

Ф. Н. КРАСОВСКИЙ

Профессор Московского Межевого Института

РУКОВОДСТВО

по

# ВЫСШЕЙ ГЕОДЕЗИИ

Курс Геодезического Факультета  
Московского Межевого Института

Часть I

МОСКВА. 1926.



475.

*S. Muscatini.*

475  
А. Мухоморов

Ф. Н. КРАСОВСКИЙ

Профессор Московского Межевого Института

Генеральному  
Александру Александровичу  
Михайлову

РУКОВОДСТВО

Ф. Красовский

ПО

# ВЫСШЕЙ ГЕОДЕЗИИ

Курс Геодезического Факультета  
Московского Межевого Института

## ЧАСТЬ I

Научно-Технической Секцией Государственного Ученого Совета  
допущено в качестве руководства для Высших Учебных Заведений

---

ИЗДАНИЕ

Высшего Геодезического Управления В. С. Н. Х. С. С. С. Р.  
и Московского Межевого Института.

МОСКВА. 1926.

---

---

Печатано в Картографи-  
ческом Отделе Геодезиче-  
ского Комитета В. С. Н. Х.  
С. С. С. Р.

Главлит № 65174.

Тираж 2000 экз.

---

---



# ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие . . . . .	IX
Сочинения, статьи, рефераты и проч. послужившие для составления курса. . . . .	XIII

## В в е д е н и е

1. Задачи Высшей Геодезии. . . . .	1
2. Градусные измерения. Идея градусного измерения. Главнейшие градусные измерения и выводы из них размеров земного эллипсоида . . . . .	1
3. Измерения силы тяжести. Теорема Клеро и применение ее к определению сжатия земного эллипсоида . . . . .	6
4. Изучение местных уклонений отвесных линий. Геодезическая широта и долгота. Ориентирование в земном теле эллипсоида, принятого при определении геодезических координат. Относительные уклонения отвесных линий. Понятие об изучении вида уровенной поверхности в данном районе на основании сопоставления астрономических и геодезических координат . . . . .	8
5. Связь геодезии с геологией и геофизикой. . . . .	11

## Г л а в а I.

### О триангуляции вообще.

6. Триангуляции и нивелировки; составление карт. Применение триангуляции в целях градусных измерений. Современная организация государственной топографической с'емки; значение триангуляций и основных нивелировок в организации и исполнении топографических работ на больших пространствах. Роль геодезических опорных точек при картографировании материалов государственной с'емки . . . . .	13
7. Тригонометрические сети разных классов и порядок их составления. Необходимость разделения тригонометрических сетей на классы. Современная схема триангуляции I класса в С. С. С. Р. Разные виды построения рядов I класса. Основные цепи II класса; заполняющие сети II класса; третьеклассные точки. Схема построения кадастровых сетей III класса в Германии. Прямоугольные координаты тригонометрических точек низшего разряда. . . . .	19

## Г л а в а II.

### О тригонометрических знаках.

8. Виды знаков. Простые и двойные пирамиды, — ординарные (простые) и сложные сигналы. Главные условия пред'являемые к постройке геодезического сигнала. . . . .	24
9. Геодезические разведки (рекогносцировки). Составление проекта сети. Snаряжение рекогносцировщика. Понятие о методах рекогносцировки; секторы видимости. Условие видимости. . . . .	33
10. Центры, их закладка; описание тригонометрического пуннта. Двойные центры на пунктах I и II класса. Центры на концах базисов. Упрощенный тип центра на пунктах низшего разряда. Обеспечение разыскания центра . . . . .	40
11. Способ Марена разыскания тригонометрического пункта. . . . .	44

## Г л а в а III.

### О действии погрешностей в триангуляции; базисные сети.

12. Средняя квадратическая ошибка связующей и промежуточной стороны. Ошибка геометрической связи . . . . .	45
--	----

	Стр
13. Выгоднейшая форма треугольника . . . . .	4
14. Выводы из § 12 и 13. . . . .	5
15. О базисных сетях. Базисные сети; целная; из системы подобных прямоугольных тр-ков; ромбическая. Точность определения выходной стороны . . . . .	5
16. Перечень работ в триангуляции. . . . .	5

#### Глава IV.

#### О мерах.

17. Нормальные меры. Концевые (старые) нормальные меры. Новые нормальные меры; метры — прототипы. . . . .	1
18. Сравнения мер. Краткое описание микроскоп-микрометра. Устройство простейшего компаратора. Схема сравнения мер. Краткое описание больших компараторов центральных метрологических учреждений . . . . .	6

#### Глава V.

#### Измерение базисов.

19. О базисных приборах вообще. Общие требования, предъявляемые к базисному прибору. Разделение базисных приборов по способу определения температуры мерных жезлов; краткое описание прибора Бесселя и применение в нем принципа биметаллизма. Способы определения расстояний между концами откладываемых жезлов. Прибор Прусского Геодезического Института . . . . .	1
20. Базисный прибор и компаратор Струве. Устройство рабочих жезлов. Устройство компаратора Струве. Исследования и определение постоянных базисного прибора . . . . .	1
21. Измерение базиса прибором Струве и вычисление длины базиса. . . . .	1
22. Базисный прибор с проволоками. Теоретические обоснования. Первоначальное устройство прибора Едерина; измерение им базиса и вычисление длины базиса. Усовершенствование Венуа и Гильома в приборе Едерина. Проволоки из инвара. Блочные станки. Формулы для вычисления длины базиса, измеренного усовершенствованным прибором Гильом-Едерина. Точность измерения базиса. Эталонирование проволок. Компаратор для эталонирования 24 м проволок . . . . .	1
23. Измерение базиса по бичеве. Компаратор Лебедева. Полевые работы при измерении базиса. Вычисление длины базиса. Точность измерения . . . . .	1

#### Глава VI

#### Отдельные части геодезических угломерных инструментов.

25. Об уровнях. Формулы определения наклонности оси уровня. Определение наклонности горизонтальной оси инструмента (оси вращения трубы). Примеры. Определение цены деления уровня на экзаменаторе; пример. Типы устройства оправы уровня. Правила отсчитывания пузырька уровня . . . . .	1
26. О верньере. Определение действительной „точности“ верньера; пример . . . . .	1
27. Шкаловой микроскоп. Устройство и установка шкалового микроскопа. Рун шкалового микроскопа и введение за него поправки в отсчет . . . . .	1
28. Микроскоп-микрометр. Устройство микроскоп-микрометра. Установка микроскопа на требуемое увеличение . . . . .	1
29. Формулы отсчетов при помощи микроскоп-микрометров. . . . .	1
а) случай измерения интервала лимба одним оборотом винта;	
б) „ „ „ „ несколькими целыми оборотами винта;	
в) „ „ „ „ нечетным числом полуоборотов винта;	
Причины изменения гуп'а микроскопа. Формула направления с средним гуп'ом;	
д) Случай двух пар нитей в микрометре. Формулы, применяемые в современных триангуляциях I класса в С. С. С. Р.	

30. Исследование, установка и поверки микроскоп-микрометра. Последовательность выполнения поверок. Исследование правильности работы микрометра, как целого механизма. Предварительное определение  $\mu\text{п}^a$ . Исследование периодических и ходовых ошибок винта. Определение  $\mu\text{п}^a$  микроскопа . . . . . 144
31. Трубы угломерных инструментов. Прямая и ломаная труба. Сетка нитей. Окулярный микрометр . . . . . 151
32. Устройство осей. Система Рейхенбаха, Борда и Репсолда . . . . . 155
33. Описание инструментов служащих для измерения горизонтальных направлений и земных расстояний в триангуляции. Инструменты с десятисекундными верньерами для триангуляций III и II класса. Пятисекундный универсал Гильдебранда для основных рядов II класса. Большие теодолиты и универсалы (Гильдебранда и Ваншафа) для наблюдений на пунктах I класса. Регулирование вращения алидады. Формулы поправок за окулярные микрометры. Определение цены деления окулярного микрометра. Замечания о пользовании поверительной трубой . . . . . 158

## Глава VII.

**Об инструментальных погрешностях.**

34. Эксцентрицитет алидады. Влияние эксцентрицитета на отсчет и на направление. Предельный размер эксцентрицитета в инструментах с верньерами и с микроскоп-микрометрами. Определение элементов эксцентрицитета . . . . . 177
35. Об ошибках делений на лимбах. Систематические и случайные ошибки штрихов. Прибор Ваншафа. Основная схема исследования ошибок диаметров. Указание на метод Шрейбера. Способ Брунса. Вывод случайных ошибок делений . . . . . 183
36. О коллимационной ошибке трубы. Влияние коллимационной ошибки на наблюдаемые горизонтальные направления и углы. Вывод средней ошибки направления из колебаний коллимации. Определение коллимационной ошибки при внецентричной трубе . . . . . 196
37. Влияние неправильной установки горизонтальной оси (оси вращения трубы) на измеряемые горизонтальные направления. Случай неправильной установки, обусловленный только неравенством подставок трубы (или неравенством цапф). . . . . 201
38. Влияние неправильной установки вертикальной оси (оси вращения алидады) на горизонтальные направления и углы. Практические выводы . . . . . 202

## Глава VIII.

**Об измерении горизонтальных направлений и углов.**

39. Выгоднейшее время наблюдений горизонтальных направлений. . . . . 206
40. Измерение углов способом повторения. Сущность способа. Формула средней ошибки угла. Действие погрешностей в способе повторения; постоянная ошибка способа повторения . . . . . 207
41. Способ круговых приемов или измерение направлений. Сущность и основания способа. Подготовительные меры к производству наблюдений; добавочное снаряжение. Программа наблюдений. Затруднения в применении способа круговых приемов в триангуляции I класса. Наблюдения вспомогательной марки. Схемы и примеры записей при наблюдениях инструментами разного устройства. Обработка материала на станции при наблюдениях круговыми приемами: общие формулы уравнивания станции; определение средней ошибки (единицы веса) направления по „вторичным“ отклонениям, пример. Пример уравнивания наблюдений „неполными“ приемами . . . . . 210
42. Наблюдения световых сигналов. Гелиотропы Гаусса и Ваншафа. Фонари для ночных наблюдений. Особенности работы при наблюдениях световых сигналов . . . . . 230



43. Измерение отдельных углов по способу Шрейбера. Измерение на пункте углов во всех комбинациях (метод Гаусса). Вывод вероятнейших значений углов. Результат уравнивания станции в виде одного ряда направлений; вес окончательно выведенного угла и направления. Способ Шрейбера, как частный вид измерения углов во всех комбинациях. Расчет перестановок лимба; составление табличек. Выгоды применения способа Шрейбера в триангуляциях I класса. Пример обработки наблюдений на пункте, исполненных по способу Шрейбера. Средняя ошибка окончательно выведенного направления . . . . .

#### Глава IX.

##### Приведение углов к центрам тригонометрических знаков.

44. Разные виды приведений и их элементы . . . . .  
 45. Способы определения элементов приведения. Графический прием. Определение элементов центрировки непосредственным измерением. Два способа аналитического определения элементов приведений. Примеры . . . . .  
 46. Вычисление центрировок и редукций . . . . .

#### Глава X.

##### Уравнительные вычисления в тригонометрической сети.

47. Общие соображения. Необходимые и избыточные наблюдения. Условные уравнения в сети. Общий вид задачи уравнительных вычислений в тригонометрической сети — обработка посредственных наблюдений с условными уравнениями. Зависимость вида задачи по уравниванию триангуляции от расположения наблюдений на пунктах сети. Упрощения задачи уравнительных вычислений . . . . .  
 48. Виды условных уравнений. Условия фигур, горизонта и боковые. Базисное условное уравнение; пример. Условия сумм. Понятие об условии азимутов. Понятие о полигональных условиях . . . . .  
 49. Число условных уравнений . . . . .  
 50. Замечания относительно составления условных уравнений. Прием, гарантирующий составление независимых друг от друга условных уравнений. Выбор фигур; выбор полюса при составлении боковых уравнений. Условия фигур и боковые при вычислении триангуляции на эллипсоиде. Контроль вычисления свободных членов. Допускаемые размеры свободных членов . . . . .  
 51. Составление и решение нормальных уравнений коррелат. . . . .  
 52. Упрощения уравнительных вычислений. Понятие о двух методах упрощения. Примеры упрощенного и не строгого уравнивания: центральная система; геодезический четырехугольник . . . . .

#### Глава XI.

##### Определение дополнительных пунктов.

- Предварительное исправление направлений, наблюдаемых с основных пунктов на дополнительные; случаи уравнивания направлений и углов . . . . .  
 53. Определение дополнительного пункта прямой засечкой. Случай нахождения поправок углов или направлений. Формула изменения азимута линии при изменении координат ее конечной точки. Нахождение поправок координат определяемой точки: вид уравнений погрешностей; нормальные уравнения; оценка точности полученных координат дополнительного пункта . . . . .  
 54. Графическое уравнивание дополнительного пункта. Определение веса отдельного пересечения направлений, взятых на дополнительный пункт. Вероятные координаты дополнительного пункта и их средние ошибки . . . . .  
 55. Определение дополнительного пункта многократной обратной засечкой. „Ориентированные“ направления. Вид уравнений погрешностей. Общий порядок вычислений. Вид уравнений погрешностей при уравнивании углов . . . . .

56. Дополнительные примеры на упрощенное уравнивание сетей низших разрядов. Вставка цепи треугольников, заполняющей угол между двумя данными сторонами. Вставка цепи треугольников между двумя данными пунктами . 320
57. Пример вычисления малой тригонометрической сети. . . . . 325

## Глава XII.

## Дополнения к вопросу об уравнивательных вычислениях в триангуляции.

58. Неопределенное решение нормальных уравнений. Весовые коэффициенты; правила их вычисления . . . . . 341
59. Вес функции уравновешенных элементов при посредственных наблюдениях. Вычисление при помощи предварительного определения весовых коэффициентов. Определение веса отдельной функции без посредства весовых коэффициентов. 344
60. Вес функции уравновешенных элементов при условных наблюдениях. Переходные коэффициенты. Определение веса (без переходных коэффициентов) введением добавочного столбца в нормальные уравнения коррелат . . . . . 347
61. Пример определения весовых коэффициентов и вычисления веса функции уравненных элементов при посредственных наблюдениях . . . . . 350
62. Пример определения веса функции уравновешенных элементов при условных наблюдениях . . . . . 352
63. Примеры применения вывода § 60 к триангуляции. Средняя ошибка стороны треугольника. Приближенное определение средней ошибки в длине „полной“ диагонали тригонометрического ряда . . . . . 355
64. Условия, при которых результат наблюдений на тригонометрическом пункте может быть представлен в виде одного ряда направлений . . . . . 358
65. Уравнивание наблюдений, исполненных на некотором тригонометрическом пункте — общий случай. Пример (числовой) . . . . . 361
66. Упрощенные способы уравнивания станций. Британский прием. Числовой пример. 367
67. Упрощенные приемы уравнивания. Пример из Прусской инструкции тригонометрических работ при кадастре. . . . . 375
68. Применение формул § 65 к случаю наблюдений по способу Шрейбера; оценка точности измерений, исполненных этим способом. Четыре способа оценки точности. Числовой пример . . . . . 378
69. Уравнивание триангуляции по способу Бесселя. Теория способа. Числовой пример . . . . . 389

## Глава XIII.

## Нивелирование высокой точности.

70. Методы нивелирования высокой точности. Четыре метода получения взгляда на станции . . . . . 402
71. Знаки нивелирования высокой точности. Марки, стенные и полевые реперы. Временные знаки . . . . . 403
72. Инструменты точного нивелирования. Нивелиры. Нивелир Гильдебранда. Французский нивелир Бертеlemi. Американский нивелир . . . . . 404
73. Инструменты точного нивелирования. Рейки и приборы для определения их длины. Русские рейки. „Женевская“ линейка. Исследование дециметровых частей при помощи женевской линейки. Пример. График поправок. Особенности обработки исследований делений „красной“ стороны (в  $\frac{1}{20}$  сажени). Штриховые рейки германской нивелировки. Контрольный метр Бамберга и исследование при помощи его реек по принятому в Германии способу. Пример. Рейки французского нивелирования . . . . . 408
74. Инструментальные ошибки нивелирования. Результаты исследований Рейнгертца по определению ошибки отсчета по рейке и ошибки в определении наклонности

- оси уровня. Действие ошибок отсчетов по рейке и ошибок в определении наклонности уровня в разных методах нивелирования. Определение угла между визирной осью трубы и осью уровня; влияние этого угла на результат нивелирования . . . . .
75. Ошибки нивелирования из-за недостатков установок . . . . .
76. Внешние причины ошибок нивелирования. Действие рефракции. Формула влияния рефракции на Лаллеману. Выводы из опытов. Наивыгоднейшее время для точного нивелирования . . . . .
77. Нивелирование по русскому способу. Поверки и исследования нивеллира и реек. Определение постоянных нивеллира; исследование и поверки нивеллира и реек
78. Главные черты инструкций русских нивелировок. Порядок наблюдений, запись и контроль на станции. . . . .
79. Обработка хода исполненного между двумя марками по русскому способу. Окончательная обработка полевого журнала. Введение поправок: за угол между визирной осью трубы и осью уровня; за неверность „общей“ длины реек и их подразделений. Пример . . . . .
80. Ортометрическая поправка нивелировки . . . . .
81. Вывод точности нивелировки. Пример из работ Тригонометрического Отделения Германского Управления С'емок . . . . .

## Глава XIV.

**О тригонометрическом нивелировании.**

82. Измерение вертикальных углов. Формулы тригонометрического нивелирования. Случай одностороннего нивелирования. Случай взаимных наблюдений . . . . .
84. О точности определения высот из тригонометрического нивелирования . . . . .
85. Определение коэффициента земного преломления . . . . .



## ПРЕДИСЛОВИЕ.

На русском языке имеются следующие руководства по Высшей Геодезии: „Курс Высшей Геодезии“ *Н. Я. Дитера*; „Практическая Геодезия“ *В. В. Витковского*; „Лекции по Высшей Геодезии“ *Ф. А. Слудского*; „Геодезия“ *Кларка* в переводе Витковского; „Руководство Высшей Геодезии“ *Иордана* в переводе *А. Н. Бик* и „О тригонометрических сетях“ *Ф. И. Красовского*. Книга *Иордана* в том виде, как ее перевел *А. Н. Бик*, в настоящее время совершенно устарела; на немецком языке она перерабатывалась уже более семи раз, и в последних изданиях содержание ее и ее объем совершенно не те, как это было в первом издании, переведенном *А. Н. Бик*; соавторами теперешнего „*Иордана*“ являются профессора *Реймертц* и *Энгерт*. О переводе на русский язык этого замечательного и прямо гигантского труда вряд-ли можно говорить в ближайшие годы, так как книга состоит из трех томов по 900—1000 страниц в каждом томе; но очевидно, если-бы даже удалось издать этот труд, то для русского потребителя он был-бы недоступен.

„Лекции по Высшей Геодезии“ *Ф. А. Слудского*, читанные им в Московском Университете в девяностых годах прошлого столетия, являются самым превосходным образцом университетского преподавания „Высшей Геодезии“ в прежней его постановке: полная оторванность от практики и техники дела и чисто теоретическая постановка всех вопросов Геодезии, соответствующая подготовке не геодезистов, а „молодых ученых“ в области физико-математического цикла.

Эти „лекции“ проф. *Ф. А. Слудского* должны быть изучаемы инженер-геодезистами, оставленными при геодезических факультетах для приготовления к профессорскому званию; изданные в 1894 году, эти „лекции“ *Ф. А. Слудского*, в настоящее время являются библиографической редкостью.

Что касается „Геодезии“ *Кларка*, которая является сейчас так-же библиографической редкостью, то эта превосходная книга, составившая вообще эпоху в Геодезии, совершенно не может быть рассматриваема, как руководство, а тем более как учебное пособие: она должна входить в библиотеку научно-практического деятеля, организующего и ведущего большие геодезические работы.

„Практическая Геодезия“ *В. В. Витковского* является по замыслу и построению полной противоположностью „Лекциям по Высшей Геодезии“ *Ф. А. Слудского*: здесь теории Высшей Геодезии нет, здесь все построено в расчете на практического деятеля, даже не геодезиста, а топограф-триангулятора; хотя в конце книги имеются главы по „Теории фигуры земли“, но они построены опять-таки так, чтобы только дать представление практическому деятелю о том использовании собираемого им материала,

которое выполняется при исследованиях вида и размеров земли. Эта замечательная книга *В. В. Витковского* отвечает вполне подготовке практического деятеля, и на ней воспитались последние поколения русских военных геодезистов — но, конечно, при условии прохождения той высокой школы, которая осуществлялась в Пулкове в лице покойного *Ф. Ф. Витрама*, В настоящее время книги *В. В. Витковского* в продаже уже не имеется.

„Курс Высшей Геодезии“ *Цингера* во-первых является в некоторых частях своих тесно связанным с его-же „Курсом Практической Астрономии“, а во-вторых, отличается такою сжатостью, при которой усвоение этой книги, особенно для студентов, является очень затруднительным, и при которой целый ряд вопросов дается лишь совершенно схематически — это относится и к вопросу об уравнивании триангуляций, и к вопросу о постройке знаков, и к вопросу об измерении базисов и углов в триангуляции и к вопросу о вычислении эллипсоидальных координат; по всем этим важным вопросам изучающий, после книги *Цингера*, должен будет обратиться к книге *Витковского*, но и там, найдя практические указания, часто не найдет теоретических обоснований.

В своем руководстве по Высшей Геодезии, я стремился по возможности, сочетать достоинства курсов *Цингера* и *Витковского* с таковыми-же „*Иордана*“ в переработке *Реймертца* и *Эгерта*; это удалось только после многолетней разработки курса, которая привела меня к удачным, по моему мнению, построениям, позволившим в доступной форме изложить многое из того, что было предметом монографического исследования или многотомного руководства и что дает необходимое обоснование технике и практике дела.

Результаты этой моей работы по подведению надлежащего теоретического обоснования к тем или иным вопросам Высшей Геодезии в настоящей I-й части руководства, думается, выявились в достаточной мере. Так, в § 15 „О базисных сетях“ дается обоснование наибольшей выгоды ромбической сети; в § 22 — в первый раз в русской литературе дается теоретическое обоснование применения прибора Едерина для измерения базисов первоклассной триангуляции; в § 34 вопрос об эксцентрицитете алидады разработан так, что получается полная картина влияния этой инструментальной погрешности, а вопрос не обрывается, как это обычно делается, только на подсчете смещения индексов; в § 35 дается подробное изложение вопроса об исследовании ошибок делений лимба, в той его постановке, которая должна иметь место в *геодезических инструментах*. Известное значение я придаю проведенному в книге выяснению связи между порядком собирания материала на пунктах тригонометрической сети и постановкой последующей задачи по обработке сети: это отразилось в §§ 41, 43, 47 и в главе XII-й; только усвоив эту связь и вытекающие из нее последствия, геодезист может правильно классифицировать задачу уравнивательного вычисления и отчетливо представить себе и различие разных способов наблюдений и систему работ полевых и камеральных в целом. К сожалению, все это не отражалось в прежних русских курсах геодезии, и первая попытка была сделана лишь мною в 1916 году при издании курса „О тригонометрических сетях“.

Глава XII-ая предназначается мною только отчасти для студентов; в этой главе разобран вопрос уравнивания станций с совершенной полнотой, однако без тех запутанных обозначений, которые применяются в Германии; здесь же дается обоснование упрощений в уравнивании станций и применение теории уравнивания станций к оценке точности измерений по способу *Шрейбера*. Наконец, в главе-же XII-ой дается уравнивание триангуляции по способу *Бесселя* в таком изложении, которое обеспечивает наибольшую легкость усвоения. Эта глава XII является результатом переработки соответственных глав руководства *Иордана*, книги *Гельмерта* „Уравнивание по способу наименьших квадратов“ и книги *Zachariae* „Die Geodätische Hauptpunkte“. Глава XII вместе с соответственными параграфами главы X и VIII, думается, ставит—и притом первый раз в руководстве на русском языке—на надлежащую почву вопрос об уравнивательных вычислениях в триангуляции. Способ *Шрейбера* измерения горизонтальных углов также излагается в первый раз в моей книге.

Соответственно общей тенденции книги в главе о нивелировании высокой точности приведена не только инструктивная часть работы по русскому способу, как это делалось в курсах *Цингера* и *Витковского*, но даны и теоретические обоснования *разных способов* исполнения точного нивелирования, сравнительный анализ действия в них тех или других погрешностей, а также коротко выявлено влияние рефракции в нивелировке.

Было-бы ошибочно заключить, однако, что все перечисленные выше теоретические обоснования тех или иных вопросов перегрузили мою книгу „теорией“; наоборот, центр тяжести ее в изложении *техники* определения основных геодезических пунктов из триангуляции и точной нивелировки. Полагаю, что практический чисто вопрос о рекогносцировке и постройке знаков изложен с тою подробностью, за которой уже начинается инструктирование. Очень полно и подробно изложена глава об измерениях базисов; точно также с подробностью, которая не имела места даже в книге *В. В. Витковского*; проведено в главе VI описание устройства отдельных частей геодезических угломеров и этих инструментов в целом, а в главе VIII—описание разных способов измерения горизонтальных углов и направлений. Все, что относится до практики точного нивелирования изложено в главе XIII с полнотой, которая, полагаю, является исчерпывающей.

Таким образом характерным для моей книги является то, что изучающий Высшую Геодезию найдет в ней достаточный материал для усвоения практической стороны дела и в то-же время получит теоретическое освещение и всей системы предмета Высшей Геодезии, и постановки и организации отдельных геодезических работ и методов их исполнения.

Издание книги первоначально намечалось чрез Государственное Издательство, куда и была сдана рукопись для печатания в первой половине января 1924 года. Однако, по финансовым соображениям, Госиздат до 1926 года к изданию книги не приступил.

В декабре 1925 года Московский Межевой Институт и Высшее Геодезическое Управление В. С. Н. Х. С. С. С. Р. решили ознаменовать исполнив-



шееся двадцатипятилетие моей деятельности изданием моих трудов; представление В. Г. У. по этому вопросу получило утверждение Президиума В. С. Н. Х. Особая комиссия в составе: Ректора Межевого Института Ивана Алексеевича Миртова, Начальника Высшего Геодезического Управления Николая Федоровича Калинина, инженеров: Алексея Васильевича Успенского, Василия Васильевича Успенского и Сергея Павловича Лизгунова,—выработала формальную сторону дела, обдумала всесторонне издание и, путем подписки, собрала некоторую сумму денег. Издание началось собственно летом 1926 года. Приношу глубокую благодарность: И. А. Миртову, Н. Ф. Калинину и А. В. Успенскому, как инициаторам и организаторам всего дела по изданию книги. И. А. Миртов, В. В. Успенский и С. П. Лизгунов не мало имели хлопот по обеспечению приступа к изданию денежными средствами; Н. Ф. Калинин, соответствующими распоряжениями по В. Г. У., обеспечил исполнение издания примерно в течение полугодия; приношу всем этим лицам особую признательность.

Издание книги выполнялось в Картографическом Отделе В. Г. У. при энергичном содействии Заведывающего Отделом А. Ф. Белавина и редактора карт Г. Т. Иванищева; техническую редакцию вел С. П. Лизгунов; проверку числовых примеров и корректуру исполнили С. П. Лизгунов, Т. В. Успенский и Т. В. Каменская,—всем только что упомянутым лицам также приношу мою сердечную благодарность, так как дружные их усилия заметно ускорили выпуск книги.

Профессор *Ф. Красовский*.

---

## Сочинения, статьи, рефераты и проч., послужившие для составления курса.

В. В. Витковский, Практическая геодезия.

Н. Я. Цингер. Высшая геодезия.

W. Jordan. Handbuch der Vermessungskunde. Третья часть. Издания 1907, 1916 и 1923 года.

W. Jordan. Handbuch der Vermessungskunde. Первая часть. Издание 1904 г.

*Инструкция для производства триангуляций I класса.* Приложение к 65 тому Записок Военно-Топограф. Управления (составлена под общим руководством И. И. Померанцева). 1910 г.

*Инструкция по триангуляции I класса* Высшего Геодезического Управления. 1926. Временное издание. Составлена под общим руководством Ф. Н. Красовского.

*Описание постройки тригонометрических знаков.* Второклассная триангуляция. Составлено И. И. Виноградским. Издание Высшего Геодезического Управления 1920 г.

*Руководство к постройке тригонометрических знаков.* Литографированное издание Военно Топографического Управления.

Bilby I. Reconnaissance and signal building. (U. S. Coast and geodetic Survey).

Zachariae. Die geodätischen Hauptpunkte und ihre Coordinaten.

Струве Ф. Г. В. (В. Я.). Дуга меридиана

Bessel F. und Bayer. Gradmessung in Ostpreussen.

Travaux et memoires du bureau international des poides et mesures. Tomes III, XII.

A. S. Wassiliew. Mensuration de la base avec l'appareil de Struve. (Missions scientifiques pour la mesure d'un arc de meridien au Spitzberg).

Бонсдорф. Измерение Молосковицкого и Пулковского учебного базисов базисным прибором Едерина.

A. S. Wassiliew. Mensuration de la base avec l'appareil de Iäderin.

Iäderin. Geodätische Längenmessungen mit Stahlbändern und Metalldrähten.

О. Г. Дитц. Базисная сеть на острове Кимито.

Гедеонов. Измерение Термезского и Самаркандского базисов по способу Едерина.

Гедеонов. Измерение Казалинского базиса по усовершенствованному способу Едерина.

Павлов Н. Д. Измерение Омского базиса по усовершенствованному способу Иедерина.

Guillaume. La mesure rapide des bases géodésiques.

Лебедев М. Н. Описание триангуляции в Болгарии. (Том 43 Записок Воен.-Топограф. Управления).

Vogler. Geodätische Uebungen.

Г. С. Максимов. Исследование микрометра большого Пулковского зенит-телескопа.

Bamberg C. Anweisung zur Behandlung Universal-Instrumente und Theodoliten.

Zeitschrift für Instrumentenkunde за 1886 год. Статьи Шрейбера о его способе исследования делений кругов.

H. Bruns. Untersuchung einer Wanschaff'schen Theilung.

A. Wolfer. Examen de la division nouvelle de Wanschaff du cercle méridien de l'observatoire à Zurich.

Friebe. Ueber das Mitschleppen des Limbus. Zeitschrift für Vermessungswesen 1894.

А. Кларк. Геодезия. Перевод Витковского.

Th. Witttram. Réseau principal des triangles. (Mesure d'un arc de méridien au Spitzberg).

Материалы для триангуляции первого класса в Европейской России. Выпуск 3. Приложение к 73 тому Записок Воен.-Топограф. Управления.

Материалы для триангуляции первого класса в Европейской России, Выпуск 6. Приложение к 73 тому Записок Воен.-Топограф. Управления.

Инструкция по триангуляции II класса. 1925. Издание Высшего Геодезического Управления. Составлена под общим руководством Ф. Н. Красовского.

U. S. Coast and Geodetic Survey. Instructions to light keepers on primary triangulation 1920.

O. Schreiber. Ueber die Anordnung von Horizontalwinkel-Beobachtungen auf der Station.

И. А. Иверонов. Способ наименьших квадратов.

Gauss. F. Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst. 1893.

Fischer. Lehrbuch der höheren Geodäsie.

Anweisung (IX) für die trigonometrischen und polygonometrischen Arbeiten bei Erneuerung der Karten des Grundsteuerkatasters. Berlin.

Helmert. Die Ausgleichsrechnung.

Гельмерт. Уравновешивание по способу наименьших квадратов перевод Л. А. Сополько.

Goulier, Etudes sur les methodes et les instruments des nivellements de precision.

Hegemann. Lehrbuch der Landesvermessung. Zweiter Teil.

W. Seibt. Präcisions-nivellement der Elbe.

C. Reinhertz. Mittheilung einiger Beobachtungen über die Schätzungs genauigkeit an Maassstäben, insbesondere an Nivellirscalen. Zeitschr. für Vermessungswesen. 1894.

F. Kohlmüller. Zur Refraktion im Nivellement. Реферировано О. Г. Дитц в 1914 г.

М. П. Осипов. Французский нивеллир и нивеллировка с ним от Пулково до Гатчины. 58 том Записок Военно-Топограф. Управления.

Павлов Н. Д. Производство точной нивеллировки между Псковом и Бологое. Записки В. Т. У. том 60.

О. Г. Дитц. Точные нивеллировки в С.-Американских Соединенных Штатах. Реферат.

Инструкция по нивеллированию высокой точности. Издание Высшего Геодезического Управления 1925. Составлена под руководством Ф. Н. Красовского.

Ch. Lallemand. Nivellement de haute précision.

Рыльке С. Д. Геометрические нивеллировки Военно-Топогр. Управления. Записки, том 44, 51, 53.

Die Nivellements von Hoher Genauigkeit. Отчет Тригонометрического Отделения Германского Landesaufnahme. 1923 год.

---

# Введение.

**1. Задачи Высшей Геодезии.** Задачи Высшей Геодезии можно подразделить на научные и технические.

Научные задачи Высшей Геодезии заключаются: 1) в определении вида и размеров фигуры земли во всем ее целом; 2) в изучении местных отступлений этой фигуры от некоторой типической формы; 3) в исследованиях геофизического характера, направленных к выяснению *устройства* земли и ее *жизни* (сюда относятся исследования вращения земли, исследования колебаний отвесных линий, исследования перемещений береговой линии, исследования распределения масс в земной коре и т. д.).

Технические задачи Высшей Геодезии заключаются: 1) в определении опорных геодезических точек, обеспечивающих как производство обще-топографической съемки государства и последующее за этим составление точных карт, так и выполнение точных землеизмерительных работ с какими угодно целями; 2) в разработке целесообразных способов развертывания (изображения) частей земной поверхности или всей поверхности земли на плоскости или на ряде плоскостей.

Научные задачи Высшей Геодезии ставят ее в самую тесную и органическую связь с Практической Астрономией с одной стороны, и с Геологией и Геофизикой — с другой стороны.

Технические задачи Высшей Геодезии направлены главным образом на правильную организацию и исполнение картографической службы в Государстве, и поэтому здесь Высшая Геодезия вступает в полный контакт и органическую связь с Топографией и Картографией.

Первая из указанных научных задач Высшей Геодезии — т. е. определение вида и размеров земли во всем ее целом или определение *идеальной* фигуры земли — решается на основании результатов так называемых *градусных* измерений и определений *силы тяжести*. Вторая из научных задач Высшей Геодезии — изучение отступлений фигуры земли от некоторой типической *идеальной* формы — решается, во-первых, на основании изучения *возмущений в направлениях отвесных линий* в данном районе и, во-вторых — на основании *изучения аномалий силы тяжести и их распределения на пространстве данного района*.

**2. Градусные измерения.** В Геодезии поверхностью уровня или *уровенной* поверхностью называется поверхность *всюду горизонтальная*, т. е. такая, в любой точке которой нормаль совпадает с направлением отвесной линии в той же точке. Таких поверхностей уровня можно конечно построить бесчисленное множество. Некоторые из них всюду будут протекать вне физической поверхности земли, некоторые — отчасти вне физической поверхности земли, отчасти ниже ее. Если взять поверхность океана в его спокойном состоянии, то конечно, эта поверхность будет одной из уровенных поверхностей. Продолжив эту поверхность океана, рассматриваемого в состоянии покоя, под континентами — так, чтобы везде это продолжение пересекало направления отвесных линий под прямым углом, мы получим сплошную,

непрерывную и замкнутую уровенную поверхность, которая и представит собою воображаемую поверхность земли, изучаемую в Высшей Геодезии. Эта *основная* уровенная поверхность, совпадающая с поверхностью океана, носит название поверхности *геоида*, а геометрическое тело, ею ограниченное, называется *геоидом*. Пользуясь теорией притяжения, легко доказать, что поверхность геоида не может иметь ни складок, ни ребер, ни шпиров, и что эта поверхность непременно будет замкнутой; с другой стороны, на основании известного факта, что центробежная сила на экваторе составляет только всего  $\frac{1}{298}$  долю от величины силы тяжести, можно пользуясь опять таки теорией притяжения, легко установить, что фигура геоида весьма близка к сфере, что она является *сфероидом*, т. е. телом вращения, близким к шару, и может быть с большим приближением принята за простейший из сфероидов—за эллипсоид вращения с малым сжатием при полюсах.

Предположение, что земля была некогда огненно-жидкой имеет за собою веские основания; изменения в расположении притягивающих масс при дальнейшем остывании планеты должны были происходить главным образом только в наружном ее слое и поэтому эти изменения не могли заметно исказить тот вид уровенной поверхности, протекающей вблизи физической поверхности земли, который она имела при огненно-жидком состоянии планеты. Но тогда отсюда опять таки вытекает, что *типической* поверхностью для идеальной земной поверхности должна быть поверхность *эллипсоида вращения, сжатого при полюсах*; причем это сжатие весьма незначительно.

Поверхность геоида отступает от поверхности этого типического эллипсоида вращения именно вследствие неправильностей в распределении вещества в наружном слое земли, но эти отступления в общем незначительны и изучение этих отступлений составляет переход от *второго приближения* к *третьему* в вопросе определения идеальной земной фигуры.

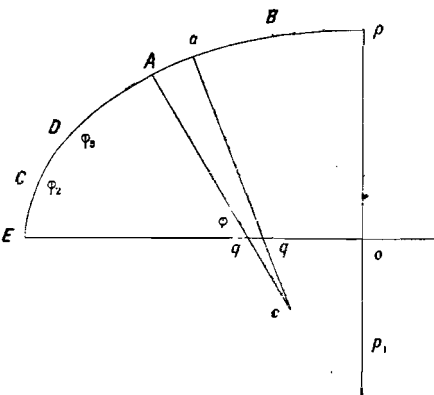
Приняв землю за эллипсоид вращения, мы сейчас же соображаем следующий путь определения ее размеров. На чертеже 1-ом пусть  $P$  и  $P_1$ —полюсы земли; кривая  $PAE$ —сечение поверхности земного эллипсоида плоскостью  $APP_1$ —т. е. меридианною плоскостью точки  $A$ ; точка  $O$ —центр эллипсоида. Очевидно, кривая  $PE$  есть дуга эллипса, малая полуось, которого  $PO$  равна малой полуоси земного эллипсоида а большая полуось которого  $EO = OE_1$  черт. 2 равна экваториальному радиусу земли или большой полуоси земного эллипсоида.

Назвав  $PO = b$  и  $EO = a$ , имеем:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \text{эксцентриситету земного эллипсоида.}$$

Отвесная линия в  $A$  будет лежать в плоскости ее меридиана и совпадать с нормалью  $AC$

к эллипсу  $PE$ . Угол  $\varphi$  между прямой  $AC$  и большой осью  $OE$  эллипса равен очевидно углу отвесной линии точки  $A$  с плоскостью земного экватора; другими словами  $\varphi$  это *астрономическая широта* точки  $A$ . Взяв на эллипсе  $PE$  точку  $a$ , бесконечно-близкую к  $A$  и имеющую широту  $\varphi + d\varphi$ , мы, конечно, будем иметь, что нормали к меридианному эллипсу в точках  $A$  и  $a$  встретятся в центре  $C$  кривизны кривой для ее участка  $Aa$ .



Черт. 1.



Очевидно, что  $AC = aC$  представляют собой радиус кривизны меридианной кривой для этого же участка  $Aa$ . Так как угол  $ACa$  равен  $d\varphi$ , то обозначая длину дуги  $Aa$  через  $ds$  и через  $\rho = AC = aC$ , напишем:

$$ds = \rho d\varphi$$

В дальнейшем будет доказано, что:

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

Поэтому

$$ds = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi$$

Если на той же дуге эллипса  $PE$  возьмем точку  $B$  с широтой  $\varphi_1$  и длину дуги  $AB$  назовем через  $S$ , то очевидно:

$$S = \int_{\varphi}^{\varphi_1} \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi$$

Интегрируя это уравнение, мы в результате получим  $S$  как функцию  $t$  от пределов интеграции  $\varphi$  и  $\varphi_1$ , и постоянных величин  $a$  и  $e$ , входящих в подинтегральную функцию. Другими словами:

$$S = t(\varphi, \varphi_1, a, e) \dots \dots (1)$$

Если мы возьмем на том же или на другом меридиане две точки  $C$  и  $D$ , астрономические широты которых соответственно суть  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$ , то, называя длину дуги  $CD$  через  $S_1$ , напишем:

$$S_1 = t(\varphi_2, \varphi_3, a, e) \dots \dots (2)$$

Если представить себе, что астрономическим путем мы точно определим широты  $\varphi$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ , а путем *геодезическим* определим длину дуг  $S$  и  $S_1$ , то тогда очевидно в уравнениях (1) и (2) будем иметь две неизвестные величины  $a$  и  $e$ , которые из решения этих уравнений и определятся. Зная  $a$  и  $e$ , рассчитаем малую, полярную полуось,  $b$  земного эллипсоида из формулы:

$$b = a \sqrt{1 - e^2}$$

Таким образом, зная длины двух меридианных дуг и астрономические широты их конечных точек, мы указанным образом можем определить размеры земли, принимаемой за эллипсоид вращения. Измерение длины некоторой меридианной дуги, соединенное с определением астрономических широт ее конечных точек, носит название *радиусного измерения*. Это название станет понятным после следующих соображений. Мы вправе написать:

$$S = \int_{\varphi}^{\varphi_1} \rho d\varphi = \rho_m (\varphi_1 - \varphi) \dots (3)$$

Где по теореме Лагранжа  $\rho_m$  представляет собой радиус кривизны меридианной кривой  $AB$  в некоторой ее точке, *промежуточной* между  $A$  и  $B$ . Вследствие близости земли к шару, эта промежуточная точка будет почти

совпадать с *средней* точкой дуги *AB*. Если в уравнении (3) величине  $\varphi_1$ — $\varphi$  дать значение, равное одному градусу, то тогда *S*, стоящее в левой части, обращается в *длину градуса по меридиану* под широтой

$$\varphi_m = \frac{\varphi - \varphi_1}{2}$$

Определив в разных местах земли длины *s градуса* по меридиану, мы очевидно тем самым сейчас-же получаем значения величин  $\varphi_m$  для тех же мест земли. Таким образом, имея *длины градуса* для достаточного числа мест на меридианной кривой, мы затем от них перейдем к радиусам кривизны  $\rho$  этой кривой и можем, конечно, в результате установить *достаточно точно* вид и размеры этой кривой. Очевидно, если идеальная фигура земли есть тело вращения, то изучением вида и размеров меридианной кривой вполне исчерпывается вопрос определения вида и размеров идеальной земной фигуры. Именно эта идея измерения *длины градуса* меридианной кривой была положена в основу дела, когда в середине 18-го столетия впервые научно приступили к решению вопроса о виде и величине земли. Как видно из сказанного, градусное измерение слагается из двух частей: части астрономической, состоящей из определения астрономических широт конечных точек дуги, и части геодезической—состоящей в измерении длины меридианной дуги. Современные меридианные дуги охватывают вообще сотни и даже тысячи километров; измерение таких длинных дуг, конечно не может быть произведено *непосредственным* путем; *единственный* путь, возможный для определения длин таких больших дуг,—это вывод длины дуги из *триангуляции*—или из цепи треугольников проложенных вдоль дуги между ее конечными точками.

Первые градусные измерения были исполнены французской Академией наук в 1735—1752 году. Чтобы окончательно выяснить справедливость вывода *Ньютона*, что земля есть эллипсоид, сжатый при полюсах, французская Академия Наук решила определить длину градуса по меридиану в двух местах земли, из которых одно должно было лежать возможно ближе к полюсу, а другое—возможно ближе к экватору. Если земная фигура представляется эллипсоидом, сжатым при полюсах, то длину градуса для дуги северной должна быть более длины градуса для дуги более южной, более близкой к экватору. Чем ближе одна дуга лежит к полюсу, а другая к экватору.—тем больше разница длин их градусов, тем резче скажется на длинах этих двух градусов влияние сжатия земли и следовательно тем в меньшей степени вывод из определения длин таких двух градусов будет искажен влиянием ошибок измерений. На основании именно таких соображений в 1735 году Парижская Академия Наук отправила одну экспедицию в Лапландию а другую в Перу, для исполнения градусных измерений. Лапландская экспедиция измерила дугу меридиана между широтами  $65^\circ 50' 50''$  и  $66^\circ 48' 20''$  и получила для длины градуса под широтой  $66^\circ 19'$  значение в 57422 тоазы, Перуанская экспедиция измерила дугу меридиана между широтами  $+0^\circ 2' 30''$  и  $-3^\circ 4' 30''$  и получила из нее для длины градуса под широтой  $-1^\circ 36'$  значение в 56748 тоазов. Во второй части курса в главе о градусных измерениях будут приведены весьма поучительные подробности работ по этим первым градусным измерениям в Перу и Лапландии. Теперь же лишь уместно будет указать, что тогдашняя измерительная техника была груба и поэтому результаты Перуанской и Лапландской экспедиций имеют значение лишь постольку, поскольку из них с несомненностью подтвердилось сжатие земли при полюсах. Точное определение вида и размеров земли сделалось возможным лишь в 19 столетии, когда техника триангуляционных

работ и астрономических определений широт и долгот достигла высокой степени совершенства. В 19 столетии были исполнены следующие замечательные градусные измерения:

1) Англо-французское—с 1722 года по 1878 год доставившее дугу в  $22^{\circ} 10'$  —от Северо-Шотландских островов до Форментеры на юге Испании.

2) Русское, доставившее меридианную дугу в  $25^{\circ} 20'$  исполненное под руководством *В. Струве* с 1816 по 1852 год от Северного ледовитого океана до устья Дуная.

3) Ганноверское, произведенное в 1821—1824 знаменитым *Гауссом* и доставившее меридианную дугу в  $2^{\circ}$ .

4) В Восточной Пруссии между Мемелем и Трунцем, исполненное *Бесселем* в 1831—1834 и доставившее *косвенную* к меридиану дугу длиною в  $1^{\circ} 40'$ .

5) Индийское, исполненное англичанами с 1799 по 1847 год и с 1843 года по 1873 год и образовавшееся из триангуляций, которыми англичане покрыли всю Индию для целей с'емочных и картографических. Главная меридианная дуга имеет длину  $23^{\circ} 50'$  и простирается от Калуанпура у Гималайских гор до мыса Коморина, но кроме нея еще образовалась дуга по параллели в Северной части Индии, длиною около  $7^{\circ}$ , и еще несколько дуг по меридианам и параллелям.

6) Американское измерение параллели под широтой  $39^{\circ}$  и простирающееся на  $48^{\circ} 46'$  по долготе; исполнено в последние десятилетия 19-го столетия.

7) Американское измерение косвенной к меридиану дуги в восточной части Соединенных Штатов, длиною в  $23\frac{1}{2}^{\circ}$  между параллелями  $30^{\circ}$  и  $45^{\circ}$ .

8) Английское измерение в Африке от мыса Доброй Надежды к устью Нила—начато в 1883 году и к 1906 году доведенное до озера Танганайка на протяжении  $23^{\circ}$ , вся дуга будет иметь протяжение в  $65^{\circ}$ .

9) Европейское по  $52^{\circ}$  параллели, идущее от Хаверфордвеста в Англии через Бельгию, Германию и Россию до Орска в Оренбургской губернии протяжение дуги по долготе около  $63^{\circ} 41'$ , дуга образовалась постепенным соединением триангуляций, проложеных в Европе и России с пятидесятых по семидесятые года прошлого столетия.

10) Европейское измерение параллели под широтой  $47\frac{1}{2}^{\circ}$ —от Бреста во Франции, через Германию, Австро-Венгрию и Россию до Астрахани.

11) Измерение дуги меридиана на островах Шпицбергена, исполненное в 1899—1901 году русскими и шведами между параллелями  $76\frac{1}{2}^{\circ}$  и  $80\frac{1}{2}^{\circ}$ .

12) Новое французское измерение в Перу с 1899 по 1906 год, доставившее меридианную дугу  $5^{\circ} 52'$ .

Как видно, в 19 столетии, кроме дуг по меридианам были измерены и обширные дуги по параллелям. Градусные измерения по параллелям в настоящее время дают столь-же ценный материал для вывода размеров земного эллипсоида, как и дуги по меридианам, вследствие весьма высокой точности современных способов определения долгот по телеграфу и радиотелеграфу. В заключение параграфа приведем таблицу важнейших выводов размеров земного эллипсоида из результатов градусных измерений.

Ученый	Бол. полуось	Мал. полуось	Сжатие	Год вывода
<i>Вальбек</i> . . . . .	6 376 896 м.	6 355 833 м.	1:302,8	1819
<i>Бессель</i> . . . . .	6 377 397	6 356 079	1:299,2	1841
<i>Кларк</i> . . . . .	6 378 249	6 356 515	1:293,3	1880
<i>Хейфорд</i> . . . . .	6 378 283	6 356 868	1:297,8	1906
<i>Гельмерт</i> . . . . .	6 378 350		1:298	1906— 1913

Как видно, новейшие определения дают заметно бóльшие размеры осей земного эллипсоида. Средняя ошибка вывода *Хейфорда* или *Гельмерта* для большой полуоси оценивается  $\pm 100$  метров; средняя ошибка сжатия в  $\frac{1}{298}$  оценивается в  $\pm 1,5$  числа, стоящего в знаменателе.

Чем дальше шло развитие градусных измерений, тем более и более при их обработке стремились учитывать влияние неправильностей в распределении притягивающих масс в наружном слое земли, которые обуславливают отступления фигуры земли от формы эллипсоида вращения. Эти отступления геоида от эллипсоида несомненно сами по себе уже вносят *неопределенность* в задачу определения размеров земного эллипсоида и обуславливают разногласия в значениях этих размеров, получаемых из *разных* градусных измерений. Очевидно, земной эллипсоид, размеры которого выводятся из градусных измерений, приходится определять как геометрическое тело *наиближе* подходящее к геоиду. Ряд ученых дают такое определение земному эллипсоиду: 1) об'ем его должен быть равен об'ему геоида, 2) сумма квадратов уклонений поверхности эллипсоида от поверхности геоида должна быть наименьшей; при чем под уклонением между этими поверхностями в какойнибудь точке понимается расстояние между ними в этой точке, считаемое по отвесной линии. 3) плоскость экватора эллипсоида должна совпадать с плоскостью экватора геоида и малая ось эллипсоида должна совпадать с осью вращения земли.

Как видно, в таком определении земного эллипсоида проводится не чисто геометрическая наибольшая близость двух поверхностей—геоида и эллипсоида, а осложненная некоторыми условиями физического характера, в которых отражается хотя и не полно и не совершенно, переход первоначальной эллипсоидальной формы земли к ее современной форме. Можно сказать, что целью геодезии является определение того эллипсоида, с которым совпадал геоид при первоначальном огненно-жидком состоянии земли; этот эллипсоид можно назвать идеальным. Очевидно, в современной постановке задача вывода размеров земного эллипсоида из градусных измерений является задачей весьма сложной; по существу здесь нужно уже учитывать так или иначе неизвестные отступления геоида от наилучше к нему подходящего эллипсоида, также неизвестного и еще определяемого параллельно с выяснением этих уклонений.

**3. Измерения силы тяжести.** В 1743 году знаменитый французский ученый *Клеро*, участник градусного измерения в Лапландии, установил важный закон изменения величины силы тяжести на поверхности тела, образованного из слоев разной плотности, но разграниченных эллипсоидаль-

ными поверхностями с малым сжатием. — Обозначив чрез  $g_0$ ,  $g_1$  и  $g$  величины ускорения силы тяжести на экваторе, на полюсе и под широтой  $\varphi$ , имеем по Клеро:

$$g = g_0 - \frac{1}{2}(g_1 - g_0) \text{Sin}^2\varphi \dots (4)$$

$$\frac{g_1 - g_0}{g_0} = \frac{5}{2}q - c \dots (5)$$

причем в (5) величина  $c$  есть сжатие земли, равное

$$c = \frac{a - b}{a}$$

а  $q$  — отношение центробежной силы на экваторе к силе тяжести на экваторе. [Если угловая скорость вращения земли равна  $\omega$ , то  $q = \frac{\omega^2 \cdot a}{g_0}$ ].

Ур-ние (5) выражает собою знаменитую теорему Клеро, дающую связь между сжатием земли и ускорениями силы тяжести на полюсе и на экваторе. Для определения ускорения силы тяжести в настоящее время пользуются маятниками особого устройства. Определив из наблюдений над маятниками, в разных местах земли, под разными широтами, значения  $g$  ускорения силы тяжести, затем из ур-ний (4) мы можем многократно вывести  $g_0$  и  $g_1$ ; конечно, обработка системы ур-ний (4) ведется применяя способ наименьших квадратов — с тем, чтобы получить вероятнейшее значение  $g_1$  и  $g_0$ . После этого останется решить ур-ние (5), чтобы получить сжатие земли.

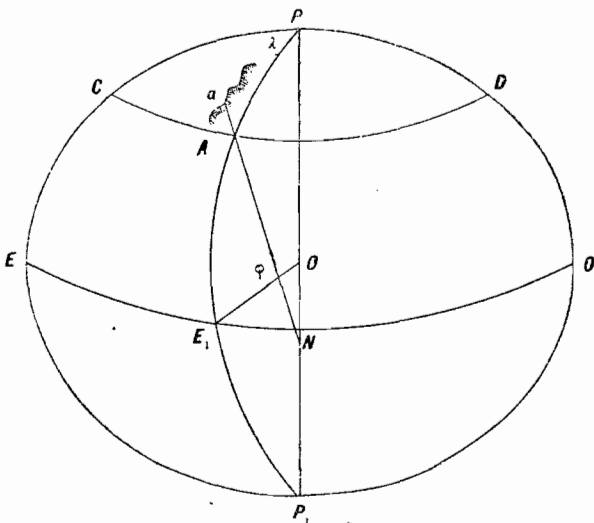
Заметим, что теорема Клеро имеет силу при любом законе смены плотностей в слоях, разграниченном между собою эллипсоидальными поверхностями с малым сжатием; применение — же этой теоремы к земле основывается, конечно, на весьма вероятном предположении о первоначальном огненно-жидком состоянии нашей планеты, когда непременно внутреннее ее строение слагалось из слоев, разграниченных весьма близкими к эллипсоидальным поверхностями. Так как наблюдения силы тяжести могут быть сделаны и на океанических островах, то очевидно, можно весьма равномерно покрыть весь земной шар теми точками, где будут определены величины  $g$  ускорения силы тяжести. Отсюда ясно преимущество определения сжатия земли именно из изучения распределения силы тяжести перед определением этого-же сжатия из градусных измерений, которые могут быть произведены только на суше.

Из определений величины  $g$  на 1400 точках, произведенных до 1900 года, Гельмгерт, вывел для земного сжатия значение равное  $\frac{1}{298.3}$ . Этот вывод имеет вес вообще больший, чем вывод сжатия из градусных измерений.

Наблюдения силы тяжести приходится делать на физической поверхности земли, тогда как в уравнении (4) в левой его части должно стоять значение  $g$ , отнесенное к поверхности геоида. Переход от наблюдаемой под широтой  $\varphi$  величины ускорения силы тяжести к величине  $g$  на уровне геоида не может быть сделан точно без точного знания распределения притягивающих масс между ровной поверхностью места наблюдения и поверхностью геоида. Конечно, таким знанием мы не располагаем, но все-таки геодезические работы — градусные измерения и наблюдения силы тяжести — уже привели к некоторым выводам относительно распределения вещества в наружных слоях земли, и эти выводы позволяют с известной степенью приближения в настоящее время редуцировать наблюдаемые значения  $g$  на уровень геоида. Конечно, чем более будет точек на которых сделаны определения силы тяжести, и чем равномернее они будут распределены по

земному шару, тем в большей степени ошибки указанных редуций будут компенсироваться в выводе величин  $g_1$  и  $g_0$ . Таким образом при достаточном развитии наблюдений силы тяжести, мы получим возможность надежно определить *постоянные* ур-ния (4), после чего явится возможность вычислить величины ( $g$ ) для разных мест земли и сравнить их с наблюдаемыми в тех-же местах и редуцированными на уровень геоида значениями  $g$ . По этим различиям ( $g$ )— $g$  или же по так называемым *возмущениям* силы тяжести можно, пользуясь теорией притяжения, установить отступления  $h$  по высоте поверхности геоида от формы эллипсоида вращения, положенной в основу ур-ния (4). Таким образом, измерения силы тяжести доставят надежное определение *динамических параметров*  $g_1$  и  $g_0$  земного эллипсоида, и *хотя не дадут размеров осей этого эллипсоида, но за то установят его фигуру и систему вероятных уклонений  $h$  геоида от поверхности этого эллипсоида*. Очевидно, эта система величин  $h$  явится ценнейшим материалом при установлении общего вида геоида и идеального земного эллипсоида—согласно тому, что было сказано в конце § 2.

**4. Изучение местных уклонений отвесных линий.** В геодезии положение точки определяют обычно ее *геодезической* широтой  $\varphi$ , ее *геодезической* долготой  $\lambda$  и высотой ее или над уровнем океана или над поверхностью эллипсоида. Пусть на черт. 2— $PEP_1Q$  есть тот эллипсоид, на поверхность



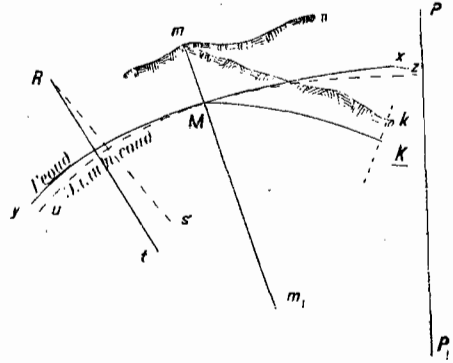
Черт. 2.

которого мы проектируем геодезические точки — по нормалям к этой поверхности. Если  $P$  и  $P_1$  — полюсы эллипсоида, то пусть в меридианной плоскости  $PCEP_1$  находится тот пункт (напр. Гринвическая обсерватория) долготу которого на земле мы принимаем равной нулю. Проведем в точке  $a$ , лежащей на физической земной поверхности нормаль  $aN$  к поверхности нашего эллипсоида, отметим пересечение  $A$  этой нормали с поверхностью эллипсоида. Точка  $A$  есть проекция пункта  $a$  на эллипсоид. Угол  $\lambda$  между плоскостями меридианных эллипсов  $PEP_1$  и  $PA P_1$  есть *геодезическая* долгота точки

$a$  или все равно—точки  $A$ . Угол нормали  $AN$  с плоскостью экватора эллипсоида—или с большою осью  $OE_1$  меридианного эллипса  $PAE_1P_1$ —есть *геодезическая* широта  $\varphi$  точки  $a$  (или точки  $A$ ). Если бы нормаль  $AN$  к эллипсоиду совпала бы с отвесной линией в точке  $a$ , то тогда очевидно геодезическая широта точки  $a$  совпала бы с ее *астрономической* широтой, а *геодезическая* долгота точки  $a$  совпала бы с ее *астрономической* долготой. Обычно при вычислении геодезических точек вместо неправильной и неизвестной поверхности геоида и вводят поверхность некоторого эллипсоида в качестве поверхности *вспомогательной*, в качестве поверхности *проекции* или *координатной* поверхности. Размеры осей такого эллипсоида принимают равными размерам осей земного эллипсоида, выведенным из градусных измерений или *Бесселем*, или *Кларком* или *Хейфордом*. Очевидно чтобы перенести точки земной



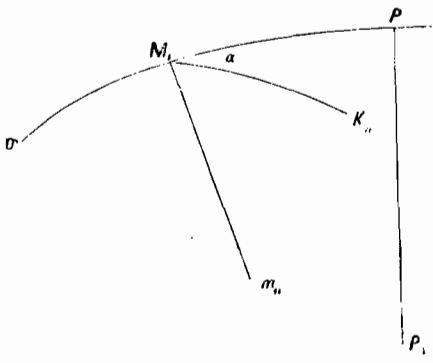
поверхности на поверхность такого вспомогательного эллипсоида, необходимо знать взаимное расположение этих двух поверхностей или необходимо знать положение эллипсоида в земном теле. Это условие осуществляется в Геодезии следующим образом. Некоторая точка  $m$  (черт. 3) принимается за *исходную* или *ориентировочную*. В этой точке  $m$  определяют астрономическую ее широту  $\varphi_m$ , высоту ее  $mM = H$  над уровнем океана (геоида) и астрономический азимут  $\alpha$  с  $m$  на другую точку  $k$  земной поверхности или вернее на точку  $K$ , являющуюся проекцией  $k$ , [Если  $P$  и  $m$   $m_1$   $P_1$  — плоскость истинного меридиана точки  $m$  а  $m$   $m_1$  — отвесная линия в  $m$ , то угол между плоскостями  $m$   $m_1$  и  $k$   $m$   $m_1$  и будет астрономическим азимутом точки  $k$ ]. — Пусть далее на чертеже 3 —  $PP_1$  ось вращения земли, кривая  $x M y$  — сечение геоида меридианную плоскостью ( $m$   $m_1$ ) точки  $m$ , а точка  $M$  — проекция точки  $m$  на поверхность геоида. Приняв некоторый эллипсоид за эллипсоид проекции,



Черт. 3.

возьмем на нем (см. чертеж 4) произвольную меридианную плоскость  $PM_1$  и  $P_1$  и на меридианном эллипсе  $PM_1$  и отметим точку  $M_1$ , геодезическая широта которой была-бы равна астрономической широте  $\varphi_m$  точки  $M$ . Построив нормаль  $M_1 m_{II}$ , отметим далее на эллипсоиде нормальное сечение  $k_{II} M_1 m_{II}$ , плоскость которого образовала-бы с меридианом точки  $M_1$  угол, равный астрономическому азимуту  $\alpha$  точки  $k$ . Если теперь совместим на чертежах 3 и 4:  $M_1$  с  $M$ ; прямую  $M_1 m_{II}$  с прямой  $M m_1$ ; плоскость  $k_{II} M_1 m_{II}$  с плоскостью  $k m M m_1$ , — то очевидно вспомогательный эллипсоид

будет вполне фиксирован в земном теле и займет определенное положение относительно всех геодезических точек, находящихся на *физической* земной поверхности. Указанное фиксирование эллипсоида в земном теле фактически при проектировании на его поверхность геодезических точек выражается следующими обстоятельствами: 1) высота исходной точки  $m$  над поверхностью эллипсоида равна высоте ее над уровнем океана; 2) геодезическая широта и геодезическая долгота исходной точки равны астрономической ее широте и астрономической ее долготе; 3) меридианная плоскость точки  $m$  на эллипсоиде совпадает с плоскостью истинного меридиана этой же точки (или



Черт. 4.

в точке  $m$  геодезические азимуты или азимуты на эллипсоиде равны астрономическим азимутам соответственных точек земли). Очевидно в ориентировочной точке  $m$  эллипсоид будет *касаться* поверхности геоида; очевидно так же, что *малая ось эллипсоида будет параллельна оси  $PP_1$  вращения земли и плоскость экватора эллипсоида параллельна плоскости земного экватора*. Если бы геоид был эллипсоидом с размерами или теми самими, которые мы приписали нашему вспомогательному эллипсоиду то

очевидно указанное ориентирование этого эллипсоида в земном теле привело бы к полному совпадению везде его поверхности с поверхностью геоида. Но вследствие отступлений формы геоида от формы эллипсоидальной, вследствие также ошибочности взятых размеров вспомогательного эллипсоида и вследствие наконец возможной местной аномалии в направлении отвесной линии в точке  $m$ —совпадение поверхностей нашего эллипсоида с поверхностью геоида произойдет лишь в точке  $m$ , и в какой—нибудь иной точке  $R$ — отвесная линия представится прямой  $Rt$ , а нормаль к эллипсоиду не совпадающей с ней прямой  $Rs$ . Угол  $sRt$  носит название относительного *уклонения отвесной линии*.

Ориентировав указанным образом избранный вспомогательный эллипсоид в теле земли, мы затем проектируем геодезические точки нормальными к этому эллипсоиду на его поверхность. Если геодезические точки образуют на земной поверхности систему треугольников, то измерив в каждом таком треугольнике *горизонтальные* углы при его вершинах, измерив длину одной из сторон этих треугольников и зная *ориентировочные* данные, т. е. астрономические широту и долготу точки  $m$ , входящей в триангуляцию, астрономический азимут  $\alpha$  какой—нибудь стороны  $mk$  триангуляции, мы в состоянии средствами геодезии вычислить *геодезические* широты и долготы всех триангуляционных точек. Очевидно эти геодезические координаты определяют вполне в соответственных местах *направление* нормалей к тому эллипсоиду, на поверхность коего триангуляция спроектирована. Если теперь в ряде тех-же триангуляционных точек мы исполним астрономические наблюдения и определим *астрономические* широты и долготы этих точек, то этими *астрономическими* координатами определим *направление отвесных линий* или *нормалей к геоиду* в соответственных точках. Сопоставляя в ряде точек *геодезические* их координаты с соответственными *астрономическими* мы очевидно получаем точную картину того, как в разных местах изучаемого района нормали к геоиду или отвесные линии уклоняются от нормалей к эллипсоиду; мы можем очевидно построить в тех точках эллипсоида, которые являются проекциями *астрономических* пунктов *триангуляции*, отвесные линии, а затем построить и ортогональную к ним поверхность под условием, чтобы она прошла чрез проекцию  $M$  исходной точки  $m$ . Другими словами сопоставление астрономических результатов с геодезическими позволяет построить поверхность геоида в изучаемом районе и установить отклонения ее от поверхности того эллипсоида, который был взят при вычислении триангуляции. Если астрономо-геодезические работы одного района будут точно геометрически связаны с подобными же работами в другом районе,— то очевидно *частичные* исследования вида геоида, основанные на изучении уклонений отвесных линий могут обратиться постепенно в исследования значительных областей геоида и могут послужить к заключениям о виде его в целом.

Как уже было отмечено выше, уклонение отвесной линии, обнаруживаемое указанным методом в некоторой точке, зависит не только от аномалии в направлении отвесной линии в этой точке, вызванной присутствием вблизи этой точки возмущающей притягивающей массы, но обусловливается выбором ориентировочной точки  $m$  и отчасти принятыми размерами осей эллипсоида. В исследованиях уклонений отвесных линий нужно очевидно стремиться к устранению этих двух последних причин; эта задача далеко не простая, она требует разносторонней научной оценки добытого материала по определениям уклонений отвесных линий и неперменной связи этих работ с изучением аномалий в распределении силы тяжести. По существу, надлежит стремиться к определению уклонений отвесных линий от нормалей к *идеальному* эллипсоиду, который уже упоминали в § 2 и который соответ-

ствуется первоначальному равномерному распределению вещества в наружных слоях земли, имевшему место в период огненно-жидкого состояния земли. Уклонения отвесных линий от нормалей именно к такому идеальному эллипсоиду очевидно обусловлены только неправильностями в распределении масс в наружных слоях земли, и поэтому установление таких уклонений даст материал не только для определения вида геоида, но и для ряда весьма ценных заключений в области геологии и геофизики относительно строения земли и хода тех процессов, в результате которых образовалась земная кора.

**5. Связь Геодезии с геологией и геофизикой.** Отступления поверхности геоида от форм идеального эллипсоида вызваны—как уже неоднократно указывалось раньше,—неправильностями в распределении масс в наружных слоях земли. Поэтому изучение поверхности геоида находится в полной связи с изучением неправильностей строения земной коры, и можно сказать, геодезия в этом деле оказывается вожатым для геологии. Теория притяжения показывает, что *возвышениям* геоида над идеальным эллипсоидом соответствует *избыток* притягивающих масс в соответствующем районе земли; и наоборот *понижениям* геоида относительно поверхности идеального эллипсоида соответствует *недостаток* масс в соответственном районе. Правда, вследствие того, что и геоид и идеальный земной эллипсоид нам неизвестны, задача обнаружения положительных или отрицательных отступлений геоида от эллипсоида является сложной, разрешаемою лишь путем постепенных подходов и последовательных приближений, но во всяком случае градусные измерения, измерения силы тяжести и исследования уклонений отвесных линий являются верными средствами для решения этой задачи; и в настоящее время геодезические работы уже привели и приводят к ряду важных для геологии заключений о строении наружного слоя земли.

Так из геодезических работ уже выяснилось достаточно, что в большинстве случаев вблизи горных хребтов избыток в величине силы тяжести и величины уклонений отвесной линии в сторону хребта обнаруживаются не в той степени и не в тех размерах, которые должны были бы соответствовать массе этого хребта. Точно также вблизи глубоких морей недостаток силы тяжести и уклонения отвесной линии в сторону материка обнаруживаются не в той степени и не в тех размерах, которые должны были бы иметь место, принимая во внимание недостаток плотности водной массы по сравнению с плотностью материка. Эти факты привели архидиакона *Пратти*, принимавшего большое участие в геодезических работах англичан в Индии, к такому выводу. Разнообразие поверхности, видимое нами в возвышениях и углублениях суши и дна океана, представляет результат неравномерного уплотнения материи в период перехода ее от жидкого или полу-жидкого состояния в твердое, причем этот процесс неравномерного уплотнения материи захватывал только *нечуждые* слои земли, вследствие чего избыток плотности где нибудь сейчас-же должен был вызывать недостаток плотности выше или ниже того места, где возник избыток плотности. Поэтому для каждой отдельной части земли можно принять, что *полная масса в каждой вертикальном столбе от видимой земной поверхности до внутренней поверхности коры*, за которой уже начинается правильное строение земли *приблизительно постоянна*. Другими словами, избыточная масса горных хребтов должна компенсироваться в известной степени недостаточною плотностью вещества, лежащего под этими хребтами, и наоборот недостаток плотности воды в океанах должен в большей или меньшей степени компенсироваться избыточною плотностью пород, залегающих под дном океана. Эта гипотеза *Пратти* подтвердилась в результатах геодезических работ в

Индии, и в особенности при обработке обширного астрономо-геодезического материала в Северо-Американских Соединенных Штатах, исполненной в 1910 г.

Применяя гипотезу *Пратта*, американские геодезисты выводят, что та поверхность, ниже которой не распространялся процесс неравномерного распределения плотностей при остывании земли, лежит на глубине относительно уровня океана примерно в 110—120 километров. Этим примерно определяется толщина твердой земной коры, ниже которой должны идти слои жидкие и полужидкие.

Наблюдения над маятниками, определения уклонений отвесных линий и в особенности исследование изменений силы тяжести при переходе от одной точки к другой близкой к ней, посредством вариометра *Эвенса*, изобретенного в самом конце 19-го столетия, позволяют открывать даже сравнительно незначительные аномалии в строении земли и устанавливать либо присутствие залежей плотных пород, либо существование полостей с веществом малой плотности. Примерами таких открытий, установленных средствами геодезии, является Курская аномалия и аномалия вблизи Москвы, представляющая собою полость с плотностью вещества примерно в два раза меньшей средней плотности земли.

---

Если представить землю, как совершенно твердое тело, то тогда вращение ее должно совершаться по законам, установленным еще *Ейлером* и именно так, что ось вращения будет перемещаться в земном теле в течение 303 дней. Однако современные специальные наблюдения над изменениями широт, исполненные международной геодезической ассоциацией, показывают, что в действительности период перемещения земных полюсов не совпадает с *Ейлеровым*, и это можно объяснить только тем, что внутреннее вещество земли не вполне твердое, а упругое, эластичное. В настоящее время, кроме наблюдений над изменениями широт, геодезисты ведут наблюдения над колебаниями отвесной линии в данном месте и над перемещениями земной коры под действием лунного притяжения; все работы такого рода должны в конце концов доставить материалы для выяснения, в связи с работами геологов и геофизиков, внутреннего строения земли, периодических перемещений масс внутри земли и иных обстоятельств *жизни земли*.

Точные нивелировки должны в конце концов связать между собою ряд реперов, заложенных на материках, в разных их местах с рядом футштоков, установленных на морях и океанах, вследствие чего явится возможность надлежащего изучения векового перемещения береговой линии и периодических поднятий или опусканий тех или иных частей материков относительно уровня океана. Триангуляции и нивелировки доставляют также совершенно точные выводы относительно тех перемещений, которые происходят при землетрясениях, а также и относительно тех перемен, которые происходят после землетрясений в виде медленных поднятий или опусканий земной коры в областях, захваченных землетрясением.

Как видно из сказанного, геодезические работы и геодезические исследования захватывают в настоящее время целый ряд вопросов, касающихся устройства земли и ее жизни. Перспективы будущей жизни земли будут раскрыты тем скорее, чем более будут развиты геодезические работы и чем более тесной сделается связь геодезистов с геологами, географами и сейсмологами.

ГЛАВА I.

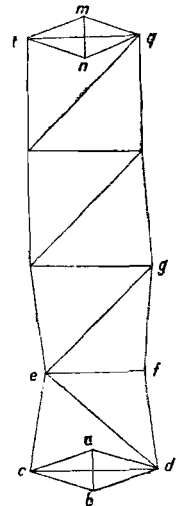
О триангуляции вообще.

**6. Триангуляции и нивелировки; — составление карт.** Под тригонометрическими или триангуляционными работами понимают совокупность полевых геодезических действий и последующих вычислений, имеющих задачей из системы *треугольников*, проложенных на земной поверхности, точно определить относительное положение ряда геодезических точек, удаленных вообще значительно друг от друга и покрывающих вообще значительные площади.

Такие работы необходимы: 1) для определения размеров и вида идеальной земной поверхности из градусных измерений; для исследований местных уклонений отвесных линий, приводящих к определению вида геоида в обследуемом районе; для изучения смещений земной коры и т. д. 2) для составления точных карт; — т. е. для правильной организации полевых топографических работ, исполняемых на значительных площадях, и для обеспечения правильности и легкости сводок результатов таких работ в одно целое; 3) для правильного исполнения и успешной организации землеизмерительных работ, когда по результатам этих работ предстоит делать *точные* расчеты и проектирования.

В параграфах 2-м и 4-м уже достаточно выяснено все значение триангуляции для осуществления *научных* задач Высшей Геодезии. Триангуляция является *единственным* и притом превосходным средством для определения длин таких значительных дуг, которые должны быть взяты по меридианам и параллелям при изучении фигуры и размеров земли в целом.

Первым, применившим триангуляцию к определению размеров земли, является голландский ученый *Снеллиус*, исполнивший свою работу по определению земного радиуса в 1614—1616 годах. В настоящее время составление тригонометрической сети для определения длины дуги меридиана или параллели включает в себя: а) точное измерение — с средней ошибкой меньше  $\frac{1}{500\,000}$  — двух *базисов*  $ab$  и  $mn$  (черт. 5) избираемых в концах дуги — длиной каждый не менее 8-ми км.; б) переход посредством точных измерений углов в *ромбических базисных сетях*  $acbd$  и  $mtng$  — от базисов  $ab$  и  $mn$  к *основным* сторонам  $cd$  и  $tq$ , имеющим размеры в 30—40 км.; в) прокладку треугольников  $cde$ ,  $def$ ,  $efg$  . . . , вдоль всей дуги причем эти треугольники имеют при почти равносторонней форме длины сторон 25—40 километров; г) точное измерение горизонтальных углов в тр-ках  $cde$ ,  $def$ ,  $efg$ , с средней ошибкой  $\pm 0''.5$  —  $\pm 1''.0$ ; д) определение высот всех пунктов цепи треугольников  $cde$ ,  $edf$ ,  $efg$  . . . ; е) точное определение астрономическим путем (с ошибкой лишь в долях секунды) азимутов линий  $mn$ ,  $mt$ ,  $ab$  и  $ba$ , или азимутов линий  $tq$ ,  $ql$ ,  $cd$ ,  $dc$ ; ф) точное определение астрономических широт и долгот в тех точках, где на концах дуги определялись астрономически азимуты, — т. е. в  $a$  и  $m$ , или в  $e$  и  $t$ , причем в случае измерения по меридиану — особенное внимание обращается на определение широт, а в случае измерения по параллели — на определение долгот.

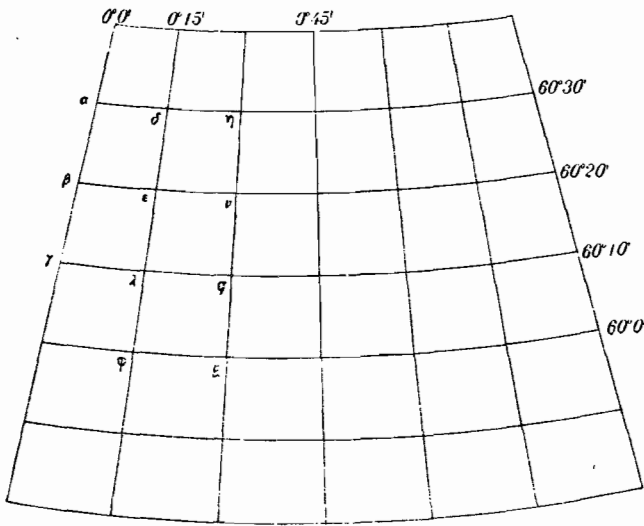


Черт. 5.

Почти одновременно с применением триангуляции для определения в научных целях длин дуг меридианов и параллелей, геодезисты стали употреблять *тригонометрическое* определение *опорных* точек при исполнении

при том эти ошибки не будут накапливаться при переходе от одного планшета к другому; что касается второй причины, то даже при больших площадях, напр., при квадрате со сторонами в 800 километров,—положение крайних планшетов относительно центральных определяется в современных работах с ошибкой, которую можно полагать меньшей 20 метров. Хотя такая ошибка и вырисовывается напр., при масштабе с'емки  $\frac{1}{25\,000}$ , но вследствие *медленности возрастания* этой ошибки по мере удаления от центра карты к ее краям, различие в ее значениях для ряда смежных планшетов будет совершенно ничтожно, так что никаких захождений планшетов друг на друга или несмыканий не произойдет. Несмыкания с'емок друг с другом могут произойти лишь в том случае, если одна с'емка большой площади, основанная на самостоятельно обработанной тригонометрической сети, прикинула к с'емке другой большой площади, основанной на другой, также самостоятельно обработанной тригонометрической сети, без связи с сетью в первой площади. Но в этом случае, кроме влияния ошибок сети приходится учитывать и еще другие влияния, а именно уклонения отвесных линий в ориентировочных пунктах сети.

Указанная организация топографических работ, чрезвычайно стройная, дает возможность определить отдельный с'емочный участок на местности в



Черт. 8.

ряду других участков с полной точностью, притом так, что каждый с'емщик может начинать и кончать свою работ *независимо* от других с'емщиков; кроме того точно определенные тригонометрические пункты обеспечивают при с'емке полную правильность и постоянный контроль построения всех контуров на планшете; определение же тригонометрических точек вообще достигается по сравнению с другими способами определения опорных точек скорее, надежнее и дешевле. О каких-нибудь невязках смежных планшетов друг с другом здесь собственно не приходится говорить—ошибки с'емки могут накапливаться лишь между двумя смежными тригонометрическими пунктами, и делая *сводку* контуров лишь по краям *смежных, прилегающих друг к другу* планшетов, этим самым вполне приготавливают каждый планшет к перерисовке его на карту. Что касается внесения планшетов на карту то эта задача в общем решается так. На карте прежде всего строится *картографическая сетка*—т. е. *условное* изображение сети меридианов и параллелей, ограничивающих отдельные планшеты. (Черт. 8). В этом условном изображении меридианы эллипсоида изображаются одним семейством линий на плоскости, а параллели эллипсоида—другим семейством линий, причем оба семейства выбираются так, чтобы соблюдались *условия*, которым должно

опорных точек скорее,



отвечать полученное изображение эллипсоида на плоскости. Обычно, при составлении точных карт картографическую сетку строят так, в таких *проециях*, что каждую из клеток  $a\beta\delta$ ,  $\delta\epsilon\gamma$ ,  $\epsilon\lambda\eta$ ... (См. черт. 8) можно считать подобной при графических построениях с соответственными им клетками  $abcd$ ,  $dchg$ ,  $cfih$ ... на эллипсоиде, но только клетка  $a\beta\delta$  будет изображением клетки  $abcd$  в масштабе  $m$ , а клетка  $\epsilon\lambda\eta$  — изображением клетки  $cfih$  уже в масштабе  $m + \Delta$ , для клетки  $\lambda\eta\zeta$  — масштаб будет  $m + \Delta_1$ ,... причем величины  $\Delta$ ,  $\Delta_1$ ,... — малы по сравнению с  $m$ . Зная закон условного изображения эллипсоида на плоскости, мы имеем возможность знать величины  $m$ ,  $m + \Delta$ ,  $m + \Delta_1$ ; следовательно задача составления карты сведется на простую перерисовку отдельных планшетов в известных, соответствующих каждому планшету, *уменьшениях*. Из изложенного ясно, что хорошо составленная тригонометрическая сеть в создании точной карты совершенно необходима; понятно, что чем больше площадь карты и чем крупнее ее масштаб, тем тщательнее должно определять тригонометрические пункты, чтобы избежать захождения рамок одного планшета за рамки смежных, чтобы сделать совсем незначительными несогласия *с'емок* по смежным бокам планшетов, чтобы всю громоздкую топографическую работу вести при сотнях планшетов так же просто, как при одном планшете. Понятно, что чем крупнее масштаб с'емки, тем меньшей длине в натуре соответствует сторона рамки планшета, и тем следовательно должно быть меньше расстояние между смежными точками тригонометрической сети. При масштабе с'емки  $\frac{1}{50\ 000}$  расстояние между смежными тригонометрическими точками должно быть не более 10 килом., а при масштабе  $\frac{1}{25\ 000}$  не более 6 килом.

При сплошных с'емках городов в целях городского благоустройства, при с'емках значительного числа очень мелких владений в целях землеустроительных и кадастровых, при маркшейдерских с'емках и в некоторых других случаях — к землемерной работе пред'является требование дать *числовой* материал: 1) для составления общего плана на несколько сотен десятин в масштабе 1/1 000, 1/500 и даже 1/250, с точным показанием места каждого отдельного владения; 2) для точного определения как общей, так и частных площадей; 3) для возможности точных расчетов: при проектировании улиц, проездов, шахт, тоннелей, дорог, каналов; при исправлениях и изменениях границ; при перемещениях и разделах владений, при регулировании улиц и т. п. Хотя при указанных работах общая площадь не велика и часто значительно меньше площади одного с'емочного планшета при государственных топографических работах, но высокая точность определения граничных пунктов и линий, ответственность за точное перенесение инженерного проекта в натуре, чрезвычайная крупность масштаба с'емки и тысячи контуров подлежащих *точному* определению *в общей их связи*, вызывают надобность в разбивке тригонометрической сети на площади землемерной работы: только имея тригонометрические пункты, в расстоянии друг от друга около 2 километров, можно правильно поставить определение *опорных полигонометрических* точек, без которых невозможно вести дальнейшую полевую работу по прокладке с'емочных линий; без тригонометрических пунктов обработка полигонной сети представляет большие трудности и может не привести к желаемым результатам, потому что о распределении погрешностей в полигонном ходе мы можем более или менее правильно судить лишь при прямолинейной форме хода, при соблюдении равенства его сторон и при включении его в тригонометрическую сеть. Составление плана в рассмотренных случаях землемерных работ приходится вести на большом числе отдельных листов: действия в пределах каждого листа вполне тождественны заполнению от-

дельного планшета, и каждый такой отдельный лист имеет то-же значение, что отдельный планшет при картографических работах. Поэтому успех работ по составлению плана здесь вполне зависит от того, насколько хорошо площадь работ обеспечена тригонометрическими пунктами. При крупных владениях и невысокой ценности земли можно обойтись при землемерных работах без тригонометрической сети, но наличие ее значительно облегчает исполнение всех полевых действий.

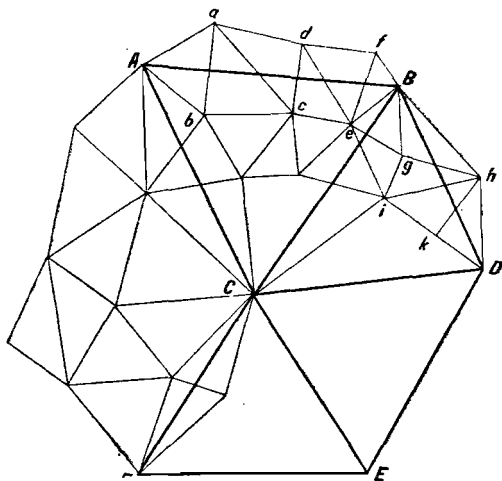
При государственных топографических съёмках рельеф местности должен вырисовываться горизонталями, отнесенными, конечно, к одному уровню—и именно к уровню моря. Очевидно для этого необходимо иметь *опорные точки по высоте*—другими словами, тригонометрические пункты должны быть надежно определены не только по широте и долготе, но и по *высоте*. Только тогда каждый съёмщик может вести работу по съёмке рельефа независимо от других съёмщиков, и только тогда он надежно посредством геометрической сети передаёт высоты по площади всего планшета, и только тогда при сводке горизонталей на нескольких смежных планшетах не будет возникать недоразумений. Высоты тригонометрических точек определяют обычно из *геодезического* нивелирования; при этом работа подвигается весьма быстро, но однако с точностью далеко не той, которая достигается при *геометрическом* нивелировании. Примерно вероятную ошибку в передаче высоты из геодезического нивелирования на расстояние в 30 километров можно оценивать в  $\pm 0.5$  метра. Отсюда с очевидностью вытекает, что геодезическое нивелирование, примененное как самоцелью еще на больших площадях, может привести к значительному накоплению ошибок в высотах. Поэтому правильная организация государственных топографических работ предполагает непременно исполнение общегосударственной нивелирной сети методами *геометрического* нивелирования. Обычно, посредством так называемого нивелирования *высокой* точности определяют высоты нивелирных марок, заложенных по линиям железных дорог и главных шоссе. Из линий, пройденных нивелированием высокой точности по железным дорогам, образуются полигоны, которые имеют периметры в сотни и тысячи километров. К нивелирным маркам точного нивелирования и должны привязываться, через известные расстояния, тригонометрические пункты. При такой постановке работ является, конечно, надежный контроль геодезического нивелирования, надлежащая его увязка и локализация его ошибок, при доведении накопления их до минимума. В Америке принято от марок точного нивелирования прокладывать ход *простого* нивелирования до каждого планшета съёмки, так что из геодезического нивелирования высоты передают только в пределах *одного планшета*. В Германии все тригонометрические точки I-го класса определяются по высоте из нивелирования близкого по типу к нивелированию высокой точности—ходами от марок нивелирования высокой точности к тригонометрическим сигналам и между ними. Во Франции между нивелирными полигонами I-го разряда, исполненными по железным дорогам и имеющим периметр около 600—800 километров, прокладывают нивелировкой высокой точности нивелирные полигоны II-го разряда с периметрами около 200—300 километров, а затем прокладывают нивелирные полигоны III-го разряда—довода в конце концов нивелирную сеть до такой густоты, что на каждую общину приходится один нивелирный репер. В России мы имеем до сих пор крайне редкую нивелирную государственную сеть—она исполнена только по главным железнодорожным линиям и образует пока только несколько полигонов с периметрами в тысячи километров. Чем, конечно, гуще будет государственная нивелирная сеть, тем легче будет идти работа по вырисовке рельефа при государственной топографической съёмке. Но как уже было указано в § 5, нивелирование высокой

точности является необходимым и для научных целей — по определению разности уровней в морях, изучению колебания этих уровней и т. п.

В заключение параграфа нужно еще указать, что нивелирование высокой точности производится нередко независимо от потребности в нем общетопографической съемки государства. Исследования рек и речных бассейнов, гидротехнические работы по осушению и обводнению значительных площадей, канализационные работы в больших городах и т. п. — всегда сопровождаются исполнением нивелирования высокой точности. Здесь, при тщательном изучении рельефа и при проектировании сооружений, подающих или отводящих воду, марки точного нивелирования играют ту-же роль, как тригонометрические пункты при точных съемках.

**7. Тригонометрические сети разных классов и порядок их составления.** Тригонометрические сети, прокладываемые для целей определения вида и размеров идеальной поверхности земли, обычно представляют собой цепи треугольников, (или цепи четырехугольников) расположенные по меридианам и по параллелям; стороны треугольников при этом обычно имеют размеры от 25 км. до 40 км. Для возможности правильно использовать тригонометрическую сеть при работах картографических, расстояния между смежными пунктами сети должны быть вообще меньше 8-ми км., а при точных землемерных работах — не должны превышать 2—3 км. Другими словами, при практическом использовании триангуляции, приходится на площади работ определять весьма значительное число тригонометрических точек, и здесь неминуемо возникает вопрос о том, каким образом построить тригонометрическую сеть так, чтобы с наименьшими затратами средств и времени прийти к достаточно точному определению координат значительного числа точек. При решении этого вопроса надо иметь в виду, (что будет доказано далее), что ошибки длин сторон треугольников и ошибки в координатах точек сети быстро возрастают вместе с числом треугольников, отделяющих рассматриваемую сторону или точку от базиса триангуляции и ее начального пункта. Вследствие этого, если-бы мы решили всю площадь будущей карты покрыть сразу мелкими, примыкающими друг к другу треугольниками, со сторонами 6—8 км., то при большом числе таких треугольников нам пришлось бы считаться с быстрым накоплением погрешностей, и что-бы достичь на краях площади той точности определения тригонометрических пунктов, которая обуславливает все вышеуказанное значение их в топографических работах, нам пришлось бы измерения на всех пунктах делать с чрезвычайной тщательностью-такою, которая *непосредственно* нужна собственно лишь в научных работах; при обработке же собранного огромного материала нам пришлось бы применить *строгие* способы; все это сделало бы определение координат точек сети громоздким, дорого стоящим и практически неосуществимым делом. Вследствие этого, указанный путь составления детальной сети приходится считать непригодным, и приходится следовать тому пути, в котором соблюдается основное правило геодезии — постепенного перехода от общего к частному. Этот иной путь в *теоретическом рассмотрении* представляется в таком виде. (Черт. 9) Разбив на всей площади топографических работ сеть больших треугольников  $ABC, BCD, CDE, CEF, \dots$  со сторонами километров в 25—30 и определив с высокой точностью положение вершин этих *больших* треугольников, будем теперь между точками  $A, B, C, D, E, F, \dots$  вставлять ряды *небольших* треугольников, со сторонами километров в 8—15: напр., сперва вставим ряд  $Aab, abc, \dots, feB$ , затем ряд  $Beg, egi, gih, ikh, khD$ , и т. д. При вставке *небольших* треугольников между точно определенными точками  $A, B, C, D, \dots$  можно измерение углов этих треугольников производить более простыми инструментами и способами и для определения каждого угла исполнять бо-

лее короткие ряды наблюдений, нежели при измерении углов в *главных* треугольниках  $ABC, CBD, \dots$ : накопление погрешностей измерений здесь ведь будет происходить лишь между каждыми двумя смежными точками



Черт 9.

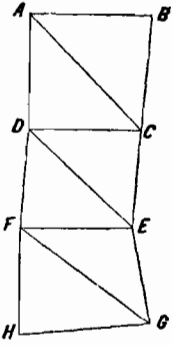
сети из больших треугольников, а не на всей площади триангуляции; кроме того небольшое накопление погрешностей в коротком ряде треугольников  $Aab, abc, acd, cde, dfe, fBe$ , — будет существенно устранено при уравнительных вычислениях, при вставке этого ряда треугольников между *двумя заданными* точками  $A$  и  $B$ ; самая обработка материала по измерению углов в малых треугольниках при указанной системе работ разобьется на части: можно будет каждый ряд небольших треугольников обрабатывать отдельно и независимо от прочей массы этих треугольников; вполне допустимо будет при обработке применение *приближенных* способов. Наконец, должно отме-

тить, что для точного определения положения тригонометрических точек треугольники сети следует делать равносторонними; с другой стороны, к пунктам детальной сети пред'является всегда требование удобств использования их при с'емках; два эти требования трудно выполнить одновременно; но если сперва разбить главные треугольники  $ABC, BCD, CDE, \dots$ , придав им равностороннюю форму, то при выборе на местности точек  $a, b, c, d, \dots$  мы можем заботиться о равносторонней форме треугольников  $Aab, abc, bcd, \dots$ , в меньшей степени, а выбор делать принимая во внимание главным образом удобства будущего использования этих точек при топографических работах.

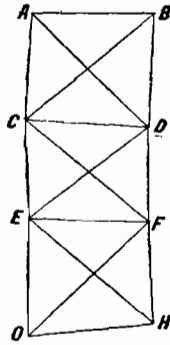
Треугольники  $ABC, BCD, DCE, \dots$  называются треугольниками I-го класса; треугольники  $Aab, abc, acd, cde, \dots$ , вставляемые между вершинами и сторонами треугольников I-го класса, назовем треугольниками II-го класса; понятно что если бы нам понадобилось иметь тригонометрические пункты с расстояниями между ними 4—6 километров, то тогда пришлось бы на вершинах и сторонах треугольников II класса обосновать ряды треугольников III-го класса.

Покамест мы рассмотрели *теоретически* наиболее выгодный путь построения детальных тригонометрических сетей. В действительности начало разделения сетей на классы и постепенность перехода от класса высшего к классу низшему по возможности соблюдается, но в разных государствах и в разных случаях—по разному. Так как топографическая работа для составления карт должны быть исполнены по всей площади государства, то и треугольниками первого класса должна быть собственно покрыта вся площадь каждого государства. Однако, вследствие медленности работы в первоклассных сетях и значительной стоимости этих работ, *сплошные первоклассные сети* проложены лишь в Англии, Пруссии и Италии — т. е. в государствах с сравнительно небольшой площадью. Во всех-же остальных государствах прокладывают по меридианам и по параллелям *цепи* первоклассных треугольников, между которыми остаются незаполненные значительные

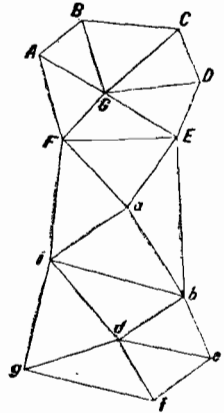
клетки; расстояние одной меридианной цепи от смежной или расстояние одной цепи по параллели от смежной берется от 150 до 300 км; в России проектируются меридианные цепи и цепи по параллелям вести в среднем расстоянии друг от друга в 300 км. Стороны треугольников таких перво-классных цепей заключаются в пределах 25—40 км; базисы измеряются обычно в местах скрещивания цепей (т. е. километров через 300); в каждой такой цепи имеется всегда несколько астрономических точек, т. е. таких в которых исполнено тщательное определение широты и долготы места и направление истинного меридиана; астрономические определения широт долгот и азимутов обязательно выполняют в местах скрещивания цепей. Перво-



Черт. 10.



Черт. 11.



Черт. 12.

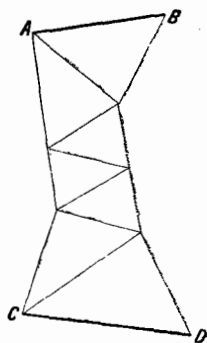
классные цепи могут быть построены или в виде *простой цепи* треугольников. (Черт. 10), или в виде цепи четырехугольников (черт. 11), в каждом из которых измеряется *восемь* углов, или в виде цепи из центральных систем (черт. 12).

Первоклассная триангуляция в каждом государстве рассматривается как предприятие общегосударственного и даже международного значения. Поэтому она составляется по некоторому общему проекту на всю территорию государства и исполняется специальными геодезическими учреждениями по согласованному плану.

Точность работ в первоклассных триангуляциях должна вполне соответствовать требованиям *градусных* измерений; использование рядов первоклассной триангуляции, как градусных измерений, является причиной направления их по меридианам и по параллелям.

Сети *второго* класса состоят обычно из треугольников со сторонами от 8 до 15 км; базисы при составлении этих сетей не измеряются—за таковые принимаются длины сторон треугольников I-го класса; точно также в сетях II-го класса обычно отсутствуют и астрономические точки. Треугольники II класса иногда представляют собою сплошную *сеть*, заполняющую площадь между точками и сторонами триангуляции I-го класса (см. черт. 9). В России, вследствие значительности расстояний между смежными рядами триангуляции I-го класса, приходится при переходе к триангуляции II-го класса, сперва прокладывать *основные* цепи II-го класса—которые разбивают площадь полигона, образованного рядами I-го класса (двумя смежными по меридианам и двумя смежными по параллелям) на несколько частей; в районах с'емок от этих основных цепей II-го класса развивают либо дополнительные ряды II-го класса, примыкающие к основным рядам, либо заполняющую сеть II-го

класса. В лесных районах по необходимости триангуляция II-го класса составляется из основных и дополнительных рядов, сравнительно довольно редких; достаточная густота опорных точек для съёмки здесь достигается прокладкой между тригонометрическими точками полигонометрических основных ходов.

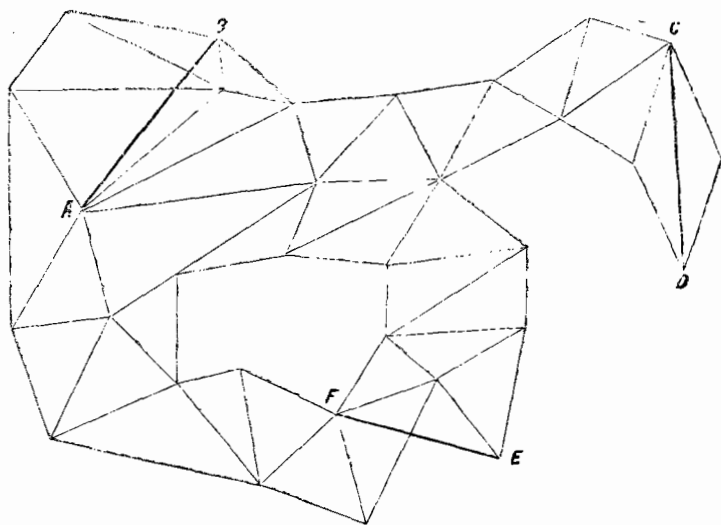


Черт. 13.

Недостаток отпускаемых средств вынуждает и в безлесных районах вести триангуляцию II-го класса цепями, отстоящими друг от друга на 40—60 километров. При обработке сети II-го класса приходится применять решение таких задач: 1) вставить ряд *треугольников* (Черт. 13) между двумя данными сторонами  $AB$  и  $CD$  (первого класса или ранее определенными второго класса); 2) вставить *полигоны* образовавшиеся из рядов треугольников II-го класса (черт. 14), замыкающиеся на сторонах  $AB$ ,  $CD$ ,  $FE$  первого класса и пересекающиеся друг с другом.

Пункты триангуляции *первого класса* необходимо определять их широтами и долготами. Для картографических целей необходимо *пункты II-го класса* определять также их широтами и долготами; но для использования этих точек, в качестве опорных при составлении сетей III и IV классов, — следует для вершин II класса определять еще так наз. эллипсоидальные прямоугольные или сферические прямоугольные координаты.

В России, при государственных топографических работах, при составлении сетей II-го класса, с тригонометрических пунктов *засечками* опреде-



Черт. 14.

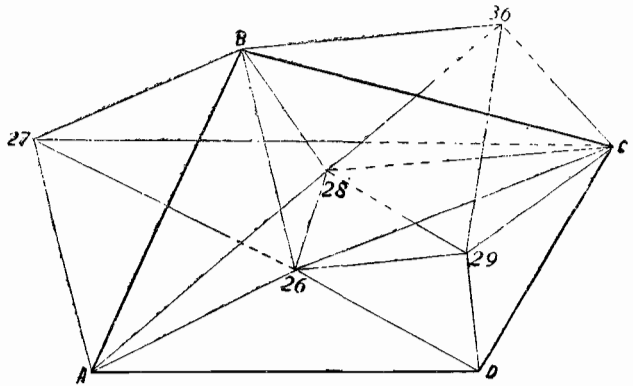
ляются колокольни, часовни, мельницы, трубы зданий, вехи, прибитые к деревьям, курганы и т. п.; — все эти предметы, определенные засечками с основных пунктов II и I класса, называются *третьеклассными* точками (иногда их называют еще уединенными и дополнительными точками). Точки 3-го класса существенно восполняют при топографических работах в России недостаточную густоту сетей II-го класса.

Сети III-го и IV-го классов применяются всегда в Германии и Австрии при землеустроительных и кадастровых работах; при этом никогда не ста-



вится задача покрыть точками III и IV класса сплошь площадь целой области, губернии и т. п.; в каждом данном случае работы по составлению детальной тригонометрической сети исполняются лишь в пределах площади предстоящих кадастровых измерений. Пункты III-го класса, при расстояниях между ними в среднем около 5 км., являются при этом переходными от точек второго класса к точкам IV класса, на которых собственно будут базироваться *полигонные* ходы. При определении точек III класса применяют способы: 1) вставки новых *точек*; 2) вставки новых *треугольников*. Первая задача применяется чаще второй, сущность ее объяснена на следующем примере.

Пусть на чертеже 15:—*A, B, C, D* суть пункты II класса, а все остальные—III класса; сплошные линии показывают, что при измерении углов визирования были произведены по этим линиям двухсторонние: с *A* наблюдалась точка 27 и с 27-ой наблюдалась *A*; линия с *C* на пункт 36, оканчивающаяся пунктиром, обозначает, что с 36 пункта *C* не наблюдалось. При составлении сети III-го класса предполагается, что первой и *отдельно* от всех прочих пунктов—определяется, как наиболее надежная, точка 26-ая, поль-



Черт. 15.

зуюсь визированиями на нее с *A, B, C* и *D* и визированиями с нея на *A, B, C* и *D*; затем определялась точка 27-ая, относительно *C, A, B* и 26, как следующая по выгодности ее построения, принимая ранее определенные координаты этой последней за *неизменные*, причем воспользовались наблюдениями 27-ой точки с *A* и *B* и наблюдениями с 27-ой на *C, 26, A, B*; следующим определяется пункт 28-ой, считая при этом за *данные* пункты *B, C, A* и 26 и используя при этом визирования с *A, 26, B* и *C* на 28 и с 28-го на *26, A* и *B*; и т. д. При указанном порядке составления и вычисления сети III класса, каждая точка определяется *отдельно*, причем не преследуется образование сети *треугольников* между точками III класса, а получение направлений, определяющих надежно последующие точки относительно предыдущих и при том так, что для последующих точек число таких направлений постепенно возрастает; при вычислении каждой новой точки применяется *совместное* определение ее *прямой, боковой и обратной* засечкой, и искомыми являются *координаты* этой точки (см. главу о дополнительных пунктах).

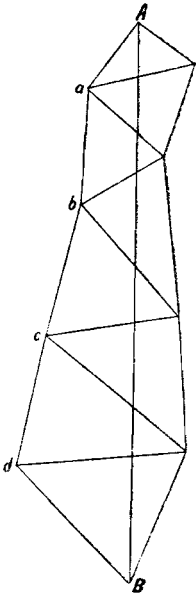
Вставка *треугольников* III-го класса применяется иногда в закрытых речных долинах;— сущность дела здесь заключается в том, что или вставляют цепь треугольников (черт. 13) между двумя сторонами *AB* и *CD* триангуляции II-го класса, или вставляют цепь треугольников между *двумя точками A* и *B* I-го или II-го класса (черт. 16) Искомыми величинами при уравнивательных вычислениях являются в случае черт. 13 *углы* в треугольниках, проложенных между четырьмя пунктами *A, B, C* и *D* второго класса причем в *общем* вычисление вводятся все треугольники и в результате измеренные в них углы исправляются так, что сумма углов в каждом

треугольнике становится равной  $180^\circ$ , что вычисляя по азимуту стороны  $CD$  и по углам треугольников азимут  $AB$ , мы получаем для него значение, данное из сети II-го класса, что вычисляя по стороне  $CD$  и по углам треугольников сторону  $AB$ , мы для ее длины получаем значение, данное из сети II-го класса.

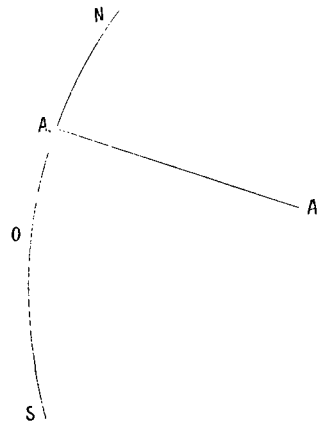
В случае вставки цепи треугольников между *двумя опорными точками*  $A$  и  $B$  (черт. 16) сперва уравнивают углы так, чтобы во всех треугольниках цепи и в многоугольнике  $LabcdB$  сумма урванных углов равнялась бы сумме теоретической. Затем приняв длину стороны  $Aa$  за единицу, вычисляют стороны треугольников цепи и выводят длину диагонали  $AB$ . После этого, пользуясь соотношением истинной длины диагонали  $AB$  к ее длине, выведенной из цепи треугольников при принятии  $Aa = 1$ , определяют вновь истинные длины сторон цепи, а затем и координаты вершин ее треугольников.

При составлении сети IV-го класса применяется исключительно задача *вставки* новых точек, решаемая одновременным определением точки *прямой* и *боковой*, прямой и *обратной* засечками (см. главу о дополнительных пунктах). Точки III-го класса определяются и геодезическими координатами и прямоугольными сферическими координатами; точки IV-го

класса определяются всегда прямоугольными плоскими координатами: это стоит в *полном соответствии с тем*, что в дальнейшем точки III и IV класса используются для вставки между ними *полигонных* ходов. Сферические прямоугольные координаты являются вполне *статочными* координатам плоским прямоугольным; применение их в геодезии основывается на том, что на протяжении целой губернии или области идеальную земную поверхность можно рассматривать за поверхность *сферическую* с надлежаще лишь выбранным радиусом. Пусть точка  $O$  (черт. 17) есть начало сферических прямоугольных координат; пусть *большой круг*  $ON$  представляет собою меридиан точки  $O$  на сфере, которую мы заменили идеальной фигурой земли; проводя из точки  $A$ , лежащей также на сфере, большой круг  $AA_1$ , перпендикулярный к меридиану  $ON$ , получаем: абсциссу точки  $A$  в виде длины дуги  $OA_1$  и ординату точки  $A$  в виде длины дуги  $AA_1$ .



Черт. 16.



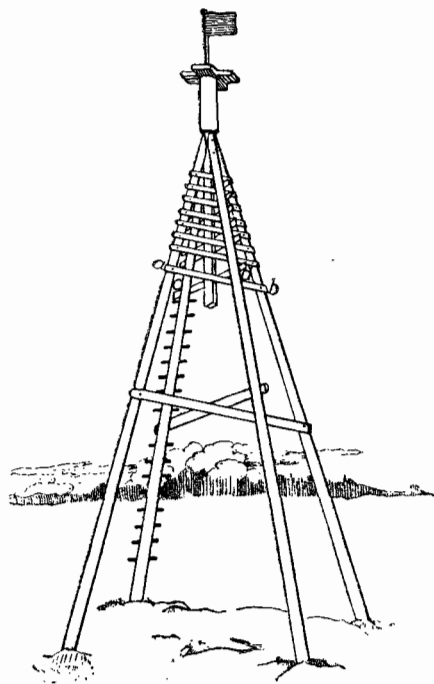
Черт. 17.

## Глава II.

### О тригонометрических знаках.

**8. Виды знаков.** Тригонометрическая точка обозначается особыми *центрами*, закладываемыми на земле и в земле; для возможности наблюдать тригонометрический пункт со смежных пунктов, *над ним* возводится сигнал того или иного вида, который имеет в верхней части или визирный цилиндр, наблюдаемый со смежных пунктов, или площадку для установки на

ней приборов для подачи световых сигналов на смежные пункты. Для возможности наблюдать с данного пункта смежные с ним, очень часто — приходится тригонометрический сигнал строить так, чтобы в нем, была бы еще надежная, весьма устойчивая *подставка* для угломерного инструмента, поднимаемого над землей на 10, 20, — 50 метров, и соответствующая платформа для наблюдателя. В большинстве случаев тригонометрические сигналы строятся из дерева; разрушение этих сигналов через несколько десятилетий не ведет к уничтожению сети опорных точек, если они были обозначены прочно устроенными центрами. Если местность открытая и холмистая, и с высоты штатива угломерного инструмента видны все соседние тригонометрические точки (т. е. основания поставленных на них сигналов), то тогда достаточно (за исключением пунктов I класса), на данном пункте построить простую пирамиду (черт. 18) состоящую из четырех бревен соединенных при вершине с вертикальным визирным цилиндром (или болванкой). Если простая пирамида ставится на пункте II-го класса, то ноги ее должно делать из бревен от 9 до 13 м. и толщиной на высоте груди от 18 до 24 см. и в верхнем отрезе — около 12 см.; а болванку — из отрезка бревна в 5—6 м. длиной при толщине около 22 см.; болванка высовывается из ног (вверх) на 1,5 м.; сторону квадрата основания пирамиды следует принимать равной от 2,8 до 3,5 м., а ямы для ног следует брать глубиной около  $1\frac{1}{2}$  м. Болванка прочно соединяется с ногами посредством двух горизонтальных брусков, *ab* и *cd* идущих по диагоналям пирамиды и прибиваемых один под другим к вырубкам в ногах и в нижней части болванки; в верхней части пирамиды устраивается обшивка в несколько рядов тесом по диагональным плоскостям; если со всех смежных точек пирамида проектируется на небо, то болванка и обшивка красятся в черный цвет; если же пирамида проектируется со смежных пунктов на зеленый фон или на землю, то следует ее верхнюю часть покрасить попеременно в белый и красный цвета; к каждой ноге в нижней ее части приходящейся в яме полезно прибить брусочек, противодействующий расшатыванию при сильных ветрах. На пунктах III и IV-го класса почти всегда ставятся простые пирамиды, но меньших размеров и более легкие, чем только что указанные.

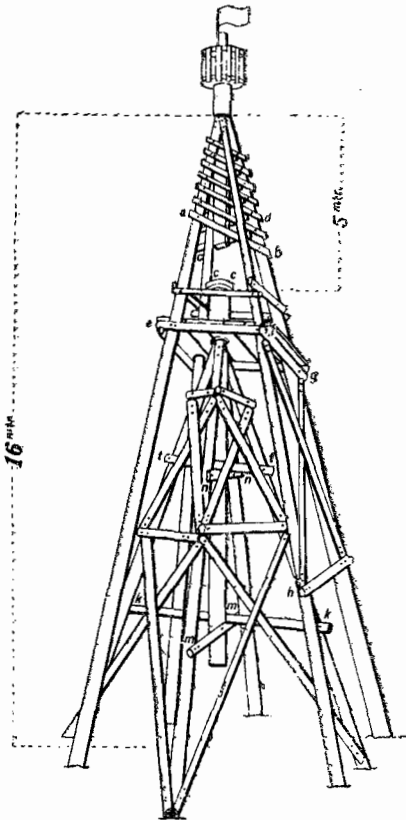


Черт 18

Если с данного пункта сигналы на смежных пунктах становятся видными только при подъеме инструмента над землей на 6—10 м. \*) то тогда на этом пункте строят двойную пирамиду. Двойная пирамида состоит: из наружной пирамиды высотой до 12—18 м. (черт. 19) и из пирамиды внут-

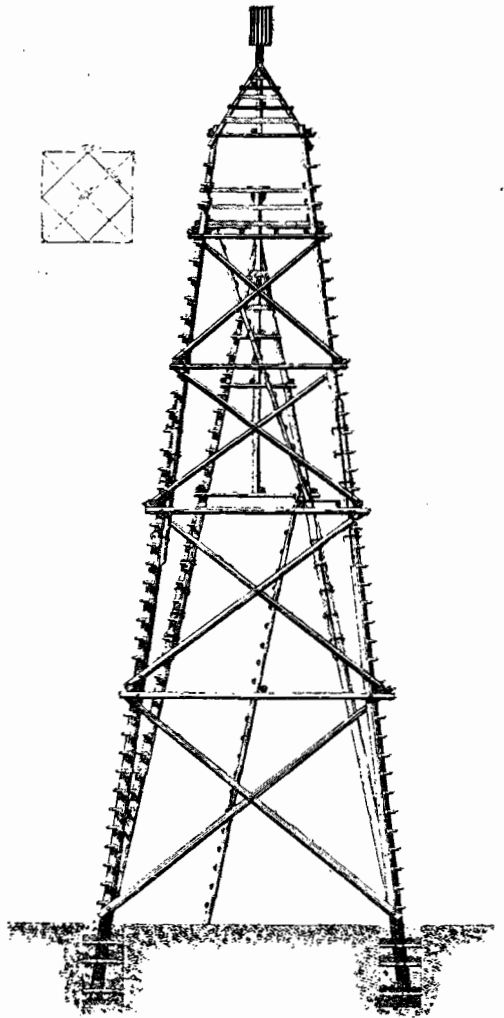
\*) Сюда же относятся и те случаи, когда с земли на данном пункте видны лишь самые вершины соседних сигналов, потому что в этих случаях визирные лучи будут местами идти близ почвы, что вредно скажется на результатах измерения углов.

ренней—высотой до 10 м. Наружная пирамида заканчивается вверху визирным цилиндром, прочно соединенным с ногами ее посредством двух диагональных брусков *ab* и *cd*; к ногам ее на подлежащей высоте прибиваются горизонтально переводины, держащие пол для наблюдателя; сторона квадрата основания наружной пирамиды берется 5—6 м; вверху пирамиды устраивается тесовая обшивка по диагональным плоскостям,



Черт. 19.

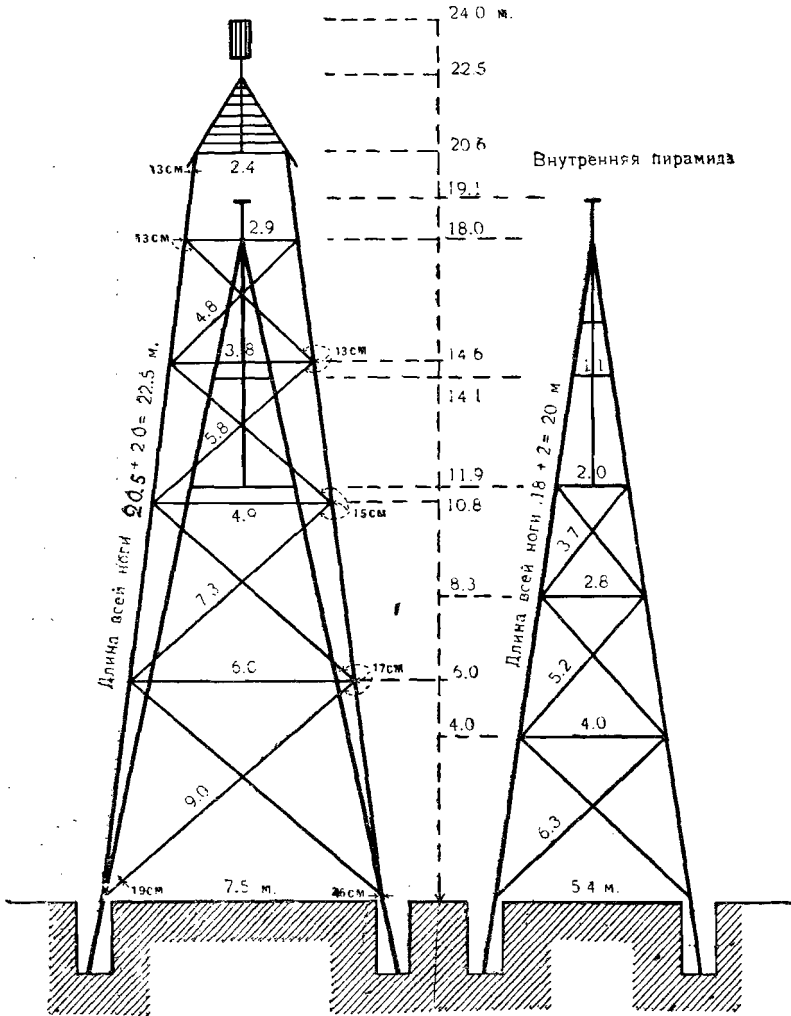
а ноги ее стягиваются андреевскими крестами. \*) Внутренняя пирамида является штативом для инструмента; сторона квадрата основания ее берется равной половине диагонали наружной пирамиды; диагонали этой пирамиды располагаются под углами в  $45^\circ$  к диагоналям наружной пирамиды; ось болванки этой пирамиды должна находиться почти на одной вертикальной линии (с осью визирного цилиндра (наружной пирамиды)); к верхнему срезу этой (нижней) болванки приколачивают столик *CC*, образованный двумя кругами из вершковой доски, прочно соединенными друг с другом шпунтами и клеем.



Черт. 20.

\*) Показаны на черт. 19 только в двух гранях пирамиды.

Болванка внутренней пирамиды длиной от 5 до 8 м. должна быть весьма солидно соединена с ногами этой пирамиды, диагональными брусками *kk*, *mm*, *nn*, *ll*, а ноги ее должны быть прочно вкопаны и соединены друг с другом андреевскими крестами и венцами. \*) Внутренняя пирамида ставится после того,



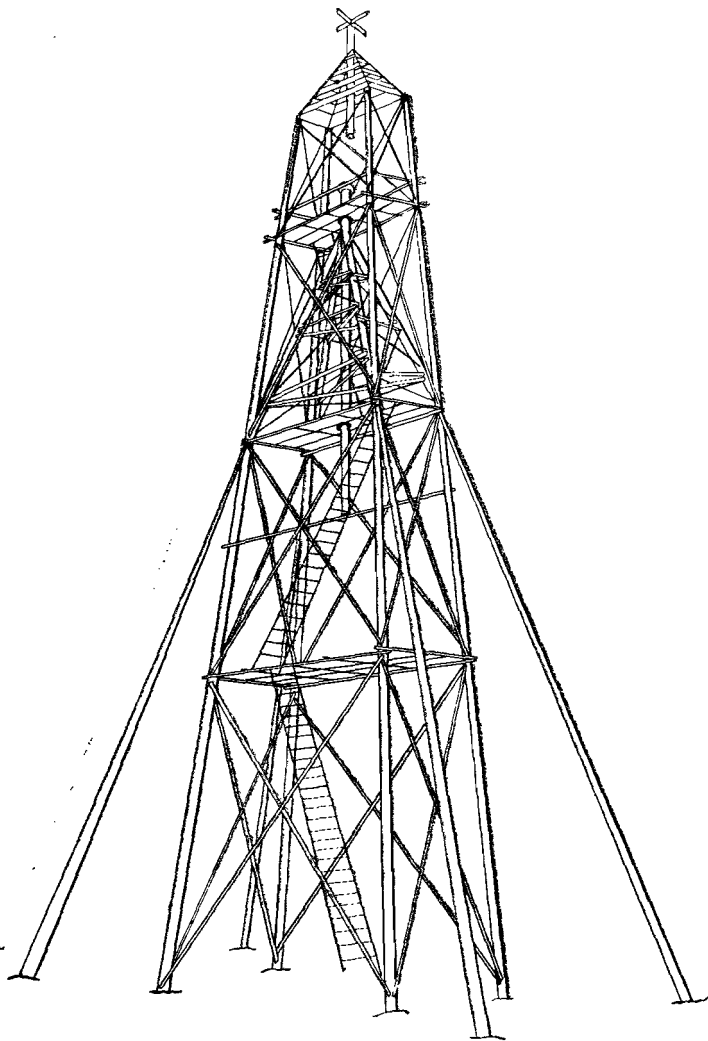
Черт. 20 а.

как поставлены диагональное стропило и третья нога наружной пирамиды; для ног ее, несмотря на небольшую высоту, употребляют 5-ти вершковые (22,2 см.) на высоте груди бревна; пол для наблюдателя не должен касаться ног внутренней пирамиды и ее болванки.

Если для наблюдений на данном пункте необходимо поднять инструмент над землей более, чем на 10 м., то тогда на таком пункте возводят *сигнал-простой* или *сложный*. Простой сигнал состоит: 1) из четырех основных столбов, почти вертикально поставленных, держащих на себе пол для наб-

\*) Глубина ям для ног внутренней и наружной пирамиды не менее 1,5 метра.

людателя и верхнюю маленькую пирамиду или крышу с визирным цилиндром; 2) из внутренней пирамиды—больших размеров, с ногами из бревен вкопанных в землю (черт. 20), упирающимися в *основные* столбы; эта внутренняя пирамида служит штативом инструмента. Основные столбы сигнала и ноги внутренней пирамиды должны быть вкопаны в землю на  $2-2\frac{1}{2}$  м.; толщина бревен для этих столбов и ног внутр. пирамиды — 22 см. на высоте груди и около 14 см. в верхнем конце. Сторона квадрата, образуемого на земле ногами внутренней пирамиды, должна быть равна  $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{5}$  полной высоты постройки (для простого сигнала это дает около 5 м.). Следовательно сторона квадрата, образованного основными столбами примерно равна 7 м. Простой сигнал (черт. 20) дает возможность иметь при наблюдениях высоту инструмента над землей до 15 м. Если требуется



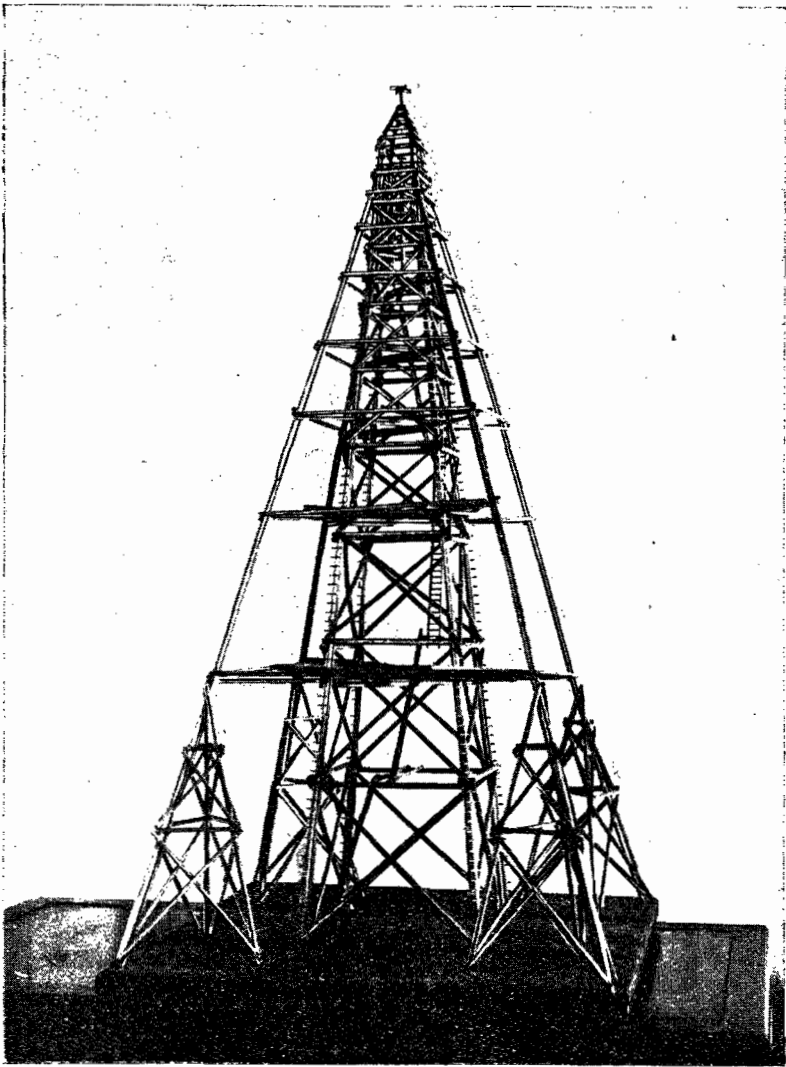
Черт. 21.

высоту инструмента над землей иметь более 15 м., то приходится строить *сложный* сигнал, столбы которого делаются из *скрепленных друг с другом бревен* и в котором внутренняя пирамида идет не с земли а упирается ногами в *основные* столбы.

На чертежах 21 и 22—изображены сложные сигналы того типа, которые строят в последние годы на русских триангуляциях. Сигналы типа чертежа 21 не должны иметь высоты более 28 м.; сигналы типа, изображенного на черт. 22 могут иметь высоту до 80 м. При постройке высоких сигналов сторона квадрата основания не берется более 10 м.—недостаточность площади опоры возмещается подпорками к основным бревнам. Основной столб должен иметь следующие толщины:

служит штативом инструмента. Основные столбы сигнала и ноги внутренней пирамиды должны быть вкопаны в землю на  $2-2\frac{1}{2}$  м.; толщина бревен для этих столбов и ног внутр. пирамиды — 22 см. на высоте груди и около 14 см. в верхнем конце. Сторона квадрата, образуемого на земле ногами внутренней пирамиды, должна быть равна  $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{5}$  полной высоты постройки (для простого сигнала это дает около 5 м.). Следовательно сторона квадрата, образованного основными столбами примерно равна 7 м. Простой сигнал (черт. 20) дает возможность иметь при наблюдениях высоту инструмента над землей до 15 м. Если требуется

- а) при высоте сигнала до 21 м.: на высоте груди . . . 30 см.; на высоте 12—15 м. . . . 24 см.; на высоте 20 м. . . . 18 см.  
б) при высоте сигнала до 30 м.: на высоте груди . . . 38 см.; на высоте 12—15 м. . . . 27 см.; на высоте 25 м. . . . 18 см.



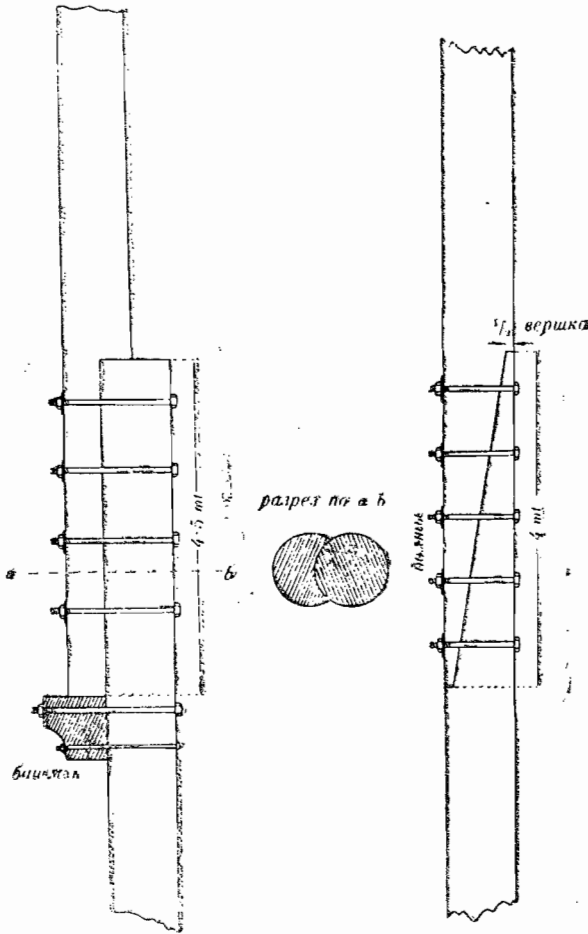
Черт. 22.

- в) при высоте сигнала от 30 до 40 м.: на высоте груди . . . 38—42 см.; на высоте 12—15 м. . . . 32 см.; на высоте 25—27 м. . . . 27 см.; на высоте 40 м. . . . 18 см.

Сращивание бревен друг с другом *по длине* для образования основного столба, если толщина бревен достаточна, производится или способом указанным на черт. 23, или способом указанным на черт. 24. Если толщина бревен не достаточна для образования основного столба, то производят сращивание их друг с другом, составляя основной столб из двух деревьев, как показано на черт. 25.

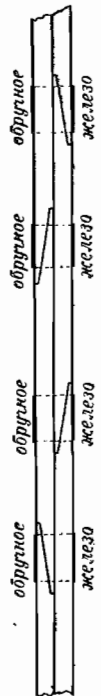
Для под'ема основного столба—длиною до 43 метров, вкапывают в середине основания сигнала центральную мачту и действуют системой блоков, как указано на черт. 26, пользуясь при под'еме оттяжными канатами. Самым трудным и опасным делом является под'ем так называемой *надтачки*. т. е. той верхней части основного столба, которую вследствие большой общей длины столба—приходится подавать отдельно от той его нижней части,

которая может быть поднята сразу при помощи центральной мачты. Под'ем надтачки производится после того, как нижние части всех четырех столбов уже поставлены и после того, как к этим столбам уже прикреплены



Черт. 23.

Черт. 24.

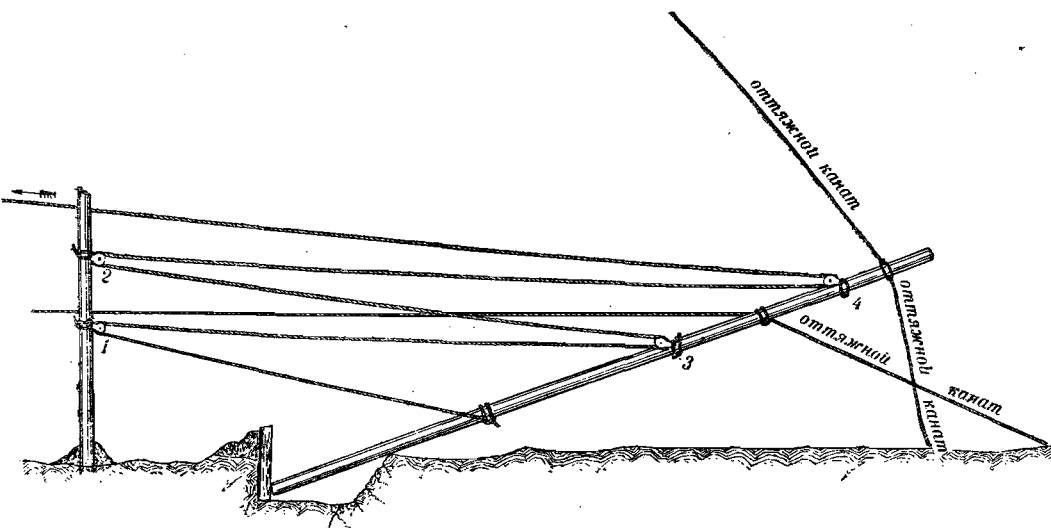


Черт. 25.

венцы, стягивающие основные столбы и служащие кроме того для настила на них полов. На черт. 27 изображен под'ем надтачки. Канаты *bad* и *cae* привязаны к верхней части надтачки и являются оттяжными—ими надтачка при под'еме удерживается в должном положении, а после под'ема—эти канаты привязываются к двум основным бревнам и не дают поднятой надтачке упасть (см. черт. 28). Когда верхушка надтачки доходит до первого блока, около которого сидит рабочий, то последний закидывает веревочное кольцо, которым обхватывает основной столб и надтачку; в этом кольце надтачка продолжает двигаться вверх, не отклоняясь от основно:

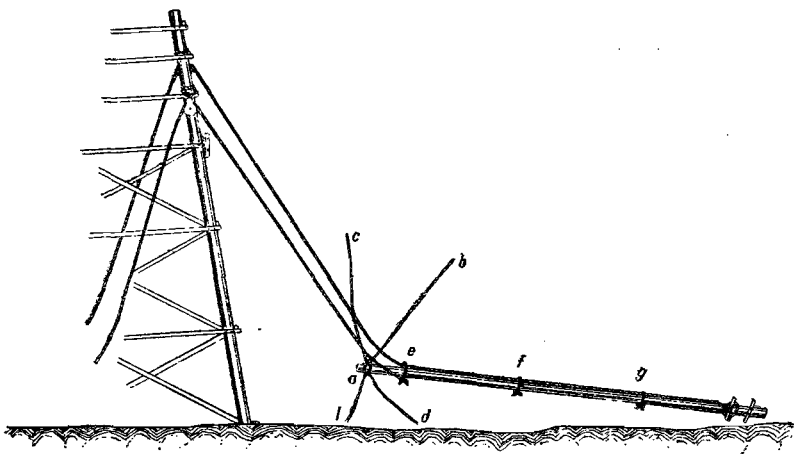


столба. Когда до блока доходит первая завязка *l*, то рабочий ее распускает и подъем продолжается до второго блока, у которого сидит второй рабочий и накидывает в нужный момент веревочное кольцо на надтачку. Венцы к



Черт. 26.

основным столбам прибиваются по такому правилу — первый венец на 6 метров от земли, второй от него на 5,8 метра выше; третий на 5,3 метра выше второго; после этого венцы идут через 5,0, 4,7, 4,3, 4,0, 3,7 метра друг от



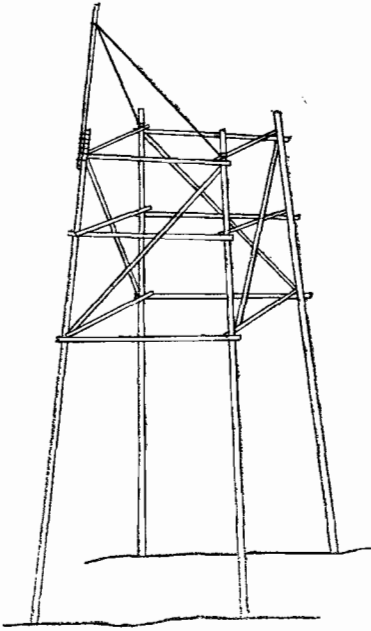
Черт. 27.

друга. На чертежах 29 и 30 показаны схематические устройства венцов при постройке сигналов типа, изображенного на черт. 22.

При постройке сигналов центр тяжести внимания, конечно, переносится на подъем основных бревен, надтачек и подпор к основным столбам. Довольно хлопотливой является установка внутренней пирамиды, служащей штативом для инструмента — так как здесь приходится работать на большой высоте; длина ног этой внутренней пирамиды берется от 4 до 6 метров. В Германии даже при подъеме инструмента на высоту 40 метров, — все-таки сигналы строят так, что четыре основных столба несут только пол для наблюдателя и крышу сигнала, а штативом для инструмента служит шатрового вида пирамида, идущая с земли.

Главные условия, пред'являемые к постройке всякого геодезического сигнала, заключаются в следующем:

1) постройка должна быть *прочна*, т. е. должно быть обеспечено долготнее ее существование; это достигается, во-первых, употреблением только хорошего, зимней рубки, леса при тщательной отборке деревьев; во-вторых, обжиганием при постройке нижних частей ног пирамиды или основных столбов сигнала, и если имеются денежные средства, — окраской верхней половины сигнала; в третьих, надлежащим соединением всех частей постройки между собою.

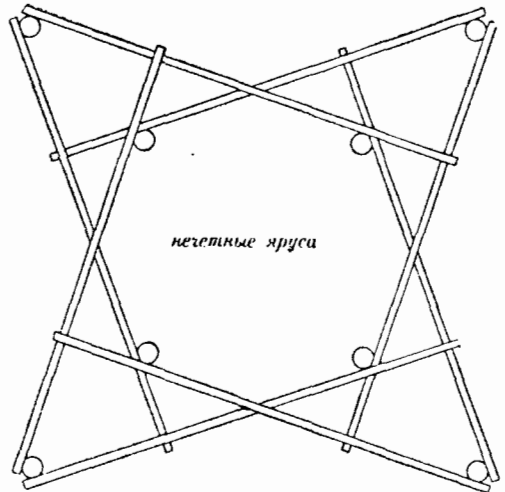


Черт. 28.

2) постройка должна быть *устойчива* — т. е. не подвергаться неравномерной осадке и опрокидыванию и вообще повреждениям даже сильным ветром, почти ураганным. Это достигается: достаточной глубиной ям для ног сигнала; заменой слабого грунта камнями и щебенкой и даже — в крайнем случае — забивкой сваяк в дне ям; системой якорей — в виде брусков, прибиваемых в несколько рядов к нижней части бревна, находящейся в яме, причем пространство между рядами забирается камнями и землей; достаточной шириной основания постройки; системой подпорок, увеличивающих площадь основания.

3) постройка должна обладать наибольшей *жесткостью* — т. е. возможно бльшим сопротивлением изменению взаимного расположения частей сигнала: Это

требование является наиболее приводит к дрожанию сигнала при наблюдениях и к постепенному разрушению узловых соединений. Необходимо, чтобы все части сигнала (конечно, кроме лестниц, крыши) возможно меньше-бы работали на продольный изгиб, а соединения в узлах были-бы сделаны тщательно в смысле пригонки и солидно в смысле прибивки. Жесткость сигнала очевидно зависит от толщины бревен в нижней части постройки и от формы постройки; в значительной степени она достигается введением ряда венцов, андреевских крестов по граням сигнала, горизонтальных распорок, расположенных на соответствующих высотах по диагоналям сигнала, и т. п. Приэтом расчет узлов между венцами, крестовинами и т. п. должен быть сделан с таким расчетом, чтобы отрезки



Черт. 29.

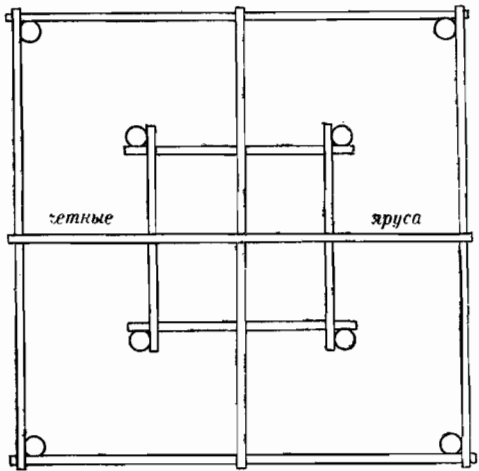
с таким расчетом, чтобы отрезки

между узлами не работали-бы на изгиб. Тогда, так как сопротивление дерева растяжению огромно, сигнал будет жесток, если соединения в узлах сделаны и тщательно, и солидно.

Жесткость значительно возрастает, если основным столбам при постройке придать выпуклость наружу (т. е. приблизить форму сигнала к виду сахарной головы); это достигается стягиванием столбов канатами вовремя прибавки венцов.

4) *Симметричность* постройки относительно вертикальной оси, что достигается тщательной разбивкой пикетажа перед постройкой — согласно составленному тщательному чертежу, отмечая на местности кольями проекции наиболее важных точек сигнала.

К сказанному должно прибавить, что в сигналах для первоклассной триангуляции очень часто требуется, кроме столика для инструмента, иметь еще площадку для установки на ней гелиотропа и фонаря при наблюдениях световых сигналов; такая площадка строится обычно выше столика для инструмента, (см. черт. 30а).



Черт. 30.

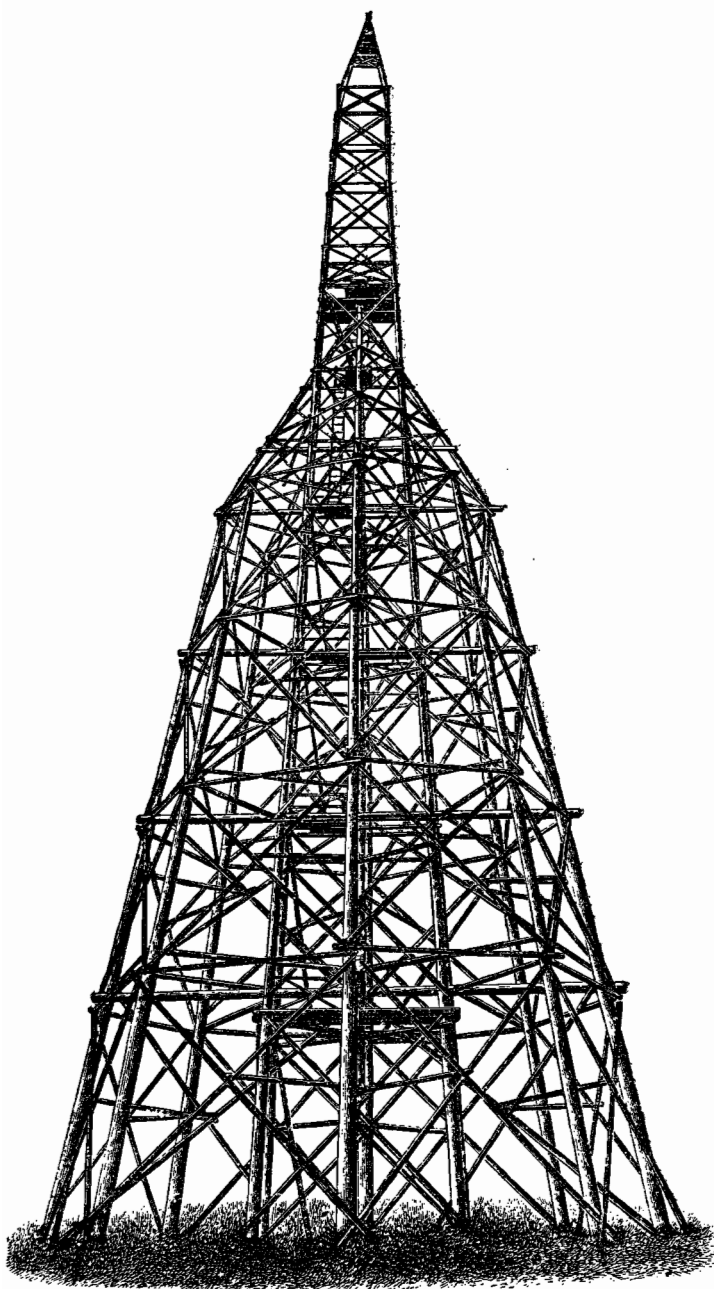
**9. Геодезические разведки (рекогносцировки).** Геодезическая разведка, как и постройка тригонометрических знаков, является делом, которое не может быть изучено иначе, как исполнением самой работы на местности. Поэтому здесь уместно будет указать лишь самые общие черты этого дела. До рекогносцировки, имеющей задачей установить места будущих сигналов, необходимо произвести проектирование треугольников триангуляции по 10-ти верстной карте (пользуясь одновременно для лучшего использования местности картами и более крупных масштабов). При таком проектировании соблюдаются следующие правила; 1) стороны тр-ков I класса должны иметь длину от 30 до 40 км, но не менее 25 км, 2) стороны тр-ков II класса должны заключаться в пределах 8—15 км; 3) треугольники должны быть близкими к равносторонним и не иметь так называемых *связующих* углов (см. следующую главу) меньших  $40^\circ$  и больших  $100^\circ$ ; 4) возможно меньшим числом передач из треугольников должно достигнуть конечных точек триангуляций; 5) значительные лесные массивы должны оставаться в стороне от ряда I класса и должны быть обойдены основными рядами тр-ков II класса; 6) большинство пунктов I класса желательно иметь недалеко от селений; \*) 6) желательно при проектировании учесть возможности в отношении доставки леса к местам постройки будущих сигналов; 7) тригонометрические пункты намечают на возвышенных командующих местах так, чтобы стороны треугольников направлялись бы или примерно параллельно водотекам, или пересекая значительную долину, или шли-бы в направлении главного водораздела, с одной командующей его высоты на другую.

\*) Однако не в непосредственной близости.

Производитель рекогносцировки должен иметь: карту с нанесенным на ней проектом триангуляции; трехверстные или двухверстные карты района;

кипрегель и легкую мензулу; буссоль транспортир и циркуль; сильную трубу с увеличением до 40 раз; два барометра анероида; бинокль призмный с 12-ти кратным увеличением; одну складную рейку; рулетку 50 метровую; канат  $\frac{3}{8}$  дюйма длиной до 80 м. и две веревки по 30 м.; два блока; два гелиотропа; три топора, молоток, пилу, заступ, гвозди, стремянки (телеграфные кошки) для взлезания на деревья; палатки для себя и для рабочих; два седла и все принадлежности для походной жизни.

При рекогносцировке чрезвычайно важно *обозревать местность, поднимаясь над землей на 10—15—20 метров*. Нужно помнить, что на совершенно ровной местности дальность горизонта при высоте глаза наблюдателя в 2 м. над землей, — всего 5 км. а при высоте наблюдателя над землей в 10 м. — около 12 км. Небольшой лес В, находящийся в расстоянии 10—12 км. от места осмотра, может поэтому (см.



Черт. 30а.

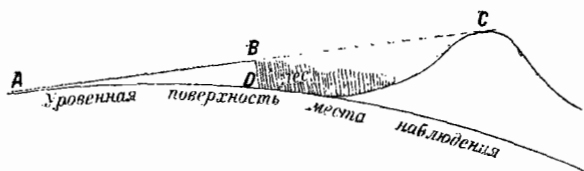
черт. 31) совершенно закрыть холмики С, возвышающиеся над местом осмотра на 60 м., но удаленные от него на 30 км. — вследствие чего останется

впечатление, что этих холмов нельзя использовать для целей триангуляции.

AB = 10 ж.м.

ВД = 10 — 12 м.

AC = 30 м.м.



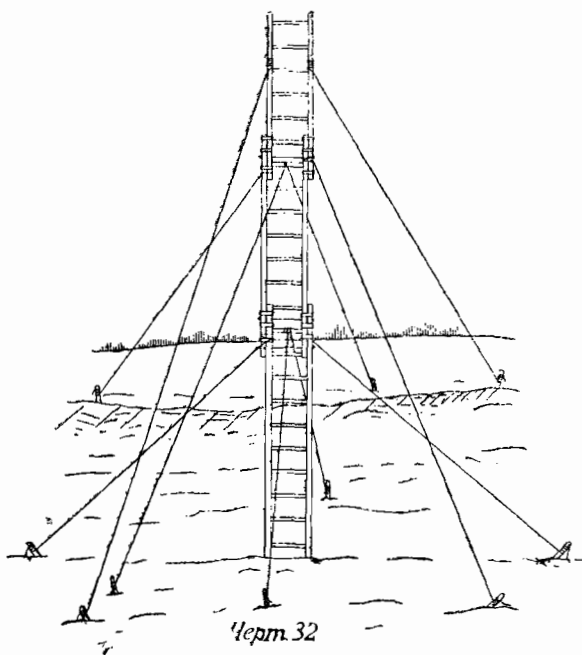
Черт. 31.

В лесу или близь леса рекогносцировщик может при осмотре подниматься на деревья; в селах с целью осмотра местности должно использовать колокольни и башни.

Но конечно могут быть часто случаи, что по близости места, с которого должно производить осмотр — нет ни колоколен, ни отдельных деревьев, между тем с земли открывается явно недостаточный кругозор. В этих случаях полезно, а при рекогносцировке сети I класса даже необходимо, — построить временную вышку, причем нередко высота ее в 10 — 12 м. будет совершенно достаточной. Такие временные вышки почти не вошли в практику работ в России, но за границей ими часто пользуются, доводя иногда их высоту до 20 — 30 метров.

Такие временные вышки устраивают или при помощи 2-3 связанных друг с другом лестниц, удерживаемых вертикально или слегка наклонно при помощи системы боковых веревок. (См. черт. 32 — высота под'ема до 15 м.) или же из трехвершковых бревен и слег ставят четыре столба, на которых устраивают временные полы и лестницы — черт. 33.

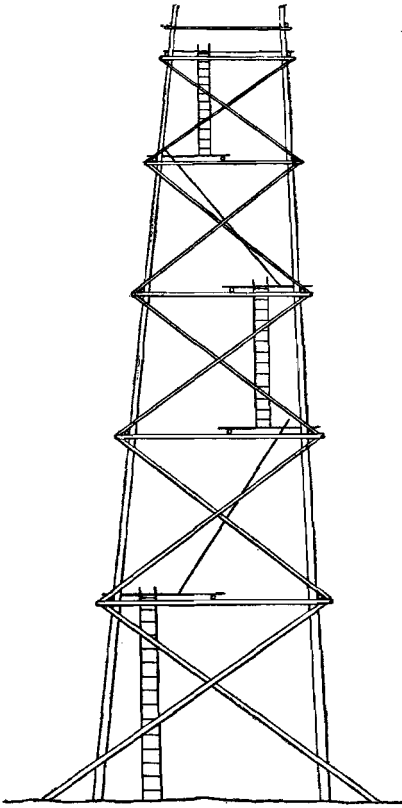
В лесу поднимаются на деревья при помощи телеграфных кошек или каната, укрепленного за верхние сучья; а иногда прибивают к дереву солидную вежу, по которой и взбираются выше леса. На рекогносцировку не



Черт. 32

следует жалеть времени и средств, так как тщательно исполненная рекогносцировка дает всегда возможность обойтись впоследствии сигналами небольшой высоты, вследствие чего значительно удешевляется производство триангуляционных работ, значительно увеличивается их скорость и заметно возрастает точность результатов. На каждой вновь рекогносцируемой точке задача сводится, конечно к установлению (обратной) видимости двух предыдущих точек и к намечанию двух последующих, причем из последних одна

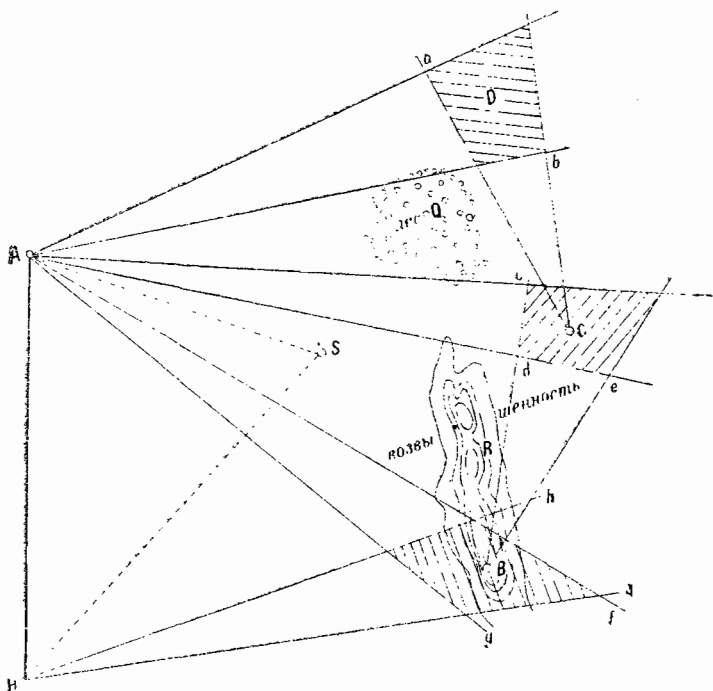
уже намечена с предыдущей точки. Очень часто приходится начинать рекогносцировку от бока ранее исполненной триангуляции, и, конечно, с концов этого бока сперва нужно наметить собственно только две следующие точки, но так, чтобы была обеспечена их взаимная видимость и возможность продвижения от них далее в нужном направлении; поэтому возможно что выбор этих двух первых новых точек придется делать постепенными попытками. Если исходного бока нет, (т. е. в районе работ прежних триангуляций не имеется вовсе), то приходится установить сперва места первых четырех точек с тем, чтобы с третьей и четвертой обеспечивалась бы возможность



Черт. 33.

дальнейшего продвижения в нужном направлении. При осмотре местности с данного пункта  $A$  (черт. 34.) отмечают на карте те направления  $Aa$  и  $Ab$ ,  $Ac$  и  $Ad$ ,  $Af$  и  $Ag$  и т. д. — между которыми горизонт далеко виден, а также направления на далекие возвышенности (или колокольни, башни и т. д.). Эти пространства  $aAb$ ,  $cAd$ ,  $fAg$  — называются *секторами видимости*. Азимуты направлений ограничивающих секторы видимостей, а также азимуты с  $A$  на возвышенность, колокольни и башни должны быть тщательно определены по буссоли и прочерчены на карте. Должно тщательно зарисовать вид горизонта в пределах каждого сектора видимости и те предметы, которые в нем видны, устанавливая дальность этих предметов и дальность горизонта при помощи карты и из распросов местных жителей. В секторах *невидимости* должно отметить: род препятствия, загораживающего горизонт; удаленность его от точки  $A$ ; высоту леса  $Q$  и его протяженность в направлении от  $A$ ; высоту возвышенности  $R$  и т. п. Полезно также с каждой точки, на которой производится рекогносцировка взять направления на *характерные* возвышенности и *непоказанные* на карте местные предметы (колокольни, водокачки), лежащие между этой точкой и намечаемыми следующими; такие возвышенности и местные предметы, будучи определены засечками еще с других точек рекогносцировки позволят уверенно определяться по ним при установлении *последующих* точек. Пусть бок  $AI$  (черт. 34) уже считается установленным, и с  $I$  был установлен сектор видимости  $hHq$ . Если выяснилось, что при наблюдениях в  $A$  с небольшой высоты над землей открываются секторы  $aAb$  и  $cAd$ , идущие в нужных для триангуляции направлениях, то заключают, что в пределах площади, общей двум секторам  $hHq$  и  $aAb$ , найдется пункт  $B$ , пригодный для триангуляции. Понятно, что и с  $H$  и с  $A$  намечают и самый пункт  $B$ . Точку  $B$ , намеченную с  $H$  и с  $A$  не так легко затем найти на местности; легко вместо нее принять какое нибудь другое место, с которого  $A$  или  $H$  не видно. Необходимо поэтому пункты  $A$  и  $H$  как нибудь отметить, если только они не совпадают с колокольней или башней; эту отметку делают или прибавая к дереву, стоящему вблизи  $A$ ,

большую вежу (черт. 35) с прибитыми к ней планками\*), или же оставляя в *A* трехугольную пирамиду из жердей—вышиною в 8 м. с прибитой к ее болванке возможно длинной вежой с большим флагом. Если таким образом места *A* и *H* отмечены, то соображая по карте и беря обратные азимуты по буссоли на *H* и *A*, а также определяясь по засеченным с *H* и *A* характерным возвышенностям и колокольням можем с успехом установить на местности



Черт. 34.

точку *B* и с нее начать осмотр по правилам указанным выше. Прежде всего устанавливают здесь высоту под'ема над землей для того, чтобы видеть точки *A* и *H*. Допустим, что с *B* имеется сектор видимости *eBe*, а треугольники должны строиться вправо от линии *BA*. Прочертив на карте направления *BC* и *Be*, получаем на ней пересечения секторов видимостей с *A* и *B* и утверждаем, что в пределах заштрихованного на карте пространства общего двум секторам *cAd* и *cBe*, найдется пункт *C*, пригодный для триангуляции. Очевидно, такое пользование секторами видимостей предполагает примерную верность определения *дальностей* горизонта в пределах сектора, что и является трудным делом, *требующим особой опытности от рекогносцировщиков*. Установив предварительно возможность выбора точки в заштрихованной площади, переезжают туда и, выяснив видимость из *C* точек *A* и *B* с земли или выяснив высоту под'ема в *C* над землей, для того чтобы видеть *A* и *B*, производят осмотр в пункте *C* или с земли или с этой высоты и устанавливают, что лес *Q* не препятствует образованию сектора *aCb*, намечают в пересечении секторов *aAb* и *aCb*—следующую точку *D* и т.д.

Рекогносцировка начинается в сети I класса с *выбора базиса и базисной сети*. Для базиса нужно выбрать место, позволяющее пройти *по прямой*

\*) Или с привязанным к верху вежи черным мешком, набитым соломой.

с базисным прибором на расстоянии 8—10 км; задача эта в большинстве случаев не легкая; базисная сеть в виде ромба с углами около  $30^{\circ}$ — $40^{\circ}$  при длине диагонали, должна дать *основную* сторону, на которой собственно уже должны быть построены треугольники ряда с подвигом в *желаемом* направлении; но иногда приходится на основной стороне, определенной из базисной сети, построить один или два добавочных треугольника, при помощи которых произойдет переход от стороны основной к треугольникам, идущим уже в должном направлении.

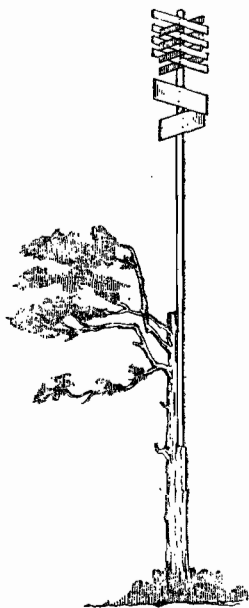
Само собой разумеется, что при рекогносцировке необходимо использовать возвышенные точки местности, и при постепенном продвижении стараться использовать значительные речные долины, располагая часть сторон треугольников по направлениям, параллельным примерно водотекам, а часть — по направлениям пересекающим речную долину. Если при движении вперед приходят к такой точке X, в которой трудно установить высоту сигнала на ней для того, чтобы двигаться дальше, или является сомнительным — удастся ли использовать намеченные пункты, без постройки на последующих за ними точках сигналов большой высоты, то тогда следует от этой точки X пройти маршрутом с анеридом или с кипрегелем в должных направлениях и выяснить перегибы рельефа, являющиеся препятствием, и высоту лесов, затрудняющих рекогносцировку. Производитель рекогносцировки должен обладать особым геодезическим чутьем, чтобы, идя постепенно вперед, не попасть в тупик: он должен уметь оценивать рельеф по скудным данным 10-верстной карты и предвидеть те трудности, которые могут возникнуть в дальнейшем.

Летом рекогносцировку следует исполнять после 3-х часов дня до 8-ми вечера. В трудных местах следует пользоваться гелиотропами, описание коих будет помещено ниже и которые позволяют на большое расстояние видеть отраженное от зеркал изображение солнца. Световой сигнал, посылаемый гелиотропом, может совершенно разрешить сомнение в видимости намечаемой точки с уже установленных, а также облегчить задачу по разысканию с новых точек ранее установленных пунктов.

В лесу при рекогносцировке приходится делать порубки, право на которое должно быть заранее установлено. Иногда сравнительно небольшая порубка в лесу, сделанная в умело выбранном направлении, решает удачно вопрос о переброске треугольников через этот лес.

Не следует жалеть времени на то, чтобы при неудаче вернуться назад, пересмотреть и изменить места уже ранее избранных точек, чтобы в дальнейшем продвигаться по точкам не требующим возведения на них высоких сигналов.

После отработки некоторого пункта, в журнале и на карте должны быть отмечены: секторы видимостей; азимуты направлений их ограничивающих; азимуты на замечательные местные предметы и характерные возвышенности, находящиеся как в секторах видимости так и вне этих секторов при необходимости пополнить число ориентировочных предметов; зарисовка горизонта в секторах видимостей и замечательных местных предметов; *дальность* горизонта в секторах видимости; намечаемые следующие точки; роды препятствий и удаленность их от места наблюдения в секторах невидимости с зарисовкой этих препятствий; необходимая высота под'ема инструмента

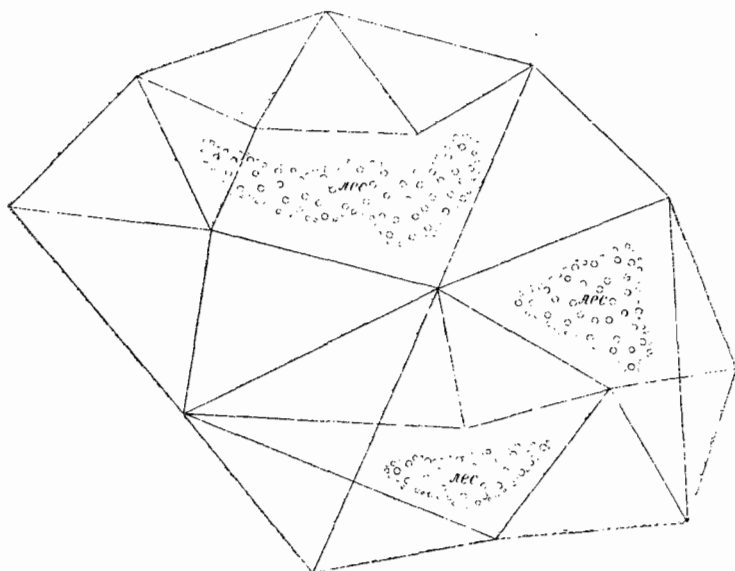


Черт. 35



на месте рекогносцировки; вид тех точек, которые были установлены ранее; описание места наблюдения и дорог, ведущих к нему. На местности, после исполнения в данном пункте рекогносцировки, должна быть оставлена или веха или временный знак, как указано было выше, и должна быть исполнена в м.  $\frac{1}{25000}$  с'емка площади около 1 кв. км.

Выгодно работу организовать так, чтобы один триангулятор вел собственно рекогносцировку, ставя на выбранных им местах временные знаки, а другой—строил-бы непосредственно за ним тригонометрические знаки.



Черт. 36.

Временные знаки нередко трудно увидеть с последующих пунктов вследствие малой высоты этих знаков и легкости их: более высокие и массивные тригонометрические знаки, возведенные на местах временных знаков, значительно облегчают выбор последующих точек.

Все до сих пор сказанное относится собственно к выбору точек I класса. При выборе точек II класса допускают большие отступления в треугольниках от равносторонней формы и довольно разнообразные способы подхода к последующим точкам, как это усматривается из чертежа 36. Значительное укорочение длин сторон по сравнению с триангуляцией I класса позволяет здесь обходиться без сложных сигналов: в сети II класса должно ограничиваться простыми пирамидами и двойными пирамидами; сигнал с платформой для инструмента в 25 м над землей здесь должен быть редкостью. С другой стороны, при выборе точек II класса должно учитывать использование этих точек в топографических работах—т. е. выбирать их так, чтобы с них можно было-бы определить много точек III класса, и чтобы пунктами II класса можно было-бы с успехом пользоваться при составлении геометрической сети. Следовательно точки II класса избирают на местах, с которых открывается во все стороны кругозор по крайней мере на 6 километров.

При рекогносцировке необходимо иметь в виду, что вследствие одновременного влияния кривизны земли и рефракции точка, удаленная от

места наблюдения на расстояние  $S$  и лежащая в одном уровне с ней, лежит ниже горизонта места наблюдения на  $\frac{0.43}{R} S^2$ , где  $R$ —земной радиус.

При  $S = 25$  км эта величина равна 45 м. Поэтому на местности ровной очевидно нужно строить сигналы такой высоты, чтобы столбик для инструмента возвышался-бы над землей не менее как на 16 м при визированиях на 25 км: тогда на середине пути луч будет выше земли на 4 м. Если между точками находится лес, с высотой деревьев в  $h$  м, то очевидно высота платформы для инструмента будет не менее  $h + 16$  м. Формула:

$$S = \sqrt{\frac{R}{0.43} (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2})^2}$$

выражает *условие видимости* точки  $A$ , в которой сигнал имеет высоту  $h_1$ , из точки  $B$ , удаленной от  $A$  на расстояние  $S$  и в которой платформа инструмента поднята над землей на  $h_2$ . Выражая  $h_1$  и  $h_2$  в футах, а  $S$  в верстах, эту формулу можно написать так:

$$S = 2 (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}).$$

При выборе точек III класса соблюдают условия: 1) чтобы каждая новая точка определялась-бы либо тремя направлениями с трех ранее определенных точек, (I, II и III классов) дающими при любой попарной их комбинации надежную засечку, либо *по крайней мере* из треугольника с тремя измеренными углами и с величиной угла при определяемой точке от  $30^\circ$  до  $150^\circ$ ; 2) чтобы каждую новую точку можно выгодно было-бы использовать при топографической съемке или при определении точек IV класса.

При выборе точек IV класса требуется непременно иметь в виду, что эти точки будут впоследствии совпадать с начальными и конечными точками основных полигонных ходов, долженствующими иметь форму *прямолинейного* хода; поэтому, прежде выбора точек IV класса, надлежит наметить, хотя-бы в общих чертах, будущую сеть полигонов; каждая новая точка IV класса может быть определяема: или тремя направлениями на нее с определенных уже пунктов, дающими при любой попарной их комбинации надежную засечку; или по крайней мере четырьмя направлениями с нее на четыре уже определенных пункта, расположенные в четырех сторонах горизонта,

**10. Центры, их закладка; описание тригонометрического знака.** Центры, закладываемые под тригонометрическими знаками, служат: 1) для сохранения тригонометрических точек на местности на весьма продолжительное время; 2) для приведения углов, измеряемых во время составления триангуляции, к точно обозначенным и *неподвижным* точкам, потому, что вершины тригонометрических знаков, на которые делаются визирования при наблюдении углов в триангуляции, изменяют свое положение с течением времени. В зависимости от класса тригонометрического пункта, а также в зависимости от имеющихся в распоряжении времени, денежных средств и строительных материалов — устройство центра может быть весьма различно. На пунктах I и II класса, а иногда и на пунктах III класса — закладываются *двойные* центры: нижний — на глубине 1,5—2 м, и верхний — выступающий на поверхность земли. По инструкции для первоклассных сетей Военно-Топографического Управления предписывается: „нижний центр закладывать на глубине одной сажени и делать его из кирпичной кладки на цементе в виде куба со стороной  $3\frac{1}{4}$  аршина; для наружного центра брать гранитные валуны весом от 15 до 20 пудов; где нет валунов такого размера, — то делать кирпичную кладку в виде

параллелипипеда с основанием в  $\frac{3}{4}$  аршина и высоту в  $1\frac{1}{4}$  аршина причем на  $\frac{1}{4}$  аршина кладка выступает над землей; на верхней плоскости куба, служащего нижним центром и на верхней плоскости валауна служащего верхним центром должны быть высверлены конические отверстия с расширением внутрь: эти конусы заливаются свинцом\*), на котором крестообразной насечкой обозначается положение центра“. Лучше вместо такой заливки в кладке цементировать нивелирную марку.

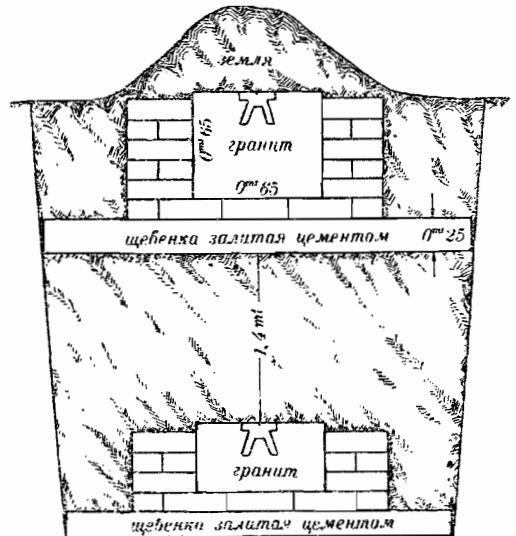
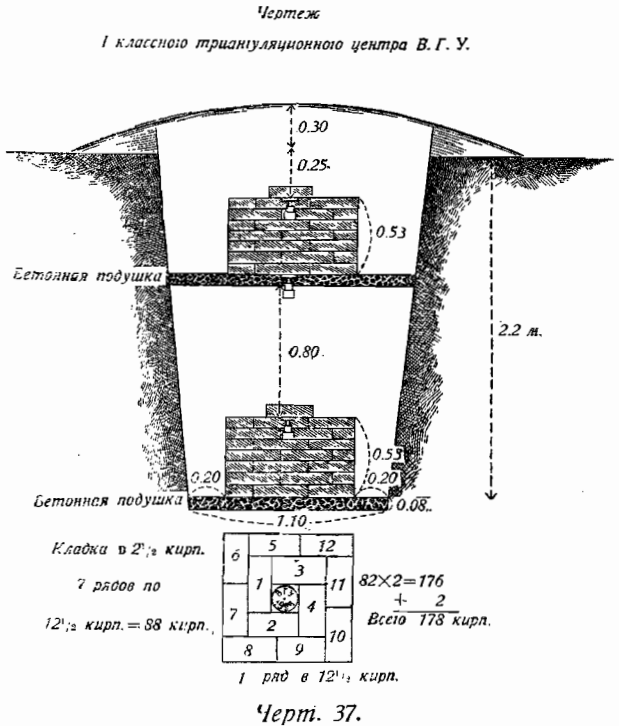
Аналогичного устройства центры закладываются в настоящее время на пунктах первоклассных рядов, исполняемых Высшим Геодезическим Управлением, с тою особенностью, что и верхний и нижний центры лежат на широких бетонных подушках, гарантирующих равномерность оседания центров (см. ч. 37).

На чертеже 37-а изображено устройство центра которое следует принять на пунктах I кл. в местностях, изобилующих гранитом.

На концах базисов закладываются особо солидные базисные центры устройство которых изображено на чертеже 37-в.

На точках II класса нередко, в западных районах России, и верхний и нижний центр устраивается из валунов: нижний валун весом около 15 пудов укладывается в яме глубиною около  $1\frac{1}{2}$  м, для верхнего центра берут валун весом около 10—12 пудов; на верхних плоскостях валунов делают свинцовые заливки.

В центральной России, в триангуляциях II класса Высшего Геодезического Управления, нижним центром служит камень, весом 12—15 пудов, уложенный на

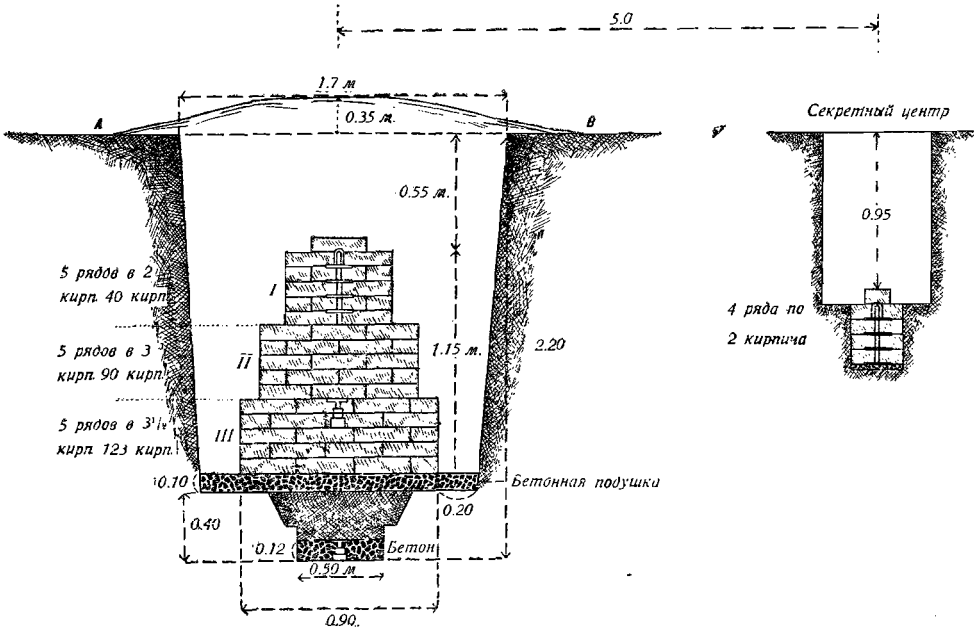
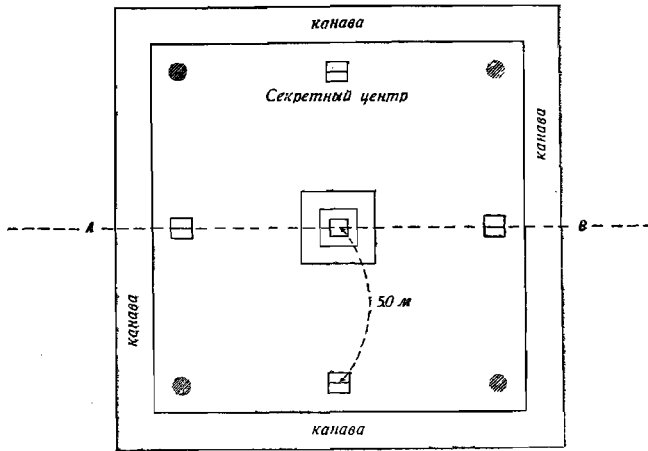


\*) При заливке свинцом нужно иметь совершенно сухую верхнюю поверхность камня -- иначе можно обжечь лицо и глаза брызгами свинца.

слой каменной, хорошо втрамбованной в землю, щебенки; пространство между камнем и стенками ямы заполняется мелкими камнями пересыпаемыми землей, и плотно утрамбовываемыми; верхним центром служит

камень таких-же размеров, уложенный на бетонную подушку; пространство между камнем и стенками ямы заполняется мелким камнем, заливаемым бетоном. При отсутствии камня на пунктах II класса в В. Г. У. закладывают и нижний и верхний центр в виде параллелипипеда из кирпичей (в Украинском Геодезическом Управлении нижний и верхний центры делаются из кирпичей, причем

План расположения базисных центров



Черт. 37в.

внутри кирпичной кладки зацементировывается чугунный монолит в виде небольшой усеченной пирамиды); или-же нижний и верхний центр делается из бетона, в виде солидной тумбы располагающейся на бетонной подушке.

За неимением камня (больших размеров) и при недостатке денежных средств, иногда на пунктах II и III класса нижний центр делают кирпичный, а для верхнего употребляют отрезок бревна в 0.7 м длиною, снабженный внизу крестовиною. Кирпичный нижний центр изображен в разрезе на

черт. 38 и в плане—на черт. 38-а; он состоит: 1) из прочно установленного вертикально среднего кирпича  $C_2$ , на верхней грани которого прочерчены диагонали; этот кирпич  $C_2$  на две трети своей высоты находится в земле; 2) из двух половинок кирпича  $h$  и  $g$ , приставленных плашмя к большим сторонам кирпича  $C_2$ ; 3) из двух целых кирпичей  $a$  и  $b$ , приставленных плашмя к малым сторонам кирпича  $C_2$ , и к половинкам  $h$  и  $g$ ; 4) из целого кирпича  $f$ , прикрывающего сверху кирпич  $C_2$ ; кирпичи укладываются на глубине около  $1\frac{1}{2}$  м и после их установки осторожно укладываются мелкими камнями и землей и засыпаются камнями так, что каменный слой имеет толщину около 0.7 м. Засыпав этот каменный слой землю, устанавливают верхний центр в виде отрезка бревна с крестовиной внизу и затем засыпают всю яму землей, прочно ее утрамбовывая; после этого *назищают* на верхней плоскости бревна положение центра, забивают в назначенной точке  $C_1$  длинный гвоздь и делают на плоскости бревна, по его диаметрам, вырезки.

