ с весом $p(x)$ ко всякому многочлену $Q(x)$ степени не выше $n-1$:

$$\int_a^b p(x) \omega(x) Q(x) dx = 0. \quad (10.2.5)$$

В необходимости этих условий можно убедиться весьма просто. Пусть равенство (10.2.3) верно для всех много-

членов степени не выше $2n-1$. Рассмотрим многочлен $\omega_j(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_j)\omega'(x_j)}$. Он имеет степень $n-1$, и для него равенство (10.2.3) должно быть точным. Но $\omega_j(x)$ обладает следующими свойствами: $\omega_j(x_k) = 0$ при $k \neq j$, и $\omega_j(x_j) = 1$. Поэтому из (10.2.3) для $\omega_j(x)$ должно получиться равенство

$$\int_a^b p(x) \omega_j(x) dx = \sum_{k=1}^n B_k \omega_j(x_k) = B_j,$$

что доказывает (10.2.4).

Чтобы убедиться в необходимости второго условия, возьмем многочлен $Q(x)$, степень которого не выше $n-1$. Многочлен $f(x) = \omega(x)Q(x)$ будет иметь степень не больше $2n-1$, и для него равенство (10.2.3) должно быть точным, а так как $f(x_k) = \omega(x_k)Q(x_k) = 0 \cdot Q(x_k) = 0$, то (10.2.3) совпадает с (10.2.5).

Достаточность условий проверяется столь же просто. Пусть условия 1), 2) выполняются. Возьмем произвольный многочлен $f(x)$ степени $2n-1$. Разделив его по обычным правилам алгебры на $\omega(x)$, можно представить f в виде $f(x) = \omega(x)Q(x) + r(x)$, где $Q(x)$ и $r(x)$ — многочлены степени не выше $n-1$. Ввиду $\omega(x_k) = 0$ имеем $f(x_k) = r(x_k)$, следовательно,

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \int_a^b p(x) \omega(x) Q(x) dx + \int_a^b p(x) r(x) dx.$$

Первый из интегралов правой части равенства равен нулю по условию ортогональности. Так как по первому условию правило (10.2.3) является интерполяционным, оно точно для всякого многочлена степени $n-1$, в частности для $r(x)$, так что

$$\int_a^b p(x) r(x) dx = \sum_{k=1}^n B_k r(x_k) = \sum_{k=1}^n B_k f(x_k).$$

Поэтому

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n B_k f(x_k)$$

и равенство (10.2.3) выполняется точно для $f(x)$.

имеет только нулевое решение. Будем считать, что $a_1, \dots, a_n$ удовлетворяют уравнениям системы. Умножив уравнения соответственно на $a_n, \dots, a_1$ и сложив их, получим равенство

$$\int_a^b p(x) (a_n + a_{n-1}x + \dots + a_1x^{n-1})^2 dx = 0.$$

Так как весовая функция $p(x)$ не эквивалентна нулю и сохраняет знак, последнее равенство возможно только в том случае, когда многочлен, стоящий в скобках, будет тождественным нулем, что возможно лишь при $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, и однородная система, стало быть, имеет только нулевое решение.

По коэффициентам $a_1, \dots, a_n$ можно построить многочлен $\omega(x)$, а находя его корни x_k ($k = 1, \dots, n$) и вычисляя коэффициенты B_k при помощи равенств (10.2.4), построим правило (10.2.3), точное для многочленов степени $2n - 1$. Из изложения видно, что такое правило будет единственным, так как многочлен $\omega(x)$ и коэффициенты A_k определяются однозначно.

Этот результат можно дополнить доказательством того, что корни x_k многочлена все различны между собой и все лежат внутри отрезка интегрирования $[a, b]$.

В интеграле (10.2.2) отрезок интегрирования $[a, b]$ есть полуось $[0, \infty)$ и весовая функция есть $p(x) = (1+x)^{-2n-s+1} (1+\cos x)$, она положительна всюду, кроме точек $x = (2j+1)\pi$ ($j = 0, 1, \dots$). Многочлен $\omega(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ определяется условием ортогональности

$$\int_0^\infty (1+x)^{-2n-s+1} (1+\cos x) \omega(x) x^j dx = 0 \quad (10.2.6)$$

$$(j = 0, 1, \dots, n-1).$$

Его коэффициенты a_k могут быть найдены из системы

$$\sum_{i=0}^n a_i \int_0^\infty (1+x)^{-2n-s+1} (1+\cos x) x^{n-i+j} dx = 0 \quad (10.2.7)$$

$$(j = 0, 1, \dots, n-1; a_0 = 1).$$

Коэффициенты B_k , участвующие в (10.2.2) и квадратном правиле вида (10.2.3), если его записать для

интеграла

$$\int_0^{\infty} (1+x)^{-2n-s+1} (1+\cos x) f(x) dx,$$

должны быть найдены при помощи формулы вида (10.2.4). Коэффициенты же A_k формулы (10.2.1), когда она точна для всех функций вида

$$X(x) = (1+x)^{-s} \sum_{j=0}^{2n-1} c_j (1+x)^{-j} = (1+x)^{-2n-s+1} P_{2n-1}(x),$$

как это видно из (10.2.2), отличаются от B_k множителем $(1+x_k)^{2n+s-1}$, и для них получаются следующие значения:

$$A_k = (1+x_k)^{2n+s-1} \int_0^{\infty} (1+x)^{-2n-s+1} (1+\cos x) \frac{\omega(x)}{(x-x_k) \omega'(x_k)} dx. \quad (10.2.8)$$

Таблицу значений x_k и A_k для (10.2.1) при $s = 1,05$ (0,05) 4, $n = 1$ (1) 10 можно найти в книге [7] (табл. VI).

