

В. И. КРЫЛОВ, Л. Г. КРУГЛИКОВА

СПРАВОЧНАЯ  
КНИГА  
ПО ЧИСЛЕННОМУ  
ГАРМОНИЧЕСКОМУ  
АНАЛИЗУ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА И ТЕХНИКА»  
МИНСК 1968

*Цель данной книги — дать изложение современного состояния численного гармонического анализа и собрать в одном месте все необходимые сведения по теории, правила вычислений и вспомогательные таблицы, которые могут потребоваться при расчетах. В книге изложены правила вычисления коэффициентов Фурье для классов функций, наиболее часто встречающихся в приложениях. Большая ее часть посвящена более трудной задаче вычисления интегралов Фурье. Кроме того, даны вспомогательные математические таблицы, облегчающие эти вычисления.*

*Книга предназначена для работников научных и инженерно-технических институтов. Она будет также полезным пособием для работников вычислительных центров и конструкторских бюро.*

*Библиография 91 назв.*

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                                              |    |                                                                                                                                      |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Предисловие . . . . .                                                                                        | 5  | § 2. Нахождение коэффициентов Фурье с помощью итераций . . . . .                                                                     | 36 |
| <b>Часть первая</b>                                                                                          |    | § 3. Формулы численного интегрирования, содержащие разности подынтегральной функции . . . . .                                        | 36 |
| <b>ЧИСЛЕННЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ</b>                                                  |    | § 4. Гармонический анализ по разрывам функции и ее производных . . . . .                                                             | 37 |
| Глава 1. О гармоническом анализе периодической функции . . . . .                                             | 6  | Глава 6. Улучшение точности вычисления коэффициентов Фурье . . . . .                                                                 | 38 |
| § 1. Разложение периодической функции в ряд Фурье . . . . .                                                  | 6  | § 1. Ослабление особенностей функции при помощи разложения ее на особую и гладкую части . . . . .                                    | 38 |
| § 2. Сходимость ряда Фурье и условия представимости функции этим рядом . . . . .                             | 6  | § 2. Непрерывное периодическое продолжение функции. Увеличение скорости убывания коэффициентов . . . . .                             | 38 |
| § 3. Другие формы ряда Фурье. Частные случаи . . . . .                                                       | 7  | § 3. Устранение разрывов первого рода у функции и ее производных . . . . .                                                           | 39 |
| § 4. Минимальное свойство частичных сумм ряда Фурье . . . . .                                                | 8  | <b>Часть вторая</b>                                                                                                                  |    |
| § 5. Порядок убывания коэффициентов Фурье . . . . .                                                          | 8  | <b>ЧИСЛЕННЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ</b>                                                                        |    |
| Глава 2. Применение общих правил интегрирования к вычислению коэффициентов Фурье . . . . .                   | 11 | Глава 7. Интегральные преобразования Фурье и связь их с формулой Фурье . . . . .                                                     | 42 |
| § 1. Предварительные замечания . . . . .                                                                     | 11 | § 1. Интегральные преобразования Фурье . . . . .                                                                                     | 42 |
| § 2. Применение правила Котеса для постоянного веса . . . . .                                                | 11 | § 2. Формула Фурье и связь ее с преобразованием Фурье . . . . .                                                                      | 43 |
| § 3. Об условиях применения общих правил численных квадратур и пути увеличения точности вычислений . . . . . | 12 | Глава 8. Применение известных правил квадратур к интегралам Фурье . . . . .                                                          | 45 |
| Глава 3. Применение правил наивысшей тригонометрической степени точности . . . . .                           | 14 | § 1. Применение интерполяционных правил с равноотстоящими узлами . . . . .                                                           | 45 |
| § 1. Предположения о функции $f$ . . . . .                                                                   | 14 | Глава 9. Правила вычисления интегралов Фурье, получающиеся при интерполировании рациональными функциями . . . . .                    | 49 |
| § 2. Квадратурные правила наивысшей тригонометрической степени точности . . . . .                            | 14 | § 1. Интерполирование рациональными функциями . . . . .                                                                              | 49 |
| § 3. Применение к вычислению коэффициентов Фурье . . . . .                                                   | 15 | § 2. Общая интерполяционная квадратурная формула . . . . .                                                                           | 50 |
| § 4. Схемы группирования и шаблоны . . . . .                                                                 | 17 | § 3. Квадратурная формула с равноотстоящими узлами . . . . .                                                                         | 51 |
| § 5. Квадратурные формулы с производными для периодических функций . . . . .                                 | 21 | § 4. Квадратурные формулы по корням ортогональных многочленов . . . . .                                                              | 52 |
| Глава 4. Методы, основанные на алгебраическом интерполировании . . . . .                                     | 22 | § 5. Вычисление интегралов $\int_0^{\infty} \sin px (1+x)^{-l-\alpha} dx$ и $\int_0^{\infty} \cos px (1+x)^{-l-\alpha} dx$ . . . . . | 54 |
| § 1. Общий вид интерполяционного правила вычисления интеграла с тригонометрическими множителями . . . . .    | 22 | Глава 10. Правила наивысшей степени точности . . . . .                                                                               | 56 |
| § 2. Интерполяционные квадратурные формулы с равноотстоящими узлами . . . . .                                | 23 | § 1. Условия применимости и расчетные формулы . . . . .                                                                              | 56 |
| § 3. Интерполяционные правила вычислений со значениями функции и производной . . . . .                       | 28 | Глава 11. Особые методы вычисления интегралов Фурье . . . . .                                                                        | 58 |
| § 4. Интерполяционные квадратурные формулы с неравноотстоящими узлами . . . . .                              | 31 | Глава 12. Улучшение точности вычисления интегралов Фурье . . . . .                                                                   | 59 |
| § 5. Квадратуры наивысшей алгебраической степени точности . . . . .                                          | 34 |                                                                                                                                      |    |
| Глава 5. Особые методы вычисления коэффициентов Фурье . . . . .                                              | 35 |                                                                                                                                      |    |
| § 1. Квадратурные формулы, основанные на экспоненциальной интерполяции . . . . .                             | 35 |                                                                                                                                      |    |

|                                                                      |    |
|----------------------------------------------------------------------|----|
| § 1. Улучшение свойств дифференцируемости                            | 59 |
| § 2. Увеличение быстроты убывания функции при $x \rightarrow \infty$ | 60 |
| Л и т е р а т у р а                                                  | 61 |

### Часть третья

#### ЧИСЛОВЫЕ ТАБЛИЦЫ

|                                                                                                                                                                                                                                      |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Т а б л и ц а I. Узлы $x_k$ и величины $D_{ik}$ и $D'_{ik}$ для вычисления квадратурных коэффициентов $A_k(p)$ в правилах типа $\int_{-1}^1 \sin px f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k(p) \times f(x_k)$ , $n = 1(1)15$ , на 10 знаков | 64 |
| Т а б л и ц а II. Коэффициенты $A_{kl}$ для численного преобразования Фурье. Случай равноотстоящих узлов, $n = 1(1)15$ , на 10 знаков                                                                                                | 78 |
| Т а б л и ц а III. Коэффициенты $A_{kl}$ и узлы $x_k = \frac{1-t_k}{1+t_k}$ , где $t_k$ — корни многочленов Лежандра, для численного преобразования Фурье, $n = 2(1)15$ , на 10 знаков                                               | 86 |
| Т а б л и ц а IV. Коэффициенты $A_{kl}$ и узлы $x_k =$                                                                                                                                                                               |    |

|                                                                                                                                                 |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| $= \frac{1-t_k}{1+t_k}$ , где $t_k$ — корни многочленов Чебышева первого рода, для численного преобразования Фурье, $n = 2(1)15$ , на 10 знаков | 95 |
| Т а б л и ц а V. Узлы и коэффициенты правила наи-                                                                                               |    |

высшей степени точности  $\int_0^{\infty} (1 + \sin x) f(x) dx \approx$

$$\approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad f(x) = \frac{F(x)}{(1+x)^s}, \quad |F(x)| < M,$$

при  $s = 1,05(0,05)4$ ,  $n = 1(1)10$ , на 10 знаков 104

|                                                    |  |
|----------------------------------------------------|--|
| Т а б л и ц а VI. Узлы и коэффициенты правила наи- |  |
|----------------------------------------------------|--|

высшей степени точности  $\int_0^{\infty} (1 + \cos x) f(x) dx \approx$

$$\approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad f(x) = \frac{F(x)}{(1+x)^s}, \quad |F(x)| < M,$$

при  $s = 1,05(0,05)4$ ,  $n = 1(1)10$ , на 10 знаков 135

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Применение гармонического анализа в технике и естествознании очень разнообразно. Как по глубине проникновения в сущность явлений, так и по широте охвата областей знаний метод разложения функции на ее гармонические составляющие занимает одно из главных мест среди современных методов изучения явлений природы и проблем техники.

Разложения периодической функции в ряды по синусам и косинусам аргументов, возрастающих в арифметической прогрессии, постоянно встречаются в теоретической и математической физике, общей механике, электротехнике, машиностроении, геофизике, астрономии, статистике и т. д. Интеграл Фурье имеет большое значение во многих вопросах теории электрических цепей, но область его применения гораздо шире, так как условия, характерные для электрических цепей, встречаются в других задачах физики и техники.

Существует обширная литература по теории гармонического анализа и его приложениям, где эти проблемы излагаются с большой полнотой и в доступной форме. Что же касается методов численного гармонического анализа, главное содержание которых составляют правила нахождения численных значений коэффициентов и интегральных преобразований Фурье, то не существует книг, где этот вопрос освещался бы достаточно полно и на том уровне исследований, который достигнут к настоящему времени.

В книгах по гармоническому анализу правила вычислений излагаются обычно в очень краткой и неполной форме. Исключением является книга М. Г. Серебrenникова [23], в которой с большой подробностью говорится о методах нахождения коэффициентов Фурье, основанных на формулах Бесселя\*. Но эта книга посвящена только частному вопросу численного гармонического анализа.

Интерес к вычислительным проблемам гар-

монического анализа в последнее время увеличился в связи с тем, что наши возможности в счете сильно возросли. Было опубликовано много работ с изложением результатов такого типа исследований. Статьи печатались в многочисленных математических журналах, и большая их часть еще не получила широкой известности.

Задача этой книги заключается в том, чтобы собрать вместе все известные и кажущиеся авторам наиболее важными методы численного нахождения коэффициентов Фурье и численного преобразования Фурье. Особое внимание авторы уделили методам, разработанным за последние 10—15 лет и удобным для решения задач на электронно-вычислительных машинах.

При составлении текста мы стремились к тому, чтобы привести все необходимые расчетные формулы и чтобы описание вычислительных правил было кратким, но отчетливым и достаточно простым. Каждый из методов может дать хорошую точность лишь при соблюдении некоторых условий, и, чтобы избрать наиболее удобный, нужно знать круг задач, на решение которых рассчитаны отдельные методы. Поэтому одновременно с описанием методов мы кратко указывали соображения, положенные в основу построения этих методов. Нам кажется, что это может в некоторых случаях облегчить выбор какого-либо определенного правила вычислений из числа многих известных.

Первая часть книги посвящена численным методам нахождения коэффициентов Фурье, вторая — численному преобразованию Фурье, третья содержит таблицы, связанные с некоторыми из изложенных методов.

Авторы предполагают знакомство читателя с основными фактами теории интерполирования и квадратурных формул.

В заключение авторы считают своим долгом выразить благодарность Г. Ф. Горбачевой, Н. И. Якубович, А. А. Воробьевой за помощь при вычислении таблиц и подготовке рукописи книги.

\* В настоящей справочной книге правила Бесселя помечены номером (3.3.3).

# Часть первая

## ЧИСЛЕННЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

### Глава I

#### О ГАРМОНИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

##### § 1. РАЗЛОЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В РЯД ФУРЬЕ

Гармонический анализ всякого периодического процесса независимо от его природы состоит в нахождении гармонических колебаний, имеющих период, одинаковый с периодом процесса, и таких, чтобы рассматриваемый процесс мог быть получен как результат наложения гармонических колебаний. С математической точки зрения это задача о представлении периодической функции  $f$ , описывающей процесс, в виде суммы ряда синусоидальных величин.

Не уменьшая общности задачи, можно для упрощения записи считать период равным  $2\pi$ . Тогда задача гармонического анализа периодической функции  $f$  состоит в представлении ее в виде

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \\ &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k \sin(kx + \varphi_k), \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

где  $r_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ ;  $\cos \varphi_k = b_k/r_k$ ;  $\sin \varphi_k = a_k/r_k$ .

Отдельные гармоники, являющиеся членами ряда, определяются коэффициентами  $a_k$  и  $b_k$ . Поэтому построение ряда гармоник равносильно нахождению численных значений и коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$ .

В курсах анализа показывается, что при весьма общих предположениях о функции  $f$  и характере сходимости ряда из возможности разложения (1.1.1) следует, что  $a_k$  и  $b_k$  должны выражаться\* через  $f$  в виде:

\* Для многих приложений гармонического анализа полезными могут быть следующие теоремы:

1. Если  $f$  может быть разложена в тригонометрический ряд (1.1.1) и этот ряд сходится равномерно на

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.1.2)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Эти значения  $a_k$ ,  $b_k$  называют коэффициентами Фурье и ряд (1.1.1) с такими  $a_k$  и  $b_k$  — рядом Фурье.

##### § 2. СХОДИМОСТЬ РЯДА ФУРЬЕ И УСЛОВИЯ ПРЕДСТАВИМОСТИ ФУНКЦИИ ЭТИМ РЯДОМ

Коэффициенты Фурье (1.1.2) могут быть вычислены для всякой функции  $f$ , определенной и абсолютно интегрируемой на отрезке  $[-\pi, \pi]$  в собственном или несобственном смысле\*, и по ним составлен ряд Фурье, соответствующий функции  $f$ . Однако доказать, что построенный так ряд действительно дает гармонический анализ  $f$ , можно лишь при дополнительных предположениях об  $f$ .

$[-\pi, \pi]$ , то коэффициенты ряда  $a_k$  и  $b_k$  имеют значения (1.1.2).

2. Если  $f$  абсолютно интегрируема на  $[-\pi, \pi]$  в собственном или несобственном смысле и если она разлагается в тригонометрический ряд (1.1.1), сходящийся к  $f(x)$  при всяких  $x$  из  $[-\pi, \pi]$ , исключая, может быть, счетное множество точек, то коэффициенты ряда  $a_k$  и  $b_k$  имеют значения (1.1.2).

3. Если  $f$  может быть представлена на  $[-\pi, \pi]$  в виде разности двух монотонных функций (имеет ограниченное изменение) и если в каждой точке разрыва  $x_i$  будет  $f(x_i) = \frac{1}{2} [f(x_i - 0) + f(x_i + 0)]$ , то  $f$  может быть разложена в тригонометрический ряд (1.1.1) и коэффициенты ряда  $a_k$  и  $b_k$  имеют значения (1.1.2).

\* Под несобственным интегралом здесь подразумевается интеграл от неограниченной функции.

Говорят, что функция  $f$  представима рядом Фурье, если ее ряд Фурье сходится всюду на отрезке  $[-\pi, \pi]$  и сумма его в точке  $x$  равна значению  $f(x)$ .

Мы укажем лишь одну из теорем\*, выясняющую условия, достаточные для разложения функций в ряд Фурье, которую наиболее часто приводят в курсах анализа:

**Теорема 1 (Дирихле).** Если выполняются условия: 1) функция  $f$  определена на отрезке  $[-\pi, \pi]$ ; 2) либо непрерывна там, либо имеет не более чем конечное число точек разрыва, каждый из которых является разрывом первого рода; 3) отрезок  $[-\pi, \pi]$  может быть разделен на конечное число частей так, чтобы внутри каждой из них  $f$  изменялась монотонно, то ряд Фурье для  $f$  сходится всюду на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , сумма его равна значению  $f(x)$  в каждой точке  $x$  непрерывности функции  $f$  внутри  $[-\pi, \pi]$ , равна  $\frac{1}{2} [f(\pi - 0) + f(-\pi + 0)]$  на концах отрезка и  $\frac{1}{2} [f(x + 0) + f(x - 0)]$  в каждой точке разрыва внутри отрезка  $[-\pi, \pi]$ .

Отсюда, в частности, следует, что если  $f(x)$  удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, в точках разрыва  $x_i$  внутри  $[-\pi, \pi]$  для нее выполняется равенство  $f(x_i) = \frac{1}{2} [f(x_i + 0) + f(x_i - 0)]$  и в точках  $-\pi$  и  $\pi$  она принимает значение  $\frac{1}{2} [f(\pi - 0) + f(-\pi + 0)]$ , то она представима рядом Фурье.

Характер сходимости ряда Фурье зависит от свойств функции  $f$ . Некоторые заключения о нем можно получить из оценок коэффициентов Фурье, указанных в § 5. Приведем здесь теорему, в которой указываются условия, достаточные для равномерной сходимости\*\*.

**Теорема 2.** Если: 1) функция  $f$  принимает на концах отрезка  $[-\pi, \pi]$  одинаковые значения:  $f(\pi) = f(-\pi)$  и 2) имеет на этом отрезке кусочно непрерывную производную, то соответствующий ей ряд Фурье сходится к  $f(x)$  равномерно на  $[-\pi, \pi]$ .

\* Она легко получается из третьей теоремы, указанной в сноске первого параграфа.

\*\* Теорема сформулирована в том виде, как она обычно излагается в курсах математического анализа. Одним из возможных ее обобщений является следующая теорема: если  $f$  на отрезке  $[-\pi, \pi]$  непрерывна, в точках  $-\pi, \pi$  принимает одинаковые значения:  $f(-\pi) = f(\pi)$  и представима в виде разности монотонных функций (имеет ограниченное изменение), то соответствующий ей ряд Фурье сходится к  $f(x)$  равномерно на  $[-\pi, \pi]$ .

### § 3. ДРУГИЕ ФОРМЫ РЯДА ФУРЬЕ. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Во многих вопросах полезной бывает комплексная форма ряда Фурье. Если в ряду (1.1.1) — (1.1.2) заменить тригонометрические функции их выражениями через показательные  $\cos kx = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx})$ ,  $\sin kx = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx})$  и расположить члены по возрастающим степеням величины  $e^{ix}$ , можно ряд Фурье привести к виду

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad (1.3.1)$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k = 0, \pm 1, \dots,$$

$$c_k = \frac{1}{2} (a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2} (a_k + ib_k),$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Бесконечная сумма  $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$  здесь понимается в смысле главного ее значения\* — как предел симметричной частичной суммы  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n$ .

До сих пор мы рассматривали разложение в ряд Фурье функций, заданных на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Так как всякий конечный отрезок  $[a, b]$  при помощи линейного преобразования  $\xi = \frac{\pi}{l} (2x - b - a)$ ,  $b - a = l$ , переводится в отрезок  $[-\pi, \pi]$ , то от разложения на  $[-\pi, \pi]$  нетрудно перейти к разложению функции  $f$  на любом отрезке  $[a, b]$ :

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos k \frac{2\pi}{l} x + b_k \sin k \frac{2\pi}{l} x \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik \frac{2\pi}{l} x}, \quad (1.3.2)$$

где  $a_k = \frac{2}{l} \int_a^b f(x) \cos k \frac{2\pi}{l} x dx, \quad k = 0, 1, \dots;$

\* Это формальное математическое условие по существу равносильно более наглядному с физической точки зрения требованию, чтобы сходился ряд, составленный из действительных частей членов бесконечного в обе стороны ряда  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ .

$$b_k = \frac{2}{l} \int_a^b f(x) \sin k \frac{2\pi}{l} x dx, \quad k = 1, 2, \dots;$$

$$c_k = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) e^{-ik \frac{2\pi}{l} x}, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

В частном случае, когда  $f$  задана на отрезке  $[-1, 1]$  ( $a = -1, b = 1, l = 2$ ), ее разложение в ряд Фурье принимает вид

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k \pi x + b_k \sin k \pi x), \quad (1.3.3)$$

$$\text{где } a_k = \int_{-1}^1 f(x) \cos k \pi x dx, \quad b_k = \int_{-1}^1 f(x) \sin k \pi x dx.$$

Возвратимся к разложению (1.1.1) на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Если функция  $f(x)$  является четной, т. е. удовлетворяющей равенству  $f(-x) = f(x)$  при всяких  $x$  на  $[-\pi, \pi]$ , в ее разложении в тригонометрический ряд должны сохраниться только члены с косинусами кратных дуг:

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad (1.3.4)$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx.$$

Если же  $f(x)$  есть нечетная функция:  $f(-x) = -f(x)$ , то в разложении должны сохраниться лишь члены с синусами кратных дуг:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad (1.3.5)$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx.$$

#### § 4. МИНИМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО ЧАСТИЧНЫХ СУММ РЯДА ФУРЬЕ

Пусть на отрезке  $[-\pi, \pi]$  дана интегрируемая функция  $f$ , обладающая интегрируемым квадратом  $f^2$ . Рассмотрим тригонометрический многочлен степени  $n$ :

$$T_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + \beta_k \sin kx).$$

Среднее квадратичное уклонение  $\Delta_n$  многочлена  $T_n$  от функции  $f$  определяется равенством

$$\Delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx. \quad \text{Оно зависит от}$$

коэффициентов многочлена  $a_k$  и  $\beta_k$ .

Может быть поставлена задача о таком выборе  $a_k$  и  $\beta_k$ , при котором  $\Delta_n$  будет иметь наименьшее значение. Оказывается, что своего минимума  $\Delta_n$  достигает в том и только в том случае, когда  $a_k$  и  $\beta_k$  станут равными коэффициентам Фурье:  $a_k = a_k, \beta_k = b_k$ . Тогда многочлен  $T_n$  будет совпадать с конечной суммой  $n+1$  первых членов ряда Фурье:

$$T_n(x) = S_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

#### § 5. ПОРЯДОК УБЫВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

Известно, что коэффициенты Фурье  $a_k$  и  $b_k$  всякой функции  $f$ , абсолютно интегрируемой в собственном или несобственном смысле на  $[-\pi, \pi]$ , стремятся к нулю при  $k \rightarrow \infty$ . Но такое стремление к нулю может быть как угодно медленным: для всякой неограниченно возрастающей функции  $\lambda(k)$  можно указать такую непрерывную функцию  $f$ , что  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \lambda(k) = 1$ .

Если интегрируемыми являются  $f$  и  $f^2$ , то можно доказать, что  $a_k$  и  $b_k$  должны стремиться к нулю настолько быстро, чтобы выполнялось

$$\text{неравенство Бесселя: } \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx. \quad \text{Никаких дальнейших заключений}$$

о скорости убывания  $a_k$  и  $b_k$  из предположения об интегрируемости  $f$  и  $f^2$  получить невозможно, так как известно, что если заранее заданы числа

$$a_k \text{ и } b_k, \text{ для которых ряд } \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \text{ сходится,}$$

то существует интегрируемая в смысле Лебега функция  $f$  с интегрируемым квадратом, для которой числа  $a_k$  и  $b_k$  будут коэффициентами Фурье. В обоих приведенных случаях более точные заключения о характере убывания  $a_k$  и  $b_k$  можно сделать лишь при дополнительных предположениях об  $f$ .

Можно ожидать, что чем выше порядок гладкости периодической функции  $f$  или чем дальше



от действительной оси лежат ее особые точки, когда  $f$  есть аналитическая функция, тем быстрее должны убывать с ростом  $k$  ее коэффициенты Фурье. Установить же точно порядок убывания коэффициентов или построить их разложения в форме суммы малых величин возрастающих порядков малости от  $1/k$  удастся только в небольшом числе случаев. Мы остановимся на двух таких случаях, представляющих интерес для приложений.

Будем считать сначала, что функция  $f$  и ее производные до порядка  $m+1$  включительно непрерывны всюду на отрезке  $[-\pi, +\pi]$ , кроме  $n$  точек  $-\pi < x_1 < \dots < x_n < \pi$ , где они имеют разрывы первого рода со скачками  $f^{(l)}(x_j+0) - f^{(l)}(x_j-0) = \delta_j^{(l)}$  ( $j = 1, \dots, n, l = 0, 1, \dots, m+1$ ). Мы рассмотрим, кроме того, величины  $f^{(l)}(-\pi+0) - f^{(l)}(\pi-0) = \delta_0^{(l)}$  ( $l = 0, 1, \dots, m$ ), которые будут скачками  $f$  и ее производных в точках  $(\pm\pi, \pm 3\pi, \dots)$  после  $2\pi$ -периодического продолжения  $f$  с отрезка  $(-\pi, \pi)$ .

Запись необходимых нам формул значительно упрощается, если воспользоваться комплексными коэффициентами Фурье (1.3.1). Чтобы отличить в обозначениях коэффициенты, принадлежащие функциям  $f, f', \dots, f^{(m+1)}$ , будем обозначать их соответственно  $c_k^0, c_k^1, \dots, c_k^{m+1}$ . Введем еще числа

$$S^l = (-1)^k \delta_0^{(l)} + \sum_{j=1}^n e^{-ikx_j} \delta_j^{(l)}, \text{ связанные с по-}$$

ложением точек разрыва  $x_j$  и величинами скачков в них  $\delta_j^{(l)}$  функции  $f^{(l)}$  ( $l = 0, 1, \dots, m$ ).

Если теперь в интегральном представлении

$$c_k^0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x) dx \text{ отрезок интегрирования}$$

разделить на участки  $[-\pi, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_n, \pi]$ , к интегралу по каждому из участков применить  $m+1$  раз интегрирование по частям, то можно получить выражение  $c_k^0$  через величины  $S^l$  и коэффициент  $c_k^{m+1}$ :

$$c_k^0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^m S^l (ik)^{-l-1} + (ik)^{-m-1} c_k^{m+1}. \quad (1.5.1)$$

Это равенство часто дает возможность точно судить о порядке стремления к нулю ( $k \rightarrow \infty$ ) коэффициента Фурье  $c_k^0$  периодической функции  $f$  в том случае, когда сама функция  $f$  и ее производные могут иметь точки разрывов только первого рода. В частности, из него видно, что если функция  $f$  и ее производные  $f', \dots, f^{(m)}$  являются непрерывными функциями, а  $f^{(m)}$  абсо-

лютно непрерывна\*, то все  $S^l = 0$  ( $l = 0, 1, \dots, m$ ),  $c_k^0 = (ik)^{-m-1} c_k^{m+1}$  и, следовательно,  $c_k^0$  будут стремиться к нулю при  $k \rightarrow \infty$  быстрее, чем  $k^{-m-1}$ .

Предположим теперь, что  $f$  есть аналитическая функция комплексной переменной  $z = x + iy$ , регулярная в замкнутой полосе  $|y| \leq d$ . Можно показать, что коэффициенты Фурье  $c_k$  выражаются через значения, принимаемые  $f$  на граничных прямых  $y = \pm d$  полосы\*\*:

$$c_k = \pi^{-1} e^{-kd} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - id) e^{-ikx} dx,$$

\* Функция  $F(x)$  является абсолютно непрерывной на отрезке  $[a, b]$ , если она почти во всех точках отрезка имеет производную  $F'(x)$  и  $F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t) dt$  ( $a \leq x \leq b$ ).

\*\* Такие выражения для  $c_k$  могут быть получены, например, если воспользоваться приводимым ниже аналогом формулы Коши, построенным для периодических функций. Пусть  $f(z)$  есть аналитическая  $2\pi$ -периодическая функция, регулярная в замкнутой  $2\pi$ -периодической полосе плоскости  $z$ . Для простоты и геометрической наглядности предположим, что полоса ограничена двумя достаточно гладкими линиями: сверху линией  $L_+$  и снизу линией  $L_-$ . Для полосы, рассмотренной в основном тексте, этими линиями будут прямые  $y = d$  и  $y = -d$ .

Выделим отрезок полосы  $-\pi \leq x \leq \pi$ . Части граничных линий  $L_+$  и  $L_-$ , принадлежащих этому отрезку, обозначим соответственно  $l_+$  и  $l_-$ .

Если  $z$  есть любая внутренняя точка отрезка полосы, то верна формула

$$f(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_{l_- + l_+} f(t) \frac{\cos \frac{1}{2}(t-z)}{\sin \frac{1}{2}(t-z)} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{l_- + l_+} f(t) d \lg \sin \frac{1}{2}(t-z).$$

Равенство просто проверяется, если, во-первых, заметить, что интеграл по  $l_- + l_+$  может быть заменен на интеграл по полной границе взятого отрезка полосы, так как интегралы по частям этой границы, лежащим на прямых  $x = -\pi$  и  $x = +\pi$ , ввиду периодичности интегрируемой функции уничтожаются, и, во-вторых, к интегралу по полной границе отрезка полосы применить одно из правил вычисления вычетов.

$$\text{Если в } c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \text{ вместо } f(x) \text{ подста-}$$

вить указанное выше интегральное представление и выполнить очевидное разложение ядра полученного интеграла в ряд, можно построить равенства (1.5.2).

$$c_{-k} = \pi^{-1} e^{-kd} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + id) e^{ikx} dx, \quad k \geq 1,$$

$$c_0 = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x + id) + f(x - id)] dx. \quad (1.5.2)$$

Отсюда вытекает неточная, но достаточная для наших целей оценка  $c_k$ : если обозначить  $M = \max_x \{|f(x + id)|, |f(x - id)|\}$ , то

$$|c_k| \leq e^{-|k|d} 2M, \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (1.5.3)$$

Из нее следует, что при  $k \rightarrow \infty$   $c_k$  будет стремиться к нулю не медленнее, чем члены геометрической прогрессии с знаменателем  $e^{-d}$ . Напомним, что в качестве  $d$  может быть взято любое число, меньшее расстояния от оси  $x$  до ближайшей особой точки  $f(z)$ .

## Глава 2

### ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩИХ ПРАВИЛ ИНТЕГРИРОВАНИЯ К ВЫЧИСЛЕНИЮ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

#### § 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

При выяснении идей, лежащих в основе построения правил вычисления коэффициентов Фурье, мы будем рассматривать интегралы, содержащие тригонометрические множители, следующего общего вида:

$$\begin{aligned} s(p) &= \int_a^b f(x) \sin px dx, \\ c(p) &= \int_a^b f(x) \cos px dx, \\ e(p) &= \int_a^b f(x) e^{-ipx} dx. \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Параметр  $p$  здесь может принимать любые неотрицательные значения.

Интегралы (2.1.1) несущественно для наших целей отличаются от коэффициентов Фурье  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$  (1.3.2) тем, что равенствам (1.3.2) соответствуют значения  $p = k \frac{2\pi}{l}$  при целых  $k$ .

В (2.1.1) можно рассматривать подынтегральные выражения как единые функции, не выделяя множители  $\sin px$ ,  $\cos px$ ,  $e^{-ipx}$ , и к вычислению интегралов применить какие-либо известные правила квадратур: Котеса, Гаусса, Чебышева и т. д. Практически полезным этот путь вычислений, как будет выяснено более подробно далее, может быть лишь для небольших  $p$ .

#### § 2. ПРИМЕНЕНИЕ ПРАВИЛА КОТЕСА ДЛЯ ПОСТОЯННОГО ВЕСА

Рассмотрим первый из интегралов (2.1.1). Полагая весовую функцию равной 1, примем за интегрируемую функцию произведение  $f(x) \sin px$ . В качестве узлов квадратурного правила возьмем равноотстоящие точки  $x_k = a + kh$  ( $h = \frac{1}{n}(b-a)$ ),

$k = 0, 1, 2, \dots, n$ ) и к вычислению интеграла применим правило Котеса для постоянного веса:

$$\begin{aligned} s(p) &= \int_a^b f(x) \sin px dx = \\ &= (b-a) \sum_{k=0}^n B_k^n f(x_k) \sin px_k + R_n. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Численные значения коэффициентов  $B_k^n$  известны [12, гл. 2, § 2] для  $n = 1(1)20$ , но правило (2.2.1) применяется в вычислениях лишь для небольших значений  $n$ .

При  $n = 1$  получается правило трапеций, в котором используются значения функции на концах  $a$  и  $b$  отрезка:

$$\begin{aligned} &\int_a^b f(x) \sin px dx = \\ &= \frac{b-a}{2} [f(a) \sin pa + f(b) \sin pb] + R_1, \end{aligned}$$

$$R_1 = -\frac{(b-a)^3}{12} [f(x) \sin px]''_{\xi}, \quad a \leq \xi \leq b.$$

Точность приведенной простейшей формулы трапеций невелика, и для уменьшения погрешности отрезок интегрирования  $[a, b]$  делят на некоторое число  $m$  частей одинаковой длины  $h = \frac{b-a}{m}$ ,

применяют правило трапеций к каждому частичному отрезку и затем суммируют результаты. Получается общая формула трапеций:

$$\begin{aligned} s(p) &= \int_a^b f(x) \sin px dx = \\ &= \frac{b-a}{m} \left[ \frac{1}{2} f_0 \sin pa + \sum_{k=1}^{m-1} f_k \sin p(a+kh) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} f_m \sin pb \right] + R_1, \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

$$f_k = f(a + kh),$$

$$R_1 = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} [f(x) \sin px]_a^b, \quad a \leq \xi \leq b.$$

При  $n=2$  мы будем иметь простейшее правило парабол, в котором используются значения  $f$  на концах и в средней точке отрезка:

$$\int_a^b f(x) \sin pxdx =$$

$$= \frac{b-a}{6} \left[ f(a) \sin pa + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin p \frac{a+b}{2} + \right.$$

$$\left. + f(b) \sin pb \right] + R_2,$$

$$R_2 = -\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{90} [f(x) \sin px]_a^{(4)},$$

$$a \leq \xi \leq b.$$

Если отрезок  $[a, b]$  разделить на четное число  $2m$  равных частей  $h = \frac{b-a}{2m}$ , объединить частичные отрезки попарно:  $[a, a+2h]$ ,  $[a+2h, a+4h]$ , ..., к каждому вдвоенному участку применить предыдущее равенство и, наконец, результаты сложить, получим общее правило парабол, или правило Симпсона:

$$s(p) = \int_a^b f(x) \sin pxdx =$$

$$= \frac{b-a}{6m} \{ f_0 \sin pa + f_{2m} \sin pb +$$

$$+ 2[f_2 \sin p(a+2h) + f_4 \sin p(a+4h) + \dots] +$$

$$+ 4[f_1 \sin p(a+h) +$$

$$+ f_3 \sin p(a+3h) + \dots] \} + R, \quad (2.2.3)$$

$$R = -\frac{(b-a)^5}{180(2m)^4} [f(x) \sin px]_a^{(4)}, \quad a \leq \xi \leq b.$$

Сходно могут быть построены аналоги других правил Ньютона — Котеса при  $n > 2$ , таких, как правило «трех восьмых», и других. Но так как они редко применяются в вычислениях, их не будем приводить.