Верхний и нижний центры устанавливают всегда на одной вертикальной прямой и именно на той, на которой в момент закладки находится *вершина* тригонометрического знака,—т. е. середина верхней части визирного цилиндра или штифт, забитый сверху в этом цилиндре. Чтобы достичь такой установки центров—поступают так: становясь с хорошо выверенным малым теодолитом в таком расстоянии от пирамиды, чтобы без напряжения видеть ее вершину, отмечают тонкими гвоздиками на двух специально забитых свайках\*) следы вертикальной плоскости, проходящей через вершину знака и центр малого теодолита: таких плоскостей должно дать три, (конечно, для отметки каждой плоскости нужно забивать свою пару сваек) под углами друг к другу в  $120^\circ$ ; соединяя шнуром парные гвозди, отмечающие одну плоскость, получают маленький треугольник погрешностей (со сторонами не более 3 мм) середину коего и принимают за проекцию вершины; после укладки в яму валуна, обозначающего нижний центр, при помощи отвеса (или при помощи лот-аппарата, если установке его не препятствует яма) назначают на нем точку, лежащую на одной вертикальной линии с серединой треугольника, образованного упомянутыми шнурами; точно также поступают при назначении центра на верхнем камне или на бревне. Нахождение на одной вертикальной линии точек нижнего и верхних центров намечаемых при закладке базисного центра, достигается непременно при помощи лот-аппарата. В Германии на пунктах I, II и III класса наружный центр обозначается на камне, обтесанном в виде параллелепипеда с размерами: для I класса— $30 \times 30 \times 90$  см; для II и III класса  $16 \times 16 \times 90$  см; нижний-же центр обозначается на каменной *квадратной* плите, имеющей сторону: для I класса 75 см; для II класс—в 60 см; для III класса—в 30 см; толщина плиты берется в 10 см; камень, служащий для верхнего центра, ставится на эту плиту, которая лежит зацементированная на фундаменте из каменной кладки. На пунктах же IV класса, (а иногда и на пунктах III класса) употребляют для обозначения центра дренажную трубу в 30 см длиною, при диаметре от 45 до 10 см.

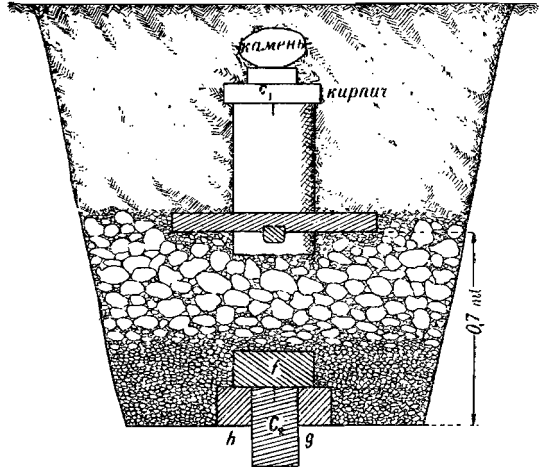
Сейчас же после постройки тригонометрического знака и закладки центров должно составить:

1) план местности, захватывая площадь радиусом 150–300 м от пирамиды, с показанием на нем: дорог, межников, граничных пунктов построек и направлений на постоянные предназначенные к долговременному существованию предметы местности;

\*) Эти свайки из отрезков 3-х верхковых бревен длиною около 3-х дециметров прочно забиваются по указаниям теодолита и при том так, чтобы они пришлись-бы по разные стороны от центра и в достаточном удалении от краев ямы.

2) чертеж тригонометрического знака и центров.

Кроме того, необходимо 30-ти секундным теодолитом, установленным над центром тригонометрического знака измерить аккуратно углы между направлениями на замечательные, предназначенные к долговременному существованию, предметы местности. Число таких направлений должно быть не менее четырех; предметы, на которые идут эти направления, желательно иметь располагающимися во всех четвертях горизонта. Указанными постоянными предметами являются: колокольни, часовни, фабричные трубы, общественные здания, мельницы, выдающиеся точки вершин рельефа, тригонометрические знаки, граничные пункты.

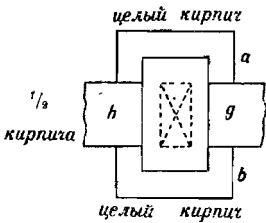


Черт. 38.

Подробный план местности обеспечивает разыскание впоследствии места тригонометрического пункта, если от наземного тригонометрического знака не осталось никаких следов; углы же измеренные между 4—5 направлениями на постоянные предметы местности позволяют довольно точно установить

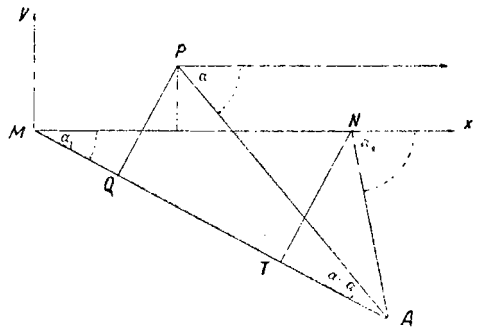
положение центра знака и найти наружный центр, а при утрате или повреждении его—отыскать нижний центр. При таком разыскании приходится применять способ *Марека*, изложенный в § 11.

Чертеж наземного тригонометрического знака и центров служит для ясного описания тех точек знака, которые визировались при измерении горизонтальных и в особенности при измерении вертикальных углов триангуляции.



Черт. 38а.

11. **Способ Марека.** (Черт. 39). Пусть  $M$  и  $N$  суть две точки находящиеся *вблизи* разыскиваемого тригонометрического центра  $P$  (в нескольких метрах от него); назовем через  $\rho$  расстояние  $MN$ . Пусть  $A$  есть одна из тех точек местности, между направлениями на которые были измерены углы при  $P$  во время закладки центра. Назовем: через  $a$ —расстояние  $PA$ , через  $\alpha$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ —углы считаемые по ходу часовой стрелки соответственно при  $P$ ,  $M$  и  $N$  от направления  $MN$  или ему параллельного. Опустив из  $P$  перпендикуляр  $PQ$  на  $MA$ , из треугольника  $PQA$  имеем:



Черт. 39.

$$PQ = a \sin (\alpha - \alpha_1)$$

называя-же через  $x$  и  $y$  координаты  $P$  относительно начала  $M$ , оси  $X$  направленной от  $M$  к  $N$  и оси  $Y$ , направленной влево от  $MN$ , имеем:

$$PQ = x \sin \alpha_1 + y \cos \alpha_1$$

$$\text{Или: } a \sin (\alpha - \alpha_1) = x \sin \alpha_1 + y \cos \alpha_1 \dots \dots \dots (a)$$

Предполагая, что при точке  $P$  были измерены углы между направлениями на точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  и называя расстояния  $PB$  и  $PC$  через  $b$  и  $c$ , а углы между направлением  $MN$  и направлениями  $PB$ ,  $MB$ ,  $NB$ ,  $PC$   $MC$ ,  $NC$  соответственно чрез  $\beta$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ , имеем для точек  $B$  и  $C$  уравнения:

$$b \sin (\beta - \beta_1) = x \sin \beta_1 + y \cos \beta_1 \dots \dots \dots (b)$$

$$c \sin (\gamma - \gamma_1) = x \sin \gamma_1 + y \cos \gamma_1 \dots \dots \dots (c)$$

Проведя из  $N$  перпендикуляр  $NT$  к  $MA$  и допуская, что  $NA = a$  из треугольников  $NTA$  и  $NTM$  напишем для точки  $A$ :

$$a \sin (\alpha_2 - \alpha_1) = \rho \sin \alpha_1 \dots \dots \dots (d)$$

Следовательно для точек  $B$  и  $C$  имеем:

$$b \sin (\beta_2 - \beta_1) = \rho \sin \beta_1 \dots \dots \dots (e)$$

$$c \sin (\gamma_2 - \gamma_1) = \rho \sin \gamma_1 \dots \dots \dots (f)$$

Деля уравнения: (a) на (d), (b) на (e), (c) на (f), и принимая по малости углов  $\alpha - \alpha_1$ ,  $\alpha_2 - \alpha_1$ ,  $\beta - \beta_1$ , ..... пропорциональность этих углов их синусам напишем:

$$\alpha - \alpha_1 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\rho} (x + \cotg \alpha_1 y) \dots \dots \dots (g)$$

$$\beta - \beta_1 = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\rho} (x + \cotg \beta_1 y) \dots \dots \dots (h)$$

$$\gamma - \gamma_1 = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\rho} (x + \cotg \gamma_1 y) \dots \dots \dots (i)$$

Направления  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  неизвестны, но известны их разности, равные углам  $APB$ ,  $BPC$ ,  $APC$ ; поэтому вычитая из (g) — (h), из (h) — (i) получим два уравнения с неизвестными  $x$  и  $y$

$$[(\beta - \alpha) - (\beta_1 - \alpha_1)] \cdot \rho = [(\beta_2 - \alpha_2) - (\beta_1 - \alpha_1)] x + \\ + [(\beta_2 - \beta_1) \cotg \beta_1 - (\alpha_2 - \alpha_1) \cotg \alpha_1] y;$$

$$[(\gamma - \beta) - (\gamma_1 - \beta_1)] \cdot \rho = [(\gamma_2 - \beta_2) - (\gamma_1 - \beta_1)] x + \\ + [(\gamma_2 - \gamma_1) \cotg \gamma_1 - (\beta_2 - \beta_1) \cotg \beta_1] y$$

Из этих уравнений и определяются  $x$  и  $y$

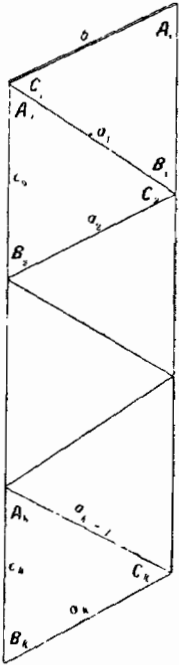
Расстояние  $\rho$  следует брать около 30—40 м; углы  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  измеряются малым теодолитом.

### ГЛАВА III.

## О действии погрешностей в триангуляции; базисные сети.

12. **Средняя квадратическая ошибка связующей и промежуточной стороны.** Пусть чертёж 40 изображает тригонометрическую сеть, построенную в виде *цепи* треугольников. В тригонометрической сети измеряются только базис  $b$  и углы; длины же сторон, необходимые для определения координат всех точек определяются вычислением.

Ясно поэтому, что первый вопрос при изучении триангуляции возникает такой: какова будет средняя квадратическая ошибка вычисленной стороны, как она выразится через ошибки наблюдений? Определим среднюю квадратическую ошибку стороны  $a_k$ , а затем укажем дальнейшие заключения, к которым приводит вывод этой ошибки. Стороны  $a_1, a_2, a_3 \dots a_k$ , через которые собственно проходят вычисления при переходе от  $b$  к  $a_k$ , называются *связующими* сторонами; остальные стороны:  $c_1, c_2, \dots c_k$  называются *промежуточными*.



Прежде всего сделаем самое вычисление стороны  $a_k$  по тем данным, которые получились в результате составления сети.

$$a_1 = \frac{b \sin A_1}{\sin B_1}; \quad a_2 = \frac{a_1 \sin A_2}{\sin B_2} = \frac{b \sin A_1 \sin A_2}{\sin B_1 \sin B_2};$$

$$a_3 = \frac{b \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3}{\sin B_1 \sin B_2 \sin B_3} \text{ и т. д.}$$

$$a_k = \frac{b \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3 \dots \sin A_k}{\sin B_1 \sin B_2 \sin B_3 \dots \sin B_k}$$

Чтобы скорее прийти к нужным выводам, прологарифмируем обе части полученного равенства:

$$\lg a_k = \lg b + (\lg \sin A_1 - \lg \sin B_1) + (\lg \sin A_2 - \lg \sin B_2) + \dots + (\lg \sin A_k - \lg \sin B_k);$$

Обозначим слагаемые правой части, заключенные в скобки, чрез  $Q_1, Q_2, Q_3 \dots Q_k$ , тогда

$$\lg a_k = \lg b + Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_k$$

Черт. 40.

Имея в виду, что левая часть этого равенства есть функция  $a_k$ , а в правой — слагаемые друг от друга не зависят (если только в цепи треугольников наблюдались лишь углы, помеченные на черт. 40), напомним, что ср. квадрат. ошибки левой и правой части, на основании теоремы способа наименьших квадратов об ошибках функции, представятся так:

$$\frac{m^2 a_k}{a_k^2} = \frac{m^2 b}{b^2} + m^2 \frac{1}{Q_1} + m^2 \frac{1}{Q_2} + \dots + m^2 \frac{1}{Q_k} \quad (1)$$

Теперь мы видим, что для определения  $m_{a_k}$  нам нужно найти  $m_{Q_1}, m_{Q_2}, \dots, m_{Q_k}$ . В виду полного однообразия в образовании этих  $Q$  нам достаточно определить лишь  $m$ , а затем, давая в найденном выражении  $m$  букве  $k$  последовательно значения 1, 2, 3, ...,  $k$ , найдем и  $m_{Q_1}, m_{Q_2}, \dots$ ; имеем:

$$Q_1 = \lg \sin A_1 - \lg \sin B_1; \quad Q_2 = \lg \sin A_2 - \lg \sin B_2 \text{ и т. д.}$$

$$Q_k = \lg \sin A_k - \lg \sin B_k$$

Мы видим, что  $Q_k$  есть функция  $A_k$  и  $B_k$  и, конечно, если бы  $A_k$  и  $B_k$  были друг от друга независимы, то мы сейчас-же определили бы  $m_{Q_1}$



Но вопрос здесь усложняется несколько тем, что  $A_k$  и  $B_k$  не независимы друг от друга. Действительно, при вычислении сторон сети фигурируют уже уравновешенные углы и, следовательно, в то время как наблюдаемые величины углов (обозначим их в отличие:  $A'_k, B'_k, C'_k$ ) совершенно не зависят друг от друга, уравновешенные  $A_k, B_k, C_k$  связаны условием:  $A_k + B_k + C_k = 180^\circ$  \*).

Но уравновешенные углы можно рассматривать, как функции измеренных, и  $Q_k$  — функцию уравновешенных углов, при определении ее средней ошибки можно представить, как сложную функцию измеренных углов. Наметив путь вывода, сделаем его.

Положим для простоты, что в каждом треугольнике невязка  $v$  распределяется поровну на все три угла, т. е. что последние равноточны.

Тогда имеем:

$$A'_k + B'_k + C'_k = 180^\circ + v$$

$$A_k = A'_k - \frac{v}{3} = A'_k - \frac{A'_k + B'_k + C'_k - 180^\circ}{3} = \frac{2}{3}A'_k - \frac{B'_k + C'_k}{3} + 60^\circ = f_1(A'_k, B'_k, C'_k)$$

$$B_k = B'_k - \frac{v}{3} = \frac{2}{3}B'_k - \frac{A'_k + C'_k}{3} + 60^\circ = f_2(A'_k, B'_k, C'_k) \quad (2)$$

$$C_k = C'_k - \frac{v}{3} = \frac{2}{3}C'_k - \frac{A'_k + B'_k}{3} + 60^\circ = f_3(A'_k, B'_k, C'_k)$$

$$Q_k = -lg \sin A_k - lg \sin B_k = f(A'_k, B'_k, C'_k)$$

А посему, применяя теорему об ошибке функции нескольких независимых аргументов:

$$m^2_{Q_k} = \left(\frac{\partial Q_k}{\partial A'_k}\right)^2 m^2_{A'_k} + \left(\frac{\partial Q_k}{\partial B'_k}\right)^2 m^2_{B'_k} + \left(\frac{\partial Q_k}{\partial C'_k}\right)^2 m^2_{C'_k} \dots \quad (3)$$

Имея в виду, что функция  $Q_k$  — сложная, именно  $Q_k$  есть функция  $A_k$  и  $B_k$  а последние в свою очередь суть функции  $A'_k, B'_k, C'_k$  можем написать:

$$\frac{\partial Q_k}{\partial A'_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial A_k} \cdot \frac{\partial A_k}{\partial A'_k} + \frac{\partial Q_k}{\partial B_k} \cdot \frac{\partial B_k}{\partial A'_k}$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial B'_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial A_k} \cdot \frac{\partial A_k}{\partial B'_k} + \frac{\partial Q_k}{\partial B_k} \cdot \frac{\partial B_k}{\partial B'_k} \quad (4)$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial C'_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial A_k} \cdot \frac{\partial A_k}{\partial C'_k} + \frac{\partial Q_k}{\partial B_k} \cdot \frac{\partial B_k}{\partial C'_k}$$

Все частные производные, входящие в правые части равенств (4), легко найдутся из равенств (2)

$$\frac{\partial Q_k}{\partial A_k} = ctg A_k; \quad \frac{\partial Q_k}{\partial B_k} = -ctg B_k$$

$$\frac{\partial A_k}{\partial A'_k} = \frac{2}{3}; \quad \frac{\partial B_k}{\partial A'_k} = -\frac{1}{3};$$

$$\frac{\partial A_k}{\partial B'_k} = \frac{1}{3}; \quad \frac{\partial B_k}{\partial B'_k} = \frac{2}{3};$$

$$\frac{\partial A_k}{\partial C'_k} = -\frac{1}{3}; \quad \frac{\partial B_k}{\partial C'_k} = -\frac{1}{3}$$

\* Вернее, нужно писать  $A_k + B_k + C_k = 180 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — сферический избыток тр-ка.

Подставляя найденные значения производных в равенства (4), найдем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_k}{\partial A'_k} &= \frac{2}{3} \operatorname{ctg} A_k + \frac{1}{3} \operatorname{ctg} B_k \\ \frac{\partial Q_k}{\partial B'_k} &= -\frac{1}{3} \operatorname{ctg} A_k - \frac{2}{3} \operatorname{ctg} B_k \\ \frac{\partial Q_k}{\partial C'_k} &= -\frac{1}{3} \operatorname{ctg} A_k + \frac{1}{3} \operatorname{ctg} B_k \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя равенства (5) в равенство (3) и принимая во внимание наше допущение, что углы равноточны, т. е.

$$m = m = m = m, \text{ получим:}$$

$$A'_k \quad B'_k \quad C'_k$$

$$m^2 = \frac{2}{3} m^2 (\operatorname{ctg}^2 A_k + \operatorname{ctg}^2 B_k + \operatorname{ctg} A_k \operatorname{ctg} B_k);$$

давая в последней формуле значку  $k$  последовательно значения: 1, 2, 3 . . . . . получим:

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{2}{3} m^2 (\operatorname{ctg}^2 A_1 + \operatorname{ctg}^2 B_1 + \operatorname{ctg} A_1 \operatorname{ctg} B_1) \\ m^2 &= \frac{2}{3} m^2 (\operatorname{ctg}^2 A_2 + \operatorname{ctg}^2 B_2 + \operatorname{ctg} A_2 \operatorname{ctg} B_2) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения  $m^2, m^2, m^2 \dots \dots \dots$  в равенство (1), получим после упрощений:

$$\frac{m^2}{a^2_k} = \frac{m^2}{b^2} + \frac{2}{3} m^2 \sum_1^k (\operatorname{ctg}^2 A_n + \operatorname{ctg}^2 B_n + \operatorname{ctg} A_n \operatorname{ctg} B_n) \dots (A)$$

причем значку  $n$  нужно будет дать все значения от 1 до  $k$ .

Легко сообразить теперь и ср. кв. ошибку промежуточной стороны  $c_k$ . Из последнего треугольника (черт 40):

$$c_k = \frac{a_{k-1} \sin C_k}{\sin B_k} = \frac{b \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3 \dots \sin A_{k-1} \sin C_k}{\sin B_1 \sin B_2 \sin B_3 \dots \sin B_k}$$

Мы видим, что выражение  $c_k$  составляется также как и  $a_k$ —лишь последним множителем вместо  $\sin A_k$  вошел  $\sin C_k$ . Ясно, что и ср. кв. ошибка  $c_k$  напишется совершенно так же, как и ср. кв. ошибка в  $a_k$ , лишь надо будет в формуле для  $m$  поставить вместо угла  $A_k$ —угол  $C_k$ . Тогда получим:

$$\begin{aligned} \frac{m^2_{c_k}}{c^2_k} &= \frac{m^2_b}{b^2} + \frac{2}{3} m^2 \left\{ \sum_1^{k-1} (\operatorname{ctg}^2 A_n + \operatorname{ctg}^2 B_n + \operatorname{ctg} A_n \operatorname{ctg} B_n) + \operatorname{ctg}^2 C_k + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{ctg}^2 B_k + \operatorname{ctg} C_k \operatorname{ctg} B_k \right\} \dots \dots (B) \end{aligned}$$

Здесь символ  $\sum_1^{k-1}$  показывает, что в выражении, стоящем в круглых скобках,

указателю  $n$  надо дать все значения от 1 до  $k-1$ . Выражение:

$$\frac{2}{3} (\operatorname{ctg}^2 A_k + \operatorname{ctg}^2 B_k + \operatorname{ctg} A_k \cdot \operatorname{ctg} B_k)$$

называется ошибкой геометрической связи треугольника с номером  $k$ .

**13. Выгоднейшая форма треугольника.** Так как цепи или сети треугольников, которые в дальнейшем будет необходимо построить во все стороны от первоначально проложенной цепи, неминуемо будут иметь своими *исходными* сторонами как связующие, так и промежуточные стороны этой первоначальной цепи, то отсюда понятно требование, чтобы

$$\frac{m_{a_k}^2}{a_k^2} \text{ равнялось } \frac{m_{c_k}^2}{c_k^2}$$

Следовательно, должны быть равны и правые части равенств (А) и (В) § 12 т. е. после сокращений получим:

$$\operatorname{ctg}^2 A_k + \operatorname{ctg} A_k \operatorname{ctg} B_k = \operatorname{ctg}^2 C_k + \operatorname{ctg} C_k \operatorname{ctg} B_k$$

Имея еще при этом в виду, что  $A_k + C_k < 180^\circ$ , так как эти углы суть углы треугольника, получим окончательно, что

$$A_k = C_k$$

т. е. чтобы удовлетворить указанному требованию треугольники должны быть равнобедренные. Но если  $A_k = C_k$  и вообще  $A_1 = C_1, A_2 = C_2$ , и т. д., то в формуле (А) мы можем каждый угол  $B$  выразить через соответствующий  $A$ :

$$A_k + B_k + C_k = 180^\circ; \quad A_k = C_k; \quad B_k = 180^\circ - 2A_k$$

Делая такую подстановку, получим:

$$\frac{m_{a_k}^2}{a_k^2} = \frac{m_b^2}{b^2} + \frac{2}{3} m_{\sum_1^k} (\operatorname{ctg}^2 A_k + \operatorname{ctg}^2 2A_k - \operatorname{ctg} A_k \operatorname{ctg} 2A_k)$$

Теперь можем поставить такой вопрос: при каком значении угла  $A$  ср. кв. ошибка в  $a_k$  наименьшая?

Вопрос этот сводится к нахождению *minimum'a* функции

$$\begin{aligned} f &= \operatorname{ctg}^2 A + \operatorname{ctg}^2 2A - \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} 2A = \\ &= \operatorname{ctg}^2 A - \frac{\operatorname{ctg}^4 A - 2\operatorname{ctg}^2 A - 1}{4\operatorname{ctg}^2 A} - \frac{\operatorname{ctg}^2 A - 1}{2} = \\ &= \frac{3\operatorname{ctg}^4 A - 1}{4\operatorname{ctg}^2 A} = \frac{3}{4} \operatorname{ctg}^2 A + \frac{1}{4\operatorname{ctg}^2 A} \end{aligned}$$

Приравнявая нулю производную  $\frac{df}{dA}$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{df}{dA} &= -\frac{3}{2} \operatorname{ctg} A \cdot \frac{1}{\sin^2 A} + \frac{8 \operatorname{ctg} A}{16 \operatorname{ctg}^4 A} \frac{1}{\sin^2 A} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\cos A}{\sin^3 A} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin A}{\cos^3 A} = \\ &= \frac{\sin^4 A - 3 \cos^4 A}{2 \sin^3 A \cos^3 A} = 0 \end{aligned}$$

В левой части полученного равенства знаменатель бесконечности равняться не может и следовательно, необходимо, чтобы:

$$\begin{aligned} \sin^4 A - 3 \cos^4 A &= 0 \\ \operatorname{tg}^4 A &= 3 \end{aligned}$$

и определяя угол по его тангенсу, найдем:

$$A = 52^\circ 46'$$

Мы пришли, следовательно, к выводу, что наивыгоднейшая форма треугольника сети (наивыгоднейшая тем, что дает наименьшую ошибку при вычислении сторон) будет та, когда  $\angle A = \angle C = 52^\circ 46'$ .

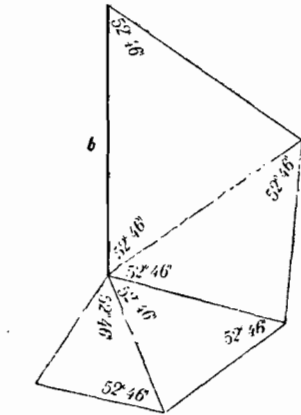
Но если строго придерживаться этой формы треугольника, то продвигаясь от базиса вперед, придется стороны треугольников все уменьшать и уменьшать.

Это очевидно из черт. 41-го. Такое прогрессивное уменьшение сторон вовсе не соответствует целям триангуляции, поэтому наивыгоднейшим по форме признается равносторонний треугольник, для которого

$$\operatorname{ctg}^2 A + \operatorname{ctg}^2 B + \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B$$

имеет числовое значение мало отличающееся от числового значения этого же выражения при

$$A = B = 52^\circ 46'$$



Черт. 41.

К тому же равносторонний треугольник имеет наибольшую площадь при данном периметре и следовательно, наименьшее число треугольников при триангулировании данной площади мы получим, если треугольники триангуляции будут равносторонние.

**14. Выводы из §§ 12 и 13.** Если представим себе тригонометрическую сеть в виде подобных треугольников, т. е. в формуле (А) § 12-го положить:

$$A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_n; B_1 = B_2 = B_3 = \dots = B_n$$

то

$$\frac{m^2_{a_k}}{a^2_k} = \frac{m^2_b}{b^2} + \frac{2}{3} m^2 k (\operatorname{ctg}^2 A + \operatorname{ctg}^2 B + \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B)$$

В первоклассных сетях  $\frac{m_b}{b}$ , т. е. относительная ошибка основной стороны меньше  $\frac{1}{300,000}$ , а величина  $m$ , т. е. средняя ошибка измеренного угла в сети может быть принята равной  $\pm 1'', 0$ .

Предполагая треугольники равносторонними? и полагая  $k$  равным 9-ти, а  $m = \pm 1'', 0 = \frac{1}{206\,000}$ , мы получим:

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot m \sqrt{k} \sqrt{\operatorname{ctg}^2 A + \operatorname{ctg}^2 B + \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B} = \frac{1}{80\,000}$$

Следовательно, уже при определении стороны девятого треугольника часть ошибки в ней, обусловленная ошибкой основной стороны сети, оказывается совершенно пренебрегаемой по сравнению с остальной частью ошибки этой

стороны, обусловленной влиянием ошибок углов в девяти треугольниках. Из изложенного ясно, что применяя формулу для  $\frac{m_{a_k}}{a_k}$  в сети I-го класса, мы можем пренебречь в правой части ее членом  $\frac{m^2}{b^2}$ , и следовательно можем написать:

$$\frac{m_{a_k}}{a_k} = \frac{2}{3} m \sqrt{k} \sqrt{\text{ctg}^2 A + \text{ctg}^2 B + \text{ctg} A \cdot \text{ctg} B} \dots (C)$$

Хотя в действительности мы никогда не имеем сети из *подобных* треугольников, но понимая под  $A$  и  $B$  средние значения связывающих углов в данной сети, можем с успехом применять формулу (C) для оценки ошибок в сторонах разных треугольников I-го класса.

Как видно, *ошибка стороны возрастает пропорционально корню квадратному из числа треугольников, отделяющих ее от основной стороны*

сети. Для стороны 25-го треугольника будем иметь  $\frac{m_a}{a} > \frac{1}{50\,000}$ ; так как

стороны треугольников первого класса заключаются обычно в пределах от 25 до 40 км, то следовательно при длине первоклассной цепи километров

в 300, последняя ее сторона определилась-бы с ошибкой большей  $\frac{1}{50\,000}$

Однако, при длине первоклассной цепи в 300 км базы измеряются как на одном, так и на другом ее конце, вследствие чего цепь прокладывается между двумя основными сторонами, что фактически ведет за собой определение всех сторон сети с ошибками, меньшими  $\frac{1}{100\,000}$ .

Стороны I-го класса, являются исходными при построении сетей II класса для которых  $m$  может быть принято равным  $\pm 2''{,}5$ ; полагая, на основании ранее сказанного, при построении сети II-го класса  $\frac{m_b}{b}$  равным

$\frac{1}{100\,000}$  увидим, что и здесь ошибки сторон будут главнейшим образом обусловлены ошибками углов в треугольниках II-го класса; поэтому и в сети II-го класса возрастание ошибок сторон идет пропорционально корню квадратному из числа треугольников, и формул (C) может быть применена для расчета ошибок.

Из формулы (C) следует, что в сетях I-го класса выгодно увеличивать размер стороны треугольника, уменьшая этим самым число треугольников. Но на самом деле при длине сторон свыше 30 км приходится строить высокие, дорого стоящие сигналы и производить наблюдение углов с недостаточной устойчивых платформ этих сигналов; с другой стороны при больших расстояниях возрастает трудность наблюдений тригонометрических знаков: из-за колебаний воздуха в нижних слоях атмосферы, удаленные знаки видны отчетливо лишь в редкие сравнительно моменты.

Все это приводит к заметному возрастанию ошибки  $m$  вместе с дальнейшим, сверх 30 км, возрастанием длины стороны треугольника. Таким образом вообще оказывается, что на ряду с заметным увеличением стоимости тригонометрических знаков и значительным увеличением времени, расходуемого на полевые работы, мы не достигаем при сторонах, больших 30 км уменьшения произведения  $m \sqrt{k}$  в формуле (C): уменьшение  $\sqrt{k}$  поглощается увеличением  $m$  вместе с дальнейшим, свыше 30 км, возрастанием

длины стороны. Наивыгоднейшим в сети I-го класса считают поэтому треугольник равносторонний со сторонами в 30 км. Такой треугольник называется *нормальным*.

**15. О базисных сетях.** В сети I-го класса основная сторона, на которой строят все последующие треугольники, обычно не измеряется непосредственно: точное измерение ее длины, вообще большей 20-ти км, требует громадной затраты времени и средств; с другой стороны лишь в исключительных случаях на местности можно найти линию в 20 км длины, которая на всем своем протяжении оказалась-бы доступной для точного *базисного* измерения, для установки на ней *базисных* приборов. Обыкновенно приходится выбрать некоторую линию от 8 до 12 км длиной, идущую по открытой и ровной, почти горизонтальной местности, не пересекающую нигде больших оврагов, или высоких валов, и эту линию—принять за подлежащую точному непосредственному измерению, или за *базис* триангуляции. Этот *базис* должен быть затем соединен посредством вспомогательных треугольников с основной исходной стороной триангуляции—так, чтобы по его длине можно было-бы надежно *вычислить* длину этой основной стороны. Система треугольников, соединяющих базис с основной стороной триангуляции называется *базисной сетью*. Задача перехода от длины в 8—12 км к длине в 20—30 км, решаемая при помощи базисной сети, требует вообще введения в эту сеть треугольников с связующими углами значительно меньшими  $60^\circ$ , что, ведет к значительному возрастанию ошибок геометрической связи и следовательно к значительному понижению точности определения искомой стороны.

Теоретически можно представить себе базисную сеть и без острых связующих углов в виде цепи равносторонних треугольников, изображенной на чертеже 42; для перехода от базиса  $ab$  к основной стороне  $AB$ , имеющей длину в 4—5 раз большую длины базиса, приходится построить в базисной сети восемь равносторонних треугольников. Но практически, такую *цепь* базисную сеть возможно осуществить лишь в исключительно редких случаях. Кроме того затрата времени и средств на *точное* обозначение на местности точек этой сети и на измерения в ней,—несравненно больше, чем в базисных сетях иной формы, и вообще не соответствует времени и средствам, которые можно отпустить на составление *базисной сети*. По этим соображениям, мы и не будем вовсе рассматривать перехода от базиса к основной стороне при помощи цепи равносторонних треугольников, а рассмотрим этот переход при помощи цепи *подобных прямоугольных* треугольников и при помощи *ромбической* сети.

Построим на базисе  $ab$  (черт. 43) прямоугольный треугольник  $abB$ : на гипотенузе  $bB$  построим треугольник  $bBC$ , подобный треугольнику  $abB$ ; на гипотенузе  $bC$  построим треугольник  $bCD$ , подобный раньше построенным и т. д. Применяя формулу (С) § 14 для оценки ошибки в гипотенузе  $a_n$  ( $n$ -го треугольника) и имея в виду, что в рассматриваемой сети  $A = 90^\circ$ , напомним;

$$\frac{m_{a_k}}{a_k} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot m \cdot \sqrt{n} \operatorname{ctg} B$$

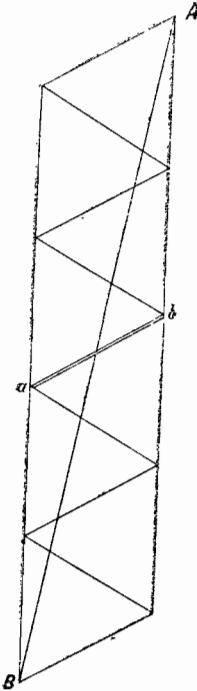
Увеличение  $v$ , даваемое базисною сетью, будет равно:

$$v = \frac{a_n}{b} = \left( \frac{1}{\sin B} \right)^n$$

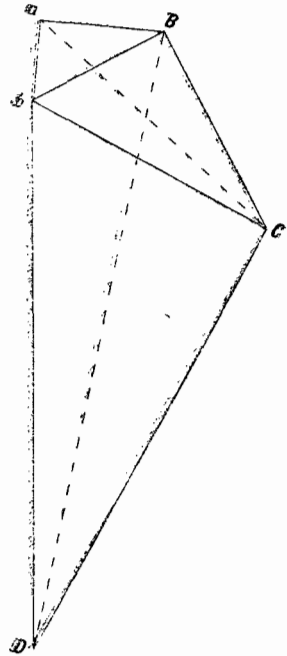
Исключая  $n$  из уравнения для  $\frac{m_{a_n}}{a_n}$  при помощи уравнения для  $v$ , будем иметь:

$$\frac{m_{a_n}}{a_n} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot m \cdot \sqrt{\lg v} \cdot \frac{\operatorname{ctg} B}{\sqrt{\lg \operatorname{cosec} B}} \dots (E)$$

При решении вопроса о выгоднейшей форме базисной сети, обычно считают, что значение  $m$  стоит в зависимости от числа вершин в базисной сети.



Черт. 42.



Черт. 43.

или—в зависимости от  $n$ ; чем *меньше* точек в базисной сети тем более длинные ряды наблюдений углов мы *можем* сделать на каждой точке сети и тем, следовательно, (*a priori*) *меньше* будет  $m$ . Если действительно задать наперед число  $S$  рядов наблюдений, которое должно быть выполнено в базисной сети, то тогда на определение отдельного угла в сети придется  $\frac{S}{3n}$

рядов измерений, и очевидно, что тогда  $m$  будет пропорционально  $\sqrt{n}$ . Принимая:  $m = k \cdot \sqrt{n}$ , где  $k$ —постоянный коэффициент, зависящий от  $S$ , формулу (E) перепишем так:

$$\frac{m_{a_n}}{a_n} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot k \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{\lg v} \cdot \frac{\operatorname{ctg} B}{\sqrt{\lg \operatorname{cosec} B}}$$

$$\frac{m_{a_n}}{a_n} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot k \cdot \lg v \cdot \frac{\operatorname{ctg} B}{\lg \operatorname{cosec} B} \dots \dots \dots (F)$$

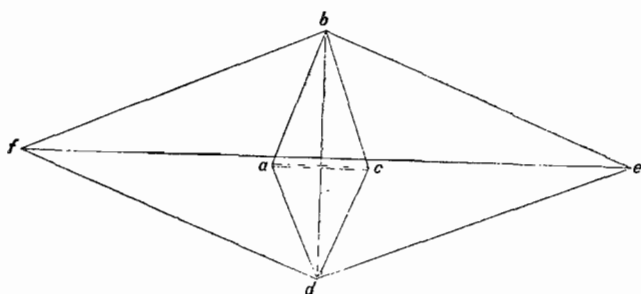
Теперь, задаваясь определенным увеличением  $v$ , можно найти то значение  $B$ , при котором наша базисная сеть будет наивыгоднейшей, т. е. приводя-

щей к определению  $a_n$  с *наименьшей ошибкой* при заданном наперед числе  $S$  рядов наблюдений в сети, или при постоянном *количестве работы*, затрачиваемой на измерения. Вопрос очевидно свелся к нахождению значения  $B$ , соответствующего *minimum* у  $\frac{ctg B}{lg cosec B}$ ; такое значение  $B$  равно  $27^\circ$ .

При  $B = 27^\circ$  и  $n = 2$ , увеличение  $v$  равно 5,3 и следовательно, при малом числе точек, переход к гипотенузе надлежащей длины (при  $b \leq 5$  км) оказывается достигнутым, причем при  $m = \pm \frac{3''}{4}$  будем иметь:

$$\frac{m_{a_n}}{a_n} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{.1}{206000} \cdot \sqrt{2} \cdot 1,96 = \frac{1}{124000}$$

Теперь перейдем к *ромбической* базисной сети. Построим на базисе  $ac$  (черт. 44) равные равнобедренные треугольники  $abc$  и  $acd$ ; на диагонали  $bd$



Черт. 44.

образовавшегося из этих треугольников ромба построим два треугольника  $bde$  и  $bfd$ , подобные треугольнику  $bac$ ; на диагонали  $fe$  образовавшегося второго ромба  $fbed$ , построим следующий ромб и т. д., до тех пор, пока не получим ромба с достаточно длинной диагональю. Допустим: 1) что в каждом из треугольников  $bac, acd, bed, bfd \dots$  мы измеряем все три угла и во всех треугольниках одинаково точно: 2) что углы  $cbd, bde, bef, \dots$  не измерялись. Будем решать теперь вопрос о том значении угла  $abc$ , при котором увеличение диагонали ромбической сети будет достигнуто с наименьшей ошибкой в длине этой диагонали. Для этого предварительно решим вопрос об ошибке в определении *высоты*  $h$  треугольника  $abc$ . Называя измеренные значения углов этого треугольника через  $A_1, B_1, C_1$ , а уравновешенные значения тех-же углов через  $A, B, C$ , имеем

$$A = \frac{2}{3} A_1 - \frac{B_1}{3} - \frac{C_1}{3} \pm 60^\circ$$

$$B = -\frac{A_1}{3} + \frac{2}{3} B_1 - \frac{C_1}{3} \pm 60^\circ$$

$$C = -\frac{A_1}{3} - \frac{B_1}{3} + \frac{2}{3} C_1 \pm 60^\circ$$

$$lg h = lg b + lg \sin C - lg \sin A - lg \sin B = lg b + f$$

$$\frac{m_h^2}{h^2} = \frac{m_b^2}{b^2} + m^2 \left\{ \left( \frac{\partial f}{\partial A_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial B_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial C_1} \right)^2 \right\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial A_1} = \frac{2}{3} ctg A - \frac{1}{3} ctg B - \frac{1}{3} ctg C$$

$$\frac{\partial f}{\partial B_1} = -\frac{1}{3} ctg A + \frac{2}{3} ctg B - \frac{1}{3} ctg C$$



$$\frac{\partial f}{\partial C_1} = -\frac{1}{3} \operatorname{ctg} A + \frac{1}{3} \operatorname{ctg} B + \frac{2}{3} \operatorname{ctg} C;$$

Помня-же, что  $A = C$ ;  $B = 180 - 2A$ , напомним:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial A_1} &= \frac{1}{3} [\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} A] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sin B} \\ \frac{\partial f}{\partial B_1} &= -\frac{2}{3} [\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} A] = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sin B} \\ \frac{\partial f}{\partial C_1} &= \frac{1}{3} [\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sin B} \\ \frac{m_h^2}{h^2} &= \frac{m_b^2}{b^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{m^2}{\sin^2 B} \end{aligned}$$

В последнем уравнении можно  $\frac{m_b^2}{b^2}$  отбросить, имея в виду выводы § 14;

обозначая-же через  $\varphi$  угол  $cbd = \frac{B}{2}$ :

$$h = \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \varphi$$

$$m_h = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot m \frac{\frac{b}{2} \operatorname{ctg} \varphi}{2 \sin \varphi \cos \varphi} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot m \frac{b}{4 \sin^2 \varphi} \dots (h)$$

Называя через  $H_1$  диагональ  $bd$  первого ромба, через  $H_2$  диагональ  $ef$  — второго ромба и т. д., имеем:

$$\begin{aligned} H_1 &= b \operatorname{ctg} \varphi \\ H_2 &= H_1 \operatorname{ctg} \varphi = b \operatorname{ctg}^2 \varphi \\ H_n &= b \operatorname{ctg}^n \varphi \dots \dots \dots (g) \end{aligned}$$

Очевидно:

$$m^2_{H_1} = m^2_{h_1} + m^2_{h_2} = 2 m^2_h$$

если под  $h_1$  и  $h_2$  понимать соответственно высоты треугольников  $abc$  и  $adc$ . На основании формулы (h) получаем:

$$m^2_{H_1} = \frac{m^2 b^2}{12 \sin^4 \varphi} \dots \dots \dots (i)$$

При дальнейшем определении  $m^2_{H_2}$  приходится иметь в виду, что ошибка в  $m_{H_2}$  складывается из двух частей: из ошибки  $\Delta_1$ , обусловленной только ошибочностью  $H_1$ ; из ошибки  $\Delta_2$ , обусловленной только ошибками углов второго ромба. Так как  $H_1$  является базисом при построении второго ромба, то очевидно, что

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= m_{H_1} \cdot \frac{H_2}{H_1} \\ \Delta_2 &= \frac{m^2 H_1^2}{12 \sin^4 \varphi} \end{aligned}$$

Следовательно, на основании (g) и (i)

$$m^2_{H_2} = \frac{m^2 b^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi}{12 \sin^4 \varphi} + \frac{m^2 b^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi}{12 \sin^4 \varphi} = \frac{2m^2 b^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi}{12 \sin^4 \varphi}$$

Нетрудно видеть, что

$$m^2_{H_3} = m^2_{H_2} \cdot \left(\frac{H_3}{H_2}\right)^2 + \frac{m^2 H_3^2}{12 \sin^4 \varphi} = \frac{3 m^2 b^2 \operatorname{ctg}^4 \varphi}{12 \sin^4 \varphi}$$

$$m^2_{H_n} = \frac{nm^2 b^2 \operatorname{ctg}^{2n-2} \varphi}{12 \sin^4 \varphi} \dots \dots \dots (k)$$

$$\frac{m^2_{H_n}}{H_n^2} = \frac{nm^2}{12 \sin^4 \varphi \operatorname{ctg}^{2n} \varphi} = \frac{nm^2}{3 (\sin 2\varphi)^2}$$

$$\frac{m_{H_n}}{H_n} = \frac{\sqrt{n} \cdot m}{\sqrt{3} \cdot \sin 2\varphi} \dots \dots \dots (l)$$

Формулой (l) мы и должны воспользоваться для нахождения того значения угла  $\varphi$ , при котором будет достигнуто в базисной сети определенное увеличение  $v$  базиса с наименьшей ошибкой в диагонали последнего ромба и при определенной затрате труда на составление сети. Эту затрату труда измеряют обычно числом  $S$  рядов угловых измерений в сети, причем (как было уже указано) при постоянном  $S$  величина  $m$  оказывается пропорциональной  $\sqrt{n}$ . Полагая:

$$m = k \cdot \sqrt{n}$$

и имея:

$$v = \operatorname{ctg}^n \varphi$$

мы преобразуем (l) так:

$$\frac{m_{H_n}}{H_n} = \frac{k}{\sqrt{3}} \frac{\lg v}{\sin 2\varphi \cdot \lg(\operatorname{ctg} \varphi)} \dots \dots \dots (m)$$

Так как  $k$  и  $v$  должны считаться постоянными при сравнении между собою разных ромбических сетей с разными значениями угла  $\varphi$ , то очевидно вопрос о выгоднейшей форме ромба свелся к отысканию *minimum*'а  $\frac{1}{\sin 2\varphi \lg \operatorname{ctg} \varphi}$ ; этот *minimum* будет при  $\varphi = 16^\circ 45'$ .

При  $\varphi = 16^\circ 45'$  и при  $n = 2$  увеличение  $v$  оказывается равным одиннадцати; с этими числами при  $m = \pm \frac{3''}{4}$ , получим из (l):

$$\frac{m_{H_2}}{H_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{206000 \cdot 0,55} = \frac{1}{186000}$$

Если иметь заданное увеличение  $v$ , равное 3,5, то его можно достичь, построив один ромб с углом  $\varphi_1 = 16^\circ 45'$ ; при  $m = \frac{3''}{4}$ , величина  $\frac{m_{H_1}}{H_1}$  оказывается в такой базисной сети равной  $\frac{1}{268000}$ .

В предыдущих выводах мы находим выгоднейшую форму базисной сети данного вида при условии достижения определенного увеличения базиса при постоянной затрате труда на угловые измерения. Сравнивая между собою сети разного вида, мы видим, что в ромбической сети можно достигнуть

заметно лучших результатов, чем в сети из прямоугольных подобных треугольников. Ромбическая сеть при  $\varphi = 16^\circ 45'$  считается *наивыгоднейшей*.

Так как измерение угла с средней ошибкой  $\pm \frac{3''}{4}$  достигается в современных работах, то на основании выше сделанных расчетов заключаем, что увеличение базиса в три с половиной раза может быть достигнуто из базисной сети в виде ромба с ошибкой около  $\frac{1}{270000}$ .

В действительных работах базисные сети имеют чрезвычайно разнообразные формы, далеко отступающие вследствие местных условий от рассмотренных выгоднейших форм; чертежи 45 и 46, на которых изображены Кенигсбергская и Боннская базисные сети, ясно иллюстрируют эти отступления. Но с другой стороны в действительных работах в базисных сетях измеряют углы по возможности между всеми сторонами и диагоналями сети; в случае сети, изображенной на черт. 43 были бы,



Черт. 45.

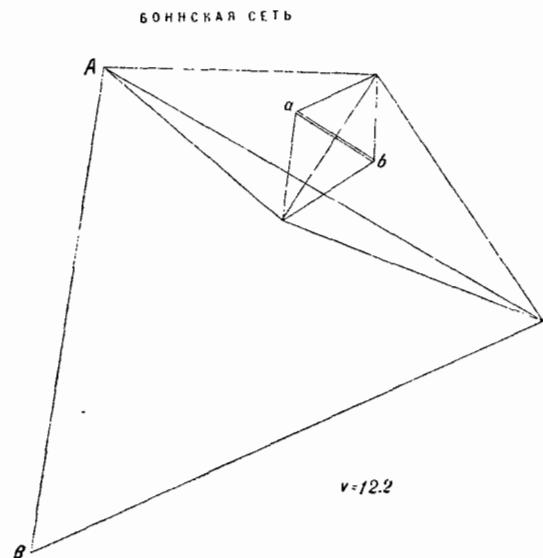
если бы это оказалось возможным, измерены не только три угла в каждом из треугольников  $abB$ ,  $bBC$ ,  $bCD$ , но еще и углы  $CaB$ ,  $aCB$ ,  $bBD$ ; в случае ромбической сети были бы измерены в каждом ромбе не шесть, а восемь

углов. Эти избыточно-измеренные углы (сверх идущих в счет при выше сделанных выводах) вместе с *строгим* уравниванием базисной сети, повышают точность вывода длины основной стороны и в заметной степени компенсируют недостатки формы сети.

В разных базисных сетях, исполненных с научными целями в разных странах в прошлом столетии, основная сторона, при увеличении  $v$  от 10 до 16 раз, определялась в среднем с ошибкой около

$$\frac{1}{150000}$$

В современных базисных сетях не прибегают правда к столь большим увеличениям, а стремятся иметь  $v$  не более 4-х; следовательно в современных работах можно



Черт. 46.

ожидать определения основной стороны с ошибкой около  $\frac{1}{300000}$ .

Если теперь сопоставить эти выводы относительно точности определения из базисной сети основной стороны триангуляции с влиянием на определение

той-же стороны ошибки в непосредственно измеренном базисе, то мы приходим к важному выводу, что *измерение этого базиса достаточно всегда произвести с точностью*  $\frac{1}{800000}$ ; более высокая точность определения

базиса совершенно поглотится действием ошибок углов в базисной сети.

Первоначально идея базисной сети была разработана Швердом (в 1819 году); в 19 столетии от базисов длиной в 2—2,5 км нередко переходили к основным сторонам в 25—30 км; в настоящее время, с применением к измерениям базисов прибора Едерина, получилась возможность измерять довольно длинные базисы и вследствие этого — принять в базисных сетях увеличение только в 3—4 раза. По последней инструкции для русских первоклассных работ длина базиса должна быть не менее 7 км.

**16. Перечень работ в триангуляции.** Работы в триангуляции состоят из действий на местности и последующих вычислений. Действия на местности суть, в порядке их исполнения, следующие:

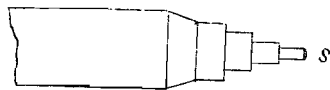
- 1) Выбор места для базиса, для пунктов базисной сети и затем для пунктов основной сети;
- 2) Заготовка леса. Постройка знаков и закладка центров;
- 3) Измерение базиса;
- 4) Определение из астрономических наблюдений широт, долгот и азимутов. согласно сказанному в § 6;
- 5) Измерение горизонтальных и вертикальных углов и попутное определение элементов приведений.  
Вычислительные работы суть следующие:
- 6) Предварительное вычисление сторон треугольников;
- 7) Вычисление величин приведений и сферических избытков треугольников;
- 8) Обработка материала, собранного на каждом пункте—то есть вывод средних наблюдаемых значений направлений на каждой станции пункта, введение в них поправок за приведение, уравнивание станций пункта;
- 9) Составление таблицы наблюдаемых направлений для всех пунктов сети;
- 10) Уравнительные вычисления в сети;
- 11) Окончательное вычисление длин сторон треугольников;
- 12) Вычисление координат пунктов сети;
- 13) Оценка точности результатов триангуляции;
- 14) Вычисление высот пунктов сети;
- 15) Составление каталога пунктов триангуляции.

## ГЛАВА IV.

### О мерах.

**17. Нормальные меры.** В Геодезии различают *рабочие и нормальные меры*; первые служат для непосредственного измерения длин линий; вторые, не употребляющиеся при полевых действиях, служат для установления—путем сравнений с ними—истинных длин рабочих мер. Нормальные меры изготовляют только из металлов (платины, бронзы, стали); рабочие меры бывают и металлические и деревянные. Надлежаще изготовленные нормальные меры являются достоянием самого последнего времени. Чем большей точности достигали в геодезических измерениях, чем выше становились с течением времени требования и жизни и науки к результатам геодезических работ, тем все более и более должна была повышаться точность определения длин нормальных мер, выражаемых в одной и той-же основной единице длин, и тем все более возрастали требования устранения всякой неопределенности из понятия об этой основной единице длины.

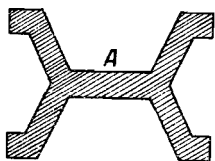
Первою по времени нормальною мерою следует считать так называемый „Перуанский тоаз“, сделанный в Париже в 1735 г. и служивший для сравнения с ним жезлов при измерении базисов в знаменитом градусном измерении в Перу; этот тоаз представляет собою плоскую железную линейку, на концах которой сделаны перпендикулярные к ее оси и доходящие до середины линейки срезы; принималось, что расстояние между плоскостями упомянутых срезов представляет собою длину, равную тоазу (1,949 метра) при температуре  $13^{\circ}$  по Реомюру (это есть средняя температура измерения базисов в Перу). Очевидно, что Перуанский тоаз есть мера *концевая* и притом изготовленная сравнительно грубо. С этого Перуанского тоаза впоследствии были изготовлены копии, послужившие затем долгое время нормальными мерами в разных государствах: для Франции был сделан платиновый концевой метр или так называемый „архивный“ метр; для России по заказу В. Я. Струве в 1821 г. был изготовлен *двойной тоаз* из ковального железа с квадратным сечением в  $1\frac{1}{2}$  дюйма и с концами в виде цилиндриков с выпуклыми полированными их конечностями (черт. 47). Эта русская мера — двойной тоаз  $N$ —хранится всегда в Пулковской Обсерватории и помещается в деревянном футляре, подпертая в двух, отстоящих на  $\frac{1}{2}$  тоаза от концов меры, точках; длина ее равна двум тоазам при температуре  $13^{\circ}$   $R$  (по определению межевого инженера А. П. Соколова, бывшего вице-директора Пулковской Обсерватории длина  $N = 3,8988162$  метра) Хотя двойной тоаз  $N$  мера и концевая, но она изготовлена весьма тщательно и благодаря тому, что рабочие меры которыми измерялись до последнего времени базисы русских первоклассных сетей, имели совершенно такое-же устройство, как и этот двойной тоаз  $N$ ,—сравнение их длин с его длиной выполнялись всегда с высокою степенью точности; вообще следует отметить, что выражение длин всех русских базисов в длине „двойного тоаза“ осуществлено с высокою точностью.



Черт. 47.

Указанные „старые“ нормальные меры имели два существенных недостатка: 1) они вели свое происхождение от грубо изготовленной меры—Перуанского тоаза; 2) они являются мерами концевыми и имеют в разных государствах весьма разнообразное устройство. Концевая мера несомненно вовсе не в такой степени обезпечена от порчи и повреждений, как мера штриховая; с другой стороны самое обозначение концов меры страдает не-

сомненно некоторою неопределенностью в концевой мере, которая вредно влияет на результаты определения длин мер при сравнениях между собою концевых мер различного устройства. Необходимость соединения триангуляций разных государств в одно целое, необходимость тщательных исследований в области вопроса об изменяемости длин мер, общее повышение требований к результатам геодезических работ—вот те причины, которые побуждали во второй половине 19-го столетия к пересмотру вопроса о нормальных мерах и привели в 1869 году Петроградскую Академию Наук к убеждению о необходимости создания новых нормальных мер. В 1875 году, на основании этой мысли Академии Наук и последующей ее разработки в Английских научных обществах, 16 государств Европы заключили конвенцию, в силу которой изготовление новых нормальных мер было поручено учрежденному в Париже Международному Бюро мер и весов. После ряда специальных исследований, Международное Бюро изготовило нормальные меры из сплава платины и иридия, придав им форму жезла длиной в 1,02 метра с поперечным сечением в виде буквы х (см. черт. 48); вес жезла около 8 фунтов.



Черт. 48.

На *нейтральной* плоскости *A* такого жезла сделаны вдоль оси жезла две параллельные черты на расстоянии друг от друга 0,2 миллиметра; воображаемая средняя линия между этими чертами и представляет продольную ось меры; на одном и на другом конце жезла имеются по три поперечных черточки, отстоящие друг от друга на 0,5 миллиметра. Расстояние между двумя средними поперечными черточками и представляет собою длину нормальной меры. Описанные новые нормальные меры называются метрами-прототипами. Их было изготовлено 31; сравнения длин метров-прототипов были исполнены чрезвычайно точно, с ошибкой меньшей  $\frac{1}{5000000}$ ; это

явилось следствием полного однообразия их устройства и того, что эти меры—штриховые. Длина прототипа № 6 при нуле градусов оказалась в точности равной прежнему платиновому „архивному“ метру Франции. Поэтому № 6 был выделен, назван *международным прототипом* и расстояние между его поперечными черточками при температуре 0° представляет собою реально ту меру, которую в настоящее время называют метром. Этот международный метр-прототип хранится всегда в Париже в Международном Бюро мер и весов.

Каждый метр-прототип хранится в несгораемом шкафу в футляре, выложенном внутри бархатом, который в свою очередь вкладывается в медную трубку с крышкою-замком. Комната для хранения должна быть изолирована от сотрясений и температура в ней в течение всего года должна быть почти постоянной. На долю России достались метры-прототипы № 11—хранящийся в Академии Наук, и № 28—хранящийся в Главной Палате мер и весов (Ленинград).

Необходимо теперь указать что длина нормальной меры изменяется: 1) при изменении расположения ее на подпорках; 2) при изменении температуры окружающей среды; 3) при перевозке; 4) вследствие перемен в ее внутреннем строении. Если длина нормальной меры была тщательно определена в некоторый момент, то для получения столь-же точно длины ее в любой момент, необходимо очевидно учитывать изменения ее длины, обусловленные той или иной из четырех указанных причин. Понятно, что первую из этих причин можно всегда считать устраненной—необходимо лишь всегда однообразно держать меру на ее подпорках. Влияние четвертой причины является пренебрегаемым, если нормальная мера изготовлена из металла с достаточно устойчивым внутренним строением и при хранении ее не подвер-

гается резким и внезапным температурным изменениям. Влияние второй причины—главное в количественном отношении, —может быть всегда учтано, если известны коэффициенты  $k$  и  $k_1$  расширения меры и ее температура  $t$  в данный момент. В самом деле, называя известную нам длину меры при температуре  $t_0$  через  $l_0$  будем иметь:

$$l_t = l_0 + kl_0 (t - t_0) + k_1 l_0 (t - t_0)^2 \dots \dots \dots (1)$$

Из сказанного ясно, что длины метров-прототипов, как хранящихся в особо-благоприятных температурных условиях и неподвергающихся никаким перевозкам, —должно считать изменяющимися лишь вследствие второй причины. Учет влияния этой причины при хорошо известном  $k$  сводится к возможно точному определению  $t$ , которое в свою очередь зависит от однородности сплава и способности меры быстро и равномерно принимать окружающую температуру.

Так как для платины  $k=0.000009$  (на градус Цельзия), то из уравнения (1) имеем:

$$dl_t = kl_0 \cdot dt$$
$$\frac{dl_t}{l_t} = k dt = \frac{9}{1000000} dt$$

т. е. для определения  $l_t$  при помощи уравнения (1) с ошибкой, меньшей  $\frac{1}{1000000}$ , температура меры  $t$  должна быть определена с ошибкой, не пре-

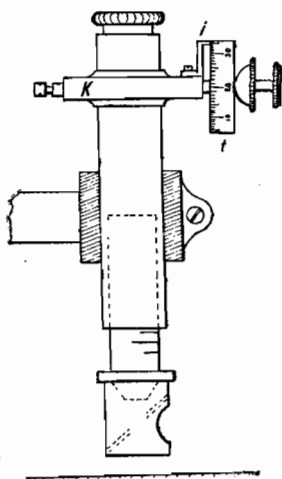
вышающей  $0^\circ,1$ . Хотя в метрах-прототипах достигнуты в высокой степени и однородность сплава, и способность меры—вследствие формы ее поперечного сечения—быстро и равномерно принимать окружающую температуру, но определение температуры жезла с ошибкой меньшей  $0^\circ,02$  представляет все-таки трудную и деликатную задачу. Другими словами, задача определе-

ния в любой момент длины меры-прототипа с ошибкой меньшей  $\frac{1}{5000000}$  —

является сложной и трудной. Только при условии погружения нормальной меры при определении ее длины в закрытую ванну, наполняемую водой, и при условии достаточного изолирования наблюдателей можно достичь определения температуры меры с ошибкой в сотую долю градуса.

Как уже указано выше метры-прототипы служат для сравнений с ними нормальных мер, входящих либо в базисные приборы, либо принадлежащих центральному геодезическому учреждениям. Нормальная мера, входящая в базисный прибор, подвергается, конечно, и перевозкам на значительные расстояния, и значительным переменам температуры. Отсюда очевидна необходимость делать время от времени сравнение нормальной меры данного базисного прибора с основными нормальными мерами (прототипами) государства. Длины рабочих мер подвержены изменениям в несравненно конечно большей степени, чем длины нормальных мер; вследствие этого сравнения нормальной и рабочих мер базисного прибора производятся вообще всегда несколько раз за время измерения базиса и вследствие этого-же в состав базисного прибора непременно всегда входит *компаратор*, т. е. прибор для удобного и точного сравнения длин рабочих мер с длиной нормальной меры. Следует отметить, что и тщательно сохраняемые меры-прототипы изменяют все-таки, хотя и в очень малых размерах, свои длины с течением времени. Это обстоятельство приводит к необходимости сравнивать между собой время от времени и основные меры (прототипы) разных государств.

**18. Сравнения мер.** В каждом компараторе, служащем для сравнения между собой *нормальных мер* имеется два микроскоп-микрометра, расстояние между оптическими (вертикально-расположенными) осями коих образует „оптический“ циркуль: сравнение длин двух нормальных мер *A* и *B* сводится по существу к измерениям двух малых разностей между длиной каждой из мер *A* и *B* и остающимся неизменным за время сравнения расстоянием упомянутого „оптического“ циркуля компаратора, причем измерения этих малых разностей производится весьма точно и легко посредством микрометров при микроскопах компаратора.

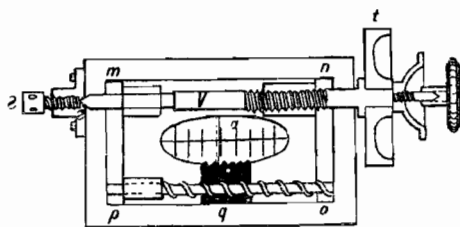


Черт. 49.

Устройство микроскоп-микрометра будет подробно описано в главе об „Угломерных инструментах“; поэтому сейчас остановимся на его устройстве в самых общих чертах, по сколько это необходимо для уяснения вопросов настоящей главы. Микроскоп-микрометр состоит из микроскопа, (черт. 49) в окулярной части которого имеется особая, несущая в себе микрометр, коробка *K*. (Черт. 49 и 50). В пазах, устроенных в боковых стенках коробки *K*, передвигается пластинка *т н о р* посредством тщательно приготовленного и надлежаще установленного микрометрического винта *V*. Этот винт, имеющий матку в выступе *n* пластинки *т н о р*, упирается своим концом в гнездо *г* и должен по

идее устройства прибора, лишь *вращаться* (без поступательного движения). Вращение винта *V* измеряется посредством барабана *l*, отсчитываемого по индексу *i*; оно должно быть строго пропорционально соответствующему ему поступательному движению пластинки

*т н о р*; эта пластинка имеет в середине вырез *a* (через него и поступают лучи от объектива) с натянутыми двумя весьма близкими нитями. Вследствие значительного увеличения микроскопа и малости расстояния между двумя упомянутыми нитями микрометра, совмещение биссектора этих нитей со штрихом некоторой тщательно-изготовленной шкалы может выполняться с высокой степенью точности. К одной



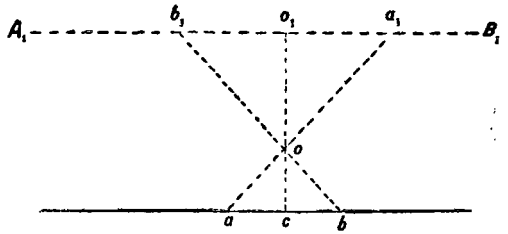
Черт. 50.

из стенок коробки *K* прикрепляется гребенка *q* с зубцами, соответствующими каждый одному обороту винта *V* и служащими поэтому именно для счета полных оборотов этого винта; один из зубцов (обычно-средний) отмечается либо дырочкой в гребенке, либо делается более удлиненным, чем остальные — эта отметка служит для грубого обозначения начала первого оборота винта *V*. Если нити микрометра находятся вблизи такого среднего, особо отмеченного зубца гребенки\*), и если в этот же момент отсчет по барабану микрометра равен точно нулю, то соответствующее положение нитей микрометра, очевидно совершенно строго фиксированное указанными условиями, называется *нормальным* или совпадающим с *нульпунктом* микроскоп-микрометра: другими словами *указателем* или *нульпунктом* микрометра считается та, лежащая в его плоскости и именно на продольной оси выреза *a*, точка, через которую

\*) т. е. вообще удалены от этого зубца менее, чем на полуоборот винта *V*.



проходит биссектор нитей при нулевом отсчете по зубчатке и по барабану, или при нормальном положении нитей. Пусть  $a$  и  $b$  штрихи некоторой шкалы, (черт. 51), рассматриваемой через микроскоп с микрометром, нити которого движутся в плоскости  $A_1 B_1$ ; если центр объектива микроскопа находится в  $o$  то изображения штрихов  $a$  и  $b$  совпадут с точками  $a_1$  и  $b_1$ , лежащими на продолжении прямых  $oa$  и  $ob$ . Пусть нульпункт микрометра совпадает с  $o_1$ ; пусть далее прямая  $o_1 o$  встречает шкалу в точке  $c$ ; наводя нити микрометра на изображения штрихов  $a_1$  и  $b_1$  и делая отсчитывания по барабану микрометра, мы очень точно определим в делениях барабана микрометра величины отрезков  $o_1 a_1$  и  $o_1 b_1$ ; пусть именно для  $o_1 a_1$  мы получили  $s_1$  делений барабана, а для  $o_1 b_1$ — $s_2$  делений барабана. Очевидно имеем



Черт. 51.

$$\frac{ac}{ab} = \frac{s_1}{s_1 + s_2} \text{ или } ac = ab \cdot \frac{s_1}{s_1 + s_2} = \mu s_1 \dots \dots \dots (2)$$

Отсчитать шкалу посредством микроскоп-микрометра—это значит определить линейное расстояние пересечения прямой  $o_1 o$  с плоскостью шкалы от ближайшего к нему младшего штриха шкалы. Обычно точка  $c$ —называется проекцией нульпункта микрометра на плоскость шкалы, хотя нужно помнить, что проектирование здесь происходит по прямой  $o_1 o$ ; поэтому же обычно под отсчетом шкалы посредством микроскоп-микрометра понимают определение расстояния проекции (в указанном смысле) нульпункта микроскопа на шкалу от ближайшего ее младшего штриха. Как видно из уравнения (2) определение отсчета  $ac$  сводится к определению  $s_1$  и  $\mu$ . Величина  $\mu$ , или так называемая „цена деления барабана“, определяется или из специальных исследований или выводится, зная  $s_1, s_2$  и величину  $m$  деления  $ab$  шкалы, по формуле:

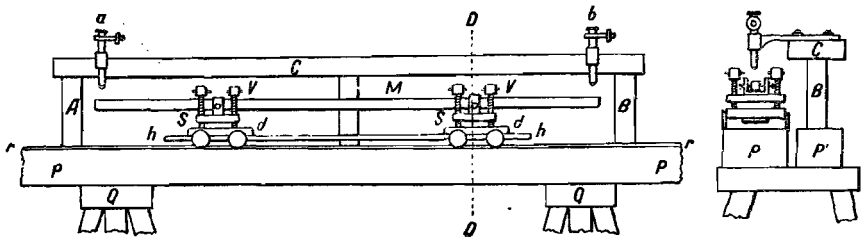
$$\mu = \frac{m}{s_1 + s_2}$$

Вследствие весьма точного наведения нитей микрометра на штрихи шкалы, рассматриваемые под значительным увеличением, а также вследствие малой величины шага винта  $V$  и совершенной пропорциональности вращения этого винта поступательному движению нитей микрометра, отношение

$\frac{s_1}{s_1 + s_2}$  определяется весьма точно, и микроскоп-микрометр дает возможность отсчитывать шкалы с чрезвычайно малыми—лишь в долях микронов—ошибками.

Компаратор простейшего устройства изображен на чертеже 52; он состоит: 1) из двух параллельно расположенных друг с другом массивных деревянных брусев  $P$  и  $P^1$ ; брус  $P^1$  несет солидные стойки  $A$  и  $B$ , с которыми в свою очередь весьма прочно соединена толстая доска  $C$ ; к этой доске наглухо привинчиваются в желаемом расстоянии два микроскоп-микрометра  $a$  и  $b$ ; 2) из двух тележек  $d, d$ ,двигающихся по рельсам  $r$  бруса  $P$  и несущих

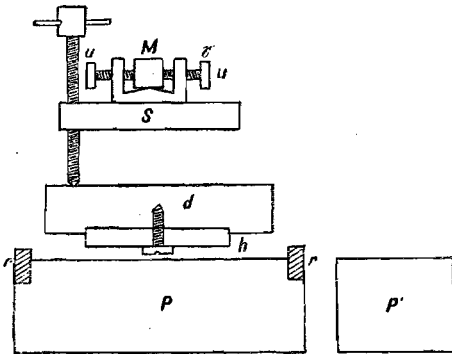
щих на себе два треножника  $V V$ ; (доской  $h h$  эти две тележки соединяются в одну каретку-платформу, служащую для укладки на ней нормальной меры  $M$ ).



Черт. 52.

Каждая тренога  $V V$  состоит из имеющего форму буквы  $T$  основания  $S$  и из трех, пропущенных через это основание, винтов с вертикальными стержнями (на черт. 52 показаны в каждой треноге лишь два из этих винтов, третий же винт обозначен в боковом разрезе на черт. 53); основание треноги  $S$  имеет на себе корытце, на которое во время сравнения и укладывается нормальная мера  $M$ ; через стенки корытца идут два винта  $u$  с горизонтальными стержнями. Подставки  $Q Q$ , на которых покоится компаратор, должны стоять на каменных столбах, выведенных с материка и совершенно изолированных от окружающих их верхних слоев почвы, и от пола здания.

разрез по  $D D$



Черт. 53.

Помещение для компаратора должно быть хорошо защищено от сотрясений; температура воздуха в этом помещении должна колебаться

в весьма малых пределах (даже в течение целых суток).

За несколько часов до сравнения сравниваемые меры должны быть внесены в помещение, занимаемое компаратором, и вынуты из их футляров. Самое сравнение двух *штриховых* мер  $M$  и  $N$  происходит следующим образом. Два наблюдателя укладывают на треноги  $V V$  меру  $M$  и продвигая платформу  $h h$ , а также действуя винтами треног  $V V$  для грубой регулировки меры по высоте и азимуту, устанавливают концевые штрихи меры на продолжение осей соответственных микроскопов компаратора; затем, действуя вертикальными и горизонтальными винтами подставок  $V V$ , приводят продольную ось меры в вертикальную плоскость, содержащую оси микроскопов  $a$  и  $b$ , и одновременно дают такое положение мере  $M$  „по высоте“ при котором изображения ее конечных штрихов будут располагаться в плоскостях соответственных микрометров компаратора. После указанной установки, наблюдатели тщательно определяют температуру  $t$  меры  $M$  при помощи отсчитывания одного или нескольких ртутных термометров, имеющих при ней, и затем немедленно наводят нити микрометров на конечные штрихи меры, причем необходимо, чтобы наведения на соответственные штрихи были сделаны левым и правым наблюдателем *одновременно*. Записав отсчеты по барабанам

микрометров, наблюдатели еще раз определяют температуру меры  $M$  а затем, на место ее укладывают на компаратор другую, сравниваемую с ней меру  $N$ . Установка  $N$  приходится в общем указанным уже путем, но почти всегда при окончательной установке этой меры, умело действуя в разные стороны двумя расположенными параллельно оси компаратора вертикальными винтами одной из треног  $VV$ , достигают совмещения изображения левого конечного штриха меры  $N$  с биссектором нитей микроскопа  $a$ , наведенных ранее на левый конец меры  $M$  и оставшимся без изменения. Отсчитав температуру  $t_n$  меры  $N$ , наводят следовательно нити только правого микроскопа  $b$  на правый конечный штрих меры  $N$ , причем второй наблюдатель следит за неизменностью совмещения биссектора нитей микроскопа  $a$  с правым конечным штрихом меры; затем следует вторичное определение температуры меры  $N$ .

Пусть на чертеже 54  $c$  и  $c_1$  представляют „проекции“ (в указанном ранее смысле) нульпунктов микроскопов  $a$  и  $b$  на плоскости меры  $M$ ; пусть конечные штрихи этой меры совпадают с  $m$  и  $m_1$ ; назовем через  $\mu$  цену деления барабана микрометров компаратора.



Черт. 54.

Нередко микрометр устраивается так, что при движении нитей микроскопа вправо от нульпункта мимо индекса  $i$  барабана микрометра идут все возрастающие деления. Тогда, если точка  $m$  приходится *левее* точки  $c$ , то отсчет  $S_3^M$ , сделанный по микрометру при наведении его нитей на точку  $m$ , прямо и выразит в делениях барабана отрезок  $cm$ . Очевидно, при движении нитей от  $c_1$  к  $m_1$  будет возрастать счет *отрицательных* оборотов, причем для получения отрезка  $c_1 m_1$  придется сосчитать число полных в нем оборотов барабана и прибавить к нему *дополнение* отсчета по барабану до полного числа  $n_0$ , нанесенных на его окружности делений. Чтобы не иметь дела с отрицательными оборотами и не брать дополнений отсчета по барабану до  $n_0$ , условливаются считать в нульпункте (того и другого микрометра)  $20$  оборотов ( $20'$ ). Тогда очевидно отрезок:

$$cm = (S_3^M - 20') \mu.$$

Если же отсчет по микрометру правого микроскопа при наведении его нитей на точку  $m_1$  был  $S_n^M$ , то очевидно:

$$c_1 m_1 = (20' - S_n^M) \mu.$$

Называя чрез:  $l^M$  и  $l^N$  длины мер  $M$  и  $N$  при температурах  $t_m$  и  $t_n$ , отсчитанных на компараторе; чрез  $k_m$  и  $k_n$  — коэффициенты их расширений; чрез  $l_o^M$  и  $l_o^N$  — длины тех-же мер при температуре  $t_o$ , — имеем теперь:

$$cm = l_o^M + k_m l_o^M (t_m - t_o) - c_1 m_1 - cm$$

$$cc_1 = l_o^M + k_m l_o^M (t_m - t_o) + (S_n^M - S_3^M) \mu$$

Если отсчеты микроскопов, при наблюдении меры  $N$ , были: — на левом заднем —  $S_3^N$  и на правом переднем  $S_n^N$ , то:

$$cc_1 = l_o^N + k_n l_o^N (t_n - t_o) + (S_n^N - S_3^N) \mu$$

Отсюда:

$$l_o^M = l_o^N + k_n l_o^N (t_n - t_o) - k_m l_o^M (t_m - t_o) + \\ + (S_n^N - S_s^N) \mu - (S_n^M - S_s^M) \mu \dots \dots \dots (3)$$

Если цены делений микроскопов неодинаковы, что бывает почти всегда, то называя их соответственно чрез  $\mu_s$  и  $\mu_n$ , получим более точную формулу:

$$l_o^M = l_o^N + k_n l_o^N (t_n - t_o) - k_m l_o^M (t_m - t_o) + (S_n^M - S_s^N) \mu_s - (S_n^M - S_n^N) \mu_n (4)$$

Определяя отсюда длину рабочей меры  $M$  при температуре  $t_o$ , имеем далее возможность впоследствии выводить ее длину при любой температуре  $t$  по уравнению:

$$l_t^M = l_o^M + k_m l_o^M (t - t_o)$$

Так как во время сравнения температуры  $t_n$  и  $t_m$  различаются ничтожно друг от друга и так как длины  $l_o^N$  и  $l_o^M$  различаются обычно в десятых долях миллиметра, то обозначая:

$$\frac{l_o^N + l_o^M}{2} = l_o$$

$$\frac{t_m + t_n}{2} = t_c = \text{температура сравнения,}$$

можем в большинстве случаев уравнение (4) переписать так:

$$l_o^M = l_o^N + l_o (t_c - t_o) (k_n - k_m) + (S_s^M - S_s^N) \mu_s - (S_n^M - S_n^N) \mu_n \dots \dots (5)$$

Уравнение (5) ясно показывает, что чем больше различие коэффициентов расширений мер  $M$  и  $N$ , тем точнее нужно определять температуру при сравнении их для вывода длины меры  $M$ . Если положить  $\mu_s = \mu_n$ , то из (3) имеем:

$$l_{t_m}^M = l_{t_n}^N + \left\{ (S_n^N - S_s^N) - (S_n^M - S_s^M) \right\} \mu$$

т. е. приближенно разность длин мер ( $M-N$ ) при температуре сравнения выражается величиной:

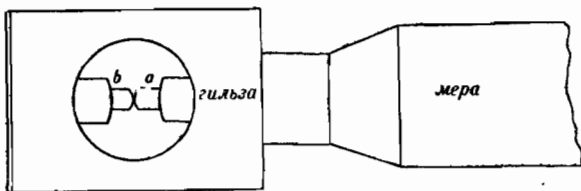
$$M - N = \left\{ (S_n^N - S_s^N) - (S_n^M - S_s^M) \right\} \mu = \left\{ (S_s^M - S_n^M) - (S_s^N - S_n^N) \right\} \mu \dots (6)$$

Если  $k_m$  является величиной неизвестной, то вопрос определения длины меры  $M$ —или вернее определение ее „уравнения“—решается путем сравнений ее с  $N$  при нескольких возможно более различающихся друг от друга температурах; нужно впрочем сказать, что на компараторе только что описанного устройства этого осуществить нельзя.

Необходимо микроскопы компаратора надлежаще установить до пользования ими; другими словами следует во-первых привести нульпункт микрометра на продолжение оси объектива микроскопа, а во вторых—установить *вертикально* оси микроскопов.

Если меры  $M$  и  $N$  имеют почти *равные* длины, но одна из них концевая, (или обе они концевые), причем концы их устроены в виде цилиндриков (черт. 47), то сравнения длин таких мер на компараторе описанного устройства выполняются в общем так же, как и в рассмотренном случае двух одинаковых по длине штриховых мер, но при этом на оконечности концевых

мер надевают небольшие гильзы (черт. 55) и наблюдают в микроскоп компаратора точку соприкосновения выпуклых поверхностей цилиндрика *a* меры и цилиндрика *b* гильзы (сидящего на стержне с пружинкой).



Черт. 55.

Если концы меры устроены не в виде цилиндров, позволяющих надеть гильзу, то срав-

нение таких мер со штриховыми может быть выполнено лишь после устройства на компараторе особых приспособлений. Вообще, сравнение штриховых мер с концевыми всегда сопровождается затруднениями: необходимо в этих случаях иметь под руками приспособления, при помощи которых на концевой мере отмечались-бы посредством механического контакта точки, совпадающие с концами меры (и удобно наблюдаемые через микроскоп). При сравнениях друг с другом двух концевых мер, приходится обычно иметь дело с двумя мерами совершенно одинакового устройства и притом входящими в состав одного и того-же базисного прибора: для сравнения в каждом таком случае служит принадлежащий именно к соответственному базисному прибору особый компаратор, значительно вообще отличающийся от рассмотренного и изображенного на черт. 52, но отвечающий вполне особенностям устройства данных мер (см. напр. ниже о компараторе В. Я. Струве). Особые осложнения конечно возникают при сравнениях двух мер, имеющих значительно различающиеся длины

„Уравнение меры“, представленное уравнением (1) § 17, содержит в качестве постоянных и долженствующих быть точно известными, три величины:  $l_0$ ,  $k$  и  $k_1$ . Определение  $k$  и  $k_1$  одновременно с  $l_0$  выполняется лишь при сравнениях мер, в центральных учреждениях: Международном бюро мер и весов в Париже, в Поверочной Комиссии в Берлине (*Normal-Eichungs Kommission*), в Главной Палате мер и весов в Ленинграде и т. п.

Компараторы этих учреждений представляют собою целые сооружения, стоящие сотни тысяч рублей. Помещение для таких компараторов нередко представляет собою здание с двойными стенами, что обеспечивает возможность иметь едва заметные колебания температуры за целый день; особые приспособления позволяют изо дня в день держать почти постоянную температуру воздуха в помещении. Компаратор устанавливается на фундаменте огромной массивности; на этом фундаменте выдвигаются массивные столбы, на которых покоится балка, несущая микроскопы. Если компаратор служит только для сравнения метровых мер, то эта балка делается из камня; на балке укрепляются тяжелые медные пластины, несущие микроскопы ММ (черт. без номера) и снабженные приспособлениями для установки микроскопов в направлении продольном, поперечном, по высоте и в отношении наклона к вертикальной линии. Если компаратор трехметровый или четырехметровый, то балка представляет собою полый металлический вал, обделанный деревом; с передней стороны в оправу балки вделывается в длину всего компаратора прямоугольная, горизонтально расположенная металлическая пластина, к которой — чрез метр друг от друга — неподвижно прикрепляются микроскопы; эта пластина носит название „направляющей“; точность отделки ее плоскости достигается таковой, чтобы уклонение на 4 метра не превосходило 0,1 миллиметра — т. е. следовательно две плоскости, содержащие одна оси первого и третьего микроскопа, а вторая — оси второго и четвертого микроскопа, не должны образовывать

угла, большего десяти секунд. (Для полного обеспечения неизменности расположения микроскопов, полая балка может наполняться водой).

Микроскопы имеют увеличения около 70, при общей длине около 70 см; деление барабана 0,1 *микрона*.

По рельсам, уложенным в фундаменте компаратора перпендикулярно к продольной оси его и симметрично относительно середины между крайними микроскопами, движется посредством электромотора четырехколесный вагон с платформой; на этой платформе имеется два футляра, отстоящих друг от друга более чем на метр.

В этих футлярах *H* и покоятся сравниваемые меры, причем если задача состоит в определении уравнения одной меры при помощи сравнения ее с мерой, уравнение которой считается известным, — или следовательно в определении разности длин этих мер при разных температурах, то обе меры находятся в одном футляре (а второй тогда остается пустым); но если поставить задачу тщательно и вполне независимо определить абсолютный коэффициент расширения нашей меры, не полагаясь на определение *разности* его с принимаемым известным коэффициентом расширения нормальной меры, то надлежит поместить эти две меры в разных футлярах, причем в футляре с нормальной мерой держать постоянную температуру, а в футляре с исследуемой мерой — температуру менять в больших пределах. По существу, при полном сравнении нужно проводить обе задачи.

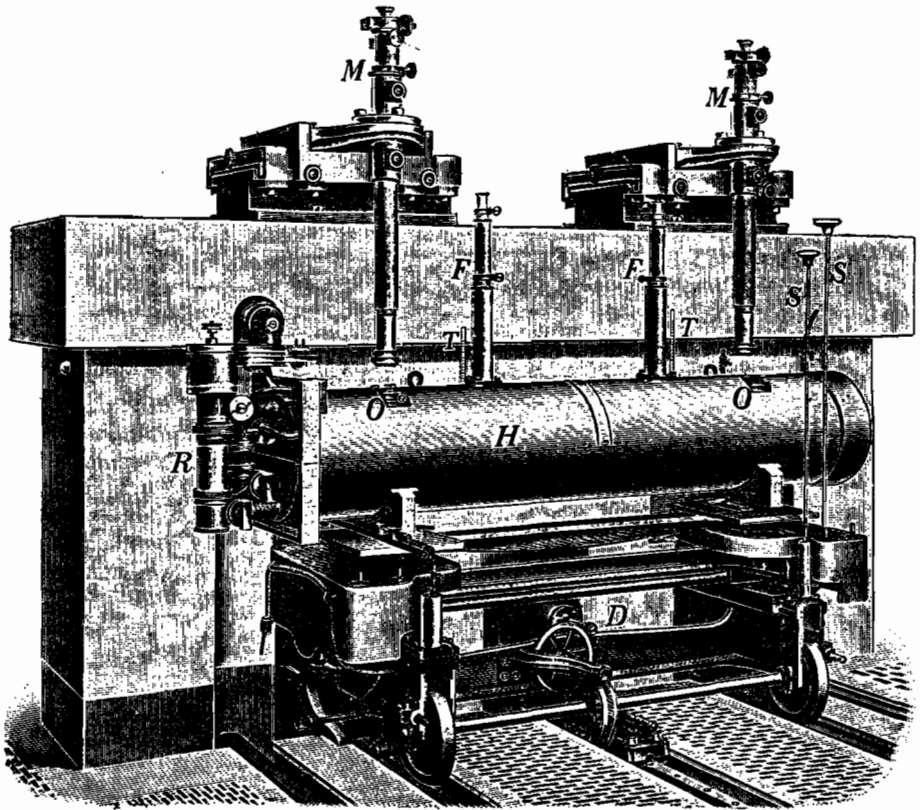
Каждый футляр, имеющий внутри приспособление для правильного помещения в нем мер, представляет собою ванну с двойными стенками, которая может наполняться водой или льдом; после наполнения ванны, ряд мешалок, действующих посредством электромоторов, устанавливают равномерность температуры жидкости, на что уходит порядочно времени; с боков и dna футляр обложен плохо проводящим тепло слоем войлока, обделанным снаружи деревом; сверху ванна закрывается рядом крышек, предохраняющих потерю или поступление тепла; для наблюдения концов мер чрез микроскоп в верхней крышке футляра оставляются маленькие отверстия, закрываемые съемными пластинками. Каждый футляр снабжен целым рядом винтов, которые позволяют легко дать ему ту окончательную установку, при которой мера займет должное положение относительно микроскопов; эти винты приводятся в движение или рукой, или посредством целой системы электромоторов, число которых в большом 4-х метровом компараторе ровно 22. В футляре же находятся и точные термометры, которые отсчитываются через отверстия в крышке футляра, особыми микроскопами, но без микрометров, до тысячных градуса. Погружение мер в жидкости дает действительно возможность определять их температуру до сотой доли градуса. Наблюдатели посредством особых приспособлений изолируются от микроскопов, чтобы теплота их тел не вызвала смещений в микроскопах.

Здесь приводится на чертеже без номера изображение одномерного компаратора Берлинской палаты мер и весов, которое может служить иллюстрацией приведенного описания

В настоящее время Главная Палата мер и весов в Ленинграде имеет 4-х метровый компаратор, устроенный по принципам вышеизложенным и дающий точность сравнения до  $\frac{1}{40000000}$ .

Необходимо геодезисту помнить, что точный учет температуры при точных сравнениях мер, учет молекулярных изменений и явлений упругости — делают задачу точного компарирования относящейся к области физики. На описанных больших компараторах геодезист, достаточно осведомленный в физике,

может получить точность в несколько миллионных долей длины, но только метролог вполне научно использует такой компаратор.



В заключение главы, приведем некоторые цифровые данные:

Коэффициенты расширения на 1° Цельзия:	
Платина . . . . .	0.0000089
Платина-Иридий . . . . .	86
Железо . . . . .	111
Сталь . . . . .	104
Красная медь . . . . .	172
Желтая медь . . . . .	189
Бронза . . . . .	180
Цинк . . . . .	330

Длины мер:

Сажень равна	2133,600 миллиметрам *)
Ярд равен	912,39180 миллиметрам
Ярд равен	36 дюймам = $\frac{3}{7}$ сажени.

\*) До введения метрических мер в С.С.С.Р. принималось 1 саж. = 2133,58086 мм.

## ГЛАВА V.

## Измерение базисов.

**19. 0 базисных приборах вообще.** В каждый *базисный*, т. е. служащий для точного измерения длины базиса, *прибор* входят: 1) нормальная мера; 2) компаратор того или иного устройства; 3) несколько — в большинстве случаев, — четыре металлических мерных жезлов, с принадлежностями к ним: для установки вдоль измеряемого базиса, для определения наклонностей их продольных осей к горизонту во время измерения, для проектирования концов жезлов на землю и т. п.

Каждый крупный ученый из числа тех, которые принимали участие в градусных измерениях, подарил геодезию своим базисным прибором, по устройству существенно отличающимся от всех иных приборов. Главным образом внимание этих ученых при конструировании ими базисных приборов останавливалось на разрешении вопроса об определении с надлежащею точностью температуры мерных жезлов во время самого измерения базиса; различие в принятых решениях этого вопроса и обуславливает главным образом различие базисных приборов, построенных разными учеными. Геодезисты разных стран пользовались всегда базисным прибором *соответственного* ученого; так в России до последнего времени базисы первоклассных сетей измерялись прибором *В. Я. Струве*, стоявшего во главе предприятия по измерению дуги меридиана от Дуная до Ледовитого Океана; в Англии до последнего времени с той же целью пользовались прибором *Кольби*, руководившего измерениями в Английской Индии; в Германии первоначально базисы основных первоклассных сетей измерялись прибором *Весселя*, стоявшего во главе градусных измерений в Восточной Пруссии, а в последнее время измеряются еще кроме того прибором Прусского Геодезического Института, построенного по указаниям покойного Директора Института, крупнейшего современного геодезиста *Гельмерта* и т. д. Несмотря на возможность значительного разнообразия в устройстве базисных приборов, каждый из них должен непременно удовлетворять следующим *общим* требованиям:

1) в составе базисного прибора должен быть компаратор, позволяющий удобно и с надлежащею точностью определять длины мерных жезлов при определенной температуре (напр. при температуре сравнения);

2) коэффициенты расширения жезлов должны быть отлично известны;

3) температура жезлов во время самого измерения должна надежно определяться;

4) установка жезлов на подставках при измерении базиса должна быть прочна и исполняться быстро, а введение осей жезлов в плоскость базиса должно производиться с удобством и совершенною точностью;

5) в базисном приборе должны быть приспособления для определения малых расстояний между смежными — предшествующим и последующим — мерными жезлами, откладываемыми по базису;

6) каждый жезл во время измерения должен быстро устанавливаться в вертикальной плоскости так, чтобы после его установки оставалась-бы лишь малая наклонность его оси к горизонту; эта оставшаяся наклонность должна точно определяться при помощи уровня;

7) в прибор должны входить приспособления и инструменты: для точного проектирования начала и конца измерений, для прекращения работы по измерению в любой момент, для определения *остатков* т. е. частей мерных жезлов, уложившихся в базисе *сверх целого их числа*.

Останавливаясь теперь (в общих чертах) на том, каким именно образом в разных базисных приборах осуществляются перечисленные выше *общие* к



или требования, обратимся прежде всего к требованию относительно точного определения температуры жезлов во время самого измерения базиса.

По способу определения температуры мерных жезлов базисные приборы могут быть разделены на приборы с простыми, биметаллическими и компенсационными жезлами.

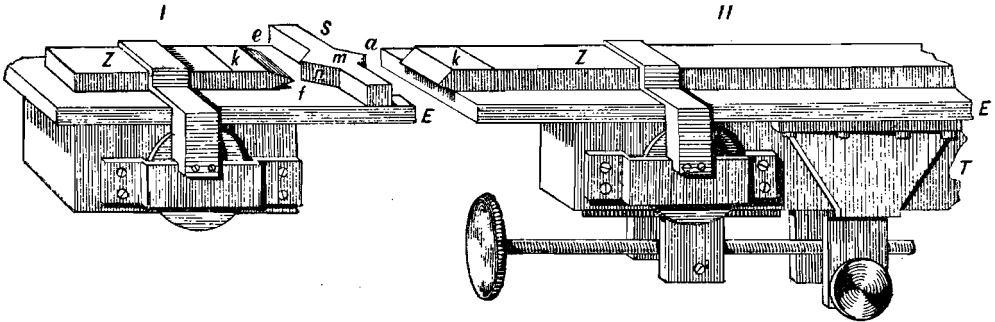
Примером прибора с простыми жезлами является русский прибор Струве, изображенный на черт. 62. В этом приборе жезлы из кованного железа, обложенные ватой и обернутые холщевой лентой, заключены в деревянные ящики, покрашенные белой масляной краской; в теле жезла, в верхней его грани и ближе к концам, имеются два углубления, в которых помещаются шарики двух ртутных термометров; шарики засыпаны железными опилками, а углубления закрыты пластинками; шкала каждого термометра, стоящая вертикально, заключена в деревянную коробку, с зеркальной передней стенкой, закрывающейся деревянной дверкой (эта дверка продвигается в пазах коробки кверху при отсчитывании термометра). Определение температуры в приборе Струве, как и во всех приборах с простыми жезлами, сводится (предполагая предварительное определение поправок термометров) к тщательному отсчету шкал имеющихся при каждом жезле ртутных термометров. При применении приборов с простыми жезлами непременно приходится считаться с несовпадением температуры ртути в термометре с истинной температурой соответственного жезла, значительно более защищенного от внешних влияний по сравнению с трубкой термометра; здесь возникает именно вопрос о возможности искажения результата измерения базиса систематической ошибкой вследствие указанного несовпадения отсчитываемых по термометрам температур с истинными температурами жезлов. Вопрос о возможных размерах такой систематической ошибки должно считать *перешенным окончательно*: выводы, сделанные Бесселем при измерениях в Восточной Пруссии, послужили основанием для западно-европейских геодезистов считать эту систематическую ошибку весьма значительной, и простые жезлы—даже непригодными для точных измерений, хотя результаты Бесселя—как это теперь выяснилось—далеко не обладают надежаской для обоснования указанного вывода точностью; с другой стороны в России, несмотря на значительное число измеренных прибором Струве базисов, выводы относительно размеров рассматриваемой систематической ошибки вследствие неверного определения температуры жезлов получены лишь косвенным путем и из небогатого материала; причем эти выводы оказываются противоположными западно-европейским: так В. Я. Струве считает эту ошибку сводящейся к нулю, а А. С. Васильев (из измерений на Шпицбергене) полагает ее не превышающей  $\frac{1}{450000}$  доли длины.

Можно предположительно сказать следующее: при измерениях летом, в ранние утренние часы термометр показывает температуру, весьма близкую к температуре жезла; затем по мере нагревания наружного воздуха, термометры *уходят вперед*, т. е. показывают более высокие температуры по сравнению с соответственными температурами жезлов; после полудня ящик и обертка жезла обуславливают более медленное, по сравнению с наружным воздухом, остывание меры и поэтому после полудня показания термометров оказываются *меньше* одновременных с ними температур жезлов. Эти „уходы вперед“ показаний ртутного термометра относительно истинной температуры жезла,—выражаются вообще несколькими десятками градуса. При измерениях базиса как в дополуденное, так и в после-полуденное время, мы в результате измерения получаем некоторую компенсацию односторонних ошибок, вызываемых несоответствием в показаниях ртутного термометра с истинной

температурой жезла; но эта компенсация никогда не будет полной, и остающаяся ошибка в длине базиса, конечно, имеет характер систематической ошибки—она будет вообще пропорциональна длине базиса. Несомненно, что размер этой ошибки можно существенно уменьшить, пользуясь при измерении базиса переносными ширмами, закрывающими сбоков и сверху весь одновременно устанавливаемый комплект жезлов, и надевая на коробки с термометрами крышки. Необходимо иметь в виду, что ошибка в определении температуры железного жезла на  $0^{\circ},1$  вызывает ошибку в определении длины жезла на  $\frac{1}{1100000}$  ее долю \*).

По указанным уже выше соображениям, в Западной Европе не применяют приборов с простыми жезлами, а пользуются преимущественно биметаллическими приборами. Применение принципа биметаллизма мы рассмотрим на примере базисного прибора Бесселя. Этот прибор, как и все приборы с концевыми рабочими мерами, состоит из четырех жезлов. На черт. 56 изображены: задний конец идущего впереди при изменении жезла II и передний конец жезла I, предыдущего по отношению к жезлу II. Каждый жезл состоит:

1) из двух полос—верхней *Z*—цинковой и нижней *E*—железной; цинковая полоса в приборе Бесселя первоначального устройства лежала свободно своею нижнею поверхностью на железной полосе, будучи спаяна с нею и



Черт. 56

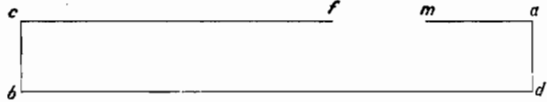
соединена винтами лишь своим левым, задним концом (и не имея более нигде никаких креплений с железной полосой); в приборах современного устройства цинковая полоса лежит на маленьких роликах, укрепленных на верхней плоскости железной полосы, соединяясь с последней, как и прежде на заднем левом конце—винтами и спайкой; концами цинковой полосы служат стальные клинья *k* с горизонтальными ребрами;

2) из стальной призмы *S* привинченной наглухо к переднему концу железной полосы и имеющей вертикальные ребра;

3) из железного основания *T*, в виде бруса с поперечным сечением около 4 см, предохраняющего цинковую и железные полосы от продольного прогиба и несущего на себе семь поперечных осей для семи пар роликов, на которые укладывается своею нижнею поверхностью полоса *E*; при помощи особого винта железная полоса *E* (вместе с цинковою) может получать на этих роликах поступательное движение. Описанные жезлы помещаются в

\* ) Можно также лабораторным путем определить коэффициенты температурного отставания жезла и затем пользуясь этими коэффициентами вводить поправки в эсчеы по термометру.

деревянных ящиках, из которых во время измерения выступают наружу лишь клинья  $k$  (и призма  $S$ ); ящики с жезлами во время измерения устанавливаются на деревянных козлах. К прибору *Бесселя*—принадлежит компаратор особого устройства и *мерный клин* (из стекла) с значением одного деления в 0,0225 миллиметра. Под длиной жезла (при некоторой температуре) в приборе Бесселя понимается расстояние горизонтального ребра \*) левого (заднего) клина цинковой полосы от переднего вертикального ребра стальной призмы; будем называть эту длину через  $L$ . Расстояние  $q$  между задним ребром  $mn$  призмы  $S$  и передним ребром  $ef$  цинковой полосы заметно изменяется вместе с изменениями температуры жезла—потому что цинковая полоса  $Z$  может свободно расширяться независимо от железной  $K$ , а коэффициент ее расширения почти в три раза более коэффициента расширения железной полосы. Измерения  $q$  упомянутым мерным клином обнаруживают изменения этой величины, соответствующие сравнительно значительным изменениям в температуре жезла. Определив точно, из особого исследования, величину  $q_0$ , соответствующую температуре  $t_0$  можно, конечно, составить уравнение, выражающее  $q - q_0$  в функции  $t - t_0$ , и из него вывести затем температуру  $t$ , соответствующую измеренному мерным клином значению  $q$ . Пусть на схематическом чертеже 57— $bd$ —изображает железную полосу жезла,  $cf$ —цинковую, а  $ma$ —призму  $S$ , причем  $e$  и  $f$  пусть соответствуют серединам горизонтальных ребер клиньев  $k$  цинковой полосы, а  $m$  и  $a$ —соответствуют ребрам  $mn$  и  $a$  призмы  $S$ . Согласно уже сделанным обозначениям имеем:



Черт. 57

$ca = L$ ;  $fm = q$ ; назовем далее: через  $l$ —длину цинковой полосы  $cf$ ; через  $Z$  ширину  $ma$  призмы  $S$ ; через  $k$  и  $k_1$ —коэффициенты расширения железа и цинка; через  $t$ —температуру цинковой и железной полос, соответствующую величинам  $L, q, l, Z$ . Допустим, что из тщательных измерений на особом компараторе, мы определили при температуре жезла  $t_0$  значения  $L_0, l_0, q_0, Z_0$ . Имеем:

$$L_0 = l_0 + Z_0$$

$$L = L_0 + k L_0 (t - t_0) = l_0 + q_0 + Z_0 + k L_0 (t - t_0)$$

$$l = l_0 + k_1 l_0 (t - t_0) + Z_0 + k Z_0 (t - t_0) + q + (q_0 - q)$$

$$l_0 + q_0 + Z_0 + k L_0 (t - t_0) = l_0 + k_1 l_0 (t - t_0) + Z_0 + k Z_0 (t - t_0) + (q - q_0) + q_0$$

$$k L_0 (t - t_0) = k_1 l_0 (t - t_0) + k Z_0 (t - t_0) + (q - q_0) \dots (1)$$

Отсюда:

$$t - t_0 = \frac{q - q_0}{k(L_0 - Z_0) - k_1 l_0} = \frac{q - q_0}{k(l_0 + q_0) - k_1 l_0}$$

$$t - t_0 = \frac{q - q_0}{(k - k_1) l_0 + k q_0} \dots (2)$$

Решение вопроса об определении  $t - t_0$  равносильно, конечно, определению длины жезла  $L$ . Определение мерным клином малой разности  $q - q_0$  может быть выполнено весьма точно, с средней ошибкой  $\pm 0,005$  миллиметра; нетрудно видеть, что при такой точности определения  $q - q_0$  и при  $l_0 = 4000$  миллиметрам, средняя ошибка определения  $t - t_0$  из уравнения (2) не пре-

\*) В дальнейшем под горизонтальным ребром клина  $k$  будет всегда пониматься ребро, лежащее в пересечении образующих клин наклонных плоскостей.

высит  $0^{\circ},06$ ; с другой стороны при одном и том же опытном наблюдателе в разности  $q - q_0$ , а следовательно и в разности  $t - t_0$ , трудно ожидать систематических влияний. Другими словами, в приборе *Бесселя* определение температуры выполняется как будто-бы с высокой степенью точности, оставляющей за собой позади точность вывода температуры в приборе *Струве*. Но все предыдущие рассуждения основаны, во-первых, на предположении отсутствия каких-либо задержек и трений в движении цинковой полосы, что вовсе не имело места в приборе первоначального устройства, а в приборах современного устройства все-таки не соблюдается в полной степени; во-вторых, на утверждении, что в каждый данный момент измерения, температуры железной и цинковой полос жезла совершенно равны между собой. В действительности, *ход* изменения температуры некоторой металлической штанги во время полевых измерений зависит от: удельной теплоты металла, его плотности, объема штанги, поверхности штанги, способности поглощения и теплопроводности металла; причем скорость *изменения* температуры штанги или—вернее—скорость воспринятия ею новой температуры окружающего ее воздуха, обратно пропорциональна первым трем из перечисленных величин и прямо пропорциональна остальным трем. В приборе *Бесселя* скорости изменений температур для цинковой и железной полос относятся друг к другу, как 1 к 0,6. Другими словами, при *возрастающей* температуре воздуха расстояние  $q$ , измеренное мерным клином, оказывается слишком малым, а при *убывающей* температуре—слишком большим. Так как погрешность в  $q$ , обусловленная неодинаковостью скоростей изменений температур, может достигать, как будто-бы, величины в  $\pm 0,025$  миллиметра, то следовательно в выводе температуры жезла во время измерения может быть сделана систематическая ошибка в  $\pm 0^{\circ},3$  причем в среднем из результатов измерений, исполненных до полудня и после полудня, влияние этих ошибок будет компенсироваться лишь отчасти. Таким образом, определение длины базиса прибором *Бесселя* с ошибкой меньшей  $\frac{1}{500000}$  становится гадательным из-за систематических погрешностей в определении температуры жезлов.

Построенные за последние 30—40 лет базисные приборы *Ибаньеса-Бруниера* (Испания), *Репольда*, (для Англии), *Прусского Геодезического Института* и др. состоят так же, как и прибор *Бесселя*, из биметаллических жезлов, построенных из меди и платины, (Прусский геодезический институт), или из стали и цинка (прибор Репольда), а *металлический термометр* осуществлен так: вблизи каждого конца жезла на платиновой полосе и на платиновой пластинке, привинченной к медной полосе, нанесены шкалы с подразделениями через 0,1 м.м, причем шкала медной полосы приходится против соответственной шкалы платиновой полосы; обе полосы соединяются (винтами) по середине их длины, не касаясь более нигде друг друга, а упомянутые шкалы отсчитываются микроскоп-микрометром; по определяемым весьма точно этим микроскоп-микрометром изменениям в относительном расположении штрихов шкал, построенных на медной и на платиновой полосе, можно определить температуру жезла во время измерения, если коэффициенты расширений полос хорошо известны и если известна из особых исследований та температура  $t$ , когда некоторые два (стоящие друг против друга) штриха шкал на медной и на платиновой полосе имели точно определенное расположение \*).

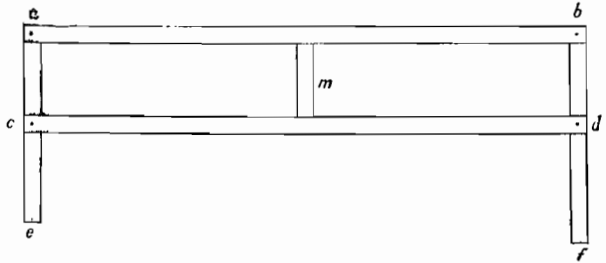
В *компенсационных* приборах жезл состоит из нескольких полос, изготовленных из разных металлов и соединенных между собой так, что рас-

\*) Подробности устройства прибора Прусского Геодезического Института можно видеть на чертежах 61, 61а, 61б, 61с.

стояние между некоторыми двумя точками жезла остается постоянным при всяких температурах. Так в приборе *Кольби*, жезл состоит из полос: медной *ab* и стальной *cd*, соединенных привинченной к ним наглухо поперечиной *m* и двумя язычками на шарнирах в *a*, *b*, *c* и *d*; расстояние между штрихами *e* и *f* (черт. 58) язычков будет очевидно постоянным, если в приборе отношения  $\frac{ec}{ca}$  и  $\frac{df}{bf}$

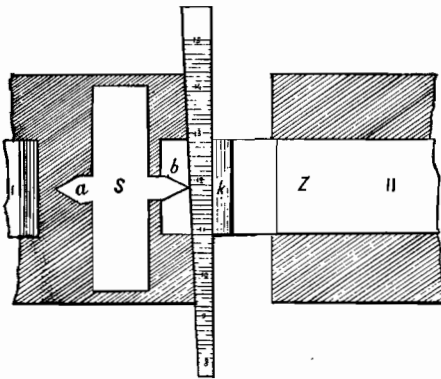
равны каждое отношению коэффициента расширения меди к коэффициенту расширения стали. Прибор *Кольби* на практике не оправдал однако возлагавшихся на него надежд.

Перейдем теперь к вопросу об определении расстояния между передним концом некоторого заднего, предшествующего жезла I и задним концом последующего, откладываемого вслед за ним при измерении базиса, жезла II.



Черт. 58

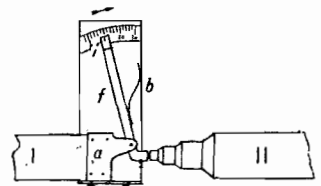
В приборе *Бесселя* для этого служит уже упомянутый выше мерный клин, всовываемый между (черт. 59) вертикальным ребром *b* стальной призмы *S* жезла I и горизонтальным ребром клина *k* цинковой полосы жезла II: это ребро служит направляющей при движении мерного клина, а отсчет происходит при точке *b*. Всовывание мерного клина вызывает некоторый сдвиг жезлов, т. е. в приборе *Бесселя* расстояние между концами смежных жезлов I и II получается всегда несколько больше, чем следует: систематическая ошибка в длине базиса, обусловленная этим недостатком прибора, иногда—для некоторых наблюдателей—может достигать весьма заметного значения (до  $\frac{1}{300000}$ ).



Черт. 59

достигать весьма заметного значения (до  $\frac{1}{300000}$ ).

В приборе *Струве* один конец жезла представляет собою цилиндрок изображенный при жезле II, на черт. 60; этот, так называемый „твердый“ конец, при измерениях всегда является *задним* концом жезла. Другой „мягкий“ конец жезла, идущий при измерениях всегда вперед, имеет следующее, изображенное на черт. 60 устройство. К жезлу привинчены пластинки *b* и *a* несущие короткую поперечную ось фьюльгеля, длинное плечо *f* этого рычага—фьюльгеля—снабжено указателем *i*, а короткое нижнее плечо—оканчивается цилиндрком такого же вида, какой имеется на твердом конце жезла; на фьюльгель давит пружина, прикрепленная другим концом к пластинке *b*. По указателю *i* фьюль-



Черт. 60

гебеля отсчитывается шкала, нанесенная на пластинке *b*: среднее деление шкалы обычно подписывается цифрой 15, а подпись делений возрастает слева на право. Описанный фольгегель с пластинками *a* и *b* помещается в особую, привинченную к жезлу, медной коробке, из которой выступает наружу лишь цилиндрок фольгегеля. При измерениях твердый конец жезла II подводится осторожно (см. ниже) до соприкосновения с цилиндрком фольгегеля заднего жезла I, причем это соприкосновение можно выполнить, благодаря действующей на фольгегель пружине, *без удара*, т. е. без сдвига жезла I (уже установленного) и без повреждения концов обоих жезлов. Изменение отсчета по индексу *i* на одно деление соответствует перемещению цилиндрика фольгегеля (вдоль оси жезла) на 0,01 парижской линии. Длиною  $l_t$  мерного жезла при некоторой температуре *t* в приборе *Струве* называется расстояние между его концами при совпадении указателя фольгегеля с делением 15. При измерении базиса довольствуются такими установками жезлов, при которых отсчеты *f* по шкалам фольгегелей лишь незначительно разнятся от 15, но за то впоследствии, при вычислении базиса, длину *l* каждого отложенного жезла вычисляют по формуле:

$$l = l_t + v(15 - f)$$

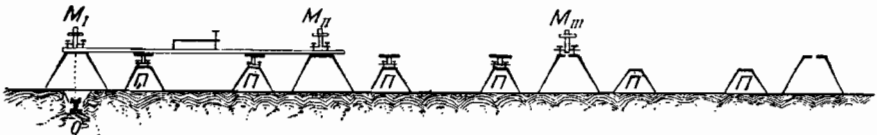
в которой *v*—цена деления фольгегеля; член  $v(15 - f)$  представляет собою, конечно, *поправку за фольгегель*.

Все базисные приборы могут быть разделены на приборы с *концевыми* жезлами и на приборы с жезлами *штриховыми* или *нарезными*.

В прибор с *концевыми* жезлами входят всегда *четыре* жезла, длиною каждый или в 4 метра, или в 2 тоаза; при измерении базиса такими приборами или определяют расстояния между концами двух смежных жезлов мерным клином, или же имеют—в виде фольгегелей разного устройства—приспособления для осуществления „механического контакта“ концов двух идущих непосредственно друг за другом по базису, жезлов I и II.

Приборы с *нарезными* жезлами состоят всегда из *одного* жезла длиною в большинстве случаев в 4 метра (а иногда в 2 метра); в этих приборах посредством жезла измеряют собственно промежутки между нульпунктами (или, вернее, проекциями их) микроскопов, устанавливаемых на солидных штативах по линии базиса в расстояниях друг от друга, почти равных длине жезла; но это же измерение можно рассматривать и как определение посредством микроскоп-микromетра расстояния переднего штриха жезла при *n*-овом отложении его по базису от заднего штриха того же жезла при *n*-1-ом отложении жезла, предполагая полную неподвижность микроскопа за время переноса жезла из *n*-го в *n* + 1-ое положение.

На черт. 61 схематически изображено измерение базиса прибором с нарезным жезлом: вдоль базисной линии устанавливают сперва штативы



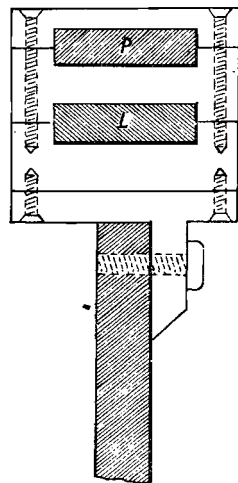
Черт. 61.

II число которых обычно равно восьми; затем устанавливают микроскоп  $M_I$  так, чтобы его ось была бы вертикальна, а нити были бы направлены на начало базиса *O* (на „точку“ в базисном центре); после этого устанавливают второй— $M_{II}$  и третий— $M_{III}$  микроскопы—так, чтобы их оси были бы вертикальны, находились бы в вертикальной плоскости базиса

и отстояли-бы: ось второго микроскопа от оси первого и ось третьего—от оси второго—на расстояние почти совпадающее с длиной жезла;\*) далее следует установка жезла—пользуясь подставками штативов *II* так, чтобы в микроскопы *M<sub>I</sub>* и *M<sub>II</sub>* можно было-бы точно наблюдать штрихи шкал на концах меры. После наведения нитей микроскопов на эти штрихи и отсчетов по шкалам и по барабанам, жезл переносится далее по линии базиса и устанавливается для отсчитывания его посредством микроскопов *M<sub>II</sub>* и *M<sub>III</sub>*; за время этой второй установки жезла и его отсчитывания микроскопами *M<sub>II</sub>* и *M<sub>III</sub>*, микроскопы *M<sub>I</sub>* и *M<sub>II</sub>* должны неизменно сохранять свое положение, по окончании-же этого отсчитывания—микроскоп *M<sub>I</sub>* переносится на утроенную длину жезла вперед и надлежаше устанавливается, а затем следует перенос жезла, установка его и отсчеты по микроскопам *M<sub>III</sub>* и *M<sub>I</sub>* и т. д. (если при некоторой установке жезла оказывается, что передний микроскоп стоит слишком высоко или низко, то этот недостаток установки микроскопа легко устраняется передвижением его в обоях подставки). Приборами с нарезными жезлами являются базисные приборы *Ибаньес-Бруниера*, *Прусского Геодезического Института*, *Ренсольда*; во всех этих приборах—как уже указано выше—жезлы биметаллические.

На черт. 61а изображен общий вид базисного прибора *Прусского Геодезического Института*, а на черт. 61в слева показано устройство жезла в поперечном разрезе, а справа — поперечный разрез его концевой части.

Жезл состоит из платиновой полосы *P* длиной 4 метра, с поперечным сечением  $5 \times 21$  мм; и медной полосы *L*—тех-же размеров; обе полосы разделены свободным пространством, не касаются друг друга, и медная лежит ниже платиновой на 7 мм. Массивная железная штанга, показанная в поперечном разрезе на черт. 61с, имеющая длину в 4 метра, несет на себе обе полосы *P* и *L*, причем каждая из них лежит на 14 роликах, отстоящих друг от друга на 0,31 м и тщательно отрегулированных по высоте (подставки для роликов, конечно, выведены от железной штанги). На конце, к медной полосе *L* (черт. 61в) привинчен наглухо выступ *C* из меди, а в платиновой полосе *P*—сделано отверстие, в которое входит платиновая часть *b*, приделанная к выступу *C*; между краями *b* и краями отверстия в полосе *P* имеется едва заметный промежуток, который не препятствует свободно расширяться полосам *P* и *L*; на верхней плоскости части *b* и на пластине *P* близь *e* нанесены штрихи чрез 0,1 мм, которые и отсчитываются через микроскоп. Медная *L* и платиновая *P* полосы соединяются друг с другом лишь по середине; это соединение показано на черт. 61с.

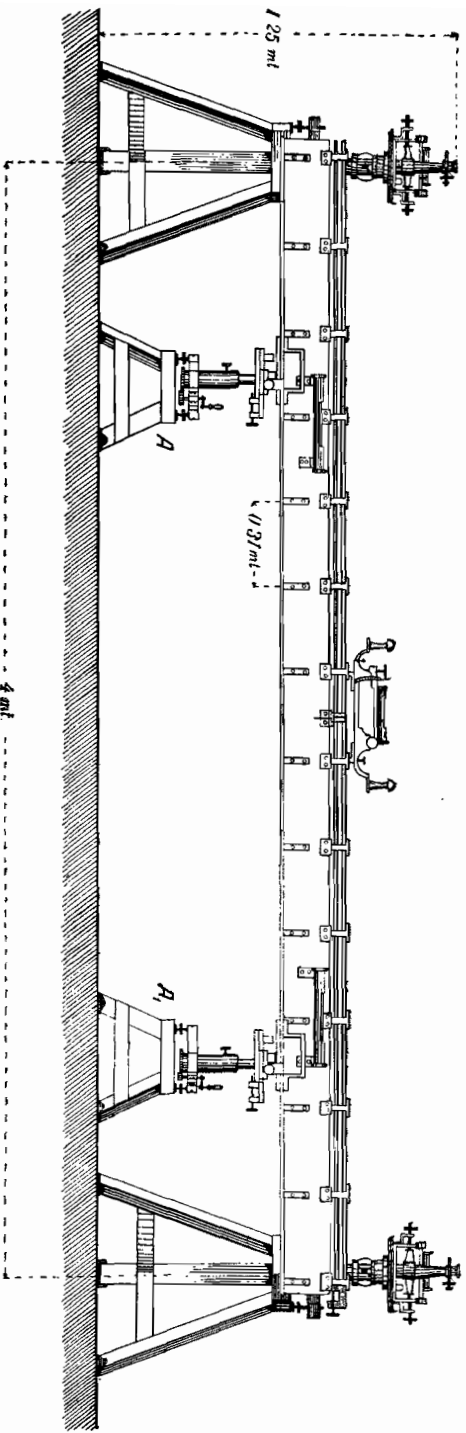


Черт. 61с.

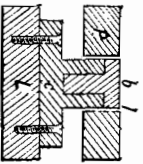
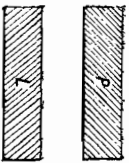
При измерении пользуются особым устройством ширмами, которые защищают жезл от непосредственного действия солнца. В качестве принадлежности, в базисный прибор входит особый инструмент, служащий для установки микроскопов точно в вертикальной плоскости базиса.

Надлежит теперь остановиться несколько на вопросе об установке жезлов во время измерения базиса по азимуту и на определении наклон-

\*) Эти установки осуществляются благодаря сложному устройству подставки, несущей микроскоп и состоящей из двух частей: верхняя часть движется по нижней в горизонтальной плоскости, в двух перпендикулярных направлениях.



Черт. 61а.





ностей продольных осей жезлов к горизонту. Называя угол наклона оси жезла через  $i$ , легко получаем, что относительная ошибка  $\delta$  в длине жезла, обусловленная ошибкой  $di$  в определении  $i$  равна  $\text{Sin } i \, di$ ; величина  $di$  складывается всегда из систематической части  $db$  и чисто случайной части  $dc$ . Нетрудно видеть, что относительная ошибка  $\Delta$  в общей длине базиса, обусловленная ошибками в  $i$  равна:

$$\Delta = \sqrt{\text{Sin}^2 i_m \cdot db^2 + \frac{\text{Sin}^2 i_m dc^2}{n}}$$

причем  $n$  — есть число всех отложенных жезлов по базису, а  $i_m$  — среднее значение из всех  $i$ .

При достаточно длинном базисе—напр. в 6—7 км—член выражения для  $\Delta$ , содержащий делителем  $n$ , становится пренебрегаемым по сравнению с первым членом этого выражения, и поэтому можно положить:

$$\Delta = \text{Sin } i_m \cdot db$$

Если потребовать, чтобы  $\Delta$  была бы не более  $\frac{1}{2000000}$ , что находится до известной степени в соответствии с требуемой точностью  $\left(\frac{1}{500000}\right)$  базиса—то:

$$db'' \leq \frac{206000}{2000000 \text{Sin } i}$$

Если  $i_m$  не превышает  $\frac{1}{2}^\circ$ , то  $db \leq 12''{,}4$ .

Из изложенного следует: 1) что в базисных приборах, предназначенных для измерений в первоклассных триангуляциях, необходимо тщательно определять из специальных исследований *постоянные*, входящие в вычисление каждой наклонности  $i$ : такими постоянными являются, напр. в приборе *Струве*, место нуля уровня и наклон „столиков“ (см. следующий §) к оси жезла; 2) что систематическая ошибка в определении  $i$  должна быть менее  $12''$ .

Что касается установки жезлов во время измерения по линии базиса, то для этого обычно до измерения базисов намечают при помощи теодолита ряд точек, лежащих точно на линии базиса и отстоящих друг от друга на 200—300 метров.

Употребляемый при этом теодолит должен иметь достаточно сильную трубу (с увеличением около 40), и лимб отсчитываемый микроскоп-микрометрами до пяти секунд; движение трубы такого теодолита около горизонтальной оси должно быть совершенно правильно, а выверка инструмента должна быть сделана с полной тщательностью. Становясь с теодолитом на середине базиса и направляя его трубу (с переводом ее через зенит) на отчетливо-видимые миры, установленные на концах базиса, находят на линии базиса первую вспомогательную точку, положение которой считают окончательно-установленным, если горизонтальный угол при ней отличается от  $180^\circ$  на  $2''$ — $3''$ . Пользуясь маркой, поставленной над этой первой точкой, находят таким же образом между нею и соответственным концом базиса вторую (и третью) точку и т. д.

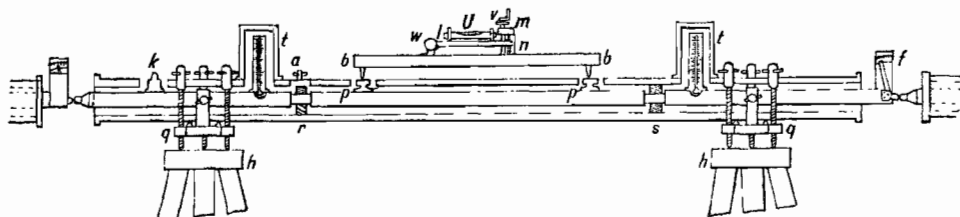
При измерении базиса, теодолит устанавливается сперва на вспомогательной точке, первой от начала измерения, и по указаниям наблюдателя при теодолите передний конец каждого откладываемого жезла вводится в линию базиса (задний же конец устанавливается непосредственно против конца уже отложенного предшествующего жезла); по измерении первого участка базиса теодолит переходит на следующую вспомогательную точку и т. д.

Если ось некоторого жезла образует угол  $\alpha$  с линией базиса, то вместо длины  $l$  этого жезла очевидно была отложена меньшая—на  $2l \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ — величина. Пренебрегая поправками вида  $2l \sin^2 \frac{\alpha}{2}$  мы сделаем в длине базиса относительную ошибку  $2 \sin^2 \frac{\alpha_m}{2} = \frac{\alpha_m^2}{2} \sin^2 1'$ , понимая под  $\alpha_m$  среднее

$$\frac{\alpha_m^2}{2} \sin^2 1' \cong \frac{1}{2\,000\,000}$$

мы получаем  $\alpha_m \cong 3',4$ ; отсюда можно вывести, что при 4-х метровой длине жезла, *разность ошибок* в установке заднего и переднего конца жезла не должна быть более четырех миллиметров. Так как четыре миллиметра с наибольшего расстояния теодолита от жезла, равного расстоянию в 300 метров между вспомогательными точками усматриваются под углом в  $3''$ , то, очевидно, что при трубе теодолита с увеличением около 40 возможно иметь  $\alpha < 3',4$ .

**20 Базисный прибор и компаратор Струве.** Как было указано выше, этот прибор состоит из четырех мерных и одного нормального жезла, изготовленных из кованого железа и имеющих длину в два тоаза при квадратном поперечном сечении около 4 см в стороне. Нормальный жезл имеет оба конца „твердые“ — т. е. оканчивается цилиндриками с тщательно полированными и слегка выпуклыми передними их поверхностями. Каждый-же мерный жезл имеет один конец твердый, а другой конец—мягкий, т. е. имеет на другом конце коробку с фьюльгелем, устройство которого уже описано выше. Жезл в ящике покоится на двух медных подставках  $s$  и  $r$  (черт. 62) в виде разборных перегородок, имеющих одна—круглое, а другая—квадратное отверстие. Места жезла, лежащие на подставках  $r$  и  $s$ , отстоят от его концов на  $\frac{1}{4}$  длины жезла; в этих местах, соответственно отверстиям перегородок  $r$  и  $s$  жезл имеет квадратное и круглое сечения, суженные по сравнению с общей толщиной жезла; через перегородку  $r$  (и верхнюю крышку деревянного ящика) пропущен винт  $a$ , по закреплении



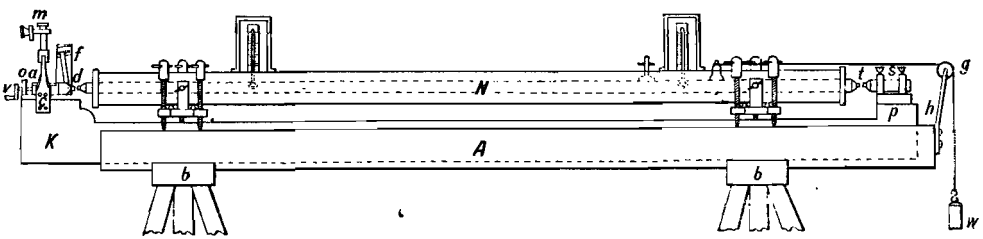
Черт.62

которого прекращается всякое движение жезла внутри ящика: благодаря указанной форме сечений суженных частей жезла при подпорках  $r$  и  $s$ , продольное вращение жезла невозможно. Вблизи перегородок  $r$  и  $s$ , в углубления в теле жезла впущены шарики двух термометров; трубки термометров  $t$ ,  $t$  выступают вверх, а шкалы их заключены в деревянные коробки со сте-

клянной передней стенкой, закрываемой выдвигной кверху деревянной дверцей; ширина коробок значительно более ширины шкал термометров. За исключением суженных мест, жезл по всей своей длине обернут ватой и обвит холщевой лентой. К жезлу припаяны еще два столика  $p$ , служащие подставками для накладывающегося на жезл уровня. Благодаря широким продольным отверстиям, сделанным в крышке ящика у стержня  $k$ , у винта  $a$  и у столиков  $p$ , а также благодаря достаточной длине суженных частей жезла у подпорок  $r$  и  $s$ , жезл может передвигаться внутри ящика по своей оси в пределах 2,5 см в ту и другую сторону. Эти передвижения производятся посредством особого ключа, надеваемого на стержень  $k$  и на стержень на ящике (не показанный на чертеже).

Уровень, ставящийся тремя ножками на столик  $p$  жезла, имеет основание  $bb$  в виде удлиненной буквы  $T$ , несущее подставку-муфту  $mn$  и маленькую колонку  $w$  с гнездом для поперечной горизонтальной оси; на эту ось одним своим концом насажена линейка  $l$ , несущая уровень  $U$ , и имеющая на другом своем конце матку для винта  $v$ . На муфте-подставке  $mn$  укреплен шкала в виде дуги с 250-ю делениями, которые отсчитываются по указателю на линейке  $l$ : цена одного деления шкалы равна примерно  $2'$ , а средняя ошибка отсчета по указателю не превышает 0.1. При определении при помощи описанного уровня наклона оси жезла, по установке его ножек на столиках вращают рукоятку при винте  $v$  до тех пор, пока пузырек уровня  $U$  не придет на середину, после чего делают отсчет  $S$  по шкале уровня. Предполагая, что всегда при измерениях уровень становится на столики так, как это изображено на черт. 62, т. е. шкалой вперед, ближе к фольгелю  $f$ , и называя чрез  $M$  место нуля на шкале, (место нуля есть отсчет на шкале уровня, когда ось уровня  $U$  располагается параллельно плоскости столиков) будем иметь, что наклонность плоскости столиков к горизонту равна  $M-S$ , если подпись делений на шкале уровня возрастает снизу вверх.

**Компаратор Струве** имеет своим основанием три расположенных параллельно друг другу, бруса  $A$ ,  $K$  и  $B$  (см. черт. 63). \*) Крайние брусья  $A$  и  $B$  служат лишь для установки на них двух медных треножников-под-



Черт. 63.

ставок, несущих на себе во время сравнения ящик с жезлом и совершенно тождественных с изображенными на черт. 62 подставками  $qq$ ; оба бруса  $A$  и  $B$  соединены наглухо с козлами  $bb$  и кроме того правые их концы скреплены поперечиной, к которой привинчена стальная пластинка  $h$  с блоком  $g$ . Центральный массивный брус  $K$  делается из дуба и не касается брусьев  $A$  и  $B$ . На левом конце этого бруса укреплены солидная медная пластинка  $O$  и колонка  $C$ , несущая микроскоп-микрометр  $m$ . Пластинка  $O$  имеет на своей верхней плоскости, по середине, продольный паз, достаточно глубокий, в котором может двигаться пластинка  $a$ ; эта последняя несет на

\*) На черт. 63 брус  $B$  закрыт бруском  $K$ .

переднем своем конце фюльгепель  $f$ , а на верхней своей горизонтальной плоскости имеет шкалу с мелкими делениями, наблюдаемую в микроскоп  $m$ . Движение пластинки  $a$  осуществляется посредством бесконечного винта  $V$ . На правом конце компаратора укреплен стальная пластинка  $p$ , несущая подставки с гнездами для стального-же цилиндра  $S$ , оканчивающегося совершенно таким же цилиндром  $t$ , какие имеются на твердых концах жезлов.

При откладывании на компараторе длины мерного жезла поступают так: отодвигают предварительно влево пластинку  $a$  с фюльгепелем и устанавливают жезл винтами при треножных подставках так, чтобы его мягкий конец пришелся-бы против цилиндрика  $t$ , а твердый против цилиндрика  $d$  фюльгепеля компаратора; малым поступательным движением жезла в ящике приводят его мягкий конец в соприкосновение с цилиндром  $t$  так, чтобы фюльгепель жезла стал-бы ровно на деление 15 и затем придвигают, действуя винтом  $V$ , пластинку  $a$  к твердому концу жезла—так, чтобы отсчет по фюльгепелю компаратора был-бы равен 15-ти. После этого наводят нити микроскопа  $m$  на штрих шкалы на пластинке  $a$ , ближайший к нульпункту микрометра, и делают отсчеты по барабану микрометра и по термометрам жезла. При откладывании на компараторе нормального жезла, он придвигается до прикосновения с цилиндром  $t$  посредством привешивания к нему гири  $W$ , едва едва способной сдвигать жезл в ящике. Придвигание-же фюльгепеля компаратора к другому концу нормального жезла, равно как и соответственный отсчет по микрометру, производятся так-же, как и для мерных жезлов. Называя для жезлов  $A, B, C, D$  и для нормального жезла  $N$  отсчеты по шкале пластинки  $a$ —т. е. расстояния нуля этой шкалы от нульпункта микрометра  $m$ , измеренные при компарировании—соответственно чрез  $a, b, c, d$  и  $n$ , будем иметь, что разности длин каждого мерного и нормального жезла при средней температуре сравнения равны соответственно  $n - a, n - b, n - c, n - d$ .

Каждый базисный прибор до его употребления должен быть тщательно исследован, т. е. должны быть определены все *постоянные* прибора, которыми приходится впоследствии пользоваться при вычислении длины базиса, и кроме того должно быть выяснено: насколько хорошо приготовлены отдельные части прибора, нет-ли каких-нибудь недостатков в соединениях их друг с другом и какие погрешности следует ожидать в выведенных из исследований величинах постоянных прибора.

В частности в приборе *Струве* должны быть выполнены такие исследования:

1) Определение цены деления барабана при микрометре  $m$  на компараторе; вывод ходовых и периодических ошибок винта этого микрометра; исследование делений шкалы пластинки  $a$  и определение средней ошибки отсчета по этой шкале, выполняемого при помощи микрометра.

2) Определение чувствительности фюльгепеля компаратора и исследование изменений в *длине компаратора* под действием тяжести  $W$  при откладывании на компараторе нормального жезла и от других причин.

3) Определение коэффициентов расширений жезлов, сравнения мерных жезлов с нормальным и вывод средней ошибки определения разностей  $n - a, n - b$  . . . (см. выше).

4) Определение цены деления фюльгепеля каждого мерного жезла. Для этого, установив жезл на компараторе, делают отсчеты по микроскоп-микрометру  $m$  при таких двух положениях жезла, при которых показания фюльгепеля его равны 13 и 17 (крайние допускаемые при измерении базиса пределы).

5) Определение поправок показаний термометров. Эта задача—вообще довольно деликатная—сводится обычно к сравнениям показаний термометров при разных температурах с одновременными показаниями нормального

термометра, поправки шкалы которого принимаются известными. При таких сравнениях пользуются прибором особого устройства, в виде большого цилиндрического сосуда с цинковой стенкой, обмотанной снаружи толстым слоем войлока; в центре дна такого сосуда укреплена стойка с широкой винтовой нарезкой снаружи и с внутренним продольным отверстием: это отверстие служит втулкой для стержня несущего на себе с'емную, могущую передвигаться по нему, раму с 10-ю гнездами для термометров (в каждом гнезде закрепляется вертикально один термометр); посредством шестерни и находящейся внизу сосуда рукоятки, стержень приводится во вращение вместе с упомянутой рамой. Поместив в гнездах рамы нормальный и исследуемые термометры, наполняют сосуд водой и вращают в течение 3—5 минут стержень вместе с держащей термометры рамой: при вращении вода отлично перемешивается (этому также немало способствует винтовая нарезка центральной стойки) и принимает во всем объеме сосуда одну и ту же температуру; после такого вращения стержня, быстро отсчитывают один за другим все термометры, начиная всегда с нормального термометра и повторяя по нему отсчет и после отсчитывания всех исследуемых термометров; само собою разумеется, что отсчитываемые места шкал термометров не находятся в воде и располагаются все в верхней части сосуда так, чтобы отсчитывание их совершалось-бы точно и легко без вынимания термометров из гнезд: для этого пользуются возможностью передвижения термометра в широких пределах в гнезде рамы и возможностью передвижений этой последней по стержню. Получив указанным образом поправки показаний термометров для нескольких температур — напр. для  $+ 8^{\circ}$ , для  $+ 12^{\circ}$ ,  $+ 16^{\circ}$ ,  $+ 20^{\circ}$ ,  $+ 24^{\circ}$ ,  $+ 28^{\circ}$ ,  $+ 32^{\circ}$ ,  $+ 36^{\circ}$  (Цельсия) — составляют посредством интерполяции табличку поправок для температур, изменяющихся от  $+ 8^{\circ}$  до  $+ 36^{\circ}$  через один градус.

6) Определение цены деления на дуге уровня и точности отсчета по этой дуге. При выполнении первой части этого исследования, прикрепляют уровень к трубе большого теодолита, (или универсала) имеющего вертикальный круг: ставя сперва трубу этого теодолита почти горизонтально, приводят на средину пузырек исследуемого уровня и делают отсчеты по его шкале и по вертикальному кругу; затем, действуя винтом  $v$  (черт. 62) уровня, изменяют отсчет по его шкале на 20—30 делений, и после этого вращением трубы теодолита достигают второйной установки пузырька уровня на средину; сделав теперь новые отсчеты по шкале уровня и по вертикальному кругу, изменяют винтом  $v$  положение линейки  $l$  еще на 20—30 делений и т. д. При выводе точности отсчета по дуге уровня, всего удобнее установить уровень на испытателе уровней (см. ниже) и изменяя главным винтом испытателя положение его линейки, измерять одновременно соответствующие этим изменениям вертикальные углы — и при помощи отсчетов на шляпке главного винта испытателя, и при помощи исследуемого уровня базисного прибора.

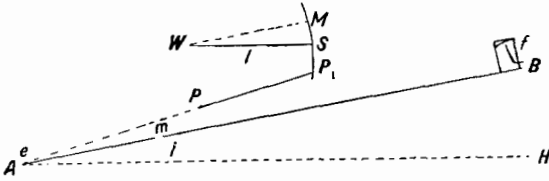
К исследованиям-же уровня в приборе *Струве* следует отнести определение места нуля  $M$  его шкалы и определение угла  $m$  между плоскостью „столиков“ и продольною осью жезла (а также и вывод точности определения этих величин  $M$  и  $m$ ). Мы видели ранее, что при обычном расположении уровня на столиках жезла, которое изображено на черт. 62 и при котором шкала уровня приходится над ближайшим к фьюльгелю столиком, наклон  $X$  плоскости столиков к горизонту равен  $M - S_1$ ; очевидно, что после перестановки уровня на столиках в противоположное положение, мы будем иметь:

$$X = S_2 - M$$

если под  $S_2$  понимать отсчет по шкале уровня в его новом положении на столиках; отсюда:

$$M - S_1 = S_2 - M \text{ или } M = \frac{S_2 + S_1}{2}$$

Будем считать искомую величину  $m$  положительной, если плоскость столиков и ось жезла расходятся в сторону флюггеля, и назовем чрез  $i$  наклонность оси жезла к горизонту. Пусть  $A$  и  $B$  (черт. 64) суть твердый и мягкий концы компаратора, с которыми соответственно совмещены мягкий  $f$  и твердый  $e$  концы жезла; если  $AH$  есть линия горизонта,  $PP_1$  — плоскость столиков,  $l$  — линейка, несущая уровень  $U$  (см. черт. 62), а  $MS$  —



Черт. 64

шкала уровня, то имеем:

$$m + i = M - S_1 \dots \dots \dots (1)$$

После перестановки уровня его ножками на столиках, будем иметь:

$$m + i = S_2 - M \dots \dots \dots (2)$$

Оставляя неизменными точки  $A$  и  $B$ , переложим жезл на компараторе и установим его так, чтобы мягкий его конец совпал бы с точкой  $A$ , а твердый — с точкой  $B$ ; пусть при этом уровень останется в положении, соответствующем ур-нию (2) — т. е. его дуга будет приходиться над столиком  $P$ . Очевидно, что при таком новом положении жезла на компараторе наклонность плоскости столиков к горизонту выразится так

$$-m + i = S_3 - M \dots \dots \dots (3)$$

если  $S_3$  есть соответствующий новому положению жезла отсчет по шкале уровня. Если теперь при втором положении жезла на компараторе (т. е. мягкий конец при  $A$ ) мы поставим уровень так что его дуга будет приходиться вновь над столиком  $P_1$ , и сделаем по этой дуге отсчет  $S_4$ , то:

$$-m + i = M - S_4 \dots \dots \dots (4)$$

Четыре отсчета по уровню:  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ , и  $S_4$ , сделанные до и после перекладки жезла на компараторе составляют один прием совместного определения величин  $M$  и  $m$ ; таких приемов исполняют всегда довольно много, так как ошибки в  $M$  и  $m$  обуславливают систематическую ошибку в определение наклонности  $i$  оси жезла. Из ур-ний (1), (2), (3), и (4) следует:

$$M = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{S_3 + S_4}{2}; \quad m = \frac{S_2 - S_1}{2} = \frac{S_4 - S_3}{2}$$

При измерении базиса уровень на жезле располагается всегда соответственно черт. 64 и следовательно для определения наклонности  $i$  оси жезла надлежит пользоваться ур-ием (1) т. е. вычислить  $i$  так:

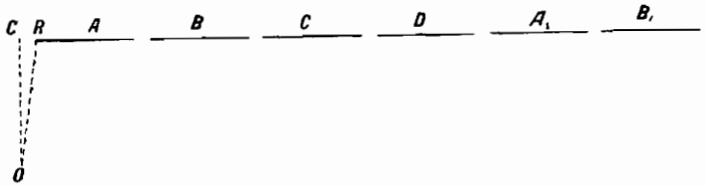
$$i = M - m - S \dots \dots \dots (5)$$

**21. Измерение базиса прибором Струве и вычисление длины базиса.** Действия по измерению базиса разделяются на: 1) *подготовительные*, заключающиеся в приготовлении линии базиса к возможно удобному испол-

нению измерений; 2) *начальные и конечные*, состоящие: в определении горизонтального расстояния заднего конца первого жезла от центра на первом конце базиса (или вернее от точки на этом центре); в измерении „остатка“ базиса, т. е. части базиса, меньшей длины жезла и равной горизонтальному расстоянию от переднего конца последнего, уложившегося еще целиком в базисе, жезла до центра на втором конце базиса; сюда же относятся действия предпринимаемые при перерыве работы на ночь или по случаю ненастной погоды; 3) *действия по самому измерению*, состоящие в непрерывном откладывании друг за другом четырех мерных жезлов *A, B, C, D*, по линии базиса. В измерении базиса участвуют четыре наблюдателя. Наблюдатель *N—1* вводит посредством теодолита откладываемые жезлы в линию базиса. Наблюдатели *N—2* и *N—3* устанавливают жезлы на треножных подставках (см. черт. 62), определяют наклонности осей жезлов и отсчитывают термометры и фюльгели. Наблюдатель *N—4* заведует расстановкой по линии базиса деревянных табуретов *hh* и установкой на этих табуретах медных треножных подставок *qq*, несущих на себе жезлы — см. черт. 62; всех табуретов (и к ним подставок) при измерении базиса употребляется десять. По указаниям наблюдателя *N—1* наблюдатель *N—4* устанавливает табуреты так, чтобы середины медных подставок под жезлы приходились бы в линии базиса; для правильной установки табуретов по расстоянию, служит особое деревянное правило с метками на концах. В каждый момент измерения восемь табуретов заняты лежащими на них жезлами, а два остальные устанавливаются впереди наблюдателем *N—4*.

Твердый конец первого жезла устанавливается над базисным центром по отвесу, а мягкий, передний конец этого же жезла вводится в базисную линию при помощи горизонтальных (боковых) винтов подставки *qq* наблюдателем *N—3* по указаниям наблюдателя *N—1*. Задний конец каждого последующего жезла устанавливается наблюдателем *N—2* против установленного уже переднего конца предыдущего жезла, а передний конец каждого последующего жезла — наблюдателем *N—3*. Уже при установке подставок на табуретках наблюдатель *N—4*, действуя их под'емными винтами, достигает того, что линия, соединяющая основания подставок, представляется либо плавною кривою — если участок базиса идет по местности с изменяющимися уклонами, либо прямою с некоторым уклоном вообще меньшим, чем уклон местности. Этим достигается то, что при укладке некоторого последующего жезла на подставки задний его конец приходится уже сам собою почти против переднего конца ранее установленного предыдущего жезла, и ось последующего жезла почти совпадает с продолжением оси предыдущего. Перенос некоторого заднего, уже отсчитанного, жезла вперед начинается всегда с того, что наблюдатель *N—2* посредством накладываемого на стержень *K* ключа (черт. 62) дает движение жезлу в ящике по направлению от переднего к заднему концу, отодвигая передний конец этого жезла от заднего конца следующего за ним жезла; после этого наблюдатели *N—2* и *N—3* поднимают осторожно ящик с жезлом и передают его рабочим, по приеме же жезла последними, наблюдатель *N—2*, действуя ключом на стержень *K*, дает обратное движение жезлу в ящике (т. е. от твердого к мягкому концу) — так, чтобы жезл занял-бы самое крайнее правое положение, закрепляет винт *a* и дает знак к переносу. Установка жезла начинается с того, что по указаниям *мало* поперечного уровня, ставящегося на задний столик, уничтожают, работая винтами подставок *qq*, поперечный скос жезла, а затем наблюдатель *N—2*, действуя под'емными и боковыми винтами задней подставки, устанавливает ось цилиндрика на твердом конце жезла по продолжению оси уже установленного предшествующего жезла; одновременно *N—3* вводит свой конец жезла в линию базиса по указаниям *N—1*.

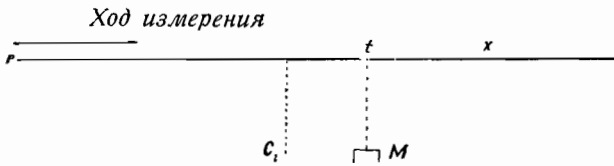
После такой первоначальной установки, наблюдатель  $N-2$ , действуя ключом, дает жезлу движение в ящике, устанавливает соприкосновение твердого конца жезла с фьюльгелем предшествующего жезла и, если нужно, несколько исправляет винтами подставки положение своего конца жезла, чтобы соприкосновение выпуклостей цилиндриков было бы центральным; одновременно наблюдатель  $N-3$  — если это оказывается нужным по указаниям наблюдателя  $N-1$  — исправляет положение переднего конца жезла.



Черт.65

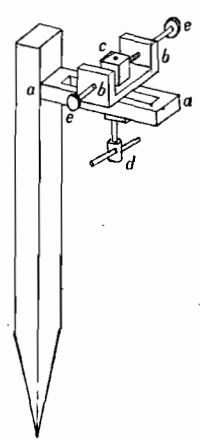
В самом начале измерения — как уже было сказано — твердый конец  $R$  первого жезла  $A$  устанавливается над базисным центром  $C$  по отвесу, причем, конечно, всегда будет малое уклонение  $R$  от  $C$ . Для определения этого расстояния  $CR$ , еще до начала измерения восстанавливают теодолитом перпендикуляр  $CO$  к базису, на котором намечают точку  $O$  в расстоянии от  $C$  в 8—10 метров (это расстояние измеряется стальной лентой); над  $O$  устанавливают теодолит, которым и измеряют тотчас по установке жезла  $A$  угол  $COR$ ; впоследствии отрезок  $CR$  вычисляется, как катет — по углу  $COR$  и катету  $CO$ . Установив первые четыре жезла  $A, B, C, D$ , отсчитывают наклонность оси жезла  $A$ ,

которым и измеряют тотчас по установке жезла  $A$  угол  $COR$ ; впоследствии отрезок  $CR$  вычисляется, как катет — по углу  $COR$  и катету  $CO$ . Установив первые четыре жезла  $A, B, C, D$ , отсчитывают наклонность оси жезла  $A$ ,



Черт.66

ставят уровень на  $B$ , отсчитывают термометры и фьюльгель при  $A$  (в это время наблюдатель  $N-4$  измеряет угол  $COR$ ), отсчитывают наклонность жезла  $B$ , ставят уровень на  $C$ , отсчитывают термометры и фьюльгель жезла  $B$ , отсчитывают уровень на  $C$  и ставят его на  $D$ ; с этого момента наступает уже вполне определенный порядок работы именно: по установке уровня на жезле  $D$ , переносят жезл  $A$  в положение  $A'$ , устанавливают его в этом положении, отсчитывают уровень на  $D$  и ставят его на  $A'$ , отсчитывают фьюльгель и термометр жезла  $C$ , переносят жезл  $B$  в положение  $B'$  и по его установке, отсчитывают уровень на  $A'$  и ставят его на  $B'$ , отсчитывают фьюльгель и термометры жезла  $D$ , переносят жезл  $C$  и т. д.; переносы уровней — большого и малого — на следующий жезл выполняет наблюдатель  $N-4$ . При окончании работы наблюдатель  $N-4$  заблаговременно забивает в землю на линии базиса особую марку  $M$  так, чтобы она пришлась бы под задним концом последнего жезла  $X$ : расстояние марки от центра  $C_1$  базиса (см. черт. 66) должно быть меньше половины длины жезла. Эта марка  $M$  представляет собой массивный железный кол (черт. 67) с выступом  $a$ , имеющим продольный прорез; по выступу  $a$  ходит полоса  $b$ , закрепляющаяся снизу винтом  $d$ , стержень которого при движении полосы передвигается в прорезе выступа  $a$ . По полосе  $b$  передвигается, закрепляясь винтами  $ee$ , стальной куб  $e$ , имеющий



Черт.67



на своей верхней грани маленький кружочек с точкой в центре его. Наблюдатель  $N-4$  заранее, до установки последних жезлов, забивает марку на рассчитанном им заблаговременно месте. Если *передний* конец последнего жезла оказывается ближайшим к марке, то необходимо, конечно, установить по базису еще один лишний жезл  $X$ , чтобы получить то прикосновение  $t$  жезлов, которое будет в этом случае проектироваться на марку. Самое проектирование производится по указаниям наблюдателя  $N-1$  и по указаниям наблюдателя  $N-4$ , пользующегося для этого малым теодолитом, установленным в 6—8 м от базиса на перпендикуляре к нему из  $t$  (черт. 66). Когда точка  $M$ , имеющаяся на верхней грани кубика  $C$  марки, будет поставлена строго на отвесную линию точки  $t$ , то укладывают (после уже отсчета всех жезлов) горизонтально по линии базиса ровный, хорошо отделанный, прямой брусок и при помощи двух боковых теодолитов проектируют на него точку  $M$  и центр  $C_1$ , отмечая соответствующие места надрезами ножом. Расстояние между такими надрезами, или так называемый „остаток“ базиса измеряется впоследствии штанген-циркулем по масштабу. [Нужно впрочем отметить, что от только что описанного порядка получения „остатка“ часто значительно отстают]. При перерыве работы по измерению базиса, проектируют на марку последнее прикосновение жезлов, а при возобновлении работы или устанавливают заново над точкой  $M$  марки твердый конец жезла, стоявшего за последним прикосновением, — если жезлы убирались с поля; или же, если жезлы оставались на время перерыва в поле, то проверяют посредством теодолита — осталась ли точка  $M$  марки и последнее прикосновение жезлов на одной отвесной линии, и в случае сдвига переднего жезла, — измеряют горизонтальный угол между его твердым концом и точкой  $M$  и вводят впоследствии поправку за этот сдвиг в длину базиса.

Пусть при откладывании некоторого жезла по линии базиса, его температура была равна  $t$ , а наклонность, выраженная в минутах, и отсчет по фьюльгебелю пусть оказались равными (соответственно)  $i$  и  $f$ . Так как по-

правка за наклонность  $i$  равна  $-2 l \sin^2 \frac{i}{2}$  или равна  $-\frac{l \sin^2 1'}{2} i^2$ , по-

правки же за температуру и за фьюльгель соответственно равны  $-kl_0(t-t_0)$  и  $+v(15-f)$ , то очевидно, что откладывание нашего жезла соответствовало продвигу в плоскости базиса по *горизонтальному* направлению на длину:

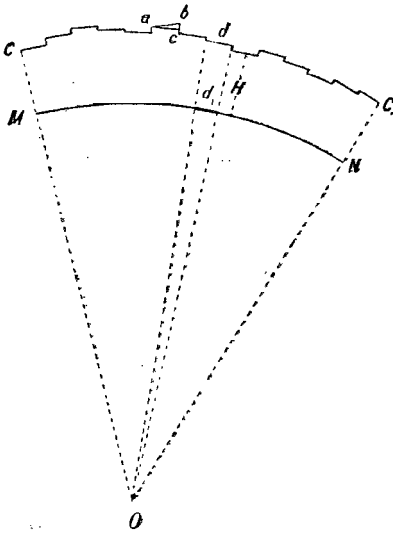
$$l_0 + kl_0(t-t_0) + v(15-f) - l \frac{\sin^2 1'}{2} i^2 \dots (6)$$

Сумма  $L_0$  всех таких продвигов, соответствующих всем отложенным по линии базиса жезлам будет, следовательно, равна:

$$L_0 = \Sigma l_0 + k_m l_0^m \Sigma(t-t_0) + v_m \Sigma(15-f) - l_0^m \frac{\sin^2 1'}{2} \Sigma i^2 + r \dots (7)$$

причем в малых поправочных членах формулы (7) множители  $k_m$ ,  $l_m$  и  $v_m$  приняты для всех жезлов одинаковыми и равными соответственно;  $k_m$  — среднему из четырех коэффициентов расширений;  $l_0^m$  — среднему из длин четырех жезлов при температуре  $t_0$  и  $v_m$  — среднему из цен делений для четырех фьюльгелей;  $r$  — в этой формуле есть остаток базиса, а в  $\Sigma l_0$  длина каждого жезла входит, конечно, столько раз, сколько раз этот жезл был отложен по базису.

Вводя поправки за наклонность, мы очевидно этим самым переходим от длины  $ab$  (черт. 68) наклонно отложенного жезла к проекции ее  $ac$  на урovenную поверхность, проходящую чрез начало (или — безразлично — чрез конец) жезла. Следовательно, если  $C$  есть задний конец первого отложенного по базису жезла, а  $C_1$  передний конец отложенного последним жезла, то  $L_0$  равно сумме горизонтальных элементов ломаной линии  $CC_1$ , причем каждый такой элемент имеет одинаковое значение с  $ac$  т. е. представляет собою проекцию соответственного наклонно отложенного жезла; остальные же элементы этой линии  $CC_1$  образуются проектирующими вертикальными линиями. Пусть все эти вертикальные линии пересекаются в одной точке  $O$  — другими словами примем на протяжении базиса урovenные поверхности за сферические (вследствие малости базиса по сравнению с земным радиусом, такое допущение вполне возможно). Соединяя  $O$  с  $C$  и  $C_1$ , мы в пересечении отвесных линий  $CO$  и  $C_1O$  с урovenною поверхностью океана отметим точки  $M$  и  $N$ ,



Черт. 68.

которые очевидно будут проекциями на поверхность океана базисных центров. Длина дуги  $MN$ , лежащей в вертикальной плоскости  $MON$  на поверхности океана, называется проекцией  $L$  базиса на урovenь океана. Чтобы получить эту проекцию  $L$  базиса на урovenь океана, сравним длину горизонтального элемента  $d$ , находящегося на высоте  $H$  над урovenем океана, с длиной  $d_1$  его проекции, причем назовем чрез  $R$  радиус  $OM=ON$  кривизны дуги  $MN$ .

Имеем:

$$\frac{d_1}{d} = \frac{R}{R+H}, \quad \frac{d-d_1}{d} = \frac{H}{R+H}$$

$$d-d_1 = \frac{H}{R} \cdot d \cdot \frac{1}{1 + \frac{H}{R}} = \frac{H}{R} d \left(1 + \frac{H}{R}\right)^{-1}$$

Пренебрегая вторыми и высшими степенями весьма малого отношения  $\frac{H}{R}$ , получаем:

$$d-d_1 = \frac{H}{R} \cdot d$$

Отсюда:

$$L - L_0 = \sum (d - d_1) = \frac{1}{R} \sum Hd$$

В последней формуле, вследствие малости  $H$  и  $d$  по сравнению с  $R$ , можно всегда  $H$  заменить чрез среднюю высоту  $H_m$  базиса над урovenем океана, а  $\sum d$  — очевидно придется тогда заменить чрез  $L_0$

Итак:

$$L - L_0 = \frac{1}{R} H_m \Sigma d = \frac{H_m L_0}{R}$$

Величина  $R$  должна вычисляться по формуле:

$$R = \sqrt{p^2} (1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 \varphi \mp \cos 2\alpha)$$

в которой  $p$  и  $\varphi$  радиусы кривизны меридиана и первого вертикала под широтой  $\varphi$ ;  $\alpha$ —азимут базиса,  $e$ — эксцентриситет меридианного эллипса.

Окончательная формула для вычисления проекции базиса на уровень океана будет следовательно такая:

$$L = \Sigma l_0 + k_m l_0^m \Sigma (t - t_0) + v_m \Sigma (15 - f') - l_0^m \frac{\sin^2 1'}{2} \Sigma i^2 + r - \frac{H_m L_0}{R} \dots (8)$$

Высота  $H_m$  может быть известна довольно грубо, с ошибкой до двух метров.

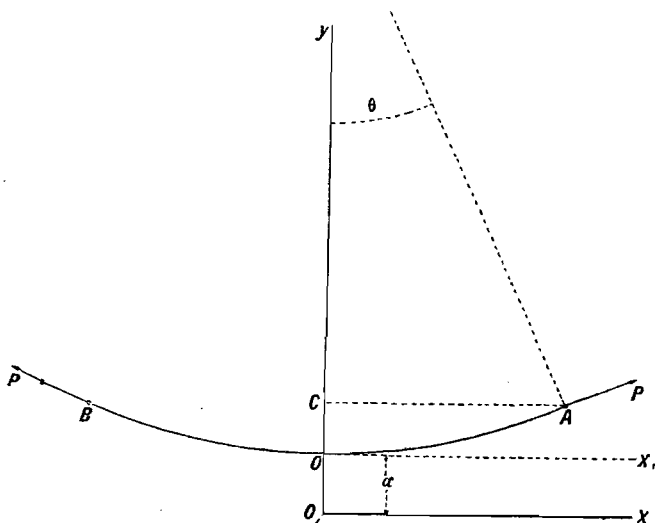
**22. Базисный прибор с проволоками.** Применение прибора с проволоками для точных измерений длин базисов было впервые осуществлено шведским геодезистом профессором *Едериным* в восьмидесятых годах минувшего столетия; возможность такого применения вытекает из следующих соображений.

1. Пусть имеем (черт. 69) гибкую нерастяжимую и тяжелую нить  $BOA$

(проволоку) удерживаемую в равновесии приложенными в ее концах  $A$  и  $B$  (лежащих в одном уровне) равными силами  $P$ . Кривая  $BOA$  будет, конечно, цепною линиею, уравнение которой напомним в виде:

$$y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) \dots (1)$$

Как известно из механики, горизонтальная составляющая силы натяжения в некоторой точке  $M$  нашей цепной линии не



Черт 69

зависит от положения этой точки на кривой и есть величина постоянная для всех точек проволоки; вертикальная-же составляющая той-же силы равна весу проволоки от ее нижней точки  $O$  до рассматриваемой точки  $M$ . Назовем: горизонтальную составляющую натяжения—через  $k$ ; вес единицы длины проволоки чрез  $g$ ; угол, образуемый направлением силы натяжения с осью  $X$ -ов, чрез  $v$ ; длину проволоки от  $O$  до  $A$  чрез  $s$ . Для точки  $A$  имеем:

$$\operatorname{tg} v = \frac{gs}{k} \dots (2)$$

$$s = \sqrt{y^2 - a^2} \dots (3)$$

Если же начало осей перенести в  $O$ , то ордината  $y_1 = y - a$  точки  $A$  становится равной *стрелке провеса*  $CO$  цепной линии; называя эту стрелку через  $h$ , из (3) напишем:

$$s^2 = h^2 + 2ah; \quad a = \frac{s^2 - h^2}{2h}$$

С другой стороны из (1-го):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) = \sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1} = \frac{s}{a} = \frac{2hs}{s^2 - h^2} \dots (4)$$

Но  $\frac{dy}{dx}$  равно, конечно,  $tg\theta$  и следовательно:

$$\frac{gs}{k} = \frac{2hs}{s^2 - h^2}; \quad gs^2 - gh^2 = 2hk$$

Предположим, что  $A$  и  $B$  лежат в одном уровне; обозначая длину всей дуги  $BOA$  чрез  $l$  имеем  $l = 2s$  и следовательно:

$$g \frac{l^2}{4} - gh^2 = 2hk \dots (5)$$

В дальнейшем будем предполагать, что вес проволоки весьма мал по сравнению с силой  $P$ ; тогда стрелка  $h$  будет мала по сравнению с  $l$  и цепная линия на протяжении дуги  $BOA$  будет близка к окружности. Принимая дугу  $BOA$  за круговую и полагая ее радиус равным  $\rho$ , а половину центрального, ей соответствующего, угла равным  $\theta$ , напишем:

$$s = \rho\theta; \quad x = AC = \rho \sin\theta = \rho \left[ \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \dots \right]$$

$$s - x = \frac{\rho\theta^3}{6}; \quad h = \rho - \rho \cos\theta = \rho - \rho \left[ 1 - \frac{\theta^2}{2} + \dots \right]$$

$$h = \frac{\rho\theta^2}{2}$$

При сделанном предположении относительно малости  $h$  по сравнению с  $s$  угол  $\theta$  будет очевидно мал, и в предшествующей выкладке при разложении  $\sin\theta$  и  $\cos\theta$  в *Маклоренов* ряд были удержаны лишь члены порядка  $\theta^2$ . Сравнивая  $h$  и  $s - x$ , находим:

$$s - x = \frac{h\theta}{3} = \frac{h \cdot \rho\theta^2}{3s} = \frac{2h^2}{3s}$$

Отсюда:

$$2s - 2x = \frac{4h^2}{3s}; \quad 2x = D; \quad l - D = \frac{8h^2}{3l} \dots (6)$$

Из уравнения (5) видим:

$$h = \frac{gl^2}{8k} - \frac{g}{k} h^2$$

Но для подстановки  $h$  в (6) можно пренебречь малым членом третьего порядка  $\frac{g}{k} h^2$  и, принимая  $\frac{gl^2}{8k} = h$ , написать:

$$l - D = \frac{g^2 l^3}{24 k^2} \dots (7)$$

Приближенность вычислений при получении (7) и допущения, сделанные при этом приводят к погрешности в  $l-D$  вообще меньшей 0.001 миллиметра. Предполагая, что натяжение  $P$  получает приращение  $\Delta P$  и принимая нерастяжимость проволоки, найдем из (7) следующее выражение для соответствующего  $\Delta P$  изменения  $\Delta D$  в длине хорды  $AB$  проволоки:

$$\Delta D = \frac{g^2 l^3}{12 k^3} dk = \frac{g^2 l^3}{12 P^3} \Delta P. \dots \dots \dots (8)$$

(Замена  $k$  чрез  $P$  вполне допустима в (8) вследствие малости  $\Delta D$  и вследствие незначительности различия  $k$  от  $P$ ). Если теперь принять в расчет, что в действительности мы имеем дело с растяжимой проволокою, и назвать чрез  $\sigma$  растяжение единицы длины проволоки под влиянием веса  $g$ , то растяжения всей проволоки при действии на нее силы  $P$  будет равно  $\frac{\sigma l P}{g}$ .

Пусть длина проволоки, уложенной *без всякого натяжения* на горизонтальной плоскости, равна  $l_0$ ; при действии натяжения  $P$ , длина  $l$  проволоки будет равна  $l_0 + \frac{\sigma l P}{g}$ . При изменении  $P$  в (7) будет изменяться не только  $D$ , но и  $l$ , а поэтому полное изменение хорды  $D$  должно вычисляться так:

$$\Delta D = \frac{g^2 l^3}{12 P^3} \Delta P + \frac{\delta l \cdot \Delta P}{g} \dots \dots \dots (9)$$

причем для длины самой хорды  $D$  имеем уравнение:

$$D = l_0 + \frac{\sigma l_0 P}{g} - \frac{g^2 l_0^3}{24 P^2} \dots \dots \dots (10)$$

Для никкелевой стали, из которой теперь изготовляют проволоки,  $\sigma = 0,00051$  а  $g = 0,0173$  килограмма при принятии метра за единицу длины; поэтому при  $l$  равном 24 метрам и при  $P$  в десять килограммов, из (9) находим:

$$\Delta D = \Delta P \left\{ 0,34 + \frac{mm}{0,70} \right\}$$

причем  $\Delta P$  считается выраженным в килограммах. Следовательно, при  $\Delta P = 0,1$

$\Delta D = 0,104$  миллиметра, что составляет  $\frac{1}{240000}$  долю длины проволоки. От-

сюда следует, что если пользоваться проволоками с  $\sigma = 0,0005$ ;  $g = 0,0173$  килограмма и с  $l = 24$  метра, то поддерживая постоянство натяжения с точностью до 0.04 килограмма (т.е. осуществляя постоянное натяжение с ошибкой, меньшей 0.04 килограмма) мы будем иметь колебания длины хорды

$AB$  в пределах меньших  $\frac{1}{600000}$ . Вопрос о том, какие значения для  $g$  и  $P$

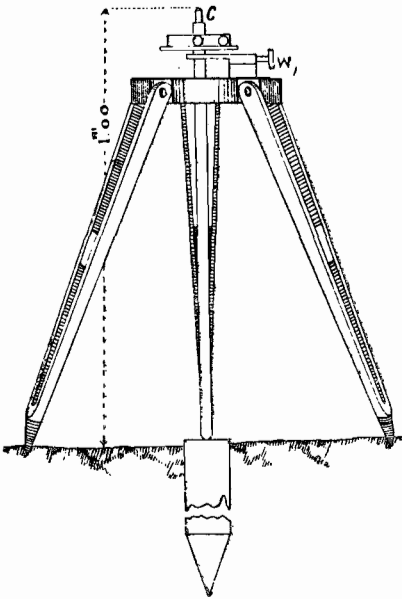
будут выгоднейшими при данной длине  $l$ , — решается вообще лишь на основании результатов многочисленных опытов с проволоками. Однако, при полевых действиях применение натяжений, больших десяти килограммов, является неудобным; в практике при  $l = 24$  метра, проволока натягивается всегда силой в 10 килограммов.

2. Кроме перемен, вызываемых изменениями в величине натяжения длина хорды  $AB$  претерпевает еще изменения, соответствующие переменам температуры проволоки. Предполагая по прежнему, что стрелка  $h$  мала по сравнению с  $l$ , мы имеем основание сказать, что изменениям  $l$ , обусловленным переменами температуры  $t$  проволоки, соответствуют равные им изме-

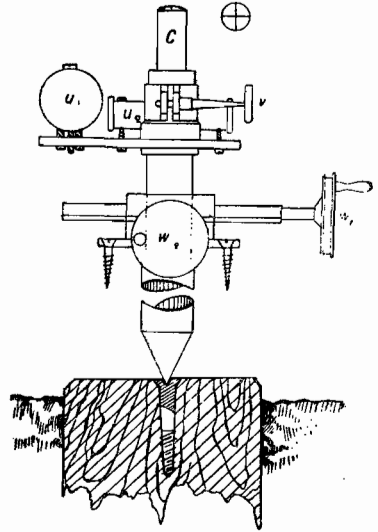
с точностью до одного сантиметра; окончательная же установка по расстоянию поверяется проволочным канатом и может быть сделана до четырех сантиметров. Надлежит следить за тем, чтобы после окончательной установки целик штатива остался бы вертикальным.

Над базисным центром и над промежуточными центрами, обозначающими конец или начало дневной работы, ставится или оптический центрир или особый центрирный станок, состоящий из деревянного штатива с *твердым* отвесом в виде длинной цилиндрической штанги. Эта штанга вверху имеет целик совершенно подобный целику  $\mathcal{Z}$  штатива, а внизу оканчивается лежащим на ее оси острием которое совмещается с „точкой“ в базисном центре. Вверху штанги удерживается особой обоймой которая

*Общий вид.*

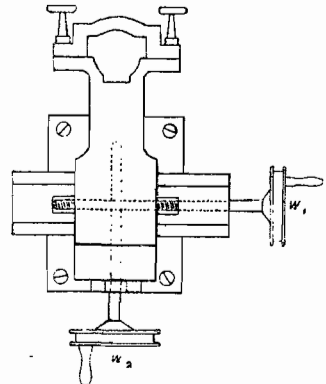
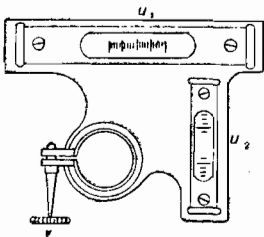


*Деталь головки центрира.*



*Суппорт для передвижений в двух перпендикулярных направлениях*

*Обойма с уровнями  $U_1, U_2$*



*Черт. 71.*

может двигаться по голове штатива в двух перпендикулярных направлениях; для приведения оси штанги в вертикальное положение служат два имеющиеся при ней уровня. (См. черт. 71).

Расстановкой штативов занимаются два особых наблюдателя. Вслед за установкою первых десяти штативов, третий наблюдатель приступает к нивелировке их. Места для нивелира при этом выбираются так, чтобы с одной станции взять взгляды на 4—5 штативов. Небольшая рейка, (около метра длиной) служащая при этой нивелировке, имеет на одной стороне

сантиметровые, а на другой в  $\frac{11}{10}$  см или в  $\frac{1}{200}$  долю сажени деления. Эта рейка снабжена уровнем и устанавливается рабочим на целиках штативов, закрываемых при этом съёмными шляпками; при каждой установке рейки отсчеты делаются—для контроля—по обеим ее сторонам.

За нивелировкой начинается собственно измерение, в котором участвуют *четыре* наблюдателя (не участвующие ни в нивелировке, ни в расстановке штативов). Один из этих наблюдателей находится при главном динамометре пристегиваемом всегда к переднему концу проволоки, и посредством этого динамометра натягивает проволоку всегда с силой ровно в десять килограммов. Второй из четырех наблюдателей посредством второго динамометра должен собственно удерживать проволоку в равновесии, прикладывая силу  $Q$ , уравнивающую приложенную при переднем конце проволоки постоянную силу  $P$  в десять кг; фактически различия  $Q$  от десяти кг, обуславливаемые конечно только разностью высот двух смежных целиков настолько незначительны, ( $P-Q = hg$  и при  $h$  равном метру достигает всего лишь  $0.02$  кг) что второму наблюдателю приходится на самом деле ставить свой динамометр на отсчет по его указателю в десять кг. Два остальных наблюдателя отсчитывают шкалы проволок, причем на обязанности наблюдателя при передней шкале лежит и запись отсчетов. Когда проволока натянута так, что указатели обоих динамометров показывают отсчеты ровно в 10 кг, то наблюдатели при шкалах, придерживая их слегка руками и совмещая край каждой шкалы с стоящим по линии базиса штрихом целика, приступают к отсчитываниям шкал, причем обычно наблюдатель у заднего конца совмещает с поперечным штрихом своего целика деления 40, 50, 60 шкалы, а *одновременно* по поперечному штриху переднего целика передний наблюдатель отсчитывает свою шкалу. Тотчас после записи отсчетов, наблюдатели у динамометров отстегивают проволоку, передают ее рабочим, пристегивают вторую проволоку, которую и отсчитывают так же как первую и т. д. Заметим теперь, что в проволоках прежнего устройства подписи на обеих шкалах возрастают в направлении от середины проволоки к ее концам.

Назовем: 1) чрез  $l$ —длину хорды стальной проволоки, т. е. расстояние между нулями ее шкал при температуре  $t$  и при натяжении в 10 кг; 2) чрез  $e$ —сумму отсчетов по передней и задней шкалам проволоки, полученную при измерении расстояния между целиками некоторых двух смежных штативов, причем температура проволоки пусть была равна  $t$ . Очевидно расстояние между этими двумя целиками вычислится так:

$$R = l + e + kl (t - t_0)$$

Заменяя для медной проволоки  $l$ ,  $e$  и  $k$  соответственно через  $l_1$ ,  $e_1$  и  $k_1$  напишем:

$$R = l_1 + e_1 + k_1 l_1 (t - t_0)$$

Следовательно, для длины  $L_0$  ломанной линии, образованной из соединяющих последовательно смежные целики прямых, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} L_0 &= \sum R = hl + \sum e + hlk (t_m - t_0) + r \\ L_0 &= \sum R = hl_1 + \sum e_1 + hl_1 k_1 (t_m - t_0) + r \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

понимая под  $t_m$ —среднюю температуру измерения, под  $n$ —число уложившихся в базисе проволок, под  $r$ —остаток базиса. Обозначая-же:

$$nl + \Sigma e_i + r \text{ чрез } S \text{ а } nl_1 + \Sigma e_{i1} + r \text{ чрез } S_1,$$

получаем из (12):

$$t_m - t_o = \frac{S - S_1}{n(l_1 k_1 - lk)} ; \quad L_o = S + \frac{kl(S - S_1)}{k_1 l_1 - kl} \dots \dots \dots (13)$$

Формулу (13) можно переписать, пренебрегая в поправочном члене разницей  $l$  и  $l_1$ , еще так:

$$L_o = S + \frac{k(S - S_1)}{k - k_1} = S_1 + \frac{k_1(S - S_1)}{k_1 - k} \dots \dots \dots (14)$$

Величина— $L_o$  должна быть исправлена приведениями:

- 1) за наклон отдельных пролетов базиса к горизонту.
- 2) за высоту базиса над уровнем океана.

Если  $h$  есть разность высот целиков двух смежных штативов,  $l$ —измененное между этими целиками расстояние, а  $l_o$ —горизонтальное проложение этого расстояния, то:

$$l_o = (l^2 - h^2)^{\frac{1}{2}} = l \left(1 - \frac{h^2}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$l_o - l = -\frac{h^2}{2l} - \frac{h^4}{8l^3} \dots \dots \dots (15)$$

Так как  $h$  обычно не превышает метра и  $\frac{h}{l}$  есть малая величина, то в последнем уравнении, в правой его части, удерживают только первый член и поправку в  $l_o$  вычисляют, как  $\frac{\Sigma h^2}{2l}$ . Но кроме этой поправки за переход от наклонной хорды  $l$  к ее горизонтальной проекции надлежит еще ввести поправки:

а) за несимметрию цепной линии—в отдельный пролет в виде  $+\frac{h^2}{24P^2} l g^2$  или в весь базис  $+\frac{l g^2}{24P^2} \Sigma h^2$

б) за отличие натяжения на наклонных участках от 10 кг. Так как главный динамометр находится *всегда* при переднем конце проволоки, то когда передний конец *выше* заднего, тогда имеем при заднем конце натяжение  $10 - hg$ , а среднее натяжение в  $10 - \frac{hg}{2}$  килограммов. Наоборот, когда передний конец *ниже* заднего, то на заднем конце имеем натяжение  $10 + hg$ , а среднее натяжение—в  $10 + \frac{hg}{2}$  килограммов. Поэтому, согласно формулы (11), если под  $h$  понимать „*альтитуду переднего целика минус альтитуда заднего целика*“, то искомая поправка за отличие натяжения от 10 кг, вычислится для отдельного пролета так:

$$- \left\{ \frac{g^3 l^3}{24P^3} + \frac{gl}{2} \right\} h \dots \dots \dots (16)$$

а для всего базиса:

$$- \left\{ \frac{g^3 l^3}{24P^3} + \frac{gl}{2} \right\} \Sigma h \dots \dots \dots (17)$$



Очевидно, что эта поправка в обратном ходе измерения базиса будет равна по величине, но обратна по знаку с поправкой в прямом ходе измерения.

Обратимся теперь к оценке описанного прибора Едерина. *Постоянное* натяжение можно осуществлять посредством главного динамометра с средней *случайной* ошибкой в  $\pm 0.02$  кг; отсюда при помощи уравнения (9) заключаем, что случайные ошибки в установке динамометров могут влиять лишь на десятиллионные доли длины базиса. Что касается влияния *постоянной* или *односторонней* ошибки в номинальном натяжении в 10 кг, обусловливаемой изменениями упругости пружины динамометра, то обычно принимают ее не превышающей  $\pm 0.02$  кг и следовательно соответственная систематическая ошибка в длине базиса не превзойдет  $\frac{1}{100000}$ .

Отсчеты  $e$  по шкалам проволоки совершаются, оценивая на глаз десятую долю миллиметрового деления шкалы: предельный размер случайной ошибки отсчета по шкале можно считать в  $\pm 0,2$  \*) миллиметра, и очевидно, что при базисе длиной в 7—8 км, эти случайные ошибки в отсчетах  $e$  обусловят в длине базиса ошибку лишь в десятиллионных ее долях.

Размер влияния случайных ошибок в отсчетах по шкалам значительно еще уменьшается вследствие применения не двух, а четырех проволок, а также благодаря тому, что при измерении каждого отдельного пролета, проволока отсчитывается два или даже четыре раза.

Таким образом мы видим, что ошибки отдельных полевых действий при измерении базиса прибором *Едерина* влияют на вывод длины базиса чрезвычайно мало; как показывает опыт и как и должно было ожидать на основании изложенного, — окончательная ошибка базиса, измеренного проволоками, оказывается даже менее ошибки измерения базисов приборами с жезлами, *если не принимать в расчет ошибок в определении изотермического удлинения длин проволок.*

Оставляя пока в стороне этот вопрос об определении длин проволок, остановимся на следующих изменениях и усовершенствованиях, которые сделаны в приборе *Едерина* на основании работ французов *Бенуа* и *Гильома*:

1) *Бенуа* и *Гильом*, после длинного ряда исполненных ими опытов, обнаружили, что проволоки, изготовленные из сплава 64 % стали с 36 % никеля обладают ничтожным коэффициентом линейного расширения; такой сплав был назван ими *инваром*. Повидимому, наибольшее значение коэффициента расширения для проволоки из инвара все-таки менее  $+\frac{1}{3000000}$ , а для некоторых проволок он оказался даже отрицательным  $\left(-\frac{1}{2000000}\right)$

Инвар не обладает той устойчивостью внутреннего строения, которая свойственна стали, платине и даже меди, и длина проволоки, изготовленной из инвара, изменяется с *течением времени*, а иногда и внезапно. Гильом применяет длительную механическую и термическую обработку проволок (выколачивание, нагревание до очень высокой температуры, остывание в воздухе, новое нагревание с постепенным остыванием в печи); в результате такой обработки, изменения длины проволоки становятся медленными, однообразными и все более и более убывающими с течением времени: именно надлежаще обработанные проволоки *удлиняются* в первый год по изготовлении почти на 0.1 миллиметра на 24 метра, а в четвертый год по изго-

\*) и то благодаря лишь подвижности шкал и неполной одновременности отсчета по задней и передней шкале.