Аналогичная таблица x_k и A_k для формулы наивысшей степени точности

$$\int_0^{\infty} (1+\sin x) f(x) \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (10.2.9)$$

$$f(x) = \frac{F(x)}{(1+x)^s}, \quad |F(x)| \leq M,$$

при тех же параметрах s и n находится в той же книге [7] (табл. V).

Сделаем еще краткое замечание о сходимости при $n \rightarrow \infty$ вычислительных процессов наивысшей степени точности (10.2.1) и (10.2.9). Для определенности будем иметь в виду (10.2.1). Для наших целей достаточно привести (10.2.1) к известному правилу типа Гаусса, в котором достигается наивысшая алгебраическая степень точности, и затем воспользоваться известными теоремами о сходимости квадратурного процесса этого вида.

Возьмем интеграл I_c^s (см. (10.1.5)) в форме, получающейся при замене функции $X(x)$ ее представлением $X(x) = (1+x)^{-s} F(x)$.

В соответствии с этим будем рассматривать правило, равносильное (10.2.1):

$$I_c^1 = \int_0^{\infty} \frac{1 + \cos x}{(1+x)^s} F(x) dx \approx \sum_{j=1}^n A_j (1+x_j)^{-s} F(x_j) = \sum_{j=1}^n A_j^* F(x_j). \quad (10.2.10)$$

При построении (10.2.1) параметры x_k и A_k выбирались так, что равенство выполнялось точно, когда $X(x)$ была любой функцией вида $X(x) = \sum_{j=1}^{2n-1} c_j (1+x)^{-s-j}$. Для правила (10.2.10) это эквивалентно тому, что оно дает точный результат для функции F вида

$$F(x) = \sum_{j=1}^{2n-1} c_j (1+x)^{-j} = P_{2n-1}[(1+x)^{-1}].$$

Заменим переменную x , положив $\frac{1}{1+x} = t$, $x = \frac{1}{t} - 1$, $1 \geq t > 0$. При этом (10.2.10) перейдет в новое правило для конечного отрезка $[0, 1]$:

$$I_c^1 = \int_0^1 (1 + \cos x) t^{s-2} F^*(t) dt \approx \sum_{j=1}^n A_j^* F^*(t_k) = Q_n^*(F^*), \quad (10.2.11)$$

$$F^*(t) = F\left(\frac{1}{t} - 1\right) = F(x), \quad t_k = \frac{1}{1+x_k}.$$

Равенство выполняется точно всякий раз, когда $F^*(t)$ есть многочлен степени $2n-1$ от t :

$$F^*(t) = P_{2n+1}(t).$$

Отсюда следует, что (10.2.11) есть квадратурное правило наивысшей алгебраической степени точности для отрезка $[0, 1]$ и весовой функции $p(t) = (1 + \cos x) t^{s-2}$.

Относительно таких правил известно, что при $n \rightarrow \infty$ последовательность приближенных значений $Q_n^*(F^*)$ сходится к точному значению интеграла I_c^1 для всякой функции $F^*(t)$, ограниченной на $[0, 1]$ и такой, что множе-

ство точек разрыва ее имеет меру нуль *), в частности для всякой функции F^* , ограниченной на $[0, 1]$ и непрерывной внутри этого отрезка.

Это дает возможность высказать теорему о сходимости при $n \rightarrow \infty$ квадратурного процесса (10.2.1).

Теорема 1. Если функция $X(x)$ представима в виде (10.1.4), где $F(x)$ непрерывна на полуоси $0 \leq x \leq \infty$, то квадратурный процесс, определяемый правилом наивысшей степени точности (10.2.1), сходится при $n \rightarrow \infty$ к точному значению интеграла.

Аналогичная теорема верна для квадратурного правила наивысшей степени точности (10.2.9) для синус-преобразования Фурье.

*) Для всяких функций, интегрируемых на $[0, 1]$ по Риману в собственном смысле.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ВЫДЕЛЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ФУНКЦИИ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

В первой и второй частях книги были рассмотрены две связанные между собой задачи: обращение преобразования Лапласа и вычисление интегралов Фурье. Каждая из задач решается в своих условиях и своими методами, поэтому способы выделения особенностей функции при вычислениях для этих задач не совпадают и будут рассматриваться нами отдельно.

ГЛАВА 11

ВЫДЕЛЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ИЗОБРАЖЕНИЯ $F(p)$

§ 11.1. Введение

Для определенности будем говорить о методах обращения, основанных на вычислении интеграла Меллина, но некоторые соображения, высказанные для этой задачи, могут быть перенесены и на другие методы обращения.

Вычисление оригинала $f(x)$ было основано на интерполировании изображения $F(p)$ или функции $\varphi(p)$, связанной с изображением равенством $F(p) = \varphi(p)(p-a)^{-s}$. Интерполирование выполнялось при помощи многочлена от $(p-a)^{-1}$ или более общей рациональной функции.

Напомним, что $F(p)$ является аналитической функцией p , регулярной в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \gamma$ и стремящейся к нулю при удалении точки p в бесконечность в этой полуплоскости. При вычислении интеграла Меллина

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) e^{px} dp \quad (11.1.1)$$

прямая интегрирования $\operatorname{Re} p = c$ выбиралась так, чтобы выполнялось неравенство $c > \gamma$. Узлы интерполирования

брались на линии интегрирования $\operatorname{Re} p = c$, либо на действительной оси, либо в полуплоскости $\operatorname{Re} p > c$, при этом интерполирующая рациональная функция избиралась так, чтобы ее полюсы лежали слева от прямой $\operatorname{Re} p > \gamma$ и, кроме того, чтобы функция стремилась к нулю при $p \rightarrow \infty$.