Правила вычисления, аналогичные (2.2.2), (2.2.3), могут быть построены для интегралов  $c(p)$  и  $e(p)$ .

Общие правила трапеций:

$$c(p) = \int_a^b f(x) \cos pxdx =$$

$$= \frac{b-a}{m} \left[ \frac{1}{2} f_0 \cos pa + \frac{1}{2} f_m \cos pb + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m-1} f_k \cos p(a+kh) \right] + R_c, \quad (2.2.4)$$

$$e(p) = \int_a^b f(x) e^{-ipx} dx =$$

$$= \frac{b-a}{m} \left[ \frac{1}{2} f_0 e^{-ipa} + \frac{1}{2} f_m e^{-ipb} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m-1} f_k e^{-ip(a+kh)} \right] + R_e.$$

Правила Симпсона:

$$c(p) = \frac{b-a}{6m} \{ f_0 \cos pa +$$

$$+ f_{2m} \cos pb + 2[f_2 \cos p(a+2h) +$$

$$+ f_4 \cos p(a+4h) + \dots] +$$

$$+ 4[f_1 \cos p(a+h) + f_3 \cos p(a+3h) +$$

$$+ \dots] \} + R_c, \quad (2.2.5)$$

$$e(p) = \frac{b-a}{6m} \{ f_0 e^{-ipa} + f_{2m} e^{-ipb} +$$

$$+ 2[f_2 e^{-ip(a+2h)} + f_4 e^{-ip(a+4h)} + \dots] +$$

$$+ 4[f_1 e^{-ip(a+h)} + f_3 e^{-ip(a+3h)} + \dots] \} + R_e.$$

### § 3. ОБ УСЛОВИЯХ ПРИМЕНЕНИЯ ОБЩИХ ПРАВИЛ ЧИСЛЕННЫХ КВАДРАТУР И ПУТИ УВЕЛИЧЕНИЯ ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

В предыдущем параграфе говорилось о возможности применения квадратурных правил Ньютона — Котеса к вычислению интегралов (2.1.1). Эти правила были взяты нами лишь как пример. Совершенно очевидно, что для вычисления таких интегралов могут применяться и другие общие квадратурные правила. Если функция  $f$  не имеет особенностей на  $[a, b]$ , мы можем для вычисления (2.1.1) применить, например, правило Гаусса ко всему отрезку  $[a, b]$  или разделить этот отрезок предварительно на части, как это делалось при построении формулы Симпсона, и затем применить правило Гаусса к вычислению интеграла по частичным отрезкам.

Если  $f$  имеет особенности на  $[a, b]$ , то для вычисления можно воспользоваться, например, квадратурным правилом наивысшей степени точности с надлежаще подобранной весовой функцией, учитывающей особенности  $f$ .

В связи с использованием в вычислениях общих квадратурных правил необходимо заметить, что применение их может иметь лишь ограниченное значение. Для простоты изложения будем рассматривать случай, когда  $f$  не имеет особенностей. Все указанные правила основаны на приближении функций  $f(x)\cos px$ ,  $f(x)\sin px$  алгебраическим или тригонометрическим многочленом. Если  $p$  есть большое число, множители  $\sin px$ ,  $\cos px$  будут быстро колеблющимися, и чтобы получить многочлен или функцию, составленную из кусков многочленов, достаточно точно приближающую произведения  $f\sin px$ ,  $f\cos px$ , необходимо будет даже при гладкой функции  $f$  на отрезке интегрирования  $[a, b]$  взять большое число узлов и вычисления вести, следовательно, с большим числом значений функции  $f$ .

Поэтому общие квадратурные правила мо-

гут практически применяться к вычислению интегралов (2.1.1) только для небольших  $p$ , и в соответствии с этим при помощи таких правил могут быть найдены коэффициенты Фурье  $a_k$  и  $b_k$  небольшого числа первых номеров  $k$ . Для вычисления же  $a_k$  и  $b_k$  при больших  $k$  они почти не применяются.

Чтобы построить правила вычислений, которые были бы пригодны для нахождения интегралов (2.1.1) в широких границах изменения параметра  $p$ , необходимо было заранее учесть колебания множителей  $\sin px$ ,  $\cos px$ ,  $e^{-ipx}$ , принимая их, например, за весовые функции. Кроме того, эти правила желательно было построить так, чтобы они оставляли  $p$  произвольным, т. е. содержали бы его в буквенном виде, и были бы особенно удобны для расчетов при больших значениях  $p$ . С такого рода правилами мы ознакомимся в гл. 4.

## Глава 3

### ПРИМЕНЕНИЕ ПРАВИЛ НАИВЫСШЕЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ

Правила вычисления коэффициентов Фурье, которые будут даны в этой главе, ввиду их простоты широко применяются на практике. К ним можно прийти многими путями, и наиболее часто их получают исходя из задачи наилучшего приближения (в смысле среднего квадратичного отклонения) периодической функции тригонометрическим многочленом. Мы предпочтем их получить, отправляясь от задачи вычисления коэффициентов Фурье при помощи правил приближенных квадратур.

#### § 1. ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ О ФУНКЦИИ $f$

Будем считать, что функция  $f$  задана на отрезке  $[0, 2\pi]$  и коэффициенты Фурье взяты в виде

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx. \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Предположим, что  $f$  имеет непрерывные производные до порядка  $m$  включительно. Выполним  $2\pi$ -периодическое продолжение  $f$  на всю ось с отрезка  $0 \leq x < 2\pi$ . Чтобы построенная так периодическая функция, за которой мы сохраним то же обозначение  $f$ , была  $m$ -кратно непрерывно дифференцируемой, необходимо и достаточно выполнение условий

$$f^{(i)}(2\pi) = f^{(i)}(0), \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (3.1.2)$$

Эти равенства в последующих параграфах главы предполагаются выполненными. Кроме того, порядок гладкости  $m$  функции  $f$  мы будем считать достаточно большим.

В указанных условиях за аппарат для приближения  $f$  естественно избрать тригонометрические многочлены и в основу вычисления интегралов (3.1.1) положить правила квадратур, имеющие наивысшую тригонометрическую степень точности, которые дают точный результат для любых многочленов максимально высокой степени.

Так как теория таких правил не общеизвестна, мы начнем с указания некоторых результатов этой теории. Они будут нам полезны в изложении.

#### § 2. КВАДРАТУРНЫЕ ПРАВИЛА НАИВЫСШЕЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ

Будем рассматривать следующее приближенное правило интегрирования:

$$\int_0^{2\pi} p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (3.2.1)$$

где  $f$  есть произвольная достаточно гладкая  $2\pi$ -периодическая функция. Вес  $p(x)$  может быть любой абсолютно интегрируемой функцией и выделяется из функции  $F(x) = p(x)f(x)$ , стоящей под интегралом, с целью заранее учесть те или иные ее особенности.

Одновременно с (3.2.1) возьмем тригонометрические многочлены

$$T_m(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Правило (3.2.1) содержит  $2n$  параметров  $A_k$  и  $x_k$ , выбором которых стремятся распорядиться так, чтобы равенство выполнялось точно, когда  $f$  есть любой тригонометрический многочлен возможно высокой степени.

Можно показать, что верны следующие утверждения:

1. Если вес  $p(x) \geq 0$  и не эквивалентен нулю \*, то ни при каких  $A_k$  и  $x_k$  равенство (3.2.1) не может быть точным для всех тригонометрических многочленов  $T_n(x)$  степени  $n$ . Поэтому при неотрицательном весе  $p(x)$  тригонометрическая степень точности правила (3.2.1) не может быть больше  $n-1$ .

2. Требование, чтобы равенство (3.2.1) выполнялось точно для всех многочленов  $T_{n-1}(x)$  степени  $n-1$ , равносильно выполнению  $2n-1$  условий:

$$\int_0^{2\pi} p(x) \cos jx dx = \sum_{k=1}^n A_k \cos jx_k,$$

$$j = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$\int_0^{2\pi} p(x) \sin jx dx = \sum_{k=1}^n A_k \sin jx_k,$$

$$j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Число условий здесь на единицу меньше числа параметров формулы (3.2.1), и можно надеяться, что высказанное требование может быть удовлетворено. Можно ожидать также, что один из параметров  $A_k$ ,  $x_k$  останется произвольным. Это подтверждается в случае неотрицательного веса и доказывается, что при  $p(x) \geq 0$  коэффициенты  $A_k$  и узлы  $x_k$  всегда могут быть выбраны так, чтобы равенство (3.2.1) выполнялось точно для любого многочлена  $T_{n-1}(x)$ , при этом правило будет содержать один произвольный параметр. Таким образом, для неотрицательного веса  $p(x)$  наивысшая степень точности (3.2.1) равна  $n-1$ . Она может быть достигнута многими способами, и множество правил, имеющих такую степень точности, зависит от одного произвольно-го параметра.

3. За оставшийся произвольным параметр можно принять один из узлов, скажем  $x_1$ . Выбором его можно пытаться улучшить правило (3.2.1) и сделать его точным для многочленов степени  $n$  частного вида

$$T_n(x) = T_{n-1}(x) + C \sin(nx + \delta),$$

где начальная фаза  $\delta$  старшей гармоники фиксирована, а ее амплитуда  $C$  произвольна.

Исследования показали, что этого достигнуть можно, вообще говоря, двумя способами, и существуют два правила (3.2.1), точных для

многочленов степени  $n$  указанного частного вида.

Необходимо отметить, что каждой весовой функции  $p(x)$  будут отвечать свои параметры  $A_k$  и  $x_k$  правила наивысшей степени точности и при изменении  $p(x)$  будут изменяться если не все  $A_k$  и  $x_k$ , то по меньшей мере некоторые из них.

В задаче вычисления коэффициентов Фурье (3.1.1) особое значение имеет случай постоянной весовой функции. Если  $p(x) \equiv 1$ , то при любом  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha < 2\pi/n$ ) для всяких многочленов степени  $n-1$  будет точно выполняться простейшее правило прямоугольников с равноотстоящими узлами и равными коэффициентами:

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx \approx \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\alpha + \frac{2k\pi}{n}\right). \quad (3.2.2)$$

$$\text{Если положить } \alpha = 0, x_k = \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0,$$

$1, \dots, n-1$ ), или  $\alpha = \pi/n, x_k = \frac{\pi}{n}(2k+1)$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ), равенство будет точно выполняться для всех многочленов степени  $n$  вида  $T_n(x) = T_{n-1}(x) + C \sin nx$ .

Если же мы хотим сделать правило (3.2.2) точным для всех многочленов вида  $T_n(x) = T_{n-1}(x) + C \cos nx$ , достаточно считать  $\alpha = \frac{\pi}{2n}$ ,

$$x_k = \frac{\pi}{2n}(4k+1) \text{ или } \alpha = \frac{3\pi}{2n}, x_k = \frac{\pi}{2n} \times (4k+3) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

### § 3. ПРИМЕНЕНИЕ К ВЫЧИСЛЕНИЮ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

При применении правила квадратуры наивысшей тригонометрической степени точности к вычислению коэффициентов Фурье (3.1.1) можно принять множители  $\cos kx$  и  $\sin kx$  за весовые функции и для каждого из коэффициентов построить свое правило вычислений. Например, можно вычислить все коэффициенты с одной и той же степенью точности, или, так как с увеличением номера  $k$  коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$ , вообще говоря, убывают, можно установить какой-либо закон уменьшения степени точности вместе с ростом номера  $k$ .

Заметим попутно, что для каждого из весов  $\cos kx$ ,  $\sin kx$  ( $k=1,2,\dots$ ), несмотря на их знакопеременность, могут быть, как показывают вычисления, построены правила квадратур с  $n$  узлами, точные всякий раз, когда  $f$  есть произвольный тригонометрический многочлен степени  $n-1$ . Каждое из таких правил будет за-

\* Последнее равносильно условию  $\int_0^{2\pi} |p(x)| dx > 0$ .

висеть от одного произвольного параметра, и простейшие правила такого вида легко строятся на основании равенства (3.2.2).

Хотя указанный путь вычислений, принципиально говоря, возможен, эти правила, по-видимому, не могут получить распространения в вычислениях, так как каждый из коэффициентов Фурье имеет свою весовую функцию, и поэтому квадратурная формула для каждого коэффициента будет иметь свои узлы и он должен вычисляться со своими значениями функции  $f$ . Число значений  $f$ , необходимых для вычислений, будет весьма большим.

Чтобы вести расчеты с наименьшим числом значений  $f$ , нужно избрать единую весовую функцию для всех интегралов (3.1.1). Естественно было остановиться на постоянном весе и присоединить множители  $\cos kx$  и  $\sin kx$  к функции  $f$ .

Соответствующее постоянному весу правило наивысшей степени имеет форму (3.2.2) и содержит произвольный параметр. Так как при сделанных предположениях об  $f$  нет никаких оснований отдать предпочтение какому-либо значению  $\alpha$  перед другими, параметр избрали исходя из соображений простоты, положили  $\alpha=0$  и правило (3.2.2) взяли в форме

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx \approx \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi}{n} k\right). \quad (3.3.1)$$

Применение этого правила к  $a_m$  и  $b_m$  дает следующие приближенные выражения:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \approx \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi}{n} k\right), \\ a_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos mx f(x) dx \approx \\ &\approx \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi}{n} k\right) \cos m \frac{2\pi}{n} k, \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin mx f(x) dx \approx \\ &\approx \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi}{n} k\right) \sin m \frac{2\pi}{n} k. \end{aligned}$$

Чтобы выяснить, какие коэффициенты целесообразно вычислять при помощи равенств (3.3.2), обратим внимание на то, как теряется степень точности с ростом  $m$ .

Правило (3.3.1) верно для всякого тригонометрического многочлена степени  $n-1$ . Поэтому  $a_0$  будет найден точно, когда  $f$  есть многочлен степени  $n-1$ . При нахождении  $a_1$  и  $b_1$  интегрируются произведения  $f(x) \cos x$  и  $f(x) \sin x$ . Оба коэффициента будут найдены без ошибок, когда  $f$  будет многочленом степени  $n-2$ .  $a_2$  и  $b_2$  найдутся точно, когда  $f$  есть многочлен степени  $n-3$  и т. д.  $a_m$  и  $b_m$  будут найдены без ошибки, когда  $f$  есть многочлен степени  $n-m-1$ . Коэффициенты  $a_{n-2}$ ,  $b_{n-2}$  могли бы быть найдены без погрешностей, наверное, только в том случае, когда  $f$  — линейный тригонометрический многочлен.  $a_{n-2}$  и  $b_{n-2}$  найдутся поэтому, вообще говоря, с низкой точностью и их, вероятно, целесообразно вычислять при помощи (3.3.2).

Возможные значения  $m$  принято ограничивать следующим требованием: в (3.3.2) номеру  $m$  допустимо придавать значения  $1, 2, \dots, p$ , если при помощи этих равенств будут точно находиться коэффициенты любого тригонометрического многочлена степени  $p$ . Это налагает на  $p$  ограничение  $2p \leq n-1$  и, следовательно, можно считать  $p$  равным целой части  $(n-1)/2$ .

В вычислениях число узлов  $n$  бывает обычно четным. Мы остановимся только на этом случае. Тогда  $p = \frac{n}{2} - 1$  и  $m = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1$ .

Рассматривают еще коэффициенты  $a_{n/2}$  и  $b_{n/2}$ , вычисляя правые части равенств (3.3.2) при  $m = n/2$ . Если  $f = a_{n/2} \cos \frac{n}{2} x$ , то

$$\begin{aligned} \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi}{n} k\right) \cos\left(\frac{n}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} k\right) &= \\ &= \frac{2}{n} a_{n/2} \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2 k\pi = 2a_{n/2}. \end{aligned}$$

Отсюда можно найти  $a_{n/2}$ . Если же  $f = b_{n/2} \sin \frac{n}{2} x$ ,

то

$$\begin{aligned} \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi}{n} k\right) \sin\left(\frac{n}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} k\right) &= \\ &= \frac{2}{n} b_{n/2} \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2 k\pi = 0. \end{aligned}$$

Это дает для  $b_{n/2}$  всегда значение нуль, что нельзя считать приемлемым. Поэтому равенства (3.3.2) не применяют к вычислению  $b_{n/2}$  и вы-



числительные правила (3.3.2) для нахождения коэффициентов Фурье при  $n$  четном берутся в виде:

$$\begin{aligned}
 a_0 &\approx \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi}{n} k\right), \\
 a_m &\approx \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi}{n} k\right) \cos \frac{2\pi}{n} mk, \\
 b_m &\approx \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi}{n} k\right) \sin \frac{2\pi}{n} mk, \\
 m &= 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1, \\
 a_{n/2} &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi}{n} k\right) \cos \left(\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n}{2} k\right) = \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f\left(\frac{2\pi}{n} k\right).
 \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

#### § 4. СХЕМЫ ГРУППИРОВАНИЯ И ШАБЛОНЫ

Число  $n$  считается четным. В формулах (3.3.3) для вычисления коэффициентов Фурье многие значения синусов и косинусов будут одинаковы по абсолютной величине. Отсюда вытекает возможность группировать вместе значения функции, умножая их на одно и то же значение синуса или косинуса при определении данного коэффициента Фурье. Схем группирования предложено много. Группирование по выбранной схеме можно производить механически, применяя шаблоны. Для этого составляют таблицу из произведений значений функции на все синусы или косинусы, встречающиеся в формулах. Затем на таблицу накладывают шаблон, соответствующий некоторому коэффициенту Фурье  $a_k$  или  $b_k$ . Шаблоны изготавливают обычно из плотной бумаги и в них проделывают отверстия, через которые видны на таблице нужные для подсчета  $a_k$  или  $b_k$  числа. Рядом с отверстием указывается знак, с которым надлежит суммировать эти значения. Наиболее распространенными в литературе и на практике являются схемы группирования Рунге.

Введем обозначения  $f\left(\frac{2\pi}{n} k\right) = y_k$  ( $k=0, 1, \dots, n-1$ ),  $\frac{2\pi}{n} = \alpha$  и рассмотрим подробно схему Рунге для  $n = 12$ .

Формулы (3.3.3) для двенадцати значений функции  $y_0, y_1, \dots, y_{11}$ , соответствующих значениям аргумента  $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}$ , будут следующими:

$$\begin{aligned}
 6a_0 &= y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + \\
 &\quad + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11}, \\
 6a_k &= y_0 \cos 0k\alpha + y_1 \cos 1k\alpha + \\
 &\quad + y_2 \cos 2k\alpha + \dots + y_{11} \cos 11k\alpha, \\
 6b_k &= y_1 \sin k\alpha + y_2 \sin 2k\alpha + \\
 &\quad + \dots + y_{11} \sin 11k\alpha, \\
 k &= 1, 2, 3, 4, 5,
 \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

где  $\alpha = \pi/6$ , или после применения формул приведения тригонометрических функций:

$$\begin{aligned}
 6a_0 &= y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + \\
 &\quad + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11}, \\
 6a_1 &= (y_2 + y_{10} - y_4 - y_8) \sin \frac{\pi}{6} + \\
 &\quad + (y_1 + y_{11} - y_5 - y_7) \sin \frac{\pi}{3} + (y_0 - y_6), \\
 6b_1 &= (y_1 + y_5 - y_7 - y_{11}) \sin \frac{\pi}{6} + \\
 &\quad + (y_2 + y_4 - y_8 - y_{10}) \sin \frac{\pi}{3} + (y_3 - y_9), \\
 6a_2 &= (y_1 + y_5 + y_7 + y_{11} - y_2 - y_4 - \\
 &\quad - y_8 - y_{10}) \sin \frac{\pi}{6} + (y_0 + y_6 - y_3 - y_9), \\
 6b_2 &= (y_1 + y_2 + y_7 + y_8 - \\
 &\quad - y_4 - y_5 - y_{10} - y_{11}) \sin \frac{\pi}{3}, \\
 6a_3 &= y_0 + y_4 + y_8 - y_2 - y_6 - y_{10}, \\
 6b_3 &= y_1 + y_5 + y_9 - y_3 - y_7 - y_{11}, \\
 6a_4 &= (y_0 + y_3 + y_6 + y_9) - (y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + \\
 &\quad + y_7 + y_8 + y_{10} + y_{11}) \sin \frac{\pi}{6},
 \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

$$6b_4 = (y_1 + y_4 + y_7 + y_{10} - y_2 - y_5 - y_8 - y_{11}) \sin \frac{\pi}{3},$$

$$6a_5 = (y_2 + y_{10} - y_4 - y_8) \sin \frac{\pi}{6} - (y_1 + y_{11} - y_3 - y_7) \sin \frac{\pi}{3} + (y_0 - y_9),$$

$$6b_5 = (y_1 + y_5 - y_7 - y_{11}) \sin \frac{\pi}{6} - (y_2 + y_4 - y_8 - y_{10}) \sin \frac{\pi}{3} + (y_3 - y_9),$$

$$12a_6 = y_0 - y_1 + y_2 - y_3 + y_4 - y_5 + y_6 - y_7 + y_8 - y_9 + y_{10} - y_{11}.$$

Схема Рунге состоит в следующем. Над каждой парой величин, подписанных одна под другой в виде табличек, производят сложение и вычитание:

| ординаты |       |          |          |       |       |       |       |
|----------|-------|----------|----------|-------|-------|-------|-------|
|          | $y_0$ | $y_1$    | $y_2$    | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ |
|          |       | $y_{11}$ | $y_{10}$ | $y_9$ | $y_8$ | $y_7$ |       |
| суммы    | $u_0$ | $u_1$    | $u_2$    | $u_3$ | $u_4$ | $u_5$ | $u_6$ |
| разности |       | $v_1$    | $v_2$    | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ |       |

|          | суммы |       |       |       | разности   |            |            |
|----------|-------|-------|-------|-------|------------|------------|------------|
|          | $u_0$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $v_1$      | $v_2$      | $v_3$      |
|          | $u_6$ | $u_5$ | $u_4$ |       | $v_5$      | $v_4$      |            |
| суммы    | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ |
| разности | $d_0$ | $d_1$ | $d_2$ |       | $\delta_1$ | $\delta_2$ |            |

Величины  $s$ ,  $d$ ,  $\sigma$ ,  $\delta$  дают возможность получить удобные формулы для вычисления коэффициентов Фурье:

$$6a_0 = s_0 + s_1 + s_2 + s_3,$$

$$6a_1 = d_0 + d_1 \sin \frac{\pi}{3} + d_2 \sin \frac{\pi}{6},$$

$$6b_1 = \sigma_1 \sin \frac{\pi}{6} + \sigma_2 \sin \frac{\pi}{3} + \sigma_3,$$

$$6a_2 = (s_0 - s_3) + (s_1 - s_2) \sin \frac{\pi}{6},$$

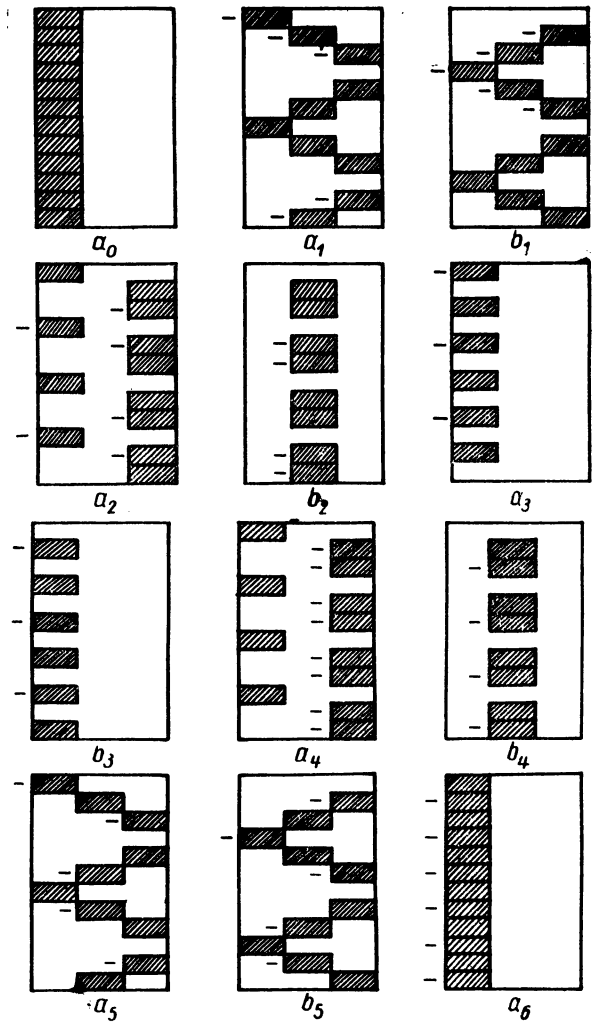


Рис. 1

$$6b_2 = (\delta_1 + \delta_2) \sin \frac{\pi}{3},$$

$$6a_3 = d_0 - d_2,$$

$$6b_3 = \sigma_1 - \sigma_3,$$

$$6a_4 = (s_0 + s_3) - (s_1 + s_2) \sin \frac{\pi}{6}, \quad (3.4.3)$$

$$6b_4 = (\delta_1 - \delta_2) \sin \frac{\pi}{3},$$

$$6a_5 = d_0 - d_1 \sin \frac{\pi}{3} + d_2 \sin \frac{\pi}{6},$$

$$6b_5 = \sigma_1 \sin \frac{\pi}{6} - \sigma_2 \sin \frac{\pi}{3} + \sigma_3,$$

$$12a_6 = s_0 - s_1 + s_2 - s_3.$$

Формулы остаются в силе, когда функция  $f(x)$  имеет произвольный период  $2l$ . Для опреде-

ления коэффициентов Фурье достаточно задать значения функции лишь в нужном числе равноотстоящих точек.

Для того чтобы вычислить коэффициенты Фурье по шаблонам, составляется таблица значений функций с изменением аргумента, равным  $\frac{2\pi}{n}$  (при  $n = 12$  шаг равен  $\frac{\pi}{6}$ ). Затем записываются еще три столбца значений функций, домноженных на числа  $\frac{2}{n}$ ,  $\frac{2}{n} \sin \frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{2}{n} \sin \frac{\pi}{6}$ , где  $n = 12$ . Шаблоны даны на рис. 1.

Схемы группирования Рунге для  $n = 24$  и  $n = 36$  состоят в следующем:

ординаты

|          |           |           |         |                 |             |                     |                     |                   |
|----------|-----------|-----------|---------|-----------------|-------------|---------------------|---------------------|-------------------|
|          | $y_0$     | $y_1$     | $y_2$   | $\dots$         | $y_\lambda$ | $\dots$             | $y_{\frac{n}{2}-1}$ | $y_{\frac{n}{2}}$ |
|          | $y_{n-1}$ | $y_{n-2}$ | $\dots$ | $y_{n-\lambda}$ | $\dots$     | $y_{\frac{n}{2}+1}$ | $y_{\frac{n}{2}}$   |                   |
| суммы    | $u_0$     | $u_1$     | $u_2$   | $\dots$         | $u_\lambda$ | $\dots$             | $u_{\frac{n}{2}-1}$ | $u_{\frac{n}{2}}$ |
| разности | $v_1$     | $v_2$     | $\dots$ | $v_\lambda$     | $\dots$     | $v_{\frac{n}{2}-1}$ | $v_{\frac{n}{2}}$   |                   |

| суммы    |                   |                     |         |                     |                   | разности            |                     |         |                          |                        |  |
|----------|-------------------|---------------------|---------|---------------------|-------------------|---------------------|---------------------|---------|--------------------------|------------------------|--|
|          | $u_0$             | $u_1$               | $\dots$ | $u_{\frac{n}{4}-1}$ | $u_{\frac{n}{4}}$ | $v_1$               | $v_2$               | $\dots$ | $v_{\frac{n}{4}-1}$      | $v_{\frac{n}{4}}$      |  |
|          | $u_{\frac{n}{2}}$ | $u_{\frac{n}{2}-1}$ | $\dots$ | $u_{\frac{n}{4}+1}$ |                   | $v_{\frac{n}{2}-1}$ | $v_{\frac{n}{2}-2}$ | $\dots$ | $v_{\frac{n}{4}+1}$      |                        |  |
| суммы    | $s_0$             | $s_1$               | $\dots$ | $s_{\frac{n}{4}-1}$ | $s_{\frac{n}{4}}$ | $\sigma_1$          | $\sigma_2$          | $\dots$ | $\sigma_{\frac{n}{4}-1}$ | $\sigma_{\frac{n}{4}}$ |  |
| разности | $d_0$             | $d_1$               | $\dots$ | $d_{\frac{n}{4}-1}$ |                   | $\delta_1$          | $\delta_2$          | $\dots$ | $\delta_{\frac{n}{4}-1}$ |                        |  |

В этих обозначениях формулы можно записать в таком виде:

$$a_0 = \frac{2}{n} \sum_{l=0}^{n/4} s_l, \quad a_{2j} = \frac{2}{n} \sum_{l=0}^{n/4} s_l \cos 2jl \frac{2\pi}{n},$$

$$a_{2j-1} = \frac{2}{n} \sum_{l=0}^{n/4-1} d_l \cos (2j-1)l \frac{2\pi}{n},$$

$$b_{2j} = \frac{2}{n} \sum_{l=1}^{n/4-1} \delta_l \sin 2jl \frac{2\pi}{n},$$

$$b_{2j-1} = \frac{2}{n} \sum_{l=1}^{n/4} \sigma_l \sin (2j-1)l \frac{2\pi}{n},$$

$$a_{n/2} = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n/4} (-1)^l s_l.$$

Для использования шаблонов при вычислении коэффициентов Фурье составляем таблицу значений функции, взяв аргумент с интервалами  $\frac{2\pi}{n}$  ( $n = 24$ ,  $\frac{2\pi}{n} = 15^\circ$ ;  $n = 36$ ,  $\frac{2\pi}{n} = 10^\circ$ ).

Затем последовательно выписываем столбцы значений функции, домноженных на  $\frac{2}{n}$ ,  $\frac{2}{n} \cos \frac{2\pi}{n}$ ,  $\frac{2}{n} \cos 2 \frac{2\pi}{n}$ , ...,  $\frac{2}{n} \cos \left( \frac{n}{4} - 1 \right) \frac{2\pi}{n}$ .

Таблица для  $n = 24$

| $\varphi$ , град | $y$ | $\frac{1}{12} y$ | $\frac{1}{12} y \cos 15^\circ$ | $\frac{1}{12} y \cos 30^\circ$ |
|------------------|-----|------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 0                |     |                  |                                |                                |
| 15               |     |                  |                                |                                |
| 30               |     |                  |                                |                                |
| $\vdots$         |     |                  |                                |                                |
| 345              |     |                  |                                |                                |

| $\varphi$ , град | $\frac{1}{12} y \cos 45^\circ$ | $\frac{1}{12} y \cos 60^\circ$ | $\frac{1}{12} y \cos 75^\circ$ |
|------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 0                |                                |                                |                                |
| 15               |                                |                                |                                |
| 30               |                                |                                |                                |
| $\vdots$         |                                |                                |                                |
| 345              |                                |                                |                                |

Шаблоны для вычисления при  $n = 24$  даны на рис. 2—7.