товлении—менее чем на 0.02 миллиметра. Спустя 5—6 лет по изготовлении проволоки, эти *поступательные* изменения ее длины делаются ничтожными, длина проволоки достигает известного предела, относительно которого изменения длины становятся либо периодическими, либо случайными, и составляющими менее  $\frac{1}{1000000}$  ее доли. Однако, сотрясения и толчки могут вызывать *сокращения* длины проволоки.

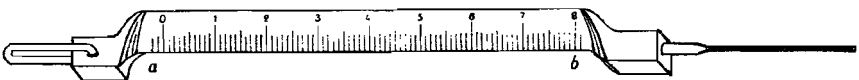
Изменения длины проволоки из инвара, обусловленные изменениями температуры, так-же представляют некоторые особенности. Переход проволоки из одной температуры в другую сопровождается, кроме изменений длины, определяемых обычной формулой линейного расширения, еще добавочными изменениями, характер которых не вполне установлен. По Гильому, если проволока хранилась долгое время при температуре  $t_1$ , а затем употребляется при температуре  $t_2$ , то к длине ее, рассчитанной по обычной формуле для  $t_2$ , следует ввести поправку:

$$\frac{\Delta l}{l} = -0.00325 \cdot 10^{-6} \cdot (t_2^2 - t_1^2) \dots \dots \dots (18).$$

Однако, если при работе проволока проходит чрез ряд температур, сменяющихся чрез сравнительно короткие промежутки времени, как это имеет место в условиях полевой работы, то поправка, даваемая формулой (18), не должна вводиться. Существенно еще отметить, что изменения длины проволоки значительно отстают по времени от изменений температуры воздуха. (Кроме того, коэффициент расширения проволоки для низких и высоких температур не остается постоянным). Поэтому, длины проволок, вычисленные при измерении базиса на основании отсчитанных температур воздуха, могут оказаться систематически ошибочными. Важно в результате отметить, что в современных проволоках Гильома, все указанные причины, обуславливающие *неучитываемые* изменения в длине проволоки, приводят к погрешности в ней, меньшей  $\frac{1}{1000000}$  ее доли. *Ничтожность-же коэффициента*

*расширения инвара позволяет определять температуру проволок довольно грубо, до одного градуса.* Тем не менее, в первоклассных базисах следует принять за правило определять температуры проволок: в период хранения их от эталонирования до измерения базиса; в *нерабочие* промежутки во время самого измерения базиса; и за время хранения их—от измерения базиса до последующего за ним эталонирования проволок. Конечно, специальными исследованиями длин проволок при разных температурах на особом компараторе надлежит установить,—как именно изменяется длина проволоки в зависимости от изменений температуры воздуха. Тогда имея вышеуказанный ряд температур чрез которые прошла проволока от эталонирования, предшествующего измерению базиса, до эталонирования, замыкающего это измерение, можно будет сообразить добавочные изменения длины проволоки, во время измерения базиса.

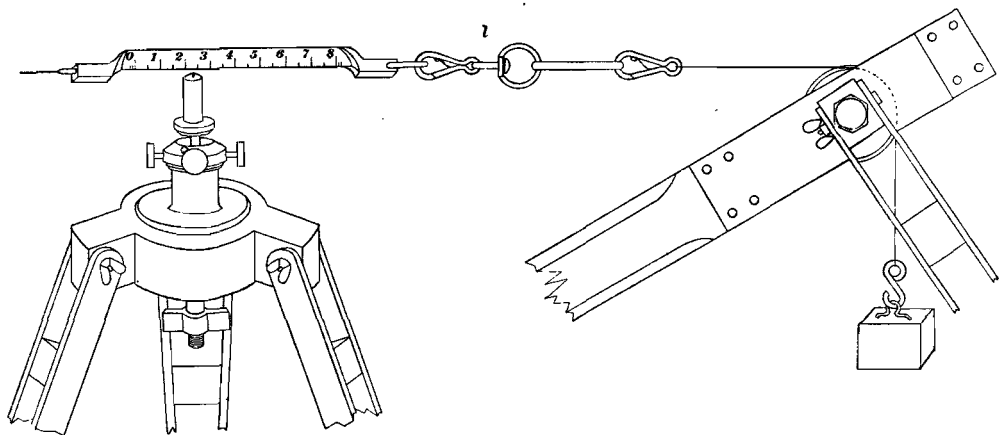
2) Проволоки из инвара имеют теперь длину в 24 метра. Этим достигается удобство эталонирования их, на вспомогательных базисах, длина



Черт. 72.

которых всегда является кратною четырем метрам. Шкалы проволок устраиваются теперь так, как это показано на черт. 72: ребро шкалы *ab*, которое

касается целика, находится на оси проволоки: (а не сбоку, как это было ранее). Этим достигается большее удобство установки шкал при отсчитываниях и большая точность отсчетов. Подпись делений на обеих шкалах возрастает в одном направлении; вследствие этого, перемена местами наблюдателей при шкалах при переходе ко второму измерению базиса, ведущемуся

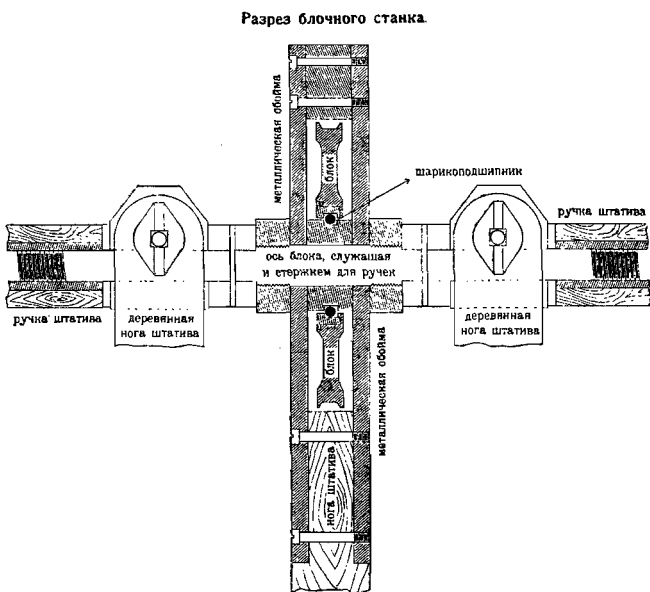


Черт. 73.

в обратном направлении с первым его измерением, приводит частично к исключению в среднем из таких двух измерений влияния постоянных личных ошибок в отчетах по шкалам.

3) Проволоки, по предложению *Гильома*, хранятся накрученными (свободно) на барабаны с диаметром, большим 0,5 метра; этим устраняется опасность повреждения проволок при разматывании и при перевозках.

4) Натягивание проволок производится не динамометрами, а гирями — посредством особых треножных станков с блоками: (черт. 73), в желобе блока ходит стальная очень тонкая проволока, к нижнему концу которой прицепляется гиря в 10 кг; крючок на верхнем конце этой проволоки захватывает за карабин проволоки. Замена динамометров гирями облегчает работу наблюдателей, особенно при большом числе (4—6) проволок, которыми



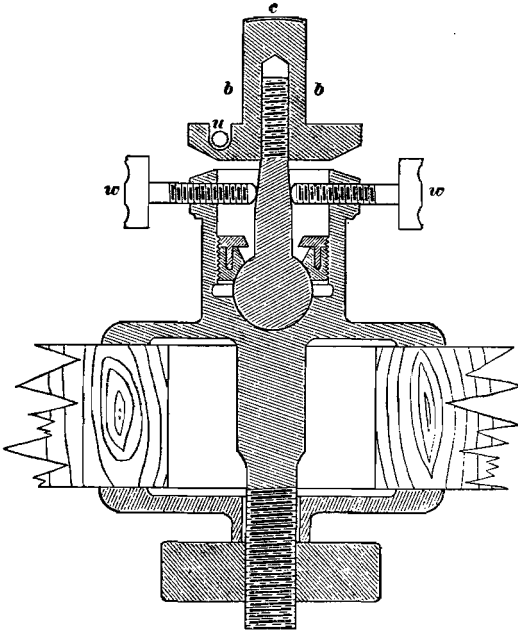
Черт. 73а.

работы наблюдателей, особенно при большом числе (4—6) проволок, которыми

пользуются при измерении базиса (одновременно). Точность отсчитывания шкал также повышается при употреблении гирь вместо динамометров.

На черт. 73а, 73б, 73с и 73д изображены детали устройства блочного станка и головок штативов с целиками в том виде, какой принят при современных базисных работах Высшего Геодезического Управления.

Разрез штатива с целиком, употребляемого на работах В.Г.У.



- с — головка целика
- д д — целик
- u — уровень (два взаимно перпендикулярных)
- w — винт для установки целика вертикально (четыре винта)

Черт. 73б.

такого участка приходится *удерживать* проволоку, слегка прижимая к целику или шкалу на верхнем конце, или шкалу на нижнем ее конце. Обычно в таких случаях поступают так:

1) делают ряд отсчетов по шкалам, имея свободною нижнюю шкалу, а верхнюю — прижатую слегка к целику; при этом имеют на верхнем конце силу  $P=10+hg$ , а на нижнем —  $P=10$ ;

2) делают столько-же отсчетов по шкалам, имея свободною верхнюю шкалу, а нижнюю — прижатую слегка к целику; при этом на верхнем конце будет работать только вес гири  $P=10$  кг, а на нижнем конце следовательно сила  $P$  будет равна  $10-hg$ . Очевидно, средний результат измерения будет отнесен к среднему натяжению, равному  $10$  кг, и поэтому в формуле (11)  $\Delta P$  будет равно нулю, и следовательно придется иметь дело только с поправкой за несимметрию цепной линии, равной  $\frac{l_2 g^2 h^2}{24 P^2}$ .

Рассмотренный случай является исключительным; в большинстве-же, или вернее почти на всех наклонных участках, проволока остается неподвижной, что конечно обуславливается трением в блоках. Раз приходится считаться с этим трением, то, конечно, является одинаково вероятной задержка проволоки в любом из ее концов: предположение, что удерживающая

Необходимо отметить, что на наклонном участке проволока, на концах которой подвешены гири *равного* веса, *должна скатиться вниз* под влиянием собственного ее веса. Для равновесия необходимо, чтобы сверху работала гиря, имеющая на  $hg$  больший вес, чем гиря внизу.

Вследствие трения в блоках, это явление сползания проволоки вниз сбнаруживается лишь при значительной разности  $h$  уровней целиков, большей во всяком случае одного метра. Такие значения  $h$  встречаются на базисах только крайне редко. Если приходится иметь дело с участком столь значительного наклона, при котором проволока скатывается вниз, то при измерении

сила приложена в верхнем конце, одинаково вероятно с предположением, что удерживающая сила приложена в нижнем конце.

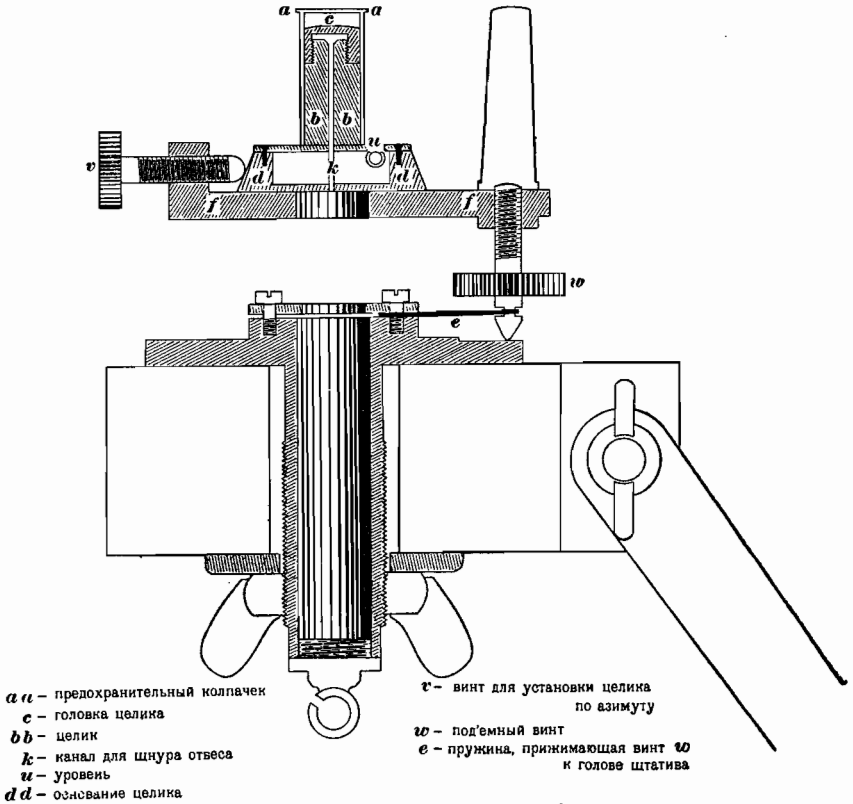
Поэтому, при применении гирь нет оснований к правильному учету поправки

$$\left\{ \frac{g^2 l_o^3}{12 P^3} + \frac{\sigma l_o}{g} \right\} \Delta P$$

на наклонных участках. Пренебрежение этой поправкой внесет систематическую ошибку в результат измерения базиса; так как при  $h=0,5$  метра,

**Разрез штатива с целиком:**

устройство механика Карпантье—применяется в современных работах.



- aa - предохранительный колпачек
- c - головка целика
- bb - целик
- k - канал для шнура отвеса
- u - уровень
- dd - основание целика

- e - винт для установки целика по азимуту
- w - подъемный винт
- e - пружина, прижимающая винт w к голове штатива

целик вместе с основанием *dd* может отделяться от трегера *ff*:

Черт. 73с.

значение этой поправки будет около  $\pm 0,003$  миллиметра, то очевидно, что указанная систематическая ошибка составит не более  $\frac{1}{8000000}$  длины базиса, так как среднее значение  $h$  всегда менее 0.5 метра.

При вычислении базиса, измеренного усовершенствованным прибором *Едерина*, приходится применять такую формулу:

$$L = L_o - \frac{L_o H_m}{R}$$

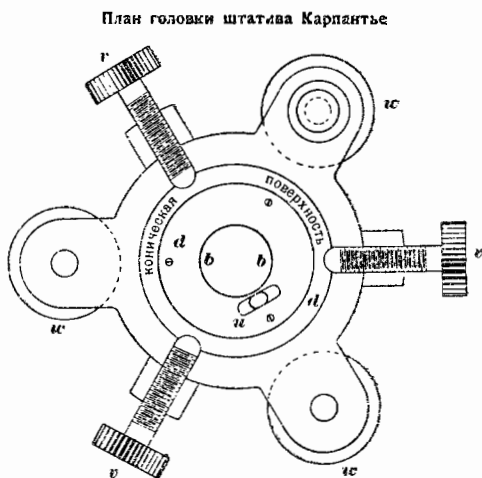
$$L_o = nl_o - \Sigma \text{З} + \Sigma \text{П} + nl_o k (t_m - t_o) - \frac{\Sigma h^2}{2l_o} + \frac{l_o g^2}{24P^2} \Sigma h^2 + r \dots \dots \dots (19)$$

В ур-нии (19):  $l_0$ —длина хорды проволоки выведенная из эталонирования при температуре  $t_0$ ;  $t_m$ —среднее из температур, измеренных термометрами пращами при измерении базиса;  $n$ —число целых проволок, отложенных по базису;  $Z$ —отсчет по задней шкале;  $И$ —отсчет по передней шкале; при этом предполагается, что направление от заднего к переднему концу проволоки совпадает с направлением подпери делений на шкалах проволоки. Остаток базиса  $r$  измеряется при помощи дополнительных в приборе проволок, длиной 8 и 4 метра.

Из ряда исполненных приборами с проволоками измерений базисов вытекает, что если не считаться с ошибками в определении длин проволок и с изменениями этих длин во время самого измерения базиса, то ошибка определения этими приборами длины базиса может быть доведена до

$\frac{1}{500000}$ . Определение длины проволоки представляет собою задачу более трудную, чем определение длины четырехметрового жезла в базисном приборе с жезлами; в трудности

решения этой задачи и заключается основной недостаток базисного прибора с проволоками. Существуют два пути эталонирования проволок: первый заключается в измерении проволоками малого вспомогательного базиса— в 360—480 метров, длина которого отлично определена из ранее исполненных базисными приборами с жезлами измерений; второй путь состоит в устройстве (в Окружном Управлении Центрального Геодезического Учреждения) особого компаратора на котором чрезвычайно точно откладывается длина в 24 метра, промеряемая затем проволоками. Применение первого пути требует поездок с проволоками с места

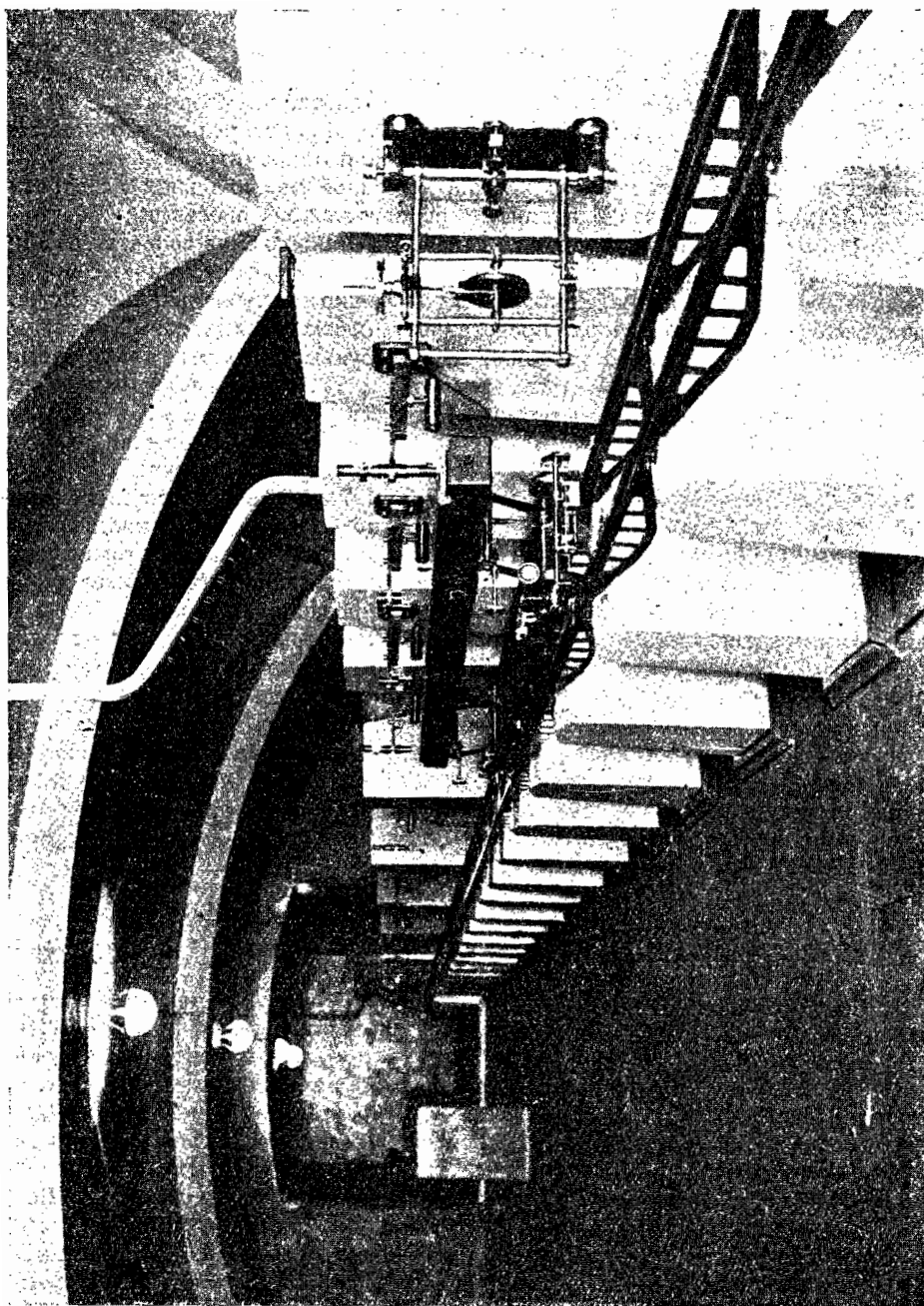


Черт. 73д.

измерения базиса на вспомогательный базис, иногда весьма удаленный от места работ; это представляет, конечно, существенные неудобства. Очевидно что из эталонирования на вспомогательном базисе длина проволоки определится с относительной ошибкой несколько большей таковой-же ошибки в длине вспомогательного базиса; следовательно, при применении первого пути эталонирования нельзя ожидать определения длины базиса прибором с

проволоками с ошибкой, меньшей  $\frac{1}{1000000}$ . Второй путь определения длины проволок основанный на устройстве особого компаратора, применяется с успехом с 1903 года в работах русских геодезистов.

Для устройства компаратора пользуются или корридором солидно построенного каменного здания, или специально построенным павильоном. В таком корридоре, параллельно стене, на изолированном от пола основании или на ряде каменных столбов, выведенных на изолированном от пола основании, укладывают по одной прямой тщательно выструганные трехугольного сечения рельсы, образуя из них общий рельс длиной в 30 метров. (Черт. 74 изображает компаратор в здании Московского Межевого Института). Ось этого „общего“ рельса определяет собою вертикальную плоскость компара-



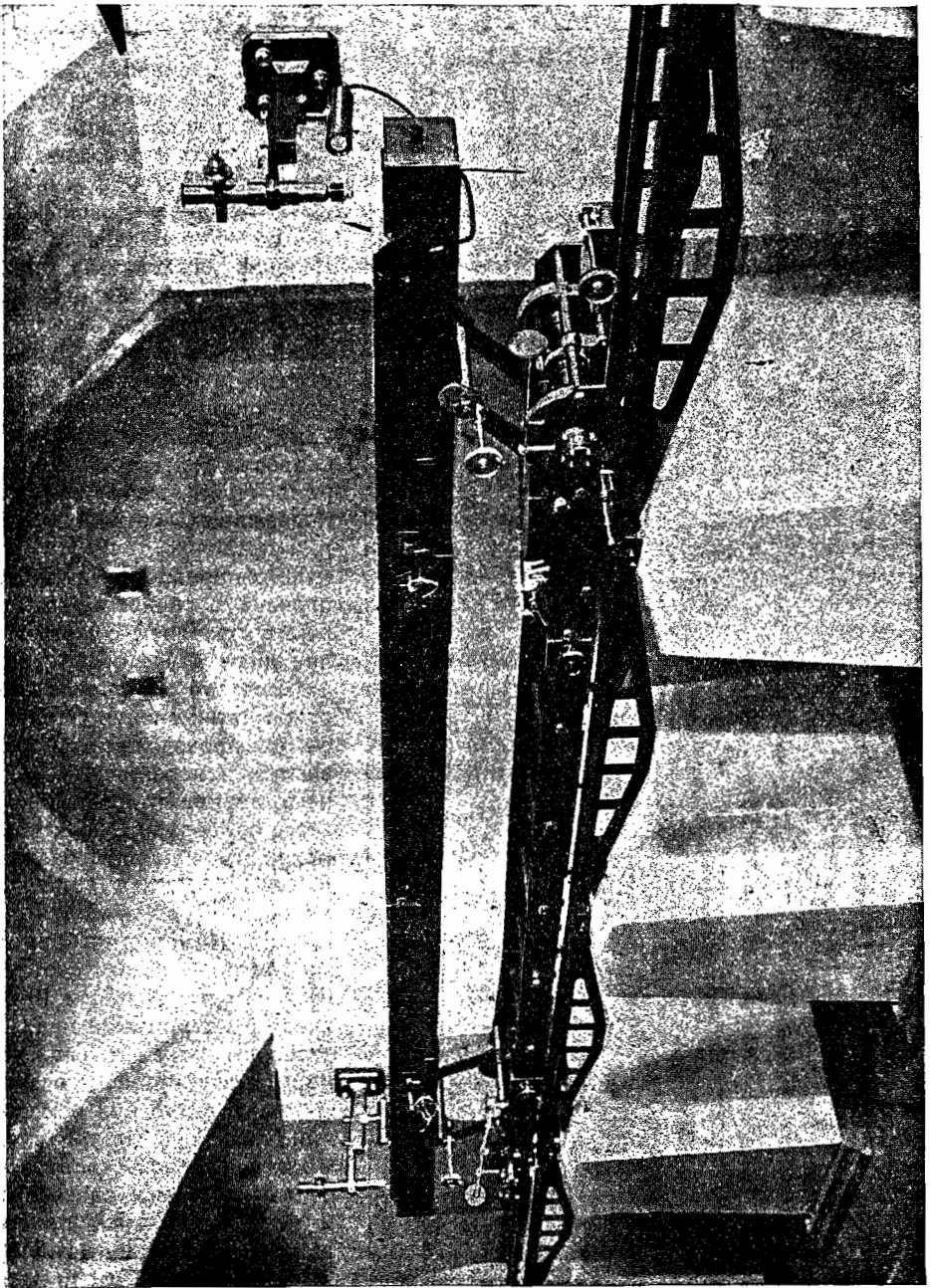
Черт. 74.

тора; при укладке частей рельса (отдельных рельс) пользуются туго-натянутым шнуром и накладываемым на рельсы большим уровнем. По рельсу при компарировании катятся два колеса тележки, несущей нормальную меру; два другие колеса этой тележки катятся по *гладкому* рельсу, параллельному первому. На стене (или на девяти каменных столбах, выведенных с глубоко заложеного солидного фундамента), вдоль которой идет рельс, укрепляются девять кронштейнов, несущих каждый микроскоп-микрометр. Оси всех девяти микроскопов устанавливаются строго в одной вертикальной плоскости, а микрометры микроскопов — в одной горизонтальной плоскости; расстояние между центрами объективов двух смежных микроскопов делается весьма близким к трем метрам. Расстояние между внешними фокусами 1-го и 9-го микроскопов и есть длина компаратора, отлично измеряемая нормальной мерой. Эта нормальная мера представляет собою трехметровый жезл из инвара, имеющий поперечное сечение в виде буквы Н; длина этого жезла и его коэффициент расширения определяются в Главной палате мер и весов из сравнений с метром прототипом. Трехметровая нормальная мера поκειται в деревянном футляре, имеющем в своей крышке окошечки против концов меры и против вделанных в меру термометров. Тележка для футляра с мерой, изображенная на чертеже 74а и 74б, имеет остроумные приспособления для малых передвижений меры по трем направлениям: вдоль компаратора, поперек его и по высоте. Определение длины компаратора производят так: два наблюдателя, действуя винтами тележки, устанавливают концевые штрихи жезла в фокусе 1-го и 2-го микроскопов возможно ближе к нульпунктам; затем следует наведение нитей микроскопов и отсчеты по ним  $a$  и  $b$ ; продвинув тележку с жезлом на три метра, устанавливают жезл так, чтобы задний его штрих совместился бы с биссектором нитей второго микроскопа, *оставшимся* на отсчете  $b$ ; после этого отсчитывают 2-ой и 3-ий микроскопы и получают отсчеты  $b_1$  и  $c$ ; затем продвинув жезл еще на три метра, вновь устанавливают его так, что задний штрих совмещается с нитями микроскопа 3-его, которые остаются на отсчете  $c$ ; отсчитывают микроскоп 3-ий и 4-ый и получают отсчеты  $c_1$  и  $d$ ; и т. д. Общая длина компаратора определится по формуле:

$$K = 8N - a\mu_1 + (b - b_1)\mu_2 + (c - c_1)\mu_3 + (d - d_1)\mu_4 + \dots + (h - h_1)\mu_8 + i\mu_9 + 8Nk(t_m - t_0)$$

понимая в последнем уравнении: под  $N$  длину нормальной меры при температуре  $t_0$ , под  $t_m$  — среднюю температуру эталонирования, под  $k$  — коэффициент расширения жезла и под  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_9$  — цены делений барабана микрометров. Для эталонирования проволок в той же стене в которой укреплены микроскопы, имеются еще два кронштейна, несущие каждый станок с блоком и снабженные приспособлениями для передвижения этих станков так, чтобы шкалы проволоки, натянутой перекинутыми чрез блоки станков гириями, можно было бы отсчитать 1-ым и 9-ым микроскопами. Если  $O_3$  и  $O_n$  суть отсчеты микрометров 1-го и 9-го микроскопов в момент, когда их нити наведены на одноименные штрихи шкал проволоки, натянутой надлежаще посредством станков с блоками, то длина проволоки будет равна  $K + O_3\mu_1 - O_n\mu_9$ . Один прием эталонирования проволок включает в себя: эталонирование компаратора прямым и обратным ходом, несколько измерений длин проволок, вторичное эталонирование компаратора прямым и обратным ходом. Таких приемов делают 4 — 5. Эталонирование проволок делается до и после измерения базиса. Средняя ошибка определения длины компаратора оказывается  $\pm \frac{1}{500000}$ . Вследствие трений в блоке натяже-





Черт. 74а.

ние проволоки при эталонировании на компараторе отличается от натяжения ее во время измерения базиса. Поэтому крайне желательно измерение

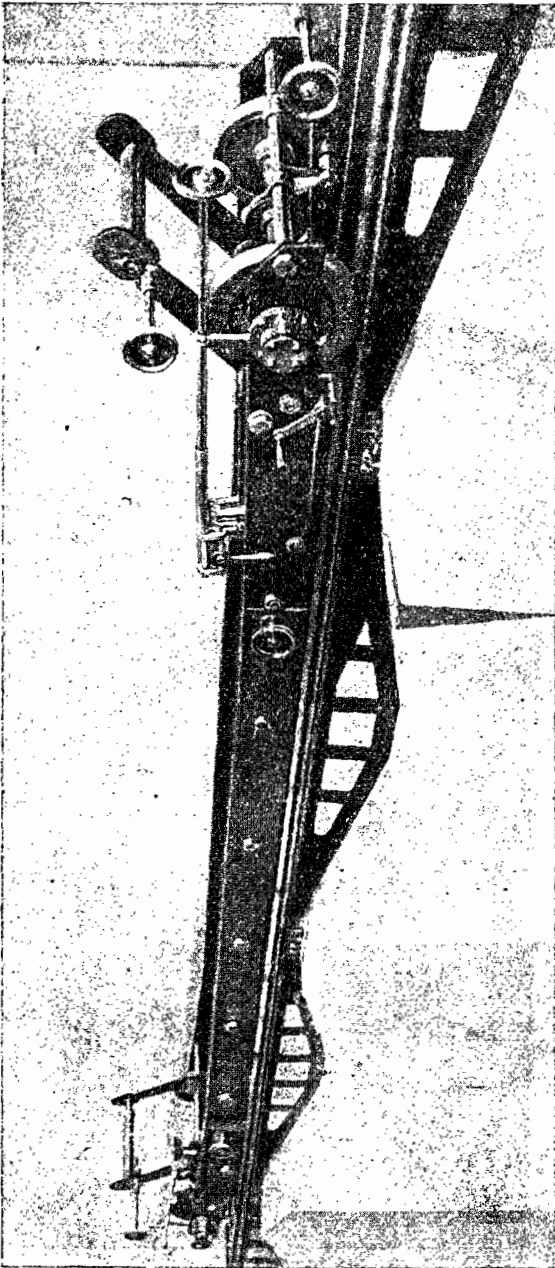
проволоки на компараторе делать на тех-же самых станках, которые употреблялись при измерении базиса. Средняя ошибка вывода длины проволоки не превышает  $\pm 0,015$  мм.

Прибор с проволоками позволяет производить измерения базиса на такой местности, которая является уже недоступной для приборов с жезлами; с другой стороны, скорость измерения прибором с проволоками в несколько раз более скорости измерения прибором *Струве*, между тем при надлежащем эталонировании проволок точность измерения проволоками одного порядка с точностью измерения прибором с жезлами или даже выше ее.

Все это обусловило широкое применение прибора с проволоками в базисных измерениях последнего времени; изобретение этого прибора повело к возможности измерять базисы в 8—10 и даже 15 километров.

**23. Измерение базиса по бичеве.** Если составляется сеть II-го или III-го класса, не примыкающая к сторонам ранее проложенной триангуляции I-го или II-го класса, то при измерении базиса в такой сети можно удовольствоваться более простыми способами и более простыми приборами, чем описанные в §§ 20, 21 и 22. В России применяют в случаях составления таких самостоятельных сетей II-го или III-го

класса измерение базиса по способу, предложенному в 1837 г. *О. Струве*, и заключающемуся в откладывании деревянного жезла по тонкой, тугонатянутой бичеве. По этому именно „способу *Струве*“ измерены базисы в

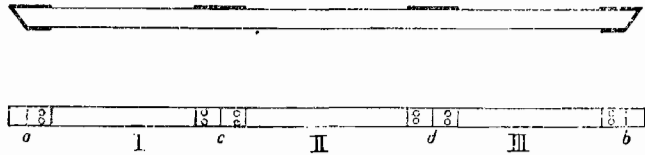


Черт. 74в.

сетях II-го класса, составленных: при землеотводных работах Переселенческого Управления в Сибири, при съемочных работах по устройству землепользования казаков, при съемках городов (Межевой Институт), при топографических работах в Болгарии, исполненных русскими топографами и геодезистами в 1878—1822. гг.

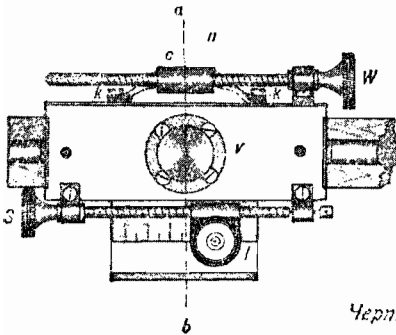
Откладываемый по бичеве деревянный жезл имеет длину  $1\frac{1}{2}$  сажэн при ширине в  $1\frac{1}{2}$  дюйма и при толщине около  $2\frac{1}{3}$  дюймов; на концах жезла прочно прикреплены стальные оковки, а на верхней его грани привинчены две стальные пластинки, в полусажени каждая от конца жезла. На

этих пластинках и на верхних плоскостях оковок сделаны поперечные штрихи: *a*, *c*, *d*, *b* (черт. 75). Длиною жезла называется расстояние (около 120 дюймов) между штрихами *a* и *b*, которое определяется посредством особого компаратора

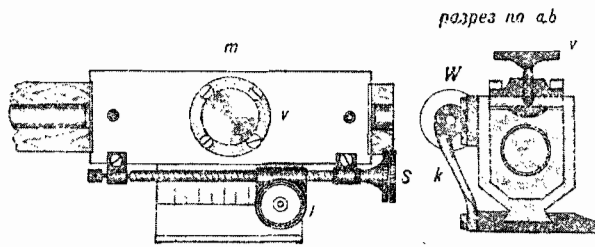


Черт 75

Лебедева, предложенного бывшим начальником геодезических работ в Болгарии русским военным геодезистом *Лебедевым*. Компаратор *Лебедева* состоит из нормальной меры и особого штанген-циркуля. Нормальная мера представляет собою медную линейку, разделенную от нуля на целые дюймы до 42-х; крайние дюймы — первый и сорок второй — подразделены каждый на сто частей, причем эти мелкие подразделения нанесены на врезанных в нормальную меру серебряных пластинках; температура нормальной меры определяется по вделанному в нее ртутному термометру. Штанген-циркуль представляет собою медный полый цилиндр, оправленный в дерево и несущий две обоймы *m* и *n* (черт. 76), закрепляющиеся винтами *v*, *г*. Нижние края обойм суть пластинки с построенными на их верх-



Черт. 76



Черт. 76

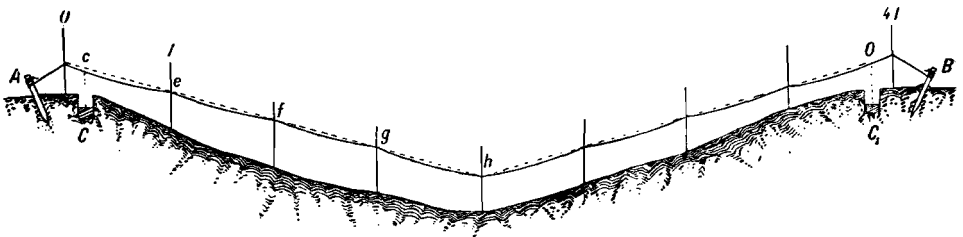
них (скошенных под углом в  $30^\circ$  к нижней грани обойм) плоскостях верньерами; длина каждого верньера равна 49 делениям, нанесенным на крайних дюймах нормальной меры, а число делений верньера равно 50-ти. Следовательно, точность верньера равна 0.0002 дюйма. Пластика обоймицы *m* прикреплена к ней наглухо, пластинка обоймицы *n* — подвижная: она передвигается посредством винта *W*, по которому ходит муфта *с* соединенная грильвами *k* с пластинкой — верньером. Безконечные винты *S*, *S* служат только для установки луп *l*, *l*.

Определение длины жезла помощью компаратора *Лебедева* следует делать во время измерения базиса два раза в день: первое компарирование

исполняется непосредственно перед приступом к измерению, а второе—тот-час по окончании измерения. Одно полное компарирование состоит из двух измерений жезла, исполняемых в прямом и обратном направлениях: при ходе в прямом направлении сперва измеряется I-ая часть жезла, (черт. 75) затем II-ая и, наконец, III-ья; при ходе в обратном направлении начинают с III-ей и кончают I-ой частью. Отдельное измерение каждой части жезла следует выполнять следующими двумя *полуприемами*. Первый полуприем начинается с того, что два наблюдателя прикладывают компаратор к жезлу, один из них передвигает затем обойму  $m$  так, чтобы расстояние между нулями верньеров сделалось бы весьма близким к измеряемому промежутку жезла; по закреплении обоймы  $m$  этот наблюдатель, пользуясь лупой, ставит нуль обоймы  $m$  на штрих жезла, а второй наблюдатель *после этого* устанавливает винтом  $W$  совмещение нуля обоймы  $n$  с другим штрихом жезла. Когда оба наблюдателя одновременно довольны совмещением нулей обойм со штрихами жезла, то компаратор переносят на нормальную меру и затем следуют: отсчет температуры нормальной меры; совмещение нуля верньера обоймы  $m$  с чертой первого дюйма \*) и одновременный отсчет по верньеру обоймы  $n$ ; совмещение нуля обоймы  $n$  с чертой 41-го дюйма и отсчет по верньеру  $m$ ; отсчет температуры. При переходе ко второму полуприему наблюдатели переменяются местами и исполняют все те-же действия, что и в первом полуприеме. (Следовательно, при указанном порядке полное определение длины жезла включает в себя исполнение 12-ти полуприемов, по два на каждую часть жезла в прямом измерении и по два-же на каждую часть жезла в обратном измерении).

Измерение базиса состоит из следующих действий:

1) *Провешивание линии и забивка кольев*. Прежде всего базис измеряется стальной лентой и во время этого измерения по линии базиса раскладывают через каждые 10 сажен деревянные колья длиной около 3 аршин и толщиной в два дюйма. Затем над первым базисным центром наблюдатель устанавливает теодолит и по указаниям этого наблюдателя рабочие приступают к забивке кольев, начиная с 40-го (сороковой кол — конец дневной



Черт 77

работы) и подвигаясь постепенно к началу базиса (к теодолиту); забивка ведется на глубину около двух футов. Кроме кольев, которые приходится между обозначающими начало и конец дневной работы точками  $C$  и  $C_1$  (базисными центрами), еще должны быть забиты за этими точками  $C$  и  $C_1$  колья  $0$ ,  $41$ ,  $A$  и  $B$  (черт. 77); последние два кола — короткие и толщину около 3 вершков — забиваются наклонно и служат для закрепления на них начала и конца бичевы.

\*) или второго дюйма, если измеряемая часть менее 40 дюйм.

2) *Отметка линии бичевы.* Бичева должна проходить над почвой на высоте несколько меньшей высоты груди наблюдателя; с другой стороны надлежит по возможности уменьшать число переломов линии бичевы в вертикальной плоскости. Наблюдатель при теодолите, вешивший линию базиса, устанавливает свой теодолит немного сбоку от базисного центра  $C$  и, напавив трубу на один из удаленных кольев, вращает ее слегка в вертикальной плоскости, отыскивая то положение трубы, при котором горизонтальная ее нить будет пересекать на удобной для измерения высоте все колья возможного длинного, примыкающего к  $C$  участка. По придании трубе надлежащего наклона, направляют ее сперва на самый дальний кол участка, на котором прибавают горизонтальную планку в месте, пересекаемом горизонтальной нитью трубы; эта планка должна быть на высоте над почвой, близкой к 1,3 метра, — иначе придется изменить либо угол наклона, либо намеченный ранее конец первого участка. По прибитии планки к последнему колу участка, труба наводится последовательно на все его остальные колья, на которых забивают гвоздики в местах, пересекаемых горизонтальной нитью трубы; при этой забивке гвоздиков положение трубы поверяют по планке. Когда отметки на первом участке сделаны, то теодолит переносят к концу с планкой и устанавливают его так, чтобы ось вращения трубы пришлась бы на одной высоте с планкой; последующая затем забивка гвоздиков во втором участке происходит совершенно так же, как и в первом участке и т. д.

3) *Измерение углов наклона.* Одновременно с производством отметок, трубу теодолита при двух ее положениях направляют на горизонтальную планку, прибитую на последнем коле участка и отсчитывают вертикальный круг теодолита. Следует для проверки измерять углы наклона и вперед, и назад — т. е. при каждой установке теодолита надлежит визировать как по линии предыдущего, так и последующего участков.

4) *Натягивание бичевы.* Бичева употребляется слегка просмоленная толщиной около полудюйма. — Конец бичевы привязывается крепко к колу  $A$ , затем ее разматывают и подвешивают на гвоздики, делая ею оборот около каждого кола в одну сторону. Натягивание бичевы выполняют (8 рабочих) сперва не сильно, а потом по истечении часов двух ее перетягивают туже. Рекомендуют бичеву натягивать с вечера, а затем на следующий день утром перед измерением вновь перетянуть; бичева считается достаточно натянутой, если стрелки провеса не превышают двух дюймов.

5) *Измерение.* Перед началом измерения посредством теодолита, поставленного в 3—4 сажнях от линии базиса на перпендикуляре к ней из  $C$ , получают на бичеве вертикальную проекцию первого базисного центра  $C$ . Эта проекция замечается на бичеве во-первых посредством надреза ножом который держит наблюдатель  $N—1$ , а во-вторых — когда этот нож будет затем убран — завязанным по надрезу шнурком. Когда нарезка, обозначающая проекцию  $C$  сделана, то наблюдатель  $N—1$  совмещает с нею, держа над нею нож, конечный штрих жезла  $a$ , и одновременно наблюдатель  $N—2$  отмечает острым ножом на бичеве другой конец жезла  $b$ ; после этого жезл отдается рабочим, которые переносят его далее; наблюдатель  $N—2$  остается на месте, наблюдатель  $N—1$  переходит к переднему концу жезла; по совмещении заднего штриха жезла наблюдателем  $N—2$  с острием своего ножа, наблюдатель  $N—1$  одновременно отмечает на бичеве передний конец жезла  $b$  и т. д. Так как жезл откладывается по бичеве, то является необходимым определение стрелок ее провеса в каждом пролете между двумя колами: зная эти стрелки можно перейти к длинам хорд  $ef$ ,  $fg$ ... (черт. 77) от измеренных жезлом длин дуг цепной линии. Измерение стрелок исполняется двумя особыми наблюдателями: один наблюдатель становится посредине между  $e$  и  $f$  и держит вертикально у бичевы линейку, имеющую нуль

вверху; другой наблюдатель визирует с узла  $e$  на узел  $f$  и заставляет первого наблюдателя поставить нуль линейки на прямую  $ef$ , после чего следует отсчет на линейке по середине бичевы.

Если при измерении уложилось  $n$  целых жезлов, причем остаток базиса оказался равным  $r$  то, называя через  $l$  длину жезла, получаем для длины бичевы  $D$  между проекциями на нее базисных центров  $C$  и  $C_1$  следующее выражение:

$$D = nl + r \dots \dots \dots (1)$$

Пусть из измерения компаратором *Лебедева* мы получили для длины жезла значение  $l_0$  причем допустим, что во время этого измерения-компарирования температура нормальной меры была  $t$ . Величину  $l_0$  должно рассматривать, как длину *отсчитанную* по нормальной мере, (или как разности отсчетов, взятых с меры) без принятия в расчет ни изменения в длине самой меры, обусловленного изменением ее температуры, ни неверности длины меры. Если при температуре  $t_0$  длина 42-х дюймов нормальной меры на самом деле равна  $42 + q$  дюймам, то при температуре  $t$  длина сорока двух делений меры будет равна:

$$42 + q + 42k(t - t_0) \text{ дюймам}$$

понимая под  $k$  — коэффициент расширения меры.

Следовательно, на каждые 42 деления нормальной меры приходится поправка:  $q + 42k(t - t_0)$  дюйма. Назовем чрез  $L_0$  значение длины бичевы, (между проекциями на нее базисных центров  $C$  и  $C_1$ ) выраженное в делениях нормальной меры; очевидно  $L_0 = nl_0 + r_0$ . Для перехода от  $L_0$  к  $D$ , т. е. к числовому значению той-же длины в *дюймах*, нужно ввести в  $L_0$  поправку:

$$\frac{q}{42} L_0 + kL_0 (t - t_0) \text{ дюймов}$$

Таким образом:  $L_0 = nl_0 + r_0$

$$D = nl_0 + \frac{q}{42} L_0 + kL_0 (t - t_0) + r \dots \dots \dots (2)$$

Чтобы перейти от  $D$  к сумме длин прямых  $ch$ ,  $ho \dots$  (черт. 77) совпадающих с хордами бичевы и образующих ломаную линию, соединяющую места перегибов бичевы, — необходимо ввести поправки за провес бичевы, причем на основании формулы (6) § 22 различие между длиной дуги бичевы и длиной соответствующей ей хорды должно принимать равным  $\frac{8h^2}{3a}$ , понимая под  $a$  длину пролета между двумя колами. Очевидно в  $D$  придется ввести поправку за провес, равную  $-\frac{8\sum h^2}{3a}$ . Поправка в длине базиса за наклон отдельных участков бичевы к горизонту будет, конечно, равна —  $-\frac{\sin^2 1'}{2} \sum i^2 d$ , причем чрез  $d$  названа длина наклонного участка, а чрез  $i$  — угол его наклона к горизонту, выраженный в минутах. Таким образом получаем следующие окончательные формулы для вычисления длины  $L$  базиса:

$$L_0 = nl_0 + r_0$$

$$L = L_0 + \frac{q}{42} L_0 + kL_0 (t - t_0) - \frac{8}{3a} \sum h^2 - \frac{\sin^2 1'}{2} \sum i^2 d \dots \dots \dots (3)$$

В формуле (3) не введено приведение длины базиса к уровню океана.

Обычно всегда базис по бичеве измеряют дважды — в прямом и обратном направлениях. По разностям результатов таких двойных измерений можно заключить, что средняя ошибка в длине базиса при измерении по бичеве не ниже  $\frac{1}{30000}$ , но конечно, при этом не принимаются в расчет влияния ошибок в определении длины жезла. Ошибки делений нормальной меры и ошибки в определении компаратором длины жезла весьма сильно искажают результат определения длины базиса из измерений по бичеве. Необходимо, чтобы нормальная мера была бы тщательно исследована и чтобы измерения длины жезла были бы довольно многочисленны — только при этих условиях можно надеяться вывести из измерения по бичеве длину базиса с ошибкой около  $\frac{1}{20000}$ .

В последнее время при применении способа *Струве* бичеву нередко заменяют проволокою. Проволока хранится намотанною на барабан и имеет длину 500 сажен при диаметре в 2 миллиметра; при измерении к кольям *A* и *B* привязывают наглухо особые зажимы, которые держат концы проволоки. При откладывании по проволоке мерного жезла, его штрихи отмечают посредством шипчиков: на передней грани шипчиков имеется поперечный штрих, который и совмещается со штрихом жезла.

**24. Заключение.** Скорость измерения прибором *Струве* не превосходит 300 м в день; при измерениях приборами *Ибаньес-Бруниера* имели подвиг за день на 240—360 м; пользуясь же прибором *Едерина* (усовершенствованным) измеряют в среднем за день в одном направлении 2 км. Уже отсюда вытекает, что при измерении семи или десяти километровых базисов первоклассных триангуляций прибор с проволоками доставляет огромные выгоды. Однако вопрос о высокой точности результатов, получаемых прибором *Гильома-Едерина*, решается положительно только в практике России и Америки. В Германии предпочитают до сих пор измерять базисы первоклассных триангуляций приборами с жезлами — (Прусского Геодезического Института).

В триангуляции II-го класса способ *Струве* измерения по бичеве или по проволоке с успехом может быть заменен измерением прибором *Едерина*, причем эталонирование проволоки может быть выполнено сравнительно за долго до измерения базиса (или спустя значительное время по измерении), или же эталонирование может быть даже заменено извлечением длины проволоки из сертификата, выданного на основании долговременных исследований проволоки в Главной Палате мер, в Международном Бюро мер и весов и т. п. — из за этого ошибка в базисе не превысит  $\frac{1}{200000}$ .

## ГЛАВА VI.

### Отдельные части геодезических угломерных инструментов.

Геодезические инструменты подразделяются на: *теодолиты*; *геодезические универсалы*; *вертикальные круги*. *Теодолиты* предназначены для точного измерения горизонтальных направлений или углов; вертикальный круг в теодолитах или совсем отсутствует или отсчитывается менее точно, чем круг горизонтальный. Универсальный инструмент характеризуется одинаковыми размерами горизонтального и вертикального кругов и одинаковою

точностью их отсчитывания; однако *геодезические универсалы* в подробностях конструкции более отвечают высоко-точному измерению горизонтальных направлений, чем определению вертикальных углов. *Вертикальные круги* предназначаются только для измерения вертикальных углов и при больших размерах и большой точности отсчитывания вертикального круга, имеют лишь небольшой горизонтальный круг—искатель, грубо отсчитываемый. *Вертикальные круги* применяют в триангуляционных работах только в Америке. В Европе, если в триангуляции измеряют, кроме горизонтальных, и вертикальные углы, то употребляют геодезические универсалы.

В дальнейшем будем считать, что в общих чертах устройство теодолита и универсального инструмента известно и что известны также из курса низшей геодезии некоторые подробности относительно устройства отдельных частей геодезических инструментов.

**25. Об уровнях.** В теодолитах уровни служат: 1) для приведения оси алидады (а иногда оси лимба) в вертикальное положение; 2) для определения наклона к горизонту оси вращения трубы; 3) для определения малых перемен в положении прямой, соединяющей нульпункты противоположных микроскопов или нули верньеров на вертикальном круге. Первая задача решается или при помощи уровней, прикрепленных к алидаде горизонтального круга\*), или при помощи уровня, ставящегося на цапфы горизонтальной оси инструмента. Вторая задача решается посредством точного уровня, ставящегося на цапфы горизонтальной оси инструмента, и возникает обычно не при измерениях углов в триангуляции, а при определении азимута некоторого направления. Третья задача решается посредством уровня, прикрепленного или к алидаде вертикального круга, или — к подставке трубы параллельно ее коллимационной плоскости.

Остановимся прежде всего на определении наклонности  $J$  оси уровня к горизонту по отсчетам, взятым на концах пузырька. Допустим сперва, что нуль делений шкалы уровня находится по середине его трубки и подпись делений возрастает в обе стороны от нуля. При такой подписи делений, отсчет соответствующий середине пузырька, очевидно равен наклонности  $\alpha$  оси уровня, выраженной в делениях уровня. Обозначим отсчеты по левому и правому концам пузырька соответственно чрез  $l$  и  $n$ . Если оба конца пузырька находятся по *одну* сторону от нуля, то  $\alpha = \pm \frac{l+n}{2}$ ; если же концы пузырька находятся по *разные* стороны от нуля, то  $\alpha = \pm \frac{l-n}{2}$ . Знак  $+$  или  $-$  при  $\alpha$  всего лучше согласовать со знаком *поправки*, которая *вводится в отсчет по горизонтальному или вертикальному кругу* за эту наклонность  $\alpha$ . В инструментах обычного устройства, т. е. с подписью делений на горизонтальном круге по ходу часовой стрелки, поправку в отсчет по этому кругу за наклон оси вращения трубы надлежит вводить со знаком плюс, когда левый конец оси выше правого для наблюдателя смотрящего от окуляра к объективу трубы. Очевидно в таких инструментах нужно принять при определении наклонности оси уровня, ставящегося на горизонтальную ось, формулы:

$$1) \alpha = \frac{l-n}{2} \text{ если концы пузырька находятся по разные стороны от нуля.}$$

$$2) \alpha = + \frac{l+n}{2} \text{ если оба конца пузырька лежат влево от нуля.}$$

$$3) \alpha = - \frac{l+n}{2} \text{ если оба конца пузырька лежат вправо от нуля.}$$

\*) а также к подставкам трубы.



Все эти формулы приводятся впрочем к одной: именно, если условиться отсчеты в левой от нуля половине трубки, производимые безразлично по левому или по правому концу пузырька, сопровождать знаком плюс, а отсчеты в правой от нуля половине трубки \*) — знаком минус, то наклон оси уровня, ставящегося на цапфы горизонтальной оси инструмента, равен:

$$\alpha = \frac{l+n}{2}; J = \frac{l-n}{2} \mu \dots \dots \dots (4)$$

понимая под  $\mu$  цену деления уровня.

Если подпись деления на трубке уровня возрастает от одного ее конца к другому и  $m$  — есть число, стоящее посредине трубки, то очевидно:

$$J = \pm [2m - (l+n)] \frac{\mu}{2}$$

и в этом случае мы легко приходим к таким формулам:

$$J = [2m - (l+n)] \frac{\mu}{2} \dots (5) \quad \text{— если нуль уровня у левого конца горизонтальной оси}$$

$$J = [(l+n) - 2m] \frac{\mu}{2} \dots (6) \quad \text{— если нуль уровня у правого конца горизонтальной оси.}$$

Обычно вертикальный круг теодолита вращается вместе с трубой и подпись делений на круге возрастает по ходу часовой стрелки. В таких инструментах поправка в отсчет по вертикальному кругу за наклонность оси уровня при алидаде такого круга должна быть положительной, если правый конец уровня выше левого (предполагая, что наблюдатель обращен лицом к кругу). Следовательно, если середина трубки уровня на алидаде вертикального круга подписана нулем, то нужно:

1) условиться отсчеты в правой половине трубки, выполняемые безразлично по правому или по левому концу пузырька, сопровождать знаком плюс, а отсчеты в левой от нуля половине трубки, производимые безразлично по правому или по левому концу пузырька — сопровождать знаком минус;

2) для определения наклонности оси уровня пользоваться при указанном условии формулой:  $J = (l+n) \frac{\mu}{2}$ .

Если же подпись делений на трубке уровня при алидаде вертикального круга возрастает в одну сторону, то для определения наклонности оси такого уровня надлежит пользоваться формулами:

$$J = [(l+n) - 2m] \frac{\mu}{2} \dots \text{если нуль у левого конца уровня.}$$

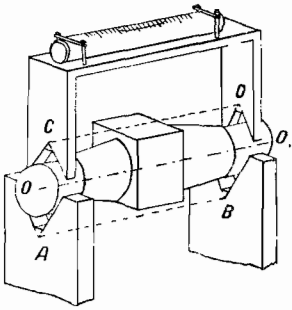
$$J = [2m - (l+n)] \frac{\mu}{2} \dots \text{если нуль у правого конца уровня.}$$

Вообще если с трубой вращается вертикальный круг, то направление от отрицательного к положительному концу уровня при вертикальном круге должно быть то же самое, что и направление подписи делений в верхней части вертикального круга.

Обратимся теперь к задаче *определения наклонности горизонтальной оси инструмента*. Эта ось вкладывается своими цилиндрическими цапфами в гнезда подставок трубы и под наклонностью ее к горизонту надлежит

\*) также безразлично по левому или правому концу пузырька.

понимать угол  $i$  между горизонтальной линией  $HH_1$  (черт. 79) и прямой  $OO_1$ , соединяющей центры круговых сечений цапф. При определении угла  $i$  необходимо иметь в виду, что уровнем, ставящимся на цапфы горизонтальной оси, определяется собственно наклонность *цапфенной* линии  $CD$ , (черт. 78), под которой следует понимать ребро двугранника со сторонами, касающимися построенного на цапфенных сечениях конуса и именно по тем его образующим, на которых приходится касания ножек уровня с цапфами. Назовем:



Черт 78

1) чрез  $AB$  *воображаемую* линию, которая находится в пересечении плоскостей, касающихся цапф снизу и именно по тем их образующим, по которым происходит касание цапф с гнездами для них в подставках трубы.

2) чрез  $p$ —угол между  $CD$  и  $OO_1$ , обусловленный неравенством диаметров цапф;

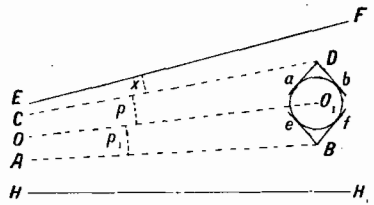
3) чрез  $p_1$ —угол между  $OO_1$  и  $AB$  обусловленный также неравенством цапф;

4) чрез  $\varphi$  и  $\psi$  соответственно углы  $aDb$  и  $eBf$  (черт. 79) между плоскостями вырезов в ножках уровня и между плоскостями вырезов в гнездах подставок;

5) чрез  $x$  угол между осью уровня  $EF'$  и цапфенной линией  $CD$ , обусловленный неравенством ножек уровня; очевидно, при горизонтальном положении прямой  $CD$  угол  $x$  представит собою уклонение середины пузырька уровня от середины его трубки (или будет равен отсчету по середине пузырька);

6) чрез  $S$ —сумму  $p + p_1$ .

Предположим далее, что при неизменном положении линии  $AB$  мы получим одно за другим следующие четыре значения для наклонности оси уровня: первое  $J_1^R$  при положении исправительных винтов уровня *вправо* и при положении вертикального круга *вправо-же* ( $R$ ); второе  $J_2^R$  по перестановке ножек уровня на цапфах, т. е. при положении исправительных винтов уровня *влево*, но при том-же положении горизонтальной оси в гнездах, что и при получении  $J_1^R$  (вертикальный круг *вправо*); третье  $J_2^L$  и четвертое  $J_1^L$ —после перекидки горизонтальной оси в гнездах подставок, т. е. при



Черт 79

положении вертикального круга *влево*, при-чем  $J_2^L$  получено при положении исправительных винтов уровня *влево*, (т. е. при том-же втором положении уровня, какое было при получении  $J_2^R$ ), а  $J_1^R$  — определено по новой перестановке ножек уровня на цапфах (т. е. при *первом* положении уровня, когда его исправительные винты находятся *вправо*). Обозначая чрез  $i_R$  и  $i_L$  наклонности линии  $OO_1$  до перекидки (круг—*право*) и после перекидки (круг—*лево*) горизонтальной оси, напишем легко из черт. 79:

$$\begin{aligned}
 J_1^R &= i_R + p + x; & J_2^R &= i_R + p - x \\
 J_2^L &= i_L - p - x; & J_1^L &= i_L - p + x
 \end{aligned} \quad \dots \dots (7)$$

Отсюда:

$$x = \frac{J_1^R - J_2^R}{2}; \quad x = \frac{J_1^L - J_2^L}{2} \dots \dots \dots (8)$$

Так как

$$i_L = i_R - 2 p_1,$$

то

$$S = \frac{J_2^R - J_2^L}{2}; \quad S = \frac{J_1^R - J_1^L}{2} \dots \dots \dots (9)$$

$$p = \frac{S \cdot \sin \frac{\psi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\psi}{2}}; \quad p_1 = \frac{S \sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\psi}{2}} \dots \dots \dots (10)$$

$$i = \frac{J_1^R + J_2^R}{2} - p; \quad i = \frac{J_2^L + J_1^L}{2} + p \dots \dots \dots (11)$$

Уравнениями (7) и выводимыми из них уравнениями (8), (9) и (11) решается поставленный выше вопрос об определении *наклонности горизонтальной оси инструмента*, и теперь необходимо остановиться на практических приемах использования этих уравнений. Сделаем сперва следующие замечания: 1) Величина  $x$  называется обычно поправкой за нульпункт; очевидно, что если нуль уровня на середине его трубки, то  $x$  есть *место нуля* этого уровня; 2) *первое* и *второе* положения уровня [ $J_1$  и  $J_2$ ] можно отмечать, как мы делали, указанием в журнале на положение исправительных винтов уровня—вправо или влево; но можно еще заключить в скобки цифры в одной половине трубки уровня и тогда первому положению уровня будет соответствовать отсчет в скобках по левому концу пузырька а второму положению—отсчет в скобках по правому концу пузырька; или наоборот (при этом предполагается, что концы пузырька всегда располагаются по разные стороны от нуля). 3) Отметку положения горизонтальной оси можно делать, указывая положение вертикального круга —  $R$  или  $L$ .

Величины  $p$  и  $p_1$  весьма малы и, конечно, постоянны в данном инструменте; точное определение их требует неподвижности линии  $AB$  при перекладках горизонтальной оси. Поэтому целесообразно определять  $p$  и  $p_1$  не в поле, во время наблюдений теодолитом, а в геодезической лаборатории,— т. е. поставив теодолит на каменный столб в помещении с постоянной температурой воздуха. Величину  $x$  надлежит определять наоборот во время полевых работ и даже по несколько раз в течение одного вечера при наблюдениях для определения азимута: значение этой величины изменяется вместе с изменениями, происходящими от разных причин в оправе уровня и (в особенности) в положении исправительных винтов; между тем определение  $x$  не затруднительно и в условиях полевой работы, если только уровень защищен от влияний резких перемен температуры воздуха.

Углы  $\varphi$  и  $\psi$  должны быть определены при построении инструмента или же на основании специального исследования. Имея значения этих углов, определение  $p$  и  $p_1$  всего лучше делать отдельно от определения  $x$ , применяя при этом уравнения (9) и (10) и измеряя наклонности  $J$  оси уровня при одном и том-же положении уровня, но при разных положениях горизонтальной оси, и выводя из такого материала сперва величину  $S$ . Ниже приводится пример такого определения  $S$ ,  $p$  и  $p_1$ —четырьмя приемами: каждый прием заключался в определении наклонности оси уровня: сперва

при положении вертикального круга  $R$ ; затем, по переключке оси, при положении круга  $L$  и, наконец, после вторичной переключки оси, снова при положении круга  $R$ ; уровень ставился на цапфы всегда в одном и том-же положении, именно исправительные винты были всегда вправо. Цена  $\mu$  деления уровня —  $4''{,}6$ ; углы  $\varphi$  и  $\psi$  соответственно были равны  $90^\circ$  и  $84^\circ$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ  $S$  В ТЕОДОЛИТЕ.

Положение оси	Отсчеты по уровню		Длина пузырька	Наклонности $J$ в полуделениях	$2S = J^R - J^L$ (в полуделениях)
	$l$	$n$			
$R$	+ 7,0	- 7,3	14,3	- 0,3	- 8,35
$L$	- 11,0	- 3,5	14,5	+ 7,5	
$R$	+ 6,6	- 8,0	14,6	- 1,4	
$R$	+ 5,8	- 8,8	14,6	- 3,0	- 7,45
$L$	+ 9,7	- 4,9	14,6	+ 4,6	
$R$	+ 5,9	- 8,6	14,5	- 2,7	
$R$	- 7,9	- 6,6	14,5	- 1,3	- 8,25
$L$	+ 11,9	- 2,6	14,5	+ 9,3	
$R$	- 7,7	- 6,9	14,6	- 0,8	
$R$	+ 6,0	- 8,5	14,5	- 2,5	- 8,15
$L$	+ 9,9	- 4,5	14,4	+ 5,4	
$R$	+ 5,7	- 8,7	14,4	- 3,0	

Величина  $S$  выражена в полуделениях уровня; окончательно  $S = -4.04$ .

Так как  $\text{Sin} \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , а  $\text{Sin} \frac{\psi}{2} = 0,669$ , то

$$p = +S \frac{0,669}{1,376} = 0,472 \times S$$

$$p = -1,907 \cdot 2''{,}3 = -4''{,}38$$

Если назвать чрез  $(R)$  и  $(L)$  наклоны цапфенной линии  $CD$  при круге  $R$  и при круге  $L$ , то не трудно видеть, что:

$$(R) = i_R + p = J_1^R - x = J_2^R + x$$

$$(L) = i_L - p = J_2^L + x = J_1^L - x \dots \dots \dots (12)$$

$$i_R = (R) - p; \quad i_L = (L) + p$$

Следовательно, если при некотором визировании трубой теодолита была

определена наклонность цапфенной линии ( $R$ ), то к ней нужно прибавить поправку  $+ 4''.38$ , чтобы получить соответствующую этому визированию наклонность горизонтальной оси  $OO_1$ .

В большинстве случаев в теодолитах  $\varphi = \psi = 90^\circ$ ; тогда формулы (10) становятся, конечно, излишними, а (9) может быть переписана так:

$$4 p = \frac{J_2^R - J_2^L}{2} + \frac{J_1^R - J_1^L}{2} \dots \dots \dots (9)$$

Нередко в практике, принимая равенство  $\varphi$  и  $\psi$ , определяют совместно  $x$  и  $p$ , следуя указанному перед написанием ур-ний (7) порядку определения одной за другой величин  $J_1^R$ ,  $J_2^R$ ,  $J_2^L$ ,  $J_1^L$ ; обычно, совместное определение  $x$  и  $p$  ведут несколькими четными приемами, считая один прием состоящим [в определении  $J_1^R$ ,  $J_2^R$ ,  $J_2^L$  и  $J_1^L$ ].

Вслед за сим приводится пример такого совместного определения  $x$  и  $p$  в малом универсале Керна, у которого  $\varphi = \psi = 90^\circ$ , а  $\mu = 22''.0$

Положение круга и уровня	Отсчеты уровня		Длина пузырька	В полуделениях	
	$л$	$п$		$J$	$2x$
$R п$	+ 9,9	- 10,1	20,0	- 0,2	- 3,5
$R л$	+ 11,6	- 8,3	19,9	+ 3,3	
$L л$	+ 11,1	- 8,7	19,8	+ 2,4	- 3,0
$L п$	+ 9,7	- 10,3	20,0	- 0,6	
$L п$	+ 9,3	- 10,7	20,0	- 1,4	- 3,4
$L л$	+ 10,9	- 8,9	19,8	+ 2,0	
$R л$	+ 11,1	- 8,7	19,8	+ 2,4	- 3,1
$R п$	+ 9,7	- 10,4	20,1	- 0,7	

Буква  $п$  указывает на положение исправительных винтов уровня вправо, а буква  $л$  — на положение тех-же винтов влево. Из приведенной таблицы получаем выражая  $J$   $x$  и  $p$  в полуделениях уровня:

$$4 p = +0,65 \text{ из первого приема}$$

$$4 p = +0,55 \text{ из второго приема}$$

$$\text{окончательно: } p = +0,15 = 0'',82; 2x = -3,25$$

Пусть теперь в журнале наблюдений, выполненных нашим универсалом Керна имеется для двух визирований такая запись двух отсчетов по уровню:

$$п \quad + 6,9 - 10,9 \dots \dots \dots \text{ при круге } R$$

$$л \quad + 10,5 - 7,3 \dots \dots \dots \text{ при круге } L$$

Предполагая, что во время этих наблюдений  $x$  имело то самое значение, которое было выведено при исследованиях инструмента Керна в при-

веденном выше примере, получаем следующие, соответствующие нашим записям, значения наклонов горизонтальной оси в полуделениях уровня:

$$\text{для первого визирования: } -4,0 + 1,63 - 0,15 = -2,52$$

$$\text{для второго визирования: } +3,2 - 1,63 + 0,15 = +1,72$$

причем в первом визировании наклон цапфенной линии был  $-2,37$ , а во втором  $+1,57$ .

Заметим, что если при вычислении  $p$  мы вычитаем из наклонности оси уровня, определенной при круге  $R$ , наклонность оси уровня, определенную при круге  $L$ , то при выводе  $i_R$  приходится  $p$  вычитать из наклонности цапфенной линии, а при выводе  $i_L$  — прибавлять к наклонности цапфенной линии. Определив тем или иным приемом  $p$ , мы должны очевидно при наблюдениях сперва получать наклонности ( $R$ ) и ( $L$ ) цапфенной линии, а от них уже с помощью  $p$  переходить к наклонности горизонтальной оси  $OO_1$ . Эти наклонности цапфенной линии можно при наблюдениях получать двояко: 1) при каждом отсчитывании горизонтального круга производить измерения наклонности  $J$  оси уровня дважды — при первом и втором положениях уровня, с перестановкой его ножек на цапфах; среднее из таких двух наклонностей оси уровня очевидно и будет равно искомой наклонности цапфенной линии; 2) перед и после наблюдений произвести определение поправки  $x$  за нульпункт\*), а затем при каждом визировании определять наклонность цапфенной линии по одной из формул:

$$(R) \dots J_1^R - x = J_2^R + x$$

$$(L) \dots J_2^L + x = J_1^L - x$$

если только при выводе  $x$  из наклонности  $J_1$  вычитается  $J_2$ .

Один прием определения  $x$  состоит обычно из измерений наклонностей оси уровня четыре раза: первый раз — в первом положении уровня; второй — во втором, по перестановке уровня на цапфах оси; третье — во втором-же положении уровня, но только после покачивания его на цапфах; четвертое — по вторичной перестановке уровня, т. е. вновь в первом его положении.

В дальнейшем приведены выписки из журналов наблюдений дающие примеры определения величины  $x$ .

ПРИМЕР 1-ый.

Положения уровня	Отсчеты		Длина пузырька	$J$
	$l$	$n$		
1	10,3	30,5	20,2	-0,8
2	32,5	12,2	20,3	+4,7
2	32,6	12,2	20,4	+4,8
1	10,4	30,6	20,2	-1,0

\*) при определении азимута следует применять и первый и второй из указанных приемов.

Здесь имеем дело с уровнем, у которого посредине трубки стоит цифра 20; очевидно, первым положением уровня считается то, при котором нуль его находится у левого конца горизонтальной оси, и поэтому:

$$J_1 = 2m - (\lambda + n) = 40 - 40,8 = -0,8 \text{ (см. ур—ние 5).}$$

В среднем имеем:  $J_1 = -0,9$ ;  $J_2 = +4,75$

Следовательно  $x = \frac{J_1 - J_2}{2} = -2,83$  полуделения.

Нетрудно видеть, что если за первое положение уровня считается то, когда его нуль находится на левом конце горизонтальной оси, а  $x$  вычис-

ляется как  $\frac{J_1 - J_2}{2}$ , то, при *обоих* положениях уровня, нужно в ур—ниях

(5) и (6) прибавить к *сумме*  $(\lambda + n)$  поправку за нульпункт и тогда левая часть каждого из этих уравнений обратится в искомую наклонность цапфенной линии. В самом деле:

$$(R) = J_1 - x = [2m - (\lambda + n)] - x = [2m - (\lambda + n + x)]$$

$$(R) = J_2 + x = [(\lambda + n) - 2m] + x = [(\lambda + n + x) - 2m]$$

Если в журнале наблюдений имеем запись:  $\frac{\lambda}{10,9}, \frac{n}{31,3}$  то очевидно имели первое положение уровня и наклонность цапфенной линии будет равна  $40 - (42,2 - 2,83) = +0,63$ .

Надлежит здесь отметить, что если имеем уровень с нулем на конце его трубки и с подписью делений только в одну сторону, то следует поправку за нульпункт  $x$  заменить во всех предыдущих рассуждениях и формулах *местом нуля* уровня. В самом деле, легко сообразить, что если  $m$  в (5) и (6) *заменить чрез место нуля*, то  $J_1$  и  $J_2$  *обращаются в искомые наклонности цапфенной линии*. Так как место нуля  $M$  равно  $\frac{(\lambda + n)_1 + (\lambda + n)_2}{2}$ ,

то в нашем примере имеем:

$$M = \frac{10,3 + 30,5 + 32,5 + 12,2}{2} = 42,75$$

$$M = \frac{32,6 + 12,2 + 10,4 + 30,6}{2} = 42,90$$

или  $M = 42,83$ . При записи в журнале:  $\frac{\lambda}{10,9}, \frac{n}{31,3}$  имеем наклонность цапфенной линии  $42,83 - (10,9 + 31,3) = +0,63$ .

Пример 2-ой. При определении  $x$  получена такая запись:

$\lambda$	$n$	$J$
10,0	(1,7)	+ 8,3
(6,5)	5,4	+ 1,1
(6,4)	5,4	+ 1,0
10,1	(1,8)	+ 8,3

Первое положение уровня есть то, когда половина трубки с цифрами в скобках располагается направо. Имеем в среднем:  $J_1=8.3$ ;  $J_2=1.05$ ;  $x=\frac{8.3-1.05}{2}$ ;  $x=+3.62$ . Так как для вычисления наклонностей цапфенной линии имеем в данном уровне формулы:

$$(R)=J_1-x=l-(n)-x=l-[(n)+x]$$

$$(R)=J_2+x=(l)-n+x=[(l)+x]-n$$

то делают заключение, что поправку за нульпункт нужно придавать к отсчету в скобках при обоих положениях уровня и таким образом исправленный отсчет вводить в формулу (4) для получения вместо  $J$  наклонности цапфенной линии (при этом необходимо  $x$  вычислять как  $\frac{J_1-J_2}{2}$ , а за первое положение уровня считать то, когда отсчет по правому концу пузырька в скобках). Если напр. имеем в журнале запись:

$$\begin{matrix} l & n \\ (9,5) & 2,4 \end{matrix} \text{ то } (R)^* = 13,12 - 2,4 = +10,72$$

Надлежит еще отметить, что в практике нередко совершенно опускают определение  $p$  и  $p_1$ . потому что из наблюдений, сделанных при двух положениях трубы, получается в среднем результат, свободный от обусловленных этим опущением (или пренебрежением неравенства цапф) погрешностей.

Точное определение цены деления уровня и исследование правильности кривизны его трубки выполняются посредством особого прибора, называемого *экзаменатором* или *испытателем* уровней; (черт. 80).

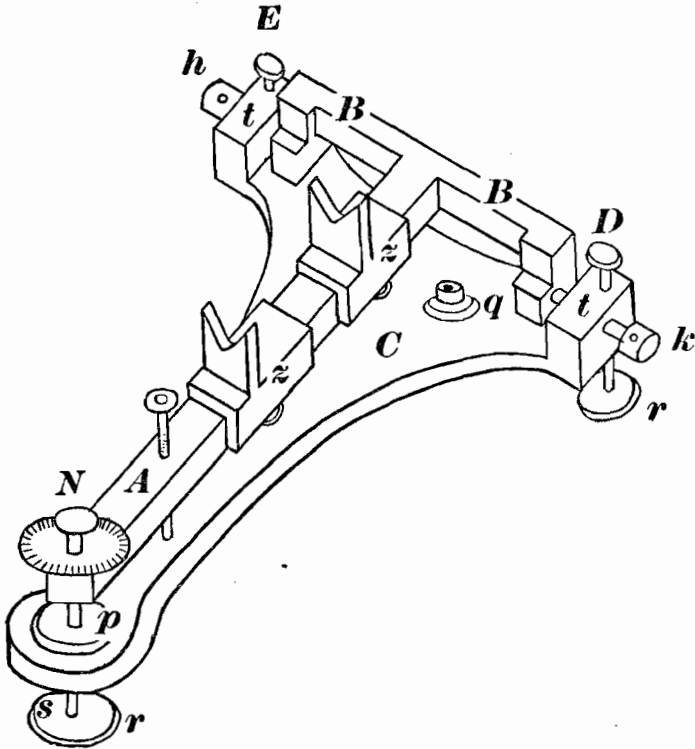
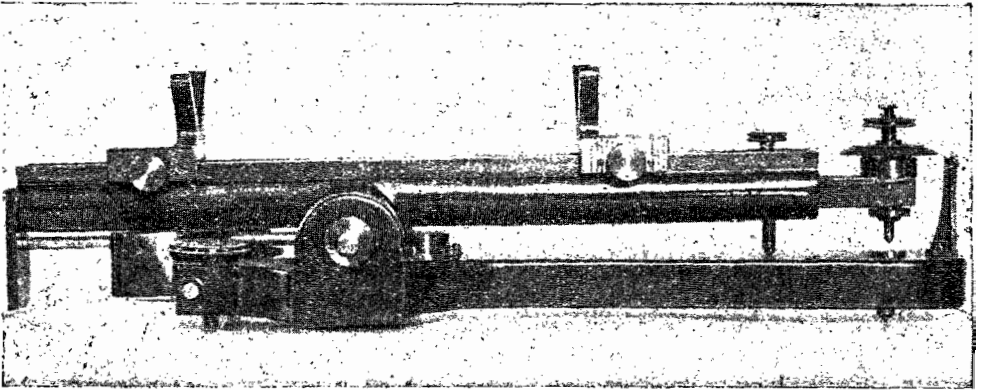
Прибор этот состоит: 1) из длинной полосы  $A$  с придатком к ней  $B$  в виде короткого поперечного бруска (полоса  $A$  и поперечина  $B$  изготавливаются из одного куска металла), 2) из массивного основания  $C$  с выступами  $t$ , чрез которые проходят горизонтальные стержни винтов  $h$  и  $k$ ; эти винты заканчиваются остриями, входящими в выточенные в гранях поперечины  $B$  конические гнезда. Очевидно, что острия винтов  $h$  и  $k$  образуют ось, около которой может свободно вращаться (в вертикальной плоскости) полоса  $A$ ; 3) из точно нарезанного с весьма малым шагом винта  $N$ , имеющего матку в конце полосы  $A$  и опирающегося своим концом (в виде усеченного конуса с отлично-отшлифованною нижнею плоскостью) на стальную пластинку  $p$ , наглухо привинченную к основанию  $C$  и имеющую отлично-шлифованную в плоскость верхнюю грань. Чрез выступы  $t$  проходят еще вертикальные винты  $E$  и  $D$ , упирающиеся концами в подкладки  $r$ ; две точки опоры, доставляемые основанию  $C$  концами винтов  $E$  и  $D$ , дополняются третьей — в виде острия *мужой* ножки  $S$ .

По полосе  $A$  могут передвигаться и закрепляться в любом положении двое салазок  $ZZ$ , снабженные наверху вилками, на которых при исследовании покоится уровень. Винт  $N$  имеет шляпку с диаметром около 2,5 см, окружность которой разделена на 120 или на 180 частей; деления шляпки отсчи-

\*) или — все равно —  $L$ .



тываются по указателю, укрепленному на полосе  $A$  (он не показан на чер. 80). Обычно расстояние оси винта  $N$  от оси испытателя  $hk$  берется при



Черт. 80.

данной величине шага винта  $N$  такое, чтобы одно деление шляпки этого винта соответствовало бы вращению линейки  $A$  на угол в одну секунду. На основании  $C$  имеется круглый уровень  $q$ ; кроме того к испытателю прилагается малый цилиндрический уровень  $m$  для накладывания его на верхние плоскости бруска  $B$  и полосы  $A$ .

При исследовании уровня, испытатель должен быть поставлен на солидном каменном столбе, изолированном совершенно от пола. Порядок исследования уровня следующий: наложив на верхнюю грань бруса  $B$  уровень  $t$  и действуя винтами  $E$  и  $D$  приводят одновременно на середину пузырек как этого, так и круглого уровня  $g$ ; затем, наложив уровень  $t$  на полосу  $A$  и действуя винтом  $N$ , приводят пузырек его на середину. После этого кладут на салазки  $Z$  исследуемый уровень и ставят указатель винта  $N$  либо на нулевой отсчет, либо на отсчет, кратный десяти, вращая во всяком случае винт  $N$  менее, чем на полуоборота; поставив-же вновь уровень  $t$  на брусок  $B$  и действуя винтами  $E$  и  $D$ , устанавливают пузырек исследуемого уровня в конце его трубки, обращенном к винтам  $E$  и  $D$ , следя в то же время за тем, чтобы пузырек уровня  $t$  оставался бы на середине. Выждав несколько минут, делают теперь отсчет по концам пузырька исследуемого уровня и по шляпке винта  $N$ ; затем, ввинчивая винт  $N$ , вращают шляпку его на 20, 30... вообще на  $n$  делений, причем число  $n$  кратно десяти и соображено заранее так, что при повороте винта  $N$  на это число делений, пузырек уровня проходит треть или четверть всего перемещения, которое он может иметь, двигаясь от одного конца трубки уровня к другому. Сделав после такого вращения винта  $N$  на  $n$  делений отсчеты по концам пузырька, вращают снова винт  $N$  (ввинчивая его) на то же число делений  $n$  и после этого вращения вновь отсчитывают по концам пузырька и т. д.—до тех пор, пока пузырек не займет крайнего положения в конце трубки, обращенном к винту  $N$ . Доведя пузырек до такого крайнего положения, винтами  $E$  и  $D$  вновь перегоняют его в конец трубки обращенный к брусу  $B$ , наблюдая при этом за тем, чтобы пузырек уровня  $t$  оставался-бы на середине; после надлежащей установки, продолжают указанный порядок исследования—т. е. ввинчивая винт  $N$  на  $n$  делений, после каждого такого ввинчивания отсчитывают по концам пузырька, а приведя—после ряда перегонов—пузырек уровня в примыкающий к винту  $N$  конец трубки уровня, снова винтами  $E$  и  $D$  перегоняют его в первоначальное положение.

После ввинчивания (в результате всех перегонов уровня) винта  $N$  на некоторое *целое* число  $a$  оборотов, которое считают достаточным, заканчивают первый *полуприем* и переходят ко *второму* полуприему исследования, именно: перекалывают уровень на салазках  $Z$ , вывинчивают винт  $N$  на  $a$  оборотов и действуя винтами  $E$  и  $D$  приводят пузырек исследуемого уровня в конец трубки, прилегающий к брусу  $B$ , следя одновременно за стоянием на середине пузырька уровня  $t$ . Когда описанный переход ко второму полуприему будет закончен, то далее исполняют все те-же действия что и в первом полуприеме, т. е. после каждого ввинчивания винта  $N$  на  $n$  делений, отсчитывают уровень, а по доведении пузырька уровня в прилегающий к винту  $N$  конец его трубки, действуют винтами  $E$  и  $D$ , и т. д. до тех пор, пока винтом  $N$  не пройдут  $a$  целых оборотов.

Перекалкой уровня на салазках при переходе ко второму полуприему достигается то, что в этом полуприеме пузырек уровня двигается в обратном направлении по отношению к делениям на трубке уровня, чем в первом полуприеме; последнее-же обстоятельство ведет к тому, что неправильности кривизны трубки уровня и неровности шлифовки этой трубки будут во втором полуприеме влиять вообще *иначе*, чем в первом полуприеме.

Пример. На испытателе *Гейде* исследовался уровень малого вертикального круга *Ренсолда*; в помещенной ниже таблице этого исследования приведены: в графах ее, обозначенных цифрой 1, отсчеты по винту  $N$ ; в графах, обозначенных цифрой 2—отсчеты по концам пузырька; в графах, обозначенных цифрой 3—перемещения пузырька в полуделениях уровня.

1-ый полуприем.

2-ой полуприем.

1-ый полуприем.				2-ой полуприем.			
1	2		3	1	2		3
0	59,1	34,9		180	35,4	59,7	
60	47,9	23,7	22,2	120	24,2	48,5	22,4
120	36,9	12,6	22,1	60	13,0	37,4	22,3
180	25,9	1,5	22,1	0	1,6	26,0	22,8
0	58,5	34,3		180	35,0	59,3	
60	47,6	23,3	21,9	120	23,8	48,1	22,4
120	36,6	12,2	22,1	60	12,6	36,9	22,4
180	25,6	1,2	22,0	0	1,2	25,4	22,9

Температура + 15 R

Порядок заполнения этой таблицы указан стрелками. Называя: крайнюю часть трубки, примыкающую к нулю — I-ю частью, среднюю — II-ю частью, имеем, что 60 секунд испытателя соответствуют такому числу полуделений в разных частях трубки:

	I-ая часть.	II-я часть.	III-ья часть.
1-й полуприем . . . . .	{ 22,1	22,1	22,2
	{ 22,0	22,1	21,9
2-й полуприем . . . . .	{ 22,9	22,4	22,4
	{ 22,8	22,3	22,4
Среднее . . . . .	22,45	22,22	22,22

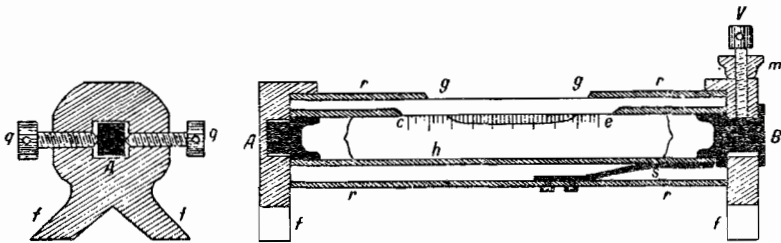
Во втором полуприеме скорость движения пузырька была ббольшая, чем в первом полуприеме, и это различие должно приписать шероховатостям внутренней поверхности трубки уровня. Кривизна трубки уровня может быть принята постоянной на всем ее протяжении; цена полуделения

$$\frac{\mu}{2} = 2'',70.$$

Если образовать среднее из каждой пары чисел, стоящих в графах 3-их приведенной выше таблицы в одной и той же ее строчке, то эти средние будут свободны от влияния причин, которые действуют пропорционально времени (напр. постепенное возрастание температуры помещения) и потому по колебаниям таких средних выводов можно судить о достоинстве уровня. В нашем примере имеем:

22,3	22,15
22,2	22,25
22,45	22,45

При употреблении уровня (в исследованиях и наблюдениях) необходимо считаться с значительной чувствительностью этого прибора по отношению к теплоте.—Прежде всего отметим значительное изменение длины пузырька вместе с переменной температуры окружающего воздуха. В уровне с ценой деления около 5", длина пузырька сокращается на 0,4 деления при возрастании температуры на 1°. Вместе с убыванием длины пузырька, при возрастании температуры воздуха, убывает заметно чувствительность уровня: короткий пузырек мало подвижен; точные уровни снабжаются поэтому воздушными камерами. Длина пузырька при наблюдениях должна составлять от 0,3 до 0,4 длины всей трубки уровня. Быстрые и значительные перемены температуры воздуха вызывают такие изменения в форме металлической оправы уровня, которые в свою очередь обуславливают натяжения в стеклянной его трубке, приводящие к изменениям в положении пузырька уровня (в то время, как в положении вертикальной или горизонтальной оси инструмента, нивелируемой уровнем, не происходит никаких изменений). Закрепление трубки уровня в металлической оправе вообще всегда рассчитано на температуры, близкие к комнатной; при слишком низких и при слишком высоких температурах в этом закреплении происходят расстройств, сказывающиеся при наблюдениях в безпричинных по видимому смещениях пузырька уровня. Одностороннее нагревание уровня вызывает сдвиг пузырька в сторону источника тепла; чем резче такое нагревание, тем быстрее и более смещение пузырька. Медленное нагревание уровня солнцем вызывает хотя и малое, но постоянное утягивание (ход) пузырька в сторону солнца. Из изложенного следует, что если в геодезической работе требуются точные определения наклонностей оси уровня, то: 1) при наблюдениях в поле необходимо защищать уровень зонтом; 2) оправа уровня должна быть устроена так, чтобы в ней трубка его была-бы хорошо защищена от перемен температуры наружного воздуха, и от односторонних нагреваний



Черт. 81

источниками света—(солнцем, лампой). Это достигается в значительной степени тем, что патрон *А с е Вн* (черт. 81), несущий трубку уровня, заключается в металлическую наружную трубку *rr* с верхнюю стеклянную часть *gg*: (часто наружная трубка *rr* делается вся стеклянная); воздушный слой, заключенный между трубкой *rr* и патроном *А с е Вн* отлично защищает трубку уровня от влияния быстрых перемен температуры наружного воздуха и от влияния односторонних нагреваний уровня. Приводимая на черт. 81 оправа уровня, предложенная *Эртелем*, замечательна еще тем, что в ней, по видимому, достигается прочность закрепления трубки уровня без давления на нее металлической его оправы: конец *А* патрона, несущего трубку уровня, соединяется с наружной его оправой лишь посредством ос-

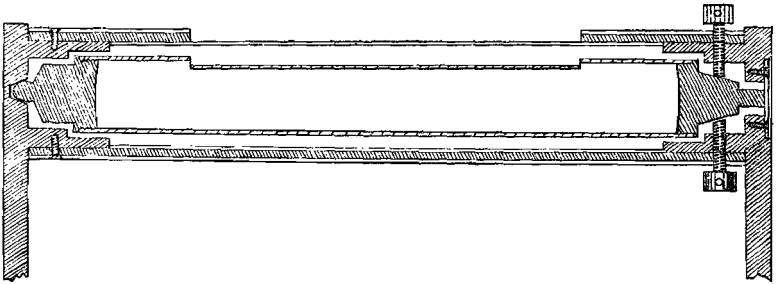
триев двух винтов *qq*; на другой конец *B* того-же патрона, входящего в широкую выборку в боковой стенке оправы, давит сверху винт *V* (снабженный контр-гайкой *m*) которому противодействует пружина *S*.

На черт. 82 изображен уровень точных инструментов, изготавливаемых механиком *Ваншафом*.

В заключение параграфа необходимо еще напомнить:

1) что при отсчитываниях уровня может весьма значительно влиять параллакс—вследствие того, что стенки трубки уровня имеют достаточную толщину; рекомендуется отсчитывание по концу пузырька производить, смотря не сверху, а сбоку—так, чтобы конец пузырька представился-бы в профиль, резко очерченным.

2) что вследствие прилипания жидкости к стенке трубки, пузырек уровня не сразу и не всегда доходит до *высшего* в геометрическом смысле



Черт 82

положения на трубке уровня; вследствие этого принимают за правило: а) выждать несколько времени прежде, чем отсчитывать уровень; б) устанавливать пузырек уровня движением его только в определенном направлении; так, при точных нивелировках и при измерениях зенитных расстояний принимают за правило пузырек уровня устанавливать всегда ввинчиванием соответственного элевационного винта или винта при алидаде вертикального круга.

По исследованиям *Рейтерца* установка пузырька уровня на средину выполняется со средней ошибкой  $\pm 0,09 \sqrt{\mu}$ , а определение наклонности оси уровня по отсчетам на концах пузырька — с средней ошибкой  $0,20 \sqrt{\mu}$ .

**26. О верньере.** В инструментах, употребляемых для измерения углов на пунктах тригонометрической сети, горизонтальные круги отсчитываются в настоящее время преимущественно микроскоп-микрометрами. Но отсчитывание вертикальных кругов нередко в этих инструментах выполняется посредством *десятисекундных* верньеров; точно также встречаются теодолиты и с горизонтальными кругами, отсчитываемыми десятисекундными верньерами: такие теодолиты вполне пригодны для измерений в сетях III класса, а отчасти и в сетях II класса. Предполагая известным устройство верньера и пользование им, остановимся сперва на задаче определения действительной точности *t* верньера. Допустим, что при построении верньера была разделена на  $n+1$  частей дуга лимба, заключающая в себе  $n-\rho$  его делений, причем  $n$ —есть число целое, а  $\rho$ —малая дробь. Обозначая через  $\mu$  цену деления на лимбе, имеем для вычисления точности *t* верньера такое уравнение:

$$t = \mu - \frac{n-\rho}{n+1} \mu = \frac{\mu}{n+1} [n+1 - (n-\rho)] = \frac{\mu}{n+1} [1+\rho]$$

$$t = t_0 + t_0 \rho \dots \dots \dots (1)$$

В ур-нии (1) чрез  $t_0$  обозначена задуманная механиком точность верньера. Для определения  $\rho$  в ур-нии (1) совместим нулевой штрих верньера с некоторым штрихом лимба и заметим затем на левом конце верньера номер его штриха, совпадающего с некоторым штрихом лимба; назовем этот номер чрез  $n+1-k$ . При малом  $\rho$  номер совпадающего штриха лимба можно с высокой степенью приближения считать равным  $n-k$  \*). Очевидно имеем теперь такую пропорцию:

$$\frac{n-\rho}{n-k} = \frac{n+1}{n+1-k}$$

Откуда

$$\rho = \frac{k}{n+1-k} \dots \dots \dots (2)$$

Когда  $\rho$  надежно определено, то отсчет  $N$  по верньеру будет вычисляться так:

$$N = r \cdot t = r \cdot t_0 + r \cdot t_0 \rho = N_0 + N_0 \rho \dots \dots \dots (3)$$

причем под  $r$  понимается номер совпадающего (на верньере) штриха, а под  $N_0$  — отсчет, который был бы записан, если бы точность верньера приравнять задуманной механиком. Поправку  $N_0 \rho$  всего лучше брать из таблицы, составленной по аргументу отсчета  $N_0$ .

Пример. В универсальном инструменте Керла нуль верньера последовательно совмещался со штрихами лимба  $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ \dots 315^\circ$ , и при каждом таком совмещении производился отсчет на левом конце верньера; результат этого исследования внесен в приводимых вслед за сим табличках.

Лимб.	Отсчет по верньеру.	$k$ .
$0^\circ$	9'50"	+ 1,0
$45^\circ$	9'55"	+ 0,5
$90^\circ$	10'00"	+ 0
$135^\circ$	9'50"	+ 1,0
$180^\circ$	9'55"	+ 0,5
$225^\circ$	9'55"	+ 0,5
$270^\circ$	9'55"	+ 0,5
$315^\circ$	9'50"	+ 1,0
	$\Sigma k =$	+ 5,0
	$k =$	+ 0.63

$$\rho = + \frac{0.63}{59.37} = + 0.011$$

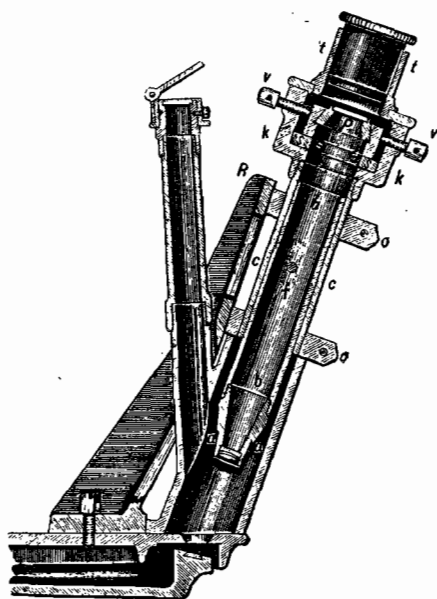
$N_0$	$N_0 \rho$
1'	+ 0'',7
3'	+ 2'',0
5'	+ 3'',3
7'	+ 4'',6
9'	+ 5'',9

Если диаметр лимба около 16—18 см, то расстояние между штрихом лимба и штрихом верньера, отстоящими друг от друга на точность  $t$  верньера, усматривается наблюдателем посредством простой лупы, увеличивающей в 6—8 раз под углом вообще немного меньшим  $30''$ , если  $t=10''$ . Две точки, расстояние между которыми усматривается под таким малым углом

\*)  $k$  может быть и дробным числом, так как хорошо построенный верньер позволяет оценивать несовпадения до четвертой доли точности верньера.

зрения, будут казаться глазу почти слившимися, но при рассмотрении двух длинных, параллельных друг другу и приходящихся один над другим штрихов, притом весьма тонко и тщательно нарезанных на светлом фоне, мы имеем несравненно более благоприятные условия, чем при рассмотрении двух точек; если расстояние между штрихом лимба и верньера усматривается под углом в  $30''$ , то несовпадение таких двух штрихов для глаза несомненно. Таким образом, при диаметре лимба около 17-ти см, при тщательно нанесенных на верньере и на лимбе штрихах и при достаточно хорошем прилегании нижнего края и нижней грани верньера к плоскости лимба,—несовпадение штриха верньера с штрихом лимба на десять секунд видно достаточно отчетливо, и при соблюдении указанных условий, *предельную* ошибку отсчета по десятисекундному верньеру следует считать *не превышающей пяти секунд*.

**27. Шкаловой микроскоп.** Оправа *aa* ахроматического об'ектива микроскопа „со шкалой“ ввинчивается (см. черт. 83) в трубку *bb*, которая может в небольших пределах иметь продольное движение внутри внешней трубки *cc* — насколько это допускают продольные вырезы, которые сделаны с двух сторон в трубке *cc*, в которых перемещаются винты *F'*, закрепляющие трубку *bb*. К трубке *cc* привинчивается сверху камера *K*, несущая в себе двойные салазки *SS* и четыре винта *vv*: нижняя салазка перемещается двумя из этих винтов, не показанными на чертеже, по направлению перпендикулярной к плоскости чертежа горизонтальной линии и ведет с собою верхнюю салазку (по ослаблении пары верхних винтов *vv*); верхние-же два винта перемещают лишь верхнюю салазку, которая несет на себе стеклянную тщательно шлифованную пластинку *p* с нанесенной на ней весьма мелкой шкалой. Верхняя трубка *t*, ввинчивающаяся в камеру *K*, несет в себе окуляр Рамсдена. Трубка *cc* описанного микроскопа со шкалой помещается в кольцевых обоймах *OO*, составляющих одно целое с рычагами



Черт 83

*RR*, которые являются отростками подставок трубы теодолита; в обоймах *OO* имеются разрезы, стягиваемые винтами; по ослаблении этих винтов, микроскоп может свободно перемещаться в обоймах.

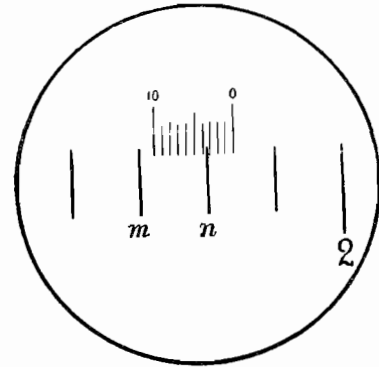
При наблюдениях микроскопом, расстояние *d* его об'ектива от лимба менее  $2F'$  и более  $F'$ , понимая под  $F'$  фокусное расстояние об'ектива. Увеличение  $V$  об'ектива микроскопа, как известно из оптики, равно:

$$V = \frac{F'}{d - F'} \dots \dots \dots (1)$$

Называя-же чрез  $f$  — фокусное расстояние окуляра и чрез  $\omega$  — расстояние ясного зрения, для увеличения  $W$  микроскопа можно написать ур-ние:

$$W = \frac{F'}{d - F'} \cdot \frac{\omega}{f} \dots \dots \dots (2)$$

Пусть линейное расстояние  $mn$  (черт. 84) между двумя смежными штрихами на лимбе равно  $l$ , а линейная величина десяти делений шкалы, нанесенной на пластинке  $p$ —пусть равна  $S$ .



Черт 84

Если мы желаем получить изображение штрихов лимба в плоскости шкалы  $p$  и вместе с тем потребуем, чтобы линейная величина изображения промежутка  $l$  между двумя смежными штрихами лимба была-бы в точности равна десяти делениям шкалы, то тогда для определения деления  $d$  имеем уравнения:

$$\frac{S}{l} = \frac{F'}{d-F'}; \quad d-F' = \frac{F' \cdot l}{S}; \quad d = F' + \frac{F' \cdot l}{S} \dots (3)$$

а для определения расстояния  $D$  пластинки  $p$  от об'ектива:

$$D = \frac{dS}{l} = \frac{F' \cdot d}{d-F'} \dots \dots \dots (4)$$

Отсюда становится ясною самая идея микроскопа со шкалой. В самом деле: задаваясь расстоянием  $d$  об'ектива микроскопа от лимба, рассчитаем при помощи первого из ур-ний (3) величину  $S$  десяти делений шкалы; отложим это расстояние  $S$  на пластинке  $p$  и разделив его на 10 частей, установим трубку  $bb$  так, чтобы расстояние об'ектива от шкалы сделалось-бы равным  $D$ , определенному из ур-ния (4); наконец, двигая весь микроскоп в обоймах  $OO$ , установим об'ектив его на том расстоянии  $d$  от лимба, которым задавались при расчетах  $S$  и  $D$ . Указанное построение шкалы, вместе с надлежащей установкой микроскопа, приводят, конечно, к возможности весьма просто измерять делениями шкалы любые части деления  $l$  лимба. Так как, вследствие достаточного увеличения  $W$  микроскопа, угол, под которым усматривается чрез окуляр микроскопа одно деление шкалы достаточно велик, то при помощи шкалы микроскопа можно оценивать очень мелкие доли,—напр., сотые—лимбового деления. Чем меньше разность  $d-F'$ , тем более увеличение об'ектива микроскопа, тем на большее число частей можно разделить отрезок  $S$  и тем более мелкие доли деления лимба будут оцениваться посредством шкалы микроскопа. Однако, вместе с возрастанием увеличения об'ектива чрезвычайно быстро убывает яркость изображения и вместе с убыванием  $d-F'$  быстро растут погрешности изображения; обычно в практике  $V$  всегда не более *четырёх*. Крайний правый штрих шкалы удлиненный и подписанный нулем, является указателем или *нульпунктом* микроскопа со шкалой; подпись делений на шкале возрастает всегда справа на лево. Как именно выполняются отсчеты посредством шкалы микроскопа—это ясно из чертежа 84, на котором отсчет равен  $1^{\circ}43',4$  (деления на лимбе десятиминутные).

Надлежащая установка шкалового микроскопа выполняется следующим образом:

- 1) устанавливают окуляр так, чтобы штрихи шкалы представлялись резко очерченными;
- 2) перемещают микроскоп в обоймах  $OO$  до тех пор, пока деления лимба не сделаются ясно видимыми, и одновременно вращают микроскоп в обойме так, чтобы штрихи шкалы располагались-бы параллельно штрихам лимба;



3) действуя верхней парой винтов  $v$  достигают такого положения шкалы при котором нижней ее край несколько заходит за верхние концы изображений лимбовых штрихов (см. черт. 84);

4) действуя нижней парой винтов  $v$  достигают того, что-бы нульпункты обоих микроскопов теодолита отстояли-бы друг от друга по возможности точно на  $180^\circ$ ;

5) перемещая весьма мало микроскоп в обоймах  $OO$ , добиваются полного исчезновения параллакса штрихов шкалы относительно штрихов лимба и совместив, движением наводящего винта алидады теодолита, нулевой штрих шкалы с некоторым штрихом лимба, определяют, отсчитыванием на левом краю шкалы — сколько делений ее соответствуют одному делению лимба. Если окажется, что одному делению лимба соответствует *более* десяти делений шкалы, то освободив винт  $f$  *вдвигают* несколько трубку  $bb$  в трубку  $cc$ , уменьшая расстояние  $D$ , а затем дают всему микроскопу движение в обоймах  $OO$  *вниз* настолько, чтобы штрихи лимба снова сделались бы ясно видимыми и исчез-бы параллакс.

Если одному делению лимба соответствует *менее* десяти делений шкалы, то нужно трубку  $bb$  *выдвигать* из трубки  $cc$  (увеличивая  $D$ ), а затем весь микроскоп передвигать в обоймах  $OO$  *вверх*. Несмотря на выполнение установки, указанной только что в пункте 5-ом, десять или вообще  $n$  делений шкалы не оказываются точно соответствующими одному делению лимба. Допустим, что в результате измерений, исполненных на разных местах лимба оказалось в среднем выводе, что одному делению лимба соответствует  $n - \rho$  делений шкалы. Называя чрез  $\mu$  цену деления шкалы и чрез  $i$  — цену деления на лимбе, имеем:

$$\mu = \frac{i}{n - \rho} = \frac{i}{n \left[ 1 - \frac{\rho}{n} \right]} = \frac{i}{n} \left[ 1 + \frac{\rho}{n} \right]$$

$$\mu = \frac{i}{n} + \frac{i}{n} \cdot \frac{\rho}{n}$$

причем вследствие малости  $\frac{\rho}{n}$ , в предыдущей выкладке при вычислении  $\left[ 1 - \frac{\rho}{n} \right]^{-1}$  были отброшены члены порядка  $\left( \frac{\rho}{n} \right)^2$  и более высокого. Очевидно что  $\frac{i}{n}$  есть цена деления шкалы, задуманная механиком; называя ее чрез  $k$ , имеем:

$$\mu = k + k \cdot \frac{\rho}{n}$$

Величина  $\rho$  называется *gun'ом* микроскопа. Очевидно, если со шкалы был взят отсчет в  $x$  ее делений, то в угловой мере этот отсчет будет равен  $\mu x$  и вычислится так:

$$\mu x = xk + xk \cdot \frac{\rho}{n}$$

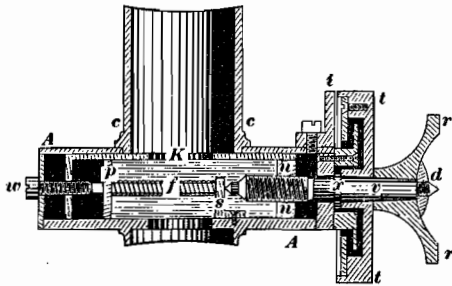
Малую поправку  $xk \cdot \frac{\rho}{n}$  всего лучше брать из специальной таблички, составленной по аргументу  $xk$ .

Пример. В теодолите *Рейсса*, принадлежащем Межевому Институту и снабженном микроскопами со шкалой,  $t$  равно десяти минутам,  $n = 20$  и  $k$  равно одной минуте. Из исследований оказалось, что  $10,2$  деления

шкалы соответствуют одному делению на лимбе. Следовательно  $n-s=10,2$  или  $\rho=-0,2$ . Если неисправленный отсчет равен  $301^{\circ}26',3$ , то исправленный отсчет будет:  $301^{\circ}26',3-6.3 \times \frac{0.2}{10}$  или будет равен  $301^{\circ}26',17$ .

**28. Микроскоп-микрометр.** В теодолитах, предназначенных для измерения углов в триангуляциях первого и второго класса, горизонтальные лимбы отсчитываются посредством микроскоп-микрометров, позволяющих—при достаточных размерах лимба—иметь отсчитывание со средней ошибкой меньшей одной секунды.

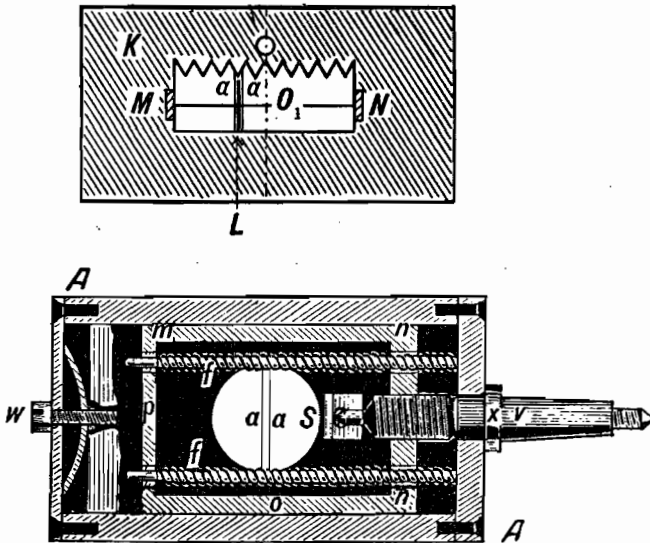
С алидадой теодолита микроскопы соединяются посредством рычагов  $RR$  (черт. 83), идущих от подставок трубы и имеющих кольцевые обоймы  $OO$ , в которые и входит основная трубка  $cc$  микроскопа (черт. 85 и 83). На трубку  $cc$  навинчивается сверху коробка микрометра, а снизу в нее входит трубочка  $bb$  несущая объектив и иллюминатор (черт. 85, 83 и 49).



Черт. 85.

Идея филлярного микрометра и его устройство уже были разобраны в § 18 в общих чертах; здесь надлежит остановиться более подробно на том устройстве микрометра, которое употребляется в больших теодолитах в последнее время.

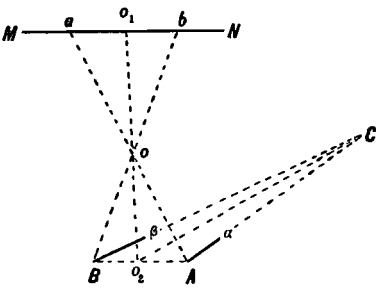
В двух боковых стенках прямоугольной коробки  $AA$  микрометра имеются пазы, в которых посредством тонконарезанного винта  $v$  передви-



Черт. 86.

гается рама  $mnop$  с натянутой на ней парой весьма близких друг к другу нитей  $aa$  (черт. 86). Винт  $v$  имеет матку в более толстой  $m$ , чем все остальные, стенке рамы  $mnop$ ; конец этого винта упирается в боковую пло-

скость упора  $S$ , привинченного к нижней стенке коробки  $A$ . На выступающую из коробки микрометра часть стержня винта  $v$  насаживается барабан  $t$ , рукоятка  $r$  и гайка  $d$ : при завинчивании этой гайки рукоятка  $r$  прижимает барабан  $t$  микрометра к уширению  $x$  в стержне винта  $v$  и в результате получается неизменное соединение барабана с винтом  $v$ . Через отверстия, сделанные в стенках  $n$  и  $p$ , проходят два стержня  $ff$ , правые концы которых укреплены в стенке коробки  $A$ ; каждый стержень  $f$  обвит пружиной, один конец которой опирается в стенку  $p$  рамы *тпор*, а другой—в стенку коробки  $A$ . При описанном устройстве, винт  $v$ , очевидно, не может иметь поступательного движения, и при отсутствии погрешностей в нарезке этого винта, при отсутствии мертвого хода и при правильном устройстве контакта конца винта  $v$  с плоскостью упора  $S$ ,—вращение винта  $v$  будет пропорционально поступательному движению нитей  $aa$ . Мертвый ход винта  $v$ , очевидно, в значительной мере парализуется действием пружин  $ff$ , благодаря которому нарезки винта  $v$  всегда прижаты к нарезкам матки \*). Сверху на раму *тпор* накладывается невплотную, едва ее касаясь, двусторчатая пластинка  $K$ : чрез створ ее, стоящий вертикально, проходит винт  $W$ ; в верхнем-же ее створе, (лежащем на рамке *тпор*) имеется вырез  $MN$  с натянутой в нем нитью  $MN$  и с зубцами, соответствующими каждый одному обороту винта  $v$ ; средний зубец отмечен кружечком, высверленным в пластинке  $K$ . Вырез расположен симметрично относительно оси микроскопа; посредством винта  $W$  можно в небольших пределах перемещать пластинку  $K$  и этим изменять положение нуля микрометра (см. § 18—пластинка  $K$  однозначуща с гребенкой  $q$ ). При вращении винта  $t$  пластинка  $K$  остается неподвижною. Окружность барабана  $t$  подразделяется на 60 или на 120 частей; отсчет барабана выполняется по индексу  $i$ . Пусть  $C$  (черт. 87) есть центр лимба,  $O$ —центр объектива,  $O_1$ —нульпункт микрометра и  $O_2$ —проекция нульпункта на плоскость лимба (о нульпункте и его проекции на плоскость отсчитываемой шкалы см. в § 18).



Черт. 87.

и  $O_2$ —проекция нульпункта на плоскость лимба (о нульпункте и его проекции на плоскость отсчитываемой шкалы см. в § 18). Пусть далее  $Aa$  и  $B\beta$  суть те смежные штрихи лимба, между которыми приходится проекция нульпункта  $O_2$ , причем точки  $A$  и  $B$  пусть лежат в плоскости, перпендикулярной к радиусу  $O_2C$ . Назовем чрез  $a$  и  $b$  изображения точек  $A$  и  $B$ , находящиеся в плоскости микрометра и приходящиеся на нити  $MN$ . Отсчет лимба при помощи микроскоп-микрометра состоит из прочтения номера  $s$  младшего штриха  $Aa$  и из измерения угла  $O_2CA$ . Так как хорды  $O_2A$  и  $BA$  пропорциональны с одной стороны углам  $O_2CA$  и  $BCA$  а с другой стороны—отрезкам  $O_1a$  и  $ab$ , то измерив микрометром эти последние отрезки, мы получаем возможность вычислить угол  $O_2CA$ , который назовем чрез  $x$ , из такой пропорции:

$$x = \frac{i}{n} \cdot a \dots \dots \dots (1)$$

понимая под  $i$ —цену деления лимба (угол  $BCA$ ), а под  $a$  и  $n$ —соответственно длины отрезков  $aO_1$  и  $ab$ , выраженные в делениях микрометра. Обычно при движении нитей микрометра от нульпункта к изображению  $a$  младшего штриха мимо индекса  $i$  проходят деления барабана  $t$  с посте-

\*) Однако, очевидно, что работа пружин  $ff$  правильна при ввинчивании винта  $v$  и не совершенна при его вывинчивании.

пенно возрастающими подписями. Следовательно,  $a$  равно отсчету, взятому с зубчатки выреза  $MN$  и с барабана  $t$  в момент наведения нитей микрометра на младший штрих  $Aa$ . Наведение нитей на некоторый штрих лимба  $L$  (см. нижнюю половину чертежа 86) делается с весьма малой линейной ошибкой потому, что здесь приходится оценивать на расстоянии наилучшего зрения неравенство ширин двух узких светлых полосок, ограниченных каждая нитью  $a$  и ближайшим к ней краем изображения штриха  $L$ .

Средняя ошибка в отсчете по лимбу, обусловленная ошибкой наведения нитей микрометра на штрих лимба, обычно, при радиусе лимба в 10 см, около  $\pm 0''.5 - \pm 0''.6$ . Что касается ошибки в отсчете обусловленной неправильностями работы винта  $v$ , то при надлежащем порядке пользования микрометром и при правильном его устройстве и сборке, об них обычно не приходится говорить.

Механик устраивает микроскоп-микрометр, задаваясь всегда наперед тем числом  $n_0$  делений, на которое барабан должен будет вращаться при перегоне нитей со штриха  $A$  на смежный штрих  $B$ ; это число  $n_0$  соответствует всегда *целому* числу *полуоборотов* винта и выбирается по тем или иным соображениям, ведущим к удобству вывода *направлений* из отсчетов по микроскоп-микрометрам. Так как шаг винта  $v$  выбирается заранее, то выбором  $n_0$  наперед, очевидно, устанавливается размер отрезка  $ab$  (черт. 87). Другими словами, задаваясь наперед числом  $n_0$ , мы тем самым определяем увеличение  $V$  объектива микроскопа, а следовательно устанавливаем наперед расстояние  $d_0$  объектива микроскопа от лимба и расстояние  $D_0$  между объективом и микрометром. Называя: через  $F'$  — фокусное расстояние объектива, чрез  $\mu$  — поступательное движение нитей микрометра при изменении отсчета по барабану на одно деление и чрез  $p$  расстояние  $AB$  (черт. 87) имеем:

$$V = \frac{n_0 \mu}{p} = \frac{F'}{d_0 - F'}; \quad \frac{1}{d_0} + \frac{1}{D_0} = \frac{1}{F'} \dots \dots \dots (2)$$

Из этих уравнений по известным  $F'$  и  $n_0 \mu$  должны быть рассчитаны  $d_0$  и  $D_0$ , а затем должна быть выполнена механиком и надлежащая установка микроскопа. Такая установка, конечно, с течением времени нарушится. Если вместо  $D_0$  и  $d_0$ , мы имеем в данный момент  $d$  и  $D$ , то и отрезок  $ab$  будет измеряться не  $n_0$ , а  $n$  делениями барабана, и различие  $n$  от  $n_0$  укажет на необходимость исправления установки микроскопа.

Выведем теперь правила для перехода от неправильной установки микроскопа, характеризующейся числом  $n$ , к правильной его установке, которой соответствует число  $n_0$ . Пусть:

$$\Delta d = d - d_0; \quad \Delta D = D - D_0; \quad \Delta n = n - n_0.$$

Имеем:

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F'}; \quad \frac{n \mu}{p} = \frac{D}{d} \dots \dots \dots (3)$$

$$d = F' + F' \cdot \frac{p}{n \mu}; \quad D = F' + F' \cdot \frac{n \mu}{p} \dots \dots \dots (4)$$

Пренебрегая  $\Delta d^2$ ,  $\Delta n^2$ , получаем после дифференцирования ур-ния (4):

$$\Delta d = -F' \frac{p}{\mu n_0^2} \Delta n = F' \frac{p}{\mu n_0^2} (n_0 - n) \dots \dots \dots (5)$$

$$\Delta D = F \cdot \frac{\mu}{p} \Delta n = F \cdot \frac{\mu}{p} (n - n_0) \dots \dots \dots (6)$$

Из (3) напишем:

$$\frac{\mu}{p} = \frac{D_0}{d_0 n}; \quad \frac{p}{\mu n_0} = \frac{d_0}{D_0}; \quad F = \frac{D_0 d_0}{d_0 + D_0}$$

и делая на основании последних равенств замены в (5) и (6), найдем:

$$\Delta d = \frac{d_0^2}{D_0 + d_0} \cdot \frac{n_0 - n}{n_0}; \quad \Delta D = \frac{D_0^2}{D_0 + d_0} \cdot \frac{n - n_0}{n_0}$$

Обозначив чрез  $M$  расстояние от лимба до микрометра, напишем еще:

$$M = D + d; \quad \Delta M = \Delta D + \Delta d; \quad \Delta M = \frac{n - n_0}{n_0} (D_0 - d_0) \dots \dots \dots (7)$$

Из формул (5), (6) и (7) следует:

1) если увеличение микроскопа слишком *велико*, то

$$n > n_0; \quad d < d_0; \quad D > D_0; \quad M > M_0$$

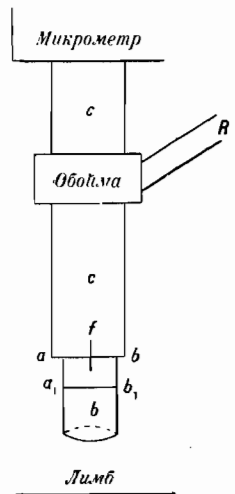
2) если увеличение микроскопа слишком *мало*, то

$$n < n_0; \quad d > d_0; \quad D < D_0; \quad M < M_0;$$

Следовательно, если увеличение микроскопа слишком *велико*, то нужно

*вдвинуть* на  $\frac{D_0^2}{D_0 + d_0} \cdot \frac{n - n_0}{n_0}$  трубочку  $bb$ , несущую об'ектив, в трубку  $cc$  и после этого перемещать весь микроскоп в обоймах *вниз*, приближая его к лимбу на  $\frac{n - n_0}{n_0} (D_0 - d_0)$ . Если же увеличение микроскопа слишком *мало*,

то нужно сперва *выдвинуть* трубку  $bb$  из трубки  $cc$  (увеличивая тем  $D$ ), а затем перемещать *вверх* весь микроскоп в обоймах. *Перемещение  $\Delta D$  об'ектива относительно микрометра очевидно более перемещения  $\Delta M$  микроскопа в обоймах.* Величины этих перемещений  $\Delta D$  и  $\Delta M$  рассчитываются в практике не по формулам (6) и (7), а следующим образом. Пусть при некоторой установке микроскопа мы получили для  $n$  значение  $n_1$ , меньшее  $n_0$ . Отметив на об'ективной трубочке  $b$  (черт. 88) посредством нарезки ножом конец  $ab$  основной трубки  $cc$  микроскопа, выдвинем несколько трубочку  $b$  из трубки  $cc$  — так что ранее сделанный штрих займет теперь положение  $a_1 b_1$ ; затем, двигая микроскоп вверх в обоймах, снова достигают того, что изображения штрихов лимба придется в плоскости микрометра, и при этой второй установке микроскопа аккуратно оцределяют соответствующую ей величину  $n_2$ . Кроме того, тщательно измеряют расстояние  $ab$  от  $a_1 b_1$ , которое назовем чрез  $S$ . Для первой установки микроскопа имеем:



Черт. 88.

$$D_1 - D_0 = \frac{D_0^2}{D_0 + d_0} \cdot \frac{n_1 - n_0}{n_0} = \Delta D \cdot \frac{n_1 - n_0}{n_0}$$

Для второй установки микроскопа:

$$D_2 - D_0 = \frac{D_0^2}{D_0 + d_0} \cdot \frac{n_2 - n_0}{n_0} = A \cdot \frac{n_2 - n_0}{n_0}$$

Отсюда:

$$D_2 - D_1 = S = A \cdot \frac{n_2 - n_1}{n_0}$$

$$D_2 - D_0 = \frac{S(n_2 - n_0)}{n_2 - n_1} \dots \dots \dots (8)$$

Рассчитав по формуле (8) величину  $D_2 - D_0$ , нужно будет на эту величину, если она окажется положительной, вдвинуть объективную трубочку в трубку *сс*, так, чтобы расстояние штриха  $a_1b_1$  от *ab* сделалось-бы равным  $S \frac{S(n_2 - n_0)}{n_2 - n_1}$ . Если  $D_2 - D_0$  окажется отрицательным, то придется выдвигать объективную трубочку, переходя от расстояния  $S$  между  $a_1b_1$  и *ab* к расстоянию  $S + \frac{S(n_0 - n_2)}{n_2 - n_1}$ .

После исполненной, согласно приведенных расчетов, установки объективной трубочки микроскопа внутри трубки *сс*, останется лишь передвинуть микроскоп в обоймах так, чтобы изображения штрихов лимба пришлись-бы в плоскости микрометра.

Нужно оговориться, что приведенный способ установки микроскоп-микрометра не применяется опытными геодезистами: они предпочитают просто итти последовательными приближениями, памятуя лишь, что при  $n > n_0$  нужно вдвигать объективную трубочку, а при  $n < n_0$ —выдвигать её, и не делая ни расчетов пропорции  $\frac{S(n_2 - n_0)}{n_2 - n_1}$ , ни отметок ножом на объективной трубочке *bb*; с двух—трех приближений обычно установка заканчивается.

Как-бы тщательно ни была проделана установка микроскопа, все-таки  $n$ ,  $D$  и  $d$  окажутся несколько отличающимися от  $n_0$ ,  $d_0$  и  $D_0$ . Но эти различия будут весьма малы, и поэтому за несовпадение  $n$  с  $n_0$  можно будет достаточно просто вводить поправки в отсчеты по микроскоп-микрометру.

**29. Формулы отсчетов при помощи микроскоп-микрометров.** Величина  $\frac{i}{n}$ , стоящая множителем в ур-ни (1) § 28 есть угловая цена  $\mu$  одного деления микрометра. Если номер младшего штриха  $A$  есть  $S$ , а отсчет по микрометру при наведении нитей на младший штрих равен  $a$ , то отсчет  $L$  по лимбу вычислится так:

$$L = S + \mu a.$$

При получении  $L$  не довольствуются промером расстояния от нуля до младшего штриха  $A$ , но измеряют еще микрометром и расстояние от нуля до старшего штриха  $B$ . При вычислении  $L$ , отсчетами с микрометра, полученными при наведении его нитей на младший и на старший штрихи, можно воспользоваться различно—в зависимости от того, будем-ли мы считать  $n$  постоянным для данного теодолита или нет; это различие использования двух отсчетов по микрометру, из которых каждый

достаточен для вывода искомого  $L$ , и вызывает различия формул по которым может быть вычислено  $L$ . Другой причиной различия формул для вычисления  $L$  является различие в величине вращения винта микрометра при измерении им промежутка  $i$  на лимбе: в одних микрометрах  $i$  измеряется вращением винта на *один* оборот; в других — на *целое* число оборотов; в третьих — на нечетное целое число полуоборотов.

а) Рассмотрим сперва тот случай, когда по мысли механика промежуток  $i$  должен был бы измеряться одним оборотом винта. Пусть на ободке барабана  $t$  нанесено  $p$  делений; очевидно, что в рассматриваемом случае  $n_0 = p$ . Действительное число  $n$  делений барабана, измеряющее промежуток  $i$ , будет несколько отличаться, конечно, от  $n_0$ . Разность  $\rho$ , равная  $n_0 - n$ , [ $n = n_0 - \rho$ ] называется *run'ом* микрометра. Так как при перемещении нитей от нуля к младшему штриху мимо индекса микрометра проходят деления барабана с постепенно возрастающими подписями, то в рассматриваемом случае отсчет  $a$ , непосредственно взятый с барабана при наведении нитей на младший штрих, и выразит в делениях барабана расстояние  $ao_1$  (черт. 87) изображения этого штриха от нуля к нулю индекса микрометра. С другой стороны, при перемещении нитей от нуля к изображению старшего штриха, мимо индекса будут проходить постепенно убывающие, начиная с  $n_0$ , деления барабана, и если в момент наведения нитей на старший штрих по барабану был сделан отсчет  $b$ , то  $p - b = n_0 - b$  выразит расстояние  $o_1b$  от нуля к изображению старшего штриха. Сумма  $a + (p - b)$  измеряет следовательно промежуток  $i$  на лимбе, т. е.:

$$a + (p - b) = n = n_0 - \rho = p - \rho$$

или:

$$\rho = b - a; \quad n = p - \rho$$

Из последних уравнений, конечно, вытекает, что при правильной установке микрометра  $b = a$  и что, если  $b < a$  и  $\rho < 0$ , то  $n > n_0$ . Угловая цена деления барабана определится очевидно так:

$$\mu = \frac{i}{p - \rho}$$

Предположим теперь, что  $n$  — постоянно; тогда и  $\rho$  будет постоянно. Допустим, что из особого исследования мы определили это постоянное  $\rho$ . Если каждый раз при определении отсчета  $L$  мы будем наводить нити микрометра и на младший, и на старший штрихи лимба, то для  $L$  из такого материала получаются два независимые друг от друга определения. Именно, имеем:

по наведению на младший штрих

$$L_a = S + a \cdot \frac{i}{p - \rho}$$

по наведению на старший штрих

$$L_b = S + i - (p - b) \cdot \frac{i}{p - \rho}$$

Окончательный отсчет образуют, как арифметическую средину из  $L_a$  и  $L_b$ , т. е.:

$$L = S + \frac{i}{2} + \frac{a}{2} \cdot \frac{i}{p - \rho} - \frac{p - b}{2} \cdot \frac{i}{p - \rho}$$

$$L = S + \frac{i}{2} + \frac{a + b - p}{2(p - \rho)} \cdot i = S + \frac{i}{2} + \frac{i}{2p} \cdot \frac{[a + b - p]}{[1 - \frac{\rho}{p}]}$$

Вследствие малости  $\frac{\rho}{p}$  пренебрежем  $(\frac{\rho}{p})^2$  и напомним:

$$L = S + \frac{i}{2} + \frac{i}{2p} [a + b - p] + \frac{i \cdot \rho}{2p^2} [a + b - p]$$

$$L = S + \frac{i}{p} \cdot \frac{a + b}{2} + \frac{\rho}{2p} \cdot \frac{i}{p} [a + b - p]$$

Величина  $\frac{i}{p}$  равна, конечно, задуманной механиком цене  $\delta$  деления барабана; поэтому напишем:

$$L = S + \frac{a + b}{2} \delta + \frac{\rho}{2p} \cdot \delta \cdot (a + b - p) \dots \dots \dots (A)$$

Формула (A) есть окончательная при постоянном  $n$  и при измерении промежутка  $i$  лимба одним оборотом винта  $v$ .

Если предположить теперь, что при разных установках алидады теодолита  $n$  различно, то в этом случае наведение на старший штрих служит очевидно не для получения второго независимого вывода  $L$ , а для определения  $n$ , соответствующего данной установке алидады и для вывода  $\rho$ , равного  $b - a$ . Имеем:

$$L = S + a \cdot \frac{i}{p - \rho}; \quad \rho = b - a$$

Следовательно:

$$L = S + a \cdot \frac{i}{p - (b - a)} = S + a \cdot \frac{i}{p} \left[ 1 - \frac{b - a}{p} \right]^{-1}$$

$$L = S + a\delta + \frac{b - a}{p} \cdot a\delta \dots \dots \dots (B)$$

b) Переходя к случаю, когда винт микрометра делает  $m$  полных оборотов при переходе нитей с младшего штриха на старший, а на ободке барабана нанесено  $p$  делений, прежде всего заметим, что в этом случае  $n_0 = mp$ . В отличие от ранее рассмотренного, в этом случае  $a$  и  $b$  не будут непосредственно взятыми с барабана числами, а будут каждое вычисляться как сумма непосредственного отсчета по барабану с произведением  $p$  на некоторое число целых оборотов, отделяющих нульпункт от младшего штриха. Помня, что при движении нитей к старшему штриху отсчет по барабану убывает, мы должны в данном случае отсчет в нульпункте считать за нуль, если нити наводятся на младший штрих, и полагать его равным  $mp$ , если нити наводятся на старший штрих. Число  $n$  в данном случае будет вычисляться так:

$$n = a + (mp - b) = n_0 - \rho = mp - \rho$$

Отсюда

$$\rho = b - a$$

Как и ранее, заключаем, что при правильной установке микроскопа  $b = a$ , и что при  $\rho < 0 - n > n_0$ . Кроме того, так как  $\rho$  малая величина, то  $b$  и  $a$  будут заключать в себе одинаковое число полных оборотов винта. Вычисляя теперь отсчет  $L_a$  по наведению нитей на младший штрих и  $L_b$  — по наведению на старший штрих, напишем:

$$L_a = S + a \frac{i}{pm - \rho}; \quad L_b = S + i - (pm - b) \frac{i}{pm - \rho}$$



Очевидно, что все ранее выведенные формулы можно сразу применить к рассматриваемому случаю, если в них заменить везде  $p$  чрез  $pm$ . Поэтому, полагая  $n$  и  $p$  постоянными, имеем:

$$L = S + \frac{a+b}{2} \delta + \frac{p}{2pm} \delta [a+b-pm] \dots \dots \dots (C)$$

$$\delta = \frac{i}{pm}$$

Считая же  $n$  и  $p$  переменными, напишем:

$$L = S + a\delta + \frac{b-a}{pm} a\delta \dots \dots \dots (D)$$

с) Если на ободке барабана нанесено  $p$  делений, а винт вращается на нечетное число полуоборотов при перемещении нитей микрометра с младшего на старший штрих, то  $n_0 = p [m - 1/2]$ , понимая под  $m$  целое число. В этом случае отсчеты  $a$  и  $b$  будут не равны, конечно, непосредственно прочтенным числам на барабане. Отсчет  $a$  образуется как сумма непосредственно прочтенного на барабане числа с произведением  $p$  на целое число оборотов, содержащихся в промежутке от нуля до младшего штриха. Что же касается отсчета  $b$  на старший штрих, то особенность данного случая заключается в том, что при движении нитей к старшему штриху, мы не можем отсчет в нульпункте полагать равным  $n_0 = p (m - 1/2)$ , а должны будем считать его равным или  $pm$ , или  $p (m - 1)$  так как в момент совмещения индекса с нулем барабана имеем начало целых оборотов винта.

Если при наведении на младший штрих на барабане сделан отсчет  $a_1$ , меньший  $\frac{p}{2}$ , то тогда при наведении нитей на старший штрих по барабану будет прочтено число большее  $\frac{p}{2}$  и отличающееся от первого на  $\frac{p}{2}$ ; этому случаю, как не трудно сообразить, соответствует принятие в нульпункте при движении нитей к старшему штриху числа  $pm$ . В самом деле, называя расстояние нуля от старшего штриха чрез  $x$ , а число целых оборотов в отсчете  $a$  чрез  $r$ , и полагая  $rpm$   $p$  равным нулю, имеем:

$$pr + a_1 + x = p (m - 1/2)$$

Отсчет  $b$  должно положить равным  $pr + a_1 + \frac{p}{2}$ ; вычитая его из неизвестного значения  $y$  того числа, которое должно считать в нульпункте при движении нитей к старшему штриху, имеем:

$$x = y - (pr + a_1 + \frac{p}{2})$$

Отсюда  $y = pm$

Если при наведении на младший штрих на барабане прочтено число  $a_1$ , большее  $\frac{p}{2}$ , то тогда при наведении нитей на старший штрих, на барабане будет прочтено  $a_1 - \frac{p}{2}$ ; для этого случая  $y = p (m - 1)$ . Эти оба подслучая приводятся, конечно, к одному, и поэтому рассмотрим вывод формулы для  $a_1 < \frac{p}{2}$ . Имеем:

$$a + (pm - b) = n = n_0 - \rho = p(m - 1/2) - \rho$$

$$\rho = b - \frac{p}{2} - a$$

Обозначая

$$b' = b - \frac{p}{2}$$

получим:

$$\rho = b' - a; \quad n = p(m - 1/2) - \rho$$

Расстояние от пульпункта до старшего штриха равно:

$$pm - b = p(m - 1/2) - b'$$

Считая  $n$  постоянным, а  $\rho$  — определенным из специального исследования, получаем следующие, независимые друг от друга, выводы отсчета  $L$  по лимбу:

$$L_a = S + a \frac{i}{p(m - 1/2) - \rho}$$

$$L_b = S + i - [p(m - 1/2) - b'] \frac{i}{p(m - 1/2) - \rho}$$

Отсюда:

$$L = S + \frac{i}{2} + \frac{a + b' - p(m - 1/2)}{p(m - 1/2) - \rho} \cdot \frac{i}{2}$$

$$L = S + \frac{i}{2} + \frac{a + b' - p(m - 1/2)}{p(m - 1/2)} \left[ 1 + \frac{\rho}{p(m - 1/2)} \right] \frac{i}{2}$$

$$L = S + \frac{a + b'}{2} \delta + \frac{\rho}{2p(m - 1/2)} \delta [a + b' - p(m - 1/2)] \dots (E)$$

Считая же  $n$  переменным и заменяя  $\rho$  в формуле для  $L_a$  чрез  $b' - a$ , имеем:

$$L = S + a \cdot \frac{i}{p(m - 1/2) - (b' - a)} = S + a\delta \left[ 1 + \frac{b' - a}{p(m - 1/2)} \right]$$

$$L = S + a\delta + \frac{b' - a}{p(m - 1/2)} a\delta \dots (F)$$

Формулы (B), (D) и (F) очевидно сводятся к одной если принять в расчет, что  $p$  — в первом случае,  $pm$  — во втором и  $p(m - 1/2)$  — в третьем — представляют собою одну и ту же величину —  $n_0$ ; для всех случаев при *переменном*  $n$  имеем одну формулу:

$$L = S + a\delta + \frac{b - a}{n_0} a\delta \dots (G)$$

помня лишь, что в третьем случае вместо  $b$  нужно ставить  $b - \frac{p}{2}$ . Если прибавить и вычесть в правой части последней формулы по  $\frac{b}{2} \delta$ , то она преобразуется так:

$$L = S + \frac{a + b}{2} \delta + \frac{a}{2} \delta - \frac{b}{2} \delta + \frac{b - a}{n_0} a\delta$$

$$L = S + \frac{a + b}{2} \delta + \frac{b - a}{2n_0} \delta \cdot [2a - n_0]$$

$$L = S + \frac{a + b}{2} \delta + \frac{b - a}{2n_0} \delta \cdot [a + b - n_0 + (a - b)]$$

Пренебрегая-же в последнем уравнении членом  $\frac{(b-a)(a-b)}{2n_0} \delta$  как малой величиной второго порядка, напишем окончательно:

$$L = S + \frac{a+b}{2} \delta + \frac{b-a}{2n_0} \delta \cdot [a+b-n_0] \dots \dots \dots (H)$$

Формула (H) как и (G) при переменном  $n$  является общею для всех случаев, причем в ней в *третьем* случае  $b$  должно заменять чрез  $b \mp \frac{\rho}{2}$ .

Формулы (A), (C) и (E) также очевидно приводятся к одной, если принять в расчет, что  $p$ —в первом случае,  $pm$ —во втором и  $p[m - 1/2]$ — в третьем представляють собою одну и ту-же величину  $n_0$ . Для всех этих случаев при *постоянном*  $n$  имеем формулу:

$$L = S + \frac{a+b}{2} \delta + \frac{\rho}{2n_0} \delta [a+b-n_0] \dots \dots \dots (K)$$

в которой в третьем случае  $b$  заменяется чрез  $b'$ . В формуле (H) разность  $b - a$  должна вычисляться, конечно, с теми  $a$  и  $b$ , которые входят во второй член этой формулы и которые были отсчитаны при данной установке алидады. В этом и заключается собственно отличие (H) от (K), в которой  $b - a$  заменяется чрез постоянное  $\rho$ , определяемое независимо от  $a$  и  $b$ , входящих в (K).

Казалось-бы, что именно формулу (H) надлежит применять в геодезических инструментах. В самом деле, вследствие эксцентрициитета алидады и ее колебаний, величина  $n$  в микроскопе теодолита несколько изменяется при разных установках алидады: эксцентрицитет алидады обуславливает изменения в расстояниях нульпункта микроскопа от центра лимба, а это ведет, вследствие радиального направления штрихов лимба, к изменениям величины отрезка  $AB$  (черт. 87); колебания-же алидады приводят к изменениям расстояния объектива микроскопа от лимба. Но эти причины, во первых, совершенно не влияют на среднее из  $run'$ ов двух противоположных микроскопов, вследствие чего влияние их в значительной мере исключается в среднем выводе из отсчетов по двум микроскопам, за исключением случая, когда номера младших штрихов для двух микроскопов различаются не точно на  $180^\circ$ , а на  $180^\circ \pm i$ ; во-вторых, эти перемены  $run'a$ , обуславливаемые вышеупомянутыми причинами, в исправном и хорошо выверенном инструменте, никогда не будут более  $0''.1$ .

Остается впрочем еще третья причина изменения  $run'a$ —это значительные перемены температуры воздуха в течение геодезических работ даже на одном тригонометрическом пункте: температурные влияния могут изменить несколько первоначальную установку микроскопа, и кроме того,—вызвать перемену в работе микрометра и ходе его винта. Однако, судя по результатам действительных работ, и эти перемены  $run'a$  выражаются величинами  $0''.1 - 0''.3$ . В точных работах определение  $run'a$  делают на каждом тригонометрическом пункте, вследствие чего, конечно, ошибка в  $run'e$  сводится для наблюдений на этом пункте к *minimum'u*.

С другой стороны, точность наведения нитей микрометра на штрихи лимба в теодолитах не настолько высока, чтобы только из отсчетов  $a$  и  $b$ , полученных при данной установке алидады, можно было-бы достаточно хорошо определить  $\rho$ , соответствующее именно этой установке: колебания  $\rho$  значительно меньше ошибки отдельного определения  $b - a$ . По этим соображениям в геодезической практике обычно пользуются формулой (K), определяя  $\rho$  из специального исследования, предшествующего и последующего

работе на пункте тригонометрической сети. Иногда от формулы (К) переходят к формуле для вычисления *направления*, т. е. среднего из отсчетов по двум противоположным микроскопам. Называя чрез  $L_1, \rho_1, a_1, b_1$ , — величины относящиеся к первому микроскопу, а чрез  $L_2, \rho_2, a_2, b_2$  — величины, относящиеся ко второму микроскопу, напишем:

$$L_1 = S + \frac{a_1 + b_1}{2} \delta + \frac{\rho_1}{2n_0} \delta [a_1 + b_1 - n_0]$$

$$L_2 = S + \frac{a_2 + b_2}{2} \delta + \frac{\rho_2}{2n_0} \delta [a_2 + b_2 - n_0]$$

Называя чрез  $M$  числовое значение направления и обозначая:

$$\frac{a_1 + b_1}{2} \delta = \alpha_1; \quad \frac{a_2 + b_2}{2} \delta = \alpha_2; \quad \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \rho_m \dots \dots \dots (L)$$

$$\rho_1 = \rho_m - \varepsilon; \quad \rho_2 = \rho_m + \varepsilon$$

Будем иметь:

$$M = S + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \frac{\rho_m - \varepsilon}{4n_0} [2\alpha_1 - \delta n_0] + \frac{\rho_m + \varepsilon}{4n_0} [2\alpha_2 - \delta n_0]$$

$$M = S + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \frac{\rho_m}{2n_0} (\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\varepsilon}{2n_0} (\alpha_2 - \alpha_1) - \frac{\delta \rho_m}{2}$$

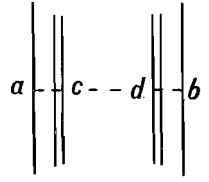
Так как  $\rho_m$  — постоянно, то  $\frac{\delta \rho_m}{2}$  будет исчезать при выводе из направлений углов; поэтому этот член можно опустить в правой части уравнения для  $M$ . Окончательно напишем так:

$$M = S + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \frac{\rho_m}{n_0} \cdot \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \frac{\varepsilon}{2n_0} (\alpha_2 - \alpha_1) \dots \dots \dots (M)$$

Член  $\frac{\varepsilon}{2n_0} (\alpha_2 - \alpha_1)$  нужно удерживать лишь в случаях, когда номера  $S$  младших штрихов различаются для двух микроскоп-микрометров на  $180^\circ \pm i$ .

В современных инструментах для работ на первоклассной триангуляции в микроскоп — микрометрах устраивают две пары нитей — левая служит для наведений на младший штрих, правая — на старший. Винт микрометра делает  $2\frac{1}{2}$  оборота при измерении интервала на лимбе, а между двумя парами нитей берется промежуток, измеряемый двумя оборотами винта. Такое устройство, во-первых, значительно ускоряет работу по отсчитыванию, во-вторых, как и в том случае, когда  $n_0 = p (m - \frac{1}{2})$ , отсчет по барабану на старший штрих отличается от отсчета на младший штрих на число делений в полуобороте винта — вследствие чего в полусумме этих отсчетов исключается влияние эксцентриситета барабана и влияние главных членов так называемой периодической ошибки винта микрометра. Называем по прежнему: чрез  $p$  число делений на ободке барабана; чрез  $pm + z$  — расстояние между двумя парами нитей, причем  $z$  — малая величина; чрез  $pm + \frac{p}{2} = p (m + \frac{1}{2})$  задуманное механиком число делений барабана изме-

ряющее интервал  $i$  на лимбе, чрез  $\rho$  — *run* микроскопа. Считая *run* постоянным, рассмотрим теперь два подслучая — первый, когда нульпункт микроскопа отстоит от младшего штриха менее, чем на  $\frac{p}{2}$  делений, — и второй, когда расстояние нульпункта от этого же штриха более  $\frac{p}{2}$ . В первом подслучае отсчет по барабану  $a$  и выразит собою, без счета по зубчатке, расстояние нульпункта  $c$  от младшего штриха. В момент стояния левой пары в нульпункте  $c$  (черт. 89), правая пара не дойдет до старшего штриха на промежуток  $db$ , меньший также полуоборота винта. Очевидно при движении нитей к  $b$  в нульпункте должно считать число  $p$ ; в самом деле при  $\rho=0$  и  $z=0$  имеем:



Черт. 89.

$$a + pm + p - b = pm + \frac{p}{2}$$

Откуда 
$$b = a + \frac{p}{2}$$

что и должно быть. Очевидно теперь:

$$a + pm + z + p - b = pm + \frac{p}{2} - \rho = n_0 - \rho$$

$$\rho = b - \frac{p}{2} - a - z$$

Полагая 
$$b - \frac{p}{2} = b'; \quad r = b' - a$$

Имеем: 
$$\rho = r - z$$

$$\mu = \frac{i}{pm + \frac{p}{2} - \rho} = \frac{i}{p(m + \frac{1}{2}) - r + z} = \frac{i}{n_0 - r + z}$$

$$\mu = \delta \left[ 1 + \frac{r - z}{p(m + \frac{1}{2})} \right] = \delta \left[ 1 + \frac{r - z}{n_0} \right]$$

Отсчеты  $L_a$  и  $L_b$  по наведениям на младший и старший штрихи выразятся теперь так:

$$L_a = S + a\mu = S + a\delta + a\delta \frac{r - z}{n_0} \dots \dots \dots (N)$$

$$L_b = S + i - [pm + z + p - b] \mu = S + i - [n_0 - b' + z] \delta \left[ 1 + \frac{r - z}{n_0} \right]$$

$$L_b = S + b'\delta - z\delta + [b' - z - n_0] \frac{r - z}{n_0} \delta \dots \dots \dots (R)$$

Отсюда, образуя среднее из  $L_a$  и  $L_b$ , для окончательного значения отсчета  $L$  получаем:

$$L = S + \frac{a + b'}{2} \delta + \frac{r - z}{2n_0} \delta [a + b' - n_0] - \frac{z}{2} \delta - \frac{r - z}{2n_0} z\delta \dots \dots (T)$$

Так как  $z$  и  $r$  по предположению *постоянны*, то в (Т) можно отбросить члены

$$-\frac{z}{2} \delta - \frac{r-z}{2n_0} z\delta$$

и тогда приходим к формуле, совпадающей с формулой (H):

$$L = S + \frac{a-b'}{2} \delta + \frac{r-z}{2n_0} \delta [a+b'-n_0] \dots (U)$$

которую и следует—вследствие ее наибольшей простоты, пользоваться. Но можно (Т) преобразовать еще так:

$$L = S + \frac{a+b'}{2} \delta + \frac{r}{2n_0} \delta [a+b'-n_0] - \frac{a+b'}{2n_0} z\delta - \frac{r}{2n_0} z\delta + \frac{z^2}{2n_0} \delta \dots (Z)$$

Отбрасывая здесь постоянные члены:  $\frac{z^2}{2n_0} \delta$  и  $-\frac{r}{2n_0} z\delta$  и пренебрегая погрешностью  $\frac{b'-a}{2n} z\delta$ , которая всегда даст менее 0'',002, приходим к такой еще формуле:

$$L = S + \frac{a+b'}{2} \delta + \frac{r}{2n_0} \delta [a+b'-n_0] - \frac{b'}{n_0} z\delta \dots (U^1)$$

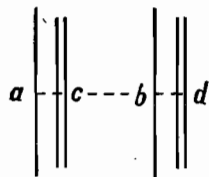
В случае переменного *run'a*, в формуле (Z) имеем:

$$-\frac{a+b'}{2n_0} z\delta - \frac{r}{2n_0} z\delta = \frac{z\delta}{2n_0} [-a-b'-b'+a] = -\frac{b'}{n_0} z\delta$$

и поэтому окончательно для переменного *run'a* напишем:

$$L = S + \frac{a+b'}{2} \delta + \frac{b'-a}{2n_0} \delta [a+b'-n_0] - \frac{b'}{n_0} z\delta \dots (Y)$$

Если  $a > \frac{p}{2}$ , то тогда при положении левых нитей в нульпункте правые нити будут правее старшего штриха (см. черт. 90). В этом случае:



Черт. 90.

$$cb = pm + z - b$$

$$a + pm + z - b = p \left(m + \frac{1}{2}\right) - \rho = n_0 - \rho$$

$$\rho = b + \frac{p}{2} - a - z$$

Обозначая

$$b + \frac{p}{2} = b'$$

имеем:

$$\rho = b' - a - z = r - z; \mu = \delta \left[ 1 + \frac{r-z}{p \left(m + \frac{1}{2}\right)} \right] = \delta \left[ 1 + \frac{r-z}{n_0} \right]$$

$$L_a = S + a\mu = S + a\delta + a\delta \frac{r-z}{n_0} \dots (N^1)$$

$$I_b = S + i - [\rho m + z - b] \mu = S + i - [p(m + 1/2) - b' + z] \delta$$

$$I_b = S + b'\delta + [b' - z - n_0] \frac{r - z}{n_0} \delta - z\delta. \dots \dots (R^1)$$

Другими словами, приходим к тем-же уравнениям, которые были исходными для вывода формулы (Т) в первом подслучае. Очевидно  $b^1$  отличается от  $b$  на  $\pm \frac{p}{2}$ , причем знак  $+$  или  $-$  нужно брать так, чтобы  $b^1$  было близко к  $a$ .

Величины  $r$  и  $z$  должны быть выведены из специального исследования, непосредственно предшествующего или последующего работе на пункте I-го класса, и исполняемого следующим образом. Устанавливая алидаду чрез  $30^\circ$ , при каждой установке на каждом микроскопе выполняют такую работу: 1) на младший штрих наводят поочередно правую и левую нити четыре раза; затем изменяют положение нуляпункта на полуоборота винта сдвигом алидады и делают поочередно наведения правой и левой парой нитей по четыре раза на тот-же штрих лимба. Эта работа послужит очевидно для вывода величины  $z$ . 2) Затем визируют левой парой младший штрих и вслед за этим — правой парой — старший штрих, что проделывают четыре раза; переставив нуляпункт движением алидады на полуоборота, делают еще четыре таких наведения левой пары на младший, а правой пары — на старший штрих. Собранный таким образом материал послужит для вывода  $r$ . Переставляя алидаду чрез  $30^\circ$ , проходят каждым микроскопом в прямом ходе полную окружность, а затем работу повторяют, проходя полную-же окружность обратным ходом.

Формулы ( $U^1$ ) и ( $V$ ) не применяются в действительных геодезических работах, так как обе они, являясь производными от формулы ( $U$ ), более сложны, чем эта последняя. Но в русских работах по триангуляции I класса и формула ( $U$ ) нередко применяется с следующими изменениями:

1) при *постоянном run'e*, величина  $\frac{r - z}{2n_0} \delta \cdot n_0$  может быть отброшена в формуле ( $U$ ), которая тогда обращается в следующую:

$$I = S + \frac{a + b'}{2} \delta + \frac{r - z}{2n_0} \delta [a + b'] \dots \dots \dots (V)$$

2) Имея в виду, что на определение величины  $r$  сказываются весьма сильно условия *освещения* штрихов лимба, а также учитывая влияние большого различия температурных условий при работе вечером и при работе ночью, — полагают, что для каждого вечера  $r$  — имеет свое значение, и для каждой ночи — свое значение. Поэтому  $r$  выводят не из специального исследования, сделанного указанным выше порядком перед началом работ и по окончании работ на данном пункте, а как *среднее* из всех разностей  $b' - a$ , выведенных по отсчетам  $b'$  и  $a$ , полученным при самых наблюдениях горизонтальных направлений в течение данного вечера, или данной ночи.

Указанный способ введения поправок за *run* представляется наиболее приемлемым, но только следует за данный вечер или за данную ночь на разных местах лимба, расположенных примерно чрез  $60^\circ$  или  $45^\circ$  по его окружности, сделать еще четырехкратные определения разности  $b' - a$  (на каждом из шести или восьми мест) и величину  $r$  вывести как среднее из этих  $b' - a$  и из  $b' - a$ , полученных при наблюдениях горизонтальных направлений. Иногда при работах на русских триангуляциях I класса, поль-

зуюсь инструментами с двумя парами нитей в микроскоп-микрометрах, применяют формулы для *переметной* *руч*'а, причем вычисляют сразу *направление* *N*. Из формулы (N) напишем:

$$L_I = S_I + a_I \delta + a_I \delta \cdot \frac{b'_I - a_I - z_I}{n_0}$$

Здесь:  $L_I$  — отсчет по микроскопу № 1;  $S_I$  номер младшего штриха для этого микроскопа;  $a_I$  и  $b'_I$  — отсчеты по барабану при наведениях левой и правой пары нитей микроскопа № 1;  $z_I$  — уклонение расстояния его нитей от 120.

Для микроскопа № 2 напишем:

$$L_{II} = S_{II} + a_{II} \delta + a_{II} \delta \cdot \frac{b'_{II} - a_{II} - z_{II}}{n_0}$$

Отсюда:

$$N = \frac{L_I + L_{II}}{2} - \frac{S_I + S_{II}}{2} + \frac{a_I + a_{II}}{2} \delta + \frac{\delta}{2n_0} \left\{ a_I (b'_I - a_I - z_I) + a_{II} (b'_{II} - a_{II} - z_{II}) \right\} \dots (W)$$

Для поправок:

$$\frac{\delta}{2a_0} a (b' - a - z) = \frac{\delta}{2n_0} ay$$

вычисляют особые таблички.

Малая точность определения  $b' - a$  ставит под известное сомнение применимость этой формулы (W).

### 30. Исследование, установка и поверки микроскоп-микрометра.

Прежде чем исследовать или устанавливать микроскоп-микрометр, необходимо урегулировать вращение алидады около ее вертикальной оси. Подробности этого будут приведены ниже, теперь же укажем, что признаками правильной установки алидады горизонтального круга являются: а) вращение плавное, без излишней легкости, но и без всякого трения; б) при вращении алидады на полную окружность пузырек точного уровня, ставящегося на горизонтальную ось, должен оставаться на середине или уклоняться от нее не более как на  $2'' - 3''$  (при этом предполагается предварительная выверка уровня и установка при помощи его вертикальной оси вращения алидады) в) малые колебания разности отсчетов по двум противоположным микроскопам.

Объектив микроскопа *обычно* механиком закрепляется настолько солидно, что трудно допустить сдвиг объективной трубочки в микроскопе, — тем более, что все сотрясения инструмента *непосредственно* на эту трубочку не передаются. Поэтому передвигать объектив микроскопа следует при установках его в последнюю очередь, когда будет вполне выяснена необходимость в этом. Установки и поверки микроскоп-микрометра выполняют так:

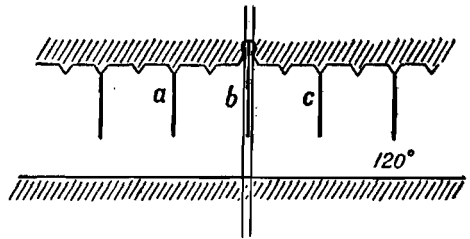
- 1) устанавливают окуляр таким образом, чтобы нити микрометра были бы видны с наибольшею отчетливостью;
- 2) перемещая микроскоп в обоймах, достигают ясной видимости штрихов лимба и параллельности нитей микрометра с этими штрихами;
- 3) в поле зрения микроскопа штрихи лимба должны казаться ни слишком длинными, ни слишком короткими;
- 4) все штрихи на протяжении почти всего поля зрения микроскопа должны быть видимы одинаково отчетливо;



5) по крайней мере два штриха *a* и *c* (черт. 91) расположенные симметрично по обе стороны от нульпункта и ближайшие к нему, должны казаться строго параллельными штриху *b*, находящемуся в нульпункте; остальные штрихи должны казаться едва заметно сходящимися к нижнему краю поля зрения, но конечно эта сходимость должна быть совершенно симметричною относительно нульпункта.

6) нульпункты противоположных микроскопов должны отстоять друг от друга на  $180^\circ$  или на угол, отличающийся от  $180^\circ$  на величину, меньшую 20 секунд.

Если требование 6-ое оказывается грубо невыполненным, напр., на величину более пяти минут, то можно подозревать, что один из микроскопов сбит; это будет указываться непараллельностью нитей этого микроскопа штрихам лимба и неясностью изображения штрихов в нем. При грубом различии угла между нульпунктами микроскопов от  $180^\circ$ , установку микроскопов приходится делать, начиная с выполнения требования 6-го, причем приходится регулировать или прикрепление микроскопа к рычагу *RR* (черт. 88), или прикрепление этого рычага *RR* к подставке трубы, соблюдая, конечно, одновременно требования 2-ое и 3-ье.



Нижний край поля зрения

Черт. 91.

В некоторых инструментах при микроскопах имеются специальные винты для перемещения продольной оси микроскопа в плоскости, проходящей чрез нее и центр лимба; при нарушении требования 3-го, в таких инструментах и приходится действовать этими винтами. Но всякие исправительные винты способствуют расстройству сделанных установок, и поэтому в большинстве точных инструментов указанных винтов, регулирующих положение продольной оси микроскопа, не имеется. Поэтому, при заметном нарушении в одном из микроскопов требования 3-го, делают попытки устранить неправильную длину штрихов, работая или винтами, стягивающими кольца обоймы микроскопа, или винтами, прикрепляющими микроскоп к рычагу *RR* (черт. 88), или винтами, прикрепляющими этот рычаг *RR* к подставке трубы. В исключительных случаях неправильная длина изображений штрихов может быть обусловлена неправильным положением объективной трубочки микроскопа.

Требование 4-ое может не выполняться из-за неперпендикулярности оси микроскопа \*) к плоскости делений лимба, или из-за неправильного положения объективной трубочки, или из-за недостатков оптики объектива микроскопа. Первые две причины вызовут: а) постепенное возрастание величины интервала лимба в поле зрения микроскопа, что может быть обнаружено тщательным промером посредством микрометра микроскопа; б) параллакс штрихов на краях поля зрения и притом параллакс противоположный в разных краях поля. Изменяя очень немного положение рычагов *RR* пробуют устранить эти явления; при неудаче — придется изменить положение объективной трубочки, вращая ее около продольной оси. Если все установки: 2, 3, 4 и 6 выполнены, — то невыполнение условия 5-го должно приписать неправильной оптике микроскопа.

\*) Здесь имеется ввиду уклонение оси микроскопа от плоскости, содержащей ось вращения алидады и центр объектива микроскопа.

Следует по приеме инструмента от механика, когда он находится в полном порядке, отметить нарезкой ножом на внешней трубке микроскопа положение кольцевых обойм, а на об'ективной трубке — положение нижнего края внешней трубки; кроме того, следует нанести продольный штрих  $ff$  (черт. 88) так, чтобы он прошел по нижней части внешней трубки и по об'ективной трубке. Тогда, ставя впоследствии микроскоп и об'ективную трубку по этим штрихам-нарезкам, будем очень близки к правильной установке микроскопа.

7) *Исследуют правильность работы микрометра, как целого механизма.* Закрепив алидаду, наводят ввинчиванием винта микрометра нити на штрих, близкий к нульпункту и получают по барабану микрометра отсчет  $a_1$ ; продолжая ввинчивание, отводят несколько нити и затем вывинчивая винт наводят их снова на тот-же штрих и получают по барабану отсчет  $c_1$ ; продолжая вывинчивание, отводят нити от штриха и снова наводят ввинчиванием винта на тот-же штрих; получив отсчет по барабану  $a_2$ , продолжают ввинчивание и после этого наводят нити вывинчиванием винта и записывают отсчет  $c_2$ , и т. д.

Нужно получить достаточное число разностей (напр. 12)

$$a_1 - c_1$$

$$a_2 - c_2$$

.....

.....

$$a_n - c_n$$

при данной установке алидады и повторить такие-же измерения еще при трех иных ее установках.

Среднее значение разности  $a - c$  для каждой установки алидады не должно превышать  $\frac{1}{120}$  доли оборота винта, и уклонения отдельных разностей от этого среднего значения должно быть менее  $\frac{1}{120}$  доли оборота винта,

Если это не соблюдается, то работа микрометра неисправна, что может происходить: или от неправильной работы пружин  $ff$ ; или от трения при движении рамки *ттор* (черт. 85) в салазках; или от того, что пластинка  $K$  слишком плотно прилегает к рамке *ттор*; или от неправильного (наклонного) положения упора  $S$  (черт. 85).

8) Определяют предварительно *тип* микроскопа, для чего: устанавливают нити микрометра вблизи нульпункта и по закреплении алидады наводят их при помощи наводящего винта алидады на некоторый штрих лимба  $L$ , а затем делают несколько наведений нитей микрометра на штрихи:  $K$  — младший по отношению к  $L$ , и на штрих  $M$  — старший по отношению к  $L$ , чередуя наведения на  $M$  с наведениями на  $K$ . Называя среднее из отсчетов по барабану при наведении нитей на штрих  $M$  через  $m$ , а среднее из отсчетов при наведении нитей на  $K$  — через  $k$ , имеем:  $\rho_1 = \frac{m - k}{2}$ . Такие

определения  $\rho_1$  следует исполнить не при одном, а при четырех сложениях алидады, отстоящих друг от друга на  $90^\circ$ , и затем из всех выводов  $\rho_1$  образовать арифметическую средину.

9) Если  $\rho_1$  окажется превышающим половину деления барабана, то приступают к установке микроскопа, описанной в § 28. Так как  $\rho > 0$  если  $n < n_0$ , то при  $\rho_1 > 0$  нужно будет *выдвинуть* несколько об'ективную трубочку, а затем весь микроскоп передвигать в обоймах *вверх*; при  $\rho_1 < 0$

нужно будет *вдвинуть* об'ективную трубочку в основную трубку микроскопа, а затем микроскоп передвигать в обоймах *вниз*. До перемещения об'ективной трубочки и по исполнении оногo, надлежит отмечать на ней нижний конец основной трубки *сс*. Установив после перемещения об'ективной трубочки микроскоп в обоймах, затем для этой установки определяют  $\rho_2$  совершенно так-же, как определяли  $\rho_1$ .

Если  $\rho_2$  окажется еще слишком большим, то вновь очень немного передвигают в *надлежащую* сторону об'ективную трубочку и обычно приходят после этого к  $\rho_2$  меньшему 0,5 деления барабана.

10) Сделав отсчеты по двум противоположным микроскопам, посредством винта *W* устанавливают нульпункты их по возможности строго на одном диаметре.

11) Поставив нити в нульпункте, опускают гайку *d* (черт. 85) и поворачивают барабан *t* (без вращения винта *V* и удерживая нити в нульпункте) так, чтобы нуль его пришелся-бы против индекса *i*; закрепив гайку *d* поверяют — будет-ли отсчет по барабану равен нулю при наведении нитей на нульпункт микрометра.

12) *Исследование периодических ошибок винта.* Ошибки винта подразделяются на *периодические* и *ходовые*. Периодические ошибки повторяются для каждого оборота винта; ходовые ошибки выражаются в неравенстве поступательных движений, соответствующих разным оборотам винта.

Назовем чрез *t* отсчет по барабану, выраженный в частях окружности; периодическая ошибка  $\Delta$  отсчета *t* выразится вообще рядом:

$$\Delta = a_0 + a_1 \text{Cost} + a_2 \text{Cos}2t + \dots + b_1 \text{Sint} + b_2 \text{Sin}2t + \dots \quad (1)$$

Для определения коэффициентов этого ряда надлежит некоторое постоянное расстояние измерять разными частями оборота винта. Допустим что мы избрали некоторое расстояние *D*, выраженное в делениях барабана,

и измеряли его, переставляя винт на  $\sigma = \frac{2\pi}{n}$ ; если *D* в частях окружности барабана винта равно *f*, то при измерении интервала *D* имеем следовательно такие значения *t*:

1-ое измерение	. . . . .	0 и <i>f</i>
2-ое	" . . . . .	$\sigma$ и $\sigma + f$
3-ие	" . . . . .	$2\sigma$ и $2\sigma + f$
. . . . .	. . . . .	. . . . .
. . . . .	. . . . .	. . . . .
<i>n</i> -ое измерение	. . . . .	$(n-1)\sigma$ и $(n-1)\sigma + f$

Числа 0,  $\sigma$ ,  $2\sigma$ , . . . .  $(n-1)\sigma$  соответствуют отсчетам по барабану при наведении нитей на левый штрих из двух, обозначающих интервал *D*, а числа: *f*,  $\sigma + f$ ,  $2\sigma + f$  . . . — соответствуют отсчетам по барабану при установках нитей на правый штрих. Если для *D* мы получили соответственно значения  $d_1, d_2, d_3 \dots, d_n$ , то очевидно, что ошибки этих  $d_1, d_2, d_3 \dots, d_n$  будут соответственно такими:

$$\Delta_f - \Delta_0 = D - d_1$$

$$\Delta_{f+\sigma} - \Delta_\sigma = D - d_2$$

$$\Delta_{f+2\sigma} - \Delta_{2\sigma} = D - d_3 \quad \dots \dots \dots (2)$$

.....

$$\Delta_{f+(n-1)\sigma} - \Delta_{(n-1)\sigma} = D - d_n$$

Сумма левых частей ур-ний (2) равна нулю, и поэтому:

$$D = \frac{\sum d}{n} = k \quad \dots \dots \dots (3)$$

и поэтому от (2) переходим к таким ур-ниям:

$$a_1 \text{Cos} f + a_2 \text{Cos} 2f + \dots + b_1 \text{Sin} f + b_2 \text{Sin} 2f - a_1 - a_2 - \dots = k - d_1;$$

$$a_1 \text{Cos} (f + \sigma) + a_2 \text{Cos} 2(f + \sigma) + \dots + b_1 \text{Sin} (f + \sigma) + b_2 \text{Sin} 2(f + \sigma) + \dots \dots \dots - a_1 \text{Cos} \sigma - a_2 \text{Cos} 2\sigma - \dots - b_1 \text{Sin} \sigma - b_2 \text{Sin} 2\sigma = k - d_2;$$

$$a_1 \text{Cos} [f + (n-1)\sigma] + a_2 \text{Cos} 2[f + (n-1)\sigma] + \dots + b_1 \text{Sin} [f + (n-1)\sigma] + b_2 \text{Sin} 2[f + (n-1)\sigma] + \dots \dots \dots - a_1 \text{Cos} (n-1)\sigma - a_2 \text{Cos} 2(n-1)\sigma - \dots \dots \dots - b_1 \text{Sin} (n-1)\sigma - b_2 \text{Sin} 2(n-1)\sigma - \dots \dots \dots = k - d_n;$$

Преобразовывая эти ур-ния найдем, что для измерения с номером  $p+1$  будем иметь такое ур-ние:

$$\begin{aligned} & -2a_1 \text{Sin} \frac{f}{2} \text{Sin} \left[ \frac{f}{2} + p\sigma \right] - 2a_2 \text{Sin} f \text{Sin} 2 \left[ \frac{f}{2} + p\sigma \right] - 2a_3 \text{Sin} \frac{3}{2} f \text{Sin} 3 \left[ \frac{f}{2} + p\sigma \right] - \\ & \dots + 2b_1 \text{Sin} \frac{f}{2} \text{Cos} \left[ \frac{f}{2} + p\sigma \right] + 2b_2 \text{Sin} f \text{Cos} 2 \left[ \frac{f}{2} + p\sigma \right] + \\ & + 2b_3 \text{Sin} \frac{3}{2} f \text{Cos} 3 \left[ \frac{f}{2} + p\sigma \right] + \dots = k - d_{p+1} \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

Ограничиваясь главными членами ряда (1), определим только коэффициенты:  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  и  $b_2$ .

Переходя от ур-ний (3) к нормальным уравнениям, будем иметь;

$$a_1 \text{Sin}^2 \frac{f}{2} \cdot \frac{n}{2} = -\frac{1}{2} \text{Sin} \frac{f}{2} \sum_{p=0}^{p=n-1} (k - d_{p+1}) \text{Sin} \left[ \frac{f}{2} + p\sigma \right]$$

$$b_1 \text{Sin}^2 \frac{f}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{1}{2} \text{Sin} \frac{f}{2} \sum_{p=0}^{p=n-1} (k - d_{p+1}) \text{Cos} \left[ \frac{f}{2} + p\sigma \right]$$

$$a_2 \text{Sin}^2 f \cdot \frac{n}{2} = -\frac{1}{2} \text{Sin} f \sum_{p=0}^{p=n-1} (k - d_{p+1}) \text{Sin} 2 \left[ \frac{f}{2} + p\sigma \right]$$

$$b_2 \text{Sin}^2 f \cdot \frac{n}{2} = \frac{1}{2} \text{Sin} f \sum_{p=0}^{p=n-1} (k - d_{p+1}) \text{Cos} 2 \left[ \frac{f}{2} + p\sigma \right]$$

или окончательно напишем:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -\frac{1}{n \operatorname{Sin} \frac{f}{2}} \sum_{p=0}^{p=n-1} (k-d_{p+1}) \operatorname{Sin} \left( \frac{f}{2} + p\sigma \right) \\
 b_1 &= \frac{1}{n \operatorname{Sin} \frac{f}{2}} \sum_{p=0}^{p=n-1} (k-d_{p+1}) \operatorname{Cos} \left( \frac{f}{2} + p\sigma \right) \\
 a_2 &= -\frac{1}{n \operatorname{Sin} f} \sum_{p=0}^{p=n-1} (k-d_{p+1}) \operatorname{Sin} 2 \left( \frac{f}{2} + p\sigma \right) \\
 b_2 &= \frac{1}{n \operatorname{Sin} f} \sum_{p=0}^{p=n-1} (k-d_{p+1}) \operatorname{Cos} 2 \left( \frac{f}{2} + p\sigma \right)
 \end{aligned} \tag{4}$$

Очевидно, что для уменьшения действия погрешностей наблюдений надлежит величине  $f$  дать два значения:

*первое* равно  $\pi = 180^\circ =$  полуобороту винта — выгодно для определения  $a_1$  и  $b_1$ ;

*второе* равно  $\frac{3}{2} \pi$  или  $\frac{\pi}{2} \left( \frac{3}{4} \text{ оборота или } \frac{1}{4} \text{ оборота} \right)$  выгодно для определения  $a_2$  и  $b_2$ .

Конечно, если взять  $f = \pi$ , то тогда делаем  $n$  измерений этого интервала *только* для определения  $a_1$  и  $b_1$ ; делая новый ряд из  $n$  измерений интервала  $f = \frac{3}{2} \pi$ , определим *отдельно*  $a_2$  и  $b_2$ , хотя из этого-же материала можем вывести еще достаточно надежно и  $a_1$  и  $b_1$ .

Для исследований периодических ошибок можно воспользоваться серебряной пластинкой, на которой искусным механиком по специальному заказу нанесены штрихи в расстояниях друг от друга, соответствующих, при наблюдении их в микроскоп,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{3}{4}$  оборота исследуемого винта; такая пластинка прикрепляется воском к лимбу инструмента.

Поставив нити микроскопа в нульпункт и имея по барабану отсчет 0,0, движением алидады наводим нити точно на левый штрих избранного интервала; после этого поочередно делаем 4 наведения на левый и правый штрихи интервала. Теперь ставим нити на отсчет, равный  $\frac{1}{10}$  первого оборота винта, движением алидады устанавливаем их на левый штрих интервала и вновь четырехкратно измеряем интервал; далее следуют начальные установки на 0,2, 0,3, 0,4 . . . . 0,9 первого оборота винта и четырехкратные измерения интервала при каждой из таких установок.

Надлежит, конечно, такое исследование сделать не для одного первого оборота винта, а для разных его оборотов.

В настоящее время при исследовании винтов пользуются специальным прибором *Вамберга*. В этом приборе имеется особое гнездо, в котором надежно закрепляется коробка исследуемого микрометра, отвинченная предварительно от трубки своего микроскопа (окуляр микроскопа также вывинчивается из коробки микрометра). Главную часть прибора является микроскоп с микрометром, в который рассматривают и наблюдают нити исследуемого микрометра. (Следовательно, плоскость исследуемого микрометра перпенди-

кулярна к продольной оси микроскопа прибора и совпадает с фокальной плоскостью объектива этого микроскопа). В микроскопе прибора, кроме подвижных нитей, имеются еще неподвижные нити, натянутые в плоскости микрометра.

Перед началом исследования подвижные нити устанавливают в должном, соответствующем избранному интервалу  $f$ , расстоянии от неподвижных нитей микроскопа прибора. После этого разными частями исследуемого винта измеряют промежутки между неподвижными и подвижными нитями прибора, причем наведения нитей исследуемого микрометра на нити микроскопа прибора делаются, конечно, с высокою точностью, так как эти наведения наблюдаются под полным увеличением микроскопа прибора; чтобы интервал, осуществленный между нитями микроскопа прибора, измерять разными частями исследуемого винта, гнездо, в котором закреплен испытуемый микрометр, может перемещаться поступательно в особых салазках. Кроме указанной здесь, могут быть построены и иные схемы исследования периодических ошибок винта.

Что касается *ходовых* ошибок, то при исследовании их измеряют винтом микрометра интервалы, соответствующие некоторому целому числу оборотов винта.

Если, напр., измеряемый интервал  $\Delta$  соответствует трем оборотам винта, то его измеряют по такому плану:

отсчет $u$ на левый конец интервала:	отсчет $u_1$ на правый конец интервала:
— 6 оборот.	— 3 оборот.
— 5 "	— 2 "
— 4 "	— 1 "
— 3 "	0 "
— 2 "	+ 1 "
— 1 "	+ 2 "
0 "	+ 3 "
+ 1 "	+ 4 "
+ 2 "	+ 5 "
+ 3 "	+ 6 "

Выражая отсчет  $u$  в числе оборотов от нуля, представим ходовую ошибку  $s$  этого отсчета в виде:

$$s = s_0 + s_1 u + s_2 u^2 + s_3 u^3$$

Тогда для интервала  $\Delta$  имеем такое ур-ние:

$$\Delta = (u_1 - u) + s_1 (u_1 - u) + s_2 (u_1^2 - u^2) + s_3 (u_1^3 - u^3)$$

После преобразований, это ур-ние переписется так;

$$u_1 - u = x + y \left( \frac{u_1 + u}{2} \right) + z \left( \frac{u_1 + u}{2} \right)^2 \dots \dots \dots (5)$$

причем:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\Delta}{1 + s_1} - s_3 \frac{\Delta^3}{4} \\ y &= -2s_2 \Delta \\ z &= -3s_3 \Delta \end{aligned} \dots \dots \dots (6)$$

Понятно, что вероятнейшее значение  $\Delta$  равно среднему из всех значений  $u_1 - u$ , полученных в данном ряде измерений принятого интервала.

Вводя  $x = \Delta + x_1$

$$x_1 = - \frac{s_1 \cdot \Delta}{1 + s_1} - s_3 \frac{\Delta^3}{4}$$

перепишем еще (5) так:

$$(u_1 - u) - \Delta = x_1 + y \left( \frac{u_1 + u}{2} \right) + z \left( \frac{u_1 + u}{2} \right)^2 \dots \dots \dots (7)$$

Применяя (7) к каждому отдельно измерению принятого интервала, составляем далее нормальные уравнения, из которых и вычисляем  $x_1, y, z$ , а затем определяем  $s_1, s_2$  и  $s_3$ .