Можно предвидеть, что такое интерполирование будет, вообще говоря, тем более точным, чем более гладким будет изменение $F(p)$ и $\varphi(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq c$. Гладкость же зависит, во-первых, от положения особых точек F : чем дальше они удалены от полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq c$, тем более гладким будет там изменение F и φ . Гладкость поведения F и φ зависит, во-вторых, от характера особых точек, или, если употребить не вполне точный термин, но достаточно наглядно описывающий содержание вопроса, от влияния их на поведение F и φ .

Наконец, на точность интерполирования будет оказывать влияние поведение F и φ вблизи бесконечно удаленной точки *) плоскости p , в частности скорость убывания $|F(p)|$ при $p \rightarrow \infty$.

Можно пытаться улучшить поведение функции $F(p)$, а вместе с ней и $\varphi(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq c$, если устранить у $F(p)$ особые точки, ближайшие к прямой $\operatorname{Re} p = c$, или по меньшей мере ослабить их влияние на изменение F . Делают это обычно при помощи разложения функции F на два слагаемых: $F(p) = F_1(p) + F_2(p)$, которые выбирают так, чтобы функция $F_1(p)$ имела такие же особенности, которые мы хотим устранить у $F(p)$, или главные части этих особенностей, когда мы хотим ослабить их у $F(p)$. Кроме того, функция $F_1(p)$ должна быть такой, чтобы она была изображением и оригинал для нее $f_1(x)$ мог быть найден точно. Второе же слагаемое $F_2(p)$ определяется равенством $F_2(p) = F(p) - F_1(p)$. Можно

*) Если говорить о принципиальной стороне вопроса, то все указанные выше факты, влияющие на поведение F , можно было бы учитывать заранее при построении метода вычислений. Сделать это можно, например, при помощи выбора системы функций, которые положены в основу интерполирования. Авторы отказались от этого пути, так как он привел бы к созданию большого числа узко специализированных методов вычислений, и учли заранее в грубой форме только скорость убывания F при удалении точки p в бесконечность, когда представили F в виде $F(p) = (p-a)^{-s} \varphi(p)$.

ожидать, что $F_2(p)$ будет изменяться в полуплоскости $\operatorname{Re} p = \sigma \geq c$ более плавно, чем $F(p)$, и оригинал $f_2(x)$ для нее может быть найден приближенно с большей точностью, чем для $F(p)$.

§ 11.2. Устранение и ослабление особенностей изображения $F(p)$

11.2.1. Устранение полюсов у изображения. Допустим, что функция $F(p)$ в точках p_k ($k = 1, \dots, n$) имеет полюсы порядков m_k ($k = 1, \dots, n$) соответственно. Предположим также, что известны полярные части степенных разложений в окрестностях полюсов

$$G_k\left(\frac{1}{p-p_k}\right) = \sum_{v=1}^{m_k} \frac{a_{kv}}{(p-p_k)^v}. \quad (11.2.1)$$

Положим

$$F_1(p) = \sum_{k=1}^n G_k\left(\frac{1}{p-p_k}\right) \quad (11.2.2)$$

и

$$F_2(p) = F(p) - F_1(p).$$

Для $F_2(p)$ точки p_k ($k = 1, \dots, n$) будут точками регулярности.

Оригинал для $F_1(p)$ находится точно (см., например, [1], гл. V, 5.2, стр. 209) и имеет значение

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{v=1}^{m_k} a_{kv} \frac{x^{v-1}}{\Gamma(v)} e^{p_k x}.$$

11.2.2. Ослабление влияния особенностей ветвления. Рассмотрим случай степенной особенности ветвления и положим, что $F(p)$ имеет следующий вид:

$$F(p) = (p - \alpha)^\mu G(p), \quad G(\alpha) \neq 0,$$

где μ есть действительное число и α есть значение, не принадлежащее полуплоскости регулярности $F(p)$, так что $\operatorname{Re} \alpha \leq \gamma < c$, и $G(p)$ — функция, регулярная в открытой односвязной области, содержащей полуплоскость $\operatorname{Re} p > \gamma$ и точку α . Выберем произвольную точку b , лежащую левее точки α , т. е. так, чтобы $\operatorname{Re}(\alpha - b) > 0$.

Из нее последовательно могут быть найдены $c_0, c_1, \dots, c_m$. После нахождения c_k для $F_1(p)$ получаем следующее выражение:

$$F_1(p) = (p - \alpha)^\mu R(p - \alpha) = \sum_{j=0}^m c_j \frac{(p - \alpha)^{\mu+j}}{(p - b)^r}.$$

Оригинал для $F_1(p)$ вычисляется точно (см. [1], гл. V, 5.4, (8), стр. 215):

$$f_1(x) = \sum_{j=0}^m c_j \frac{x^{r-\mu-j-1} e^{\alpha x}}{\Gamma(r-\mu-j)} {}_1F_1[r; r-\mu-j; (b-\alpha)x]. \quad (11.2.5)$$

Здесь ${}_1F_1$ есть вырожденная гипергеометрическая функция

$${}_1F_1(\alpha; \beta; z) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\beta+k)} \frac{z^k}{k!}.$$

Функция $F(p) - F_1(p) = F_2(p)$ будет в точке $p = \alpha$ иметь производную порядка на $m+1$ единиц выше, чем $F(p)$, и оригинал $f_2(x)$ для нее может быть найден при помощи приближенных методов, как правило, с меньшей затратой труда и с лучшей точностью, чем для $F(p)$.

В частном случае, когда показатель степени μ является отрицательным числом, ослабление влияния точки ветвления на изменение функции можно получить более просто, не вводя вспомогательную точку b . Выберем m таким, что $\mu + m < 0$, и положим

$$F_1(p) = \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} G^{(j)}(\alpha) (p - \alpha)^{j+\mu}.$$

Оригинал f_1 для F_1 имеет более простой вид, чем выше:

$$f_1(x) = \sum_{j=0}^m g_j \frac{x^{-j-\mu-1}}{\Gamma(-j-\mu)} e^{\alpha x}.$$

Остаточная функция $F_2(p) = F(p) - F_1(p)$ в этом случае будет следующей:

$$F_2(p) = (p - \alpha)^\mu \left[G(p) - \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} G^{(j)}(\alpha) (p - \alpha)^j \right],$$

и, если m выбрано так, что $-1 < m + \nu < 0$, она будет равна нулю в точке $p = \alpha$.