Таблица для  $n = 36$

| $\varphi$ , град | $y$ | $\frac{1}{18} y$ | $\frac{1}{18} y \cos 10^\circ$ | $\frac{1}{18} y \cos 20^\circ$ | $\frac{1}{18} y \cos 30^\circ$ |
|------------------|-----|------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 0                |     |                  |                                |                                |                                |
| 10               |     |                  |                                |                                |                                |
| 20               |     |                  |                                |                                |                                |
| $\vdots$         |     |                  |                                |                                |                                |
| 350              |     |                  |                                |                                |                                |

| $\varphi$ , град | $\frac{1}{18} y \cos 40^\circ$ | $\frac{1}{18} y \cos 50^\circ$ | $\frac{1}{18} y \cos 60^\circ$ | $\frac{1}{18} y \cos 70^\circ$ | $\frac{1}{18} y \cos 80^\circ$ |
|------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 0                |                                |                                |                                |                                |                                |
| 10               |                                |                                |                                |                                |                                |
| 20               |                                |                                |                                |                                |                                |
| $\vdots$         |                                |                                |                                |                                |                                |
| 350              |                                |                                |                                |                                |                                |

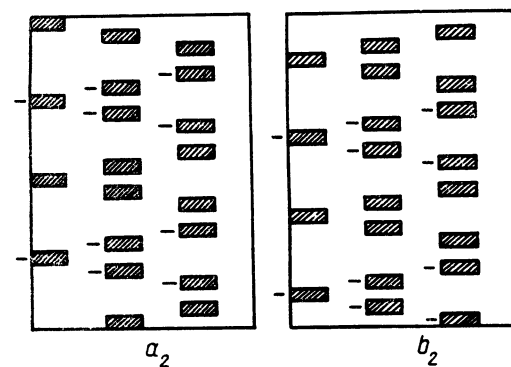
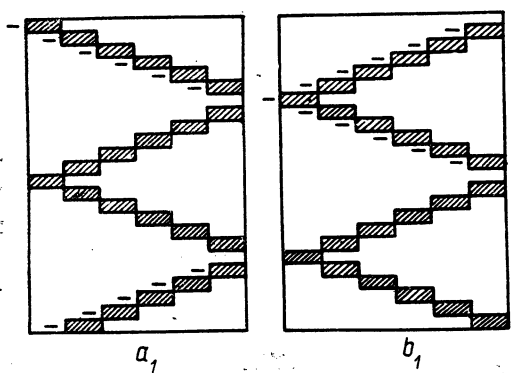


Рис. 2

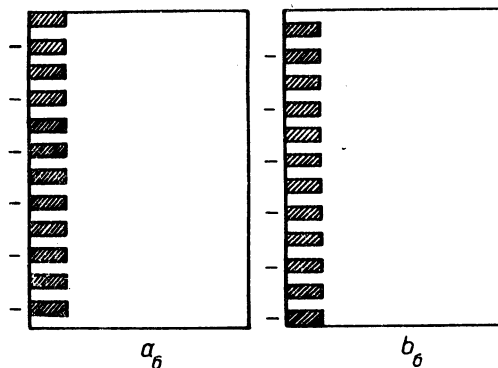
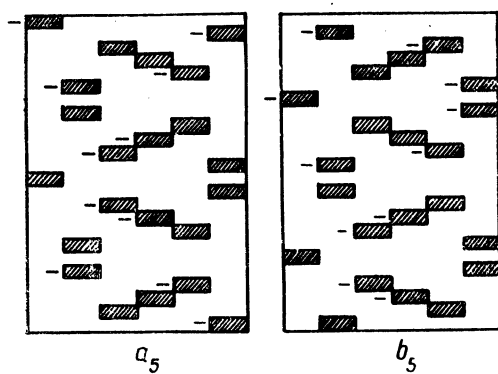


Рис. 4

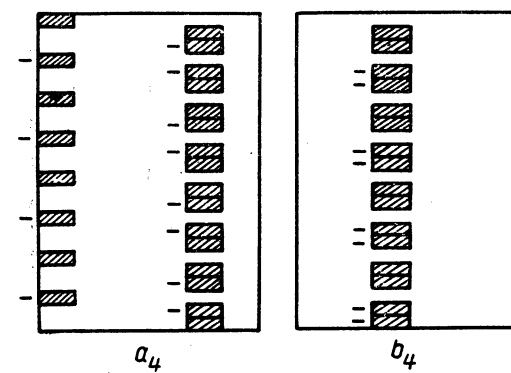
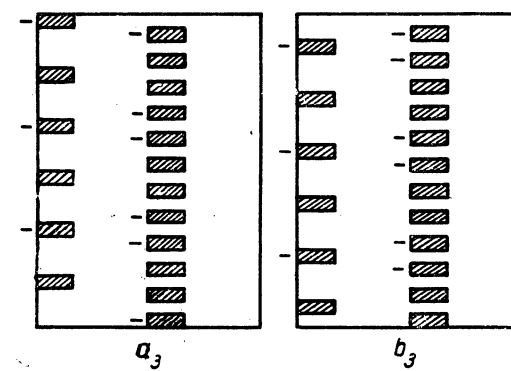


Рис. 3

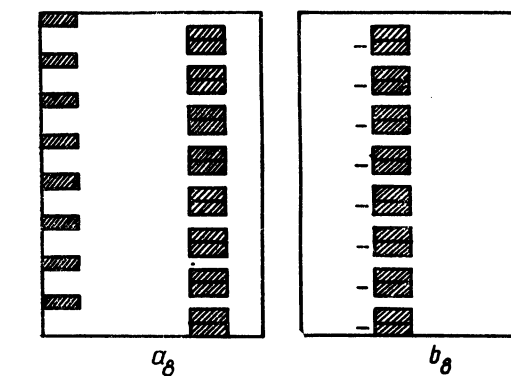
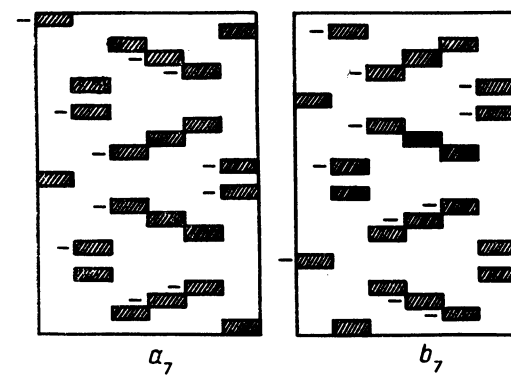


Рис. 5

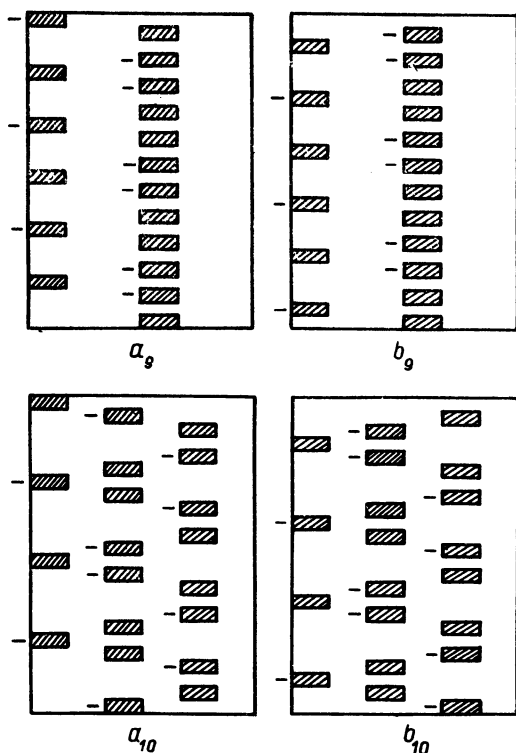


Рис. 6

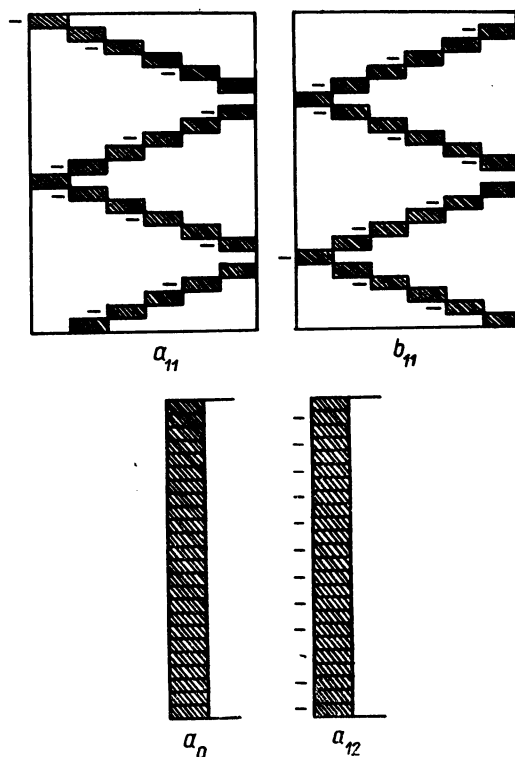


Рис. 7

Шаблоны для вычисления при  $n = 36$  даны в [14, 15, 23].

Имеется ряд других схем группирования и ряд других наборов шаблонов для вычисления коэффициентов Фурье по формулам (3.3.3). Разработаны разнообразные графические и графо-аналитические методы гармонического анализа кривых, а также существуют разнообразные конструкции особых приборов — гармонических анализаторов.

#### § 5. КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С ПРОИЗВОДНЫМИ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В вычислительной практике используются также, хотя и редко, квадратурные формулы для периодических функций, содержащие не только значения функции в некоторых точках отрезка интегрирования, но и значения производных от нее:

$$\int_0^{2\pi} p(x) f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} A_{i,j}^{(i)} f^{(j)}(x_i).$$

Такие формулы можно, например, получить, интегрируя тригонометрический интерполяционный многочлен типа Лагранжа — Эрмита для периодической функции  $f(x)$  и ее производных некоторого порядка, заданных в некоторых точках  $x_i$  отрезка  $[0, 2\pi]$ . Этот многочлен представим в виде

$$T(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} l_{i,j}(x) f^{(j)}(x_i),$$

где  $l_{i,j}(x)$  — тригонометрические многочлены, удовлетворяющие условиям  $l_{i,j}(x_k) = 0$ ,  $k \neq i$ ,  $l_{i,j}(x_i) = 1$ .

В [77] приводятся квадратурные формулы такого рода, в которых функции и ее производные до порядка  $r$  задаются только в двух точках — концах отрезка интегрирования.

## Глава 4

### МЕТОДЫ, ОСНОВАННЫЕ НА АЛГЕБРАИЧЕСКОМ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ

Пусть  $f$  задана на отрезке  $[0, 2\pi]$  и ее коэффициенты Фурье взяты в виде (3.1.1). Если  $f$  обладает высоким порядком гладкости на  $[0, 2\pi]$ , но для нее не выполняются условия (3.1.2) возможности гладкого  $2\pi$ -периодического продолжения ее, то приближение функции  $f$  тригонометрическими многочленами может быть связано со значительной погрешностью. Правила (3.3.3) вычисления коэффициентов Фурье, поскольку они основаны на таком приближении, могут потребовать для достижения хорошей точности большого числа значений  $f$  и большой вычислительной работы.

В этих условиях часто прибегают к алгебраическому интерполированию  $f$ , так как если  $f$  достаточно гладкая на  $[0, 2\pi]$ , оно может дать высокую точность при замене  $f$  на алгебраический многочлен и не требует возможности гладкого периодического продолжения  $f$ .

#### § 1. ОБЩИЙ ВИД ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛА С ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ МНОЖИТЕЛЯМИ

Пусть вычислению подлежат интегралы (2.1.1), содержащие произвольный параметр  $p$  и близкие по своему виду к коэффициентам Фурье. Для определенности записи будем иметь в виду первый из этих интегралов  $s(p) = \int_a^b f(x) \sin px \, dx$ .

Возьмем на  $[a, b]$   $n+1$  произвольно расположенных узлов  $x_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ;  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ ) и выполним интерполирование  $f$  по значениям  $f(x_k) = f_k$  при помощи алгебраического многочлена  $P(x)$  степени не выше  $n$ :

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} f_k = \sum_{k=0}^n l_k(x) f_k,$$

$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n),$$

$$f(x) = P(x) + r(x).$$

Заменяем теперь  $f$  в интеграле  $s(p)$  ее значением  $\hat{f} = P + r$ :

$$s(p) = \int_a^b f(x) \sin px \, dx = \sum_{k=0}^n A_k f_k + R, \quad (4.1.1)$$

$$A_k = \int_a^b l_k(x) \sin px \, dx,$$

$$R = \int_a^b r(x) \sin px \, dx.$$

Отбрасывая здесь остаток  $R$ , получим правило приближенного вычисления  $s(p)$ . Коэффициенты  $A_k$  не зависят от функции  $f$  и определяются узлами  $x_k$  и параметром  $p$ . Так как  $l_k(x)$  есть многочлен степени  $n$ ,  $A_k$  находятся легко в конечном виде и их можно представить в удобной для вычислений форме. Отбросим не имеющий сейчас значения индекс  $k$  и запишем интересующий нас интеграл в форме  $A = \int_a^b l(x) \sin px \, dx$ .

Путем интегрирования по частям можно получить следующее выражение для  $A$ :

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b l(x) \sin px \, dx = \sin p \frac{b+a}{2} \times \\ &\times \left\{ \left[ \frac{l(b)+l(a)}{p} - \frac{l''(b)+l''(a)}{p^3} + \dots \right] \times \right. \\ &\quad \times \sin p \frac{b-a}{2} + \left[ \frac{l'(b)-l'(a)}{p^2} - \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{l'''(b)-l'''(a)}{p^4} + \dots \right] \cos p \frac{b-a}{2} \right\} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\cos p \frac{b+a}{2} \left\{ \left[ \frac{l(b)-l(a)}{p} - \frac{l''(b)-l''(a)}{p^3} + \dots \right] \cos p \frac{b-a}{2} - \right. \\
& \quad \left. - \left[ \frac{l'(b)+l'(a)}{p^2} - \frac{l'''(b)+l'''(a)}{p^4} + \dots \right] \sin p \frac{b-a}{2} \right\}. \quad (4.1.2)
\end{aligned}$$

Для вычисления  $A$  оно требует прежде всего нахождения величин  $l^{(j)}(a)$ ,  $l^{(j)}(b)$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ). Для каждого коэффициента  $A_k$  они будут своими и будут зависеть исключительно от выбора узлов  $x_k$ . Для некоторых стандартных отрезков интегрирования  $[a, b]$  и систем узлов  $x_k$  они могут быть заранее табулированы. Что же касается параметра  $p$ , то он стоит в знаменателях и отделен от узлов  $x_k$ , что удобно для вычислений  $A_k$  при многих значениях  $p$ . Сходные выражения имеют интегралы  $\int_a^b l(x) \cos px \, dx$  и  $\int_a^b l(x) e^{ipx} \, dx$ :

$$\begin{aligned}
& \int_a^b l(x) \cos px \, dx = \cos p \frac{b+a}{2} \times \\
& \times \left\{ \left[ \frac{l(b)+l(a)}{p} - \frac{l''(b)+l''(a)}{p^3} + \dots \right] \times \right. \\
& \quad \times \sin p \frac{b-a}{2} + \left[ \frac{l'(b)-l'(a)}{p^2} - \frac{l'''(b)-l'''(a)}{p^4} + \dots \right] \cos p \frac{b-a}{2} \Big\} + \\
& + \sin p \frac{b+a}{2} \left\{ \left[ \frac{l(b)-l(a)}{p} - \frac{l''(b)-l''(a)}{p^3} + \dots \right] \cos p \frac{b-a}{2} - \right. \\
& \quad \left. - \left[ \frac{l'(b)+l'(a)}{p^2} - \frac{l'''(b)+l'''(a)}{p^4} + \dots \right] \sin p \frac{b-a}{2} \right\}; \quad (4.1.3) \\
& \int_a^b l(x) e^{ipx} \, dx = e^{ip \frac{b+a}{2}} \left\{ \left[ -\frac{il(b)}{p} + \frac{l'(b)}{p^2} + \frac{il''(b)}{p^3} - \frac{l'''(b)}{p^4} + \dots \right] e^{ip \frac{b-a}{2}} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ -\frac{il(a)}{p} + \frac{l'(a)}{p^2} + \frac{il''(a)}{p^3} - \frac{l'''(a)}{p^4} + \dots \right] e^{-ip \frac{b-a}{2}} \Big\}. \quad (4.1.4)
\end{aligned}$$

## § 2. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С РАВНООТСТОЯЩИМИ УЗЛАМИ

Рассмотрим формулы (4.1.1) при равноотстоящих узлах. Из них получаются правила интегрирования типа Котеса, в которых множители  $\sin px$ ,  $\cos px$ ,  $e^{ipx}$  приняты за весовые функции. Из-за громоздкости  $A_k$  в (4.1.1) и их роста по абсолютной величине с ростом  $n$  формулы применяются в вычислениях лишь при небольших  $n$ , а для увеличения точности вычислений отрезок  $[a, b]$  предварительно делят на  $m$  частей, необязательно равных, и к каждой части в отдельности применяют выбранные формулы.

Рассмотрим случаи  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  и  $mh = b - a$ , когда все частичные отрезки равны  $h = \frac{b-a}{m}$ .

Для  $n = 0$  мы будем иметь формулу прямоугольников. При  $m = 1$

$$\begin{aligned}
& \int_a^b f(x) \sin px \, dx \approx \\
& \approx \frac{2}{p} \sin p \frac{b-a}{2} \sin p \frac{b+a}{2} f(\xi), \\
& \int_a^b f(x) \cos px \, dx \approx \\
& \approx \frac{2}{p} \sin p \frac{b-a}{2} \cos p \frac{b+a}{2} f(\xi), \\
& \int_a^b f(x) e^{ipx} \, dx \approx \\
& \approx \frac{2}{p} \sin p \frac{b-a}{2} e^{ip \frac{b+a}{2}} f(\xi),
\end{aligned}$$

где  $a \leq \xi \leq b$ , причем наиболее часто полагают  $\xi = a, b, \frac{b+a}{2}$ .

Введем обозначения:  $f_k = f(a + kh)$ ,  $f_{k+\frac{1}{2}} = f\left[a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h\right]$ . При  $m > 1$ , если

избрать правило прямоугольников с узлами в средних точках частичных отрезков, будет:

$$\int_a^b f(x) \sin px \, dx \approx \frac{2}{p} \sin p \frac{h}{2} \times \\ \times \sum_{k=0}^{m-1} \sin p \left[ a + \left( k + \frac{1}{2} \right) h \right] f_{k+\frac{1}{2}}; \quad (4.2.1_1)$$

$$\int_a^b f(x) \cos p x \, dx \approx \frac{2}{p} \sin p \frac{h}{2} \times \\ \times \sum_{k=0}^{m-1} \cos p \left[ a + \left( k + \frac{1}{2} \right) h \right] f_{k+\frac{1}{2}}; \quad (4.2.1_2)$$

$$\int_a^b f(x) e^{ipx} \, dx \approx \frac{2}{p} \sin p \frac{h}{2} \times \\ \times \sum_{k=0}^{m-1} e^{ip \left[ a + \left( k + \frac{1}{2} \right) h \right]} f_{k+\frac{1}{2}}. \quad (4.2.1_3)$$

Положим  $n = 1$  и рассмотрим аналог формулы трапеций. Вводим обозначения:  $\alpha_1 = \frac{1}{p^2 h} (1 - \cos ph)$ ,  $\beta_1 = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2 h} \sin ph$ , где  $h = \frac{b-a}{m}$ .

При  $m = 1$

$$\int_a^b f(x) \sin p x \, dx \approx (\alpha_1 \sin pa + \beta_1 \cos pa) f(a) + \\ + (\alpha_1 \sin pb - \beta_1 \cos pb) f(b).$$

При  $m > 1$

$$\int_a^b f(x) \sin p x \, dx \approx (\alpha_1 \sin pa + \beta_1 \cos pa) f_0 + \\ + 2\alpha_1 \sum_{k=1}^{m-1} \sin p (a + kh) f_k + \\ + (\alpha_1 \sin pb - \beta_1 \cos pb) f_m. \quad (4.2.2_1)$$

Аналогично

$$\int_a^b f(x) \cos p x \, dx \approx (\alpha_1 \cos pa - \beta_1 \sin pa) f_0 + \\ + 2\alpha_1 \sum_{k=1}^{m-1} \cos p (a + kh) f_k + \\ + (\alpha_1 \cos pb + \beta_1 \sin pb) f_m; \quad (4.2.2_2)$$

$$\int_a^b f(x) e^{ipx} \, dx \approx (\alpha_1 + i\beta_1) e^{ipa} f_0 +$$

$$+ 2\alpha_1 \sum_{k=1}^{m-1} e^{ip(a+kh)} f_k + (\alpha_1 - i\beta_1) e^{ipb} f_m. \quad (4.2.2_3)$$

Пусть  $n = 2$  (формула парабол, или формула Симпсона) и  $h = \frac{b-a}{2m}$ . Вводим обозначения:

$$h^2 p^3 \alpha_2 = \frac{3}{2} \Theta + \frac{1}{2} \Theta \cos 2\Theta - \sin 2\Theta,$$

$$h^2 p^3 \beta_2 = \Theta^2 - 1 + \frac{1}{2} \Theta \sin 2\Theta + \cos 2\Theta,$$

$$h^2 p^3 \gamma_2 = 4(\sin \Theta - \Theta \cos \Theta), \quad ph = \Theta.$$

При  $m = 1$

$$\int_a^b f(x) \sin p x \, dx \approx (\alpha_2 \sin pa + \beta_2 \cos pa) f(a) + \\ + \gamma_2 \sin p (a + h) f(a + h) + \\ + (\alpha_2 \sin pb - \beta_2 \cos pb) f(b).$$

При  $m > 1$

$$\int_a^b f(x) \sin p x \, dx \approx (\alpha_2 \sin pa + \beta_2 \cos pa) f_0 + \\ + \gamma_2 \sum_{k=0}^{m-1} \sin p [a + (2k+1)h] f_{2k+1} + \\ + 2\alpha_2 \sum_{k=1}^{m-1} \sin p (a + 2kh) f_{2k} + \\ + (\alpha_2 \sin pb - \beta_2 \cos pb) f_{2m}. \quad (4.2.3_1)$$

Сходные формулы для других интегралов будут:

$$\int_a^b f(x) \cos p x \, dx \approx (\alpha_2 \cos pa - \beta_2 \sin pa) f_0 + \\ + \gamma_2 \sum_{k=0}^{m-1} \cos p [a + (2k+1)h] f_{2k+1} + \\ + 2\alpha_2 \sum_{k=1}^{m-1} \cos p (a + 2kh) f_{2k} + \\ + (\alpha_2 \cos pb + \beta_2 \sin pb) f_{2m}; \quad (4.2.3_2)$$

$$\int_a^b f(x) e^{ipx} \, dx \approx (\alpha_2 + i\beta_2) e^{ipa} f_0 + \\ + \gamma_2 \sum_{k=0}^{m-1} e^{ip[a+(2k+1)h]} f_{2k+1} + 2\alpha_2 \sum_{k=1}^{m-1} e^{ip(a+2kh)} f_{2k} + \\ + (\alpha_2 - i\beta_2) e^{ipb} f_{2m}. \quad (4.2.3_3)$$



Пусть  $n = 3$  (правило «трех восьмых») и  $h = \frac{b-a}{3m}$ . Введем обозначения:

$$\begin{aligned} h^3 p^4 \alpha_3 &= \frac{11}{6} \Theta^2 - 1 + \left( 1 - \frac{1}{3} \Theta^2 \right) \times \\ &\times \cos 3\Theta + \Theta \sin 3\Theta, \\ h^3 p^4 \beta_3 &= \Theta^3 - 2\Theta + \left( 1 - \frac{1}{3} \Theta^2 \right) \times \\ &\times \sin 3\Theta - \Theta \cos 3\Theta, \\ h^3 p^4 \gamma_3 &= 3 - 3\Theta^2 + \left( \frac{3}{2} \Theta^2 - 3 \right) \times \\ &\times \cos 3\Theta - 4\Theta \sin 3\Theta, \\ h^3 p^4 \delta_3 &= 5\Theta + \left( \frac{3}{2} \Theta^2 - 3 \right) \times \\ &\times \sin 3\Theta + 4\Theta \cos 3\Theta, \quad ph = \Theta. \end{aligned}$$

При  $m = 1$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \sin pxdx &\approx (\alpha_3 \sin pa + \beta_3 \cos pa) f(a) + \\ &+ (\gamma_3 \sin pa + \delta_3 \cos pa) f(a+h) + (\gamma_3 \sin pb - \\ &- \delta_3 \cos pb) f(a+2h) + \\ &+ (\alpha_3 \sin pb - \beta_3 \cos pb) f(b). \quad (4.2.4) \end{aligned}$$

При  $m > 1$ , считая  $f(a+lh) = f_l$  ( $l = 0, 1, \dots, 3m$ ), получаем

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \sin pxdx &\approx (\alpha_3 \sin pa + \beta_3 \cos pa) f_0 + \\ &+ \sum_{k=0}^{m-1} [\gamma_3 \sin p(a+3kh) + \delta_3 \cos p(a+3kh)] \times \\ &\times f_{3k+1} + \sum_{k=1}^m [\gamma_3 \sin p(a+3kh) - \\ &- \delta_3 \cos p(a+3kh)] f_{3k-1} + \\ &+ 2\alpha_3 \sum_{k=1}^{m-1} \sin p(a+3kh) f_{3k} + \\ &+ (\alpha_3 \sin pb - \beta_3 \cos pb) f_{3m}. \quad (4.2.4_1) \end{aligned}$$

Подобно этому:

$$\int_a^b f(x) \cos pxdx \approx (\alpha_3 \cos pa - \beta_3 \sin pa) f_0 +$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{k=0}^{m-1} [\gamma_3 \cos p(a+3kh) - \delta_3 \sin p(a+3kh)] \times \\ &\times f_{3k+1} + \sum_{k=1}^m [\gamma_3 \cos p(a+3kh) + \\ &+ \delta_3 \sin p(a+3kh)] f_{3k-1} + 2\alpha_3 \sum_{k=1}^{m-1} \cos p(a+3kh) f_{3k} + \\ &+ (\alpha_3 \cos pb + \beta_3 \sin pb) f_{3m}; \quad (4.2.4_2) \\ \int_a^b f(x) e^{ipx} dx &\approx (\alpha_3 + i\beta_3) e^{ipa} f_0 + \\ &+ (\gamma_3 + i\delta_3) \sum_{k=0}^{m-1} e^{ip(a+3kh)} f_{3k+1} + \\ &+ (\gamma_3 - i\delta_3) \sum_{k=1}^m e^{ip(a+3kh)} f_{3k-1} + \\ &+ 2\alpha_3 \sum_{k=1}^{m-1} e^{ip(a+3kh)} f_{3k} + (\alpha_3 - i\beta_3) e^{ipb} f_{3m}. \quad (4.2.4_3) \end{aligned}$$

Пусть  $n = 4$  и  $h = \frac{b-a}{4m}$ . Вводим обозначения:

$$\begin{aligned} h^4 p^5 \alpha_4 &= \frac{25}{12} \Theta^3 - \frac{5}{2} \Theta + \left( 1 - \frac{11}{12} \Theta^2 \right) \times \\ &\times \sin 4\Theta + \left( \frac{1}{4} \Theta^3 - \frac{3}{2} \Theta \right) \cos 4\Theta, \\ h^4 p^5 \beta_4 &= \Theta^4 - \frac{35}{12} \Theta^2 + 1 + \left( \frac{1}{4} \Theta^3 - \right. \\ &- \frac{3}{2} \Theta \left. \right) \sin 4\Theta - \left( 1 - \frac{11}{12} \Theta^2 \right) \cos 4\Theta, \\ h^4 p^5 \gamma_4 &= 4\Theta^3 - 9\Theta + \left( 4 - \frac{14}{3} \Theta^2 \right) \sin 4\Theta + \\ &+ \left( \frac{4}{3} \Theta^3 - 7\Theta \right) \cos 4\Theta, \\ h^4 p^5 \delta_4 &= 4 - \frac{26}{3} \Theta^2 + \left( \frac{4}{3} \Theta^3 - 7\Theta \right) \sin 4\Theta + \\ &+ \left( \frac{14}{3} \Theta^2 - 4 \right) \cos 4\Theta, \\ h^4 p^5 \zeta_4 &= 6\Theta(\Theta^2 - 4) \cos 2\Theta + \\ &+ (12 - 19\Theta^2) \sin 2\Theta, \quad ph = \Theta. \end{aligned}$$

При  $m = 1$

$$\int_a^b f(x) \sin pxdx \approx (\alpha_4 \sin pa + \beta_4 \cos pa) f(a) -$$

$$-(\gamma_4 \sin pa + \delta_4 \cos pa) f(a+h) + \\ + \zeta_4 \sin p(a+2h) f(a+2h) - (\gamma_4 \sin pb - \delta_4 \cos pb) \times \\ \times f(a+3h) + (\alpha_4 \sin pb - \beta_4 \cos pb) f(b). \quad (4.2.5)$$

При  $m > 1$  получаем:

$$\int_a^b f(x) \sin pxdx \approx (\alpha_4 \sin pa + \beta_4 \cos pa) f_0 - \\ - \sum_{k=0}^{m-1} [\gamma_4 \sin p(a+4kh) + \delta_4 \cos p(a+4kh)] \times \\ \times f_{4k+1} + \zeta_4 \sum_{k=0}^{m-1} \sin p[a+2h(2k+1)] \times \\ \times f_{4k+2} - \sum_{k=1}^m [\gamma_4 \sin p(a+4kh) - \\ - \delta_4 \cos p(a+4kh)] f_{4k-1} + \\ + 2\alpha_4 \sum_{k=1}^{m-1} \sin p(a+4kh) f_{4k} + \\ + (\alpha_4 \sin pb - \beta_4 \cos pb) f_{4m}; \quad (4.2.5_1)$$

$$\int_a^b f(x) \cos pxdx \approx (\alpha_4 \cos pa - \beta_4 \sin pa) f_0 - \\ - \sum_{k=0}^{m-1} [\gamma_4 \cos p(a+4kh) - \delta_4 \sin p(a+4kh)] f_{4k+1} + \\ + \zeta_4 \sum_{k=0}^{m-1} \cos p[a+2h(2k+1)] f_{4k+2} - \\ - \sum_{k=1}^m [\gamma_4 \cos p(a+4kh) + \delta_4 \sin p(a+4kh)] \times \\ \times f_{4k-1} + 2\alpha_4 \sum_{k=1}^{m-1} \cos p(a+4kh) f_{4k} + \\ + (\alpha_4 \cos pb + \beta_4 \sin pb) f_{4m}; \quad (4.2.5_2)$$

$$\int_a^b f(x) e^{ipx} dx \approx (\alpha_4 + i\beta_4) e^{ipa} f_0 - \\ - (\gamma_4 + i\delta_4) \sum_{k=0}^{m-1} e^{ip(a+4kh)} f_{4k+1} + \\ + \zeta_4 \sum_{k=0}^{m-1} e^{ip[a+(2k+1)2h]} f_{4k+2} - \\ - (\gamma_4 - i\delta_4) \sum_{k=1}^m e^{ip(a+4kh)} f_{4k-1} + \\ + 2\alpha_4 \sum_{k=1}^{m-1} e^{ip(a+4kh)} f_{4k} + (\alpha_4 - i\beta_4) e^{ipb} f_{4m}. \quad (4.2.5_3)$$

Построение формул для любых  $n$  и  $m$  не представляет теоретической трудности, но они становятся громоздкими.

О погрешности приведенных выше правил вычисления (4.2.2<sub>j</sub>) — (4.2.5<sub>j</sub>) следует сделать замечание, которое существенно отличает эти правила от (3.3.3). Напомним, что при использовании равенствами (3.3.3) степень точности вычисления пар  $(a_0, b_0)$ ,  $(a_1, b_1)$ ,  $(a_2, b_2)$ , ... равна соответственно  $n-1$ ,  $n-2$ ,  $n-3$ , ..., и погрешность вычисления коэффициентов  $(a_k, b_k)$  будет, вообще говоря, возрастать по мере увеличения их номера  $k$ . Иначе будет вести себя погрешность правил (4.2.2<sub>j</sub>) — (4.2.5<sub>j</sub>). Для определенности рассмотрим  $b_k$  и его вычисление по правилу (4.2.2<sub>1</sub>). Погрешность зависит главным образом от точности, с которой график  $f$  на отрезке интегрирования  $[a, b]$  приближается ломаной линией с угловыми точками  $(a+kh, f_k)$ . Обозначим эту погрешность  $\eta(x)$ . Она является одинаковой для всех коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$ . Если  $f$  имеет порядок гладкости выше первого, то графиком  $\eta(x)$  будет кривая линия с угловыми точками  $(a+kh, 0)$ .

Погрешность вычисления  $s(p)$  равна  $\varepsilon_s(p) = \int_a^b \eta(x) \sin pxdx$ . Последний интеграл будет медленно изменяться при росте  $p$  ( $p = \frac{2\pi}{b-a} k$ ). Поэтому, как правило, «большое число» первых коэффициентов  $b_k$  будет вычислено при помощи (4.2.2<sub>1</sub>) с близкой точностью и точность вычисления с ростом  $k$  будет медленно убывать.

Выше говорилось о том, что правила котесова вида с весами  $\sin px$ ,  $\cos px$ ,  $e^{ipx}$  применяются к вычислению интегралов  $s(p)$ ,  $c(p)$ ,  $e(p)$  преимущественно при малом числе  $n$  узлов, так как сложность правил возрастает с увеличением  $n$ . Для увеличения же точности предпочитают делить отрезок интегрирования на части и применять правила к частичным отрезкам.

Но, принципиально говоря, можно не делить промежутки интегрирования на части и пытаться улучшать точность котесова правила путем увеличения числа узлов. Укажем несколько простейших правил такого вида.

Будем считать, что отрезок интегрирования приведен к  $[0, 2\pi]$  и коэффициенты Фурье есть

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kxdx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx.$$

1.  $n = 2$ , и  $f$  известна в точках  $0, \pi, 2\pi$ :

$$a_0 \approx \frac{1}{3} [f(0) + 4f(\pi) + f(2\pi)],$$

$$a_k \approx \frac{2}{k^2 \pi^2} [f(0) + f(2\pi)] - \frac{4}{k^2 \pi^2} f(\pi), \quad (4.2.6)$$

$$b_k \approx \frac{1}{k \pi} [f(0) - f(2\pi)], \quad k = 1, 2, \dots$$

2.  $n = 3$ , и  $f$  известна в точках  $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi$ :

$$a_0 \approx \frac{1}{4} \left[ f(0) + 3f\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 3f\left(\frac{4\pi}{3}\right) + f(2\pi) \right],$$

$$a_k \approx -\frac{9}{4k^2 \pi^2} \left[ f(0) + f(2\pi) \right] -$$

$$-\frac{9}{4k^2 \pi^2} \left[ f\left(\frac{2\pi}{3}\right) + f\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right], \quad (4.2.7)$$

$$b_k \approx \left( \frac{1}{k\pi} - \frac{27}{4k^3 \pi^3} \right) [f(0) - f(2\pi)] +$$

$$+ \frac{81}{4k^3 \pi^3} \left[ f\left(\frac{2\pi}{3}\right) - f\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right],$$

$$k = 1, 2, \dots$$

3.  $n = 4$ , и  $f$  известна в точках  $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ :

$$\frac{3\pi}{2}, 2\pi:$$

$$a_0 \approx \frac{7}{45} [f(0) + f(2\pi)] +$$

$$+ \frac{32}{45} \left[ f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right] + \frac{12}{45} f(\pi),$$

$$a_k \approx \left( \frac{14}{3k^2 \pi^2} - \frac{32}{k^4 \pi^4} \right) [f(0) + f(2\pi)] -$$

$$- \left( \frac{32}{3k^2 \pi^2} - \frac{128}{k^4 \pi^4} \right) \left[ f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right] +$$

$$+ \frac{12}{k^2 \pi^2} \left( 1 - \frac{16}{k^2 \pi^2} \right) f(\pi),$$

(4.2.8)

$$b_k \approx \left( \frac{1}{k\pi} - \frac{8}{k^3 \pi^3} \right) \left[ f(0) - f(2\pi) \right] +$$

$$+ \frac{16}{k^3 \pi^3} \left[ f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right], \quad k = 1, 2, \dots$$

Построение правил подобного вида можно продолжать. Так, в [78] построены квадратурные формулы по значениям функции в девяти равноотстоящих точках отрезка  $[0, 2\pi]$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx \approx \alpha_1 [f(0) + f(2\pi)] +$$

$$+ \alpha_2 \left[ f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{7\pi}{4}\right) \right] +$$

$$+ \alpha_3 \left[ f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right] +$$

$$+ \alpha_4 \left[ f\left(\frac{3\pi}{4}\right) + f\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right] +$$

$$+ \alpha_5 f(\pi), \quad k = 0, 1, 2, \dots, 24,$$

(4.2.9)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx \approx \beta_1 [f(0) - f(2\pi)] +$$

$$+ \beta_2 \left[ f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f\left(\frac{7\pi}{4}\right) \right] +$$

$$+ \beta_3 \left[ f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right] +$$

$$+ \beta_4 \left[ f\left(\frac{3\pi}{4}\right) - f\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right], \quad k = 1, 2, \dots, 24.$$

Коэффициенты  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  вычислены заранее и приведены в таблице на 5 десятичных знаков. С помощью этой таблицы можно определить первые 49 коэффициентов Фурье (25 косинус- и 24 синус-коэффициента) функции  $f(x)$ . Интегралы численно равны половине значений соответствующих коэффициентов Фурье. Таблица значений их приведена в том виде, как она была составлена автором.