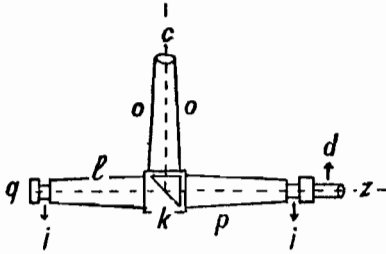
Нужно заметить, что поправка за член с коэффициентом  $s_1$  не подлежит введению, так как она вошла в определение цены деления барабана микрометра, и поэтому за ходовые ошибки винта поправка отсчета  $u$  равна  $s_2 u^2 + s_3 u^3$ .

13) *Определение run'a микрометра.* Наведение нитей микрометра на штрихи лимба необходимо делать всегда *ввинчивая* винт  $v$  и сжимая следовательно пружины  $ff$ ; после наведения надлежит несколько переждать и только убедившись, что нити остались на месте — отсчитывать барабан. Вследствие эксцентричного положения барабана  $t$  относительно оси винта  $v$ , вследствие неправильностей в устройстве соприкосновения конца этого винта с плоскостью упора  $S$  и вследствие так называемых *периодических* ошибок в нарезках винта  $v$ , результаты измерений микрометром сопровождаются периодическими ошибками, которые для двух положений нитей микрометра, отстоящих друг от друга на нечетное число полуоборотов винта, равны по величине, но противоположны по знаку. Этим именно и объясняется такое устройство микрометра, при котором перемещение нитей с младшего на старший штрих соответствует вращению винта микрометра на *нечетное* число полуоборотов: величина  $\frac{a + b'}{2} \delta$ , являющаяся главным членом в формулах (Н), (К), (Л) и (М) свободна от ошибок, обусловленных эксцентричностью барабана, периодическими ошибками винта  $v$  и отчасти неправильностями в устройстве соприкосновения этого винта с упором  $S$ .

Выше был указан порядок предварительного определения *run'a* при выполнении установки микрометра. Когда определяют *run* для подстановки его в формулы (А), (С), (Е), (К) и (Л) — т. е. для вычисления стоящих в этих формулах поправок за *run*, тогда переставляют алидаду чрез 30° и при каждой ее установке делают не менее четырех наведений на каждый из двух смежных штрихов, расположенных по разные стороны относительно нуля, причем сделав половину наведений, переставляют нульпункт движением алидады на полуоборот и вторую половину наведений делают при новом положении нульпункта.

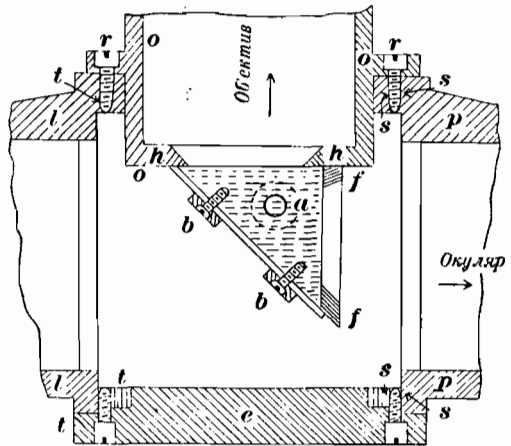
**31. Трубы угломерных инструментов.** В инструментах, предназначенных для измерения углов на пунктах I-го класса, труба имеет объектив с диаметром от 50 до 70 миллиметров и с фокусным расстоянием соответственно от 50 до 65 сантиметров; увеличение трубы при диаметре объектива в 60 миллиметров берется около 45-ти. В инструментах, предназначенных для измерений на пунктах II-го класса, объектив трубы имеет диаметр от 35 до 50 миллиметров, а увеличение трубы соответственно колеблется от 30 до 40. Нередко в больших теодолитах труба *ломаная*. При длинной *прямой* трубе (с фокусом объектива от 50 до 70 сантиметров) перевод чрез зенит

приходится заменять перекладкой трубы вместе с горизонтальной осью, что однако весьма хлопотливо при значительном весе перекладываемых частей инструмента; в инструментах же с ломаной трубой перевод чрез зенит осуществляется чрезвычайно легко. Все остальные преимущества ломаной трубы перед прямой сказываются при астрономических, а не при геодезических наблюдениях. При геодезических работах ломаная труба, наоборот, *невыгодна* тем, что ее призма ухудшает качества изображений. Наиболее простое устройство ломаной трубы изображено на чертежах 92 и 93. Конус *осо* несет объектив трубы; конусы же *l* и *p* принадлежат горизонтальной оси инструмента, цапфы которой *ii* выточены именно в этих конусах. Конусы *o*, *l* и *p* имеют на своих уширенных концах фланцы *rr*, *ss*, *tt*, образующие (по надлежащем их соединении друг с другом) три грани куба *k*: первую — обращенную к объективу, вторую — обращенную к окуляру *z* и третью — к концу *q* горизонтальной оси; четвертая грань куба принадлежит толстой пластинке *e*, а пятая и шестая — образуются отдельными квадратными пластинками, привинчиваемыми к



Черт. 92.

стенке *e* и к фланцам *t* и *s*. Конус *p* заканчивается цилиндрической трубкой *d*, в которую входит окуляр *z* ломаной трубы. Внутри куба *k* помещается большая призма, изготовленная из очень хорошего стекла и имеющая тщательно отшлифованные катеты и гипотенузу. Один из катетов упирается в стенку *h* конуса *o*, а другой — в стенку *f*, прикрепленную к кубу *k*; в этих стенках *h* и *f* имеются широкие отверстия. На гипотенузу призмы дают пружинные пластинки *bb* и прижимают призму к стенкам *h* и *f*. Возможность движения призмы по направлениям, параллельным ее ребрам, устраняется винтом *a*, который проходит через одну из перпендикулярных к этим ребрам стенок куба *k* и прижимает призму к ее гнезду в противоположной стенке того-же куба.



Черт. 93.

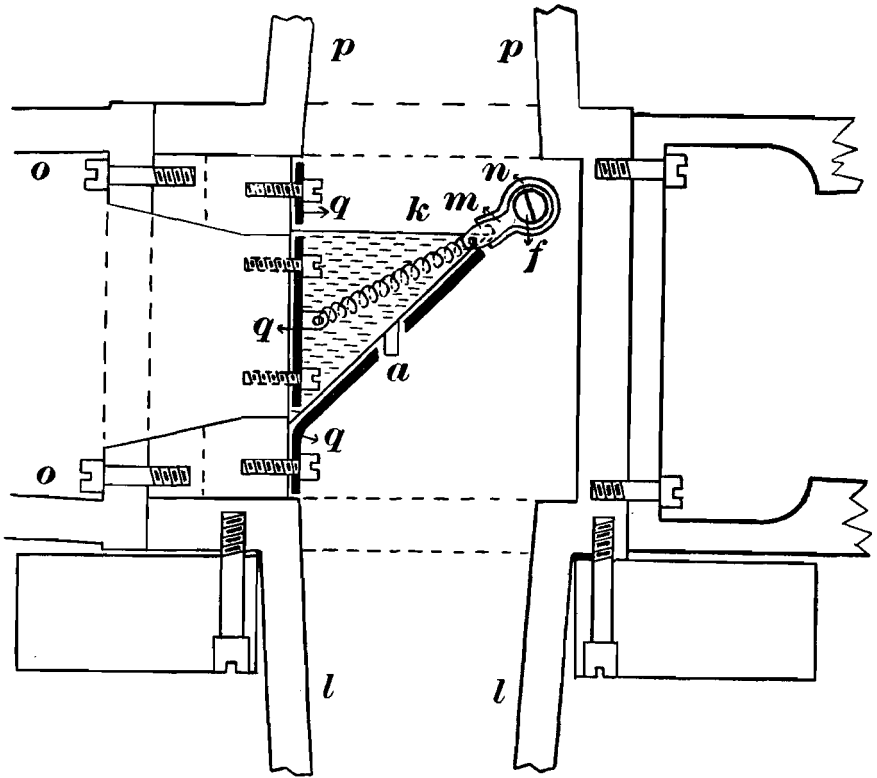
На чертеже 93а и 93б изображено расположение и укрепление призмы в ломаной трубе универсала фирмы Гильдебранда.

*oo* — объективная часть трубы; *ll* — часть горизонтальной оси вращения трубы, где помещается осветительная лампочка; *pp* — окулярная часть трубы. Стекла́нная призма помещена внутри коробки, которая образуется следующим образом:

к объективной грани куба привернуты четыре пластинки *qq*, которые охватывают призму и не дают ей смещаться. Чтобы не дать призме выпасть из образованного этими пластинками гнезда, одна из них продолжена и закрывает собою диагональную грань (гипотенузу) призмы. На этой пластинке *q* против центра диагональной грани призмы имеется овальный вырез, служащий для помещения стеклянного цилиндрика *a*, который канадским



бальзамом наклеен одной своей скошенной гранью на грань призмы; другая-же наружная грань цилиндрика отшлифована точно плоскопараллельно

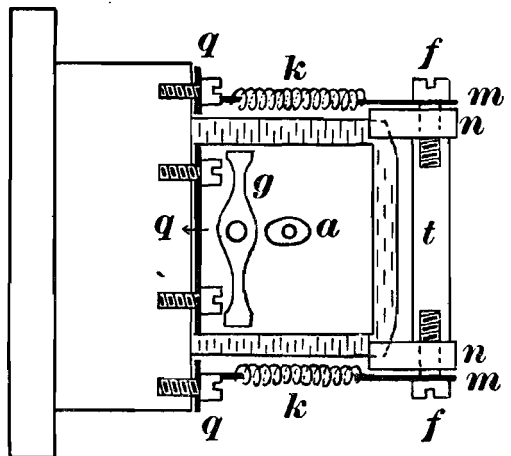


Черт. 93а.

с катетной гранью призмы. Назначением этого стеклышка является прямолинейная подача света в окулярную часть трубы

Для плотного прижимания призмы имеется пружинная пластинка *g*, привернутая в центре шурупом к пластинке *q* (смотри черт. 93b). Концы пластинки *g* свободны и несут небольшие выступы, проходящие через отверстия в пластинке *q* и давящие на призму.

С другой стороны на двух из пластинок *q* по середине имеются небольшие отростки, к которым прикрепляются концы пружинок *k*; другим своим концом пружинки *k* прикрепляются к пластинкам *m*, надетым на полую втулку *t*.



Черт. 93b.

Под пластинками *m* на втулку *t* надеты фарфоровые пластинки *n*, имеющие вырезы, которыми они и захватывают ребро призмы.

Те и другие пластинки удерживаются на втулке  $t$  шурупами  $f$ , привернутыми с двух ее концов.

Пружинки  $k$  прижимают весь цилиндр  $t$  фарфоровыми пластинками  $n$  к призме и не дают ей смещаться.

При необходимости вынуть призму из ее гнезда, надо несколько оттянуть цилиндр  $t$ , (растянув пружинки  $k$ ), и повернуть пластинку  $q$ , прикрывающую диагональную грань призмы.

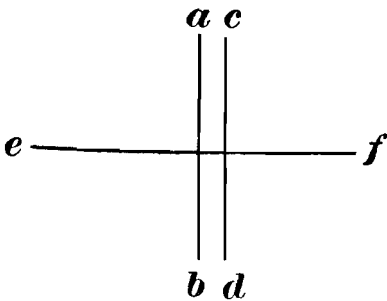
Лучи света, по прохождении их чрез об'ектив ломаной трубы, отражаются от гипотенузы призмы и поступают в конус  $p$ . Визирная ось ломаной трубы совпадает с таким, проходящим чрез центр об'ектива лучем  $cx$ , который по отражении от гипотенузы призмы проходит чрез центр сетки нитей; эта-же визирная ось совпадает с прямой, соединяющей центр об'ектива с отражением центра сетки в зеркальной плоскости гипотенузы призмы. В ломаной трубе значение горизонтальных нитей сетки прямой трубы получают те нити, которые параллельны визирной оси трубы. Изображения точек, лежащих в одной вертикальной плоскости располагаются в плоскости сетки ломаной трубы по прямой, перпендикулярной к визирной оси трубы, и следовательно роль *вертикальных* нитей в сетке ломаной трубки имеют нити, перпендилярные к ее визирной оси.

Сетка нитей в трубах геодезических инструментов состоит очень часто из пары весьма близких параллельных нитей  $ab$  и  $cd$  и из пересекающей их под прямым углом нити  $ef$ , причем нити  $ab$  и  $cd$  играют роль вертикальных нитей; но нередко встречается также устройство сетки из двух пар нитей, пересекающих друг друга под прямым углом.

Наведение биссектора пары нитей на изображение визирного цилиндра сигнала или на блесток гелиотропа или на фонарь сходно с наведением нитей микрометра на штрихи лимба. При таком наведении оценка неравенства ширины промежутков, образовавшихся между краями изображения наблюдаемого об'екта и нитями  $ab$  и  $cd$ , (черт. 94) выполняется с предельной

ошибкой, меньшей одной четверти ширины промежутка, и при угловом расстоянии между нитями  $ab$  и  $cd$  в  $25''$ — $30''$ , как это делается часто в больших теодолитах, предельная ошибка наведения трубы будет менее трех секунд. Так как под угловым расстоянием между нитями понимается угол при центре об'ектива, соответствующий линейному между ними расстоянию, то очевидно, что чем более фокусное расстояние об'ектива трубы, тем менее ошибка визирования.

В больших теодолитах визирование посредством биссектора пары нитей настолько точно, что установка трубы при помощи наводящего винта алидады выполняется с большим трудом и значительною затратою времени: глаз наблюдателя ощущает такие неправильности установки биссектора вертикальных нитей, которые слишком мелки, чтобы можно было-бы их легко исправлять посредством действия руки на винт, приводящий в движение громоздкую верхнюю часть инструмента. С другой стороны при самом спокойном состоянии атмосферы все-таки изображения сигналов колеблются— с амплитудой в  $2''$ — $3''$ . Эти два обстоятельства—трудность установки трубы посредством наводящего винта алидады и колебания изображений—побуждают устраивать в трубе теодолита *окулярный* микрометр, нити которого передвигаются в плоскости сетки нитей (в фокальной плоскости об'ектива).



Черт. 94.

Устройство окулярного микрометра совершенно такое-же, как и описанное выше устройство микрометра в микроскопе\*). Окружность барабана микрометрического винта окулярного микрометра обычно делится на сто частей, а полные обороты винта отсчитываются по зубцам расположенной в плоскости диафрагмы зубчатки. Нити окулярного микрометра — вследствие более мелкой нарезки главного винта микрометра по сравнению с нарезкой наводящего винта алидады, — наводятся на изображения сигналов с полным удобством. Если при измерениях горизонтальных углов навести трубу на сигнал так, чтобы нульпункт окулярного микрометра расположился-бы вблизи изображения этого сигнала, а затем по закреплении алидады сделать несколько — напр. четыре или шесть наведений нитей окулярного микрометра на визирный цилиндр сигнала с отсчетом каждый раз по барабану окулярного микрометра, то вся эта работа займет не более времени, чем точное наведение нитей неподвижных при сильно увеличивающей трубе. Между тем средний отсчет  $S$  из сделанных при этом по барабану микрометра отсчетов будет содержать только часть ошибки, обусловленной и погрешностями наведения нитей микрометра и колебаниями изображения. Само собою разумеется, что при указанном пользовании окулярным микрометром приходится среднее из отсчетов по микроскоп-микрометрам на горизонтальном лимбе, которое мы назовем чрез  $N$  и которое соответствует бывшей при визировании на сигнал установке алидады, исправить некоторую поправкою  $\Delta$ , чтобы перейти от  $N$  к направлению  $M$  на наш сигнал.

Назовем: чрез  $\mu$  угол, под которым из центра объектива усматривается поступательное перемещение нитей при вращении барабана окулярного микрометра на одно деление ( $\mu$  — цена деления микрометра); чрез  $S_0$  — число целых оборотов, считаемых в нульпункте окулярного микрометра (обычно  $S_0 = 10^7$ ).

Очевидно:

$$\Delta = \pm (S - S_0) \cdot \mu$$

$$M = N \pm (S - S_0) \cdot \mu$$

Должно сказать, что *постоянные* нити трубы при окулярном микрометре становятся излишними: прямую соединяющую центр объектива прямой трубы с нульпунктом окулярного микрометра, мы можем принять за визирную ось трубы, положение которой совершенно строго определено в теле трубы. Надлежит, конечно, так установить зубчатку микрометра и барабан его, чтобы эта прямая, соединяющая нульпункт с центром объектива, совпадала-бы с оптической осью объектива или была-бы перпендикулярна к горизонтальной оси инструмента.

Замена биссектора неподвижных вертикальных нитей биссектором нитей микрометра, встречается нередко в новейших геодезических инструментах.

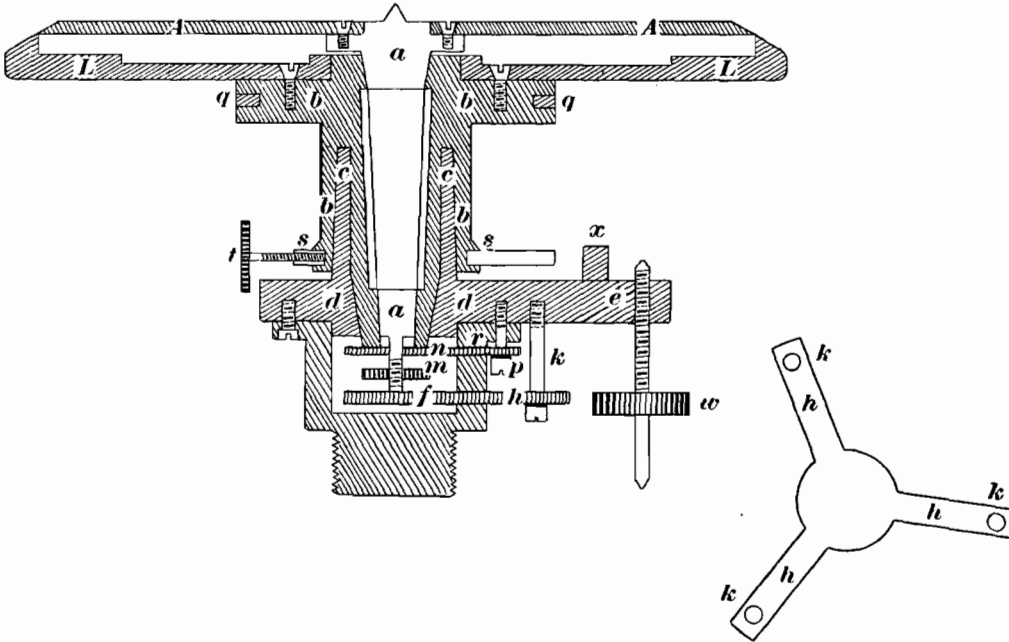
Оптические качества трубы должны быть исследованы по правилам, излагаемым в теории оптических инструментов.

**32. Устройство осей.** В теодолитах средних размеров (лиmb с диаметром в 16—18 сантиметров)—оси устраиваются или по системе *Рейхенбаха* (черт. 95), или по системе *Борда* (черт. 98).

На черт. 95:  $A$ —алидада,  $L$ —лиmb;  $a$ —ось алидады, кончающаяся винтом;  $m$ —гайка этого винта для предупреждения раз'единения алидады и лимба;  $b$ —ось лимба;  $c$ —полая цапфа в виде стакана, составляющая одно целое с *основанием*  $d$  подставки инструмента;  $e$  один из трех рычагов, которые идут через под'емные винты  $w$ ;  $f$ —стальная пластинка с тремя ответвля-

\*) Коробка окулярного микрометра пристраивается к окулярному колену трубы; окуляр трубы ввинчивается в стенку этой коробки, обращенную к наблюдателю.

ющимися от нее и составляющими друг с другом угол в  $120^\circ$  пружинными полосками  $h$ ;  $k$ —винт, проходящий через конец одной из таких пластинок  $h$ ;  $n$ —вторая стальная пластинка, также с тремя ответвляющимися от нее пружинными полосками  $r$  (в середине пластинки  $n$  имеется отверстие, а полоски  $r$  образуют друг с другом угол в  $120^\circ$ );  $p$ —винт, проходящий через пластинку  $r$  (см. черт. 95 и 100);  $q$ —кольцо с хомутом  $w$ , через которое проходит зажимной винт  $u$  алидады (см. черт. 96);  $s$ —кольцо, через которое пропускается зажимной винт  $t$  лимба (смотри чертеж 97 и 100).



Черт. 95.

Как видно, в системе *Рейхенбаха* лимбовая ось  $b$  имеет две втулки: первую—эта ось насаживается на цапфу  $e$ , а во вторую втулку входит ось алидады  $a$ . Соприкосновение оси  $a$  с лимбовой втулкой происходит не по всей ее длине, а только в верхней и нижней ее части. Действуя винтами  $p$ , можно изменять величину давления лимбовой оси на цапфу  $e$ ; точно также действуя винтами  $k$  можно изменять положение оси  $a$  в ее втулке и этим устранять—при слишком осевшей вниз алидаде—сцепление между поверхностями оси и втулки, а при слишком поднятой алидаде—колебания оси во втулке и зазор между краями алидады и лимба.

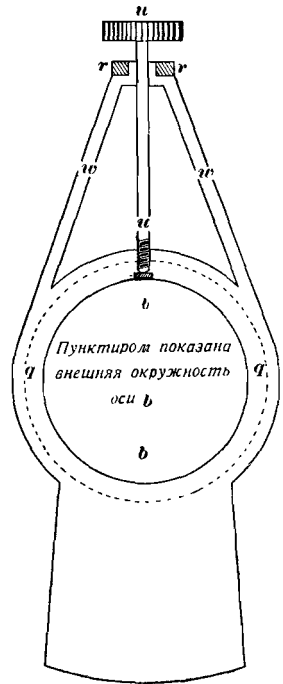
В системе осей *Борда*, изображенной на чертеже 98, полый цилиндр  $c$  (вернее—усеченный конус) составляющий одно целое с основанием  $d$  подставки теодолита, несет в себе коническую ось алидады  $a$ ; осевая-же полая цапфа  $b$  лимба охватывает снаружи этот конус  $c$ —так, что внутренняя ее поверхность касается внешней поверхности конуса  $c$ . Ось алидады  $a$  упирается в пружину  $f$ , а цапфа  $b$ —в отшлифованную в плоскость верхнюю грань основания  $d$ . Обделка *по конусу* внешней поверхности цапфы  $e$  имеет целью сделать невозможным изменения в положении лимба в горизонтальной плоскости.

В больших теодолитах (диаметр лимба более 21 сантиметра) давление верхней части—т. е. трубы и ее подставки, вертикального круга и его

противовеса, а также двух составляющих горизонтальную ось конусов — настолько велико, что приходится переходить к такой системе устройства осей, в которой алидадная часть не имела бы

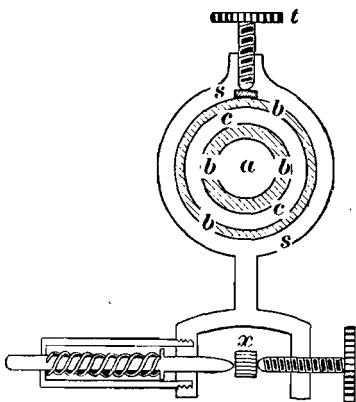
нигде непосредственного соприкосновения с лимбовой частью инструмента. Эта цель достигается вполне в Рессольдовой системе осей, изображенной на черт. 99. В этой системе с массивным основанием *d* соединяется солидными винтами массивная же коническая цапфа *a* из стали. На уступе этой цапфы лежит лимб *l* теодолита, выше же лимба находится гайка *w* с тремя, составляющими друг с другом угол в  $120^\circ$ , ответвлениями *n*. Гайка *w* ходит по нарезке, сделанной выше лимба на цапфе *a*, и прижимает при ее завинчивании лимб к уступу, на котором он покоится. Сверху на цапфу *a* надевается бокса *b* алидады; к этой боксе четыремя солидными винтами *e* привинчивается массивная пластина *t*, от которой отходят кверху составляющие с ней одно целое подставки трубы *hh*. В пластине *t*, в ее средней части, имеется отверстие, закрываемое крышкой *p*. Эта крышка соединяется винтами *q* с пластиной *t*; в середине ее имеется матка для винта *v*, снабженного широкой шляпкой. Винт *v* кончается тщательно отшлифованной плоскостью, которая касается также тщательно отшлифованной в плоскость верхней грани свободной (т. е. не соединенной винтами ни с какими частями) пластинки *rr*. Цапфа *a* завершается на веру полусферой, с которой соприкасаются две плоские грани, имеющиеся в нижней части пластинки *rr*. Ниже полусферы цапфа *a* имеет винтовую нарезку *i*, на которую навинчивается гайка *k*: эта гайка препятствует

Устройство зажимного винта алидады

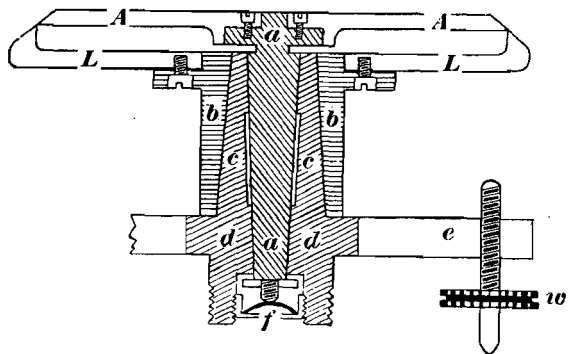


Черт. 96.

Устройство зажимного винта лимба.



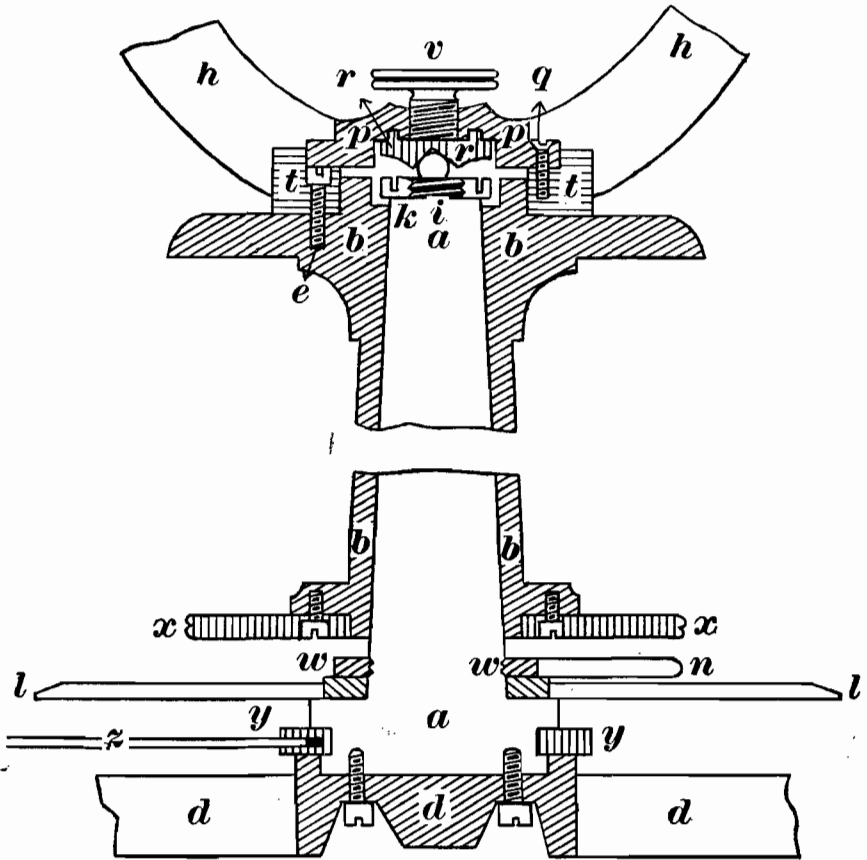
Черт. 97.



Черт. 98.

непредвиденному раз'единению боксы *b* и цапфы *a*. Буквой *y* обозначены на чертеже кольцо и идущий от него хомут, чрез который проходит

стержень  $z$  зажимного винта алидады. Имея *тонкий и ровный* слой масла между соприкасающимися частями поверхностей цапфы  $a$  и бьюксы  $b$ , можно после ряда попыток так установить винт  $v$ , что вращение алидады будет совершаться легко и притом без колебаний, около *постоянной* оси; достигнута или нет такая установка — это обнаруживает уровень, ставящийся на гори-



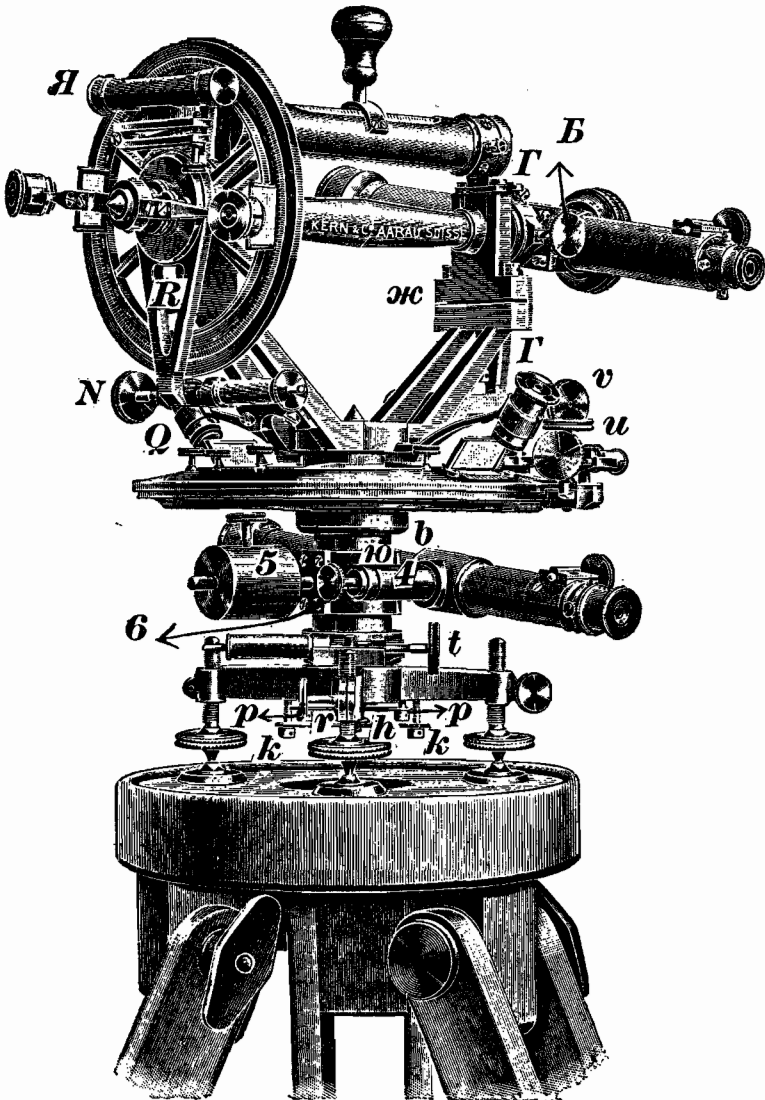
Черт. 99.

зонтальную ось. Устройство зажимного винта алидады не показано на черт. 99; но это устройство таково, что при закреплении алидады винт давит на массивную нижнюю часть цапфы  $a$ , совершенно не затрагивая при этом лимба.

Теодолиты с системой осей *Рейхенбаха* или *Борда* называются *повторительными*, потому что они позволяют применять *способ повторения* при измерении углов (чего нельзя сделать при *Ресольдовой* системе осей).

**33. Описание инструментов служащих для измерения горизонтальных направлений и зенитных расстояний в триангуляции.** На чертеже 100 изображен десятисекундный повторительный теодолит *Керна*, получивший значительное применение на триангуляциях III-го класса и отчасти II-го класса в России. Горизонтальный круг инструмента имеет диаметр 18 сантиметров и отсчитывается двумя десятисекундными верньерами, рассматриваемыми при помощи простых луп. Вертикальный круг имеет диаметр 15 сантиметров и отсчитывается десятисекундными верньерами. Если инструмент в полном порядке, то отсчет горизонтального круга по

одному верньеру имеет погрешность не превышающую пяти секунд; на вертикальном круге правильно взять десять секунд затруднительно и здесь предельная ошибка отсчета должна быть принята меньшей  $10''$ . Труба имеет отверстие об'ектива в 33 миллиметра при фокусном расстоянии в 27 сантиметров; увеличение трубы 30. На расстояния в 15 километров такая труба



Черт. 100.

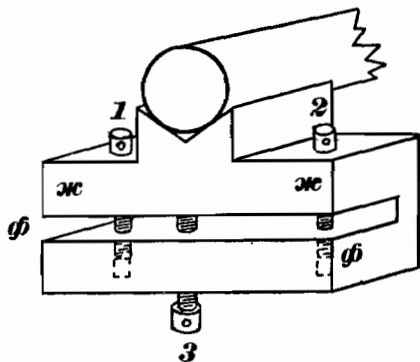
берет с трудом, если только сигнал не проектируется на небо. Труба — внецентренная, расположенная на одном конце горизонтальной оси; на другом конце этой оси располагается вертикальный круг, вращающийся вместе с трубой; вертикальный круг совершенно уравнивает трубу. Алидада вертикального круга соединена двумя винтами, которые на черт. 100 закрыты держащими лупы рычажками, с хомутом *R*: этот хомут надет свободно кольцом на конец

горизонтальной оси и сверху несет на себе уровень, а внизу оканчивается приливом  $Q$ , зажатый между винтом  $N$  и противодействующей ему пружиной. Очевидно винт  $N$  служит для приведения уровня  $A$  в горизонтальное положение при отсчитывании верньеров вертикального круга. Вертикальный круг привинчен наглухо к горизонтальной оси и следовательно при измерениях зенитных расстояний не может переставляться. Но ослабляя те два винта, которые соединяют хомут  $R$  с алидадой вертикального круга, можно алидаду повернуть рукой на некоторый угол и по закреплении ее вновь теми-же винтами, производить повторное измерение зенитного расстояния на другом месте вертикального круга. На тот конец горизонтальной оси, на котором укреплена труба, надет хомут  $PI'$ , чрез охватывающее горизонтальную ось кольцо которого проходит зажимной винт  $B$  трубы; хомут оканчивается внизу языком или приливом  $I'$ , конец которого зажимается между винтом  $v$  и противодействующей ему пружиной (не видна на чертеже); винт  $v$  есть наводящий винт трубы.

На черт. 100 изображен инструмент, у которого зажимной винт алидады устроен не так, как это показано на чертеже 96: здесь зажимной винт  $u$  алидады соединяет две половинки клещей, из которых верхняя ходит по круговому пазу, выбранному в алидаде, а нижняя — по круговому пазу, выбранному в

лимбе с его нижней стороны. (Это устройство, недопустимое в точных угломерах, теперь в инструментах Керни заменено устройством черт. 96).

На горизонтальную ось ставится уровень с ценой деления  $10''$  —  $12''$ ; уровень вертикального круга имеет цену деления  $10''$ . Подставка, ближайшая к трубе, имеет в верхней части устройство, изображенное на чертеже 101: в стойке  $ЖЖ$ , на половину ее толщины сделан выпил  $\Phi\Phi$ , который может, вследствие упругости металла, растягиваться винтами  $1$  и  $2$  и расширяться винтом  $3$ ; винт  $3$  концом упирается в верхнюю плоскость выпила; матки для

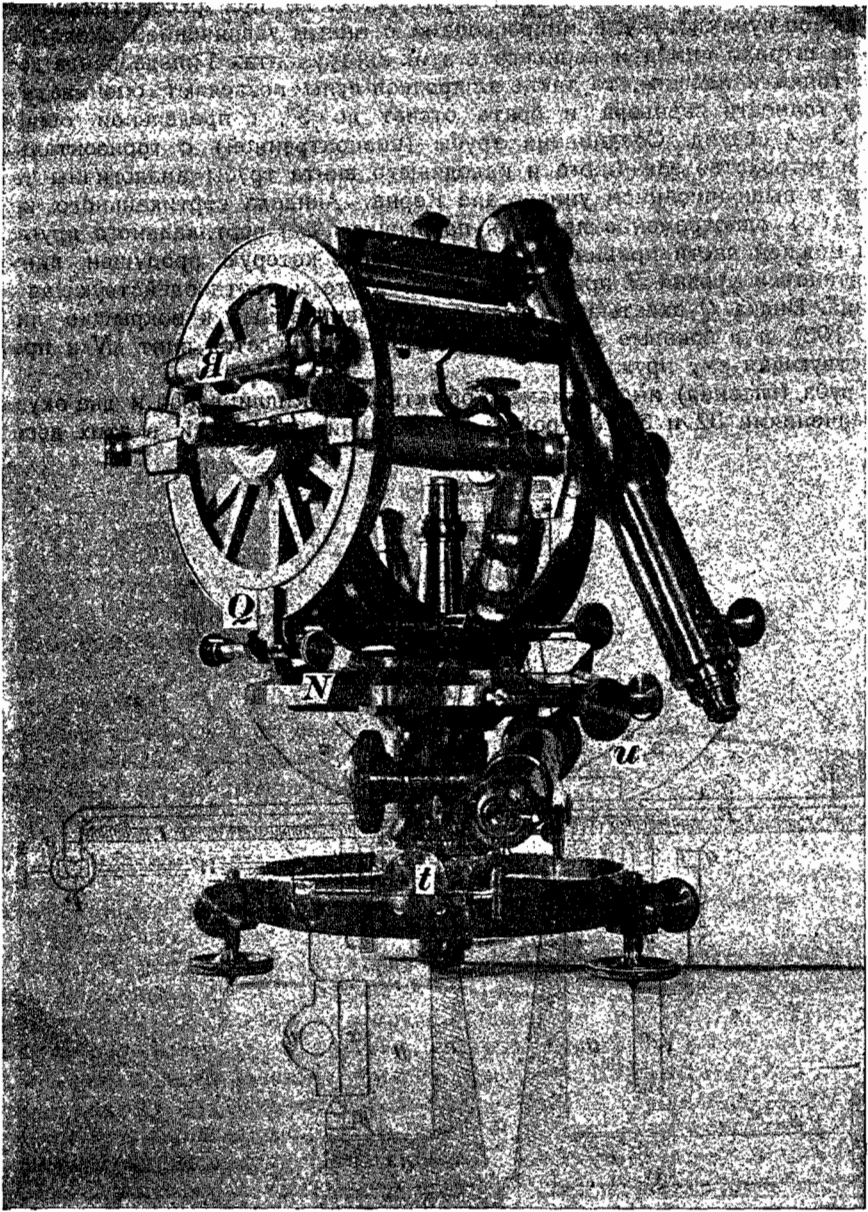


Черт. 101.

винтов  $1$  и  $2$  сделаны в нижней половине стойки  $ЖЖ$  (т. е. начинаются от нижней плоскости выпила  $\Phi\Phi$ ). Труба должна всегда находиться при подставке с винтами  $1$ ,  $2$  и  $3$ . Оси рассматриваемого инструмента и зажимной винт лимба устроены так, как изображено на чертеже 95 и 97. Осевую цапфу  $b$  лимба с внешней стороны охватывает широкое кольцо  $Ю$  со втулкой  $А$ ; в эту втулку вкладывается конус, составляющий отросток поворотимой трубы и являющийся горизонтальной осью этой трубы. Зажимной винт, проходящий чрез утолщение в кольце  $Ю$ , упирается своим концом в осевую цапфу  $b$  лимба и по закреплении этого винта получается достаточно прочное соединение поворотимой трубы с лимбом; она может после этого вращаться лишь в вертикальной плоскости, если отпустить винт  $6$ , который входит в матку, сделанную в конце вышеупомянутой конической оси поворотимой трубы, вкладывающейся во втулку  $Ю$  (винт  $6$  тянет при ввинчивании его коническую ось внутрь конической втулки  $Ю$ ). Вертикальные нити поворотимой трубы могут легко передвигаться посредством двух винтиков с довольно широкими головками, пропущенных чрез стенки окуляра и упирающихся концами в рамку сети нитей; этими-же винтами сетка, по наведении нитей на предмет, может быть прочно закреплена.

В триангуляциях II-го класса в России применяются с успехом десяти-секундные универсалы, изготовляемые механиком Гильдебранд во Фрейберге

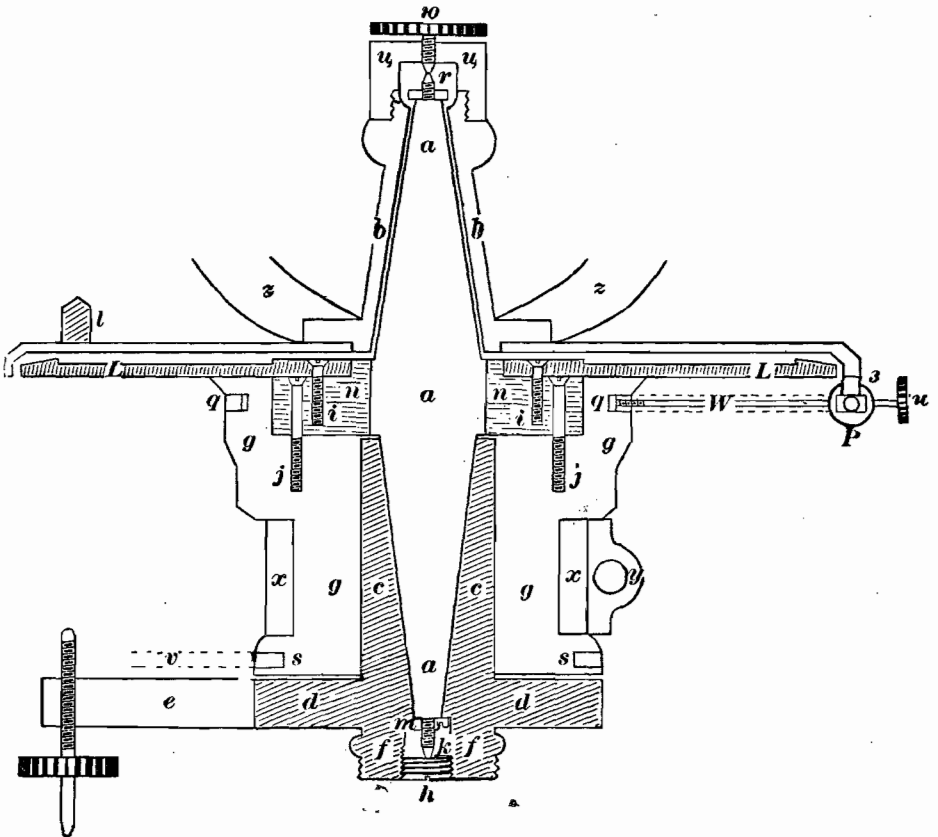




Черт. 102.

(Саксония). Такой инструмент изображен на чертеже 102. Диаметр горизонтального и вертикального кругов равен 17—18 сантиметров; вертикальный круг отсчитывается десятисекундными верньерами, рассматриваемыми чрез простые лупы с ошибкой, не превышающей  $5''$ —благодаря достаточной величине диаметра круга и изяществу штрихов. Горизонтальный круг отсчитывается также десятисекундными верньерами, но при рассматривании их „микроскоп-лупами“,—т. е. микроскопами с малым увеличением около 12-ти; так как штрихи лимба и верньера в этих инструментах Гильдебранда достаточно тонки и изящны, то такие микроскоп-лупы позволяют оценивать половину точности верньера и брать отсчет до  $5''$ , с предельной ошибкой около 3—4 секунд. Соединение трубы (внецентренной) с горизонтальной осью и устройство зажимного и наводящего винта трубы аналогичны такому-же в вышеописанном универсале Керна. Алидада вертикального круга (черт. 102) одновременно является крышкой для вертикального круга; к ней в нижней части привинчена вилка  $Q$ , чрез которую пропущен винт  $N$  для установки уровня  $A$  при вертикальном круге и противодействующая ему пружина. Вилка  $Q$  охватывает выступ  $l$ , привинченный к крышке лимба (черт. 103), и в боковые грани этого выступа упирается винт  $N$  и противодействующая ему пружина.

Труба (главная) имеет диаметр объектива 38 миллиметров и два окуляра с увеличениями 32 и 38. Устройство осей и нижней части в этих десяти-



Черт. 103.

секундных универсалах существенно иное, чем в универсале Керна. Сталь-

ная ось  $a$  (см. черт. 103) верхним своим конусом является осью алидады, а нижним конусом — осью лимба; этот нижний конус оси  $a$  вкладывается в полую медную цапфу  $c$ , идущую кверху от основания инструмента  $d$ . От основания  $d$  идут три рычага  $e$ , несущие подъемные винты; на нижний выступ  $ff$  основания  $d$  навинчивается становой винт инструмента. Внутри выступа  $ff$  имеется винтовая нарезка, по которой ходит винт  $h$ . Этот винт  $h$  упирается в винт  $k$ , которым заканчивается внизу ось  $a$ : регулируя винт  $h$ , достигаем правильного вращения лимба около вертикальной оси; шайбочка  $m$ , навинченная на  $k$  препятствует произвольному раз'единению лимба от основания  $d$ .

В средней части на ось  $a$  надета бронзовая часть  $mn$ : к ней четырьмя винтами  $i$  привинчен лимб  $L$ , и к ней-же четырьмя винтами  $j$  прикрепляется массивная медная часть  $gg$ , соединяющаяся таким образом с лимбом и частью  $mn$  — в одно целое. На медную часть  $gg$  надеты три кольца: первое кольцо  $ss$  с хомутом  $v$  — для зажимного винта лимба  $t$  (черт. 102); второе кольцо  $qq$  с хомутом  $W$ , чрез которое проходит зажимной винт  $u$  алидады; устройство колец  $qq$ ,  $ss$ , хомутов  $W$  и  $v$  и винтов  $u$  и  $t$  — совершенно такое-же, какое изображено на черт. 95; третье кольцо  $xx$  — несет поверительную трубу. Кольцо  $xx$  имеет щеки  $y$ , которые стягиваются зажимным винтом поверительной трубы. Наводящий винт  $P$  алидады и противодействующая ему пружина упираются в пластинку  $z$ , привинченную к крышке лимба.

Алидада надевается бьюсой  $b$  на верхний конус оси  $a$ . От нижней утолщенной части бьюсы  $b$  идут подставки трубы  $zz$ .

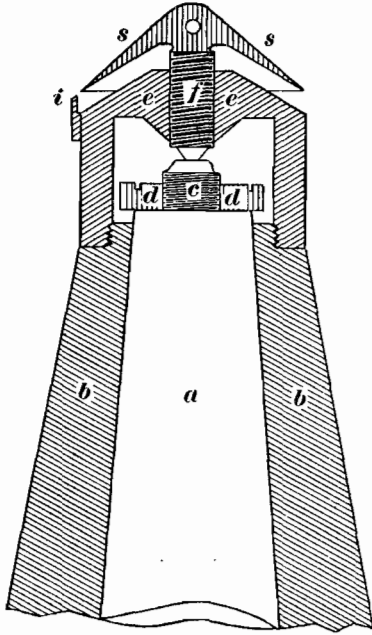
Ось  $a$  вверху заканчивается винтом  $r$ ; на верхнюю часть бьюсы  $b$  навинчивается полый цилиндр  $u$ , чрез который пропущен винт  $y$ . Винт  $y$  — с широкой шляпкой — упирается в плоскость, которою заканчивается винт  $r$ . Очевидно, регулируя винт  $y$ , достигаем правильного вращения алидады около вертикальной оси; на ободке цилиндра  $u$  имеются деления, а на ободке шляпки винта  $y$  — индекс.

Несомненно, что в описанном инструменте устройство осей представляет нечто среднее между системой Рейхенбаха и Репольда. Инструмент *остается повторительным*, но в то-же время вращение алидады и закрепление ее не сказываются на положении лимба.

В России нередко приходится вести триангуляцию II класса там, где еще нет триангуляций I-го класса, и здесь при триангулировании некоторого значительного по площади района приходится выделить ряды или цепи треугольников II-го класса — со сторонами 15—18 километров, которые следует построить более тщательно, чем остальные треугольники. Поэтому в России есть нужда для работ по триангуляции II-го класса в инструментах, снабженных сильной трубой и микроскоп-микрометрами для отсчитывания хотя-бы горизонтального круга. Одним из подходящих инструментов является изображенный на чертеже 104: это универсал *Гильдебранда* с горизонтальным и вертикальным кругами диаметра 17 сантиметров, отсчитываемыми пятисекундными микроскоп-микрометрами. Горизонтальный и вертикальный круги подразделены чрез десять минут; винт микрометра делает при измерении десятиминутного промежутка два оборота; при 60-ти делениях на ободке барабана микрометра  $n_0=120$  и  $d=5''$ ; средняя ошибка отсчета по микроскоп-микрометру не превышает  $\pm 1''$ , 2. Горизонтальный круг покоится на уступе центральной стальной цапфы  $a$  (см. черт. 99 или черт. 106); гайки  $w$ , которая прижимает лимб к уступу, однако не имеется: лимб настолько хорошо притерт к этому уступу, что неподвижность его за время одного приема вполне обеспечена; перестановка-же лимба между приемами делается, взявшись руками за пуговики, ввинченные в лимб с его нижней

стороны. Алидада своею бьюсой *b* (черт. 99) надевается на ту-же центральную цапфу *a*, и следовательно в этих пятисекундных универсалах Гильдебранда имеется Репсольдова система осей.

Соединение бьюсы *b* алидады с верхней частью центральной цапфы *a* показано на чертеже 104а: цапфа *a* завершается винтом *e*, оканчивающимся вверху тщательно шлифованною плоскостью; в эту плоскость упирается винт *f*, имеющий грибообразную шляпку *s* и оканчивающийся внизу тщательно шлифованною плоскостью; винт *s* проходит чрез часть *ee*, навинчивающуюся на бьюсу *b*. На шляпке *s* нанесены подразделения, а на верхней части бьюсы *b* имеется индекс *i*; шайбочка *d* — препятствует произвольному раз'единению бьюсы *b* и оси *a*. Зажимной винт (*v*) алидады устроен так, как это указано ниже при описании большого теодолита Ваншафа (черт. 106): особенностью устройства является то, что зажимной винт при работе давит только на массивное основание инструмента, от которого выведена кверху ось *a*, а отнюдь не на лимб инструмента.



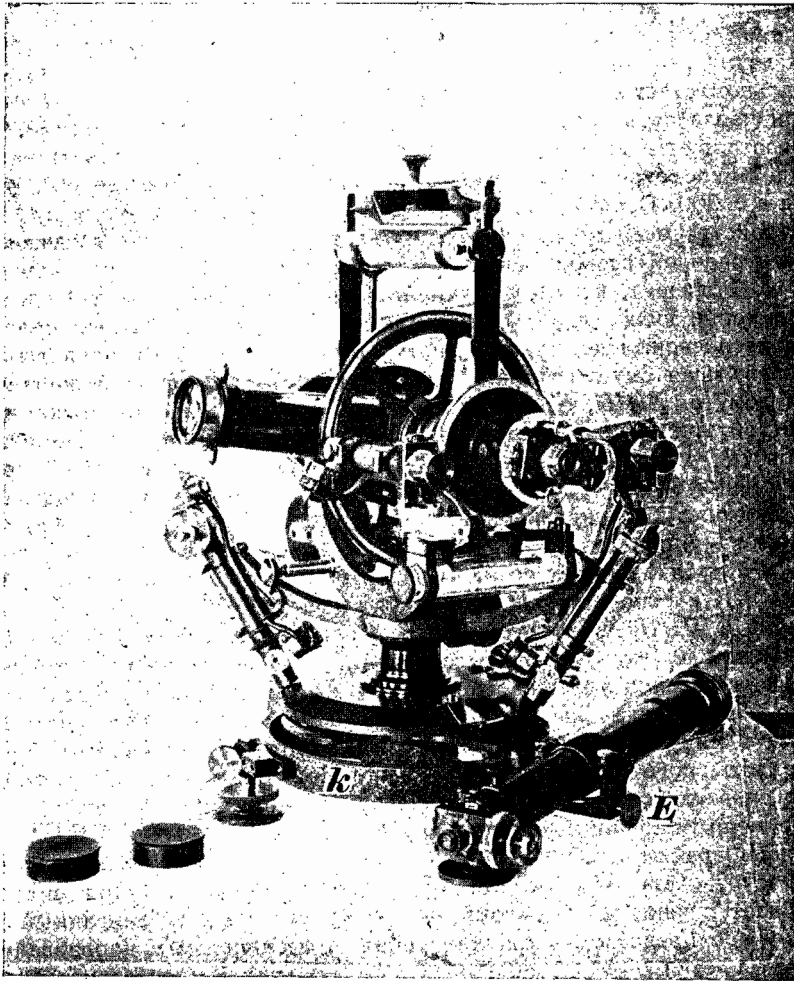
Черт. 104а.

*E* — на черт. 104 — зажимной винт поверительной трубы. Поверительная труба имеет об'ектив диаметра 33 мм, при фокусном расстоянии 32 см; увеличение 29; труба снабжена окулярным микрометром. Как видно, поверительная труба соединяется не с лимбом инструмента, а с подставкой (дрейфусом) инструмента; но азимутальные сдвиги лимба, поскольку они обусловлены сдвигами подставки, являются совсем мало вероятными, и в практике не наблюдаются.

При инструменте имеются два уровня — перекидной, ставящийся на цапфу горизонтальной оси, с ценой деления около 5", и уровень при подставке трубы, служащий для введения поправок в отсчеты вертикального круга, — с ценой деления так-же около 5". Инструмент снабжен электрическим освещением, что совершенно соответствует его назначению, так как в основных рядах II класса нередко вынуждены бывают применять ночные наблюдения.

Описанный инструмент Гильдебранда и в основных частях и в деталях имеет точно такое-же устройство, как рассматриваемый далее двухсекундный универсал Гильдебранда, применяемый в триангуляции I класса (см. черт. 107) — только все размеры соответственно меньше.

Для основных рядов триангуляции II класса надлежало-бы в описанный инструмент внести следующие изменения: 1) заменить ломаную трубу прямою, увеличив немного диаметр об'ектива и фокусное его расстояние; 2) уменьшить диаметр вертикального круга до 13,5 см; 3) заменить уровень при подставке — уровнем при раме с микроскопами вертикального круга.



Черт. 104.

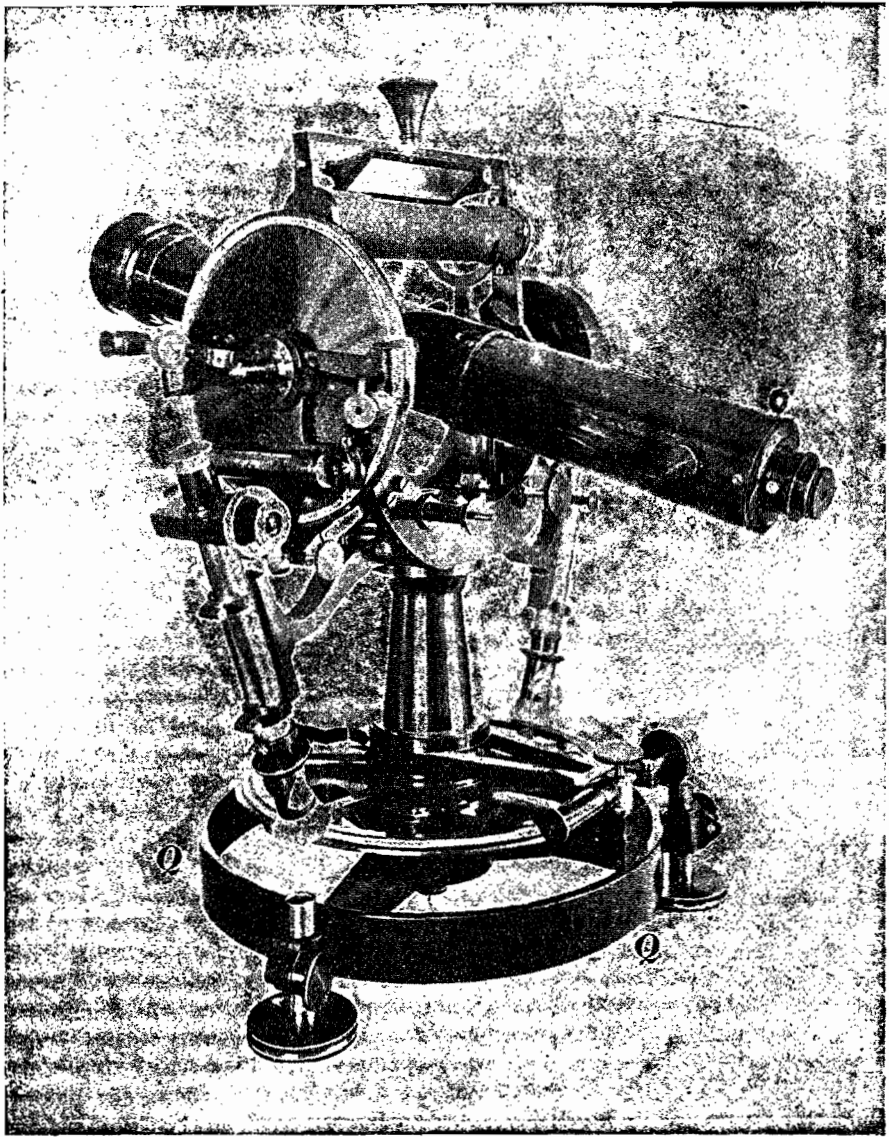
В триангуляциях I-го класса может быть применен теодолит *Ваншафа*, изображенный на чертеже 105: труба прямая и центральная с отверстием объектива 60 мм при фокусном расстоянии в 65 см; увеличение 48 и 72 (два окуляра); в виду значительного веса трубы, горизонтальная ось, для уменьшения трения цапф, покоится еще на двух ложных лагерах, образуемых каждая двумя роликами, которые упрелены на подпираемом пружинами вертикальном стержне. Лимб инструмента имеет диаметр 23—27 см, подразделен через пять минут и отсчитывается микроскоп-микрометрами, причем  $2\frac{1}{2}$  оборота винта измеряют промежутков на лимбе в пять минут; на ободке барабана микрометра нанесено 120 делений, (с подписью до 60), так что  $\delta=1''$ , а  $n_0=300$ . Средняя ошибка отсчета по микроскоп-микрометру  $\pm 0''{,}40$ .

Устройство осей можно видеть из чертежа 106: лимб *L*, посаженный на уступ центральной осевой цапфы *a*, прижимается к нему при закреплении гайкой *w*. Водило *x*, которым оканчивается алидадная бюкса *b*, имеет на внешнем конце вилку, охватывающую выступ *S*; чрез эту вилку пропущены упирающиеся своими концами в выступ *S* наводящий винт алидады и противодействующая ему пружина. Чрез выступ *S*, соединенный неизменно с нижним хомутом *ННН*, проходит зажимной винт *v* алидады. Нижний хомут *ННН* в том конце, чрез который проходит винт *v*, имеет утолщение *TNM* покое внутри—здесь помещается кубик, закругленный с одной грани и имеющий внизу выступ *q*; этот кубик может в известных пределах вращаться около оси *O*, укрепленной эксцентрично в стенках уширения *TNM*, выступ-же *q*—упирается в стержень *RR*. Очевидно при завинчивании винта *v*, выступ *q* кубика пойдет по направлению к центру инструмента и прижмет стержень *RR* к основанию *D* дрейфуса, вследствие чего получится закрепление хомута *ННН*. Следовательно, при работе зажимным винтом и наводящим винтом алидады не оказывается никакого действия на лимб инструмента. Цена деления уровня, ставящегося на горизонтальную ось, берется от 4'' до 5''. Вертикальный круг имеет диаметр 17—18 см, подразделен чрез десять минут и отсчитывается десятисекундными верньерами; при алидаде вертикального круга уровень с ценой деления в 10''. По требованию, механик снабжает свои теодолиты поверительной трубой, которая соединяется с медным нижним кольцом *QQ* (черт. 105).

При измерении углов в триангуляции выгодно иметь *центральную* и *прямую* трубу,—так как прямая труба вследствие отсутствия внутренней призмы дает лучшие изображения, чем ломаная. Поэтому описанный теодолит *Ваншафа* превосходен для измерения *горизонтальных* направлений—в особенности, если он снабжен поверительной трубой и окулярными микрометрами при главной и поверительной трубе. К сожалению фирма *Ваншаф* не выработала надлежащей конструкции прикрепления поверительной трубы, и вообще из Германских механиков один *Гильдебранд* справился надлежаще с этой задачей, пред'являемой только со стороны русских геодезистов (в заграничных работах поверительной трубой не пользуются). Конечно, недостатком конструкции является отсчитывание вертикального круга десятисекундными верньерами,—что не может быть допущено при измерении зенитных расстояний на точках I-го класса, если только такие измерения выполняются\*).

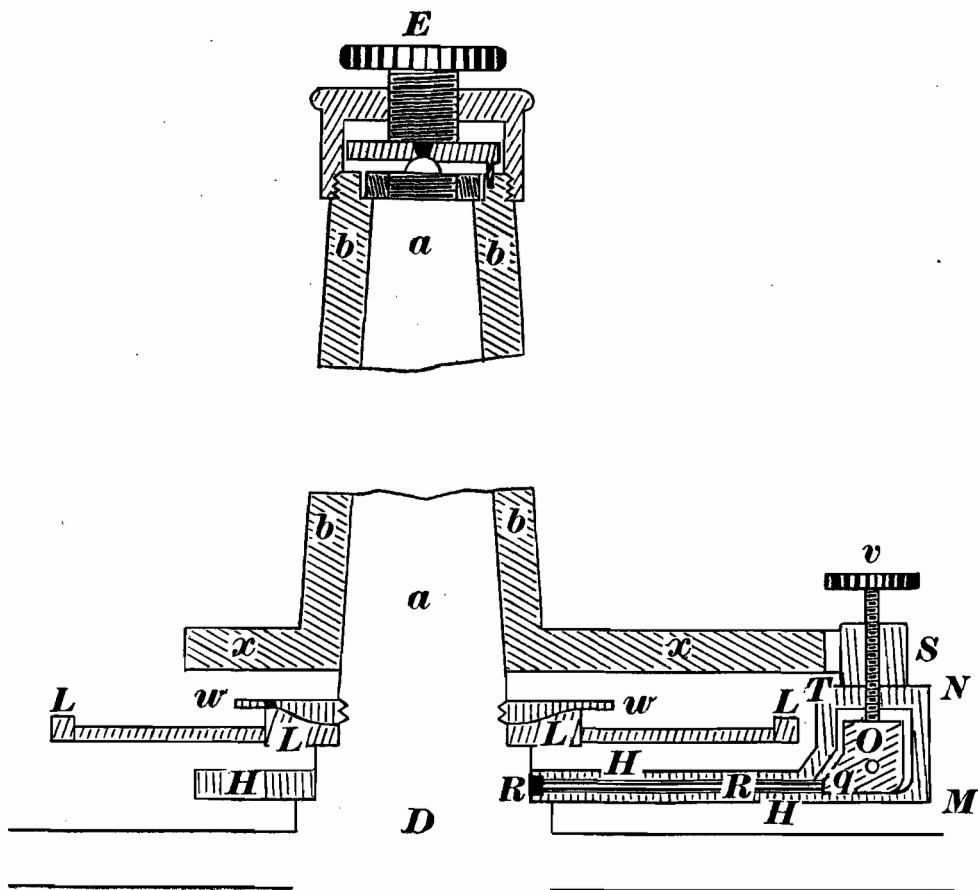
Наиболее подходящими для работ на русских триангуляциях I-го класса являются инструменты *Гильдебранда*—большие теодолиты и геодезические универсалы. Такой геодезический универсал изображен на чертеже 107. Вертикальный и горизонтальный круги имеют диаметры или 21 см, или 27 см. В инструментах с диаметром 21 см, круги подразделяются чрез пять минут

\*) Целесообразнее в теодолитах типа Ваншафа совсем не иметь вертикального круга.



Черт. 105.

и отсчитываются микроскоп-микрометрами, снабженными *двумя* парами нитей: расстояние между парами нитей равно двум оборотам винта микрометра, а пятиминутный интервал лимба измеряется двумя с половиною оборотами винта; на ободке барабана микрометра имеется 60 делений; таким образом  $n_0=150$  и  $\delta=2''$ . В случае кругов с диаметром 27 см они подразделяются через четыре минуты, два оборота винта микрометра измеряют этот четырех-



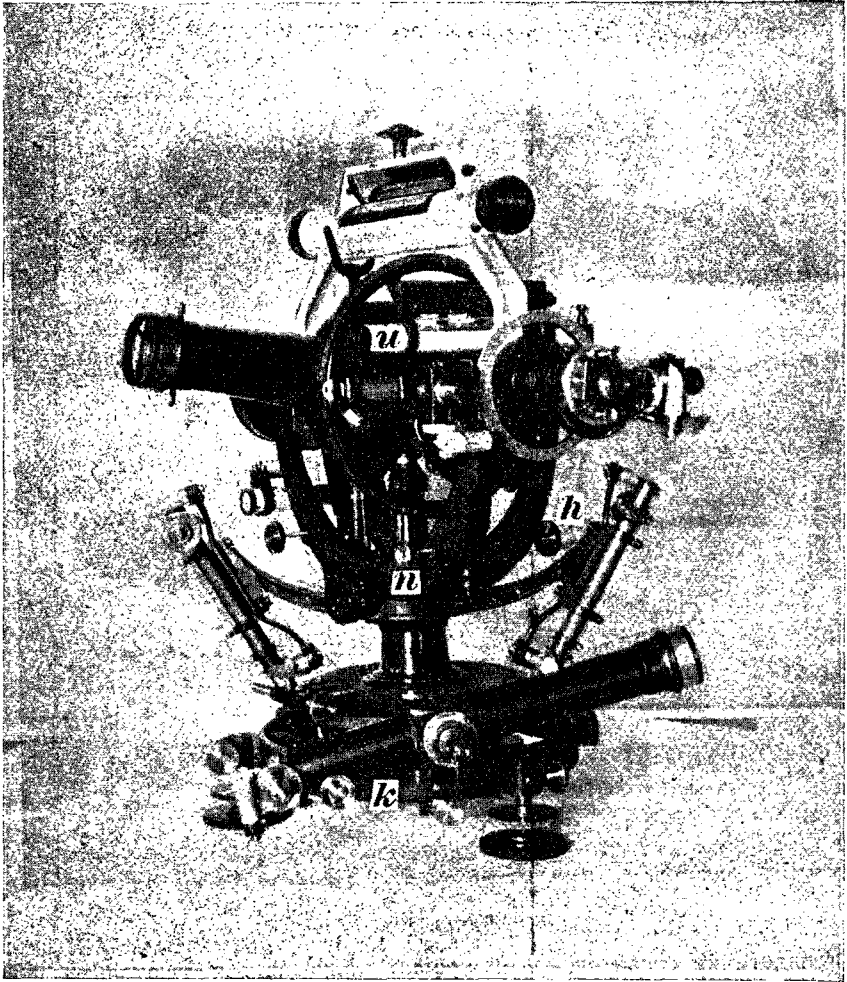
Черт. 106.

минутный интервал на лимбе, на ободке барабана имеется 60 делений, но две пары нитей микрометра ставятся в расстоянии полутора оборота винта; таким образом здесь  $n_0=120$  и  $\delta=2''$ . Средняя ошибка отсчета по микрометру около  $\pm 0''.4$ . Труба в инструментах с кругами 27 см имеет об'ектив с диаметром 61—65 мм (при фокусном расстоянии 63 см) и три окуляра, дающие увеличения 40, 46 и 57. Поверительная труба имеет об'ектив 33 мм при увеличении 28. Обе трубы имеют окулярные микрометры—цена деления микрометра главной трубы около одной секунды, цена деления микрометра поверительной трубы —  $1''.5$ . В инструментах с диаметром кругов 21 см, главная труба имеет об'ектив с диаметром 48 мм, фокусным расстоянием около 47 см; три окуляра дают увеличения 40, 48, 54; поверительная труба имеет об'ектив в 33 мм и увеличение 28; обе трубы имеют окулярные микрометры с ценой деления около одной секунды для главной трубы и около  $1''.5$  — в поверительной трубе. Главная труба — ломаная.



Вертикальный круг прижимается к кубу трубы, в котором помещена призма, посредством гайки, ходящей по нарезке горизонтальной оси; отпустив эту гайку, переставляют вертикальный круг руками на должное число градусов при переходе от одного приема измерения зенитных расстояний к другому.

Микроскопы вертикального круга укреплены на раме, надетой свободно на горизонтальную ось трубы; на этой-же раме укреплен уровень *u* (черт. 107)

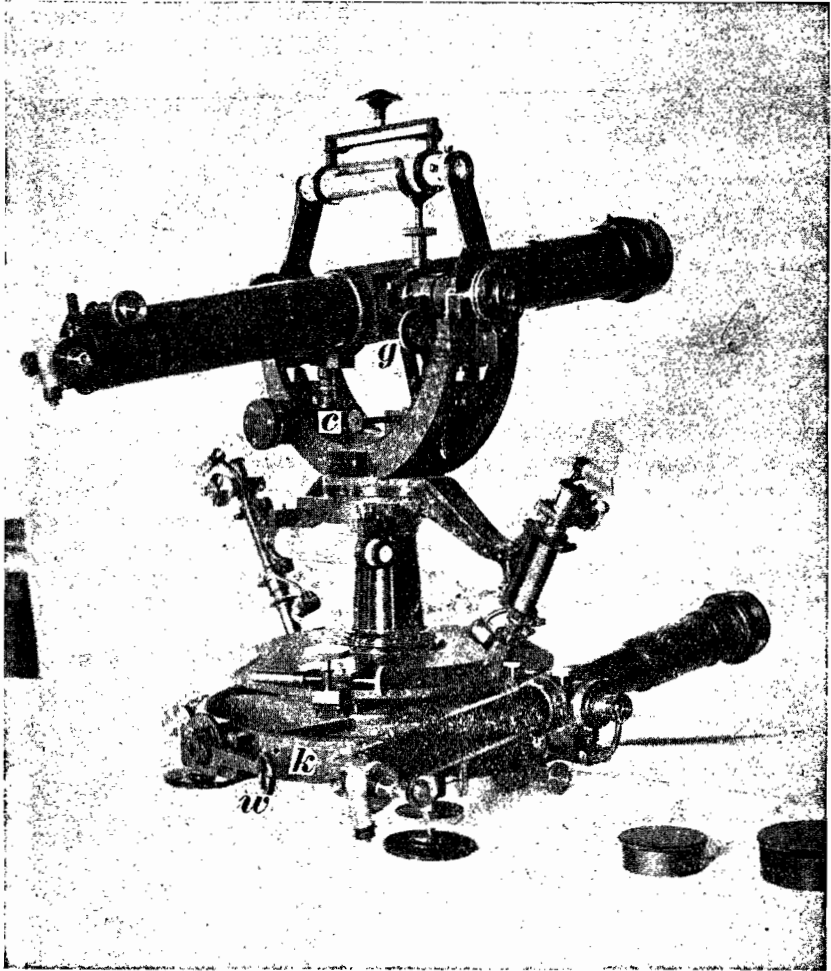


Черт. 107.

с ценой деления около  $2''.5$ . От рамы, несущей микроскопы, идет вниз от-росток, в который с двух сторон упираются винт *h* и противодействующая ему пружина *n*, пропущенные чрез подставки трубы; работая винтом *h*, при-водим на средину пузырек уровня *u* (или в положение, близкое к среднему) перед отсчитыванием вертикального круга.

Встречается нередко и другое устройство алидады вертикального круга, когда микроскопы соединяются жестко с подставками трубы  $\{$  и  $\}$  когда, сле-довательно, микроскопы вертикального круга не имеют микрометрического

движения в вертикальной плоскости. В таком случае, в инструментах Гильдебранда на верхней, горизонтальной грани коромысла держащего микроскопы, укрепляются агатовые, тщательно шлифованные в плоскость пластинки;



Черт. 108.

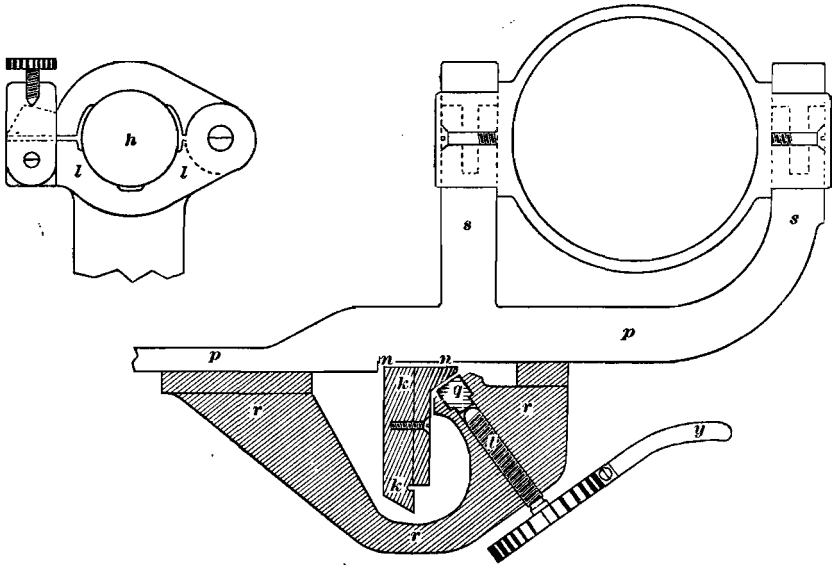
на эти пластинки ставятся ножки уровня, кончающиеся тщательно шлифованными стальными шариками; уровень на агатовых пластинках придерживается застежками (откидными) с пружинками.

Цена деления уровня, ставящегося на горизонтальную ось около  $2''.5$  (в инструментах 21 см и 27,5 см). Горизонтальная ось подпирается двумя ложными лагерами (см. черт. 105, 108).

Горизонтальной круг—закрытый, покоится на уступе центральной цапфы *a* (черт. 106), на котором ни чем не закрепляется, но настолько хорошо притерт к этому уступу, что неподвижность его за время исполнения приема вполне гарантирована; перестановка лимба между приемами делается руками, взявшись за пуговики, ввинченные в лимб с нижней стороны—устройство осей, зажимного и наводящего винта алидады то-же самое, как изображенное на черт 106 для инструментов *Ваншаффа*—с тем лишь различием, что

в верхней части алидады—для регулирования ее вращения—служит устройство, изображенное на чертеже 104а. Поверительная труба пристроена к нижнему кольцу, соединенному с дрейфусом инструмента, причем здесь мы имеем устройство очень остроумное и принадлежащее только инструментам Гильдебранда (см. черт. 109):

Ниже лимба центральную цапфу (или вернее основание дрейфуса) охватывает кольцо, от которого идет пластина *pp*; эта пластина оканчивается кареткой *rrr*, охватывающей кольцо *kk* (черт. 107 и 108) треножника ин-

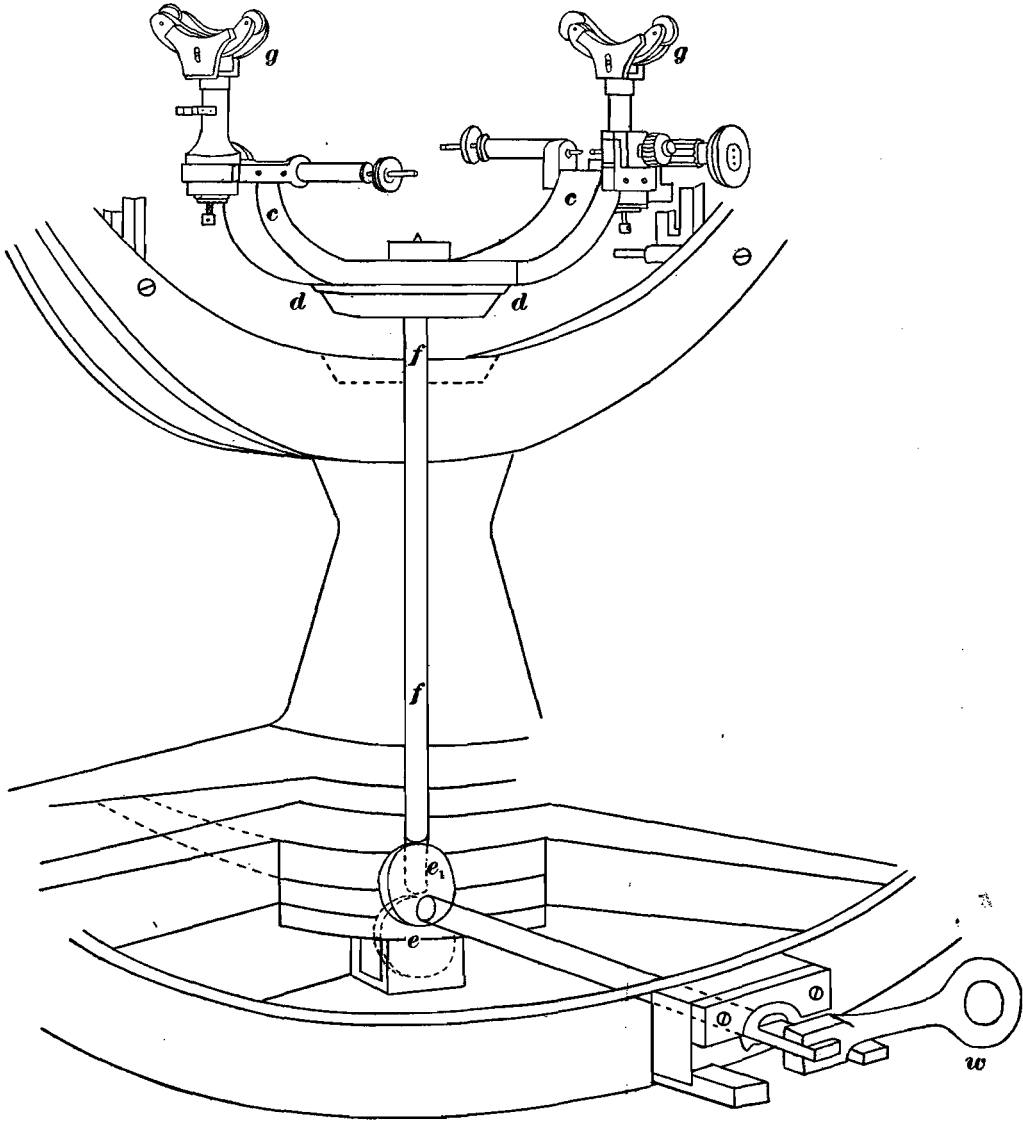


Черт. 109.

струмента; в верхней части каретки выведены две подставки *ss* с лагерами *ll*—в эти лагеры вкладывается горизонтальная ось *h* поверительной трубы. Винт *t*, широкая шляпка которого имеет прилив *y*, служащий рукояткой при завинчивании или отпуске винта *t*, проходит через стенку каретки *rrr* и упирается в углубление в кубике *q*, лежащем свободно в гнезде каретки; вращая рукоятку *y*, прижимают кубик *q* к приливу кольца *kk* и тем закрепляют поверительную трубу по азимуту; для закрепления ее по высоте служат застежки, накидывающиеся сверху на лагеры *ll*; плоскостью *nn* каретка лежит на верхней грани кольца *kk*.

На черт. 108 изображен большой теодолит Гильдебранда для наблюдений в триангуляции I класса. Горизонтальный круг (закрытый) имеет диаметр 27.5 см, разделен чрез 4 минуты, отсчитывается микроскоп-микрометрами с ценой деления барабана 2"; микрометры имеют две пары нитей—на расстоянии 1½ оборота винта друг от друга. Труба *прямая*, центральная с объективом диаметра 65 мм, при фокусном расстоянии 64 см; три окуляра дают увеличения 40, 46 и 57; горизонтальная ось трубы подпирается двумя ложными лагерами. Поверительная труба имеет объектив диаметра 36 мм, увеличение—30. Главная и поверительная труба имеют окулярные микрометры с ценой деления около 1". Соединение поверительной трубы с кольцом *k* треножника и соединение лимба с вертикальной осью те-же самые, как в описанном выше 2-х секундном универсале Гильдебранда (см. черт. 109). Устройство зажимного винта алидады такое-же, как в теодолите Ваншафа (черт. 106).

Соединение алидадной боксы с вертикальной осью инструмента несколько иное, чем указываемое чертежами 99, 104а, 106: изменение обусловлено наличием в инструменте особого механизма для переключивания горизонтальной



Черт. 108а.

зонтальной оси вместе с трубой в лагерах. Такая переключка выполняется поворачиванием влево рычага *w* (черт. 108 и 108а), причем эксцентрик *e* переходит в положение  $e_1$  и поднимает кверху стержень *ff*, который своим нижним закругленным концом касается всегда высшей точки эксцентрика *e*. Стержень *ff* пропущен насквозь чрез центральную цапфу *a* и заканчивается наверху площадкой *dd*, к которой привинчено наглухо коромысло *cc*, несущее ложные лагера *gg*. При переключивании трубы, верхняя часть инструмента, следовательно, вращается около стержня *ff*, будучи подперта только ложными лагерами *gg*.

Описанный большой теодолит Гильдебранда (черт. 108) действительно является инструментом, наилучше отвечающим запросам точнейших измерений горизонтальных направлений в триангуляциях I класса. Такие инструменты Гильдебранд начал строить недавно, всего с 1924 года по специальному заказу и указаниям Высшего Геодезического Управления С. С. С. Р. Несомненно, такими инструментами должно постепенно заменить все прежние. Превосходные геодезические универсалы Гильдебранда по существу излишне осложнены для триангуляции I класса, так как в последние годы, по основательным соображениям, от измерений зенитных расстояний для определения высот пунктов I класса, в С. С. С. Р. совершенно отказались.

Рассмотренные большие теодолиты Гильдебранда *сравнительно* небольшого веса: это имеет огромное значение при подеме инструмента на высокий сигнал и при манипуляциях с ним на тесной площадке сигнала, на которой находится наблюдатель (в особенности ночью).

Большие инструменты, изображенные на черт. 105, 107, 108 снабжаются искусно приспособленным электрическим освещением, которое делается самим механиком, изготовляющим инструмент, а не как-нибудь кустарно.

Необходимо теперь сказать несколько слов по поводу регулирования вращения алидады в инструментах с Репсольдовой системой осей.

Внутренняя поверхность алидадной бьюксы  $b$  (черт. 99) должна вполне соответствовать поверхности центральной цапфы  $a$ , но между двумя этими поверхностями должен быть тонкий слой масла, имеющий везде одну и ту же толщину—только тогда бьюкса будет плотно прилегать к цапфе и только тогда будет вращение алидады совершаться одновременно плавно, свободно и без колебаний.

Если правильность вращения алидады нарушена, то поступают так: винт  $E$  (черт. 106) или шляпку  $ss$  (черт. 104а) отводят на полоборота движением *против хода часовой стрелки* и оставляют инструмент в таком положении в покое на *два часа*. После этого вращают винт  $E$  или шляпку  $ss$  (черт. 104а) по ходу часовой стрелки до тех пор, пока рука не почувствует что винт наталкивается на препятствие (т. е., что он уперся в конец цапфы  $a$ ) и когда получается одновременно легкое вращение алидады. Такую установку шляпки  $ss$  повторяют несколько раз с замечанием каждый раз отсчета на грибообразной шляпке по индексу  $i$  (черт. 104а). Если эти отсчеты будут согласны между собой, то можно быть уверенным, что при установке винта  $ss$  на такой отсчет будем иметь правильное вращение алидады. Если-же эти отсчеты будут получаться несогласными, или—вопреки ожиданиям при согласии этих отсчетов по винту все-таки не получилось вращения алидады без колебаний,—то вывинтив совсем пружину, противодействующую наводящему винту алидады, придерживают инструмент за дрейфус, и обхватив пальцами бьюксу алидады—несколько раз поднимают и опускают эту бьюксу, давая ей ход по цапфе  $a$  и одновременно вращая алидаду. После этого снова повторяют указанную установку грибообразной шляпки. Если и теперь результат не будет достигнут, то приходится, развинтив соответственные части, снять всю алидадную часть с цапфы  $a$ , устранить старое масло, тщательно протереть и цапфу и бьюксу алидады, слегка смазать новым маслом цапфу  $a$ , и надев на нее алидадную бьюксу, до завинчивания гайки  $k$  (черт. 99) впустить еще масла между осью  $a$  и бьюксой алидады; после этого завинтить гайку  $k$ , поставить на места и свинтить все части, относящиеся к регулирующему аппарату, установить шляпку  $ss$  так, чтобы получилось легкое вращение алидады,—и через час все начать сначала: т. е. *отпустить* шляпку  $ss$  на полоборота против хода часовой стрелки, дать стоять инструменту два часа и искать затем нормальное положение винта  $E$  или шляпки  $ss$ .

При работе на холоде, вследствие сгущения масла, сделанная перед работой установка может оказаться не пригодной—тогда не следует трогать винт  $E$  или  $ss$ , а вывинтить пружину, противодействующую наводящему винту алидады, проделать, как указано выше, поднятие и опускание алидадной бьюсы по цапфе  $a$ —после чего получится вращение и легкое и правильное (если только винт  $ss$  был ранее установлен правильно).

В завершение параграфа нужно остановиться на определении цен делений окулярных микрометров и на вопросе по поводу пользования поверительной трубой.

На барабанах окулярных микрометров счет делений возрастает, если винт микрометра ввинчивается, т. е. нить идет к барабану. Следовательно возрастание счета оборотов идет в сторону барабана микрометра.

При круге  $L$ , барабан микрометра главной трубы — у правой руки наблюдателя и поэтому счет оборотов в поле зрения должен идти от левой руки к правой. В ломаной трубе левое изображение соответствует левому же предмету. Если в нульпункте микрометра считаем  $10^r$  оборотов ( $10^r$ ), а нити при наведении их на предмет стояли *правее* нульпункта на отсчете  $M > 10^r$ , то очевидно отсчет по горизонтальному лимбу сделан меньше истинного и следовательно поправка за микрометр главной трубы будет вычисляться по формуле:

$$- \frac{(M-10^r)\mu_1}{\sin z} \text{ — для круга } R$$

$$+ \frac{(M-10^r)\mu_1}{\sin z} \text{ — для круга } L$$

$z$ —зенитное расстояние наблюдаемого предмета (см. § 36). Для *прямой* трубы правило знаков будет обратное.

Поверительную трубу вкладывают всегда так в каретку, чтобы микрометр был вправо от оси трубы; поэтому, чтобы привести изображение, стоящее на отсчете  $m$ , большем  $10^r$ , к нульпункту микроскопа поверительной трубы, нужно вращать поверительную трубу вместе с лимбом против хода часовой стрелки, а тогда к нульпункту микроскопа горизонтального круга подойдет при новом визировании трубой (главной) на прежний предмет отсчет больший того, чем был при стоянии поверительной трубы на отсчете  $m$ . Поэтому поправка за микрометр поверительной трубы вычисляется так:

$$+ \frac{(m-10^r)\mu_2}{\sin z}$$

Окулярный микрометр главной трубы в инструментах *Гильдебранда* может быть повернут на  $90^\circ$  и очевидно им можно воспользоваться при измерениях и зенитных расстояний. Поправка в отсчет вертикального круга вычисляется по одной формуле для обоих положений трубы— $R$  и  $L$ , а именно:

$$+ (M-10^r)\mu_1.$$

Для определения цены деления микрометра главной трубы, ставят нити на отсчеты по микрометру  $7^r.00$ ,  $8^r.00$ ,  $9^r.00$ ,  $10^r.00$ ,  $11^r.00$ ,  $12^r.00$  и  $13^r.00$ ; при каждом таком положении нитей наводят трубу наводящим винтом алидады на один и тот-же удаленный, хорошо видимый предмет, с отсчетами каждый раз по обоим микроскопам горизонтального круга, после чего следует обратный ход,—т. е. установка нитей на отсчеты по микрометру  $13^r.00$ ,  $12^r.00$ ,  $11^r.00$ ,  $10^r.00$ ,  $9^r.00$ ,  $8^r.00$  и  $7^r.00$  и наведения трубы при этих положениях нитей на предмет наводящим винтом алидады с отсчитыванием каждый раз обоих микроскопов горизонтального круга. Таких приемов рекомендуется сделать *шесть*.

Так как в выражение поправки за окулярный микрометр входит делителем  $\sin z$ , то, очевидно, при выводе цены деления  $\mu_1$  нужно, разделив разность отсчетов по горизонтальному кругу на соответственное число делений микрометра, помножить результат на  $\sin z$ .

Для определения цены деления окулярного микрометра поверительной трубы избирают либо две удаленные хорошо видимые точки, лежащие на одной высоте и составляющие друг с другом угол в 25 минут, либо выставляют две марки, дающие такой-же угол. Горизонтальный угол между избранными точками измеряют универсалом шестью приемами, с перестановкой лимба между приемами на  $30^\circ$ ; затем угол между марками, лежащий конечно вообще в наклонной плоскости, измеряется микрометром поверительной трубы при пяти положениях поверительной трубы, при которых отсчеты на левый в поле зрения предмет будут последовательно равны:  $3''$ ,  $4''$ ,  $5''$ ,  $6''$ ,  $7''$ ; при каждой установке поверительной трубы нити ее наводятся на левый и правый предмет по четыре раза. Цена деления  $\mu_2$  окулярного микрометра равна горизонтальному углу между марками, умноженному на синус зенитного расстояния марок, и деленному на число делений микрометра в интервале между марками.

Если поставить два универсала на каменных столбах в расстоянии друг от друга 6—8 метров и направить поверительную трубу исследуемого универсала и главную трубу другого универсала так, чтобы ось одной служила-бы продолжением оси другой, то при установке сеток этих труб в главных фокусах объективов,— в трубе одного универсала будет видно изображение сетки другого универсала с сохранением при этом угловых расстояний. Следовательно, ставя нити микрометра поверительной трубы исследуемого универсала в разные положения (на разные отсчеты по микрометру) и делая при каждой такой установке нитей поверительной трубы наведения на них стоящих всегда в нульпункте нитей главной трубы другого универсала с отсчетами каждый раз обоих микроскопов его горизонтального круга,—мы и выведем отсюда цену деления микрометра поверительной трубы. В этом опыте следует возможно уменьшить разность высот горизонтальной оси вспомогательного универсала и горизонтальной оси поверительной трубы.

Что касается вопроса по поводу пользования поверительной трубой, то на нем приходится остановиться в виду того, что только в русской практике мы имеем применение (и притом широкое) поверительной трубы; практика-же всех остальных государств не признает применения поверительной трубы. Очевидно, что при пользовании поверительной трубой *наведение* слагается из наведений двух труб — ошибка наведения *поверительной трубы* всецело входит в результат наблюдения направления — так-же, как и ошибка наведения главной трубы. Поэтому, прежде всего, очевидно, что точность наведений поверительной трубы должна быть *значительно* (по крайней мере в два раза) *выше* точности наведений *главной трубы*. (Это особенно ясно, когда по микрометру поверительной трубы для каждого направления определяют и вводят *поправки* — см. пример в § 40).

Чтобы осуществить только что высказанное требование, надлежит поверительную трубу наводить на специально изготовленную марку, установленную вполне солидно в сравнительно небольшом — около одного километра — расстоянии от инструмента. Для дневных наблюдений пользуются окрашенной в белый цвет деревянной дощечкой или металлической пластиной, с черною вертикальною полоской по середине: длина полоски должна быть между 0.5—0.8 метра; ширина ее должна быть рассчитана в зависимости от расстояния марки до места наблюдения и от углового расстояния между парой нитей поверительной трубы. При нормальном расстоянии этих нитей друг от друга в  $30''$ — $40''$ , следует иметь ширину вертикальной полоски

такую, чтобы она усматривалась-бы под углом в  $8''$ — $10''$ . Для ночных наблюдений в той-же марке делается узкий вертикальный прорез, который освещается поставленною сзади лампой.

Наведения нитей поверительной трубы на устроенную таким образом марку действительно будут выполняться с точностью по крайней мере раза в два большею точности визирования главной трубой. С другой стороны колебания изображений марки, вследствие близости ее к станции будут вообще заметно меньше колебаний изображений удаленных тригонометрических сигналов, наблюдаемых в главную трубу.

Так как наведения поверительной трубы производятся на близкую марку, то именно поэтому и дают ей размеры заметно меньшие по сравнению с главной трубой, имея в то-же время высокую точность наведения ее нитей на черту марки. Но понятно, что наводить поверительную трубу на удаленный сигнал — совершенно недопустимо. С другой стороны уже из сказанного ясно, что во-первых с поверительной трубой должен работать искусный наблюдатель, а во-вторых пользование ею предполагает вполне спокойные изображения марки.

Скрепление поверительной трубы с основанием инструмента не есть абсолютно жесткое, и вероятно влияние одних перемен температуры вызывает перемены в положении поверительной трубы, не соответствующие переменам в положении горизонтального лимба.

В триангуляциях первого класса наблюдения исполняются с платформ высоких сигналов, где устойчивость основания инструмента нарушается тремя причинами:

1) кручением болванки и ног пирамиды, служащей подставкой инструмента, и кручением основных столбов сигнала, на которых эта пирамида укреплена; 2) ветром, колеблющим и раскачивающим сигнал; 3) передвижениями наблюдателей по полу при производстве отсчетов и наведений.

Влияние первой причины при наблюдениях без поверительной трубы может считаться значительно исключенным, если в каждый прием наблюдений включать только *два предмета*, т. е. перейти к наблюдениям *углов*, доведя время, затрачиваемое на прием, до минимума, и располагая *симметрично* относительно времени наблюдения левого и правого предмета. Третья причина при опытно наблюдателе оказывает малое влияние даже при наблюдениях с русских сложных сигналов, в которых ноги пирамиды, несущей инструмент, *не идут с з мн*, если только сигнал надлежаще построен, — так как при перемещениях наблюдателя по полу вся система, держащая инструмент, лишь едва заметно пружинит и затем вновь приходит точно в первоначальное положение, когда уже и делается наведение трубы; при наблюдениях с сигналов, принятых в Германии, конечно, о влиянии третьей причины видимо, говорить не приходится. Таким образом только вторая причина — ветер — заставляет неизбежно пользоваться поверительной трубой, и при наблюдениях с русских сигналов даже при сравнительно слабом ветре введение поправок за поверительную трубу совершенно необходимо.

Из сказанного совершенно понятно, почему в заграничной практике, где не скупятся на возведение сигналов огромной устойчивости и жесткости (в Индии англичане строят сигналы в виде каменных столбов до 20—25 метров вышиною) и выжидают при наблюдениях совершенно тихую погоду, поверительная труба считается не нужной.

В практике русской, при наблюдениях в тихую погоду и на вполне устойчивом сигнале, можно было-бы рекомендовать лишь *следить* в поверительную трубу, но без определения при ее посредстве азимутальных поправок; при этом, конечно, в прием должно включать только два предмета и ставить условие, чтобы в течение полуприема совершенно не обнаруживались-бы



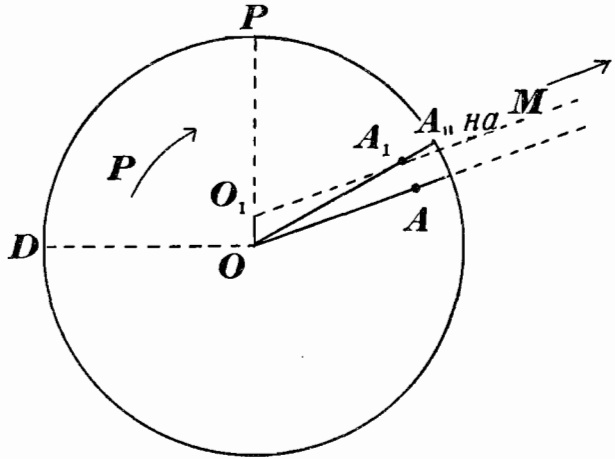
смещения нитей поверительной трубы относительно штриха марки; если-же такие смещения будут обнаружены, то полуприем должно переделывать. Так как поставленные условия требуют, кроме полной устойчивости сигнала, еще отсутствия его кручения, то очевидно, что только в исключительных случаях можно в нашей практике лишь *следить* в поверительную трубу; в огромном-же большинстве случаев *одновременно* с наведением главной трубы должно наводить нити поверительной трубы на марку и определять по окулярному микрометру азимутальную поправку. А *priori* можно сказать, что точность наблюдений с поверительной трубой *меньше* точности наблюдений, исполненных в тех условиях, когда нет нужды в поверительной трубе.

## ГЛАВА VII.

### Об инструментальных погрешностях.

**34. Эксцентрицитет алидады.** Пусть  $O$  (черт. 110) есть центр лимба, а  $O_1$  — пересечение плоскости лимба с осью вращения алидады или так называемый центр вращения алидады.

Расстояние  $OO_1$ , обозначаемые буквой  $e$ , представляет собою так называемый линейный эксцентрицитет алидады. Величина  $e$  и отсчет  $P$  на лимбе, соответствующий тому его радиусу, который проходит чрез  $O_1$ , называются элементами эксцентрицитета. Эксцентрицитет алидады обуславливает: 1) сдвиг нуля верньера или нуля пункта микроскопа относительно штрихов лимба; 2) ошибку при определении расстояния нулевого штриха верньера или нуля пункта микроскопа от ближайшего к нему младшего штриха лимба. Допустим для простоты рассуждений, что визирная плоскость трубы теодолита проходит через радиус алидады  $O_1$  с ее индексом (нульпунктом микроскопа или нулем верньера). Пусть при наведении трубы на предмет  $M$  индекс алидады совпадал с точкой  $A_1$ . Если-бы не было эксцентрицитета, то при наведении трубы на  $M$  индекс алидады оказался-бы лежащим на радиусе  $OA$ , параллельном прямой  $O_1A_1$ . В самом деле, вследствие ничтожности  $e$  по сравнению с расстоянием до  $M$ , угол в  $M$ , соответствующий  $OO_1$  будет исчисляться тысячными долями секунд и следовательно, если после наведения трубы на  $M$  вообразить поступательное движение алидады так, чтобы  $O_1$  переместилась-бы в  $O$ , — то труба в результате такого перемещения алидады останется наведенною фактически на  $M$ . Точка  $A$  есть очевидно *правильное* положение индекса, а угол  $A_1OA$  измеряет собою погрешность, обусловленную сдвигом индекса из положения  $A$  в неправильное положение  $A_1$ .



Черт. 110.

алидады  $O_1$  с ее индексом (нульпунктом микроскопа или нулем верньера). Пусть при наведении трубы на предмет  $M$  индекс алидады совпадал с точкой  $A_1$ . Если-бы не было эксцентрицитета, то при наведении трубы на  $M$  индекс алидады оказался-бы лежащим на радиусе  $OA$ , параллельном прямой  $O_1A_1$ . В самом деле, вследствие ничтожности  $e$  по сравнению с расстоянием до  $M$ , угол в  $M$ , соответствующий  $OO_1$  будет исчисляться тысячными долями секунд и следовательно, если после наведения трубы на  $M$  вообразить поступательное движение алидады так, чтобы  $O_1$  переместилась-бы в  $O$ , — то труба в результате такого перемещения алидады останется наведенною фактически на  $M$ . Точка  $A$  есть очевидно *правильное* положение индекса, а угол  $A_1OA$  измеряет собою погрешность, обусловленную сдвигом индекса из положения  $A$  в неправильное положение  $A_1$ .

Пусть нуль лимба совпадает с  $D$ ; назовем чрез  $L$  величину угла  $DOA$  и чрез  $L_1$  — величину угла  $DOA_{II}$ , причем под  $A_{II}$  понимается пересечение окружности лимба с радиусом  $OA_1$ . Называя угол  $A_1OA$  чрез  $x$ , имеем:

$$L=L_1+x$$

$$\frac{\sin x}{\sin (L_1-P)} = \frac{e}{O_1 A_1} \text{ или } \frac{\sin x}{\sin (L_1-P)} = \frac{e}{r+\Delta}$$

причем чрез  $r$  обозначен радиус лимба, а чрез  $\Delta$  — весьма малое отличие радиуса алидады от радиуса лимба. Так как  $\Delta$  есть величина малая одного порядка с  $e$ , то пренебрегая малыми величинами второго порядка, напишем:

$$\frac{x'' \sin 1''}{\sin (L_1-P)} = \frac{e}{r}; \quad x'' = \frac{e}{r \sin 1''} \sin (L_1-P)$$

Таким образом, если-бы определение расстояния индекса  $A_1$  от ближайшего к нему штриха лимба или определение  $L_1$  делалось-бы безошибочно то тогда *истинный* отсчет  $L$ , т. е. не искаженный действием эксцентрици-тета, получился-бы по формуле:

$$L=L_1 + \frac{e}{r \sin 1''} \sin (L_1-P) \dots \dots \dots (1)$$

Предположим теперь, что в теодолите имеется  $n$  приборов для отсчиты-вания, расположенных по окружности лимба чрез равные промежутки. Если отсчет по первому верньеру или микроскопу есть  $L_1$ , то индекс верньера или микроскопа с номером  $k+1$  окажется, вследствие эксцентрици-тета али-дады смещенным от своего истинного положения и именно так, что этому смещению будет соответствовать при центре лимба угол  $z$ :

$$z = \frac{e}{r \sin 1''} \sin [L_1 + k \frac{2\pi}{n} - P]$$

Другими словами, если считаться только с тою частью влияния эксцентри-цитета, которое выражается смещениями индексов от их истинных поло-жений, то *направление*  $N$ , г. е. среднее из отсчетов по  $n$  верньерам, будет искажено ошибкой  $\Delta$ , равной:

$$\Delta = \frac{1}{n} \cdot \sum_1^n z = \frac{e}{r \sin 1''} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_0^{n-1} \sin [L_1 + k \cdot \frac{2\pi}{n} - P]$$

Но  $\sum_0^{n-1} \sin [L_1 + k \frac{2\pi}{n} - P]$  равно нулю и поэтому мы приходим к за-

ключению, что при отсчитывании лимба по верньерам или микроскопам расположенным симметрично, чрез равные промежутки по всей его окру-жности, влияние эксцентрици-тета на определение *направления* равно нулю, если иметь в виду лишь одно обусловленное эксцентрицитетом смещение нулевых штрихов верньеров или нульпунктов микроскопов и если пренебре-

гать малыми величинами порядка  $\left(\frac{e}{r}\right)^2$ . Это заключение о нулевом влиянии

эксцентрици-тета на *направление* очевидно остается в силе и при изменя-ющихся во время вращения алидады величинах  $e$  и  $P$ . Изменения в поло-жении центра  $O_1$  алидады достигают иногда в инструментах с Репсольдовой системой осей величин одного порядка с  $e$ .

Перейдем теперь к вопросу о влиянии эксцентриситета на определение положения нулевого штриха верньера или нуля микрометра относительно ближайшего младшего штриха лимба. Эксцентриситет алидады обуславливает, во-первых, изменение расстояния от центра лимба до края верньера, что ведет за собою различия в значениях точности верньера при разных положениях алидады. Назовем чрез  $\mu$  — цену деления на лимбе и чрез  $r$  — радиус лимба; если для построения верньера было взято  $n$  делений лимба, то очевидно, что длина  $S$  дуги верньера равна  $n \cdot \mu \cdot r \cdot \text{Sin } 1''$ .

Если при некотором положении алидады край верньера удален от центра лимба на расстояние  $d$ , то точность верньера, соответствующая этому положению алидады, будет равна:

$$t = \mu - \frac{n \cdot \mu \cdot r}{(n+1) d} = \mu - \frac{n \cdot \mu \cdot r}{(n+1) (r + \Delta r)}$$

Расстояние  $d$  будет изменяться очевидно от  $r + e$  до  $r - e$ ; другими словами наибольшее отступление действительного значения  $t$  от задуманного механиком  $t_0$  будет вычисляться так:

$$t - t_0 = \frac{n \cdot \mu \cdot r}{(n+1) r^2} \Delta r = \frac{\Delta r \cdot n \cdot \mu}{r (n+1)} \dots \dots \dots (2)$$

а изменения  $t$  будут заключаться в пределах от нуля до  $\frac{2 e n \mu}{(n+1) r}$ . Называя  $\frac{e}{r \text{ Sin } 1''}$  угловым эксцентриситетом и обозначая его чрез  $\epsilon$  напишем:

$$t - t_0 = \epsilon'' \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \mu'' \cdot \text{Sin } 1'' = \epsilon'' \cdot n \cdot t_0'' \text{ Sin } 1'' \dots \dots \dots (3)$$

При десятисекундном верньере  $n = 59$  и следовательно при  $\epsilon'' = 60''$  будем иметь  $t - t_0 = 0''.18$ . Другими словами в десятисекундных теодолитах уже при  $\epsilon = 60''$  ошибка в отсчете по верньеру, обусловленная влиянием эксцентриситета, может достигнуть значения:

$$n (t - t_0) = 59.0''.18 = 10''.6$$

С такою ошибкою — при том систематического характера — конечно, помириться нельзя. Однако достаточно очевидно, что одновременные изменения расстояния  $d$  для двух противоположных верньеров равны по величине, но противоположны по знаку. Поэтому надлежит заключить, что погрешности в отсчетах по верньерам, обусловленные изменениями расстояния края верньера от центра лимба при эксцентричном движении алидады, уничтожаются до известной степени в среднем из отсчетов по двум противоположным верньерам. Рассмотрим этот вопрос подробнее. Почти всегда в инструментах с верньерами нули противоположных верньеров отстоят друг от друга точно на  $180^\circ (\pm 10'')$ . Поэтому различие в показаниях верньеров не превышает  $2\epsilon$ . Следовательно, если на одном верньере совпадающий штрих имеет номер  $k$ , то на другом верньере совпадающий штрих может иметь номер  $k \pm \frac{2\epsilon}{t_0}$ . Другими словами, если погрешность из-за эксцентриситета по первому верньеру выразилась согласно формулы (3) величиной:

$$+\epsilon'' \cdot n t_0 \text{ Sin } 1'' \cdot k$$

то погрешность из-за той-же причины по второму верньеру выразится так:

$$-\epsilon'' \cdot n t_0 \text{ Sin } 1'' \left( k \pm \frac{2\epsilon}{t_0} \right)$$

Поэтому, в случае, когда младшие штрихи лимба, за которыми сейчас следуют нули верньеров, отличаются ровно на  $180^\circ$ , имеем такую погрешность  $\Delta$  в направлении  $N$ :

$$\Delta = \pm (\varepsilon'')^2 n \operatorname{Sin} 1'' \dots \dots \dots (4)$$

Но в том случае, когда нуль одного верньера отстоит от ближайшего к нему младшего штриха  $S$  лимба почти на величину деления  $\mu$  лимба, по второму верньеру отсчет может произойти уже за штрихом  $180^\circ + S + \mu$  лимба. Следовательно, если погрешность одного верньера будет

$$+ \varepsilon n t_0 \operatorname{Sin} 1'' \cdot k,$$

то погрешность второго будет:

$$- \varepsilon n t_0 \operatorname{Sin} 1'' \left[ k + \frac{2\varepsilon}{t_0} - (n+1) \right]$$

а погрешность в направлении  $N$  выразится так:

$$\Delta = -\varepsilon^2 n \operatorname{Sin} 1'' + \frac{\varepsilon'' n (n+1) t_0 \operatorname{Sin} 1''}{2} \dots \dots \dots (5)$$

В случае предусматриваемом формулой (4), даже при  $\varepsilon=60''$ ,  $\Delta$  не превзойдет одной секунды, но в случае, изображаемом формулой (5) уже при  $t_0=10''$ ,  $n=59$  и  $\varepsilon=30''$

$$\Delta=4''.$$

Так как средняя погрешность в  $N$ , обусловленная собственно ошибками отсчетов по верньерам не превышает  $\pm 2'',5$  то очевидно, что *нельзя допускать в десятисекундных инструментах:*

$$\varepsilon > 20''$$

Вследствие эксцентрицитета алидады штрихи верньера являются направленными *нерадиально*; однако, чтобы эта нерадиальность могла-бы быть замечена наблюдателем, нужно иметь столь крупное значение  $\varepsilon$ , которое в исправных инструментах не встречается.

В инструментах с микроскоп-микрометрами эксцентрицитет алидады кроме смещения нуля, вызывает еще изменения *run'a* микроскопа и непараллельность нитей микрометра со штрихами лимба. Однако нужно иметь столь крупное значение  $\varepsilon$ , которое встречается лишь в поломанных инструментах, чтобы наблюдатель мог-бы заметить обусловленное эксцентрицитетом нарушение параллельности нитей микрометра со штрихами лимба. Затем очевидно, что одновременные изменения *run'a* двух противоположных микроскопов, как обусловленные изменениями расстояний микроскопов от центра лимба, равны по величине, но противоположны по знаку. Изменение  $\Delta\rho$  в *run'e* микроскопа будет равно  $n_0 \varepsilon'' \operatorname{Sin} 1''$ . Поэтому ошибка в отсчете по микроскопу будет равна  $\varepsilon'' \operatorname{Sin} 1'' \cdot \frac{(a+b-n_0)}{2} \delta$ . Даже при  $\varepsilon=60''$  имеем для большого теодолита, в котором  $n_0=150$  и  $\delta=2''$ , наибольшую ошибку отсчета равную всего  $0'',05$ . Другими словами о влиянии эксцентрицитета на понижение точности определения микрометром расстояния нуля от штрихов лимба говорить не приходится.

Но, конечно, значительность  $\varepsilon$  в инструменте с микроскоп-микрометрами указывает или на повреждение, или на неправильную регулировку положения алидады, а следовательно и на неправильность ее вращения, что непременно понизит точность работы инструмента.

В инструментах с Репсольдовой системой осей эксцентриситет алидады может обуславливаться во-первых эксцентричным положением лимба относительно оси центральной цапфы  $a$  (черт. 99, 106) и во-вторых несовпадением оси вращения алидадной бьюксы  $b$  с осью той-же цапфы  $a$ .

Первая причина, как уже объяснено выше, будет не влиять на направление даже при  $\epsilon=60''$ , а смещение нуля, вызываемое этой причиной, будет изменяться строго по закону  $\text{Sin}(M-P)$ .

Вторая-же причина, как вызванная или несовпадением оси матки винта  $ss$  (104а) с осью цапфы  $a$ , или не круговым сечением внутренней поверхности бьюксы  $b$  (или поверхности цапфы  $a$ )—непреренно будет сопровождаться переменами в положении оси вращения алидады, а следовательно и неправильными изменениями элементов эксцентриситета. Эти неправильности вращения алидады могут сопровождаться и упругими ее деформациями, так как возможно, что при не круговом сечении трущихся поверхностей люфт между ними в некоторых местах будет становиться иногда меньше предельного, а при эксцентричном положении оси матки винта  $ss$  давление бьюксы  $b$  на цапфу  $a$  будет при поворотах алидады распределяться неравномерно по окружности. Здесь мы наталкиваемся на возможность таких изменений в инструменте которые, выражаясь гнутиями алидады, будут вредно сказываться на отсчетах по лимбу. Конечно, если вращение алидады происходит совершенно свободно, то эти влияния будут очень малы. Но все-таки требования высокой точности результатов обязывают к осторожности. Так как мы не имеем возможности отделить в эксцентриситете алидады ту часть, которая обусловлена неправильным прикреплением лимба к цапфе  $a$ , то надлежит требовать, чтобы в инструментах с микроскоп-микрометрами  $\epsilon$  было-бы меньше  $20''$ .

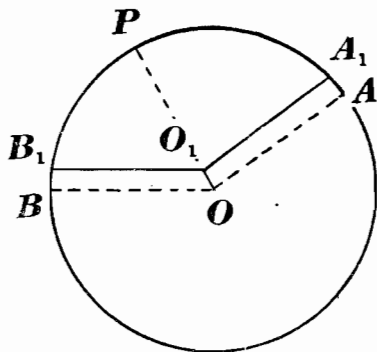
В заключение параграфа рассмотрим определение элементов эксцентриситета, предполагая, что лимб отсчитывается по двум противоположным верньерам или микроскопам. Пусть на чертеже 111:  $O$  и  $O_1$  центры лимба и алидады;  $A_1$  и  $B_1$ —нулевые штрихи первого и второго верньеров (или нульпункты микроскопов);  $A$  и  $B$  точки окружности лимба, с которыми совпадали-бы соответственно  $A_1$  и  $B_1$  если-бы  $O_1O$  равнялось нулю ( $OA$  параллельно  $O_1A_1$  и  $OB$  параллельно  $O_1B_1$ ). Назовем: отсчет при  $A_1$  чрез  $M_1$ ; отсчет при  $B_1$ —чрез  $M_{II}$ ; отсчет при  $A$ —чрез  $M$ ; угол  $A_1O_1B_1$ , отсчитываемый от направления на нуль первого верньера по ходу часовой стрелки,—чрез  $180+\delta$ . На основании ур-ния (1) напишем:

$$M=M_1+\frac{e}{r \text{Sin } 1''} \text{Sin}(M_1-P)=M_1+\Delta_1$$

$$M+180^\circ+\delta=M_{II}+\frac{e}{r \text{Sin } 1''} \text{Sin}(M_{II}-P)=M_{II}+\Delta_2$$

$$M+180^\circ+\delta=M_{II}+\frac{e}{r \text{Sin } 1''} \text{Sin}(M_1+\Delta_1+180^\circ+\delta-\Delta_2-P)$$

В последнем уравнении вследствие малости  $\Delta_1-\Delta_2+\delta$  можно с ошибкой порядка  $\frac{e^2}{r^2}$  положить:



Черт. 111.

$$\text{Sin } (M_1 + \Delta_1 + 180 + \delta - \Delta_2 - P) = - \text{Sin } (M_1 - P)$$

Следовательно:

$$M = M_1 + \frac{e}{r \text{Sin } I''} \text{Cos } P \text{Sin } M_1 - \frac{e}{r \text{Sin } I''} \text{Sin } P \text{Cos } M_1 \dots (6)$$

$$M + 180^\circ + \delta = M_{II} - \frac{e}{r \text{Sin } I''} \text{Cos } P \text{Sin } M_1 + \frac{e}{r \text{Sin } I''} \text{Sin } P \text{Cos } M_1 \dots (7)$$

Вычитая из уравнения (7) уравнение (6) получим:

$$180^\circ + \delta = M_{II} - M_1 - \frac{2e}{r \text{Sin } I''} \text{Cos } P \text{Sin } M_1 + \frac{2e}{r \text{Sin } I''} \text{Sin } P \text{Cos } M_1$$

Обозначая:

$$\begin{aligned} M_{II} - M_1 - 180^\circ &= m; & \frac{2e}{r \text{Sin } I''} &= f; \\ f \text{Cos } P &= x; & f \text{Sin } P &= y \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

будем иметь:

$$x \text{Sin } M_1 - y \text{Cos } M_1 + \delta = m \dots \dots \dots (9)$$

Для определения трех неизвестных:  $x$ ,  $y$  и  $\delta$ , входящих в уравнение (9), необходимо определить  $m$  при трех различных установках алидады. По определении  $x$  и  $y$  придется, конечно, вычислять формулы:

$$\text{tg } P = \frac{y}{x}; \quad f = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad e = \frac{fr \text{Sin } I''}{2} \dots \dots \dots (10)$$

Пусть после получения при некотором положении алидады отсчетов  $M_1$  и  $M_{II}$ , она была повернута на  $180^\circ$ ; обозначим отсчеты при этом новом положении алидады чрез  $M'_1$  и  $M'_{II}$  и вычислим  $m' = M'_{II} - M'_1 - 180^\circ$ . Очевидно, что к уравнению (9) прибавится уравнение:

$$x \text{Sin } M'_1 - y \text{Cos } M'_1 + \delta = m'$$

которое, — так как  $M'_1 = M_1 \pm 180^\circ$ , — переписется так:

$$-x \text{Sin } M_1 + y \text{Cos } M_1 + \delta = m' \dots \dots \dots (9^1)$$

Складывая (9) и (9<sup>1</sup>) получим:

$$\delta = \frac{m + m'}{2} \dots \dots \dots (11)$$

Таким образом, для определения угла  $\delta$  между нулевыми штрихами противоположных верньеров (или между нульпунктами микроскопов) надлежит сделать определение  $m$  при двух — взаимнопротивоположных — установках алидады. В следующей за сим табличке приводится пример определения  $\delta$  попутно с определением  $e$  и  $P$ .

$M_1$	$M_{II}$	$m$	$M'_1$	$M'_{II}$	$m'$	$\delta$
120° 30' 53"	31' 11"	+ 18"	300° 29' 58"	30' 3"	+ 5"	+ 11".5
60° 5' 53"	6' 5"	+ 12"	240° 4' 12"	4' 20"	+ 8"	+ 10".0
0° 0' 0"	0' 6"	+ 6"	180° 0' 6"	0' 4"	- 2"	+ 2".0

$\delta = + 7".8$

Нередко — как это сделано и в приведенном примере, — при определении элементов эксцентриситета, алидаду переставляют на постоянный угол, проходя  $n$  установками ее полную окружность. При таком порядке получается  $n$  ур-ний (9), в которых  $M_1$  изменяется чрез  $\frac{2\pi}{n}$  и которые следует рассматривать как *начальные* ур-ния (или ур-ния погрешностей); соответствующие [этим *начальным* ур-ниям *нормальные* ур-ния (при решении задачи определения  $e$  и  $P$  из ур-ний (9) по способу наименьших квадратов) представляются в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{n}{2} \cdot x &= \Sigma m \sin M_1 \\ \frac{n}{2} \cdot y &= -\Sigma m \cos M_1 \\ n\delta &= \Sigma m \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

Для нашего примера ур-ния (9) напишутся так:

$$3 x = +14.72; \quad 3 y = -3.50; \quad 6 \delta = +47''.0$$

Откуда:

$$\begin{aligned} \delta &= +7''.8; & x &= +4.91; & y &= -1.17 \\ \operatorname{tg} P &= -0.2378; & P &= 346^\circ 37' \\ f &= 5''.047; & r &= 105 \text{ мм}; & e &= 0.0013 \text{ м.} \end{aligned}$$

Надлежит отметить, что определение элементов эксцентриситета в теодолитах является нужным лишь по столько, по сколько из собираемого при этом материала выясняются дефекты в движении алидады и расстройтва в осях инструмента. Так как механики выпускают большие теодолиты весьма тщательно изготовленными — с ничтожным эксцентриситетом и с почти полным отсутствием шатаний и колебаний алидады при ее вращении, — то обнаружение значительного эксцентриситета  $e$  и значительных колебаний алидадной оси в ее втулке (или, алидадной бюксы в *Репольдовой* системе осей) указывают на расстройтва, происшедшие ко времени пользования теодолитом в установке его осей, а иногда и на повреждения в осях и соответствующих им бюксах. При том порядке определения  $e$  и  $P$ , в котором алидада переставляется по всей окружности на один и тот-же угол, — значительные колебания в значениях для  $\delta$ , полученных из разных пар взаимно противоположных установок алидады, и значительные несогласия правых частей ур-ний (9) с левыми их частями, *вычислительными* с помощью найденных из ур-ний (12) величин  $x$  и  $y$ , — указывают, конечно, на непостоянство значений  $e$  и  $P$ , т. е. на неправильности в движении алидады и на расстройтво в осевых частях теодолита.

**35. Об ошибках делений на лимбах.** Для подразделения кругов на градусы и более мелкие части служат делительные машины. Главную часть делительной машины является так называемый *образцовый* круг, весьма тщательно разделенный; на оси образцового круга помещается лимб, который предстоит разделить, и по существу деление является копированием штрихов и промежутков с образцового круга на изготавливаемый. Несовпадение центра изготавливаемого лимба с центром образцового круга и непараллельность плоскостей этих двух кругов являются непременными причинами, вызываемыми в положении штриха, нанесенного на изготавливаемый лимб, *систематическую ошибку* и притом явно *периодического* характера; систематические ошибки в положении штрихов самого образцового круга, конечно, целиком перейдут на круг подразделяемый; наконец, изменения температуры за время

делений круга и сотрясения могут вызвать ошибки систематического характера в положении нанесенных на изготавливаемом лимбе штрихов. Таким образом, имеется ряд причин, совокупное действие которых приводит к систематическим ошибкам в положении построенных на лимбе штрихов, следующим по всей окружности лимба некоторому более или менее правильному закону. Обычно принимают, что систематическая ошибка  $\Delta(u)$  штриха с номером  $u$ , отстоящего от нуля на угол  $u$ , может быть представлена периодической функцией такого вида:

$$\Delta(u) = c_0 + c_1 \sin(u + b_1) + c_2 \sin 2(u + b_2) + \dots + c_r \sin r(u + b_r) \dots \dots \dots (1)$$

в которой  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_r, b_1, b_2, \dots, b_r$  суть некоторые постоянные для данного лимба количества. Полная ошибка  $\Delta_u$  в положении штриха  $u$  будет несколько отличаться от  $\Delta(u)$  и представится так:

$$\Delta_u = \Delta(u) + \delta \dots \dots \dots (2)$$

где  $\delta$  есть случайная часть ошибки штриха  $u$ , обусловленная напр. такими случайными причинами, как колебание резца при проведении им штриха.

Величина  $m = \sqrt{\frac{\sum \delta^2}{n}}$  есть средняя ошибка штриха, если  $n$  взято достаточно большое.

Представим себе теперь, что круг теодолита отсчитывается посредством  $p$  микроскопов, расположенных в одинаковом расстоянии друг от друга  $\sigma = \frac{360^\circ}{p}$ , и выведем формулу для обусловленной систематическими ошибками штрихов погрешности в направлении, т. е. в среднем из отсчетов по всем  $p$  микроскопам. Называя эту погрешность в направлении чрез  $\Delta M$ , напишем:

$$\Delta M = \frac{\Delta(u) + \Delta(u + \sigma) + \dots + \Delta(u + [p-1]\sigma)}{p} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{k=p-1} \Delta(u + k\sigma) \dots \dots (3)$$

если по первому микроскопу отсчет равен  $u$ . Но:

$$\sum_{k=0}^{k=p-1} \Delta(u + k\sigma) = pc_0 + c_1 \sum_{k=0}^{k=p-1} \sin(u + k\sigma + b_1) + c_2 \sum_{k=0}^{k=p-1} \sin 2(u + k\sigma + b_2) + \dots$$

Далее:

$$c_i \sum \sin i(u + k\sigma + b_i) = c_i \sin i(u + b_i) \sum \cos k i \sigma - c_i \cos i(u + b_i) \sum \sin k i \sigma$$

Так как  $\sum_{k=0}^{k=p-1} \sin k i \sigma$  всегда равна нулю, а  $\sum_{k=0}^{k=p-1} \cos k i \sigma$  равна либо нулю, либо равна  $p$ , если  $i$  кратно  $p$ , то уравнение (3) переписывается так:

$$\Delta M = c_0 + c_p \sin p(u + b_p) + c_{2p} \sin 2p(u + b_{2p}) + \dots \dots (4)$$

Если наблюдения направлений выполняются  $m$  приемами с перестановкой лимба от одного приема к следующему на угол  $q = \frac{360^\circ}{pm}$  то в состав окончательного направления на предмет  $M$ , выведенного из  $m$  приемов, войдут систематические ошибки таких штрихов:



$u,$	$u + \sigma,$	$u + 2\sigma$	$\dots u + (p-1)\sigma$
$u + q,$	$u + \sigma + q,$	$u + 2\sigma + q$	$\dots u + (p-1)\sigma + q$
$u + 2q,$	$u + \sigma + 2q,$	$u + 2\sigma + 2q$	$\dots u + 2(p-1)\sigma + 2q$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$u + (m-1)q,$	$u + \sigma + (m-1)q,$	$u + 2\sigma + (m-1)q,$	$\dots$

Другими словами в состав ошибки  $\delta N$  окончательного направления, выведенного из  $m$  приемов, войдут систематические ошибки штрихов, отстоящих друг от друга на угол  $q$ , т. е. тех-же самых, которые вошли-бы в ошибку направления, наблюдаемого в одном приеме, но при отсчитывании круга  $pm$  микроскопами. Следовательно, на основании (4) напишем:

$$\delta N = c_0 + c_{pm} \sin pm (u + b_{pm}) + c_{2pm} \sin 2 pm (u + b_{2pm}) + \dots \quad (5)$$

Так при двух микроскопах и двенадцати приемах:

$$\delta N = c_0 + c_{24} \sin 24 (u + b_{24}) + c_{48} \sin 48 (u + b_{48}) + \dots$$

В настоящее время искусство деления кругов достигло высокой степени совершенства. В тщательно разделенных кругах больших теодолитов систематическая ошибка  $\Delta(u)$  в положении штриха не превышает двух секунд: случайная-же часть ошибки в положении штриха мала по сравнению с систематической частью  $\Delta(u)$  и имеет среднее квадратическое значение  $m$  меньше  $\pm 0''.5$ ; кроме того, для тщательно разделенных кругов в ур-нии (1) коэффициенты  $c$  убывают вместе с возрастанием указателей при них.

На основании ур-ния (5) мы приходим к такому заключению: при достаточном числе приемов, в которых наблюдается направление на некоторый предмет, ошибка окончательного результата для этого направления, обусловленная систематическими ошибками делений лимба, становится весьма малою, если только лимб тщательно изтовлен и коэффициенты  $c$  для него достаточно быстро убывают вместе с возрастанием указателей при них.

Исследования последнего времени над кругами геодезических инструментов показывают однако, что убывание  $c$  в ряде (1) происходит довольно таки медленно даже в инструментах, выпущенных первоклассными механиками. Так, для влияния ошибок делений на направление наблюдаемое в одном приеме, имеем такие формулы:

для одного из исследованных Шрейбером теодолитов

$$\delta N = + 0'',18 \cos 2u - 0'',16 \sin 2u - 0'',12 \cos 4u + 0'',14 \sin 4u - - 0'',11 \cos 6u - 0'',17 \sin 6u + 0'',11 \cos 8u + 0'',23 \sin 8u$$

для одного из теодолитов Прусской Landesaufnahme

$$\delta N = + 0'',135 \cos 2u + 0'',042 \sin 2u - 0'',002 \cos 4u - 0'',070 \sin 4u + + 0'',077 \cos 6u - 0'',259 \sin 6u - 0'',047 \cos 8u + 0'',017 \sin 8u$$

Для инструмента Траутмана, результаты исследования коего приведены в труде Цингера „Астрономия“:

$$c_2 = -1''.74; c_4 = +0''.80; c_6 = +0''.08; c_8 = +0''.23; c_{10} = +0''.12$$

Вообще, насколько показывают результаты тщательной обработки первоклассных триангуляций, при двенадцати приемах и двух микроскопах влияние систематических ошибок делений на окончательно выведенное направление будет все-таки около  $\pm 0''.25$ .

Деления на кругах теодолитов, предназначенных для измерений в триангуляциях I-го и II-го класса, должны быть, конечно, исследованы. Однако,

нужно оговориться, что определение систематической ошибки *штриха* или определение поправки  $\Delta(u)$  *отсчета*, требует непременно введения при исследовании делений поправок за эксцентрицитет алидады, полагая что его элементы сохраняют *постоянные* значения при разных положениях алидады. Так как такого постоянства элементов эксцентрицитета на самом деле в геодезических инструментах не имеется, то надлежит вообще в теодолитах отказаться от задачи определения систематической ошибки  $\Delta(u)$  *штриха* и ограничиться определением *влияния* систематической ошибки делений *на направление*, выводимое по двум противоположным микроскопам, или другими словами заменить определение  $\Delta(u)$  определением ошибки  $D(u)$  *диаметра*,

равной  $\frac{\Delta(u) + \Delta(u + 180)}{2}$ . Так как результаты геодезических измерений

выражаются именно в виде направлений, то очевидно что определение  $D(u)$  для достаточного числа диаметров, вместе с исследованием случайных ошибок делений, вполне приводит к выяснению влияния ошибок делений лимба на результат геодезических угловых измерений. Очевидно:

$$D(u) = c_0 + c_2 \sin 2(u + b_2) + c_4 \sin 4(u + b_4) + c_6 \sin 6(u + b_6) + \dots \quad (7)$$

В основе всякого способа исследования ошибок делений лимба лежит откладывание (измерение) — с возможно высокой степенью точности — на разных частях лимба некоторого постоянного угла, проходя такими откладываниями последовательно или полуокружность или целую окружность.

При отсутствии соответствующих приборов и приспособлений, можно при этом воспользоваться двумя марками  $A$  и  $B$ , установленными таким образом, чтобы угол между ними при центре теодолита был-бы, с округлением до минуты, равен или  $\frac{180^\circ}{s}$ , или  $\frac{360^\circ}{p}$ , где  $s$  и  $p$  — целые числа.

Но при необходимости иметь при исследовании круга результаты высокой точности, присоединяют к паре противоположных микроскопов  $A$  и  $B$  инструмента еще добавочную пару микроскопов  $C$  и  $D$  таким образом, чтобы эти микроскопы расположились-бы *по диаметру*, составляющему с линией микроскопов  $A$  и  $B$  угол  $\frac{180^\circ}{s}$  или  $\frac{360^\circ}{p}$ ; этот угол между двумя парами

микроскопов, конечно, можно измерять на разных местах лимба с высокой точностью. Как увидим далее, для определения поправок  $D(u)$  некоторого достаточного числа диаметров исследуемого круга, надлежит производить измерение на разных частях лимба (постепенно проходя полуокружность или целую окружность) не одного, а *нескольких*\*) углов. Следовательно, нужно иметь несколько марок с соответственно подобранными между ними углами или нужно иметь приспособление, позволяющее добавочную пару микроскопов  $C$  и  $D$  прикреплять к алидаде так, чтобы линия этих микроскопов могла-бы образовывать с линией основных микроскопов  $A$  и  $B$  инструмента различные по величине углы, укладываемые целое число раз в полуокружности или в окружности. Такое приспособление осуществляется, однако, с затруднениями и то лишь в больших инструментах.

Задача решается вполне лишь при помощи особого прибора, построенного механиком *Ваншаф* специально для исследования делений кругов: этот прибор изображен на черт. 112: две пары микроскопов прибора могут без всяких затруднений устанавливаться под произвольным углом друг к другу,

\*) или вернее целого ряда углов.

лишь-бы только он был более  $10^\circ$ ; если-же оси микроскопов одной пары ставить несколько наклонно, то этот угол может быть сделан как угодно мал.

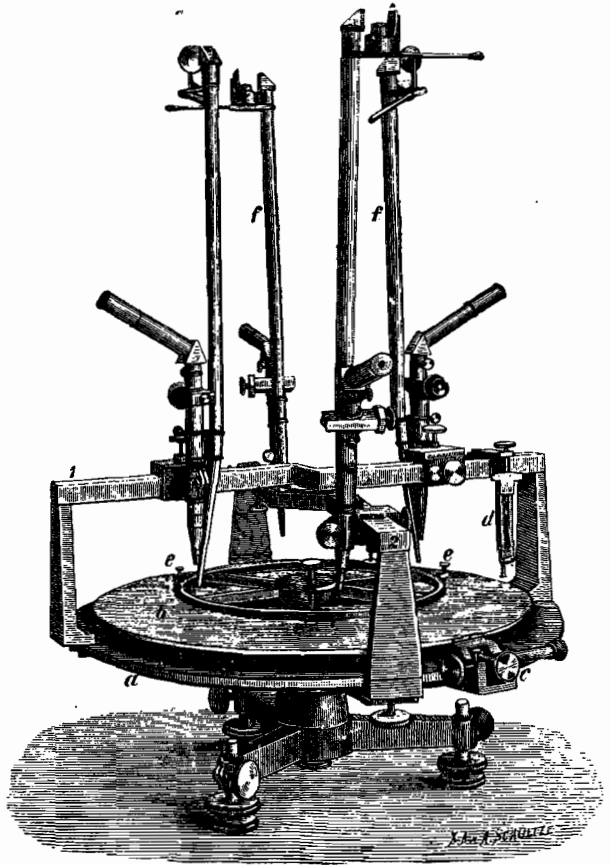
Представим себе, что нам надлежит определить поправки  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{s-1}$  некоторой серии диаметров лимба, расположенных друг от друга чрез угол  $\sigma^\circ = \frac{180^\circ}{s}$ ; пусть в эту серию входит и нулевой диаметр,

поправку которого назовем чрез  $x_0$ . Установим две пары микроскопов под углом друг к другу возможно близким к  $\sigma^\circ$ ; неизвестное значение этого угла назовем чрез  $C$ . Обозначим далее: среднее из отсчетов по первой паре микроскопов стоящей на диаметре с более старшим номером, чрез  $n$ ; среднее из отсчетов по второй паре микроскопов, стоящей на диаметре с более младшим номером, чрез  $m$ ; разность  $m - n$  чрез  $\Delta$ .

Установив вторую пару микроскопов по диаметру  $0^\circ$ , сделаем отсчитывание четырех микроскопов, причем пусть получим:

$$\Delta_0 = n_1 - m_0$$

После этого, будем последовательно устанавливать вторую пару микроскопов на диаметры:  $\sigma^\circ, 2\sigma^\circ, 3\sigma^\circ, \dots, (s-1)\sigma^\circ$ , и при каждой такой установке тщательно отсчитывать четыре микроскопа. Очевидно, мы получим такие ур-ния погрешностей:



Черт. 112.

$$n_1 + x_1 - m_0 - x_0 = C + \delta_1$$

$$n_2 + x_2 - m_1 - x_1 = C + \delta_2$$

$$n_3 + x_3 - m_2 - x_2 = C + \delta_3$$

.....

$$n_s + x_s - m_{s-1} - x_{s-1} = C + \delta_s$$

Здесь по  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$  подразумеваются конечно случайные погрешности измерения угла  $C$  между микроскопами.



исследуют круг чрез  $5^\circ$  или чрез  $4^\circ$  а иногда в постоянных астрономических инструментах — определяют поправки, начиная от  $0^\circ$ , чрез  $2^\circ$ .

Чем больше число диаметров, для которых надежно определены поправки  $x$ , тем более детально будет изучен круг, тем более надежно и до членов с более старшими индексами будут определены коэффициенты периодического ряда (7) и тем надежнее и детальнее будет установлен общий для всего круга закон распределения и изменения ошибок делений. Вычислив при помощи этого ряда поправку  $D(u)$  диаметра  $u$ , и образовав уклонения фактически полученной поправки  $x_u$  от вычисленной  $D(u)$ , мы, при большом числе исследованных диаметров, по таким уклонениям изучим надежно характер и величину случайных ошибок делений лимба. Возможно что по этим уклонениям

$$x_u - D(u)$$

удастся подметить короткие периоды в смене ошибок делений, не представляющиеся общим рядом (7). Зная надежно коэффициенты ряда (7) и отступления действительных ошибок от предвычисляемых при помощи этого ряда, мы затем получаем прочные основания для заключений: каким методом вести наблюдения при посредстве исследуемого круга и какое число рядов наблюдений будет приводить нас к среднему из них выводу, свободному от влияния ошибок делений круга.

Конечно, поправки всех диаметров должно определить с одинаковым весом. Но если имеют в виду пользоваться этими поправками для введения их в результаты наблюдаемых углов, то тогда очевидно нужно программу исследования круга осложнить еще требованием, чтобы вес разности поправок любой пары диаметров был-бы *постоянным*.

Конечно, вышеприведенный способ определения поправок  $s$  диаметров — этому последнему требованию не удовлетворяют. С другой стороны, если взять  $\sigma = 5^\circ$  и  $s = 36$ , то откладывание 36 раз угла  $\sigma$  непременно будет сопровождаться изменениями угла  $C$  между микроскопами в течение этого откладывания. Поэтому — в особенности в постоянных астрономических инструментах — применяли ранее следующей способ исследования ошибок большого числа диаметров: взяв угол  $\sigma = 20^\circ$  или даже  $30^\circ$ , сперва изложенным выше способом определяли поправки диаметров с  $20^\circ$  или  $30^\circ$  подписью. Определив поправки таких диаметров „первого порядка“, затем брали угол между микроскопами в  $5^\circ$  или в  $10^\circ$ , и такой угол откладывали между каждыми двумя смежными диаметрами „первого порядка“, и таким образом по способу „вставки“ получали диаметры 5-тиградусные или 10-ти градусные, т. е. определяли поправки диаметров „второго“, „третьего“ и т. д. порядка. В этом способе существенным недостатком является конечно то, что поправки диаметров „второго порядка“ определятся в зависимости от ошибок определения поправки диаметров „первого“ порядка, а поправки диаметров „третьего порядка“ будут искажены ошибками определения поправок диаметров и первого и второго порядков.

Совершенно строгий в теоретическом отношении способ исследования делений, отвечающий всем требованиям, которые можно включить в программу такого исследования, был разработан Шрейбером в 1886 году. Этот способ Шрейбера в основании имеет измерение по лимбу углов между исследуемыми диаметрами лимба, взятыми во всех их комбинациях (по-парно), и до известной степени аналогичен излагаемому в § 43 способу-же Шрейбера измерения углов на тригонометрическом пункте I-го класса. Для применения способа Шрейбера необходимо иметь указанную выше машину Ваншафа (черт. 112). Кроме того, при исследовании делений по этому способу Шрейбера, затрачиваемое время огромно.

Мы остановимся поэтому на ином способе исследования делений, предложенном в 1892 году *Брунсом*, который приведем лишь в общих чертах.

Пусть имеем  $p$  диаметров, распределенных равномерно по окружности; если в числе этих диаметров имеется один, подписанный  $x^\circ$ , то серию таких диаметров назовем розеткой  $R(p, x^\circ)$ . Если нам нужно исследовать поправки диаметров чрез  $5^\circ$ , начиная от нулевого, то очевидно этим диаметрам будет соответствовать розетка  $R(36, 0^\circ)$  [или все равно  $R(36, 5^\circ)$ ,  $R(36, 10^\circ)$  ...]. Чтобы определить поправки диаметров розетки  $R(s, x)$ , в которой  $s$ —большое число, мы подыскиваем сперва два рода розетт:  $R(p, x)$  и  $R(q, x)$ —с таким расчетом, чтобы  $\sigma_1^\circ$ , соответствующее числу диаметров  $p$  и  $\sigma_2^\circ$ , соответствующее числу диаметров  $q$ , содержали-бы в себе, целое число раз, угол  $\sigma^\circ$ , соответствующий числу диаметров  $s$ ; при этом  $p$  и  $q$  не должны быть кратными друг другу, и давать углы  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  меньшие  $90^\circ$  и большие  $20^\circ$  (иначе и ряды наблюдений становятся невыгодно длинными по времени и в геодезических инструментах обычного размера нельзя будет установить микроскопы); кроме того  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  должны укладываться целое число раз в полуокружности или в окружности.

Поэтому, если исследуют диаметры чрез  $4^\circ$  ( $s=45$ ), то  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  могут быть взяты из ряда:

$$20^\circ, 24^\circ, 36^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 72^\circ.$$

Если-же исследуют диаметры чрез  $5^\circ$ , ( $s=36$ ), то  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  могут быть взяты из ряда:

$$20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 45^\circ, 60^\circ.$$

Окончательный выбор  $p$  и  $q$  и соответствующих им  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  делается из ряда подходящих чисел под условием, чтобы при одинаковом количестве работы получить для поправок диаметров наибольший вес. Это будет иметь место при наибольшем значении количества:

$$Z = 2 \cdot \frac{p+q-2}{p+q} \left\{ 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \omega \left( \frac{1}{p^2} + \frac{1}{pq} + \frac{1}{q^2} \right) \right\}$$

в котором  $\omega$ —общий наибольший делитель чисел  $p$  и  $q$ .

Соблюдая указанные правила, найдем, что:

$$1) \text{ при } s = 45 \text{ и } \sigma = 4^\circ$$

$$p = 5 \quad \sigma_1 = 36^\circ$$

$$q = 9 \quad \sigma_2 = 20^\circ$$

$$2) \text{ при } s = 36 \text{ и } \sigma = 5^\circ$$

$$p = 4 \quad \sigma_1 = 45^\circ$$

$$q = 9 \quad \sigma_2 = 20^\circ$$

После выбора  $p$  и  $q$  работа ведется так:

а) установив две пары микроскопов под углом  $\sigma_1^\circ$ , откладывают его по лимбу, начиная сперва с  $0^\circ$  и проходя полуокружность или окружность, затем—с отсчета  $\sigma^\circ$ , далее—начиная с отсчетов  $2\sigma^\circ, 3\sigma^\circ, \dots, (k-1)\sigma^\circ$  и проходя каждый раз или полуокружность или окружность (т. е. возвращаясь в каждом ряде к начальному диаметру). Если  $k = \frac{\sigma_1}{\sigma}$ , то следовательно всего будет сделано  $k$  рядов, причем левый микроскоп, если смотреть из центра лимба, будет устанавливаться на штрихи:

$0^\circ,$	$\sigma_1,$	$2\sigma_1$	$\dots$	$(p-1)\sigma_1$
$\sigma^\circ,$	$\sigma^\circ + \sigma_1,$	$\sigma^\circ + 2\sigma_1$	$\dots$	$\sigma^\circ + (p-1)\sigma_1$
$2\sigma^\circ,$	$2\sigma^\circ + \sigma_1,$	$2\sigma^\circ + 2\sigma_1$	$\dots$	$2\sigma^\circ + (p-1)\sigma_1$

$$\dots \dots \dots (k-1)\sigma^\circ, (k-1)\sigma^\circ + \sigma_1, (k-1)\sigma^\circ + 2\sigma_1 \dots \dots (k-1)\sigma^\circ + (p-1)\sigma_1$$

Другими словами, с углом  $\sigma_1$  проходят по штрихам следующих розетт:

$$R(p, 0^\circ), R(p, \sigma^\circ), R(p, 2\sigma^\circ) \dots \dots R(p, [k-1]\sigma^\circ)$$

б) установив микроскопы под углом  $\alpha = 2\sigma_1$

откладывают его по лимбу, проходя каждый раз или полуокружность или окружность, от  $0^\circ$  и  $\sigma_1^\circ$ , от  $\sigma^\circ$  и  $\sigma_1^\circ + \sigma^\circ$ , от  $2\sigma^\circ$  и  $\sigma_1^\circ + 2\sigma^\circ, \dots (k-1)\sigma^\circ$  и  $(k-1)\sigma^\circ + \sigma_1^\circ$ . Следовательно здесь будет сделано  $2k$  рядов, и левый микроскоп будет стоять на штрихах:

$0^\circ$	$2\sigma_1$	$4\sigma_1$	$6\sigma_1$	$\dots$
$\sigma_1^\circ$	$3\sigma_1$	$5\sigma_1$	$7\sigma_1$	$\dots$
$\sigma^\circ$	$\sigma^\circ + 2\sigma_1$	$\sigma^\circ + 4\sigma_1$	$\sigma^\circ + 6\sigma_1$	$\dots$
$\sigma^\circ + \sigma_1$	$\sigma^\circ + 3\sigma_1$	$\sigma^\circ + 5\sigma_1$	$\sigma^\circ + 7\sigma_1$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$(k-1)\sigma^\circ$	$(k-1)\sigma^\circ + 2\sigma_1$	$(k-1)\sigma^\circ + 4\sigma_1$	$(k-1)\sigma^\circ + 6\sigma_1$	$\dots$
$(k-1)\sigma^\circ + \sigma_1$	$(k-1)\sigma^\circ + 3\sigma_1$	$(k-1)\sigma^\circ + 5\sigma_1$	$(k-1)\sigma^\circ + 7\sigma_1$	$\dots$

в) устанавливают микроскопы на угол:  $\beta = 3\sigma_1$

и откладывают его, проходя каждый раз полуокружность или окружность, последовательно начиная с отсчетов:  $0^\circ, \sigma_1$  и  $2\sigma_1; \sigma^\circ, \sigma_1 + \sigma^\circ, \sigma^\circ + 2\sigma_1; 2\sigma^\circ, \sigma_1 + 2\sigma^\circ, 2\sigma^\circ + 2\sigma_1; \dots (k-1)\sigma^\circ, \sigma_1 + (k-1)\sigma^\circ$  и  $2\sigma_1 + (k-1)\sigma^\circ$ . Всего здесь будет сделано  $3k$  рядов.

Аналогично поступают с углами между микроскопами равными  $\gamma = 4\sigma_1; \delta = 5\sigma_1 \dots$ , причем заканчивают на том наименьшем угле  $\epsilon$ , для которого:  $\epsilon + \sigma_1 > 90^\circ$ . Нужно сказать, что когда  $2\sigma_1$  не укладывается в  $180^\circ$ , то с углом  $\alpha$  будет сделано только  $k$  рядов; точно также и с углами  $\beta$  и  $\gamma$ , если они не укладываются в  $180^\circ$ , будет сделано только  $k$  рядов, не повторяющих друг друга.

Совершенно таким-же образом используется угол  $\sigma_2$  и розетка  $R(q, x)$ .

Каждый из указанных рядов, исполняемый с углами  $\sigma_1, 2\sigma_1, 3\sigma_1, \dots \sigma_2, 2\sigma_2, 3\sigma_2 \dots$  доставляет систему ур-ний (8); каждый из этих рядов продлевается дважды — откладывая сперва угол между микроскопами по ходу часовой стрелки, а затем — откладывая тот-же угол против хода часовой стрелки. Это делается, конечно, для того, чтобы в среднем из таких двух тождественных рядов исключить влияние перемен угла  $C$  между микроскопами.

Согласно сказанного, при  $s = 45^\circ$  и  $\sigma = 4^\circ$  будем иметь такие ряды наблюдений и установки левого микроскопа на такие штрихи:

$\sigma_1 = 36^\circ$				
$0^\circ,$	$36^\circ,$	$72^\circ,$	$108^\circ,$	$\dots \dots \dots 144^\circ$
4	40	76	112	$\dots \dots \dots 148$
8	44	80	116	$\dots \dots \dots 152$
12	48	84	120	$\dots \dots \dots 156$
16	52	88	124	$\dots \dots \dots 160$
20	56	92	128	$\dots \dots \dots 164$
24	60	96	132	$\dots \dots \dots 168$
28	64	100	136	$\dots \dots \dots 172$
32	68	104	140	$\dots \dots \dots 176$

}

9 рядов.

$\alpha = 72^\circ$

0°	72°	144°	216°	288	} 9 рядов.
4	76	148	220	292	
8	80	152	224	296	
12	84	156	228	300	
16	88	160	232	304	
20	92	164	236	308	
24	96	168	240	312	
28	100	172	244	316	
32	104	176	248	320	

Угол  $\beta = 108^\circ$  уже будет тождествен с углом  $72^\circ$ .

С углом  $\sigma_2 = 20^\circ$  при  $q = 9$  придется исполнить ряды:

$\sigma_2 = 20^\circ$

0°	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°	} 5 рядов.
4	24	44	64	84	104	124	144	164	
8	28	48	68	88	108	128	148	168	
12	32	52	72	92	112	132	152	172	
16	36	56	76	96	116	136	156	176	

$\alpha = 40^\circ$

0	40	80	120	160	200	240	280	320	} 5 рядов.
4	44	84	124	164	204	244	284	324	
8	48	88	128	168	208	248	288	328	
12	52	92	132	172	212	252	292	332	
16	56	96	136	176	216	256	296	336	

$\beta = 60^\circ$

0	60	120	} 15 рядов.
20	80	140	
40	100	160	
4	64	124	
24	84	144	
44	104	164	
8	68	128	
28	88	148	
48	108	168	
12	72	132	
32	92	152	
52	112	172	
16	76	136	
36	96	156	
56	116	176	



$\gamma = 80$

0	80	160	240	320	40	120	200	280
4	84	164	244	324	44	124	204	284
8	88	168	248	328	48	128	208	288
12	92	172	252	332	52	132	212	292
16	96	176	256	336	56	136	216	296

5 рядов, но с прохождением в каждом 720°.

Всего придется при исследовании диаметров чрез 4°, исполнить 270 установок с отсчитыванием каждый раз 4-х микроскопов. Всего будет получено 270 ур-ний погрешностей при 45 неизвестных поправках диаметров и при 48 неизвестных углах  $C$ , соответствующих 48-ми двойным рядам наблюдений. По исключении углов  $C$  указанным выше образом получим 222 ур-ния для определения 45 неизвестных. Прибавляя условие равенства нулю суммы поправок 45 диаметров, получим 44 неизвестных при 222 уравнениях.

Эти уравнения решают по способу наименьших квадратов, т. е. составляют  $s$  нормальных ур-ний, которые в виду значительного их числа решают не по схеме Гаусса, а путем последовательных приближений. При 45 нормальных ур-ниях приходится проделывать 8—10 приближений.

По изложенному способу *Брунса* поправки диаметров — даже при значительном  $s$ , получаются очень надежно — напр. с средней ошибкой меньшей  $\pm 0''.1$ .

Нередко в практике, этот способ еще упрощают: именно, выбрав целесообразно числа  $p$  и  $q$ , или числа  $p$ ,  $q$  и  $r$ , и соответствующие им углы  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , — совсем не пользуются углами  $2\sigma_1$ ,  $3\sigma_1$ , . . . . .,  $2\sigma_2$ ,  $3\sigma_2$  . . . . ., а ограничиваются прохождением розетт:

$$R(p, 0^\circ), R(p, \sigma), R(p, 2\sigma) . . . . . R(p, [k-1] \cdot \sigma)$$

$$R(q, 0^\circ), R(q, \sigma), R(q, 2\sigma) . . . . . R(q, [k_1-1] \cdot \sigma)$$

$$R(r, 0^\circ), R(r, \sigma), R(r, 2\sigma) . . . . . R(r, [k_2-1] \cdot \sigma)$$

$$k = \frac{\sigma_1}{\sigma}; \quad k_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma}; \quad k_2 = \frac{\sigma_3}{\sigma}.$$

Так напр., при исследовании диаметров чрез 5°, при  $s = 36^\circ$  и  $\sigma = 5^\circ$ , бурет:

$$\sigma_1 = 30^\circ; \quad \sigma_2 = 40^\circ \text{ и } \sigma_3 = 45^\circ$$

и проделывают такие ряды наблюдений:

0—30	30—60	60—90	90—120	120—150	150—180			
5—35	35—65	65—95	95—125	125—155	155—185			
10—40	40—70	70—100	100—130	130—160	160—190			
15—45	45—75	75—105	105—135	135—165	165—195			
20—50	50—80	80—110	110—140	140—170	170—200			
25—55	55—85	85—115	115—145	145—175	175—205			
0-40	40-80	80-120	120-160	160-200	200-240	240-280	280-320	320-0
5-45	45-85	85-125	125-165	165-205	205-245	245-285	285-325	325-5
10-50	50-90	90-130	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	330-10
15-55	55-95	95-135	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	335-15
20-60	60-100	100-140	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	340-20
25-65	65-105	105-145	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	345-25
30-70	70-110	110-150	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	350-30
35-75	75-115	115-155	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	355-35

0—45	45—90	90—135	135—180
5—50	50—95	95—140	140—185
10—55	55—100	100—145	145—190
15—60	60—105	105—150	150—195
20—65	65—110	110—155	155—200
25—70	70—115	115—160	160—205
30—75	75—120	120—165	165—210
35—80	80—125	125—170	170—215
40—85	85—130	130—175	175—220

Всего будет в данном примере получено 144 ур-ния между 36 неизвестными поправками и 23 углами  $C$ ; при этом каждый диаметр связывается с любым другим 4 раза. Таким именно образом исследовал *A. Wolfer* в 1903 году меридианный круг Женевской обсерватории. 36 нормальных ур-ний были решены, применив 9 приближений.

После определения поправок  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{s-1}$ , приступают к вычислению коэффициентов ряда (7):

$$D(u) = a_0 + a_2 \cos 2u + a_4 \cos 4u + a_6 \cos 6u + \dots \\ + b_2 \sin 2u + b_4 \sin 4u + b_6 \sin 6u + \dots$$

Очевидно, будем для этого иметь такие ур-ния:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \dots \\ x_1 &= a_0 + a_2 \cos 2\sigma + a_4 \cos 4\sigma + a_6 \cos 6\sigma + a_8 \cos 8\sigma + \dots \\ &\quad + b_2 \sin 2\sigma + b_4 \sin 4\sigma + b_6 \sin 6\sigma + b_8 \sin 8\sigma + \dots \\ x_2 &= a_0 + a_2 \cos 4\sigma + a_4 \cos 8\sigma + a_6 \cos 12\sigma + a_8 \cos 16\sigma + \dots \\ &\quad + b_2 \sin 4\sigma + b_4 \sin 8\sigma + b_6 \sin 12\sigma + b_8 \sin 16\sigma + \dots \\ &\dots \dots \dots \\ x_k &= a_0 + a_2 \cos 2k\sigma + a_4 \cos 4k\sigma + a_6 \cos 6k\sigma + a_8 \cos 8k\sigma + \dots \\ &\quad + b_2 \sin 2k\sigma + b_4 \sin 4k\sigma + b_6 \sin 6k\sigma + b_8 \sin 8k\sigma + \dots \\ &\dots \dots \dots \\ x_{s-1} &= a_0 + a_2 \cos 2(s-1)\sigma + a_4 \cos 4(s-1)\sigma + \dots + a_8 \cos 8(s-1)\sigma + \dots \\ &\quad + b_2 \sin 2(s-1)\sigma + b_4 \sin 4(s-1)\sigma + \dots + b_8 \sin 8(s-1)\sigma + \dots \end{aligned} \right\} (10)$$

Конечно, чем более  $s$ , тем более членов в ряде (7) мы можем надежно определить; обычно при  $s=36$ , не идут далее  $a_{10}$  и  $b_{10}$ .

Переходя от ур-ний (10) к соответствующим им нормальным ур-ниям, напомним:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{\sum x}{s} \\ \frac{s}{2} a_2 &= \sum_0^{s-1} x_k \cos 2k\sigma & \frac{s}{2} b_2 &= \sum_0^{s-1} x_k \sin 2k\sigma \\ \frac{s}{2} a_4 &= \sum_0^{s-1} x_k \cos 4k\sigma & \frac{s}{2} b_4 &= \sum_0^{s-1} x_k \sin 4k\sigma \\ \frac{s}{2} a_6 &= \sum_0^{s-1} x_k \cos 6k\sigma & \frac{s}{2} b_6 &= \sum_0^{s-1} x_k \sin 6k\sigma \\ \frac{s}{2} a_8 &= \sum_0^{s-1} x_k \cos 8k\sigma & \frac{s}{2} b_8 &= \sum_0^{s-1} x_k \sin 8k\sigma \end{aligned} \right\} \dots \dots (11)$$

Из ур-ний (11) без труда получаем коэффициенты периодического ряда (7).  
 Рассчитав теперь, при помощи этих коэффициентов:

$$D(0), D(\sigma), D(2\sigma) \dots D[(s-1)\sigma]$$

и образовав уклонения:

$$v_0 = x_0 - D(0); v_1 = x_1 - D(\sigma); v_2 = x_2 - D(2\sigma) \dots$$

найдем далее, что:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{\sum v^2}{s - \text{число коэфф. ряда (7)}}$$

представит среднюю ошибку диаметра, а следовательно  $\sqrt{2}\mu$  представит случайную ошибку нанесения штриха.

При описанном исследовании делений, работу должно вести в помещении с постоянной температурой; установки алидады на разные штрихи лимба делают так, чтобы при наведении нитей микрометра данного микроскопа получался-бы один и тот-же отсчет по барабану.

Иногда прделывают отдельное исследование *случайных* ошибок делений. Для этого избирают более или менее значительное число промежутков на лимбе, распределенных группами равномерно по всей его окружности. Так, выбирают промежутки:

$$\begin{array}{lll} 0^\circ 0' - 0^\circ 5'; & 0^\circ 5' - 0^\circ 10'; & 0^\circ 10' - 0^\circ 15' \\ 8^\circ 0' - 8^\circ 5'; & 8^\circ 5' - 8^\circ 10'; & 8^\circ 10' - 8^\circ 15' \\ 16^\circ 0' - 16^\circ 5'; & 16^\circ 5' - 16^\circ 10'; & 16^\circ 10' - 16^\circ 15' \\ \dots & \dots & \dots \\ 352^\circ 0' - 352^\circ 5'; & 352^\circ 5' - 352^\circ 10'; & 352^\circ 10' - 352^\circ 15' \end{array}$$

Каждый такой промежуток измеряют микрометром микроскопа несколько раз,—напр. 4 раза,—пользуясь при измерении всех промежутков одной и той же частью микрометра и барабана (имея, следовательно, при наведении нитей микрометра на *младший* штрих всегда один и тот-же оборот винта микрометра и один и тот-же отсчет по барабану). Если измеренные промежутки лимба окажутся равными:

$$d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$$

делениям барабана микрометра, то вычислив:

$$d_m = \frac{\sum d}{n}; v_1 = d_1 - d_m; v_2 = d_2 - d_m; \dots v_n = d_n - d_m$$

и обозначив среднюю ошибку наведения нитей микрометра на штрих лимба чрез  $\varepsilon$ , напишем

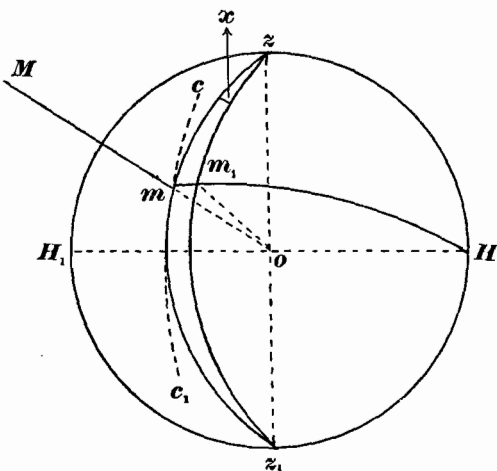
$$2 m^2 = \frac{\sum v^2}{n-1} = \frac{2 \varepsilon^2}{4}$$

понимая под  $m$  — случайную ошибку штриха.

В инструментах с верньерами, исследование ошибок делений сводится по необходимости к обнаружению лишь значительных неправильностей в положении штрихов лимба, выражающихся вообще величиной более 5 секунд. Здесь приходится или откладывать дугу верньера на разных местах лимба подобно тому, как это делается при тщательном исследовании действительной точности верньера; или выставить несколько тщательно изготовленных марок и углы между ними измерять на разных местах лимба, применяя упрощенный способ *Бруна*, причем полезно предварительно углы между марками определить с высокой точностью из измерений хорошим универсалом с двухсекундными микроскоп-микрометрами для отсчитывания его лимба.

**36. О коллимационной ошибке трубы.** Для получения правильных результатов при измерении горизонтальных направлений необходимо, чтобы во время измерения плоскость лимба была бы горизонтальна, а визирная ось трубы перемещалась бы в вертикальной плоскости при вращении трубы около горизонтальной оси инструмента. Будем называть в дальнейшем плоскостью *большого круга инструмента* плоскость проходящую через пересечение визирной оси трубы и горизонтальной оси инструмента и перпендикулярную к горизонтальной оси. Визирная ось должна конечно лежать в плоскости большого круга; если это требование выполняется и если кроме того горизонтальная ось теодолита перемещается в горизонтальной плоскости при вращении алидады, а лимб его — установлен горизонтально, то измерение горизонтальных направлений и углов сводится к совмещениям плоскости большого круга с вертикалами предметов и соответствующим отсчетам по лимбу, разности которых будут равны искомым углам между предметами. В действительности, ни установка теодолита на станции, ни его выверка — не могут быть выполнены идеально точно и поэтому во время наблюдений мы имеем: малый наклон плоскости лимба к горизонту, малое уклонение оси алидады от вертикальной линии, неперпендикулярность горизонтальной оси к оси вращения алидады и наконец несовпадение визирной оси с плоскостью большого круга.

Переходя к выяснению влияния на результат измерений горизонтальных направлений несовпадения визирной оси трубы с плоскостью большого круга или неперпендикулярности визирной оси к горизонтальной, — будем при этом считать, что все остальные из перечисленных выше неправильностей в выверке и установке теодолита не существуют: так можно поступить потому,



Черт. 113.

что величина уклонения визирной оси от плоскости большого круга не зависит ни от наклона лимба к горизонту, ни от неправильностей в выверке и установке вертикальной и горизонтальной осей, а также потому, что каждая из указанных погрешностей должна быть *малой*. Пусть визирная ось трубы составляет с плоскостью большого круга малый угол  $c$ , называемый *коллимационной ошибкой трубы*. Тогда угол визирной оси с горизонтальной осью будет или  $90^\circ - c$  или  $90^\circ + c$  и при вращении около горизонтальной оси визирная ось будет описывать поверхность конуса. Назовем через  $O$  точку пересечения плоскости большого круга с горизонтальной осью  $H_1H$  (черт. 113) и вообразим вспомогательную сферу с центром в  $O$ . Пусть:  $H_1$  и  $H$  суть точки пересечения сферы с горизонтальной осью;  $z$  и  $z_1$  — точки пересечения сферы с отвесной линией в  $O$ , а  $t$  — пересечение ее визирной осью  $OM$ , направленной на предмет  $M$ . Очевидно, если существует коллимационная ошибка  $c$ , то в момент визирования на  $M$  плоскость *большого круга* совпадает с вертикалом  $zt_1z_1$ , для которого  $H$  является полюсом и с плоскостью которого радиус  $Om$  составляет угол  $c$ , так что дуга  $tH$  будет равна или  $90^\circ + c$  или  $90^\circ - c$ . Очевидно также, что если *большой круг* совпадает с вертикалом  $zt_1z_1$ , то

точка  $m$  будет находиться на малом круге  $cm_1$ , параллельном кругу  $zm_1$  и отстоящем от него на угловое расстояние  $c$ ; этот круг  $cm_1$  называется *коллимационным* кругом, потому что по нему перемещается проекция на сферу визирной оси трубы при вращении ее около горизонтальной оси. Если  $m_1$  лежит на сфере в пересечении плоскости  $mOz$  с вертикалом большого круга, то дуга  $mm_1$  равна  $c$ .

Назовем  $N_n$  отсчет по лимбу при существовании коллимационной ошибки; истинный-же отсчет, который имели-бы при том-же положении горизонтального лимба, но при визировании на  $M$  трубой не имеющей коллимационной ошибки,—назовем чрез  $N$ . Для перехода от  $N_n$  к  $N$  нужно вообразить, что плоскость  $zm_1z_1$  совмещается с плоскостью вертикала предмета  $M$  посредством вращения алидады на угол  $x$ —потому что, если-бы не было коллимационной ошибки, то при отсчете  $N_n$  визирная ось располагалась-бы в плоскости  $zm_1z$ . Следовательно:  $N = N_n + x$ . Угол  $x$  (между плоскостями  $zm_1z$  и  $zm_1z_1$ ) определяется из прямоугольного сферического треугольника  $mm_1z$ , из которого, называя чрез  $z$  зенитное расстояние  $MOz$  напишем:

$$\sin c = \sin x \cdot \sin z; \quad \sin x = \frac{\sin c}{\sin z}$$

Так как  $c$  малая величина, то можно еще написать так:

$$x = \frac{c}{\sin z}; \quad N = N_n + \frac{c}{\sin z}$$

Черт. 113 сделан в предположении, что визирная ось образует с левым концом горизонтальной оси угол  $90^\circ + c$  (тупой); в этом случае  $N$  более  $N_n$  на  $\frac{c}{\sin z}$ . Если трубу перевести чрез зенит и сделать новое визирование на  $M$ , то визирная ось образует теперь с левым концом горизонтальной оси острый угол  $90^\circ - c$  и для перехода от  $N_n$  к  $N$  придется вращать алидаду против хода часовой стрелки и следовательно  $N$  будет менее  $N_n$  на  $x$ . Называя направления, наблюденные при правом и левом круге, чрез  $R$  и  $L$ , будем иметь:

$$N = R - \frac{c}{\sin z}; \quad N \pm 180^\circ = L + \frac{c}{\sin z} \dots \dots \dots (1)$$

или:

$$N = R + \frac{c}{\sin z}; \quad N \pm 180^\circ = L - \frac{c}{\sin z} \dots \dots \dots (2)$$

Обычно, рассматривая  $c$  как величину алгебраическую, применяют формулы (1).

Из формул (1) и (2) следует, что если коллимационная ошибка оставалась постоянно за время двух наблюдений при правом и левом круге, то истинное значение  $N$  направления равно полусумме  $\frac{R+L}{2}$ . Этим, конечно, называется известное правило исключения из результатов наблюдений влияния коллимационной ошибки трубы.

Допустим, что измеряется угол между двумя предметами  $A$  и  $B$ , имеющими зенитные расстояния  $z_a$  и  $z_b$ . Называя чрез  $N_a$  и  $N_b$  истинные значения направлений на  $A$  и на  $B$ , а чрез  $R_a, I_a, R_b$  и  $L_b$ —результаты наблюдений этих направлений при двух положениях трубы, будем иметь:

$$\begin{aligned} N_a &= R_a - \frac{c}{\sin z_a}; & N_a &= L_a + \frac{c}{\sin z_a} \\ N_b &= R_b - \frac{c}{\sin z_b}; & N &= I_b + \frac{c}{\sin z_b} \end{aligned}$$

Отсюда:

$$N_a - N_b = R_a - R_b - c \left\{ \frac{1}{\sin z_a} - \frac{1}{\sin z_b} \right\}.$$

$$N_a - N_b = L_a - L_b + c \left\{ \frac{1}{\sin z_a} - \frac{1}{\sin z_b} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Из формул (3) вытекают такие заключения:

1) влияние коллимационной ошибки на измеряемый угол исключается вполне в среднем из двух результатов, полученных для этого угла из наблюдений при двух положениях трубы ( $R$  и  $L$ );

2) обусловленная коллимационной ошибкой погрешность угла, измеренного одним *полуприемом* (т. е. только при  $R$ , или только при  $L$ ) равна нулю при равенстве зенитных расстояний наблюдаемых предметов;

3) в триангуляциях, при  $z_a$  и  $z_b$  почти равных между собою и весьма близких к  $90^\circ$ , ошибка в измеренном полуприеме угле (без перевода трубы чрез зенит), обусловленная коллимационной ошибкой, весьма мала и всегда пренебрегаема по сравнению с ошибками угла, обусловленными иными причинами. При  $z_a = 89^\circ$ , при  $z_b = 90^\circ$  и при  $c$  равном трем минутам,

$$c \left\{ \frac{1}{\sin z_a} - \frac{1}{\sin z_b} \right\} \text{ равна всего } \frac{1}{42} \text{ секунды.}$$

На основании последнего заключения измерение углов в триангуляциях при двух положениях трубы не является необходимым для исключения влияния коллимационной ошибки, которое чрезвычайно мало; если тем не менее на пунктах тригонометрической сети направления измеряются всегда при двух положениях трубы, то это делается, во-первых, чтобы собрать материал для суждения о постоянстве коллимационной ошибки, а во-вторых, чтобы иметь ряд наблюдений, в котором исчерпаны все возможные комбинации относительного расположения частей инструмента.

Вследствие крайней близости  $\sin z_a$  и  $\sin z_b$  к единице при наблюдениях в тригонометрической сети, можно формулу (3) упростить для этого случая и написать так:

$$N_a = R_a - c; \quad N_b = R_b - c$$

$$N_a = L_a + c; \quad N_b = L_b + c$$

$$c = \frac{R_a - L_a}{2} = \frac{R_b - L_b}{2} \dots \dots \dots (4)$$

Другими словами, если в данном приеме теодолитом наблюдались предметы  $A, B, C, D \dots K$ , то разности  $R - L$ , выведенные для всех этих предметов, должны быть постоянными и следовательно по колебаниям их можно судить о погрешностях измерения. Пусть на данной станции наблюдали  $n$  предметов, причем измерение углов велось  $m$  приемами. Результаты этих измерений представим такой табличкой:

I прием		II прием		III . . . . .	m-ый прием	
$R'_A$	$L'_A$	$R''_A$	$L''_A$	. . . . .	$R^m_A$	$L^m_A$
$R'_B$	$L'_B$	$R''_B$	$L''_B$	. . . . .	$R^m_B$	$L^m_B$
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
$R'_K$	$L'_K$	$R''_K$	$L''_K$	. . . . .	$R^m_K$	$L^m_K$

Так как наблюдения в  $m$  приемах занимают вообще значительный промежуток времени, то нельзя конечно предполагать постоянство коллимации за все время этих наблюдений, но должно требовать, чтобы в течении каждого приема коллимационная ошибка оставалась бы постоянною. В виду этого следует каждому приему приписать свое значение  $c$ . Назовем вероятное значение коллимационной ошибки в первом приеме чрез  $c'$ , во втором — чрез  $c''$  и т. д. Составим такую таблицу:

$$\begin{array}{c}
 c'_a = \frac{R'_A - L'_A}{2} \\
 c'_b = \frac{R'_B - L'_B}{2} \\
 \dots \\
 c'_k = \frac{R'_K - L'_K}{2}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{c}
 c''_a = \frac{R''_A - L''_A}{2} \\
 c''_b = \frac{R''_B - L''_B}{2} \\
 \dots \\
 c''_k = \frac{R''_K - L''_K}{2}
 \end{array} \right.
 \dots
 \dots
 \left| \begin{array}{c}
 c^m_a = \frac{R^m_A - L^m_A}{2} \\
 \dots \\
 c^m_k = \frac{R^m_K - L^m_K}{2}
 \end{array} \right.$$

Вычислив-же:

$$\begin{aligned}
 c' &= \frac{c'_a + c'_b + \dots + c'_k}{n} \\
 c'' &= \frac{c''_a + c''_b + \dots + c''_k}{n} \\
 \dots \\
 c^m &= \frac{c^m_a + c^m_b + \dots + c^m_k}{n}
 \end{aligned}$$

образуем уклонения:

$$\begin{array}{c}
 v'_a = c'_a - c' \\
 v'_b = c'_b - c' \\
 \dots \\
 v'_k = c'_k - c'
 \end{array}
 \left| \begin{array}{c}
 v''_a = c''_a - c'' \\
 v''_b = c''_b - c'' \\
 \dots \\
 v''_k = c''_k - c''
 \end{array} \right.
 \dots
 \dots$$

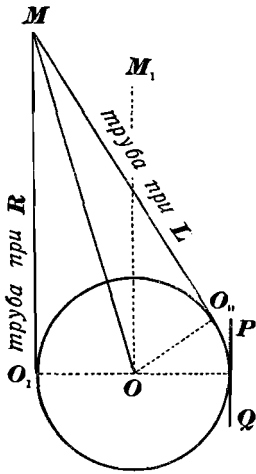
число которых равно  $nm$ . Средняя ошибка  $m_c$  определения коллимации вычислится, конечно, так:

$$m_c = \sqrt{\frac{\sum v^2}{mn - m}} = \sqrt{\frac{\sum v^2}{m(n-1)}} \dots \dots \dots (5)$$

Но с другой стороны  $c = \frac{R - L}{2}$  и  $N = \frac{R + L}{2}$  т. е. средняя ошибка направления, выведенного из одного приема, равна  $m_c$ .

До сих пор говорилось о трубе *центральной*. Если-же труба находится на одном из концов горизонтальной оси, то коллимационную ошибку нельзя вычислять по формуле  $c = \frac{R - L}{2}$ , хотя-бы предмет, наблюдавшийся для

определения  $s$  имел  $z = 90^\circ$ . Пусть при наведении внецентренной трубы на предмет  $M$  сделали отсчет  $R_1$ , причем труба располагалась влево от вертикального круга  $PQ$  (черт. 114). При центральной трубе и при том же отсчете  $R_1$  труба была-бы направлена по направлению  $OM_1$ , параллельному  $O_1M$ . Следовательно отсчет  $R$ , соответствующий визированию центральной трубой на  $M$ , по направлению  $OM_1$  будет менее  $R_1$  на угол  $MOM_1$  равный углу  $O_1MO$ . Называя через  $r$  расстояние  $OO_1$  и через  $D$  расстояние  $OM$ , будем иметь вследствие малости  $r$  по сравнению с  $D$  и малости угла  $O_1MO$ :



Черт. 114.

$$R = R_1 - \frac{r}{D \sin 1''} \dots \dots \dots (6)$$

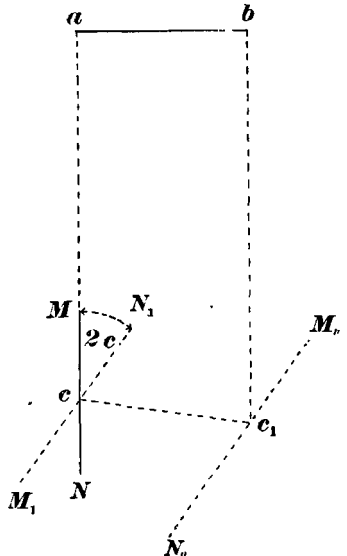
После перевода трубы чрез зенит, когда при визировании на  $M$  труба совпадет с прямой  $O_1M$ , будем очевидно иметь уравнение:

$$L = L_1 + \frac{r}{D \sin 1''} \dots \dots \dots (7)$$

понимая под  $L$  отсчет при левом круге, который получили-бы при визировании на  $M$  центральной трубой. Зная  $r$  и  $D$  приходится следовательно в случае внецентренной трубы высчитывать коллимационную ошибку по такой формуле:

$$c = \frac{R_1 - L_1 \pm 180^\circ}{2} - \frac{r}{D \sin 1''} \dots \dots \dots (8)$$

В случае внецентренной трубы применяют также следующий прием определения коллимационной ошибки. На черной доске наносят два белых кружка так, чтобы расстояние  $ab$  (черт. 115) между их центрами было-бы точно равно  $2r$ . Укрепив такую марку на стене, устанавливают так чтобы перпендикуляр из центра инструмента на плоскость марки проходил-бы по середине между  $a$  и  $b$ . После этого направляют визирную ось трубы  $NM$  при правом круге ( $R$ ) на левый кружок  $a$  и делают отсчет  $R$  по горизонтальному кругу, затем переводят трубу чрез зенит и наводят ее при круге лево на правый кружок  $b$ ; наконец делают отсчет по горизонтальному лимбу  $L$ . Если горизонтальная ось при визировании на  $a$  совпадала с прямой  $cc_1$ , причем угол  $c_1cM$  был равен  $90^\circ + c$ , то после перевода трубы чрез зенит визирная ось пойдет по прямой  $M_1N_1$ , образующей угол  $2c$  с тем направлением  $NM$  визирной оси, которое было при наведении трубы на  $a$  (причем угол  $N_1cc_1$  будет равен  $90^\circ - c$ ); поэтому если после перевода трубы чрез зенит повернуть алидаду на  $180^\circ$ , то визирная ось будет направлена по линии  $N_1M_1$  параллельной  $M_1N_1$  и образующей с направлением



Черт. 115.