Теперь рассмотрим задачу ослабления логарифмической особенности ветвления. Ограничимся простейшим случаем, когда изображение $F(p)$ имеет вид

$$F(p) = (p - \alpha)^{-\nu} \ln(p - \alpha) G(p), \\ G(\alpha) \neq 0, \quad \operatorname{Re} \alpha \leq \gamma,$$

ν — действительное число и $G(p)$ — функция, регулярная в некоторой односвязной открытой области, содержащей полуплоскость $\operatorname{Re} p > \gamma$ и точку α .

Чем большее значение имеет ν , тем более быстрым будет изменение F при p , близком к α , и, чтобы сделать изменение F более плавным, по крайней мере вблизи точки α , можно прибегнуть к следующему преобразованию F .

Возьмем целое число m такое, чтобы было $-\nu + m < 0$, затем построим разложение $G(p)$ около точки $p = \alpha$ по степеням $p - \alpha = z$ и рассмотрим отрезок разложения

$$g_0 + g_1 z + \dots + g_m z^m.$$

Положим

$$F_1(p) = \sum_{j=0}^m g_j (p - \alpha)^{-\nu+j} \ln(p - \alpha).$$

Оригинал f_1 для F_1 является табличным (см. [1], гл. V, 5.7, (4), стр. 225):

$$f_1(x) = \sum_{j=0}^m g_j \frac{1}{\Gamma(\nu-j)} x^{\nu-j-1} e^{\alpha x} [\Psi(\nu-j) - \ln x], \\ \Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

Что же касается функции

$$F_2(p) = F(p) - F_1(p) = \\ = (p - \alpha)^{-\nu} \ln(p - \alpha) \left(G(p) - \sum_{j=0}^m g_j (p - \alpha)^j \right),$$

то она будет иметь в точке $p = \alpha$ степенную особенность слабее, чем у $F(p)$, так как величина, стоящая в скобках, при p , близких к α , имеет порядок малости не ниже, чем $O[(p - \alpha)^{m+1}]$.

В предыдущем изложении были рассмотрены только некоторые типичные способы устранения и ослабления особенностей у изображения при помощи выделения из него «особой части» $F_1(p)$. Вид же $F_1(p)$ зависит от типа особенностей $F(p)$ и не обязательно имеет форму, указанную в нашем изложении. В § 11.4 приведена небольшая таблица изображений F и соответствующих им оригиналов f , которая может в некоторых случаях оказать помощь при построении $F_1(p)$.

§ 11.3. Замечание об увеличении скорости стремления к нулю изображения $F(p)$

Для приближенного обращения преобразования Лапласа имеет значение скорость, с которой стремится к нулю изображение $F(p)$, когда $p \rightarrow \infty$. Пояснить это достаточно наглядно можно на задаче приведения интеграла Меллина к интегралу Фурье. В интеграле Меллина линией интегрирования является прямая $\operatorname{Re} p = c$ и можно положить $p = c + i\tau$ ($-\infty < \tau < \infty$). Если принять τ за новую переменную, получится следующий комплексный интеграл Фурье:

$$f(x) = e^{cx} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(c + i\tau) e^{ix\tau} d\tau.$$

Он будет, наверное, тем удобнее для вычислений и тем лучший по точности результат может быть получен, чем более быстро будет убывать $F(c + i\tau)$ при неограниченном росте $|\tau|$.

Как и в § 11.2, можно пытаться усилить скорость стремления к нулю $F(p)$ ($p \rightarrow \infty$) при помощи разложения $F(p)$ на два слагаемых: $F(p) = F_1(p) + F_2(p)$, выбирая их так, чтобы первое из них $F_1(p)$ стремилось к нулю столь же быстро, как $F(p)$, и оригинал для него вычислялся точно, второе же слагаемое $F_2(p)$ стремилось к нулю быстрее $F(p)$. Например, когда функция $F(p)$ представима в форме

$$F(p) = \frac{A}{p+a} + \frac{B}{p+b} + \dots + \frac{L}{p+l} + \frac{\gamma(p)}{p^{1+\varepsilon}},$$

$$\gamma(p) \rightarrow 0 \quad (p \rightarrow \infty), \quad \varepsilon > 0,$$

МОЖНО ПОЛОЖИТЬ

$$F_1(p) = \frac{A}{p+a} + \frac{B}{p+b} + \dots + \frac{L}{p+l} \text{ и } F_2(p) = F(p) - F_1(p).$$

Оригинал для $F_1(p)$ находится точно:

$$f_1(x) = Ae^{-ax} + Be^{-bx} + \dots + Le^{-lx}.$$

Функция же $F_2(p)$ стремится к нулю быстрее $F(p)$.