При  $k=0$  первое из равенств (4.2.9) переходит в формулу Котеса.

| $n$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_4$ | $\alpha_5$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ |
|-----|------------|------------|------------|------------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 0   | 0,03489    | 0,20769    | -0,03273   | 0,37023    | -0,16014   | 0,00000   | 0,00000   | 0,00000   | 0,00000   |
| 1   | 0,03424    | 0,17226    | -0,15858   | 0,15722    | -0,41029   | 0,00619   | 0,09675   | 0,11058   | 0,10045   |
| 2   | 0,03222    | 0,08715    | -0,28460   | 0,24377    | -0,15709   | 0,01232   | 0,14408   | -0,03272  | -0,09775  |
| 3   | 0,02855    | 0,00257    | -0,15347   | 0,31413    | -0,38356   | 0,01808   | 0,12434   | -0,18588  | 0,13861   |
| 4   | 0,02306    | -0,03684   | 0,01136    | 0,01850    | -0,03216   | 0,02243   | 0,06683   | -0,10984  | 0,08863   |
| 5   | 0,01739    | -0,03916   | 0,05038    | -0,06254   | 0,06786    | 0,02229   | 0,03783   | -0,06417  | 0,05301   |
| 6   | 0,01319    | -0,03391   | 0,05404    | -0,07693   | 0,08723    | 0,02079   | 0,02306   | -0,03970  | 0,03315   |
| 7   | 0,01021    | -0,02810   | 0,04888    | -0,07279   | 0,08361    | 0,01905   | 0,01497   | -0,02599  | 0,02183   |
| 8   | 0,00808    | -0,02317   | 0,04221    | -0,06426   | 0,07428    | 0,01739   | 0,01023   | -0,01785  | 0,01504   |
| 9   | 0,00653    | -0,01923   | 0,03602    | -0,05555   | 0,06444    | 0,01591   | 0,00728   | -0,01275  | 0,01077   |
| 10  | 0,00538    | -0,01612   | 0,03076    | -0,04782   | 0,05560    | 0,01461   | 0,00536   | -0,00940  | 0,00796   |
| 11  | 0,00450    | -0,01365   | 0,02640    | -0,04127   | 0,04806    | 0,01348   | 0,00405   | -0,00713  | 0,00604   |
| 12  | 0,00381    | -0,01169   | 0,02282    | -0,03583   | 0,04177    | 0,01250   | 0,00314   | -0,00553  | 0,00469   |
| 13  | 0,00327    | -0,01011   | 0,01987    | -0,03129   | 0,03651    | 0,01164   | 0,00248   | -0,00437  | 0,00371   |
| 14  | 0,00284    | -0,00882   | 0,01743    | -0,02751   | 0,03212    | 0,01089   | 0,00199   | -0,00351  | 0,00298   |
| 15  | 0,00248    | -0,00775   | 0,01538    | -0,02433   | 0,02841    | 0,01022   | 0,00162   | -0,00286  | 0,00243   |
| 16  | 0,00219    | -0,00686   | 0,01367    | -0,02165   | 0,02530    | 0,00962   | 0,00134   | -0,00237  | 0,00201   |
| 17  | 0,00195    | -0,00612   | 0,01222    | -0,01939   | 0,02266    | 0,00909   | 0,00112   | -0,00198  | 0,00168   |
| 18  | 0,00174    | -0,00548   | 0,01098    | -0,01743   | 0,02038    | 0,00861   | 0,00094   | -0,00167  | 0,00142   |
| 19  | 0,00157    | -0,00494   | 0,00992    | -0,01575   | 0,01842    | 0,00818   | 0,00080   | -0,00142  | 0,00121   |
| 20  | 0,00142    | -0,00448   | 0,00901    | -0,01433   | 0,01677    | 0,00779   | 0,00069   | -0,00122  | 0,00104   |
| 21  | 0,00129    | -0,00407   | 0,00820    | -0,01305   | 0,01527    | 0,00743   | 0,00060   | -0,00105  | 0,00090   |
| 22  | 0,00117    | -0,00372   | 0,00750    | -0,01195   | 0,01398    | 0,00711   | 0,00052   | -0,00092  | 0,00078   |
| 23  | 0,00108    | -0,00341   | 0,00689    | -0,01097   | 0,01284    | 0,00681   | 0,00046   | -0,00081  | 0,00069   |
| 24  | 0,00099    | -0,00314   | 0,00635    | -0,01011   | 0,01183    | 0,00653   | 0,00040   | -0,00071  | 0,00060   |

### § 3. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ СО ЗНАЧЕНИЯМИ ФУНКЦИИ И ПРОИЗВОДНОЙ

В некоторых задачах в узлах  $x_k$  могут быть известны не только значения функции, но и значения производных от нее. Используя эти дополнительные сведения, можно построить правила вычислений, аналогичные (4.2.1<sub>j</sub>) — (4.2.5<sub>j</sub>), но более высокой степени точности. В общем своем виде задача имеет следующий смысл: пусть в узлах  $x_k$  известны величины  $f^{(j)}(x_k)$  ( $k=0, 1, 2, \dots, n; j=0, 1, \dots, \alpha_k-1$ ). Нужно указать правило, позволяющее по этим величинам приближенно вычислить интегралы  $s(p)$ ,  $c(p)$ ,  $e(p)$ .

Мы остановимся на простом случае, имеющем наибольший интерес, когда в узлах  $x_k$  заданы значения функции  $f(x_k)$  и первой производной  $f'(x_k)$ . Построим алгебраический многочлен  $P(x)$  степени  $2n+1$ , интерполирующий  $f(x)$  по указанным значениям  $f$  и  $f'$ . Он имеет следующую

форму:  $P(x) = \sum_{k=0}^n [l_{k0}(x)f(x_k) + l_{k1}(x)f'(x_k)]$ , где

$l_{k0}(x)$  и  $l_{k1}(x)$  — известные в теории интерполирования многочлены:

$$l_{k0}(x) = \frac{\omega^2(x)}{\omega'^2(x_k)(x-x_k)^2} \left[ 1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k) \right],$$

$$l_{k1}(x) = \frac{\omega^2(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)},$$

$$\omega(x) = (x-x_0) \dots (x-x_n).$$

Если в интегралах  $s(p)$ ,  $c(p)$ ,  $e(p)$  заменить  $f(x)$  на многочлен  $P(x)$ , то получатся интерполяционные правила их вычисления, подобные (4.1.1), при этом коэффициенты их будут интегралами вида  $s(p)$ ,  $c(p)$ ,  $e(p)$ , в которых  $f$  заменена на  $l_{k0}$  или  $l_{k1}$ . Некоторые правила такого вида для небольших значений  $n$  приведены ниже.

Рассмотрим равноотстоящие узлы  $x_k$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ) для  $n=0, 1, 2$ . Соответствующие правила интегрирования будут иметь невысокую точность, и для улучшения результатов, как обычно, отрезок интегрирования делят на некоторое число  $m$  равных частей, применяют правило к каждому частичному отрезку и результаты складывают.

Пусть  $n=0$  и  $h = \frac{b-a}{m}$ . Вводим обозначения:

$$\alpha_0 = \frac{2}{p} \sin p \frac{h}{2},$$

$$\beta_0 = \frac{2}{p^2} \sin p \frac{h}{2} -$$

$$-\frac{h}{p} \cos p \frac{h}{2}.$$

При  $m = 1$ , когда отрезок не делится на части и за узел  $x_0$  принимается середина отрезка:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \sin p x dx &\approx \\ &\approx \alpha_0 \sin p \left( a + \frac{h}{2} \right) f \left( a + \frac{h}{2} \right) + \\ &+ \beta_0 \cos p \left( a + \frac{h}{2} \right) f' \left( a + \frac{h}{2} \right); \end{aligned} \quad (4.3.1_1)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \cos p x dx &\approx \\ &\approx \alpha_0 \cos p \left( a + \frac{h}{2} \right) f \left( a + \frac{h}{2} \right) - \\ &- \beta_0 \sin p \left( a + \frac{h}{2} \right) f' \left( a + \frac{h}{2} \right); \end{aligned} \quad (4.3.1_2)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) e^{ipx} dx &\approx \\ &\approx \alpha_0 e^{ip \left( a + \frac{h}{2} \right)} f \left( a + \frac{h}{2} \right) + \\ &+ \beta_0 i e^{ip \left( a + \frac{h}{2} \right)} f' \left( a + \frac{h}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.3.1_3)$$

Пусть  $m > 1$ :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \sin p x dx &\approx \\ &\approx \alpha_0 \sum_{k=0}^{m-1} \sin p \left[ a + \left( k + \frac{1}{2} \right) h \right] \times \\ &\times f \left[ a + \left( k + \frac{1}{2} \right) h \right] + \\ &+ \beta_0 \sum_{k=0}^{m-1} \cos p \left[ a + \left( k + \frac{1}{2} \right) h \right] \times \\ &\times f' \left[ a + \left( k + \frac{1}{2} \right) h \right]; \end{aligned} \quad (4.3.1'_1)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \cos p x dx &\approx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\approx \alpha_0 \sum_{k=0}^{m-1} \cos p \left[ a + \left( k + \frac{1}{2} \right) h \right] \times \\ &\times f \left[ a + \left( k + \frac{1}{2} \right) h \right] - \\ &- \beta_0 \sum_{k=0}^{m-1} \sin p \left[ a + \left( k + \frac{1}{2} \right) h \right] \times \\ &\times f' \left[ a + \left( k + \frac{1}{2} \right) h \right]; \end{aligned} \quad (4.3.1'_2)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) e^{ipx} dx &\approx \\ &\approx \alpha_0 \sum_{k=0}^{m-1} e^{ip \left[ a + \left( k + \frac{1}{2} \right) h \right]} f \left[ a + \left( k + \frac{1}{2} \right) h \right] + \\ &+ i \beta_0 \sum_{k=0}^{m-1} e^{ip \left[ a + \left( k + \frac{1}{2} \right) h \right]} f' \left[ a + \left( k + \frac{1}{2} \right) h \right]. \end{aligned} \quad (4.3.1'_3)$$

Пусть  $n = 1$  и  $h = \frac{b-a}{m}$ . Введем обозначения:

$$\Theta = ph,$$

$$\lambda_0 = 6\Theta \cos \Theta - 12 \sin \Theta + \Theta(6 + \Theta^2),$$

$$\mu_0 = 12 - 6\Theta \sin \Theta - 12 \cos \Theta,$$

$$\lambda_1 = 2\Theta \cos \Theta - 6 \sin \Theta + 4\Theta,$$

$$\mu_1 = 6 - \Theta^2 - 2\Theta \sin \Theta - 6 \cos \Theta.$$

При  $m = 1$ , когда отрезок  $[a, b]$  не делится на части и  $h = b - a$ , вычислительные правила будут следующими:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \sin p x dx &\approx A_0 f(a) + A_1 f(b) + \\ &+ A'_0 f'(a) + A'_1 f'(b), \end{aligned} \quad (4.3.2_1)$$

$$h^3 p^4 A_0 = \lambda_0 \cos pa + \mu_0 \sin pa,$$

$$h^3 p^4 A_1 = -\lambda_0 \cos pb + \mu_0 \sin pb,$$

$$h^2 p^4 A'_0 = \lambda_1 \cos pa + \mu_1 \sin pa,$$

$$h^2 p^4 A'_1 = \lambda_1 \cos pb - \mu_1 \sin pb;$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \cos p x dx &\approx B_0 f(a) + B_1 f(b) + \\ &+ B'_0 f'(a) + B'_1 f'(b), \end{aligned} \quad (4.3.2_2)$$

$$h^3 p^4 B_0 = \mu_0 \cos pa - \lambda_0 \sin pa,$$

$$h^3 p^4 B_1 = \mu_0 \cos pb + \lambda_0 \sin pb,$$

$$h^2 p^4 B'_0 = \mu_1 \cos pa - \lambda_1 \sin pa,$$

$$h^2 p^4 B'_1 = -\mu_1 \cos pb - \lambda_1 \sin pb;$$

$$\int_a^b f(x) e^{ipx} dx \approx C_0 f(a) + C_1 f(b) +$$

$$+ C'_0 f'(a) + C'_1 f'(b), \quad (4.3.2_3)$$

$$h^3 p^4 C_0 = (\mu_0 + i \lambda_0) e^{ipa}, \quad h^3 p^4 C_1 = (\mu_0 - i \lambda_0) e^{ipb},$$

$$h^2 p^4 C'_0 = (\mu_1 + i \lambda_1) e^{ipa},$$

$$h^2 p^4 C'_1 = (-\mu_1 + i \lambda_1) e^{ipb}.$$

При  $m > 1$ , когда отрезок  $[a, b]$  делится на некоторое число  $m$  равных частей и  $h = \frac{b-a}{m}$ , расчетные правила будут:

$$\int_a^b f(x) \sin pxdx \approx A_0 f(a) +$$

$$+ 2h^{-3} p^{-4} \mu_0 \sum_{k=1}^{m-1} f(a + kh) \sin p(a + kh) +$$

$$+ A_1 f(b) + A'_0 f'(a) +$$

$$+ 2h^{-2} p^{-4} \lambda_1 \sum_{k=1}^{m-1} f'(a + kh) \cos p(a + kh) +$$

$$+ A'_1 f'(b); \quad (4.3.2'_1)$$

$$\int_a^b f(x) \cos pxdx \approx B_0 f(a) +$$

$$+ 2h^{-3} p^{-4} \mu_0 \sum_{k=1}^{m-1} f(a + kh) \cos p(a + kh) +$$

$$+ B_1 f(b) + B'_0 f'(a) -$$

$$- 2h^{-2} p^{-4} \lambda_1 \sum_{k=1}^{m-1} f'(a + kh) \sin p(a + kh) +$$

$$+ B'_1 f'(b); \quad (4.3.2'_2)$$

$$\int_a^b f(x) e^{ipx} dx \approx C_0 f(a) +$$

$$+ 2h^{-3} p^{-4} \mu_0 \sum_{k=1}^{m-1} f(a + kh) e^{ip(a+kh)} +$$

$$+ C_1 f(b) + C'_0 f'(a) +$$

$$+ 2ih^{-2} p^{-4} \lambda_1 \sum_{k=1}^{m-1} f'(a + kh) e^{ip(a+kh)} + C'_1 f'(b). \quad (4.3.2'_3)$$

Пусть  $n = 2$  и  $h = \frac{b-a}{2m}$ . Введем обозначения:

$$ph = \Theta,$$

$$\Theta^6 M = 16\Theta(15 - \Theta^2) \cos \Theta + 48(2\Theta^2 - 5) \sin \Theta,$$

$$\Theta^6 N = 16\Theta(3 - \Theta^2) \sin \Theta - 48\Theta^2 \cos \Theta,$$

$$\Theta^6 P = 2\Theta(\Theta^2 - 24) \sin \Theta \cos \Theta +$$

$$+ 15(\Theta^2 - 4) \cos^2 \Theta + \Theta^4 - 27\Theta^2 + 60,$$

$$\Theta^6 Q = \Theta(12 - 5\Theta^2) + 15(\Theta^2 - 4) \sin \Theta \cos \Theta +$$

$$+ 2\Theta(24 - \Theta^2) \cos^2 \Theta,$$

$$\Theta^6 R = \Theta(156 - 7\Theta^2) \sin \Theta \cos \Theta +$$

$$+ 3(60 - 17\Theta^2) \cos^2 \Theta - 15(12 - 5\Theta^2),$$

$$\Theta^6 S = \Theta(\Theta^4 + 8\Theta^2 - 24) +$$

$$+ \Theta(7\Theta^2 - 156) \cos^2 \Theta + 3(60 - 17\Theta^2) \sin \Theta \cos \Theta.$$

Рассмотрим сначала случай  $m = 1$ , когда  $[a, b]$  делится на две равные части:  $h = \frac{b-a}{2}$ . Назо-

вем буквой  $c$  середину отрезка:  $c = a + h$ . Интерполирование  $f$  на  $[a, b]$  будет выполняться при помощи многочлена пятой степени по шести значениям:  $f(a)$ ,  $f'(a)$ ,  $f(c)$ ,  $f'(c)$ ,  $f(b)$ ,  $f'(b)$ .

Правила вычислений будут:

$$\int_a^b f(x) \sin pxdx \approx A_0 f(a) + A_1 f(c) + A_2 f(b) +$$

$$+ A'_0 f'(a) + A'_1 f'(c) + A'_2 f'(b), \quad (4.3.3_1)$$

$$A_0 = hS \cos pa + hR \sin pa, \quad A'_0 = -h^2 Q \cos pa -$$

$$- h^2 P \sin pa, \quad A_1 = hN \sin pc, \quad A'_1 = -h^2 M \cos pc,$$

$$A_2 = -hS \cos pb + hR \sin pb,$$

$$A'_2 = -h^2 Q \cos pb + h^2 P \sin pb;$$

$$\int_a^b f(x) \cos pxdx \approx B_0 f(a) + B_1 f(c) +$$

$$+ B_2 f(b) + B'_0 f'(a) + B'_1 f'(c) + B'_2 f'(b), \quad (4.3.3_2)$$

$$B_0 = hR \cos pa - hS \sin pa,$$

$$B'_0 = -h^2 P \cos pa + h^2 Q \sin pa,$$

$$B_1 = hN \cos pc, \quad B'_1 = h^2 M \sin pc,$$

$$B_2 = hR \cos pb + hS \sin pb,$$

$$B'_2 = h^2P \cos pb + h^2Q \sin pb;$$

$$\int_a^b f(x) e^{ipx} dx \approx C_0 f(a) + C_1 f(c) +$$

$$+ C_2 f(b) + C'_0 f'(a) + C'_1 f'(c) + C'_2 f'(b), \quad (4.3.3_3)$$

$$C_0 = h(R + iS) e^{ipa}, \quad C'_0 = -h^2(P + iQ) e^{ipa},$$

$$C_1 = hN e^{ipc}, \quad C'_1 = -ih^2 M e^{ipc},$$

$$C_2 = h(R - iS) e^{ipb}, \quad C'_2 = h^2(P - iQ) e^{ipb}.$$

Допустим теперь, что  $m > 1$  и  $[a, b]$  делится на четное число  $2m$  частичных отрезков длины  $h = \frac{b-a}{2m}$ . На каждом вдвоенном отрезке  $[2kh, 2(k+1)h]$  выполняется интерполирование  $f$ , при помощи многочлена пятой степени по значениям

$$f(a + 2kh) = f_{2k}, \quad f'(a + 2kh) = f'_{2k},$$

$$f_{2k+1}, \quad f'_{2k+1}, \quad f_{2k+2}, \quad f'_{2k+2}.$$

Вычислительные правила имеют вид:

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x) \sin pxdx \approx A_0 f_0 + \\ & + hN \sum_{k=0}^{m-1} f_{2k+1} \sin p[a + (2k+1)h] + \\ & + 2hR \sum_{k=1}^{m-1} f_{2k} \sin p(a + 2kh) + A_2 f_{2m} + A'_0 f'_0 - \\ & - h^2 M \sum_{k=1}^{m-1} f'_{2k+1} \cos p[a + (2k+1)h] - \\ & - 2h^2 Q \sum_{k=1}^{m-1} f'_{2k} \cos p(a + 2kh) + A'_2 f'_{2m}; \\ & \int_a^b f(x) \cos pxdx \approx B_0 f_0 + \\ & + hN \sum_{k=0}^{m-1} f_{2k+1} \cos p[a + (2k+1)h] + \\ & + 2hR \sum_{k=1}^{m-1} f_{2k} \cos p(a + 2kh) + B_2 f_{2m} + \\ & + B'_0 f'_0 + h^2 M \sum_{k=0}^{m-1} f'_{2k+1} \sin p[a + (2k+1)h] + \end{aligned} \quad (4.3.3'_1)$$

$$+ 2h^2 Q \sum_{k=1}^{m-1} f'_{2k} \sin p(a + 2kh) + B'_2 f'_{2m}, \quad (4.3.3'_2)$$

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x) e^{ipx} dx \approx C_0 f_0 + hN e^{ipa} \sum_{k=0}^{m-1} f_{2k+1} e^{ip(2k+1)h} + \\ & + 2hR e^{ipa} \sum_{k=1}^{m-1} f_{2k} e^{ip2kh} + C_2 f_{2m} + C'_0 f'_0 - \\ & - ih^2 M e^{ipa} \sum_{k=0}^{m-1} f'_{2k+1} e^{ip(2k+1)h} - \\ & - 2ih^2 Q e^{ipa} \sum_{k=1}^{m-1} f'_{2k} e^{ip2kh} + C'_2 f'_{2m}. \quad (4.3.3'_3) \end{aligned}$$

#### § 4. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С НЕРАВНООТСТОЯЩИМИ УЗЛАМИ

Возвратимся к общему интерполяционному правилу, о котором говорилось в § 1. Узлы  $x_k$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ) правила мы считали произвольно заданными и не обсуждали вопроса о рациональном выборе их.

Сейчас мы рассмотрим один из возможных способов выбора  $x_k$ , который приводит к результатам более точным, чем те, которые получаются, когда берется такое же число равноотстоящих узлов.

Напомним прежде всего, что при интерполяционном вычислении интеграла  $\int_a^b f(x) dx$ , в котором интегрируемая функция  $f$  имеет высокий порядок дифференцируемости и весовая функция постоянна, наилучший результат, как правило, дает квадратурная формула гауссова типа, в которой за узлы принимаются корни многочлена Лежандра для промежутка  $[a, b]$ .

При построении интерполяционных квадратур для увеличения их точности выбор узлов  $x_k$  должен быть согласован со свойствами весовой функции. Одно из главных условий согласования состоит, если говорить о наглядной стороне дела, в следующем: в тех местах отрезка  $[a, b]$ , где весовая функция имеет большие по абсолютной величине значения, узлы  $x_k$  должны быть в какой-то мере сгущены; в тех же местах, где весовая функция близка к нулю, узлы могут быть размещены более редко.

В интегралах  $s(p)$ ,  $c(p)$ ,  $e(p)$ , желая заранее учесть влияние колеблющихся множителей, за весовые функции мы должны принять  $\sin px$ ,  $\cos px$ ,  $e^{ipx}$ .

Узлы  $x_k$  мы выберем одинаковыми для всех значений  $p$ . Весовые функции  $\sin px$ ,  $\cos px$ ,

$e^{ipx}$  зависят от  $p$ , и при изменении  $p$  поведение их на отрезке  $[a, b]$  таково, что мы не имеем никакого основания для того, чтобы отличить один участок отрезка интегрирования  $[a, b]$  от другого.

Все изложенное позволяет ожидать хорошего результата, если за образец выберем постоянную весовую функцию и возьмем узлы  $x_k$  гауссовой квадратурной формулы, которые дают наивысшую степень точности при постоянном весе. Примеры вычислений показали, что для гладких функций  $f$  гауссовы узлы дают, вообще говоря, лучшую точность вычисления коэффициентов Фурье, чем дает правило вычислений, когда за узлы приняты, например, корни многочленов Чебышева.

Когда интегрируемая функция имеет особенности — степенные, логарифмические или другие, — ее обычно стремятся представить в виде произведения двух множителей и привести интеграл к форме  $\int_a^b \rho(x) f(x) dx$ , где весовая функция неотрицательна, а  $f(x)$  достаточно гладкая, и затем вычислить интеграл при помощи интерполирования  $f(x)$ , приняв за узлы корни многочлена степени  $n+1$  из системы многочленов, ортогональных по весу  $\rho(x)$  на  $[a, b]$ . Можно, подобно предыдущему случаю, ожидать, что эти узлы должны дать хорошую точность и при интерполяционном вычислении интеграла  $\int_a^b \rho(x) f(x) \sin px dx$ , в котором за весовую функцию принято произведение  $\rho(x) \sin px$ .

Рассмотрим следующую общую интерполяционную квадратурную формулу, предназначенную для вычисления интеграла  $s(p)$ :

$$s(p) = \int_a^b \rho(x) \sin px f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k), \quad (4.4.1)$$

в которой за узлы  $x_k$  приняты корни многочлена  $\Pi_{n+1}(x)$  степени  $n+1$  из системы, ортонормальной на  $[a, b]$  по весу  $\rho(x)$ .

Так как многочлен  $\omega(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$  будет только постоянным множителем отличаться от  $\Pi_{n+1}(x)$ , то  $l_k(x) = \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x - x_k) \Pi'_{n+1}(x_k)}$  и коэффициенты  $A_k$  будут иметь значения

$$A_k(p) = \int_a^b \rho(x) \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x - x_k) \Pi'_{n+1}(x_k)} \sin px dx. \quad (4.4.2)$$

В вычислении  $l_k(x)$  и интегралов (4.4.2) может быть полезным соотношение Кристоффеля — Дарбу для ортонормированных многочленов  $\Pi_l(x)$ . Если  $q_l$  — старший коэффициент  $\Pi_l$ , то оно будет следующим:

$$\sum_{l=0}^n \Pi_l(x) \Pi_l(y) = \frac{q_n}{q_{n+1}} \frac{\Pi_{n+1}(x) \Pi_n(y) - \Pi_n(x) \Pi_{n+1}(y)}{x - y}.$$

При  $x \rightarrow y$  в пределе получится

$$\sum_{l=0}^n \Pi_l^2(y) = \frac{q_n}{q_{n+1}} [\Pi_n(y) \Pi'_{n+1}(y) - \Pi'_n(y) \Pi_{n+1}(y)].$$

Если положить  $y = x_k$ , эти равенства позволяют получить для  $l_k(x)$  его выражение через многочлены  $\Pi_l$ :

$$l_k(x) = \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x - x_k) \Pi'_{n+1}(x)} = \left[ \sum_{l=0}^n \Pi_l^2(x_k) \right]^{-1} \sum_{l=0}^n \Pi_l(x) \Pi_l(x_k). \quad (4.4.3)$$

Отсюда

$$A_k(p) = \sum_{l=0}^n \Pi_l(x_k) \int_a^b \rho(x) \sin px \Pi_l(x) dx \times \left[ \sum_{l=0}^n \Pi_l^2(x_k) \right]^{-1}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (4.4.4)$$

Рассмотрим подробно два случая: 1)  $\rho(x) \equiv 1$ ,

2)  $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . В обоих случаях отрезок  $[a, b]$  приведен к отрезку  $[-1, 1]$ .

Пусть  $\rho(x) \equiv 1$ . За многочлены  $\omega_l(x)$ ,  $l = 0, 1, \dots$ , можно взять многочлены Лежандра  $P_l(x)$ , для которых

$$\int_{-1}^1 P_k(x) P_l(x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ \frac{2}{2l+1}, & k = l, \end{cases}$$

$x_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) — корни  $P_{n+1}(x)$ ,

$$A_k = \left\{ \sum_{l=0}^n \frac{2l+1}{2} P_l(x_k) \int_{-1}^1 \sin px P_l(x) dx \right\} \times$$



$$\begin{aligned} & \times \left\{ \sum_{l=0}^n \frac{2l+1}{2} P_l^2(x_k) \right\}^{-1} = \\ & = \left\{ \sum_{l=0}^n \frac{2l+1}{2} P_l(x_k) \times \right. \\ & \times \left\{ \sin p \left[ \frac{P_l'(1) + P_l'(-1)}{p^2} - \dots \right] - \right. \\ & \left. \left. - \cos p \left[ \frac{P_l(1) - P_l(-1)}{p} - \dots \right] \right\} \right\} \times \\ & \times \left\{ \sum_{l=0}^n \frac{2l+1}{2} P_l^2(x_k) \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Для вычисления интеграла здесь использовано равенство (4.1.2).

После этого квадратурную формулу (4.4.1) можно преобразовать к виду, более удобному для применения:

$$\begin{aligned} s(p) & \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) = \\ & = \sum_{k=0}^n f(x_k) \left[ \sin p \left( \frac{D_{k1}}{p^2} - \right. \right. \quad (4.4.5) \\ & \left. \left. - \frac{D_{k3}}{p^4} + \dots \right) - \cos p \left( \frac{D'_{k0}}{p} - \frac{D'_{k2}}{p^3} + \dots \right) \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} D_{ki} & = \frac{2l+1}{2} P_l(x_k) \times \\ & \times \frac{P_l^{(i)}(1) + P_l^{(i)}(-1)}{\sum_{l=0}^n \frac{2l+1}{2} P_l^2(x_k)}; \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

$$\begin{aligned} D'_{ki} & = \frac{2l+1}{2} P_l(x_k) \times \\ & \times \frac{P_l^{(i)}(1) - P_l^{(i)}(-1)}{\sum_{l=0}^n \frac{2l+1}{2} P_l^2(x_k)}. \end{aligned}$$

Аналогично для  $c(p)$  и  $e(p)$  получаем на основании (4.1.3) и (4.1.4):

$$c(p) \approx \sum_{k=0}^n f(x_k) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ \sin p \left( \frac{D_{k0}}{p} - \frac{D'_{k2}}{p^3} + \dots \right) + \right. \\ & \left. + \cos p \left( \frac{D'_{k1}}{p^2} - \frac{D'_{k3}}{p^4} + \dots \right) \right]; \quad (4.4.6') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(p) & \approx \sum_{k=0}^n f(x_k) \left\{ \cos p \left[ \left( \frac{D'_{k1}}{p^2} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{D'_{k3}}{p^4} + \dots \right) - i \left( \frac{D'_{k0}}{p} - \frac{D'_{k2}}{p^3} + \dots \right) \right] + \right. \\ & \left. + \sin p \left[ \left( \frac{D_{k0}}{p} - \frac{D_{k2}}{p^3} + \dots \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + i \left( \frac{D_{k1}}{p^2} - \frac{D_{k3}}{p^4} + \dots \right) \right] \right\}. \quad (4.4.6'') \end{aligned}$$

Коэффициенты  $D_{ki}$  и  $D'_{ki}$ , не зависящие ни от функции  $f(x)$ , ни от параметра  $p$ , могут быть вычислены заранее по известным значениям корней многочленов Лежандра. Значения  $D_{ki}$  и  $D'_{ki}$  для  $k = 0, 1, 2, \dots, n, i = 0, 1, \dots, n$  и  $n = 1, 2, \dots, 15$  приведены в таблице I.

Если  $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , за многочлены  $\omega_l(x)$ ,  $l = 0, 1, \dots$ , можно взять многочлены Чебышева  $T_l(x)$ , для которых

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_l(x) T_k(x) dx = \\ & = \begin{cases} 0, & l \neq k, \\ \frac{\pi}{2}, & l = k \neq 0, \\ \pi, & l = k = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Квадратурные формулы (4.4.1) примут вид

$$s'(p) = \int_{-1}^1 \frac{\sin px}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \approx \quad (4.4.7)$$

$$\begin{aligned} & \approx \sum_{k=0}^n f(x_k) \frac{2 \sum_{l=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-1} (-1)^l T_{2l+1}(x_k) J_{2l+1}(p)}{\frac{1}{\pi} + \sum_{l=1}^n \frac{2}{\pi} T_l^2(x_k)}; \end{aligned}$$

$$c'(p) = \int_{-1}^1 \frac{\cos px}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \approx \quad (4.4.7')$$

$$\approx \sum_{k=0}^n f(x_k) \frac{J_0(p) + 2 \sum_{l=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^l T_{2l}(x_k) J_{2l}(p)}{\frac{1}{\pi} + \sum_{l=1}^n \frac{2}{\pi} T_l^2(x_k)};$$

$$e'(p) = \int_{-1}^1 \frac{e^{ipx}}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \approx \quad (4.4.7'')$$

$$\approx \sum_{k=0}^n f(x_k) \frac{J_0(p) + 2 \sum_{l=1}^n (i)^l T_l(x_k) J_l(p)}{\frac{1}{\pi} + \sum_{l=1}^n \frac{2}{\pi} T_l^2(x_k)},$$

где  $x_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , — корни многочлена Чебышева  $T_{n+1}(x)$ ,  $J_l(p)$  — функции Бесселя целого порядка  $l$  (для них имеются подробные таблицы при многих значениях  $l$  и  $p$ ).