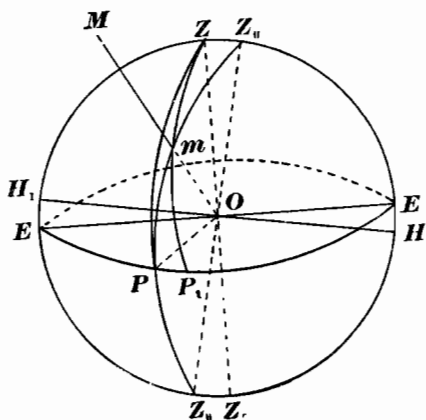


са угол в  $2c$ . Отсюда нетрудно конечно заключить, что  $L$  будет равно  $R \pm 180^\circ - 2c$  или:

$$c = \frac{R - L \pm 180^\circ}{2}$$

**37. Влияние неправильной установки горизонтальной оси (оси вращения трубы).** Наклонное положение оси вращения трубы может происходить или от неправильной установки оси алидады, или от неравенства подставок трубы. В настоящем параграфе будем иметь в виду наклонность горизонтальной оси, обусловленную только неравенством подставок трубы (включая сюда и неравенство цапф оси), предполагая, что никаких других инструментальных погрешностей не имеется, т. е. лимб горизонтален, ось алидады—вертикальна и коллимационная ошибка равна нулю.

Пусть  $O$  есть пересечение (черт. 116) визирной и горизонтальной осей и вместе с тем—центр вспомогательной сферы. Назовем: чрез  $H$  и  $H_1$  пересечения этой сферы с горизонтальной осью; чрез  $Z$  и  $Z_1$ —пересечения сферы отвесною линиею в  $O$ . Допустим далее, что  $H_1H$  наклонена к горизонту на угол  $i$ ; вследствие этого плоскость большого круга инструмента не будет вертикальна и представится наклонною плоскостью  $Z_{II}PO$ , перпендикулярною к  $H_1H$ ; с плоскостью  $Z_{II}PO$  прямая  $OZ$  очевидно образует угол  $i$ . Пусть труба теодолита направлена на  $M$ ; при этом визирная ее ось  $Om$  будет конечно находиться в пересечении вертикала  $ZOM$  предмета с плоскостью большого круга инструмента; пусть далее  $OP$ —пересечение плоскости  $EOE$  горизонта с плоскостью большого круга  $Z_{II}OP$ . Нетрудно видеть, что  $OP$  перпендикулярна к плоскости  $ZOH$ . Так как мы условились определить то



Черт. 116.

влияние на отсчет по горизонтальному лимбу, которое вызывается обусловленную *только* неравенством подставок трубы наклонностью  $i$  горизонтальной оси, то очевидно к правильному положению ее мы придем, если повернем алидаду около линии  $OP$  на угол  $i$ , причем в результате этого поворота ось вращения трубы совпадет с горизонтальною прямою  $EE$ , имеющей *тот-же азимут*, как и  $HH$  (т. е. следовательно при указанном повороте алидадной системы около линии  $OP$  прежняя ориентировка алидады не изменится).

После этого поворота, большой круг инструмента из положения  $Z_{II}OP$  перейдет в положение  $ZOP$  и визирная ось трубы выйдет из плоскости  $ZmO$  вертикала наблюдаемого предмета  $M$  и будет, конечно, находиться в плоскости вертикала  $ZPO$ . Чтобы снова направить трубу на предмет  $M$ , придется дать алидаде вращение около вертикальной линии на угол  $x$  между плоскостями  $ZOP$  и  $ZmO$ , измеряющийся сферическим углом при  $Z$  в тр-ке  $PZm$ . Если чрез  $N_n$  называем отсчет, сделанный при наклонном положении оси вращения трубы, а чрез  $N$ —истинный отсчет, то для чертежа 116, на котором правый конец оси  $HH$  выше левого, имеем:

$$N = N_n - x$$

Из тр-ка  $ZZ_{II}m$ , в котором сторона  $Zm$  равна зенитному расстоянию  $z$  точки

$N$ , а углы при  $Z$  и  $Z_{II}$  соответственно равны  $90^\circ - x$  и  $90^\circ$ , напишем, зная, что  $ZZ_{II} = i$ :

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{tg\,i}{tg\,z}, \text{ а по малости } i \text{ будем иметь} \\ x &= \frac{i}{tg\,z} \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

Если левый конец горизонтальной оси выше правого, то:

$$N = N_n + x = N_n + \frac{i}{tg\,z} \dots \dots \dots (2)$$

Обычно употребляют всегда только формулу (2), считая величину  $i$  отрицательной для случая, когда правый конец оси  $III$  выше левого.

Как именно определяется  $i$  посредством уровня, ставящегося на горизонтальную ось,—об этом подробно указано в § 25; необходимо лишь прибавить, что вычисляя всегда  $N$  как  $N_n + x$  следует  $i$  считать положительной, если левый конец горизонтальной оси выше правого. Наклонность  $i$  обусловленная только неравенством подставок трубы и неравенством цапф горизонтальной оси, остается постоянной при вращении алидады около вертикальной оси. С другой стороны очевидно, что после перевода трубы чрез зенит изменяется знак наклонности  $i$ , и следовательно если наблюдаемые значения направлений при круге право и при круге лево назвать чрез  $R$  и  $L$ , а истинное значение направления чрез  $N$ , то:

$$N = R + \frac{i}{tg\,z}; \quad N \pm 180^\circ = L - \frac{i}{tg\,z}$$

или:

$$N = R - \frac{i}{tg\,z}; \quad N \pm 180^\circ = L + \frac{i}{tg\,z}$$

$$N = \frac{R + L \pm 180^\circ}{2}$$

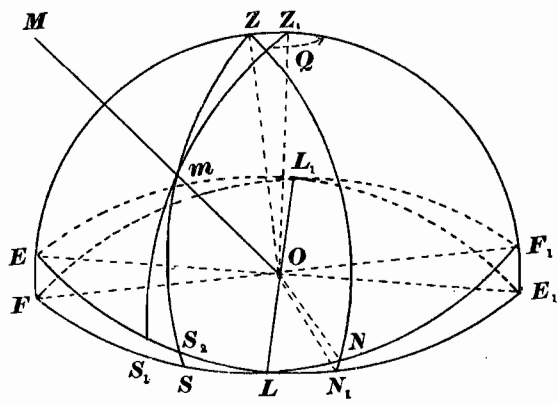
Таким образом, если-бы наклонность горизонтальной оси теодолита была обусловлена только неравенством подставок трубы и неравенством цапф, то в среднем из наблюдений, исполненных при двух положениях трубы  $R$  и  $L$ , мы получали бы направление совершенно свободное от влияния наклонности горизонтальной оси.

**38. Влияние неправильной установки вертикальной оси (оси вращения алидады).** При рассмотрении этого вопроса будем считать, что плоскость лимба и ось вращения трубы перпендикулярны к оси алидады.

Пусть  $O$ —центр лимба, а  $OZ_1$ —ось алидады (черт. 117) наклоненная под углом  $\delta$  к вертикальной линии  $OZ$ ; допустим, что круг  $ELLE_1$  есть пересечение вспомогательной сферы, имеющей центр в  $O$ , с плоскостью лимба инструмента, наклоненной к плоскости горизонта также на угол  $\delta$ . Пусть  $LL_1$ —горизонтальный диаметр нашего наклонно-стоящего лимба, а круг  $FLF_1$ —пусть находится в плоскости горизонта точки  $O$ .

При перпендикулярности горизонтальной оси инструмента к оси  $OZ_1$  плоскость *большого круга инструмента* всегда будет проходить чрез  $OZ_1$ . Очевидно, величина направления, отсчитанного на лимбе  $ELLE_1$  при наведении трубы на некоторый предмет, не зависит от высоты горизонтальной оси над лимбом и остается та-же самая, если мы даже вообразим что эта высота равна нулю, т. е. что визирная ось трубы проходит чрез  $O$ . Поэтому и будем считать  $O$  за пересечение визирной и горизонтальной осей.

Пусть при наблюдении предмета  $M$  был сделан отсчет  $S_1$  на лимбе  $ELE_1$ . Истинным отсчетом  $S$  будем называть такой, который бы получился при визировании на  $M$ , если-бы ось алидады совпадала с  $OZ$ , причем при переходе от  $S_1$  к  $S$ , или от неправильного положения оси алидады к правильному, лимб вместе с алидадой должен вращаться на угол  $\delta$  около прямой  $L_1L$ , перпендикулярной к плоскости  $ZOZ_1$ , в которой лежит уклонение оси алидады от ее правильного положения. Если по направлению прямой  $LL_1$  находились, при наклонном положении оси алидады, штрихи лимба  $L$  и  $L \pm 180^\circ$ , то эти-же штрихи останутся на прямой  $LL_1$  и после указанного перехода к правильному положению оси алидады. Если при наклонном положении оси алидады плоскость большого круга при визировании на  $M$  совпадала с плоскостью  $Z_1OmS_1$ , пересекающею лимб по радиусу  $OS_1$ , то при правильном положении оси алидады при визировании на  $M$  плоскость большого круга совпадет с плоскостью  $ZOmS$ , пересекающею горизонтальный лимб по радиусу  $OS$ . Будем считать, что радиусам  $OS_1$  и  $OS$  соответствуют на лимбах именно отсчеты  $S_1$  и  $S$  (т. е. предположим что индекс алидады лежит в плоскости большого круга). Очевидно, вопрос о вычислении  $S$  сводится к определению разности дуг  $S_1L$  и  $SL$ .



Черт. 117.

крупнее

Напишем:

$$S - S_1 = SL - S_1L = SL - S_2L - S_1S_2$$

понимая под  $S_2$  точку пересечения плоскости  $ZOm$  с плоскостью наклонного лимба. Из прямоугольного сферического тр-ка  $S_2LS$ , называя в нем стороны  $SL$  и  $S_2L$  соответственно чрез  $x$  и  $y$ , имеем:

$$\cos \delta = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} y$$

$$2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\delta}{2} = 1 - \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = \frac{\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = \frac{\operatorname{Sin} (y - x)}{\operatorname{Sin} y \operatorname{Cos} x}$$

Отсюда:

$$\operatorname{Sin} (y - x) = 2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{Sin} y \operatorname{Cos} x$$

Вследствие малости  $\delta$  и  $y - x$  можно написать так:

$$y - x = \frac{\delta^2}{2} \operatorname{Sin} 1'' \cdot \operatorname{Sin} 2y \dots \dots \dots (1)$$

Для определения-же  $S_1S_2$  рассмотрим сперва треугольник  $mZZ_1$ , в котором угол при  $m$  назовем чрез  $P$ , а угол при  $Z_1$  — чрез  $180^\circ - Q$ ; из этого тр-ка:

$$\operatorname{Sin} P = \frac{\operatorname{Sin} \delta}{\operatorname{Sin} z} \cdot \operatorname{Sin} Q$$

понимая под  $z$  — зенитное расстояние  $Zm$  предмета  $M$ . Далее из тр-ка  $m_1S_1S_2$ , прямоугольного при  $S_1$ , называя в нем сторону  $mS_2$  чрез  $90^\circ - z - \Delta$ :

$$\sin P = \frac{\sin \widetilde{S_1 S_2}}{\cos (z + \Delta)}$$

Следовательно:

$$\sin \widetilde{S_1 S_2} = \frac{\cos (z + \Delta)}{\sin z} \cdot \sin \delta \cdot \sin Q \dots \dots \dots (2)$$

Очевидно  $mS = 90^\circ - z$ ; следовательно  $\Delta$  равно дуге  $SS_2$ . Из тр-ка  $S_2SL$  однако видно, что  $\Delta$  одного порядка с  $\delta$  и поэтому если в ур-нии (2) удерживать лишь малые величины одного порядка с  $\delta$ , то:

$$S_1 S_2 = \frac{\delta \sin Q}{\operatorname{tg} z} \dots \dots \dots (3)$$

Из формулы (1) видно, что при  $\delta = 60''$

$$y - x \cong \frac{1}{200} \text{ секунды.}$$

Очевидно, если-бы ось алидады была вполне правильно установлена, а плоскость лимба была-бы наклонена к горизонту на угол  $\delta$ , то отсчет при визировании на  $M$  соответствовал-бы радиусу  $OS_2$ ; другими словами погрешность отсчета при правильно стоящей оси алидады, но при наклонном лимбе была-бы равна  $y - x$ . Таким образом  $y - x$  является влиянием *собственно наклонности лимба*, и как видно это влияние всегда пренебрегаемо, потому что всегда можно установить лимб под углом к горизонту, меньшим одной минуты.

На основании изложенного:

$$S - S_1 = \frac{\delta \sin Q}{\operatorname{tg} z}$$

Так как плоскость  $EZZ_1P_1$  перпендикулярна к  $LL$ , то понятно, что:  $Q = S_1 - L + 90^\circ$

Поэтому окончательно:

$$S - S_1 = \frac{\delta \cos (S_1 - L)}{\operatorname{tg} z} \dots \dots \dots (4)$$

Надлежит здесь отметить, что при наклонной оси алидады ось вращения трубы будет при разных положениях алидады различно наклонена к горизонту. При отсчете  $S_1$  ось вращения трубы будет параллельна радиусу  $ON_1$  лимба, перпендикулярному к радиусу  $OS_1$ . Проведя вертикал  $ZON_1$  отметим в  $N$  его пересечение с горизонтальным лимбом  $F'OP_1$  и для наклонности  $q$  оси вращения трубы, измеряемой углом  $N_1ON$ , найдем из треугольника  $NLN_1$ , прямоугольного при  $N$ :

$$\sin q = \sin \delta \cdot \sin [L - (S_1 - 90^\circ)]$$

т. е.

$$q = \delta \cos (S_1 - L)$$

Таким образом формула (4) переписется так:

$$S - S_1 = \frac{\delta \cos (S_1 - L)}{\operatorname{tg} z} = \frac{q}{\operatorname{tg} z} \dots \dots \dots (5)$$

Следовательно, при наклонно расположенной оси алидады, погрешность в отсчете по горизонтальному лимбу выражается совершенно так-же, как в случае наклона одной только горизонтальной оси на угол  $q$ . Но в противоположность предыдущему параграфу, величина  $q$ , во-первых, не остается постоянной при разных азимутах трубы, а изменяется по закону синуса; во вторых для визирований на один и тот-же предмет при двух положениях трубы величина  $q$  остается одною и тою-же, т. е. знак ее не изменяется с переводом трубы чрез зенит.

*Заключение.* Пусть при наведении трубы на предмет  $A$  с зенитным расстоянием  $z_a$ , наклонность горизонтальной оси при круге право оказалась равной  $J_a$ ; эта величина  $J_a$  складывается из наклонности  $i$ , обусловленной неравенством подставок трубы и неравенством цапф горизонтальной оси, и из наклонности  $q_a$ , обусловленной наклоном оси алидады. Пусть при наведении трубы также при круге право на предмет  $B$  с зенитным расстоянием  $z_b$ , наклонность горизонтальной оси оказалась равной  $J_b$ , причем  $J_b$  составилось из  $i$  и из наклонности  $q_b$  обусловленной наклоном оси алидады. Называя чрез  $R_a$  и  $R_b$  измеренные направления, чрез  $N_a$  и  $N_b$  — истинные направления, напишем:

$$\left. \begin{aligned} N_a &= R_a + \frac{J_a}{\operatorname{tg} z_a} = R_a + \frac{i}{\operatorname{tg} z_a} + \frac{q_a}{\operatorname{tg} z_a} \\ N_b &= R_b + \frac{J_b}{\operatorname{tg} z_b} = R_b + \frac{i}{\operatorname{tg} z_b} + \frac{q_b}{\operatorname{tg} z_b} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

После перевода трубы чрез зенит, при новых визированиях на  $A$  и  $B$  при круге лево, мы будем иметь такие наклонности  $J'_a$  и  $J'_b$  горизонтальной оси:

$$J'_a = q'_a - i; \quad J'_b = q'_b - i$$

Если-бы вращение алидады совершалось около постоянной оси и инструмент был абсолютно устойчив, то тогда  $q'_a$  равнялось-бы  $q_a$  и  $q'_b$  равнялось  $q_b$ . Но, во-первых, возможны колебания оси алидады в ее втулке; во вторых ось алидады может не совпадать с осью втулки; в третьих подставка теодолита может изменить свое положение за время визирований на  $A$  и на  $B$  при двух положениях трубы. Поэтому правильнее считать что  $q'_a$  не равно  $q_a$  и  $q'_b$  не равно  $q_b$ . Итак напишем:

$$\left. \begin{aligned} N_a &= L_a + \frac{J'_a}{\operatorname{tg} z_a} = L_a - \frac{i}{\operatorname{tg} z_a} + \frac{q'_a}{\operatorname{tg} z_a} \\ N_b &= L_b + \frac{J'_b}{\operatorname{tg} z_b} = L_b - \frac{i}{\operatorname{tg} z_b} + \frac{q'_b}{\operatorname{tg} z_b} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Из (6) и (7) имеем:

$$N_a = \frac{R_a + L_a}{2} + \frac{q'_a + q_a}{2 \operatorname{tg} z_a} \dots \dots \dots (8)$$

$$N_a - N_b = R_a - R_b + i \left\{ \frac{1}{\operatorname{tg} z_a} - \frac{1}{\operatorname{tg} z_b} \right\} + \frac{q_a}{\operatorname{tg} z_a} - \frac{q_b}{\operatorname{tg} z_b} \dots \dots \dots (9)$$

$$N_a - N_b = \frac{R_a + L_a}{2} - \frac{R_b + L_b}{2} + \frac{q'_a + q_a}{2 \operatorname{tg} z_a} - \frac{q'_b + q_b}{2 \operatorname{tg} z_b} \dots \dots \dots (10)$$

Отсюда делаем такие выводы:

1) Наблюдая каждое направление или угол при двух положениях трубы, мы получаем в среднем выводе из таких наблюдений результат, свободный

лишь от влияния той части наклона горизонтальной оси, которая обусловлена неравенством подставок трубы и неравенством диаметров цапф горизонтальной оси.

2) Так как не исключаящееся в среднем выводе из наблюдений при  $R$  и  $L$  влияние обусловленной неправильным положением оси алидады наклонности горизонтальной оси быстро возрастает с возрастанием высоты наблюдаемых предметов над горизонтом, то при наблюдениях сигналов с зенитными расстояниями, значительно отличающимися от  $90^\circ$ , а в особенности при наблюдениях по определению азимута, *наклонности  $J_a, J_b, J'_a, J'_b$  должны быть точно определяемы непременно посредством уровня, ставящегося на горизонтальную ось, при каждом визировании трубой* и направления

должно вычислять по формуле  $N = R + \frac{J_R}{\operatorname{tg} z}$  или  $N = L + \frac{J_L}{\operatorname{tg} z}$  без выделения слагаемых с  $q$  — как вследствие безцельности такого выделения, так и вследствие его трудности.

3) При наблюдениях на пунктах тригонометрической сети  $z$  близко к  $90^\circ$  и поэтому  $\operatorname{tg} z$  для всех наблюдаемых сигналов имеет большое числовое значение. Другими словами в триангуляции поправка  $\frac{J}{\operatorname{tg} z}$  имеет всегда весьма малое числовое значение. Поэтому принимают за правило выверкой инструмента и тщательной его установкой на станции (посредством ставящегося на горизонтальную ось уровня) при полной устойчивости основания инструмента достичь того, чтобы иметь при всех визированиях достаточно малые наклоны вертикальной оси — так, чтобы поправкою  $\frac{J}{\operatorname{tg} z}$  можно было бы просто пренебрегать; практически это выражается так:  $J$ , должно быть, всегда менее пяти секунд, при наблюдениях в триангуляциях I класса, и  $8''$ — $10''$  — в триангуляции II класса.

## Глава VIII.

### Об измерении горизонтальных направлений и углов.

**39. Выгоднейшее время наблюдений горизонтальных направлений.**  
Представим себе, что труба теодолита остается направленной в течение всего летнего безоблачного дня на значительно-удаленный земной предмет и проследим те изменения, которые совершаются за день в виде и в положении изображения этого предмета.

Тотчас после восхода солнца изображение предмета представляется неясным, расплывчатым и значительно колеблющимся; в следующие затем полтора-два часа изображение непрерывно и довольно быстро повышается в трубе, приобретая все более и более отчетливый и спокойный вид; затем наступает весьма, впрочем, короткий — не более получаса — период утренних спокойных изображений, в течение которого изображение вполне отчетливо, почти неподвижно и весьма удобно для точного наведения на него нитей трубы. По миновании этого периода изображение, продолжая повышаться в трубе, начинает колебаться вновь по азимуту; чем ближе к полудню, тем более замедляется ход изображения по высоте и тем более увеличиваются колебания по азимуту. За час до полудня эти колебания по азимуту становятся столь значительными, что визирование вертикальными нитями делается невозможным. Такие значительные колебания по азимуту вместе с тусклым и расплывчатым видом изображения продолжают до двух часов пополудни; затем колебания начинают стихать, изображение делается все более спокой-

ным и все более отчетливым, и между тремя и четырьмя часами, но часто ближе к четырем часам пополудни наступает начало периода вечерних спокойных изображений, конец которого приходится за час или за полтора до захода солнца; в течение этого периода изображение совершенно отчетливо весьма спокойно и не меняя азимута медленно опускается в поле зрения трубы. За час до захода солнца появляются небольшие колебания изображения, которые сопровождаются понижением резкости изображения. Перед самым закатом солнца изображение становится еще раз спокойным.

В пасмурную погоду общий характер изменений за день в положении и в виде изображения остается тот-же самый, но передвижения по высоте и колебания по азимуту бывают значительно меньшими. Описанные перемены за день в положении и в виде изображения вполне объясняются тем, что световые лучи от отдаленного сигнала проходят через нижние, прилегающие к почве, слои атмосферы, которые под действием нагревания солнцем или вернее под действием нагревания тепловыми лучами, отраженными почвой, — непрерывно перемещаются.

Наивыгоднейшим для измерения горизонтальных направлений является таким образом *вечернее время*: начиная с 3 — 4 часов пополудни и кончая примерно за час до захода солнца.

Ночью устанавливается равновесие в атмосфере, и почти всегда ночью колебания изображений по азимуту — ничтожны. *Ночной период* — начиная спустя час после захода солнца и кончая за час до восхода, — является очень выгодным для измерения горизонтальных направлений.

Необходимо отметить, что на качество изображений, кроме времени дня, имеют огромное влияние местные условия. Собственно все до сих пор сказанное относится к слабо или слегка всхолмленной равнине, не покрытой большими лесными массивами.

В гористых районах, где луч идет высоко над почвой, почти в течение всего дня изображения геодезических сигналов представляются весьма удовлетворительными. Точно так-же в местностях с крупным рельефом условия наблюдения удаленных сигналов гораздо более благоприятны, чем в местности равнинной. Наоборот, в степных местностях, в особенности в прикаспийской низменности, нередко в летнее время можно производить наблюдения только в течение двух или даже одного часа за весь день. В болотистых низменностях могут пропасть бесплодно целые недели в ожидании удовлетворительных изображений,

Высота визирного луча над почвой или над лесом имеет огромное значение; в триангуляциях I класса надлежит иметь во всех точках визирного луча высоту его над почвой или лесом не менее 6 м.

В ветренную погоду изображения обычно бывают превосходными, но конечно работе при ветре может воспрепятствовать недостаточная устойчивость сигналов. Перед грозой и сейчас-же после дождя наблюдаются значительные колебания изображений.

Слабая видимость наблюдаемых точек и колебания изображений приводят к тому, что в триангуляциях I класса и в основных рядах II класса ошибка наведения трубы становится главною в ряду других ошибок наблюдений. На первоклассных пунктах надлежит совершенно воздерживаться от работы при отсутствии спокойных и отчетливых изображений.

**40. Измерение углов способом повторения.** При измерении этим способом угла между некоторыми предметами *A* и *B* поступают так: 1) при закрепленном лимбе направляют трубу на левый предмет *A* и отсчитывают верньеры или микроскопы, получая — допустим — в среднем из этих отсчетов величину  $S_0$ ; 2) вращая при закрепленном лимбе алидаду по ходу часовой стрелки, наводят трубу на правый предмет *B*; 3) оставляя алидаду соеди-

ненной с лимбом, как это было при наведении на  $B$ , вращают лимб вместе с алидадой против хода часовой стрелки и наводят трубу движением лимба вторично на  $A$ ; 4) оставляя лимб закрепленным, как это было при вторичном наведении трубы на  $A$ , вращают алидаду по ходу часовой стрелки и наводят трубу вторично на  $B$ ; 5) имея алидаду соединенной с лимбом, как это было при вторичном визировании на  $B$ , отпускают зажимной винт лимба и вращением лимба против хода часовой стрелки направляют трубу в третий раз на  $A$ ; 6) при закрепленном лимбе вращением алидады по ходу часовой стрелки наводят трубу в третий раз на  $B$  и т. д.—повторя описанные действия  $n$  раз; после наведения трубы вращением алидады в  $n$ -овый раз на предмет  $B$  отсчитывают верньеры или микроскопы, получая—допустим—в среднем выводе из этих отсчетов величину  $S_n$ . Очевидно в рассматриваемом способе выполняется последовательно, начиная от диаметра  $S_0$ , откладывание измеряемого угла  $\alpha$  на лимбе столько раз, сколько было сделано повторений, т. е. сколько было сделано поворотов алидады, при закрепленном лимбе, разделенных друг от друга поворотами лимба вместе с алидадой. При  $n$  повторениях будем иметь:

$$\alpha = \frac{S_n - S_0}{n} \dots \dots \dots (1)$$

Исполнив  $n$  повторений при одном положении трубы, (напр. при  $R$ ) переводят ее чрез зенит и при положении  $L$  измеряют, исполняя такое же число  $n$  повторений, или тот угол между  $A$  и  $B$ , в котором  $A$  является левым предметом, или-же угол, дополняющий измеренный при первом положении трубы до  $360^\circ$  (для этого последнего угла,— $A$  будет правым предметом).

В первом случае принимают за правило при втором положении трубы вращать алидаду против хода часовой стрелки, а вращение лимба вместе с алидадой при переходе от одного повторения к следующему исполнять по ходу часовой стрелки ( $\alpha$  будет следовательно вычисляться как  $\frac{S_0 - S_n}{n}$ ).

Во втором-же случае, т. е. при измерении при втором положении трубы дополнительного угла, лишь прежний левый предмет становится правым, порядок-же измерения сохраняется в точности тот-же самый, что и при первом положении трубы.

Из (1) сразу видно, что влияние на определение  $\alpha$  погрешностей в  $S_0$  и  $S_n$ , обусловленных ошибками делений лимба и ошибками отсчетов по верньерам, может быть сделано как угодно мало, если угол измерять способом повторения—надлежит лишь брать достаточно большее число  $n$  повторений.

Назовем чрез  $m_0$ —ошибку визирования трубой, чрез  $m_v$ —ошибку среднего вывода из отсчетов по всем верньерам ( $m_0$ —часть ошибки в направлении, обусловленная ошибками отсчетов по верньерам). Очевидно, квадрат влияния ошибок отсчетов по верньерам на вывод угла  $\alpha$  равен  $\frac{2 m_0^2}{n^2}$ ; с другой стороны для получения  $S_n - S_0$  приходится выполнять  $2n$  визирований и, следовательно, квадрат обусловленной ошибками визирований погрешности в  $\alpha$  равен  $\frac{2n m_v^2}{n^2}$ . Таким образом, ошибка в  $\alpha$ , обусловленная ошибками отсчетов и ошибками визирований, выразится, при способе повторения, так:

$$m_\alpha^2 = \frac{2 m_0^2}{n^2} + \frac{2 n m_v^2}{n^2} = \frac{2}{n^2} \{ m_0^2 + n \cdot m_v^2 \} \dots \dots \dots (2)$$



Если угол  $\alpha$  измеряется  $n$  полуприемами, то, как увидим в следующем параграфе, ошибка  $m_\alpha$  обусловленная так-же только ошибками отсчетов и ошибками визирований, будет равна:

$$m_\alpha^2 = \frac{2 m_o^2}{n} + \frac{2 m_v^2}{n} = \frac{2}{n} \{m_o^2 + m_v^2\} \dots \dots \dots (3)$$

Из сопоставления формул (2) и (3) следует, что если принимать в расчет только ошибки отсчетов и визирований, то способ повторения будет, по сравнению со способом измерения круговыми приемами, тем более выгоден, чем более в данном инструменте ошибка отсчета по сравнению с ошибкой визирования.

Из изложенного до сих пор становится понятным, почему в конце XVIII и первой трети XIX столетия при измерениях углов на пунктах тригонометрической сети применялся исключительно способ повторения: ошибки делений на лимбах инструментов того времени были далеко не так малы, как в настоящее время, а с другой стороны для отсчитывания кругов служили верньеры, а не микроскопы и ошибка отсчета  $m_o$  была значительна по сравнению с ошибкой визирования  $m_v$ .

В основе способа повторения лежат, очевидно, два предположения: первое — что при вращении лимба вместе с алидадой относительное расположение этих частей инструмента остается неизменным; второе — что при вращении одной алидады около ее оси в положении закрепленного лимба не происходит никаких изменений. В действительности в теодолитах с *Рейхенбаховой* системой осей дело обстоит так: 1) соединение алидады с лимбом не есть абсолютно твердое; инерция значительной массы алидады делает то, что это соединение при вращении лимба около его оси вместе с алидадой несколько нарушается, и алидада в своем движении несколько отстает относительно лимба, поворачиваясь на меньший угол; 2) вращение алидады около ее оси при закрепленном лимбе сопровождается некоторыми зацеплениями оси алидады за поверхность втулки, что ведет к сдвигу лимба; величина этого сдвига лимба, вызванного увлечением алидадой лимбовой оси, не зависит впрочем от величины поворота алидады. В теодолитах с устройством осей по системе *Борда* увлечения лимба алидадой происходить не может, но изменения относительного положения алидады и лимба при вращении лимба около его оси вместе с алидадой происходят точно так-же, как и в теодолитах *Рейхенбаха*. Здесь кстати заметить, что теодолитами, имеющими *Ренсольдову* систему устройства осей, нельзя применять способа повторения.

По исследованиям германских геометров указанные смещения алидады относительно лимба и увлечения лимба алидадой выражаются несколькими секундами (не более пяти) и, как и следовало ожидать, изменяют свой знак с изменением направления движения. Другими словами, если смещение алидады относительно лимба при вращении ее вместе с лимбом против хода часовой стрелки вызывает уменьшение результата для измеряемого угла, то при вращении лимба вместе с алидадой по ходу часовой стрелки получается такое смещение алидады, которое вызывает увеличение результата для измеряемого угла; однако это увеличение результата не будет равно его уменьшению, полученному при противоположном направлении движения лимба. Точно так-же, если увлечение лимба алидадой ведет к уменьшению результата для угла при вращении алидады по ходу часовой стрелки, то при вращении ее против хода часовой стрелки будем иметь увеличение результата для угла, вызванное той-же причиной; но опять таки размер увеличения не будет равен размеру уменьшения. Конечно, увлечения алидадой лимба

происходят при всяком способе измерения углов, если только оси теодолита устроены не по системе *Ренсольда*. Поэтому, специфической погрешностью способа повторения является та, которая вызывается смещением алидады относительно лимба при вращении лимба; эту погрешность следует назвать *ошибкой способа повторения*. Как видно из изложенного влияние этой ошибки способа повторения и влияние увлечения лимба алидадой должны существенно ослабляться в среднем выводе из двух результатов для угла, из которых один получен при вращении алидады при закрепленном лимбе по ходу часовой стрелки, а другой — при вращении алидады при закрепленном лимбе против хода часовой стрелки. Предложенное *Гауссом* правило измерять не только угол  $AOB$ , но и  $BOA$ , дополняющий его до  $360^\circ$ , так-же ведет к исключению в среднем выводе значительной части *ошибки способа повторения*. В среднем эта ошибка оценивается величиной, около двух секунд.

В инструментах, употребляемых для измерения углов в настоящее время в сетях I и II класса, ошибки делений кругов весьма малы и влияние их исключается почти совершенно в среднем выводе из измерений исполненных на симметрично распределенных по всей окружности частях лимба; с другой стороны в этих-же инструментах, вследствие употребления микроскоп-микрометров, ошибка отсчета  $m_0$  менее ошибки наведения трубы  $m_1$ . Отсюда вытекает, что преимущества способа повторения совершенно исчезают при употреблении тех инструментов, которыми в настоящее время измеряются углы на пунктах I и II классов; если-же принять еще в расчет не вполне исключяющееся при любом числе повторений влияние *ошибки способа повторения*, то придется притти к заключению, что в сетях I класса способ повторения надлежит заменить способом круговых приемов или способом *Шрейбера*. При наблюдениях в триангуляциях III класса, где часто пользуются теодолитами с кругами, отсчитываемыми при помощи десятисекундных верньеров, применение способа повторения вполне уместно.

**41. Способ круговых приемов или измерение направлений.** Пусть наблюдаемые с данной тригонометрической станции предметы, считая их от левой руки к правой, суть  $A, B, C, D, E$ . После надлежащего центрирования теодолита, приводят в вертикальное положение *ось вращения алидады* и поступают далее так: 1) если теодолит имеет устройство осей по системе *Ренсольда*, то направляют трубу на предмет  $A$  и, освободив лимб, вращают его до тех пор, пока нулевой штрих не совпадет с нульпунктом первого микроскопа, после чего лимб закрепляют; если-же теодолит *повторительный*, т. е. имеет оси по системе *Рейхенбаха* или *Борда*, то установив нуль первого верньера или микроскопа на отсчет близкий к  $0^\circ 0'$ , закрепляют алидаду и движением лимба направляют трубу приблизительно на предмет  $A$ , после чего закрепляют лимб. 2) При закрепленном и неподвижном лимбе наводят трубу на предмет  $A$  и отсчитывают все имеющиеся при горизонтальном круге верньеры или микроскопы. 3) При неподвижном лимбе наводят трубу последовательно: на все остальные предметы  $B, C, D, E$  и снова на начальный предмет  $A$ , вращая при этом алидаду непременно грубым движением только *по ходу* часовой стрелки и отсчитывая после каждого наведения все имеющиеся верньеры или микроскопы. 4) Переводят трубу чрез зенит, 5) Последовательно, при неподвижном лимбе, наводят трубу на предметы  $A, E, D, C, B$  — и снова на начальный предмет  $A$ , вращая при этом алидаду грубым движением непременно только *против хода* часовой стрелки и отсчитывая после каждого наведения трубы все верньеры.

Действия, указанные в пунктах 1, 2 и 3 составляют *первый полурием*, в котором предметы наблюдаются в постепенности  $A, B, C, D, E, A$ ; действия указанные в пунктах 4 и 5, составляют *второй полурием*, в котором предметы наблюдаются в обратном порядке, т. е. в постепенности  $A, E, D,$

*C, B, A.* Первый и второй полуприемы составляют вместе один прием. Таких приемов исполняют: 12—при наблюдениях в сети I класса направлений на точки I же класса; 6 или 8 при наблюдениях в сети II класса точек II класса и при наблюдениях с точек I класса пунктов II класса; точки III класса наблюдаются с точек I и II класса 3-мя или 4-мя приемами; точно так-же в триангуляциях III класса направления наблюдают тремя или четырьмя приемами. При переходе от приема к приему делается перестановка лимба на угол  $\sigma = \frac{360^\circ}{n \cdot t}$ , понимая под  $n$  число верньеров или микроскопов, а под  $t$ —

число приемов. Следовательно, если в первом приеме имеют отсчет  $0^\circ$  на предмет *A*, то во втором приеме на этот начальный предмет имеют отсчет  $\sigma$ , в третьем—отсчет  $2\sigma$  и т. д.

Для способа *круговых приемов* очевидно характерным является во-первых наблюдение в приеме при одном положении лимба *целого ряда* направлений, число которых более *двух*, и во-вторых—перестановка лимба по определенной системе между приемами. Понятно, что перестановка лимба по этой системе имеет целью исключить влияние систематических ошибок делений лимба на окончательный вывод направления из  $t$  приемов.

Описанный выше порядок исполнения наблюдений в одном приеме основывается на следующих соображениях: 1) Наведение в конце каждого полуприема вновь на начальный предмет делается, чтобы убедиться в неподвижности лимба в течение полуприема, если при наблюдениях не пользуются *поверительной* трубой; при употреблении десятисекундных (с верньерами) теодолитов отличие друг от друга двух отсчетов на начальный предмет, полученных в начале и в конце полуприема,—не должно превышать десяти секунд; при употреблении инструментов с микроскоп-микрометрами это отличие *направлений* на начальный предмет, взятых в начале и в конце полуприема, обычно не превосходит, при вполне устойчивом лимбе, 3—4 секунд. 2) Перевод трубы чрез зенит между полуприемами имеет своим назначением: во-первых получить в среднем из двух полуприемов выводы, свободные от влияния коллимационной ошибки трубы и от влияния внецентренности трубы; во-вторых, иметь в результате исполнения приема ряд наблюдений, в котором проведена симметрия в расположении частей инструмента относительно каждого взятого направления; в третьих собрать материал для суждения о постоянстве коллимационной ошибки и следовательно о точности наблюдений. 3) Назовем чрез  $R_m$  и  $L_m$ —значения направлений на предмет *M*, полученные из полуприемов при „круге право“ и при „круге лево“. Соблюдение правила, чтобы вращение алидады \*) совершалось-бы только по ходу часовой стрелки в первом полуприеме и только против хода часовой стрелки во втором полуприеме имеет в виду уменьшить влияние в  $\frac{R_m + L_m}{2}$ , по сравнению с влиянием на  $R_m$  или на  $L_m$ , тех сдвигов лимба,

которые вызываются движением алидады. Нужно впрочем отметить, что при *Ренсольдовой* системе осей о таких сдвигах говорить не приходится. 4) Обратный порядок последовательности наблюдаемых предметов во втором полуприеме по сравнению с порядком последовательности в первом полуприеме,

приводит к почти полному постоянству для всех величин  $\frac{R+L}{2}$ , выведенных из некоторого приема, той погрешности, которая в  $\frac{R+L}{2}$  обуславлива-

\*) кругым движением

ется действующими пропорционально времени причинами. К таким причинам можно отнести: кручение деревянной болванки внутренней пирамиды при наблюдениях с двойной пирамиды или с сигнала (в особенности без поверительной трубы); изменения в относительном расположении частей инструмента, происходящие с течением времени вследствие перемен температуры воздуха, вследствие действия упругости при завинчиваниях и отвинчиваниях зажимных винтов трубы и алидады, вследствие трений между осями лимба и алидады при вращении последней.

Прежде чем приступить к наблюдениям, необходимо: 1) достичь полной устойчивости подставки инструмента \*) и защитить его от непосредственного действия солнечных лучей; 2) разыскать все подлежащие наблюдению с данной станции сигналы и предметы; 3) составить программу наблюдений.

При наблюдениях с земли необходимо предварительно под ножки штатива инструмента врыть отрезки бревен около 60 см длиной и диаметром около 12 см. На этих бревнах и укрепляются концы ножек штатива—причем желательно иметь эти концы плоские (оканчивающиеся или плоскостью или ребром, а не остриями). Дерн кругом ножек должен быть снят, а для ходьбы наблюдателей — настла доски. Указанная установка на пунктах I класса должна соблюдаться непременно; на точках II и III класса — при хорошем грунте — можно допускать взамен установки на бревнах — врытие ножек штатива в землю на глубину около 40 см, при обязательном снятии дерна и при настиле досок для наблюдателя на точках II класса,

При наблюдениях на колокольнях с каменного пола надлежит после надлежащей установки штатива в специально-устроенных углублениях, соединить концы его ножек с камнями пола посредством алебаstra. Если на колокольне пол деревянный, а каменный подоконник слишком узок для установки инструмента, то надлежит построить особый помост—сруб для инструмента—из бревен, которые концами были-бы вделаны в стены колокольни, причем придется построить и совершенно изолированный от первого легкий второй помост для наблюдателя.

При наблюдениях с двойных пирамид и в особенности с сигналов, — необходимо заблаговременно убедиться в надлежаще солидном скрепленном столика с внутренней болванкой и самой этой болванки с ногами внутренней пирамиды.

До выезда на место работ триангулятор должен собрать от лиц, строивших сигналы, исчерпывающие сведения о том на какой фон будут проектироваться сигналы, (на небо, на землю или на лес), какие меры приняты строителем для увеличения видимости сигналов (окраска, насадка на болванку добавочных цилиндров и т. п.) и какие вообще условия видимости в районе работ.

Для успеха исполнения наблюдений на большие расстояния необходимо иметь с собой несколько гелиотропов и несколько фонарей. Для подема инструментов на сигналы надлежит иметь два блока и два каната: один—длиною в 80—100 м, и другой — в 40—50 м; второй канат служит для оттягивания ящика с инструментом и предохранения его при подемах и спусках от ударов о бревна сигнала; необходимо также иметь запас гвоздей, топоры, сверла, пилу и лопату, а также брезенты.

Вместо того, чтобы защищать инструмент от солнца зонтом — держание которого на сигнале очень неудобно—надлежит пользоваться особо устроенными палатками, которые прикрепляют к основному столбам сигнала и устанавливают над платформой для наблюдателя.

\*) не следует жалеть времени и средств для достижения полной устойчивости инструмента.

Разыскание подлежащих наблюдениям сигналов производится при помощи чертежа сети и таблицы направлений, составленных при рекогносцировке и постройке знаков, и при помощи карты местности, на которой строителями знаков отмечены вершины сети; при этом разыскании надлежит хорошо запомнить те места горизонта, на которые проектируются наблюдаемые сигналы, и измерить до минуты углы между этими предметами \*).

Составление программы наблюдений имеет целью дать расписание предметов, наблюдаемых в надлежащей постепенности в разных приемах, вместе с указанием отсчетов, на которые должна будет ставиться алидада при наблюдениях разных предметов в разных приемах. Очень часто с данной станции бывает нужно взять направления на тригонометрические пункты разных классов. Если при составлении сети I класса является нужным наблюдать, кроме сигналов на пунктах I класса, еще пункты II класса и постоянные местные предметы, причем последние войдут либо в сеть III класса, либо в качестве уединенных точек, то на данной станции I класса следует наблюдать сперва соответственным числом приемов только точки I класса, а затем—в отдельной группе приемов только точки II и III класса и одну точку I класса. При наблюдениях на пунктах II и III класса можно допускать наблюдение с данной станции в одной серии приемов предметов разных классов. Очевидно, если предметы разных классов наблюдаются вместе, в одной серии приемов, то предметы низших классов должны быть пропускаемы в некоторых из этих приемов, делая однако пропуски в определенной системе. Так, если вместе с предметами II класса, для которых  $m=6$  наблюдают еще предметы III класса, для которых  $m=3$ , то эти предметы III класса должны быть наблюдаемы или только в приемах с нечетными номерами [1, 3, 5] или только в приемах с четными номерами [2, 4, 6]. Если работают без поверительной трубы, то за начальный предмет следует взять сигнал с постоянною хорошею видимостью. При наблюдениях с поверительной трубой за начальный предмет нередко берут сигнал с слабю, но постоянною видимостью.

ПРИМЕР ПРОГРАММЫ НАБЛЮДЕНИЙ

ПРЕДМЕТЫ	КЛАСС	П Р И Е М Ы					
		I	II	III	IV	V	VI
Вышка	2	0° 0'	30° 0'	60° 0'	90° 0'	120° 0'	150° 0'
Чортова	2	1°10'	31°10'	61°10'	91°10'	121°10'	151°10'
Донской	2	51°34'	81°34'	111°34'	141°34'	171°34'	201°34'
Чесменка	3	92°53'	—	152°53'	—	212°53'	—

Правильно составленная программа устраняет, во-первых, возможность пропусков в наблюдениях и возможность нарушений порядка последовательности наблюдений, а во-вторых обеспечивает удобство выполнения требования относительно вращения алидады грубым движением лишь в определенном направлении.

В триангуляции I класса и в основных цепях триангуляции II класса на каждом пункте результат наблюдений основных предметов должен выра-

\*) в сетях I класса нередко для разыскания предметов приходится посылать с них на станцию свет гелиотропом.

зяться *одним рядом равнозначных направлений*, потому что только тогда угол между двумя любыми направлениями, наблюдаемыми в качестве основных с данного пункта, будет иметь постоянный вес. Указанное требование должно на пунктах I класса осуществляться возможно строго, и отступления от него можно допускать собственно только в триангуляции II класса. Но чтобы выполнить это требование, необходимо на данном пункте отнаблюдать все основные направления *в одной группе полных приемов*, т. е. наблюдая в каждом из подлежащего числа приемов все предметы I класса, которые должны быть взяты с данного пункта I класса (или все пункты II класса, подлежащие наблюдению с пункта основной цепи II класса). Приходится поэтому прежде всего требовать, чтобы при постройке геодезических сигналов на пунктах I класса и в основных цепях II класса обеспечивалась бы возможность взять все основные направления при одном положении инструмента на столике сигнала. Далее, при наблюдениях на пунктах I класса должно стремиться в каждом приеме наблюдать все предметы I класса. Так как число их обычно 4—5, то исполнение наблюдений *в одной группе полных приемов* не представило бы затруднений при одновременной достаточной видимости всех предметов I класса. Но удаленные на 25—40 км геодезические сигналы видны достаточно отчетливо далеко не всегда даже в вечернее время благоприятных изображений. Нередко за данный вечер имеется видимость не на все пункты I класса; нередко видимость сигналов, проектирующихся на землю или на лес открывается на самое непродолжительное время и часто видимость таких сигналов сильно изменяется и из достаточной в начале приема становится исчезающей в середине его.

В современных работах по триангуляции I класса наблюдают почти исключительно световые сигналы: гелиотропы днем и фонари ночью. Но обычно по тем направлениям, где луч проходит близ почвы, или идет над заболоченными лесными массивами, свет гелиотропа можно наблюдать не каждый солнечный вечер, да и то в течение какого-нибудь получаса — так как по таким направлениям свет гелиотропа представляется в трубу неправильным, расплывчатым и слишком широким диском. Ночью свет фонаря может быть поглощен лесным туманом; наблюдения фонарей могут быть невозможны из-за ветра, при котором пламя фонаря кажется в трубу кидющимся из стороны в сторону. Наконец, недочеты в организации подачи световых сигналов нередко бывают причинами, что свет с того или другого сигнала не подается на станцию.

Все указанные причины могут вызвать крайние затруднения в применении на пункте I класса способа круговых приемов в чистом его виде и необходимость пребывания наблюдателя на одном пункте в течение 2—3 недель. Если условия работы вынудили наблюдать *неполными* приемами или разбить предметы на две группы, то на пунктах I класса нужно, руководясь изложенными в последующих главах правилами, провести такую программу наблюдений, при которой результат обработки собранного материала представлялся бы в виде серии *углов*  $X, Y, Z, V$  — отсчитываемых от некоторого начального (нулевого) направления, — веса которых возможно мало бы отличались друг от друга и от весов углов  $Y-X, Z-X, V-X, Z-Y, V-Y, V-Z$ . Если напр. при наблюдении предметов  $A, B, C, D$  удалось наблюдать в каждом из восьми приемов все эти предметы, а в четырех приемах наблюдали только три предмета  $A, C$  и  $D$ , то надлежит исполнить: четыре приема, наблюдая угол между  $A$  и  $B$ ; четыре приема, наблюдая угол между  $B$  и  $C$ ; и четыре приема — наблюдая угол между  $B$  и  $D$ . Если назовем чрез  $X$  угол между  $A$  и  $B$ , чрез  $Y$  — угол между  $A$  и  $C$ , чрез  $Z$  — угол между  $A$  и  $D$ , то принимая за единицу веса наблюдение направления в одном приеме, будем иметь такие веса окончательно выведенных углов:

$$P_x = 7,6; P_y = 7; P_z = 7; P_{y-x} = P_{z-x} = 7,6; P_{z-y} = 7$$

Но эти-же трудности проведения наблюдений в одной группе полных приемов заставляют в триангуляции I класса заменять способ круговых приемов—*способом Шрейбера*, излагаемом в § 43.

В некоторых местностях— вследствие избытка влаги в воздухе или вследствие характера рельефа— геодезические сигналы бывают видимы только одновременно и притом каждый в течение коротких промежутков времени, разделяемых друг от друга днями и даже неделями. В таких случаях прибегают к установке в одном или двух километрах от места наблюдений надлежаще устроенной вспомогательной марки, и затем наблюдают *отдельные* углы между маркой и достаточно видимым в данное время сигналом. Такой метод работы может быть допущен лишь в крайних случаях, и при нем нужно достигать, чтобы наблюдения на марку исполнялись с более высокой точностью, чем наблюдения на тригонометрические сигналы (для этого соображают соответственное устройство марки и делают на нее большее число наведений).

В триангуляции II класса способ круговых приемов остается господствующим. Здесь, пропущенные наблюдения того или иного сигнала в тех или иных приемах восполняют, наблюдая дополнительно направление на пропущенный сигнал вместе с одним или двумя смежными направлениями,— образующими с пропущенным направлением *необходимые* для построения треугольников сети углы. Или-же разбивают предметы на *группы*, и наблюдают предметы каждой группы полными приемами, причем общее для групп направление берут на предмет с постоянною хорошою видимостью, соблюдая одновременно условие, чтобы углы, входящие в необходимые для построения сети треугольники, получились-бы как разности направлений, взятых *в одной группе*.

Необходимо теперь остановиться еще на том, как именно выполняются *окончательные* наведения трубы. При наблюдениях тригонометрических сигналов I и II класса замечается такое явление: изображения сигналов, достаточно хорошо видимые пока они находятся в боковых частях поля зрения, становятся почти исчезающими, как только наблюдатель введет их в средину квадрата, образованного двумя вертикальными и двумя горизонтальными нитями; это явление происходит от того, что чрезвычайно резкое изображение нитей по сравнению с слабым изображением предмета поглощает все внимание глаза. В виду сказанного, по наведении трубы грубым движением алидады на предмет, устанавливают наводящим винтом трубы биссектор горизонтальных нитей немного выше или немного ниже верхушки визирного цилиндра сигнала или пирамиды, так,— чтобы большая часть этого цилиндра пришлась-бы вне промежутка между горизонтальными нитями; затем, действуя наводящим винтом алидады, совмещают биссектор вертикальных нитей с осью визирного цилиндра. При этом наведении вертикального биссектора на ось визирного цилиндра движение наводящего винта алидады заканчивают непременно *ввинчиванием его*.

Наводящий винт, прежде чем сообщить алидаде поступательное движение, должен преодолеть ее инерцию и инерцию вращающихся вместе с ней: трубы, подставок горизонтальной оси, вертикального круга и проч.; другими словами действие наводящего винта непременно сопровождается некоторым, хотя и весьма незначительным *шутисем*, алидады. В теодолитах старого устройства, в которых диаметр алидадного круга был от 15 до 18 дюймов, а соединение алидады с лимбом выполнялось посредством клещей,— гнутие алидады при вращении наводящего ее винта влияло очень ощутительно на отсчеты по верньерам; так, в опытах *В. Я. Струве* это влияние гнутия

алидады на отсчет по верньеру достигало иногда восьми секунд: для исключения этого влияния гнутия алидады *В. Я. Струве* делал два непосредственно следующие друг за другом наведения трубы на каждый предмет: после грубого наведения и закрепления зажимного винта алидады, делалось первое наведение *вывинчивал* наводящий винт, после чего следовало отсчитывание лимба; затем ввинчиванием наводящего винта вертикальные нити сдвигались с предмета и непосредственно вслед за этим делалось вторичное наведение нитей *вывинчивая* наводящий винт, и вторичное отсчитывание лимба.

В современных инструментах с устройством осей по системе *Рейхенбаха* или *Борда*, вследствие совершенного изготовления этих инструментов, гнутие алидадного круга при вращении наводящего винта алидады очень мало; влияние его невозможно обнаружить, как это делал *Струве*, из непосредственно следующих друг за другом наведений трубы на один и тот-же предмет, исполняемых ввинчиванием и вывинчиванием наводящего винта алидады, и самое гнутие происходит по сложному закону, при котором вряд ли можно надеяться на исключение его влияния применением вышеуказанного приема *Струве* двойных наведений. Так как, с другой стороны, наведение трубы, сделанное вывинчиванием наводящего винта алидады, почти всегда расстраивается за время последующего отсчитывания лимба—потому что при вывинчивании винта алидада движется под действием пружины \*), которая преодолевает инерцию алидады не мгновенно,—то и принимают за правило все наведения трубы—как уже было указано—заканчивать только ввинчиванием винта, полагая что *однообразно* выполнения окончательных наведений трубы на разные предметы обеспечивает в известной степени постоянство погрешности, обусловленной в каждом из направлений на эти предметы гнутием алидады. Должно еще отметить, что при наблюдениях на пунктах I и II класса теперь употребляются почти исключительно теодолиты с *Ренсольдовой* системой осей, при которой вряд ли вообще можно говорить о гнутиях алидадной части инструмента, при действии наводящим винтом алидады.\*\*) Само собою разумеется, что все только что сказанное относительно окончательного наведения трубы на предмет, относится ко всем способам измерения углов.

Остановимся теперь на порядке записей при исполнении наблюдений способом круговых приемов. Приводимая здесь табличка (см. стр. 217) дает пример такой записи при теодолите, лимб которого отсчитывается десятисекундными верньерами: во второй графе таблицы записываются отсчеты по первому (в верхних строчках) верньеру и по второму (нижних строчках) верньеру, сделанные при наблюдениях „круг право“ (*R*); в третьей графе таблицы записываются таким-же образом отсчеты, сделанные при наблюдениях „круг лево“—(*L*); в графе четвертой внесены: в верхних строчках—направления, полученные из полуприема *R*; в нижних строчках—направления из полуприема *L*. Порядок записи в графах второй и третьей указан стрелками.

В инструментах, снабженных для отсчитывания лимба микроскоп-микрометрами, пользуются в триангуляции II класса несколько иною схемю записи, размещающейся на левой и правой страницах развернутого журнала; на левой странице помещается запись первого полуприема, на правой—второго полуприема; пример записи части первого полуприема приводится в начале стр. 218:

\*) противодействующей наводящему винту при его ввинчивании.

\*\*) В больших инструментах боковое гнутие алидады и трубы всегда сопутствует вращению алидады, являясь его следствием; это обнаруживается нередко тем, что спустя некоторое время после наведения трубы она смещается в ту сторону, в которую происходило движение алидады.



Наблюдатель:

Станция: в центре.

Название предметов	Отсчеты по лимбу и по верньерам		Направления: $R$ $L \pm 180^\circ$	$2c$	$\frac{R + L}{2}$	Приведенные к нулю направления
	$R$	$L$				
1-й прием					11",2	
Коломенская башня	0° 3' 10" 3' 10"	180° 3' 10" 3' 20"	0° 3' 10" 3' 15"	— 5"	0° 3' 12",5	0° 0' 0"
Капогня колокольня	90° 46' 30" 46' 40"	270° 46' 40" 46' 40"	90° 46' 35" 46' 40"	— 5"	90° 46' 37",5	90° 43' 26",3
Орехова пирамида	134° 54' 0" 54' 10"	314° 54' 10" 54' 20"	134° 54' 5" 54' 15"	— 10"	134° 54' 10"	134° 50' 58",8
Коломенская башня	0° 3' 0" 3' 10"	180° 3' 20" 3' 10"	0° 3' 5" 3' 15"	— 10"	0° 3' 10"	

Названия предметов	Микроскоп <i>A</i>		Микроскоп <i>B</i>		<i>A</i>	<i>B</i>	Направление <i>L</i>
	<i>S</i>	$\frac{a}{b}$	<i>S</i>	$\frac{a}{b}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{a+b}{2}$	
	o	' "	o	' "	поправка	поправка	o
1-ый прием				<i>L</i>			
		1' 41"		1" 54"	1' 42"	1' 54"	
Северная пирамида	0° 0'	43	180° 0	54	+ 0".6	- 0".3	0° 1' 48".1
		9 40		9 38	9' 42"	9' 38"	
Восточная пирамида	18° 10'	44	198° 10	38	- 0".5	+ 0".2	18° 19' 39".9

и т. д.

Общий заголовок схемы остается тот же самый, что и в ранее приведенной схеме для инструмента с верньерами; во второй и четвертой графах записывается номер *s* ближайшего к нульпункту младшего штриха лимба; под *a* и *b* понимаются, конечно, отсчеты сделанные при наведении нитей микрометра на младший и на старший штрихи лимба; отсчет *b* — подписывается под соответствующим ему отсчетом *a*; в графах 6-ой и 7-ой соответственно для микроскопа *A* и для микроскопа *B* вносятся величины  $\frac{a+b}{2}$  и сейчас же

под ними *поправки за run*: в нашем примере цена деления барабана микрометра = 5"; *n* — т. е. число делений барабана, соответствующее одному интервалу на лимбе, равно 120; для микроскопа *A run* был равен + 0.36, а для микроскопа *B*: — 0.18 (в делениях барабана). Схема для второго полуприема отличается от приведенной, только прибавлением граф: для двойной коллимации —  $2c$ ; для  $\frac{R+L}{2}$  и для направлений приведенных к нуле-

вому направлению на начальный предмет. Заполнение графы „ $2c$ “ \*) делается или в течение же исполнения приема или в перерывах между наблюдениями, чтобы во время работы на пункте по колебаниям величин  $2c$  можно было бы судить о надежности сделанных наблюдений: если при наблюдениях теодолитом с верньерами колебания величин  $2c$  в течении приема совершаются в пределах больших 20-ти секунд, то это указывает либо на недостаточную устойчивость подставки инструмента, либо на промахи в отсчетах; при наблюдениях с инструментами с диаметром лимба близким 25 см, снабженными микроскоп-микрометрами, колебания  $2c$  лежат обычно в пределах пяти секунд.

В России для наблюдений в триангуляциях употребляют почти всегда теодолиты, снабженные *поверительной* трубой. Поверительная труба прочно и неизменно соединяется с лимбом на все время исполнения одного приема и наводится перед началом приема на хорошо видимый местный предмет или на довольно близкую искусственную марку; при каждом наведении главной трубы убеждаются *одновременно* в том что поверительная труба остается

\*) а также и графы „приведенные к нулю направления“.

направленной на избранный местный предмет или на марку; если-же в течение приема, при наведении главной трубы на некоторый сигнал  $N$ , обнаруживается сдвиг поверительной трубы, то в теодолитах с устройством осей по системе *Рейхенбаха* или *Борда* действуют микрометренным винтом лимба и вновь наводят поверительную трубу на избранный для нее предмет, после чего исправляют конечно наведение главной трубы на сигнал  $N$ ; в теодолитах-же с *Ренсольдовой* системой осей, в которых поверительная труба прикрепляется к треножному основанию инструмента, измеряют этот сдвиг поверительной трубы, пользуясь имеющимся при ней окулярным микрометром и впоследствии вводят поправки за такие сдвиги в отсчеты, сделанные по лимбу, по правилам указанным в § 33.

Наблюдения в поверительную трубу и наведения ее нитей на марку должны быть выполняемы очевидно *одновременно* с наведениями главной трубы; поэтому при употреблении поверительной трубы следует наблюдения вести двумя наблюдателями: один из них наводит главную трубу, другой — одновременно наводит нити окулярного микрометра поверительной трубы на марку; или-же второй наблюдатель смотрит в поверительную трубу и если обнаруживает ее сдвиг в момент, когда первый наблюдатель навел главную трубу, то микрометренным винтом лимба снова наводит поверительную трубу на марку и следит—остается-ли это наведение не нарушенным при новой установке первым наблюдателем главной трубы, необходимость которой вызвана сдвигом этой трубы при действии микрометренным винтом лимба.

В современных работах по первоклассной триангуляции в С. С. С. Р. применяют описанные в предыдущей главе геодезические универсалы и теодолиты *Гильдебранда*, в которых окулярный микрометр имеется и при главной и при поверительной трубе. При пользовании такими инструментами соблюдают такой порядок действий при наблюдении какого-нибудь направления: устанавливают алидаду на заранее определенный до одной минуты отсчет по лимбу и ставят окулярный микрометр главной трубы на отсчет  $10^{\circ}$ ,  $10$  делений, считая в нульпункте этого микрометра 10 оборотов; затем, действуя наводящим винтом алидады, вводят предмет на средину между вертикальными нитями окулярного микрометра; после этого делают четыре раза под ряд наведения нитей окулярного микрометра главной трубы с отсчетами каждый раз барабана этого микрометра; одновременно помощник наблюдателя наводит четыре раза под ряд нити микрометра поверительной трубы на надлежаще устроенную и солидно укрепленную марку, — с отсчитыванием, конечно, каждый раз барабана микрометра поверительной трубы; наконец, сейчас-же после четырех наведений нитей микрометров главной и поверительной трубы, следует отсчитывание лимба по обоим микроскоп-микрометрам алидады. Поверительная труба заранее, до начала приема, устанавливается так, чтобы при наведениях на марку нити ее микрометра удалялись-бы от нульпункта не более как на 30 делений барабана.

При наблюдениях на пунктах I класса записывают качества изображений, оценивая их напр. по 5-ти балльной системе, а так же чрез полчаса отмечают температуру и давление воздуха—эти сведения могут быть полезны при окончательной сводке наблюдений на пункте.

Вслед за сим (см. стр. 220—221) приводится *пример записи наблюдений*, исполненных *способом круговых приемов* двухсекундным универсалом *Гильдебранда* студентами Геодезического Факультета Московского Межевого Института в 1923 г. Пример является характерным потому, что при наблюдениях пользовались микрометрами главной и поверительной трубы, вводя поправки за эти микрометры по правилам § 33. Цена деления окулярного микрометра главной трубы  $\mu_1 = 1''.12$  и поправки за него вычислены по формулам:

Месяц и число 18 августа 1923 г.

СИГНАЛ ЗАНИНО (г

Начало измерения 17<sup>h</sup> 0<sup>m</sup>

IV прием

Элементы це

Конец „ 17<sup>h</sup> 35<sup>m</sup>

Названия предметов	Микрометр главной трубы	Микрометр поверительной трубы	Микроскоп А			Микроскоп В			А В	Поправки			R	
			o	l	$\frac{a}{b}$	o	l	$\frac{a}{b}$		run	Главн. труба	Поверит. труба		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
Михайловская пирам.	9°97.1	9°97.7	90	0 1'	31.7	270	0 1'	38.2	3' 3''	6				
	98.8	99.1			1.9			8.8	17.0					
	99.0	99.0								+0''	+1''	-2''	90°3'10''	
	9 98.3	98.6			3' 3''			3'17''	0 3'10''	.3				
Кромино пирамида	9 97.9	9 98.1	127	10 0'	54.1	307	10 2'	0 8	1'48''	.2				
	10 0.9	99.3			24.1			31.1	2 1	.9				
	99.6	10 00.0									-0''	+0''	-1''	127°11'5
	9 99.5	99.1			1'48''	.2		2'1''	.9	1'55''	.1			
Чертанова пирамида	9 99.8	9 97.3	231	45 1'	39.3	51	45 1'	43.0	3'18''	.1				
	99.1	98.9			8.8			13.0	3 26	.0				
	10 0.6	99.0									+0''	+0''	-2''	231°48'1
	9 99.8	9 98.4			3'18''	.1		3'26''	.0	3'22''	.0			
Михайловская пирам.	9 97.2	9 97.9	90	0 1'	30.8	270	0 1'	35.4	3' 1''	.9				
	95.4	96.7			1.1			4.3	3 9	.7				
	97.2	97.9									+0''	+4''	-3''	90°3'6'
	9 96.6	9 97.5			3' 1''	.9		3'9''	.7	3' 5''	.8			



Для первого приема:

Для второго приема:

	Веса:		Веса:
$a_I + \delta_I^a - \omega_1 = 0$	$\alpha_1$	$a_{II} + \delta_{II}^a - \omega_2 = 0$	$\alpha_2$
$b_I + \delta_I^b - \omega_1 = X$	$\beta_1$	$b_{II} + \delta_{II}^b - \omega_2 = X$	$\beta_2$
$c_I + \delta_I^c - \omega_1 = Y$	$\gamma_1$	$c_{II} + \delta_{II}^c - \omega_2 = Y$	$\gamma_2$
$d_I + \delta_I^d - \omega_1 = Z$	$\delta_1$	$d_{II} + \delta_{II}^d - \omega_2 = Z$	$\delta_2$
.....	.....	.....	.....

. . . (2)

Из ур-ний (1) и (2) легко написать такие нормальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 \omega_1 + \beta_1 X + \gamma_1 Y + \delta_1 Z + \dots - \Sigma_1 &= 0 \\ \sigma_2 \omega_2 + \beta_2 X + \gamma_2 Y + \delta_2 Z + \dots - \Sigma_2 &= 0 \\ \dots &\dots \\ \sigma_k \omega_k + \beta_k X + \gamma_k Y + \delta_k Z + \dots - \Sigma_k &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} [\beta] X &= [\beta b] - \beta_1 \omega_1 - \beta_2 \omega_2 - \beta_3 \omega_3 - \dots \\ [\gamma] Y &= [\gamma c] - \gamma_1 \omega_1 - \gamma_2 \omega_2 - \gamma_3 \omega_3 - \dots \\ [\delta] Z &= [\delta d] - \delta_1 \omega_1 - \delta_2 \omega_2 - \delta_3 \omega_3 - \dots \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Величины  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$  являются совершенно не нужными с геодезической точки зрения; поэтому надлежит их исключить, пользуясь ур-ниями (3), из ур-ний (4) и из ур-ний (2). Исключение величин  $\omega$  из (4) приводит к таким формулам:

$$\begin{aligned} [\beta] X &= [\beta b] + \frac{\beta_1^2 X}{\sigma_1} + \frac{\beta_1 \gamma_1 Y}{\sigma_1} + \frac{\beta_1 \delta_1 Z}{\sigma_1} - \frac{\beta_1 \Sigma_1}{\sigma_1} + \\ &+ \frac{\beta_2^2 X}{\sigma_2} + \frac{\beta_2 \gamma_2 Y}{\sigma_2} + \frac{\beta_2 \delta_2 Z}{\sigma_2} - \frac{\beta_2 \Sigma_2}{\sigma_2} + \dots \\ [\gamma] Y &= [\gamma c] + \frac{\beta_1 \gamma_1 X}{\sigma_1} + \frac{\gamma_1^2 Y}{\sigma_1} + \frac{\gamma_1 \delta_1 Z}{\sigma_1} - \frac{\gamma_1 \Sigma_1}{\sigma_1} + \\ &\dots \\ &+ \frac{\beta_k \gamma_k X}{\sigma_k} + \frac{\gamma_k^2 Y}{\sigma_k} + \frac{\gamma_k \delta_k Z}{\sigma_k} - \frac{\gamma_k \Sigma_k}{\sigma_k} + \dots \end{aligned}$$

Отсюда-же получаем:

$$\left\{ \begin{aligned} \left[ [\beta] - \left[ \frac{\beta^2}{\sigma} \right] \right] X - \left[ \frac{\beta \gamma}{\sigma} \right] Y - \left[ \frac{\beta \delta}{\sigma} \right] Z &= [\beta b] - \left[ \frac{\beta \Sigma}{\sigma} \right]; \\ - \left[ \frac{\beta \gamma}{\sigma} \right] X + \left\{ [\gamma] - \left[ \frac{\gamma^2}{\sigma} \right] \right\} Y - \left[ \frac{\gamma \delta}{\sigma} \right] Z &= [\gamma c] - \left[ \frac{\gamma \Sigma}{\sigma} \right]; \\ - \left[ \frac{\beta \delta}{\sigma} \right] X - \left[ \frac{\gamma \delta}{\sigma} \right] Y + \left\{ [\delta] - \left[ \frac{\delta^2}{\sigma} \right] \right\} Z &= [\delta d] - \left[ \frac{\delta \Sigma}{\sigma} \right] \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

Уравнениями (5) вполне решается вопрос о нахождении вероятнейших значений углов  $X, Y, Z \dots$  при наблюдениях способом круговых приемов, или — другими словами — уравнениями (5) решается вопрос об уравновешивании на станции при наблюдениях способом круговых приемов.

Эти наблюдения, как уже указывалось в настоящем параграфе, могут быть исполнены на данной станции различным порядком, и очевидно, что различие порядка наблюдений сказывается различием распределения весов в ур-ниях (1) и (2). Обычно принимают, что вес направления, наблюденного в отдельном приеме, равен единице. Поэтому, если наблюдения на данной станции были сделаны *полными* приемами, т. е. в каждом приеме наблюдались *все* предметы станции без пропусков, то *все* веса  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k$  будут равны единице. Если же наблюдения были сделаны *неполными* приемами, т. е. с пропусками в разных приемах то тех, то иных предметов станции, или с разделением предметов станции на группы и наблюдением предметов каждой группы отдельно *в полных по отношению лишь к каждой группе предметов приемах*, — то веса  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots, \alpha_k, \beta_k$  будут или равны единицам, или равны нулям. В настоящем § мы остановимся лишь на применении ур-ний (1), (2), (3) и (5) к случаю *полных* приемов. При равенстве всех весов единице,  $\sigma_k$  обращается в число  $n$  наблюдаемых в каждом приеме предметов, а  $\sum_k = \alpha_k a_k + \beta_k b_k + \gamma_k c_k + \dots$  обращается просто в сумму  $a_k + b_k + c_k + \dots$ . Поэтому, полагая, что на станции было исполнено  $m$  полных приемов, мы перепишем уравнения (5) так:

$$\begin{aligned} \left[ m - \frac{m}{n} \right] X - \frac{m}{n} Y - \frac{m}{n} Z &= [b] - \frac{[a]}{n} - \frac{[b]}{n} - \frac{[c]}{n} - \frac{[d]}{n} \\ - \frac{m}{n} X + \left[ m - \frac{m}{n} \right] Y - \frac{m}{n} Z &= [c] - \frac{[a]}{n} - \frac{[b]}{n} - \frac{[c]}{n} - \frac{[d]}{n} \quad (6) \\ - \frac{m}{n} X - \frac{m}{n} Y + \left[ m - \frac{m}{n} \right] Z &= [d] - \frac{[a]}{n} - \frac{[b]}{n} - \frac{[c]}{n} - \frac{[d]}{n} \end{aligned}$$

Складывая ур-ния (6) получим:

$$\begin{aligned} \left[ m - \frac{(n-1)m}{n} \right] X + \left[ m - \frac{(n-1)m}{n} \right] Y + \left[ m - \frac{(n-1)m}{n} \right] Z + \dots &= \\ = [b] + [c] + [d] + \dots - \frac{n-1}{n} [a] - \frac{n-1}{n} [b] - \frac{n-1}{n} [c] - \frac{n-1}{n} [d] \end{aligned}$$

или:

$$\frac{m}{n} X + \frac{m}{n} Y + \frac{m}{n} Z + \dots = [b] + [c] + [d] - \frac{n-1}{n} [a] + [b] + [c] + \dots$$

Складывая же последние ур-ния сперва с первым ур-нием из группы (5) затем со вторым ур-нием из группы (5) и т. д., получаем:

$$m X = [b] - [a]$$

$$m Y = [c] - [a]$$

$$m Z = [d] - [a]$$

.....

или:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{[b]}{m} - \frac{[a]}{m} = B - A \\ Y &= \frac{[c]}{m} - \frac{[a]}{m} = C - A \\ Z &= \frac{[d]}{m} - \frac{[a]}{m} = D - A \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

причем в ур-нии (7) под  $A, B, C, D$  понимаются соответственно величины:

$$\frac{[a]}{m}, \frac{[b]}{m}, \frac{[c]}{m}, \frac{[d]}{m}.$$

Результат, представляемый ур-ниями (7) можно было, конечно, написать сразу, без помощи ур-ний (5); однако убедиться в согласии вывода, делаемого на основании общих соображений, с выводом на основании способа наименьших квадратов, — не лишнее.

Обозначая: чрез  $m_o$  — ошибку направления из полуприема, обусловленную ошибкой отсчетов по микроскопам или верньерам; чрез  $m_v$  — ошибку визирования трубой, мы будем иметь, несомненно, что средняя ошибка лю-

бой из величин  $a_1, b_1, d_1, a_k, b_k, d_k$  равна  $\sqrt{\frac{m_o^2}{2} + \frac{m_v^2}{2}}$ ; и поэтому сред-

няя ошибка любой из величин  $\frac{[a]}{m}, \frac{[b]}{m}, \frac{[d]}{m}$  будет равна  $\sqrt{\frac{m_o^2}{2m} + \frac{m_v^2}{2m}}$ . Дру-

гими словами, очевидно, что при наблюдениях полными приемами, мы получаем в результате как все углы  $X, Y, Z, V$ , так и производные от них углы  $Y-X, Z-X, V-X, Z-Y, \dots, V-Z$  с одною и тою-же точностью; это-же, очевидно, может быть только тогда, когда результат уравнивания на станции представляется в виде *одного ряда направлений*. Одного взгляда на ур-ние (7) достаточно, чтобы заключить, что такой ряд направлений при наблюдениях полными приемами образуют величины  $A, B, C, D$ , равные каждая среднему арифметическому из направлений соответственно на предметы  $A, B, C, D$ , полученных в отдельных приемах.

Для случая одной группы полных приемов из ур-ний (3) напомним:

$$\omega_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1 + \dots}{n} \quad \frac{X}{n} \quad \frac{Y}{n} \quad \frac{Z}{n} \dots$$

$$\omega_k = \frac{a_k + b_k + c_k + \dots}{n} \quad \frac{X}{n} \quad \frac{Y}{n} \quad \frac{Z}{n} \dots$$

Подставляя-же эти значения  $\omega_1, \omega_k$  и найденные выше значения  $X, Y, Z$  в ур-ния (1) и (2), найдем:

$$\delta_1^a = \frac{a_1 + b_1 + c_1 + \dots}{n} - a_1 - \frac{[b]}{m} + \frac{[a]}{m} - \frac{[c]}{m} + \frac{[a]}{m} \dots$$

$$\delta_1^a = \frac{\left(a_1 - \frac{[a]}{m}\right) + \left(b_1 - \frac{[b]}{m}\right) + \left(c_1 - \frac{[c]}{m}\right) + \dots}{n} - a_1 + \frac{[a]}{m} \dots (8)$$

$$\delta_1^b = \frac{a_1 + b_1 + c_1 + \dots}{n} - b_1 - \frac{X}{n} - \frac{Y}{n} - \frac{Z}{n} \dots + X$$



$$d_1^b = \frac{a_1 + b_1 + c_1 + \dots + b_1 - \frac{[b]}{m} - \frac{[c]}{m} \dots + \frac{(n-1)}{m} [a] - \frac{[b]}{m} - \frac{[a]}{m}}$$

$$d_1^b = \frac{\left(a_1 - \frac{[a]}{m}\right) + \left(b_1 - \frac{[b]}{m}\right) + \left(c_1 - \frac{[c]}{m}\right) + \dots + b_1 - \frac{[b]}{m} \dots (9)}$$

$$d_k^a = \frac{\left(a_k - \frac{[a]}{m}\right) + \left(b_k - \frac{[b]}{m}\right) + \left(c_k - \frac{[c]}{m}\right) + \dots + a_k - \frac{[a]}{m} \dots (10)}$$

$$d_k^b = \frac{\left(a_k - \frac{[a]}{m}\right) + \left(b_k - \frac{[b]}{m}\right) + \left(c_k - \frac{[c]}{m}\right) + \dots + b_k - \frac{[b]}{m} \dots (11)}$$

Уравнения (8), (9), (10) и (11) можно еще переписать так:

$$d_1^a = \frac{(a_1 - A) + (b_1 - B) + (c_1 - C) + \dots + (a_1 - A) \dots (8')$$

$$d_1^b = \frac{(a_1 - A) + (b_1 - B) + (c_1 - C) + \dots + (b_1 - B) \dots (9')$$

$$d_k^a = \frac{(a_k - A) + (b_k - B) + (c_k - C) + \dots + (a_k - A) \dots (10')$$

$$d_k^b = \frac{(a_k - A) + (b_k - B) + (c_k - C) + \dots + (b_k - B) \dots (11')$$

Очевидно, что величины  $a_1 - A, b_1 - B, c_1 - C$  представляют собою отклонения наблюдаемых в первом приеме величин от вероятных значений соответственных направлений; точно также  $a_k - A, b_k - B, c_k - C$  суть отклонения наблюдаемых в приеме с номером  $K$  величин от вероятных значений соответственных направлений; такие отклонения будем называть *первичными*. Как видно из формул (8'), (9'), (10'), (11') для вычисления  $d_k^h$  придется сперва вычислить среднее арифметическое из первичных отклонений приема  $K$ , а затем находить разность между таким *средним* отклонением и первичным отклонением  $h_k - H$  для наблюдаемого в том-же приеме направления  $h_k$ . Поэтому величины  $d$  можно называть *вторичными* отклонениями. Обозначая  $a_1 - A, b_1 - B, c_1 - C, a_k - A, b_k - B, c_k - C$  соответственно чрез  $v_1^a, v_1^b, v_1^c, v_k^a, v_k^b, v_k^c \dots$  перепишем еще формулы для вторичных отклонений  $d$  так:

$$d_1^a = \frac{v_1^a + v_1^b + v_1^c + \dots}{n} - v_1^a$$

$$d_1^b = \frac{v_1^a + v_1^b + v_1^c + \dots}{n} - v_1^b \dots (12)$$

$$d_k^h = \frac{v_1^a + v_1^b + v_1^c + \dots}{n} - v_k^h$$

Так как число величин  $\omega$  равно числу приемов  $m$ , а число искомых углов менее на единицу числа  $n$  направлений, то число неизвестных в уравнениях (1) и (2) равно  $m + n - 1$ ; число-же всех наблюдений равно  $m \cdot n$ . Следовательно, рассчитав по формуле (12) величины  $\delta$ , мы можем затем вычислить ошибку  $\mu$  единицы веса или ошибку направления, выведенного из одного приема так:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum \delta^2}{m \cdot n - [m + n - 1]}} = \sqrt{\frac{\sum \delta^2}{(m - 1)(n - 1)}} \dots \dots (13)$$

В § 36 мы уже вычисляли среднюю ошибку  $\mu$  направления выведенного из одного приема—пользуясь при этом колебаниями коллимации в течение приема [см. формула (5) § 36]. Очевидно, величины  $\delta$  будут обусловлены не только ошибками отсчетов и ошибками визирований, но и *систематическими ошибками делений лимба*, влияние которых войдет поэтому в  $\mu$ , вычисляемое по формуле (13) настоящего §; точно так-же очевидно, что

величины  $\frac{R - L \pm 180^\circ}{2}$  совершенно свободны от влияния систематических ошибок делений лимба, а потому и величина  $\mu$ , рассчитываемая по формуле (5) § 36 так же свободна от этого влияния ошибок делений. Следовательно, нельзя предполагать совпадения величин  $\mu$ , рассчитываемых по формуле (13) и по формуле (5) § 36; при условии полной устойчивости лимба в течение полуприема и при условии сохранения в течение полуприема относительного расположения связанных между собою (механически и геометрически) частей инструмента—величина  $\mu$ , рассчитанная по формуле (13) должна оказываться несколько большею, чем величина  $\mu$ , рассчитанная по формуле (5) § 36.

ПРИМЕР ОПРЕДЕЛЕНИЯ  $\mu$  ПО ФОРМУЛЕ (13)

*Пирамида Восточная*

Предметы №№ приемов	Чортова пирамида $v_1$	Донской монастырь $v_1$	Симонов монастырь $v_1$
I	1° 10' 32".0 + 1".0	51° 33' 45".0 - 1".9	63° 24' 37".5 - 6".5
II	31 .4 + 0 .4	38 .8 - 8 .1	36 .3 - 7 .7
III	30 .0 - 1 .0	52 .5 + 5 .6	50 .0 + 6 .0
IV	31 .3 + 0 .3	48 .7 + 1 .8	48 .8 + 4 .8
V	33 .7 + 2 .7	53 .8 + 6 .9	58 .7 + 14 .7
VI	27 .5 - 3 .5	42 .5 - 4 .4	32 .5 - 11 .5
Среднее	1° 10' 31".0 - 0".1	51° 33' 46".9 - 0".1	63° 24' 44".0 - 0".2

№№ приемов Предметы	I		II		III		IV		V		VI	
	$v_1$	$\delta$	$v_1$	$\delta$	$v_1$	$\delta$	$v_1$	$\delta$	$v_1$	$\delta$	$v_1$	$\delta$
Вышка	0	+1.85	0	+3.85	0	-2.65	0	-1.72	0	-6.08	0	+4.85
Чортова	+1.0	+2.85	+0.4	+4.25	-1.0	-3.65	+0.3	-1.42	+2.7	-3.38	-3.5	+1.35
Донской	-1.9	-0.05	-8.1	-4.25	+5.6	+2.95	+1.8	+0.08	+6.9	+0.82	-4.4	+0.45
Симонов	-6.5	-4.65	-7.7	-3.85	+6.0	+3.35	+4.8	+3.08	+14.7	+8.62	-11.5	-6.65
$\Sigma v_1$	-7.4		-15.4		+10.6		+6.9		+24.3		-19.4	
$\frac{\Sigma v_1}{n}$	-1.85		-3.85		+2.65		+1.72		+6.08		-4.85	

В приведенном примере наблюдения направлений были исполнены малым универсальным инструментом, горизонтальный и вертикальный круги коего отсчитывались помощью десятисекундных верньеров; наблюдались в шести приемах предметы: Вышка, Чортова, Донской и Симонов, при начальном направлении на Вышку. Первая из приводимых в примере табличек представляет величины направлений, приведенных к нулевому направлению на Вышку.

ПРИМЕР УРАВНОВЕШИВАНИЯ НЕПОЛНЫХ ПРИЕМОМ.

П Р И Е М Ы	П Р Е Д М Е Т Ы			
	A	B	C	D
I	0° 0' 0".0	12° 5' 7".0	90° 3' 5".0	110° 8' 7".0
II	0 .0	7 .0	—	9 .0
III	0 .0	—	8 .0	10 .0
IV	0 .0	10 .0	7 .0	—

Принимаем приближенные значения углов:

$$X_0 = 12^\circ 5' 7''.0; \quad Y_0 = 90^\circ 3' 5''.0; \quad Z_0 = 110^\circ 8' 7''.0$$

и будем отыскивать *поправки* этих приближенных значений: X, Y и Z. Очевидно тогда, что величины a, b, c, d в ур-ниях (1) и (2) и веса этих величин представятся такой табличкой.

П р и е м ы	a	$\alpha$	b	$\beta$	c	$\gamma$	d	$\delta$
I	0".0	1	0".0	1	0".0	1	0".0	1
II	0 .0	1	0 .0	1	—	0	+2 .0	1
III	0 .0	1	—	0	+3 .0	1	+3 .0	1
IV	0 .0	1	+3 .0	1	+2 .0	1	—	0

На основании этой таблички вычисляем:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = 4 \quad \Sigma_1 = 0.0 \quad \frac{\Sigma_1}{\sigma_1} = 0.0 \quad [\beta] = 3 \quad [\beta b] = + 3.0 \\ \sigma_2 = 3 \quad \Sigma_2 = + 2.0 \quad \frac{\Sigma_2}{\sigma_2} = + \frac{3}{3} \quad [\gamma] = 3 \quad [\gamma c] = + 5.0 \\ \sigma_3 = 3 \quad \Sigma_3 = + 6.0 \quad \frac{\Sigma_3}{\sigma_3} = + 2.0 \quad [\delta] = 3 \quad [\delta d] = + 5.0 \\ \sigma_4 = 3 \quad \Sigma_4 = + 5.0 \quad \frac{\Sigma_4}{\sigma_4} = + \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\beta^2}{\sigma} \right] &= \frac{11}{12} & \left[ \frac{\beta\gamma}{\sigma} \right] &= \frac{7}{12} & \left[ \frac{\beta\Sigma}{\sigma} \right] &= + \frac{7}{3} \\ \left[ \frac{\gamma^2}{\sigma} \right] &= \frac{11}{12} & \left[ \frac{\beta\delta}{\sigma} \right] &= \frac{7}{12} & \left[ \frac{\gamma\Sigma}{\sigma} \right] &= + \frac{11}{3} \\ \left[ \frac{\delta^2}{\sigma} \right] &= \frac{11}{12} & \left[ \frac{\gamma\delta}{\sigma} \right] &= \frac{7}{12} & \left[ \frac{\delta\Sigma}{\sigma} \right] &= + \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Следовательно ур-ния (5) напишутся так:

$$\begin{aligned} \frac{25}{12} X - \frac{7}{12} Y - \frac{7}{12} Z &= + \frac{2}{3} \\ -\frac{7}{12} X + \frac{25}{12} Y - \frac{7}{12} Z &= + \frac{4}{3} \\ -\frac{7}{12} X - \frac{7}{12} Y + \frac{25}{12} Z &= + \frac{7}{3} \end{aligned}$$

или:

$$\begin{aligned} 25 X - 7 Y - 7 Z &= + 8 \\ -7 X + 25 Y - 7 Z &= + 16 \\ -7 X - 7 Y + 25 Z &= + 28 \end{aligned}$$

Складывая эти три ур-ния получаем:

$$X + Y + Z = \frac{52}{11}$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} 32 x - 33.11 &= + 8.0 \\ 32 y - 33.11 &= + 16.0 \\ 32 z - 33.11 &= + 28.0 \end{aligned}$$

Отсюда:

$$x = + 1''.28; \quad y = + 1''.53; \quad z = + 1''.91$$

и окончательно:

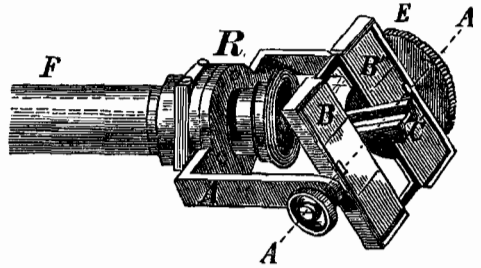
$$X = 12^\circ 5' 8''.28; \quad Y = 90^\circ 3' 6''.53; \quad Z = 110^\circ 8' 8''.91$$

**42. Наблюдения световых сигналов.** На расстояниях, превосходящих 20 км, даже большие сигналы бывают хорошо видимыми лишь в течение очень коротких промежутков времени; особенно трудно наблюдать удаленные сигналы, проектирующиеся на землю или на лес: видимость таких сигналов нередко даже в течение исполнения одного приема наблюдения направлений существенно изменяется, переходя от достаточной в начале приема к совсем плохой в середине его. В таких случаях нередко пользуются особыми приборами — *гелиотропами*, устанавливаемыми на наблюдаемых тригонометрических точках и приводящими к наблюдению, взамен плохо видимого тригонометрического сигнала, достаточно яркого отраженного изображения солнца.

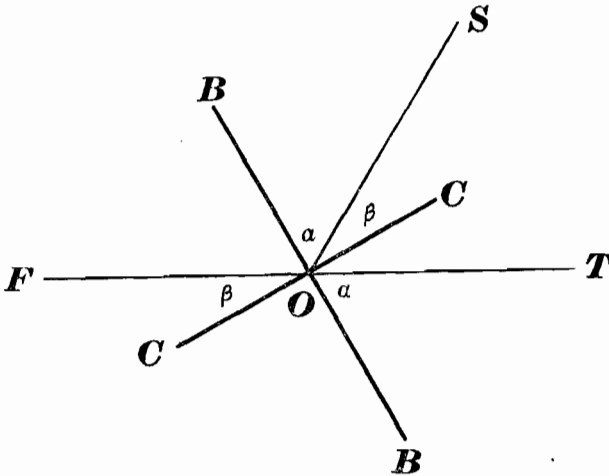
Гелиотроп был впервые предложен и применен знаменитым Гауссом. Гелиотроп Гаусса состоит из двух взаимно перпендикулярных зеркал, (черт. 118) *B* и *C*, вставленных в общую оправу; эта оправка имеет ось, проходящую через отверстия в вилке *A* и несущую на одном конце — шейбу *E*; вилка *A* составляет одно целое с кольцом *R*, которое надевается на объективный конец зрительной трубы *F*.

В описанном гелиотропе *Гаусса* должны быть соблюдены следующие требования: 1) ось общей оправы зеркал (*АА*) должна быть перпендикулярна к оси трубы *F*; 2) обе половины большого зеркала *ВВ*, должны иметь параллельные плоскости; 3) плоскости зеркал должны быть параллельны (*АА*) — оси вращения их оправы; 4) плоскости зеркал *В* и *С* должны быть взаимно-перпендикулярны.

Пусть на чертеже 118а *ВВ* — большое зеркало гелиотропа, отражающее солнечный луч *SO* по направлению *OT*; *СС* малое зеркало гелиотропа отражающее луч *SO* по направлению *OF*; вследствие того, что угол *BOC* равен  $90^\circ$ , имеем  $\alpha = 90 - \beta$ ; угол  $\angle SOF = 180^\circ - 2\beta$ ; угол  $\angle SOT = 2\beta$ . Другими словами сумма углов *SOT* и *SOF* равна  $180^\circ$ , т. е. направления *OT* и *OF* принадлежат одной прямой. Отсюда видно, что если в пункте *N*, тригонометрическом сигнале, который плохо виден из *M*, установить гелиотроп и направив трубу его на *M*, вращением зеркал добиться того, чтобы центр отраженного от малого зеркала *B* изображения солнца пришелся бы на оси трубы, то в этот момент солнечные лучи будут отражаться от большого зеркала *B* как раз по направлению *NM* на пункт *M*



Черт. 118.



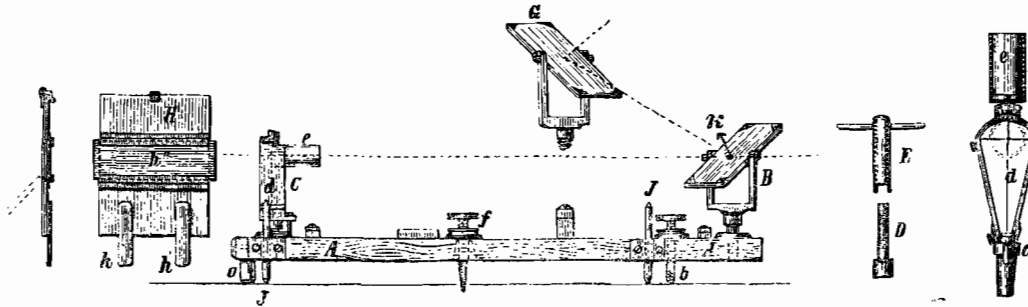
Черт. 118а.

и потому это последнее зеркало будет видно из *M* в виде ярко светящейся точки. Вследствие суточного движения солнца направление отраженных от зеркала *B* лучей будет непрерывно изменяться и поэтому гелиотропист должен время от времени изменять положение зеркал. При пользовании гелиотропом сперва направляют трубу на *M*, затем, вращая кольцо *R* вместе с вилкой *A* добиваются того, чтобы тень от шейки *E* представилась в виде линии: в этот момент

солнце будет находиться в плоскости шейки *E* т. е. ось общей оправы зеркал будет перпендикулярна к плоскости *SOF*, содержащей ось *OF* (черт. 119) трубы гелиотропа и проходящей чрез солнце *S*, и, следовательно, плоскости зеркал будут в этот момент перпендикулярны к плоскости *SOF*; после указанной установки кольца *R* и вместе с ним оси вращения зеркал вращают около этой оси зеркал до тех пор, пока не совместят изображение солнца с серединой поля зрения трубы гелиотропа.

В России пользуются гелиотропами *Ваншафа*, имеющими такое устройство: (см. черт. 119) к дубовой доске *АА* прикреплен небольшой целик *с* с сеткой нитей *d* и полый трубочкой *e*, в дне которой имеется круглое небольшое отверстие; трубочка эта может откидываться вверх. На другом конце

доски имеется зеркало *B* с небольшим отверстием *k* по его середине. Зеркало поворачивается около двух взаимно-перпендикулярных осей; в середине доски помещается зажимной винт—шуруп *f*, которым прибор привинчивается в центре столика сигнала. Стержни *JJ* служат для предварительного направления гелиотропа на пункт наблюдений. Эта первоначальная установка поворачивается затем визированием чрез отверстие *k* и сетку нитей целика *c*,



Черт. 119.

причем трубочка *e* откидывается. По установке гелиотропа трубочка *e* ставится в нормальное положение, зеркало поворачивается и ставится так, чтобы „зайчик“ от солнца освещал дно трубочки и чтобы черное пятнышко от отверстия *k* заняло-бы в трубочке центральное положение (центр пятна примерно совпадал-бы с отверстием в дне трубочки *e*). Гелиотрописту приходится время от времени посматривать внутрь трубочки и как только это темное пятно (от отверстия *k*) уйдет в край дна трубочки,— поправлять положение зеркала. Винт *b*— служит для установки гелиотропа по высоте. В передней части прибора имеется рама *H*, в которую могут вставляться диафрагмы— для регулирования силы света гелиотропа, а также цветные стекла— для сигнализации. Если солнце находится позади, то пользуются добавочным зеркалом *G*, которое укрепляют на перилах сигнала. Свет гелиотропа может быть виден на расстояния до 100—150 км.

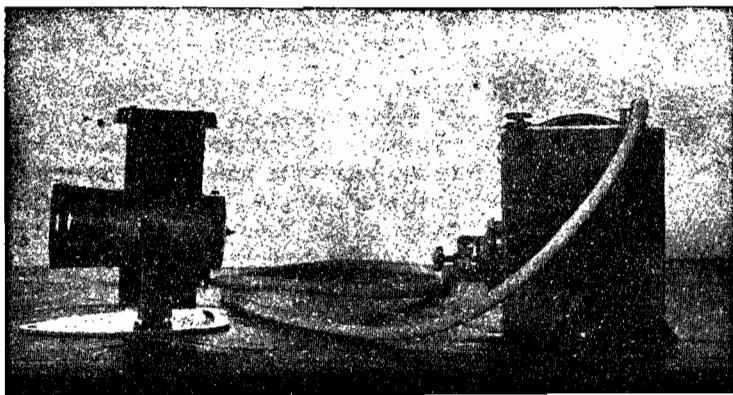
Наблюдения гелиотропов хороши только, если они начинаются не ранее, как за 3—3½ часа до захода солнца. При такой малой продолжительности дневной работы— приходится переходить к ночным наблюдениям, тем более, что солнце светит далеко не каждый вечер. С другой стороны атмосфера ночью более покойна, чем днем; температурные изменения, вызывающие вредные перемены в инструменте, ночью совершаются обычно медленнее и в меньших пределах, чем днем. Поэтому ночные наблюдения широко применяются в современных триангуляциях I-го класса. Для сигнализации служат ацетиленовые фонари. Видимость света фонаря— даже очень сильного— в высокой степени зависит от состояния атмосферы. При благоприятных условиях свет обычно употребляемого в наших работах фонаря можно наблюдать на расстояния до 35—40 км. На черт. 120 изображен фонарь, употребляемый на работах Высшего Геодезического Управления. При очень больших расстояниях пользуются хорошо изготовленным рефлектором (параболическим), в фокусе которого устанавливают очень сильную электрическую лампу.

Имея в виду ночные наблюдения, надлежит в инструментах для триангуляции I класса требовать при их изготовлении целесообразного устройства электрического освещения нитей главной и поверительной трубы и микроскопов при горизонтальном круге.

Стоимость работ значительно возрастает при пользовании гелиотропами и в особенности— фонарями; организация работ также существенно затруд-

няется. Дело значительно облегчается, если выработать и применять телеграфирование световыми сигналами; такое телеграфирование применяется в полном объеме в Америке и выполняется по особой инструкции.

Выше было указано, что ночные наблюдения должны приводить к результатам вообще более точным, нежели дневные. Но кроме того должно указать, что основным условием достижения высокой точности в результатах измерения горизонтальных углов является возможное однообразие условий при наблюдении левого и правого предмета, направления на которые образуют угол. В этом отношении наблюдения световых сигналов представляют большое преимущество: при благоприятных условиях, свет гелиотропа представляется в трубе в виде звезды 1-ой величины, а свет фонаря — в виде



Черт. 120.

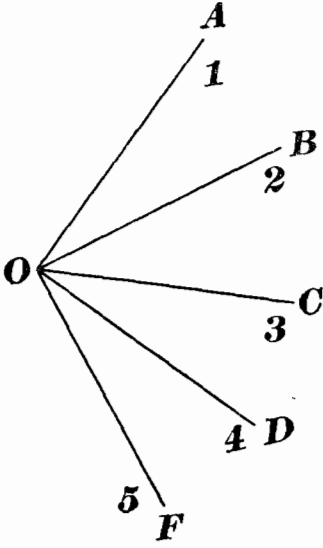
тусклого диска, видимого под углом в  $5''$ — $10''$ ; наведения трубы на такие „звезды“ или „планеты“ производятся с высокою степенью однообразия. Наоборот при наблюдениях визирных цилиндров геодезических сигналов наведение трубы будет зависеть от значительной изменяемости вида этих сигналов вместе с переменами в их освещении, а также от вида того фона, на который проектируется наблюдаемый предмет; здесь несомненно будет сказываться и влияние фаз, так как с перемещением солнца перемещается и раздел света и тени на наблюдаемом предмете, вследствие чего наблюдатель будет намечать вертикальную ось наблюдаемого сигнала по разному, в разные моменты наблюдений.

**43. Измерение отдельных углов по способу Шрейбера.** По разным соображениям, приведенным в конце §-фа, при наблюдениях в триангуляции I класса нередко в каждом отдельном приеме наблюдают направления только на *два предмета*. Такой порядок работы получает название „измерения отдельных углов“. Нам надлежит остановиться сперва на том порядке работы на станции, который при измерениях отдельных углов был впервые применен Гауссом и который называется „*измерением углов во всех комбинациях*“. Пусть (черт. 121) с данной станции  $O$  должны быть наблюдаемы сигналы  $A, B, C, D \dots$ , число которых пусть равно  $n$ . Припишем предметам  $A, B, C, D \dots$  соответственно номера  $1, 2, 3 \dots n$  и будем обозначать *измеренную* величину угла при  $O$  между предметами с номерами  $k$  и  $s$  символом  $(k, s)$  считая угол от направления на  $K$  по ходу часовой стрелки. Допустим, что мы измерили на станции  $O$  углы;



$$\left. \begin{array}{l} (1,2), (1,3), (1,4), (1,5) \dots (1,n) \\ (2,3), (2,4), (2,5) \dots (2,n) \\ (3,4), (3,5) \dots (3,n) \\ (n,n-1) \end{array} \right\} (1)$$

т. е. допустим, что мы измерили все углы, которые могут быть образованы на станции  $O$  при всевозможных комбинированиях направлений на предметы 1, 2, 3 ...  $n$  попарно: очевидно, что число таких углов будет равно  $\frac{n(n-1)}{2}$ , тогда как число необходи-



Черт. 121.

мых для определения углов на станции равно  $n-1$ . Порядок работы на станции, при котором каждый из  $\frac{n(n-1)}{2}$  углов, представленной табличкой (1), наблюдается отдельно от всех остальных углов в определенном числе приемов, постоянном для всех этих углов, и носит название измерения *отдельных углов во всех комбинациях*; обычно полагают, что измерение всех углов таблички (1) одним и тем же числом приемов приводит к равенству весов всех этих углов. Хотя величины (1,2), (1,3), (1,4) ... (3,n), (k,s), (n, n-1) являются каждая разностью непосредственно наблюдаемых при измерении каждого такого угла двух направлений, но погрешности  $v_{1,2}, v_{1,3}, v_{1,4} \dots v_{3,n}, v_{n,n-1}$  этих величин очевидно *независимы* друг от друга и поэтому при уравнивании на станции  $O$  можно рассматривать величины (1,2), (1,3), (1,4) ... (1,n) ... (k,s) как непосредственно наблюдаемые. Уравнивание на станции в случае измерения отдельных углов во всех комбинациях рассмотрим для  $n=5$  и введем в качестве неизвестных в это уравнивание углы  $\angle AOB, \angle AOC, \angle AOD, \angle AOE$ , которые обозначим соответственно чрез  $X, Y, Z$  и  $V$ —имеем, конечно, такие ур-ния погрешностей (число которых равно  $\frac{n(n-1)}{2}$ ):

$X - (1,2) = V_{1,2}$	$Y - X - (2,3) = V_{2,3}$
$Y - (1,3) = V_{1,3}$	$Z - X - (2,4) = V_{2,4}$
$Z - (1,4) = V_{1,4}$	$V - X - (2,5) = V_{2,5}$
$V - (1,5) = V_{1,5}$	
$Z - Y - (3,4) = V_{3,4}$	$V - Z - (4,5) = V_{4,5}$
$V - Y - (3,5) = V_{3,5}$	

Нормальные ур-ния напишутся так:

$$\left. \begin{array}{l} 4 X - Y - Z - V - (1,2) + (2,3) - (2,4) - (2,5) = 0 \\ 4 Y - X - Z - V - (1,3) - (2,3) + (3,4) - (3,5) = 0 \\ 4 Z - X - Y - V - (1,4) - (2,4) - (3,4) + (4,5) = 0 \\ 4 V - X - Y - Z - (1,5) - (2,5) - (3,5) - (4,5) = 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (2)$$



результате измерения отдельных углов во всех комбинациях, зависит от числа  $n$  предметов, наблюдаемых со станции.

Вводя для симметрии углы  $(1,1)$   $(2,2)$   $(3,3)$  ...  $(n,n)$ , мы можем представить формулы (5) еще в таком виде:

$$\left. \begin{aligned}
 [1,2] &= \frac{(1,1) + (1,2) + (1,3) + (1,4) + \dots + (1,n)}{n} \\
 &\quad - \frac{(2,1) + (2,2) + (2,3) + (2,4) + \dots + (2,n)}{n} \\
 [1,3] &= \frac{(1,1) + (1,2) + (1,3) + (1,4) + \dots + (1,n)}{n} \\
 &\quad - \frac{(3,1) + (3,2) + (3,3) + (3,4) + (3,5) + \dots + (3,n)}{n} \\
 [1,k] &= \frac{(1,1) + (1,2) + (1,3) + \dots + (1,k-1) + (1,k) + \dots + (1,n)}{n} \\
 &\quad - \frac{(k,1) + (k,2) + (k,3) + \dots + (k,k-1) + (k,k) + (k,k+1) + \dots + (k,n)}{n}
 \end{aligned} \right\} (6)$$

причем понимается, что  $(2,1) = - (1,2)$ ;  $(k, 2) = - (2,k)$  и т. д.; формулы (6) позволяют, во первых, написать общую формулу для угла  $[i, k]$ , именно:

$$[i, k] = \frac{(i,1) + (i,2) + (i,3) + \dots + (i,i) + (i,i+1) + \dots + (i,n)}{n} - \frac{(k,1) + (k,2) + (k,3) + \dots + (k,k) + (k,k+1) + \dots + (k,n)}{n} \quad (7)$$

которая ясно показывает, что вес угла  $[i,k]$  будет равен  $\frac{m \cdot n}{2}$ . Во вторых, если обозначить:

$$\begin{aligned}
 \frac{(1,1) + (1,2) + (1,3) + \dots + (1,n)}{n} &= I \\
 \frac{(2,1) + (2,2) + (2,3) + \dots + (2,n)}{n} &= II \\
 &\dots \dots \dots \\
 \frac{(k,1) + (k,2) + (k,3) + \dots + (k,n)}{n} &= K
 \end{aligned}$$

то формулы (6) и (7) показывают, что:

$$\left. \begin{aligned}
 [1,2] &= II - I \\
 [1,3] &= III - I \\
 [2,3] &= III - II \\
 &\dots \dots \dots \\
 [i,k] &= K - J
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

Только в том случае, когда результат наблюдений на пункте представляется в виде *одного ряда направлений*, любой угол будет получаться, как разность только *двух* наблюдаемых направлений; только в этом случае вес  $P_{ik}$  угла между направлениями  $i$  и  $k$  будет вычисляться по формуле:

$$\frac{1}{P_{ik}} = \frac{1}{P_i} + \frac{1}{P_k} \dots \dots \dots (A)$$

в которой  $P_i$  и  $P_k$  — веса окончательных направлений  $i$  и  $k$ . [Чтобы яснее это себе представить, нужно обратиться к § 47 и § 65]. При равенстве весов всех направлений, образующих один ряд на пункте, очевидно вес произвольного угла будет *постоянным*, что и нужно достичь в триангуляции I класса.

Очевидно, что величины  $I, II, III, \dots K, \dots N$ , — можно принять за тот *ряд направлений*, который получаем в результате работы на станции при измерении углов во всех комбинациях (полное доказательство этого будет в § 65). Другими словами, работа по способу Шрейбера приводит к тому-же результату, как если-бы мы наблюдали предметы 1, 2, 3, ...  $n$  круговыми приемами, включая в каждый прием все эти предметы. Если ряд чисел  $I, II, III, \dots N$ , мы уменьшим каждое на величину  $I$ , то очевидно, что результат работы на станции по способу Шрейбера представится в виде одного ряда равноточных направлений, имеющих такие числовые значения:

$$0^{\circ}0'0''{.}00, [1,2], [1,3], \dots [1,k] \dots [1,n].$$

Веса этих направлений будут равны  $mn$ . Любой угол  $[i,k]$ , получаемый как разность *двух* соответствующих направлений, имеет вес  $\frac{mn}{2}$ .

Имея эти важные выводы по отношению к результату обработки измерения углов во всех комбинациях, перейдем теперь к *способу Шрейбера*. Способ *Шрейбера* есть собственно частный вид измерения отдельных углов во всех комбинациях. Выше было уже отмечено, что вес каждого оконча-

тельно выведенного на станции угла равен  $\frac{mn}{2}$ . Для того, чтобы при измерении на всех пунктах сети способа измерения отдельных углов во всех комбинациях, веса окончательных углов, выведенных на *разных* станциях, были-бы равны между собою, необходимо потребовать, как это и сделал *Шрейбер*, чтобы произведения  $mn$  для всех пунктов сети оставались-бы *постоянными*. Следуя *Шрейберу* надлежит для первоклассной сети, в которой  $mn = 24$ . Другими словами, применяя способ *Шрейбера*, надлежит руководиться следующей табличкой.

Число $n$ предметов на станции	Число приемов измерения каждого угла	Вес направления (уравновешен.)
2	12	24
3	8	24
4	6	24
5	5	25
6	4	24
7	4	28
8	3	24

В предыдущем уравнивании на станции углов, измеренных во всех комбинациях, т. е. при выводе формул (5) и (6), предполагалось, что погрешности углов  $(1,2), (1,k), (i,k), (i,n)$  независимы между собой; на этом предположении независимости друг от друга величин  $V_{1,2}, V_{1,3}, \dots V_{1,n} \dots$

$V_{i,k}$ ,  $V_{i,n}$  и основывалось несомненно всё предыдущее уравновешивание, предпринятое с целью определения углов [1,2], [1,3], . . . . [i, k]. Если принять в расчет, что при наблюдениях в благоприятных условиях и при применении современных больших теодолитов часть средней ошибки в направлении\*), обусловленная ошибками визирования и отсчетов по микрооцифровым микрометрам, является величиной почти одного порядка с остальной частью той-же средней ошибки в направлении, обусловленной влиянием ошибок делений лимба, то величины  $V_{1,2}$ ,  $V_{1,3}$ , . . . .  $V_{i,k}$ ,  $V_{i,n}$  можно действительно считать независимыми друг от друга только при условии, что штрихи лимба, которые отсчитываются при измерении угла [i,k], не совпадают со штрихами лимба, отсчитываемыми при измерении всякого другого угла из числа стоящих в таблице (1). Отсюда именно и вытекает требование, поставленное Шрейбером в его способе измерения, чтобы „всякое направление наблюдалось-бы при одном и том-же положении лимба только, по возможности, один раз“.

Удовлетворить этому требованию можно, конечно, только при надлежаще обдуманной системе перестановок лимба. При некотором положении лимба из числа  $\frac{n(n-1)}{2}$  углов, указанных таблицей (1), можно определить или  $\frac{n}{2}$  или  $\frac{n-1}{2}$  *непримыкающих* друг к другу углов, при вычислении которых не возникает использования одного и того же отсчета лимба для вывода нескольких углов, т. е. при выводе которых каждый штрих лимба, из числа отсчитанных при измерении этих  $\frac{n}{2}$  или  $\frac{n-1}{2}$  углов, войдет в вычисление лишь одного такого угла; при этом число углов равно  $\frac{n}{2}$ , соответствует четному  $n$ , а число углов  $\frac{n-1}{2}$  — нечетному  $n$ . Разбивая углы таблицы (1)-ой на группы так, что в каждую группу входило-бы или  $\frac{n}{2}$  или  $\frac{n-1}{2}$  *непримыкающих* друг к другу углов и чтобы разные группы не имели-бы общих углов, мы очевидно из числа всех  $\frac{n(n-1)}{2}$  углов можем образовать таких групп:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{n(n-1)}{2} : \frac{n}{2} = n-1 \text{ при } n \text{ четном} \\ \text{и } \frac{n(n-1)}{2} : \frac{n-1}{2} = n \text{ при } n \text{ нечетном} \end{array} \right\} \dots \dots (9)$$

Следовательно, если-бы углы каждой группы измерялись одним приемом, то число перестановок лимба при измерении всех  $\frac{n(n-1)}{2}$  углов было-бы равно числу групп, указываемому формулой (9). Но каждый угол должен быть измерен  $m$  приемами, с перестановкой лимба между приемами на угол  $\beta$ , равный при двух микрооцифрах для отсчитывания горизонтального лимба  $\frac{360^\circ}{2m}$ . Следовательно всех перестановок лимба необходимо будет сделать:

\*) наблюденном в одном приеме.

$m(n-1)$  при  $n$  четном и  $m \cdot n$  — при  $n$  нечетном. Понятно отсюда что при переходе от измерения одной группы (непримыкающих друг к другу) углов к другой, перестановка лимба должна совершаться на угол  $\delta$ , равный:

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{\sigma}{n-1} \text{ при } n \text{ четном} \\ \text{и } \delta &= \frac{\sigma}{n} \text{ при } n \text{ нечетном} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

Результаты всех указанных соображений представляются, следуя Шрейберу, такими табличками начальных отсчетов лимба:

$n = 2$	Угол	П Р И Е М Ы											
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
$m = 12$	1,2	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°

(a)

$n = 3$	Углы	П Р И Е М Ы							
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
$m = 8$	1,2	0°	22,5	45°	67,5	90°	112,5	135°	157,5
	1,3	7,5	30	52,5	75	97,5	120	142,5	165
	2,3	15	37,5	60	82,5	105	127,5	150	172,5

(b)

$n = 4$	Углы	П Р И Е М Ы					
		I	II	III	IV	V	VI
$m = 6$	1,2	0°	30°	60°	90°	120°	150°
	1,3	10	40	70	100	130	160
	1,4	20	50	80	110	140	170
	2,3	20	50	80	110	140	170
	2,4	10	40	70	100	130	160
	3,4	0	30	60	90	120	150

(c)

$n = 5$	Углы	П Р И Е М Ы				
		I	II	III	IV	V
$m = 5$	1,2	0	36	72	108	144
	1,3	7,2	43,2	79,2	115,2	151,2
	1,4	14,4	50,4	86,4	122,4	158,4
	1,5	21,6	57,6	93,6	129,6	165,6
	2,3	14,4	50,4	86,4	122,4	158,4
	2,4	21,6	57,6	93,6	129,6	165,6
	2,5	28,8	64,8	100,8	136,8	172,8
	3,4	28,8	64,8	100,8	136,8	172,8
	3,5	0	36	72	108	144
	4,5	7,2	43,2	79,2	115,2	151,2

(d)

$n = 6$	Углы	П Р И Е М Ы			
		I	II	III	IV
$m = 4$	1,2	0	45	90	135
	1,3	9	54	99	144
	1,4	18	63	108	153
	1,5	27	72	117	162
	1,6	36	81	126	171
	2,3	36	81	126	171
	2,4	27	72	117	162
	2,5	9	54	99	144
	2,6	18	63	108	153
	3,4	0	45	90	135
	3,5	18	63	108	153
	3,6	27	72	117	162
	4,5	36	81	126	171
	4,6	9	54	99	144
	5,6	0	45	90	135

(e)

Римскими цифрами в этих таблицах обозначены номера приемов. Отсчеты, указываемые таблицами, дают „положения“ лимба относительно произвольно выбранного постоянного направления. Другими словами, числа этих таблиц *вовсе не указывают отсчетов на левый предмет из тех двух, которые образуют соответствующий угол*. Если за постоянное направление принять меридиан, то числа таблиц будут указывать те отсчеты, которые должно иметь в соответствующих приемах и при измерении соответствующих

углов, если трубу точно направить на юг. Обычно в практике за постоянное направление, служащее для надлежащей ориентировки лимба, принимают направление на предмет *первый*. Тогда для углов:

$$1,2, 1,3, 1,4, \dots, 1,n$$

числа таблиц будут прямо давать отсчеты на *левый* предмет „1“. Но при измерении угла  $[i, k]$  очевидно отсчет на левый предмет  $i$  будет равен соответствующему числу таблицы *увеличенному на величину угла*  $[1, i]$ . Если напр. имеем четыре направления, причем приближенно углы между ними равны:

$$1,2=55^{\circ} 40'; 1,3=100^{\circ} 20'; 1,4=152^{\circ} 10'$$

то будем иметь такую таблицу отсчетов на *левый* предмет из числа двух, образующих соответственный угол:

		П Р И Е М Ы					
$n=4$	Углы	I	II	III	IV	V	VI
$m=6$	1,2	0°	30°	60°	90°	120°	150°
	1,3	10°	40°	70°	100°	130°	160°
	1,4	20°	50°	80°	110°	140°	170°
	2,3	75° 40'	105° 40'	135° 40'	165° 40'	195° 40'	225° 40'
	2,4	65° 40'	95° 40'	125° 40'	155° 40'	185° 40'	215° 40'
	3,4	100° 20'	130° 20'	160° 20'	190° 20'	220° 20'	250° 20'

Чтобы перейти от чисел таблиц  $(b), (c), (d), (e) \dots$  к числам рабочей таблицы, очевидно нужно знать приближенно (до 10') углы, отсчитываемые от направления на первый предмет.

Теперь поясним получение таблиц  $(c), (d), (e)$ . При  $n=4$ , при одном *положении* лимба можно взять для вывода затем *независимых* друг от друга углов, такие направления:

при первом положении лимба ... 1, 2, 3 и 4 с выводом затем углов 1,2 и 3,4, при втором положении лимба ... 1, 3, 2 и 4 с выводом затем углов 1,3 и 2,4, при третьем положении лимба ... 1, 4, 2 и 3 с выводом затем углов 1,4 и 2,3. Другими словами угол 3,4 наблюдается при той-же ориентировке лимба как угол 1,2; угол 2,4 наблюдается при ориентировке лимба той, которая была при наблюдении угла 1,3; и наконец угол 2,3 и угол 1,4 наблюдаются при одной и той-же ориентировке лимба.

При  $n=5$  при *одном положении* лимба можно наблюдать углы:

I	положение	1,2 и 3,5
II	"	1,3 и 4,5
III	"	1,4 и 2,3
IV	"	1,5 и 2,4
V	"	2,5 и 3,4

Но можно получить и другую комбинацию в таком виде:

I	положение лимба	углы: 1,2 и 4,5
II	"	углы: 1,3 и 2,4
III	"	углы: 1,4 и 3,5
IV	"	углы: 1,5 и 2,3
V	"	углы: 2,5 и 3,4



Тогда таблица (d) переделается для *первого* приема в такую:

1,2	0°
1,3	7,2
1,4	14,4
1,5	21,6
2,3	21,6
2,4	7,2
2,5	28,8
3,4	28,8
3,5	14,4
4,5	0°

При  $n = 6$  табличка (e) Шрейбера составлена в предположении такого порядка наблюдений углов:

I	положение лимба . . . . .	углы: 1,2; 3,4 и 5,6
II	" " . . . . .	углы: 1,3; 2,5 и 4,6
III	" " . . . . .	углы: 1,4; 2,6 и 3,5
IV	" " . . . . .	углы: 1,5; 2,4 и 3,6
V	" " . . . . .	углы: 1,6; 2,3 и 4,5

Очевидно, все положения лимба при измерении  $m$  приемами  $\frac{n(n-1)}{2}$  углов

будут вполне определены, если указать те отсчеты, которые должны быть на *первый* предмет в каждом *первом* приеме при измерении этих  $\frac{n(n-1)}{2}$

углов; но эти отсчеты будут принадлежать ряду чисел:

$$0^\circ, \delta, 2\delta, \dots, (n-1)\delta.$$

Если мы назовем положения лимба, при которых начальные отсчеты\*) в первом приеме измерения угла равны  $0^\circ, \delta^\circ, 2\delta^\circ, 3\delta^\circ, \dots$ , соответственно чрез I, II, III, IV, то правило перестановок лимба в способе Шрейбера может быть представлено еще такой таблицей:

	2	3	4	5	
1	I	II	III	IV	
2		III	IV	V	
3			V	I	(f)
4				II	
5					

в которой счет положений лимба идет непрерывно по строкам и столбцам. При нахождении из этой таблички начального отсчета в первом приеме измерения угла  $[i, k]$  нужно лишь отыскать цифру, стоящую в пересечении строки  $i$  со столбцом  $k$ . Так, при  $n = 5$  для угла  $[2, 5]$  имеем из таблицы положение V и так как  $\delta$  в данном случае равно  $7^\circ.2$ , то в первом приеме измерения угла  $[2, 5]$  при визировании на предмет 2 должны иметь отсчет  $28^\circ.8$  плюс угол 1,2; с другой стороны, так как при  $m = 5, \sigma = 36^\circ$ , то в четвертом приеме измерения угла  $[2, 5]$  отсчет на предмет 2 будет равен  $28,8 + 3 \times 36$  плюс угол 1,2.

\*) т. е. отсчеты на предмет „первый“.

Нужно, впрочем сказать, что непрерывность счета, которая положена в основание составления таблиц ( $f$ ) сохраняется не всегда, не при всяких значениях  $n$ .

При измерении отдельных углов результат в значительной степени менее зависит от прочности установки инструмента и от происходящих с течением времени малых перемен в *постоянных* инструмента, чем при применении способа круговых приемов. Способ *Шрейбера* приводит, кроме этого общего преимущества измерения отдельных углов еще к следующим выгодам.

Измерение направлений круговыми приемами сравнительно редко удается применять так, чтобы наблюдения шли-бы *полными* приемами; не так редко некоторые приемы, из-за переменной и слабой видимости некоторых сигналов, приходится делать *неполными*, с пропусками в них именно плохо видимых сигналов; пропущенные в неполных приемах сигналы наблюдаются затем в отдельных группах приемов. Другими словами, нередко, при применении способа круговых приемов, на данной станции не удается провести наблюдения по какому-нибудь определенному плану и вследствие этого *углы между направлениями на разные сигналы определяются с существенно разной точностью, и кроме того возникают значительные затруднения, при введении такого материала в вычисление сети, что будет доказано в соответствующей главе*. Именно, строгое вычисление сети в этом случае непланового собирания материала на станциях требует уравнивания сети по сложному способу *Бесселя*, что однако практически не выполнимо в сколь-нибудь значительных сетях. Отсюда видно, что применение способа круговых приемов нередко ведет к необходимости, во-первых, выполнять добачочную работу по уравниванию на станциях, и, во-вторых, — отказываться от вполне строгого уравнивания сети — отделяя без основания нахождение поправок *углов на станциях* от нахождения поправок углов в сети \*). Между тем при измерении углов по способу *Шрейбера* программа наблюдений на станции, намечаемая таблицами ( $a$ ), ( $b$ ), ( $c$ ) и ( $d$ ) всегда может быть выполнена, потому что ничто не мешает углы [1,2], [ $i,k$ ], [ $i,n$ ] измерять в любой последовательности, используя время, когда хорошо виден сигнал  $M$ , плохо видимый в остальную часть рабочего дня, именно на измерение углов, в которые этот сигнал входит. Исполнение-же наблюдений согласно таблицам ( $a$ ), ( $b$ ), ( $c$ ) или ( $d$ ) приводит: к полной простоте в обработке материала на станции и к возможности рассматривать результат этой обработки как *один ряд непосредственно наблюдаемых направлений*. Последнее обстоятельство во-первых, позволяет, не нарушая строгости задачи уравнивания сети, сделать уравнивание на станциях — весьма при том простое — отдельно от уравнивания сети, и во-вторых приводит уравнивание сети к легко практически выполнимой задаче уравнивания условных наблюдений (с нахождением поправок направлений).

*Пример обработки на станции наблюдений, исполненных по способу Шрейбера.*

Углы, полученные каждый в среднем из шести приемов:

$$\begin{array}{ll} (1,2) = 1^{\circ} 8'51'',67 & (2,3) = 50^{\circ} 22'39'',44 \\ (1,3) = 51^{\circ} 31'28'',67 & (2,4) = 62^{\circ} 13'41'',77 \\ (1,4) = 63^{\circ} 22'34'',24 & (3,4) = 11^{\circ} 51' 4'',14 \end{array}$$

\*) об этом см. главу об уравнивательных вычислениях в триангуляции.

Выход вероятнейших углов:

[1,2]		[1,3]	
(1,2)	1° 8' 51".67	(1,3)	51° 31' 28".67
(1,2)	51".67	(1,3)	28".67
(1,3) — (2,3)	49".23	(1,2) + (2,3)	31".11
(1,4) — (2,4)	52".47	(1,4) — (3,4)	30".10
[1,2] = 1° 8' 51".26		[1,3] = 51° 31' 29".64	

[1,4]	
(1,4)	63° 22' 34".24
(1,4)	34".24
(1,2) + (2,4)	33".44
(1,3) + (3,4)	32".81
[1,4] = 63° 22' 33".68	

Углы	$v$	$v^2$
1,2	+ 0,41	0,1681
1,3	— 0,97	0,9409
1,4	+ 0,56	0,3136
2,3	+ 1,06	1,1236
2,4	— 0,65	0,4225
3,4	+ 0,10	0,0100

Под  $v$  понимается разность наблюдаемого и уравновешенного (на станции) значения угла.

Так как число всех наблюдаемых углов равно  $\frac{n(n-1)}{2}$ , а число необходимых на станции углов равно  $n-1$ , то число избыточных на станции наблюдений равно:

$(n-1) \left( \frac{n}{2} - 1 \right) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ . Поэтому средняя ошибка любого из наблюдаемых в  $m$  приемах угла равна

$$\sqrt{\frac{2 \sum v^2}{(n-1)(n-2)}}$$

Следовательно, средняя ошибка  $\mu$  наблюденного в  $n$  приемах направления равна

$$\sqrt{\frac{\sum v^2}{(n-1)(n-2)}};$$

Средняя-же ошибка  $M$  окончательного выведенного на станции направления будет равна

$$\sqrt{\frac{\mu}{\frac{n}{2}}}$$

потому что, если принять вес угла, наблюденного в одном приеме, за единицу, то вес окончательно выведенного угла равен  $\frac{mn}{2}$ .

Для нашего примера  $\sum v^2 = 2,9787$

$$\mu = \sqrt{\frac{2,9787}{6}} = \mp 0''.70$$

$$M = \mp 0''.50.$$

При наблюдениях по способу Шрейбера, расхождения в значениях одного и того-же угла, выведенных из разных приемов его наблюдения, не превышают  $\pm 4''$ ; расхождения-же между значениями одного и того-же угла, входящими в вывод его вероятнейшей величины, не должны быть более  $3''$  (т. е. напр. величины (1,4), (1,2) + (2,4), (1,3) + (3,4) не должны различаться более трех секунд).

В настоящее время в триангуляции I класса в С. С. С. Р. пользуются исключительно способом Шрейбера. Один прием измерения угла состоит: из наведения на левый предмет, наведения на правый предмет (вращая при этом алидаду по ходу часовой стрелки), перевода трубы через зенит, наведения на правый предмет и наведения на левый предмет, вращая при этом во втором полуприеме алидаду против хода часовой стрелки. При каждом наведении, отсчитывают четыре раза окулярный микрометр главной трубы и одновременно-же четыре раза окулярный микрометр поверительной трубы; после этого немедленно производят отсчеты по микроскоп-микрометрам горизонтального круга.

Работа на пункте при 4—5 направлениях продолжается — в зависимости от погоды — от 7 до 20 дней.

## ГЛАВА IX.

### Приведение углов к центрам тригонометрических точек.

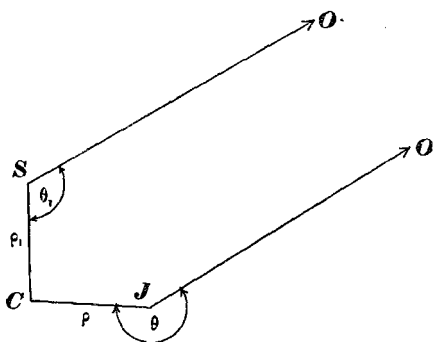
**44. Разные виды приведений и их элементы.** Центр тригонометрического пункта в момент его закладки совпадает с проекцией вершины тригонометрического знака; однако, с течением времени, вследствие оседания пирамиды или сигнала, вершина знака изменяет вообще свое первоначальное положение, бывшее в момент закладки центра. Поэтому при измерениях углов в триангуляции, наблюдая с данного пункта вершины сигналов на смежных пунктах, мы образуем углы между направлениями, которые вообще не проходят через центры этих смежных пунктов, и очевидно, при известных размерах смещений вершин знаков, измеренные значения углов подлежат

исправлениям. Исправлениям такого-же рода подлежат измеренные значения углов и в том случае, если при наблюдении какого-нибудь сигнала трубой визировалась не вершина его визирного цилиндра, а штанга прибитого к нему флага или зеркало гелиотропа (как это часто бывает в сети I класса), и т. п. Поправки, вводимые в измеренные значения углов за несовпадение проекций вершин знаков или вообще наблюдавшихся точек с центрами знаков, — носят название *редукций*, или приведеный с *вершины к центру*.

По разным обстоятельствам приходится иногда становиться с инструментом при измерениях углов *не над центром* знака; такими обстоятельствами могут быть: эксцентричное положение болванки внутренней пирамиды при наблюдениях с двойной пирамиды; загораживание ногами пирамиды некоторых наблюдаемых сигналов; необходимость при использовании колоколен и башен, как знаков триангуляции, вести на них измерения с окон, и т. д. Углы, измеренные со станции, на которой проекция центра инструмента не совпадала с центром знака, подлежат исправлениям; поправки углов в этом случае носят название *центрировок* или приведеный с центра инструмента к центру сигнала. Так как каждый горизонтальный угол есть разность двух горизонтальных *направлений*, то обычно центрировками и редукциями исправляются направления, образующие угол. Для возможности определения величин приведеный, должно знать на каждом тригонометрическом пункте относительное расположение: вершины  $S$  знака, центра  $C$  знака, центра  $J$  инструмента, служившего для измерения углов, и всех наблюдавшихся смежных тригонометрических пунктов; приэтом положение  $S$ ,  $C$  и  $J$  относительно друг друга должно быть определено весьма тщательно, и треугольник  $SCJ$  должен быть по возможности правильно ориентирован относительно пучка направлений, наблюдаемых с данного на смежные пункты; положение-же этих последних пунктов относительно друг друга и точек  $S$ ,  $C$ ,  $J$ , может быть известно приближенно и даже грубо (черт. 122).

Величины, определяющие относительное положение  $C$ ,  $S$ ,  $J$  и дающие ориентировку треугольника  $CSJ$  называются элементами приведеный.

Элементами центрировки называются: расстояние  $JC = \rho$  (черт. 122) и угол  $\theta$   $JC = \theta$ , отсчитываемый *при J* по ходу часовой стрелки от направления  $JO$  на удаленный предмет  $O$ , принимавшийся за начальный при измерении в  $J$  углов, до направления на центр  $C$ . Элементами редукций будут: расстояние  $SC = \rho_1$ , и угол  $\theta_1 = \angle OSC$ , отсчитываемый *при S* по ходу часовой стрелки от направления  $SO$  на предмет  $O$ , принимавшийся за начальный при измерении углов в  $J$  до направления на  $C$ . Вследствие ничтожности  $\rho$  и  $\rho_1$  по сравнению с расстоянием до



Черт. 122.

сигналов  $O$ , направления  $JO$  и  $SO$  можно считать *при выводе*  $\theta$  и  $\theta_1$  между собою параллельными. Углы  $\theta$  и  $\theta_1$  можно отсчитывать и не от направления на сигнал, служивший начальным при измерениях углов в  $J$ : эти углы можно отсчитывать от направления на любой сигнал входящий в серию наблюдений с  $J$ , обозначая лишь всегда — от направления на какой именно предмет  $\theta$  и  $\theta_1$  отсчитываются.

Следует принять за правило на каждой станции при измерении горизонтальных углов определять тщательно величины  $\rho$  и  $\rho_1$  и только на основании такого определения решать вопрос о той малости  $\rho$  и  $\rho_1$  при которой

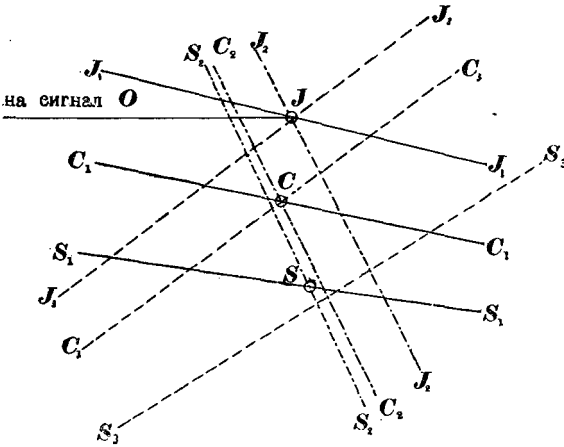
приведения можно считать равными нулю; это в особенности относится к базисным сетям, в которых малейшее уклонение вершины  $S$  от центра знака  $C$  при небольших расстояниях между пунктами сети чувствительно влияет на значения углов.

Необходимо иметь в виду, что введение в измеренные углы центрировок и редуций не должно понижать первоначальной точности этих углов. Другими словами, так как ошибки измеренных значений углов в сети I класса выражаются вообще десятными долями секунды, то ошибки в определении величины приведений в такой сети не должны превышать десятой секунды; так как при  $\rho$  и  $\rho_1$ , равных 2 см, приведения дают  $0''{,}2$ — $0''{,}3$ , то следовательно только при  $\rho$  и  $\rho_1$ , меньших пяти мм, можно пренебрегать приведением. В сетях низших разрядов определение  $\rho$  и  $\rho_1$  должно производиться так же тщательно, как и в сетях I класса: вследствие малых размеров сторон сети влияние ошибок в определении  $\rho$  и  $\rho_1$  здесь возрастает, по сравнению с сетью I класса, значительно более, чем убывает, по сравнению с сетью I-го же класса, точность измерения углов.

**45. Способы определения элементов приведений.** 1) При малых значениях  $\rho$  (меньших 0,6 м) — а это всегда бывает при наблюдениях с двойных пирамид и сигналов, — элементы приведений всего проще и удобнее определять *графическим способом*. Применение этого способа заключается в следующем. Над центром знака устанавливается горизонтально особый центрировочный столик с набитым на него листом картона. Наблюдатель, отходя от центра на расстояние несколько большее высоты сигнала, выбирает место, с которого видны центр знака и центр *главного* инструмента, уже установленного для измерения углов; на таком месте ставится малый теодолит, отлично выверенный ранее. После тщательного приведения вертикальной оси малого теодолита в отвесное положение, наблюдатель и его помощник отмечают на картоне столика следы трех вертикальных плоскостей, проходящих чрез центр теодолита и: чрез вершину знака, центр главного инструмента и центр знака. При этом помощник наблюдателя отмечает первоначально каждую плоскость двумя точками — карандашом, ставя его острие по указаниям наблюдателя. Обычно, каждая из трех указанных плоскостей проектируется (с одной установкой малого теодолита) дважды — при двух положениях трубы теодолита; помощник наблюдателя отмечает след плоскости, получающийся при втором положении трубы точками, рядом с полученными при первом положении трубы; окончательно след каждой плоскости отмечается прямой, прочерченной по линейке и делящей пополам расстояния между рядом стоящими точками, полученными для этой плоскости при первом и втором положении трубы теодолита.

Такое же проектирование вершины знака  $S$ , центра  $J$  главного инструмента и центра  $C$  знака выполняются еще с *двух* иных мест стояния малого теодолита. Очевидно, для определения проекций точек  $S$ ,  $J$  и  $C$  (на плоскости столика) достаточно иметь две станции малого теодолита, с каждой из которых будут отмечены следы вертикальных плоскостей, содержащих точки  $S$ ,  $J$  и  $C$ , причем угол при центре знака между направлениями на эти две станции должен быть близок к  $90^\circ$ . Но для контроля определение проекций точек  $S$ ,  $J$  и  $C$  делается всегда с трех станций малого теодолита, причем направления из  $C$  на эти станции образуют углы около  $120^\circ$ . На чертеже 123 следы на столике, полученные с первой, второй и третьей станций малого теодолита, обозначены соответственно индексами:  $J_1, C_1, S_1, J_2, C_2, S_2, J_3, C_3, S_3$ . Вследствие погрешностей проектирования, прямые  $S_1S_1, S_2S_2, S_3S_3$  не пересекаются в одной точке, а дают небольшой треугольник погрешностей; то же самое приходится сказать относительно прямых  $JJ$  и относительно прямых  $CC$ . Вследствие малого расстояния центра знака по высоте от плө-

скости столика и полной определенности обозначения центра в натуре, треугольник погрешностей, образованный прямыми  $C_1C_1$ ,  $C_2C_2$  и  $C_3C_3$  получается обычно со сторонами, меньшими миллиметра; точно также, вследствие полной определенности отметки в натуре центра главного инструмента, стороны треугольника погрешности, образованного прямыми  $J$ , обычно не превышают 2 мм. Если высота сигнала очень значительна, 40—60 м, или если вершина его обозначена довольно толстым визирным цилиндром, то треугольник погрешностей, образованный прямыми  $SS$ , может получиться со сторонами до 4—6 мм. Окончательные положения проекций точек  $J$  и  $S$



Черт. 123.

принимаются совпадающими со срединами соответственных треугольников погрешностей (если стороны треугольников не превышают указанных пределов). После наметки этих окончательных положений точек  $J$  и  $S$ , они соединяются с проекцией  $C$  прямыми, и затем из проекции  $J$  прочерчивается направление на сигнал  $O$ , входящий в серию наблюдаемых с данного тригонометрического пункта сигналов. (При прочерчивании такого направления можно воспользоваться линейкой с диоптрами). Самое определение  $\rho$  и  $\rho_1$ , делается посредством измерения циркулем (по масштабу) расстояний  $JC$  и  $SC$ , полученных на столике; для определения же  $\theta$  и  $\theta_1$  пользуются транспортиром, измеряя им углы между направлениями  $JO$  и  $JC$ ,  $SO$  и  $SC$ , построенными на столике. Вследствие малости  $\rho_1$ , определение элементов редукций производят почти исключительно указанным графическим способом.

Для контроля, кроме направления на сигнал  $O$ , из  $J$  прочерчивают еще направление на какой-нибудь другой сигнал из числа наблюдавшихся на данном пункте. Следует на центрировочном столике прочерчивать еще помощью ориентир-буссоли направление магнитного меридиана. Если с центрировочного столика не видно ни одного тригонометрического знака, то со столика двойной пирамиды или сигнала при посредстве главного инструмента выставляют вехи в створе тригонометрических знаков.

Почти всегда центр  $C$ —из-за его углубленности в землю не виден с тех постановок малого теодолита, с которых проектируют  $S$  и  $J$ . Поэтому перенесение  $C$  на столик делают с особых трех постановок теодолита, ставя его всего в 5—6 м от центра сигнала.

Указанный-же графический прием применяют и для выноса центра  $C$  знака на столик внутренней пирамиды сложного сигнала или на столик двойной пирамиды. Это делают перед началом наблюдений на пункте, чтобы поставить инструмент „в центре“, (если только проекция  $C$  придется вблизи середины столика сложного сигнала или двойной пирамиды) а так-же, чтобы сообразить при пользовании световыми сигналами такое расположение гелиотропа или фонаря, при котором редукция на гелиотроп или фонарь была-бы равна нулю.

Для установки инструмента точно над точкой, представляющей проекцию центра знака на столик сложного сигнала или двойной пирамиды, пользуются особым центрирным штифтиком с пружиной, который имеется при каждом точном инструменте и который навинчивается снизу на втулку вертикальной оси инструмента.

При установке гелиотропа или ставят его так, чтобы зажимной винт— шуруп  $f$  (черт. 119)—пришелся-бы в вынесенной на столик для инструмента проекции центра знака, или чтобы этот винт был на прямой, проведенной из вынесенной проекции центра  $C$  на тригонометрический пункт, на который будет подаваться свет; если до установки гелиотропа проекция центра знака не вынесена на столик для инструмента, то винт  $f$  гелиотропа ввинчивают в середину столика.

При определении элементов редукции гелиотропа проектируют на центрировочный столик головку винта  $f$ ; при определении элементов редукции фонаря— если он ставился отдельно от гелиотропа,—надлежит проектировать на центрировочный столик центр передней линзы фонаря и обозначать на центрировочном столике то направление, по которому посылался свет фонарем. Но в употребляемых у нас гелиотропах Ваншафа фонарь ставится в особое гнездо в доске гелиотропа, при чем световая ось фонаря совпадает с линией, соединяющей центр зеркала гелиотропа и отверстия в трубочке  $e$  (черт. 119). Поэтому, по существу, элементы редукции для гелиотропа и фонаря при таком устройстве будут одни и те-же.

2) Если расстояние  $\rho$  более 0.6—0,7 м, а проекции точек  $J$  и  $C$  могут быть получены на одной горизонтальной плоскости, то элементы центрировки можно определить *непосредственным* их измерением: после получения проекций  $J$  и  $C$  в одной плоскости, расстояние  $\rho$  между этими проекциями измеряется стальной рулеткой, а для определения  $\theta$  устанавливают тщательно над проекцией  $J$  малый теодолит и измеряют им углы между направлением на точку  $C$  (или на ее проекцию) и направлениями на два сигнала, из числа наблюдавшихся на данном тригонометрическом пункте при измерении с точки  $J$  углов. Непосредственное измерение  $\rho$  и  $\theta$  применяется часто на колокольнях и иногда при наблюдениях с земли на простой пирамиде.

На колокольной вершина знака—середина яблока под крестом,—является в то-же время и его центром. При определении элементов  $\rho$  и  $\theta$  непосредственным измерением здесь прежде всего поэтому приходится определить проекцию  $S$  (или все равно  $C$ ) на полу того яруса, на одном из окон которого помещается для наблюдений углов главный инструмент. Это определение проекции вершины колокольни делается в общем так-же, как и получение проекции  $S$  на центрировочном столике при графическом определении  $\rho$  и  $\theta$ . Но вследствие значительной высоты яруса над землей, здесь приходится станции малого теодолита брать довольно далеко от колокольни, (чтобы видеть два противоположные пролета окон) уходя иногда от нее метров на 80—100; кроме того здесь редко удается осуществить симметрическое расположение трех станций малого теодолита;—наконец, с различных мест середина яблока под крестом намечается различно—и вследствие больших его размеров, и вследствие изменений его вида при разных освещениях. Всё это приводит к тому, что положение проекции вершины колокольни определяется иногда с ошибкой и в целый сантиметр. Следы проектирующих плоскостей обозначают на колокольные забиваемыми в подоконники гвоздиками, которые затем попарно соединяются шнуром. Для определения проекции  $J$  пользуются отвесом, прикрепляемым к станковому винту главного инструмента.

При определении  $\rho$  и  $\theta$  непосредственными измерениями в случае наблюдений с земли на простой пирамиде, приходится лишь тщательно по отвесу



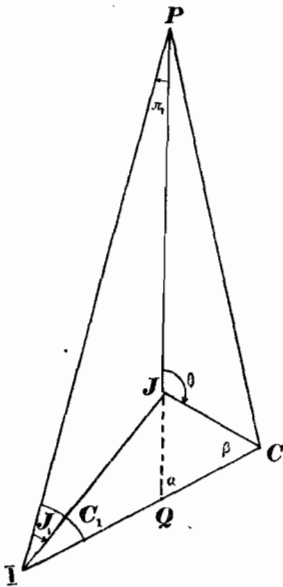
назначить проекцию  $J$  на деревянном коле, забитом в землю под главным инструментом. Непосредственное измерение  $\theta$  можно очевидно, произвести и в том случае, когда  $J$  и  $C$  не могут быть перенесены в одну плоскость, но из  $J$  можно наблюдать  $C$ ; если при этом разность высот  $C$  и  $J$  не велика (менее 4 м), то  $\rho$  можно вычислить по наклонному расстоянию, измеренному от середины горизонтальной оси инструмента до  $C$ , и по измеренному вертикальному углу. Такой способ определения  $\rho$  и  $\theta$  может быть применен при тригонометрическом знаке в виде конуса из камней, или в виде невысокого тура из камней и земли, и т. п.: в таких знаках вершина  $S$  совпадает с центром.

3) Если проекции  $J$  и  $C$  не могут быть получены в одной плоскости, а горизонтальные расстояния до  $J$  от разных точек прилегающей к тригонометрическому пункту местности могут быть легко измерены, то можно применить следующий *аналитический* прием определения  $\rho$  и  $\theta$ .

Пусть на чертеже 124:  $P$ —один из тригонометрических сигналов;  $I$ —место постановки малого теодолита, которым измерены углы:  $PIJ = J_1$  и  $PIC = C_1$ , отсчитываемые по ходу часовой стрелки от направления на  $P$  до соответственных направлений на  $J$  и  $C$ . Назовем далее: 1) чрез  $\pi_1$  угол  $JPI$ , отсчитываемый по ходу часовой стрелки от направления  $PJ$  до направления из  $P$  на место постановки малого теодолита; 2) чрез  $d_1$  измеренное непосредственно расстояние  $IJ$ ; 3) расстояние  $JC$ —чрез  $\rho$  и угол  $PJC$ —чрез  $\theta$ . Расстояние  $d_1$  берется от 10 до 20 м и вследствие малости его по сравнению с расстоянием  $JP$ , угол  $\pi_1$  всегда мал (несколько минут). Зная приблизительно  $JP = D$ , мы можем достаточно точно определить угол  $\pi_1$  по формуле, получаемой из треугольника  $IJP$ :

$$\sin \pi_1 = \frac{d_1}{D} \sin J_1$$

$$(\pi_1)' = \frac{d_1}{D \sin 1'} \cdot \sin J_1 \dots \dots \dots (1)$$



Черт. 124.

Продолжая  $PJ$  до пересечения с  $IC$  в точке  $Q$  и называя в треугольнике  $JQC$  угол при  $Q$  чрез  $\alpha$ , а угол при  $C$  чрез  $\beta$ , имеем:

$$\alpha = \pi_1 + C_1$$

$$\alpha = \theta - \beta$$

$$\beta = \theta - (\pi_1 + C_1)$$

Отсюда:

Из треугольника  $JIC$  пишем:

$$\frac{\rho}{d_1} = \frac{\sin (C_1 - J_1)}{\sin [\theta - (\pi_1 + C_1)]} = \frac{\sin [J_1 - C_1]}{\sin [\pi_1 + C_1 - \theta]}$$

$$\rho \sin [\pi_1 + C_1 - \theta] = d_1 \sin [J_1 - C_1]$$

Обозначая:

$$\pi_1 + C_1 = R_1 \dots \dots \dots (2)$$

$$d_1 \sin [J_1 - C_1] = r_1 \dots \dots \dots (3)$$

Имеем:

$$\rho \sin R_1 \cos \theta - \rho \cos R_1 \sin \theta = r_1 \dots \dots (4)$$

Уравнение (4) доставит каждая станция малого теодолита, с которой определены углы  $J, C$  и расстояние  $d$ ; имея две такие станции, надлежаще выбранные, получим два уравнения для определения двух искомым  $\rho$  и  $\theta$ .

Предполагая действительно две станции малого теодолита, которые назовем чрез I и II, сделаем решение доставленных ими уравнений (4) по способу профессора *Витрама*.

Пусть имеем:

$$\begin{cases} \text{со станции I:} & \left\{ \begin{aligned} J_1, C_1, d_1, \pi_1 &= \frac{d_1 \sin J_1}{D \sin 1'} \\ R_1 &= C_1 + \pi_1; r_1 = d_1 \sin (J_1 - C_1) \end{aligned} \right. \\ \text{со станции II:} & \left\{ \begin{aligned} J_2, C_2, d_2, \pi_2 &= \frac{d_2 \sin J_2}{D \sin 1'} \\ R_2 &= C_2 + \pi_2; r_2 = d_2 \sin (J_2 - C_2) \end{aligned} \right. \end{cases}$$

Обозначим

$$\frac{r_2 + r_1}{2} = \sigma; \quad \frac{R_1 + R_2}{2} = \Sigma; \quad \frac{r_1 - r_2}{2} = \delta; \quad \frac{R_1 - R_2}{2} = \Delta \quad \dots \dots \dots (5)$$

Возьмем далее полусумму и полуразность уравнений (4), написанных для станций I и II:

$$\begin{aligned} \rho \sin R_1 \cos \theta - \rho \cos R_1 \sin \theta &= r_1 \\ \rho \sin R_2 \cos \theta - \rho \cos R_2 \sin \theta &= r_2 \end{aligned}$$

Тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \Delta \sin [\Sigma - \theta] &= \sigma \\ \rho \sin \Delta \cos [\Sigma - \theta] &= \delta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Отсюда:

$$\operatorname{tg} (\Sigma - \theta) = \frac{\sigma}{\delta} \operatorname{tg} \Delta \quad \dots \dots \dots (7)$$

$$\theta = \Sigma - (\Sigma - \theta) \quad \dots \dots \dots (8)$$

$$\rho = \frac{\sigma}{\cos \Delta \sin (\Sigma - \theta)} = \frac{\delta}{\sin \Delta \cos (\Sigma - \theta)} \quad \dots \dots \dots (9)$$

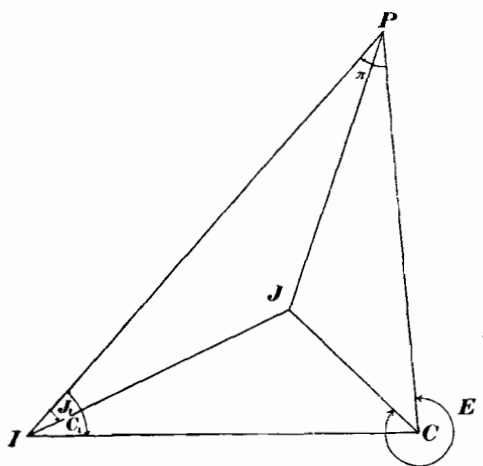
Вычисление всех этих формул ведется четырехзначными логарифмами.

Обыкновенно, при применении изложенного приема делают три станции малого теодолита, причем направления при  $J$  на эти станции образуют углы в  $120^\circ$ . Комбинируя сперва станцию I со станцией II, а затем станцию II со станцией III (или станцию I со станцией III) получают два вывода  $\theta$  и  $\rho$ , из которых при малых их разногласиях, берут среднее.

Рассмотренный прием при аккуратном измерении углов  $J$  и  $C$  и расстояний  $d$  и при удачном выборе станций I, II и III — приводит к наиболее надежным определениям  $\rho$  и  $\theta$ . Его *следует* и даже должно применять, если тригонометрическим знаком служит высокий, хорошо укрепленный столб, или высокий конус из камней, или тур из камней и земли и т. п.; во всех таких знаках вершина, обозначенная точно тем или иным способом, представляет собою и центр знака; хотя в случае конуса или тура можно и должно измерять  $\theta$  непосредственно, а  $\rho$  определить по измеренным наклонному расстоянию и вертикальному углу, но нередко определенное таким путем  $\rho$  не будет

надлежаще точно, и кроме того, вследствие больших значений  $\rho$  при знаках в виде конуса или тура, необходимо  $\rho$  и  $\theta$  определять двумя независимыми и различными способами.

Рассмотренный аналитический прием нередко употребляется, как контролирующий непосредственное измерение  $\rho$  и  $\theta$ , а иногда — взамен графического определения этих величин. Если применять этот прием при наблюдениях на двойной пирамиде или на сигнале, то тогда очевидно придется измерять расстояния от станций малого теодолита до  $C$ , но не до  $J$ . Поэтому, для применения к случаю наблюдений на двойной пирамиде или на сигнале всех выведенных ранее формул, придется в них все величины, относящиеся к  $J$ , считать относящимися к  $C$  и наоборот. В результате такого обращения точки  $J$  в  $C$  мы получим следующие формулы и чертеж 125 к ним:



Черт. 125.

$$IC = d_1$$

$$\pi_1 = \angle CPI = \frac{d_1}{D} \cdot \frac{\sin C_1}{\sin 1'}$$

$$d_1 \sin (C_1 - J_1) = r_1$$

$$J_1 + \pi_1 = R_1$$

$$\frac{r_2 + r_1}{2} = \sigma; \quad \frac{R_1 + R_2}{2} = \Sigma; \quad \frac{r_1 - r_2}{2} = \delta; \quad \frac{R_1 - R_2}{2} = \Delta$$

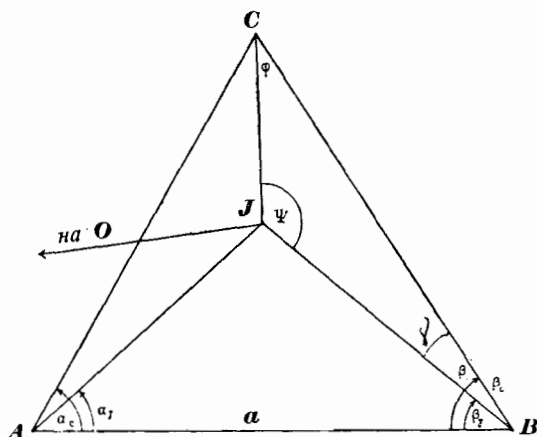
$$\operatorname{tg} (\Sigma - E) = \frac{\sigma}{\delta} \operatorname{tg} \Delta$$

$$\rho = \frac{\sigma}{\cos \Delta \sin (\Sigma - E)} = \frac{\delta}{\sin \Delta \cos (\Sigma - E)}$$

Угол  $E$ , вычисляемый по этим формулам, равен углу при  $C$ , отсчитываемому от направления на  $P$  по ходу часовой стрелки, до направления на  $J$ ; — в такой угол обращается  $\theta$  если точка  $J$  заменяется точкой  $C$ ; очевидно, что

$$\theta = E \pm 180^\circ$$

4) Если точки  $J$  и  $C$  не могут быть спроектированы на одну горизонтальную плоскость, и с точек местности, прилегающей к тригонометрическому пункту, нельзя измерить расстояний ни до  $J$ , ни до  $C$  — то приходится поступать так (черт. 126): выбрав на местности точки  $A$  и  $B$ , с каждой из которых видны  $J$  и  $C$ , измеряют базис  $AB$  и углы  $BAC = \alpha_c$ ;  $BAJ = \alpha_j$ ;  $ABJ = \beta_j$ ,  $ABC = \beta_c$ ;



Черт. 126.

$$BAC = \alpha_c; \quad BAJ = \alpha_j; \quad ABJ = \beta_j, \quad ABC = \beta_c;$$

затем в точке  $J$  измеряют угол между направлением на сигнал  $O$  и направлением на точку  $B$  (или на  $A$ ); по этим данным можно, конечно, *вычислить*  $\rho$  и  $\theta$ . Обозначая всегда в треугольнике  $CJB$  угол при  $C$  чрез  $\varphi$ , а угол при  $J$  — чрез  $\psi$ , имеем такие формулы:

$$m_c = \frac{\sin \alpha_c}{\sin (\alpha_c + \beta_c)}; \quad m_j = \frac{\sin \alpha_j}{\sin (\alpha_j + \beta_j)}; \quad \gamma = \angle CBJ = \beta_c - \beta_j$$

$$tg \mu = \frac{m_c}{m_j}; \quad \frac{1}{2} (\varphi + \psi) = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$$

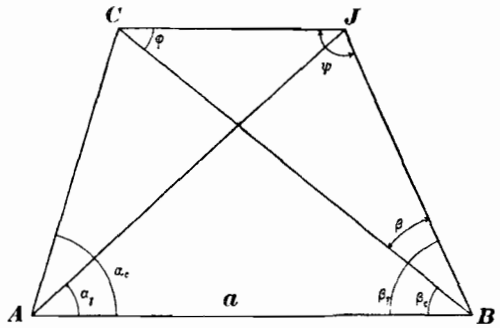
$$tg \frac{1}{2} (\varphi - \psi) = ctg (45^\circ + \mu) tg \frac{1}{2} (\varphi + \psi)$$

$$\rho = \frac{m_j}{\sin \varphi} \cdot a \sin \beta = \frac{m_c}{\sin \psi} \cdot a \sin \beta$$

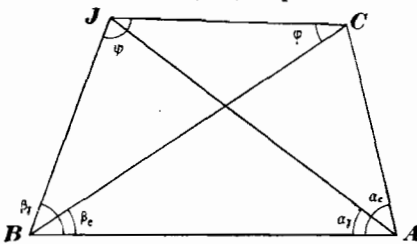
В этих формулах:  $m_c$ ,  $m_j$  и  $\mu$  — вспомогательные величины, угол  $\gamma$  — всегда положителен, т. е. он вычисляется или как  $\beta_c - \beta_j$  или как  $\beta_j - \beta_c$ ; вывод формул состоит из определения  $BC$  и  $BJ$ , и из нахождение в треугольнике  $CJB$  полуразности углов  $\psi$  и  $\varphi$ . По углу  $\psi$ , по углу при  $J$  между направлениями на сигнал  $O$  и на точку  $B$  и по составленному от руки чертежу расположения точек  $A, B, J, C$  — легко сообразить угол  $\theta$ .

Чертежи 127, 128, 129 относятся к еще трем возможным случаям, расположения  $AB$  относительно  $CJ$ .

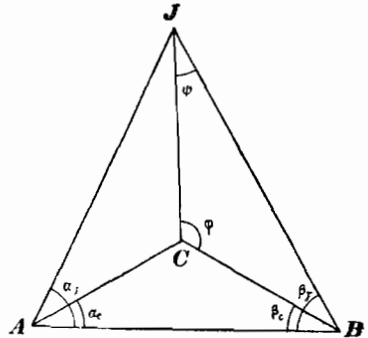
Рассмотренный прием определения  $\rho$  и  $\theta$  применяется при наблюдениях на колокольнях и на башнях, если вершину колокольни или башни *нельзя* спроектировать на пол яруса, на котором находится главный инструмент.



Черт. 127.



Черт. 128.



Черт. 129.

5) Бывают такие сложные случаи определения  $\rho$  и  $\theta$ , что ни один из указанных приемов не может быть применен; в этих случаях приходится составлять малую вспомогательную триангуляцию, связующую некоторый базис с точками  $C$  и  $J$ . Эти случаи обычно возникают в больших городах.

Вслед за сим приводится два примера аналитического определения элементов приведений.

ПРИМЕР 1-й НА АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ЦЕНТРИР

Пирамида Емля.

ФОРМУЛЫ:

$$\pi_1 = \frac{d_1 \sin C_1}{D \sin 1''}; \quad \pi_2 = \frac{d_2 \sin C_2}{D \sin 1''}; \quad \pi_3 = \frac{d_3 \sin C_3}{D \sin 1''}$$

$$R_1 = J_1 + \pi_1; \quad R_2 = J_2 + \pi_2; \quad R_3 = J_3 + \pi_3$$

$$\frac{R_1 + R_2}{2} = \Sigma \quad \frac{R_1 + R_3}{2} = \Sigma'$$

$$\frac{R_1 - R_2}{2} = \Delta \quad \frac{R_1 - R_3}{2} = \Delta'$$

$$d_1 \sin (C_1 - J_1) = r_1; \quad d_2 \sin (C_2 - J_2) = r_2; \quad d_3 \sin (C_3 - J_3) =$$

$$\frac{r_1 + r_2}{2} = \sigma \quad \frac{r_1 + r_3}{2} = \sigma'$$

$$\frac{r_1 - r_2}{2} = \delta \quad \frac{r_1 - r_3}{2} = \delta'$$

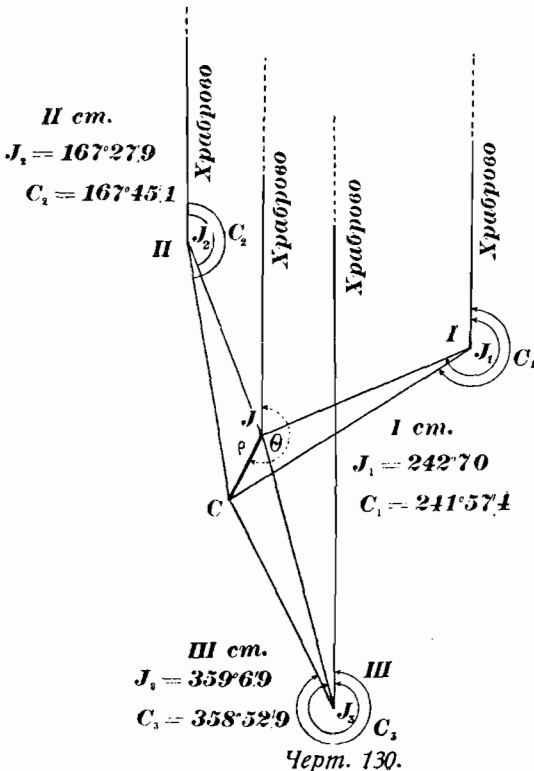
$$\rho \cos \Delta \sin (\Sigma - E) = \sigma \quad \operatorname{tg} (\Sigma - E) = \frac{\sigma}{\delta} \operatorname{tg} \Delta$$

$$\rho \sin \Delta \cos (\Sigma - E) = \delta$$

$$E = \Sigma - (\Sigma - E); \quad \theta = E \pm 180^\circ$$

$$\rho = \frac{\sigma}{\cos \Delta \sin (\Sigma - E)} = \frac{\delta}{\sin \Delta \cos (\Sigma - E)}$$

Вычисления по этим формулам приведены на следующей странице



	I	II	I	III
d	20.120	20.087	20.120	19.896
$J$	$242^{\circ} 7'.0$	$167^{\circ} 27'.9$	$242^{\circ} 7'.0$	$359^{\circ} 6'.9$
C	$241^{\circ} 57'.4$	$167^{\circ} 45'.1$	$241^{\circ} 57'.4$	$358^{\circ} 52'.9$
$C - J$	$-0^{\circ} 9'.6$	$+0^{\circ} 17'.2$	$-0^{\circ} 9'.6$	$-0^{\circ} 14'.0$
$\pi$	$-6'.8$	$+1'.5$	$-6'.8$	$-0'.1$
$\lg \pi$	0.7962 <i>n</i>	0.1764	0.7962 <i>n</i>	9.1360 <i>n</i>
$\lg k$	9.5468	9.5468	9.5468	9.5468
$\lg \sin C$	9.9458 <i>n</i>	9.3267	9.9458 <i>n</i>	8.2904 <i>n</i>
$\lg d$	1.3036	1.3029	1.3036	1.2988
$\lg \sin (C - J)$	7.4460 <i>n</i>	7.6993	7.4460 <i>n</i>	7.6101 <i>n</i>
$\lg r$	8.7496 <i>n</i>	9.0022	8.7496 <i>n</i>	8.9089 <i>n</i>
R	$242^{\circ} 0'.7$	$167^{\circ} 29'.4$	$242^{\circ} 0'.7$	$359^{\circ} 6'.8$
r	-0.0562	+0.1005	-0.0562	-0.0811
$\Sigma$	$204^{\circ} 45'.1$		$300^{\circ} 33'.6$	
$\Delta$	$37^{\circ} 15'.6$		$-58^{\circ} 33'.0$	
$\sigma$	+0.0221		-0.0686	
$\delta$	-0.0783		+0.0125	
$\lg \sigma$	8.3444		8.8363 <i>n</i>	
$\delta \text{on } \lg \delta$	1.1062 <i>n</i>		1.9031	
$\lg \text{tg } \Delta$	9.8812		0.2135 <i>n</i>	
$\lg \text{tg } (\Sigma - E)$	9.3318 <i>n</i>		0.9529	
$\Sigma - E$	$167^{\circ} 53'.0$		$263^{\circ} 38'.4$	
E	$36^{\circ} 52'.1$		$36^{\circ} 54'.6$	
$\theta$	<u><math>216^{\circ} 52'.1</math></u>		<u><math>216^{\circ} 54'.6</math></u>	
$\lg \sigma$	8.3444		8.8363 <i>n</i>	
$\lg \text{Sec } \Delta$	0.0991		0.2825	
$\delta \text{on } \lg \sin (\Sigma - E)$	0.6780		0.0027 <i>n</i>	
$\lg \rho$	9.1215		9.1215	

ПРИМЕР 2-ой—ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ЦЕНТРИРОВКИ С БАЗИСОВ:

колокольня Сокольников—северное окно.

ФОРМУЛЫ:

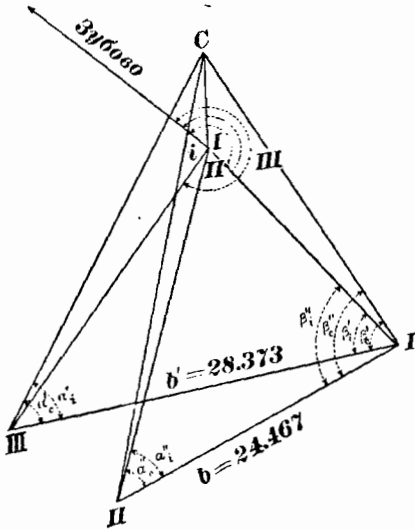
$$m_c = \frac{\sin \alpha_c}{\sin (\alpha_c + \beta_c)}; \quad m_i = \frac{\sin \alpha_i}{\sin (\alpha_i + \beta_i)}; \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{m_c}{m_i};$$

$$\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma; \quad \gamma = \text{углу } СВJ = \beta_c - \beta_i \text{ (или } \beta_i - \beta_c \text{ если } \beta_i > \beta_c)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \operatorname{ctg} (45 + \mu) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi + \psi)$$

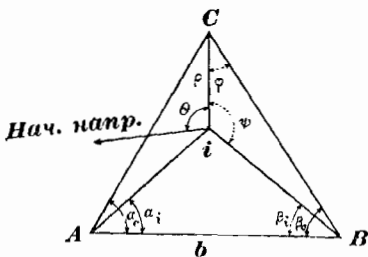
$$\rho = \frac{m_i}{\sin \varphi} b \sin \gamma = \frac{m_c}{\sin \psi} b \sin \gamma.$$

Угол  $\theta$  соображается по углу  $\psi$  и по углу между направлением на начальный предмет и на точку В.



ДА Н Н Н Е:

Базис I—II	Базис I—III
$\alpha''_c = 50^\circ 9'.2$	$\alpha'_c = 52^\circ 35'.5$
$\alpha''_i = 48^\circ 41'.4$	$\alpha'_i = 50^\circ 4'.0$
$\beta''_c = 84^\circ 1'.0$	$\beta'_c = 68^\circ 17'.7$
$\beta''_i = 81^\circ 46'.2$	$\beta'_i = 66^\circ 3'.0$



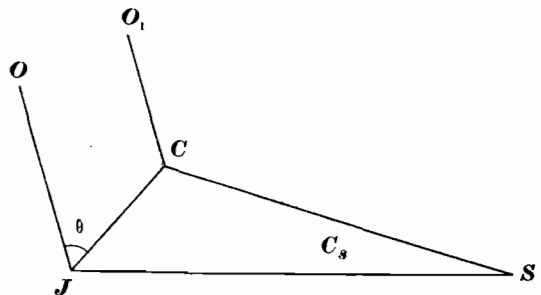
Черт. 131.

- Угол: Зубово—J—станц. I =  $197^\circ 51'.9$
- базис I—II = 24.467; базис I—III = 28.373
- Угол: Зубово—J—станц. II =  $247^\circ 24'.2$
- Угол: Зубово—J—станц. III =  $261^\circ 45'.0$ .

Вычисления по приведенным формулам на следующей странице.

	I—II	I—III		I—II	III
$\alpha_c$	50° 9'.2	52° 35'.5	$\alpha_i$	48° 41'.4	50° 4'.0
$\beta_c$	84° 1.0	68° 17.7	$\beta_i$	81° 46.2	66° 3'.0
$\alpha_c + \beta_c$	134° 10.2	120° 53.2	$\alpha_i + \beta_i$	130° 27.6	116° 7'.0
$lg \sin \alpha_c$	9.88523	9.90000	$lg \sin \alpha_i$	9.87572	9.88468
$\text{don } lg \sin (\alpha_c + \beta_c)$	0.14431	0.06642	$\text{don } lg \sin (\alpha_i + \beta_i)$	0.11870	0.04677
$lg m_c$	0.02954	9.96642	$lg m_i$	9.99442	9.93145
$lg m_i$	9.99442	9.93145	$lg \rho$	0.35429	0.35404
$lg \operatorname{tg} \mu$	0.03512	0.03497	$\text{don } lg \sin \varphi$	0.37797	0.37669
$\mu$	47° 18' 51"	47° 18' 16"	$lg m_i$	9.99442	9.93145
$lg \operatorname{ctg} (45^\circ + \mu)$	8.60650 <i>n</i>	8.60468 <i>n</i>	$lg b$	1.38859	1.45291
$lg \operatorname{ctg} \gamma/2$	1.70756	1.70788	$lg \sin \gamma$	8.59331	8.59299
$lg \operatorname{tg} 1/2 (\varphi - \psi)$	0.31406 <i>n</i>	0.31256 <i>n</i>	$lg m_c$	0.02954	9.96642
$1/2 (\varphi - \psi)$	-64° 7'.0	-64° 2'.3	$\text{don } lg \sin \psi$	0.34285	0.34170
$1/2 (\varphi + \psi)$	88 52.6	88 52.6	$lg \rho$	0.35429	0.35402
$\varphi$	24° 45'.6	24° 50'.3	$\rho$	2.261	2.260
$\psi$	152 59.6	152 54.9	Среднее		
	197 51.9	197 51.9	$\rho = 2.260$		
$\theta$	44 52.3	44 57.0	$\theta_{зубово} = 44^\circ 54'.6$		

**46. Вычисление центрировок и редуций.** Понимая под *направлением* на предмет *S* среднее из отсчетов по верньерам на горизонтальном лимбе при наведении трубы теодолита на этот предмет, будем называть числовое значение направления на *S* чрез *M<sup>S</sup>*. Если центр инструмента (черт. 132) помещался в точке *J*, а среднее из отсчетов по верньерам было равно нулю, когда труба теодолита была направлена по *JO*, то *M<sup>S</sup> = ∠OJS* \*). Будем называть направлением на *S*, приведенным



Черт. 132.

\*) Отсчитываемому от *JO* по ходу часовой стрелки.



к центру сигнала  $C$  то, которое было-бы получено при наблюдениях, если-бы центр инструмента совпадал с  $C$ , а лимб был-бы ориентирован точно так же, как и при наблюдениях из  $J$ . Очевидно, что такое приведенное направление будет измеряться углом  $O_1CS$  причем  $CO_1$  параллельно  $JO$ , так как при одинаковой ориентировке лимба в  $C$  и в  $J$  равенство нулю среднего из отсчетов по верньерам при наблюдениях в  $C$  будем иметь, когда труба инструмента расположена по направлению  $CO_1$ , параллельному  $JO$ . Величина приведения, т. е. та поправка, которую надо *прислать* к  $M^S$ , чтобы получить *приведенное* к центру  $C$  направление на  $S$ , будет равна углу  $CSJ$  и для случая, представленного чертежом 132, будет положительна. Называя: угол  $CSJ$  чрез  $c_s$ ,  $CS$  чрез  $d_s$ , угол  $OJC$  отсчитываемый от направления  $JO$  по ходу часовой стрелки, чрез  $\theta$  имеем из треугольника  $CJS$ :

$$\frac{\sin c_s}{\sin (M^S - \theta)} = \frac{\rho}{d_s}$$

или вследствие малости угла  $c_s$ :

$$c_s'' = \frac{\rho}{d_s \sin 1''} \sin (M^S - \theta) \dots \dots \dots (k)$$

Выведенная формула для  $c_s$  является общей, т. е. неизменяющей своего вида при любых значениях  $M^S$  и  $\theta$ ; поправка или центрировка  $c_s$ , рассчитанная по этой формуле, всегда алгебраически прислается к направлению наблюдаемому (из  $J$ ) чтобы получить *приведенное* направление. Направление  $JO$  называется *нулевым* направлением. Понятно, что изменяя это нулевое направление, мы будем изменять  $M$  и  $\theta$  на одну и ту-же величину, вследствие чего  $c$  будет оставаться постоянной. Если наблюдая из  $J$  сигналы  $A, B, C, D, \dots$ , мы получили для направлений на них значения  $M^A, M^B, M^C, M^D$ , то разности:

$$M^A - M^A, M^B - M^A, M^C - M^A, M^D - M^A$$

назовем соответственно чрез  $M_A^A, M_A^B, M_A^C, M_A^D$ ; эти разности суть направления, которые мы получили-бы, если бы при наблюдениях нулевое направление  $JO$  совпадало-бы с направлением на сигнал  $A$ . Обычно результаты наблюдений на станции  $J$  выражают именно в виде чисел  $0, M_A^B, M_A^C, M_A^D$ , т. е. в виде направлений, отнесенных к *нулевому* направлению на начальный предмет  $A$ . Поэтому и под  $\theta$  понимают угол, отсчитываемый от луча на тот сигнал, для которого направление принимается равным нулю при выводе направлений на все остальные наблюдаемые из  $J$  сигналы, причем угол,  $\theta$  считается по ходу часовой стрелки до направления на  $C$ . На основании сказанного, следует формулу (k) переписать так:

$$c_s'' = \frac{\rho}{d_s \sin 1''} \sin (M_A^S - \theta_s) \dots \dots \dots (l)$$

т. е. указать значками  $A$ , что  $M^S$  и  $\theta$  отсчитываются от направления с  $J$  на сигнал  $A$ .

Если на данном пункте  $P$  проекция  $S$  вершины знака (черт. 133) не совпадает с  $C$ , то направление, наблюдаемое с другого тригонометрического пункта  $N$  на  $P$ , подлежит исправлению или редукции на угол  $r_P$ . Назовем чрез  $d_P$  расстояние  $NC$  и чрез  $\alpha$  угол  $NSC$ ; имеем:

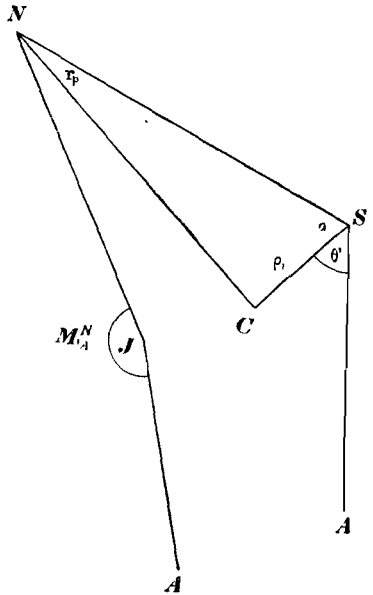
$$r_P'' = \frac{\rho_1}{d_P \sin 1''} \sin \alpha$$

Если при измерении углов на пункте  $P$  центр инструмента находился в  $J$

и направление на сигнал  $A$  принималось за нулевое, то угол  $AJN$ , отсчитываемый по ходу часовой стрелки от  $JA$  будет известен и равен  $M_A^N$ . Приняв угол  $ASN$  равным  $M_A^N$ , мы имеем.

$$r_P'' = \frac{\rho_1}{d_P \sin 1''} \sin (M_A^N - \theta_A') \dots \dots \dots (m)$$

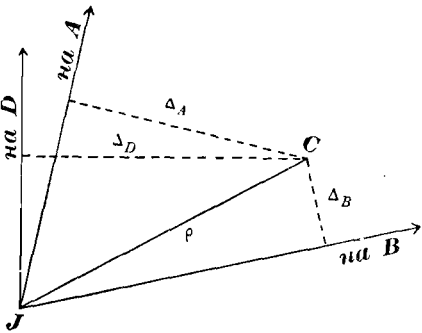
Причем под  $\theta_A'$  понимается угол, отсчитываемый от нулевого направления на сигнал  $A$  по ходу часовой стрелки до направления на  $C$ . Допущение равенства угла  $ASN$  с  $M_A^N$  вследствие малого значения  $r_P$  не ведет к ощутительной погрешности в правой части (m). Редукция  $r_P$ , вычисляемая по формуле (m), должна всегда алгебраически прибавляться для приведения направления, наблюдаемого на вершину знака, к направлению на центр знака. В формуле центрировки (l) и в формуле редукции (m) входят расстояния  $d$  между пунктами сети. Вследствие малых значений поправок  $s$  и  $r$  они учитываются достаточно точно с грубыми, предварительными значениями сторон треугольников сети. Чем меньше  $\rho$  и чем больше  $d$ , — тем грубее можно знать величины  $d$ . Для получения достаточно точных для расчета  $s$  и  $r$  значений  $d$ , можно образовать треугольники с углами не приведенными к центрам, если  $\rho < 0.5$  м; при  $\rho > 0.5$  м приходится сперва подсчитать на соответственных станциях грубые значения  $s$  с значениями  $d$ , взятыми с чертежа сети, и, по исправлении углов такими грубыми значениями  $s$  образовать, с исправленными таким образом углами, треугольники для определения длин сторон  $d$ . В триангуляциях I и II класса центрировки и редукции подсчитывают с сотыми долями секунды.



Черт. 133.

Вывод формул (l) и (m) основывается на малости  $\rho$  по сравнению с  $d$ ; следует избегать  $\rho$ , больших двух метров.