Аналогично, когда изображение $F(p)$ имеет вид

$$F(p) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{(p+a)^{k_i}} + \frac{\gamma(p)}{(p+a)^{k_m}},$$

$$\gamma(p) \rightarrow 0 \quad (p \rightarrow \infty), \quad 0 < k_1 < k_2 < \dots < k_m,$$

можно принять

$$F_1(p) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{(p+a)^{k_i}}, \quad F_2(p) = F(p) - F_1(p);$$

оригинал для F_1 также вычисляется точно:

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{\Gamma(k_i)} x^{k_i-1} e^{-ax}.$$

**§ 11.4. Таблица изображений $F(p)$
и соответствующих оригиналов $f(x)$
для построения особой части изображения $F_1(p)$**

$F(p)$	$f(x)$
$\frac{1}{p+a}$	e^{-ax}
$\frac{1}{\sqrt{p+a}}$	$\frac{e^{-ax}}{\sqrt{\pi x}}$
$(p+a)^{-n-1/2}$	$\frac{2^n x^n e^{-ax}}{1 \cdot 3 \dots (2n-1) \sqrt{\pi x}}$
$(p+a)^{-\nu},$ $\operatorname{Re} \nu > 0$	$\frac{x^{\nu-1} e^{-ax}}{\Gamma(\nu)}$

Продолжение

$F(p)$	$f(x)$
$\frac{1}{\sqrt{p^2 + a^2}}$ $(p^2 + a^2)^{-n-1/2},$ $n = 1, 2, \dots$ $(p^2 + a^2)^{-\nu-1/2},$ $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$	$J_0(ax)$ $\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} \left(\frac{x}{a}\right)^n J_n(ax)$ $\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2a}\right)^\nu J_\nu(ax)$
$\frac{1}{\sqrt{p^2 - a^2}}$ $\frac{1}{(p^2 - a^2)^{n+1/2}},$ $n = 1, 2, \dots$ $\frac{1}{(p^2 - a^2)^{\nu+1/2}},$ $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$	$I_0(ax)$ $\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} \left(\frac{x}{a}\right)^n I_n(ax)$ $\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2a}\right)^\nu I_\nu(ax)$
$\frac{\sqrt{p+a}}{p+b}$	$\frac{e^{-ax}}{\sqrt{\pi x}} + \sqrt{a-b} e^{-bx} \operatorname{erf} \sqrt{(a-b)x}$
$\frac{1}{(p+a)\sqrt{p+b}}$	$\frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{-ax} \operatorname{erf} \sqrt{(b-a)x}$
$\frac{1}{(p+a)^{3/2}(p+b)}$	$(a-b)^{-3/2} e^{-bx} \operatorname{erf} \sqrt{(a-b)x} -$ $- \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}(a-b)} e^{-ax}$
$\frac{1}{\sqrt{(p+a)(p+b)}}$	$e^{-\frac{a+b}{2}x} I_0\left(\frac{a-b}{2}x\right)$
$\frac{1}{(p+a)^{1/2}(p+b)^{3/2}}$	$xe^{-\frac{a+b}{2}x} \left[I_0\left(\frac{a-b}{2}x\right) + \right.$ $\left. + I_1\left(\frac{a-b}{2}x\right) \right]$

Продолжение

$F(p)$	$f(x)$
$(p+a)^{1/2} (p+b)^{-3/2}$	$e^{-\frac{a+b}{2}x} \left\{ (a-b)x I_1 \left(\frac{a-b}{2}x \right) + \right.$ $\left. + [1 + (a-b)x] I_0 \left(\frac{a-b}{2}x \right) \right\}$
$(p-a)^{-\nu} (p-b)^{-\mu},$ $\operatorname{Re}(\nu+\mu) < 0$	$\frac{x^{\nu+\mu-1}}{\Gamma(\nu+\mu)} e^{bx} \times$ $\times {}_1F_1(\nu; \nu+\mu; (a-b)x)$ $[\Psi(1) - \ln x] e^{-ax},$ $\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$
$\frac{\ln(p+a)}{p+a}$	$x [1 + \Gamma'(1) - \ln x] e^{-ax}$
$\frac{\ln(p+a)}{(p+a)^2}$	$-\frac{\ln x + C + \ln 4}{\sqrt{\pi x}} e^{-ax},$
$\frac{\ln(p+a)}{\sqrt{p+a}}$	$C = -\Gamma'(1) - \text{постоянная Эйлера}$
$\frac{\ln(p+a)}{(p+a)^\nu},$ $\operatorname{Re} \nu > 0$	$\frac{\Psi(\nu) - \ln(x)}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-ax}$
$\frac{1}{p} e^{-ap}, \quad a > 0$	$\begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ 1, & a < x \end{cases}$
$\frac{1}{p} (1 - e^{-ap}), \quad a > 0$	$\begin{cases} 1, & 0 < x < a \\ 0, & a < x \end{cases}$
$\frac{1}{p} (e^{-ap} - e^{-bp}),$ $0 \leq a < b$	$\begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ 1, & a < x < b \\ 0, & b < x \end{cases}$
$\frac{1}{p^2} (e^{-ap} - e^{-bp}),$ $0 \leq a < b$	$\begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ x-a, & a < x < b \\ b-a, & b < x \end{cases}$
$\frac{1}{p^2} (e^{-ap} - e^{-bp})^2,$ $0 \leq a < b$	$\begin{cases} 0, & 0 < x < 2a \\ x-2a, & 2a < x < a+b \\ 2b-x, & a+b < x < 2b \\ 0, & 2b < x \end{cases}$

Продолжение

$F(p)$	$f(x)$
$\frac{1}{p+\beta} e^{-ap}, \quad a > 0$	$\begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ e^{-\beta(x-a)}, & a < x \end{cases}$
$\frac{\lambda p + \mu}{p^2 + \beta^2} e^{-ap}, \quad a > 0$	$\begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ \lambda \cos [\beta(x-a)] + \mu\beta^{-1} \sin [\beta(x-a)], & a < x \end{cases}$
$\frac{\lambda p + \mu}{p^2 - \beta^2} e^{-ap}, \quad a > 0$	$\begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ \lambda \operatorname{ch} [\beta(x-a)] + \mu\beta^{-1} \operatorname{sh} [\beta(x-a)], & a < x \end{cases}$

ГЛАВА 12

ВЫДЕЛЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ФУНКЦИИ ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУРЬЕ

Вычисление интегралов Фурье по значениям преобразуемой функции f основано, как и вычисление интеграла Меллина, преимущественно на интерполировании функции f при помощи многочленов или рациональных функций, при этом интерполирование выполняется либо во всей области интегрирования, либо в ее частях. Точность вычисления интегралов зависит как от избранного правила, так и от свойств функции f , но обычно, чем более гладкой является функция f и чем быстрее она стремится к нулю при удалении аргумента ее в бесконечность, тем более точный результат может быть получен при вычислениях.