## § 5. КВАДРАТУРЫ НАИВЫСШЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ

К вычислению интегралов  $s(p)$ ,  $c(p)$  и  $e(p)$  можно применить также квадратуры типа Гаусса, т. е.

$$s(p) = \int_a^b \sin px f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k(p) f[x_k(p)],$$

где в качестве узлов интегрирования  $x_k(p)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , взяты корни многочленов, ортогональных по весу  $\sin px$  на отрезке  $[a, b]$ . В этом случае при  $n$  узлах формула дает точное значение интеграла, если  $f(x)$  является многочленом  $(2n-1)$ -ой степени. Но так как весовая функция  $\sin px$  (или  $\cos px$ , или  $e^{ipx}$ ) на отрезке

$[a, b]$  знакопеременна (или имеет комплексные значения), то, начиная с некоторого  $n$ , среди узлов встречаются узлы, лежащие вне отрезка интегрирования. Чтобы избежать этого, целесообразно вес предварительно преобразовать к знакопостоянному, например к весу  $1 + \sin px$ . Тогда  $s(p)$  преобразуется к виду

$$s(p) = \int_a^b (1 + \sin px) f(x) dx - \int_a^b f(x) dx, \quad (4.5.1)$$

а квадратурная формула будет состоять из двух:

$$s(p) \approx \sum_{k=1}^n A_k^s(p) f[x_k^s(p)] - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (4.5.2)$$

причем во второй сумме используются известные узлы и коэффициенты квадратурной формулы Гаусса для постоянного веса. Узлы и коэффициенты первой суммы вычисляются по известным правилам: узлы  $x_k^s(p)$  — как корни многочленов  $\omega_n(x)$ , ортогональных по весу  $(1 + \sin px)$  на отрезке  $[a, b]$ , коэффициенты  $A_k^s(p)$  — по формулам:

$$A_k^s(p) = \frac{1}{\omega_n'(x_k)} \int_a^b (1 + \sin px) \frac{\omega_n(x)}{x - x_k} dx,$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Систематические таблицы  $x_k^s(p)$  и  $A_k^s(p)$ ,  $x_k^c(p)$  и  $A_k^c(p)$ ,  $x_k^e(p)$  и  $A_k^e(p)$  не составлены, хотя попытки вычисления их можно встретить в литературе. Так, в [91] для веса  $1 - \frac{\sin}{\cos} px$  и отрезка  $[0, 2\pi]$  взяты два значения  $p$ :  $p = 1$  и  $p = 1024$ . Даны  $x_k^s(1)$  и  $A_k^s(1)$ ,  $x_k^c(1)$  и  $A_k^c(1)$ ,  $x_k^s(1024)$  и  $A_k^s(1024)$ ,  $x_k^c(1024)$  и  $A_k^c(1024)$ , где  $k, n = 0, 1, 2, 3$ ; приведены также многочлены, ортогональные на отрезке  $[0, 2\pi]$  по весу  $1 - \frac{\sin}{\cos} px$ ,  $p = 1, p = 1024$ .

## Глава 5

### ОСОБЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

Кроме описанных в предыдущих главах методов вычисления конечных интегралов Фурье:  $s(p)$ ,  $c(p)$  и  $e(p)$ , основанных на замене либо всего подынтегрального выражения, либо части его алгебраическим или тригонометрическим многочленом, в практике вычислений используются методы, в основу которых положены другие соображения.

#### § 1. КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ, ОСНОВАННЫЕ НА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

В [19] для вычисления интегралов

$$\int_a^b f(x) e^{ipx} dx,$$

особенно когда их надо находить при заданной  $f(x)$  для серии значений параметра  $p$ , предлагается применять экспоненциальную интерполяцию. Если  $f(x)$ , заданную в  $2n$  равноотстоящих значениях аргумента  $a + jh$ ,  $j = 0, 1, \dots, 2n - 1$ ,

интерполировать выражением вида  $\sum_{k=1}^n A_k e^{\beta_k x}$  и

затем заменить  $f$  указанной суммой в интеграле, то для интеграла при любом  $p$  получаем приближенное выражение

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x) e^{ipx} dx \approx \\ & \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\beta_k - ip}{\beta_{k+1}^2 + p^2} [e^{(\beta_k + ip)b} - e^{(\beta_k + ip)a}]. \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

$2n$  неизвестных  $A_k$  и  $\beta_k$  определяются из системы  $2n$  уравнений:

$$\sum_{k=1}^n A_k e^{\beta_k(a+jh)} = f(a+jh), \quad (5.1.2)$$

$$j = 0, 1, \dots, 2n - 1.$$

Введя вместо  $\beta_k$  и  $A_k$  новые неизвестные  $x_k = e^{\beta_k h}$  и  $A'_k = A_k e^{\beta_k a}$ , получим новую систему  $2n$  уравнений для  $2n$  неизвестных  $A'_k$  и  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ :

$$\sum_{k=1}^n A'_k x_k^j = f_j, \quad j = 0, 1, \dots, 2n - 1, \quad (5.1.3)$$

где  $f_j = f(a + jh)$ .

Решение этой системы проходит по следующим этапам.

1. Из системы  $n$  уравнений первой степени с  $n$  неизвестными  $p_1, p_2, \dots, p_n$ :

$$f_0 p_n + f_1 p_{n-1} + \dots + f_{n-1} p_1 + f_n = 0,$$

$$f_1 p_n + f_2 p_{n-1} + \dots + f_n p_1 + f_{n+1} = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f_{n-1} p_n + f_n p_{n-1} + \dots + f_{2n-2} p_1 + f_{2n-1} = 0,$$

если она разрешима, определяются коэффициенты уравнения степени  $n$

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_{n-1} x + p_n = 0.$$

2. Находятся корни полученного уравнения:

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

3.  $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$  определяются из формул:

$$A'_1 (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) =$$

$$= f_0 x_2 x_3 \dots x_n - f_1 \sum_{(n-2)} x_2 x_3 \dots x_n +$$

$$+ f_2 \sum_{(n-3)} x_2 x_3 \dots x_n - \dots + (-1)^{n-1} f_{n-1},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_n(x_1 - x_n)(x_2 - x_n) \dots (x_{n-1} - x_n) =$$

$$= f_0 x_1 x_2 \dots x_{n-1} - f_1 \sum_{(n-2)} x_1 x_2 \dots x_{n-1} +$$

$$+ f_2 \sum_{(n-3)} x_1 x_2 \dots x_{n-1} - \dots + (-1)^{n-1} f_{n-1},$$

где  $\sum_{(l)} x_2 x_3 \dots x_n$  есть сумма всевозможных произведений по  $l$  различных элементов из указанных  $n-1$ , т. е. элементарная симметрическая функция указанных переменных порядка  $k$ . Все корни  $x_1, x_2, \dots, x_n$  должны быть различными.

4. Поскольку  $x_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) уже определены, находим  $\beta_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) из соотношений:

$$e^{\beta_k h} = x_k, \quad \beta_k = \frac{\ln x_k}{h}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

5. Наконец,

$$A_k = A'_k e^{-\beta_k a}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

На практике вполне достаточную точность может дать формула с небольшим значением  $n$ .

Если  $f(x)$  задана при большем, чем  $2n$ , числе значений аргумента, вычислительную схему можно применить в сочетании с методом наименьших квадратов [2].

## § 2. НАХОЖДЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ С ПОМОЩЬЮ ИТЕРАЦИЙ

С помощью приема, предложенного в [16], можно получить сразу все коэффициенты Фурье периодических функций некоторого определенного вида. Например, пусть требуется вычислить интегралы

$$\gamma_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{a_0 + a_1 \cos x + \dots + a_r \cos rx}{A_0 + A_1 \cos x + \dots + A_s \cos sx} \cos nx dx, \quad (5.2.1)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

где все коэффициенты, вообще говоря, комплексные, а знаменатель подынтегральной функции отличен от нуля. Вводя оператор сдвига  $\Delta a_n = a_{n+1}$  и пользуясь формулами

$$\frac{\Delta^k + \Delta^{-k}}{2} \cos nx = \cos kx \cos nx, \quad n = 0, 1, \dots, s, \quad (5.2.2)$$

получим

$$\left( A_0 + A_1 \frac{\Delta + \Delta^{-1}}{2} + \dots + A_s \frac{\Delta^s + \Delta^{-s}}{2} \right) \gamma_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (a_0 + a_1 \cos x + \dots + a_r \cos rx) \cos nx dx, \quad (5.2.3)$$

т. е. систему уравнений

$$A_0 \gamma_0 + A_1 \frac{\gamma_1 + \gamma_{-1}}{2} + \dots + A_s \frac{\gamma_s + \gamma_{-s}}{2} = 2a_0, \\ A_0 \gamma_1 + A_1 \frac{\gamma_2 + \gamma_0}{2} + \dots + A_s \frac{\gamma_{s+1} + \gamma_{-s+1}}{2} = a_1, \quad (5.2.4)$$

.....  
.....

в которой еще надо привести подобные члены, так как  $\gamma_{-n} = \gamma_n$ . Числа  $\gamma_n$ , образующие решение бесконечной системы, должны при  $n \rightarrow \infty$  стремиться к нулю с экспоненциальной скоростью, и для отыскания решения можно применить один из вариантов метода итераций.

## § 3. ФОРМУЛЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ РАЗНОСТИ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Для вычисления конечных интегралов Фурье  $s(p)$ ,  $c(p)$  и  $e(p)$  при больших  $p$  можно воспользоваться специальным приемом, предложенным в [63] для вычисления определенных интегралов от осциллирующих функций и распространенным в [22] на более широкий класс функций.

Если  $f(x_i) = 0$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ),  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_N \leq b$  и у частичных интегралов

$$I_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \text{ знаки чередуются, то}$$

$$I = \int_a^b f(x) dx = \left[ \frac{1}{2} v_0 - \frac{1}{4} \Delta v_0 + \frac{1}{8} \Delta^2 v_0 - \dots + (-1)^{p-1} 2^{-p} \Delta^{p-1} v_0 \right] + \\ + (-1)^N \left[ \frac{1}{2} v_N + \frac{1}{4} \Delta v_{N-1} + \dots \right]$$

$$+ \frac{1}{8} \Delta^2 v_{N-2} + \dots + 2^{-p} \Delta^{p-1} v_{N-p+1} \Big] + (5.3.1)$$

$$+ 2^{-p} (-1)^p [\Delta^p v_0 - \Delta^p v_1 +$$

$$+ \dots + (-1)^{N-p} \Delta^p v_{N-p}], \quad p \leq N,$$

где обозначено  $v_i = |I_i|$ ,  $\Delta v_i = v_{i+1} - v_i$ ,

$$\Delta^{r+1} v_i = \Delta^r v_{i+1} - \Delta^r v_i.$$

Это точное выражение. Если  $f(x)$  такова, что разности абсолютных величин частичных интегралов около начала и конца промежутка интегрирования монотонно и достаточно быстро убывают, оно значительно упрощается, так как при больших значениях  $p$  последние члены в первых двух скобках и вся третья скобка очень малы.

Получаем хорошее приближение к интегралу

$$I \approx \frac{1}{2} v_0 - \frac{1}{4} \Delta v_0 + \frac{1}{8} \Delta^2 v_0 - \dots +$$

$$+ (-1)^N \left[ \frac{1}{2} v_N + \frac{1}{4} \Delta v_{N-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8} \Delta^2 v_{N-2} + \dots \right]. \quad (5.3.2)$$

Для вычисления интеграла достаточно знать несколько частичных интегралов вблизи концов интегрирования, число их определяется быстрой убывания разностей  $\Delta^k v_i$ .

#### § 4. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПО РАЗРЫВАМ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ

В случае, если сама функция или ее производные имеют разрывы, можно определить

по этим разрывам коэффициенты Фурье, если исходить из формул (1.5.1), служивших для определения в коэффициентах Фурье составляющих различных порядков малости по отношению к  $1/k$  при неограниченно возрастающем  $k$ , где  $k$  — порядок коэффициента Фурье.

Перепишем формулы (1.5.1) в следующем виде:

$$2\pi c_k^0 = \sum_{l=0}^m S^l (ik)^{-l-1} +$$

$$+ 2\pi (ik)^{-m-1} c_k^{m+1}. \quad (5.4.1)$$

Напомним, что величины  $S^0, S^1, S^2, \dots$  выражаются через абсциссы точек разрыва и величины скачков функций  $f, f', f'', \dots$  в этих точках.

Отсюда видно, что если производная порядка  $m$  есть кусочно постоянная функция, то  $c_k^{m+1} = 0$  и формула

$$2\pi c_k^0 = \sum_{l=0}^m S^l (ik)^{-l-1} \quad (5.4.2)$$

даст точное значение коэффициента Фурье  $c_k^0$ . Кроме того, это равенство может дать хорошее приближенное значение  $c_k^0$  для функции, у ко-

торой  $c_k^{m+1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(m+1)}(x) e^{-ikx} dx$  имеет не-

большое значение, и величиной  $\frac{1}{(ik)^{m+1}} c_k^{m+1}$  можно пренебречь.

## Глава 6

### УЛУЧШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

#### § 1. ОСЛАБЛЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ФУНКЦИИ ПРИ ПОМОЩИ РАЗЛОЖЕНИЯ ЕЕ НА ОСОБУЮ И ГЛАДКУЮ ЧАСТИ

Методы вычисления интегралов

$$s(p) = \int_a^b f(x) \sin px dx, \quad c(p) = \int_a^b f(x) \cos px dx,$$

$$e(p) = \int_a^b f(x) e^{ipx} dx \quad (6.1.1)$$

(при частных значениях  $p$  получаем коэффициенты Фурье функции  $f(x)$ ), рассмотренные в гл. 2, 3 и 4, предполагали замену либо всего подынтегрального выражения, либо только функции  $f$  интерполяционным алгебраическим или тригонометрическим многочленом, построенным по значениям  $f$  в некоторой системе узлов (эти значения могут быть заданы или вычислены), поэтому точность вычисления интегралов по этим методам в большой мере зависит от степени гладкости функции, от того, как хорошо функция приближается многочленами. Если функция недостаточно гладкая, применение изложенных методов может оказаться невозможным или точность вычисления указанных интегралов и коэффициентов Фурье будет неудовлетворительна. Заметное улучшение точности вычисления может принести предварительное преобразование функции, заключающееся в отделении тех или иных особенностей функции от ее более гладкой части.

Представим  $f(x)$  в виде

$$f(x) = F(x) + \varphi(x) \quad (6.1.2)$$

и выберем функцию  $F(x)$  так, чтобы она содержала все или основные особенности  $f(x)$  и для нее интегралы (6.1.1) или коэффициенты Фурье вычислялись точно. Функция же  $\varphi(x)$

должна быть более гладкой, чем  $f(x)$ , чтобы ее коэффициенты Фурье можно было с достаточной точностью вычислить при помощи выбранного правила.

#### § 2. НЕПРЕРЫВНОЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИИ. УВЕЛИЧЕНИЕ БЫСТРОТЫ УБЫВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Правила представления функции в виде (6.1.2) определяются характером особенностей самой функции, но в некоторой мере и выбранным правилом вычисления интегралов (6.1.1). При применении правил, рассмотренных в гл. 2 и 4, поведение функции  $f$  вне отрезка интегрирования не имело значения, правила же гл. 3, основанные на тригонометрическом интерполировании, предполагали функцию  $f$  периодически и гладко продолженной на всю ось  $x$ , следовательно, требовали равенства значений функции и ее производных до некоторого порядка на концах отрезка интегрирования, который всегда может быть преобразован в отрезок  $[0, 2\pi]$ :

$$f(0) = f(2\pi), \quad f'(0) = f'(2\pi), \quad \dots,$$

$$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(2\pi), \quad \dots \quad (6.2.1)$$

Если условия (6.2.1) не выполняются, периодическое продолжение функции не получится гладким. При нарушении первого условия график периодической функции будет иметь разрывы в точках  $x = 2k\pi$  ( $k=0, \pm 1, \dots$ ). При выполнении первого условия и невыполнении второго в точках  $x = 2k\pi$  ( $k=0, \pm 1, \dots$ ) угол наклона касательной к кривой скачкообразно меняется. Это — точки перелома кривой. Если выполняются первые два условия и не выполняется третье, в точках  $x = 2k\pi$  ( $k=0, \pm 1, \dots$ ) происходит разрыв кривизны кривой и т. д.

При применении правил гл. 3 важна не только достаточная гладкость функции внутри отрезка интегрирования, но и выполнение условий (6.2.1). Вопросом создания достаточно высокого порядка дифференцируемости функции внутри отрезка мы займемся далее, а сейчас укажем, как добиться выполнения условий (6.2.1).

Пусть  $f(x)$  непрерывная на  $[0, 2\pi]$ . В качестве функции  $F(x)$  возьмем  $2\pi$ -периодическую кривую, заданную на  $[0, 2\pi]$  уравнением

$$F(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m, \quad (6.2.2)$$

коэффициенты которого определяются из условий

$$F^{(j)}(2\pi) - F^{(j)}(0) = f^{(j)}(2\pi) - f^{(j)}(0), \quad (6.2.3) \\ j = 0, 1, \dots, m-1,$$

причем коэффициенты Фурье и интегралы (6.1.1) для функции  $F(x)$  точно вычисляются по формулам (4.1.2) — (4.1.4), а для функции  $\varphi(x) = f(x) - F(x)$  условия (6.2.1) выполняются и правила гл. 3 дают более точный результат при нахождении коэффициентов Фурье, будучи примененными к функции  $\varphi(x)$ , а не к первоначальной функции  $f(x)$ .

$$\text{Если взять } F(x) = \frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi} x + f(0),$$

функция  $\varphi(x)$  при периодическом продолжении будет непрерывна в точках  $x = 2k\pi$  и даже  $\varphi(2k\pi) = 0$ . На основании § 5 гл. 1 коэффициенты Фурье функции  $\varphi(x)$ , непрерывной на  $[0, 2\pi]$ , при условии, что  $\varphi'(x)$  есть кусочно непрерывная функция, имеют по меньшей мере второй порядок относительно  $1/n$ .

$$\text{При } F(x) = \frac{f'(2\pi) - f'(0)}{4\pi} x^2 + \left[ \frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi} - \frac{f'(2\pi) - f'(0)}{2} \right] x + f(0) \text{ функция } \varphi(x) \text{ после}$$

периодического продолжения будет непрерывной и иметь непрерывную первую производную. Кроме того,  $\varphi(2k\pi) = 0$ . Коэффициенты Фурье такой функции, если  $\varphi''$  кусочно непрерывна на  $[0, 2\pi]$ , имеют по меньшей мере третий порядок относительно  $1/n$ . Продолжая таким образом, можем, очевидно, получить функцию  $\varphi(x)$ , коэффициенты Фурье которой будут любого порядка малости относительно  $1/n$ .

### § 3. УСТРАНЕНИЕ РАЗРЫВОВ ПЕРВОГО РОДА У ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ

Правила, изложенные в гл. 2, 3 и 4, основанные на алгебраическом или тригонометрическом интерполировании функции, дают более

точный результат для более гладких функций. Рассмотрим, как получить более гладкую функцию из первоначальной кусочно дифференцируемой до порядка  $m$  функции  $f$ , если  $f$  и ее производные до порядка  $m$  могут иметь разрывы только первого рода в точках  $x_1, x_2, \dots, x_p$ . Так как поведение функции вне отрезка интегрирования сейчас не имеет значения, будем считать

$$0 < x_1 < x_2 < \dots < x_p < 2\pi.$$

Определив места разрывов функции  $f$  и первых ее  $m$  производных, составляем функцию  $F(x)$  из отдельных кусков прямых линий и параболических кривых, уравнения которых

$$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \\ y = b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0, \quad (6.3.1)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y = p_m x^m + p_{m-1} x^{m-1} + \dots + p_0$$

определены так, чтобы величины скачков и места разрывов функции  $F(x)$  и первых ее  $m$  производных были те же, что и у  $f$ .

Прежде всего находим места разрывов и величины скачков самой функции  $f(x)$ , т. е. величины

$$x_1, x_2, \dots, x_p; \quad k_1 = f(x_1 + 0) - f(x_1 - 0), \quad k_2 = f(x_2 + 0) - f(x_2 - 0), \dots, \\ k_p = f(x_p + 0) - f(x_p - 0), \quad (6.3.2)$$

и определяем  $F(x)$  в виде ступенчатой функции, составленной из прямолинейных отрезков следующим образом:

$$F(x) = 0 = a_0 \quad \text{для } 0 < x < x_1, \\ F(x) = k_1 = a_1 \quad \text{для } x_1 < x < x_2, \\ F(x) = k_1 + k_2 = a_2 \quad \text{для } x_2 < x < x_3, \\ \dots \dots \dots (6.3.3)$$

$$F(x) = k_1 + k_2 + \dots + k_p = a_p \quad \text{для } x_p < x < 2\pi;$$

тогда функция

$$\varphi(x) = f(x) - F(x)$$

будет непрерывна от  $x = 0$  до  $x = 2\pi$ .

Если непрерывности  $\varphi(x)$  для вычислений недостаточно, продолжаем процесс нахождения  $F(x)$  следующим образом. Полученная функция  $\varphi(x)$  кусочно дифференцируема, причем  $\varphi'(x) = f'(x)$ ; находим места разрывов и величины скачков производной:

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_p; \quad k'_1 = f'(x'_1 + 0) - f'(x'_1 - 0)$$

$$-f'(x'_1 - 0), \dots, \\ k'_p = f'(x'_{p-} + 0) - f'(x'_{p-} - 0) \quad (6.3.4)$$

и совершенно подобно предыдущему составляем ступенчатую функцию  $F'_1(x)$ , такую, что

$$\varphi'_1(x) = f'(x) - F'_1(x) \quad (6.3.5)$$

— непрерывная функция на  $[0, 2\pi]$ . Интегрируя равенство (6.3.5), получим функцию

$$\varphi_1(x) = \int f'(x) dx - \int F'_1(x) dx = \\ = f(x) - \int F'_1(x) dx. \quad (6.3.6)$$

При вычислении интеграла  $\int F'_1(x) dx$  обнаруживается, что вместо ступенчатой функции  $F'_1(x) = a'_i$  типа (6.3.3) получается соответствующая ей функция, составленная из прямолинейных отрезков  $F_1(x) = a'_i x + c_i$ . Произвольные постоянные  $c_i$ , вводимые таким интегрированием, определяются из условия, что функция  $\varphi_1(x)$  непрерывна на  $[0, 2\pi]$ . На основании (6.3.5)  $\varphi_1(x)$  имеет и непрерывную производную.

Совершенно аналогично продолжаем процесс, чтобы получить функцию дважды непрерывно дифференцируемую:

1) дифференцируя (6.3.5), имеем  $\varphi''_1(x) = f''(x)$  и определяем места разрывов и величины скачков  $f''(x)$ ;

2) составляем ступенчатую функцию  $F''_2(x) = a''_i$  типа (6.3.3), такую, что функция  $\varphi''_2(x) = f''(x) - F''_2(x)$  непрерывна на  $[0, 2\pi]$ ;

3) интегрируя предыдущее равенство, получаем  $\varphi'_2(x) = f'(x) - a''_i x - c'_i$ , причем все  $c'_i$  определяются из условия непрерывности  $\varphi'_2(x)$ ;

4) полученное равенство снова интегрируем

$$\varphi_2(x) = f(x) - \frac{1}{2} a''_i x^2 - c'_i x - c''_i$$

и  $c''_i$  определяем из условия непрерывности  $\varphi_2(x)$ . В результате  $\varphi_2(x)$  — дважды непрерывно дифференцируемая функция, и  $F_2(x)$  составлена из отдельных кусков парабол вида  $a_0 x^2 + a_1 x + a_2$ .

Так продолжая, можно из кусочно дифференцируемой до порядка  $m$  функции с разрывами функции и производных только первого рода получить непрерывно дифференцируемую до порядка  $m$  функцию.

Пример.  $f(x)$  задана условиями

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x < \pi, \\ \frac{4}{x}, & \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

$f(x)$  претерпевает разрыв в точке  $x = \pi$  и скачок  $k_1 = \frac{4}{\pi}$ . Определяем ступенчатую функцию  $F(x)$ :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \pi, \\ \frac{4}{\pi}, & \pi < x < 2\pi, \end{cases}$$

тогда  $\varphi(x) = f(x) - F(x)$  непрерывна и

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x < \pi, \\ \frac{4}{x} - \frac{4}{\pi}, & \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

Продифференцируем  $f(x)$ :

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ -1, & \frac{\pi}{2} < x < \pi, \\ -\frac{4}{x^2}, & \pi < x < 2\pi; \end{cases}$$

$f'(x)$  претерпевает разрывы в двух точках:

в точке  $x'_1 = \frac{\pi}{2}$  скачок  $k'_1 = -2$ ,

в точке  $x'_2 = \pi$  скачок  $k'_2 = 1 - \frac{4}{\pi^2}$ ,

и поэтому

$$F'_1(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ -2, & \frac{\pi}{2} < x < \pi, \\ -1 - \frac{4}{\pi^2}, & \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

Тогда  $\varphi'(x) = f'(x) - F'_1(x)$  и  $\varphi(x) = f(x) - F_1(x)$  непрерывны, где

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ -2x + \pi, & \frac{\pi}{2} < x < \pi, \\ -\left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right)x + \frac{2}{\pi}, & \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$



Окончательно

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi, \\ \frac{4}{x} + \left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right)x - \frac{2}{\pi}, & \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

Кроме изложенного способа, для устранения разрывов первого рода у функции и ее производных можно воспользоваться периодиче-

скими функциями, связанными с многочленами Бернулли [11]. Задача ослабления у функции и ее производных особенностей, отличных от разрывов первого рода, более сложна и трудоемка. Приемы ослабления таких особенностей могут быть самыми разными в зависимости от характера особенностей. С некоторыми приемами можно ознакомиться в [3]. В [11] указан способ вычисления коэффициентов Фурье для функций со степенными особенностями.

# Часть вторая

## ЧИСЛЕННЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

### Глава 7

#### ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ И СВЯЗЬ ИХ С ФОРМУЛОЙ ФУРЬЕ

##### § 1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Гармонический анализ произвольной непериодической функции, заданной на оси или полуоси, выполняется при помощи интегралов Фурье. Им можно придавать различный смысл в зависимости от задачи, для решения которой они применяются, и в зависимости от класса функций, которые подвергаются преобразованиям. Для многих приложений достаточными являются следующие простые определения, которые мы примем для всего последующего изложения.

Пусть на оси  $-\infty < x < \infty$  дана абсолютно интегрируемая функция  $f(x)$  и  $p$  есть произвольный действительный параметр. Общим комплексным преобразованием Фурье функции  $f(x)$  называют следующий интеграл:

$$F(p; f) = F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx. \quad (7.1.1) \quad \text{Тогда}$$

Если  $f(x)$  задана на полуоси  $0 \leq x < \infty$  и абсолютно интегрируема там, то ее косинус- и синус-преобразованиями Фурье называются интегралы

$$C(p; f) = C(p) = \int_0^{\infty} f(x) \cos pxdx, \quad (7.1.2)$$

$$S(p; f) = S(p) = \int_0^{\infty} f(x) \sin pxdx. \quad (7.1.3)$$

Наряду с ними мы будем рассматривать, для упрощения записи, одностороннее комплексное преобразование Фурье

$$\begin{aligned} E(p; f) = E(p) &= \int_0^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx = \\ &= C(p) - iS(p). \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

Все введенные интегралы  $F$ ,  $C$ ,  $S$ ,  $E$  ввиду абсолютной интегрируемости  $f(x)$  сходятся при любых действительных значениях  $p$ , равномерно относительно  $p$  и являются непрерывными функциями  $p$ .

$C(p)$ , очевидно, является четной, а  $S(p)$  — нечетной функцией  $p$ , и их достаточно рассматривать при неотрицательных  $p$ .

Заметим также, что  $F(p)$  просто выражается через  $C(p)$  и  $S(p)$ . Разложим  $f(x)$  на четную и нечетную части, положив

$$f_{\text{ч}}(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)],$$

$$f_{\text{н}}(x) = \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)],$$

$$f(x) = f_{\text{ч}}(x) + f_{\text{н}}(x).$$

$$F(p) = 2 \int_0^{\infty} f_{\text{ч}}(x) \cos pxdx -$$

$$- 2i \int_0^{\infty} f_{\text{н}}(x) \sin pxdx =$$

$$= 2C(p; f_{\text{ч}}) - 2iS(p; f_{\text{н}}).$$

Поэтому общее преобразование Фурье можно, по крайней мере в некоторых вопросах вычислений, не рассматривать отдельно и ограничиться изучением только задачи численного осуществления косинус- и синус-преобразований  $C(p)$  и  $S(p)$ .

Заметим также, что при  $p \rightarrow \pm \infty$  каждый из интегралов (7.1.1) — (7.1.4) будет стремиться к нулю. В некоторых случаях можно получить достаточно точное представление о скорости убывания интегралов. Результат достаточно сформулировать для  $E(p)$ .

Если  $f(x)$  имеет на  $[0, \infty)$  непрерывные, абсолютно интегрируемые и стремящиеся к нулю при  $p \rightarrow \infty$  производные до порядка  $m+1$  включительно, то при помощи интегрирования по частям можно получить следующее представление  $E(p)$ :

$$E(p) = (ip)^{-1}f(0) + (ip)^{-2}f'(0) + \dots + (ip)^{-m-1}f^{(m)}(0) + (ip)^{-m-1} \int_0^{\infty} f^{(m+1)}(x) e^{-ipx} dx.$$

Равенство показывает, что скорость убывания  $E(p)$  существенно связана с поведением  $f(x)$  в окрестности точки  $x=0$ .

## § 2. ФОРМУЛА ФУРЬЕ И СВЯЗЬ ЕЕ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ФУРЬЕ

Правую часть стоящего ниже равенства (7.2.1) называют двукратным или повторным интегралом Фурье. Говорят, что функция  $f(x)$ , заданная на оси  $-\infty < x < \infty$ , представима двукратным интегралом Фурье или что для  $f(x)$  верна формула Фурье, если интеграл Фурье сходится при всяких значениях  $x$  и выполняется равенство

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos p(t-x) dt, \quad (7.2.1)$$

$$-\infty < x < \infty.$$

**Теорема.** Для представимости функции  $f(x)$  двукратным интегралом Фурье достаточно выполнения условий: 1)  $f(x)$  абсолютно интегрируема на оси  $-\infty < x < \infty$ ; 2) на каждом конечном отрезке оси  $f(x)$  имеет не более конечного числа точек разрыва, в каждой из которых  $f(x)$  претерпевает разрыв первого рода; 3) любой конечный отрезок оси может быть разделен на конечное число частей так, чтобы на каждой части  $f(x)$  изменялась монотонно\*; 4) в каждой точке разрыва  $f(x)$  выполняется равенство

$$f(x) = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)].$$

Если в (7.2.1) косинус разности заменить известным его выражением, этому равенству можно придать форму

$$f(x) = \int_0^{\infty} [a(p) \cos px + b(p) \sin px] dp, \quad (7.2.2)$$

$$a(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ptdt,$$

\* Условия 2 и 3 теоремы могут быть заменены одним более общим:  $f(x)$  на оси  $-\infty < x < \infty$  представима в виде разности двух монотонных функций (или на каждом конечном отрезке оси имеет ограниченное изменение).

$$b(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ptdt.$$

Здесь наглядно обнаруживается аналогия между рядом Фурье (1.3.2) для промежутка конечной длины  $l$  и формулой Фурье. В ряду частота пробегает дискретный ряд равноотстоящих значений  $p = k \frac{2\pi}{l}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) с шагом  $\Delta p = 2\pi/l$ . В (7.2.2) она является непрерывно изменяющейся переменной, и ряд заменяется интегралом по частоте  $p$ . Коэффициенты  $a(p)$  и  $b(p)$  имеют строение, сходное с коэффициентами Фурье (1.3.2).

Соотношения Эйлера между показательными и тригонометрическими функциями позволяют проверить, что формулу Фурье можно записать в комплексном виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ipx} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ipt} dt, \quad (7.2.3)$$

где внешний интеграл по  $p$  понимается в смысле главного значения, как предел симметрично взятого интеграла\*  $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A g(p) dp$ .

(7.2.3) равносильна выполнению двух равенств:

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ipt} dt, \quad (7.2.3')$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(p) e^{ipx} dp.$$

Они имеют сходное строение и отличаются между собой тем, что во втором равенстве  $i$  заменено на  $-i$  и интеграл понимается как главное значение. Первое равенство есть преобразование Фурье оригинала  $f$  в изображение  $F$ . В принятом нами в § 1 определении общего комплексного преобразования Фурье мы постоянный множитель  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ , не имеющий для нас значения, присоединили к функции  $f$ .

Второе равенство есть обращение преобразования, позволяющее по изображению  $F$  найти оригинал  $f$ . Интеграл, стоящий в нем справа, просто приводится к косинус- и синус-преобразованиям, и вычисление его может быть выполнено по методам, излагаемым ниже, и

\* Это условие равносильно тому, что в комплексном двойном интеграле (7.2.3) рассматривается только его действительная часть и отбрасывается мнимая.

не будет требовать вообще создания новых правил.

Действительно,  $F(p)$  есть комплекснозначная функция:

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ptdt - \\ - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ptdt = U(p) - iV(p).$$

При этом, очевидно,  $U(p)$  есть четная и  $V(p)$  нечетная функции  $p$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(p) e^{ipx} dp = 2 \int_0^{\infty} [U(p) \cos px + \\ + V(p) \sin px] dx.$$

Когда  $f(x)$  есть четная функция  $x$ , формула Фурье (7.2.1) упрощается:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos pxdp \int_0^{\infty} f(t) \cos ptdt, \quad (7.2.4) \\ x \geq 0.$$

Соответствующие ей интегральное преобразование и его обращение будут симметричными и вещественными:

$$C(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos ptdt, \quad (7.2.5)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} C(p) \cos pxdp.$$

Каждое из этих равенств является косинус-преобразованием Фурье.

Аналогично, если  $f(x)$  есть нечетная функция  $x$ , формула Фурье принимает вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin pxdp \int_0^{\infty} f(t) \sin ptdt. \quad (7.2.6)$$

Связанные с ней интегральное преобразование и его обращение также будут действительными, симметричными, и каждое будет синус-преобразованием Фурье:

$$S(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin ptdt, \quad (7.2.7)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} S(p) \sin pxdp.$$

## Глава 8

### ПРИМЕНЕНИЕ ИЗВЕСТНЫХ ПРАВИЛ КВАДРАТУР К ИНТЕГРАЛАМ ФУРЬЕ

#### § 1. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРАВИЛ С РАВНООТСТОЯЩИМИ УЗЛАМИ

Для выполнения численного преобразования Фурье, т. е. для вычисления интегралов

$$\begin{aligned} S(p) &= \int_0^{\infty} f(x) \sin px dx, \\ C(p) &= \int_0^{\infty} f(x) \cos px dx, \\ F(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx, \end{aligned} \quad (8.1.1)$$

можно воспользоваться правилами, полученными нами во второй и четвертой главах для конечного отрезка интегрирования, распространив их на бесконечный промежуток.