При определении приведений необходимо тщательно контролировать как самое определение элементов приведений, так и вычисление приведений. Поэтому надлежит элементы приведений на каждой станции определять двумя различными способами. Контроль-же вычислений хорошо достигается следующим образом. Приняв направление на начальный предмет  $A$  за меридиан, на листе бумаги (чертеж



Черт. 134.

134), при взятой произвольно на этом меридиане точке  $J$ , строят транспортиром направления на предметы  $B, D$  и т. д., а по углу  $\theta$  — направления на центр сигнала  $C$ . Отложив в крупном масштабе величину  $\rho$  на линии  $JC$  (напр. в масштабе  $\frac{1}{50}$ , если  $\rho$  около двух метров, или в масштабе  $\frac{1}{10}$ , если

$\rho$  менее 0,4 м) получают точку  $C$ , из которой опускают и измеряют перпендикуляры  $\Delta_B, \Delta_A, \Delta_D \dots$  на все наблюдаемые из  $J$  направления. Очевидно:

$$c''_A = -\frac{\Delta_A}{d_A \sin 1''}; \quad c''_B = +\frac{\Delta_B}{d_B \sin 1''}$$

В этих формулах  $d_A, d_B \dots$  определяют по чертежу сети. Знак  $+$  приписывается, если  $C$  (центр сигнала) лежит *влево* от направления, знак минус — если  $C$  лежит *вправо* от направления.

Так как в огромном большинстве случаев  $\rho$  и  $\theta$  известны во время самых наблюдений, то указанный прием вычисления центрировок следует рекомендовать исполнять во время *полевой* кампании, параллельно с измерением углов. Вычисленные указанным способом центрировки дадут возможность еще во время полевой кампании судить об угловых невязках в треугольниках триангуляции; затем, очевидно, этим вычислением устранится в зимнее время надобность в приближенном расчете центрировок на станциях, где  $\rho$  значительно, и наконец, окончательные значения центрировок должны будут дать значения их, отличающиеся не более, как на  $0''.2$  от вычисленных указанным графическим путем.

## ГЛАВА X

### Уравнительные вычисления в тригонометрической сети.

**47. Общие соображения.** Координаты первых двух точек  $A$  и  $B$  триангуляции не требуют для своего определения *умовых* измерений в сети: если триангуляция рассматривается расположенной на эллипсоиде, то для определения точки  $A$  служат выведенные из астрономических наблюдений ее широта и долгота, а для определения точки  $B$  — астрономические координаты точки  $A$ , длина основной стороны  $AB$  и астрономический азимут направления  $AB$ ; если же триангуляция считается расположенной на плоскости, то плоские координаты  $A$  или принимаются произвольными, или для них берут значения, выведенные из вычисления ранее составленной триангуляции в прямоугольных сферических координатах, а координаты точки  $B$  определяют по принятым координатам  $A$ , по длине стороны  $AB$  и по азимуту направления  $AB$ , выведенному из астрономических наблюдений или взятому из ранее составленной триангуляции. Таким образом, если триангуляция состоит из  $n$  точек, считая и конечные пункты основной ее стороны  $AB$ , — то при помощи измерений углов в сети приходится определять положение  $n - 2$  точек относительно точек  $A$  и  $B$  и относительно друг друга. Очевидно, что положение каждой из этих  $n - 2$  точек определяется двумя углами, и, следовательно, для построения триангуляции с  $n$  точками необходимо измерить в ней  $2n - 4$  угла. Но обычно, число измеренных углов превышает  $2n - 4$ ; мы всегда имеем в сети избыточно-измеренные углы, сверх необходимого числа  $2n - 4$ .

Эти избыточно измеренные углы служат, во-первых для обнаружения промахов, возможных в большой работе как при наблюдениях, так и при вычислениях. (При вычислениях сети промахи возможны при расчете привеедений, при выписке значений углов из журналов наблюдений и т. п.; при наблюдениях можно ошибиться при определении элементов приведений, а также при наблюдениях удаленных и плохо видимых сигналов случается принимать за тригонометрический сигнал предмет, похожий на него по вид и усматриваемый почти в том же направлении).







ное и в каждую группу входило более двух предметов, то результат всех этих наблюдений представляется собственно в виде *углов*, отсчитываемых от общего всем группам направления. Если в первой группе были получены в среднем направления  $A_1, B_1, C_1$ ; во второй —  $A_2, D_2, E_2$ ; в третьей —  $A_3, F_3, H_3$ , то значения этих углов, получаемых в результате работы на станции, будут такие:

угла между $A$ и $B$ . . . . .	$B_1 - A_1 = \beta$
" " $A$ и $C$ . . . . .	$C_1 - A_1 = \gamma$
" " $A$ и $D$ . . . . .	$D_2 - A_2 = \delta$
" " $A$ и $E$ . . . . .	$E_2 - A_2 = \varepsilon$
" " $A$ и $F$ . . . . .	$F_3 - A_3 = \lambda$
" " $A$ и $H$ . . . . .	$H_3 - A_3 = \mu$

Отличие второго случая от первого заключается между прочим в том, что вес  $P_Z$  угла между  $C$  и  $D$  в первом случае будем вычислять по формуле:

$$\frac{1}{P_Z} = \frac{1}{P_C} + \frac{1}{P_D} \quad (P_C \text{ и } P_D \text{ веса направлений } C \text{ и } D), \text{ а во}$$

втором случае по формуле:

$$\frac{1}{P_Z} = \frac{1}{P_{D_2}} + \frac{1}{P_{A_2}} + \frac{1}{P_{C_1}} + \frac{1}{P_{A_1}}$$

Однако, если направление на общий сигнал  $A$  наблюдалось значительно точнее, чем направления на все прочие сигналы, то тогда в рассматриваемом случае можно результат работы на станции считать за *ряд направлений*, числовые значения которых будут соответственно:

$$0^\circ 0' 0'' . 0, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \lambda, \mu$$

*Третий случай.* Пусть направления на предметы  $A, B, C, D, E, F$  с пункта  $O$  наблюдались *неполными* приемами и в совершенно произвольном порядке, напр., пусть получены такие результаты:

Из первого приема:	$A_1, B_1, C_1, D_1$ . . . . .	
" второго "	$A_2, B_2, - D_2$ . . . . .	
" третьего "	$- B_3, C_3, - E_3, F_3$	(S)
" четвертого "	$A_4, - C_4, D_4, - F_4$	

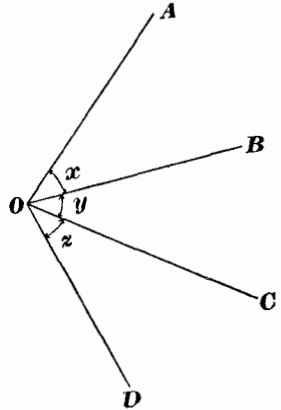
и т. д.

или пусть образовались *группы* приемов, причем в каждый прием данной группы входили одни и те-же предметы, но в разных группах приемов наблюдались различные предметы и общее направление в группе первой и второй было иное, чем в группах первой и третьей и т. д.; или пусть в разных группах имелось не одно, а несколько общих направлений. В рассматриваемом случае *вообще* результаты наблюдений на тригонометрическом пункте не могут быть сведены в одно целое в виде *одного* ряда направлений  $A_m, B_m, C_m, D_m$  . . . . .  $H_m$ , которые можно было-бы рассматривать за непосредственно наблюдаемые величины.

*Пример.* Предметы  $A, B, C, D$  были наблюдаемы в двух группах приемов: в первой группе шестью приемами наблюдались  $A, B, C, D$ ; во второй группе — шестью-же приемами наблюдались  $A$  и  $C$ . Результаты этих наблюдений пусть оказались такие:

Из 1 груп.;  $A_1 = 0^{\circ}0'0''.0$ ,  $B_1 = 20^{\circ}4'12''.0$ ;  $C_1 = 40^{\circ}4'30''.0$ ,  $D_1 = 80^{\circ}6'58''.0$   
 „ 2 „ „  $A_2 = 0^{\circ}0'0''.0$   $C_2 = 40^{\circ}4'32''.2$

*Четвертый случай.* На данном тригонометрическом пункте  $O$  наблюдались *отдельные углы, независимо друг от друга*. Другими словами, в каждом отдельном приеме наблюдались только *два* предмета, причем после определения из некоторого числа приемов угла  $AOB$ , (черт. 135) измерили тем-же или иным числом приемов угол  $COD$ , затем—угол  $BOC$ , потом угол  $AOC$  и т. д. По существу (если только не считать случая измерения углов способом повторения) этот 4 случай есть частный вид случая третьего, но так как ошибки углов  $AOB$ ,  $COD$ ,  $BOC$  . . . *все независимы* между собой, то здесь можно каждый такой угол рассматривать как *непосредственно* измеренную величину, между тем как в предыдущем случае (а также в первом и втором случае) углы, выводимые по направлениям, наблюдаемым в одной группе приемов, не независимы между собой: так в примере для третьего случая углы  $AOB$ ,  $AOC$ ,  $AOD$ , выводимые из первой группы приемов, все будут зависеть от направления  $A_1$  и его ошибки.



Черт. 135.

Обозначая угол  $AOB$  чрез  $x$ , угол  $BOC$  — чрез  $y$  и угол  $COD$  чрез  $z$  и допуская, что из наблюдений на пункте  $O$  были получены такие, *независимые*, друг от друга, значения:

для угла $AOB$ . . . . .	α
„ „ $AOC$ . . . . .	β
„ „ $BOC$ . . . . .	ε
„ „ $COD$ . . . . .	λ
„ „ $BOD$ . . . . .	μ

имеем такие уравнения погрешностей:

- 1)  $x - \alpha = \delta_\alpha$
  - 2)  $x + y - \beta = \delta_\beta$
  - 3)  $y - \varepsilon = \delta_\varepsilon$
  - 4)  $z - \lambda = \delta_\lambda$
  - 5)  $z + y - \mu = \delta_\mu$
- (т)

из которых можем получить значения углов  $x$ ,  $y$ ,  $z$  на *станции*, если не обращать внимания на условия в сети.

*Пятый случай.* Пусть на данном тригонометрическом пункте  $O$  наблюдались *отдельные* углы и при этом были измерены независимо друг от друга все углы, получающиеся при комбинировании по два всех подлежащих наблюдению с  $O$  сигналов  $A, B, C, D, E$ . Пусть были измерены углы:  $AOB, AOC, AOD, AOE, BOC, BOD, BOE, COD, COE, DOE$ , число которых будет равно  $\frac{n(n-1)}{2}$ , если число направлений  $A, B, C$  . . . . равно  $n$ .

В этом случае, как уже видели в главе об измерении углов, результат работы на пункте  $O$  может быть представлен рядом направлений  $A_m, B_m, C_m, D_m, E_m$ , которые при уравнивании сети можно рассматривать, как непосредственно наблюдаемые величины.



Обратимся теперь снова к задаче *строгого* уравнивания сети. Прежде всего должно отметить, что в условные уравнения вводятся всегда (за исключением одного случая) с каждой станции лишь углы необходимо-определяющие пучок прямых, идущих со станции на все наблюдавшиеся с нее сигналы; напр., в случае черт. 135-го, в условные уравнения будут введены лишь углы  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Все-же остальные углы наблюдаемые на станции, хотя и ведут каждый, как избыточно-наблюдённый, к одному условию, но очевидно, что в каждое такое условие войдут лишь углы *с одной станции*; так если на черт. 135 обозначим вероятное значение избыточного угла  $AOC$  через  $v$ , то соответствующее ему условие напишется так:

$$x + y = v \dots \dots \dots (x)$$

Такие условия, которые выражаются уравнениями между введенными в *уравнения сети* углами данной станции и *избыточными* углами той-же станции, называются *условными станций*. В огромном большинстве случаев такие условия или *условные уравнения станций*, можно заменить очень просто *уравнениями погрешностей*: так ур-ние (x) заменяется вторым уравнением в группе ур-ний (t), причем неизвестный угол  $v$  заменяется поправкой  $\delta_\beta$ .

Если результат работы на тригонометрическом пункте  $O$  представляется в *виде одного ряда окончательных направлений*  $A, B, C, D$ , — то никаких условий станций или соответствующих им уравнений погрешностей не возникает, потому что здесь никаких *независимо-измеренных* избыточных углов (избыточных на станции, а не в сети) образовать из чисел  $A, B, C, D$  нельзя. В самом деле, назвав попрежнему необходимые на станции  $O$  углы  $AOB, BOD, COD$  чрез  $x, y, z$ , а чрез  $v$  угол  $AOC$  имеем в этом случае:

$$\begin{aligned} x - (B - A) &= \delta_B - \delta_A \\ y - (C - B) &= \delta_C - \delta_B \\ v - (C - A) &= \delta_C - \delta_A \end{aligned}$$

но, складывая два первые уравнения, получаем:

$$x + y - (C - A) = \delta_C - \delta_A$$

следовательно  $x + y$  тождественно равно  $v$  при *любых значениях наблюдаемых величин*  $A, B, C$  и их поправок. Таким образом, если на каждом пункте сети результаты наблюдений выражаются в *виде одного ряда направлений*  $A, B, C, D$ , — то обозначив чрез  $x_k, y_k, z_k, v_k \dots \dots$  углы, образованные на пункте  $K$  каждыми двумя смежными направлениями\*), чрез  $x_o, y_o, \dots$  — такие-же углы на пункте  $O$ , чрез  $x_b, z_b$  — такие-же углы на пункте  $B$  и составив между этими углами условные уравнения сети:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_o, y_o, z_k) &= 0 \\ f_2(z_o, y_b, v_k) &= 0 \\ \dots \dots \dots & \\ f_k(x_a, y_o, z_b \dots) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (p)$$

мы к этим уравнениям должны присоединить только условие *минимума* функции  $W$  (см. выше), представляющейся в данном случае в виде:

$$W = \Sigma (\delta_A^2 + \delta_B^2 + \delta_C^2 + \delta_D^2) \dots \dots \dots (u)$$

причем суммирование в правой части распространяется на все пункты сети,

\*) эти углы и будут необходимыми на станции: если со станции наблюденно  $n$  сигналов, то таких углов будет  $n - 1$ .



наблюдённых величин, мы в рассматриваемом третьем случае получаем, напр., из таблицы (S) для пункта  $O$  такие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \delta x_0 &= (B_1 - A_1) - x_0^{\circ} + \delta B_1 - \delta A_1 \\ \delta y_0 &= (C_1 - A_1) - y_0^{\circ} + \delta C_1 - \delta A_1 \\ \delta z_0 &= (D_1 - A_1) - z_0^{\circ} + \delta D_1 - \delta A_1 \\ \delta x_0 &= (B_2 - A_2) - x_0^{\circ} + \delta B_2 - \delta A_2 \\ \delta z_0 &= (D_2 - A_2) - z_0^{\circ} + \delta D_2 - \delta A_2 \\ \delta y_0 - \delta x_0 &= (C_3 - B_3) - (y_0^{\circ} - x_0^{\circ}) + \delta C_3 - \delta B_3 \\ \delta u_0 - \delta x_0 &= (E_3 - B_3) - (u_0^{\circ} - x_0^{\circ}) + \delta E_3 - \delta B_3 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (r)$$

Другими словами, в рассматриваемом *третьем* случае поправка одного и того-же угла, введенного в ур-ния (v), выражается *множественно* чрез поправки непосредственно-измеренных направлений и *не всегда* при помощи уравнений (r) можно все эти выражения поправки одного и того-же угла свести к одному выражению для подстановки в уравнения (v).

В рассматриваемом *третьем* случае решение задачи получается, применяя так называемый „способ *Бесселя*“: оставляя по *Бесселю* в уравнениях (v) *поправки углов*  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  и включая в уравнениях (r) в число величин, определяемых *посредственными* наблюдениями, кроме поправок  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  еще ошибки *начальных* направлений в каждом приеме, т. е. величины  $\delta A_1$ ,  $\delta A_2$ ,  $\delta B_3$ ,  $\delta A_4$  . . . . ., мы приведем задачу определения  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  к задаче обработки, по способу наименьших квадратов, *посредственных наблюдений* (ур-ния r) с *условными уравнениями*; уравнения (v) и (r) в способе *Бесселя* решаются, (как это должно быть) вместе, причем условие *минимума* функции  $W$  дает возможность исключить величины  $\delta B_1$ ,  $\delta C_1$  — т. е. ошибки наблюдённых направлений. Сложность рассмотренной задачи очевидна.

В *четвертом* случае при строгом решении сети очевидно необходимо к условным уравнениям ее, присоединить условия станций и тогда будем иметь уравновешивание *условных* наблюдений с определением поправок углов. Но можно в этом четвертом случае условия станций представить в виде ур-ний погрешностей (2-ое и 5-ое уравнения в группе (t)) и тогда очевидно мы будем иметь уравнения (t) с определяемыми из них *посредственными* наблюдениями углами  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , и условные уравнения (v) между теми-же величинами; другими словами в четвертом случае задача уравновешивания сети может быть сведена к обработке по способу наименьших квадратов *посредственных наблюдений* с условными уравнениями. Таким образом оказывается, что в первом, пятом и иногда во втором случае — приходится уравновешивать *направления*, а во всех остальных случаях *углы*.

В действительных работах по вычислениям тригонометрических сетей, строгие способы уравновешиваний применяются далеко не всегда. Если наблюдения на пунктах сети исполнены в порядке, представляемом *третьим* случаем, (а это бывает не так редко), то способ *Бесселя*, в виду его сложности, применяется лишь при обработке базисных сетей, где и малое повышение точности результатов, даваемое строгой обработкой материала, имеет значение. В основных-же сетях обычно поступают так: уравнения (r) решают отдельно от условных уравнений сети, т. е. производят уравновешивание (по способу наименьших квадратов) *на станциях* отдельно от уравновешивания сети; найденные из такого вычисления поправки  $\delta x_a$ ,  $\delta y_a$ ,  $\delta z_a$ ,  $\delta x_b$  . . . . . придадут к приближенным значениям углов  $x_0^{\circ}$ ,  $y_0^{\circ}$ ,  $z_0^{\circ}$ ,  $x_b^{\circ}$  (принятым при

уравновешивании на станции) и получают углы  $x'_o, y'_o, z'_k, x'_b$ , которые рассматривают, как непосредственно-измеренные величины и между которыми затем составляют условные уравнения сети; из условных уравнений, решаемых отдельно от уравнений (r), определяют поправки  $\delta x'_o, \delta y'_o, \delta z'_k, \delta x'_b$ , выведенных из уравнений на станциях углов  $x'_o, y'_o, z'_k$ , под условием *минимума* суммы квадратов самих неизвестных  $\delta x'_o, \delta y'_o, \delta z'_k, \dots$ ; обычно в условные уравнения углы  $x'_o, y'_o, z'_k, \dots$  вводятся с теми их весами, которые получаются для них при решении уравнений (r). Не так редко идут на путь еще больших упрощений: именно решение уравнений (r) отдельно от условных уравнений выполняют приближенными способами, очень быстро приводящими к результату в виде одного *ряда направлений* на каждом пункте, которые и рассматриваются затем при составлении и решении условных уравнений сети, как непосредственно наблюдаемые величины; очевидно, что таким образом случаи третий приводят к первому случаю: из условных уравнений сети находят поправки к направлениям, *выведенным* из приближенных уравнений *на станциях*, под условием *минимума* суммы квадратов этих поправок, уже не обращая внимания на уравнения (r).

Приближенные способы вывода направлений из уравнений (r) вытекают все из строгого метода, т. е. эти способы научно-обоснованы, и поэтому применение их дает обычно результаты чрезвычайно близкие к получаемым из строгого решения тех-же уравнений (r) по способу наименьших квадратов. Примеры приближенных уравнений на станциях приведены в главе XII-сй.

Точно также в случае четвертом и ему подобных уравнений (t) или условия станций (x) решаются обычно отдельно и прежде решения условных уравнений сети: найдя из решения уравнений (t) по способу наименьших квадратов вероятнейшие значения углов *на станциях*, рассматривают такие значения, как непосредственно-наблюдаемые, и между ними составляют условные уравнения сети, уже не обращая внимания на уравнения (t).

Необходимо здесь-же отметить, что иногда, также ради упрощения вычислений, имея на каждом пункте результат наблюдений в виде одного *ряда направлений*, по этим направлениям вычисляют углы  $x, y, z$  и в условных уравнениях сети не делают замены поправок этих углов поправками направлений, а, оставляя эти уравнения в виде (v), решают их под условием *минимума* суммы квадратов поправок *углов*  $\delta x, \delta y, \delta z, \dots$ ; следует иметь в виду, что числовые значения уравновешенных углов при таком уравновешивании сети *по углам*, когда наблюдаемы были *направления*, получаются иные, чем значения их, выводимые как разности уравновешенных направлений при обработке той-же сети *по направлениям*, т. е. под условием *минимума* суммы квадратов поправок направлений.

Наконец, должно отметить, что строгое решение условных уравнений является легко разрешимой задачей лишь в сравнительно простых по конструкции сетях. В сетях с большим числом пересекающихся дууг друга диагоналей, особенно соединяющих вершины не смежных треугольников, а также в сетях, образующих замкнутые полигоны, — задача решения условных уравнений (отдельно от уравнений на станциях) является настолько громоздкой в своем практическом осуществлении что приходится нередко уравнения (v) решать не все сразу, а по частям. Об этом будет сказано далее; сейчас-же важно отметить, что главной задачей уравнительного вычисления сети является нахождение таких поправок наблюдаемых углов или направлений, с которыми строго удовлетворялись-бы одновременно все *условные уравнения*, задача-же нахождения одновременно и *вероятнейших значений* этих поправок должна быть поставлена на второе место и допускает по этому упрощения в своем решении.

**48. Виды условных уравнений.** Будем рассматривать сперва *свободную* сеть, т. е. распространяющуюся от одного базиса без примыканий к другим базисам или к другим сторонам ранее составленных сетей и без образования в ней самой замкнутых полигонов. В такой сети могут быть условия фигур, условия горизонта и условие боковые (частный вид последних — условия полюсные).

а) *Условия фигур.* В замкнутой фигуре, при всех вершинах которой были измерены углы, сумма уравновешенных значений этих углов должна быть равна геометрической сумме углов фигуры. Условия фигуры возникают очевидно в каждой замкнутой, образованной *сплошными* \*) линиями фигуре сети. Будем обозначать: измеренные значения углов — арабскими цифрами без скобок; поправки измеренных углов — соответствующими арабскими цифрами в скобках; уравновешенные значения углов соответственно римскими цифрами.

В плоском треугольнике  $ABD$  (черт. 136) условие фигуры напишется так:

$$I + II + III + VIII = 180^\circ$$

или:

$$1 + (1) + 2 + (2) + 3 + (3) + 8 + (8) = 180^\circ$$

или:

$$(1) + (2) + (3) + (8) + v = 0 \dots \dots (1)$$

причем *свободный* член  $v = 1 + 2 + 3 + 8 \cdot 180^\circ$ .

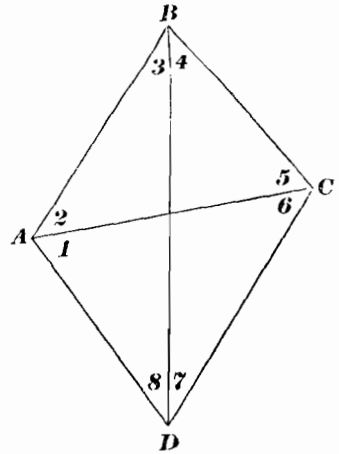
Уравнение (1) представляет в окончательном виде условное уравнение фигуры для плоского треугольника при уравнивании углов. Если бы уравнивались направления, то называя *измеренные* значения направлений арабскими цифрами (см. черт. 137), а поправки к ним — соответствующими арабскими цифрами в скобках, мы условие фигуры для того-же треугольника  $ABD$  написали бы так:

$$-(1) + (3) - (4) + (5) - (11) + (12) + v = 0$$

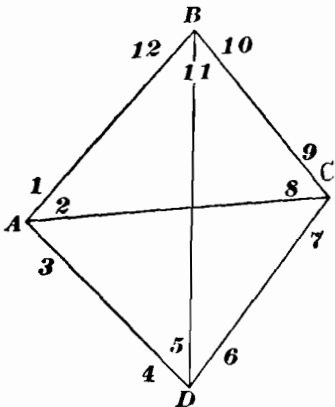
$$v = 3 - 1 + 5 - 4 + 12 - 11 - 180^\circ$$

Очевидно, что при замкнутой фигуре из  $n$  точек, образованной сплошными линиями, в левую часть соответствующего ей условия фигуры при уравнивании углов войдут: 1) сумма поправок всех *измеренных* при вершинах фигуры внутренних углов число коих вообще больше  $n$ , так как внутренний угол фигуры может состояться из двух, трех и более измеренных углов; 2) свободный член, полу-

чаемый вычитанием из суммы измеренных значений внутренних углов геометрической суммы углов фигуры.



Черт. 136.

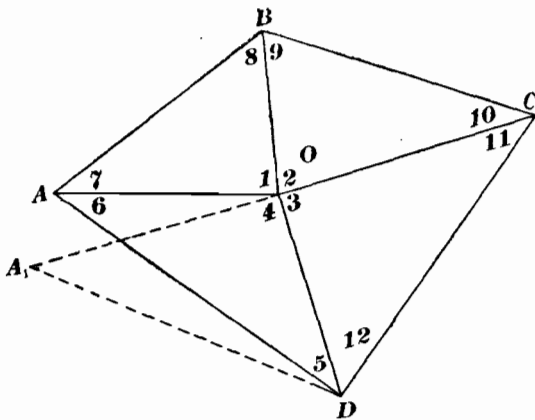


Черт. 137.

\*) Линия  $AB$  называется сплошной, если с пункта  $A$  наблюдался пункт  $B$  и с  $B$  — пункт  $A$ ; если с  $B$  не было сделано обратного визирования на  $A$ , то несплошная линия  $AB$  обозначается на чертеже несплошной линией с пунктиром при  $B$ .

При уравнивании направлений поправка угла заменяется разностью поправок направлений причем в фигуре из  $n$  точек число поправок направлений в услвии фигуры равно  $2n$  и сумма коэффициентов при всех поправках направлений равна нулю.

б) *Условия горизонта.* Если в сети образуются *центральные* системы, то при уравнивании углов необходимо в каждой такой системе ввести условие, чтобы сумма уравнишенных углов, имеющих общую вершину в



Черт. 138.

$OA$  займет положение  $OA_1$ , не совпадающее с первоначально взятым положением той-же стороны, причем угол  $AOA_1$  будет равен уклонению суммы  $I + II + III + IV$  от  $360^\circ$ . Для системы, изображенной на черт. 138, условие горизонта напишется так:

$$I + II + III + IV - 360^\circ = 0$$

или:

$$1 + (1) + 2 + (2) + 3 + (3) + 4 + (4) - 360^\circ = 0$$

или в окончательной форме:

$$(1) + (2) + (3) + (4) + 1 + 2 + 3 + 4 - 360^\circ = 0$$

При уравнивании *направлений*, условий горизонта не возникает. Действительно, называя уравнишенные значения направлений в  $O$  на сигналы  $A, B, C, D$  соответственно чрез  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  и вычисляя по этим направлениям уравнишенные углы при  $O$ , имеем:

$$I = \beta - \alpha,$$

$$II = \gamma - \beta$$

$$III = \delta - \gamma$$

$$IV = 360^\circ + \alpha - \delta$$

При любых значениях чисел  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  сумма  $I + II + III + IV$  (углов при полюсе) тождественно будет равна  $360^\circ$ .

Если на точке  $O$ , полюсе центральной системы, в результате наблюдений были выведены направления  $A, B, C, D, E$ , — то свободный член условия горизонта будет равен нулю; в самом деле, измеренные углы при точке  $O$  будут выведены так:

$$\begin{aligned} 1 &= B - A \\ 2 &= C - B \\ 3 &= D - C \\ 4 &= E - D \\ 5 &= 360 - A - E. \end{aligned}$$

Следовательно, при любых значениях  $A, B, \dots, E$  сумма  $1 + 2 + 3 + 4 + 5$  равна нулю; равенство нулю свободного члена в рассмотренном случае при уравнивании сети *по углам* не ведет, конечно, однако к возможности не вводить условия горизонта.

Если бы кроме углов 1, 2, 3, 4, входящих в условия сети (см. черт. 138) и *измеренных независимо друг от друга*, были бы на точке  $O$  еще *независимо* измерены углы  $AOB, BOC$  и т. п., то тогда надлежало бы составить условия станции, вводя в их число и условие горизонта; после определения из условий станции и условия горизонта поправок углов 1, 2, 3, 4, — в условии горизонта *в сети* нужно было бы ввести углы, исправленные этими поправками, при чем свободный член в условии горизонта окажется уже тогда равным нулю.

*Пример.* Наблюдаемые значения углов на  $O$  (черт. 138) оказались такие:

$$\begin{aligned} AOB = 1 &= 40^\circ 0' 0''.0 \\ BOC = 2 &= 90 \quad 5 \quad 2 \quad .0 \\ COD = 3 &= 120 \quad 5 \quad 4 \quad .0 \\ DOA = 4 &= 109 \quad 49 \quad 52 \quad .0 \\ AOC = f &= 130 \quad 5 \quad 4 \quad .0 \end{aligned}$$

Условия станций напишутся:

$$\begin{aligned} 1) \quad (1) + (2) + (3) + (4) - 2''.0 &= 0 \\ (1) + (2) + 130^\circ 5' 2''.0 &= 130^\circ 5' 4''.0 - (f) \\ 2) \quad (1) + (2) - (f) - 2''.0 &= 0 \end{aligned}$$

Уравнения коррелат, соответствующие условиям 1) и 2) будут:

$$\begin{aligned} 4 k_1 + 2 k_2 - 2''.0 &= 0 & k_1 &= -\frac{1}{4} \\ 2 k_1 + 3 k_2 - 2''.0 &= 0 & k_2 &= +\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Поправки углов оказываются:

$$\begin{aligned} (1) &= k_1 + k_2 = +0''.75 \\ (2) &= +0''.75 \\ (3) &= +0''.25 \\ (4) &= +0''.25 \end{aligned}$$

В условия сети (и в условие горизонта *в сети*) надлежит в качестве *измеренных*, ввести углы:

$$\begin{aligned} 1 &= 40^\circ 0' 0''.75 \\ 2 &= 90 \quad 5 \quad 2 \quad .75 \\ 3 &= 120 \quad 5 \quad 4 \quad .25 \\ 4 &= 109 \quad 49 \quad 52 \quad .25 \end{aligned}$$

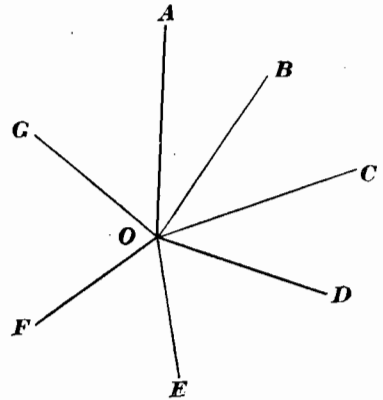
сумма которых равна  $360^\circ$ .

Не так редко предметы, наблюдаемые из  $O$  (черт. 139), приходится делить на группы, либо вследствие различия времени хорошей видимости для разных предметов, либо вследствие того, что часть предметов не может быть наблюдаема из центра знака. Допустим, что в первой группе были определены направления  $A, B, C, D$  на предметы тех-же названий; что во второй группе были определены направления  $D_1, E, F$  на предметы  $D, E$  и  $F$ ; что в третьей группе были получены направления  $F_1, G, A_1$  на предметы  $F, G, A$ ; предположим, что наблюдения одной группы сделаны независимо от наблюдений другой группы.

Очевидно, что при указанном порядке работы получились в ее результате независимые углы:

$$AOD = D - A; \quad DOF = F - D_1; \quad FOA = A_1 - F_1$$

и зависимые между собою углы каждой группы, выводимые по разностям направлений этой группы.



Черт. 139.

Связывая независимые между собою углы  $AOD, DOF, FOA$  условием горизонта на станции, мы получим поправки этих углов, равные между собою. После этого углы  $AOB, COD, DOE \dots$ , примыкающие к начинающим или замыкающим группу сторонам и вычисляемые соответственно как разности:  $B - A, D - C, E - D_1 \dots$ , — должны быть исправлены половиной поправки  $\delta$ , выведенной для соответственных независимых углов. Это правило вытекает из такого соображения. Для угла  $AOB$  имеем одно значение, равное  $B - A$ ; для этого же угла получаем второе значение так:  $(D - A + \delta) - (D - B) = B - A + \delta$ , — т. е. вычисляем его по исправленному углу  $AOD$  и по выводимому из наблюдений углу  $BOD$ ; из этих двух значений нужно взять арифметическую средину.

**Пример.**

$$\begin{aligned} A &= 0^\circ 0' 0''.0 & B &= 30^\circ 0' 5''.0 & C &= 60^\circ 0' 3''.0 & D &= 90^\circ 0' 4''.0 \\ D_1 &= 0^\circ 0' 0''.0 & E &= 85^\circ 10' 7''.0 & F &= 120^\circ 5' 5''.0 \\ F_1 &= 0^\circ 0' 0''.0 & G &= 75^\circ 8' 3''.0 & A_1 &= 149^\circ 54' 45''.0 \end{aligned}$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} \alpha &= AOD = 90^\circ 0' 4''.0 \\ \beta &= DOF = 120^\circ 5' 5''.0 \\ \gamma &= FOA = 149^\circ 54' 45''.0 \end{aligned}$$

Условие станции напишется так:

$$(\alpha) + (\beta) + (\gamma) - 6''.0 = 0$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} (\alpha) &= (\beta) - (\gamma) = + 2''.0 \\ \angle AOB &= 30^\circ 0' 5''.0 + 1''.0 = 30^\circ 0' 6''.0 \\ \angle BOC &= 60^\circ 0' 3''.0 - 30^\circ 0' 5''.0 = 29^\circ 59' 58''.0 \text{ (не исправляется)} \\ \angle COD &= 90^\circ 0' 4''.0 - 60^\circ 0' 3''.0 + 1''.0 = 30^\circ 0' 2''.0 \\ \angle DOE &= 85^\circ 10' 7''.0 + 1''.0 = 85^\circ 10' 8''.0 \end{aligned}$$



Исправленные таким образом углы и должно подставить в условие горизонта в *сети*.

Если-бы сеть уравнивалась-бы по *направлениям*, а при наблюдениях на пункте *O* пришлось-бы разбить предметы на группы, как указано в приведенном примере, т. е. из первой группы приемов определить направления *A, B, C, D*; из второй группы приемов определить направления *D<sub>1</sub>, E* и *F*; из третьей группы — направления *F<sub>1</sub>, G* и *A<sub>1</sub>*, — то до уравнивания сети пришлось-бы сделать *уравнивание станции O*, и поступить совершенно так-же, как указано в только что приведенном примере — с тою только разницею, что после получения уравновешенных углов на станции, по ним нужно будет затем вычислить углы, *отсчитываемые все от одного направления*, и эти значения углов принять при уравнивании сети за измеренные на *O* направления, при чем условия горизонта в *O* не возникнет. Для приведенного выше примера имеем такие значения углов, отсчитываемых от направления на *A* и уравненных на пункте *O*:

$$A = 0^{\circ} 0' 0''.0$$

$$B = 30^{\circ} 0' 6''.0$$

$$C = 60^{\circ} 0' 4''.0$$

$$D = 90^{\circ} 0' 6''.0$$

$$E = 175^{\circ} 10' 14''.0$$

$$F = 210^{\circ} 5' 13''.0$$

$$G = 285^{\circ} 13' 17''.0$$

Эти *углы* придется принять за наблюдаемые направления при уравнивании сети по направлениям.

с) *Условия боковые*. В четырехугольнике *ABCD*, изображенном на черт. 136 имеем собственно пять условий фигур:

- 1) из тр-ка *ABD* . . . (1) + (2) + (3) + (8) + 1 + 2 + 3 + 8 — 180° = 0
- 2) „ „ *B CD* . . . (4) + (5) + (6) + (7) + 4 + 5 + 6 + 7 — 180° = 0
- 3) „ „ *ABC* . . . (2) + (3) + (4) + (5) + 2 + 3 + 4 + 5 — 180° = 0
- 4) „ „ *ACD* . . . (1) + (6) + (7) + (8) + 1 + 6 + 7 + 8 — 180° = 0
- 5) из четыреуг . . . . (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) + (7) + (8) +  
+ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 — 360 = 0

Очевидно, что из этих условий только три независимы, а остальные два — следствия этих трех: ур-ние пятое есть сумма ур-ний первого и второго; ур-ние четвертое получается вычитанием третьего ур-ния из суммы первого и второго ур-ний. Таким образом при уравнивании углов в четырехугольнике *ABCD* мы исчерпаем все условия фигур, если их напишем из треугольников *ABD, BCD, ABC*. Допустим, что из трех условий фигур, соответствующих этим трем треугольникам, мы нашли поправки углов; будем-ли мы теперь, по исправлении измеренных углов такими поправками, иметь единственное решение нашего четырехугольника *ABCD*?

Построив с исправленными за условия фигур углами треугольники *ABD* и *BDC*, мы определим положение всех вершин четырехугольника; пусть при этом *C* совпадает с *C<sub>2</sub>* (черт. 140); если теперь построим по углу 2 диагональ *AC*, то она, образуя с *BC<sub>2</sub>* угол 5, дополняющий сумму 2 + 3 + 4 до 180°, тем не менее вообще не пройдет через *C<sub>2</sub>*, а пересечется со сторонами *DC* и *BC* в точках *C<sub>3</sub>* и *C<sub>1</sub>*. Выполнение одних условий фигур не

исключает возможности после этого вместо четырехугольника построить фигуру  $ABC_2C_1C_3D$ . Требование прохождения диагонали при  $A$  чрез точку  $C$ , построенную ранее без участия этой диагонали, должно быть введено, кроме условий фигур, в число условий четырехугольника; это требование и представляет собою *боковое условие*.

Боковое условие очевидно можно рассматривать как требование совпадения точек  $C_3$  и  $C_1$  или как требование получения одного и того же значения для длины диагонали  $AC$  при двух независимых ее определениях: по стороне  $AB$  из тр-ка  $ABC$ ; по стороне  $AD$  из треугольников  $ABD$  и  $ADC$ . Таким образом, с уравновешенными углами должны иметь:

$$\frac{AB \sin [III+IV]}{\sin V} = \frac{AB \sin III \sin [VII+VIII]}{\sin VIII \sin VI}$$

или:

$$\frac{\sin V}{\sin [III+IV]} \cdot \frac{\sin [VII+VIII]}{\sin VI} \cdot \frac{\sin III}{\sin VIII} = 1$$

С измеренными-же углами напишем:

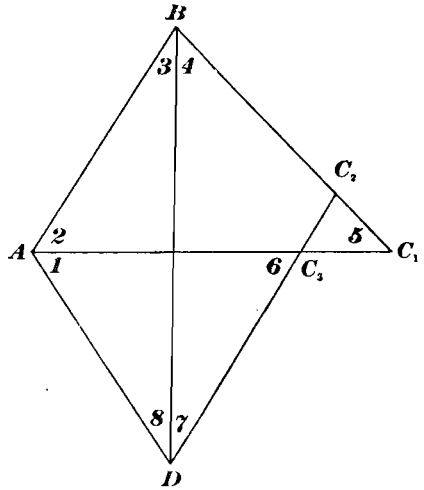
$$\frac{\sin [5+(5)]}{\sin [3+4+(3)+(4)]} \cdot \frac{\sin [7+8+(7)+(8)]}{\sin [6+(6)]} \cdot \frac{\sin [3+(3)]}{\sin [8+(8)]} = 1 \quad (2)$$

Боковое условие можно для четырехугольника написать еще так:

$$\frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} \cdot \frac{AD}{AB} = 1 \quad (3)$$

Уравнение (3) есть тождество, которое должно выполняться с уравновешенными углами и смысл которого тот, что отношение сторон  $AB$  к  $AD$ , выводимое из тр-ков  $ABC$  и  $ADC$ , (произведение первых двух множителей в ур-нии (3)) должно быть равно отношению тех-же сторон, определяемому тр-ком  $ABD$ ; при вычислении указанных отношений с измеренными углами, уравнение (3) не будет выполнено.

Боковые условия возникают непременно, если в сети имеются *диагонали*: или пересекающие стороны треугольников, или соединяющие вершины *несмежных* треугольников, или замыкающие цепи треугольников (такие диагонали обращают *цепь треугольников* в *сеть тр-ков*); во всех этих случаях мы имеем диагональ с построенной уже точки сети на вершину, определяемую, помимо этой диагонали, двумя прямыми с предшествующих ей в процессе построения сети точек: требование, чтобы диагональ и эти две прямые дали-бы одно пересечение, и приводит к боковому условию. В большинстве случаев боковое условие сводится к требованию, чтобы для длины некоторой стороны сети, которую можно вычислить двумя *независимыми* путями, получалось-бы одно и то-же значение при применении обоих путей ее вычисления. Это мы уже видели на примере четырехугольника. Если возьмем центральную систему (черт. 138), то в ней цепь треугольников  $ABO, BOC, COD$  обращается в сеть посредством введения замыкающей стороны (диагонали)  $AD$ : построив на стороне  $AB$  тр-ки  $AOB, BOC, COD$  будем иметь определенными все *вершины* системы без участия в этом



Черт. 140

построении диагонали  $AD$ ; строя эту диагональ при  $D$  по углу  $\delta$ , мы должны, конечно, ввести требование прохождения ее через построенную уже точку  $A$ .

Но это-же требование можно выразить иначе так: приняв сторону  $AO$  за основную, для стороны  $OD$  мы должны получить одно и то-же значение, будем-ли вычислять ее из тр-ка  $AOD$ , или из треугольников  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$ .

Другими словами с уравновешенными углами, в нашей центральной системе должно существовать тождество:

$$\frac{OA}{OB} \cdot \frac{OB}{OC} \cdot \frac{OC}{OD} \cdot \frac{OD}{OA} = 1 \dots \dots \dots (4)$$

понимаем так, что первые три множителя левой части его определяют отношение  $OA$  к  $OD$  из треугольников  $AOB$ ,  $BOC$  и  $COD$ , а последний множитель дает отношение тех-же сторон из тр-ка  $AOD$ . Заменяя отношения сторон, отношениями синусов углов им противолежащих, боковое условие (4) напишем еще в виде:

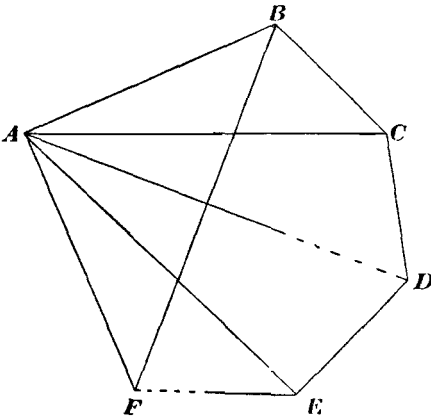
$$\frac{\sin [8+(8)]}{\sin [7+(7)]} \cdot \frac{\sin [10+(10)]}{\sin [9+(9)]} \cdot \frac{\sin [12+(12)]}{\sin [11+(11)]} \cdot \frac{\sin [6+(6)]}{\sin [5+(5)]} = 1 \dots \dots (5)$$

Очевидно, что боковое условие в центральной системе имело-бы место, если-бы угол  $\delta$  и не был-бы измерен, т. е. линия  $DA$  была-бы *несплошной*: в этом случае в ур-нии (5) пришлось-бы заменить  $\sin [6+(6)]$  чрез  $\sin [4+5+(4)+(5)]$ . Точно также и в четырехугольнике  $ABCD$  (черт. 136) боковое условие сохранилось-бы, если-бы не был измерен угол  $\delta$  и линия  $AC$  была-бы *несплошной*: тогда в уравнении (2) пришлось-бы заменить  $\sin [5+(5)]$  чрез  $\sin [2+3+4+(2)+(3)+(4)]$ , а  $\sin [6+(6)]$  чрез  $\sin [1+7+8+(1)+(7)+(8)]$ .

Для уравнений (3) и (4) характерно то, что они представляют боковое условие в виде *полюсного* уравнения, т. е. в виде произведения отношений длин сторон соединяющих общую точку — полюс — со всеми вершинами некоторой замкнутой фигуры. Здесь мы подошли к возможности сделать следующее обобщение: если в сети есть точка  $A$ , (черт. 141) из которой идут линии на все вершины замкнутой фигуры  $BCDEF$ , то в фигуре  $ABCDEF$  имеется боковое условие, которое напишется в форме полюсного уравнения с полюсом  $A$  и именно так:

$$\frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} \cdot \frac{AD}{AE} \cdot \frac{AE}{AF} \cdot \frac{AF}{AB} = 1 \dots (6)$$

Уравнение (6) должно понимать, как требование, чтобы с углами уравновешенными отношение сторон  $AB$  и  $AF$ , определяемое из цепи треугольников

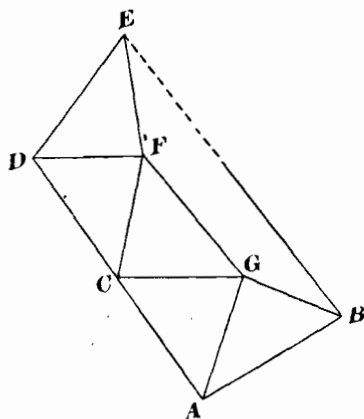


Черт. 141

ников  $ABC$ ,  $ACD$ ,  $ADE$ ,  $AEF$ , должно быть равно отношению тех-же сторон, выводимому из треугольника  $ABF$ . Диагональ  $FB$  обращает на черт. 141 простую цепь тр-ков в сеть треугольников. Очевидно, что замкнутая фигура  $BCDEF$ , на которую опирается исходящий из полюса пучек линий, может иметь некоторые линии и *несплошные*; точно также в числе линий, исходящих из полюса  $A$ , могут быть и *несплошные*.

Кроме рассмотренных, надлежит несколько остановиться на таких случаях, в которых боковое условие не может быть выражено требованием

равенства двух значений некоторой стороны сети, выводимых двумя независимыми путями; эти случаи, один из которых изображен на черт. 142, возникают вообще тогда, когда в сети имеется диагональ, соединяющая вершины *удаленных* друг от друга (в порядке их построения) треугольников, причем такая диагональ не образует ни центральной системы, ни замкнутой фигуры, на все вершины которой идут линии из некоторого полюса. Здесь приходится ставить иное требование, а именно — чтобы проекция ломаной линии *BGF'E* на перпендикуляр к диагонали *BE* была бы равна нулю; уравнение, выражающее чрез измеренные углы и их поправки указанное требование, имеет чрезвычайно сложный вид и его не следует собственно называть боковым условием.



Черт. 142

Уравнения (2) и (5) должны быть приведены к линейному виду. Считая поправки углов достаточно малыми, напишем:

$$lg \operatorname{Sin} [5 + (5)] = lg \operatorname{Sin} 5 + M \cdot (5)'' \operatorname{Sin} 1'' \cdot \operatorname{cotg} 5 \dots \dots \dots (7)$$

где *M* — модуль логарифмов и применяя эту формулу (7) к преобразованию уравнения (2), будем иметь боковое условие четырехугольника в таком виде:

$$M \cdot \operatorname{Sin} 1'' \left\{ (5) \operatorname{cotg} 5 + (7) \operatorname{cotg} [7 + 8] + (8) \operatorname{cotg} [7 + 8] + (3) \operatorname{cotg} 3 \right\} - \\ - M \cdot \operatorname{Sin} 1'' \left\{ (3) \operatorname{cotg} [3 + 4] + (4) \operatorname{cotg} [3 + 4] + (6) \operatorname{cotg} 6 + \right. \\ \left. + (8) \operatorname{cotg} 8 \right\} + lg \frac{\operatorname{Sin} 5 \operatorname{Sin} [7 + 8] \operatorname{Sin} 3}{\operatorname{Sin} [3 + 4] \operatorname{Sin} 6 \operatorname{Sin} 8} = 0$$

Или:

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \operatorname{cotg} 3 - \operatorname{cotg} [3 + 4] \right\} (3) - \operatorname{cotg} [3 + 4] (4) - \operatorname{cotg} 5 (5) - \\ & - \operatorname{cotg} 6 (6) - \operatorname{cotg} [7 + 8] (7) + \left\{ \operatorname{cotg} [7 + 8] - \operatorname{cotg} 8 \right\} (8) + \dots (2)' \\ & + \frac{1 \cdot 10^7}{M \cdot 10^7 \operatorname{Sin} 1''} \cdot lg \frac{\operatorname{Sin} 5 \operatorname{Sin} [7 + 8] \operatorname{Sin} 3}{\operatorname{Sin} [3 + 4] \operatorname{Sin} 6 \operatorname{Sin} 8} = 0 \end{aligned} \right\}$$

В виду того, что  $\frac{1}{M \operatorname{Sin} 1''}$  число большое, — в свободный член уравнения введено делителем и множителем  $10^7$ ;  $\frac{1}{M \cdot 10^7 \operatorname{Sin} 1''}$  — число уже малое, логарифм которого равен 8.6766—10; произведение

$$10^7 \cdot lg \frac{\operatorname{Sin} 5 \operatorname{Sin} [7 + 8] \operatorname{Sin} 3}{\operatorname{Sin} [3 + 4] \operatorname{Sin} 6 \operatorname{Sin} 8} = 10^7 \lg \Delta$$

представляет  $lg \Delta$  в единицах седьмого знака. В большинстве случаев однако приводят боковое условие к несколько иному виду, чем (2)'. Предполагая, что в пределах каждого десятисекундного интервала, имеюще-

гося в семизначных таблицах логарифмов тригонометрических линий, приращение логарифма синуса прямо-пропорционально приращению углового аргумента, можем написать при значениях поправок углов, меньших  $10''$ :

$$\lg \text{Sin} [5 \mp (5)] = \lg \text{Sin} 5 \mp \Delta_5 (5)'' \dots \dots \dots (8)$$

понимая под  $\Delta_5$  изменение логарифма синуса угла 5 при изменении этого угла на одну секунду. Величина  $\Delta_5$  при указанном предположении получится посредством деления на десять разности двух находящихся в логарифмических таблицах смежных логарифмов синусов, между которыми лежит  $\lg \text{Sin} 5$ . Если угол 5 меньше  $90^\circ$ , то найденное указанным образом из логарифмических таблиц значение  $\Delta_5$  подставляется в ур-ние (8) со знаком плюс; если-же угол 5 более  $90^\circ$ —то со знаком минус. Это правило станет понятным из сличения ур-ния (8) с уравнением (7):  $\Delta_5$  очевидно равно  $M \cdot \text{Sin} 1'' \cdot \text{cotg} 5$ . Применяя уравнение (8) к приведению в линейный вид ур-ния (2), будем иметь базовое условие четырехугольника изображенного на черт. 136, в такой форме:

$$[\Delta_3 - \Delta_{3+4}] (3) - \Delta_{3+4} (4) \mp \Delta_5 (5) - \Delta_6 (6) \mp \Delta_{7+8} (7) \mp [\Delta_{7+8} - \Delta_8] (8) + \lg \frac{\text{Sin} 5 \cdot \text{Sin} [7 \mp 8] \cdot \text{Sin} 3}{\text{Sin} [3 \mp 4] \cdot \text{Sin} 6 \cdot \text{Sin} 8} = 0 \dots \dots \dots (9)$$

Из чертежа 140 ясно, что:

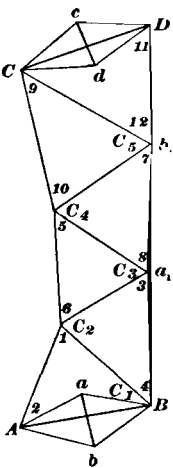
$$AC_1 = \frac{AB \text{ Sin} [3 \mp 4]}{\text{Sin} 5}; \quad AC_3 = \frac{AB \cdot \text{Sin} 3 \cdot \text{Sin} [7 \mp 8]}{\text{Sin} 8 \text{ Sin} 6}$$

Отсюда:

$$\lg \frac{AC_3}{AC_1} = \lg \frac{\text{Sin} 5 \cdot \text{Sin} [7 \mp 8] \text{ Sin} 3}{\text{Sin} [3 \mp 4] \text{ Sin} 6 \cdot \text{Sin} 8}$$

$$\lg \frac{AC_3}{AC_1} = \lg \left[ \frac{AC_1 - C_1 C_3}{AC_1} \right] = \lg \left[ 1 - \frac{C_1 C_3}{AC_1} \right]$$

Так как  $C_1 C_3$  всегда чрезвычайно мало по сравнению с  $AC_1$ ,



Черт. 143

то раскладывая  $\lg \left[ 1 - \frac{C_1 C_3}{AC_1} \right]$  в ряд, мы можем ограничиться лишь одним первым членом этого ряда, и тогда будем иметь:

$$- M \cdot \frac{C_1 C_3}{AC_1} = \lg \frac{\text{Sin} 5 \cdot \text{Sin} [7 \mp 8] \text{ Sin} 3}{\text{Sin} [3 \mp 4] \text{ Sin} 6 \cdot \text{Sin} 8}$$

Следовательно, свободный член уравнения (9) равен относительной невязке четырехугольника по направлению диагонали, умноженной на модуль Неперовых логарифмов.

В сетях не с одним, а с несколькими базисами, в сетях примыкающих к нескольким сторонам ранее составленной триангуляции, и в цепях треугольников, образующих замкнутые полигоны, возникают особые условия, которые мы вкратце сейчас и рассмотрим.

d) *Базисные условия*. Если в триангуляции имеются две основные стороны  $AB$  и  $CD$  (черт. 143), вычисленные из двух базисных сетей по базисам  $ab$  и  $cd$ , то возникает базисное условие, состоящее в требовании, чтобы значение длины стороны  $CD$ , определенное по основной стороне  $AB$  и по углам связывающих две эти

стороны треугольников, было-бы равно значению  $b$  стороны  $CD$ , выведенному из базисной сети  $CcDd$ . Называя длину основной стороны  $AB$  чрез  $a$  имеем очевидно:

$$\frac{a \operatorname{Sin} II}{\operatorname{Sin} I} \cdot \frac{\operatorname{Sin} IV}{\operatorname{Sin} III} \cdot \frac{\operatorname{Sin} VI}{\operatorname{Sin} V} \dots = b$$

или:

$$\lg \operatorname{Sin} [2 \mp (2)] - \lg \operatorname{Sin} [1 \mp (1)] + \lg \operatorname{Sin} [4 \mp (4)] - \lg \operatorname{Sin} [3 \mp (3)] + \\ + \lg \operatorname{Sin} [6 \mp (6)] - \lg \operatorname{Sin} [5 \mp (5)] + \dots + \lg a - \lg b = 0$$

или:

$$\alpha_2 (2) - \beta_1 (1) + \alpha_4 (4) - \beta_3 (3) + \alpha_6 (6) - \beta_5 (5) + \\ + \lg \frac{\operatorname{Sin} 2 \cdot \operatorname{Sin} 4 \cdot \operatorname{Sin} 6 \dots}{\operatorname{Sin} 1 \cdot \operatorname{Sin} 3 \cdot \operatorname{Sin} 5 \dots} + \lg a - \lg b = 0 \dots (10)$$

причем чрез  $\alpha$  обозначены для четных углов перемены логарифмов их синусов при изменении углов на одну секунду, а чрез  $\beta$  — такие-же величины для углов нечетных. Обычно базисное условие в виде ур-ния (10) решается *отдельно и после* решения условия фигур, горизонтов и боковых: рассматривая сперва сеть, как свободную, уравнивают ее и затем, введя в измеренные углы поправки из такого уравнивания, с *исправленными* углами составляют ур-ние (10) и из него находят *вторичные* поправки углов. При таком порядке вычисления, приходится, конечно, требовать, чтобы *вторичные* поправки углов, определенные из базисного условия, удовлетворяли бы существующим в сети условиям фигур, условиям боковым и т. д.; другими словами к уравнению (10) нужно собственно присоединить все условия сети, введя в них исправленные из первого уравнивания углы и вторичные их поправки, и решать все эти условия совместно с базисным. Сложность такой задачи *в общем случае* и при строгом ее решении очевидна и она несколько не меньше сложности задачи совместного решения всех условий сети и базисного условия прямо с измеренными значениями углов: разница заключается лишь в выборе приближенных значений неизвестных углов. Но в частном случае, если сеть представляет *простую цепь* треугольников, задача нахождения вторичных поправок по способу наименьших квадратов из совместного решения ур-ния (10) и всех условий сети является очень простой, и это упрощение именно достигается предшествующим отдельным решением всех условий, кроме базисного.

Рассмотрим этот частный случай. К ур-нию (10) мы должны присоединить следующие условия фигур, доставляемые каждым треугольником цепи:

$$\begin{array}{l|l} (1) + (2) + (e_1) = 0 & k_1 \\ (3) + (4) + (e_2) = 0 & k_2 \\ \dots & \dots \\ (2n-1) + (2n) + (e_n) = 0 & k_n \end{array}$$

под (1), (2), (e) — понимаются вторичные поправки. Обозначая коррелаты, соответствующие условиям из первого, второго и т. д. треугольников чрез  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , а чрез  $K$  — коррелату ур-ния (10) напишем такие выражения поправок чрез коррелаты:

$$\begin{array}{l|l} (1) = k_1 - \beta_1 K & (3) = k_2 - \beta_3 K \\ (2) = k_1 - \alpha_2 K & (4) = k_2 + \alpha_4 K \\ (e_1) = k_1 & (e_2) = k_2 \\ \dots & \dots \end{array}$$

Нормальные уравнения коррелят будут такие:

$$\begin{aligned}
 (\alpha_2 - \beta_1) k_1 + (\alpha_4 - \beta_3) k_2 + (\alpha_6 - \beta_5) k_3 + \dots + (\Sigma \alpha^2 + \Sigma \beta^2) K + v &= 0 \\
 3k_1 + (\alpha_2 - \beta_1) K &= 0 \\
 3k_2 + (\alpha_4 - \beta_3) K &= 0 \\
 3k_3 + (\alpha_6 - \beta_5) K &= 0 \\
 \dots & \dots
 \end{aligned}$$

причем под  $v$  понимается свободный член уравнения (10). Из этих нормальных уравнений легко получаем:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= -\frac{\alpha_2 - \beta_1}{3} \cdot K \\
 k_2 &= -\frac{\alpha_4 - \beta_3}{3} \cdot K \\
 k_3 &= -\frac{\alpha_6 - \beta_5}{3} \cdot K \\
 \dots & \dots
 \end{aligned}$$

$$\left\{ \left[ \alpha_2^2 + \beta_1^2 - \frac{(\alpha_2 - \beta_1)^2}{3} \right] + \left[ \alpha_4^2 + \beta_3^2 - \frac{(\alpha_4 - \beta_3)^2}{3} \right] + \dots \right\} \cdot K + v = 0$$

или:

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{3} K \Sigma (\alpha_{2n}^2 + \beta_{2n-1}^2 - \alpha_{2n} \cdot \beta_{2n-1}) + v &= 0 \\
 \frac{1}{3} K \Sigma [(\alpha_{2n}^2 + \beta_{2n-1}^2) + (\alpha_{2n} + \beta_{2n-1})^2] + v &= 0
 \end{aligned}$$

Откуда:

$$K = -\frac{v}{\Sigma \sigma} \dots \dots \dots (11)$$

причем в формуле (11) величины  $\sigma$  входят из всех треугольников цепи и для треугольника с номером  $n$  и с названиями углов:

$$\begin{aligned}
 & 2n, 2n - 1 \text{ и } c_n \\
 \sigma_n &= \frac{1}{3} [(\alpha_{2n}^2 + \beta_{2n-1}^2) + (\alpha_{2n} + \beta_{2n-1})^2]
 \end{aligned}$$

По определению  $K$  имеем:

$$\begin{aligned}
 (1) &= -\frac{\alpha_2 - \beta_1}{3} K - \beta_1 K = -\frac{2\beta_1 + \alpha_2}{3} K \\
 (2) &= -\frac{\alpha_4 - \beta_3}{3} K + \alpha_4 K = +\frac{2\alpha_4 + \beta_3}{3} K \\
 (c_1) &= -\frac{\alpha_2 - \beta_1}{3} K \\
 (2n - 1) &= -\frac{2\beta_{2n-1} + \alpha_{2n}}{3} \cdot K \\
 (2n) &= +\frac{2\alpha_{2n} + \beta_{2n-1}}{3} \cdot K \\
 (c_n) &= -\frac{\alpha_{2n} - \beta_{2n-1}}{3} \cdot K
 \end{aligned}$$

Или заменяя  $K$  по формуле (11), для поправок углов  $n$ -го треугольника получим окончательно:

$$(2n - 1) \dots (2\beta_{2n-1} + \alpha_{2n}) \cdot \frac{v}{3 \sum \sigma}$$

$$(2n) \dots - (2\alpha_{2n} + \beta_{2n-1}) \cdot \frac{v}{3 \sum \sigma}$$

$$(c_n) \dots + (\alpha_{2n} - \beta_{2n-1}) \cdot \frac{v}{3 \sum \sigma}$$

Сумма вторичных поправок в каждом тр-ке очевидно равна нулю. Связующий угол с нечетным номером должен приходиться при составлении базисного условия против *исходной* стороны тр-ка.

*Пример на вычисление базисного условия.* На прилагаемом чертеже изображена цепь первоклассных треугольников, входящих в меридианный ряд „Пулково-Николаев“, который проложен Военно-Топографическим Управлением. Ряд начинается от стороны „Поги—Кабози“, определенной из Саблинской базисной сети; ее логарифм в метрах равен 4.4390191,3. Эта сторона 11-ю треугольниками связывается со стороной „Язвище—Минюши“, которая определена из Шимской базисной сети. Логарифм стороны „Язвище—Минюши“ по определению из Шимской базисной сети равен:

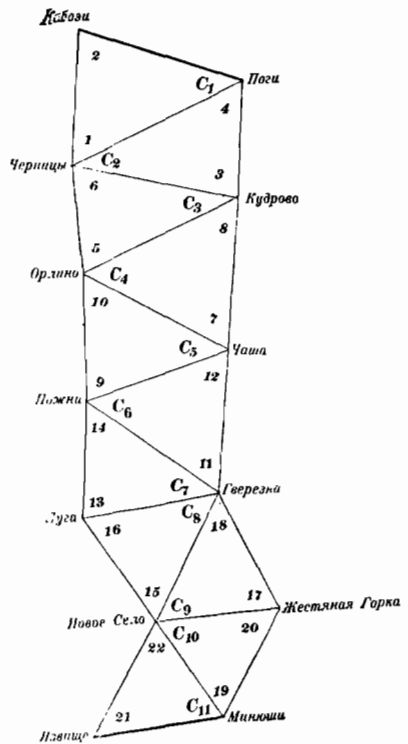
$$4.5310170.9$$

Ведя вычисление от „Поги—Кабози“ в сторону Шимского базиса, получим для „Язвище—Минюши“ логарифм 4.5310195,5.

Следовательно, свободный член базисного ур-ния:

$$v = + 24.6$$

Сокращенная схема вычисления приводится вслед за сим в особой таблице. Сокращенность схемы заключается в том, во-первых, что в ней совсем отсутствует графа с логарифмами синусов углов, входящих в вычисление сторон; во-вторых; при действительных вычислениях сперва выписывают, после графы „названия вершин“, *наблюдаемые* углы в треугольниках, затем в следующей графе „*уравненные сферические углы*“, которые получаются из наблюдаемых вычитанием третьей части невязки тр-ка, равной сумме углов, наблюдаемых в тр-ке минус  $180^\circ$  и минус сферический избыток  $\epsilon$  тр-ка; наконец, после этой графы уже идет графа „*плоские уравненные углы*“, которые получаются вычитанием из сферических уравненных углов одной трети сферического избытка  $\epsilon$  соответственного тр-ка.



Черт. 143а

одной трети сферического



№№ углов	НАЗВАНИЕ ВЕРШИН	Плоские уравненные углы	Log сторон в метрах	$\alpha, \beta, \gamma$	Поправки углов	Исправлен- ные логарифмы стор- он
1	Черницы . . . . .	52°10'37."22	4.4390191.3	+ 16.4	+ 0."11	4.4390191.3
2	Кабози . . . . .	69 16 14. 51	4.5123759.0	+ 8.0	- 0. 09	4.5123756.5
c <sub>1</sub>	Поги . . . . .	58 33 8. 27	4.4724505.6		- 0. 02	4.4724503.5
				928.3		
3	Кудрово . . . . .	50 37 25. 76	4.5123759.0	+ 17.3	+ 0. 09	4.5123756.5
4	Поги . . . . .	88 42 25. 68	4.6240872.4	0.0	- 0. 05	4.6240868.3
c <sub>2</sub>	Черницы . . . . .	40 40 8. 56	4.4382380.1		- 0. 04	4.4382375.1
				598.6		
5	Орлино . . . . .	98 9 43. 39	4.6240872.4	- 3.0	+ 0. 05	4.6240868.3
6	Черницы . . . . .	41 12 22. 76	4.4472443.1	+ 24.1	- 0. 12	4.4472436.3
c <sub>3</sub>	Кудрово . . . . .	40 37 53. 85	4.4422187.3		+ 0. 07	4.4422185.0
				1035.0		
7	Чаша . . . . .	60 25 9. 26	4.4472443.1	+ 11.9	+ 0. 10	4.4472436.3
8	Кудрово . . . . .	58 11 51. 55	4.4372475.2	+ 13.1	- 0. 10	4.4372465.9
c <sub>4</sub>	Орлино . . . . .	61 22 59. 19	4.4513107.6		0. 00	4.4513099.6
				938.2		
9	Пожни . . . . .	54 17 41. 63	4.4372475.2	+ 15.2	+ 0. 12	4.4372465.9
10	Орлино . . . . .	54 19 3. 94	4.4373720.4	+ 15.1	- 0. 12	4.4373707.4
c <sub>5</sub>	Чаша . . . . .	71 23 14. 43	4.5043445.9		0. 00	4.5043434.8
				1377.1		
11	Гверезна . . . . .	50 26 55. 67	4.4373720.4	+ 17.4	+ 0. 11	4.4373707.4
12	Чаша . . . . .	73 4 19. 63	4.5310492.3	+ 6.4	- 0. 08	4.5310476.8
c <sub>6</sub>	Пожни . . . . .	56 28 44. 70	4.4712878.0		- 0. 03	4.4712862.6
				910.2		
13	Луга . . . . .	62 31 26. 26	4.5310492.3	+ 10.9	+ 0. 08	4.5310476.8
14	Пожни . . . . .	73 20 21. 01	4.5643998.5	+ 6.3	- 0. 06	4.5643981.8
c <sub>7</sub>	Гверезна . . . . .	44 8 12. 73	4.4258688.3		- 0. 02	4.4258671.5
				454.3		
15	Новое Село . . . . .	71 14 42. 86	4.5643998.5	+ 7.2	+ 0. 08	4.5643981.8
16	Луга . . . . .	54 11 14. 65	4.4970803.6	+ 15.2	- 0. 10	4.4970784.8
c <sub>8</sub>	Гверезна . . . . .	54 34 2. 49	4.4991439.3		+ 0. 02	4.4991422.3
				784.6		
17	Жест. Горка . . . . .	54 11 42. 91	4.4970803.6	+ 15.1	+ 0. 09	4.4970784.8
18	Гверезна . . . . .	82 37 51. 32	4.5844493.3	+ 2.7	- 0. 06	4.5844473.0
c <sub>9</sub>	Новое Село . . . . .	43 10 25. 77	4.4232432.5		- 0. 03	4.4232411.6
				552.1		
19	Минюши . . . . .	69 10 20. 91	4.5844493.3	+ 8.0	+ 0. 07	4.5844473.0
20	Жест. Горка . . . . .	68 59 16. 46	4.5839145.3	+ 8.1	- 0. 07	4.5839123.8
c <sub>10</sub>	Новое Село . . . . .	41 50 22. 63	4.4379549.8		0. 00	4.4379528.9
				388.8		
21	Язвище . . . . .	63 45 30. 25	4.5839145.3	+ 10.3	+ 0. 10	4.5839123.8
22	Новое Село . . . . .	52 34 8. 26	4.5310195.5	+ 16.2	- 0. 12	4.5310171.0
c <sub>11</sub>	Минюши . . . . .	63 40 21. 49	4.5835934.2		+ 0. 02	4.5835911.8
				1070.8		

Величина:

$$\frac{v}{3 \sum \sigma}$$

в данном примере получилась равной

$$0.002721$$

После вычисления сторон с исправленными за базисное условие углами, для стороны „Язвищи—Минюши“ получился логарифм

$$4.5310171.0$$

т. е. отличающийся всего на одну единицу восьмого логарифмического знака от заданного значения.

е) *Условие азимутов.* Если цепь треугольников проложена между двумя основными (т. е. определенными из базисных сетей) сторонами, то обычно кроме базисного условия возникает еще и условие азимутов, потому что азимут каждой основной стороны определяется из астрономических наблюдений и следовательно получается возможность сопоставить астрономически определенный азимут стороны  $CD$  с *геодезическим* ее азимутом, вычисленным по азимуту  $AB$  и по сторонам и углам треугольников связывающих стороны  $AB$  и  $CD$ .

На земном эллипсоиде меридианы в точках  $A$  и  $B$  (черт. 143) не параллельны между собою. Поэтому азимут  $(BA)$  равен азимуту  $(AB) \pm 180^\circ$  и плюс некоторая величина  $\delta_1$ , приближенно равная:

$$\delta_1 = \frac{S_1 \sin(AB)}{p_m \sin 1''} \operatorname{tg} \varphi_m \dots \dots \dots (\delta)$$

где  $S_1$  — длина стороны  $AB$ ,  $\varphi_m$  — средняя широта на линии  $AB$ ,  $p_m$  — радиус кривизны перпендикулярного к меридиану сечения под широтой  $\varphi_m$ . Очевидно, если геодезический азимут будем передавать по *ходовой* линии  $ABa_1 b_1 D$  (черт. 143), то будем иметь:

$$\begin{aligned} \text{геодезический азимут } DC = \\ = (AB) + n \cdot 180^\circ + \delta_1 + c_1 + 4 + \delta_2 + 3 + c_3 + 8 + \delta_3 + 7 + c_5 + \\ + 12 + \delta_4 + 11 \end{aligned}$$

Здесь чрез  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  и  $\delta_4$  — обозначены „сближения меридианов“ по линиям:  $AB, Ba_1, a_1 b_1, b_1 D$ . Так как эти величины  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  и  $\delta_4$  сами есть функции длин сторон тр-ков и их азимутов, т. е. являются функциями *углов* тр-ков, то при составлении азимутного условия надлежало-бы ввести поправки как в углы:  $c_1, 4, 3, c_3, 8, 7, c_5, 12$  и  $11$ , так и в величины  $\delta$ . Но так как поправки наблюдаемых углов вызывают очень небольшие изменения в величинах  $\delta$ , то пренебрегая этими изменениями пишем:

$$\begin{aligned} (AB) + n \cdot 180^\circ + \delta_1 + c_1 + 4 + \delta_2 + 3 + c_3 + 8 + \delta_3 + 7 + c_5 + 12 + \\ + \delta_4 + 11 + (c_1) + (3) + (c_3) + (4) + (c_5) + (7) + (8) + (11) + (12) = (DC) \end{aligned}$$

полагая, что азимут  $(DC)$  определен *астрономически*.

Последнее уравнение можно переписать так:

$$\begin{aligned} (c_1) + (3) + (4) + (c_3) + (c_5) + (7) + (8) + (11) + (12) + \\ (DC)_n - (DC)_a = 0 \dots \dots \dots (12) \\ v = (DC)_n - (DC)_a = \text{геодезическому азимуту } DC \text{ минус} \\ \text{астрономический азимут } DC. \end{aligned}$$

Для получения геодезического азимута ( $DC$ )<sub>n</sub> нужно, очевидно, выполнить вычисление цепи треугольников в геодезических координатах на эллипсоиде. Поэтому ход вычислений здесь будет следующий:

1) в каждом тр-ке цепи получают уравненные сферические углы, путем разверстания невязки тр-ка поровну на каждый из трех его углов.

2) переходя от уравненных сферических углов к уравненным плоским, т. е. применяя теорему *Лежандра* вычисляют стороны треугольников семизначными логарифмами.

3) выбрав ходовую линию  $ABa_1b_1D$  производят по ней, по формулам *сфероидической* геодезии, постепенный перенос широт, долгот и азимутов, исходя от астрономической широты и долготы точки  $A$  и астрономического азимута ( $AB$ ).

Обычно, условие азимутов решается вместе с базисным. Чтобы не иметь дела с условиями фигур, при этом промежуточные углы  $\epsilon$  исключают из уравнения (12) при помощи соотношений:

$$(c_1) = - (1) - (2)$$

$$(c_3) = - (5) - (6) \text{ и т. д.}$$

f) *Условия сумм.* Если ряд тр-ков  $ABO, BOC, COD$  (черт. 144) вставляется между сторонами  $OA$  и  $OE$  ранее составленной и окончательно вычисленной триангуляции, то в новой сети при уравнении ее по углам, возникает условие,

чтобы сумма уравненных углов  $AOB, BOC, COD, DOE$  была бы равна величине  $Q$  угла  $AOE$ , выведенной из обработки прежней триангуляции. Это условие суммы, которое непременно должно присоединить к условиям сети, напишется, конечно, так:

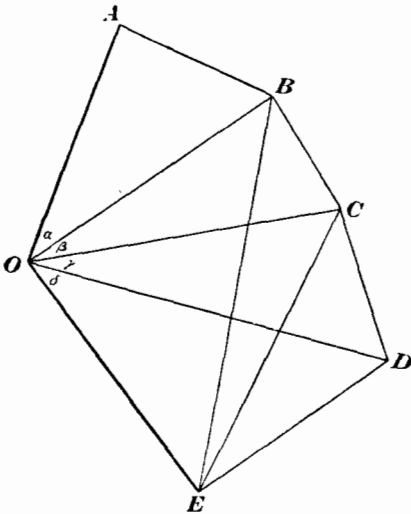
$$(\alpha) + (\beta) + (\gamma) + (\delta) + \alpha + \beta + \gamma + \delta - Q = 0 \quad (\sigma)$$

Если углы  $AOB, BOC, COD$  и  $DOE$  были измерены *независимо* друг от друга, и никаких *производных* углов от них на пункте  $O$  более не было измерено, то уравнение  $(\sigma)$ , составленное с *наблюдаемыми значениями*  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\delta$  этих углов можно включить прямо в число *уравнений сети*. Но если кроме углов  $AOB, BOC, COD$  и  $DOE$  были так-же *независимо* измерены еще углы  $AOC, COE$  и т. п., то тогда следует до уравновешивания сети

вывести вероятнейшие значения *необходимых* углов  $AOB, BOC, COD$  и  $DOE$  из уравновешивания *станции*, в которое следует ввести и условие суммы в виде уравнения  $(\sigma)$ . Это уравновешивание станции надлежит исполнить, как указано в первом примере пункта *b* настоящего параграфа. Очевидно вторичные поправки  $(\alpha)', (\beta)', (\gamma)'$  и  $(\delta)'$ , которые получатся из *уравнивания сети*, должны удовлетворять условию суммы в *сети* в таком виде:

$$(\alpha)' + (\beta)' + (\gamma)' + (\delta)' = 0 \dots \dots \dots (\sigma)'$$

Нередко условие суммы составленное в виде уравнения  $(\sigma)$ , решают до уравновешивания сети даже тогда, когда измерены на пункте  $O$  *независимо*



Черт. 144

друг от друга только углы  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$  и  $DOE$ ; в этом случае поправки углов на станции очевидно будут равны каждая

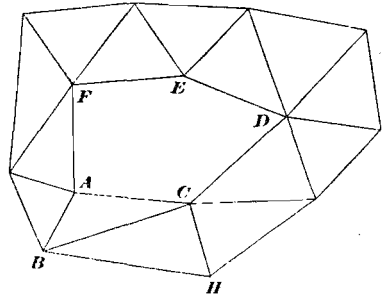
$$\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta - Q}{n}$$

где  $n$  — число углов, а в уравнения сети нужно будет ввести условие в виде уравнения (6)'. Если новая сеть уравнивается *по направлениям* (а это случается почти всегда), то направления, полученные из исполненных при составлении новой сети на  $O$  наблюдений, подлежат уравниванию на станции и соответственному исправлению до введения их в условия сети. Пусть выведенные из прежней сети направления для сторон  $OA$  и  $OE$  суть  $A_0$  и  $E_0$ , а из наблюдений на  $O$  при составлении новой сети пусть получились направления  $A, B, C, D, E$ . Поправки направлений  $A$  и  $E$  очевидно будут соответственно равны  $A_0 - A$  и  $E_0 - E$ , а следовательно поправка каждого из остальных направлений (см. пункт  $b$  настоящего параграфа) будет равна:

$$\Delta = \frac{(A_0 - A) + (E_0 - E)}{2}$$

Уравновешенные на станции направления представляются рядом чисел:  $A_0, B_1 = B + \Delta, C_1 = C + \Delta, D_1 = D + \Delta, E_0$ , которые и нужно будет ввести в условные уравнения сети, отыскивая из них поправки величин  $B_1, C_1$  и  $D_1$ ; при этом никакого условия суммы в сети уже не нужно будет вводить; поправки направлений  $A_0$  и  $E_0$  должны быть приняты в *уравнениях сети* равными нулю.

9) *Полигонные условия.* Если цепь треугольников образует замкнутый полигон, изображенный на черт. 145, то в ней возникают четыре условия, не входящие в число условий свободной сети. Если-бы не было измерено шести углов в треугольниках  $ACB$  и  $BCD$ , то замыкания полигона не произошло-бы, но все вершины его были-бы уже построены. Таким образом эти шесть углов должны привести к шести условиям сверх существующих в свободной сети, считаемой (по часовой стрелке) от  $AB$  до  $CH$ ; но два из шести этих условий являются условиями фигур в треугольниках  $ABC$  и  $CBH$ , и по причислении их к обычным условиям сети, останутся следовательно только четыре специально полигонных условия. Приняв некоторые значения координат точки  $A$ , азимута ( $AB$ ) и длины стороны  $AB$  и пройдя с вычислением от  $AB$  по ходу часовой стрелки через весь полигон, мы должны притти к тем-же значениям координат  $A$ , азимута ( $AB$ ) и длины  $AB$ ; другими словами четыре полигонные условия выражаются такими требованиями:



Черт. 145

1) сумма углов в полигоне  $AFEDCA$  должна быть равна геометрической сумме его углов: соблюдение этого требования приводит к согласию значения азимута ( $AB$ ), вычисленного из полигона, с данным значением того-же азимута.

2) должно удовлетворяться базисное уравнение, соответствующее вычислению  $AB$  по  $AB$  — же чрез весь полигон.

3) Вычисленная по элементам хода  $AFEDCA$  широта точки  $A$  (или ее абсцисса при прямоугольных сферических координатах) должна быть равна данной при этом вычислении широте  $\varphi_a$  точки  $A$  (или данной ее абсциссе  $x_a$ )

4) Вычисленная по элементам хода *AFEDCA* долгота точки *A* (или ее ордината) должна быть равна данной при этом вычислении долготы  $\lambda_a$  точки *A* (или данной ее ординате  $y_a$ ).

Полигонные условия решаются отдельно и после решения всех прочих условий сети.

Если координаты точки *D* и азимут *DC* (черт. 143) будут даны, то очевидно и в цепи незамкнутой, но заключенной между двумя основными сторонами, возникнут указанные четыре полигонные условия, причем первое условие заменится условием азимутов. Подробности составления и решения гономональных условий приведены во II части курса.

**49. Число условных уравнений.** В сети, построенной на одном базисе, без примыканий к другим сторонам ранее составленных триангуляций и без образования в ней самой замкнутых полигонов, общее число *S* условных уравнений при уравнивании углов равно  $N - 2n + 4$ ; под *N* понимается число всех измеренных в сети углов, а под *n* — число вершин, на которых были сделаны угловые измерения.

Для связи первых трех точек сети необходимо иметь три линии; каждая из последующих  $2n - 3$  точек определится пересечением двух линий (соединяющих ее с двумя уже построенными. Таким образом, если в сети будет  $3 + 2(n - 3)$  линии, то каждая последующая точка будет определяться, как пересечение двух линий, соединяющих ее с двумя предыдущими точками, и следовательно никаких еще боковых условий сети не возникает. Каждая лишняя, сверх числа  $2n - 3$ , линия оказывается соединяющей уже построенные точки сети и поэтому приводит к боковому условию. Таким образом, если всех линий в сети *p* (сплошных и несплошных), то число *c* независимых в ней боковых условий, равное числу избыточных линий, вычислится так:

$$c = p - (2n - 3) = p - 2n + 3 \dots \dots \dots (13)$$

Число *a* условий фигур и горизонтов (при уравнивании углов) будет равно

$$N - 2n + 4 - c$$

или 
$$a = N - p + 1 \dots \dots \dots (14)$$

Если число центральных точек в сети, служащих полюсами центральных систем равно *q*, то число условий горизонта равно *q*, а число *f* условий фигур вычислится по формуле:

$$f = N - p + 1 - q \dots \dots \dots (15)$$

Если уравниваются направления, то по чертежу сети ведется счет не углам, а направлениям и определение числа условных уравнений делается иначе. Если для определения относительного положения *n* точек необходимо иметь  $2n - 4$  угла, то для образования такого числа углов необходимо  $n + 2n - 4$  направления, если только все *n* точек — основные, т. е. на каждой из них исполняются измерения углов. Таким образом число необходимых для построения сети из *n* точек направлений равно  $3n - 4$ ; каждое лишнее, сверх этого числа  $3n - 4$ , направление приведет к одному, независимому от прочих, условию. Поэтому, называя чрез *D* число всех наблюдаемых в сети направлений, имеем для числа *S*<sub>1</sub> всех условных в ней уравнений формулу:

$$S_1 = D - 3n + 4 \dots \dots \dots (16)$$

Число боковых условий при уравнивании по направлениям определяется прежней формулой (13), а число *условий фигур* — так:

$$f = S_1 - c = D - p - n + 1 \dots \dots \dots (17)$$

Называя чрез  $l$  число *сплошных* линий в сети, имеем очевидно:  $D = l + p$ , и вследствие этого формула для  $f$  переписывается еще так:

$$f = l - n + 1 \dots \dots \dots (18)$$

Этой формулой (18) следует пользоваться вместо (15) и при уравнивании по углам.

Если в сети имеется  $q$  центральных точек, то число  $N$  всех углов, образующихся на всех станциях между каждыми двумя смежными направлениями одной станции, будет равно  $D - n + q$ , потому что на каждой центральной точке число таких углов равно числу взятых с нее направлений, а на каждой из остальных точек число таких углов на единицу меньше числа взятых направлений. Заменяя  $D$  чрез  $N + n - q$  в (16) и (17) получаем:

$$S_1 = N - 2n + 4 - q = S - q$$

$$f = N - p + 1 - q$$

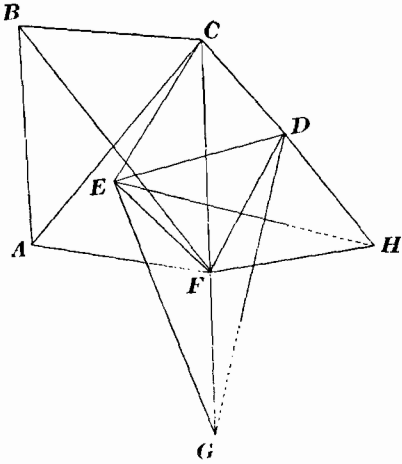
т. е. число условий фигур по формуле (18) получается то же самое, что и по формуле (15), но общее число  $S_1$  условий при уравнивании направлений меньше на  $q$  числа  $S$  уравнений при уравнивании по углам, что и должно быть. При  $q$  равно нулю, т. е. при отсутствии в сети центральных точек, число условных уравнений при уравнивании сети и по углам, и по направлениям остается одно и то же.

**50. Замечания относительно составления условных уравнений.**

В каждой сети можно составить условия фигур или условия боковые в числе, значительно превышающем определяемое соответственной формулой § 49-го число независимых условий того же вида. Это обстоятельство иногда ведет к ошибочному введению в число условий таких, которые являются следствиями уже введенных условий и так как число всех составленных уравнений данного вида будет равно, конечно, определяемому соответственной формулой § 49, то, следовательно, введение таких, зависящих от остальных, условий равносильно устранению из уравнивания сети такого-же числа независимых условий.

Чтобы при составлении условных уравнений не ввести условий, являющихся следствиями уже введенных можно рекомендовать следующий порядок. Имея чертеж сети с показанными на нем только *сплошными* линиями, выбирают и выписывают замкнутую фигуру для составления первого условия фигуры и затем на чертеже стирают одну из сторон этой фигуры; выбрав и выписав вторую замкнутую фигуру для второго условия фигуры, стирают в ней одну из сторон и т. д. — до тех пор, пока на чертеже сети не останется ни одной замкнутой фигуры; вообще, в каждой замкнутой фигуре, намеченной для составления из нее условия фигуры, стирают, по выписке ее, одну сторону — причем можно эту сторону брать и произвольно, но желательно выбирать стираемую сторону так, чтобы следующие условия не пришлось-бы составлять из фигур с большим числом вершин (это пожелание почти всегда осуществляется, если стирание стороны не ведет к уничтожению сразу двух треугольников). Составив затем чертеж сети с нанесением на него всех сплошных и несплошных линий, выбирают четырехугольник, или центральную систему или вообще фигуру с полюсом — для составления первого бокового условия и по выписке этой фигуры, стирают на чертеже либо одну ее диагональ, либо одну ее сторону; стираемый элемент,

если возможно, следует брать из числа не входящих в смежные четырехугольники или в смежные фигуры с полюсом и по стирании выбранного элемента *должно* остаться в сети определение каждой последующей точки относительно предыдущих из *треугольника*. Выбрав вторую фигуру для составления из нее второго бокового условия, стирают в ней один ее элемент



Черт. 146

с соблюдением уже вышеуказанного правила и т. д., до тех пор, пока сеть не обратится в *цепь треугольников*. Чтобы пояснить сказанное, рассмотрим сеть показанную на черт. 146: по выборе четырехугольника  $ECDF$  для составления из него бокового условия, нельзя в нем стирать ни диагональ  $CF$  (она входит в четырехугольник  $ABCF$ ), ни диагональ  $ED$  (она входит в четырехугольник  $EFDH$ ), а придется стирать сторону  $CD$  (или  $EC$ ).

При составлении условных уравнений необходимо иметь в виду, что чем сложнее вид условия, тем труднее будут дальнейшие уравнивательные вычисления. Поэтому принимают за правило независимые между собою условные уравнения составлять из возможных простых фигур: условия фигур состав-

ляют из треугольников, а условия боковые из четырехугольников и центральных систем с возможно меньшим числом вершин. Согласно сказанного, в четырехугольнике  $CEFD$  (черт. 146) три соответствующие ему независимые условия фигур нужно составить из тр-ков  $DEC$ ,  $CDF$  и  $CEF$ , хотя можно было-бы взять тр-ки  $DEC$  и  $CDF$  и четырехугольник  $DFEC$ ; точно также полюсное уравнение с полюсом в  $F'$  нужно составить из центральной системы  $EDGE$ , а не из системы  $ECDGF$ . При составлении полюсных уравнений из четырехугольников, можно за полюс принять любую из его четырех вершин; чем ближе принятая за полюс вершина к противоположащей ей диагонали, тем более острые углы войдут в полюсное уравнение и следовательно тем значительнее будут коэффициенты (котангенсы) при поправках углов в этом уравнении и свободный член уравнения. С другой стороны, чем более коэффициенты уравнения, тем менее влияют ошибки вычислений при его решении на точность вывода неизвестных. Поэтому, с точки зрения точности вычисления поправок углов из условных уравнений, выбор вершины четырехугольника за полюс не безразличен: следует собственно, принимать за полюс из четырех вершин ту, расстояние которой от противоположащей диагонали наименьшее. Несоблюдение этого правила приводит к ошибкам в поправках углов в сотых долях секунды; следовательно это правило необходимо соблюдать при обработке сетей I-го класса.

До сих пор в вопросе о составлении условных уравнений мы не касались вовсе вида поверхности, на которой располагается триангуляция. При вычислении триангуляции на эллипсоиде, свободный член в условном уравнении фигуры, написанном из некоторого треугольника  $ABC$ , определяется вычитанием из суммы измеренных углов этого треугольника геометрической суммы его углов, равной  $180^\circ$  плюс избыток  $\epsilon$  треугольника. Вследствие незначительности сторон тр-ка  $ABC$  по сравнению с размерами земного эллипсоида и вследствие близости земного эллипсоида к шару, можно при вычислении  $\epsilon$  эллипсоидальный треугольник  $ABC$  рассматривать как сфери-

ческий, взяв лишь надлежаще радиус сферы  $R$ . Величина радиуса  $R$  рассчитывается обычно по формуле  $R = \sqrt{pr}$ , в которой  $p$  и  $r$  суть соответственно радиусы кривизны в точке  $A$  кривой меридианной и кривой перпендикулярной к меридиану, проведенной на эллипсоиде через  $A$ . Называя через  $\Delta$  площадь треугольника  $ABC$ , очевидно имеем:

$$\varepsilon'' = \frac{\Delta}{R^2 \sin 1''} = \frac{\Delta}{pr \sin 1''}$$

Вследствие малости  $\varepsilon$ , площадь  $\Delta$  может быть всегда вычисляема, считая треугольник  $ABC$  за плоский, т. е. по формулам:

$$\Delta = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin (A+C)}$$

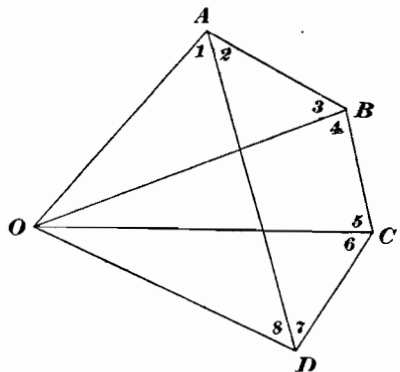
и следовательно для  $\varepsilon''$  получаются такие выражения:

$$\varepsilon'' = \frac{ab \sin C}{2pr \sin 1''} = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2pr \sin 1'' \sin (A+C)}$$

$$\varepsilon'' = [4] ab \sin C = [4] \frac{b^2 \sin A \sin C}{\sin (A+C)} \dots \dots \dots (20)$$

причем в (20) обозначена символом [4] величина логарифма  $\frac{1}{2pr \sin 1''}$ ; эта

величина [4] есть функция широты места и при вычислениях извлекается из особых геодезических таблиц по аргументу грубо известной (взятой с карты) широты точки  $A$ . Вследствие малости  $\varepsilon''$  вычисление его можно производить с приближенными значениями  $a$ ,  $b$ ,  $A$  и  $C$ : в действительных работах для  $a$  и  $b$  берут значения, выведенные из предварительного расчета длин сторон треугольников с углами, неприведенными к центрам тригонометрических знаков, а вместо  $A$  и  $C$  подставляют в (20) измеренные значения этих углов, также не приведенные к центрам знаков. При сторонах тр-ка  $ABC$  около 25 км,  $\varepsilon''$  примерно равен 3''. Если триангуляция вычисляется на сфере, то радиус ее  $R$  вычисляется по  $p$  и  $r$ , взятых для широты начала сферических прямоугольных координат.



Черт. 147

При составлении полюсного уравнения из фигуры  $ABCO$ , (черт. 147) расположенной на эллипсоиде, тождество:

$$\frac{AO}{OB} \cdot \frac{OB}{OC} \cdot \frac{OC}{OD} \cdot \frac{OD}{OA} = 1$$

остается, конечно, в силе. Рассматривая тр-ки  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$  и  $DOA$ , как сферические и обозначая их избытки соответственно через  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  и  $\varepsilon_4$ , можем применить к решению этих тр-ков теорему Лезжандра и написать:

$$\frac{AO}{OB} = \frac{\sin \left[ III - \frac{\varepsilon_1}{3} \right]}{\sin \left[ I + II - \frac{\varepsilon_1}{3} \right]}; \quad \frac{OB}{OC} = \frac{\sin \left[ V - \frac{\varepsilon_2}{3} \right]}{\sin \left[ IV - \frac{\varepsilon_2}{3} \right]}$$



и следовательно полюсное уравнение представится в нижеследующей форме (21):

$$\frac{\sin \left[ III - \frac{\varepsilon_1}{3} \right]}{\sin \left[ I + II - \frac{\varepsilon_1}{3} \right]} \cdot \frac{\sin \left[ V - \frac{\varepsilon_2}{3} \right]}{\sin \left[ IV - \frac{\varepsilon_2}{3} \right]} \cdot \frac{\sin \left[ VII + VIII - \frac{\varepsilon_3}{3} \right]}{\sin \left[ VI - \frac{\varepsilon_3}{3} \right]} \cdot \frac{\sin \left[ I - \frac{\varepsilon_4}{3} \right]}{\sin \left[ VIII - \frac{\varepsilon_4}{3} \right]} = 1$$

Но очевидно, что для фигуры  $ABCD$  существует и другое тождество:

$$\frac{\sin \frac{OA}{R}}{\sin \frac{OB}{R}} \cdot \frac{\sin \frac{OB}{R}}{\sin \frac{OC}{R}} \cdot \frac{\sin \frac{OC}{R}}{\sin \frac{OD}{R}} \cdot \frac{\sin \frac{OD}{R}}{\sin \frac{OA}{R}} = 1$$

понимаемое в том смысле, что отношение синусов сторон  $OA$  и  $OD$  (выражаемых в радиальной мере), определяемое чрез ряд тр-ков  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$ , должно быть равно отношению синусов тех-же сторон, выводимому из тр-ка  $AOD$ . Заменяя в этом тождестве отношения синусов сторон отношениями синусов уравновешенных углов, им противоположащих, напомним полюсное уравнение в виде:

$$\frac{\sin III}{\sin [I+II]} \cdot \frac{\sin V}{\sin IV} \cdot \frac{\sin [VII+VIII]}{\sin VI} \cdot \frac{\sin I}{\sin VIII} = 1 \quad \dots (22)$$

Уравнение (22) показывает, что при составлении полюсного уравнения из фигуры, расположенной на эллипсоиде, можно эту фигуру рассматривать, как плоскую; обычно этим выводом и пользуются при составлении боковых условий в триангуляциях эллипсоидальных или сферических. Из уравнения (21) следует, что если измеренные значения углов, синусы которых входят в боковое условие, уменьшить каждое на треть избытка соответствующего треугольника, и с такими измененными значениями углов составить полюсное уравнение, то по приведении его к линейному виду, мы получим в нем коэффициенты при поправках углов и свободный член те-же самые, как и в уравнении, составленном для той же фигуры обычным порядком с применением формулы (22).

Этим пользуются для проверки вычисления свободных членов в полюсных уравнениях: составив полюсное уравнение обычным способом, т. е. приведя уравнение (22) к линейному виду по введению в него измеренных углов и их поправок, затем уменьшают каждый угол, синус которого входит в уравнение, на одну треть избытка соответственного треугольника, и с такими измененными углами вновь вычисляют свободный член.

Ошибки в величинах коэффициентов при поправках и в величинах свободных членов, сделанные при составлении условных уравнений, обнаруживаются лишь при окончательном вычислении сети, т. е. при определении по уравновешенным углам длин сторон треугольников, азимутов и координат точек сети; при исполнении уравнительных вычислений указанные ошибки в коэффициентах и в свободных членах условных уравнений, конечно, остаются незамеченными. Таким образом, чтобы не переделывать большую вычислительную работу по определению поправок углов или направлений заново, необходимо до приступа к ней совершенно убедиться в полной правильности составления условных уравнений. Величины свободных членов в уравнениях фигур могут быть проконтролированы путем вычисления угловых невязок в фигурах, являющихся суммами или разностями фигур, введенных в условные уравнения; так, имея в условных уравнениях треугольников  $DFC$ ,

$CDF$  и  $CEF$  свободные члены соответственно  $v_1, v_2, v_3$  и подсчитав угловые невязки:  $w$  — в четырехугольнике  $CEFD$ ,  $v_4$  в тр-ке  $DFE$  (черт. 146), напишем такие контрольные уравнения:

$$v_2 + v_3 = w$$

$$v_2 + v_3 - v_1 = v_4$$

Что касается полюсных уравнений, то при составлении сетей I-го класса свободные члены уравнений нередко поверяют уже указанным способом, основанным на соотношениях между уравнениями (21) и (22).

В каждом четырехугольнике имеется такая *поверка*: уравнение соответствующее полюсу в конце  $A$  диагонали  $AB$ , равно сумме двух уравнений, составленных с принятием полюсов: в другом конце  $B$  той-же диагонали  $AB$  и в фиктивной точке пересечения двух диагоналей четырехугольника. Однако применение этой проверки громоздко, и здесь более шансов ошибиться в контрольных уравнениях, чем вверяемом ими; случаев такой проверки не приходилось встречать. Из сказанного ясно, что проверки составления условных уравнений, основанные на геометрических и алгебраических соотношениях, далеко не полны. Поэтому наилучшим средством контроля следует признать здесь независимое составление одних и тех же уравнений *двумя* вычислителями.

Коэффициенты при поправках углов в уравнениях фигур и горизонтов равны либо единице, либо нулю; коэффициенты-же при поправках в полюсных уравнениях нередко выражаются большими числами (десятками и сотнями единиц). Для удобства последующего составления и решения нормальных уравнений коррелат, надлежит, в случае значительности коэффициентов полюсных уравнений, разделить эти уравнения на 10, на 20 и даже на 100 — так, чтобы после этого деления коэффициенты полюсных уравнений имели бы целыми только единицы\*).

Если уравниваются направления, то в каждом условном уравнении сумма коэффициентов при поправках направлений должна быть равна нулю: в самом деле, условное уравнение для направлений получается собственно из условного уравнения для углов посредством замены поправки каждого угла разностью поправок двух направлений его образующих; следовательно, коэффициент, стоявший при поправке угла, войдет со знаком плюс в множитель при поправке одного из этих направлений и со знаком минус — в множитель при поправке другого из этих двух направлений. Условие равенства нулю суммы коэффициентов при поправках направлений в каждом условном уравнении может служить проверкой приведения подобных членов в этих уравнениях.

Как уже было указано выше (§ 47) составлению условных уравнений сети предшествуют уравнивательные вычисления на станциях, некоторые примеры таких уравнивательных вычислений на станциях были приведены в § 48 но конечно, этими примерами нельзя ограничиться при сколько-нибудь полном изучении вопроса о составлении тригонометрических сетей; получающийся пробел восполняется отчасти в § 41 и полностью в главе XII-й.

В заключение параграфа нужно остановиться на вопросе о допустимых размерах свободных членов в условных уравнениях. В триангуляции I класса углы измеряются с средней ошибкой  $\pm 0''.6$  —  $\pm 1''.0$ ; в триангуляциях II класса средняя ошибка измеренного угла около  $\pm 2''$  —  $\pm 2''.5$ ; в триангуляции

\* При этом следует сделать округления в коэффициентах, сообразив, конечно, вызываемые этими округлениями погрешности; в свободном члене округления, понятно, не допустимы.

III класса при упогреблении десятисекундных инструментов— эта ошибка угла около  $\pm 3''{,}5 - 4''{,}5$  поэтому, *невязка треугольника* не должна превышать:

- для I класса  $\pm 3''{,}5$
- для II класса  $\pm 6''$
- для III класса  $\pm 12''$

принимая, что для суммы из трех слагаемых предельная ошибка в два раза более средней ошибки суммы.

Что касается боковых условий, то написав одно из таких условий в виде:

$$a_1 (1) + a_2 (2) + a_3 (3) + \dots + v = 0$$

и предположив, что более никаких условных уравнений в сети не существует, мы найдем из написанного уравнения:

$$(1) = -\frac{a_1 v}{\sum a^2}; (2) = -\frac{a_2 v}{\sum a^2} \text{ и т. д.}$$

Другими словами, взяв сумму квадратов коэффициентов бокового уравнения, делим на нее свободный член  $v$ , а умножив затем результат деления на *наибольший* в уравнении коэффициент  $a$ , получим *наибольший размер поправки*, требуемой для *направления* данным боковым условием. Эта наибольшая поправка должна быть менее:

- одной секунды — для сети I класса
- трех секунд — для сети II класса
- пяти секунд — для сети III класса.

**51. Составление и решение нормальных уравнений коррелат**

Обозначим: 1) веса измеренных (или вернее выведенных из уравниваний на станциях) направлений (или углов) 1, 2, 3, . . . .  $N$  соответственно чрез  $p_1, p_2, p_3 \dots p_N$ ; 2) коэффициенты первого условного уравнения—буквами  $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ ; коэффициенты второго условного уравнения буквами  $b_1, b_2, b_3 \dots b_N$ ; коэффициенты третьего условного уравнения—буквами  $c_1, c_2, c_3 \dots c_N$ ; и т. д.—причем коэффициенты при поправке направления  $k$  во всех уравнениях сопровождаются одним и тем-же указателем  $k$ ; 3) свободные члены первого, второго, третьего и т. д. уравнений—соответственно чрез  $v_1, v_2, v_3 \dots$

По составлении условных уравнений, их коэффициенты и свободные члены выписываются в особую „таблицу условных уравнений“ следующего вида:

№№ ур-ний	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	.....	(n)	v
	1 $p_1$	1 $p_2$	1 $p_3$	1 $p_4$	1 $p_5$		1 $p_N$	
I	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$		$a_N$	$v_1$
II	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$		$b_N$	$v_2$
III	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$		$c_N$	$v_3$
IV								
V	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$h_4$	$h_5$		$h_N$	$v_5$
	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$		$s_N$	





СХЕМА ГАУССА.

	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$v$	$s$
$\left\{ \begin{array}{l} - \frac{v}{[aa]} \\ - \frac{[ad]}{[aa]} k_4 \\ - \frac{[ac]}{[aa]} k_3 \\ - \frac{[ab]}{[aa]} k_2 \end{array} \right\}$ $+ \left\{ \begin{array}{l} \frac{[bl.1]}{[bb.1]} \\ - \frac{[bd.1]}{[bb.1]} k_4 \\ - \frac{[bc.1]}{[bb.1]} k_3 \end{array} \right\}$	$[aa]$ $lg [aa]$	$[ab] \times$ $lg [ab]$ $lg \frac{[ab]}{[aa]}$	$[ac] \ominus$ $lg [ac]$ $lg \frac{[ac]}{[aa]}$	$[ad] \text{ } 5$ $lg [ad]$ $lg \frac{[ad]}{[aa]}$	$v_1$ $lg v_1$ $lg \frac{v_1}{[aa]}$	$s_1$ $lg s_1$ $lg \frac{s_1}{[aa]}$
		$[bb]$ $\frac{[ab][ab]}{[aa]} \times$	$[bc]$ $\frac{[ab][ac]}{[aa]} \times$ $\ominus$	$[bd]$ $\frac{[ab][ad]}{5[aa]} \times$	$v_2$ $\frac{[ab]v_1}{[aa]} \times$	$s_2$ $\frac{[ab] \cdot s_1}{[aa]} \times$
		$[bb.1] \times \times$ $lg [bb.1]$	$\oplus [bc.1] \times \times$ $lg [bc.1]$ $lg \frac{[bc.1]}{[bb.1]}$	$\ast [bd.1] \times \times$ $lg [bd.1]$ $lg \frac{[bd.1]}{[bb.1]}$	$[bh.1] \times \times$ $lg [bh.1]$ $lg \frac{[bh.1]}{[bb.1]}$	$[bs.1] \times \times$ $lg [bs.1]$ $lg \frac{[bs.1]}{[bb.1]}$
		$[cc]$ $\frac{[ac][ac]}{[aa]} \ominus$ $\frac{[bc.1][bc.1]}{[bb.1]} \oplus$	$[cd]$ $\frac{[ac][ad]}{5[aa]} \ominus$ $\frac{[bc.1][bd.1]}{[bb.1]} \oplus \ast$	$v_3$ $\frac{[ac]v_1}{[aa]} \ominus$ $\frac{[bc.1][bh.1]}{[bb.1]} \oplus$	$s_3$ $\frac{[ac] \cdot s_1}{[aa]} \ominus$ $\frac{[bc.1][bs.1]}{[bb.1]} \oplus$	
	$4 [cc.2]$ $lg [cc.2]$	$4 [cd.2]$ $lg [cd.2]$ $lg \frac{[cd.2]}{[cc.2]}$	$4 [ch.2]$ $lg [ch.2]$ $lg \frac{[ch.2]}{[cc.2]}$	$4 [cs.2]$ $lg [cs.2]$ $lg \frac{[cs.2]}{[cc.2]}$		
	$[dd]$ $\frac{[ad][ad]}{5[aa]}$ $\frac{[bd.1][bd.1]}{[bb.1]} \ast$ $\frac{[cd.2][cd.2]}{7[cc.2]}$	$v_4$ $\frac{[ad] \cdot v_1}{5[aa]}$ $\frac{[bd.1][bh.1]}{[bb.1]} \ast$ $\frac{[cd.2][ch.2]}{7[cc.2]}$	$s_4$ $\frac{[ad] \cdot s_1}{5[aa]}$ $\frac{[bd.1][bs.1]}{[bb.1]} \ast$ $\frac{[cd.2][cs.2]}{7[cc.2]}$			
	$8 [dd.3]$ $lg [dd.3]$	$[dh.3] \text{ } 8$ $lg [dh.3]$ $lg \frac{[dh.3]}{[dd.3]}$	$k_4 = \frac{[dh.3]}{[dd.3]}$			

Проверкою правильности вычисления коррелят и по ним—поправок, слугит соблюдение равенства:

$$\sum p \delta^2 = - [kv]$$

Средняя ошибка  $\mu$  единицы веса определится по формуле:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum p \delta^2}{r}}$$

где  $r$ —число условных уравнений. Обычно под  $\mu$  понимается средняя ошибка угла или направления (в зависимости от того уравнивается сеть по углам или по направлениям), измеренного определенным числом приемов. Сравнивая  $\mu$  с выведенной из обработки материала на станциях средней ошибкой  $\mu_1$  угла или направления, измеренного тем-же числом приемов, мы получаем возможность судить о систематических ошибках в углах триангуляции; обычно  $\mu > \mu_1$ . Наконец, должно отметить, что при уравнивании направлений на каждом пункте сети сумма поправок направлений, умноженных на соответственные веса, равняется нулю:  $[p\delta] = 0$ . Это видно из следующих соображений. Если в некоторое условное уравнение входит поправка  $\delta_t$  направления  $T$ , то в это-же уравнение непременно войдет еще и поправка  $\delta_s$  другого направления  $S$  наблюдаемого с того-же тригонометрического пункта  $O$ , что и направление  $T$ ; другими словами поправки направлений, наблюдаемых на одном пункте, входят в каждое условное уравнение *парно*—соответственно тому, что в условных уравнениях при переходе к уравниванию направлений приходится поправку каждого угла заменять разностью поправок *двух* направлений, образующих этот угол. При этом поправки двух направлений, образующих в условном уравнении *пару*, входят в него с коэффициентами равными, но противоположными по знаку. Следовательно, если  $\delta_t$  и  $\delta_s$  образуют пару в некотором условном уравнении с номером  $r$  и коэффициенты при них в этом уравнении будут  $h$  и  $-h$ , то при весах направлений  $T$  и  $S$ , равных  $p_t$  и  $p_s$ , в выражениях  $\delta_t$  и  $\delta_s$  чрез корреляты

войдут члены: для  $\delta_t \dots \frac{hk_r}{p_t}$  и для  $\delta_s \dots -\frac{hk_r}{p_s}$ ; эти члены дадут в  $[p\delta]$ ,

образованной для пункта  $O$  пару слагаемых:  $\frac{p_t hk_r}{p_t}$  и  $-\frac{p_s hk_r}{p_s}$ , в сумме рав-

ную нулю. Очевидно, что суммируя выраженные чрез корреляты поправки направлений, наблюдаемых с одного пункта  $O$ , мы будем иметь сумму, состоящую из пар слагаемых, соответствующих парам поправок, причем каждая такая пара слагаемых будет равна нулю.

**52. Упрощения уравнивательных вычислений.** Выше было уже отмечено, что нередко строгое уравнивание сети представляет задачу трудно осуществимую практически, вследствие чего иногда приходится поступаться строгостью решения этой задачи и вносить в него разные упрощения. Одно из упрощений состоит в том, что условные уравнения:

$$\varphi_1 [(1), (2), (5) \dots \dots \dots (n)] + v_1 = 0$$

$$\varphi_2 [(1), (3), (4) \dots \dots \dots ] + v_2 = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\varphi_k [(2), (6), (7) \dots \dots \dots ] + v_k = 0$$

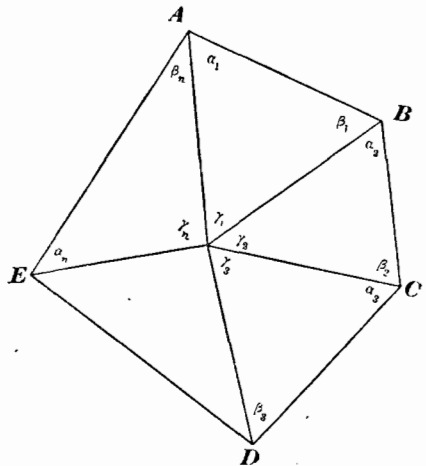
разделяют на две группы: первую с числом уравнений  $f$ , и вторую—с числом уравнений  $k-f$ . Найдя поправки углов (или направлений) из решения

первой группы уравнений и, исправив этими поправками наблюдаемые углы, с исправленными углами составляют уравнения второй группы и, решая только эти  $k-f$  уравнений, находят *вторичные* поправки углов. Исправив этими вторичными поправками углы, уже однажды исправленные и полученные из решения первой группы  $f$  уравнений, с такими вторично-исправленными углами составляют снова уравнения первой группы и, решая их отдельно, находят *третичные* поправки углов, по исправлении коими *вторично-выведенных* углов, составляют уравнения второй группы и т. д. Очевидно, что при нахождении третичных поправок мы имеем коэффициенты в уравнениях первой группы те-же самые, что и при нахождении первичных поправок: при втором решении этих уравнений в них изменятся только свободные члены; точно также в уравнениях второй группы при нахождении из них четвертичных поправок коэффициенты будут те-же самые, что и при нахождении вторичных поправок, а изменятся только свободные члены. Отсюда вытекает, что в *Гауссовой* схеме при переходе от одного решения данной группы уравнений к последующему решению той же группы, придется *переделывать вычисление лишь в графе свободных членов*; это обстоятельство, конечно, весьма существенно. Указанный способ определения поправок, очевидно есть способ последовательных приближений. В фундаментальных сочинениях по способу наименьших квадратов доказывается, что этот способ при достаточно большом числе приближений, приводит к совершенно строгим результатам, которые получились-бы из решения всех вместе условных уравнений, без разделения их на группы. В практике кончают уравнивательные вычисления, когда видят, по уменьшению величин поправок в ряде исполненных приближений, что поправки, которые получаются из следующих приближений, могут быть отброшены. В этом способе важно удачно разбить уравнения на группы, чтобы иметь быструю сходимость последующих приближений.

Другой путь упрощений уравнивательных вычислений состоит в том, что, пользуясь простым видом некоторых условных уравнений, выражают поправки ряда углов  $\alpha, \beta, \delta \dots$  чрез поправки всех остальных углов  $\varphi, \psi, \xi \dots$  и затем исключают из условных уравнений эти углы  $\alpha, \beta, \delta \dots$ ; таким образом *уменьшают число условных уравнений* на число тех уравнений, из которых углы  $\alpha, \beta, \delta \dots$  были выражены чрез углы  $\varphi, \psi, \xi \dots$ . Решая это уменьшенное число уравнений, затем по найденным поправкам углов  $\varphi, \psi, \xi$  определяют поправки исключенных углов при помощи соотношений, приведших к их исключению. Очевидно, *задача здесь будет решена под условием минимума суммы квадратов поправок только углов  $\varphi, \psi, \xi \dots$  (не исключенных)*, и в этом и будет заключаться нарушение строгости уравнивания.

Нередко в одном и том-же уравнивании применяют вместе и тот, и другой прием упрощения, вводя кроме того произвольные допущения. Рассмотрим следующие примеры упрощенного и произвольного уравнивания.

Пусть (черт. 148) имеем *центральную систему* из  $n$  тр-ков. Называя в



Черт. 148





Исправив найденными *первичными* поправками углы  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  и называя исправленные значения этих углов через  $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, \dots, \alpha'_n, \beta'_n, \gamma'_n$ , а вторичные поправки их соответственно через  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n$ , — напишем такие условные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + y_1 + z_1 &= 0 \\ x_2 + y_2 + z_2 &= 0 \\ \dots &\dots \\ x_n + y_n + z_n &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (b)$$

$$z_1 + z_2 + z_3 + \dots = z_n = 0 \dots \dots \dots (c)$$

$$\frac{\text{Sin} [\beta'_1 + y_1] \text{Sin} [\beta'_2 + y_2] \dots \text{Sin} [\beta'_n + y_n]}{\text{Sin} [\alpha'_1 + x_1] \text{Sin} [\alpha'_2 + x_2] \dots \text{Sin} [\alpha'_n + x_n]} = 1$$

Приводя последнее ур-ние к линейному виду, перепишем его так:

$$a_1 x_1 - b_1 y_1 + a_2 x_2 - b_2 y_2 + \dots + a_n x_n - b_n y_n + v = 0 \dots \dots (d)$$

причем  $a_1, b_1, \dots, a_n$  и  $b_n$  суть соответственно переменные в логарифмах синусов углов  $\alpha'_1, \beta'_1, \dots, \alpha'_n, \beta'_n$ , а  $v$  — вычисляется по формуле:

$$v = \log \frac{\text{Sin} \alpha'_1 \cdot \text{Sin} \alpha'_2 \dots \text{Sin} \alpha'_n}{\text{Sin} \beta'_1 \cdot \text{Sin} \beta'_2 \dots \text{Sin} \beta'_n}$$

Пользуясь ур-ниями (b), исключим поправки  $z$ , и после этого будем иметь дело лишь с двумя условными ур-ниями:

$$x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + \dots + x_n + y_n = 0 \dots \dots \dots (c_1)$$

$$a_1 x_1 - b_1 y_1 + a_2 x_2 - b_2 y_2 + \dots + a_n x_n - b_n y_n + v = 0 \dots \dots (d)$$

К этим уравнениям присоединяем условие *минимума* функции:

$$W = \sum_I^n (x^2 + y^2 + z^2) = \sum_I^n (x^2 + y^2 + (x + y)^2)$$

Называя коррелаты, соответствующие ур-ниям (c<sub>1</sub>) и (d), чрез  $B$  и  $A$ , составляем выражение:

$$W - 2B \Sigma(x + y) - 2A \Sigma(ax - by)$$

по дифференцировании которого по  $x_1, y_1, \dots, y_n, x_n$  получим такие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + y_1 - B - a_1 A &= 0 \\ 2y_1 + x_1 - B + b_1 A &= 0 \\ \dots &\dots \\ 2x_k + y_k - B - a_k A &= 0 \\ 2y_k + x_k - B + b_k A &= 0 \\ \dots &\dots \\ 2x_n + y_n - B - a_n A &= 0 \\ 2y_n + x_n - B + b_n A &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (e)$$

Из ур-ний (e) легко получаем:

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{3} \left\{ A (2a_k + b_k) + B \right\} \\ y_k &= -\frac{1}{3} \left\{ A (a_k + 2b_k) - B \right\} \end{aligned} \dots \dots \dots (l)$$

Подставив выражения (f) в условные ур-ния (e<sub>1</sub>) и (d), и обозначая по прежнему:

$$\sigma_k = \frac{2}{3} [a_k^2 + b_k^2 + a_k b_k] = \frac{1}{3} \left\{ (a_k + b_k)^2 + a_k^2 + b_k^2 \right\}$$

напишем:

$$\begin{aligned} A \Sigma \sigma - \frac{1}{3} B \Sigma (b_k - a_k) + v &= 0 \\ \frac{1}{3} A \Sigma (b_k - a_k) - \frac{2}{3} n \cdot B &= 0 \end{aligned}$$

Решая последние два ур-ния, имеем:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{2n \cdot v}{2n \Sigma \sigma - \frac{1}{3} \left\{ \Sigma (b_k - a_k) \right\}^2} \\ B &= \frac{v \Sigma (b_k - a_k)}{2n \Sigma \sigma - \frac{1}{3} \left\{ \Sigma (b_k - a_k) \right\}^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (g)$$

Указанный способ уравнивания центральной системы является *совершенно строгим*.

Последовательность его исполнения представляется в таком виде:

- 1) Вычисляют для каждого тр-ка его невязку  $v$ :  $v$  = сумме измеренных углов минус геометрическая сумма углов треугольника.
- 2) Вычисляют  $q$  = сумме углов около полюса минус  $360^\circ$ .
- 3) Определяют первичные поправки по формулам (2):

$$\begin{aligned} (\alpha_1) = (\beta_1) &= -\frac{v_1 + k_{n+1}}{3} & (\gamma_1) &= \frac{2k_{n+1} - v_1}{3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\alpha_n) = (\beta_n) &= -\frac{v_n + k_{n+1}}{3} & (\gamma_n) &= \frac{2k_{n+1} - v_n}{3} \end{aligned}$$

$$k_{n+1} = \frac{\Sigma v - 3q}{2n} \quad (n \text{ — число тр-ков системы}).$$

4) Исправляют первичными поправками углы  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ , и вычисляют с исправленными углами свободный член  $v$  бокового условия:

$$v = \log \frac{\sin \alpha'_1 \sin \alpha'_2 \dots \sin \alpha'_n}{\sin \beta'_1 \sin \beta'_2 \dots \sin \beta'_n}$$

и попутно выписывают изменения  $\log \sin$ 'ов углов  $\alpha$  и  $\beta$ , обозначая их для угла  $\alpha'_k$  — чрез  $a_k$  и для угла  $\beta'_k$  — чрез  $b_k$ .

5) Вычисляют коррелаты  $A$  и  $B$  по формуле (g).

$$A = - \frac{2n \cdot v}{2n \Sigma \sigma - \frac{1}{3} \left\{ \Sigma (b_k - a_k) \right\}^2}$$

$$B = - \frac{v \Sigma (b_k - a_k)}{2n \Sigma \sigma - \frac{1}{3} \left\{ \Sigma (b_k - a_k) \right\}^2}$$

$$\sigma = \frac{1}{3} \left\{ (a_k + b_k)^2 + a_k^2 + b_k^2 \right\}$$

6) Определяют *вторичные* поправки  $x, y, z$  — соответственно углов  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  по формулам:

$$x_k = \frac{1}{3} \left\{ A (2a_k + b_k) + B \right\}$$

$$y_k = - \frac{1}{3} \left\{ A (a_k + 2b_k) - B \right\}$$

$$z_k = \frac{1}{3} \left\{ A (b_k - a_k) - 2B \right\}$$

Нередко в сетях нисших разрядов перед нахождением вторичных поправок вводят *произвольное* допущение о равенстве нулю всех поправок  $z$ . Тогда ур-ния (b) переписутся в виде:

$$x_1 = - y_1$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_n = - y_n$$

Исключая вовсе при помощи этих ур-ний поправки  $y$  из уравнивания мы будем иметь дело только с одним условным ур-нием (d), которое теперь напишется так:

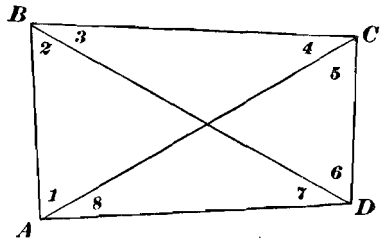
$$(a_1 + b_1) x_1 + (a_2 + b_2) x_2 + \dots + (a_n + b_n) x_n + v = 0$$

Очевидно будем теперь иметь, применяя способ наименьших квадратов:

$$x_1 = - y_1 = - \frac{v (a_1 + b_1)}{\sum_1^n (a_k + b_k)^2}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_n = - y_n = - \frac{v (a_n + b_n)}{\sum_1^n (a_k + b_k)^2}$$



Черт. 148а

*Уравнивание геодезического четырехугольника.* Геодезический четырехугольник (148а) так часто входит в уравнивание триангуляции, что следует рассмотреть особый порядок его вычисления, аналогичный изложенному выше в отношении центральной системы и приводящий к значительному

сокращению труда. Найдем сперва *первичные* поправки углов, не принимая в расчет бокового условия четырехугольника. Три условных ур-ния фигур напишутся так:

$$\begin{aligned} (1) + (2) + (3) + (4) + v_1 &= 0 \quad \text{из тр-ка } ABC \\ (3) + (4) + (5) + (6) + v_2 &= 0 \quad \text{„ „ } BCD \\ (5) + (6) + (7) + (8) + v_3 &= 0 \quad \text{„ „ } CDA \end{aligned}$$

а соответствующие им нормальные ур-ния коррелат:

$$\begin{aligned} 4k_1 + 2k_2 + v_1 &= 0 \\ 2k_1 + 4k_2 + 2k_3 + v_2 &= 0 \\ 2k_2 + 4k_3 + v_3 &= 0 \end{aligned}$$

Решая эти ур-ния и вычисляя затем поправки находим:

$$\left. \begin{aligned} (1) = (2) &= \frac{1}{8} (-3v_1 + 2v_2 - v_3) \\ (3) = (4) &= \frac{1}{8} (-v_1 - 2v_2 + v_3) \\ (5) = (6) &= \frac{1}{8} (+v_1 - 2v_2 - v_3) \\ (7) = (8) &= \frac{1}{8} (-v_1 + 2v_2 - 3v_3) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (h)$$

Исправив этими первичными поправками измеренные углы, составляем вновь условные ур-ния, причем вторичные поправки углов 1, 3, 5 и 7 называем соответственно чрез  $x_1, x_2, x_3$  и  $x_4$ , а вторичные поправки углов 2, 4, 6 и 8 называем соответственно чрез  $y_1, y_2, y_3$  и  $y_4$ .

Далее обозначаем переменные логарифмов синусов углов 1, 3, 5 и 7 соответственно чрез  $a_1, a_2, a_3$  и  $a_4$ , а переменные логарифмов синусов углов 2, 4, 6 и 8 соответственно чрез  $b_1, b_2, b_3$  и  $b_4$ . Теперь условные ур-ния четырехугольника напишутся так:

$$\begin{aligned} x_1 + y_1 + x_2 + y_2 &= 0 \\ x_2 + y_2 + x_3 + y_3 &= 0 \\ x_3 + y_3 + x_4 + y_4 &= 0 \\ \Sigma ax - \Sigma by + v &= 0 \end{aligned}$$

$$v = \lg \frac{\sin 1 \cdot \sin 3 \cdot \sin 5 \cdot \sin 7}{\sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 6 \cdot \sin 8}$$

причем при составлении бокового условия за полюс взята точка пересечения диагоналей четырехугольника.

Вводим обозначения:

$$x_1 + y_1 = t$$

Тогда:  $x_2 + y_2 = -t; \quad x_3 + y_3 = t; \quad x_4 + y_4 = -t$

Исключая при помощи  $t$  все поправки  $y$ , приходим к одному условному уравнению:

$$C = (a_1 + b_1) x_1 + (a_2 + b_2) x_2 + (a_3 + b_3) x_3 + (a_4 + b_4) x_4 - (b_1 - b_2 + b_3 - b_4) t + v = 0 \dots \dots \dots (k)$$

Присоединяя к нему условие *minimum'a* функции

$$W = x_1^2 + (t - x_1)^2 + x_2^2 + (t + x_2)^2 + x_3^2 + (t - x_3)^2 + x_4^2 + (t + x_4)^2 - 2kC$$

Дифференцируя  $W$  по  $x_1, x_2, x_3, x_4$  и  $t$  получаем:

$$2x_1 - t = k(a_1 + b_1)$$

$$2x_2 + t = k(a_2 + b_2)$$

$$2x_3 - t = k(a_3 + b_3)$$

$$2x_4 + t = k(a_4 + b_4)$$

$$4t - x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -(b_1 - b_2 + b_3 - b_4)k$$

Из последних ур-ний легко находим:

$$\left. \begin{aligned} -x_1 &= -\frac{t}{2} - \frac{a_1 + b_1}{2}k \\ x_2 &= -\frac{t}{2} + \frac{a_2 + b_2}{2}k \\ -x_3 &= -\frac{t}{2} - \frac{a_3 + b_3}{2}k \\ x_4 &= -\frac{t}{2} + \frac{a_4 + b_4}{2}k \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (l)$$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -2t - \frac{k}{2} \left[ (a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) - (a_4 + b_4) \right] \\ 2t &= \left[ (a_1 - b_1) - (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) - (a_4 - b_4) \right] \frac{k}{2} \dots \dots (m) \end{aligned}$$

Подставляя формулы (l) в ур-ние (k) напишем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma (a + b)^2 \cdot k + \left[ (a_1 - b_1) - (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) - (a_4 - b_4) \right] \frac{t}{2} + v &= 0 \\ \frac{1}{2} \Sigma (a + b)^2 \cdot k + \left[ (a_1 - b_1) - (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) - (a_4 - b_4) \right]^2 \frac{k}{8} + v &= 0 \end{aligned}$$

Отсюда:

$$k = \frac{-2v}{-\frac{1}{4} \left[ (a_1 - b_1) - (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) - (a_4 - b_4) \right]^2 + \Sigma (a + b)^2} \dots \dots (n)$$

$$t = \left[ (a_1 - b_1) - (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) - (a_4 - b_4) \right]^2 \frac{k}{4} \dots \dots (p)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\frac{t}{2} + \frac{a_1 + b_1}{2}k & y_1 &= -\frac{t}{2} - \frac{a_1 + b_1}{2}k \\ x_2 &= -\frac{t}{2} + \frac{a_2 + b_2}{2}k & y_2 &= -\frac{t}{2} + \frac{a_2 + b_2}{2}k \\ x_3 &= -\frac{t}{2} + \frac{a_3 + b_3}{2}k & y_3 &= -\frac{t}{2} - \frac{a_3 + b_3}{2}k \\ x_4 &= -\frac{t}{2} + \frac{a_4 + b_4}{2}k & y_4 &= -\frac{t}{2} + \frac{a_4 + b_4}{2}k \end{aligned} \right\} \dots \dots (r)$$

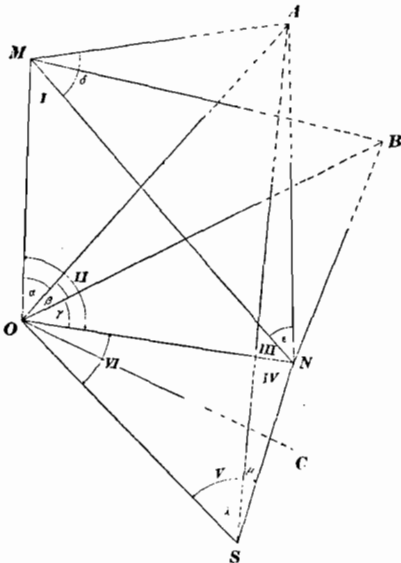
Формулами (n), (p) и (r) и исчерпывается вычисление вторичных поправок.

ГЛАВА XI

Определение дополнительных пунктов.

Пункты, определяемые каждый в отдельности засечками относительно точек основных сетей (высших разрядов), называются *дополнительными* (уединенными).

Уравнительным вычислениям по определению дополнительных пунктов всегда обычно предшествует на каждой основной точке исправление наблюдаемых с нее направлений на дополнительные пункты, потому что эти направления *вставляются между уравновешенными уже углами и направлениями основной сети*; на этих исправлениях сперва и остановимся.



Черт. 149

а) Допустим, что в основной сети уравновешивались направления, (черт. 149). Назовем уравновешенные направления с *O* на основные точки *M, N, S . . . T* соответственно чрез *M<sub>0</sub>, N<sub>0</sub>, S<sub>0</sub> . . . T<sub>0</sub>*. Если направления с *O* для определения дополнительных пунктов *A, B, C* были наблюдаемы *после измерений* в основной сети, или вообще *независимо от этих измерений*, причем для направлений на *M, A, B, N, C, S . . . T* были получены числа *M, A, B, N, C, S . . . T* — то разности *M<sub>0</sub> — M, N<sub>0</sub> — N, S<sub>0</sub> — S, . . . T<sub>0</sub> — T* дают столько значений для поправки направления на каждый дополнительный пункт, сколько основных пунктов с *O* наблюдалось вместе с дополнительными пунктами *A, B, C*;

считая все эти значения равноточными и независимыми, получаем для поправки  $\Delta$  любого из направлений *A, B, C* такое окончательное значение:

$$\Delta = \frac{(M_0 - M) + (N_0 - N) + (S_0 - S) + \dots}{n} \dots \dots \dots (1)$$

понимая под *n* число направлений на основные пункты. Исправленные направления с *O* на пункты дополнительные и уравновешенные направления с *O* — на основные пункты, представятся теперь в виде такого ряда:

$$M_0, A + \Delta, B + \Delta, N_0, C + \Delta, S_0 \dots \dots \dots (2)$$

Если при составлении основной сети с *O* наблюдались *вместе* направления *и на основные, и на дополнительные пункты*; причем из полученного ряда направлений *M, A, B, N, C, S* величины *M, N, C, S* были введены в уравновешивание основной сети, то в этом случае не получается материала для определения поправки направлений *A, B, C* —: числитель формулы (1) в этом случае тождественно равен нулю, потому что величины *M<sub>0</sub> — M, N<sub>0</sub> — N, S<sub>0</sub> — S* обращаются в выведенные из уравновешивания основной сети поправки всех наблюдаемых на одном пункте направлений (см. § 51). В рассмотренном только что случае ряд (2) заменится таким:

$$M_0, A, B, N_0, C, S_0 \dots \dots \dots (3)$$

б) Если в основной сети уравнивались *углы*, то следует и при определении дополнительных точек пользоваться *углами* между направлениями на них и сторонами основной сети. Называя чрез  $Q$  уравнишенное значение угла  $MON$  и предполагая, что на  $O$  были получены в одной серии измерений направления  $M, A, B, N$ , будем иметь для вычисления исправленных углов  $\alpha, \beta, \gamma$  (см. черт. 149) такие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= A - M + \frac{\Delta}{2} \\ \beta &= B - A \\ \gamma &= N - B + \frac{\Delta}{2} \\ \Delta &= Q - (N - M) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Эти формулы были получены в пункте  $f$  параграфа 48-го.

Вместо расчета по формулам (2) и (4) *исправленных направлений*, можно рассчитывать, как это делают в Германии, *наблюдаемые азимуты* на дополнительные пункты, причем прием вычисления остается один и тот-же для всех случаев собирания материала и для уравнишивания и по углам и по направлениям.

Пусть уравнишенные азимуты направлений на  $M, N, S$  суть соответственно  $\alpha_M, \alpha_N, \alpha_S$ ; пусть наблюдаемые направления или наблюдаемые углы, отсчитываемые от нулевого направления на  $M$ , суть:

для пункта  $A \dots \dots A$   
 " "  $B \dots \dots B$   
 " "  $N \dots \dots N$   
 " "  $C \dots \dots C$   
 " "  $S \dots \dots S$

Тогда для азимута  $\alpha_A$  на  $A$  имеем такие значения:

$$\begin{aligned} \alpha_A &= \alpha_M + A \\ \alpha_A &= \alpha_N - (N - A) = \alpha_N - N + A \\ \alpha_A &= \alpha_S - (S - A) = \alpha_S - S + A \end{aligned}$$

Окончательно:

$$\alpha_A = \frac{(\alpha_M - \text{нуль}) + (\alpha_N - N) + (\alpha_S - S)}{n} + A$$

Точно так-же:

$$\alpha_B = \frac{(\alpha_M - \text{нуль}) + (\alpha_N - N) + (\alpha_S - S)}{n}$$

и т. д.

Величина:

$$\frac{(\alpha_M - \text{нуль}) + (\alpha_N - N) + \dots + (\alpha_S - S)}{n}$$

называется *ориентировочным углом*.



Пример.

Пункт *O*

ПУНКТЫ	Основные азимуты	Наблюдаемые направления	Ориентирсвочный угол	Наблюдаемые азимуты на дополнительные пункты
<i>M</i>	320° 8' 5'' .0	0° 0' 0'' .0	320° 8' 5'' .0	
<i>A</i>		48 3 3 .3		8° 11' 6'' .5
<i>B</i>		80 2 37 .1		40 10 40 .3
<i>N</i>	90 7 10 .0	129 59 6 .1	320 8 3 .9	
<i>C</i>		139 1 5 .3		99 9 8 .5
<i>S</i>	135 6 15 .0	174 58 14 .2	320 8 0 .8	
		Среднее	320° 8' 3'' .2	

С рассчитанными указанным путем азимутами на дополнительные точки и с азимутами сторон основной сети ведут дальнейшее уравнивание для определения дополнительных точек.

**53. Определение дополнительного пункта прямой засечкой.** Если на дополнительный пункт *A* были сделаны визирования с *n* основных точек, то при определении его вероятнейших координат приходится иметь дело с *n*—2 избыточными наблюдениями.

Допустим, что к каждому направлению из числа взятых на *A*, (черт. 149) можно присоединить еще два таким образом, что эти три направления оказываются исходящими из вершин треугольника основной сети. Обычно возможность такого сочетания направлений, служащих для определения дополнительного пункта, имеет место при наблюдениях этого пункта лишь с смежных пунктов основной сети. В рассматриваемом случае вопрос об уравнивании дополнительного пункта *A* сводится к составлению и решению из четырехугольников с общим полюсом в *A* боковых условий, число которых будет равно *n*—2. В самом деле, назовем (черт. 149) в треугольниках *NOM* и *NOS* уравновешенные углы так:

$$\begin{aligned} \angle NMO &= I & \angle ONS &= IV \\ \angle MON &= II & \angle NSO &= V \\ \angle MNO &= III & \angle NOS &= VI \end{aligned}$$

Из четырехугольника *AMON* имеем:

$$\frac{\sin [\alpha + (\alpha)]}{\sin [I + \delta + (\delta)]} \cdot \frac{\sin [III + \varepsilon + (\varepsilon)]}{\sin [\beta + \gamma + (\beta) + (\gamma)]} \cdot \frac{\sin [\delta + (\delta)]}{\sin [\varepsilon + (\varepsilon)]} = 1 \quad \dots (5)$$

Из четырехугольника-же *AONS* имеем:

$$\frac{\sin [\lambda + (\lambda)]}{\sin [VI + \beta + \gamma + (\beta) + (\gamma)]} \cdot \frac{\sin [III + IV + \varepsilon + (\varepsilon)]}{\sin [\mu + (\mu)]} \cdot \frac{\sin [\beta + \gamma + (\beta) + (\gamma)]}{\sin [III + \varepsilon + (\varepsilon)]} = 1 \quad \dots (6)$$

К уравнениям (5) и (6) необходимо присоединить еще возникающие непременно при отыскивании поправок углов следующие условия сумм:

$$(\alpha) + (\beta) + (\gamma) + \alpha + \beta + \gamma - II = 0 \quad \dots (7)$$

$$(\lambda) + (\mu) + \lambda + \mu - V = 0 \quad \dots (8)$$

Так как в уравнения (5) и (6) входят всегда углы из ряда(4) — т. е. уже исправленные на пунктах  $O$  и  $S$ , то  $\alpha + \beta + \gamma = II$  и  $\lambda + \mu = V$  и уравнения (7) и (8) переписываются так:

$$(\alpha) + (\beta) + (\gamma) = 0 \dots\dots\dots (7)'$$

$$(\lambda) + (\mu) = 0 \dots\dots\dots (8)'$$

Обычно, однако, уравнения (7)' и (8)' не присоединяют к ур-ниям (5) и (6), а ими пользуются лишь для исключения углов  $\beta, \gamma$  и  $\mu$  вовсе из уравновешивания:

Имеем:

$$\beta + \gamma = II - \alpha \qquad \mu = V - \lambda$$

$$(\beta) + (\gamma) = -(\alpha) \qquad (\mu) = -(\lambda)$$

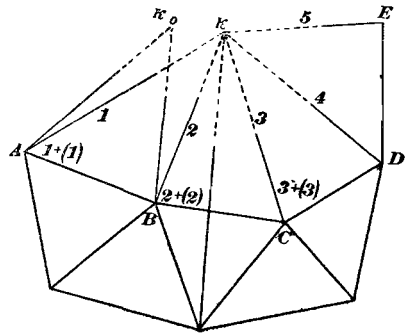
и вследствие этого переписываем ур-ния (5) и (6) так:

$$\frac{\text{Sin} [\alpha + (\alpha)] \text{Sin} [III + \varepsilon + (\varepsilon)] \text{Sin} [\delta + (\delta)]}{\text{Sin} [I + \delta + (\delta)] \text{Sin} [II - \alpha - (\alpha)] \text{Sin} [\varepsilon + (\varepsilon)]} = 1 \dots\dots\dots (5)'$$

$$\frac{\text{Sin} [\lambda + (\lambda)] \text{Sin} [III + IV + \varepsilon + (\varepsilon)] \text{Sin} [II - \alpha - (\alpha)]}{\text{Sin} [VI + II - \alpha - (\alpha)] \text{Sin} [V - \lambda - (\lambda)] \text{Sin} [III + \varepsilon + (\varepsilon)]} = 1 \dots\dots\dots (6)'$$

Решая ур-ния (5)' и (6)' по способу наименьших квадратов, находят поправки  $(\alpha), (\lambda), (\delta), (\varepsilon)$  и затем с углами  $\alpha + (\alpha), \delta + (\delta), \varepsilon + (\varepsilon), \lambda + (\lambda)$  вычисляют азимуты и длины сторон  $MA, OA, NA, SA$  и с ними — вероятные координаты точки  $A$ . Очевидно, что указанное решение упрощенное, вследствие исключения из уравновешивания углов  $\beta, \gamma$  и  $\mu$  (см. § 52). Если бы при уравновешивании пункта  $A$  мы задавались отысканием вероятнейших поправок *направлений*, (а не углов) наблюдаемых с  $M, O, N$  и  $S$  на  $A$ , то тогда, очевидно, никаких условий сумм не возникло-бы и при строгом уравновешивании пришлось-бы иметь дело только с полюсными уравнениями. При составлении этих ур-ний нужно вводить направления из ряда (2) или из ряда (4).

Допустим теперь, что из  $n$  направлений на дополнительный пункт  $k$  (черт. 150) нельзя образовать вместе с линиями основной сети  $n - 2$  независимых друг от друга, четырехугольников с общим полюсом в  $k$ . В этом случае в уравнительные вычисления в качестве неизвестных вводят координаты точки  $k$ , а не углы  $\alpha, \lambda, \varepsilon \dots$



Черт. 150.

До перехода к этой задаче выведем формулу, дающую зависимость между изменением азимута линии  $AB$  и изменениями координат ее конечной точки  $B$  (черт. 151).

Имеем:

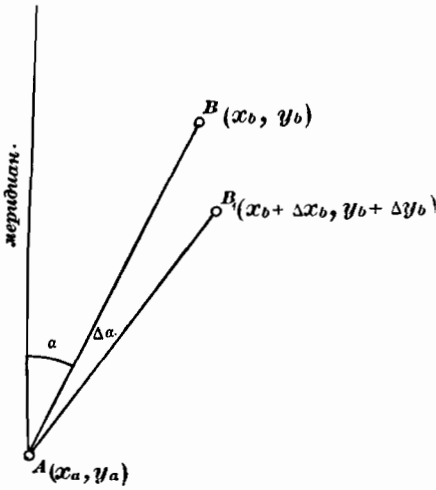
$$\text{tg} (AB) = \text{tg} \alpha = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

Давая  $y_b$  и  $x_b$  изменения  $\Delta y_b$  и  $\Delta x_b$ , получаем отсюда такое уравнение:

$$\frac{\Delta \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\Delta y_b}{x_b - x_a} - \frac{(y_b - y_a) \Delta x_b}{(x_b - x_a)^2}$$

Так как  $x_b - x_a = d \cdot \cos \alpha$ , если чрез  $d$  назвать расстояние  $AB$ , то:

$$\Delta \alpha'' = \frac{\cos \alpha \cdot \Delta y_b}{d \cdot \sin 1''} - \frac{\sin \alpha \cdot \Delta x_b}{d \cdot \sin 1''} \dots \dots \dots (9)$$



Черт. 151.

Обращаясь к задаче *отыскания вероятных координат точки k*, допустим, что из тр-ка  $ABk$  (или вообще из треугольника, образованного пунктом  $k$  и двумя основными и имеющего при  $k$  угол больший  $30^\circ$  и меньший  $150^\circ$ ) по стороне  $AB$  и углам  $kAB$  и  $kBA$  мы определили длины сторон  $Ak$  и  $Bk$ ; рассчитав теперь по тем-же углам  $kAB$  и  $kBA$  и по азимуту  $(AB)$  азимуты направлений  $Ak$  и  $Bk$ , с ними и с длинами сторон  $Ak$  и  $Bk$  вычислим приближенные значения  $x_0$  и  $y_0$  координат точки  $k$ . Если на чертеже 150 точка  $k$  совпадает с вероятным положением дополнительного пункта и имеет координаты  $x$  и  $y$ , то координатами  $x_0$  и  $y_0$  определится некоторая точка  $k_0$  близкая к  $k$ .

Обозначим: азимуты линий  $Ak_0, Bk_0, Ck_0 \dots \dots$  соответственно чрез  $\alpha'_a, \alpha'_b, \alpha'_c \dots \dots$ ; расстояния  $Ak_0, Bk_0, Ck_0$  — соответственно чрез  $d_a, d_b, d_c \dots \dots$ . Для точного вычисления этих азимутов и расстояний имеем формулы:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha'_a &= \frac{y_0 - y_a}{x_0 - x_a}; & d_a &= \frac{y_0 - y_a}{\sin \alpha'_a} = \frac{x_0 - x_a}{\cos \alpha'_a} \\ \operatorname{tg} \alpha'_b &= \frac{y_0 - y_b}{x_0 - x_b}; & d_b &= \frac{y_0 - y_b}{\sin \alpha'_b} = \frac{x_0 - x_b}{\cos \alpha'_b} \end{aligned}$$

Называя далее чрез  $(\alpha_a), (\alpha_b), (\alpha_c) \dots \dots$  азимуты направлений на вероятное положение пункта  $k$  с основных точек  $A, B, C \dots \dots$  и полагая:

$$x = x_0 + \Delta x; \quad y = y_0 + \Delta y;$$

имеем на основании (9):

$$\begin{aligned} \Delta \alpha_a = (\alpha_a) - \alpha'_a &= \frac{\cos \alpha'_a \cdot \Delta y}{d_a \sin 1''} - \frac{\sin \alpha'_a \cdot \Delta x}{d_a \sin 1''} \\ \Delta \alpha_b = (\alpha_b) - \alpha'_b &= \frac{\cos \alpha'_b \cdot \Delta y}{d_b \sin 1''} - \frac{\sin \alpha'_b \cdot \Delta x}{d_b \sin 1''} \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

Вероятные азимуты  $(\alpha_a), (\alpha_b), (\alpha_c)$  определяются, конечно, по азимутам  $(AB), (BC), (CD)$  линий основной сети и по *вероятным* значениям углов  $kAB, kBC, kCD \dots \dots$ , т. е. по формулам:

$$\begin{aligned} (\alpha_a) &= (AB) - \angle kAB = (AB) - 1 - (1) \\ (\alpha_b) &= (BC) - 2 - (2) \\ (\alpha_c) &= (CD) - 3 - (3) \end{aligned}$$

в которых величины (1), (2), (3) представляют вероятные поправки полученных из наблюдений углов 1, 2, 3. . . . Называя „наблюденными“ азимутами величины:  $(AB) \rightarrow 1$ ,  $(BC) \rightarrow 2$ ,  $(CD) \rightarrow 3$ , и обозначая их соответственно чрез  $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c \dots$ , уравнения (10) перепишем так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\cos \alpha'_a \cdot \Delta y}{d_a \sin 1''} - \frac{\sin \alpha'_a \cdot \Delta x}{d_a \sin 1''} &= \alpha_a - \alpha'_a - (1) \\ \frac{\cos \alpha'_b \cdot \Delta y}{d_b \sin 1''} - \frac{\sin \alpha'_b \cdot \Delta x}{d_b \sin 1''} &= \alpha_b - \alpha'_b - (2) \\ \frac{\cos \alpha'_c \cdot \Delta y}{d_c \sin 1''} - \frac{\sin \alpha'_c \cdot \Delta x}{d_c \sin 1''} &= \alpha_c - \alpha'_c - (3) \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

Уравнения (11) являются уравнениями погрешностей для определения  $\Delta y$  и  $\Delta x$  по способу наименьших квадратов.

Полагая:

$$0,001 d_a = D_1 \quad (D \text{ есть расстояние, выраженное в тысячах метров).}$$

$$0,001 d_b = D_2$$

$$10 \cdot \Delta y = \xi; \quad 10 \cdot \Delta x = \tau;$$

$$\frac{\cos \alpha'_a}{10000 \cdot \sin 1''} = a_1, \quad - \frac{\sin \alpha'_a}{10000 \cdot \sin 1''} = b_1, \quad \alpha_a - \alpha'_a = l_1,$$

$$\frac{\cos \alpha'_b}{10000 \cdot \sin 1''} = a_2, \quad - \frac{\sin \alpha'_b}{10000 \cdot \sin 1''} = b_2, \quad \alpha_b - \alpha'_b = l_2$$

мы преобразуем коэффициенты уравнений (11) в удобные для вычислений числа и перепишем эти уравнения так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_1}{D_1} \xi + \frac{b_1}{D_1} \tau &= l_1 - (1) \\ \frac{a_2}{D_2} \xi + \frac{b_2}{D_2} \tau &= l_2 - (2) \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \\ \frac{a_n}{D_n} \xi + \frac{b_n}{D_n} \tau &= l_n - (n) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

Решая эти ур-ния под условием *minimum*'а суммы квадратов величин (1), (2), (3) . . . . мы перейдем к нормальным уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} [AA] \xi + [AB] \tau + [AL] &= 0 \\ [AB] \xi + [BB] \tau + [BL] &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

в которых:

$$[AA] = \left[ \frac{a^2}{D^2} \right]; \quad [BB] = \left[ \frac{b^2}{D^2} \right];$$

$$[AB] = \left[ \frac{ab}{D^2} \right]; [BL] = - \left[ \frac{bl}{D} \right];$$

$$[AL] = - \left[ \frac{al}{D} \right];$$

Найдя из уравнений (13)  $\xi$  и  $\eta$  и подставляя их в левые части уравнений (12), определим величины (1), (2), (3) ... по которым в свою очередь вычислим среднюю ошибку  $\mu$  единицы веса по формуле:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{\sum \delta^2}{n-2}}$$

Называя чрез  $P_\eta$  и  $P_\xi$  веса неизвестных  $\eta$  и  $\xi$ , имеем из уравнений (13):

$$P_\eta = [BB.1] = [BB] - \frac{[AB] [AB]}{[AA]}$$

$$P_\xi = [AA] - \frac{[AB] [AB]}{[BB]}$$

$$P_x = 100 P_\eta; \quad P_y = 100 P_\xi;$$

Имея веса  $P_x$  и  $P_y$  абсциссы  $x$  и ординаты  $y$  точки  $k$ , средние ошибки  $m_x$  и  $m_y$  этих координат вычислим, конечно, так:

$$m_x = \frac{\mu}{\sqrt{P_x}}; \quad m_y = \frac{\mu}{\sqrt{P_y}}.$$

**54. Графическое уравновешивание дополнительного пункта.** Вместо изложенного выше аналитического приема определения вероятных значений координат дополнительного пункта  $A$ , можно с успехом применять для той-же цели следующий *графический* способ уравновешивания. Назовем направления на  $k$  с точек  $A, B, C \dots$  (черт. 150) соответственно номерами 1, 2, 3, ...  $k, s, \dots n$ . Вследствие погрешностей в углах  $kAB, kBC, kCD \dots, n$  направлений, построенных по этим углам соответственно при  $A, B, C \dots$

пересекутся вообще в  $\frac{n(n-1)}{2}$  несовпадающих друг с другом точках.

В самом деле: направления 1 и 2 дадут одну точку, которую назовем (1,2) направление 3, пересекаясь с направлениями 1 и 2, даст две новые точки, которые назовем чрез (1,3) и (2,3); направление 4 даст три новые точки (1,4); (2,4); (3,4) и т. д. Общее число всех пересечений, образуемых  $n$  направлениями, будет следовательно равно сумме:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Зададимся теперь целью построить на чертеже все эти  $\frac{n(n-1)}{2}$  пересечений. Для этого прежде всего рассчитаем из треугольников  $kAB, kBC, kCD, kDE$  длины сторон, исходящих из  $k$ , причем каждый такой треугольник придется решать по длине стороны основной сети и по двум к ней прилежащим наблюдаемым углам.

Пусть:

для стороны	$Bk$	из тр-ка	$kAB$	получилось значение	$b_1$ ;	
"	"	$Bk$	" "	$kBC$	" "	$b_2$ ;
"	"	$Ck$	" "	$kBC$	" "	$c_1$ ;
"	"	$Ck$	" "	$kCD$	" "	$c_2$ ;
"	"	$Dk$	" "	$kCD$	" "	$d_1$ ;
"	"	$Dk$	" "	$kDE$	" "	$d_2$ ; и т. д.

Понятно, что для каждой из сторон  $Bk, Ck, Dk \dots$  из смежных тр-ков получаются различные значения; понятно также, что:  $b_1 = B - (1,2)$ ; \*  $b_2 = B - (2,3)$ ;  $c_1 = C - (2,3)$ ;  $c_2 = C - (3,4)$  и т. д. Рассчитаем теперь из треугольника  $kAB$  координаты точки  $k$ ; очевидно, что мы получим здесь

координаты  $x_{1,2}$  и  $y_{1,2}$  точки  $(1,2)$ . Приняв на чертеже 152 точку  $(1,2)$  за начало новых координатных осей, параллельных осям, к которым отнесена основная сеть, проведем из этого начала линии 1 и 2 под азимутами направлений 1 и 2. Если  $b_2 > b_1$  и  $b_2 - b_1 = \Delta_1$ , то, откладывая на продолжении прямой 2 (черт. 152) отрезок  $\Delta_1$ , мы, очевидно, получим на чертеже точку  $(2,3)$ ; прочерчивая чрез нее прямую 3 под азимутом направления 3, мы получим точку  $(1,3)$ , а откладывая от  $(2,3)$  по прямой 3 разность  $c_2 - c_1$ , получим, очевидно точку  $(3,4)$ .

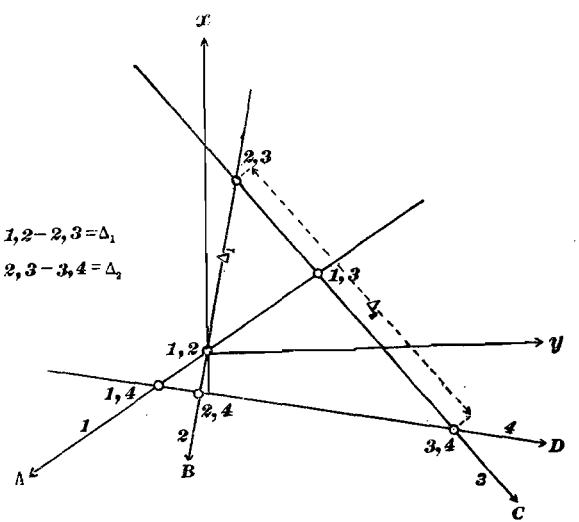
Пусть  $c_2 < c_1$ ; тогда отрезок  $\Delta_2 = c_1 - c_2$  нужно будет отложить от  $(2,3)$  по прямой 3 вниз, чтобы получить точку  $(3,4)$ ; проведя чрез  $(3,4)$  прямую 4 под азимутом направления 4, получим в пересечении этой прямой с прямыми 2 и 1 еще точки  $(1,4)$  и  $(2,4)$ . Описанное построение ведется в крупном масштабе — напр.  $\frac{1}{10}$ ;

для прочерчивания прямых под определенными азимутами следует пользоваться таблицей хорд; при вычислении  $b_1, b_2, c_1, c_2 \dots$  надлежит углы в тр-ках  $kAB, kBC, kCD \dots$  либо вычислять по исправленным направлениям (ряды 2 и 3), либо брать для них исправленные значения, выведенные согласно ряда (4).

Иногда, вместо определения сторон  $b_1, b_2, c_1, c_2, \dots$ , отыскивают пересечения направлений 3, 4, 5  $\dots n$  с осями, проведенными чрез  $(1,2)$ , или с прямыми им параллельными. Если с основной точки  $T$  идет на пункт  $k$  линия под азимутом  $\alpha_T$ , то пересечения ее с осями, имеющими начало в точке  $x_R$  и  $y_S$  определяются такими отрезками на этих осях:

$$\left. \begin{aligned} y &= (x_R - x_T) \operatorname{tg} \alpha_T + y_T - y_S \\ x &= (y_T - y_S) \operatorname{ctg} \alpha_T + x_R - x_T \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

\* т. е. расстоянию от  $B$  до точки  $(1,2)$ ;  $b_2$  — равно расстоянию от  $B$  до точки  $(2,3)$  и т. д.



Черт. 152.



Соединяя указанным образом: указатель 1 с указателями 2, 3, 4 . . . . n; указатель 2 с указателями 3, 4, 5 . . . . n; указатель 3 — с указателями 4, 5, 6 . . . . n, мы, очевидно, выберем все пары слагаемых, из которых образуется числитель  $Z$  в выражении для  $\Delta y$ , и можем написать:

$$Z = \sum p_k p_s \sin(\alpha'_s - \alpha'_k) \cdot (c_k \sin \alpha'_s - c_s \sin \alpha'_k) \dots \dots \dots (16)$$

Число слагаемых в (16) равно  $\frac{n(n-1)}{2}$ , потому что значек  $k$  может соединяться лишь с значками  $s$ , имеющими более старший номер, чем  $k$ .

Так как знаменатель  $N$  выражения для  $\Delta y$  получается из числителя, если в последнем заменить  $c$  чрез  $\cos \alpha$ , то

$$N = \sum p_k p_s \sin^2(\alpha'_s - \alpha'_k)$$

и следовательно:

$$\Delta y = \frac{\sum p_k p_s \sin(\alpha'_s - \alpha'_k) \cdot (c_k \sin \alpha'_s - c_s \sin \alpha'_k)}{\sum p_k p_s \sin^2(\alpha'_s - \alpha'_k)}$$

Представим теперь себе, что из уравнений (15) мы взяли только два, соответствующие направлениям  $k$  и  $s$ ; если из этих двух уравнений определить значения  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , то очевидно, что эти значения будут равны абсциссе  $x_{k,s}$  и ординате  $y_{k,s}$  пересечения  $(k, s)$ , измеренным на чертеже 152 относительно осей, проходящих чрез точку (1,2). Из уравнений:

$$\cos \alpha'_k \cdot \Delta y - \sin \alpha'_k \cdot \Delta x = c_k$$

$$\cos \alpha'_s \cdot \Delta y - \sin \alpha'_s \cdot \Delta x = c_s$$

Имеем:

$$\Delta y = y_{k,s} = \frac{c_k \sin \alpha'_s - c_s \sin \alpha'_k}{\sin(\alpha'_s - \alpha'_k)}$$

или:

$$c_k \sin \alpha'_s - c_s \sin \alpha'_k = \sin(\alpha'_s - \alpha'_k) y_{k,s}$$

Следовательно выражение для  $\Delta y$  переписется так:

$$\Delta y = \frac{\sum p_k p_s \sin^2(\alpha'_s - \alpha'_k) y_{k,s}}{\sum p_k p_s \sin^2(\alpha'_s - \alpha'_k)} \dots \dots \dots (17)$$

Выражение (17) есть ни что иное, как арифметическая середина из ординат всех построенных на чертеже 152 пересечений, взятая по их весам. Очевидно, что вес  $P_{k,s}$  пересечения  $(k,s)$  равен  $p_k p_s \sin^2(\alpha'_s - \alpha'_k)$ . Таким образом, вес каждого пересечения обратно пропорционален произведению квадратов расстояний от него до двух соответственных основных точек и прямо пропорционален квадрату синуса угла между образующими это пересечение направлениями.

Итак, обозначая:

$$P_{k,s} = p_k p_s \sin^2(\alpha'_s - \alpha'_k),$$

Имеем:

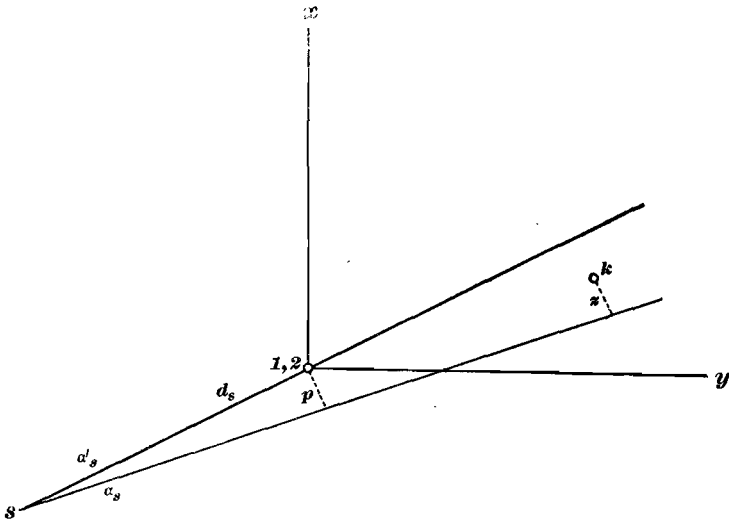
$$\Delta y = \xi = \frac{\sum P_{k,s} \cdot y_{k,s}}{\sum P_{k,s}}; \quad \Delta x = \eta = \frac{\sum P_{k,s} \cdot x_{k,s}}{\sum P_{k,s}} \dots \dots \dots (18)$$



После вычисления формул (18), определим вероятные координаты пункта  $k$  так:

$$\begin{aligned} x &= x_{1,2} + \Delta x = x_{1,2} + \tau_1 \\ y &= y_{1,2} + \Delta y = y_{1,2} + \xi \end{aligned}$$

Определим теперь *средние ошибки величин*  $x$  и  $y$ . Построим на чертеже 153 вероятное положение точки  $k$  по координатам  $\xi$  и  $\tau_1$ , определяемым



Черт. 153.

из формул (18). Нетрудно видеть, что уравнение прямой, проходящей чрез основную точку  $s$  и имеющей азимут  $\alpha'_s$  напишется так:

$$y \cdot \text{Cos } \alpha'_s - x \cdot \text{Sin } \alpha'_s - (\alpha_s - \alpha'_s)'' d_s \text{Sin } 1'' = 0 \quad \dots \quad (19)$$

если под  $x$  и  $y$  понимать текущие координаты относительно осей  $xy$  с началом в точке  $(1,2)$ . В самом деле, длина  $p$  перпендикуляра, опущенного на эту прямую из начала координат  $(1,2)$ , будет равна  $(\alpha_s - \alpha'_s) d_s \text{Sin } 1''$ , а углы  $\gamma$  и  $\beta$  образуемые этим перпендикуляром с осями координат  $x$  и  $y$  соответственно равны  $90 + \alpha_s$  и  $\alpha'_s$ , и следовательно ур-ние нашей прямой в нормальной форме:

$$y \cdot \text{Cos } \beta - x \cdot \text{Cos } \gamma - p = 0$$

обращается в ур-ние (19).

Длина  $z$  перпендикуляра, опущенного из точки  $k$  с координатами  $\xi$  и  $\tau_1$  на прямую, выраженную ур-нием (19), вычислится, как известно так:

$$z_s = \xi \text{Cos } \alpha_s - \tau_1 \text{Sin } \alpha_s - (\alpha_s - \alpha'_s) d_s \text{Sin } 1''$$

Но вследствие малости  $\xi$  и  $\tau_1$  и малости различия  $\alpha_s$  от  $\alpha'_s$  в последнем уравнении можно, пренебрегая малыми величинами второго порядка, заметить  $\text{cos } \alpha_s$  и  $\text{Sin } \alpha_s$  через  $\text{cos } \alpha'_s$  и  $\text{Sin } \alpha'_s$  и тогда:

$$z_s = \Delta y \text{cos } \alpha'_s - \Delta x \text{Sin } \alpha'_s - (\alpha_s - \alpha'_s) d_s \text{Sin } 1''$$

Другими словами  $z_s = -\delta_s d_s \text{Sin } 1''$  и представляет собою погрешность или поправку свободного члена в уравнении (15), составленного для направления с номером  $s$ . Следовательно опуская из точки  $k$  ( $\xi, \eta$ ) перпендикуляры на прямые 1, 2, 3 . . . . .  $n$ , построенные на чертеже 153 и измеряя величины этих перпендикуляров  $z_1, z_2, z_3 \dots z_n$ , мы получаем поправки свободных членов ур-ний (15) и поэтому ошибка единицы веса  $\mu$  определяется так:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum p z^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{p_1 z_1^2 + p_2 z_2^2 + \dots + p_n z_n^2}{n-2}}$$

$$p_1 = \frac{1}{d_1^2}; \quad p_2 = \frac{1}{d_2^2}; \quad \dots \dots \dots \quad p_n = \frac{1}{d_n^2}$$

Из нормальных для определения  $\Delta x$  и  $\Delta y$  уравнений имеем:

$$P_{\Delta y} = [p \cos^2 \alpha'] - \frac{[p \cdot \text{Sin } \alpha' \cdot \text{Cos } \alpha']^2}{[p \cdot \text{Sin}^2 \alpha']}$$

или

$$P_{\Delta y} = \frac{[p \cdot \cos^2 \alpha'] \cdot [p \cdot \text{Sin}^2 \alpha'] - [p \cdot \text{Sin } \alpha' \cdot \text{Cos } \alpha']^2}{[p \cdot \text{Sin}^2 \alpha']}$$

Но числитель последнего выражения равен знаменателю  $N$  прежде рассмотренного выражения для  $\Delta y$ .

Поэтому окончательно:

$$P_{\Delta y} = \frac{\sum p_k p_s \text{Sin}^2 (\alpha'_s - \alpha'_k)}{[p \cdot \text{Sin}^2 \alpha]} = \frac{[P_{ks}]}{[p \cdot \text{Sin}^2 \alpha']}$$

Вес  $P_{\Delta x}$  определяется совершенно подобным образом и для него получается такое выражение:

$$P_{\Delta x} = \frac{[P_{ks}]}{[p \cdot \cos^2 \alpha']}$$

Средние ошибки  $m_x$  и  $m_y$  в координатах  $x$  и  $y$  точки  $k$  будут равны:

$$m_x = \frac{\mu}{\sqrt{P_{\Delta x}}}; \quad m_y = \frac{\mu}{\sqrt{P_{\Delta y}}}$$

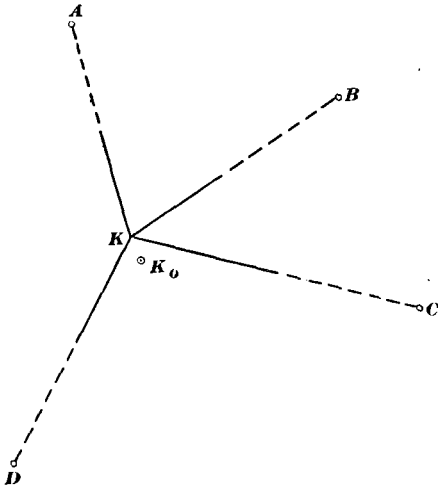
*Примечание.* Если-бы при определении  $\Delta x$  и  $\Delta y$  из уравнений (15) мы считали-бы веса всех этих уравнений равными между собою, то тогда задача была-бы решена под условием *minimum*'а суммы:

$$\delta_1^2 d_1^2 \text{Sin}^2 1'' + \delta_2^2 d_2^2 \text{Sin}^2 1'' + \dots \dots \dots + \delta_n^2 d_n^2 \text{Sin}^2 1'',$$

а не суммы квадратов поправок  $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \dots$ ; другими словами задача была-бы решена под условием *minimum*'а суммы квадратов перпендикуляров  $z$ , опущенных из вероятного положения пункта  $k$  на направления 1, 2, 3 . . . . .  $n$ . В практике иногда расчет  $P_{k,s}$  заменяют назначением точки  $k$  на чертеже 152 на глаз, руководствуясь правилом назначать в тр-ке из трех пересечений точку всего ближе к той стороне, которая лежит против угла наиболее уклоняющегося от  $90^\circ$ .

**55. Определение дополнительного пункта обратной засечкой.**

Пусть для определения пункта  $K$  (черт. 154) были измерены на нем направления 1, 2, 3, 4, 5 . . . .  $n$  на основные точки  $A, B, C, D$  . . . . число которых более трех и равно  $n$ . Для определения  $K$  обратной засечкой достаточно вообще измерить с нее направления на три точки с известными уже координатами их. Если число измеренных с  $K$  направлений более трех, то возникает, конечно, вопрос, о нахождении вероятных координат  $x$  и  $y$  пункта  $K$  по способу наименьших квадратов.



Черт. 154.

Взяв из всех  $n$  наблюденных с  $K$  направлений некоторые три направления, вычислим с ними, решая задачу *Потенота*, значения  $x_0$  и  $y_0$  для координат точки  $K$ , которые будем считать *приближенными* и определяющими точку  $K_0$  близкую к вероятному положению точки  $K$ . (Указанные три направления должно выбрать так, чтобы с ними получилось-бы достаточно надеж-

ное определение точки  $K$  по способу *Потенота*). Положим:

$$x = x_0 + \Delta x; \quad y = y_0 + \Delta y$$

и вычислим расстояния  $K_0A, K_0B, K_0C$  . . . . и азимуты  $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$  . . . . направлений  $K_0A, K_0B, K_0C$  по формулам:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha'_1 &= \frac{y_a - y_0}{x_a - x_0}; & d_1 &= \frac{y_a - y_0}{\sin \alpha'_1} = \frac{x_a - x_0}{\cos \alpha'_1} \\ \operatorname{tg} \alpha'_2 &= \frac{y_b - y_0}{x_b - x_0}; & d_2 &= \frac{y_b - y_0}{\sin \alpha'_2} = \frac{x_b - x_0}{\cos \alpha'_2} \\ & \dots & & \dots \end{aligned}$$

Переходя теперь от направлений  $K_0A, K_0B, K_0C, \dots$  соответственно к направлениям  $KA, KB, KC$  . . . . . будем иметь такие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\cos \alpha'_1}{d_1 \sin 1''} \cdot \Delta y - \frac{\sin \alpha'_1}{d_1 \sin 1''} \cdot \Delta x &= \alpha'_1 - (\alpha_1) \\ -\frac{\cos \alpha'_2}{d_2 \sin 1''} \cdot \Delta y - \frac{\sin \alpha'_2}{d_2 \sin 1''} \cdot \Delta x &= \alpha'_2 - (\alpha_2) \\ \dots & \dots \\ -\frac{\cos \alpha'_n}{d_n \sin 1''} \cdot \Delta y - \frac{\sin \alpha'_n}{d_n \sin 1''} \cdot \Delta x &= \alpha'_n - (\alpha_n) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (A)$$

В этих уравнениях под  $(\alpha_1), (\alpha_2), \dots, (\alpha_n)$  должно понимать, конечно, вероятные азимуты или азимуты направлений с вероятного положения точки  $K$  на основные пункты.

В противоположность задаче определения точки  $K$  прямой засечкой, эти азимуты не могут быть, при определении  $K$  обратной засечкой, выражены





ПРИМЕР ОПРЕДЕЛЕНИЯ:  $z_0$ ; ОРИЕНТИРОВАННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ И ВЕЛИЧИН  $l$ .

	Наблюденные на $K$ направления $r$	азимуты $\alpha'$	$\alpha' - r$	$\alpha_1$	$l = \alpha'_1 - \alpha_1$
1	0° 0' 0".0	100° 8' 10".0	100° 8' 10".0	100° 8' 10".3	- 0".3
2	20 5 1 .5	120 13 15 .0	100 8 13 .5	120 13 11 .8	+ 3 .2
3	85 6 43 .0	185 14 52 .3	100 8 9 .3	185 14 53 .3	- 1 .0
4	170 10 7 .3	270 18 15 .3	100 8 8 .0	270 18 17 .6	- 2 .3
5	235 15 11 .4	335 23 22 .0	100 8 10 .6	335 23 21 .7	+ 0 .3
		$z_0$	100° 8' 10".3		$l_m = 0".0$

$$z_0 = 100^\circ 8' 10'' + \frac{0''.0 + 3''.5 - 0''.7 - 2''.0}{5} \cdot 0''.6 = 100^\circ 8' 10''.3$$

Так как обычно на  $K$  измеряются именно направления, то следовательно при определении координат  $K$  и надлежит применять только что указанное решение задачи.

Если-бы на пункте  $K$  были измерены независимо друг от друга углы  $AKB = S_1$ ;  $AKC = S_2$  . . . .  $AKN = S_{n-1}$  то тогда, вычитая из всех уравнений группы (A) первое уравнение этой-же группы, мы получили-бы:

$$\left( \frac{\cos \alpha'_2}{d_2 \sin 1''} - \frac{\cos \alpha'_1}{d_1 \sin 1''} \right) \cdot \Delta y - \left( \frac{\sin \alpha'_2}{d_2 \sin 1''} - \frac{\sin \alpha'_1}{d_1 \sin 1''} \right) \cdot \Delta x = \alpha'_2 - \alpha'_1 - [(\alpha_2) - (\alpha_1)]$$

$$\left( \frac{\cos \alpha'_3}{d_3 \sin 1''} - \frac{\cos \alpha'_1}{d_1 \sin 1''} \right) \cdot \Delta y - \left( \frac{\sin \alpha'_3}{d_3 \sin 1''} - \frac{\sin \alpha'_1}{d_1 \sin 1''} \right) \cdot \Delta x = \alpha'_3 - \alpha'_1 - [(\alpha_3) - (\alpha_1)]$$

.....

Или вводя коэффициенты  $A$ ,  $B$  и неизвестные  $\xi$  и  $\eta$ :

$$(A_2 - A_1) \cdot \xi + (B_2 - B_1) \cdot \eta = \alpha'_2 - \alpha'_1 - [(\alpha_2) - (\alpha_1)]$$

$$(A_3 - A_1) \cdot \xi + (B_3 - B_1) \cdot \eta = \alpha'_3 - \alpha'_1 - [(\alpha_3) - (\alpha_1)]$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(A_n - A_1) \cdot \xi + (B_n - B_1) \cdot \eta = \alpha'_n - \alpha'_1 - [(\alpha_n) - (\alpha_1)]$$

но:

$$(\alpha_2) - (\alpha_1) = S_1 + \delta S_1$$

$$(\alpha_3) - (\alpha_1) = S_2 + \delta S_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(\alpha_n) - (\alpha_1) = S_{n-1} + \delta S_{n-1}$$

причем под  $\delta S_1$ ,  $\delta S_2$  . . . . .  $\delta S_{n-1}$  понимаются ошибки измеренных углов на  $K$ . Полагая:

$$- l_1 = [\alpha'_2 - \alpha'_1] - S_1$$

$$- l_2 = [\alpha'_3 - \alpha'_1] - S_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$- l_{n-1} = [\alpha'_{n-1} - \alpha'_1] - S_{n-1}$$



$$\left. \begin{aligned} k_{n+1} &= \frac{\Sigma v - 3s}{2n} \\ k_1 &= \frac{v_1}{3} - \frac{k_{n+1}}{3} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ k_n &= \frac{v_n}{3} - \frac{k_{n+1}}{3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (27)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 = \beta_1 &= -\frac{v_1}{3} - \frac{\Sigma v - 3s}{6n} & \gamma_1 &= -\frac{v_1}{3} + \frac{\Sigma v - 3s}{3n} \\ \alpha_2 = \beta_2 &= -\frac{v_2}{3} - \frac{\Sigma v - 3s}{6n} & \gamma_2 &= -\frac{v_2}{3} + \frac{\Sigma v - 3s}{3n} \\ \dots & \dots \dots \dots & \dots & \dots \dots \dots \\ \alpha_n = \beta_n &= -\frac{v_n}{3} - \frac{\Sigma v - 3s}{6n} & \gamma_n &= -\frac{v_n}{3} + \frac{\Sigma v - 3s}{3n} \end{aligned} \right\} \dots \dots (28)$$

Исправив поправками ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ) и ( $\gamma$ ) измеренные углы, составляют боковое условное ур-ние. Так как в это ур-ние не войдут углы  $\beta$ ; то вторичные их поправки принимают равными нулю, а тогда, чтобы не нарушать условий тр-ков, придется потребовать, чтобы вторичные поправки углов  $\alpha$  и  $\beta$  были равны между собою, но противоположны по знаку. Называя поправку угла  $\alpha_n$  чрез  $\tau_n$ , напомним:

$$A \cdot \frac{\sin(\alpha'_1 + \tau_1)}{\sin(\gamma'_1 - \tau_1)} \cdot \frac{\sin(\alpha'_2 + \tau_2)}{\sin(\gamma'_2 - \tau_2)} \dots \dots \frac{\sin(\alpha'_n + \tau_n)}{\sin(\gamma'_n - \tau_n)} = B$$

Обозначая чрез  $a_n$  и  $b_n$  переменные логарифмов синусов углов  $\alpha_n$  и  $\gamma_n$ , напомним боковое условие в таком виде:

$$(a_1 + b_1)\tau_1 + (a_2 + b_2)\tau_2 \dots \dots + (a_n + b_n)\tau_n = \varphi$$

$$\varphi = \lg \frac{B}{A} \cdot \frac{\sin \gamma'_1 \sin \gamma'_2 \dots \sin \gamma'_n}{\sin \alpha'_1 \sin \alpha'_2 \dots \sin \alpha'_n}$$

Отсюда:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{(a_1 + b_1) \cdot \varphi}{\sum_1^n (a_k + b_k)^2} \\ \tau_2 &= \frac{(a_2 + b_2) \cdot \varphi}{\sum_1^n (a_k + b_k)^2} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \tau_n &= \frac{(a_n + b_n) \cdot \varphi}{\sum_1^n (a_k + b_k)^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (29)$$

Формулами (29) решается вопрос о нахождении вторичных поправок. Нередко дело еще упрощают, вводя предположение о равенстве всех поправок  $\tau$ .