Предварительную подготовку функции f к вычислению интегралов Фурье можно проводить в следующих трех направлениях:

1) Улучшение дифференциальных свойств функции f , в частности повышение порядка ее дифференцируемости.

2) Увеличение плавности изменения функции f . Чтобы пояснить содержание этой краткой фразы, достаточно, по-видимому, привести примеры. Хорошо известна возможность сколь угодно точного и равномерного приближения на замкнутом отрезке непрерывной функции многочленом. В некоторых случаях для достижения заданной точности приближения необходимо строить многочлен высокой степени с большими и сильно изменяющимися значениями производных от него. С таким затруднением можно встретиться даже в случае аналитической функции f , когда ее особые точки лежат вблизи отрезка, на котором строится аппроксимирующий многочлен.

В случаях такого рода естественно пытаться облегчить задачу приближения путем предварительного выделения

из f «особой, негладкой части» с тем, чтобы вычисления нужно было производить с более плавно изменяющимся «остатком». С задачей такого увеличения плавности изменения мы встречались выше в § 11.2.

3) Ускорение стремления к нулю функции f , когда $|x|$ неограниченно возрастает.

Мы остановимся только на двух вопросах: устранении разрывов первого рода и ускорении стремления к нулю преобразуемой функции.

§ 12.1. Устранение разрывов первого рода

Пусть функция f задана на отрезке $[a, b]$ и x есть внутренняя точка этого отрезка. Предположим, что f имеет в точке x правостороннее предельное значение

$$f(x+0) = \lim_{x' \rightarrow x, x' > x} f(x')$$

и левостороннее предельное значение

$$f(x-0) = \lim_{x' \rightarrow x, x' < x} f(x').$$

Если значения $f(x+0)$ и $f(x-0)$ существуют, но хотя бы одно из них отлично от $f(x)$, то говорят, что f имеет в точке x *разрыв непрерывности первого рода*.

Если точка x является одним из концов отрезка $[a, b]$, то при определении разрыва рассматривается лишь одно из предельных значений: $f(x+0)$ или $f(x-0)$.

Почти аналогично определяются разрывы первого рода у производных функции f . Например, рассмотрим первую производную f' и будем считать, что она существует во всех точках некоторой окрестности значения x , исключая, может быть, саму точку x . Предположим также, что существуют предельные значения $f'(x+0)$ и $f'(x-0)$. Если окажется, что $f'(x-0) \neq f'(x+0)$, то говорят, что первая производная f' имеет в точке x *разрыв первого рода со скачком* $f'(x+0) - f'(x-0)$.

Для определенности записи будем иметь в виду косинус-преобразование. Предположим, что f и ее производные до некоторого порядка m непрерывны на полуоси $[0, \infty)$ всюду, за исключением q точек $x_1, x_2, \dots, x_q$ ($x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_q$), где они имеют разрывы первого рода.

воспользоваться функцией *)

$$F_1(x) = \sum_{j=1}^q [E(x - x_j) - 1] k_j^{(1)}(x - x_j). \quad (12.1.3)$$

Она кусочно-линейная, непрерывная на $[0, \infty)$ и обращается в тождественный нуль при $x > x_q$. Первая производная от нее

$$F_1'(x) = \sum_{j=1}^q [E(x - x_j) - 1] k_j^{(1)'}(x - x_j)$$

кусочно-постоянна вне точек x_j и имеет в этих точках скачки, равные соответственно величинам $k_j^{(1)'}$.

Разность $\varphi_1(x) = f(x) - F_1(x)$ будет иметь производную $\varphi_1'(x)$ везде при $x \neq x_j$ ($j = 1, 2, \dots, q$). Кроме того, в точках x_j будет $\varphi_1'(x_j + 0) = \varphi_1'(x_j - 0)$, и если доопределить $\varphi_1'(x)$ в точках x_j , положив там $\varphi_1'(x_j) = \varphi_1'(x_j + 0)$, функция $\varphi_1'(x)$ будет непрерывной на полуоси $[0, \infty)$.

Косинус-преобразование функции $F_1(x)$ находится с помощью несложных вычислений. Так как

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} [E(x - x_j) - 1] (x - x_j) \cos px \, dx &= \\ &= \int_0^{x_j} (x_j - x) \cos px \, dx = \frac{1}{p^2} (1 - \cos px_j), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} F_1(x) \cos px \, dx &= \\ &= \sum_{j=1}^q k_j^{(1)} \int_0^{\infty} [E(x - x_j) - 1] (x - x_j) \cos px \, dx = \\ &= \frac{1}{p^2} \sum_{j=1}^q k_j^{(1)} (1 - \cos px_j). \quad (12.1.4) \end{aligned}$$

Отметим также, что разность

$$\varphi_{01}(x) = f(x) - F_0(x) - F_1(x)$$

*) Ввиду простоты мы не поясняем соображения, на основании которых строится $F_1(x)$.

будет обладать свойствами: $\varphi_{01}(x_j+0) = \varphi_{01}(x_j-0)$, $\varphi'_{01}(x_j+0) = \varphi'_{01}(x_j-0)$, и если φ_{01} доопределить в точках x_j равенствами $\varphi_{01}(x_j) = \varphi_{01}(x_j+0)$, то φ_{01} будет непрерывно дифференцируемой при $x \geq 0$.