Допустим, что функция  $f(x)$  дана в системе равноотстоящих точек  $x_i = ih$  ( $i = 0, 1, \dots$ ), и предположим, кроме того, что при  $x \rightarrow \pm \infty$   $f(x)$  настолько быстро стремится к нулю, что обеспечивается абсолютная сходимость интегралов (8.1.1). Для определенности будем, например, считать, что при всех достаточно больших  $|x|$  выполняется неравенство

$$|f(x)| \leq A|x|^{-1-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0. \quad (8.1.2)$$

Если правила, полученные в гл. 2 и 4, применить к интегралам с конечными пределами 0 и  $\infty$  и перейти к пределу при  $\nu \rightarrow \infty$ , будем иметь правила для численного выполнения преобразований Фурье. Если  $p$  невелико и колебания подынтегрального выражения, вызываемые множителями  $\sin px, \cos px$  либо  $e^{-ipx}$ , незначительны, то на преобразование Фурье можно распространить правила гл. 2.

Приведем некоторые из этих правил. Здесь и далее примем обозначение  $f(kh) = f_k$ .

1. Правило трапеций:

$$\begin{aligned} S(p) &= \int_0^{\infty} f(x) \sin px dx \approx \\ &\approx h \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin pkh, \\ C(p) &= \int_0^{\infty} f(x) \cos px dx \approx \\ &\approx h \left\{ \frac{1}{2} f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos pkh \right\}, \end{aligned} \quad (8.1.3)$$

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx \approx \\ &\approx h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-ipkh}. \end{aligned}$$

2. Правило Симпсона:

$$\begin{aligned} S(p) &= \int_0^{\infty} f(x) \sin px dx \approx \\ &\approx \frac{h}{3} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k} \sin 2pkh + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k-1} \sin p(2k-1)h \right\}, \\ C(p) &= \int_0^{\infty} f(x) \cos px dx \approx \\ &\approx \frac{h}{3} \left\{ \frac{1}{2} f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k} \cos 2pkh + \right. \end{aligned}$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k-1} \cos p(2k-1)h \Big\}, \quad (8.1.4)$$

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx \approx \\ \approx \frac{h}{3} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{2k} e^{-i2pkh} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{2k-1} e^{-ip(2k-1)h} \right\}.$$

Попутно заметим, что к вычислению интегралов (8.1.1) можно применить не только правила Ньютона — Котеса, но и некоторые другие правила квадратур, известные для бесконечного отрезка интегрирования. Такими правилами могут, например, быть квадратурные формулы высшей алгебраической степени точности для интегралов вида  $\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx$  и др.

С увеличением  $p$  колебания подынтегральных выражений в интегралах Фурье (8.1.1) становятся все более частыми, и, чтобы с достаточной точностью учесть их, при применении правил Котеса и других классических правил пришлось бы брать малый шаг  $h$  или большое число узлов. Здесь, как и в задаче вычисления коэффициентов Фурье, полезными могут быть методы, учитывающие заранее колеблющиеся множители в качестве весовых функций. Они основаны на алгебраическом интерполировании функции  $f$  на отдельных участках оси  $x$  и рассмотрены в гл. 4 (4.2.2) — (4.2.5).

1. Правила, основанные на линейном интерполировании  $f$  на отрезках  $[kh, (k+1)h]$  (аналоги правила трапеций):

$$\int_0^{\infty} f(x) \sin pxdx \approx \beta_1 f_0 + \\ + 2\alpha_1 \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin pkh; \quad (8.1.5_1)$$

$$\int_0^{\infty} f(x) \cos pxdx \approx \alpha_1 f_0 + \\ + 2\alpha_1 \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos pkh; \quad (8.1.5_2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx \approx \\ \approx 2\alpha_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-ipkh}, \quad (8.1.5_3)$$

$$\text{где } \alpha_1 = \frac{1}{p^2 h} (1 - \cos ph),$$

$$\beta_1 = \frac{1}{p} \left( 1 - \frac{1}{ph} \sin ph \right).$$

2. Правила, основанные на интерполировании второй степени на отрезках  $[2kh, 2(k+1)h]$  (аналоги правила Симпсона):

$$\int_0^{\infty} f(x) \sin pxdx \approx \beta_2 f_0 + \\ + \gamma_2 \sum_{k=0}^{\infty} \sin(2k+1)ph f_{2k+1} + \\ + 2\alpha_2 \sum_{k=1}^{\infty} \sin 2kph f_{2k}; \quad (8.1.6_1)$$

$$\int_0^{\infty} f(x) \cos pxdx \approx \alpha_2 f_0 + \\ + \gamma_2 \sum_{k=0}^{\infty} \cos(2k+1)ph f_{2k+1} + \\ + 2\alpha_2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos 2kph f_{2k}; \quad (8.1.6_2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx \approx \\ \approx 2\alpha_2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ip2kh} f_{2k} + \\ + \gamma_2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ip(2k+1)h} f_{2k+1}, \quad (8.1.6_3)$$

$$\Theta = ph,$$

$$\frac{1}{h} \alpha_2 = \frac{3}{2} \Theta^{-2} + \frac{1}{2} \Theta^{-2} \cos 2\Theta - \Theta^{-3} \sin 2\Theta,$$

$$\frac{1}{h} \beta_2 = \Theta^{-1} - \Theta^{-3} + \frac{1}{2} \Theta^{-2} \sin 2\Theta + \\ + \Theta^{-3} \cos 2\Theta,$$

$$\frac{1}{h} \gamma_2 = 4\Theta^{-2} [\Theta^{-1} \sin \Theta - \cos \Theta].$$

3. Формулы, основанные на интерполировании  $f$  третьей степени на участках  $[3kh, 3(k+1)h]$  (аналоги Ньютонова правила «трех восьмых»):

$$\int_0^{\infty} f(x) \sin pxdx \approx \beta_3 f_0 + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma_3 \sin 3kph +$$

$$+ \delta_3 \cos 3kph) f_{3k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_3 \sin 3kph - \delta_3 \cos 3kph) f_{3k-1} + 2\alpha_3 \sum_{k=1}^{\infty} \sin 3kph f_{3k}; \quad (8.1.7_1)$$

$$\int_0^{\infty} f(x) \cos pxdx \approx \alpha_3 f_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma_3 \cos 3kph - \delta_3 \sin 3kph) f_{3k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_3 \cos 3kph - \delta_3 \sin 3kph) f_{3k-1} + 2\alpha_3 \sum_{k=1}^{\infty} \cos 3kph f_{3k}; \quad (8.1.7_2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx \approx (\gamma_3 - i\delta_3) \sum_{k=0}^{\infty} [e^{-i3kph} f_{3k+1} + e^{i3kph} f_{-(3k+1)}] + (\gamma_3 + i\delta_3) \sum_{k=1}^{\infty} [e^{-i3kph} f_{3k-1} + e^{i3kph} f_{-(3k-1)}] + 2\alpha_3 \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i3kph} f_{3k}. \quad (8.1.7_3)$$

В этих формулах значения  $\alpha_3$ ,  $\beta_3$ ,  $\gamma_3$ ,  $\delta_3$  следующие:

$$\begin{aligned} \Theta &= ph, \\ \frac{1}{h} \alpha_3 &= \frac{11}{6} \Theta^{-2} - \Theta^{-4} + \\ &+ \left( \Theta^{-4} - \frac{1}{3} \Theta^{-2} \right) \cos 3\Theta + \Theta^{-3} \sin 3\Theta, \\ \frac{1}{h} \beta_3 &= \Theta^{-1} - 2\Theta^{-3} + \\ &+ \left( \Theta^{-4} - \frac{1}{3} \Theta^{-2} \right) \sin 3\Theta - \Theta^{-3} \cos 3\Theta, \\ \frac{1}{h} \gamma_3 &= 3\Theta^{-4} - 3\Theta^{-2} + \\ &+ 3 \left( \frac{1}{2} \Theta^{-2} - \Theta^{-4} \right) \cos 3\Theta - 4\Theta^{-3} \sin 3\Theta, \\ \frac{1}{h} \delta_3 &= 5\Theta^{-3} + \\ &+ 3 \left( \frac{1}{2} \Theta^{-2} - \Theta^{-4} \right) \sin 3\Theta + 4\Theta^{-3} \cos 3\Theta. \end{aligned}$$

При получении предыдущих вычислительных правил выполнялось интерполирование функции  $f$  по значениям, которые она принимает в узлах  $x_k$ . В некоторых задачах, кроме значений функции, бывают известны значения производных от нее.

Для построения правила вычисления тогда естественно воспользоваться интерполированием с кратными узлами. Мы остановимся на случае, когда в равноотстоящих точках  $x_k = kh$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) известны значения функции  $f$  и первой производной  $f' : f(kh) = f_k$  и  $f'(kh) = f'_k$ .

Простые правила квадратур, использующие все эти величины, могут быть получены из равенств (4.3.2) — (4.3.3), если положить в них  $a = 0$ ,  $b = Nh$  и выполнить предельный переход при  $N \rightarrow \infty$ , считая, что при  $|x| \rightarrow \infty$   $f$  и  $f'$  достаточно быстро стремятся к нулю, например удовлетворяют неравенствам  $|f|, |f'| \leq M|x|^{-1-\varepsilon}$  ( $\varepsilon > 0$ ).

4. Интерполирование  $f$  многочленом третьей степени выполняется на каждом из отрезков  $[kh, (k+1)h]$  по значениям  $f_k, f_{k+1}, f'_k, f'_{k+1}$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(x) \sin pxdx &\approx \beta'_1 f_0 + \delta'_1 f'_0 + \\ &+ 2\alpha'_1 \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin kph + \\ &+ 2\delta'_1 \sum_{k=1}^{\infty} f'_k \cos kph; \quad (8.1.8_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(x) \cos pxdx &\approx \alpha'_1 f_0 - \gamma'_1 f'_0 + \\ &+ 2\alpha'_1 \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos kph - \\ &- 2\delta'_1 \sum_{k=1}^{\infty} f'_k \sin kph; \quad (8.1.8_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx &\approx 2\alpha'_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-ikph} - \\ &- 2i\delta'_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} f'_k e^{-ikph}, \quad (8.1.8_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta &= ph, \\ h^{-1} \alpha'_1 &= 12\Theta^{-4} (1 - \cos \Theta) - 6\Theta^{-3} \sin \Theta, \\ h^{-1} \beta'_1 &= 6\Theta^{-3} \cos \Theta - 12\Theta^{-4} \sin \Theta + \\ &+ \Theta^{-3} (6 + \Theta^2), \\ h^{-2} \gamma'_1 &= \Theta^{-2} - 6\Theta^{-4} + 2\Theta^{-3} \sin \Theta + \\ &+ 6\Theta^{-4} \cos \Theta, \\ h^{-2} \delta'_1 &= 4\Theta^{-3} - 6\Theta^{-4} \sin \Theta + 2\Theta^{-3} \cos \Theta. \end{aligned}$$

5. Интерполирование  $f$  пятой степени выполняется на каждом отрезке  $[2kh, 2(k+1)h]$  по шести значениям  $f_{2k}, f'_{2k}, f_{2k+1}, f'_{2k+1}, f_{2k+2}, f'_{2k+2}$ :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x) \sin pxdx &\approx \beta'_2 f_0 + \\ &+ \gamma'_2 \sum_{k=0}^\infty \sin(2k+1)ph f_{2k+1} + \\ &+ 2\alpha'_2 \sum_{k=1}^\infty \sin 2kph f_{2k} + \zeta'_2 f'_0 + \\ &+ \eta'_2 \sum_{k=0}^\infty \cos(2k+1)ph f'_{2k+1} + \\ &+ 2\zeta'_2 \sum_{k=1}^\infty \cos 2kph f'_{2k}; \end{aligned} \quad (8.1.9_1)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x) \cos pxdx &\approx \alpha'_2 f_0 + \\ &+ \gamma'_2 \sum_{k=0}^\infty \cos(2k+1)ph f_{2k+1} + \\ &+ 2\alpha'_2 \sum_{k=1}^\infty \cos 2kph f_{2k} - \delta'_2 f'_0 - \\ &- \eta'_2 \sum_{k=0}^\infty \sin(2k+1)ph f'_{2k+1} - \\ &- 2\zeta'_2 \sum_{k=1}^\infty \sin 2kph f'_{2k}. \end{aligned} \quad (8.1.9_2)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-ipx} dx &\approx 2\alpha'_2 \sum_{k=-\infty}^\infty f_{2k} e^{-i2kph} + \\ &+ \gamma'_2 \sum_{k=-\infty}^\infty f_{2k+1} e^{-i(2k+1)ph} - \\ &- 2i\zeta'_2 \sum_{k=-\infty}^\infty f'_{2k} e^{-i2kph} - \\ &- i\eta'_2 \sum_{k=-\infty}^\infty f'_{2k+1} e^{-i(2k+1)ph}, \end{aligned} \quad (8.1.9_3)$$

$$\Theta = ph,$$

$$\begin{aligned} h^5 p^6 \alpha'_2 &= \Theta (156 - 7\Theta^2) \sin \Theta \cos \Theta + \\ &+ 3(60 - 17\Theta^2) \cos^2 \Theta - 15(12 - 5\Theta^2), \\ h^5 p^6 \beta'_2 &= \Theta (\Theta^4 + 8\Theta^2 - 24) + \\ &+ \Theta (7\Theta^2 - 156) \cos^2 \Theta + \\ &+ 3(60 - 17\Theta^2) \sin \Theta \cos \Theta, \\ h^5 p^6 \gamma'_2 &= 16\Theta (3 - \Theta^2) \sin \Theta - 48\Theta^2 \cos \Theta, \\ h^4 p^6 \delta'_2 &= 2\Theta (\Theta^2 - 24) \sin \Theta \cos \Theta + \\ &+ 15(\Theta^2 - 4) \cos^2 \Theta + \Theta^4 - 27\Theta^2 + 60, \\ h^4 p^6 \zeta'_2 &= \Theta (5\Theta^2 - 12) + 15(4 - \Theta^2) \sin \Theta \cos \Theta + \\ &+ 2\Theta (\Theta^2 - 24) \cos^2 \Theta, \\ h^4 p^6 \eta'_2 &= 16\Theta (\Theta^2 - 15) \cos \Theta + \\ &+ 48(5 - 2\Theta^2) \sin \Theta. \end{aligned}$$



## Глава 9

### ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ, ПОЛУЧАЮЩИЕСЯ ПРИ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

#### § 1. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Методы численного выполнения преобразования Фурье, изложенные в предыдущих двух главах, требуют предварительного разбиения отрезка интегрирования (оси  $-\infty < x < \infty$  или полуоси  $0 \leq x < \infty$ ) на бесконечное число отрезков конечной длины, на каждом из них  $f(x)$  заменяется многочленом некоторой степени, от которого затем берется интеграл с учетом веса или без него. Все частичные интегралы суммируются. В результате получается приближенное значение несобственных интегралов Фурье. Выполнять замену  $f(x)$  интерполяционным многочленом на всей полуоси (или оси) нельзя, так как получающийся интеграл расходится.

Для абсолютной сходимости рассматриваемых несобственных интегралов Фурье достаточно, чтобы функция  $f(x)$  при больших по абсолютной величине  $x$  удовлетворяла неравенству  $|f(x)| \leq A|x|^{-s}$ ,  $s > 1$ . Но если  $f(x)$  убывает медленно при  $|x| \rightarrow \infty$ , т. е.  $s$  близко к 1, то в рассмотренных методах для достижения хорошей точности потребуется взять большое число частичных отрезков и, следовательно, потребуется нахождение значений  $f(x)$  в большом числе точек.

Среди функций  $f(x)$ , удовлетворяющих при больших  $x$  условию  $|f(x)| \leq Ax^{-s}$  ( $s > 1$ ), наиболее часто встречаются в приложениях и наиболее естественны и просты функции, представимые в виде

$$f(x) = \frac{F(x)}{(1+x)^s}, \quad s > 1, \quad (9.1.1)$$

где  $F(x)$  непрерывна на полуоси  $[0, \infty)$  и имеет конечный предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = F(\infty)$ .

За аналитический аппарат для приближения  $F(x)$  можно принять рациональные функ-

ции, ограниченные на той же полуоси, являющиеся простейшими элементарными функциями, линейные комбинации которых хорошо аппроксимируют  $F(x)$  при некотором выборе коэффициентов комбинации. Линейно независимая система простых дробей  $(1+x)^{-i}$  ( $i=0, 1, \dots, n$ ), обычно выбираемая для приближения  $F(x)$  на всей полуоси (или оси), удовлетворяет этим требованиям. Кроме того, вычисления, связанные с этой системой функций, достаточно просты.

Пусть функция  $F(x)$  известна (задана или может быть вычислена) в  $n+1$  различных точках полуоси  $0 \leq x < \infty$ :  $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n < \infty$ . Интерполируем  $F(x)$  линейной комбинацией простых дробей:

$$F(x) \approx \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{(1+x)^i}, \quad (9.1.2)$$

определяя  $n+1$  неизвестных  $a_i$  из системы  $n+1$  уравнений:

$$\sum_{i=0}^n \frac{a_i}{(1+x_k)^i} = F(x_k), \quad k=0, 1, \dots, n. \quad (9.1.3)$$

Определитель системы  $\Delta$  является определителем Вандермонда от  $\frac{1}{1+x_k}$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ) и отличен от нуля, так как все  $x_k$  различны. Следовательно, при любых значениях  $F(x_k)$  ( $k=0, 1, \dots, n$ )  $a_i$  определяются однозначно:

$$a_i = \Delta_i / \Delta,$$

где  $\Delta_i$  получаются из  $\Delta$  заменой  $i$ -ого столбца столбцом  $\{F(x_k)\}$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ). Разложив определитель  $\Delta_i$  по элементам  $i$ -ого столбца, получаем

$$a_i = \frac{\sum_{k=0}^n F(x_k) \Delta_{ik}}{\Delta}, \quad (9.1.4)$$

здесь  $\Delta_{ik}$  — соответствующие алгебраические дополнения. Подставляя значения  $a_i$  в (9.1.2) и собирая вместе члены с одинаковыми  $F(x_k)$ , имеем

$$F(x) \approx F(x_0) l_0(x) + F(x_1) l_1(x) + \dots + F(x_n) l_n(x), \quad (9.1.5)$$

где функции  $l_i(x)$  являются линейными комбинациями функций  $(1+x)^{-i}$ , не зависят от функции  $F(x)$  и определяются выбранными точками  $x_k$ . Кроме того, функции  $l_i(x)$  удовлетворяют условиям

$$l_i(x_k) = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k, \end{cases} \quad (9.1.6)$$

Для того чтобы отыскать  $l_k(x)$ , нам нужно найти линейную комбинацию простых дробей

$$\sum_{m=0}^n b_m (1+x)^{-m},$$

являющуюся многочленом степени  $n$  от аргумента  $\frac{1}{1+x}$ , обращающуюся в нуль

в точках  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$  и равную 1 в точке  $x_k$ . Легко видеть, что

$$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \left( \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x_j} \right) \times \\ \times \left[ \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \left( \frac{1}{1+x_k} - \frac{1}{1+x_j} \right) \right]^{-1}. \quad (9.1.7)$$

Преобразуем полученное выражение:

$$l_k(x) = \frac{(1+x_k)^n}{(1+x)^n} \times \\ \times \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x_j - x) \left[ \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x_j - x_k) \right]^{-1} = \\ = \frac{(1+x_k)^n}{(1+x)^n} \cdot \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k) \omega'_{n+1}(x_k)}, \quad (9.1.8)$$

$$\text{где } \omega_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k).$$

Многочлен  $\frac{\omega_{n+1}(x)}{x-x_k}$  можно разложить по степеням  $1+x$ :

$$\frac{\omega_{n+1}(x)}{x-x_k} = \sum_{l=0}^n c_l^{(k)} (1+x)^l, \quad \text{где } c_l^{(k)} \text{ определяются}$$

однозначно, если известны  $x_k$ . Окончательно интерполяция  $F(x)$  простыми дробями  $(1+x)^{-i}$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) примет вид

$$F(x) \approx \sum_{k=0}^n l_k(x) F(x_k) = \\ = \sum_{k=0}^n F(x_k) \sum_{l=0}^n \frac{c_l^{(k)} (1+x_k)^n}{\omega'_{n+1}(x_k)} \cdot \frac{1}{(1+x)^{n-l}}. \quad (9.1.9)$$

Множители перед  $(1+x)^{-n+l}$ , стоящие под знаком второй суммы, зависят только от выбранных точек  $x_0, x_1, \dots, x_n$  и поэтому могут быть вычислены заранее.

## § 2. ОБЩАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА

Рассмотрим синус- и косинус-преобразования Фурье, объединив их в интеграле  $\int_0^\infty e^{ipx} f(x) dx$ :

$$\int_0^\infty \sin px f(x) dx = \text{Im} \left( \int_0^\infty e^{ipx} f(x) dx \right)$$

и

$$\int_0^\infty \cos px f(x) dx = \text{Re} \left( \int_0^\infty e^{ipx} f(x) dx \right).$$

Мы считали, что  $f(x)$  представима в виде

$$f(x) = \frac{F(x)}{(1+x)^s} \quad (s > 1), \quad \text{где } F(x) \text{ — гладкая}$$

ограниченная функция на полуоси  $0 \leq x < \infty$ .

При построении формул приближенного вычисления интеграла  $\int_0^\infty e^{ipx} \frac{F(x)}{(1+x)^s} dx$  заменим функцию  $F(x)$  приближением (9.1.9):

### § 3. КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА С РАВНООТСТОЯЩИМИ УЗЛАМИ

$$\int_0^{\infty} e^{ipx} (1+x)^{-s} F(x) dx \approx \int_0^{\infty} e^{ipx} (1+x)^{-s} \left[ \sum_{k=0}^n l_k(x) F(x_k) \right] dx.$$

Выражение справа будет давать формулу численного интегрирования:

$$\int_0^{\infty} e^{ipx} (1+x)^{-s} F(x) dx \approx \sum_{k=0}^n F(x_k) \int_0^{\infty} e^{ipx} (1+x)^{-s} l_k(x) dx. \quad (9.2.1)$$

Используя выражение  $l_k(x)$  через узлы интерполирования  $x_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) или (9.1.9), мы можем полученную формулу записать в несколько ином виде:

$$\int_0^{\infty} e^{ipx} (1+x)^{-s} F(x) dx \approx \sum_{k=0}^n F(x_k) \sum_{l=0}^n \frac{c_l^{(k)} (1+x_k)^n}{\omega_{n+1}(x_k)} \times \int_0^{\infty} e^{ipx} (1+x)^{-n+l-s} dx. \quad (9.2.2)$$

В этой формуле выражения  $A_{kl} = \frac{c_l^{(k)} (1+x_k)^n}{\omega_{n+1}(x_k)}$  зависят только от выбранных узлов и не зависят ни от функции  $F(x)$ , ни от  $s$ . По выбранным узлам интерполирования их можно вычислить заранее с любой точностью и использовать для вычисления интегралов Фурье при произвольных  $F(x)$ , удовлетворяющих условиям, необходимым для сходимости интегралов.

Кроме того, интегралы  $\int_0^{\infty} e^{ipx} (1+x)^{-l-s} dx$

( $s > 1$ ,  $l = 0, 1, \dots, n$ ) не зависят ни от функции  $F(x)$ , ни от выбранных узлов интерполирования, в них учитывается только  $s$  — быстрота убывания  $f(x)$ , когда  $x \rightarrow \infty$ , и частота  $p$ . Интегралы вычисляются точно, как функции  $s$  и  $p$ . Формулы для их вычисления будут приведены в § 5 этой главы.

Погрешность формулы (9.2.2) в основном определяется погрешностью аппроксимации  $F(x)$  линейной комбинацией простых дробей  $(1+x)^{-l}$ .

Пусть  $F(x)$  задана в точках  $x_k = kh$  ( $h > 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ ). В этом случае выражение для  $A_{kl} = \frac{c_l^{(k)} (1+x_k)^n}{\omega_{n+1}(x_k)}$ , где  $c_l^{(k)}$  определяются из соотношений

$$\frac{\omega_{n+1}(x)}{x - x_k} = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) \times$$

$$\times (x - x_{k+1}) \dots (x - x_n) = \sum_{l=0}^n c_l^{(k)} (1+x)^l,$$

$$k = 0, 1, \dots, n,$$

можно значительно упростить, учитывая, что  $x_k = kh$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ). В самом деле,

$$\begin{aligned} \omega_{n+1}(x_k) &= (x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1}) \times \\ &\quad \times (x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n) = \\ &= kh(kh - h) \dots [kh - (k-1)h] \times \\ &\quad \times [kh - (k+1)h] \dots (kh - nh) = \\ &= h^n (-1)^{n-k} k! (n-k)! \end{aligned}$$

и

$$A_{kl} = \frac{c_l^{(k)} (1+kh)^n}{(-1)^{n-k} h^n k! (n-k)!}. \quad (9.3.1)$$

В таблице II приведены значения  $A_{kl}$  ( $l, k = 0, 1, \dots, n$ ) для  $n = 1(1)15$  и  $h = 1$ , т. е. для случая, когда узлы — целочисленные точки. Заметим, что к  $h = 1$  приводится любое другое значение  $h$  путем линейного преобразования  $x = hx'$ . Квадратурная формула принимает вид

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{ipx} \frac{F(x)}{(1+x)^s} dx &\approx \sum_{k=0}^n F(x_k) \sum_{l=0}^n A_{kl} \times \\ &\quad \times \int_0^{\infty} e^{ipx} (1+x)^{-n-s+l} dx. \end{aligned}$$

Это правило тем благоприятнее для вычислений, чем большее значение имеет  $s$ , так как с увеличением  $s$  уменьшается число членов, которое необходимо брать для достижения нужной точности.

#### § 4. КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ПО КОРНЯМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Преобразованием  $x = \frac{1-t}{1+t}$  полуось

$0 \leq x < \infty$  переводится в отрезок  $[-1, 1]$  и

$$\int_0^{\infty} e^{ipx} (1+x)^{-s} F(x) dx = \\ = 2^{1-s} \int_{-1}^1 e^{ip \frac{1-t}{1+t}} F\left(\frac{1-t}{1+t}\right) (1+t)^{s-2} dt.$$

На конечном же отрезке наибольший интерес для рассмотрения квадратурных правил представляют: корни многочленов Якоби, ортогональных на отрезке  $[-1, 1]$  с весом  $p(t) = (1-t)^\alpha \times (1+t)^\beta$ , и корни многочленов Чебышева  $T_n(t) = 2^{-n+1} \cos(n \arccos t)$ , ортогональных на отрезке  $[-1, 1]$  с весом  $p(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$  и наименее отклоняющихся от нуля.

На отрезке  $[-1, 1]$  корни многочленов Якоби являются наилучшими узлами для квадратурной формулы

$$\int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \varphi(t) dt \approx \sum_{k=0}^{n-1} c_k \varphi(t_k)$$

в том смысле, что полученная квадратурная формула точна для произвольных многочленов до порядка  $2n-1$  включительно, т. е. она имеет наивысшую алгебраическую степень точности. Можно ожидать, что эти же узлы дадут неплохой результат при вычислении интеграла с весом  $e^{i\mu(t)} (1-t)^\alpha (1+t)^\beta$  ( $\mu(t)$  — действительная функция переменного  $t$ ), отличающимся от веса Якоби колеблющимся множителем, по абсолютной величине не превосходящим 1.

Пусть  $F(x)$  задана в точках  $x_k = \frac{1-t_k}{1+t_k}$ , где  $t_k \in [-1, 1]$  — корни многочленов Якоби, ортогональных на  $[-1, 1]$  с весом  $(1+t)^{s-2}$  ( $s > 1$ ) (здесь  $\alpha = 0$ ,  $\beta = s-2$ ).

Если положить  $x = \frac{1-t}{1+t}$ , многочлен  $\omega_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k)$  в переменной  $t$  принимает следующий вид:

$$\omega_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1-t}{1+t} - \frac{1-t_k}{1+t_k} \right) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2(t_k-t)}{(1+t)(1+t_k)} = \\ = \frac{(-1)^n 2^n}{(1+t)^n} \cdot \frac{P_n^{(s-2)}(t)}{q_n \prod_{i=0}^{n-1} (1+t_i)}, \quad (9.4.1)$$

где  $P_n^{(s-2)}(t)$  — многочлен Якоби;  $q_n$  — коэффициент при старшей степени и  $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$  — его корни, причем  $-1 \leq t \leq 1$ . Тогда

$$\frac{\omega_n(x)}{x-x_k} = \frac{(-1)^{n-1} 2^{n-1}}{(1+t)^{n-1}} (P_n^{(s-2)}(t)) \times \\ \times [q_n(t-t_k)(1+t_0) \dots (1+t_{k-1})(1+ \\ + t_{k+1}) \dots (1+t_n)]^{-1} \quad (9.4.2)$$

и в тождестве

$$\frac{P_n^{(s-2)}(t)}{t-t_k} \equiv \sum_{l=0}^{n-1} a_l^{(k)} (1+t)^l \quad (9.4.3)$$

коэффициенты  $a_l^{(k)}$  можно определить следующим образом: положим  $t = -1$ , тогда  $a_0^{(k)} = \frac{P_n^{(s-2)}(-1)}{-1-t_k}$ , и  $t = -1$  является корнем многочлена  $\frac{P_n^{(s-2)}(t)}{t-t_k} - a_0^{(k)} \equiv \sum_{l=1}^{n-1} a_l^{(k)} (1+t)^l$ ; мы можем понизить его степень на единицу и получим многочлен

$$\left[ \frac{P_n^{(s-2)}(t)}{t-t_k} - a_0^{(k)} \right] (1+t)^{-1} \equiv \\ \equiv \sum_{l=1}^{n-1} a_l^{(k)} (1+t)^{l-1};$$

снова пусть  $t = -1$ , тогда

$$a_1^{(k)} = \left[ \frac{P_n^{(s-2)}(t)}{t-t_k} - a_0^{(k)} \right] (1+t)^{-1} \Big|_{t=-1}$$

и т. д. Так шаг за шагом определяются все  $a_l^{(k)}$  и

$$\frac{\omega_n(x)}{x-x_k} = (-1)^{n-1} 2^{n-1} [q_n(1+t_0) \dots \\ \dots (1+t_{k-1})(1+t_{k+1}) \dots (1+t_n)]^{-1} \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{n-1} a_l^{(k)} (1+t)^{-n+l+1}. \quad (9.4.4)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \omega'_n(x_k) &= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n-1} \left( \frac{1-t_k}{1+t_k} - \frac{1-t_i}{1+t_i} \right) = \\ &= \frac{(-1)^{n-1} 2^{n-1}}{(1+t_k)^{n-1}} \frac{P_n^{(s-2)}(t_k)}{q_n \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n-1} (1+t_i)}. \end{aligned} \quad (9.4.5)$$

Так как из  $x = \frac{1-t}{1+t}$  следует  $1+t = \frac{2}{1+x}$ , окончательно получаем на основании (9.1.8), (9.4.4), (9.4.5)

$$\begin{aligned} l_k(x) &= \sum_{l=0}^{n-1} \frac{2^l a_l^{(k)}}{P_n^{(s-2)}(t_k)} (1+x)^{-l}, \\ A_{kl} &= \frac{2^l a_l^{(k)}}{P_n^{(s-2)}(t_k)} \end{aligned} \quad (9.4.6)$$

и квадратурную формулу (9.2.1) в виде

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{ipx} \frac{F(x)}{(1+x)^s} dx &\approx \sum_{k=0}^{n-1} F(x_k) \times \\ &\times \sum_{l=0}^{n-1} A_{kl} \int_0^\infty e^{ipx} (1+x)^{-l-s} dx, \end{aligned} \quad (9.4.7)$$

где  $x_k = \frac{1-t_k}{1+t_k}$  и  $t_k (k=0, 1, \dots, n-1)$  — узлы многочленов Якоби степени  $n$ .

Если  $s=2$ , получается частный случай многочленов Якоби — многочлены Лежандра.  $x_k$  и  $A_{kl}$  ( $l, k=0, 1, \dots, n-1$ ) для этого случая приведены в таблице III, причем  $n=2(1)15$ . Этими же узлами и коэффициентами можно воспользоваться для вычисления интегралов Фурье по квадратурной формуле (9.4.7) при любом  $s$ . Точность хотя и будет хуже, чем по корням многочленов Якоби, соответствующих этому  $s$ , но лучше, чем по равноотстоящим узлам.

Многочлены Чебышева  $\bar{T}_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos [n \arccos t]$  ( $|t| \leq 1$ ) таковы, что для них  $\sup_{t \in [-1, 1]} |\bar{T}_n(t)|$  имеет наименьшее значение среди всех многочленов степени  $n$  с коэффициентом 1 при старшей степени. Благодаря этому

свойству многочлены  $\bar{T}_n(t)$  получили название многочленов, наименее отклоняющихся от нуля. Если в качестве узлов интерполирования функции на  $[-1, 1]$  взяты корни многочленов Чебышева, то, как доказывается в теории интерполирования, отклонение интерполяционного многочлена от функции будет иметь наименьшую оценку. В этом смысле для интерполирования на  $[-1, 1]$  корни многочленов Чебышева являются наилучшими узлами. Это побуждает испытать в качестве узлов квадратурной формулы (9.2.1) точки  $x_k = \frac{1-t_k}{1+t_k}$  ( $k=0, 1, \dots, n-1$ ),

где  $t_k$  — корни многочленов Чебышева  $\bar{T}_n(t)$ . Преобразованиями, аналогичными предыдущим, получаем для этого случая квадратурную формулу в виде

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{ipx} \frac{F(x)}{(1+x)^s} dx &\approx \sum_{k=0}^{n-1} F(x_k) \sum_{l=0}^{n-1} A_{lk} \int_0^\infty e^{ipx} (1+x)^{-l-s} dx, \quad s > 1, \end{aligned} \quad (9.4.8)$$

где  $x_k = \frac{1-t_k}{1+t_k}$ ,  $A_{lk} = \frac{a_l^{(k)} \cdot 2^l}{\bar{T}_n(t_k)}$ ;  $a_l^{(k)}$  определяются из тождеств  $\frac{\bar{T}_n(t)}{t-t_k} \equiv \sum_{l=0}^{n-1} a_l^{(k)} (1+t)^l$  ( $k=0, 1, \dots, n-1$ ) тем же способом, что и для случая многочленов Якоби;  $t_k = \cos \frac{2k+1}{2n} \pi$  ( $k=0, 1, \dots, n-1$ ) — корни многочлена Чебышева  $\bar{T}_n(x)$  степени  $n$ .  $x_k$  и  $A_{kl}$  помещены в таблице IV.