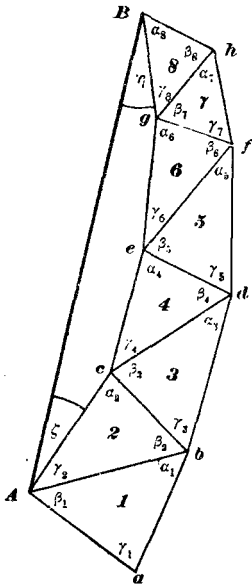
Тогда:

$$\tau = \frac{\varphi}{\Sigma(a+b)} \dots \dots \dots (30)$$

Понятно, что предыдущий прием вполне применим к случаю *центральной системы*.

**II. Вставка цепи треугольников между двумя данными пунктами.**

На чертеже 156 изображена цепь малых треугольников, вставленная между пунктами II или I класса *A* и *B*;  $\zeta$  и  $\eta$  — примычные углы. В этой цепи имеем во-первых условия треугольников и вторых условие *полигона A сег BA*, заключающееся, конечно, в требовании, чтобы сумма углов в нем была-бы равна теоретической сумме. Назовем попрежнему невязки в тр-ках чрез  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ , а невязку в полигоне чрез  $s$ . Так как обычно измеряются направления, то очевидно невязка  $s$  требует исправления *общего* угла при каждой вершине полигона на величину  $s$ , *деленную на число вершин полигона*; эти *общие* углы составляются: при *A* из угла  $\zeta$ ; при *s* из дополнения суммы углов  $\alpha_2, \beta_3$  и  $\gamma_4$  до  $360^\circ$ ; при *e* из дополнения суммы углов  $\gamma_6, \beta_5$  и  $\alpha_4$  до  $360^\circ$ . Далее принимаем, что на каждый частный угол, входящий в общий угол, поправка за условие полигона равна поправке общего угла за то-же условие, деленной на число частных углов при соответствующей вершине полигона.



Черт. 156.

Принимая во внимание сказанное, рассуждаем далее так:

1) Условие тр-ка требует для его углов равных между собою поправок, составляющих каждая  $\frac{1}{3}$  невязки треугольника.

2) Условие полигона требует равных между собою поправок для *общих* углов при его вершинах, число которых назовем чрез  $z$ ; это-же условие вызывает поправку частного угла, равную поправке общего угла, взятой для чертежа 156 со знаком минус и деленной на число частных углов при соответствующей вершине полигона.

3) Окончательная поправка угла должна удовлетворять одновременно обоим условиям.

Назовем чрез:

- (1), (2), (3) . . . (n) поправки, обуславливаемые первым, вторым, . . . . n-овым треугольниками;
- (s) поправку общего угла, отвечающую условию полигона, понимая под общим углом внутренний угол полигона.
- $z_1, z_2, \dots, z_n$ , — число углов, входящих в полигон соответственно из 1, 2, . . . . n-го треугольников;
- $p_1$  и  $q_1$  — число частных углов при вершинах полигона, *входящих* в первый треугольник;
- $p_n$  и  $q_n$  — число частных углов при вершинах полигона, *входящих* в n-ый треугольник.



$$3(5) - \frac{1}{3}(s) + v_5 = 0$$

$$3(6) - \frac{2}{3}(s) + v_6 = 0$$

$$3(7) - \frac{1}{3}(s) + v_7 = 0$$

$$3(8) - \frac{1}{3}(s) + v_8 = 0$$

$$5(s) - (2) - (3) - 2(4) - (5) - 2(6) - (7) - (8) + s = 0$$

Отсюда:

$$(2) = -\frac{v_2}{3} + \frac{1}{9}(s) \quad (6) = -\frac{v_6}{3} + \frac{2}{9}(s)$$

$$(3) = -\frac{v_3}{3} + \frac{1}{9}(s) \quad (7) = -\frac{v_7}{3} + \frac{1}{9}(s)$$

$$(4) = -\frac{v_4}{3} + \frac{2}{9}(s) \quad (8) = -\frac{v_8}{3} + \frac{1}{9}(s)$$

$$(5) = -\frac{v_5}{3} + \frac{1}{9}(s)$$

$$\frac{32}{9}(s) + \frac{v_2 + v_3 + 2v_4 + v_5 + 2v_6 + v_7 + v_8}{3} + s = 0$$

$$(s) = -5.10$$

$$(1) = -1.7$$

$$(5) = -0.20$$

$$(2) = -0.94$$

$$(6) = -3.47$$

$$(3) = +0.20$$

$$(7) = -1.24$$

$$(4) = -2.47$$

$$(8) = +0.83$$

Поправки углов будут такие:

$$\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = -1.7$$

$$\alpha_2 = -0.94 + 1.70 = +0.76$$

$$\beta_5 = -0.20 + 1.70 = +1.50$$

$$\beta_2 = -0.94$$

$$\gamma_5 = -0.20$$

$$\gamma_2 = -0.94$$

$$\alpha_6 = -3.47 + 1.70 = -1.77$$

$$\alpha_3 = +0.20$$

$$\beta_6 = -3.47$$

$$\beta_3 = +0.20 + 1.70 = +1.90$$

$$\gamma_6 = -3.47 + 1.70 = -1.77$$

$$\gamma_3 = +0.20$$

$$\alpha_7 = -1.24$$

$$\alpha_4 = -2.47 + 1.70 = -0.77$$

$$\beta_7 = -1.24 + 1.70 = +0.46$$

$$\beta_4 = -2.47$$

$$\gamma_7 = -1.24$$

$$\gamma_4 = -2.47 + 1.70 = -0.77$$

$$\alpha_8 = +0.83$$

$$\alpha_5 = -0.20$$

$$\beta_8 = +0.83$$

$$\gamma_8 = +0.83 + 1.70 = +2.53$$

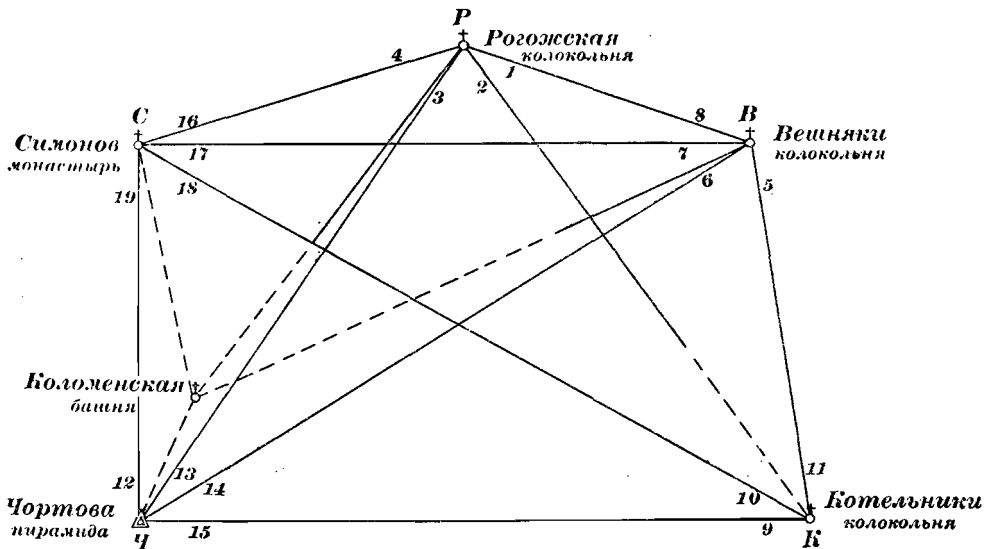
$$\eta = \xi = -5.10$$

### 57. Пример вычисления малой тригонометрической сети.

Подсчет числа условных уравнений

Число пунктов	$n = 5$
Число всех линий	$p = 10$
Число сплошных линий	$l = 9$
Число направлений	$D = 19$
Число всех уравнений	$N = D - 3n + 4 = 19 - 15 + 4 = 8$
Число условий фигур	$A = l - n + 1 = 9 - 5 + 1 = 5$
Число боковых уравнений	$C = p - 2n + 3 = 10 - 10 + 3 = 3$
	$A + C = N$

Чертеж сети:



Черт. 157.

В приводимой вслед за сим таблице измеренных в сети направлений, следовало бы везде за нулевые принять самые левые на каждом пункте направления, и направления перечислять по ходу часовой стрелки—этого не сделано потому, что эта таблица является извлечением из общей таблицы направлений учебной сети геодезического факультета Московского Межевого Института.

В сети измерения делались большими односекундными теодолитами, вследствие чего в измеренных направлениях таблицы удержаны сотые доли секунды, хотя по размерам сторон сети в этом нет никакой нужды.

ТАБЛИЦА ИЗМЕРЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ  
(приведенных к центрам пунктов)

Названия станций	Наблюдавшиеся предметы	Наблюденные направления	Весы	Примечания
Вешняки колокольня	Котельники колок. . . . .	0° 0' 0."00	6	Вес 6 соответствует 12-ти приемам, вес 3 шести приемам.
	Чортова дв. пир. . . . .	75 54 54. 63	6	
	Коломенская башня . . . . .	82 40 20. 79	6	
	Симонов монастырь . . . . .	114 40 20. 10	3	
	Рогожская колокольня . . . . .	136 37 1. 96	6	
Котельники колокольня	Симонов . . . . .	0° 0' 0."00	6	
	Вешняки . . . . .	30 54 28. 52	6	
	Чортова . . . . .	332 32 11. 31	6	
Чортова двойн. пир.	Симонов . . . . .	0° 0' 0."00	6	
	Коломенская . . . . .	12 21 18. 02	3	
	Рогожская . . . . .	17 10 53. 69	6	
	Вешняки . . . . .	49 47 49. 86	6	
	Котельники . . . . .	95 30 43. 34	6	
Симонов монастырь, колокольня	Вешняки . . . . .	0° 0' 0."00	3	
	Котельники . . . . .	34 25 8. 24	3	
	Чортова . . . . .	91 26 40. 08	3	
	Коломенское . . . . .	86 58 7. 0	3	
	Рогожская . . . . .	322 31 32. 42	3	
Рогожская колокольня	Вешняки . . . . .	219° 15' 10."90	3	
	Котельники . . . . .	245 53 51. 80	3	
	Чортова . . . . .	305 56 4. 26	3	
	Коломенское . . . . .	307 5 14. 9	3	
	Симонов . . . . .	339 50 6. 20	3	

СОСТАВЛЕНИЕ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Условия фигур.

1)	тр-к	СРВ	$\varepsilon = 0''.$ 05
	С	17 — 16	37° 28' 27."58
	Р	4 — 1	120 34 55 .30
	В	8 — 7	21 56 41 .86
			180 0 4 .74
			0 .05
			$\varepsilon_1 = -4''.$ 69

$$-(1) + (4) - (7) + (8) - (16) + (17) + 4''.$$
69 = 0

тр-к	С В Ч	$\varepsilon = 0''.16$
С	19—17	91°26'40''.08
В	7—6	38 45 25 .47
Ч	14—12	49 47 49 .86
		<hr/>
		179 59 55 .41
		0 .16

$$v_2 = -4''.75$$

$$-(6) \div (7) - (12) \div (14) - (17) \div (19) - 4''.75 = 0$$

тр-к	Р Ч В	$\varepsilon = 0''.17$
Р	3—1	86°40'53''.36
Ч	14—13	32 36 56 .17
В	8—6	60 42 7 .33
		<hr/>
		179 59 56 .86
		0 .17

$$v_3 = -3''.31$$

$$-(1) \div (3) - (6) \div (8) - (13) \div (14) - 3''.31 = 0$$

тр-к	В Ч К	$\varepsilon = 0''.28$
В	6—5	75°54'54''.63
Ч	15—14	45 42 53 .48
К	11—9	58 22 17 .21
		<hr/>
		180 0 5 .32
		0 .28

$$v_4 = -5''.04$$

$$-(5) \div (6) - (9) \div (11) - (14) \div (15) - 5''.04 = 0$$

тр-к	С Ч К	$\varepsilon = 0''.24$
С	19—18	57° 1'31''.84
Ч	15—12	95 30 43 .34
К	10—9	27 27 48 .69
		<hr/>
		180 0 3 .87
		0.24

$$v_5 = -3''.63$$

$$-(9) \div (10) - (12) \div (15) - (18) \div (19) - 3''.63 = 0$$

Боковые уравнения.

□ Симонов — Вешняки — Чортова — Котельники

$$\frac{\sin [19-17- (19)-(17)] \cdot \sin [6-5- (6)-(5)] \cdot \sin [10-9- (10)-(9)]}{\sin [7-6- (7)-(6)] \cdot \sin [19-18- (19)-(18)] \cdot \sin [11-9- (11)-(9)]}$$

		$lg \sin us$	$\Delta$
19—17	91°26'40''.08	9.9998620,0	— 0.6
6—5	75 54 54 .63	9.9867433,1	+ 5.2
10—9	27 27 48 .69	9.6638740,9	+40.5
		<hr/>	
		9.6504794,0	

7 — 6	38 45 25 .47	9.7965880,3	+26.2
19 — 18	57 1 31 .84	9.9237169,2	+13.7
11 — 9	58 22 17 .21	9.9301671,7	+13.0
		<hr/>	
		9.6504721,2	
		$v_6 = +72.8$	

$$-5.2(5) + 31.4(6) - 26.2(7) - 27.5(9) + 40.5(10) - 13.0(11) + 0.6(17) + 13.7(18) - 14.3(19) + 72.8 = 0$$

7) □ Рогожская — Вешняки — Котельники — Чортова.

$$\frac{\text{Sin}[8-6+(8)-(6)]}{\text{Sin}[3-1+(3)-(1)]} \cdot \frac{\text{Sin}[11-9+(11)-(9)]}{\text{Sin}[6-5+(6)-(5)]} \cdot \frac{\text{Sin}[3-2+(3)-(2)]}{\text{Sin}[15-13+3-2+(15)-(13)+(3)-(2)]} = 1$$

3 — 1	86°40'53".36	9.9992711,4	+ 1.3
6 — 5	75 54 54 .63	9.9867433,1	+ 5.2
15 — 13 + 3 — 2	138 22 2 .11	9.8223992,0	—23.7
		<hr/>	
		9.8084136.5	
8 — 6	60 42 7 .83	9.9405602,4	+11.8
11 — 9	58 22 17 .21	9.9301671,7	+13.0
3 — 2	60 2 12 .46	9.9376915,0	+12.2
		<hr/>	
		9.8084189,1	
		$v_7 = -52.6$	

$$-1.3(1) + 35.9(2) - 34.6(3) - 5.2(5) + 17.0(6) - 11.8(8) + 13.0(9) - 13.0(11) + 23.7(13) - 23.7(15) - 52.6 = 0$$

8) □ Симонов — Рогожская — Вешняки — Чортова.

$$\frac{\text{Sin}[19-16+(19)-(16)]}{\text{Sin}[4-3+(4)-(3)]} \cdot \frac{\text{Sin}[3-1+(3)-(1)]}{\text{Sin}[8-6+(8)-(6)]} \cdot \frac{\text{Sin}[7-6+(7)-(6)]}{\text{Sin}[19-17+(19)-(17)]} = 1$$

		<i>lg Sinus</i>	$\Delta$
19 — 16	128°55' 7".66	9.8910002,8	—17.0
3 — 1	86 40 53 .36	9.9992711,4	+ 1.3
7 — 6	38 45 25 .47	9.7965880,3	+26.2
		<hr/>	
		9.6868594,5	
4 — 3	33 54 1 .94	9,7464418,7	+31.3
19 — 17	91 26 40 .08	9.9998620,0	— 0.6
8 — 6	60 42 7 ,33	9.9405596,5	+11.8
		<hr/>	
		9.6868635,2	
		$v_8 = -40.7$	

$$-1.3(1) + 32.6(3) - 31.3(4) - 14.4(6) + 26.2(7) - 11.8(8) + 17,0(16) - 0.6(17) - 16.4(19) - 40.7 = 0$$

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)	<i>v</i>
$\frac{1}{p}$	1	1	1	1	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	1	1	1	1	
<i>a</i>	-1.0	-	-	+1.0	-	-	- 1.0	+ 1.0	-	-	-	-	-	-	-	-1.0	+1.0	-	-	+4.69
<i>b</i>	-	-	-	-	-	- 1.0	+ 1.0	-	-	-	-	-1.0	-	+1.0	-	-	-1.0	-	+ 1.0	-4.75
<i>c</i>	-1.0	-	+ 1.0	-	-	- 1.0	-	+ 1.0	-	-	-	-	- 1.0	+1.0	-	-	-	-	-	-3.31
<i>d</i>	-	-	-	-	- 1.0	+ 1.0	-	-	- 1.0	-	+ 1.0	-	-	- 1.0	+ 1.0	-	-	-	-	+5.04
<i>e</i>	-	-	-	-	-	-	-	-	- 1.0	+ 1.0	-	- 1.0	-	-	+ 1.0	-	-	- 1.0	+ 1.0	+3.63
<i>f</i>	-	-	-	-	- 5.2	+31.4	-26.2	-	-27.5	+40.5	-13.0	-	-	-	-	-	- 0.6	+13.7	-14.3	+72.8
<i>g</i>	-1.3	+35.9	-34.6	-	- 5.2	+17.0	-	-11.8	+13.0	-	-13.0	-	+23.7	-	-23.7	-	-	-	-	-52.6
<i>h</i>	-1.3	-	+32.6	-31.3	-	-14.4	+26.2	-11.8	-	-	-	-	-	-	-	+17.0	-0.6	-	-16.4	-40.7
<i>s</i>	-4.6	+35.9	-1.0	-30.3	-11.4	+33.0	0.0	-21.6	-16.5	+41.5	-25.0	-2.0	+22.7	+1.0	-21.7	+16.0	0.0	+12.7	-28.7	



Вычисление и контроль коэффициентов нормальных уравнений:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{aa}{p} \right] &= + 5.0 \\ \left[ \frac{ab}{p} \right] &= - 1.5 & \left[ \frac{bb}{p} \right] &= + 4.0 \\ \left[ \frac{ac}{p} \right] &= + 1.5 & \left[ \frac{bc}{p} \right] &= - 1.0 & \left[ \frac{cc}{p} \right] &= + 4.0 \\ \left[ \frac{ad}{p} \right] &= 0 & \left[ \frac{bd}{p} \right] &= - 1.0 & \left[ \frac{cd}{p} \right] &= - 1.0 & \left[ \frac{dd}{p} \right] &= + 3.0 \\ \left[ \frac{ae}{p} \right] &= 0 & \left[ \frac{be}{p} \right] &= - 1.5 & \left[ \frac{ce}{p} \right] &= 0 & \left[ \frac{de}{p} \right] &= + 1.0 \\ \left[ \frac{af}{p} \right] &= + 13.7 & \left[ \frac{bf}{p} \right] &= - 43.7 & \left[ \frac{cf}{p} \right] &= - 15.7 & \left[ \frac{df}{p} \right] &= + 25.55 \\ \left[ \frac{ag}{p} \right] &= - 4.6 & \left[ \frac{bg}{p} \right] &= - 8.5 & \left[ \frac{cg}{p} \right] &= - 59.55 & \left[ \frac{dg}{p} \right] &= - 13.75 \\ \left[ \frac{ah}{p} \right] &= - 66.6 & \left[ \frac{bh}{p} \right] &= + 4.5 & \left[ \frac{ch}{p} \right] &= + 35.20 & \left[ \frac{dh}{p} \right] &= - 7.20 \\ \left[ \frac{as}{p} \right] &= - 52.5 & \left[ \frac{bs}{p} \right] &= - 43.7 & \left[ \frac{cs}{p} \right] &= - 34.55 & \left[ \frac{ds}{p} \right] &= + 6.60 \\ \left[ \frac{ee}{p} \right] &= + 4.0 \\ \left[ \frac{ef}{p} \right] &= + 6.0 & \left[ \frac{ff}{p} \right] &= + 2525.01 \\ \left[ \frac{eg}{p} \right] &= - 18.35 & \left[ \frac{fg}{p} \right] &= + 186.17 & \left[ \frac{gg}{p} \right] &= + 3445.99 \\ \left[ \frac{eh}{p} \right] &= - 16.40 & \left[ \frac{fh}{p} \right] &= - 335.14 & \left[ \frac{gh}{p} \right] &= - 1179.05 & \left[ \frac{hh}{p} \right] &= + 3118.98 \\ \left[ \frac{es}{p} \right] &= - 22.25 & \left[ \frac{fs}{p} \right] &= + 2361.89 & \left[ \frac{gs}{p} \right] &= + 2348.36 & \left[ \frac{hs}{p} \right] &= + 1554.29 \\ \left[ \frac{ss}{p} \right] &= + 6118.14. \end{aligned}$$

Таблица нормальных уравнений коррелат.

$$\begin{aligned} 5.0k_1 - 1.5k_2 + 1.5k_3 &= + 13.7k_6 - 4.6k_7 - 66.6k_8 + 4.69 = 0 \\ + 4.0k_2 + 1.0k_3 - 1.0k_4 &+ 1.5k_5 - 43.7k_6 - 8.5k_7 + 4.5k_8 - 4.75 = 0 \\ + 4.0k_3 - 1.0k_4 &- 15.7k_6 - 59.55k_7 + 35.2k_8 - 3.31 = 0 \\ + 3.0k_4 + 1.0k_5 &+ 25.55k_6 - 13.75k_7 - 7.2k_8 + 5.04 = 0 \\ + 4.0k_5 + 6.0k_6 &- 18.35k_7 - 16.4k_8 + 3.63 = 0 \\ + 2525.01k_6 &+ 186.17k_7 - 335.14k_8 + 72.8 = 0 \\ + 3445.99k_7 &- 1179.05k_8 - 52.6 = 0 \\ + 3118.98k_8 &- 40.7 = 0 \end{aligned}$$

Хотя вычислитель и не делил на 10 коэффициенты условных уравнений, но это, конечно, нужно было сделать и затем при вычислении коэффициентов нормальных уравнений не идти далее удержания пятого знака числа.

ГАУССОВА СХЕМА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ КОРРЕЛАТ.

$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$	$k_8$	$v$	
+ 5.0	- 1.5	+ 1.5	-	-	+ 13.7	- 4.6	- 66.6	+ 4.69	-
0.69897	0.17609 <i>n</i>	0.17609	-	-	1.13672	0.66276 <i>n</i>	1.82347 <i>n</i>	0.67117	1.
	9.47712 <i>n</i>	9.47712	-	-	0.43775	9.96379 <i>n</i>	1.12450 <i>n</i>	9.97220	0.
	+ 4.0	+ 1.0	- 1.0	+ 1.5	- 43.7	- 8.5	+ 4.5	- 4.75	-
	- 0.4500	+ 0.4500	-	-	+ 4.110	- 1.380	- 19.980	+ 1.4070	-
	+ 3.5500	+ 1.4500	- 1.0	+ 1.5	- 39.590	- 9.880	- 15.480	- 3.3430	-
	0.55023	0.16137	0.00000 <i>n</i>	0.17609	1.59758 <i>n</i>	0.99476 <i>n</i>	1.18977 <i>n</i>	0.52414 <i>n</i>	1.
		9.61114	9.44977 <i>n</i>	9.62586	1.04735 <i>n</i>	0.44453 <i>n</i>	0.63954 <i>n</i>	9.97391 <i>n</i>	1.
	+ 4.0	- 1.0	0.0	- 15.7	- 59.55	+ 35.2	- 3.31	-	-
	- 0.45	0.0	0.0	- 4.110	+ 1.38	+ 19.98	- 1.407	+	+
	+ 3.55	- 1.00	0.00	- 19.810	- 58.17	+ 55.18	- 4.717	-	-
	- 0.5923	+ 0.4084	- 0.6127	+ 16.171	+ 4.035	+ 6.323	+ 1.365	+	+
9.30103		+ 2.9577	- 0.5916	- 0.6127	- 3.639	- 54.135	+ 61.503	- 3.352	-
9.75213 <i>n</i>		0.47096	9.77199 <i>n</i>	9.78723 <i>n</i>	0.56106 <i>n</i>	1.73348 <i>n</i>	1.78889	0.52524 <i>n</i>	0.
9.05316 <i>n</i>			9.30103 <i>n</i>	9.31627 <i>n</i>	0.09005 <i>n</i>	1.26252 <i>n</i>	1.31793	0.05428 <i>n</i>	9.
9.31627									
9.88264 <i>n</i>			+ 3.0	+ 1.0	+ 25.55	- 13.75	- 7.20	+ 5.04	+
	- 0.11302		-	-	-	-	-	-	-
9.19891 <i>n</i>	- 0.15809		+ 3.0	+ 1.0	+ 25.55	- 13.75	- 7.20	+ 5.04	+
0.09005	- 0.00894		- 0.2817	+ 0.4225	- 11.152	- 2.783	- 4.3605	- 0.9417	-
7.86153 <i>n</i>	- 0.28005		+ 2.7183	+ 1.4225	+ 14.398	- 16.533	- 11.560	+ 4.0983	-
7.95158 <i>n</i>	+ 0.54031		- 0.1183	- 0.1225	- 0.728	- 10.827	+ 12.300	- 0.6703	-
1.26252									
8.47012	+ 0.26026		+ 2.6000	+ 1.3000	+ 13.670	- 27.360	+ 0.7400	+ 0.4280	-
9.73264	+ 1.67723		0.41497	0.11394	1.13577	1.43712 <i>n</i>	9.86924	0.53504	0.
1.31793 <i>n</i>	+ 1.93749			9.69897	0.72080	1.02215 <i>n</i>	9.45427	0.12007	0.
8.90666 <i>n</i>	+ 1.13313								
					+ 4.0	+ 6.0	- 18.35	- 16.4	+ 3.63
0.22459	3.07062				-	-	-	-	-
	$k_3 = + 3.07062$				+ 4.0	+ 6.0	- 18.35	- 16.4	+ 3.63
	$lg k_3 = 0.48723$				- 0.6338	+ 16.728	+ 4.1746	+ 6.5407	+ 1.4125
					+ 3.3662	+ 22.728	- 14.1754	- 9.8593	+ 5.0425
					- 0.1269	- 0.754	- 11.2136	+ 12.7400	- 0.6942
					+ 3.2393	+ 21.974	- 25.389	+ 2.8807	+ 4.3483
					- 0.6500	- 6.835	+ 13.680	- 0.3700	- 1.7140
					+ 2.5893	+ 15.139	- 11.709	+ 2.5107	+ 2.6343
					0.41318	1.18011	1.06852 <i>n</i>	0.39974	0.42067
					0.76693	0.65534 <i>n</i>	9.98656	0.00749	0.

$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$	$k_8$
9.69897 <i>n</i>	0.72080 <i>n</i>	1.02215	9.45427 <i>n</i>	+ 0.3816	+ 2525.0	+ 186.17	- 335.14
9.88264 <i>n</i>	7.86153 <i>n</i>	8.47012	8.90666 <i>n</i>	+ 0.03822	- 37.53	+ 12.60	+ 182.48
9.58161	8.58233	9.49227	8.36093	+ 0.31065	+ 2487.47	+ 198.77	- 152.66
				+ 0.02296	- 441.52	- 110.18	- 172.63
				+ 0.75343	+ 2045.95	+ 88.59	- 325.29
				- 1.3185	- 4.48	- 66.611	+ 75.677
			$k_4 =$	- 0.5651	+ 2041.47	+ 21.979	- 249.61
			$lgk_4 =$	9.75213 <i>n</i>	- 71.87	+ 143.853	- 3.89
	0.76693 <i>n</i>	0.65534	9.98656 <i>n</i>		+ 1969.60	+ 165.83	- 253.50
	7.86153 <i>n</i>	8.47012	8.90666 <i>n</i>		- 88.52	+ 68.46	- 14.68
	8.62846	9.12546	8.89322		+ 1881.08	+ 234.29	- 268.18
		+ 0.0425			3.27441	2.36975	2.42843 <i>n</i>
		+ 0.1335				9.09534	9.15402 <i>n</i>
		+ 0.0782					
		+ 0.2542				+ 3445.99	- 1179.05
		- 1.0174				- 4.23	- 61.27
	$k_5 =$	- 0.7632				+ 3441.76	- 1240.32
	$lgk_5 =$	9.88264 <i>n</i>				- 27.50	- 43.08
		9.09534 <i>n</i>	9.15402			+ 3414.26	- 1283.40
		8.47012	8.90666 <i>n</i>			- 990.80	+ 1125.67
		7.56546 <i>n</i>	8.06068 <i>n</i>			+ 2423.46	- 157.73
			- 0.00368			- 287.92	+ 7.79
			- 0.01150			+ 2135.54	- 149.94
			+ 0.00791			- 52.95	+ 11.35
		$k_6 =$	- 0.00727			+ 2082.59	- 138.59
		$lgk_6 =$	7.86153 <i>n</i>			- 29.18	+ 33.40
						+ 2053.41	- 105.19
						3.31248	2.02198 <i>n</i>
							8.70950 <i>n</i>
					8.70950		+ 3118.98
					8.90666 <i>n</i>		- 887.10
					7.61616 <i>n</i>		+ 2231.88
					- 0.00413		- 67.50
					+ 0.03365		+ 2164.38
				$k_7 =$	+ 0.02952		- 1278.90
				$lgk_7 =$	8.47012		+ 885.48
							- 0.21
							+ 885.27
							- 2.43
							+ 882.84
							- 38.23
							+ 844.61
							- 5.39
							+ 839.22
							2.92388
							$lgk_8 =$
							$k_8 =$

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ ЛИСТ К СХЕМЕ ГАУССА.

9.65321 9.65321 <i>n</i> — — 0.61384 <i>n</i> 0.13988 1.30059 0.14829 <i>n</i> 1.15664	9.65321 — — 0.61384 0.13988 <i>n</i> 1.30059 <i>n</i> 0.14829 1.15664 <i>n</i>	— — — — — — —	— — — — — — —	1.57447 1.10051 <i>n</i> 2.26122 <i>n</i> 1.10892 2.11727 <i>n</i>	0.62655 1.78726 0.63496 <i>n</i> 1.64381	2.94797 1.79567 <i>n</i> 2.80402	
9.77251 9.61114 <i>n</i> 9.78723 1.20873 <i>n</i> 0.00590 <i>n</i> 0.80091 <i>n</i> 0.13528 <i>n</i> 1.40905 <i>n</i>	9.44977 9.62586 <i>n</i> 1.04736 0.44453 0.63954 9.97391 1.24768	9.80195 1.22345 <i>n</i> 0.62062 <i>n</i> 0.81562 <i>n</i> 0.15000 <i>n</i> 1.42377 <i>n</i>	2.64493 2.04212 2.23713 1.57150 2.84527	1.43929 1.63430 0.96867 2.24244	1.82931 1.16368 2.43745		
9.07302 9.08826 9.86204 1.03451 1.08993 <i>n</i> 9.82627 9.62958 <i>n</i>	9.10350 9.89727 1.04975 1.10516 <i>n</i> 9.84151 9.64482 <i>n</i>	0.65106 1.82355 1.87896 <i>n</i> 0.61529 0.41862 <i>n</i>	2.99600 3.05141 <i>n</i> 1.78776 1.61106 <i>n</i>	3.10683 1.84318 <i>n</i> 1.64648			
9.81291 0.83474 1.13609 9.56821 0.23401 0.44886 <i>n</i>	1.85657 2.15792 <i>n</i> 0.59002 1.25584 1.47069 <i>n</i>	2.45927 0.89139 <i>n</i> 1.55719 <i>n</i> 1.77204	9.32351 9.98931 0.20416				
1.94704 1.83544 <i>n</i> 1.16667 1.18760 1.81476	1.72386 1.05508 <i>n</i> 1.07600 <i>n</i> 1.70317 <i>n</i>	0.38630 0.40723 1.03439					
1.46509 1.52377 <i>n</i> 0.26801 <i>n</i> 2.35834	1.58245 0.32669 2.41702 <i>n</i>						
0.73148 0.54893 1.98346 <i>n</i>							

Вычисления  $k_1$  и  $k_2$  в схеме не приведены; значения их такие:  $k_2 = -0.500$ ;  $k_1 = -3.036$ . При вычислении Гауссовой схемы контролировалась каждая строка ее, получаемая из вспомогательного листа.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)
$\frac{1}{p}$	1	1	1	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	1	1	1	1
$\frac{ak_1}{p}$	$\frac{+}{3.036}$		$\frac{-}{3.036}$		$\frac{+}{1.518}$	$\frac{+}{1.518}$	$\frac{-}{1.518}$								$\frac{+}{3.036}$	$\frac{-}{3.036}$		
$\frac{bk_2}{p}$				$\frac{+}{0.250}$	$\frac{-}{0.250}$	$\frac{-}{0.250}$					$\frac{+}{0.250}$		$\frac{-}{0.250}$		$\frac{+}{0.500}$	$\frac{-}{0.500}$		
$\frac{ck_3}{p}$	$\frac{-}{3.071}$	$\frac{+}{3.071}$		$\frac{-}{1.535}$	$\frac{-}{1.535}$		$\frac{+}{1.535}$					$\frac{-}{1.535}$	$\frac{+}{1.535}$					
$\frac{dk_4}{p}$				$\frac{+}{0.283}$	$\frac{-}{0.283}$			$\frac{+}{0.283}$		$\frac{-}{0.283}$			$\frac{+}{0.283}$	$\frac{-}{0.283}$				
$\frac{ek_5}{p}$								$\frac{+}{0.381}$		$\frac{-}{0.381}$	$\frac{+}{0.381}$						$\frac{+}{0.763}$	$\frac{-}{0.763}$
$\frac{fk_6}{p}$				$\frac{+}{0.019}$	$\frac{-}{0.114}$	$\frac{+}{0.095}$		$\frac{+}{0.100}$		$\frac{-}{0.147}$	$\frac{+}{0.047}$					$\frac{-}{0.004}$	$\frac{-}{0.100}$	$\frac{+}{0.104}$
$\frac{gk_7}{p}$	$\frac{-}{0.038}$	$\frac{+}{1.060}$	$\frac{-}{1.021}$	$\frac{-}{0.077}$	$\frac{+}{0.251}$		$\frac{-}{0.174}$	$\frac{+}{0.192}$		$\frac{-}{0.192}$		$\frac{+}{0.350}$		$\frac{-}{0.350}$				
$\frac{hk_8}{p}$	$\frac{+}{0.105}$		$\frac{-}{2.631}$	$\frac{+}{2.526}$		$\frac{-}{1.057}$	$\frac{+}{0.476}$								$\frac{-}{1.372}$	$\frac{+}{0.048}$		$\frac{+}{1.323}$
$\delta$	$\frac{+}{0.032}$	$\frac{+}{1.060}$	$\frac{-}{0.581}$	$\frac{+}{0.510}$	$\frac{-}{0.225}$	$\frac{+}{0.306}$	$\frac{+}{0.319}$	$\frac{+}{0.956}$	$\frac{-}{0.529}$	$\frac{-}{0.428}$	$\frac{+}{0.631}$	$\frac{-}{1.185}$	$\frac{+}{1.568}$	$\frac{-}{1.015}$	$\frac{+}{1.664}$	$\frac{-}{2.499}$	$\frac{+}{0.663}$	$\frac{+}{0.164}$
$p\delta^2$	0.00102		0.33756		0.10125	0.18727		1.82787		0.36637		2.80845		2.06045		6.21006		0.02690
		1.1236		0.2601		1.44840		0.20352		0.55968		0.79632		4.91725		2.76890		0.43957

$$[p \delta \delta] = + 26.4435 \quad [kv] = - 26.4465$$

$$\text{Средняя ошибка единицы веса } \mu = \sqrt{\frac{[p \delta^2]}{n-r}} = \sqrt{\frac{26.4435}{8}} = \pm 1''.82$$

или средняя ошибка направления из шести приемов равна  $\pm 1''.82$ . В приводимой вслед за сим таблице окончательных направлений поправка нулевого направления вычтена из поправок других направлений, наблюдаемых с того-же пункта. Этого можно и не делать.

Кроме того, следует вместо двух таблиц направлений, приведенных в нашем примере, составлять одну.

ОКОНЧАТЕЛЬНАЯ ТАБЛИЦА НАПРАВЛЕНИЙ.

Названия станций	Наблюдавшиеся преометы	Наблюдаемые направления	Поправки	Уравненные направления	Вес.
Вешняки	5 Котельники . . . . .	0° 0' 0."00	0."00	0° 0' 0."00	2
	6 Чортова . . . . .	75 54 54. 63	-1. 08	75 54 53. 55	2
	Коломенское . . . . .	82 40 20. 79			1
	7 Симонов . . . . .	114 40 20. 10	+0. 08	114 40 20. 18	2
8 Рогожская . . . . .	136 37 1. 96	+0. 09	136 37 2. 05	2	
Котельники	10 Симонов . . . . .	0° 0' 0."00	0."00	0° 0' 0."00	2
	11 Вешняки . . . . .	30 54 28. 52	+0. 10	30 54 28. 62	2
	9 Чортова . . . . .	332 32 11. 31	+1. 48	332 32 12. 79	2
Чортова	12 Симонов . . . . .	0° 0' 0."00	0."00	0° 0' 0."00	2
	Коломенское . . . . .	12 21 18. 02			2
	13 Рогожская . . . . .	17 10 53. 69	-1. 82	17 10 51. 87	2
	14 Вешняки . . . . .	49 47 49. 86	+0. 94	49 47 50. 80	2
	15 Котельники . . . . .	95 30 43. 34	-1. 65	95 30 41. 69	1
Симонов	17 Вешняки . . . . .	0° 0' 0."00	0."00	0° 0' 0."00	1
	18 Котельники . . . . .	34 25 8. 24	+3. 15	34 25 11. 39	1
	Коломенское . . . . .	86 58 7. 0			1
	19 Чортова . . . . .	91 26 40. 08	+2. 66	91 26 42. 74	1
	16 Рогожская . . . . .	322 31 32. 42	+4. 16	322 31 36. 58	1
Рогожская	1 Вешняки . . . . .	219° 15' 10."90	+0."03	219° 15' 10."93	1
	2 Котельники . . . . .	245 53 51. 80	+1. 06	245 53 52. 86	1
	3 Чортова . . . . .	305 56 4. 26	-0. 58	305 56 3. 68	1
	4 Симонов . . . . .	339 50 6. 20	-0. 51	339 50 5. 69	1
	Коломенское . . . . .	307 5 14. 9			1

Единица веса приписана направлению, наблюдаемому в шести приемах.

С уравненными углами были образованы треугольники сети; уменьшив эти углы на треть сферического избытка соответственного треугольника, было исполнено вычисление сторон треугольников принимая:

$$\text{логарифм „Рогожская—Вешняки“} = 3.7996480 \text{ (в метр).}$$

При этом, при вычислении избыточных тр-ков разногласия в логарифмах общих сторон не превышали единицы седьмого логарифмического знака.

Приняв для Рогожской:

$$x = - 1285.937 \quad y = + 5249.586$$

в прямоугольной системе Золднеровых координат с началом в Иване Великом, были затем вычислены в той-же системе координаты остальных пунктов, имея начальный дирекциональный угол:

$$(Рогожская—Вешняки) = 105^{\circ} 48' 4''.0.$$

Формулы Золднеровых координат следующие:

$$x_1 = x + s \cos \alpha + \frac{s \cos \alpha}{2 R^2} y_1^2 - \frac{s \cos \alpha \cdot s^2 \sin^2 \alpha}{6 R^2}$$

$$y_1 = y + s \sin \alpha - \frac{s^2 \cos^2 \alpha}{2 R^2} y - \frac{s^2 \cos^2 \alpha \cdot s \sin \alpha}{6 R^2}$$

$$\alpha_1 = \alpha \pm 180^{\circ} - \frac{s \cos \alpha (y_1 + y)}{2 R^2 \cdot \sin 1''}$$

Для широты  $55^{\circ} 40'$ :

$$\lg \frac{1}{2 R^2 \sin 1''} = 1.4029$$

$$\lg \frac{1}{2 R^2} = 6.0885$$

$$\lg \frac{1}{6 R^2} = 5.6114$$

Ниже приводятся вычисленные координаты и дирекциональные углы.

#### СПИСОК КООРДИНАТ:

	<i>x</i>	<i>y</i>
Рогожская	— 1285.937	+ 5249.586
Вешняки	— 3002.638	+ 11315.819
Симонов	— 3957.420	+ 2445.919
Чортова	— 11245.087	+ 3044.898
Котельники	— 11433.818	+ 16345.004

ДИРЕКЦИОНАЛЬНЫЕ УГЛЫ: (азимуты в системе Золднера)

Рогожская—Вешняки	105° 48' 4''.0
—Котельники	132 26 45 .9
—Чортова	192 28 56 .7
—Симонов	226 22 58 .7
Вешняки —Рогожская	285° 48' 4''.03
—Чортова	225 5 55 .5
—Симонов	263 51 22 .16
Чортова —Симонов	355° 18' 5''.0
—Рогожская	120 28 56 .9 и т. д.

Вслед за этим было приступлено к вычислению координат уединенной точки — Коломенская башня,

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПУНКТА *КОЛОМЕНСКАЯ БАШНЯ*.

ОСНОВНОЙ ПУНКТ *РОГОЖСКАЯ*

Наблюденные пункты	Окончательные азимуты	Наблюденные направления	Ориентировочный угол	Наблюденные азимуты
Вешняки . . . . .	105° 48' 4".0	219° 15' 10".9	246° 32' 53".1	—
Котельники . . . . .	132 26 45 .9	245 53 51 .8	54 .1	—
Чортова . . . . .	192 28 56 .66	305 56 4 .26	52 .4	—
Коломенское . . . . .	—	307 5 14 .9	—	193° 38' 7".9
Симонов . . . . .	226 22 58 .7	339 50 6 .2	52 .5	—
			53".0	

ОСНОВНОЙ ПУНКТ *ВЕШНЯКИ*

Наблюденные пункты	Окончательные азимуты	Наблюденные направления	Ориентировочный угол	Наблюденные азимуты
Котельники . . . . .	149° 11' 2".0	0° 0' 0".0	149° 11' 2".0	—
Чортова . . . . .	225 5 55 .5	75 54 54 .6	0 .9	—
Коломенское . . . . .	—	82 40 20 .8	—	231° 51' 22".5
Симонов . . . . .	263 51 22 .2	114 40 20 .1	2 .1	—
Рогожская . . . . .	285 48 4 .0	136 37 2 .0	2 .0	—
			1".75	

ОСНОВНОЙ ПУНКТ *СИМОНОВ*

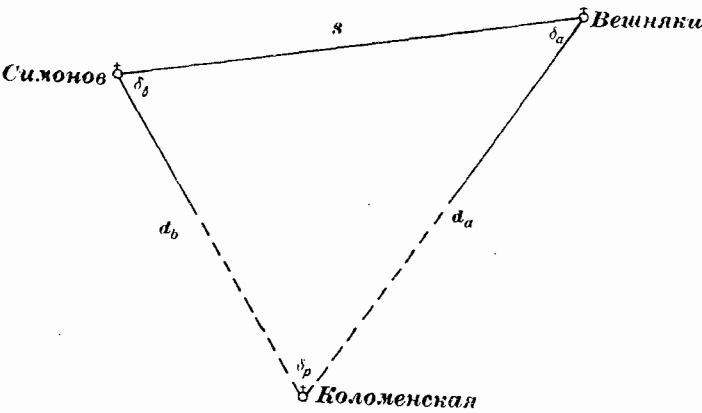
Наблюденные пункты	Окончательные азимуты	Наблюденные направления	Ориентировочный угол	Наблюденные азимуты
Вешняки . . . . .	83° 51' 22".1	0° 0' 0".0	83° 51' 22".1	—
Котельники . . . . .	118 16 33 .5	34 25 8 .2	25 .3	—
Коломенское . . . . .	—	86 58 7 .0	—	170° 49' 31".6
Чортова . . . . .	175 18 4 .9	91 26 40 .1	24 .8	—
Рогожская . . . . .	46 22 58 .7	322 31 32 .4	26 .3	—
			24".6	



ОСНОВНОЙ ПУНКТ ЧОРТОВА

Наблюдаемые пункты	Окончательные азимуты	Наблюдаемые направления	Ориентировочный угол	Наблюдаемые азимуты
Симонов . . . . .	355° 18' 5''.0	0° 0' 0''.0	355° 18' 5''.0	—
Коломенское . . . . .	—	12 21 18 .0	—	7° 39' 22''.4
Рогожская . . . . .	12 28 56 .9	17 10 53 .7	3 .2	—
Вешняки . . . . .	45 5 55 .8	49 47 49 .9	5 .9	—
Котельники . . . . .	90 48 46 .7	95 30 43 .3	3 .4	—
			4''.4	

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ КООРДИНАТ КОЛОМЕНСКОЙ БАШНИ



$\alpha_B^C$	263° 51' 22''.2
$\alpha_B^K$	231 51 22 .5
$\alpha_C^K$	170 49 31 .6
$\alpha_C^B$	83 51 22 .1
$\delta_a = \alpha_B^C - \alpha_B^K$	31 59 59 .7
$\delta_b = \alpha_C^K - \alpha_C^B$	86 58 9 .5
$\delta_p = \alpha_K^B - \alpha_K^C$	61 1 50 .9

Черт. 158

$lg d_b$ 3.7326804	$lg \Delta x_c$ 9.7270887 n	$lg \Delta x_b$ 3.7985969 n
$lg \sin \delta_a$ 9.7242087	$lg \cos \alpha_C^K$ 9.9944083 n	$lg \cos \alpha_B^K$ 9.7907331 n
$lg s$ . . . . . 3.9504203	$lg d_b$ 3.7326804	$lg d_a$ 4.0078638
$don lg \sin \delta_p$ 0.0580514	$lg \sin \alpha_C^K$ 9.2026049	$lg \sin \alpha_B^K$ 9.8956786 n
$lg \sin \delta_b$ 9.9993921		
$lg d_a$ 4.0078638	$lg \Delta y_c$ 2.9352853	$lg \Delta y_b$ 3.9035424 n
Вешняки	$y$ + 1 315.819	$x$ — 3002.638
	$\Delta y_b$ — 8008.340	$\Delta x_b$ — 6289.222
	$y_K$ + 3307.479	$x_K$ — 9291.860
Симонов	$y$ — 2445.919	$x$ — 3957.420
	$\Delta y_c$ + 861.560	$\Delta x_c$ — 5334.439
	$y_K$ + 3307.479	$x_K$ — 9291.859

Точное вычисление приближенных координат необходимо делать, когда определение вероятных координат дополнительного пункта будет исполняться графическим методом; если же определение вероятных координат исполняется аналитическим путем, то приближенные координаты  $y_0$  и  $x_0$  можно определять грубо, ведя предыдущее вычисление пятизначными логарифмами.

Вычисление азимутов  $\alpha'$  на приближенную точку, расстояний до нее  $d$  и коэффициентов  $a$  и  $b$ .

$$-\frac{\text{Cos } \alpha'}{d \text{ Sin } 1''} \cdot \delta y - \frac{\text{Sin } \alpha'}{d \text{ Sin } 1''} \cdot \delta x + \alpha' - \alpha = \delta$$

$$x_0 = -9291.86 \quad y_0 = +3307.48 \quad a = \frac{\text{Cos } \alpha'}{10d \text{ Sin } 1''}; \quad b = -\frac{\text{Sin } \alpha'}{10d \text{ Sin } 1''}$$

Основные пункты	$y$	$x$	$\lg(\Delta y + \Delta x)$	$\lg \Delta y$	$\lg \text{Sin } \alpha'$	$\lg a$
	$y_0 - y = \Delta y$	$x_0 - x = \Delta x$	$\lg(\Delta x - \Delta y)$	$\lg \Delta x$	$\lg \text{Cos } \alpha'$	$\lg(-b)$
	$\Delta y + \Delta x$	$\Delta x - \Delta y$	$\lg \lg(45^\circ + \alpha')$	$\lg \lg \alpha'$	$\text{дон } \lg d$	$\frac{a}{b}$
			$45^\circ + \alpha'$	$\alpha'$	$d \lg d \text{ Sin } 1''$	$b$
Рогож- ская . . .	+5249.586	-1285.937	3.9977370 <i>n</i>	3.2882729 <i>n</i>	9.37244 <i>n</i>	0.38618 <i>n</i>
	-1942.106	-8005.923	3.7827461 <i>n</i>	3.9034115 <i>n</i>	9.98758 <i>n</i>	9.77104 <i>n</i>
	-9948.029	-6063.817	0.2149909	9.3848614	6.08417	-2.433
			238°38'8".2	193°38'8".2	5.31443	+0.590
				1.39860		
Вешняки.	+11315.819	-3002.638	4.1552619 <i>n</i>	3.9035424 <i>n</i>	9.89568 <i>n</i>	0.09731 <i>n</i>
	-8008.339	-6289.222	3.2353054	3.7985965 <i>n</i>	9.79074 <i>n</i>	0.20225 <i>n</i>
	-14297.561	+1719.117	0.9199565 <i>n</i>	0.1049459	5.99214	-1.251
			276°51'22".5	231°51'22".6	5.31443	+1.593
				1.30657		
Чортова .	+3044.898	-11245.087	3.3455324	2.4192649	9.12462	1.01590
	+262.582	+1953.227	3.2280525	3.2907527	9.99611	0.14441
	+2215.809	+1690.645	0.1174799	9.1285122	6.70536	+10.375
			52°39'23".9	7°39'23".9	5.31443	-1.394
				2.01979		
Симонов.	+2445.919	-3957.420	3.6505872 <i>n</i>	2.9352860	9.20260	0.57616 <i>n</i>
	+861.561	-5334.440	3.7921115 <i>n</i>	3.7270888 <i>n</i>	9.99441 <i>n</i>	9.78435
	-4472.879	-6196.001	9.8584757	9.2081972 <i>n</i>	6.26732	-3.768
			215°49'31".6	170°49'31".6	5.31443	-0.609
				1.58175		

Таблица уравнений погрешностей и нормальных уравнений.

Основные пункты	$a$	$b$	$l = a' - a$	$s$	$p$	$pa a$	$pa b$	$pa l$	$pb b$	$pb l$
Рогожская	- 2.433	+ 0.590	+ 0".3	- 1.543	2	+ 11.839	- 2.871	- 1.460	+ 0.696	+ 0.354
Вешняки.	- 1.251	+ 1.593	+ 0 .1	+ 0.442	1	+ 1.565	- 1.993	- 0.125	+ 2.538	+ 0.159
Чортова .	+ 10.375	- 1.394	+ 1 .5	+ 10.481	1	+ 107.641	- 14.463	+ 15.562	+ 1.943	- 2.091
Симонов.	- 3.768	- 0.609	0	- 4.377	1	+ 14.198	+ 2.295	0	+ 0.371	0
						+ 135.243	- 17.032	+ 13.977	+ 5.548	- 1.578

$$[pas] = + 132.188$$

$$[pbs] = - 13.061$$

$$10 \delta x = \eta ; 10 \delta y = \xi.$$

Решение нормальных уравнений.

+ 135.243	- 17.032	+ 13.977	+ 132.188	всп. лист
2.13112	1.23126 $n$	1.14542	2.12120	0.33140
9.10014	9.10014 $n$	9.01430	9.99008	0.24556 $n$
8.72821 $n$	- 5.548	- 1.578	- 13.061	1.22134 $n$
7.82835 $n$	- 2.145	+ 1.760	- 16.647	
- 0.0067	+ 3.403	+ 0.182	- 3.586	
- 0.1033	0.53186	9.26007		
$\xi = - 0.110$		0.53186		

$$l\eta = 8.72821$$

$$\eta = - 0.053$$

0.48712	+ 5.548	- 17.032	- 1.578	- 13.061	всп. лист
9.04175 $n$	0.74414	1.23126 $n$	0.19811 $n$	1.11597 $n$	1.71838
9.52887 $n$		0.48712 $n$	9.45397 $n$	0.37183 $n$	0.68523
- 0.3380		- 135.243	+ 13.977	+ 132.188	1.60309
- 0.2845		- 52.285	- 4.844	- 40.093	
$\eta = - 0.0535$		- 82.958	+ 9.133	+ 92.095	
		1.91886	0.96061		
		1.91886			
		$l\xi = 9.04175 n$			

$$\xi = - 0.110$$

$$\delta x = - 0.005$$

$$\delta y = - 0.011$$

*Вычисление средних ошибок координат.*

Основные пункты	$a\xi$	$b\eta$	$l = \alpha' - a$	$\delta$	$\rho\delta\delta$
Рогожская . . . .	+ 0.268	- 0.031	+ 0.3	+ 0.54	0.5832
Вешняки . . . .	+ 0.138	- 0.084	+ 0.1	+ 0.15	0.0225
Чоргова . . . .	- 1.141	+ 0.074	+ 1.5	+ 0.43	0.1849
Симонов . . . .	+ 0.414	+ 0.032	0.0	+ 0.44	0.1936
					0.9842

Средняя ошибка единицы веса  $\mu = \sqrt{\frac{0.9842}{4 - 2}} = \sqrt{\frac{0.9842}{2}}$

$\mu = \pm \sqrt{0.4921} = \pm 0.71$

$m_x = \frac{\mu}{\sqrt{P_x}} = \frac{\mu}{10 \sqrt{[bb.1]}} = \frac{0.71}{10 \sqrt{3.403}} = \pm 0.038$

$m_y = \frac{\mu}{\sqrt{P_y}} = \frac{\mu}{10 \sqrt{[aa.1]}} = \frac{0.71}{10 \sqrt{82.96}} = \pm 0.008$

$x = - 9291 . 865$

$y = + 3307 . 469$

ГЛАВА XII.

**Дополнения к вопросу об уравнивательных вычислениях в триангуляции**

**58. Неопределенное решение нормальных уравнений.**

*Весовые коэффициенты.* В настоящем параграфе надлежит получить вспомогательные выводы, необходимые при вычислениях по определению весов функций уравновешенных элементов.

Пусть имеем нормальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} [aa] x + [ab] y + [ac] z + [a] &= 0 \\ [ab] x + [bb] y + [bc] z + [b] &= 0 \\ [ac] x + [bc] y + [cc] z + [c] &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Вообразим, что в результате решения этих уравнений неизвестные  $x, y$  и  $z$  определились в виде следующих линейных функций:

$$\left. \begin{aligned} -x &= \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \alpha_4 l_4 + \dots + \alpha_n l_n \\ -y &= \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 + \beta_4 l_4 + \dots + \beta_n l_n \\ -z &= \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 + \gamma_4 l_4 + \dots + \gamma_n l_n \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

Для определения коэффициентов  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  будем поступать так: умножим первое из ур-ний (1) на неопределенный коэффициент  $Q_{3,1}$ ; второе на коэффициент  $Q_{3,2}$  и третье на коэффициент  $Q_{3,3}$ . После означенного умножения сложим все три ур-ния (1) и потребуем, чтобы в полученной сумме:

$$\left\{ \begin{aligned} [aa] Q_{3,1} + [ab] Q_{3,2} + [ac] Q_{3,3} \\ [ab] Q_{3,1} + [bb] Q_{3,2} + [bc] Q_{3,3} \\ [ac] Q_{3,1} + [bc] Q_{3,2} + [cc] Q_{3,3} \end{aligned} \right\} x + \left\{ \begin{aligned} [ab] Q_{3,1} + [bb] Q_{3,2} + [bc] Q_{3,3} \\ [ac] Q_{3,1} + [bc] Q_{3,2} + [cc] Q_{3,3} \end{aligned} \right\} y + \\ + \left\{ \begin{aligned} [ac] Q_{3,1} + [bc] Q_{3,2} + [cc] Q_{3,3} \\ [al] Q_{3,1} + [bl] Q_{3,2} + [cl] Q_{3,3} \end{aligned} \right\} z - [al] Q_{3,1} + [bl] Q_{3,2} + [cl] Q_{3,3} = 0$$

коэффициенты при  $x$  и при  $y$  были-бы равны нулю, а коэффициент при  $z$  был-бы равен единице — тогда получаем:

$$\left. \begin{aligned} [aa] Q_{3,1} + [ab] Q_{3,2} + [ac] Q_{3,3} &= 0 \\ [ab] Q_{3,1} + [bb] Q_{3,2} + [bc] Q_{3,3} &= 0 \\ [ac] Q_{3,1} + [bc] Q_{3,2} + [cc] Q_{3,3} &= 1 \\ -z = [al] Q_{3,1} + [bl] Q_{3,2} + [cl] Q_{3,3} & \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Сравнивая-же последнее из ур-ний (3) с последним из ур-ний (2) легко выводим:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= a_1 Q_{3,1} + b_1 Q_{3,2} + c_1 Q_{3,3} \\ \gamma_2 &= a_2 Q_{3,1} + b_2 Q_{3,2} + c_2 Q_{3,3} \\ \gamma_3 &= a_3 Q_{3,1} + b_3 Q_{3,2} + c_3 Q_{3,3} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \gamma_n &= a_n Q_{3,1} + b_n Q_{3,2} + c_n Q_{3,3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Уравнениями (3) и (4) решился вопрос об определении величин  $\gamma$ .

Для определения величин  $\beta$  и  $\alpha$  поступаем аналогично, а именно: 1) для определения  $\beta$  множим ур-ния (1) соответственно на величины  $Q_{2,1}, Q_{2,2}, Q_{2,3}$  после чего складываем эти три ур-ния и требуем, чтобы в полученной сумме коэффициенты при  $x$  и  $z$  были-бы нулями, коэффициент при  $y$  был-бы равен единице; 2) для определения коэффициентов  $\alpha$  множим ур-ния (1) соответственно на величины  $Q_{1,1}, Q_{1,2}, Q_{1,3}$ , затем складываем эти ур-ния и требуем, чтобы в полученной сумме коэффициенты при  $y$  и  $z$  были-бы нулями, а коэффициент при  $x$  был-бы равен единице. Не трудно видеть, что мы приходим к таким результатам:

$$\left. \begin{aligned} [aa] Q_{2,1} + [ab] Q_{2,2} + [ac] Q_{2,3} &= 0 \\ [ab] Q_{2,1} + [bb] Q_{2,2} + [bc] Q_{2,3} &= 1 \\ [ac] Q_{2,1} + [bc] Q_{2,2} + [cc] Q_{2,3} &= 0 \\ -y = [al] Q_{2,1} + [bl] Q_{2,2} + [cl] Q_{2,3} & \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= a_1 Q_{2,1} + b_1 Q_{2,2} + c_1 Q_{2,3} \\ \beta_2 &= a_2 Q_{2,1} + b_2 Q_{2,2} + c_2 Q_{2,3} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \beta_n &= a_n Q_{2,1} + b_n Q_{2,2} + c_n Q_{2,3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$



Итак, поставленный вопрос свелся к решению ур-ний:

$$\left. \begin{aligned}
 [aa] Q_{1,1} + [ab] Q_{1,2} + [ac] Q_{1,3} &= 1 \\
 [ab] Q_{1,1} + [bb] Q_{1,2} + [bc] Q_{1,3} &= 0 \\
 [ac] Q_{1,1} + [bc] Q_{1,2} + [cc] Q_{1,3} &= 0 \\
 [aa] Q_{1,2} + [ab] Q_{2,2} + [ac] Q_{2,3} &= 0 \\
 [ab] Q_{1,2} + [bb] Q_{2,2} + [bc] Q_{2,3} &= 1 \\
 [ac] Q_{1,2} + [bc] Q_{2,2} + [cc] Q_{2,3} &= 0 \\
 [aa] Q_{1,3} + [ab] Q_{2,3} + [ac] Q_{3,3} &= 0 \\
 [ab] Q_{1,3} + [bb] Q_{2,3} + [bc] Q_{3,3} &= 0 \\
 [ac] Q_{1,3} + [bc] Q_{2,3} + [cc] Q_{3,3} &= 1
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (a) \\ (b) \dots \dots \\ (c) \end{array} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned}
 -x &= [a] Q_{1,1} + [b] Q_{1,2} + [c] Q_{1,3} \\
 -y &= [a] Q_{1,2} + [b] Q_{2,2} + [c] Q_{2,3} \\
 -z &= [a] Q_{1,3} + [b] Q_{2,3} + [c] Q_{3,3}
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

По определению величин  $Q$  можно, конечно, в каждом из ур-ний (16) собрать члены  $l_1, l_2, \dots, l_n$ .

Самое вычисление коэффициентов  $Q$  делается, конечно в той-же схеме в которой вычисляются неизвестные  $x, y$  и  $z$  — путем лишь прибавления специальной графы для каждой из групп (a), (b) и (c), причем эта графа заменяет графу со свободными членами нормальных ур-ний в Гауссовой схеме.

Величины  $Q_{1,1}, Q_{1,2}, \dots, Q_{2,3}, Q_{3,3}, \dots$  называются весовыми коэффициентами.

Так как ур-ния (16), без определения весовых коэффициентов, еще не дают числового решения для  $x, y$  и  $z$ , то поэтому и самые эти ур-ния получают название „неопределенных решений нормальных уравнений“.

**59. Вес функции уравновешенных элементов при посредственных наблюдениях.** Если имеем функцию

$$F = \varphi(x, y, z, \dots)$$

то, предполагая возможность приведения ее к линейному виду посредством введения приближенных значений  $x, y, z$ , представим эту функцию в таком виде:

$$F = f_1 x + f_2 y + f_3 z + \dots \dots \dots (1)$$

понимая под  $x, y$  и  $z$  в (1) поправки приближенных значений, определяемые по способу наименьших квадратов из некоторой системы уравнений погрешностей.

Ставя задачу определения веса  $F'$ , мы должны стоящие в (1) величины  $x, y$  и  $z$  выразить чрез свободные члены этих ур-ний погрешностей и, получив после этого  $F'$  как линейную функцию наблюдаемых независимо друг от друга количеств  $l$ , сумеем очень просто вычислить вес  $P$  функции  $F'$ .

Допустим, как и в § 58, что:

$$\left. \begin{aligned}
 -x &= \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \dots + \alpha_n l_n \\
 -y &= \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 + \dots + \beta_n l_n \\
 -z &= \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 + \dots + \gamma_n l_n
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Подставляя выражения (2) в (1), получаем:

$$F = (f_1 \alpha_1 + f_2 \beta_1 + f_3 \gamma_1 + \dots) l_1 + (f_1 \alpha_2 + f_2 \beta_2 + f_3 \gamma_2 + \dots) l_2 + \\ + (f_1 \alpha_3 + f_2 \beta_3 + f_3 \gamma_3 + \dots) l_3 \dots + (f_1 \alpha_n + f_2 \beta_n + f_3 \gamma_n + \dots) l_n$$

Предполагая веса всех  $l$  равными между собою и равными единице, находим:

$$\frac{1}{P_f} = (f_1 \alpha_1 + f_2 \beta_1 + f_3 \gamma_1 + \dots)^2 + (f_1 \alpha_2 + f_2 \beta_2 + f_3 \gamma_2 + \dots)^2 + \\ + (f_1 \alpha_3 + f_2 \beta_3 + f_3 \gamma_3 + \dots)^2 + \dots + (f_1 \alpha_n + f_2 \beta_n + f_3 \gamma_n + \dots)^2 \\ \left. \begin{aligned} \frac{1}{P_f} = f_1 f_1 [\alpha\alpha] + 2 f_1 f_2 [\alpha\beta] + 2 f_1 f_3 [\alpha\gamma] + \dots \\ + f_2 f_2 [\beta\beta] + 2 f_2 f_3 [\beta\gamma] + \dots \\ + f_3 f_3 [\gamma\gamma] + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots (3)$$

Пользуясь-же равенствами (12), (13) и (14) § 58-го, напишем:

$$\frac{1}{P_f} = f_1 f_1 Q_{1,1} + 2 f_1 f_2 Q_{1,2} + 2 f_1 f_3 Q_{1,3} + 2 f_1 f_4 Q_{1,4} + \dots \\ + f_2 f_2 Q_{2,2} + 2 f_2 f_3 Q_{2,3} + 2 f_2 f_4 Q_{2,4} + \dots \\ + f_3 f_3 Q_{3,3} + 2 f_3 f_4 Q_{3,4} + \dots \left. \right\} \dots \dots (4)$$

Таким образом, если определены весовые коэффициенты  $Q$  по способу указанному в § 58, то сейчас же получается возможность легко при помощи, формулы (4) рассчитать вес любой функции элементов, входивших в качестве неизвестных в уравнивание.

Однако весовые коэффициенты нередко определяют лишь тогда, когда имеют в виду вычислять веса целого ряда функций от уравновешенных элементов. Если-же возникает надобность в определении веса лишь *одной* функции, а весовые коэффициенты — еще не были рассчитаны, тогда следует употреблять иной путь, чем указываемый формулой (4).

Пусть:

$$\frac{1}{P_f} = q_1 f_1 + q_2 f_2 + q_3 f_3 + \dots = [qf] \dots \dots (5)$$

Сравнивая (5) с (4) мы видим:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= Q_{1,1} \cdot f_1 + Q_{1,2} f_2 + Q_{1,3} f_3 + \dots \\ q_2 &= Q_{1,2} \cdot f_1 + Q_{2,2} f_2 + Q_{2,3} f_3 + \dots \\ q_3 &= Q_{1,3} \cdot f_1 + Q_{2,3} f_2 + Q_{3,3} f_3 + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots (6)$$

Помножая ур-ния (6): первое на  $[aa]$ ; второе — на  $[ab]$ , третье на  $[ac]$  и т. д., и складывая, получим на основании ур-ний (15) § 58.

$$[aa] q_1 + [ab] q_2 + [ac] q_3 + \dots = f_1$$

Точно так-же, умножая ур-ния (6): первое на  $[ab]$ , второе на  $[bb]$ , третье — на  $[bc]$  . . . . , и складывая, находим:

$$[ab] q_1 + [bb] q_2 + [bc] q_3 + \dots = f_2$$

Одним словом, мы приходим к такой системе ур-ний:

$$\left. \begin{aligned} [aa] q_1 + [ab] q_2 + [ac] q_3 + [ad] q_4 + \dots &= f_1 \\ [ab] q_1 + [bb] q_2 + [bc] q_3 + [bd] q_4 + \dots &= f_2 \\ [ac] q_1 + [bc] q_2 + [cc] q_3 + [cd] q_4 + \dots &= f_3 \\ [ad] q_1 + [bd] q_2 + [cd] q_3 + [dd] q_4 + \dots &= f_4 \end{aligned} \right\} \dots \dots (7)$$



Подставляя (7) в (5) получим:

$$\frac{1}{F_f} = \left. \begin{aligned} & [aa] q_1^2 + 2 [ab] q_1 q_2 + 2 [ac] q_1 q_3 + 2 [ad] q_1 q_4 + \dots \\ & + [bb] q_2^2 + 2 [bc] q_2 q_3 + 2 [bd] q_2 q_4 + \dots \\ & + [cc] q_3^2 + 2 [cd] q_3 q_4 + \dots \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

Если имеем ур-ния погрешностей в виде:

$$\left. \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 u + \dots + l_1 &= \delta_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 u + \dots + l_2 &= \delta_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 u + \dots + l_3 &= \delta_3 \\ \dots & \dots \\ a_n x + b_n y + c_n z + \dots + l_n &= \delta_n \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

то, как известно:

$$[l\delta] = [\delta\delta]$$

т. е:

$$[\delta\delta] = [al]x + [bl]y + [cl]z + [dl]u + \dots + [ll] \dots (10)$$

Но с другой стороны, путем возведения в квадрат ур-ний (9) непосредственно получаем:

$$[\delta\delta] = \left. \begin{aligned} & [aa]x^2 + 2[ab]xy + 2[ac]xz + 2[ad]xu + \dots + 2[al]x + \\ & + [bb]y^2 + 2[bc]yz + 2[bd]yu + \dots + 2[bl]y + \\ & + [cc]z^2 + \dots + 2[cl]z + \\ & + [ll] \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

Умножая (10) на два и вычитая затем из него (11) имеем:

$$[\delta\delta] = [ll] - \left\{ \begin{aligned} & [aa]x^2 + 2[ab]xy + 2[ac]xz + 2[ad]xu + \dots \\ & + [bb]y^2 + 2[bc]yz + 2[bd]yu + \dots \\ & + [cc]z^2 + \dots \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

При чем в (12) уже не входят члены с  $[al]$ ,  $[bl]$ ,  $[cl]$

Далее известно, что

$$[\delta\delta] = [ll \cdot r] \dots \text{где } r \text{ число нормальных уравнений}$$

Другими словами:

$$[\delta\delta] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl.1]^2}{[bb.1]} - \frac{[cl.2]^2}{[cc.2]} - \frac{[dl.3]^2}{[dd.3]} \dots (13)$$

Сравнивая (12) с (13) заключаем:

$$[aa]x^2 + 2[ab]xy + 2[ac]xz + \dots + 2[aq]xt - [bb]y^2 - 2[bc]yz + \dots + \\ + 2[bq]yt - [qq]t^2 = \frac{[al]^2}{[aa]} + \frac{[bl.1]^2}{[bb.1]} + \frac{[cl.2]^2}{[cc.2]} + \frac{[dl.3]^2}{[dd.3]} + \dots (14)$$

формулу (14) и применим для преобразования ур-ния (8).

Сравнивая (7) с обычной системой нормальных ур-ний, а также сравнивая (8) с (14), мы заключаем, что если принять:

$$\begin{aligned} [al] &= f_1 & x &= q_1 \\ [bl] &= f_2 & y &= q_2 \\ [cl] &= f_3 & z &= q_3 \end{aligned}$$

то  $\frac{1}{P_f}$  выразится правой частью ур-ния (14), если над величинами  $f$  проделать те самые вычислительные действия, которые исполняются при решении нормальных уравнений в Гауссовой схеме над величинами

$$[al], [bl], [cl] \dots$$

Другими словами, нужно вычислить

$$\left. \begin{aligned} & \frac{f_1^2}{[aa]} \dots \text{соответствующее} \frac{[al]^2}{[aa]} \\ f_{3.1} = f_2 - \frac{[ab]}{[aa]} f_1 \dots \text{соответствующее} [bl.1] = [bl] - \frac{[al].[ab]}{[aa]} \\ f_{3.2} = f_3 - \frac{[ac]}{[aa]} f_1 - \frac{[f_{3.1}].[bc.1]}{[bb.1]} \text{соответствующее} [cl.2] \\ \text{причем } [cl.2] = [cl.1] - \frac{[bl.1].[bc.1]}{[bb.1]} = [cl] - \frac{[ac].[al]}{[aa]} - \frac{[bl.1].[bc.1]}{[bb.1]} \\ f_{3.4} = f_4 - \frac{[ad]}{[aa]} f_1 - \frac{[f_{3.1}].[bd.1]}{[bb.1]} - \frac{[f_{3.2}].[cd.2]}{[cc.2]} \\ \dots \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

По вычислении коэффициентов, указанных формулами (15), для  $\frac{1}{P_f}$  получаем:

$$\frac{1}{P_f} = \frac{f_1^2}{[aa]} + \frac{[f_{3.1}]^2}{[bb.1]} + \frac{[f_{3.2}]^2}{[cc.2]} + \frac{[f_{4.3}]^2}{[ad.3]} + \dots (16)$$

Таким образом для определения веса функции  $P_f$  нужно при решении нормальных ур-ний в Гауссовой схеме добавить еще один столбец, в котором роль величин  $[al], [bl], [cl]$  и т. д. играли бы соответственно величины  $f_1, f_2, f_3 \dots$ . В этом столбце нужно проделывать все те же действия, которые проделываются в каждом столбце Гауссовой схемы; числа, получаемые в этом столбце в тех его строчках, в которых приходят к образованию ур-ний преобразованной системы, будут соответственно равны:  $f_1, [f_{3.1}], [f_{3.2}], [f_{4.3}] \dots$

**60. Вес функций уравновешенных элементов при условных наблюдениях.** Пусть имеем следующую систему условных ур-ний:

$$\left. \begin{aligned} a_1 x + a_2 y + a_3 z + \dots + v_1 &= 0 \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z + \dots + v_2 &= 0 \\ c_1 x + c_2 y + c_3 z + \dots + v_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

Этой системе соответствует следующая система нормальных уравнений коррелат:

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{aa}{p} \right] k_1 + \left[ \frac{ab}{p} \right] k_2 + \left[ \frac{ac}{p} \right] k_3 + \left[ \frac{ad}{p} \right] k_4 + \dots + v_1 &= 0 \\ \left[ \frac{ab}{p} \right] k_1 + \left[ \frac{bb}{p} \right] k_2 + \left[ \frac{bc}{p} \right] k_3 + \left[ \frac{bd}{p} \right] k_4 + \dots + v_2 &= 0 \\ \left[ \frac{ac}{p} \right] k_1 + \left[ \frac{bc}{p} \right] k_2 + \left[ \frac{cc}{p} \right] k_3 + \dots + v_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

Число ур-ний (2), равное числу ур-ний (1), пусть будет  $s$ .





Формула (12) дает  $P_f$  без переходных коэффициентов и указывает следующий путь вычисления  $\frac{1}{P_f}$ : нужно при решении системы нормальных уравнений коррелат (2) прибавить к этим уравнениям еще один столбец и одну строку с коэффициентами:  $\begin{bmatrix} af' \\ p \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} bf' \\ p \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} cf' \\ p \end{bmatrix}$  . . . . , и с числами этого столбца поступать при вычислении Гауссовой схемы совершенно так же, как с числами всех остальных столбцов системы (2), решая как будто не  $s$  уравнений, а  $s + 1$ ; коэффициент  $R$  при неизвестном, соответствующем этому добавочному столбцу, полученный по преобразовании всех  $s + 1$  уравнений по способу Гаусса, и будет равен:

$$\left[ \frac{ff'}{p} \cdot s \right] = \frac{1}{P_f}$$

**61. Пример определения весовых коэффициентов и вычисления веса функции уравновешенных элементов при посредственных наблюдениях.**

На некотором тригонометрическом пункте результаты наблюдений отдельных углов суть следующие:

Между направлениями 1 и 2 . . .	51° 33' 12".8	с весом 1
" " 2 и 3 . . .	50 42 18.8	" 2
" " 1 и 4 . . .	243 29 41.1	" 2
" " 1 и 5 . . .	301 48 2.3	" 3
" " 2 и 3 . . .	359 9 4.3	" 1
" " 3 и 5 . . .	251 5 45.5	" 1

За неизвестные примем углы, отсчитываемые от направления 1 (первого):

$$\left. \begin{aligned} (1, 2) &= 51^\circ 33' 10''.00 + x \\ (1, 3) &= 50 42 20.00 + y \\ (1, 4) &= 243 29 40.00 + z \\ (1, 5) &= 301 48 0.00 + t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Уравнения погрешностей напишутся так:

$$\begin{aligned} x - 2''.8 &= \delta_1 \quad \text{с весом 1} \\ y + 1.2 &= \delta_2 \quad \text{" 2} \\ z - 1.1 &= \delta_3 \quad \text{" 2} \\ t - 2.3 &= \delta_4 \quad \text{" 3} \\ y - x + 5.7 &= \delta_5 \quad \text{" 1} \\ t - y - 5.5 &= \delta_6 \quad \text{" 1} \end{aligned}$$

Отсюда нормальные уравнения напишутся так:

$$\begin{aligned} 2x - y & & - 8.5 &= 0 \\ -x + 4y & & - t + 13.6 &= 0 \\ & + 2z & &= 2.2 = 0 \\ & - y & + 4t - 12.4 &= 0 \end{aligned}$$

Решение нормальных ур-ний в Гауссовой схеме:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>aa</i>	<i>ab</i>	<i>ac</i>	<i>ad</i>	<i>al</i>				
2	- 1 - 1/2	-	-	- 8,5 - 4,25	- 1 - 1/2	0	0	0
+ 4,25 - 0,961	+ 4 - 1/2	-	- 1	+ 13,6 - 4,25	0 - 1/2	- 1	0	0
<u><i>x</i> = + 3,289</u>	3 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	-	- 1	+ 9,35	- 1/2	- 1	0	0
$Q_{1,1} = \frac{1}{2} \cdot 0,251 + 0,5 = 0,627$			- 0,2857	+ 2,671	- 1/7	- 2/7	-	-
$Q_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot 0,308 = 0,154$	- 2,671 + 0,748	2	-	- 2,2	0	0	- 1	0
$Q_{1,3} = 0$	<u><i>y</i> = - 1,923</u>	-	-	-	-	-	-	-
$Q_{1,4} = \frac{1}{2} \cdot 0,077$								
$Q_{2,1} = + 0,286 \times 0,039 + \frac{1}{7} = 0,154$		2	-	- 2,2	0	0	- 1	0
				- 1,1	-	-	- 1/2	-
$Q_{2,2} = + 0,286 \times 0,078 + \frac{2}{7} = 0,308$		<u><i>z</i> = + 1,10</u>	4	- 12,4	0	0	0	- 1
		$Q_{3,1} = 0$	-	-	-	-	-	-
$Q_{2,3} = 0$		$Q_{3,2} = 0$	- 0,2857	+ 2,671	- 1/7	- 2/7	-	-
		$Q_{3,3} = + \frac{1}{2}$	-	-	-	-	-	-
$Q_{2,4} = + 0,219 \times 0,286 = 0,077$		$Q_{4,3} = 0$	+ 3,7143	- 9,729	- 1/7	- 2/7	0	- 1
				<u><i>t</i> = + 2,619</u>	+ 0,039	+ 0,078	0	+ 0,269
					$Q_{4,1}$	$Q_{4,2}$	$Q_{4,3}$	$Q_{4,4}$

В приведенной схеме графы 6, 7, 8 и 9 отведены вычислению по определению весовых коэффициентов. Мы получим в конце этих граф  $Q_{4,1} = 0,039$ ;  $Q_{4,2} = 0,078$ ;  $Q_{4,3} = 0$ ;  $Q_{4,4} = 0,269$ .

Все остальные весовые коэффициенты определены в той-же схеме, в продолжениях книзу граф 3, 2 и 1

Мы имеем такую таблицу:

$$\begin{array}{llll}
 Q_{1,1} = 0,627; & Q_{1,2} = 0,154 & Q_{1,3} = 0 & Q_{1,4} = 0,039 \\
 & Q_{2,2} = 0,308 & Q_{2,3} = 0 & Q_{2,4} = 0,078 \\
 & & Q_{3,3} = 0,5 & Q_{3,4} = 0. \\
 & & & Q_{4,4} = 0,269
 \end{array}$$

Веса уравновешенных углов (1,2), (1,3), (1,4), (1,5) равны соответственно:

$$\frac{1}{0,627} = 1,6; \quad \frac{1}{0,308} = 3,25; \quad \frac{1}{0,5} = 2; \quad \frac{1}{0,269} = 3,71$$

т. е. веса уравновешенных элементов заметно превышают веса наблюдаемых непосредственно соответственных элементов. Определим теперь вес угла (2,5) равного:

$$301^{\circ} 48' 2'' . 619 - 51^{\circ} 33' 13'' . 289 = 250^{\circ} 14' 49'' , 330$$

В нашем случае:

$$F = t - x + 250^{\circ} 14' 50'' . 000$$

$$f_1 = -1; f_2 = 0; f_3 = 0; f_4 = +1.$$

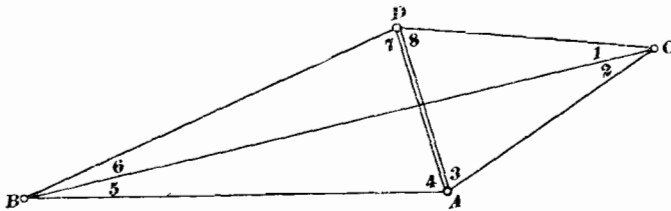
$$\frac{1}{P_f} = 1. Q_{1,1} - 2 Q_{1,4} + 1. Q_{4,4}$$

$$\frac{1}{P_f} = 0,627 - 0,078 + 0,269 = 0,818$$

$$P_f = 1,22$$

### 62. Пример определения веса функции уравновешенных элементов при условных наблюдениях.

При с'емке города Серпухова, студентами Межевого Института в 1898 г. была составлена изображаемая на приводимом здесь черт. 159 базисная сеть, служащая для перехода от малого базиса  $AD$  к основной стороне  $CB$ .



Черт. 159

Измеренные углы этой сети (понима-

емые, как измеренные независимо друг от друга) имеют следующие величины:

1 = 9 ° 17' 23'' . 1	5 = 13 ° 56' 52'' . 1.
2 = 40 2 10 . 2	6 = 2 18 59 . 4
3 = 42 12 46 . 0	7 = 79 56 27 . 9
4 = 83 47 52 . 6	8 = 88 27 39 . 1.

Условные уравнения образуем: из тр-ка  $CDA$ ; из тр-ка  $ABD$ , из тр-ка  $CBD$ ; полюсное ур-ние— взяв за полюс точку  $D$ . Таблица условных уравнений имеет вид:

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	$v$
$a$	+1	+1	+1	-	-	-	-	+1	-1'' . 6
$b$	-	-	-	+1	+1	+1	+1	-	-18.0
$c$	+1	-	-	-	+1	+1	+1	-	-0.5
$d$	+1,11	+0,18	+0,23	-0,02	+0,72	-1,48	-	-	-7,1

Отсюда нормальные ур-ния коррелат напишутся так:

$$4 k_1 + 2 k_3 + 1,16 k_4 - 1,6 = 0$$

$$4 k_2 + 2 k_3 - 3,78 k_4 - 18,0 = 0$$

$$2 k_1 + 2 k_2 + 4 k_3 - 3,37 k_4 - 0,5 = 0$$

$$1,16 k_1 - 3,78 k_2 - 3,37 k_3 + 21,9066 k_4 - 7,1 = 0$$

Принимая за единицу вес каждого наблюденного угла из числа вышепри-  
еденных, определим *вес стороны BC*.

Первые пять граф следующей таблицы относятся к вычислениям коррелат  
о Гауссовой схеме: последняя графа таблицы заполнена вычислениями для  
пределения веса стороны *Bc*.

1	2	3	4	5		
4	—	2	1.16	— 1.16	— 4.04	[af]
0,6021	—	0,3010	0,0645	0,2041 <i>n</i>	0,6064 <i>n</i>	
—	—	9,6989	9,4624	9,6020 <i>n</i>	0,0043 <i>n</i>	
— 0,400	4	2	— 3.78	— 18.0	— 15,58	[bf]
+ 1,869	—	—	—	—	—	[af] [ab]
— 0,256	—	—	—	—	—	[aa]
$k_1 = + 2.013$	4,0	2,0	— 3,78	— 18,0	— 15,58	[bf . 1]
	0,6021	0,3010	0,5775 <i>n</i>	1,2553 <i>n</i>	1,1926 <i>n</i>	
	—	9,6989	9,9754 <i>n</i>	0,6532 <i>n</i>	0,5905 <i>n</i>	
	+ 4,500	4	— 3,37	— 0,5	— 6,84	[cf]
	+ 1,869	— 1	— 0,580	+ 0,7998	+ 2,020	[af] [ac]
	+ 0,836	— 1	+ 1,890	+ 9,0000	+ 7,789	[aa]
						[bf . 1] [bc . 1]
						[bb . 1]
$k_2 = + 7,205$	— 2	— 2,060	+ 9,300	— 2,969		[cf . 2]
0,8576	0,3010	0,3145 <i>n</i>	0,9685	0,4726 <i>n</i>		
	—	0,0135 <i>n</i>	0,6675	0,1716 <i>n</i>		
	— 4,650	21,9066	— 7,1	+ 26,34		[df]
	+ 0,912	— 0,3364	— 0,464	+ 1,172		[af] [ad]
	$k_3 = - 3,738$	— 3,572	— 17,01	— 14,725		[aa]
	0,5727 <i>n</i>	— 2,128	9,594	— 3,063		[bf . 1] [bd . 1]
						[bb . 1]
						[cf . 2] [cd . 2]
						[cc . 2]
		15,87	— 14,042	+ 9,724		[df . 3]
		1,2006	1,1473 <i>n</i>	0,9878		
		—	9,9467 <i>n</i>	9,7872		[ff]
						[af] [af]
			$k_4 = + 0,8845$	115,09		[aa]
				— 4,08		[bf . 1] [bf . 1]
				— 60,685		[bb . 1]
				— 4,408		[cf . 2] [cf . 2]
				— 5,957		[cc . 2]
						[df . 3] [df . 3]
						[dd . 3]
				39,96		[ff . 4]



Сторона  $BC$  выражается чрез наблюдаемые углы и их поправки так:

$$\lg BC = \lg AD - \lg \sin [7 + (7)] + \lg \sin [3 + 4 + (3) + (4)] - \\ - \lg \sin [5 + 6 + (5) + (6)] - \lg \sin [2 + (2)]$$

Задаваясь целью определить вес  $\lg BC$ , мы будем пренебрегать ошибкой в базисе  $AD$  (хотя для малых триангуляций этого и не следует делать). Приводя  $\lg BC$  к линейному виду имеем:

$$\lg BC = -\Delta_2 (2) + \Delta_{3+4} (3) + \Delta_{3+4} (4) - \Delta_{5+6} (5) - \Delta_{5+6} (6) + \Delta_7 (7) + \\ + \lg \frac{\sin 7 \cdot \sin [3+4]}{\sin [5+6] \sin 2} + \lg AD$$

причем под  $\Delta_2, \Delta_{3+4} \dots$  понимаются изменения  $\lg \sin$  угла 2, угла 3 + 4 и т. д. при изменении соответственных углов на одну секунду. Следовательно, в нашем примере:

$$\begin{array}{ll} f_1 = 0 & f_5 = -\Delta_{5+6} = -72,7 \\ f_2 = -\Delta_2 = -25,1 & f_6 = -\Delta_{5+6} = -72,1 \\ f_3 = \Delta_{3+4} = -15,3 & f_7 = \Delta_7 = +3,7 \\ f_4 = \Delta_{3+4} = -15,3 & f_8 = 0. \end{array}$$

Далее вычисляем:

$$\begin{array}{ll} [af] = -40,4 & [df] = +263,365 \\ [bf] = -155,8 & [ff] = +11508,70. \\ [cf] = -68,4 & \end{array}$$

Вследствие значительных размеров этих коэффициентов, мы вообразим все  $f$  уменьшенными в 10 раз и тогда напишем новую систему коэффициентов.

$$\begin{array}{ll} [af]' = -4,04 & [df]' = +26,34 \\ [bf]' = -15,58 & [ff]' = +115,09 \\ [cf]' = -6,84 & \end{array}$$

Уменьшение коэффициентов  $f$  в 10 раз вызывает, конечно, уменьшение в 100 раз  $\frac{1}{P_f}$ , согласно (12) § 60; поэтому полученный с числами  $[af]'$ ;

$[bf]'$  . . . . результат нужно будет затем увеличить в 100 раз. С числами  $[af]'$ ,  $[bf]'$ ,  $[cf]'$  . . .  $[ff]'$  мы должны в последней правой графе вышеприведенной схемы проделать те-же самые вычисления, которые проделаны были в каждой другой графе этой схемы с коэффициентами нормальных ур-ний коррелат, причем эти вычисления в последней графе нужно провести так, будто у нас было не четыре ур-ния, а пять — т. е. нужно в каждом вспомогательном листе добавить один столбец, а в каждом столбце каждого вспомогательного листа добавить одну строку. Все получаемые числа указаны алгебраически справа от той графы, в которой ведутся вычисления по определению веса.

Итак, в нашем примере:

$$\frac{1}{P_f} = 3996$$

С другой стороны, вычислив с коррелатами поправки углов, мы получим:

$$\begin{array}{ll} (1) = -0'',7 & (5) = +7,8 \\ (2) = +1'',8 & (6) = -0,5 \\ (3) = +2'',2 & (7) = +3,5 \\ (4) = +7'',2 & (8) = -1,7 \end{array}$$

Сумма квадратов поправок равна: 136.6

Отсюда ошибка единицы веса равна  $\sqrt{\frac{136.6}{4}} = \pm 5,9$

Средняя ошибка в логарифме  $BC$  равна поэтому:

$$m = 5,9 \sqrt{3996} = 5,9 \cdot 62 = 366 \text{ единиц седьмого знака}$$

Но  $\Delta lgs = \frac{\Delta s}{s} \cdot M$

где  $M$  — модуль Неперовых логарифмов.

Следовательно:

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{\Delta lgs}{M}$$

Другими словами, относительная ошибка в стороне  $BC$  равна ошибке в логарифме  $BC$ , деленной на  $M$ .

Поэтому точность определения  $BC$  равна:

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{366.10000}{10000000 \cdot 4344} = \frac{1}{11870}$$

Конечно при уравнивании этой базисной сети надлежало отыскивать поправки не углов, а направлений.

### 63. Примеры применения вывода § 60 к триангуляции.

а) Средняя ошибка стороны треугольника.

Если в тр-ке, изображенном на черт. 160, все углы измерены одинаково точно с средней ошибкой  $\pm \mu$ , то имеем:

$$a = b \frac{\sin 2}{\sin 1}$$

$$(1) + (2) + (3) + v = 0$$

Отсюда:  $f_1 = -a \cotg 1$ ;  $f_2 = a \cotg 2$ ;  $f_3 = 0$

В формуле (12) § 60:

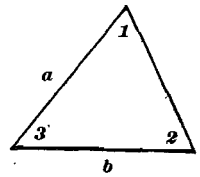
$$\left[ \frac{ff}{p} \right] = a^2 [\cotg^2 1 + \cotg^2 2]$$

$$\left[ \frac{af}{p} \right]^2 = a^2 [\cotg 2 - \cotg 1]^2$$

$$\left[ \frac{aa}{p} \right] = 3$$

Поэтому:  $\frac{1}{P_f} = a^2 [\cotg^2 1 + \cotg^2 2] - \frac{a^2}{3} [\cotg 2 - \cotg 1]^2$

$$\frac{1}{P_f} = \frac{2}{3} a^2 [\cotg^2 1 + \cotg^2 2 + \cotg 2 \cotg 1]$$



Черт. 160

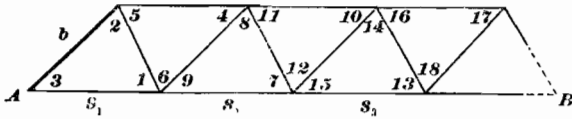
Средняя ошибка в стороне  $a$ :

$$\mu \cdot a \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\cotg^2 1 + \cotg^2 2 + \cotg 2 \cotg 1}$$

Этот вывод мы имели другим путем в самом начале курса.

6) *Приближенное определение средней ошибки в длине „полной“ диагонали триангуляционного ряда.*

Допустим, что ряд состоит из равносторонних треугольников и поэтому совершенно прямолинеен (черт. 161), так что стороны  $s_3, s_2, s_1$  — лежат на одной прямой; исходная сторона базиса пусть будет  $b$ . Имеем в нашей триангуляции такие условные ур-ния:



Черт. 161

$$\begin{aligned} (1) + (2) + (3) + v_1 &= 0 \\ (4) + (5) + (6) + v_2 &= 0 \\ (7) + (8) + (9) + v_3 &= 0 \\ \dots \end{aligned}$$

Поэтому в (12) § 60:

$$\begin{aligned} [aa] &= 3 & [ab] &= 0 & [ac] &= 0 & [ad] &= 0 \\ [bb] &= 3 & [bc] &= 0 & [bd] &= 0 & & \\ [cc] &= 3 & [cd] &= 0 & & & & \\ [dd] &= 3 & & & & & & \end{aligned}$$

Будем сперва находить вес функции  $F$ :

$$F = s_1 + s_2 + s_3$$

Имеем:

$$\frac{F'}{b} = \frac{\sin 2}{\sin 1} + \frac{\sin 3}{\sin 1} \frac{\sin 5}{\sin 4} \frac{\sin 8}{\sin 7} + \frac{\sin 3}{\sin 1} \frac{\sin 5}{\sin 4} \frac{\sin 9}{\sin 7} \frac{\sin 11}{\sin 10} \frac{\sin 14}{\sin 13} \dots \quad (1)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= -s_1 \cotg 1 - s_2 \cotg 1 - s_3 \cotg 1 = -3sc \\ f_2 &= +s_1 \cotg 2 = sc \\ f_3 &= +s_2 \cotg 3 + s_3 \cotg 3 = 2sc \\ f_4 &= -s_2 \cotg 4 - s_3 \cotg 4 = -2sc \\ f_5 &= +s_2 \cotg 5 + s_3 \cotg 5 = 2sc \\ f_6 &= 0 \\ f_7 &= -s_3 \cotg 7 - s_3 \cotg 7 = -2sc \\ f_8 &= +s_3 \cotg 8 = sc \\ f_9 &= +s_3 \cotg 9 = sc \\ f_{10} &= -s_3 \cotg 10 = -sc \\ f_{11} &= +s_3 \cotg 11 = sc \\ f_{12} &= 0 \\ f_{13} &= -s_3 \cotg 13 = -sc \\ f_{14} &= +s_3 \cotg 14 = +sc \\ f_{15} &= 0 \end{aligned}$$

Здесь через  $c$  обозначен  $\cotg 60^\circ$ , а чрез  $s$  — длина стороны треугольника.

Далее вычисляем:

$$\begin{aligned} [ff] &= 32 s^2 c^2; & [af] &= 0; & [bf] &= 0; \\ [cf] &= 0; \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Вследствие этого окончательно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_f} &= 32 s^2 c^2 \\ m_F &= \mu \sqrt{32} s c; & \frac{m_F}{F'} &= \frac{\mu \sqrt{32}}{3} s c \end{aligned}$$

Теперь возьмем ряд из  $2n-1$  треугольников и найдем вес функции

$$F' = s_1 + s_2 + \dots + s_n$$

Если мы продолжим ряд (1), то легко увидим, что угол 1 входит во все  $n$  членов и поэтому

$$f_1 = -n s c$$

углы 2, 8, 14, 20, . . . . . войдут только по одному разу и поэтому:

$$f_2 = f_8 = f_{14} = f_{20} = \dots = s c \text{ (всего таких членов будет } n \text{)}$$

Углы 3, 5, 4 и 7 войдут каждый  $n-1$  раз и поэтому:

$$f_3 = -f_4 = f_5 = -f_7 = (n-1) s c$$

Углы 9, 11, 10 и 13 войдут каждый  $(n-2)$  раза и поэтому:

$$f_9 = -f_{10} = f_{11} = -f_{13} = (n-2) s c$$

Углы 15, 17, 16 и 19 войдут каждый  $(n-3)$  раза и поэтому

$$f_{15} = -f_{17} = f_{16} = -f_{19} = (n-3) s c$$

. . . . .

Далее не трудно видеть, что в формуле (12):

$[af]$ ,  $[bf.1]$ ,  $[cf.2)$  . . . . . будут равны каждая нулю. Таким образом:

$$\frac{1}{P_f} = [ff] = n^2 s^2 c^2 - n s^2 c^2 + 4 [(n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 1] s^2 c^2$$

$$\frac{1}{P_f} = s^2 c^2 \left\{ -3n^2 + n + 4 [n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 1] \right\}$$

$$\frac{1}{P_f} = s^2 c^2 \left\{ -3n^2 + n + 4 \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \right\}$$

$$\frac{1}{P_f} = \frac{4n^3 - 3n^2 + 5n}{3} s^2 c^2$$

так как  $\cotg 60^\circ = \sqrt{\frac{1}{3}}$ , то, обозначая по прежнему среднюю ошибку угла  $\pm \mu$  и называя  $F'$  через  $ns$ , получим:

$$m_{ns} = \frac{\mu}{3} \sqrt{\frac{4n^3 - 3n^2 + 5n}{n^2}}$$

$$m_{ns} = \frac{\mu}{3} \sqrt{\frac{4n^2 - 3n + 5}{n}} \dots \dots \dots (2)$$

Необходимо помнить, что всех тр-ков в ряде  $2n-1$ .

В действительности тригонометрические ряды идут не прямолинейно: треугольники в них отступают более или менее от равносторонней формы,

нередко бывают „повороты“ цепи, когда из одной вершины идут не четыре, а пять направлений, и т. д. Но всетаки при значительном  $n$ , формулы (2) можно применить для оценки средней ошибки в длине диагонали  $AB$  (черт. 161), соединяющей первую точку ряда с последней, которую мы по этому и назвали „полной“. Конечно, действительная ошибка будет несколько больше. В триангуляции I класса имеем обычно:

$$AB = 300 \text{ килом}; \quad s = 30 \text{ килом}; \quad \mu = \pm 0''.6$$

Поэтому  $2n - 1 = 19$ ;  $n = 10$

$$m_{ns} = \frac{1}{1000000} \sqrt{\frac{400 - 30 - 5}{10}} = \frac{6}{1000000}$$

$$m_{ns} = \frac{1}{160000}$$

**64. Условия, при которых результат наблюдений на тригонометрическом пункте, может быть представлен в виде одного ряда направлений.**

Допустим, что на тригонометрическом пункте наблюдали направления на  $n$  предметов. Если результат этих наблюдений может быть представлен в виде одного ряда  $n$  направлений — т. е. в виде результата наблюдений  $n$  направлений в одном приеме, тогда очевидно должно иметь при любых значениях  $r$  и  $s$ , лежащих между единицей и  $n$ , следующее равенство:

$$\frac{1}{P_{r,s}} = \frac{1}{P_r} \cdot \frac{1}{P_s} \dots \dots \dots (1)$$

причем по  $P_r$  и  $P_s$  понимаются веса окончательно определенных направлений с номерами  $r$  и  $s$ , а под  $P_{r,s}$  — вес угла так же определенного окончательно, (т. е. из обработки всего, полученного на данном пункте, материала) между этими направлениями  $r$  и  $s$ . С другой стороны, если за неизвестные, подлежащие определению из уравнивания на станции, примем углы  $x, y, z, t \dots$  отсчитываемые все от направления первого, то применяя условие (1) к всевозможным углам, напомним на основании (4) § 59:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} &= Q_{1,1} \\ \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_3} &= Q_{2,2} \\ \dots \dots \dots \\ \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_n} &= Q_{n-1,n} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3} &= Q_{1,1} - 2Q_{1,2} + Q_{2,2} & \frac{1}{P_3} + \frac{1}{P_4} &= Q_{2,2} - 2Q_{2,3} + Q_{3,3} \\ \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_4} &= Q_{1,1} - 2Q_{1,3} + Q_{3,3} & \frac{1}{P_3} + \frac{1}{P_5} &= Q_{2,2} - 2Q_{2,4} + Q_{4,4} \\ \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_5} &= Q_{1,1} - 2Q_{1,4} + Q_{4,4} & \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots & \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \\ \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_n} &= Q_{1,1} - 2Q_{1,n-1} + Q_{n-1,n-1} & \frac{1}{P_3} + \frac{1}{P_n} &= Q_{2,2} - 2Q_{2,n-1} + Q_{n-1,n-1} \end{aligned} \right\} (b)$$









входило  $P$  приемов, то мы можем, взяв арифметическую средину по весам для каждого направления, входящего в группу, из  $p$  его значений. Такие средние выводы направлений из группы будем рассматривать, как непосредственно наблюдаемые значения направлений в одном приеме, но с весом равным сумме весов приемов группы, и именно эти средние выводы из группы ввести в образование ур-ний (1) и (2). Если при наблюдениях на данном пункте не оказалось ни одного направления, которое вошло бы во все приемы, то тем не менее, до составления ур-ний (2) можно результаты наблюдений всех приемов отнести к одному общему нулевому направлению, пользуясь для этого приближенными значениями углов и приписывая нулевой вес начальному направлению в тех приемах, где оно не наблюдалось; основанием этому служит то, что ряд направлений:

$$A, B, C, D, \dots, K$$

полученных в некотором приеме, мы можем заменить рядом:

$$A + q, B + q, C + q, D - q, \dots, K + q$$

в котором  $q$  произвольное постоянное, которое мы можем выбрать так, чтобы любое из чисел  $A + q, C - q, K - q$  оказалось бы равным приближенному значению угла между нулевым направлением, не наблюдавшимся в данном приеме, и направлением на соответствующий предмет  $A, C, K$ .

Прежде чем перейти к примерам на применения ур-ний (2), рассмотрим вопрос о нахождении средней ошибки единицы веса. Обозначив чрез  $R$  число всех наблюдаемых во всех приемах направлений, чрез  $m$ —число всех приемов, чрез  $n$ —число наблюдавшихся тригонометрических точек, и обращаясь к начальным уравнениям (1), мы по общему правилу напишем, что средняя ошибка единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{[P\delta^2]}{R - [m + n - 1]}} \dots \dots \dots (3)$$

потому, что в эти начальные ур-ния кроме искомых  $n-1$  углов еще входит  $m$  неизвестных  $\omega$ . Применение (3) осложняется тем, что для получения  $\delta$  необходимо определить все  $\omega$ .

Однако можно указать простое правило для вычислений и  $\omega$  и  $\delta$ . Очевидно на основании (3) § 41:

$$\begin{aligned} \sigma_k \omega_k &= \Sigma^k - \beta_k X - \gamma_k Y - \epsilon_k Z - \dots = \\ & \alpha_k (a_k - 0) + \beta_k (b_k - X) + \gamma_k (c_k - Y) + \epsilon_k (e_k - Z) + \dots \\ \omega_k &= \frac{\alpha_k (a_k - 0) + \beta_k (b_k - X) + \gamma_k (c_k - Y) + \epsilon_k (e_k - Z) + \dots + \lambda_k (l_k - V) + \dots}{\alpha_k + \beta_k + \gamma_k + \epsilon_k + \dots + \lambda_k} \dots \dots (4) \end{aligned}$$

т. е.  $\omega_k$  есть среднее по весам из уклонений  $k$  значений углов полученных в приеме от их вероятнейших значений. При этом вводим угол, равный нулю, от направления на  $A$  до направления на  $A$ .

Следовательно:

$$\left. \begin{aligned} \delta_a^k &= \omega_k \\ \delta_b^k &= \omega_k - (b_k - X) \\ \delta_c^k &= \omega_k - (c_k - Y) \\ & \dots \dots \dots \\ \delta_l^k &= \omega_k - (l_k - V) \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Величины  $b_k - X, c_k - Y, e_k - Z, \dots$  следует назвать первичными уклонениями наблюдаемых в приеме  $k$  углов; величины же  $\delta$ , стоящие в ур-нии (5) по смыслу формул суть вторичные уклонения этих-же углов.

Формулами (4) и (5) вопрос о вычислении  $\mu$  решается для практической цели вполне ясно и просто.

Но, конечно есть, и другой способ определения  $\mu$ . Действительно, обозначив свободные члены ур-ний (1) чрез  $g$  и считая систему нормальных ур-ний образованной из системы уравнений (3) § 41, служащих для исключения  $\omega$ , и из системы уравнений (2) настоящего параграфа, имеем:

$$[p\delta\delta] = [gg.r]$$

предполагая решение обеих систем ур-ний в общей схеме, и полагая общее число этих ур-ний равным  $r$ .

*Примечание:* Если при наблюдениях на данном пункте не оказалось ни одного направления, которое вошло-бы во все приемы, то всетаки все предыдущие выводы и формулы для вычисления коэффициентов в нормальных ур-ниях (3) остаются в силе: надлежит лишь при образовании ур-ний (1) допустить, что начальное направление в некоторых приемах наблюдалось с весом равным нулю.—

*Пример уравнивания станций.* При работах по градусному измерению на Шпицбергене на пункте Whales Point результаты измерения горизонтальных направлений оказались следующими:

ТАБЛИЦА I-ая

№№ приемов	Mura		Hedgehog = X		Whales Head = Y		Agardh = Z		Cap Lee = I.		
	a	a'	b	$\beta$ r	c	$\gamma$ c'	e	$\epsilon$ r'	l	$\lambda$ v	
1	0° 0' 0."0	2	43° 26' 46."1	1	77° 39' 13."0	1	128° 40' 33."3	1	—	—	—
2	0. 0	2	43. 5	1	12. 0	1	31. 7	1	—	—	—
3	0. 0	2	44. 0	1	13. 0	1	—	—	—	—	—
4	0. 0	2	39. 0	1	10. 3	1	—	—	—	—	—
5	0. 0	2	42. 4	1	12. 9	1	—	—	—	—	—
6	0. 0	2	45. 8	1	—	—	33. 0	1	164° 19' 16."6	1	—
7	0. 0	2	—	—	15. 6	1	—	—	15. 6	1	—
8	0. 0	2	—	—	—	—	33. 7	1	15. 0	1	—
9	0. 0	1	41. 3	2	—	—	—	—	—	—	—
10	0. 0	1	—	—	12. 1	1 <sub>2</sub>	—	—	—	—	—
11	0. 0	2	—	—	—	—	31. 9	1	—	—	—
12	0. 0	2	—	—	—	—	34. 8	1	—	—	—
13	0. 0	2	—	—	—	—	—	—	15. 4	1	—
14	0. 0	2	—	—	—	—	—	—	14. 9	1	—
15	0. 0	2	—	—	—	—	—	—	13. 9	1	—
16	0. 0	2	—	—	—	—	—	—	14. 8	1	—
17	0. 0	2	—	—	—	—	—	—	15. 5	1	—
18	—	—	—	—	0° 0' 0."0	1	51° 1' 18."5	1	—	—	—
19	—	—	—	—	0. 0	1 <sub>2</sub>	17. 7	2	—	—	—
20	—	—	—	—	0. 0	1	22. 3	1	—	—	—
21	—	—	—	—	—	—	0° 0' 0."0	2	35° 38' 40."2	1	—

Приняв следующие приближенные значения углов:

$$X_0 = 43^{\circ}26'43,00$$

$$Y_0 = 77\ 39\ 13,0$$

$$Z_0 = 128\ 40\ 33,0$$

$$L_0 = 164\ 19\ 15,0$$

Перейдем от вышеприведенной таблицы к следующей:

ТАБЛИЦА II-ая

№ приемов	Мура			Hedgehog = X			Whales Head = Y			Agardh = Z			Cap Lee = L		
	a	$\alpha$	v	b	$\beta$	v	c	$\gamma$	v	e	$\varepsilon$	v	l	$\lambda$	v
1	0".0	2	—	+3".1	1	+2".80	0".0	1	-0".02	+0".3	1	+0".13	—	—	—
2	0.0	2	—	+0.5	1	+0.20	-1.0	1	-1.02	-1.3	1	-1.47	—	—	—
3	0.0	2	—	+1.0	1	+0.70	0.0	1	-0.02	—	—	—	—	—	—
4	0.0	2	—	-4.0	1	-4.30	-2.7	1	-2.72	—	—	—	—	—	—
5	0.0	2	—	-0.6	1	-0.90	-0.1	1	-0.12	—	—	—	—	—	—
6	0.0	2	—	+2.8	1	+2.50	—	—	—	+2.0	1	+1.83	+1".6	1	+1".73
7	0.0	2	—	—	—	—	+2.6	1	+2.58	—	—	—	+0.6	1	+0.73
8	0.0	2	—	—	—	—	—	—	—	+0.7	1	+0.53	0.0	1	+0.13
9	0.0	1	—	-1.7	2	-2.00	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	0.0	1	—	—	—	—	-0.9	1/2	-0.92	—	—	—	—	—	—
11	0.0	2	—	—	—	—	—	—	—	-1.1	1	-1.27	—	—	—
12	0.0	2	—	—	—	—	—	—	—	+1.8	1	+1.63	—	—	—
13	0.0	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	+0.4	1	-0.53
14	0.0	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	-0.1	1	+0.03
15	0.0	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	-1.1	1	-0.97
16	0.0	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	-0.2	1	-0.07
17	0.0	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	+0.5	1	+0.63
18	—	—	—	—	—	—	0.0	1	—	-1.5	1	-1.66	—	—	—
19	—	—	—	—	—	—	0.0	1/2	—	-2.3	2	-2.46	—	—	—
20	—	—	—	—	—	—	0.0	1	—	+2.3	1	+2.14	—	—	—
21	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.0	2	—	-1.8	1	-1.50

Теперь ведем подсчеты коэффициентов ур-ний (2):

$$[\beta] = 8 \quad [\gamma] = 9 \quad [\varepsilon] = 12 \quad [\lambda] = 9$$

$$\begin{array}{lllll} \sigma_1 = 5 & \sigma_5 = 4 & \sigma_9 = 3 & \sigma_{13} = 3 & \sigma_{17} = 3 \\ \sigma_2 = 5 & \sigma_6 = 5 & \sigma_{10} = 1,5 & \sigma_{14} = 3 & \sigma_{18} = 2 \\ \sigma_3 = 4 & \sigma_7 = 4 & \sigma_{11} = 3 & \sigma_{15} = 3 & \sigma_{19} = 2,5 \\ \sigma_4 = 4 & \sigma_8 = 4 & \sigma_{12} = 3 & \sigma_{16} = 3 & \sigma_{20} = 2 \\ & & & & \sigma_{21} = 3 \end{array}$$

$$\left[ \frac{\beta^2}{\sigma} \right] = 2,68; \quad \left[ \frac{\gamma^2}{\sigma} \right] = 2,67; \quad \left[ \frac{\epsilon^2}{\sigma} \right] = 5,45; \quad \left[ \frac{\lambda^2}{\sigma} \right] = 2,7.$$

$$\left[ \frac{\beta\gamma}{\sigma} \right] = 1,15; \quad \left[ \frac{\beta\epsilon}{\sigma} \right] = 0,6; \quad \left[ \frac{\beta\lambda}{\sigma} \right] = 0,2$$

$$\left[ \frac{\gamma\epsilon}{\sigma} \right] = 1,8; \quad \left[ \frac{\gamma\lambda}{\sigma} \right] = 0,25$$

$$\left[ \frac{\epsilon\lambda}{\sigma} \right] = 1,12$$

$$[\beta b] = -0,6; \quad [\gamma c] = -1,65; \quad [\epsilon d] = -1,4; \quad [\lambda l] = -0,1$$

$\Sigma_1 = +3,4$	$\Sigma_6 = +6,4$	$\Sigma_{11} = -1,1$	$\Sigma_{16} = -0,2$
$\Sigma_2 = -1,8$	$\Sigma_7 = +3,2$	$\Sigma_{12} = +1,8$	$\Sigma_{17} = +0,5$
$\Sigma_3 = +1,0$	$\Sigma_8 = +0,7$	$\Sigma_{13} = +0,4$	$\Sigma_{18} = -1,5$
$\Sigma_4 = -6,7$	$\Sigma_9 = -3,4$	$\Sigma_{14} = -0,1$	$\Sigma_{19} = -4,6$
$\Sigma_5 = -0,7$	$\Sigma_{10} = -0,45$	$\Sigma_{15} = -1,1$	$\Sigma_{20} = +2,3$
			$\Sigma_{21} = -1,8$

$$\left[ \frac{\beta\Sigma}{\sigma} \right] = -2,267; \quad \left[ \frac{\gamma\Sigma}{\sigma} \right] = -1,15; \quad \left[ \frac{\epsilon\Sigma}{\sigma} \right] = -2,472; \quad \left[ \frac{\lambda\Sigma}{\sigma} \right] = +1,488;$$

Отсюда нормальные ур-ния напишутся так:

$$\begin{aligned} +5,32 X - 1,15 Y - 0,60 Z - 0,20 l &= +1,667 \\ -1,15 X + 6,33 Y - 1,80 Z - 0,25 l &= -0,500 \\ -0,60 X - 1,80 Y + 6,55 Z - 1,12 l &= +1,072 \\ -0,20 X - 0,25 Y - 1,12 Z - 6,30 l &= -1,588 \end{aligned}$$

Необходимо кроме того дать числа для определения  $[gg. r]$ .

Так как ур-ния (2) являются результатом исключения всех  $\omega$ , число которых есть  $m$ , то очевидно нужно предварительно образовать  $[gg. m]$ , к которому и присоединить получаемые при решении ур-ний (2) по схеме Гаусса числа, вычисляемые каждое как квадрат свободного члена, деленный на квадратический коэффициент соответственного преобразованного ур-ния. На основании уравнения (13) § 59 и на основании уравнений (3) § 41, легко видеть:

$$[gg. m] = [pg^2] - \frac{\Sigma_1^2}{\sigma_1} - \frac{\Sigma_2^2}{\sigma_2} - \dots - \frac{\Sigma_m^2}{\sigma_m} \dots \dots \dots (6)$$

Поэтому для нашего примера:

$$[pg^2] = 92,975; \quad \left[ \frac{\Sigma^2}{\sigma} \right] = 44,772$$

$$[gg. m] = 48,203$$

Приведем теперь решение ур-ний (2).

+5,32	-1,15	-0,60	-0,20	-1,667
	+6,330	-1,80	-0,25	+0,500
+0,3134	-0,2486	-0,1297	-0,4323	-0,3603
-0,0486	+6,0814	-1,9297	-0,6823	+0,1397
+0,0195		+6,550	-1,120	-1,072
+0,0037	-0,0230	-0,0677	-0,2256	-0,1880
$x = +0,2973$	-0,0145	-0,6123	-0,2165	+0,0443
	+0,0548	+5,870	-1,5621	-1,2157
	$y = +0,0173$		+6,300	+1,588
	$lgy = 8,23805$	+0,2071	-0,7519	-0,6267
		-0,0344	-0,0766	+0,0157
		$z = +0,1727$	-0,4157	-0,3236
		$lgz = 9,23729$	+5,0558	+0,6534
			$l = -0,129$	+48,203
			$lgl = 9,11138n$	-0,5224
				-0,0032
				-0,2518
				-0,0844
				$[gy.r] = 47,3412$

$$x = +0'',288$$

$$X = 43^{\circ}26'43'',29$$

$$y = +0,017$$

$$Y = 77\ 39\ 13,02$$

$$z = +0,173$$

$$Z = 128\ 40\ 33,17$$

$$l = -0,129$$

$$L = 164\ 19\ 14,87$$

$$R = 53$$

$$m = 21$$

$$m + n - 1 = 25$$

$$n = 5$$

$$R - [m + n - 1] = 28$$

$$\mu = \sqrt{\frac{47,3412}{28}} = \sqrt{1,6897} = \pm 1'',30.$$

Первичные уклонения  $\omega$  выписаны во II-ой таблице; по ним величины  $\omega$  получаются следующие:

$$\omega_1 = +0,58$$

$$\omega_6 = +1,21$$

$$\omega_{11} = -0,42$$

$$\omega_{16} = -0,02$$

$$\omega_2 = -0,46$$

$$\omega_7 = +0,83$$

$$\omega_{13} = +0,54$$

$$\omega_{17} = +0,21$$

$$\omega_3 = +0,17$$

$$\omega_8 = +0,16$$

$$\omega_{13} = +0,18$$

$$\omega_{18} = -0,83$$

$$\omega_4 = -1,75$$

$$\omega_9 = -1,33$$

$$\omega_{14} = +0,01$$

$$\omega_{19} = -1,97$$

$$\omega_5 = -0,25$$

$$\omega_{10} = -0,31$$

$$\omega_{15} = -0,32$$

$$\omega_{20} = +1,08$$

$$\omega_{21} = -0,50$$

Вторичные уклонения или погрешности  $\delta$  наблюдаемых направлений будут:

ТАБЛИЦА III.

Mura		Hedgehog		Whales Head		Agardh		Cap Lee	
	$\alpha$		$\beta$		$\gamma$		$\epsilon$		$\lambda$
1	+ 0",585	2	- 2',225	1	- 0",60	1	+ 0",45	1	-
2	- 0 ,46	2	- 0 ,67	1	- 0 ,56	1	+ 1 ,01	1	-
3	+ 0 ,17	2	- 0 ,54	1	- 0 ,19	1	-	-	-
4	- 1 ,754	2	+ 2 ,55	1	- 0 ,97	1	-	-	-
5	- 0 ,25	2	+ 0 ,64	1	+ 0 ,13	1	-	-	-
6	+ 1 ,21	2	- 1 ,29	1	-	-	- 0 ,62	1	- 0",52
7	+ 0 ,83	2	-	-	+ 1 ,75	1	-	-	+ 0 ,10
8	+ 0 ,16	2	-	-	-	-	- 0 ,37	1	+ 0 ,03
9	- 1 ,333	1	+ 0 ,67	2	-	-	-	-	-
10	- 0 ,31	1	-	-	- 0 ,61	1 2	-	-	-
11	- 0 ,42	2	-	-	-	-	- 0 ,85	1	-
12	+ 0 ,54	2	-	-	-	-	- 1 ,09	1	-
13	+ 0 ,18	2	-	-	-	-	-	-	- 0 ,35
14	+ 0 ,01	2	-	-	-	-	-	-	- 0 ,02
15	- 0 ,32	2	-	-	-	-	-	-	+ 0 ,65
16	- 0 ,02	2	-	-	-	-	-	-	+ 0 ,05
17	+ 0 ,21	2	-	-	-	-	-	-	- 0 ,42
18	-	-	-	-	- 0 ,83	1	+ 0 ,83	1	-
19	-	-	-	-	- 1 ,97	1 2	+ 0 ,49	2	-
20	-	-	-	-	+ 1 ,08	1	- 1 ,08	1	-
21	-	-	-	-	-	-	- 0 ,50	2	+ 1 ,00
	14 ,9566		15 ,1654		8 ,7085		6 ,4900		2 ,0058

Внизу таблицы подписаны для каждого направления  $[p\delta^2]$ . Общая сумма  $[p\delta^2]$  оказывается равной 47,3265.

Так как углы  $X, Y, Z, L, Y-X, Z-Y \dots$  войдут затем в уравновешивание сети, то приведенное уравновешивание станции должно, конечно, закончиться определением *весовых* коэффициентов  $Q_{1,1}, Q_{1,2}, Q_{2,3} \dots$

### 66. Упрощенные способы уравновешивания станций. Британский прим.

Можно доказать, что при всяком порядке расположения наблюдений на станции, вероятнейшее значение угла, образованного двумя *одинаково наблюдавшимися* направлениями (т. е. с одинаковыми весами во всех тех приемах,

в которые входило любое из этих направлений,) равно *среднему арифметическому из наблюдаемых* в разных приемах значений этого угла. Доказательство этого будет дано в особой монографии. Отсюда вытекает, что вероятнейшее значение любого угла близко к среднему арифметическому выводу из наблюдаемых значений этого угла, и что этот средний арифметический вывод можно всегда принять за первое приближение при отыскании вероятнейшего значения угла.

Допустим, что мы для  $X_0, Y_0, Z_0, L_0 \dots$  приняли значения равные соответственно арифметическим срединам из наблюдаемых значений углов  $X, Y, Z, L \dots$ . Вводя в (3) и (4) § 41 *поправки углов*  $x, y, z, l, \dots$  определяемых ур-ниями:

$$\begin{aligned} X &= X_0 + x \\ Y &= Y_0 + y \\ Z &= Z_0 + z \\ &\dots \end{aligned}$$

мы в уравнениях (4) § 41 будем иметь:

$$[\beta b] = 0; [\gamma c] = 0; [\varepsilon e] = 0 \dots [rn] = 0$$

если только все  $a$  равны нулю, т. е. если все направления до вывода  $X_0, Y_0, Z_0 \dots$  были приведены к некоторому нулевому направлению на предмет  $A$ . Очевидно, что уравнения (4) § 41 в данном случае напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} x &= - \frac{[\beta \omega]}{[\beta]} \\ y &= - \frac{[\gamma \omega]}{[\gamma]} \\ z &= - \frac{[\varepsilon \omega]}{[\varepsilon]} \\ l &= - \frac{[\lambda \omega]}{[\lambda]} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

При указанном выборе  $X_0, Y_0, Z_0, L_0$  величины  $x, y, z, l$  будут весьма малы, и в первом приближении надлежит положить:

$$x_1 = 0; y_1 = 0; z_1 = 0; l_1 = 0 \dots$$

Приняв это, на основании (4) § 65 будем иметь:

$$\omega'_k = - \frac{b_k \beta_k + \gamma_k c_k + \varepsilon_k l_k + \dots}{\alpha_k + \beta_k + \gamma_k + \varepsilon_k + \dots} \dots \dots \dots (8)$$

По (8) вычислим первые приближенные значения  $\omega'$  для всех приемов, и теперь по (7) найдем вторые приближения:

$$\left. \begin{aligned} x'' &= - \frac{[\beta \omega']}{[\beta]} \\ y'' &= - \frac{[\gamma \omega']}{[\gamma]} \\ z'' &= - \frac{[\varepsilon \omega']}{[\varepsilon]} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

Теперь вычисляем по (4) § 65 вторые приближения для  $\omega$ :

$$\omega''_k = \frac{\beta_k (b_k - x'') + \gamma_k (c_k - y'') + \varepsilon_k (e_k - z'') + \dots}{\alpha_k + \beta_k + \gamma_k + \varepsilon_k + \dots} \dots \quad (10)$$

Далее можем определить:

$$x''' = - \frac{[\beta \omega'']}{[\beta]}$$

$$y''' = - \frac{[\gamma \omega'']}{[\gamma]}$$

$$z''' = - \frac{[\varepsilon \omega'']}{[\varepsilon]}$$

Затем по  $x'''$ ,  $y'''$ ,  $z'''$  определим указанным же приемом  $\omega_1'''$ ,  $\omega_2'''$ ,  $\omega_3''' \dots \omega_k'''$  и т. д.

Описанный прием определения *поправок углов* на практике легко проводится в простых и понятных схемах вычисления, причем *всегда* можно ограничиться определением  $x'''$ ,  $y'''$ ,  $z''' \dots$ , в большинстве же случаев *достаточно остановиться даже на выводе  $x'''$ ,  $y'''$ ,  $z''' \dots$*

Однако, в действительности обычно применяют несколько иной прием, который носит название *Британский прием* уравнивания, потому что он был применен англичанами при обработке триангуляций Британии и Ирландии,—Британский прием приводит, как показывает *опыт*, к более точным результатам.

Представим себе, как и ранее, что все наблюдаемые направления мы привели к некоторому *нулевому*, которое и приняли за первое направление, затем по каждому направлению из приведенных таким образом его значений вывели арифметическую средину, которую и приняли за приближенное значение этого направления. Занумеровав все направления, будем иметь:

$$X = (I, II) = II - I$$

$$Y = (I, III) = III - I$$

$$Z = (I, IV) = IV - I$$

$$L = (I, V) = V - I$$

Назвав приближенные значения направлений, выведенные, как арифметические средины из наблюдаемых и приведенных к нулю их значений, чрез  $I_0$ ,  $II_0$ ,  $III_0$ ,  $IV_0 \dots$ , примем:

$$I = I_0 + (1)$$

$$II = II_0 + (2)$$

$$III = III_0 + (3)$$

.....

Следовательно (1), (2), (3).... будут искомыми *поправками* величин  $I_0$ ,  $II_0$ ,  $III_0 \dots$

Обращаясь к уравнению (1) § 65 мы отмечаем, что при вышеуказанной предварительной обработке материала и при указанных обозначениях:— все величины  $a_k$  обращаются в нули; величины  $b_k$ ,  $c_k$ ,  $e_k$  являются *уклонами* наблюдаемых значений направлений от  $II_0$ ,  $III_0$ ,  $IV_0 \dots$ ;  $X$ ,  $Y$ ,  $Z \dots$ ,



стоящие в правых частях ур-ний (1) и (2) обращаются в поправки  $x, y, z \dots$  этих углов, вследствие чего:

$$x \text{ можно заменить чрез (2) — (1)}$$

$$y \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{чрез (3) — (1)}$$

$$z \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{чрез (4) — (1)}$$

.....

и уравнения (1) переписать так:

$$\delta_a^k - \omega_k = 0$$

$$b_k + \delta_b^k - \omega_k = (2) - (1)$$

$$c_k + \delta_c^k - \omega_k = (3) - (1)$$

$$e_k + \delta_e^k - \omega_k = (4) - (1)$$

Полагая же:

$$\omega_k - (1) = u_k \dots \dots \dots (11)$$

имеем:

$$\left. \begin{aligned} \delta_a^k &= u_k + (1) \\ b_k + \delta_b^k &= (2) + u_k \\ c_k + \delta_c^k &= (3) + u_k \\ e_k + \delta_e^k &= (4) + u_k \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

Полагая в первом приближении (1), (2), (3), (4) равными нулю, из (12) находим первое приближение для  $u_k$ :

$$u'_k = \frac{\beta_k b_k + \gamma_k c_k + \epsilon_k e_k + \dots}{\alpha_k + \beta_k + \gamma_k + \epsilon_k + \dots} \dots \dots \dots (13)$$

Применим теперь ур-ния (12), написанные для всех приемов, к определению например неизвестных (1) и (2), воспользовавшись при этом величинами  $u'_1, u'_2, u'_3 \dots \dots u'_k \dots \dots$

Имеем:

$$\begin{aligned} \delta'_a &= (1) + u'_1 & b_1 + \delta'_b &= (2) + u'_1 \\ \delta''_a &= (1) + u'_2 & b_2 + \delta''_b &= (2) + u'_2 \\ \delta'''_a &= (1) + u'_3 & b_3 + \delta'''_b &= (2) + u'_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta^k_a &= (1) + u'_k & b_k + \delta^k_b &= (2) + u'_k \end{aligned}$$

Из этих уравнений легко получаем (помня, что  $\frac{[\beta b]}{[\beta]} = 0$ ):

$$(1)' = - \frac{[\alpha u']}{[\alpha]}; \quad (2)' = - \frac{[\beta u']}{[\beta]} \dots (3)' = - \frac{[\gamma u']}{[\gamma]} \dots \dots \dots (14)$$

Теперь второе приближение для  $u_k$  получится из (12) так:

$$u''_k = \frac{\alpha_k (0 - (1)') + \beta_k (b_k - (2)') + \gamma_k (c_k - (3)') + \dots}{\alpha_k + \beta_k + \gamma_k + \epsilon_k + \dots}$$

а вторые приближения для (1), (2), (3) ... очевидно будут:

$$(1)'' = - \frac{[\alpha u'']}{[\alpha]}; \quad (2)'' = - \frac{[\beta u'']}{[\beta]}; \quad (3)'' = - \frac{[\gamma u'']}{[\gamma]} \dots \dots \dots (15)$$

и т. д.

В практике очень часто довольствуются выводом (1)', (2)', (3)'; эти величины отличаются обычно только в сотых долях секунды от вероятнейших значений соответствующих поправок.

*Числовой пример:* Возьмем те-же наблюдения на Whales Point, которые были обработаны в § 65. С приближенными значениями углов:

$$X_0 = 43^\circ 26' 43''.0$$

$$Y_0 = 77 39 13 .0$$

$$Z_0 = 128 40 33 .0$$

$$L_0 = 164 19 15 .0$$

приводим все направления к нулевому направлению на Миру и получаем такую таблицу:

ТАБЛИЦА IV.

№№ приемов	Mupa		Hedgehog = X		Whales Head = Y		Agardh = Z		Cap Lee = L	
	a	α	b	β	c	γ	e	ε	l	γ
1	0° 0' 0''.0	2	43° 26' 46''.1	1	77° 39' 13''.0	1	128° 40' 33''.3	1	—	—
2	0 .0	2	43 .5	1	12 .0	1	31 .7	1	—	—
3	0 .0	2	44 .0	1	13 .0	1	—	—	—	—
4	0 .0	2	39 .0	1	10 .3	1	—	—	—	—
5	0 .0	2	42 .4	1	12 .9	1	—	—	—	—
6	0 .0	2	45 .8	1	—	—	35 .0	1	164° 19' 16''.6	1
7	0 .0	2	—	—	15 .6	1	—	—	15 .6	1
8	0 .0	2	—	—	—	—	33 .7	1	15 .0	1
9	0 .0	1	41 .3	2	—	—	—	—	—	—
10	0 .0	1	—	—	12 .1	1/2	—	—	—	—
11	0 .0	2	—	—	—	—	31 .9	1	—	—
12	0 .0	2	—	—	—	—	34 .8	1	—	—
13	0 .0	2	—	—	—	—	—	—	15 .4	1
14	0 .0	2	—	—	—	—	—	—	14 .9	1
15	0 .0	2	—	—	—	—	—	—	13 .9	1
16	0 .0	2	—	—	—	—	—	—	14 .8	1
17	0 .0	2	—	—	—	—	—	—	15 .5	1
18	—	—	—	—	13 .0	1	31 .5	1	—	—
19	—	—	—	—	13 .0	1/2	30 .7	2	—	—
20	—	—	—	—	13 .0	1	35 .3	1	—	—
21	—	—	—	—	—	—	33 .0	2	13 .2	1
	0° 0' 0''.0	32	43° 26' 42''.93	8	77° 39' 12''.82	9	128° 40' 32''.88	12	164° 19' 14''.99	9
	$I_0$		$II_0$		$III_0$		$IV_0$		$V_0$	

Внизу таблицы выписаны средние арифметические (по весам) из наблюдаемых направлений и суммы  $[\alpha]$ ,  $[\beta]$ ,  $[\gamma]$ ,  $[\epsilon]$ ,  $[\lambda]$ .

Теперь составляем таблицу уклонений от I<sub>0</sub>, II<sub>0</sub>, III<sub>0</sub> . . . .

ТАБЛИЦА V.

Приемы	a	α	b	β	c	γ	e	ε	l	λ	w'	σ
1	0''.0	2	+3''.17	1	+0''.18	1	+0''.42	1	—	—	+0''.75	5
2	0.0	2	+0.57	1	—0.82	1	—1.18	1	—	—	—0.29	5
3	0.0	2	+1.07	1	+0.18	1	—	—	—	—	+0.31	4
4	0.0	2	—3.93	1	—2.52	1	—	—	—	—	—1.61	4
5	0.0	2	—0.53	1	+0.08	1	—	—	—	—	—0.11	4
6	0.0	2	+2.87	1	—	—	+2.12	1	+1''.61	1	+1.32	5
7	0.0	2	—	—	+2.78	1	—	—	+0.61	1	+0.85	4
8	0.0	2	—	—	—	—	+0.82	1	+0.01	1	+0.21	4
9	0.0	1	—1.63	2	—	—	—	—	—	—	—1.09	3
10	0.0	1	—	—	—0.72	1/2	—	—	—	—	—0.24	1,5
11	0.0	2	—	—	—	—	—0.98	1	—	—	—0.33	3
12	0.0	2	—	—	—	—	+1.92	1	—	—	+0.64	3
13	0.0	2	—	—	—	—	—	—	+0.41	1	+0.14	3
14	0.0	2	—	—	—	—	—	—	—0.09	1	—0.03	3
15	0.0	2	—	—	—	—	—	—	—1.09	1	—0.36	3
16	0.0	2	—	—	—	—	—	—	—0.19	1	—0.06	3
17	0.0	2	—	—	—	—	—	—	+0.51	1	+0.17	3
18	—	—	—	—	+0.18	1	—1.38	1	—	—	—0.60	2
19	—	—	—	—	+0.18	1/2	—2.18	2	—	—	—1.71	2,5
20	—	—	—	—	+0.18	1	+2.42	1	—	—	+1.30	2
21	—	—	—	—	—	—	+0.12	2	—1.79	1	—0.52	3
	32	—0''.04	8	—0''.03	9	+0''.04	12	—0''.01	9			

В нижней строчке таблицы V выписаны суммы [bβ], [γc], . . . . а в графе 12-й помещены первые приближения для u<sub>1</sub>, u<sub>2</sub>, u<sub>3</sub> . . . вычисленные по формуле (13).

Дальнейшие вычисления поведем иначе, чем это обычно делается по британскому приему; именно пользуясь таблицей V непосредственно из нее вычислим:

$$(1)' = -\frac{[\alpha w']}{[\alpha]}; \quad (2)' = -\frac{[\beta w']}{[\beta]}; \quad \dots$$

Тогда как обычно вычисляют так: из всех чисел каждой строчки таблицы V вычитают стоящее в той-же строчке w' и образуют новую таблицу с числами в строчке с номером k:

$$-w'_k, b_k - w'_k, c_k - w'_k, e_k - w'_k, l_k - w'_k$$

а затем вычисляют:

$$(1)' = -\frac{[\alpha w']}{[\alpha]}; \quad (2)' = -\frac{[\beta (b - w')]}{[\beta]}; \quad (3)' = -\frac{[\gamma (c - w')]}{[\gamma]}$$

причем очевидно, что вычитания для образования новой таблицы совершенно излишни.

Пользуясь таблицей V получаем:

$$\begin{aligned} -[\alpha u'] &= -0,87; & -[\beta u'] &= +1,81; & -[\gamma u'] &= +0,38 \\ -[e\varepsilon] &= +1,46; & -[\lambda l] &= -1,72 \end{aligned}$$

Отсюда:

$$(1)' = -0,03; (2)' = +0,22; (3)' = +0,04; (4)' = +0,12; (5)' = -0,19$$

С найденными величинами образуем таблицу VI-ю, путем вычитания из  $a, b, c, e, l$ , заключенных в таблице V, соответственно величин  $(1)', (2)', (3)', (4)', (5)'$ . По числам, заключенным в строчке  $k$ , таблицы VI-й, выводим

$$u''_k = \frac{-(1)'a_k + [b_k - (2)']\beta_k + [c_k - (3)']\gamma_k + \dots}{\alpha_k + \beta_k + \gamma_k + \dots}$$

Затем пользуясь непосредственно таблицей VI выводим:

$$-[\alpha u''], -[\beta u''], -[\gamma u''] \dots$$

и получаем далее  $(1)'', (2)'', (3)''$  по формулам (15).

ТАБЛИЦА VI-ая

	$a-(1)'$	$\alpha$	$b-(2)'$	$\beta$	$c-(3)'$	$\gamma$	$e-(4)'$	$\varepsilon$	$l-(5)'$	$\lambda$	$u''$	$\sigma$
1	+ 0''03	2	+ 2''95	1	+ 0''14	1	+ 0''30	1	—	—	+ 0''69	5
2	+ 0 .03	2	+ 0 .35	1	- 0 .86	1	- 1 .30	1	—	—	- 0 .35	5
3	+ 0 .03	2	+ 0 .85	1	+ 0 .14	1	—	—	—	—	+ 0 .26	4
4	+ 0 .03	2	- 4 .15	1	- 2 .56	1	—	—	—	—	- 1 .66	4
5	+ 0 .03	2	- 0 .75	1	+ 0 .04	1	—	—	—	—	- 0 .16	4
6	+ 0 .03	2	+ 2 .65	1	—	—	+ 2 .00	1	+ 1''80	1	+ 1 .30	5
7	+ 0 .03	2	—	—	+ 2 .74	1	—	—	+ 0 .80	1	+ 0 .90	4
8	+ 0 .03	2	—	—	—	—	+ 0 .70	1	+ 0 .20	1	+ 0 .24	4
9	+ 0 .03	1	- 1 .85	2	—	—	—	—	—	—	- 1 .22	3
10	+ 0 .03	1	—	—	- 0 .76	$\frac{1}{2}$	—	—	—	—	- 0 .24	1,5
11	- 0 .03	2	—	—	—	—	- 1 .10	1	—	—	- 0 .35	3
12	+ 0 .03	2	—	—	—	—	+ 1 .80	1	—	—	+ 0 .62	3
13	+ 0 .03	2	—	—	—	—	—	—	+ 0 .60	1	+ 0 .22	3
14	+ 0 .03	2	—	—	—	—	—	—	+ 0 .10	1	+ 0 .05	3
15	+ 0 .03	2	—	—	—	—	—	—	- 0 .90	1	- 0 .28	3
16	+ 0 .03	2	—	—	—	—	—	—	0 .00	1	+ 0 .02	3
17	+ 0 .03	2	—	—	—	—	—	—	+ 0 .70	1	+ 0 .26	3
18	—	—	—	—	+ 0 .14	1	- 1 .50	1	—	—	- 0 .68	2
19	—	—	—	—	+ 0 .14	$\frac{1}{2}$	- 2 .30	2	—	—	- 1 .81	2,5
20	—	—	—	—	+ 0 .14	1	+ 2 .30	1	—	—	+ 1 .22	2
21	—	—	—	—	—	—	0 .00	2	- 1 .60	1	- 0 .53	3
		32		8		9		12		9		

$$\begin{aligned}
 - [\alpha u''] &= -2.06; & - [\beta u''] &= +2.36; & - [\gamma u''] &= +0.80; & - [\varepsilon] &= +1.99 \\
 & & & & - [\lambda] &= -2.18 \\
 (1)'' &= -0''.064; & (2)'' &= +0''.295; & (3)'' &= +0''.088; & (4)'' &= +0''.166; \\
 & & & & (5)'' &= -0''.242;
 \end{aligned}$$

С этими значениями поправок, мы получаем такие значения самых направлений и углов:

$$\begin{aligned}
 I &= 359^{\circ}59'59''.936 & X &= 43^{\circ}26'43''.289 \\
 II &= 43\ 26\ 43\ .225 & Y &= 77\ 39\ 12\ .972 \\
 III &= 77\ 39\ 12\ .908 & Z &= 128\ 40\ 33\ .110 \\
 IV &= 128\ 40\ 33\ .046 & L &= 164\ 19\ 14\ .812 \\
 V &= 164\ 19\ 14\ .748
 \end{aligned}$$

Как видно наибольшее различие найденных значений углов от выведенных в § 65 не превышает 0''07. Определим однако еще следующее приближение для чего составим таблицу VII вполне аналогичную VI-ой.

ТАБЛИЦА VII-ая

	$\alpha - (1)''$	$\alpha$	$b - (2)''$	$\beta$	$c - (3)''$	$\gamma$	$e - (4)''$	$\varepsilon$	$l - (5)''$	$\lambda$	$u'''$	$\sigma$
1	+ 0''.06	2	+ 2''.87	1	+ 0''.09	1	+ 0''.25	1	—	—	+ 0''.666	5
2	+ 0 .06	2	+ 0 .27	1	- 0 .91	1	- 1 .35	1	—	—	- 0 .374	5
3	+ 0 .06	2	+ 0 .77	1	+ 0 .09	1	—	—	—	—	+ 0 .245	4
4	+ 0 .06	2	- 4 .22	1	- 2 .61	1	—	—	—	—	- 1 .678	4
5	+ 0 .06	2	- 0 .83	1	- 0 .01	1	—	—	—	—	- 0 .180	4
6	+ 0 .06	2	+ 2 .57	1	—	—	+ 1 .95	1	+ 1''.85	1	+ 1 .298	5
7	+ 0 .06	2	—	—	+ 2 .69	1	—	—	+ 0 .85	1	+ 0 .915	4
8	+ 0 .06	2	—	—	—	—	+ 0 .65	1	+ 0 .25	1	+ 0 .255	4
9	+ 0 .06	1	- 1 .93	2	—	—	—	—	—	—	- 1 .247	3
10	+ 0 .06	1	—	—	- 0 .81	1/2	—	—	—	—	- 0 .230	1.5
11	+ 0 .06	2	—	—	—	—	- 1 .15	1	—	—	- 0 .343	3
12	+ 0 .06	2	—	—	—	—	+ 1 .75	1	—	—	+ 0 .623	3
13	+ 0 .06	2	—	—	—	—	—	—	+ 0 .65	1	+ 0 .257	3
14	+ 0 .06	2	—	—	—	—	—	—	+ 0 .15	1	+ 0 .090	3
15	+ 0 .06	2	—	—	—	—	—	—	- 0 .85	1	- 0 .243	3
16	+ 0 .06	2	—	—	—	—	—	—	+ 0 .05	1	+ 0 .057	3
17	+ 0 .06	2	—	—	—	—	—	—	+ 0 .75	1	+ 0 .290	3
18	—	—	—	—	+ 0 .09	1	- 1 .55	1	—	—	- 0 .730	2
19	—	—	—	—	+ 0 .09	1/2	- 2 .35	2	—	—	- 1 .862	2.5
20	—	—	—	—	+ 0 .09	1	+ 2 .25	1	—	—	+ 1 .170	2
21	—	—	—	—	—	—	- 0 .05	2	- 1 .55	1	- 0 .550	3

$$\begin{aligned}
 -[\alpha u'''] &= -2,28; & -[\beta u'''] &= +2.517; & -[\gamma u'''] &= +1.021; \\
 -[\varepsilon e] &= +2.259; & -[\lambda l] &= -2.369
 \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\begin{aligned}
 (1)''' &= -0.071; & (2)''' &= +0.325; & (3)''' &= +0.114; & (4)''' &= +0.188; \\
 (5)''' &= -0.263
 \end{aligned}$$

$$X = 43^\circ 26' 43''.33$$

$$Y = 77\ 39\ 13.01$$

$$Z = 128\ 40\ 33.14$$

$$L = 164\ 19\ 14.80 \text{ и т. д.}$$

Взятый пример очевидно является невыгодным для применения Британского приема уравнивания. Очевидно, что *выгоды* этого приема — в смысле *быстроты* получения результата — сказываются ярко в тех случаях, когда на станции наблюдалось *много предметов при малом числе групп приемов*, понимая под *группою* совокупность приемов, в которых состав предметов при переходе от приема к приему не изменялся и в каждом из которых веса наблюдаемых направлений все равны между собою (изменяясь лишь от приема к приему). При большом числе предметов получается большое число нормальных ур-ний (3), вследствие чего строгое уравнивание становится тягостным. При большом числе групп приемов составление таблиц V, VI, VII и вывод (1), (2), (3) . . . становится громоздким и делает мало-выгодным применение Британского приема, если гнаться за достижением определения поправок с ошибками меньшими 0''.05 секунды.

### 67. Упрощенные приемы уравнивания. Примеры из Прусской Инструкции тригонометрических работ при кадастре.

При кадастровых работах приходится составлять сети III и IV класса, причем почти всегда сеть III-го класса представляет весьма сложную комбинацию треугольников и направлений и почти на каждом пункте III класса приходится наблюдать много предметов. При обработке станций употребляют здесь видоизмененный Британский прием, который мы объясним на числовом примере.

Отделение I.

РЕЗУЛЬТАТЫ НАБЛЮДЕНИЙ

Пред- меты	1 Прием № 6	2 Прием № 3	3 Прием № 2	4 Прием № 1	5 Прием № 4	6 Прием № 5
6	0° 0' 0''	0' 0''	0' 0''	0' 0''	0' 0''	0' 0''
12	87 10 32	10 15	10 35	10 35	10 12	—
16	112 57 47	57 30	—	57 45	57 27	—
25	116 21 55	21 52	21 33	—	—	21 40
17	154 50 10	50 20	49 58	50 12	49 52	—
22	179 2 17	—	—	2 37	2 37	2 45
13	191 26 57	26 30	26 25	—	—	26 38
26	192 1 55	1 55	1 53	1 47	—	—

Отделение II. РАЗНОСТИ НАПРАВЛЕНИЙ  $d=r_1-r$

6	0	0 + 8	0 + 8 + 12	0 + 8 + 12 + 3	0 + 8 + 12 + 3	0 + 8 + 12 + 3 + 14
12	+ 17	- 3 - 12	- 3 - 12 + 12	+ 20 + 11 + 35 + 26	..	..
16	+ 17	..	+ 2 - 7 ..	+ 20 .. + 11 + 21	..	..
25	+ 3	+ 22 + 27	..	..	..	+ 15 + 20 + 5 .. ..
17	- 10	+ 12 + 30	- 2 + 16 - 2	+ 18 + 36 + 18 + 23	..	..
22	..	..	- 20	- 20 .. .. + 3	- 28 .. .. + 5 + 6	..
13	+ 27	+ 32 + 13	..	..	..	+ 19 0 - 1
26	0	+ 2 + 10	+ 8 + 16 + 18	..	..	..
$[d]$ $0 = \frac{[d]}{n}$		+ 54 + 8	+ 141 + 12	+ 46 + 3	+ 245 + 14	+ 68 + 5

Отделение III. ПРЕДВАРИТЕЛЬНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ  $r_1=r+0$

Пред- меты	Прием № 6	Прием № 3	Прием № 2	Прием № 1	Прием № 4	Прием № 5	Среднее $m_1$
6	359° 59' 60"	59' 68"	59' 72"	59' 63"	59' 74"	59' 65"	359° 59' 67".0
12	87 10 32	10 23	10 47	10 38	10 26	—	87 10 33.2
16	112 57 47	57 38	—	57 48	57 41	—	112 57 43.5
25	116 21 55	21 60	21 45	—	—	21 45	116 21 51.3
17	154 50 10	50 28	50 10	50 15	50 06	—	154 50 13.8
22	179 2 17	—	—	2 40	2 51	2 50	179 2 39.5
13	191 26 57	26 38	26 37	—	—	26 43	191 26 43.8
26	192 1 55	1 63	1 65	1 50	—	—	192 1 58.3

Отделение IV.

РАЗНОСТИ  $d_1 = m_1 - r_1$

6	+ 7.0	- 1.0	- 5.0	+ 4.0	- 7.0	+ 2.0
12	+ 1.2	+ 10.2	- 13.8	- 4.8	+ 7.2	-
16	- 3.5	+ 5.5	-	- 4.5	+ 2.5	-
25	- 3.7	- 8.7	+ 6.3	-	-	+ 6.3
17	+ 3.8	- 14.2	+ 3.8	- 1.2	+ 7.8	-
22	+ 22.5	-	-	- 0.5	- 11.5	- 10.5
13	- 13.2	+ 5.8	+ 6.8	-	-	+ 0.8
26	+ 3.3	- 4.7	- 6.7	+ 8.3	-	-
$[d_1]$	+ 17.4	- 7.1	- 8.6	+ 1.3	- 1.0	- 1.4
$o_1 = \frac{[d_1]}{n}$	+ 2.2	- 1.0	- 1.4	+ 0.2	- 0.2	- 0.4

Отделение V. ОРИЕНТИРОВАННЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ:  $r_2 - r_1 + o_1$

	Прием № 6	Прием № 3	Прием № 2	Прием № 1	Прием № 4	Прием № 5	Окончательные направления, средн. $m_2$
6	359° 59' 62".2	59' 67".0	59' 70".6	59' 63".2	59' 73".8	59' 64".6	0° 0' 6".9
12	87 10 34 .2	10 22 .0	10 45 .6	10 38 .2	10 25 .8	-	87 10 33 .2
16	112 57 49 .2	57 37 .0	-	57 48 .2	57 40 .8	-	112 57 43 .8
25	116 21 57 .2	21 59 .0	21 43 .6	-	-	21 44 .6	116 21 51 .1
17	154 50 12 .2	50 27 .0	50 8 .6	50 15 .2	50 5 .8	-	154 50 13 .8
22	179 2 19 .2	-	-	2 40 .2	2 50 .8	2 49 .6	179 2 40 .0
13	191 26 59 .2	26 37 .0	26 35 .6	-	-	26 42 .6	191 26 43 .6
26	192 15 7 .2	1 62 .0	1 63 .6	1 50 .2	-	-	192 1 58 .3

При составлении отделения I-го первую его графу отводят приему, в котором число наблюдаемых предметов является наибольшим затем вторую графу заполняют данными приема, который является следующим по числу наблюдаемых в нем направлений и т. д., так что последняя графа отделения I-го отводится приему с наименьшим числом наблюдаемых предметов.

В отделении II-ом сперва находят разности между общими направлениями, заключенными в 1 и 2 графах отделения I-го; выводя среднее из таких разностей,  $\left( o = \frac{[d]}{n} \right)$  считают, что это среднее, равное в нашем

примере  $+ 8''$ , является той поправкой, которая должна быть введена во все наблюдения 2-ой графы отдела I-го, чтобы дать направлениям, взятым в приеме № 3 ту же ориентировку, какую имеют направления приема № 6. После этого образуют разности между общими направлениями графы 1-ой и графы 3-ей отделения I-го, а так же между общими направлениями графы 2-й и графы 3-ей отделения I-го, при чем при образовании последних разностей, направления графы 2-ой берутся уже исправленные поправкой  $o = + 8''$ , т. е. берутся ориентированными по приему № 6. Таким образом



в графе 3-ей отделения II-го получается по два значения разности  $d$  для каждого направления, общего 6-му, 3-ему и 2-му приемам и по одному значению  $d$  для направлений общих или 6-му и 2-му приемам, или 3-му и 2-му приемам. Из всех  $d$ , полученных в 3-ей графе отделения II-го выводят среднее, и это среднее, равное  $+12''$ , принимают за ту поправку, введение которой во все наблюдения приема № 2 приведет их к той ориентировке направлений, которая имела место в приемах № 6 и № 3. Покончив с графой 3-ей, переходят в графы четвертые отделений I и II-го, находят разницы: между общими направлениями графы 1-ой и графы 4-ой отделения I-го; между общими направлениями графы 2-ой и графы 4-ой того-же отделения; между общими направлениями графы 3-ей и графы 4-ой. При этом направления графы 2-й и 3-ей берутся исправленными соответственно поправкам  $+8''$  и  $+12''$ . Заполнение всех остальных граф отделения II-го делается совершенно так-же и описывать это будет излишне. Отделение III-е—получается из отделения I-го путем прибавления: ко всем числам 2-ой графы постоянной поправки  $+8''$ ; ко всем числам 3-ей графы—постоянной поправки  $+12''$ ; ко всем числам 4-ой графы—постоянной поправки  $+3''$  и т. д. Таким образом, числа III-го отделения имеют собственно то же самое значение, что и числа I-го отделения, но очевидно, что в III отделении устранены систематические расхождения между результатами отдельных приемов, обусловленные отчасти погрешностями определения начального направления. Из чисел каждой строчки отделения III выводится арифметическая середина  $m_1$ , затем в отделении IV-ом выписывают уклонения  $m_1 - r_1 = d_1$  чисел отделения III-го от соответственных  $m_1$ ; далее из  $d_1$  по каждому приему образуют средний вывод  $\theta_1 = \frac{[d_1]}{n}$ , величинами  $\theta_1$  исправляют числа отделения III-го и переходят к отделению V-му, из чисел каждой строчки коего выводят средние  $m_2$ , которые и принимают за окончательные направления. Действия от составления средних  $m_1$  до конца, вполне тождественны практикуемым при Британском приеме.

**68. Применение формул § 65 к случаю наблюдений по способу Шрейбера; оценка точности измерений, исполненных этим способом.** Пусть следующая таблица представляет результаты измерения углов по способу Шрейбера:

1,2						
1,3	2,3					
1,4	2,4	3,4				
1,5	2,5	3,5	4,5			
1,6	2,6	3,6	4,6	5,6		
· ·	· ·	· ·	· ·	· ·	6,7	
· ·	· ·	· ·	· ·	· ·	· ·	
· ·	· ·	· ·	· ·	· ·	· ·	
· ·	· ·	· ·	· ·	· ·	· ·	
· ·	· ·	· ·	· ·	· ·	· ·	
1,n	2,n	3,n	4,n	5,n	6,n . . . . . n-1,n	

Причем под 1,2, 1,3 . . . k, n . . . понимаются значения углов, соответственно между направлениями 1 и 2, 1 и 3, . . . k и n, выведенные каждое как среднее из  $m$  приемов.

Принимая вес направления, наблюдавшегося в  $m$  приемах, равным  $2m$ , мы легко соображаем, что при способе Шрейбера:

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \dots = \sigma_n \frac{(n-1)}{2} = 4m \\
 [\beta] = [\gamma] = [\varepsilon] = \dots = 2m(n-1) \\
 \left[ \frac{\beta^2}{\sigma} \right] = \left[ \frac{\gamma^2}{\sigma} \right] = \left[ \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \right] = \dots = m(n-1) \\
 \left[ \frac{\beta\gamma}{\sigma} \right] = \left[ \frac{\beta\varepsilon}{\sigma} \right] = \left[ \frac{\beta\lambda}{\sigma} \right] = \dots = \left[ \frac{\gamma\varepsilon}{\sigma} \right] = \left[ \frac{\gamma\lambda}{\sigma} \right] = m \\
 [\beta b] = 2m^r [1,2] \\
 [\gamma c] = 2m [1,3 + 2,3] \\
 [\varepsilon e] = 2m [1,4 + 2,4 + 3,4] \\
 [\lambda l] = 2m [1,5 + 2,5 + 3,5 + 4,5] \\
 \dots
 \end{aligned} \right\} (2)$$

понимая, конечно: под  $b$  результаты наблюдения направления 2; под  $c$  — результаты наблюдения направления 3 и т. д. Далее, так как все веса  $\beta, \gamma, \varepsilon, \dots$  во всех приемах равны либо  $2m$ , либо нулю, то не трудно видеть, что:

$$\left. \begin{aligned}
 \left[ \frac{\beta\Sigma}{\sigma} \right] &= m \left( \frac{1,2 + 2,3 + 2,4 + \dots + 2,n}{2} \right) \\
 \left[ \frac{\gamma\Sigma}{\sigma} \right] &= m \left( \frac{1,3 + 2,3 + 3,4 + \dots + 3,n}{2} \right) \\
 \left[ \frac{\varepsilon\Sigma}{\sigma} \right] &= m \left( \frac{1,4 + 2,4 + 3,4 + \dots + 4,n}{2} \right) \\
 \dots
 \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

Отсюда, обозначая искомые углы между направлениями 1 и 2, 1 и 3, 1 и 4 . . . 1 и  $n$  соответственно чрез:

$x_{1,2}, x_{1,3}, x_{1,4} \dots x_{1,n}$ , напомним такие нормальные ур-ния, по сокращении которых на  $m$ :

$$\left. \begin{aligned}
 (n-1)x_{1,2} - x_{1,3} - x_{1,4} - x_{1,5} - \dots - x_{1,n} &= 2(1,2) - (1,2 + 2,3 + 2,4 + \dots + 2,n) \\
 -x_{1,2} + (n-1)x_{1,3} - x_{1,4} - x_{1,5} - \dots - x_{1,n} &= 2(1,3 + 2,3) - (1,3 + 2,3 + 3,4 + \\
 &\quad + 3,5 + \dots + 3,n) \\
 -x_{1,2} - x_{1,3} + (n-1)x_{1,4} - x_{1,5} - \dots - x_{1,n} &= 2(1,4 + 2,4 + 3,4) - (1,4 + \\
 &\quad + 2,4 + 3,4 + 4,5 + \dots + 4,n) \\
 \dots \\
 -x_{1,2} - x_{1,3} - x_{1,4} - \dots + (n-1)x_{1,n-1} - x_{1,n} &= 2(1,n-1 + 2,n-1 + \\
 &\quad + 3,n-1 + n-2,n-1) - (1,n-1 + 2,n-1 + 3,n-1 + \dots + n-2,n-1 + n-1,n) \\
 -x_{1,2} - x_{1,3} - x_{1,4} - \dots - x_{1,n-1} + (n-1)x_{1,n} &= 2(1,n + 2,n + 3,n + \dots + \\
 &\quad + n-2,n + n-1,n) - (1,n + 2,n + 3,n + \dots + n-2,n + n-1,n)
 \end{aligned} \right\} (4)$$

Складывая все уравнения (4), получаем:

$$x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} + \dots + x_{1,n} = 1,2 + 1,3 + 1,4 + 1,5 + \dots + 1,n \dots (5)$$





Или:

$$x_{1,k} = \frac{1,2 + 1,3 + 1,4 + \dots + 1,k - 1 + 1,k + 1,k + 1 \dots + 1,n}{n} +$$

$$+ \frac{1,k + 2,k + 3,k + \dots + k-1,k}{n} - \frac{k,k + 1 + k,k + 2 + \dots + k,n}{n}$$

Так как число всех слагаемых, в этом выражении равно

$$(n-1) + (k-1) + (n-k) = 2n-2$$

причем одно слагаемое  $1,k$  — входит дважды, то в выражении для  $x_{1,k}$  имеем:  $2n-4$  слагаемых, независимо измеренных друг от друга с одним и тем-же весом  $m$  и входящих каждое в  $x_{1,k}$  с коэффициентом  $\frac{1}{n}$ , и одно слагаемое  $\frac{2(1,k)}{n}$ .

Отсюда очевидно:

$$\frac{1}{P_{x_{1,k}}} = \frac{2n-4}{mn^2} + \frac{1}{mn^2} = \frac{2n-4}{mn^2} + \frac{4}{mn^2} = \frac{2n}{mn^2}$$

$$\frac{1}{P_{x_{1,k}}} = \frac{2}{mn} \quad \text{или} \quad P_{x_{1,k}} = \frac{mn}{2}$$

что вполне согласно с прежними выводами (§ 43)

Для определения веса угла  $x_{i,k}$  напомним:

$$f = x_{i,k} = x_{1,k} - x_{1,i} \quad (\text{полагая } i < k)$$

Пользуемся далее уравнением (4) § 59-го:

$$\frac{1}{P_f} = f_1 f_1 Q_{1,1} + 2f_1 f_2 Q_{1,2} + 2f_1 f_3 Q_{1,3} + \dots$$

$$+ f_2 f_2 Q_{2,2} + 2f_2 f_3 Q_{2,3} + \dots$$

в котором для данного случая:

$$f_{k-1} = 1 = \frac{\partial f}{\partial x_{1,k}}; \quad f_{i-1} = -1 = \frac{\partial f}{\partial x_{1,i}}$$

все же остальные коэффициенты  $f$  равны нулю. —

Поэтому имеем:

$$\frac{1}{P_f} = f_{i-1} f_{i-1} Q_{i-1,i-1} + 2f_{i-1,k-1} Q_{i-1,k-1} + f_{k-1,k-1} Q_{k-1,k-1}$$

или 
$$\frac{1}{P_f} = \frac{2}{mn} - 2 \cdot \frac{1}{mn} + \frac{2}{mn}$$

$$P_{x_{i,k}} = \frac{mn}{2}$$

Теперь перейдем к вопросу об определении точности результатов измерений, исполненных по способу Шрейбера.

1... Выводя вероятнейшие значения углов  $x_{1,2}, x_{1,3} \dots x_{1,k} \dots x_{1,n}$ , вычислим по ним вероятнейшие значения всех  $\frac{n(n-1)}{2}$  углов измерившихся по способу Шрейбера. Определив уклонения  $v$  всех отдельных величин таблицы (1) настоящего §-фа от соответствующих вероятнейших значений углов, т. е. выведя разницы:

$$v_{i,k} = (i,k) - x_{i,k}$$

мы должны считать, что первичные уклонения в направлениях  $i$  и  $k$  при измерении угла  $(i,k)$  были: нуль и  $v_{i,k}$ ; вторичные же уклонения будут:

$$-\frac{v_{i,k}}{2} \text{ и } +\frac{v_{i,k}}{2}.$$

Следовательно средняя ошибка единицы веса, или ошибка вывода направления из полуприема, будет равна:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{\sqrt{4m \left[ \frac{v^2}{4} \right]}}{\sqrt{\frac{2n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} - (n-1)}} \\ \mu_1 &= \frac{\sqrt{m[v^2]}}{\sqrt{(n-1) \left( \frac{n}{2} - 1 \right)}} = \frac{\sqrt{m[v^2]}}{\sqrt{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}} \dots (10) \end{aligned}$$

Ошибка направления из приема:

$$\mu = \sqrt{\frac{m[v^2]}{(n-1)(n-2)}} \dots (11)$$

2... Если угол  $(i,k)$  был выведен из  $m$  приемов, то, образовав уклонения  $u$ , результатов каждого отдельного приема измерения этого угла от его вероятнейшего значения  $x_{i,k}$ , т. е. вычислив величины

$$\begin{aligned} u'_{i,k} &= (i,k)' - x_{i,k} \text{ из первого приема} \\ u''_{i,k} &= (i,k)'' - x_{i,k} \text{ из второго приема} \\ u'''_{i,k} &= (i,k)''' - x_{i,k} \text{ из третьего приема} \\ &\dots \dots \dots \\ u^m_{i,k} &= (i,k)^m - x_{i,k} \text{ из } m\text{-го приема} \end{aligned}$$

мы можем по величинам  $u$  так сообразить ошибку единицы веса: число всех величин  $u$  будет равно  $m \cdot \frac{n(n-1)}{2}$ , число же избыточных наблюдений будет равно:

$$\frac{m \cdot n(n-1)}{2} - (n-1) = (n-1) \left( \frac{mn}{2} - 1 \right) = \frac{(n-1)}{2} (mn - 2)$$

Так как далее угол выведенный из одного приема имеет вес равный 1, то

$$\mu_2 = \frac{\sqrt{[u^2]}}{\sqrt{\frac{n-1}{2}(mn-2)}} = \sqrt{\frac{2[u^2]}{(n-1)(mn-2)}} \dots (12)$$

Ошибка направления из полного приема:

$$\mu = \sqrt{\frac{[u^2]}{(n-1)(mn-2)}} \dots \dots \dots (13)$$

Так как величины  $u$  непременно искажены влиянием систематических ошибок делений лимба, от которых величины  $v$  почти совершенно свободны, то очевидно, что

$$\mu_2 \text{ должно быть более } \mu_1$$

3 . . . образуем разности  $\delta$  между двумя значениями угла  $(i, k)$ , полученными в одном и том же приеме. Очевидно, что эта разность  $\delta$  будет совершенно свободна от влияния ошибок делений круга.

Число всех  $\delta$  будет равно  $\frac{mn(n-1)}{2}$  и, средняя ошибка разности двух значений угла, полученных в некотором приеме, будет равна  $\sqrt{\frac{[\delta^2]}{\frac{mn(n-1)}{2}}}$ ,

но так как этой ошибке соответствует вес  $\frac{1}{4}$ , то ошибка единицы веса будет:

$$\mu_3 = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{[\delta^2]}{\frac{mn(n-1)}{2}}} = \sqrt{\frac{[\delta^2]}{2mn(n-1)}} \dots \dots \dots (14)$$

Обозначим постоянную ошибку, обусловленную ошибками делений круга и входящую в оба вывода направления в каждом полуприеме данного приема, чрез  $t$ . При переходе от приема к приему— $t$  можно рассматривать, как величину случайную.

Поэтому можно написать:

$$\begin{aligned} \mu_3^2 &= \mu_2^2 + t^2 \\ \text{или } t^2 &= \mu_3^2 - \mu_2^2 \dots \dots \dots (15) \end{aligned}$$

По формуле (15) можно вывести влияние ошибок делений круга на результат определения направления. Впрочем, надежность этого вывода всецело зависит от устойчивости инструмента при наблюдениях: очевидно величины  $\delta$  искажены влиянием сдвигов лимба в два раза более, чем результаты измерения угла в одном полуприеме; влияние же этих сдвигов, на вывод угла из приема, почти равно нулю. Поэтому при отсутствии при наблюдениях хорошей устойчивости инструмента, может оказаться что  $\mu_2^2$  почти равно  $\mu_3^2$ , или даже  $\mu_2^2 < \mu_3^2$ .

4 . . . Образовав уклонения

$$\begin{aligned} \omega'_{ik} &= (i, k)' - (i, k) \\ \omega''_{ik} &= (i, k)'' - (i, k) \\ \omega'''_{ik} &= (i, k)''' - (i, k) \end{aligned}$$

результатов отдельных приёмов измерения угла от среднего вывода этого угла из  $m$  приёмов, можем по ним вычислить величину  $\mu$  так: всех наблю-

дений имеем  $\frac{mn(n-1)}{2}$ , число необходимых для вывода  $\omega$  величин равно  $\frac{n(n-1)}{2}$ ; следовательно число избыточных измерений равно;

$$\frac{mn(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} (m-1)$$

Далее, так как вес измерения угла одним приемом равен 1, то

$$\mu_4 = \frac{\sqrt{[\omega^2]}}{\sqrt{\frac{1}{2} n(n-1)(m-1)}} = \sqrt{\frac{2[\omega^2]}{n(n-1)(m-1)}} \dots \dots (16)$$

Таким образом, мы имеем четыре формулы для вывода средней ошибки единицы веса:

1) по уклонениям  $v$  средних из  $m$  приемов выводов углов от вероятнейших значений соответствующих углов:

$$\mu_1 = \frac{\sqrt{m[v^2]}}{\sqrt{\frac{1}{2} (n-1)(n-2)}}$$

2) по уклонениям  $u$  результатов всех отдельных приемов от вероятнейших значений соответствующих углов:

$$\mu_2 = \sqrt{\frac{2[u^2]}{(n-1)(mn-2)}}$$

3) по разностям  $\delta$  между каждыми двумя значениями угла, полученными в одном и том-же приеме:

$$\mu_3 = \sqrt{\frac{[\delta^2]}{2mn(n-1)}}$$

4) по уклонениям  $\omega$  результатов измерений углов в отдельных приемах от средних выводов соответствующих углов из  $m$  приемов:

$$\mu_4 = \sqrt{\frac{2[\omega^2]}{n(n-1)(m-1)}}$$

*Числовой пример* (взят из статьи Шрейбера).

Результаты измерения углов между шестью направлениями даны в следующей таблице. Для взятого примера:

$$\begin{aligned} m &= 4; \quad n = 6; \quad n-1 = 5; \quad n-2 = 4 \\ (n-1)(n-2) &= 20 \\ (n-1)(mn-2) &= 110 \\ 2mn(n-1) &= 240 \\ n(n-1)(m-1) &= 90 \end{aligned}$$



Название углов	Результат нечетного полуприема	Результат четного полуприема	$\delta$	Результат из приема	$\omega$	$\mu$	Средний вывод угла из $n$ приемов
3.5	46°11'13".1	13".8	+ 0".7	46°11'13".45	+ 0".35	+ 0".48	46°11'13".10
	14 .2	13 .5	- 0 .7	13 .85	- 0 .75	+ 0 .88	
	11 .4	10 .6	- 0 .8	11 .00	- 2 .10	- 1 .97	
	14 .6	13 .6	- 1 .0	14 .10	+ 1 .00	- 1 .13	
1.3	66°24'32".4	31".5	- 0".9	66°24'31".95	+ 0".20	+ 0".32	66°24'31".75
	31 .5	31 .6	+ 0 .1	31 .55	- 0 .20	- 0 .08	
	30 .7	31 .4	+ 0 .7	31 .05	- 0 .70	- 0 .58	
	32 .7	32 .2	- 0 .5	32 .45	+ 0 .70	+ 0 .82	
1.4	91°55'17".2	17".3	+ 0".1	91°55'17".25	+ 0".05	- 0".20	91°55'17".20
	16 .7	16 .6	- 0 .1	16 .65	- 0 .55	- 0 .80	
	17 .4	16 .8	- 0 .6	17 .10	- 0 .10	- 0 .35	
	17 .8	17 .8	0 .0	17 .80	+ 0 .60	+ 0 .35	
4.5	20°40'27".8	27".2	- 0".6	20°40'27".5	+ 0".10	+ 0".35	20°40'27".40
	27 .1	26 .5	- 0 .6	26 .8	- 0 .60	- 0 .35	
	27 .4	27 .0	- 0 .4	27 .2	- 0 .20	+ 0 .05	
	28 .7	27 .5	- 1 .2	28 .1	+ 0 .70	+ 0 .95	
3.4	25°30'45".8	45".6	- 0 .2	25°30'45".7	+ 0".08	- 0".12	25°30'45".62
	47 .2	46 .6	- 0 .6	46 .9	+ 1 .28	+ 1 .08	
	44 .4	46 .1	+ 1 .7	45 .25	- 0 .37	- 0 .57	
	44 .8	44 .5	- 0 .3	44 .65	- 0 .97	- 1 .17	
1.5	112°35'44".3	44".4	+ 0".1	112°35'44".35	- 0".64	- 0".25	112°35'44".99
	44 .1	45 .3	+ 1 .2	44 .70	- 0 .29	+ 0 .10	
	44 .5	44 .8	+ 0 .3	44 .65	- 0 .34	+ 0 .05	
	46 .8	45 .7	- 1 .1	46 .25	+ 1 .26	+ 1 .65	
2.5	58°12'44".5	43".1	- 1".4	58°12'43".80	- 0".28	- 0".35	58°12'44".08
	44 .3	45 .0	+ 0 .7	44 .65	+ 0 .57	+ 0 .50	
	44 .7	44 .4	- 0 .3	44 .55	+ 0 .47	+ 0 .40	
	43 .5	43 .1	- 0 .4	43 .30	- 0 .78	- 0 .85	
2.4	37°32'18".2	18".7	+ 0".5	37°32'18".45	+ 1".47	+ 1".45	37°32'16".98
	16 .9	15 .3	- 1 .6	16 .10	- 0 .88	- 0 .90	
	15 .9	17 .0	+ 1 .1	16 .45	- 0 .53	- 0 .55	
	16 .5	17 .3	+ 0 .8	16 .90	- 0 .08	- 0 .10	

Название углов	Результат нечетного полуприема	Результат четного полуприема	$\delta$	Результат из приема	$\omega$	$\mu$	Средний вывод угла из n приемов
1.2	54°22' 60".7 59 .0 58 .9 60 .6	60".7 60 .4 60 .1 59 .6	0".0 + 1 .4 + 1 .2 - 1 .0	54°22' 60".70 59 .70 59 .50 60 .10	+ 0".70 - 0 .30 - 0 .50 + 0 .10	+ 0".25 - 0 .75 - 0 .95 - 0 .35	54°22' 60".00
5.6	42°7' 22".4 25 .1 25 .4 23 .0	23".8 26 .5 25 .0 23 .6	+ 1".4 + 1 .4 - 0 .4 + 0 .6	42°7' 23".1 25 .8 25 .2 23 .3	- 1".25 + 1 .45 + 0 .85 - 1 .05	- 0".55 + 2 .15 + 1 .55 - 0 .35	42°7' 24".35
4.6	62°47' 49".5 49 .1 51 .9 51 .1	49".0 49 .3 51 .4 49 .3	- 0".5 + 0 .2 - 0 .5 - 1 .8	62°47' 49".25 49 .20 51 .65 50 .20	- 0".83 - 0 .88 + 1 .57 + 0 .12	- 1".55 - 1 .60 + 0 .85 - 0 .60	62°47' 50".08
2.6	100°20' 8".3 6 .9 8 .0 9 .4	7".5 8 .0 8 .0 8 .1	- 0".8 + 1 .1 0 .0 - 1 .3	100°20' 7".90 7 .45 8 .00 8 .75	- 0".12 - 0 .57 - 0 .02 + 0 .73	+ 0".10 - 0 .35 + 0 .20 + 0 .95	100°20' 8".02
3.6	88°18' 36".0 34 .1 37 .1 37 .4	35".6 35 .3 37 .0 37 .4	- 0".4 + 1 .2 - 0 .1 0 .0	88°18' 35".80 34 .70 37 .05 37 .40	- 0".44 - 1 .54 + 0 .81 + 1 .16	- 0".82 - 1 .92 + 0 .43 + 0 .78	88°18' 36".24
1.6	154°43' 7".7 7 .4 9 .9 8 .7	8".2 7 .2 9 .6 8 .9	+ 0".5 - 0 .2 - 0 .3 + 0 .2	154°43' 7".95 7 .30 9 .75 8 .80	- 0".50 - 1 .15 + 1 .30 + 0 .35	- 0".30 - 0 .95 + 1 .50 + 0 .55	154°43' 8".45
2.3	12°1' 30".7 30 .9 30 .9 30 .8	30".7 29 .5 29 .5 32 .0	0".0 - 1 .4 - 1 .4 + 1 .2	12°1' 30".70 30 .20 30 .20 31 .40	+ 0".08 - 0 .42 - 0 .42 + 0 .78	- 0".48 - 0 .98 - 0 .98 + 0 .22	12°1' 30".62

Пользуясь последней графой предыдущей таблицы делаем такую выписку:

Углы	$v$	Углы	$v$	Углы	$v$
1.2 = 54°22' 60".00	- 0".45	2.3 = 12° 1' 30".62	- 0".56	3.4 = 25°30' 45".62	- 0".20
1.3 = 66 24 31 .75	+ 0 .12	2.4 = 37 32 16 .98	- 0 .02	3.5 = 46 11 13 .10	+ 0 .13
1.4 = 91 55 17 .20	- 0 .25	2.5 = 58 12 44 .08	- 0 .07	3.6 = 88 18 36 .24	- 0 .38
1.5 = 112 35 44 .99	+ 0 .39	2.6 = 100 20 8 .02	+ 0 .22		
1.6 = 151 43 8 .45	+ 0 .20	4.5 = 20°40' 27".40	+ 0".25	5.6 = 42° 7' 24".35	+ 0".70
		4.6 = 62 47 50 .08	- 0 .72		

Отсюда делаем по формулам (7) настоящего §-фа вывод вероятнейших значений углов:

$x_{1,2}$		$\varepsilon$	$x_{1,3}$		$\varepsilon$	$x_{1,4}$		$\varepsilon$
1.2	54°22'60".00	-0".45	1.3	66°24'31".75	-0".12	1.4	91°55'17".20	+0".25
1.2	60 .00	-0 .45	1.3	31 .75	-0 .12	1.4	17 .20	+0 .25
1.3-2.3	61 .13	+0 .68	1.2+2.3	30 .62	+1 .01	1.2+2.4	16 .98	+0 .47
1.4-2.4	60 .22	-0 .23	1.4-3.4	31 .58	+0 .05	1.3+3.4	17 .37	+0 .08
1.5-2.5	60 .91	+0 .46	1.5-3.5	31 .89	-0 .26	1.5-4.5	17 .59	-0 .14
1.6-2.6	60 .43	-0 .02	1.6-3.6	32 .21	-0 .58	1.6-4.6	18 .37	-0 .92
54°22'60".45		-1 .15	66°24'31".63		-1 .08	91°55'17".45		+1 .05
		+1 .14			+1 .06			-1 .06

$x_{1,5}$		$\varepsilon$	$x_{1,6}$		$\varepsilon$
1.5	112°35'44".99	-0".39	1.6	154°43'8".45	-0".20
1.5	44 .99	-0 .39	1.6	8 .45	-0 .20
1.2+2.5	44 .08	+0 .52	1.2+2.6	8 .02	+0 .23
1.3+3.5	44 .85	-0 .25	1.3+3.6	7 .99	+0 .26
1.4+4.5	44 .60	0 .00	1.4+4.6	7 .28	+0 .97
1.6-5.6	44 .10	+0 .50	1.5+5.6	9 .34	-1 .09
112-35'44".60		-1 .03	154°43'8".25		-1 .49
		+1 .02			+1 .46

Отсюда же находим вероятнейшее значение и всех остальных углов:

$$x_{2,3} = 12^{\circ} 1'31''.18$$

$$x_{2,4} = 37 32 17 .00$$

$$x_{2,5} = 58 12 44 .15$$

$$x_{2,6} = 100 20 7 .80$$

$$x_{3,4} = 25^{\circ} 30'45''.82$$

$$x_{3,5} = 46 11 12 .97$$

$$x_{3,6} = 88 18 36 .62$$

$$x_{4,5} = 20^{\circ} 40'27''.15$$

$$x_{4,6} = 62 47 50 .80$$

$$x_{5,6} = 42 7 23 .65$$

Далее имеем:

$$\Sigma v^2 = 2,111,$$

$$\Sigma \mu^2 = 46,62;$$

$$\Sigma d^2 = 43,92;$$

$$\Sigma \omega^2 = 38,1694$$

Следовательно:

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{8,2,111}{20}} = \sqrt{\frac{8,444}{10}} = \pm 0'',92$$

$$\mu_2 = \sqrt{\frac{2,46,62}{110}} = \sqrt{0,8476} = \pm 0'',92$$

$$\mu_3 = \sqrt{\frac{43,92}{240}} = \sqrt{0,1830} = \pm 0'',42$$

$$\mu_4 = \sqrt{\frac{2.38,17}{90}} = \sqrt{0,8482} = \pm 0'',92$$

Влияние ошибок делений на направления в полуприеме:

$$t^2 = \mu_2^2 - \mu_3^2 = 0,8476 - 0,1830 = 0,6646$$

$$t = \pm 0'',81$$

Так как вес уравновешенного угла равен  $= \frac{mn}{2} = 12$ , то средняя ошибка уравновешенного угла оказывается равной  $\pm \frac{0,92}{\sqrt{12}} = \pm 0'',27$ , а средняя ошибка уравновешенного направления  $= \pm 0'',19$ .