Эти рассуждения можно продолжить. При всяком $i=0, 1, \dots, m$ положим

$$F_i(x) = \sum_{j=1}^q [E(x-x_j) - 1] \frac{(x-x_j)^i}{i!} k_j^{(i)}. \quad (12.1.5)$$

Такая функция F_i непрерывно дифференцируема по x до порядка $i-1$ включительно, производная же порядка i при $x \neq x_j$ ($j=1, 2, \dots, q$) имеет значение

$$F_i^{(i)}(x) = \sum_{j=1}^q [E(x-x_j) - 1] k_j^{(i)}$$

и является кусочно-постоянной функцией со скачками в точках x_j , величины которых равны соответственно $k_j^{(i)}$. Для $x > x_q$ верно равенство $F_i^{(i)}(x) \equiv 0$.

С помощью $F_i(x)$ у функции f могут быть удалены скачки производной порядка i .

Если же мы положим

$$\varphi_{01 \dots m}(x) = f(x) - [F_0(x) + F_1(x) + \dots + F_m(x)]$$

и затем в точках x_j доопределим $\varphi_{01 \dots m}$, полагая $\varphi_{01 \dots m}(x_j) = \varphi_{01 \dots m}(x_j+0)$, получим функцию, m раз непрерывно дифференцируемую на $[0, \infty)$. Этим будут устранены разрывы у f и ее производных до порядка m .

§ 12.2. Увеличение скорости стремления к нулю преобразуемой функции

Пусть $f(x)$ стремится к нулю по степенному закону так, что для некоторого s будет $(x+a)^s f(x) \rightarrow C \neq 0$ ($a > 0$). Во многих случаях параметр a , зависящий от поведения f вблизи начала координат, можно принять равным единице. Функция f представима в форме

$$f(x) = \frac{C}{(x+1)^s} + f_1(x),$$

где $f_1(x)$ стремится к нулю быстрее, нежели $f(x)$, так как $(x+1)^s f_1(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$).

Преобразование Фурье главной части $C(x+1)^{-s}$ функции f может быть найдено точно способом, указанным в гл. 10.

Если окажется, что скорость стремления к нулю функции f_1 является недостаточной для выполнения преобразования Фурье, то можно попытаться из f_1 в свою очередь выделить главную часть. Вид ее зависит от свойств функции f_1 , но может оказаться, что f_1 , как и f , стремится к нулю по степенному закону и из f_1 можно выделить главную часть того же вида, но с другими значениями параметров C и s . Выполнив операцию выделения главной части несколько раз, нередко удастся построить представление функции f вида

$$f(x) = \frac{C_1}{(x+a_1)^{s_1}} + \frac{C_2}{(x+a_2)^{s_2}} + \dots + \frac{C_m + \gamma_m(x)}{(x+a_m)^{s_m}},$$

где

$$0 < s_1 < s_2 < \dots < s_m \text{ и } \gamma_m(x) \rightarrow 0 \text{ } (x \rightarrow \infty).$$

Допустим теперь, что f стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$ по показательному закону и существует положительное число α такое, что $e^{\alpha x} f(x) \rightarrow C \neq 0$. Тогда для f верно равенство

$$f(x) = Ce^{-\alpha x} + f_1(x) \quad (\alpha > 0);$$

при этом $f_1(x)$ стремится к нулю быстрее, нежели $f(x)$, так что первый член правой части $Ce^{-\alpha x}$ является главным.

Преобразование Фурье главного члена выполняется точно:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos px \, dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + p^2},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin px \, dx = \frac{p}{\alpha^2 + p^2} \quad (\alpha > 0).$$

В третьей части книги мы ознакомили читателя только с самыми простыми задачами подготовки функции $F(p)$ к обращению преобразования Лапласа и функции $f(x)$

к преобразованию Фурье. Нам казалось, что этого достаточно для ознакомления с идеями подготовки. Подготовка состоит, по сути дела, в том, что из функций $F(p)$ и $f(x)$ выделяют особенные или главные части такие, чтобы для них вычисления могли быть выполнены достаточно просто и сколь угодно точно.

Эта задача выделения является нестандартной, и, если читатель встретится со случаем более сложным, чем приведенные в нашей книге, мы рекомендуем ему обратиться к книгам, которые могут оказать помощь в вопросах подготовки вычислений для большого числа случаев (см. [1], [3]).

ЛИТЕРАТУРА *)

1. Бейтмен Г., Эрдейи А., Таблицы интегральных преобразований, М., «Наука», 1969.
2. Дёч Г., Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, М., «Наука», 1965.
3. Диткин В. А., Прудников А. П., Справочник по операционному исчислению, М., «Высшая школа», 1965.
4. Диткин В. А., Прудников А. П., Операционное исчисление, М., «Высшая школа» 1966.
5. Диткин В. А., Прудников А. П., Интегральные преобразования и операционное исчисление, М., «Наука», 1967.
6. Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, М., «Наука», 1967.
7. Крылов В. И., Кругликова Л. Г., Справочная книга по численному гармоническому анализу, Минск, «Наука и техника», 1968.
8. Крылов В. И., Скобля Н. С., Справочная книга по численному обращению преобразования Лапласа, Минск, «Наука и техника», 1968.
9. Серебренников М. Г., Гармонический анализ, М., Гостехиздат, 1948.
10. Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, М., Гостехиздат, 1948.
11. Doetsch G., Handbuch der Laplace Transformation, Bd. I—IV, Basel, Birkhäuser-Verlag, 1950—1956.

*) В списке литературы указаны только некоторые книги по численному обращению преобразования Лапласа и гармоническому анализу. Подробный перечень литературы приведен в книгах [7], [8].