Вычисления по вновь полученной квадратурной формуле дают меньшую точность, чем по (9.4.7), но большую, чем по равноотстоящим узлам.

Мы рассмотрели, как вычисляются синус- и косинус-преобразования Фурье; общее преобразование Фурье  $\int_{-\infty}^\infty e^{ipx} f(x) dx$  можно вычислять, сводя его предварительно к синус- и косинус-преобразованиям

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty e^{ipx} f(x) dx &= \int_0^\infty \cos px [f(x) + f(-x)] dx + \\ &+ i \int_0^\infty \sin px [f(x) - f(-x)] dx \end{aligned}$$

и вычисляя их затем по любым из имеющихся правил.

# § 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

$$\int_0^{\infty} \sin px (1+x)^{-l-\alpha} dx \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} \cos px (1+x)^{-l-\alpha} dx$$

Покажем, как вычисляются интегралы:

$$\int_0^{\infty} \sin px (1+x)^{-l-\alpha} dx = \operatorname{Im} \left( \int_0^{\infty} e^{ipx} (1+x)^{-l-\alpha} dx \right),$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \cos px (1+x)^{-l-\alpha} dx &= \\ &= \operatorname{Re} \left( \int_0^{\infty} e^{ipx} (1+x)^{-l-\alpha} dx \right), \end{aligned}$$

$l = 0, 1, \dots$  и  $0 < \alpha \leq 1$ .

Интегрированием по частям их можно свести к интегралам того же вида с  $l = 0$ . Приведем рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sin px (1+x)^{-l-\alpha} dx &= \\ &= \frac{p}{\alpha+l-1} \int_0^{\infty} \cos px (1+x)^{-l+1-\alpha} dx, \end{aligned} \quad (9.5.1)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \cos px (1+x)^{-l-\alpha} dx &= \frac{1}{\alpha+l-1} - \\ &- \frac{p}{\alpha+l-1} \int_0^{\infty} \sin px (1+x)^{-l+1-\alpha} dx. \end{aligned}$$

Далее, для  $l = 0$  заменой переменной  $1+x = t$  получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sin px (1+x)^{-\alpha} dx &= \cos p \int_1^{\infty} \frac{\sin pt}{t^{\alpha}} dt - \\ &- \sin p \int_1^{\infty} \frac{\cos pt}{t^{\alpha}} dt, \\ \int_0^{\infty} \cos px (1+x)^{-\alpha} dx &= \cos p \int_1^{\infty} \frac{\cos pt}{t^{\alpha}} dt + \\ &+ \sin p \int_1^{\infty} \frac{\sin pt}{t^{\alpha}} dt. \end{aligned}$$

При  $\alpha = 1$  отсюда получаем:

$$\int_0^{\infty} \sin px (1+x)^{-1} dx = \sin p \operatorname{ci}(p) - \cos p \operatorname{si}(p),$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \cos px (1+x)^{-1} dx &= \\ &= -\sin p \operatorname{si}(p) - \cos p \operatorname{ci}(p), \end{aligned} \quad (9.5.2)$$

где  $\operatorname{si}(p)$  и  $\operatorname{ci}(p)$  — интегральный синус и интегральный косинус, для которых имеются подробные таблицы. Если  $0 < \alpha < 1$ , то из соотношений

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{\sin pt}{t^{\alpha}} dt &= \int_0^{\infty} \frac{\sin pt}{t^{\alpha}} dt - \int_0^1 \frac{\sin pt}{t^{\alpha}} dt, \\ \int_1^{\infty} \frac{\cos pt}{t^{\alpha}} dt &= \int_0^{\infty} \frac{\cos pt}{t^{\alpha}} dt - \int_0^1 \frac{\cos pt}{t^{\alpha}} dt; \\ \int_0^{\infty} \frac{\sin pt}{t^{\alpha}} dt &= p^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) \sin \frac{\pi}{2} (1-\alpha), \\ p &> 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cos pt}{t^{\alpha}} dt &= p^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) \cos \frac{\pi}{2} (1-\alpha); \\ \int_0^1 \frac{\sin pt}{t^{\alpha}} dt &= \int_0^1 t^{-\alpha} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(pt)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right] dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{p^{2k+1}}{(2k+1)! (2k+2-\alpha)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\cos pt}{t^{\alpha}} dt &= \int_0^1 t^{-\alpha} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(pt)^{2k}}{(2k)!} \right] dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{p^{2k}}{(2k)! (2k+1-\alpha)} \end{aligned}$$

получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sin px (1+x)^{-\alpha} dx &= \\ &= p^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) \sin \left[ \frac{\pi}{2} (1-\alpha) - p \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{p^{2k}}{(2k)!} \times \\
& \times \left[ \frac{p \cos p}{(2k+1)(2k+2-\alpha)} - \frac{\sin p}{2k+1-\alpha} \right]; (9.5.3) \\
& \int_0^{\infty} \cos px (1+x)^{-\alpha} dx =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = p^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) \cos \left[ \frac{\pi}{2} (1-\alpha) - p \right] - \\
& - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{p^{2k}}{(2k)!} \times \\
& \times \left[ \frac{p \sin p}{(2k+1)(2k+2-\alpha)} + \frac{\cos p}{2k+1-\alpha} \right].
\end{aligned}$$

## Глава 10

### ПРАВИЛА НАИВЫСШЕЙ СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ

#### § 1. УСЛОВИЯ ПРИМЕНИМОСТИ И РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ

В предыдущей главе мы получили правила вычисления бесконечных интегралов Фурье, интерполируя функцию  $F(x)$  с помощью простых дробей вида  $\frac{1}{(1+x)^i}$  ( $i = 0, 1, \dots$ ), причем узлы интерполирования мы задавали, принимая во внимание те или иные их преимущества: равноотстоящие — как наиболее простые при пользовании, преобразованные из корней многочленов Якоби — как дающие наивысшую алгебраическую точность при интегрировании на конечном отрезке, преобразованные из корней многочленов Чебышева — как дающие наименьшую погрешность при интерполировании функции на конечном отрезке. В полученных квадратурных формулах по  $n$  узлам остаточный член обращается в нуль, если подынтегральная функция представляет собой многочлен от  $\frac{1}{1+x}$  степени не выше  $n-1$ .

Будем выбирать узлы интерполирования так, чтобы эта степень точности принимала максимально возможное значение. Потребуем, чтобы квадратурная формула

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin px}{\cos px} \frac{F(x)}{(1+x)^s} dx \approx \sum_{k=1}^n A_k(p) \frac{F(x_k)}{(1+x_k)^s}, \quad s > 1,$$

в которой нужно определить  $2n$  неизвестных  $A_k(p)$  и  $x_k(p)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), точно выполнялась для первых  $2n$  простых дробей  $(1+x)^{-i}$  ( $i = 0, 1, \dots, 2n-1$ ):

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin px}{\cos px} (1+x)^{-s-i} dx = \sum_{k=1}^n A_k(p) (1+x_k)^{-s-i}, \quad s > 1.$$

Если, исходя из этих условий, найти  $A_k$  и  $x_k$ , то оказывается, что из-за знакопеременности веса некоторые из  $x_k$  будут лежать вне промежутка  $[0, \infty)$  даже при небольших значениях  $n$ . Чтобы построить квадратурное правило с узлами, лежащими на  $[0, \infty)$ , преобразуем рассматриваемые интегралы следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin px}{\cos px} \frac{F(x)}{(1+x)^s} dx &= \\ &= \int_0^{\infty} \left( 1 + \frac{\sin px}{\cos px} \right) \frac{F(x)}{(1+x)^s} dx - \\ &- \int_0^{\infty} (1+x)^{-s} F(x) dx. \end{aligned}$$

Каждый из вновь полученных интегралов имеет неотрицательную весовую функцию, при этом

второй из них  $\int_0^{\infty} (1+x)^{-s} F(x) dx$  не зависит от пара-

метра  $p$  и вычисляется один раз для всяких  $p$ . Для его вычисления можно дробно-линейно преобразовать промежуток  $[0, \infty)$  в  $[-1, 1]$  и затем воспользоваться квадратурными формулами с весом Якоби.

Параметр  $p$ , входящий в интегралы  $I = \int_0^{\infty} \left( 1 + \frac{\sin px}{\cos px} \right) f(x) dx$ , линейным преобразованием переменной  $px = x'$  может быть приведен к единице, и тогда рассматриваемые интегралы преобразуются в интегралы, в которых параметр входит в функцию, а не в вес:



$$I = \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}\right) \varphi(x) dx, \quad (10.1.1)$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{p} f\left(\frac{x}{p}\right). \quad (10.1.2)$$

При  $p = 1$   $\varphi(x) = f(x)$ .

Потребуем, чтобы квадратурная формула

$$I = \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}\right) \varphi(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k \varphi(x_k) \quad (10.1.3)$$

выполнялась точно для первых  $2n$  функций системы  $(1+x)^{-i-s}$  ( $s > 1$ ,  $i = 0, 1, \dots, 2n-1$ ) или, что равносильно, для всех рациональных дробей вида  $\frac{P_{2n-1}(x)}{(1+x)^{2n-1+s}}$ , где  $P_{2n-1}(x)$  — произвольный многочлен степени не выше  $2n-1$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}\right) \frac{P_{2n-1}(x)}{(1+x)^{2n-1+s}} dx = \\ = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{(1+x_k)^{2n-1+s}} P_{2n-1}(x_k) = \\ = \sum_{k=1}^n B_k P_{2n-1}(x_k). \end{aligned}$$

Пользуясь известными сведениями о квадратурах наивысшей алгебраической степени точности, можно показать, что  $x_k$  и  $B_k$  (а следовательно, и  $A_k$ ) для квадратурной формулы наивысшей алгебраической степени точности

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}\right) \frac{F(x)}{(1+x)^{2n-1+s}} dx \approx \\ \approx \sum_{k=1}^n B_k F(x_k), \quad s > 1 \end{aligned} \quad (10.1.4)$$

со знакопостоянной весовой функцией

$\left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}\right) (1+x)^{-2n+1-s}$  при  $0 \leq x < \infty$  определяются однозначно при любом  $n$ .

Узлы квадратурной формулы — действительные, различные и положительные числа — являются корнями многочлена  $\omega_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k)$ , который определяется следующим условием ортогональности:

$$\int_0^{\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}\right) (1+x)^{-2n+1-s} \omega_n(x) p_{n-1}(x) dx = 0, \quad (10.1.5)$$

где  $p_{n-1}(x)$  — произвольный многочлен степени не выше  $n-1$ . Если  $\omega_n(x)$  представить в виде

$\omega_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i (1+x)^i$  ( $a_n = 1$ ), то его коэффициенты  $a_i$  однозначно находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}\right) (1+x)^{-s-2n+1+i+j} dx = 0, \\ j = 0, 1, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (10.1.6)$$

равносильной условию ортогональности (10.1.5). Определитель системы, составленный из коэффициентов при  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ , есть определитель Грама системы линейно независимых функций  $(1+x)^{-n+i}$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ), он всегда отличен от нуля.

Коэффициенты  $A_k$  квадратурной формулы (10.1.3) определяются по формулам:

$$\begin{aligned} A_k = (1+x_k)^{s+n-1} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}\right) (1+x)^{-s-n+1} \times \\ \times \frac{\omega_n(x)}{(x-x_k) \omega'_n(x_k)} dx, \quad (10.1.7) \\ s > 1, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Величины  $x_k$  и  $A_k$  квадратурной формулы для вычисления интеграла с весом  $(1 + \sin x)$  приведены в таблице V для  $n = 1(1)10$  и  $s = 1,05(0,05)4$ , значения  $x_k$  и  $A_k$  для интеграла с весом  $(1 + \cos x)$  — в таблице VI.

# Глава 11

## ОСОБЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ

Для вычисления преобразования Фурье во многих случаях оказывается удобным предложенный в [62] метод вычисления бесконечных интегралов  $\int_0^\infty f(x) dx$  от осциллирующих функций.

Подынтегральная функция  $f(x)$  предполагается колеблющейся около нуля таким образом, что интегралы, взятые по полуциклам, убывают и изменяют знак.

Метод основан на преобразовании Эйлера медленно сходящегося знакопеременного ряда. Согласно этому преобразованию, ряд  $v_0 - v_1 + v_2 - v_3 + \dots$ , где  $v_n > 0$ ,  $v_{n+1} < v_n$  для всех  $n$ , если ввести обозначения  $\Delta v_n = v_{n+1} - v_n$ ,  $\Delta^{r+1} v_n = \Delta^r v_{n+1} - \Delta^r v_n$ , преобразуется в ряд  $\frac{1}{2} v_0 - \frac{1}{4} \Delta v_0 + \frac{1}{8} \Delta^2 v_0 - \dots$ , который сходится к тому же пределу, что и исходный, всякий раз, когда сходится первоначальный.

Предположим, что  $f(x)$  имеет нули в точках  $x_k$  ( $0 \leq x_1 < x_2 < \dots$ ). Разбиваем основной ин-

теграл на части:  $\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots$  Так как частичные интегралы

или только положительны, или только отрицательны и уменьшаются по абсолютной величине,

$$\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^{x_1} f(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} [-f(x)] dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx - \dots = v_0 - v_1 + v_2 - \dots,$$

где  $v_0 - v_1 + v_2 - \dots$  — медленно сходящийся знакопеременный ряд, и, следовательно,

$$\int_0^\infty f(x) dx = \frac{1}{2} v_0 - \frac{1}{4} \Delta v_0 + \frac{1}{8} \Delta^2 v_0 - \dots$$

Для преобразования Фурье во многих случаях можно использовать нули синуса или косинуса, а не всего подынтегрального выражения.



причем  $F_1(x)$  составлена из кусков прямых линий вида  $a'_i x + c_i$ , где  $c_i$  определяется из непрерывности  $\varphi_1(x)$ , и, например,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sin px F_1(x) dx &= \sum_{i=1}^{q_1} \int_{x_{i-1}^{(1)}}^{x_i^{(1)}} (a'_i x + c_i) \sin pxdx = \\ &= \sum_{i=1}^{q_1} \left[ \frac{1}{p} k'_i x_i^{(1)} \cos px_i^{(1)} - \frac{1}{p^2} k'_i \sin px_i^{(1)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{p} c_i (\cos px_i^{(1)} - \cos px_{i-1}^{(1)}) \right]. \quad (12.1.6) \end{aligned}$$

Если нужно, процесс продолжается аналогичным образом, и преобразование Фурье устраняющей разрывы функции берется явно в виде суммы конечных интегралов от произведения многочлена на  $\sin px$  (или  $\cos px$ , или  $e^{ipx}$ ).

## § 2. УВЕЛИЧЕНИЕ БЫСТРОТЫ УБЫВАНИЯ ФУНКЦИИ ПРИ $x \rightarrow \infty$

Из функции  $f(x)$  мы можем вычесть некоторую надлежаще выбранную функцию  $F(x)$ , для которой преобразование Фурье находится точно и которая при больших значениях  $x$  ведет себя асимптотически так же, как и  $f(x)$ . Тогда функция

$$\varphi(x) = f(x) - F(x) \quad (12.2.1)$$

вне некоторого интервала  $[0, l]$  будет практически равна нулю. Для синус-преобразования  $S(f, p)$  функции  $f$  получаем равенство

$$S(f, p) = S(F, p) + S(\varphi, p), \quad (12.2.2)$$

где  $S(F, p)$  — преобразование Фурье функции  $F(x)$ , а

$$S(\varphi, p) = \int_0^{\infty} \varphi(x) \sin pxdx. \quad (12.2.3)$$

Вычисление последнего интеграла по одному из правил, данному в гл. 8—11, будет более точным ввиду быстрого убывания функции  $\varphi$  при

$x \rightarrow \infty$ , чем вычисление по тому же правилу  $S(f, p)$ .

Например, пусть  $f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  убывает по степенному закону. В качестве главной части возьмем функцию  $C(a+x)^{-s}$  ( $s > 0$ ), не имеющую особенностей на  $[0, \infty)$  при  $a > 0$ , показатель степени  $s$  которой определим так, чтобы  $\frac{f(x)}{(a+x)^{-s}} \rightarrow C \neq 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . В большинстве случаев параметр  $a$ , зависящий от поведения  $f$  вблизи начала координат, можно считать равным 1.

Функция  $f(x)$  представима в виде

$$f(x) = C(1+x)^{-s} + f_1(x), \quad (12.2.4)$$

где  $f_1(x)/(1+x)^{-s} \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ .

Преобразование Фурье главной части  $C(1+x)^{-s}$  находится точно (гл. 9, § 5), а  $f_1(x)$  убывает быстрее, чем  $f(x)$ , и поэтому выбранное правило вычисления преобразования Фурье может дать для нее более точный результат.

Если полученной быстроты убывания  $f_1(x)$  недостаточно для приближенных вычислений, можно подобным образом выделить главную часть при  $x \rightarrow \infty$  у  $f_1(x)$ .

Если убывание при  $x \rightarrow \infty$  происходит по показательному закону, т. е. найдется такое  $\alpha > 0$ , что

$$\frac{f(x)}{e^{-\alpha x}} \rightarrow C_1 \neq 0, \quad (12.2.5)$$

то

$$f(x) = C_1 e^{-\alpha x} + f_1(x),$$

причем  $f_1(x)$  убывает быстрее, чем  $f(x)$ , а преобразование Фурье главной части  $C_1 e^{-\alpha x}$  выполняется точно по формулам:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin pxdx = \frac{p}{\alpha^2 + p^2}, \quad (12.2.6)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos pxdx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + p^2}, \quad \alpha > 0.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Альперт Я. Л., Гинзбург В. Л., Файнберг Е. Л. Распространение радиоволн. М., Гостехиздат, 1953.
2. Безикович Я. С. Приближенные вычисления. М., Гостехиздат, 1949.
3. Березин И. С. и Жидков Н. П. Методы вычислений, т. I. М., Физматгиз, 1959.
4. Гуревич С. Г. К построению рядов Фурье с усиленной сходимостью для функций, определенных в заданном промежутке. Изв. Ленингр. электротехн. ин-та, вып. 37, 1959, 272—277.
5. Кеда Н. П. К теории квадратур для периодических функций. ДАН БССР, 1961, 5, № 9, 375—379.
6. Кеда Н. П. Квадратурные формулы с производными для периодических функций. Изв. АН БССР, сер. физ.-техн., 1961, № 4, 38—44.
7. Кеда Н. П. Квадратуры типа Чебышева для периодических функций. Изв. АН БССР, сер. физ.-техн., 1962, № 1, 19—23.
8. Кругликова Л. Г., Крылов В. И. Численное преобразование Фурье. ДАН БССР, 1961, 5, № 7, 279—283.
9. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях. М.—Л., ГТТИ, 1954.
10. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов от функций, содержащих быстро колеблющиеся множители. ДАН СССР, 1956, 108, № 6, 1014—1017.
11. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов, 1-е изд. М., Физматгиз, 1959.
12. Крылов В. И., Шульгина Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию. М., изд-во «Наука», 1966.
13. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.
14. Лопшиц А. М. Шаблоны для гармонического анализа. М., Гостехиздат, 1948.
15. Мелентьев П. В. Приближенные вычисления. М., Физматгиз, 1962.
16. Мышкис А. Д. Об эффективном вычислении коэффициентов Фурье с помощью итераций. Успехи матем. наук, 1961, 16, № 1, 155—156.
17. Николаева М. В. О приближенном вычислении осциллирующих интегралов. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1949, 28, 26—32.
18. Пересада В. П. К вопросу о вычислении интегралов в конечных пределах от функций с быстропеременной фазой. Радиотехника, 1957, 12, № 9, 12—19.
19. Погребысский И. Б. О вычислении интегралов от быстро колеблющихся функций и об экспоненциальной интерполяции. Укр. матем. ж., 1955, 7, № 3, 291—294.
20. Рамм Г. С. Численное определение коэффициентов Фурье периодической функции. Тр. научно-техн. конференции Ленингр. электротехн. ин-та связи, вып. 2, Л., 1960, 7—17.
21. Романов В. Г. О вычислении интегралов типа Фурье. В сб.: «Вычисл. системы», вып. 12. Новосибирск, 1964, 134—145.
22. Савинова Л. Т. О вычислении некоторых типов определенных интегралов от осциллирующих функций. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1962, 66, 166—181.
23. Серебrenников М. Г. Гармонический анализ. М., Гостехиздат, 1948.
24. Снеддон И. Преобразования Фурье. М., ИЛ, 1955.
25. Турецкий А. Х. О формулах квадратур, точных для тригонометрических полиномов. Уч. зап. Белорусского ун-та, сер. матем., 1959, вып. I (49), 31—54.
26. Турецкий А. Х. О квадратурных формулах с четным числом узлов, точных для тригонометрических полиномов. ДАН БССР, 1960, 4, № 9, 365—368.
27. Фрумкин П. Б. Приближенное вычисление сумм отрезков ряда Фурье. Тр. Ленингр. ин-та авиац. приборостр., 1956, вып. 14, 71—78; Упрощенный метод гармонического анализа. Там же, 79—92.
28. Юшков П. П. Оценка погрешности приближенных значений коэффициентов Фурье при замене заданной кривой ломаной линией или совокупностью парабол. Инженерный сб., 1953, 14, 204—210.
29. Юшков П. П. Исследование вопроса о пригодности формулы Симпсона в задачах практического гармонического анализа. Сб. научных работ общетехн. и некот. спец. кафедр Ленингр. технол. ин-та холод. пром-сти, 1954, 6, 51—56.
30. Юшков П. П. Об одном уточненном методе практического гармонического анализа. Сб. тр. общетехн. кафедр Ленингр. технол. ин-та холод. пром-сти, 1955, 8, 20—29.
31. Юшков П. П. Практический гармонический анализ разрывных функций. Сб. тр. общетехн. кафедр Ленингр. технол. ин-та холод. пром-сти, 1956, 12, 31—38.
32. Andersen Chr. The ruler method on examination of a method for numerical determination of Fourier coefficients. Acta polytechn. Scand. Math. and Comput. Mach. Ser., 1963, № 8, 19—72.
33. Babuška I. Über die optimale Berechnung der Fourier'schen Koeffizienten. Aplikace Matematiky, 1966, 11, № 2, 113—123.
34. Balázs J., Turán P. Notes on interpolation, IX (Approximative representation of Fourier-transform). Acta Math. Acad. Scient. Hung., 1965, 16, № 1—2, 215—220.

35. Bauer F. L., Stetter H. J. Zur numerischen Fourier-Transformation. Numer. Math., 1959, 1, № 4, 208—220.

36. Bell D. A. Approximations in Fourier transforms. Comput. J., 1963, 6, № 3, 244—247.

37. Boley Bruno Q. A Method for the Numerical Evaluation of Certain Infinite Integrals. MTAC, 1957, 11, № 60, 261—264.

38. Buyst L., Schotsmans L. A method of gaussian type for the numerical integration of oscillating functions. ICC Bulletin, 1964, 3, № 4, 210—214.

39. Chocholle René. Présentation commode des calculs dans l'analyse et la synthèse harmoniques d'ondes periodiques. Rev. Scient., 1954, 92, № 1, 3—14.

40. Clark John R. Fourier analysis by machine methods. IRE Trans. Electronic Comput., 1956, EC-5, № 3, 141.

41. Чжао Фан-сюн. Новый метод практического гармонического анализа. Шуюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1956, 6, № 3, 433—451.

42. Davis P. J. On the numerical integration of periodic analytic functions. В сб. «On the numerical approximation» (Sympos., Wisconsin, 1958), 1959, 45—59.

43. Dingle R. B. The integrals  $C_n(x) = \int_1^\infty u^{-n} \cos ux du$  and  $S_n(x) = \int_1^\infty u^{-n} \sin ux du$  and their

tabulation. Tables of the integrals  $C_n(x) = \int_1^\infty u^{-n} (1-u^{-2}) \times$   
 $\times \cos ux du$  and  $S_n(x) = \int_1^\infty u^{-n} (1-u^{-2}) \sin ux du$ .

Appl. Scient. Res., 1955, B4, № 6, 411—420; 420—425.

44. Duffin R. J. Representation of Fourier integrals as sums. I. Bull. Amer. Math. Soc., 1945, 51, 447—455; II. Proc. Amer. Math. Soc., 1950, 1, 250—255.

45. Ehlich Hartmut. Untersuchungen zur numerischen Fourieranalyse. Math. Zeitschr., 1966, 91, 380—420.

46. Filon L. N. G. On a quadrature formula for trigonometric integrals. Proc. Roy. Soc. Edin., 1928, 49, 38—47.

47. Flinn E. A. A modification of Filon's method of numerical integration. J. Assoc. Comput. Machinery, 1960, 7, № 2, 181—184.

48. Gibbons J. F. A simplified procedure for finding Fourier coefficients. Proc. IRE, 1957, 45, № 2, 243.

49. Goodwin E. T. Note on the computation of certain highly oscillatory integrals. MTAC, 1956, 10, № 54, 96—97.

50. Griffin J. A. Method of four-point interpolation especially adapted for treating and conditions of wings and elastic surfaces. Journal of Aerospace Sciences, 1961, 2, № 2, 161—162.

51. Hämmerlin G. Zur numerischen Integration periodischer Funktionen. Z. Angew. Math. Mech., 1959, 39, № 1—2, 80—82.

52. Hofsommer D. J., Potters M. L. Table of Fourier coefficients of associated Legendre functions. Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1960, A63, № 5, 460—480; Indagat. math., 1960, 22, № 5, 460—480.

53. Hsu L. C. Some approximation formulas for the integration of violently oscillating functions and of periodic functions. Sci. Record, 1959, 3, № 11, 544—549.

54. Hurwitz H., Zweifel P. F. Numerical quadrature of Fourier transform integrals. MTAC, 1956, 10, № 55, 140—149.

55. Hurwitz H., Pfeiffer R. A. and Zwei-

fel P. F. Numerical quadrature of Fourier transform integrals, II. MTAC, 1959, 13, 87—90.

56. Huss Carl R., Donegan James J. Tables for the numerical determination of the Fourier transform of a function of time and the inverse Fourier transform of a function of frequency, with some applications to operational calculus methods. NACA Techn. Note, No 4073, 1957.

57. Huss Carl R., Donegan James J. Method and tables for determining the time response to a unit impulse from frequency-response data and for determining the Fourier transform of a function of time. NACA Techn. Note, No 3598, 1956.

58. Hyvärinen L. Fourier analysis a new numerical method. Acta polytech. Scand. Math. and Comput. Mach. Ser., 1958, № 2; Publ. State Inst. Techn. Res. Finland, 1958, № 40.

59. Kemp P. Harmonic Analysis of Waves up to Eleventh Harmonic (Odd Harmonics Only). Electronic Engg., 1951, 23, 390.

60. Laville G. Résolution graphique d'intégrales utilisées en analyse harmonique et en calcul symbolique. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, 1952 (1953), (4) 16, 153—168.

61. Lohmann W. Numerische Auswertung von Integralen über eine volle Periode von periodischen Integrandenfunktionen mit der «Rechteck regel». Z. angew. Math., Mech., 1956, 36, № 11—12, 464—465.

62. Longman I. M. Note on the method for computing infinite integrals of oscillatory functions. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, 764—768.

63. Longman I. M. A method for the numerical evaluation of finite integrals of oscillatory functions. Math. Comput., 1960, 14, № 69, 53—59.

64. Lowan Arnold N., Laderman Jack. Table of Fourier coefficients. Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser., 1954, № 37, 121—132.

65. Luke Y. L. On the computation of oscillatory integrals. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, 50, part 2, 269—277.

66. Luke Y. L. Numerical analysis. Appl. Mech. Revs., 1955, 8, № 8, 309—311.

67. Manunza Filippo. Nuove tabelle per rapide analisi armoniche di diagrammi. Ingegneria mecc., 1956, 5, № 8, 7—15.

68. Medhurst R. G., Roberts J. H. Evaluation

of the integral  $I_n(b) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left( \frac{\sin x}{x} \right)^n \cos bxdx$ . Math.

Comp., 1965, 19, 113—117.

69. Peach R. W. On curve fitting Simpson's rule and Fourier coefficients. Naval Engrs. J., 1963, 75, № 3, 659—662.

70. Pollack Leo Wenzel. Eightplace supplement to harmonic analysis and synthesis schedules for three to one hundred equidistant values of empiric functions. Dublin, Inst. Advanced Studies School Cosmic Phys., 1954.

71. Redheffer R. M. Calculating machine for Fourier transforms and related expressions. Research Laboratory of Electronics, Massachusetts Institute of Technology, Techn. Rep., No 13, 1946.

72. Ripianu Andrei. Contribuție la calculul aproximativ al coeficienților seriei Fourier a unei funcții periodice. Studii și cercetări mec. apl. Acad. RPR, 1961, 12, № 2, 423—432.

73. Ripianu Andrei. Přibližný výpočet koeficientie. Fourierovy řady periodické funkce. Aplikace mat., 1961, 6, № 2, 135—159.

74. Ripianu Andrei. Die angenäherte Berechnung

der Fourier-koeffizienten einer periodischen Funktion. Z. Angew. Math., Mech., 1961, 41, № 12, 477—484.

75. Runge C., König H. Vorlesungen über numerisches Rechnen. Springer-Verlag, Berlin, 1924.

76. Saenger A. On numerical quadrature of Fourier transforms. J. Math. Analysis and Appl., 1964, 8, № 1, 1—3.

77. Salzer Herbert E. Obresckoff-type integration and interpolation formulas for periodic functions. J. Math. and Phys., 1964, 43, № 3, 241—250.

78. Salzer A. E. Formulas for calculating Fourier coefficients. J. Math. and Phys., 1957, 36, № 1, 96—98.

79. Sanden Horst von. Praktische Mathematik. Eine Einführung mit besonderer Berücksichtigung von Statistik und Ausgleichrechnung, B. G. Teubner, Leipzig, 1953.

80. Sanden Horst von. Zur numerischen harmonischen Analyse. Z. angew. Math. und Mech., 1959, 39, № 7—8, 327—328.

81. Scarborough J. B. Numerical Mathematical Analysis. Johns Hopkins Press, Baltimore, 1950.

82. Schmidt R. J. Mechanische Quadratur nach Gauss für periodische Funktionen. S.—B. Math.—Nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss., 1947, 155—173.

83. Schönbacher Karl. Harmonische Schnellanalyse empirischer, periodischer Funktionen. Elektrotechn. Z., 1960, A-81, № 23, 808—812.

84. Scorer R. S. Numerical evaluation of integrals of the

form  $I = \int_{x_1}^{x_2} f(x) e^{i\varphi(x)} dx$  and the tabulation of the func-

tion  $Gi(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sin\left(uz + \frac{1}{3}u^3\right) du$ . Quart. J. Mech. Appl. Math., 1950, 3, 107—112.

85. Scotto Lavina G. Sul calcolo dei coefficienti approssimati nell'analisi armonico delle funzioni periodiche. Rivista di Ingegneria, 1952, № 10.

86. То мо да. Упрощенный метод гармонического анализа при помощи разложения по прямоугольно-периодическим функциям. Дзисин, J. Seismol. Soc. Japan, 1955, 7, № 4, 201—208.

87. Turner D. R. The analysis of waves containing harmonics up to the twelfth. Electr. Engng., 1953, 25, № 299, 30—35.

88. Vooren A. I. and Linde H. J. Numerical calculation of integrals with strongly oscillating integrand. Math. Comput., 1966, 20, № 94, 232—245.

89. Willers F. A. Practical Analysis. Dover Publ., New York, 1948.

90. Willers F. A. Methoden der praktischen Analysis. Berlin, de Gruyter, 1957.

91. Zamfirescu Ion. O extindere a metodei lui Gauss de calcul al integralelor impoprii. Studii și cercetări mat. Acad. RPR, 1963, 14, № 4, 615—631.

# Часть третья ЧИСЛОВЫЕ ТАБЛИЦЫ

Таблица I

**УЗЛЫ  $x_k$  И ВЕЛИЧИНЫ  $D_{ik}$  И  $D'_{ik}$  ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ  
КВАДРАТУРНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ  $A_k(p)$  В ПРАВИЛАХ ТИПА**

$$\int_{-1}^1 \sin px f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k(p) f(x_k), \quad n = 1(1)15, \text{ НА 10 ЗНАКОВ}$$

Значения  $x_k$ ,  $D_{ik}$  и  $D'_{ik}$  приведены для правил:

$$\int_{-1}^1 \sin px f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n f(x_k) \left[ \sin p \left( \frac{D_{k1}}{p^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{D_{k3}}{p^4} + \dots \right) - \cos p \left( \frac{D'_{k0}}{p} - \frac{D'_{k2}}{p^3} + \dots \right) \right],$$

$$\int_{-1}^1 \cos px f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n f(x_k) \left[ \sin p \left( \frac{D_{k0}}{p} - \right.$$

$$\left. - \frac{D_{k2}}{p^3} + \dots \right) + \cos p \left( \frac{D'_{k1}}{p^2} - \frac{D'_{k3}}{p^4} + \dots \right) \right],$$

$$\int_{-1}^1 e^{ipx} f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n f(x_k) \left\{ \sin p \left[ \left( \frac{D_{k0}}{p} - \right.$$

$$\left. - \frac{D_{k2}}{p^3} + \dots \right) + i \left( \frac{D_{k1}}{p^2} - \frac{D_{k3}}{p^4} + \dots \right) \right] +$$

$$+ \cos p \left[ \left( \frac{D'_{k1}}{p^2} - \frac{D'_{k3}}{p^4} + \dots \right) - \right.$$

$$\left. - i \left( \frac{D'_{k0}}{p} - \frac{D'_{k2}}{p^3} + \dots \right) \right] \right\}$$

(см. гл. 4, § 4).  $x_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) — корни многочленов Лежандра степени  $n + 1$ . Таблица построена следующим образом. Для каждого  $n$  сначала дается значение узла  $x_k$ , который и указывает значение  $k$ , затем для каждого узла в двух соседних столбцах даются значения коэффициентов  $D_{ik}$  и  $D'_{ik}$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). Значения  $x_k$ ,  $D_{ik}$ ,  $D'_{ik}$  даны в нормализованном виде, порядок числа стоит в скобке после мантиссы числа.

Например, для  $n = 4$ ,  $k = 1$  значения  $x_1$ ,  $D_{i1}$  и  $D'_{i1}$  ( $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ) будут следующими:

$$x_1 = -0,53846\ 93101,$$

$$D_{01} = -1,161100044, \quad D'_{01} = 0,6252167398,$$

$$D_{11} = 7,617203189, \quad D'_{11} = -15,30713037,$$

$$D_{21} = -67,24685148, \quad D'_{21} = 20,97595935,$$

$$D_{31} = 20,97595935, \quad D'_{31} = -155,8191633,$$

$$D_{41} = -155,8191633, \quad D'_{41} = 0000000000.$$



| $n$ | $i$ | $D_{ik}$                 | $D'_{ik}$          | $n$ | $i$ | $D_{ik}$                 | $D'_{ik}$          |
|-----|-----|--------------------------|--------------------|-----|-----|--------------------------|--------------------|
| 1   | 0   | $x_0 = -0,57735 \ 02692$ |                    | 0   | 0   | $x_3 = 0,53846 \ 93101$  |                    |
|     | 1   | 0,10000 00000 (1)        | -0,17320 50808 (1) |     | 1   | -0,11611 00044 (1)       | -0,62521 67398 (0) |
|     | 1   | -0,17320 50808 (1)       | 0,00000 00000      |     | 2   | -0,76172 03189 (1)       | -0,15307 13037 (2) |
|     | 0   | $x_1 = 0,57735 \ 02692$  |                    |     | 3   | -0,67246 85148 (2)       | -0,20975 95935 (2) |
|     | 1   | 0,10000 00000 (1)        | 0,17320 50808 (1)  |     | 4   | -0,20975 95935 (2)       | -0,15581 91633 (3) |
|     | 1   | 0,17320 50808 (1)        | 0,00000 00000      |     |     | -0,15581 91633 (3)       | 0,00000 00000      |
| 2   | 0   | $x_0 = -0,77459 \ 66692$ |                    | 0   | 0   | $x_4 = 0,90617 \ 98459$  |                    |
|     | 1   | 0,16666 66667 (1)        | -0,12909 94449 (1) |     | 1   | 0,16277 66711 (1)        | 0,14750 49387 (1)  |
|     | 1   | -0,12909 94449 (1)       | 0,33333 33333 (1)  |     | 2   | 0,56298 20801 (1)        | 0,78404 63700 (1)  |
|     | 2   | 0,33333 33333 (1)        | 0,00000 00000      |     | 3   | 0,26180 18481 (2)        | 0,12464 31424 (2)  |
|     | 0   | $x_1 = 0,00000 \ 00000$  |                    |     | 4   | 0,12464 31424 (2)        | 0,55019 16334 (2)  |
|     | 1   | -0,13333 33333 (1)       | 0,00000 00000      |     | 4   | 0,55019 16334 (2)        | 0,00000 00000      |
|     | 1   | 0,00000 00000            | -0,66666 66667 (1) | 5   | 0   | $x_0 = -0,93246 \ 95142$ |                    |
|     | 2   | -0,66666 66667 (1)       | 0,00000 00000      |     | 0   | 0,15109 60476 (1)        | -0,16203 85924 (1) |
|     | 0   | $x_2 = 0,77459 \ 66692$  |                    |     | 1   | -0,10815 10472 (2)       | 0,85737 94972 (1)  |
|     | 1   | 0,16666 66667 (1)        | 0,12909 94449 (1)  |     | 2   | 0,31348 23008 (2)        | -0,52007 94158 (2) |
|     | 2   | 0,12909 94449 (1)        | 0,33333 33333 (1)  |     | 3   | -0,17412 68675 (3)       | 0,68323 30533 (2)  |
| 3   | 2   | 0,33333 33333 (1)        | 0,00000 00000      |     | 4   | 0,68323 30533 (2)        | -0,36635 67778 (3) |
|     | 0   | $x_0 = -0,86113 \ 63116$ |                    |     | 5   | -0,36635 67778 (3)       | 0,00000 00000      |
|     | 1   | 0,14128 70929 (1)        | -0,16407 05322 (1) | 0   | 0   | $x_1 = -0,66120 \ 93865$ |                    |
|     | 1   | -0,53509 75356 (1)       | 0,31950 48252 (1)  |     | 0   | -0,74866 28291 (0)       | 0,11322 62857 (1)  |
|     | 2   | 0,31950 48252 (1)        | -0,11130 81010 (2) |     | 1   | 0,20886 12068 (2)        | -0,13061 43621 (2) |
|     | 3   | -0,11130 81010 (2)       | 0,00000 00000      |     | 2   | -0,61727 25123 (2)       | 0,13286 27897 (3)  |
|     | 0   | $x_1 = -0,33998 \ 10436$ |                    |     | 3   | 0,50086 88708 (3)        | -0,14599 74451 (3) |
|     | 1   | -0,41287 09292 (0)       | 0,12143 93970 (1)  |     | 4   | -0,14599 74451 (3)       | 0,11040 18243 (4)  |
|     | 2   | 0,10612 11867 (2)        | -0,31950 48252 (1) |     | 5   | 0,11040 18243 (4)        | 0,00000 00000      |
|     | 3   | -0,31950 48252 (1)       | 0,28193 17411 (2)  | 0   | 0   | $x_2 = -0,23861 \ 91861$ |                    |
|     | 3   | 0,28193 17411 (2)        | 0,00000 00000      |     | 0   | 0,23770 23533 (0)        | -0,99615 77575 (0) |
|     | 0   | $x_2 = 0,33998 \ 10436$  |                    |     | 1   | -0,19802 86527 (2)       | 0,44876 41239 (1)  |
|     | 1   | -0,41287 09292 (0)       | -0,12143 93970 (1) |     | 2   | 0,30379 02115 (2)        | -0,16492 51440 (3) |
|     | 2   | -0,10612 11867 (2)       | -0,31950 48252 (1) |     | 3   | -0,70745 02514 (3)       | 0,77674 13974 (2)  |
| 4   | 2   | -0,31950 48252 (1)       | -0,28193 17411 (2) |     | 4   | 0,77674 13974 (2)        | -0,16275 75322 (4) |
|     | 3   | -0,28193 17411 (2)       | 0,00000 00000      |     | 5   | -0,16275 75322 (4)       | 0,00000 00000      |
|     | 0   | $x_3 = 0,86113 \ 63116$  |                    | 0   | 0   | $x_3 = 0,23861 \ 91861$  |                    |
|     | 1   | 0,14128 70929 (1)        | 0,16407 05322 (1)  |     | 0   | 0,23770 23533 (0)        | 0,99615 77575 (0)  |
|     | 1   | 0,53509 75356 (1)        | 0,31950 48252 (1)  |     | 1   | 0,19802 86527 (2)        | 0,44876 41239 (1)  |
|     | 2   | 0,31950 48252 (1)        | 0,11130 81010 (2)  |     | 2   | 0,30379 02115 (2)        | 0,16492 51440 (3)  |
|     | 3   | 0,11130 81010 (2)        | 0,00000 00000      |     | 3   | 0,70745 02514 (3)        | 0,77674 13974 (2)  |
|     | 0   | $x_0 = -0,90617 \ 98459$ |                    |     | 4   | 0,77674 13974 (2)        | 0,16275 75322 (4)  |
|     | 1   | 0,16277 66711 (1)        | -0,14750 49387 (1) |     | 5   | 0,16275 75322 (4)        | 0,00000 00000      |
|     | 1   | -0,56298 20801 (1)       | 0,78404 63700 (1)  | 0   | 0   | $x_4 = 0,66120 \ 93865$  |                    |
|     | 2   | 0,26180 18481 (2)        | -0,12464 31424 (2) |     | 0   | -0,74866 28291 (0)       | -0,11322 62857 (1) |
|     | 3   | -0,12464 31424 (2)       | 0,55019 16334 (2)  |     | 1   | -0,20886 12068 (2)       | -0,13061 43621 (2) |
|     | 4   | 0,55019 16334 (2)        | 0,00000 00000      |     | 2   | -0,61727 25123 (2)       | -0,13286 27897 (3) |
|     | 0   | $x_1 = -0,53846 \ 93101$ |                    |     | 3   | -0,50086 88708 (3)       | -0,14599 74451 (3) |
|     | 1   | -0,11611 00044 (1)       | 0,62521 67398 (0)  |     | 4   | -0,14599 74451 (3)       | -0,11040 18243 (4) |
|     | 1   | 0,76172 03189 (1)        | -0,15307 13037 (2) |     | 5   | -0,11040 18243 (4)       | 0,00000 00000      |
|     | 2   | -0,67246 85148 (2)       | 0,20975 95935 (2)  | 0   | 0   | $x_5 = 0,93246 \ 95142$  |                    |
|     | 3   | 0,20975 95935 (2)        | -0,15581 91633 (3) |     | 0   | 0,15109 60476 (1)        | 0,16203 85924 (1)  |
|     | 4   | -0,15581 91633 (3)       | 0,00000 00000      |     | 1   | 0,10815 10472 (2)        | 0,85737 94972 (1)  |
|     | 0   | $x_2 = 0,00000 \ 00000$  |                    |     | 2   | 0,31348 23008 (2)        | 0,52007 94158 (2)  |
|     | 1   | 0,10666 66667 (1)        | 0,00000 00000      |     | 3   | 0,17412 68675 (3)        | 0,68323 30533 (2)  |
| 5   | 2   | 0,00000 00000            | 0,14933 33333 (2)  |     | 4   | 0,68323 30533 (2)        | 0,36635 67778 (3)  |
|     | 2   | 0,82133 33333 (2)        | 0,00000 00000      |     | 5   | 0,36635 67778 (3)        | 0,00000 00000      |
|     | 3   | 0,00000 00000            | 0,20160 00000 (3)  | 0   | 0   | $x_0 = -0,94910 \ 79123$ |                    |
|     | 4   | 0,20160 00000 (3)        | 0,00000 00000      |     | 0   | 0,16157 77649 (1)        | -0,15335 47351 (1) |
|     | 0   | $x_0 = -0,94910 \ 79123$ |                    |     | 1   | -0,12019 21551 (2)       | 0,14279 47516 (2)  |
|     | 1   | 0,16157 77649 (1)        | -0,15335 47351 (1) |     | 2   | 0,92850 29739 (2)        | -0,64086 52090 (2) |
|     | 2   | -0,12019 21551 (2)       | 0,14279 47516 (2)  |     | 3   | -0,22723 41031 (3)       | 0,44198 73234 (3)  |
|     | 3   | 0,92850 29739 (2)        | -0,64086 52090 (2) |     |     |                          |                    |
|     | 4   | -0,22723 41031 (3)       | 0,44198 73234 (3)  |     |     |                          |                    |
|     | 0   | $x_1 = -0,53846 \ 93101$ |                    |     |     |                          |                    |
|     | 1   | -0,11611 00044 (1)       | 0,62521 67398 (0)  |     |     |                          |                    |
|     | 1   | 0,76172 03189 (1)        | -0,15307 13037 (2) |     |     |                          |                    |
|     | 2   | -0,67246 85148 (2)       | 0,20975 95935 (2)  |     |     |                          |                    |
|     | 3   | 0,20975 95935 (2)        | -0,15581 91633 (3) |     |     |                          |                    |
|     | 4   | -0,15581 91633 (3)       | 0,00000 00000      |     |     |                          |                    |
|     | 0   | $x_2 = 0,00000 \ 00000$  |                    |     |     |                          |                    |
|     | 1   | 0,10666 66667 (1)        | 0,00000 00000      |     |     |                          |                    |
|     | 2   | 0,00000 00000            | 0,14933 33333 (2)  |     |     |                          |                    |
|     | 2   | 0,82133 33333 (2)        | 0,00000 00000      |     |     |                          |                    |
|     | 3   | 0,00000 00000            | 0,20160 00000 (3)  |     |     |                          |                    |
|     | 4   | 0,20160 00000 (3)        | 0,00000 00000      |     |     |                          |                    |

| $n$ | $k$ | $x_k$              | $A_k$              | $x_k$              | $A_k$              |
|-----|-----|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 1   | 1   | 0,28758 66489 ( 0) | 0,16653 18515 ( 1) | 0,28396 93493 ( 0) | 0,16447 57048 ( 1) |
| 2   | 1   | 0,12778 57762 ( 0) | 0,70102 35799 ( 0) | 0,12618 34164 ( 0) | 0,69180 62949 ( 0) |
|     | 2   | 92872 42904 ( 0)   | 23584 22737 ( 1)   | 91384 99795 ( 0)   | 23294 77294 ( 1)   |
| 3   | 1   | 0,76572 42421 (—1) | 0,41102 42858 ( 0) | 0,75822 47961 (—1) | 0,40685 41933 ( 0) |
|     | 2   | 49969 14675 ( 0)   | 13616 41600 ( 1)   | 49387 21484 ( 0)   | 13450 99398 ( 1)   |
|     | 3   | 21884 42154 ( 1)   | 29403 74140 ( 1)   | 21282 05469 ( 1)   | 28535 83239 ( 1)   |
| 4   | 1   | 0,49091 11118 (—1) | 0,25943 40772 ( 0) | 0,48763 80340 (—1) | 0,25767 26737 ( 0) |
|     | 2   | 29555 10347 ( 0)   | 76692 73897 ( 0)   | 29341 87567 ( 0)   | 76122 32095 ( 0)   |
|     | 3   | 94254 67232 ( 0)   | 15857 82093 ( 1)   | 93518 17610 ( 0)   | 15790 95978 ( 1)   |
|     | 4   | 46565 91448 ( 1)   | 59487 40960 ( 1)   | 45512 06795 ( 1)   | 57036 92953 ( 1)   |
| 5   | 1   | 0,34258 32176 (—1) | 0,17949 28789 ( 0) | 0,34020 90785 (—1) | 0,17822 67235 ( 0) |
|     | 2   | 19790 28247 ( 0)   | 49590 89426 ( 0)   | 19641 75220 ( 0)   | 49193 51525 ( 0)   |
|     | 3   | 57924 61857 ( 0)   | 10053 78561 ( 1)   | 57426 37214 ( 0)   | 99675 49057 ( 0)   |
|     | 4   | 14044 60236 ( 1)   | 13820 27681 ( 1)   | 13902 34043 ( 1)   | 13818 58972 ( 1)   |
|     | 5   | 66245 31095 ( 1)   | 97948 12702 ( 1)   | 65310 38631 ( 1)   | 95286 31957 ( 1)   |
| 6   | 1   | 0,26036 60070 (—1) | 0,13581 66506 ( 0) | 0,25861 79738 (—1) | 0,13489 01105 ( 0) |
|     | 2   | 14740 01667 ( 0)   | 36250 05355 ( 0)   | 14633 64732 ( 0)   | 35969 65712 ( 0)   |
|     | 3   | 41536 09942 ( 0)   | 71453 20227 ( 0)   | 41193 17992 ( 0)   | 70803 10600 ( 0)   |
|     | 4   | 95815 72242 ( 0)   | 12055 46073 ( 1)   | 94833 73908 ( 0)   | 11948 87494 ( 1)   |
|     | 5   | 22720 48037 ( 1)   | 11407 16476 ( 1)   | 22178 64386 ( 1)   | 11218 47415 ( 1)   |
|     | 6   | 80132 70977 ( 1)   | 12419 03666 ( 2)   | 78851 94094 ( 1)   | 12110 36432 ( 2)   |
| 7   | 1   | 0,20129 15465 (—1) | 0,10462 58086 ( 0) | 0,20034 54674 (—1) | 0,10412 93239 ( 0) |
|     | 2   | 11210 43112 ( 0)   | 27101 99686 ( 0)   | 11155 47989 ( 0)   | 26963 62084 ( 0)   |
|     | 3   | 30576 77277 ( 0)   | 51123 38435 ( 0)   | 30415 68557 ( 0)   | 50840 05572 ( 0)   |
|     | 4   | 66696 33966 ( 0)   | 86443 64790 ( 0)   | 66311 84962 ( 0)   | 85998 03656 ( 0)   |
|     | 5   | 13480 64107 ( 1)   | 11442 78366 ( 1)   | 13398 08528 ( 1)   | 11447 72148 ( 1)   |
|     | 6   | 41610 54418 ( 1)   | 24872 40576 ( 1)   | 40769 00696 ( 1)   | 23444 55777 ( 1)   |
|     | 7   | 10684 58314 ( 2)   | 15447 78971 ( 2)   | 10406 10851 ( 2)   | 14992 12123 ( 2)   |
| 8   | 1   | 0,15886 26408 (—1) | 0,82351 86479 (—1) | 0,15814 74655 (—1) | 0,81978 00652 (—1) |
|     | 2   | 87413 50086 (—1)   | 20855 51405 ( 0)   | 87005 25803 (—1)   | 20754 31285 ( 0)   |
|     | 3   | 23286 92085 ( 0)   | 37927 49142 ( 0)   | 23170 85124 ( 0)   | 37725 57974 ( 0)   |
|     | 4   | 48866 70405 ( 0)   | 62353 82919 ( 0)   | 48600 18661 ( 0)   | 62004 65574 ( 0)   |
|     | 5   | 92894 74332 ( 0)   | 91600 67369 ( 0)   | 92332 66708 ( 0)   | 91210 08481 ( 0)   |
|     | 6   | 17009 69441 ( 1)   | 88409 37436 ( 0)   | 16898 44901 ( 1)   | 88918 44833 ( 0)   |
|     | 7   | 54027 61762 ( 1)   | 48218 97649 ( 1)   | 53605 83980 ( 1)   | 47092 65929 ( 1)   |
|     | 8   | 14761 27207 ( 2)   | 20084 07313 ( 2)   | 14430 88045 ( 2)   | 19421 48500 ( 2)   |
| 9   | 1   | 0,13061 86167 (—1) | 0,67598 36513 (—1) | 0,12998 76874 (—1) | 0,67269 08806 (—1) |
|     | 2   | 71344 45328 (—1)   | 16882 83570 ( 0)   | 70986 87754 (—1)   | 16794 72077 ( 0)   |
|     | 3   | 18743 12597 ( 0)   | 30021 84124 ( 0)   | 18642 61522 ( 0)   | 29846 99471 ( 0)   |
|     | 4   | 38494 68501 ( 0)   | 48362 36673 ( 0)   | 38266 35940 ( 0)   | 48044 53079 ( 0)   |
|     | 5   | 71035 47125 ( 0)   | 72855 86187 ( 0)   | 70550 82280 ( 0)   | 72348 49281 ( 0)   |
|     | 6   | 12565 01145 ( 1)   | 92901 04360 ( 0)   | 12459 94393 ( 1)   | 92461 57665 ( 0)   |
|     | 7   | 22786 43725 ( 1)   | 58792 50570 ( 0)   | 22423 67921 ( 1)   | 59129 47968 ( 0)   |
|     | 8   | 59836 97901 ( 1)   | 59969 88223 ( 1)   | 59445 53762 ( 1)   | 59084 98368 ( 1)   |
|     | 9   | 17681 90893 ( 2)   | 24436 99159 ( 2)   | 17350 48892 ( 2)   | 23701 69863 ( 2)   |
| 10  | 1   | 0,10909 71011 (—1) | 0,56386 45836 (—1) | 0,10867 19988 (—1) | 0,56165 39962 (—1) |
|     | 2   | 59244 62847 (—1)   | 13927 24247 ( 0)   | 59007 56140 (—1)   | 13869 84947 ( 0)   |
|     | 3   | 15394 45678 ( 0)   | 24305 08243 ( 0)   | 15329 84915 ( 0)   | 24196 82464 ( 0)   |
|     | 4   | 31080 46567 ( 0)   | 38307 18759 ( 0)   | 30940 84102 ( 0)   | 38122 23942 ( 0)   |
|     | 5   | 55950 58824 ( 0)   | 57275 86727 ( 0)   | 55676 65521 ( 0)   | 56992 96983 ( 0)   |
|     | 6   | 95556 75726 ( 0)   | 78738 78525 ( 0)   | 95041 63348 ( 0)   | 78445 02153 ( 0)   |
|     | 7   | 16091 96248 ( 1)   | 81532 57839 ( 0)   | 15998 21652 ( 1)   | 81811 45899 ( 0)   |
|     | 8   | 37048 40863 ( 1)   | 93562 50002 ( 0)   | 36220 21513 ( 1)   | 86469 89979 ( 0)   |
|     | 9   | 68045 05081 ( 1)   | 67413 20427 ( 1)   | 67192 71727 ( 1)   | 66702 86419 ( 1)   |
|     | 10  | 20706 35569 ( 2)   | 28983 38904 ( 2)   | 20276 88735 ( 2)   | 28082 36446 ( 2)   |

s=3,95

s=4,00

| $n$ | $k$ | $x_k$              | $A_k$              | $x_k$              | $A_k$              |
|-----|-----|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 1   | 1   | 0,28045 11416 ( 0) | 0,16247 29446 ( 1) | 0,27702 68738 ( 0) | 0,16052 08108 ( 1) |
| 2   | 1   | 0,12463 24446 ( 0) | 0,68290 17374 ( 0) | 0,12313 08380 ( 0) | 0,67429 66604 ( 0) |
|     | 2   | 89967 09604 ( 0)   | 23019 10462 ( 1)   | 88613 91811 ( 0)   | 22756 10829 ( 1)   |
| 3   | 1   | 0,75079 64665 (—1) | 0,40272 42738 ( 0) | 0,74344 10480 (—1) | 0,39863 56439 ( 0) |
|     | 2   | 48810 92337 ( 0)   | 13286 27788 ( 1)   | 48240 55088 ( 0)   | 13122 44129 ( 1)   |
|     | 3   | 20708 50363 ( 1)   | 27733 60520 ( 1)   | 20162 53771 ( 1)   | 26992 14586 ( 1)   |
| 4   | 1   | 0,48440 75253 (—1) | 0,25593 45003 ( 0) | 0,48121 64087 (—1) | 0,25421 77996 ( 0) |
|     | 2   | 29131 57069 ( 0)   | 75559 43642 ( 0)   | 28923 95362 ( 0)   | 75003 40204 ( 0)   |
|     | 3   | 92791 06552 ( 0)   | 15723 20754 ( 1)   | 92072 33813 ( 0)   | 15654 47387 ( 1)   |
|     | 4   | 44476 09479 ( 1)   | 54682 54082 ( 1)   | 43457 73901 ( 1)   | 52422 17066 ( 1)   |
| 5   | 1   | 0,33789 76774 (—1) | 0,17699 47031 ( 0) | 0,33564 67031 (—1) | 0,17579 55278 ( 0) |
|     | 2   | 19497 53117 ( 0)   | 48808 64055 ( 0)   | 19357 44005 ( 0)   | 48435 69678 ( 0)   |
|     | 3   | 56945 46662 ( 0)   | 98846 89640 ( 0)   | 56480 98536 ( 0)   | 98049 99491 ( 0)   |
|     | 4   | 13767 13640 ( 1)   | 13817 55033 ( 1)   | 13638 38332 ( 1)   | 13816 90240 ( 1)   |
|     | 5   | 64398 98988 ( 1)   | 92703 90950 ( 1)   | 63508 83934 ( 1)   | 90194 66064 ( 1)   |
| 6   | 1   | 0,25687 91990 (—1) | 0,13396 85681 ( 0) | 0,25515 15577 (—1) | 0,13305 30353 ( 0) |
|     | 2   | 14527 88794 ( 0)   | 35690 92683 ( 0)   | 14422 86284 ( 0)   | 35414 22439 ( 0)   |
|     | 3   | 40852 43755 ( 0)   | 70156 11111 ( 0)   | 40514 36035 ( 0)   | 69513 45038 ( 0)   |
|     | 4   | 93858 10538 ( 0)   | 11840 79270 ( 1)   | 92890 99362 ( 0)   | 11731 74612 ( 1)   |
|     | 5   | 21668 78171 ( 1)   | 11063 63074 ( 1)   | 21189 70087 ( 1)   | 10938 72072 ( 1)   |
|     | 6   | 77641 60818 ( 1)   | 11816 18957 ( 2)   | 76495 81906 ( 1)   | 11535 39749 ( 2)   |
| 7   | 1   | 0,19940 12858 (—1) | 0,10363 38372 ( 0) | 0,19845 83253 (—1) | 0,10313 89896 ( 0) |
|     | 2   | 11100 63888 ( 0)   | 26825 50446 ( 0)   | 11045 86682 ( 0)   | 26687 53803 ( 0)   |
|     | 3   | 30254 88735 ( 0)   | 50556 87585 ( 0)   | 30094 24477 ( 0)   | 50273 57913 ( 0)   |
|     | 4   | 65927 61588 ( 0)   | 85549 20310 ( 0)   | 65543 26231 ( 0)   | 85096 56523 ( 0)   |
|     | 5   | 13315 17787 ( 1)   | 11450 60284 ( 1)   | 13231 80544 ( 1)   | 11451 31870 ( 1)   |
|     | 6   | 39916 34963 ( 1)   | 22069 42140 ( 1)   | 39054 67729 ( 1)   | 20753 04129 ( 1)   |
|     | 7   | 10141 87309 ( 2)   | 14565 03876 ( 2)   | 98915 65492 ( 1)   | 14164 19168 ( 2)   |
| 8   | 1   | 0,15744 56877 (—1) | 0,81611 21666 (—1) | 0,15675 65394 (—1) | 0,81251 08818 (—1) |
|     | 2   | 86604 98311 (—1)   | 20655 17381 ( 0)   | 86212 20936 (—1)   | 20557 97316 ( 0)   |
|     | 3   | 23057 22549 ( 0)   | 37528 29667 ( 0)   | 22945 89396 ( 0)   | 37335 34214 ( 0)   |
|     | 4   | 48339 96993 ( 0)   | 61664 69582 ( 0)   | 48085 63730 ( 0)   | 61333 26899 ( 0)   |
|     | 5   | 91786 36840 ( 0)   | 90831 34013 ( 0)   | 91254 65246 ( 0)   | 90463 26637 ( 0)   |
|     | 6   | 16791 40933 ( 1)   | 89411 59153 ( 0)   | 16688 15489 ( 1)   | 89889 25404 ( 0)   |
|     | 7   | 53179 46388 ( 1)   | 45955 64253 ( 1)   | 52747 40371 ( 1)   | 44806 31395 ( 1)   |
|     | 8   | 14107 59250 ( 2)   | 18787 46139 ( 2)   | 13791 10703 ( 2)   | 18180 95682 ( 2)   |
| 9   | 1   | 0,12936 38641 (—1) | 0,66943 55110 (—1) | 0,12874 75781 (—1) | 0,66621 98079 (—1) |
|     | 2   | 70633 48248 (—1)   | 16707 67650 ( 0)   | 70284 51974 (—1)   | 16621 76717 ( 0)   |
|     | 3   | 18543 36154 ( 0)   | 29674 49332 ( 0)   | 18445 44000 ( 0)   | 29504 48174 ( 0)   |
|     | 4   | 38041 18474 ( 0)   | 47731 36764 ( 0)   | 37819 35113 ( 0)   | 47423 21604 ( 0)   |
|     | 5   | 70073 83038 ( 0)   | 71848 35334 ( 0)   | 69604 98705 ( 0)   | 71356 37104 ( 0)   |
|     | 6   | 12356 92823 ( 1)   | 92019 84161 ( 0)   | 12256 12239 ( 1)   | 91579 04590 ( 0)   |
|     | 7   | 22085 56924 ( 1)   | 59550 89596 ( 0)   | 21770 31066 ( 1)   | 60040 46051 ( 0)   |
|     | 8   | 59067 86053 ( 1)   | 58214 45627 ( 1)   | 58702 42485 ( 1)   | 57356 73521 ( 1)   |
|     | 9   | 17029 93616 ( 2)   | 22997 72015 ( 2)   | 16719 41377 ( 2)   | 22322 91657 ( 2)   |
| 10  | 1   | 0,10824 74140 (—1) | 55944 61115 (—1)   | 0,10782 33161 (—1) | 0,55724 07674 (—1) |
|     | 2   | 58770 78734 (—1)   | 13812 52698 ( 0)   | 58534 28807 (—1)   | 13755 27025 ( 0)   |
|     | 3   | 15265 32092 ( 0)   | 24088 67809 ( 0)   | 15200 86648 ( 0)   | 23980 63192 ( 0)   |
|     | 4   | 30801 36885 ( 0)   | 37937 29984 ( 0)   | 30662 03471 ( 0)   | 37752 34461 ( 0)   |
|     | 5   | 55402 87382 ( 0)   | 56709 05118 ( 0)   | 55129 20740 ( 0)   | 56424 05494 ( 0)   |
|     | 6   | 94525 89134 ( 0)   | 78145 01435 ( 0)   | 94009 42682 ( 0)   | 77838 59035 ( 0)   |
|     | 7   | 15903 76141 ( 1)   | 82071 17664 ( 0)   | 15808 55345 ( 1)   | 82310 65893 ( 0)   |
|     | 8   | 35400 71843 ( 1)   | 80166 31838 ( 0)   | 34593 70732 ( 1)   | 74603 05350 ( 0)   |
|     | 9   | 66398 47666 ( 1)   | 65986 27469 ( 1)   | 65658 04560 ( 1)   | 65263 69587 ( 1)   |
|     | 10  | 19866 78592 ( 2)   | 27225 55842 ( 2)   | 19474 75533 ( 2)   | 26409 87340 ( 2)   |

КРЫЛОВ ВЛАДИМИР ИВАНОВИЧ  
КРУГЛИКОВА ЛЮДМИЛА ГЕННАДЬЕВНА

**СПРАВОЧНАЯ КНИГА  
ПО ЧИСЛЕННОМУ ГАРМОНИЧЕСКОМУ  
АНАЛИЗУ**

---

Редактор Е. Волкинд  
Художник В. Савченко  
Художественный редактор Н. Евменова  
Технический редактор И. Волоханович  
Корректоры Г. Большакова, Н. Гурова

АТ 15010. Сдано в набор 14/I-67 г. Подписано в  
печать 19/I-68 г. Формат  $84 \times 108^{1/16}$ . Бумага тип.  
№ 1. Физ. печ. листов 10,5. Усл. печ. листов 17,6.  
Уч.-изд. листов 16,8. Изд. заказ 268. Тип. заказ 387.  
Тираж 5250 экз. Цена 1 р. 21 к.

Издательство «Наука и техника»,  
Минск, Ленинский пр., 68.

---

Типография им. Георгия (Франциска) Скорины  
издательства «Наука и техника» АН БССР и Гос-  
комитета Совета Министров БССР по печати.  
Минск, Ленинский пр., 68.

**В издательстве  
„НАУКА И ТЕХНИКА“  
готовится к печати**

**ИВАНОВ Е. А.**

**ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ДВУХ ТЕЛАХ**

*30 л. На русском языке. Цена 1 р. 95 к. (ориентировочно)*

В книге кратко описываются основные уравнения электромагнитного поля и рассматриваются вопросы, связанные с разделением уравнений Максвелла в различных ортогональных криволинейных координатных системах и сведением векторных электродинамических задач к скалярным относительно вспомогательных потенциалов. Дается изложение основных свойств специальных волновых функций, приводятся формулы разложения первичных полей в ряды по волновым функциям и теоремы сложения для волновых функций в цилиндрической, эллиптической, сферической и сфероидальной системах координат.

Содержится решение ряда задач дифракции электромагнитных волн на круговых и электрических цилиндрах, сферах, сфероидах (дисках), полученное классическим методом разделения переменных, обобщенным на случай двух тел. Исследуются вопросы численного решения бесконечных систем линейных уравнений для коэффициентов разложения искомых функций по собственным волновым функциям соответствующего тела.

Рассчитана на студентов, инженеров и других лиц, занимающихся теорией дифракции электромагнитных волн и ее приложениями.



*Книгу можно заказать предварительно во всех магазинах Книготорга и потребительской кооперации республики, а также в магазинах «Академкнига».*

*Для получения книги почтой заказы направлять по адресу: г. Минск, Железнодорожная улица, 27, Республиканский магазин «Книга — почтой» или г. Москва, К-12, Б. Черкасский переулок, 2/10, контора «Академкнига», отдел «Книга — почтой».*

*Книготоргующие и другие организации направляют заказы Управлению книжной торговли Госкомитета СМ БССР по печати по адресу: г. Минск, Омский переулок, 13.*

**Крылов В. И., Кругликова Л. Г.**

**К85**      Справочная книга по численному гармоническому анализу. Минск, «Наука и техника», 1968.

168 стр. с илл. 5250 экз. 1 р. 21 к. В перепл.

Цель данной книги — дать изложение современного состояния численного гармонического анализа и собрать в одном месте все необходимые сведения по теории, правила вычислений и вспомогательные таблицы, которые могут потребоваться при расчетах. В книге изложены правила вычисления коэффициентов Фурье для классов функций, наиболее часто встречающихся в приложениях. Большая ее часть посвящена более трудной задаче вычисления интегралов Фурье. Кроме того, даны вспомогательные математические таблицы, облегчающие эти вычисления. — Библиогр.: с. 61—63 (91 назв.).

2-2-5  
75-67

517.2