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$f(t)$ — функция-оригинал.	член Чебышева
$F(p)$ — функция-изображение при преобразовании Лапласа.	второго рода для отрезка $[0, 1]$.
$\Phi(p)$ — комплексное преобразование Фурье функции f .	$L_n^{(\lambda)}(x)$ — обобщенный многочлен Чебышева — Лагерра степени n .
$\Phi_c(p)$ — косинус-преобразование Фурье функции f .	${}_1F_1(\alpha, \beta, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.
$\Phi_s(p)$ — синус-преобразование Фурье функции f .	$\bigcup_{\xi} M_{\xi}$ — сумма множеств M_{ξ} по индексу ξ .
$P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ — многочлен Якоби степени n параметров α, β .	$\bigcap_{\xi} M_{\xi}$ — пересечение (общая часть) всех множеств M_{ξ} .
$P_n^{*(\alpha, \beta)}(x)$ — смещенный многочлен Якоби для отрезка $[0, 1]$.	$\text{Var}_{\langle a, b \rangle} f(x)$ — полная вариация функции f на отрезке $\langle a, b \rangle$. Указание отрезка может быть опущено.
$P_n^*(x)$ — смещенный многочлен Лежандра для отрезка $[0, 1]$.	$g(t+0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} g(t+\delta) \quad (\delta > 0)$
$T_n^*(x)$ — смещенный многочлен Чебышева первого рода для отрезка $[0, 1]$.	$g(t-0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} g(t-\delta) \quad (\delta > 0)$
$U_n^*(x)$ — смещенный много-	$\text{res } f(a)$ — вычет функции $f(z)$ в полюсе $z=a$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Вырожденная гипергеометрическая функция 68, 206
- Главное значение интеграла по оси 127
- Жордана лемма 18
- Интерполирование при помощи многочлена от $\frac{1}{1+x}$ 167—169
- Интерполирование с двукратными узлами 157, 158
- Логарифмический потенциал 80
- Многочлены смещенные Лежандра 42
- — Чебышева второго рода 43
- — первого рода 42
- — Якоби 36
- Чебышева — Лагерра обобщенные 55
- Неравенство Коши для коэффициентов степенного ряда 28
- Шварца — Буняковского 47
- Обращение преобразования Лапласа при помощи интеграла Меллина 17
- — — — — многочленов Лежандра 42
- Обращение преобразования Лапласа при помощи интеграла Чебышева 42, 43
- — — — — Якоби 36
- — — — — правила квадратур интерполяционного 73
- — — — — наивысшей степени точности 91—97
- — — — — с равными коэффициентами 121—124
- — — — — разложения в степенной ряд 27—30
- — — — — ряда по многочленам Чебышева — Лагерра 54
- — — — — Фурье по синусам 52
- Определитель Грама 33
- Ортогональные многочлены, связанные с обращением 97
- — — — —, дифференциальное уравнение 100—102
- — — — —, интегральное представление 102
- — — — —, производящая функция 103—105
- — — — —, распределение корней 105
- — — — —, рекуррентное соотношение 100
- — — — —, система уравнений для корней 119
- — — — —, существование и единственность 94—97
- Парсваля равенство 46
- Погрешность интерполирования 173
- Правила вычислений наивысшей степени точности 194, 199

Правила вычислений при кусочно-квадратном интерполировании 150, 154, 155

— — — кусочно-кубическом интерполировании 155—157

— — — кусочно-линейном интерполировании 144, 147, 148

— — — кусочном интерполировании f с двумя двукратными узлами 160, 162, 163

— — — — f с тремя двукратными узлами 164—166

— интерполяционных преобразований Фурье при произвольных узлах 174

— — — — равноотстоящих узлах 177

— — — — с узлами в корнях многочлена Якоби 187—189

Правильные разрывы непрерывности 127

Преобразование Лапласа 10

— —, функция-изображение 13

— —, функция-оригинал 12

Преобразования Фурье 126—130

— —, двойной интеграл Фурье 126

— —, комплексная формула Фурье 127

— —, комплексное преобразование Фурье и его обращение 128

— —, косинус-преобразование Фурье и его обращение 130

— —, косинус-формула Фурье 129

— —, синус-преобразование Фурье и его обращение 130

— —, синус-формула Фурье 129

Приведение интеграла Меллина к преобразованию Фурье 131

Разрывы непрерывности первого рода 214

Теорема Коши об интеграле от регулярной функции 19

— о вычетах 19

— — представлении оригинала интегралом Меллина 17

— — — функции двойным интегралом Фурье 126

— — — — интегралом Лапласа 20

— — разложении по многочленам Якоби 40

— — связи между рядами Фурье и по многочленам Якоби 38

— — сходимости интерполяционного преобразования Фурье при произвольных узлах 175

— — — — — равноотстоящих узлах 181

— — — ряда Фурье 39

Теоремы о сходимости интерполяционных методов обращения 85—89

— — — — процессов 77—84

Формула Меллина 17

Функция гасящая 143

— производящая 103

— распределения 65

— — предельная 66

— — Чебышева 66

— с ограниченным изменением 126

*Владимир Иванович Крылов
Надежда Сергеевна Скдбля*

МЕТОДЫ
ПРИБЛИЖЕННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ
И ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

(справочная книга)

М., 1974 г., 224 стр. с илл.

Редактор *Н. П. Рябенкяя*
Техн. редакторы *С. Я. Шкляр,*
Г. А. Полонская
Корректор *А. Л. Ипатова*

Сдано в набор 20/VIII 1973 г. Подписано к печати 4/X 1974 г. Бумага 84×108¹/₃₂, тип. № 2. Физ. печ. л. 7. Условн. печ. л. 11,76. Уч.-изд. л. 11,76. Тираж 16 000 экз. Т-11284. Цена книги 39 коп. Заказ № 338.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Отпечатано в ордена Трудового Красного Знамени Ленинградской типографии № 2 имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29, с матриц ордена Трудового Красного Знамени Ленинградской типографии № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26