Результат уравновешивания станции поэтому представится в таких двух видах:

Углы:		Направления:	
1.2 ...	54°22' 60".45 $\pm 0'',27$	1 ...	0° 0' 0".00 $\pm 0'',19$
1.3 ...	66 24 31 .63 $\pm 0 .27$	2 ...	54 22 60 .45 $\pm 0 .19$
1.4 ...	91 55 17 .45 $\pm 0 .27$	3 ...	66 24 31 .63 $\pm 0 .19$
1.5 ...	112 35 44 .60 $\pm 0 .27$	4 ...	91 55 17 .45 $\pm 0 .19$
1.6 ...	154 43 8 .25 $\pm 0 .27$	5 ...	112 35 44 .60 $\pm 0 .19$
		6 ...	154 43 8 .25 $\pm 0 .19$

### 69. Уравновешивание триангуляции по способу Бесселя.

Если-бы на всех пунктах триангуляции наблюдения были исполнены по способу *Шрейбера*, или же на некоторых пунктах по способу *Шрейбера*, а на всех остальных — по способу *Струве*, однако с тем, что на каждом из этих остальных пунктов наблюдения были произведены *в одной группе полных приемов*,—то тогда уравновешивание триангуляции явилось-бы задачей *уравновешивания условных наблюдений* и все дело свелось-бы к решению *условных уравнений сети*, в которые пришлось-бы подставить выведенные на каждом пункте *окончательные направления*, рассматриваемые как непосредственно наблюдаемые величины с соответствующими весами. Однако, нередко — в особенности в сложных сетях — результаты наблюдений на ее пунктах представляются в виде *нескольких групп неполных приемов*, и в этих случаях *уравновешивание станций* приводит на каждом пункте к *серии уравновешенных на станции значений углов*, которые можно, конечно, искусственно и не имея к тому научного основания, счесть за непосредственно наблюдаемые углы и ввести в качестве таковых в условные уравнения сети. Но понятно, задача строгого уравновешивания триангуляции и в этом случае (т. е. в случае наблюдений неполными приемами) представляет интерес, и конечно, ее приходится ставить так, чтобы в условные уравнения сети вводить непосредственно наблюдаемые величины, или другими словами эту задачу приходится ставить так, чтобы по ее решению сумма квадратов поправок непосредственно наблюдаемых величин, а не их функций, оказалась-бы наименьшею.





— [3] . . . Отсюда заключаем, что исключение  $z$  из ур-ний (а) и (б) приведет нас к ур-ниям, вполне схожим с ур-ниями (5) § 41, а именно, мы получим:

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ [\alpha] - \left[ \frac{\alpha^2}{\sigma} \right] \right\} X - \left[ \frac{\alpha\beta}{\gamma} \right] Y - \left[ \frac{\alpha\gamma}{\sigma} \right] U - \dots + \left[ \frac{\alpha\Sigma}{\sigma} \right] - [\alpha a] = [1] \\ & - \left[ \frac{\alpha\beta}{\sigma} \right] X + \left\{ [\beta] - \left[ \frac{\beta^2}{\sigma} \right] \right\} Y - \left[ \frac{\beta\gamma}{\sigma} \right] U - \dots + \left[ \frac{\beta\Sigma}{\sigma} \right] - [\beta b] = [2] \\ & - \left[ \frac{\alpha\gamma}{\sigma} \right] X - \left[ \frac{\beta\gamma}{\sigma} \right] Y + \left\{ [\gamma] - \left[ \frac{\gamma^2}{\sigma} \right] \right\} U - \dots + \left[ \frac{\gamma\Sigma}{\sigma} \right] - [\gamma c] = [3] \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

Теперь следовательно надлежит исключить  $X, Y, U \dots$  из ур-ний (5) и (с). Для этого воспользуемся формулами неопределенного решения нормальных ур-ний: (см. § 58).

$$\left. \begin{aligned} X + q_{1,1} [al] + q_{1,2} [bl] + q_{1,3} [cl] + \dots &= 0 \\ Y + q_{2,1} [al] + q_{2,2} [bl] + q_{2,3} [cl] + \dots &= 0 \\ Z + q_{3,1} [al] + q_{3,2} [bl] + q_{3,3} [cl] + \dots &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

Понятно, что:

$$\left. \begin{aligned} [al] &= \left[ \frac{\alpha\Sigma}{\sigma} \right] - [\alpha a] - [1] \\ [bl] &= \left[ \frac{\beta\Sigma}{\sigma} \right] - [\beta b] - [2] \\ [cl] &= \left[ \frac{\gamma\Sigma}{\sigma} \right] - [\gamma c] - [3] \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

и конечно  $a, b, c \dots$  входящие в выражение  $[al], [bl], [cl] \dots$  вовсе не совпадают с  $a, b, c$ , входящими в ур-ние (1) настоящего параграфа. Представим себе теперь, что мы до *составления условных ур-ний сети* проделали на каждом ее пункте уравновешивания постанционные, т. е. заменив в ур-ниях (5) *величины, стоящие в правых их частях, нулями*, определили  $X_0, Y_0, U_0 \dots$  и вычислили *весовые коэффициенты*  $q_{1,1}, q_{1,2}, q_{1,3} \dots q_{2,2}, q_{3,3} \dots$  Конечно определенные таким образом значения —  $X_0, Y_0, U_0 \dots$  мы должны рассматривать не как окончательные и дальнейшее дело заключается в отыскании поправок  $x, y, u \dots$  к этим значениям  $X_0, Y_0, U_0 \dots$

Составляя вновь ур-ния (а), (б) и (с), но только не с величинами  $X, Y, U \dots$ , а с поправками  $x, y, u \dots$  приближенных значений  $X_0, Y_0, U_0 \dots$  мы конечно, изменим в этих уравнениях лишь величины их *свободных членов* так что и в ур-ниях (5) изменятся лишь их *свободные члены*. Мы будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ [\alpha] - \left[ \frac{\alpha^2}{\sigma} \right] \right\} x - \left[ \frac{\alpha\beta}{\sigma} \right] y - \left[ \frac{\alpha\gamma}{\sigma} \right] u - \dots = [1] \\ & - \left[ \frac{\alpha\beta}{\sigma} \right] x + \left\{ [\beta] - \left[ \frac{\beta^2}{\sigma} \right] \right\} y - \left[ \frac{\beta\gamma}{\sigma} \right] u - \dots = [2] \\ & - \left[ \frac{\alpha\gamma}{\sigma} \right] x - \left[ \frac{\beta\gamma}{\sigma} \right] y + \left\{ [\gamma] - \left[ \frac{\gamma^2}{\sigma} \right] \right\} u - \dots = [3] \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots (5')$$





причем, конечно, принято:

$$[A_i B_i^o] = [A_i^o B_i]; [B_i^o C_i^o] = [C_i B_i^o] \dots$$

Таким образом способ *Бесселя* заключается в следующих действиях:

1) в исполнении уравновешиваний станций отдельно от уравновешивания сети, согласно формул § 41, с определением при этом *весовых* коэффициентов  $q_{i,s}$ .

2) в составлении с выведенными из уравновешивания станций значениями углов  $X_o, Y_o, U_o \dots$  *условных* ур-ний сети.

3) в вычислении коэффициентов  $A_i^o, B_i^o, C_i^o \dots$

4) в составлении выражений поправок  $x, y, u \dots$  приближенных углов  $X_o, Y_o, U_o \dots$  чрез коррелаты  $k_1, k_2, k_3 \dots$  при чем величины  $A_1^o, B_1^o, \dots, A_i^o, C_i^o \dots$  играют совершенно ту-же роль, какую при обыкновенном уравновешивании сети коэффициенты условных ур-ний  $A_1, B_1, \dots, A_i, C_i \dots$

5) в составлении нормальных ур-ний коррелат (10), получаемых, как и обычно, путем исключения  $x, y, u \dots$  из условных ур-ний сети помощью выражений поправок чрез коррелаты.

6) в решении нормальных ур-ний коррелат и вычислении поправок  $x, y, u \dots$

При самом вычислении углы нумеруются на чертеже  $\bar{x}$  сети, отсчитывая каждый угол на данном пункте слева направо от одного и того-же направления, самого левого из всех направлений, взятых на этом  $\bar{x}$  пункте.

При образовании коэффициентов  $A_1^o, B_2^o, C_3^o \dots$  нужно помнить, что верхний значек „0“ указывает на то, что эти коэффициенты вычисляются по величинам, относящимся к *одному и тому-же пункту сети*. Чтобы яснее представить образование этих коэффициентов, допустим что на некотором пункте сети  $M$  имеем углы: 15, 16, 17, 18. Приняв *младшее на этом пункте* по номеру неизвестное за первое, следующее по номеру за второе и т. д.; вычислим *для этого пункта*:

$$\begin{array}{cccc} q_{1,1} & & & \\ q_{1,2} & q_{2,2} & & \\ q_{1,3} & q_{2,3} & q_{3,3} & \\ q_{1,4} & q_{2,4} & q_{3,4} & q_{4,4} \end{array}$$

Теперь:

$$A_1^M = A_{15} q_{1,1} + A_{16} q_{1,2} + A_{17} q_{1,3} + A_{18} q_{1,4}$$

$$A_2^M = A_{15} q_{1,2} + A_{16} q_{2,2} + A_{17} q_{2,3} + A_{18} q_{2,4}$$

$$A_3^M = A_{15} q_{1,3} + A_{16} q_{2,3} + A_{17} q_{3,3} + A_{18} q_{3,4}$$

$$A_4^M = A_{15} q_{1,4} + A_{16} q_{2,4} + A_{17} q_{3,4} + A_{18} q_{4,4}$$

понимая под  $A_{15}, A_{16}, A_{17}, A_{18}$  коэффициенты в том условном уравнении, в котором они обозначены буквою  $A$ , соответственно при углах 15, 16, 17, 18, Очевидно, что в обозначениях (8):

$$[A_i q_{i,1}], [A_i q_{i,2}] \dots [A_i q_{i,i}]$$

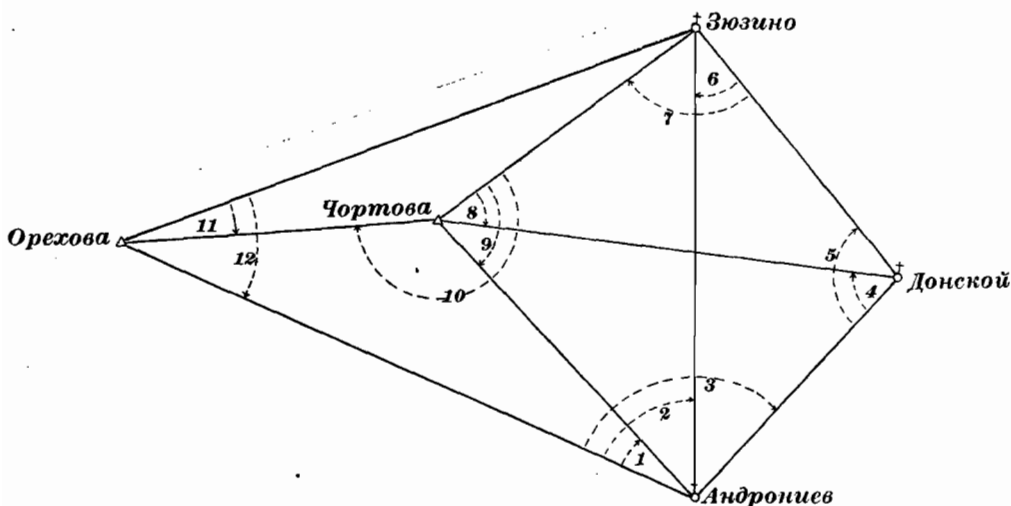
$A_{15}$  заменяется  $A_1, A_{16}—A_2, A_{17}—A_3, A_{18}—A_4, \dots$  причем такая замена совершается в порядке *старшинства* номеров углов *для каждого пункта сети отдельно*.

При вычислении коэффициентов ур-ний (10) нужно помнить: что  $A_1^M$  может умножаться только на те коэффициенты условных ур-ний, которые стоят при младшем по номеру неизвестном на пункте  $M$ , т. е. на  $A_{15}, B_{15}, C_{15} \dots$ ; что  $A_3^M$  может умножаться лишь на те коэффициенты условных ур-ний, которые стоят *при третьем по порядку старшинства номеров не-*

известном на пункте *M* и т. д. Целесообразным расположением таблиц, содержащих: коэффициенты условных ур-ний, величины *q*, и коэффициенты ур-ний (9)—достигается устранение каких-либо неудобств при составлении нормальных ур-ний коррелат и при вычислении поправок углов.

*Числовой пример:*

Результаты измерения направлений в виде средних выводов из каждой группы приемов, представлены для вычисляемой сети в следующей таблице



Черт. 162.

1-ой. Самая сеть изображена на чертеже 162, на котором занумерованы углы, принимаемые в качестве неизвестных при уравнивании.

ТАБЛИЦА 1-я.

	Число приемов.		Число приемов.		
Чортова.		Орехова.			
Зюзино . . .	0° 0' 0".0	6	Зюзино . . .	0° 0' 0".0	6
Донской . . .	49 10 43 .5	6	Чортова . . .	21 59 18 .0	6
Андрониев . .	80 39 36 .3	6	Андрониев . .	48 46 34 .3	6
Орехова . . .	221 56 28 .5	6			
Андрониев.		Зюзино.			
Орехова . . .	0° 0' 0".0	8	Донской . . .	0° 0' 0".0	6
Чортова . . .	11 55 48 .3	8	Андрониев . .	18 13 40 .5	6
Зюзино . . .	40 20 25 .0	8	Орехова . . .	109 6 46 .5	6
Чортова . . .	0 0 0 .0	8			
Зюзино . . .	28 24 36 .0	8			
Донской . . .	48 8 37 .0	8			
Донской.		Донской.			
Андрониев . .	0° 0' 0".0	6	Андрониев . .	0° 0' 0".0	3
Чортова . . .	100 22 23 .5	6	Зюзино . . .	142 2 17 .3	3
Зюзино . . .	142 2 16 .1	6			

По данным таблицы I приступаем по формулам (5) § 41 к уравниванию станций и вычислению величин  $q$ , причем будем принимать, что направление, выведенное из одного приема, имеет вес равный единице.—Заметим что если на данном пункте наблюдения исполнены в одной группе приемов (или *полными* приемами), то тогда для этого пункта:

$$q_{1,1} = q_{2,2} = q_{3,3} = q_{i,i} = \frac{2}{m}$$

$$q_{1,2} = q_{1,3} = q_{2,3} = q_{i,k} = \frac{1}{m}$$

понимая под  $m$  число приемов.

Поэтому для Чортовой, Ореховой и Зюзина *все квадратические* коэффициенты  $q$  равны  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0,333$ ,

а все остальные  $q = \frac{1}{6} = 0,167$ .

Уравнивание на Андрониевом представится так:

$$\text{Андрониев. } X_1^\circ = 11^\circ 55' 48'' .0 \quad X_3^\circ = 60^\circ 4' 25'' .0 \\ X_2^\circ = 40^\circ 20' 25'' .0$$

Группы	Орехова	$\alpha$	Чортова	$\beta$	Зюзино	$\gamma$	Донской	$\delta$	$\sigma$	$\Sigma$
1	0°0'0".0	8	11°55'48".3	8	40°20'25".0	8	—	—	—	—
2	—	—	0 0' 0".0	8	28°24'36".0	8	48°8'37".0	8	—	—
1	0".0	8	+0".3	8	0".0	8	—	—	24	+2".4
2	—	—	0".0	8	-1".0	8	0".0	8	24	-8 .0
			$[b\beta]$	+ 2.4	$[\gamma\gamma]$	-8.0	$[d\delta]$	0.0	—	—

$$[\beta] - \left[ \frac{\beta^2}{\sigma} \right] = 10,667; [\gamma] - \left[ \frac{\gamma^2}{\sigma} \right] = 10,667; [\delta] - \left[ \frac{\delta^2}{\sigma} \right] = 5,333$$

$$\left[ \frac{\beta\gamma}{\sigma} \right] = 5,333; \quad \left[ \frac{\beta\delta}{\sigma} \right] = 2,667; \quad \left[ \frac{\gamma\delta}{\sigma} \right] = 2,667$$

$$\left[ \frac{\beta\Sigma}{\sigma} \right] = 1,867; \quad \left[ \frac{\gamma\Sigma}{\sigma} \right] = -1,867; \quad \left[ \frac{\delta\Sigma}{\sigma} \right] = -2,667$$

Нормальные уравнения:

$$10,667 x_1 - 5,333 x_2 - 2,667 x_3 - 4,267 = 0$$

$$10,667 x_2 - 2,667 x_3 - 6,133 = 0$$

$$5,333 x_3 - 2,667 = 0$$

Решение нормальных уравнений:

	10.667	— 5.333	— 2.667	— 4.267
	1.0280	0.7270 <i>n</i>	0.4260 <i>n</i>	0.6301 <i>n</i>
		9.6990 <i>n</i>	9.3980 <i>n</i>	9.6021 <i>n</i>
+ 0.400	10. 667	— 2. 667	+ 6. 133	
+ 0.163	— 2. 667	— 1, 383	— 2, 133	
— 0.087	8. 000	— 4. 000	+ 4. 000	
<u><math>x_1 = +0''.476</math></u>	0.9031	0.6021 <i>n</i>	0.6021	
		9.6990 <i>n</i>	9.6990	
	— 0. 500	5. 333	— 2. 667	
	+ 0. 325	— 0. 667	— 1. 067	
$x_2 = -0''.175$	— 2. 000	+ 2. 000		
$lgx_3 = 9.2430$		2. 667	— 1. 734	
		0.4260	0.2391 <i>n</i>	
		$lgx_3 =$	9.8131 <i>n</i>	
		<u><math>x_3 = +0''.650</math></u>		

Вычисление весовых коэффициентов:

1.0000		0		0	
0.0000		—		—	
8.9720		—		—	
+0.094	0	0	1.00	0	0
+0.047	+0. 500	+0.047	0	+0.094	0
+0.078	+0. 500	+0.110	1.00	+0.094	0
<u><math>q_{1,1} = 0.219</math></u>	9.6990	$q_{1,2} = +0.157$	0.0000	<u><math>q_{1,3} = +0.188</math></u>	—
	8.7959		9.0969		—
					0
+0. 063	0	+0.125	0.0	+0.188	—
+0. 094	+0. 250	+0.095	0.0	<u><math>q_{2,3} = +0.188</math></u>	—
<u><math>q_{1,2} = 0.157</math></u>	+0. 250	<u><math>q_{2,2} = +0.220</math></u>	+0.500		1.000
	+0. 500		+0.500		0.0000
	9.6990		9.6990		9.5740
	9.2730		9.2730		<u><math>q_{3,3} = 0.375</math></u>
<u><math>q_{1,3} = 0.188</math></u>		<u><math>q_{2,3} = 0.190</math></u>			

Результаты на Андрониевом:

1 = 11° 55' 48'' .48	$q_{1,1} = 0,219$	$q_{1,2} = 0,157$	$q_{1,3} = 0,188$
2 = 40 20 24 .82		$q_{2,2} = 0,220$	$q_{2,3} = 0,190$
3 = 60 4 25 .65			$q_{3,3} = 0,375$

Уравновешивание на Донском

$$X^{\circ}_4 = 100^{\circ} 22' 23''.0$$

$$X^{\circ}_5 = 142 \quad 2 \quad 16 \quad .0$$

Группы	Андрониев	$\alpha$	Чортова	$\beta$	Зюзино	$\gamma$	$\sigma$	$\Sigma$
1	0°0'0''.0	6	100°22'23''.5	6	142°2'16''.1	6	—	—
2	0 0 0 .0	3	—	—	17 .3	3	—	—
1	0''.0	6	+0''.5	6	+0''.1	6	18	+3''.6
2	0 .0	3	—	—	+1 .3	3	6	+3 .9
			$[b\beta] =$	+3.0	$[c\gamma] =$	+4.5		

$$[\beta] - \left[ \frac{\beta^2}{\sigma} \right] = 4,00 \qquad [\gamma] - \left[ \frac{\gamma^2}{\sigma} \right] = 5,50$$

$$\left[ \frac{\beta\gamma}{\sigma} \right] = 2,00$$

$$\left[ \frac{\beta\Sigma}{\sigma} \right] = +1,20 \qquad \left[ \frac{\gamma\Sigma}{\sigma} \right] = +3,15$$

Нормальные уравнения:

$$4.00 x_4 - 2.00 x_5 - 1.80 = 0$$

$$5.50 x_5 - 1.35 = 0$$

Решение нормальных уравнений:

4.00	— 2.00	— 1.80
0.6021	0.3010 <i>n</i>	0.2553 <i>n</i>
	9.6989 <i>n</i>	9.6532 <i>n</i>
<hr/>		
+ 0.450	+ 5.500	— 1.350
+ 0.250	— 1.000	— 0.900
<hr/>		
$x_4 = + 0.700$	+ 4.500	— 2.250
	0.6532	0.3522 <i>n</i>
		9.6990 <i>n</i>
		$x_5 = + 0.500$

Вычисление весовых коэффициентов

1.00		0	
0.0000		—	
9.3979		—	
+ 0.250	0.00	0	1.00
+ 0.056	+ 0.500	+ 0.111	—
$q_{1,1} = + 0.306$	+ 0.500	$q_{1,2} = + 0.111$	1.00
	9.6989		0.0000
	9.0457		9.3468
	$q_{1,2} = 0.111$		$q_{2,2} = 0.222$

Результаты на Донском

$$4 = 100^{\circ} 22' 23''.7 \quad q_{1,1} = 0.306 \quad q_{2,2} = 0.222$$

$$5 = 142 \quad 2 \quad 16 \quad .5 \quad q_{1,2} = 0.111$$

Составление условных уравнений:

- 3  $18^{\circ} 13' 40''.50$  6
- 1) Д  $142 \quad 2 \quad 16 \quad .50$  5  $-(2) + (3) + (5) + (6) - 2''.17 = 0$   
 А  $19 \quad 44 \quad 0 \quad .83$  3-2  
179° 59' 57''.83
- А  $48^{\circ} 8' 37''.17$  3-1
- 2) Д  $100 \quad 22 \quad 23 \quad .70$  4  $-(1) + (3) + (4) - (8) + (9) - 6''.33 = 0$   
 Ч  $31 \quad 28 \quad 52 \quad .80$  9-8  
179° 59' 53''.67
- А  $11^{\circ} 55' 48''.48$  1
- 3) Ч  $141 \quad 16 \quad 52 \quad .20$  10-9  $(1) - (9) + (10) - (11) + (12) - 3''.02 = 0$   
 О  $26 \quad 47 \quad 16 \quad .30$  12-11  
179° 59' 56''.98
- А  $40^{\circ} 20' 24''.82$  2
- 4) З  $90 \quad 53 \quad 6 \quad .00$  7-6  $(2) - (6) + (7) + (12) + 5''.12 = 0$   
 О  $48 \quad 46 \quad 34 \quad .30$  12  
180° 0' 5''.12

$$5) \square \text{ ЗАДАЧ } \frac{3Д}{3А} \cdot \frac{3А}{3Ч} \cdot \frac{3Ч}{3Д} = 1 = \frac{\text{Sin } [3-2]}{\text{Sin } 5} \cdot \frac{\text{Sin } 9}{\text{Sin } [2-1]} \cdot \frac{\text{Sin } [5-4]}{\text{Sin } 8}$$

3--2=19° 44' 0".83	9,5284625.6 + 58.6
9=80 39 36 .30	9 9542040.4 + 3.4
5—4=41 39 52 .80	<u>9,8226713.4 + 23.7</u>
	9.3453379.4
5=142° 2' 16".50	9.7889738.5 — 27.0
2—1= 28 24' 36 .34	9.6774054.7 + 38.9
8= 49 10 43 .50	<u>9.8789539.7 + 18.2</u>
	9.3453332.9

$$+ 38,9 (1) - 97,5 (2) + 58,6 (3) - 23,7 (4) + 50,7 (5) - 18,2 (8) + 3,4 (9) + 46,5 = 0$$

$$6) \square \text{ ЗАОЧ } \frac{30}{34} \cdot \frac{34}{3A} \cdot \frac{3A}{30} = \frac{\sin 10}{\sin 11} \cdot \frac{\sin [2-1]}{\sin 9} \cdot \frac{\sin 12}{\sin 2}$$

10. = 221° 56' 28".50	9.8250157.9 + 23.4
2—1. = 28 24 36 .34	9.6774054.7 + 38.9
12. = 48 46 34 .30	<u>9.8762993.5 + 18.4</u>
	9.3787206.1

11. = 21° 59' 18".00	9.5733564.8 + 52.1
9. = 80 39 36 .30	9.9942040.4 + 3.4
2. = 40 20 24 .82	<u>9.8111224.5 + 24.8</u>
	9.3786829.7

$$- 38,9 (1) + 14,1 (2) - 3,4 (9) + 23,4 (10) - 52,1 (11) + 18,4 (12) + 376,4 = 0$$

II. ТАБЛИЦА ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

0.219	0.157	0.188							
0.157	0.220	0.190							
0.188	0.190	0.375							
Андрониев			0.306	0.111					
			0.111	0.222					
			Донской		0.333	0.167			
					0.167	0.333			
			Зюзино		0.333	0.167	0.167		
					0.167	0.333	0.167		
			Чоргова			0.333	0.167		
						0.167	0.333	0.167	
						0.333	0.167		
						0.167	0.333		
						Орехова			

III. ТАБЛИЦА КОЭФФИЦИЕНТОВ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
1 A	-	-1	+1	-	+1	+1	-	-	-	-	-	-
2 B	-1	-	+1	+1	-	-	-	-1	+1	-	-	-
3 C	+1	-	-	-	-	-	-	-	-1	+1	-1	+1
4 D	-	+1	-	-	-	-1	+1	-	-	-	-	+1
5 E	+3.89	-9.75	+5.86	-2.37	+5.07	-	-	-1.82	+0.34	-	-	-
6 F	-3.89	+1.41	-	-	-	-	-	-	-0.34	+2.34	-5.21	+1.84
	Андрониев			Донской		Зюзино		Чортова			Орехово	

IV. ТАБЛИЦА КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЙ, ВЫРАЖАЮЩИХ ПОПРАВКИ ЧРЕЗ КОРРЕЛАТЫ

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
A <sup>o</sup>	+0.031	-0.030	+0.185	+0.111	+0.222	+0.333	+0.167	-	-	-	-
B <sup>o</sup>	-0.031	+0.033	+0.187	+0.306	+0.111	-	-	-0.166	+0.166	0.000	-
C <sup>o</sup>	+0.219	+0.157	+0.188	-	-	-	-	0.00	-0.166	+0.166	-0.166
D <sup>o</sup>	+0.157	+0.220	+0.190	-	-	-0.166	+0.166	-	-	-	+0.167
E <sup>o</sup>	+0.422	-0.421	+1.076	-0.163	+0.862	-	-	-0.549	-0.191	-0.247	-
F <sup>o</sup>	-0.631	-0.300	-0.463	-	-	-	-	+0.333	+0.278	+0.722	-1.428
Поправка	+5.511	+3.685	+4.173	+6.309	-1.291	+2.971	-4.541	-4.358	-3.001	-0.745	+3.508

Пояснение. Коэффициенты отмеченные звездочкой \* вычислены так:

$$\begin{aligned}
 -0.549 &= -1.82 \times 0,333 - 0,34 \times 0,167 + 0,000 \times 0,167 \\
 -0.191 &= -1.82 \times 0,167 - 0,34 \times 0,333 + 0,000 \times 0,167 \\
 -0.247 &= -1.82 \times 0,167 - 0,34 \times 0,167 + 0,000 \times 0,333
 \end{aligned}$$

V. ТАБЛИЦА НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОРРЕЛАТ

	Ak <sub>1</sub>	Bk <sub>2</sub>	Ck <sub>3</sub>	Dk <sub>4</sub>	Ek <sub>5</sub>	Fk <sub>6</sub>	f	S
A	+0.770	+0.265	+0.031	-0.196	+2.360	-0.163	-2.17	+0.897
B		+0.856	-0.197	+0.033	+0.849	+0.112	-6.33	-4.412
C			+0.885	+0.323	+0.366	+0.984	-3.02	-0.628
D				+0.885	-0.421	-0.557	+5.12	+5.187
E					+17.743	-2.749	+4.65	+22.798
F						+10.5936	+37.64	+45.861



При составлении таблицы V-ой первая строчка таблицы III помножалась на все строчки таблицы IV, затем вторая строчка таблицы III помножалась на вторую и *следующие* строчки таблицы IV, третья строчка таблицы III помножалась на третью и *следующие* строчки таблицы IV и т. д. Необходимо конечно при этих вычислениях использовать контроли:

$$[A_i B_i] = [A_i^0 B_i]$$

$$[C_i D_i] = [C_i^0 D_i] \text{ и т. д.}$$

Решение нормальных ур-ний привело к такой системе значений коррелат:

$$k_1 = -3.140; \quad k_2 = +19.997; \quad k_3 = +27.597; \quad k_4 = -24.196;$$

$$k_5 = -3.261; \quad k_6 = -8.494;$$

Вычисленные с этими коррелатами значения поправок приведены в последней строчке таблицы IV. Условные ур-ния удовлетворяются этими значениями поправок углов достаточно хорошо.

## ГЛАВА XIII

### Нивелирование высокой точности.

**70. Методы нивелирования высокой точности.** При нивелировках высокой точности во всех государствах принято *нивелирование из середины* при равных или почти равных расстояниях нивеллира от рейки. Порядок наблюдений для получения „*взгляда*“ по рейке существенно различен в разных государствах.

Во Франции при получении взгляда уровень нивеллира строго приводится на середину, а затем делается отсчет по *средней* горизонтальной нити трубы, оценивая на глаз промежутки между этой нитью и ближайшими к ней младшим и старшим штрихами рейки.

В Германии горизонтальная нить трубы—или вернее середина двух близких друг к другу горизонтальных нитей—*наводится* на два штриха рейки, ближайšie к горизонту трубы и расположенные—один выше, а другой ниже этого горизонта; одновременно с этими наведениями делают отсчеты по концам пузырька уровня, соединенного неизменно с трубой,—для определения наклоности оси уровня в момент наведения трубы, и введения затем поправки за эту наклонность, в отсчет по нити трубы, равный конечно *номеру* визировавшегося штриха.

В России пузырек уровня ставится перед отсчетом рейки почти в среднее положение, затем следуют отсчеты уровня, отсчет рейки по (трем) нитям трубы, причем на глаз оценивается величина промежутков между нитью и ближайшими к ней штрихами; наконец в отсчеты по нитям трубы вводится поправка за уровень.

В Австрии уровень строго приводится в горизонтальное положение, а затем *подвижная* горизонтальная нить окулярного микрометра *наводится* на ближайšie к горизонту трубы младший и старший штрихи с отсчетами по барабану микрометра и записью номеров штрихов.

Аналогичный порядок наблюдения, как в Австрии, может осуществляться при помощи *нивеллиров Цейсса* с плоско-параллельным стеклом перед объективом нивеллира; установив пузырек уровня на середину, особым рычагом,двигающим плоско-параллельное стекло и снабженным счетным барабаном добиваются совмещения изображения ближайшего к горизонту трубы штриха

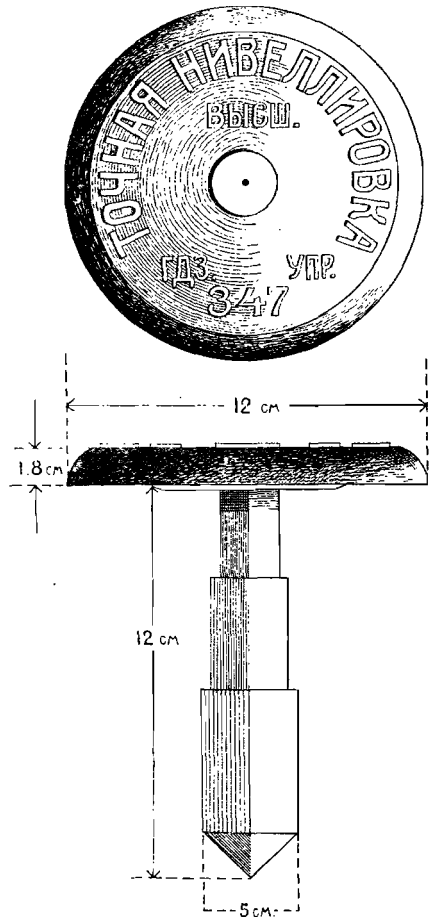
рейки с горизонтальной нитью трубы, после чего происходит отсчет по барабану рычага; за этот отсчет барабана потом вводят поправку в отсчет по нити трубы.

Кратко описанные методы получения взгляда выражаются так:

- I. *Французский метод*: установка уровня, отсчет по нити трубы.
- II. *Германский метод*: установка нити трубы, отсчет уровня.
- III. *Русский метод*: приближенная установка уровня, отсчет уровня и отсчет трубы.
- IV. *Австрийский метод*: установка уровня, установка нити трубы, отсчет по микрометрам смещающим или нить трубы из нормального положения, или изображение штриха рейки.

**71. Знаки нивелирования высокой точности.** Знаки нивелирования высокой точности разделяются на *постоянные* и *временные*. *Постоянные* знаки в свою очередь подразделяются на *марки*, *стенные реперы* и *полевые реперы*.

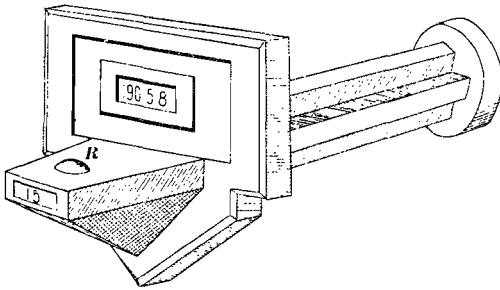
В России употребляют марки, изображенные на черт. 163; *марка*, отлитая из чугуна, представляет собою диск, диаметром в 12 см, с приливом, имеющим два уступа. В центре диска имеется дырочка диаметром около  $\frac{3}{4}$  миллиметра: центр дырочки является точкой, высота которой определяется из нивелировки. В дырочку при привязке к марке вставляется горизонтально особый стержень, на который подвешивается небольшая реечка. Такие марки устанавливаются на цементе в стенах солидных каменных зданий, уже не подвергающихся осадке; обычно для нивелирных марок используют водоканчки на станциях железных дорог, церкви, каменные устои мостов. Установка марки должна быть произведена по крайней мере за сутки до ее наблюдения; при закладке, до заполнения цементом, необходимо самым тщательным образом промыть углубление в стене, выбитое для закладки марки, а по заполнении этого углубления цементом (жидким раствором) и по вставке марки—строго следить в течение нескольких часов, чтобы никто, даже слегка, не потревожил марки. Высота марки над почвой примерно около 1,6 м.



Черт. 163.

В Германии и Франции предпочитают маркам *стенные реперы*, на которые рейка ставится при привязке к реперу. Черт. 164 изображает французский репер, отливаемый из бронзы. Высшая точка полусферы  $R_1'$ —является определяемой из нивелировки точкой репера.

*Полевые реперы* приходится закладывать в том случае, когда путь нивелировки не совпадает с железнодорожной линией, а идет например вдоль реки или вдоль грунтовой дороги. Здесь применяют самые разнообразные конструкции, но необходимо помнить, что глубина заложения полевого репера не должна быть менее 2 м.



Черт. 164.

Черт. 165 изображает тип репера, закладывавшегося при нивелировках экспедиции по изучению верховьев русских рек: железная труба, загнута под прямым углом устанавливалась на два большие плоские камня, а затем зацементировывалась в кирпичной кладке. В верхнем конце трубы винтами и цементом закреплялся болт, сферическая шляпка которого и служила для постановки рейки.

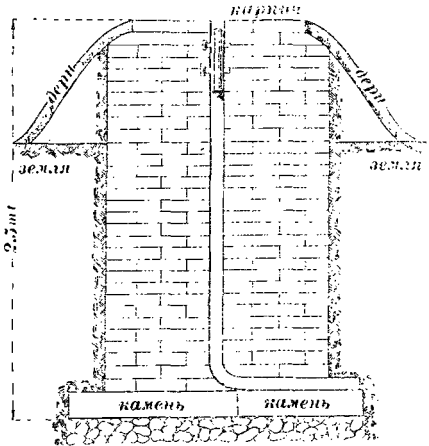
Постоянные знаки нивелировки располагаются примерно через 6 км друг от друга.

Временные знаки следуют друг от друга через 2 км и служат для обозначения конца дневной работы; временными знаками могут служить точки, избранные на цоколях зданий, на дорожных каменных столбах или специально заложенные реперы простого нивелирования.

**72. Инструменты точного нивелирования — Нивеллиры.** При нивелировании высокой точности расстояние от нивелира до рейки принимается от 50 до 60 м и при таком расстоянии ошибка „взгляда“ не должна превышать 0,5 мм. Соответственно этому, труба нивелира должна иметь объектив около 40 мм, фокусное расстояние около 40 см и увеличение от 35 до 40; уровень при нивелире должен иметь цену деления от 3" до 5". Конструкции нивелиров и реек в разных государствах различны, в зависимости от принятого в государстве метода нивелирования.

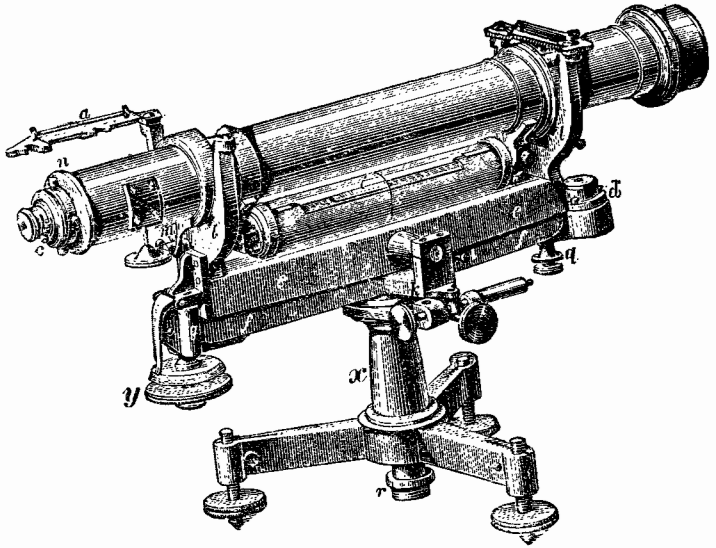
В Германии и России нивелирование ведется исключительно нивеллирами, в которых уровень непосредственно связан с трубой (уровень под трубой).

На чертеже 166 изображен нивеллир *Гильдебранда*, принятый в последнее время для точных нивелировок в Германии и в России: труба с диаметром объектива в 41 мм, с фокусным расстоянием 44 см и с увеличением в 40 раз, имеет *стальные* цапфы, которыми и вкладывается в лагерь подставок. Уровень с ценой деления от 3" до 5", заключен во внешнюю стеклянную трубку *h h* и снабжен воздушной камерой; подпись делений на уровне в одну сторону от 0 до 40 или до 50-ти; уровень соединен с трубой непосредственно: относительное расположение оси уровня и трубы может изменяться лишь при помощи исправительных винтов при одном конце оправы уровня. Подставки трубы *l, l* составляют одно целое с массивным



Черт. 165.

коромыслом  $ee$ , с которым одно целое составляет и горизонтальная ось  $i$ . Нижняя пластина  $ff$  составляет одно целое с вертикальной конической осью инструмента, вкладываемой в коническую втулку колонны  $x$ . Пластина  $ff$  в средней части имеет приливы  $k$ , которые кончатся лагерами для цапф горизонтальной оси  $i$ . Через один конец  $g$  пластины  $ff$  проходит тонконарезанный элевационный винт  $y$ , шляпка которого имеет барабан с делениями; концом своим элевационный винт упирается в коромысло  $ee$ ; работа винта регулируется пружиной  $q$ , вложенной в укрепленный в противоположном конце пластины  $ff$  цилиндр. Круглый уровень  $d$  служит для быстрого приведения инструмента в горизонтальное положение. Положение вертикальной оси во втулке  $x$  регулируется нижним винтом  $r$ . При одной из подставок трубы имеется упор  $m$ , в который должен упираться прилив трубы, чтобы вертикальная нить трубы приняла правильное положение.



Черт. 166.

Для исполнения таким нивеллиром нивелировки по германскому методу, необходимо иметь сетку нитей трубы из одной вертикальной и двух близких горизонтальных нитей; для этого же метода совершенно необходим элевационный винт  $y$ .

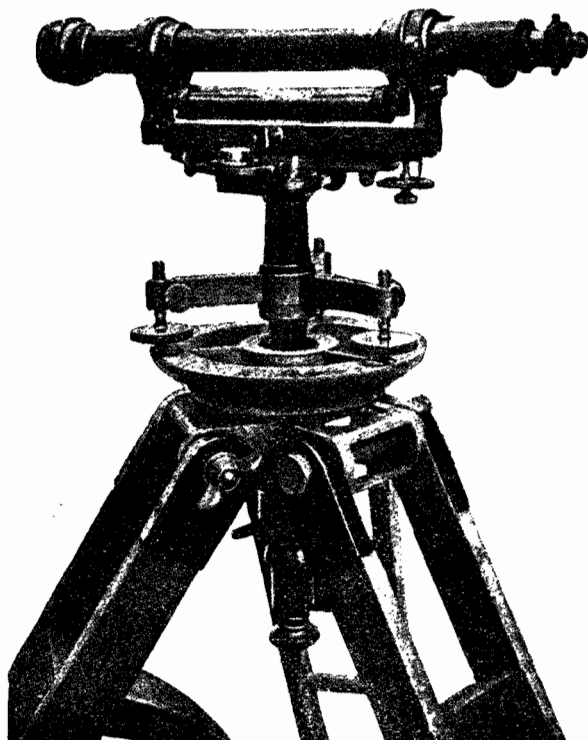
Для исполнения таким нивеллиром нивелировки по русскому методу необходимо иметь сетку нитей трубы из одной вертикальной и трех горизонтальных нитей с дальномерным коэффициентом 150 или 175; элевационный винт при русском методе можно считать излишним, и поэтому, чтобы обеспечить большую устойчивость трубы и уровня при наблюдениях следует в русских работах конструкцию несколько изменить, упростив ее упрощением элевационного винта  $y$ , пружины  $q$  и горизонтальной оси  $i$ .

До последних лет Корпус Военных Топографов употреблял нивеллиры такого упрощенного устройства -- все остальное в общем почти совпадало с конструкцией изображенной на черт. 166.

На черт. 167 изображен нивеллир Гильдебранда, которым в самые последние годы работает Германское Управление Государственных съемок (*Landesaufnahme*).

На чертеже 168 изображен нивеллир, которым работают во Франции при исполнении точного нивелирования. Особенностью устройства является во первых то, что уровень ножками ставится на цапфы трубы сверху ее и может на этих цапфах переставляться; во вторых при уровне имеется особое приспособление в виде двух призм  $P$  и  $P_1$  и двух призм, заключенных в футляре  $ff$ ; при помощи этого приспособления особенно точно выполняется установка пузырька уровня на средину.

На чертеже 169 в разрезе показано расположение призм  $P$  и  $P_1$ ,  $f$  и  $f_1$  а внизу чертежа дан тот вид пузырька уровня, который наблюдается при рассматривании в трубочку  $q$ . Очевидно работа призм сводится к сближению концов пузырька, к устранению влияния параллакса при его установке и к возможности *одновременно*, наблюдая правым глазом положение нити трубы на рейке чрез окуляр  $O$ , точно устанавливать уровень *не сходя с места* и рассматривая концы пузырька левым глазом чрез трубочку  $q$ . Сближение концов пузырька и отсутствие параллакса позволяют замечать малейшую несимметрию концов пузырька относительно одноименных штрихов шкалы уровня (II и II); выпуклость катетов в призмах  $P$  и  $f$  делают совершенно равными для глаза промежутки между штрихами шкалы в левой и правой ее половине при рассматривании их в трубочку  $q$ . Поэтому установка уровня на средину в французском нивелире может быть выполнена с значительно повышенной точностью.

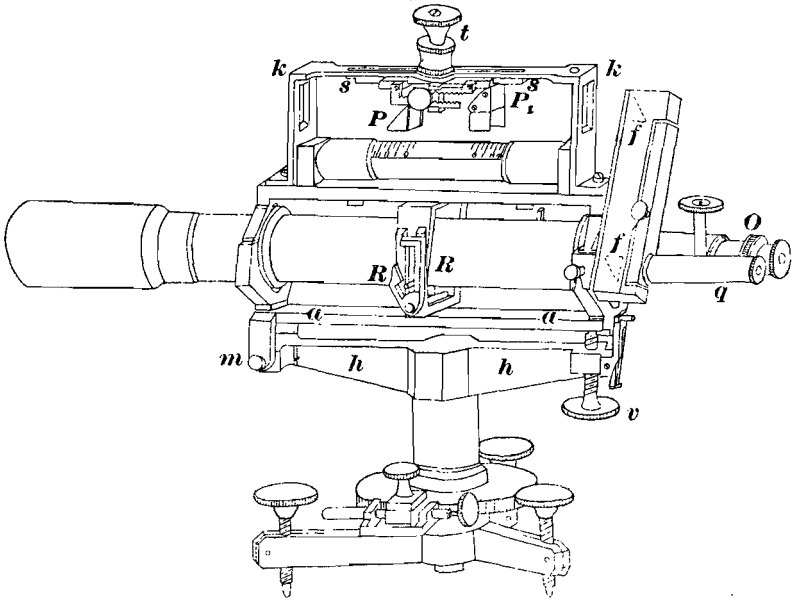


Черт. 167.

В точной нивелировке, при равенстве расстояний нивелира от задней и передней рейки, особенно важно *однообразие* установки уровня при визировании вперед и назад; такое однообразие в французском нивелире может быть достигнуто с чрезвычайной точностью, именно с ошибкой  $\pm 0''.2$ . Посредством винта  $t$  призмы  $P$  и  $P_1$  могут скользить по салазкам  $ss$ , устроенным в верхней стенке камеры  $kk$ ; следовательно посредством винта  $t$  можно устанавливать призмы для разных длин пузырька. Давая разные положения рычагу при застёжке  $R$  можно: или соединить уровень с трубой так, что его уже нельзя приподнять над цапфами; или останется возможность переложить уровень на цапфах, но без того, чтобы его снять; или сделается возможным полное отделение уровня от трубы. Одна из подставок трубы охватывает с двух сторон линейку  $hh$ , составляющую одно целое с вертикальной конической осью нивелира; чрез концы этих охватов проходят винты  $m$ , упирающиеся в линейку  $hh$  и образующие острями своих концов горизонтальную ось, около которой труба и уровень могут вращаться под действием элевационного винта  $v$ . Этот винт  $v$  проходит чрез противоположный конец линейки  $hh$  и упирается концом в пластину  $aa$ , составляющую одно целое с подставками трубы. Наконец, во французском нивелире имеется еще ряд шпильков и упоров, на которых не будем останавливаться, но которые имеют назначением *автоматически* во время работы не допускать непредусмотренного расположения уровня и трубы.

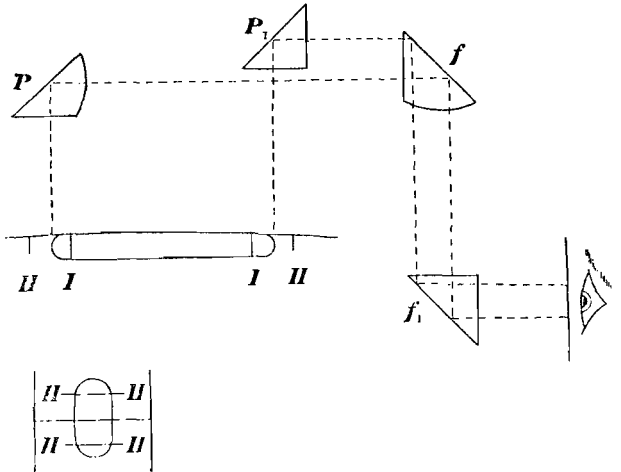
В точной нивелировке, при равенстве расстояний нивелира от задней и передней рейки, особенно важно *однообразие* установки уровня при

*Австрийский нивеллир* имеет уровень, соединенный с трубой, но существенно отличается в деталях от устройства германского нивеллира и кроме того снабжается *окулярным микрометром*. Надлежит в точном нивел-



Черт. 168.

лире иметь значительную длину рычагов дрейфуса, несущего подъемные винты; штатив нивеллира должен иметь ножки значительной длины, чтобы можно было-бы широко их расставить (это соблюдается вполне лишь в нивеллирах американских). Необходимо так изготовлять точный нивеллир, чтобы температурные перемены не влияли-бы на относительное расположение трубы и уровня. Для этого французы употребляют отжиг металла, из которого изготавлиется инструмент. С этою-же целью американцы изготовляют точный нивеллир из сплава  $66\frac{2}{3}\%$  железа и  $33\frac{1}{3}\%$  никкеля, имеющего малый коэффициент расширения  $\left(\frac{1}{250000}\right)$ , и покрывают весь инструмент толстым слоем масляной краски голубовато-серого цвета, составленной по особому „японскому“ рецепту. Опыт показывает, что изменение температуры на  $1^\circ$  Цельсия может вызвать перемену в угле между осью уровня и осью трубы в пределах от  $0''.4$  до  $1''$ , если инструмент изготовлен из меди, что может повести к систематическому накоплению ошибок до  $0.5$  мм на километр.



Черт. 169.

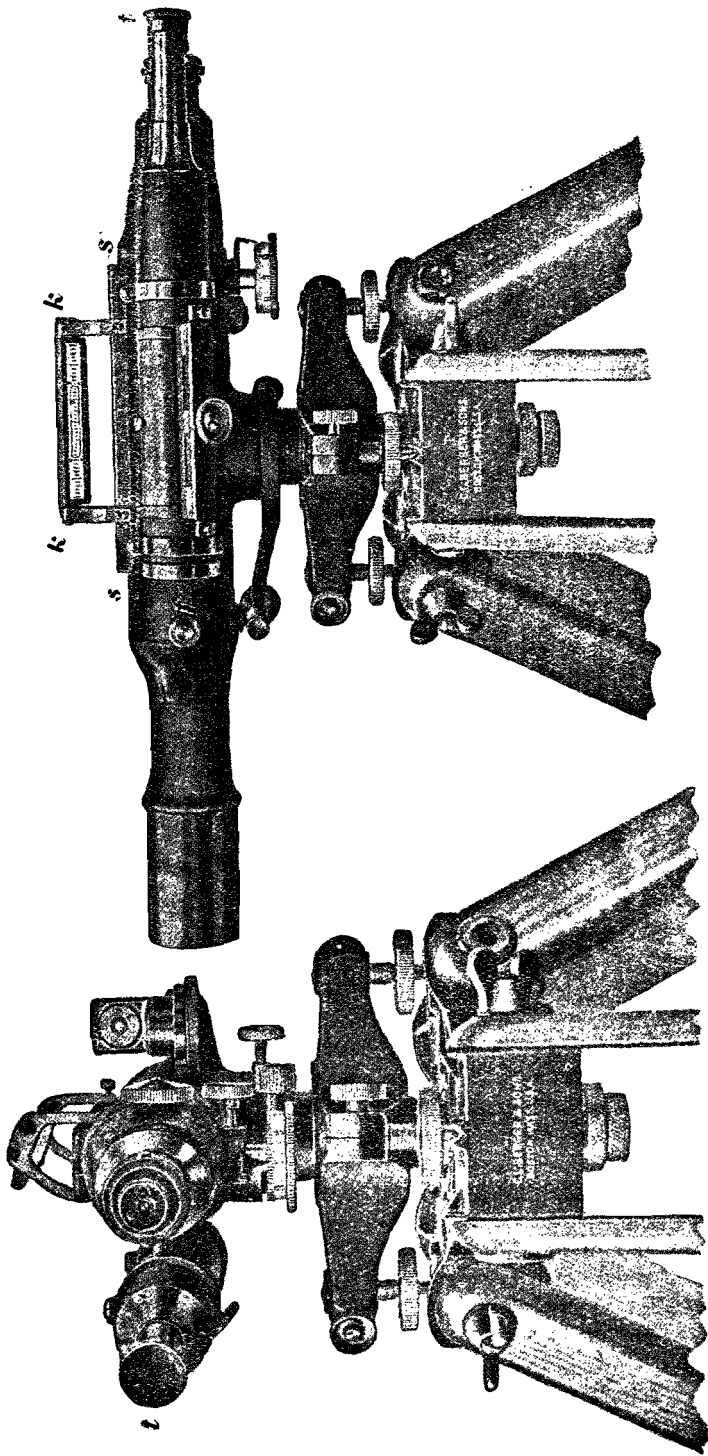
*Американский нивеллир*—*Coast and Geodetic Survey Precise Level* [точный нивеллир Береговой и Геодезической Службы] изображен на черт. 170: к вертикальной оси инструмента прикреплен полый цилиндр *ss*, диаметр которого несколько более диаметра трубы; внутрь этого цилиндра вложена вместе с уровнем, труба нивеллира, причем два винта *f*, проходящие чрез стенки цилиндра *ss*, упираются своими остриями в углубления в теле трубы; линия этих остриев образует таким образом горизонтальную ось, около которой труба вращается под действием элевационного винта; конец этого винта служит третьей точкой опоры той части трубы, которая заключена в цилиндр *ss*. Вверху трубы, вдоль ее, прикреплен непосредственно к стенке трубы уровень с исправительными винтами обычного устройства. В том месте, где приходится передний конец уровня, в стенке трубы имеется уступ вниз, от которого верхняя образующая трубы идет прямолинейно к окуляру, по слегка наклонной к визирной оси трубы линии. Таким образом уровень помещается в углублении верхней стенки трубы; над уровнем кожух *ss* несколько повышается. Необходимые зазоры между трубой и цилиндром *ss*—закрываются кожей. В верхней части цилиндра *ss* — над уровнем — имеется прорез, закрытый зеркальным стеклом. Над этим прорезом находится зеркало *kk*, имеющее короткую сторону наклоненную к горизонту под углом в  $45^\circ$ . Отраженные от зеркала лучи падают на две прямоугольные стеклянные призмы, заключенные в трубы *t*; эти призмы оборачивают в сторону окуляра лучи света, падающие на них от одного и другого конца пузырька уровня.

Таким образом, как и в французском нивеллире Бертелеми, наблюдатель видит в трубку *t* сближенные изображения концов пузырька, и, действуя элевационным винтом, приводит уровень строго на средину в момент взятия отсчета по рейке. Очевидно, что этот американский нивеллир относится к типу *лучих* нивеллиров и понятно, что для высоко-точного нивеллирования такой тип выбран вполне правильно. С другой стороны труба и уровень отлично защищены от внешних влияний, а *однообразие* установки уровня на средину достигается в высокой степени точно. Особая кремальера позволяет устанавливать призмы соответственно длине пузырька. Особый рычаг закрепляет трубу в цилиндре *ss* при переносках инструмента. Штативы американских нивеллиров очень велики и массивны. Это вполне отвечает требованиям полной устойчивости установки инструмента на станции — так как в такой работе не приходится ставить на первое место портативность.

Надлежит при работе держать ножки штатива в чехле, предохраняющем от одностороннего нагревания штатива солнцем при работе на данной станции.

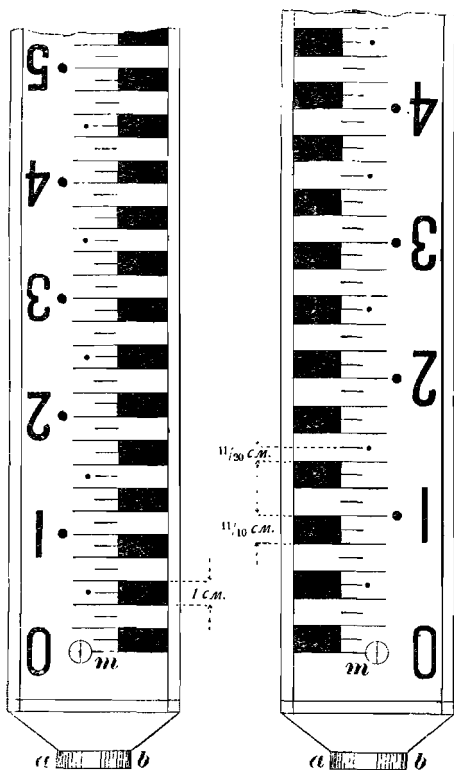
Соединение уровня с трубой так, как это принято в России, Германии и Америке, казалось-бы, всего лучше гарантирует полное соответствие между перемещениями трубы в вертикальной плоскости и перемещениями пузырька уровня, от какой-бы причины они ни происходили-бы. Однако, французские геодезисты (*Гулье, Даллеман*) склонны к утверждению, что жесткая связь большого сравнительно массива трубы с уровнем делает то, что незначительные деформации трубы, обусловленные изменением температуры, вызывают заметные деформации в стеклянной трубке уровня. Поэтому они предпочитают *свободную* связь уровня с трубой, — но такую, в которой обеспечивалась бы всегда полное однообразие контакта ножек уровня с цапфами трубы. Опыты, произведенные *Гулье и Даллеманом*, убедили их в том, что эти оба требования превосходно удовлетворяются в французском нивеллире вышеописанной конструкции.

**73. Инструменты точного нивеллирования. -- Рейки и приборы для определения их длины.** В России рейки точного нивеллирования





(см. черт. 171) изготовляют из хорошо-выдержанного кленового или соснового дерева — в виде бруска с поперечным сечением  $4 \times 6$  см, длину несколько более 3-х м, и с делениями, нанесенными с двух сторон: на одной стороне, белой и черной краской нанесены сантиметры и полусантиметры, на другой — белой и красной краской — или двухсотые доли сажени и их половины, или подраз-



Черт. 171

деления чрез  $\frac{11}{10}$  см и в половину этого размера.

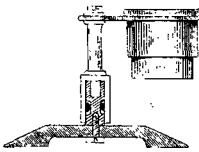
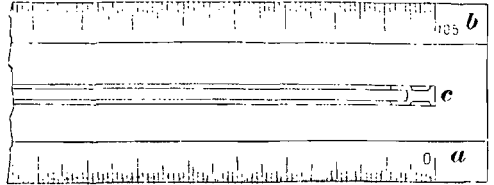
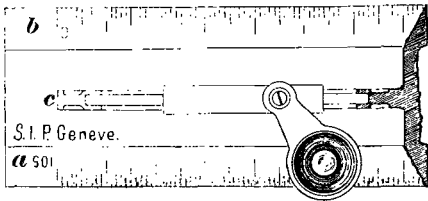
К одной из боковых граней рейки привинчивается съемный круглый уровень, по которому рейка ставится вертикально в момент отсчитывания; на другой боковой грани имеется приспособление (крючек вверх и коническое острие в середине) для отвеса, при помощи которого поверяется уровень при рейке. Нижний конец каждой рейки имеет оправу с плоской головкой и надетым на нее цилиндром *ab*, которым рейка ставится на выпуклую, сферическую поверхность шипа нивелирного башмака. Рейки должны иметь прочную окраску, хорошо держащую нанесенные на них штрихи и защищающую дерево рейки от атмосферных влияний.

Штрихи на рейках наносятся все делительной машиной, весьма тщательно. Шашки на рейке, приходящиеся между ее штрихами, служат для облегчения счета целых сантиметров или вообще целых делений; при оценке долей деления, по нити трубы интерполируют на глаз между штрихами рейки. Деления подписываются или дециметровые на черной стороне (от 0 до 30) и чрез промежутки в 11 см на красной стороне (от 0 до 27); или полудециметровые на черной стороне (от 0 до 60) и чрез промежутки в 5,5 см на красной стороне (от 0 до 54); в первом случае результат нивелировки будет выражен в метрах, а во втором — в полуметрах. Рейки имеют номера: в каждой паре один номер четный и другой — нечетный; на нечетной рейке нуль черной стороны ставится на 10 см выше нуля красной. На каждой стороне рейки врезают марки *m*, в виде металлического кружка, на верхней посеребренной поверхности которого имеются два тонко и очень аккуратно нарезанных, перпендикулярно друг к другу, штриха. Эти марки служат для выяснения изменений в длине рейки во время исполнения нивелирования. На каждой стороне рейки имеется или четыре или три контрольных марки, отстоящих друг от друга на один метр: при четырех марках нижняя совпадает с нулем рейки; при трех марках нижняя — выше нуля на полметра.

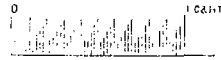
При работе рейки устанавливают на массивный башмак из ковального железа, весом около 5 кг; такой башмак изображен внизу чертежа 175.

Для исследования длины реек служит так называемая „женевская

линейка“, изображенная на черт. 172. Длина этой линейки несколько более метра; она имеет скошенные ребра *aa* и *bb*; на плоскости ребра *aa* длинные штрихи следуют чрез миллиметр, а каждый миллиметр подразделен, на протяжении всей длины линейки, чрез 0,2 миллиметра — причем в пределах каждого миллиметра штрихи постепенно укорачиваются; на ребре *b* нане-



деление = 0,2mm



Черт. 172

сены штрихи только чрез миллиметр; выступ *cc* имеет сверху желобок, по которому передвигается рукоятка лупы, служащей для отсчитывания линейки.

Полное исследование рейки выполняется только перед началом и в конце полевой кампании; оно состоит:

- 1) в тщательном промере женеvской линейкой расстояний между штрихами марок *m*;
- 2) в определении *общей* длины каждой стороны рейки, т. е. общей длины 30-ти дециметровых делений черной стороны и общей длины 27 или 28 делений (по 11 см каждое) красной стороны;
- 3) в тщательном определении поправок всех дециметровых штрихов на черной стороне рейки и всех 27 или 28 штрихов на красной стороне с подписями 0, 1, 2, . . . 27, 28 (т. е. отстоящих друг от друга на 11 см, или на  $\frac{1}{20}$  сажени).

Во время полевой работы надлежит один раз в неделю вымерять женеvской линейкой расстояния между марками — что, путем вывода изменений в этих расстояниях по сравнению с первоначальным и конечным значением этих расстояний, позволит установить длину рейки и ее частей на каждый день работы. Последней инструкцией для нивелировок Высшего Геодезического Управления такие исследования длин реек в период самой нивелировки предписывается исполнять не менее двух раз в месяц.

В приведенном примере работу вели два наблюдателя: после укладки линейки параллельно продольной оси рейки так, чтобы по ней можно было взять отсчеты по штрихам рейки 0, 1, 2 . . . 10, наблюдатель *A* совместил нулевой штрих линейки с некоторым штрихом рейки, лежащим за десяти дециметровым, после чего наблюдатель *B*, двигаясь от нуля рейки сделал отсчеты по линейке при штрихах рейки 0, 1, 2, 3, . . . 10, (первые записи в третьей графе), наблюдатель-же *A* следил за неподвижностью линейки; затем следовал небольшой сдвиг линейки, совмещение наблюдателем *A*

ПРИМЕР ИССЛЕДОВАНИЯ ДЕЦИМЕТРОВ ЧЕРНОЙ РЕЙКИ

Общая длина рейки 3002<sup>mm</sup>.70

Штрихи рейки	Отсчеты		Промежу- ток	Среднее значение промежутка	Расстояние от нуля	Поправка за линейку и температуру	Истинная длина	Температу- ра линейки
	Целые милли- метры	Доли в делениях линейки						
0	1069	2.0	( <i>a</i> ) 0.40	100.08				19°.3
	1067	1.6	( <i>b</i> ) 0.32	06				
	1065	4.5	( <i>c</i> ) 0.90	04		- 0.015		
	1064	0.0	( <i>d</i> ) 0.00	04	100.055	100.055	+ 0.006	
1	939	1.6	( <i>e</i> ) 0.32	100.14				
	937	1.3	( <i>f</i> ) 0.26	12				
	935	4.3	( <i>g</i> ) 0.86	14		- 0.031		
	933	4.8	( <i>h</i> ) 0.96	14	100.135	200.190	+ 0.012	
2	839	0.9	( <i>i</i> ) 0.18	100.14				
	837	0.7	( <i>j</i> ) 0.14	12				
	835	3.6	( <i>k</i> ) 0.72	14		- 0.046		
	833	4.1	( <i>l</i> ) 0.82	14	100.135	300.325	+ 0.017	
3	739	0.6	0.12	100.06				
	737	0.4	0.08	06				
	735	3.3	0.66	06		- 0.062		
	733	3.8	0.76	06	100.060	400.385	+ 0.023	
4	639	0.2	0.04	100.08				
	637	0.0	0.00	08				
	635	2.8	0.56	10		- 0.077		
	633	3.6	0.72	04	100.075	500.460	+ 0.022	
5	538	4.9	0.98	100.06				
	536	4.7	0.94	06				
	535	2.6	0.52	04		- 0.093		
	534	3.3	0.66	06	100.055	600.515	+ 0.034	
6	438	4.9	0.98	100.00				
	436	4.8	0.96	99.98				
	435	2.6	0.52	100.00		- 0.108		
	434	3.2	0.64	02	100.00	700.515	+ 0.039	

Первая часть рейки

и г. д.

Уравнение линейки  $l = 999^{mm}.853 + 0^{mm}.017 (t - 16)$ .

штриха линейки, близкого к нулевому, с прежним штрихом рейки, затем были сделаны вторичные отсчеты линейки наблюдателем В, но в обратном порядке от 10-го штриха к нулевому (вторые записи в третьей графе); после этого наблюдатели переменялись местами и ролями и выполнили еще два ряда отсчитываний штрихов рейки. Перед переменной местами полезно переложить линейку на рейке на  $180^\circ$ , если только это возможно\*). Пятая графа журнала получается вычитанием из числа  $a$  числа  $b$ , из числа  $c$  числа  $d$ , из числа  $e$  числа  $f$  и т. д. Поправки штрихов для нашего примера будут:

Штрих	Поправки	Разности: ( $\Delta$ )
0	0.000	
1	+0.046	+0.046
2	+0.171	+0.125
3	+0.296	+0.125
4	+0.346	+0.050
5	+0.411	+0.065
6	+0.456	+0.045
7	+0.546	+0.090
8	+0.626	+0.080
9	+0.716	+0.090
10	+0.806	+0.090

Для этих поправок строится график в масштабе, позволяющем оценивать поправки до 0.01 мм. Среднее значение разности  $\Delta$  между поправками смежных штрихов для нашей рейки оказывается равным +0.090, что вполне согласуется с результатом определения общей длины тридцати ее делений.

Если *уклонения отдельных  $\Delta$  от среднего значения, выводимого из 30-ти значений  $\Delta$ , не превышают нигде  $\pm 0.2$  мм*, то деления рейки считаются *правильными* и впоследствии в результаты нивелировки вводят поправки, пренебрегая *случайными* ошибками в положении штрихов рейки, а учитывая лишь *неверность общей длины* рейки, т. е. эти поправки рассчитывают пропорционально величине отсчета по рейке (в нашем примере каждый метр, отсчитанный по рейке, получает поправку +0.90 мм).

Если случайные отклонения величин  $\Delta$  от среднего значения достигают для многих мест рейки величин, заметно превышающих  $\pm 0.2$  мм, то или такая рейка забраковывается для работы, (что принято в Германии) или график поправок разбивается на две или три части: в каждой части подбирается к кривой графика такая прямая, от которой точки графика отклоня-

лись-бы не более  $\pm 0.14$  мм  $\left( \pm \frac{0.2}{\sqrt{2}} \right)$ , допуская однако отклонение одной-двух точек в каждой части и на большую величину. Если разбивка графика на две или три части не приведет к отклонениям от прямых, меньшим  $\pm 0.14$  мм, то рейка забраковывается. Правила введения поправок по графику, разбитому на части, указаны ниже.

\*) Препятствием к перекладке может служить недостаточная ширина рейки, а также выступы контрольных марок.

Что касается исследований делений на красной стороне рейки, то они исполняются в общем таким-же образом, как и исследования делений черной стороны, но при вычислении поправок штрихов *номинальные* промежутки рейки переводятся из  $\frac{11}{10}$  сантиметра в сантиметры, или из сажени в метры,

и следовательно эти поправки будут выражены в миллиметрах. Так например, при исследовании красной стороны рейки, разделенной на двухсотые доли сажени, в графе 9-ой журнала, соответствующей такой-же графе журнала при исследовании черной стороны рейки, получили в миллиметрах длину отрезков рейки от нуля до штрихов, подписанных 1, 2, 3, 4 . . . 10. Поэтому в

графе 10-й приведены значения в миллиметрах  $\frac{1}{20}, \frac{2}{20}, \frac{3}{20} \dots \frac{10}{20}$  сажени,

вычисленные пользуясь установленным соотношением сажени к метру.

Следовательно поправки будут равны разности 9-ой и 10-ой графы:

	9-ая	10-ая	
	Истинный промежуток	Номинальн. промежуток	
0	0.000	0.000	Первая часть рейки
1	106.57	106.681	
2	213.36	213.362	
3	320.27	320.043	
4	426.86	426.724	
5	533.39	533.405	
6	640.16	640.086	
7	746.94	746.767	
8	853.64	853.448	
9	960.47	960.129	
10	1067.31	1066.810	

Штрихи	Поправки	Разности Δ
0	0.000	-0.111
1	-0.111	+0.109
2	-0.002	+0.229
3	+0.227	+0.091
4	+0.136	-0.151
5	-0.015	-0.055
6	-0.070	+0.243
7	+0.173	+0.019
8	+0.192	+0.149
9	+0.341	+0.159
10	+0.500	+0.100
11	+0.600	+0.100
12	+0.700	+0.105
13	+0.805	+0.100
14	+0.905	

Для красной стороны строится такой-же график поправок, как и для черной. Из полного исследования красной стороны нашей рейки оказывается, что среднее значение Δ (для красной стороны) равно +0.06.

Если отдельные величины Δ отличаются от этого среднего значения менее, чем на  $\pm 0.2$  мм, то при обработке результатов „красной“ нивелировки можно поступать двояко: 1) или перевести результат из номинальных сажени, полученных из отсчетов по красной рейке, в миллиметры, и затем на каждые 1000 миллиметров ввести поправку  $+0.60 - \frac{0.60}{15} = +0.56$  мм

( $\frac{1}{15}$  — различие между размером деления на черной и красной стороне);

2) или-же, зная размер 30-ти делений черной стороны и 28-ми делений красной — установить коэффициент  $k$  для перевода красной шкалы в черную, и сделав такой перевод для результата красной нивеллировки, взять среднее из этого результата и результата черной нивеллировки; очевидно, это среднее будет выражено в *номинальных* делениях черной стороны почему в него придется лишь ввести поправку, упомянутую выше, именно для нашего примера  $-0.90$  мм на каждый метр.

В нашем примере:

$$300 \text{ делений черной стороны} = 3002.70 \text{ мм}$$

$$280 \text{ ,, красной ,,} = 2988.75 \text{ мм *)}$$

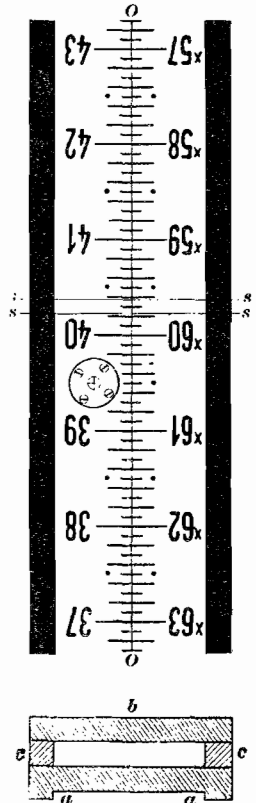
Отсюда:

$$k = \frac{2988.75 \times 30}{3002.70 \times 28} = \frac{896625}{840756} = 1.066451$$

Если случайные уклонения величин  $\Delta$  от среднего значения для многих мест рейки превышают  $\pm 0.2$  мм, то график поправок разбивают на две или три части, пытаясь в каждой такой части подобрать прямую, от которой точки графика уклонялись-бы не более  $\pm 0.14$  мм; однако при этом допускают уклонение одной-двух точек в каждой части и на большую величину. *Если нельзя обойтись тремя прямыми (максимально), то рейка забраковывается.* Правила введения поправок в результаты нивеллировки в том случае, когда график поправок красной рейки приходится разбивать на части, приведены в следующих далее параграфах.

Если рейка на красной стороне подразделена чрез  $\frac{11}{10}$  сантиметра, то заполнение графы 10-ой „*номинальные промежутки*“ — делается, конечно, очень просто, а именно вычитанием из отсчета *по рейке*  $\frac{1}{10}$  его части.

Рейки германской нивеллировки рассчитаны на такой способ наблюдений, когда отсчет рейки по нити трубы заменяется *наведением* нити трубы на штрих рейки. Поэтому здесь мы имеем *штриховую* рейку, устройство которой видно на чертеже 173; рейка *односторонняя* и состоит: из ольховой задней доски  $b$ , двух еловых брусков  $cc$  и передней ольховой доски  $aa$ , на лицевой стороне которой и нанесены деления; доски  $b$  и  $aa$  и бруски  $cc$  соединены клеем и винтами; между задней стенкой футляра  $bb$  и доской  $aa$  остается воздушное пространство. Деления на рейке нанесены чрез 5 мм, причем штрихи имеют толщину ровно в один миллиметр: в желобо-образное углубление, прорезанное резцом делительной машины и имеющее ширину один миллиметр, вмазывается черная краска; расстояние 5 мм взято между осями штрихов, — между крайями их расстояние равно 4 мм. Рейка имеет круглый уровень и оканчивается плоскостью, с которой совпадает ее нуль; длина рейки немного более 3-х метров, подпись делений чрез полдециметр,

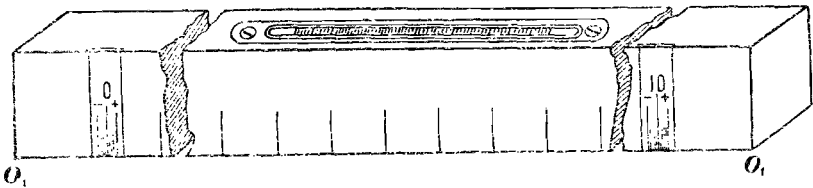


Черт. 173

\*) Переводя 1,4 сажени в метры получаем 2987.07 миллиметров; так как поправка 10-ти делений оказалась  $+0.06$  мм, то поправка 280 делений равна  $0.06 \times 28$ . Отсюда:  $2987.07 + 0.06 \times 28 = 2988.75$ .

причем с левого борта имеются т. н. *децимальные* подписи, дополняющие до 100 обыкновенные подписи; вблизи штрихов 20 и 40 (на концах среднего метра) врезаны в дерево рейки контрольные марки. На расстоянии в 50 метров штрихи рейки кажутся в два с лишним раза более толстыми, чем нити трубы. Горизонтальная нить *ss* (см. черт. 173) трубы делается двойною, с углом между нитями около  $25''$ ; при разстоянии до рейки в 50 м, по наведении биссектора на некоторый штрих, нити должны отстоять от краев смежных с ним двух штрихов примерно на 1,5 м.м., т. е. просвет должен быть примерно равен полуторной толщине штриха. Очевидно, малейшая несимметрия в установке нитей относительно штрихов рейки подмечается наблюдателем.

Для исследования длины и делений такой рейки служит стальной жезл квадратного сечения, длиною в один метр, изображенный на чертеже 174:



Черт. 174

на одной стороне жезла близ его концов врезаны в тело жезла две серебряные пластинки, на которых нанесены подразделения чрез  $\frac{1}{5}$  миллиметра;

на верхней грани жезла имеется термометр, шарик которого впущен в тело жезла. Расположив ребро  $O_1O_1$  жезла по продольной оси  $OO$  рейки (отмеченной чертой чрез всю длину рейки), затем делают на подразделенных пластинках отсчеты по штрихам рейки, приходящимся в пределах пластинок, оценивая на глаз десятую долю деления; вследствие большой толщины штриха отсчеты делают или по правым или по левым краям штрихов. Отсчеты сделанные на пластинках влево от концевых штрихов 0 и 10 записывают со знаком минус; отсчеты, сделанные в пределах делений, лежащих вправо от штрихов 0 и 10, записывают со знаком плюс; считая конец жезла со штрихом 10 передним, измеряемый промежуток вычисляют так:

длина жезла плюс передний отсчет минус задний. Вслед за сим (на стр. 417) приводится пример измерения 3-х метров рейки таким жезлом\*).

В примере  $\Delta d$  представляет обращенное в доли миллиметра среднее значение разности  $II-3$ ;  $\Delta t$  — поправка за температуру жезла. В первой графе примера названия штрихов, между которыми велось измерение, представлены отсчетами по ним *на рейке*, выраженными в полумиллиметрах. Измерение каждого промежутка велось так, что наблюдатели, отсчитывавшие жезл, менялись местами при переходе к обратному ходу. Конечно, для определения *общей* длины рейки вычисление нужно вести *не по частям*, а суммарно. Именно, общая длина в нашем примере должна получаться так:

$$\frac{\Sigma (II-3)}{4} + [0,009 (t_m - 18)] 3$$

Из прямого хода имеем:  $3000 - \frac{16,4}{4} \cdot \frac{1}{5} + 0,027 \cdot 4,73 = 3000 - 0,674$

Из обратного хода имеем:  $3000 - \frac{16,3}{4} \cdot \frac{1}{5} + 0,027 \cdot 4,7 = 3000 - 0,688$

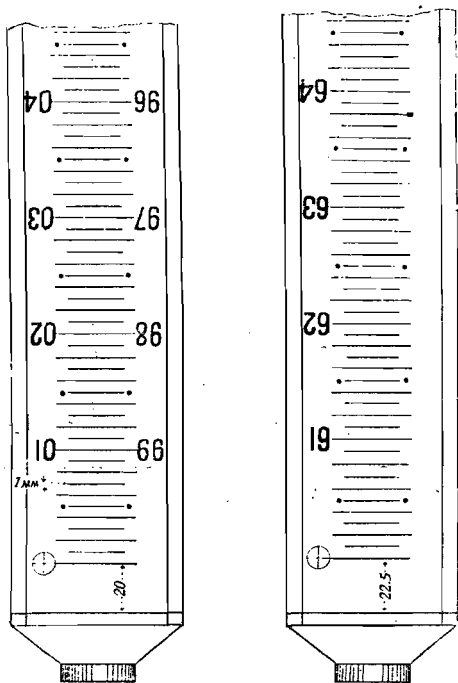
\*) Пример взят из действительной работы студентов Геодезического Факультета Московского Межевого Института в 1922 г. под руководством Ф. Н. Красовского.

Штрихи	Прямой ход				Обратный ход				Среднее из двух ходов		
	Отсчеты			$t$ $\Delta t$	Отсчеты			$t$ $\Delta t$			
	$П$	$З$	$П-З$		$П$	$З$	$П-З$				
20—20 <sub>20</sub>	—	— 2.6	— 1.4	22.7	— 3.3	— 1.9	— 1.4	22.7	999.745		
	+ 0.2	+ 1.7	— 1.5		+ 2.4	+ 4.0	— 1.6				
	+ 0.3	+ 1.8	— 1.5		+ 0.04	+ 1.7	+ 3.0			— 1.3	+ 0.04
	— 4.9	— 3.3	— 1.6		— 2.7	— 1.3	— 1.4				
		Среднее	— 1.50		Среднее	— 1.43					
	$\Delta d$	— 0.30		$\Delta d$	— 0.29						
	$\Delta t$	+ 0.04		$\Delta t$	+ 0.04						
		— 0.26			— 0.25						
	$D_I$	999.74		$D_I$	999.75						
20 <sub>20</sub> —40 <sub>20</sub>	— 1.9	— 0.6	— 1.3	22.8	+ 0.6	+ 1.9	— 1.3	22.7	999.775		
	+ 1.6	+ 2.9	— 1.3		— 3.6	— 2.3	— 1.3				
	+ 0.4	+ 1.7	— 1.3		+ 0.04	— 2.0	— 0.6			— 1.4	+ 0.04
	— 4.6	— 3.2	— 1.4		+ 2.7	+ 4.1	— 1.4				
		Среднее	— 1.32		Среднее	— 1.35					
	$\Delta d$	— 0.264		$\Delta d$	— 0.270						
	$\Delta t$	+ 0.04		$\Delta t$	+ 0.04						
		— 0.22			— 0.23						
	$D_{II}$	999.78		$D_{II}$	999.77						
40 <sub>20</sub> —60 <sub>20</sub>	+ 0.1	+ 1.2	— 1.1	22.8	+ 2.4	+ 3.8	— 1.4	22.7	999.785		
	— 3.3	— 2.0	— 1.3		— 1.9	— 0.6	— 1.3				
	— 1.9	— 0.6	— 1.3		+ 0.04	— 1.9	— 0.6			— 1.3	+ 0.04
	+ 1.2	+ 2.6	— 1.4		+ 1.1	+ 2.3	— 1.2				
		Среднее	— 1.27		Среднее	— 1.30					
	$\Delta d$	— 0.25		$\Delta d$	— 0.26						
	$\Delta t$	+ 0.04		$\Delta t$	+ 0.04						
		— 0.21			— 0.22						
	$D_{III}$	999.79		$D_{III}$	999.78						

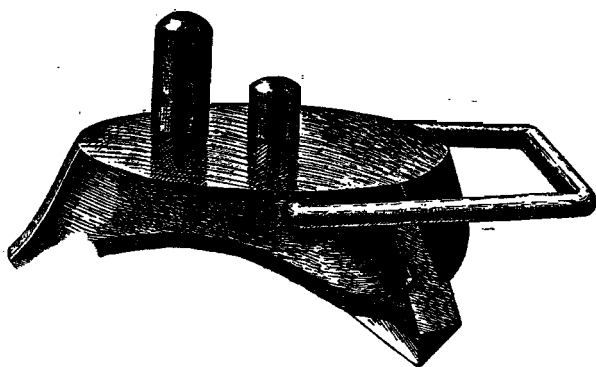
Уравнение жезла  $l=1000 + 0.009 (t-18)$ .



В последние годы, в работах Высшего Геодезического Управления применяется наряду с русским, и немецкий метод нивелирования; при этом употребляются *штриховые рейки, но двухсторонние*. Такие рейки изображены на черт. 175: в них, как и в немецких, штрихи имеют толщину в 1 мм; расстояния между осями штрихов равны 5 мм. Одна сторона рейки подписана совершенно также, как немецкая рейка черт. (173); на другой-же стороне—во первых нет десятичных подписей, а во вторых—подписи этой второй стороны рейки является продолжением основной подписи первой стороны, т. е. идет от 60 до 120; разность отсчетов по двум сторонам рейки равна 60-ти. Далее, имеется еще такая особенность: на рейке с четным номером деления второй стороны начинаются на четверть сантиметра выше нуля первой стороны; на рейке-же с нечетным номером нижний штрих 60 на второй стороне выше нуля первой стороны на  $5\frac{1}{4}$  см.



Башмак



Черт. 175.

Пример, приведенный выше по определению общей длины штриховой рейки (60 полудециметровых делений), относится к русской практике, в которой и при штриховых рейках сохраняется та-же программа исследования реек, что и при шашечных рейках, а именно:

*перед началом работ*—определение общей длины рейки, измерение расстояний между всеми контрольными марками, исследование отдельных дециметров рейки;

*два раза в месяц во время работ в поле*—определение расстояний между всеми контрольными марками;

*в конце работ*—определение общей длины рейки, определение расстояний между всеми марками, исследование отдельных дециметров рейки.

Реек в Германии производится существенно проще—в случайные ошибки штрихов ничтожны, а дерево рейки во время работы *равномерно*, по всей длине разделено перед началом и по окончании работ в поле выделено. Берут *восемь* частей рейки между штрихами: 10—20; 30—50; 15—35; 35—55; 20—40; 40—60.

Каждую такую часть измеряют контрольным метром — по одному разу в прямом и обратном ходе, но каждый раз с отсчитыванием шкалы жезла по левому и правому канту штриха; в один прием включают две смежные из приведенных выше метровых частей рейки, причем перед приемом и после приема измеряют расстояние между контрольными марками. Из такого исследования *без введения поправок за температуру*, получают очевидно разность для каждой части длины номинального метра рейки ( $L_m$ ) и расстояния  $M$  между контрольными марками; из этих восьми разностей выводят среднее значение  $b$ , которое — как показывает опыт 40 лет, — остается для данной рейки *постоянным*. Во время полевых работ *каждый день* в полуденный перерыв измеряют расстояние  $M$  между контрольными марками, которых на немецкой рейке всего две. Очевидно:

$$L_m = M + b$$

где  $M$  — расстояние между контрольными марками в день работы, а  $L_m$  — длина номинального метра рейки для этого же дня.

Вслед за сим приводится *пример* такого исследования, взятый из книги *Hegemann „Lehrbuch der Landesvermessung“*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТОЯННОГО  $b$ .

Марки и канты штрихов	Контрольн. метр		Расстояние	Постоянное $b =$ метру рейки минус расстояние между марками
	Лево	Право		
$t = +20.2$				
Марки	+0.06	+0.12	-0.06	
5—25 { $A$	+0.24	+0.30	-0.07	-0.01 = (-0.07 + 0.06)
{ $n$	-0.27	-0.19	-0.07	
25—45 { $A$	+0.16	+0.27	-0.10	-0.04 = (-0.10 + 0.06)
{ $n$	-0.36	-0.27	-0.10	
25—45 { $A$	+0.20	+0.31	-0.10	-0.07 = (-0.10 + 0.03)
{ $n$	-0.30	-0.21	-0.10	
5—25 { $A$	+0.29	+0.37	-0.09	-0.06 = (-0.09 + 0.03)
{ $n$	-0.23	-0.14	-0.09	
Марки	+0.04	+0.07	-0.03	
$t = +20.4$				

Всего должно быть исполнено 4 таких приема: второй для промежутков 10—30 и 30—50; третий — для промежутков 15—35 и 35—55 и четвертый — для промежутков 20—40; 40—60. Правило знаков применяется при счете по шкалам жезла — обратное вышеуказанному; все отсчеты выражены в „двойных миллиметрах“, так как десятая доля деления на шкале жезла равна 0.02 мм = 0.01 двойного миллиметра. В среднем из всех определений  $b$ , его значение получилось:

$$b = -0.045 \text{ двойных миллиметров.}$$

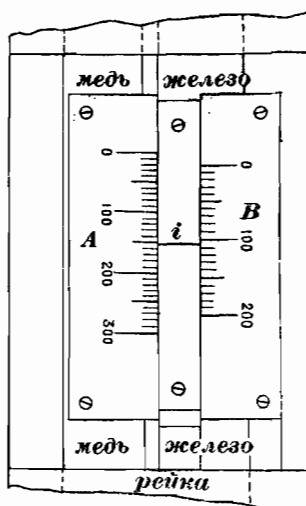
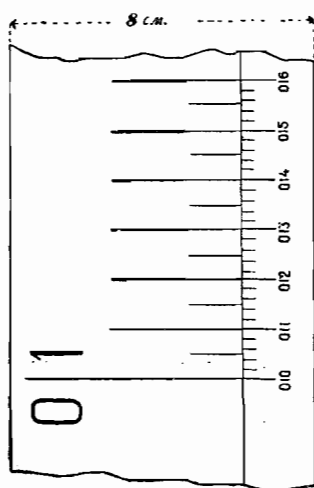
В поле имеем такой пример измерения расстояния между марками рейки.

1912	Рейка 3		Рейка 4	
Число	14 июля			
Час	9 <sup>h</sup>			
Термометр	+15.7		+15.8	
Марки <i>л</i>	+0.34	+0.12		
<i>п</i>	+0.29	+0.06		
<i>л—п</i>	+0.05	+0.06		
Марки <i>л</i>	+0.37	-0.04		
<i>п</i>	+0.31	-0.10		
<i>л—п</i>	+0.06	+0.06		

ВЫЧИСЛЕНИЕ:

	<i>тт</i>	<i>тт</i>
Среднее <i>л—п</i>	+0.11	+0.12
Поправка за температур.	-0.04	-0.04
<i>б</i>	-0.09	-0.09
<i>п</i>	-0.02	-0.01

В среднем длина метра рейки 3 = 1000 мм - 0.015 мм для 14/VI.



Черт. 176.

На черт. 176 изображена рейка французской нивелировки: самыми длинными и несколько утолщенными штрихами обозначены дециметры; затем следуют штрихи через пять миллиметров, из которых сантиметровые штрихи на левой половине своей длины утолщены; наконец на крайней правой зоне рейки нанесены

штрихи через два миллиметра, которыми пользуются при расстояниях до рейки, меньших 35-ти метров. Все штрихи нанесены на пергаменте,

который кнопками прикрепляется к дереву рейки; деления при изготовлении рейки в Бюро нивелирования Франции, наносят намеренно несколько неравными между собой; поправки штрихов тщательно определяют в Бюро нивелировок, но не сообщают их нивелировщику. Внутри рейки имеется канал, в котором помещаются две полосы: железная и медная; эти полосы соединены наглухо с пяткой рейки, но на всем остальном своем протяжении установлены свободно, так что могут беспрепятственно изменять длину вместе с температурой. На расстоянии 2,8 м от нуля рейки к медной полосе приделана пластинка  $A$  с делениями, к дереву рейки приделана пластинка  $B$  с делениями, а на железной полосе — открытой в этом месте — имеется штрих  $i$ , по которому производят отсчеты  $a$  и  $b$  на шкалах пластинок  $A$  и  $B$ . Во время работы пластинок  $A$  и  $B$  закрыты деревянной задвижкой. Деления на шкале  $A$  взяты равными 0,1825 мм из расчета, чтобы одно деление было равно расширению медной полосы относительно железной полосы, когда последняя получает удлинение в 0.10 мм на метр. Деления шкалы  $B$  взяты равными 0.28 мм из расчета, чтобы одно деление было равно расширению железной полосы в 0.10 мм на метр. Не трудно видеть, что при таком расчете делений шкал  $A$  и  $B$  сумма

$$a + b$$

отсчетов по шкалам будет постоянна, если только дерево рейки не изменяет своей длины; наоборот изменение этой суммы будет измерять изменение длины рейки, причем, если при исследовании рейки на компараторе, при длине ее  $L_0$  сумма  $a + b$  была равна  $c_0$ , то в тот момент полевой работы, когда  $a + b$  было равно  $c$ , длина рейки равна:

$$L_0 + (c - c_0) 2,8.$$

Из сказанного до сих пор следует, что в высокоточной нивелировке стремятся усчитать перемены длины рейки и точно знать ее длину в любой момент работы. Хотя с точными нивелировками обычно идут по железным дорогам, т. е. по линиям, имеющим слабые уклоны, но все-таки даже в равнинных странах разность высот на 300 км пути достигает нередко 200 м. Если длина метра рейки будет установлена с ошибкой в 0.10 мм, то это вызовет систематическую ошибку в разности уровней в 200 м равную 20-ти мм. Отсюда вытекает, что в странах *неравных* нужно очень строго определять длину номинального метра рейки с ошибкой вообще не превышающей  $\pm 0.03$  мм. Между тем опыт французской нивелировки показывает, что колебания длины метра рейки, вследствие главным образом влияния влажности, — может за день достигать величины  $\pm 0.2$  мм. Поэтому, чем крупнее рельеф поверхности земли в государстве, тем большее внимание должно быть обращено на:

- а) тщательное определение длины рейки перед началом и в конце полевой кампании;
- б) на тщательное определение изменений в длинах реек, происходящих изо дня в день во время полевой работы.

По идее устройство французских реек наиболее отвечает этому заданию — изо дня в день тщательно определять перемены длины рейки, но по исполнению это устройство оставляет желать много лучшего.

**74. Инструментальные ошибки нивелирования.** Главнейшую инструментальную ошибкою является ошибка отсчета по рейке. Исследования относительно этой ошибки исполнены (в числе прочих ученых) немецким профессором *Реймертцем*; в дальнейшем мы и приведем результаты его работы в этом направлении.

Назовем чрез  $J$  видимую в поле зрения величину *интервала* на рейке; по исследованиям *Реймертца* *относительная* ошибка  $m$  оценки части этого интервала по нити трубы может быть выражена так:

$$m = \frac{a}{\sqrt{J}}$$

где  $a$  — некоторое постоянное, независящее от силы трубы, если только интервал рейки рассматривался в трубу с полной отчетливостью.

Называя чрез  $t$  — действительную величину интервала на рейке, чрез  $v$  — увеличение трубы, и чрез  $d$  — расстояние в *мтрах* от нивеллира до рейки, напишем:

$$J = \frac{t.v.0,25}{d}$$

причем 0,25 м — расстояние наилучшего зрения.  
Отсюда:

$$m = \frac{a \sqrt{d}}{\sqrt{t.v.} \sqrt{0,25}} = \frac{2a \sqrt{d}}{\sqrt{t} \sqrt{v}}$$

Очевидно  $\mu = mt$  выразит собою среднюю ошибку определения положения визирной оси трубы на рейке. Следовательно:

$$\mu = \frac{2a \sqrt{t} \sqrt{d}}{\sqrt{v}}$$

По исследованиям *Реймертца* величина  $a$ :

- 1) равна 0.04 при наведении нити на штрих рейки или при установке нити на *средину* интервала на рейке
- 2) равна 0.08 при *отсчитывании* рейки по нити трубы, т. е. при определении интерполированием на глаз *части интервала рейки*, причем нить приходится вблизи  $\frac{1}{4}$  или  $\frac{3}{4}$  интервала
- 3)  $a \geq 0.04$  } при отсчитывании рейки в тех случаях, когда нить прихо-  
 $a < 0.08$  } дятся или вблизи половины интервала или вблизи начала или конца интервала.

На основании сказанного для *Германской нивеллировки*:

$$\mu = \frac{0.08 \sqrt{5} \sqrt{50}}{\sqrt{40}} = \pm 0.20 \text{ м.м.}$$

Для *русской нивеллировки*:

$$\text{наибольшее } \mu = \frac{0.16 \sqrt{10} \sqrt{50}}{\sqrt{40}} = \pm 0.56 \text{ м.м. } (\pm 0.42 \text{ м.м.})$$

Для *русской нивеллировки* при употреблении реек с *полусантиметровыми штрихами*: наибольшее  $\mu = \pm 0.40$  м.м. ( $\pm 0.30$  м.м.)

Цифры в скобках ( $\pm 0.42$ ) и ( $\pm 0.30$ ) относятся к случаю, когда нить не приходится вблизи  $\frac{1}{4}$  и  $\frac{3}{4}$  интервала.

Для *французской нивеллировки*  $\pm 0.30 < \mu < 0.40$  м.м.

В *германской нивеллировке* делают не менее 4-х отсчетов на станции на рейку; поэтому влияние ошибки отсчета на километр нивеллировки будет равно  $\pm 0.45$  м.м.

В *России* делают отсчеты трех нитей на каждой стороне рейки, но опыт показывает, что отсчет по крайней нити имеет вес  $\frac{1}{2}$  по сравнению с весом отсчета по средней нити; поэтому *влияние ошибки отсчета на километр* вычислится так:

$$\pm 0.42 \sqrt{\frac{2}{4}} \sqrt{10} = \pm 0.94 \text{ м.м.}$$

При этих расчетах предполагается полная вертикальность рейки и полная ее неподвижность при отсчитывании, а кроме того не учитываются систематические ошибки отсчетов. Эти систематические ошибки обусловлены *личной ошибкой* наблюдателя, которая зависит от положения нити в пределах интервала, от толщины нити и от разности освещений задней и передней рейки. Первая причина исчезает в разности уровней в германской нивелировке, но действует в русской и французской. Наблюдатель расценивает всегда *меньшую* часть интервала и поэтому если отсчет менее  $\frac{t}{2}$ , то расцененную часть прибавляет к номеру младшего штриха; если-же отсчет  $> \frac{t}{2}$ , то оценив дополнение отсчета до  $t$ , — вычитает затем эту оцененную часть из номера старшего штриха рейки. Очевидно, если иметь рейку двухстороннюю, устроенную так, чтобы штрихи одной стороны были-бы сдвинуты относительно штрихов другой стороны на  $\frac{t}{2}$ , то влияние такой систематической ошибки будет исключаться. Рассматриваемая систематическая ошибка отсчета, конечно, в последовательных разностях уровней действует уже как случайная, но она конечно увеличивает среднюю километрическую ошибку, рассчитываемую по формулам *Реймертца* для русской и французской нивелировок. Что касается действия разности освещений задней и передней рейки, то оно может иметь явно систематический характер, так как на длинном ряде станций часто бывает так, что передняя рейка освещена существенно иначе, чем задняя. В этом случае германская нивелировка, в которой нить наводится на штрих, конечно, дает гораздо меньшую амплитуду колебания личной ошибки при получении взглядов на заднюю и переднюю рейки, чем нивелировка русская.

Остановимся теперь на одной из следующих инструментальных ошибок — ошибке *взгляда*, обусловленной ошибкой в отсчитывании уровня. *Реймертц* дает для средней ошибки  $m$  определения наклонности оси уровня по отсчетам концов его пузырька такую формулу;

$$m = \pm 0.16 \sqrt{k} \quad k \text{ — цена деления уровня.}$$

Поэтому для *германской* и *русской* нивелировки где  $k = 4''$ ,

$$m = \pm 0''.32$$

что дает во взгляде на рейку  $\pm 0.08$  м.м.

Для установки уровня на средину:

$$m = \pm 0.06 \sqrt{k}$$

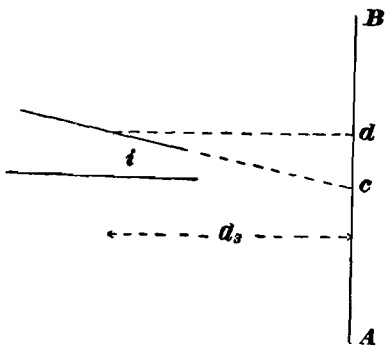
Но обе эти формулы получены в условиях лабораторных опытов. В действительности работа уровня крайне зависит от температурных условий, и как-бы ни был хорошо защищен уровень, всегда пузырек его смещается несколько в сторону солнца, и очевидно это смещение будет давать ошибку одного знака в отсчете на переднюю рейку и противоположного знака в отсчете на заднюю рейку, причем на целом ряде станций

ошибка в последовательных разностях уровней будет явно систематическая. В летний солнечный день эта систематическая ошибка может дойти до 0.5 мм и более на одну станцию. Симметричное расположение наблюдений на станции здесь не поможет. Рассматриваемое систематическое влияние почти исчезает при работе в серый, пасмурный день; затем оно тем менее, чем быстрее идет работа на станции — в этом отношении *русская нивелировка* будет наиболее *выгодная*. Наконец, очевидно значительная часть этого влияния погасится, если вести работу по *полудневым* секциям — т. е. проходить секцию прямым ходом до полудня и обратным ходом после полудня. Такая система работы принята только во *Франции*.

В Германии нить трубы *наводят* на штрих рейки, затем отсчитывают уровень и вводят поправку за уровень, которая очевидно может достигать величины  $\frac{t}{2}$  или до 10-ти секунд. Конечно, такую большую поправку за уровень нужно учитывать с особенной осторожностью. Очевидно в *германском* методе нивелирования появляются *добавочные* погрешности, именно:

1) от неточности принимаемой, при вычислении поправок за уровень, его цены деления;

2) от несовершенств в движении пузырька при перегонах его по трубке в пределах  $\pm 10''$  от среднего положения. Цена деления уровня не есть величина постоянная — она изменяется вместе с температурой, причем это явление происходит главным образом за счет тех деформаций, которые вызываются в стеклянной трубке уровня под влиянием температурных изменений. О той части этих влияний, которые сказываются смещением пузырька в сторону солнца, — уже говорилось. С тою-же частью, которая сказывается изменением цены деления уровня, германцы считают таким образом, что каждый взгляд на рейку образуется из двух наведений трубы и соответствующих двух поправок за уровень: именно, сперва визируют штрих, лежащий *выше* горизонта трубы, а затем — штрих, лежащий *ниже* горизонта трубы. Таким образом, здесь работа идет вполне аналогично определению отсчета на лимбе помощью микроскоп-микрометра и конечно, значительная часть погрешности от несоответствия принятой цены деления уровня той, которая имеет место в работе, исчезает в среднем из таких двух отсчетов, образующих *взгляд*. Что касается несовершенств в движении пузырька, то здесь должно соблюдаться правило — всегда устанавливать пузырек окончательно движением



Черт. 177.

его в одном направлении относительно подписи на шкале уровня — тогда получается уверенность, что наклонаности по уровню будут определены на заднюю и переднюю рейку с постоянной погрешностью, а следовательно это влияние — при равенстве расстояний от нивелира до реек, — в разности уровней будет погашаться. Но, конечно, чем менее в момент отсчета рейки пузырек уровня уклоняется от середины, тем эта уверенность более обоснована; и поэтому в этом пункте работы — французская нивелировка имеет существенные преимущества пред германской.

Вследствие неполной выверки нивелира, всегда в нем имеется некоторый малый угол  $i$  между визирною осью трубы и осью уровня. Этот угол будем считать положительным, если ось трубы и ось уровня сходятся к объективу (см. черт. 177).

называя чрез  $Z_u$  отсчет на заднюю рейку при точке  $d$ , соответствующей горизонтальному положению оси трубы, чрез  $Z_n$  — отсчет на ту-же рейку при точке  $c$ , соответствующей наклону оси трубы на угол  $i$ , имеем:

$$Z_u = Z_n + d_s \operatorname{tgi}$$

понимая под  $d_s$  — расстояние до задней рейки. Называя чрез  $\Pi_u$ ,  $\Pi_n$  и  $d_n$  — отсчеты истинный и наблюденный на переднюю рейку, чрез  $d_n$  — расстояние от центра нивеллира до передней рейки и чрез  $u$  истинную разность уровней, имеем:

$$\begin{aligned} \Pi_u &= \Pi_n + d_n \operatorname{tgi} \\ u &= Z_n - \Pi_n + (d_s - d_n) \operatorname{tgi} \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

В Германской нивелировке отмеряют стальной лентой 50 м от нивеллира до рейки и там  $d_s = d_n$ ; но в нивелировке русской отбивка расстояний делается проволочным канатиком, с натягиванием его руками, вследствие чего может появиться накопление разностей  $d_s - d_n$ .

Очевидно разность уровней  $U$  между двумя марками равна:

$$U = \Sigma u = \Sigma (Z_n - \Pi_n) + \operatorname{tgi} \Sigma (d_s - d_n) \dots \dots \dots (2)$$

$\Sigma (d_s - d_n)$  определяется достаточно хорошо помощью боковых (дальномерных) нитей трубы нивеллира.

Угол-же  $i$  подлежит определению, причем в России употребляют такой способ. Назовем дальномерный коэффициент чрез  $k$ , разность отсчетов по верхней и нижней нити дальномера чрез  $D$ . Тогда:

$$\begin{aligned} d_s &= D_s k + c \\ d_n &= D_n k + c \end{aligned} \quad d_s - d_n = (D_s - D_n) k$$

Далее представим себе, что мы встали с нивеллиром намеренно *ближе к задней рейке* и исполнили нивелировку между рейками, получив отсчеты  $Z'_n$  и  $\Pi'_n$ ; после этого, оставляя на месте рейки, переставим нивеллир так, чтобы он был теперь *ближе к передней рейке* и сделаем вторичную нивелировку, получив отсчеты на рейках  $Z''_n$  и  $\Pi''_n$ . Тогда очевидно приходим к двум уравнениям:

$$\begin{aligned} u &= Z'_n - \Pi'_n + k \operatorname{tgi} (D'_s - D'_n) \\ u &= Z''_n - \Pi''_n + k \operatorname{tgi} (D''_s - D''_n) \end{aligned}$$

Отсюда:

$$k \operatorname{tgi} = \frac{(Z''_n - \Pi''_n) - (Z'_n - \Pi'_n)}{(D''_s - D''_n) - (D'_s - D'_n)} \dots \dots \dots (3)$$

При описанном опыте по определению  $i$  нивеллир ставят ближе к задней, а потом ближе к передней рейке, нарушая каждый раз равенство расстояний *возможно* больше, т. е. настолько, чтобы *без переменны фокусировки трубы, установленной для расстояния в 50 м*, можно было-бы хорошо отсчитывать обе рейки, считаясь с небольшим параллаксом нитей. Определения  $i$  выполняют чрез день, и затем за угол  $i$  вводят поправку по формуле (2).

Во Франции работа на станции ведется так, что на каждую рейку берут взгляды при двух положениях трубы в лагерах, получающихся поворотом ее около геометрической оси, и при двух положениях уровня на цапфах трубы. Поэтому здесь поправок за угол  $i$  вводить не нужно, так как в среднем выводе из всех наблюдений влияние его погашается.



Необходимо указать, что формулы (1) и (2) выведены в предположении неизменяемости угла  $i$  — по крайней мере за время хода между двумя марками. Конечно, угол  $i$  на самом деле изменяется — вследствие температурных влияний и вследствие сотрясений при переносках инструмента. Эти перемены угла  $i$  на вычисление поправки по формуле (2) будут сказываться конечно тем менее, чем меньше допущенные неравенства расстояний, т. е. величины  $d_3 - d_n$ . В современных работах  $d_3 - d_n$  всегда менее 400 м., и поэтому изменение угла  $i$  на  $10''$  даст ошибку в отдельной разности уровней менее 0.02 м.м.

Если перемены угла  $i$  при малых  $d_3 - d_n$  почти не ощутительно влияют на определение поправки за *неравенство расстояний*, то эти-же перемены будут влиять совсем иначе на определение самих разностей уровней. Если представить себе, что угол  $i$  меняется равномерно с течением времени, то симметричное расположение наблюдений на станции по такой схеме:

$$1) Z_1, \quad 2) II_1, \quad 3) II_2, \quad 4) Z_2$$

приведет к исключению влияния перемен в угле  $i$  на окончательный вывод величины  $Z - II$ . Но возможны перемены угла  $i$  неравномерные, скачками; внезапное изменение  $i$  на  $5''$  может повести к ошибке в 1,2 м.м.

При конструировании инструмента должно поэтому обратить особое внимание на соединение уровня с трубой и защиту их от внешних влияний.

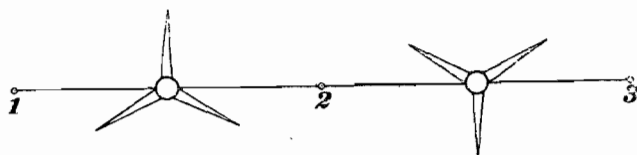
**75. Ошибки нивелирования из-за недостатков установок.** Рейки при нивелировании устанавливаются по круглому уровню, хорошо выверяемому *каждый день*. Поэтому ошибки от наклонного держания реек — совершенно ничтожны в тихую погоду. В несколько ветреную погоду реечнику трудно держать рейку вертикально, она колеблется; следует в нивелировке высокой точности отказаться от укоренившегося обычая держать рейки при помощи двух палок, нижние концы которых втыкаются в землю, а верхние, пропущенные чрез пальцы реечника, прижимаются его руками к дереву рейки. Следует при рейках иметь подпоры, верхние концы которых соединялись-бы шарнирами с деревом рейки и которые были-бы раздвижными: рейка, поставленная прочно с помощью таких подпорок, требует лишь некоторого придер-живания ее рабочим, причем колебания рейки будут устранены даже при ветре средней силы. Колебания рейки особенно сказываются при нивелировке по германскому методу — здесь приходится терять время при наведении нитей на движущийся штрих, так как малейшие смещения штриха вызывают нетерпимую для глаза несимметрию в наведении нитей.

Большую роль в нивелировке играет *установка башмаков для реек*. На одних участках нивелирования установленные башмаки постепенно оседают, — но бывают случаи и обратного движения башмака. Те сдвиги башмаков, которые происходят во время работы на станции, значительно компенсируются в разности уровней из четырех взглядов;  $Z_1, II_1, II_2, Z_2$ , — симметричных относительно времени. Но те сдвиги башмака, которые происходят за время перехода нивелира со станции предыдущей на последующую, целиком входят в результат нивелирования и могут обуславливать в нем заметную систематическую ошибку. Если допустим на данном участке постепенное оседание башмаков, то очевидно разность уровней между двумя марками, обозначающими начало и конец участка, будет при *прямом* ходе получена большею чем следует, (в *арифметическом* смысле), если шли в гору, и меньшею если шли под гору. В обратном ходе, оседание башмаков вызовет *уменьшение арифметической* разности уровней при спуске с горы и *увеличение* ее при подъеме в гору. Таким образом можно надеяться, что в среднем из ходов прямого и обратного, *исполненных по тем-же самым местам*, разность уровней будет значительно освобождена от влияния дви-

жений башмаков систематического характера. В некоторых нивелировках систематические сдвиги башмаков обусловили довольно крупные расхождения между прямой и обратной нивелировками. Во Франции поэтому совершенно не пользуются башмаками, а рейки ставят на колья, длиной 0,3 м и толщиной в 3 см, забиваемые почти на всю длину в землю; в вершину кола вбивается особый гвоздь с полусферической шляпкой, на верхнюю точку коего и устанавливается рейка. Длина такого кола достаточна, но толщина мала. Вообще же в нивелировке высокой точности *следует отказаться от башмаков* и заменять их железными *костылями*, длиной около 0,3 м и толщиной около 5 см, причем в верхнюю плоскость костыля должен ввинчиваться целик, вывинчиваемый при забивке костыля; поперечное отверстие, сделанное в костыле ниже его верха на 6—7 см, должно служить для вставки мощного аншпуга при вытаскивании костыля; таких костылей нивелирная партия должна иметь 5—6 штук.

В Америке редко пользуются башмаками, а в большинстве случаев ставят рейку на *головку рельса*: опыт показывает, что на старых железных дорогах рельс по высоте точно приходит в прежнее положение после прохода поезда. Что касается сдвигов штативов во время нивелировки на станции,

то очевидно большая их часть исключается в среднем выводе из четырех взглядов, исполненных симметрично, как уже указывалось ранее. Но для уменьшения опрокидывающего момента следует штатив нивелира располагать так, как указано на чертеже 178, т. е. ставя всегда две его ножки параллельно линии нивелирования.



Черт. 178.

**76. Внешние причины ошибок нивелирования. Действие рефракции.** Температурные влияния, конечно, относятся к внешним, но частью действие их вызывает ряд инструментальных ошибок, почему об этих влияниях и пришлось уже говорить в соответственном параграфе. Однако, температурные же влияния вызывают еще ряд ошибок уже другого характера, из которых мы остановимся на *рефракции* в нивелировке.

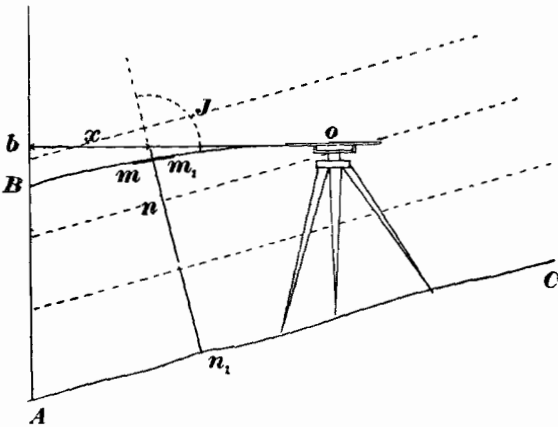
Характерным для геометрического нивелирования является то, что визирный луч проходит везде в непосредственной близости почвы, изменения температуры которой передаются, конечно, в полной мере тем воздушным слоям, которыми приходится пользоваться в нивелировке. Если самый верхний слой почвы по некоторому пологому скату имеет в данный момент температуру  $t$ , то можно считать, что воздушный слой, прилегающий к этому скату, имеет на всем своем протяжении температуру близкую к  $t$  и плотность соответствующую этой температуре. Другими словами, является довольно обоснованным положение, что *на пологих и длинных скатах*, с которыми приходится иметь дело в нивелировке, *в самых нижних слоях воздуха, поверхности, разграничивающие слои разной плотности, следуют в общем рельефу местности, и отступают от поверхностей уровня*. Это положение было выдвинуто Лаллеманом. Далее Лаллеман делает предположение, что температура  $t$  воздуха изменяется в прогрессии арифметической, когда высота  $h$  над почвой изменяется в прогрессии геометрической; т. е.

$$t = a + b \log (h + c) \dots \dots \dots (4)$$

где  $a, b, c$  — постоянные, подлежащие определению опытным путем.

Конечно, формула (4) слишком проста, и в действительности законы изменения  $t$  вместе с  $h$  более сложны и разнообразны, но и эта формула во многих случаях довольно близко представляет дело при надлежащем подборе постоянных  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

Пусть горизонтальный луч встречается рейку в  $b$  (см. черт. 179) а световой луч, следующий по ре-



Черт. 179.

фракционной кривой  $OmB$ — в точке  $B$ . Отрезок  $Bb$ — поправка за рефракцию. Если расстояние элемента  $mm_1$  рефракционной кривой от рейки назвать чрез  $x$ , а угол, который ее элемент  $mm_1$  образует с нормалью  $nn_1$  к скату  $AC$  чрез  $J$ , то:

$$Bb = \epsilon = \int_0^L x dJ$$

где  $L$ — расстояние от нивелира до рейки.

Если чрез  $h$  назовем высоту элемента  $mm_1$  над

почвой, чрез  $h_1$ —отрезок  $Ab$ , и чрез  $p$ —уклон ската, то

$$x = \frac{h_1 - h}{p}$$

Если  $n$ — коэффициент преломления воздуха для элемента  $mm_1$  то:

$$n \sin J = \text{Const.}$$

$$n = 1 + 0.000294 \frac{B}{0.76} \cdot \frac{1}{1+at}$$

$\alpha = 0.00366$  = коэффициенту расширения воздуха  
 $B$ — показание барометра

Отсюда:

$$dn \sin J + n \cos J dJ = 0$$

$$dJ = -\text{tg } J \cdot \frac{dn}{n}$$

$$dn = -0.000294 \frac{B}{0.76} \cdot \frac{\alpha dt}{(1+at)^2}$$

$$Bb = \epsilon_1 = \int_0^L \alpha \cdot \frac{h_1 - h}{p} \cdot \text{tg } J \cdot \frac{0.000294 \frac{B}{0.76}}{(1+at)^2 n} dt$$

При вычислении этого интеграла  $\text{tg } J$ ,  $B$  и  $n$  можно считать постоянными, а  $n$  даже приравнять единице. Очевидно  $\text{tg } J = -\frac{1}{p}$  (приблизленно).

Таким образом:

$$\epsilon_1 = -0.000294 \frac{B}{0.76} \frac{\alpha}{p^2} \int_0^L (h_1 - h) \frac{dt}{(1+at)^2}$$

Здесь  $1 + \alpha t$  можно заменить чрез  $1 + \alpha \theta$ , понимая под  $\theta$  среднее из температур  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_3$ , взятых при рейках—задней и передней—на высоте визирного луча и при нивеллире—на высоте его трубы.

$$\theta = \frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}$$

$$dt = M \cdot \frac{b \, dh}{h + c} \dots (M \text{—модуль Неперовых логарифмов})$$

$$\varepsilon_1 = - \frac{0.00000108}{(1 + \alpha \theta)^2 p^2} \frac{B}{0.76} Mb \int_{h_1}^H \frac{(h_1 - h) \, dh}{h + c}$$

понимая под  $H$  высоту нивеллира над почвой.

Отсюда окончательно получаем:

$$\varepsilon_1 = - \frac{0.00000108}{(1 + \alpha \theta)^2 p^2} \frac{B}{0.76} Mb \left\{ (h_1 - H) + (h_1 + c) \operatorname{Log} \frac{H + c}{h_1 + c} \right\}$$

причем здесь логарифм—Неперов.

Если отсчет по передней рейке назвать чрез  $h_3$ , то для нее:

$$\varepsilon_3 = - \frac{0.00000108}{(1 + \alpha \theta)^2 p^2} \frac{B}{0.76} Mb \left\{ (h_3 - H) + (h_3 + c) \operatorname{Log} \frac{H + c}{h_3 + c} \right\}$$

Следовательно влияние  $\delta u$  рефракции на разность уровней выразится так:

$$\delta u = - \frac{0.00000108}{(1 + \alpha \theta)^2 p^2} \frac{B}{0.76} Mb \left\{ u - (h_3 + c) \operatorname{Log} \frac{H + c}{h_3 + c} + (h_1 + c) \operatorname{Log} \frac{H + c}{h_1 + c} \right\} \dots (5)$$

$h_1$ ,  $h_3$ ,  $H$ — выражены в метрах.

Из формулы (5) вытекает между прочим, что для уничтожения влияния рефракции на разность уровней, нивеллир должно ставить *не в равных* расстояниях от реек, причем это неравенство будет вообще значительно (10 и более метров),— в зависимости от значений  $p$ ,  $b$  и  $c$ . Предполагая равенство расстояний нивеллира от реек и близость друг к другу величин  $(t_3 - t_2)$  и  $(t_2 - t_1)$ , формулу (5) можно выгодно преобразовать и написать в таком виде:

$$\varepsilon^{mm} = - 0.0000108 \frac{B^{mm}}{760} \frac{t_1 - t_3}{(1 + \alpha t)^2} \frac{L^2}{u} \left[ \frac{1 - \tau}{12} + \frac{(1 - \tau)^2}{24} + \dots \right] \dots (6)$$

Здесь:  $L$ — расстояние между рейками в метрах;

$u$ — абсолютное значение разности уровней в метрах;

$t_3$ ,  $t_2$  и  $t_1$ — температуры воздуха на высоте луча соответственно при *передней* рейке, при нивеллире и при *задней* рейке.

Величина  $\tau = \frac{t_1 - t_2}{t_2 - t_3}$  или  $\tau = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}$ , смотря по тому, по какой из этих

формул для  $\tau$  получится значение между 0 и  $+1$ .

Если взять:

$$t_1 = 11^\circ; t_2 = 11,^\circ 8; t_3 = 12,^\circ 4; L = 100 \text{ м}; u = 1,4; t_3 - t_1 = +1,4; \\ \tau = 0,75; 1 - \tau = 0,25$$

то  $\varepsilon = -0,25$  мм.

Взяв тот-же уклон местности и тот-же закон изменения температуры но расстояния между рейками 150 м, будем иметь:

$$t_1 = 11,^\circ; t_2 = 12,1; t_3 = 12,6; L = 150; u = 2,1; t_3 - t_1 = +1,6; \tau = 0,45 \\ \varepsilon = -1,06 \text{ мм.}$$

Как видно из формулы (6) рефракция возрастает пропорционально квадрату расстояния  $L$ ; при увеличении уклона возрастает  $n$ , но возрастает  $(t_3 - t_1)$  — правда в несколько меньшей степени, и кроме того заметно убывает  $\tau$ . Следовательно, с возрастанием уклона  $\epsilon$  возрастает. При расстояниях от нивеллира до рейки, больших 50 м и меньших 80 м, действие рефракции может приводить к ошибкам в отдельных разностях уровней до одного миллиметра — причем эта ошибка будет явно систематического характера, — т. е. она будет накапливаться в одну сторону на целом ряде последовательных станций. Поэтому очень важно знать те промежутки для, когда рефракция имеет наименьшее значение.

Целый ряд опытов показывает, что в летний солнечный день перемены рефракции следуют таким образом:

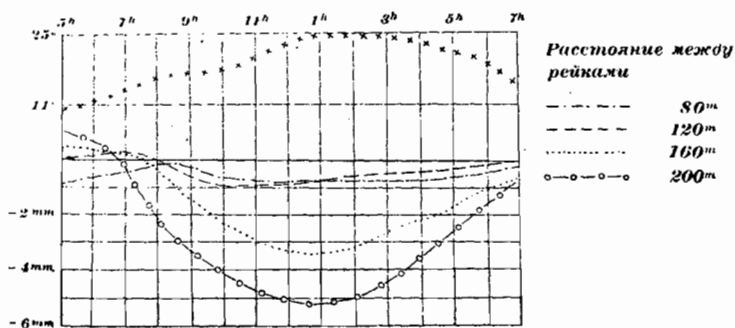
а) утром перед восходом солнца и вскоре после восхода солнца кривая рефракции обращена вогнутостью вниз, т. е. рефракция *положительна*; в это время влияние рефракции мало;

б) около 5—6 часов утра рефракция близка к нулю и в 7 часов утра делается *отрицательной*;

в) с 7 часов утра и до 1-го часа пополудни наблюдается быстрое увеличение отрицательного значения рефракции; в 1 час дня — максимум рефракции (отрицательной);

г) до 3-х часов дня идет медленное убывание рефракции, после 3-х часов рефракция убывает быстро и около 6-ти часов вечера близка к нулю;

д) перед закатом солнца рефракция вновь становится положительной. В общем, как и следовало ожидать, ход рефракции в нижних слоях воздуха вполне соответствует ходу температуры воздуха и почвы. На черт. 180



Черт. 180.

с ходом температуры; для расстояния в 200 м в полдень  $\epsilon$  достигает пяти миллиметров! Наибольшее  $\epsilon$  для расстояния между рейками в 120 м не превышает одного миллиметра даже в полдень. Несомненно, разность уровней, выводимая из отсчетов по верхней горизонтальной нити искажена действием рефракции в большей степени, чем разность уровней, выводимая из отсчетов по средней или нижней горизонтальной нити трубы. Это одна из причин, по которой во французской и немецкой нивеллировках не пользуются тремя нитями при выводе разности уровней.

Из сказанного ясно, что *наивыгоднейшим* временем *точного нивелирования*, в противоположность *геодезическому нивелированию*, являются промежутки от 5 $\frac{1}{2}$  часов утра до 9 $\frac{1}{2}$  часов утра и от 4-х часов вечера до захода солнца. С другой стороны несомненно, что расстояние от нивеллира до рейки должно не превышать 60 м.

Надлежит на каждой станции делать отсчеты термометра на высоте луча при рейках и при объективе нивеллира. Хотя по этим отсчетам тер-

показаны ошибки разности уровней, обусловленные действием рефракции, как они были обнаружены специальными опытами инженера Кольмюллера в Мюнхене в 1912 году. Как видно, для всех расстояний ход  $\epsilon$  согласуется

мометра рискованно вводить поправку в разности уровней по формуле (6) так как нередко закон изменения температуры с высотой далеко не тот, который положен в основу формулы (6) *Даллеманом*, но всетаки эти отсчеты термометров дадут возможность надежно определить *порядок* действия рефракции на результат выполненной нивеллировки, что, конечно, в точной работе более чем важно.

В заключение же должно сказать, что уменьшение расстояния от нивеллира до рейки до 50 м всетаки не освобождает вполне от систематического накопления ошибок от рефракции и в настоящее время нередко можно встретить мнение, что главная погрешность в нивеллировании высокой точности обуславливается именно действием рефракции.

**77. Нивеллирование по русскому способу. Поверки и исследования нивеллира и реек.** Как уже было сказано выше, в России употребляют нивеллиры: с диаметром об'ектива около 40<sup>мм</sup>, с фокусным расстоянием трубы около 40 см при увеличении 36—40 раз, с уровнем, связанным неизменно с трубой и имеющим цену деления 3''—4''.

Нивеллирная партия имеет:

нивеллир со штативом и чехлом для защиты нивеллира,  
две рейки с уровнями и отвесами, уложенные в ящик,  
одну подвесную рейку для привязки к маркам  
башмаки к рейкам числом два или три,  
термометр пращ,  
проволочный канатик для отбивки расстояний,  
стальную рулетку,  
зонты,  
запас нивеллирных марок, топоры, лопаты, зубила и т. п.  
запас цемента—из расчета 2 кило на марку.

Перед полевой компанией нивеллировщик:

- а) определяет на испытателе уровень цену деления уровня нивеллира и исследует правильность движения пузырька;
- б) определяет увеличение трубы и убеждается в правильности даваемых ею изображений (путем рассматривания правильных геометрических фигур);
- в) определяет коэффициент дальномера трубы и несимметрию ее нитей;
- д) исследует правильность работы элевационного винта и определяет цену деления этого винта;
- е) определяет цену деления уровня по рейке;
- ф) производит все поверки нивеллира и затем, нивеллированием с двух концов линии в 50 м длиной, определяет угол между визирною осью трубы и осью уровня;
- г) исследует правильность хода окулярного колена трубы;
- h) исполняет *полное* исследование реек — т. е. определение общей длины каждой стороны, поправок дециметровых штрихов и расстояний между контрольными марками;
- и) определяет неравенство нулей реек.

*Несимметрия* трех горизонтальных *нитей* трубы, очевидно, имеет своим следствием то, что средний отсчет по рейке из отсчетов по трем нитям относится не к средней нити трубы, а к некоторой *фиктивной* нити, но так как при определении угла  $i$  между визирною осью трубы и осью уровня пользуются отсчетами всех трех нитей, то следовательно и вся нивеллировка, и угол  $i$ , и поправки за него — все относится к этой фиктивной нити, — другими словами несимметрия нитей на вывод высот из нивеллирования не имеет никакого влияния. С ней нужно считаться только при контроле отсчетов по нитям трубы. Поставив рейку в расстоянии 50 метров от

нивеллира, делают ряд отсчетов по верхней ( $a$ ), по средней ( $b$ ) и по нижней ( $c$ ) нитям трубы, давая трубе при этом разные положения при помощи элевационного винта (или посредством подъемного винта, стоящего в плоскости трубы). Пусть получили ряд отсчетов:

$$\begin{array}{cccccccc} a_1, & a_2, & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \\ b_1, & b_2, & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & b_n \\ c_1, & c_2, & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & c_n \end{array}$$

Тогда выводим:

$$\Delta_1 = \frac{(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \dots + (b_n - a_n)}{n}$$

$$\Delta_2 = \frac{(c_1 - b_1) + (c_2 - b_2) + \dots + (c_n - b_n)}{n}$$

Следовательно, среднее из отсчетов по крайним нитям должно отличаться от отсчета по средней нити на

$$x = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2}$$

Определив  $x$ , записывают его значение в журнале нивелирования и затем в поле контроль отсчетов по нитям делают так:

$$\frac{a + c}{2} = b + x \pm 1 \text{ мм}$$

Здесь  $\pm 1$  мм допустимое расхождение в контроле отсчетов по нитям.

*Неравенство нулей реек* в русских работах устраивается намеренно: именно в одной из парных реек нуль красной стороны стоит выше на дециметр нуля черной стороны. Это делается для того, чтобы впоследствии обнаружить ошибку в записи, которую нивелировщик сделал, записав на некоторой станции отсчет по задней рейке в графу журнала для передней рейки и отсчет по передней рейке в графу журнала для задней рейки. Неравенство нулей следует определить для обеих реек.

Поставив рейку на прочно установленный башмак и расположившись с нивелиром в расстоянии от нее 15—20 метров, устанавливают пузырек уровня на середину и карандашом отмечают на черной стороне рейки точку  $M$ , приходящуюся на средней горизонтальной нити трубы; затем рейка оборачивается к трубе красной стороной и отмечается на этой стороне точка  $N$ , покрываемая средней нитью трубы. Измерив женеvской линейкой или миллиметровой линейкой расстояния точек  $M$  и  $N$  от близких к ним штрихов рейки, мы очевидно получим отсчеты  $m$  и  $n$  по черной и красной стороне, соответствующие одному и тому же положению оптической оси трубы, которое она занимала во время опыта.

Сделав перевод  $n$  из  $\frac{11}{10}$  сантиметра, или из саженой в метры, и называя этот переведенный отсчет через  $n'$ , получим неравенство нулей реек такое

$$y = m - n'$$

Пусть рейки имеют номера  $A$  и  $B$ ; для рейки  $A$  неравенство нулей  $y_A = m_A - n'_A$ , а для рейки  $B$  неравенство нулей  $y_B = m_B - n'_B$ . Если на некоторой станции рейка  $A$  была задней, а  $B$  — передней и по ним сделаны отсчеты: по черной стороне —  $Z^*_A$  и  $II^*_B$ , а по красной стороне  $Z^*_A$  и  $II^*_B$ , то очевидно по переводе разности  $(Z^*_A - II^*_B)$  в метры; должны иметь контроль:

$$Z^*_A - II^*_B = (Z^*_A - Z^*_B) \text{ м. } + y_A - y_B$$

Очевидно на следующей станции поправка в разности уровней за неравенство нулей будет равна:

$$u_B - u_A$$

Величиной неравенства нулей приходится пользоваться на каждой станции для контроля отсчетов по рейкам. В описанном опыте следует определить  $u_A$  и  $u_B$  многократно, при разных постановках башмака.

Конечно, еще прежде чем приступить к полевой работе, должно нивелир *исследовать* и *поверить*. По определении увеличения трубы следует испытать ее качества — всего проще рассматриванием геометрических фигур и сравнением с трубами других точных нивелиров: одновременное рассматривание одной и той-же рейки разными нивелирами, отлично выясняет недостатки изображений, даваемых их трубами.

Следует требовать, чтобы нити трубы были-бы ровные, прямые и такой толщины, чтобы на расстоянии в 50 метров нить на рейке закрывала-бы около  $\frac{1}{3}$  миллиметра; сетка нитей должна быть перпендикулярна к оси трубы,

т. е. после тщательной установки по фокусу средней нити, никакого параллакса по крайним нитям не должно быть.

Окулярное колено должно иметь совершенно правильный ход. Отсутствие шатаний и колебаний в ходе окулярного колена поверяется так: от места постановки нивелира отмеряют расстояния в 15, 30, 45, 60 и 75 метров и в отмеренных точках забивают прочные колья, в верхнюю часть коих вколачивают специально заготовленные гвозди с сферической шляпкой. При некотором положении трубы — или горизонтальном, или слегка наклонном, делают отсчеты по рейке устанавливаемой поочередно на всех кольях. Затем, изменив наклон трубы, при новом ее положении повторяют эти отсчитывания рейки. Очевидно, при отсутствии колебаний и шатаний в ходе окулярного колена — изменения отсчетов будут пропорциональны (до  $\pm 1$  мм) соответственным расстояниям до реек. Но этот опыт не обнаруживает той неправильности в ходе окулярного колена, которая сказывается или перемещением центра сетки нитей по *постоянной кривой*, или по *постоянной прямой*, но делающей угол с главной оптической осью объектива.

Чтобы выяснить эту погрешность хода окулярного колена, в Германии поступают так. На ровном месте намечают точки 0, 1, ... 8, (чертеж 181) расположенные по окружности радиуса 50 метров с центром в *A* и отстоящие от точки *O* на 10, 20, 30, ... метров. Место для точек выбирают так, чтобы при работе вечером рейка на всех точках была-бы одинаково и хорошо освещена при наблюдениях ее из *A* и из *B*. В этих точках 0, 1, ... 8 забивают прочно колья с гвоздями, имеющими правильные сферические шляпки.

Нивелир перед исследованием выверяют самым тщательным образом. Установив нивелир в *A*, заставляют рейку становиться поочередно на точках 0, 1 ... 8 и, держа все время пузырек уровня строго на середине, делают отсчеты на рейке. Такую нивелировку колеьев исполняют шестью приемами, составляя каждый прием из двух полуприемов, исполненных при движении рейки в прямом и обратном направлении, и изменяя при переходе от приема к приему высоту инструмента. Очевидно, теперь будут получены точные разности высот точек 0, 1, 2 ... 8, каждая разность в среднем из 12-ти выводов.



Черт. 181.



Далее ставят нивеллир над точкой  $B$ , находящейся на той-же окружности в расстоянии 10 метров от  $O$  и делают шесть приемов нивелирования кольев  $0, 1, 2, \dots, 8$  — составляя каждый прием из двух полуприемов при прямом и обратном движении рейки по кольям, и изменяя при переходе от приема к приему высоту нивеллира.

Теперь из 12-ти отсчетов, полученных для каждой точки  $0, 1, 2, \dots, 8$  выводят средние:  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_8, a_9$ . Обозначая разности уровней точек  $0-1, 0-2, 0-3, \dots$  чрез  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_8$ , и, принимая альтитуду точки  $O$  равной 10000 мм, напишем:

$$h = 10000 + a_1 = h_1$$

$$h = 10000 + u_1 + a_2 = h_2$$

$$h = 10000 + u_2 + a_3 = h_3$$

$$\dots$$

$$h = 10000 + u_8 + a_9 = h_9$$

где  $h$  — горизонт инструмента. Взяв среднее из всех  $h$  и уклонения  $\delta$  от него отдельных  $h_1, h_2, \dots, h_9$ , напишем:

$$\delta_1 = b d_1 + c$$

$$\delta_2 = b d_2 + c$$

$$\delta_3 = b d_3 + c$$

$$\dots$$

$$\delta_9 = b d_9 + c$$

понимая под  $d_1, d_2, \dots, d_9$  — расстояния от  $B$  до  $0, 1, 2, \dots, 8$ . Член  $bd$  выражает собою очевидно влияние оставшейся в нивеллире неполной параллельности оси трубы и оси уровня. Определив по способу наименьших квадратов  $b$  и  $c$ , затем получаем систему вероятных уклонений:  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_9$ , которые уже и выражают неправильности хода сеточного колена. Обычно в нивеллирах, выпущенных известными механиками и немного еще бывшими в употреблении, величины  $\Delta$  не превосходят  $\pm 0.2$  миллиметра.

Полезно, только что описанным образом, исследовать нивеллир несколько раз чрез известные промежутки времени — до выпуска его в работу. Согласие коэффициентов  $b$ , получаемых из таких исследований, разделенных друг от друга несколькими днями, укажет на сохранение в нивеллире постоянства угла между осью трубы и осью уровня.

*Поверхки нивеллира* должны быть выполнены в таком порядке:

1) ось круглого уровня устанавливается параллельно оси вращения нивеллира.

2) ось уровня устанавливается перпендикулярно оси вращения нивеллира — это достигается поворачиванием верхней части нивеллира около вертикальной оси на  $180^\circ$  и надлежащей вслед за этим установкой элевационного винта.

3) ось уровня должна находиться в плоскости параллельной оси трубы. Для этого действуют боковыми (горизонтальными) винтами оправы уровня так, чтобы при отводе трубы — вращением ее около геометрической оси — вправо и влево от нормального положения ее в лагерах, — пузырек уровня или оставался-бы на месте, или-же уходил-бы немного но *всегда в одну сторону*.

4) устанавливают параллельность оси уровня и цапфенной линии трубы— для чего трубу вместе с уровнем перекалывают в лагерах и половину уклонения пузырька уровня от середины, происшедшего при перекалке, устраняют исправительными винтами уровня.

5) вновь устанавливают элевационным винтом перпендикулярность оси уровня к вертикальной оси вращения нивеллира и записывают отсчет по барабану элевационного винта, который мы назовем *нормальным*;

6) проверяют совпадение визирной и геометрической оси трубы— для чего устанавливают в расстоянии 50 метров от нивеллира рейку и, заметив место рейки покрываемое пересечением нитей трубы, вращают трубу в лагерах на  $180^\circ$  и наблюдают—сходит-ли при этом пересечение нитей с замеченного места рейки. Действуя винтами, держащими сетку нитей, добиваются того, чтобы при вращении трубы около геометрической оси на  $180^\circ$ , пересечение нитей совпадало-бы всегда с одной и той-же точкой рейки.

Необходимо иметь в виду, что наблюдаемые при вращении трубы в лагерах около ее геометрической оси смещения изображения относительно нитей трубы обусловлены тремя причинами:

а) эксцентрицитетом объектива; б) неправильностями лагер и цапф трубы; в) неправильным положением самой сетки.

Вторая причина должна быть исследована при помощи специального уровня, ставящегося ножками на цапфы трубы сверху. Такой уровень—с ценой деления в  $3''$ —должен быть заказан механику, изготовляющему инструменты для учреждения, ведущего государственную нивелировку, —сообразно конструкции его нивелиров и с обращением особого внимания на тщательность установки ножек уровня на цапфы трубы. Таким уровнем по известным правилам, можно, во-первых, определить неравенство цапф; во-вторых, вращая осторожно трубу в лагерах и оставляя добавочный уровень на цапфах по смещениям его пузырька выяснить правильность вращения трубы в лагерах. (Следует этот опыт делать до всех проверок нивеллира, предварительно совсем сняв уровень нивеллира, т. е. уровень находящийся под его трубой).

Что касается эксцентрицитета объектива, то при *заметных* размерах его обнаруживают так: выдвинув или вдвинув окулярную трубочку так, чтобы нити перестали-бы быть видимыми, фокусируют трубу по рейке в расстоянии 30-ти м от нивеллира и, вращая трубу в лагерах—наблюдают смещения изображений: это испытание следует делать также до исполнения всех проверок нивеллира. Эксцентрицитет объектива обычно очень мал—менее 0.02 мм и такой эксцентрицитет только что описанным путем не обнаружит. При существовании эксцентрицитета объектива, но при отсутствии неправильностей в устройстве лагер и цапф, проверка № 6 приведет к установлению параллельности визирной и геометрической оси (но не совпадению их).

7) По приведении нивеллира в горизонтальное положение, три нити трубы должны быть горизонтальными, а перпендикулярная к ним—вертикальна. Это достигается надлежащей установкой винтов, упирающихся в прилив трубы.

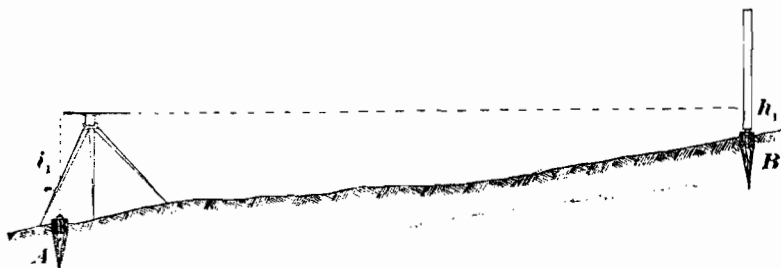
8) Визирная ось трубы должна быть параллельна оси уровня. Невыполнение этого требования может быть обусловлено не полным выполнением требований № 4 и № 5, а также неравенством цапф трубы. Проверка этого требования № 8 сводится собственно к определению угла  $i$ , оставшегося между осью трубы и осью уровня. Перед началом полевой кампании эту проверку следует выполнить особенно тщательно.

Следует, забив на местности прочно солидные колья *A* и *B* (с гвоздями, имеющими полусферические шляпки) в расстоянии друг от друга

50 м (см. черт. 182) прежде всего нивелированием из середины тщательно и многократно определить разность уровней  $u_0$  точек  $A$  и  $B$ , делая четное число приемов и слагая прием из двух полуприемов;

- |                |   |   |
|----------------|---|---|
| 1-ый полуприем | { | 1-ый взгляд на рейку № 1 на точке $A$   |
|                |   | 2-ой взгляд на рейку № 2 на точке $B$ . |
| 2-ой полуприем | { | 3-ий взгляд на рейку № 1 на точке $B$   |
|                |   | 4-ый взгляд на рейку № 2 на точке $A$   |

Теперь, поставив нивеллир в  $A$  так, чтобы его окуляр, при трубе направленной на  $B$ , приходился бы примерно на половину толщины рейки ближе к  $B$ , чем центр гвоздика в коле  $A$ , устанавливают тщательно нивеллир и делают по нитям трубы, приводя каждый раз уровень строго



Черт. 182.

на середину, ряд отчетов на рейке, стоящей в  $B$ . После этого рейку переносят в  $A$ , устанавливают ее на гвоздике кола  $A$  и отмечают на ней карандашом обвод крышечки надеваемой на наружный конец окуляра (если только установка штатива нивелира в  $A$  была сделана с соответственным расчетом, то указанная крышечка должна почти касаться рейки). Называя отсчет по центру этого кружка чрез  $i_1$ , а отсчет по нитям трубы чрез  $h_1$ , имеем:

$$u = i_1 - h_1 - d \operatorname{tg} i = i_1 - h_1 - x$$

Перенеся теперь нивеллир в  $B$  и оставляя рейку  $A$ , устанавливаем его штатив так, чтобы можно было измерить удобно и точно высоту  $i_2$  центра окуляра над точкой  $B$ . Затем берут ряд отчетов по рейке, стоящей в  $A$ , и перенеся ее в  $B$ , измеряют  $i_2$ . Из этой второй нивелировки имеем:

$$u = h_2 - i_2 + d \operatorname{tg} i = h_2 - i_2 + x$$

Сделав несколько таких приемов выводим из них  $d \operatorname{tg} i$  или  $x$  таким образом:

$$x = d \operatorname{tg} i = \frac{\sum [(i_1 + i_2) - (h_1 + h_2)]}{2n}$$

где  $n$  — число приемов, а  $i_1$  и  $h_1$  всегда относятся к точке  $A$ . Кроме того:

$$d \operatorname{tg} i = \frac{\sum (i_1 - h_1)}{n} = u_0$$

$$d \operatorname{tg} i = u_0 - \frac{\sum (h_2 - i_2)}{n}$$

Определив таким образом надежно  $d \operatorname{tg} i$ , в случае его значения меньшего миллиметра, пользуются затем этим его значением при введении поправки в нивелировку за неравенство расстояний нивелира от передней

и задней рейки; если же  $d l g_i$  более миллиметра,—то или переставляют сетку нитей так, чтобы отсчет  $h_1$  обратился-бы в  $h_1 - d l g_i$ , или-же, действуя исправительными винтами уровня, смещают его пузырек: в сторону окуляра при  $i$  положительном и в сторону объектива при  $i$  отрицательном — на величину, рассчитываемую так:

$$\frac{x}{d \mu^n \sin 1''}$$

Так как труба при нивелировке по русскому и германскому способу всегда вкладывается в лагеры однообразно, то получившаяся после такой перестановки уровня непараллельность его оси с цапфенной линией трубы не имеет никакого значения в работе, но, конечно, эта перестановка уровня заставит еще раз установить *нормальный* отсчет по элевационному винту, при котором будет перпендикулярность оси уровня к оси вращения нивеллира.

Механик *Бамберг* к своим нивеллирам прилагает добавочную линзу, которая, будучи надета на объектив, позволяет отчетливо видеть при фокусировке трубы на 50 м, рейку в расстоянии 3—4 м. Очевидно такой добавочной линзой можно с выгодой воспользоваться при только что описанной поверке, ставя сперва нивеллир в 3—4 м от *A*, и отсчитывая рейку при постановке ее в *A* и в *B*; а затем ставя нивеллир в 3—4 м от *B* и снова отсчитывая рейку в *B* и *A*.

При всех описанных поверках должно действовать исправительными винтами с полным умением, зная заранее устройство винтов и их оконечностей, и помня, что винт с соответствующей маткой имеет всегда схватку только в нескольких точках; если поверка будет выполнена, но винты примут при этом такое положение в матках, что схватка обеспечивается одной точкой, то такая поверка расстроится чрез несколько минут. Уверяющего инструмент должно быть настолько натренировано осязание, что при работе исправительными винтами он должен правильно оценивать схватку винта с маткой. Недаром французы говорят, что поверки геодезических инструментов может делать только артист.

В рейках должно верить круглые уровни и перпендикулярность плоскости пятки к продольной оси рейки.

Поверку перпендикулярности оси уровня к оси вращения нивеллира и поверку уровней при рейках надлежит делать ежедневно.

Поверку № 4 выполняют примерно чрез неделю, а поверки №№ 6, 7 и 8—чрез месяц и даже реже.

Само собой разумеется, что до выполнения всех поверок следует установить правильность и легкость вращения верхней части нивеллира около вертикальной оси инструмента. Чистку: вертикальной оси; втулки, в которую она вкладывается; обоймы наводящего винта; горизонтальной оси в нивеллирах *Гильдебранда* и *Бамберга*—следует делать во время полевой кампании раз в месяц.

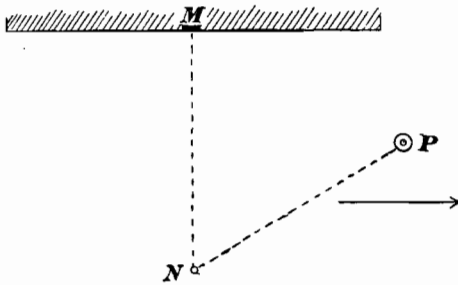
**78. Главные черты инструкций русских нивелировок. Порядок наблюдений, запись и контроль на станции.** Марки точного нивелирования располагаются чрез 6 км; на пунктах скрещения железных дорог закладывают по две марки—на разных сторонах станционного здания. Нивелировка ведется по секциям—от марки до марки прямым ходом и затем обратным.

Промежуточные или временные знаки точного нивелирования берут примерно чрез два километра друг от друга и от марок, ограничивающих секцию. На временных знаках рекомендуется кончать дневную работу. Впрочем нередко вблизи тех мест, где приходится конец дневной работы или ее полуденный перерыв, не имеется подходящих сооружений, на которых

можно было-бы устроить временный знак. Тогда временные знаки все равно избираются так, чтобы ими секция разбилась-бы на три части, с захватом их при нивелировке и в прямом и в обратном направлении (ходе).

По исполнении прямого и обратного хода между двумя марками, секция сейчас-же подсчитывается—без введения правда поправок за рейки и за

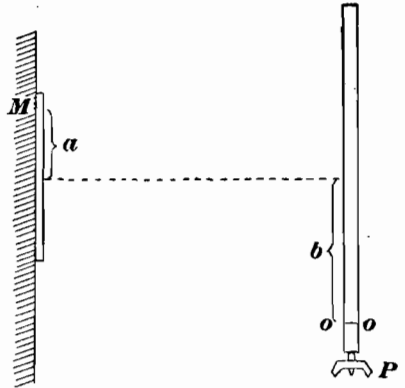
неравенство расстояний: разногласие прямого и обратного хода не должно превышать 8-ми мм\*). В начале прямого хода нивелир ставится в точке  $N$ , (см. черт. 183)\*\*) лежащей на перпендикуляре к плоскости марки  $M$  и в расстоянии от нее 15—25 м; первый башмак ставится в  $P$ — причем  $MN = NP$ . В центр марки вставляется штифт, на который подвешивается двухсторонняя



Черт. 183

рейка длиною несколько более метра—нуль ее делений приходится точно в центре отверстия, чрез которое проходит штифт для подвешивания; деления на рейке идут *сверху вниз*. Очевидно, разность уровней марки и нуля  $oo$  рейки, стоящей на первом башмаке  $P$ , будет равна *сумме* отсчетов  $a$  и  $b$  на подвесной реечке и по рейке на башмаке, *взятой со знаком минус* ( $-(a + b)$  черт. 184). Самое нивелирование этого первого промежутка между маркой  $M$  и башмаком  $P$  делается с соблюдением того-же порядка, какой применяется на всех станциях.

При привязке к марке, кончающей секцию, поступают так: место для последнего башмака должно позволить на предпоследней станции встать с нивелиром в расстояниях 50 м от предпоследнего и последнего башмака, и кроме того последний башмак должен придтись вблизи марки так, чтобы можно было-бы на последней станции нивелир поставить примерно на перпендикуляре к плоскости марки и в равных расстояниях от марки и от последнего башмака; последняя разность уровней будет получаться, как  $a + b$ . При переходе к обратному ходу происходит перемена реек, — т. е. если на последнем башмаке стояла нечетная рейка, то теперь ставится четная.



Черт. 184.

На последнем штативе перед дневным перерывом, оба башмака забивают на дно ям, около 0,3—0,4 м глубиною. Кроме наблюдений реек на этих башмаках, с последнего штатива по общим правилам нивелирования наблюдают еще короткую рейку, подвешенную на штифте, забитом в телеграфный столб или в стену здания. (Следовательно последний или предпоследний башмак должен придтись вблизи телеграфного столба или здания). Если телеграфного столба или здания не имеется, то тогда вблизи переднего башмака забивают кол, длиною в 40 см и толщиною около 8 см, причем рейка должна

\*) По последней инструкции В. Г. У., если  $k$  — число километров между марками, то разногласие прямого и обратного хода не должно превышать  $\pm 3 \sqrt{k}$ .

\*\*\*) Стрелка на чертеже 183 указывает направление линии нивелирования.

будет ставиться на сферическую головку гвоздя, вбитого в такой кол. Таким образом всегда на последнем перед дневным перерывом штативе наблюдают три точки: два башмака и подвесную рейку, или два башмака и головку кола. После нивелирования этих трех точек, отмечают места ножек штатива, башмаки осторожно прикрывают землей и оставляют при них сторожа. После перерыва башмаки осторожно откапывают, штатив и рейки устанавливают на прежних местах и повторяют нивелирование станции, с включением в него наблюдений на короткую рейку или на головку кола. Сравнение изменений в отсчетах задней и передней рейки с изменением отсчета по подвесной рейке (или по рейке, поставленной на кол)—дает надежный материал для суждения о том,—не сдвинулся-ли который-нибудь из башмаков. В случае сдвига заднего башмака, оставляют результат нивелирования *до перерыва* и идут далее от переднего башмака. В случае сдвига переднего башмака, результат нивелирования до перерыва на последней станции зачеркивается и нивелировка ведется вновь от *заднего* башмака. В редком случае сдвига обоих башмаков, оставляют результат нивелирования до перерыва между задним башмаком и подвесной рейкой (или колом) и двигаются вперед от подвесной рейки или кола, как от временного знака. Понятно, что все только что приведенные соображения и расчеты основаны на полной безошибочности работы на последней станции до перерыва и после перерыва; поэтому здесь должно особенно внимательно контролировать работу.

*При перерыве работы на ночь*, передняя рейка ставится на точку, тщательно отмеченную на надежном каменном или металлическом сооружении и служащую временным знаком, а задняя рейка—на кол, длиною около 40 см, и толщиной около 8 см, прочно забитый и имеющий сверху гвоздик с сферической шляпкой (следовательно на предпоследнем штативе передняя рейка устанавливается не на башмаке, а на этом коле). Кроме того на последнем штативе наблюдается еще короткая рейка, подвешенная на стене, или на телеграфном столбе, а если такого столба или стены в надлежащем расстоянии не имеется, то наблюдается передняя рейка, переставленная или на головку рельса против временного знака, или на второй кол, забитый вблизи временного знака.

При отсутствии временного знака в виде точки на каменном или металлическом сооружении, таковой заменяется колом указанных размеров, с соблюдением всего остального. На следующий день, нивелирование трех точек, взятых с последнего штатива, повторяется.

*Работа ведется в солнечные летние дни* от 5 $\frac{1}{3}$  часов утра, с наступлением спокойных, отчетливых изображений, до 9 часов; и с 4-х часов пополудни почти до захода солнца. *В пасмурные дни и осенью* работу можно кончать перед полуднем в 10 и в 10 $\frac{1}{2}$  часов, а начинать затем с 3-х часов пополудни и даже ранее.

*Расстояния* отбивают проволочным канатиком, допуская наибольшее неравенство расстояний нивелира от реек в 0.5 м. Рекомендуется во время работы образовывать  $\Sigma (d_s - d_n)$ —т. е. сумму неравенств расстояний до реек; если оказывается накопление этих неравенств в одну сторону, то на следующих станциях намеренно переднюю рейку ставят так, чтобы знак  $d_s - d_n$  сделался бы обратным. В нивелировании *высоко-точном* надлежит выдерживать расстояние от нивелира до рейки в 50 м; в нивелировании точном можно,—при хороших атмосферных условиях—доводить это расстояние до 65 м.

*Температура воздуха* определяется в русских работах термометром пращом, примерно чрез каждые полчаса; температуры на высоте луча (на каждой станции) при задней, передней рейке и при объективе нивелира—не определяют.

*Определение угла  $i$*  приурочивается к времени самых спокойных изображений и к ровному участку; производится чрез два — три дня.

На каждой станции (или штативе) делают *четыре* взгляда:

- первый — по черной стороне задней рейки ( $З^*$ )
- второй — по черной стороне передней рейки ( $П^*$ )
- третий — по красной стороне передней рейки ( $П^к$ )
- четвертый — по красной стороне задней рейки ( $З^к$ )

Каждый взгляд состоит: из наведения трубы на рейку; приведения элевационным винтом пузырька уровня *почти* на средину, причем всегда окончательная установка уровня делается, ввинчивая элевационный винт; отсчета уровня; отсчетов по трем нитям трубы; отсчета уровня. При переходе от второго к третьему взгляду рекомендуется слегка постучать по штативу, чтобы отсчет третий был сделан при новом положении уровня. Запись на станции и контроль видны из следующего примера нивелировки, в которой черная рейка была сантиметровая, а красная с делениями чрез  $\frac{1}{200}$  сажени.

Порядок записи наблюдений указан арабскими цифрами; полевые записи набраны прямым жирным шрифтом. Контрольные числа, образуемые в поле тотчас после наблюдений на штативе, указаны римскими цифрами. Все остальные числа, получаемые уже при камеральной обработке, набраны тонким наклонным шрифтом.

При разборе примера, прежде всего остановимся на правилах введения поправок за уровень. Очевидно, что если окулярный конец трубы поднят, то поправка за уровень положительна. Поэтому, если уровень нивелира имеет нуль на середине, то отсчет по концу пузырька в половине трубки уровня, ближайшей к объективу имеет знак *минус*, а в половине трубки, ближней к окуляру, знак *плюс*. Называя чрез  $\mu$  цену *полуделения* уровня и чрез  $d$  расстояние до рейки, илзем формулу поправки за уровень:

$$(\text{окул.} - \text{об'ект.}) \mu'' \cdot d \sin 1''.$$

Если нуль уровня при объективе, и на середине трубки значится число  $m$ , то поправка будет:

$$(a + b - 2m) \mu'' \cdot d \sin 1''$$

Если нуль при окуляре, то поправка вычисляется так:

$$[2m - (a + b)] \mu'' \cdot d \sin 1''$$

Для вычисления этих поправок составляется табличка с двумя входами; один — число полуделений в наклонности оси уровня, другой — расстояние до рейки в *единицах дальномера трубы*.

ТАБЛИЦА ПОПРАВОК ЗА УРОВЕНЬ ПРИ  $\mu = 2''.0$

$\mu$ \ D	300	400	500	60	70	80	90	100	200
1	0.41	0.55	0.69	0.08	0.10	0.11	0.12	0.14	0.28
2	0.82	1.11	1.40	0.16	0.19	0.22	0.25	0.27	0.56
3	1.25	1.66	2.07	0.25	0.29	0.33	0.37	0.42	0.83
4	1.67	2.22	2.77	0.33	0.38	0.44	0.48	0.56	1.11
5	2.09	2.77	3.46	0.41	0.48	0.55	0.63	0.70	1.39
6	2.52	3.33	4.15	0.50	0.58	0.66	0.72	0.84	1.67
7	2.83	3.88	4.85	0.57	0.67	0.77	0.86	0.97	1.94
8	3.34	4.44	5.54	0.67	0.78	0.88	1.00	1.11	2.22
9	3.75	5.00	6.23	0.75	0.88	1.00	1.12	1.25	2.50

Таблица составлена в расчете, что наичаще встречаемое в нивелировке расстояние будет около 360.

Начало 4 <sup>h</sup> 10 <sup>m</sup>		Конец 4 <sup>h</sup> 20 <sup>m</sup>	
Температура +16°		Грунт	
Направление и сила ветра		Напр. хода	
Облачность			
Изображения <i>хорошие, солнце</i>			
З № 1 Шт. 16		П № 2	
		XVI +25	
	XIII 417	XV -4	XIV 421
a) -0.6	30.3 10.3 1)		31.1 11.1 6)
b) -0.6	9.10 2)	+0.71 III	8.39 7)
11) -11.19,0	11.20 3)	+0.70 IV	10.50 8)
l) -0.35	13.27 4)	+0.67 V	12.60 9)
I -0.6	30.3 10.3 5)	p) +0.92	31.1 11.1 10)
		VI +0.69,33	
	r) 11.18,65	l) + 0.70,25	s) 10.48,40
	x) 141.78,05	y) + 50.08,55	z) 91.69,50
	x <sub>1</sub> ) 152.96,70	y <sub>1</sub> ) + 50.78,80	z <sub>1</sub> ) 102.17,90
	i) 392		k) 396
e) -0.6	30.3 10.3 18)		31.0 11.5 13)
f) -0.6	7.57 19)	-0.27 IX	7.84 14)
23) 9.53,33	9.54 20)	-0.29 X	9.83 15)
n) -0.33	11.49 21)	-0.31 XI	11.80 16)
VII -0.6	30.3 10.3 22)	q) + 1.05	31.4 11.0 17)
		XII -0.29,00	
	u) 9.53,00	r) - 0.27,95	v) 9.80,95
	x <sub>2</sub> ) 126.35,83	y <sub>2</sub> ) + 47.88,69	z <sub>2</sub> ) 78.47,14
	x <sub>3</sub> ) 135.88,83	y <sub>3</sub> ) + 47.60,74	z <sub>3</sub> ) 88.28,09

Уровень

Нити

Уровень

Уровень

Нити

Уровень

XVII	XVIII
+ 69,33	- 29,00
+ 0,80	+ 0,90
+ 70,13	- 28,10
	- 1,88
	- 29,98
	+ 100
	+ 70,02



При записи отсчетов по нитям, сперва определяют и записывают миллиметры, а потом уже приписывают слева дециметры и сантиметры. Во всех цифрах примера влево от точки стоят дециметры. При записи уровня наблюдают, чтобы вторые отсчеты уровня при получении *взгляда* отличались бы от первых отсчетов уровня, соответствующих этому-же взгляду, не более, чем на полуделение (т. е. сравнивают строчки, занумерованные арабскими цифрами: 1 и 5; 6 и 10; 18 и 22; 13 и 17). Получив взгляды первый и второй, сейчас-же выводят средние отсчеты по нитям — 11 19,0 и 10 49, 67 и сравнивают их с отсчетами по средней нити 11 20,0 и 10 50,0. Разногласие не должно превышать  $\pm 1$  мм\*). Если это выполняется, то переходят к нивелировке по красной стороне. Там выполняют такой-же контроль — сличением среднего отсчета по нитям с отсчетами по средней нити. После этого приступают к последующим контролям. Так как в приведенном примере нуль уровня расположен при окуляре, а на середине его трубки число 20, то выводят *вторые* наклонности оси уровня при каждом взгляде по формуле:

$$40 - (a + b)$$

и получают числа

$$-0,6 \dots (I); -2,2 \dots (II); -0,6 \dots (VII); \text{ и } -2,4 \dots (VIII)$$

Затем выводят *разности уровней по нитям*, т. е. числа:

$$\left. \begin{array}{l} +0.71 \dots (III) \\ +0.70 \dots (IV) \\ +0.67 \dots (V) \end{array} \right\} \text{ по черной рейке.}$$

$$\left. \begin{array}{l} -0.27 \dots (IX) \\ -0.29 \dots (X) \\ -0.31 \dots (XI) \end{array} \right\} \text{ по красной рейке.}$$

Если назвать угол между нитями (средней и крайней) чрез  $f$  и принять, что главная визирная ось горизонтальна, то, обозначая отсчеты задней рейки по верхней, средней и нижней нити чрез  $Z_в$ ,  $Z_с$  и  $Z_н$ , а отсчеты по тем же нитям на передней рейке чрез  $П_в$ ,  $П_с$ ,  $П_н$ , имеем для разности уровней и такие значения:

$$u = Z_в - П_в + tg f (d_з - d_п)$$

$$u = Z_с - П_с$$

$$u = Z_н - П_н - tg f (d_з - d_п)$$

Следовательно, неравенство расстояний от нивелира до реек вызывает равные по величине, но противоположные по знаку уклонения разностей уровней, выведенных по крайним нитям, от разности уровней по средней нити. Поэтому числа III, IV, V и числа IX, X, XI должны иметь *равномерный* ход и средний вывод из чисел III и V, (а также из чисел IX и XI) не должен отличаться от числа IV (или соответственно от числа X) более, чем на 1,5 мм; или среднее из разностей уровней по трем нитям не должно отличаться от разности уровней по средней нити более чем на 1,2 мм. Получение чисел VI и XII, равных:

$$\frac{71 + 70 + 67}{3} = 69.33 \text{ и } \frac{27 + 29 + 31}{3} = 29.00$$

и есть следующий контроль наблюдений.

\*) с принятием, конечно, в расчет несимметрию нитей.

Так как расстояния до реек почти равны, то в поле можно применять упрощенную формулу для введения поправки за уровень прямо в разность уровней. Эта поправка равна:

наклонности уровня при взгляде назад минус наклонность уровня при взгляде вперед, умноженной на  $\mu \cdot \frac{50000}{200000}$

Поэтому для черной нивеллировки при цене деления уровня в 4", поправка за уровень равна  $(-0,6 + 2,2) \cdot \frac{1}{2} = +0,80$  мм (см. XVII).

Для красной нивеллировки:

$$(-0,6 + 2,4) \cdot \frac{1}{2} = +0,90 \text{ мм (см. XVIII).}$$

В столбцах XVII и XVIII примера, эти поправки выписывают под числами +69.33 и -29.00 и получают после сложения разности уровней +70.13 и -28.10. Эти последние числа различаются друг от друга из-за неравенства нулей реек и из-за неодинаковости величины делений на черной и красной стороне. Для приближенного перевода величин, отсчитанных по красной шкале, в деления черной шкалы, должно в нашем примере к ним прибавлять одну пятнадцатую их долю. Число -1.88, стоящее в столбце XVIII, представляет именно  $\frac{1}{15}$  долю от -28.10 т. е. от разности уровней по красной шкале. Числа +70.13 и -29.98 различаются на неравенство нулей реек, которое было равно 100 мм, причем, так как это неравенство было только на рейке № 1, то когда эта рейка — задняя, то

$$(Z_ч - П_ч) - (Z_к - П_к) = 100 \text{ мм}$$

а когда № 1 впереди, то:

$$(Z_ч - П_ч) - (Z_к - П_к) = -100 \text{ мм}$$

Итак последний контроль:

$$+70.13 - (-29.98) = +100.11 \text{ мм}$$

должен удовлетворяться до  $\pm 1.5$  мм.

Наконец выводят расстояния (XIII и XIV) нивеллира от реек:

$$1327 - 910 = 417 \text{ и } 1260 - 839 = 421$$

и получают неравенство расстояний:

$$417 - 421 = -4 \dots \dots \text{(XV)}$$

и складывают его с суммой неравенства расстояний, накопившейся до рассматриваемого штатива с начала хода:

$$-4 + 29 = +25 \dots \dots \text{(XVI).}$$

**79. Обработка хода исполненного между двумя марками по русскому способу.** Прежде всего в полевой журнал выписывают из таблицы поправки за уровень. Для этого образуют средние из чисел I и a, II и e, VII и e, VIII и g и получают для каждого взгляда наклонности в полуделениях: число b равное -0.6, число d, равное -2.2 и числа f и h, равные соответственно -0.6 и -2.45. Теперь по аргументам расстояний 417, 421, 392 и 396 находят из таблицы — поправки взглядов в миллиметрах, которые и вписывают в строках l, m, n и o. Складывая эти поправки с выведен-

ными средними отсчетами по нитям, получают исправленные взгляды, которые вписывают в места схемы  $r$ ,  $s$ ,  $u$  и  $v$  и сейчас-же образуют исправленную за уровень разность уровней:  $t = VI \mp p$  и  $w = XII \mp q$ , причем получают контроль:

$$11 \ 18,65 - 10 \ 48,40 = \mp 0,70,25$$

$$9 \ 53,00 - 9 \ 80,95 = -- 0,27,95$$

Исправленные за уровень взгляды и разности уровней, в схеме постепенно суммируют начиная с 1-го штатива. Поэтому в места схемы:  $x$ ,  $z$ ,  $x_2$  и  $z_2$  переписывают из схемы штатива № 15 сумму задних взглядов по черной рейке от первой станции до 15-ой (141.78,05), сумму передних взглядов по черной рейке от первой станции до 15-ой включительно (91.69,50) и такие-же суммы 126.35,83 и 78.47,14 — по красной рейке. В местах-же схемы  $y$  и  $y_2$  — вписывают разность уровней, накопившуюся от первой станции до 15-ой включительно. Суммируя теперь  $r$  и  $x$ ,  $s$  и  $z$ ,  $y$  и  $t$  получаем в  $x_1$ ,  $z_1$  и  $y_1$  соответственно

$$\Sigma Z_n, \Sigma H_n \text{ и } \Sigma u_n.$$

Суммируя  $u$  и  $x_2$ ,  $v$  и  $z_2$ ,  $w$  и  $y_2$ , получаем в  $x_3$ ,  $z_3$  и  $y_3$  соответственно

$$\Sigma Z_k, \Sigma H_k \text{ и } \Sigma u_k$$

Причем имеем контроли:

$$\Sigma Z_n - \Sigma H_n = \Sigma u_n$$

$$\Sigma Z_k - \Sigma H_k = \Sigma u_k$$

Таким образом очевидно, что когда в журнале подойдем к последней марке, то на последней его странице в соответственных графах будут получены для всего хода

$$\Sigma Z_n, \Sigma H_n, \Sigma Z_k \text{ и } \Sigma H_k,$$

а в графах  $y_1$  и  $y_3$  будут получены разности уровней марок по черной и красной шкале

$$\Sigma u_n = U_n \text{ и } \Sigma u_k = U_k.$$

Наконец в графе XVI будут получены для всего хода  $\Sigma (D_3 - D_n)$ . Эти окончательные величины журнала должны быть исправлены:

1) поправкой за угол  $i$ , равной

$$\mp k \operatorname{tg} i \Sigma (D_3 - D_n)$$

2) поправкой за неверность длин реек и их подразделений.

Допустим сперва, что подразделения реек правильны, т. е. равны между собою.

Назовем:

через  $S_a$  длину 100 сантиметровых делений черной стороны рейки  $A$  и

через  $M_a$  — деленное на три расстояние между крайними контрольными марками, если они захватывают на рейке 3 м; если-же между крайними марками — 2 м, то  $M_a$  будет равно половине расстояния между ними.

Пусть из исследований получим:

до начала работ  $S_a = 1000 \text{ мм} \mp \Delta'_a$

$$M_a = 1000 \text{ мм} \mp m'_a$$

по окончании работ  $S_a = 1000 \text{ мм} \mp \Delta'''_a$

$$M_a = 1000 \text{ мм} \mp m'''_a$$

при исполнении данной  
секции нивелировки

$$M_a = 1000 \text{ м.м.} + m''_a$$

Для момента работы имеем:

$$S_a = 1000 \text{ м.м.} + m''_a + \frac{\Delta'_a - m'_a + \Delta'''_a - m'''_a}{2} = 1000 \text{ м.м.} + \Delta''_a \quad (1)$$

Для черной стороны рейки *B* таким-же образом получим:

$$S_b = 1000 \text{ м.м.} + \Delta''_b; \quad \Delta''_b = \frac{\Delta'_b - m'_b + \Delta'''_b - m'''_b}{2} + m''_b \quad (2)$$

Называя теперь:

$\Sigma Z'_A$	. . .	сумму взглядов назад по рейке <i>A</i>	черная сторона
$\Sigma \Pi'_A$	. . .	" "	вперед " <i>A</i> " "
$\Sigma Z'_B$	. . .	" "	назад " <i>B</i> " "
$\Sigma \Pi'_B$	. . .	" "	вперед " <i>B</i> " "

и выражая эти величины в метрах, получим поправку  $\delta u$  в разности уровней между марками таким образом:

$$\delta u = (\Sigma Z'_A - \Sigma \Pi'_A) \Delta''_a + (\Sigma Z'_B - \Sigma \Pi'_B) \Delta''_b \quad (3)$$

Вместо этой формулы, требующей выборки (хотя и приближенно) из журнала величин  $\Sigma Z'_A$ ,  $\Sigma Z'_B$  и т. д. . . ., можно с достаточной точностью употреблять более простую:

$$\delta U = U \cdot \frac{\Delta''_a + \Delta''_b}{2} \quad (4)$$

понимая под *U* — разность уровней между марками в метрах. Небольшая погрешность этой формулы будет почти совершенно исчезать в среднем из прямого и обратного хода, если в обратном ходе рейки переменялись местами, как было указано выше.

Перейдем теперь к *красным сторонам реек*, с делениями чрез  $\frac{11}{10}$  см.

Контрольные марки здесь расположены *чрез метр*, т. е. чрез  $\frac{1000}{11}$  делений рейки. Если для  $M_a$  и  $M_b$  мы имеем значения  $m'_a, m''_a, \dots, m'''_b$  выраженные в миллиметрах, то вообразив фиктивные марки чрез 100 делений рейки, мы очевидно имели-бы расстояния между ними в  $1100 \text{ м.м.} + \frac{11}{10} m'_a$ ,

$1100 + \frac{11}{10} m'_b \dots$  Если мы расстояния между такими фиктивными марками выразим в  $\frac{11}{10}$  см, то получим, что  $m'_a, m'_b, \dots, m'''_a, \dots, m'''_b$  представят в  $\frac{11}{10}$  м.м. различие этих расстояний от 100 делений, точно равных каждое  $\frac{11}{10}$  см.

Поэтому, если  $\Delta'_a, \Delta'_b, \Delta'''_a$  и  $\Delta'''_b$  мы выразим в  $\frac{11}{10}$  миллиметра, то:

$$\Delta''_a = \frac{\Delta'_a - m'_a + \Delta'''_a - m'''_a}{2} + m''_a \quad (5)$$

$$\Delta''_b = \frac{\Delta'_b - m'_b + \Delta'''_b - m'''_b}{2} + m''_b \quad (6)$$

выразят поправки 100 делений красных сторон реек *A* и *B*, выраженных в  $\frac{11}{10}$  см. Поэтому, если мы имеем например в миллиметрах

$$\left. \begin{array}{l} S_a = 1100,08 \\ S_b = 1100,12 \end{array} \right\} \text{ перед работой}$$

$$\left. \begin{array}{l} S_a = 1100,15 \\ S_b = 1100,18 \end{array} \right\} \text{ после работ}$$

$$\left. \begin{array}{l} M_a = 1000,05 \\ M_b = 1000,06 \end{array} \right\} \text{ перед работой}$$

$$\left. \begin{array}{l} M_a = 1000,07 \\ M_b = 1000,12 \end{array} \right\} \text{ после работ}$$

$$\left. \begin{array}{l} M_a = 1000,10 \\ M_b = 1000,12 \end{array} \right\} \text{ во время хода между марками}$$

то:

$$\begin{array}{ll} \Delta'_a = +0,073 & \Delta'_b = +0,109 \\ m'_a = +0,050 & m'_b = +0,060 \\ \Delta'''_a = +0,136 & \Delta'''_b = +0,164 \\ m'''_a = +0,070 & m'''_b = +0,120 \end{array}$$

$$\Delta''_a = +0,10 + \frac{0,073 - 0,050 + 0,136 - 0,100}{2} = +0,13$$

$$\Delta''_b = +0,12 + \frac{0,109 - 0,060 + 0,164 - 0,120}{2} = +0,59$$

причем  $\Delta''_a$  и  $\Delta''_b$  будут выражены в  $\frac{11}{10}$  мм. Если суммы взглядов вперед и назад по красным сторонам, т. е. величины  $\Sigma Z'_A$ ,  $\Sigma Z'_B$ ,  $\Sigma \Pi'_A$ ,  $\Sigma \Pi'_B$ , выразим теперь, приняв за единицу 100 делений рейки, то поправка в разности уровней по красным сторонам получится так:

$$\delta U_k = (\Sigma Z'_A - \Sigma \Pi'_A) \Delta''_a + (\Sigma Z'_B - \Sigma \Pi'_B) \Delta''_b$$

Или

$$\delta U_k = U_k \cdot \frac{\Delta''_a + \Delta''_b}{2}$$

где  $U_k$  — разность уровней между марками, выраженная приняв за единицу 100 делений красной стороны. Взяв сумму

$$U_k + \delta U_k$$

получим разность уровней *исправленную*, но выраженную в  $\frac{11}{10}$  м; увеличив ее

на  $\frac{1}{10}$  ее долю, получим разности уровней по красным сторонам реек в

метрах. Величины  $\Sigma Z'_A$ ,  $\Sigma \Pi'_B$  . . . могут быть получены из  $\Sigma Z'_A$ ,  $\Sigma \Pi'_B$  . . . ,

путем уменьшения их соответственно на  $\frac{1}{11}$  их долю. Очевидно, если на

красной стороне нанесены двухсотые доли сажени, то нужно поступать совершенно так-же, как и в случае делений в  $\frac{11}{10}$  см. Именно, поправки  $\Delta'_a$ ,

$\Delta'''_a, \Delta'_b, \Delta'''_b$  — ста делений красных сторон, полученные сперва в миллиметрах, нужно выразить в  $\frac{1}{2000}$  сажени, путем уменьшения этих поправок на  $\frac{1}{15}$  их долю. Оставляя поправки  $M_a$  и  $M_b$  — т. е. величины  $m'_a, m''_a, m'''_a, m'_b, m''_b$  и  $m'''_b$  выраженными в миллиметрах, получим в  $\frac{1}{2000}$  доле сажени:

$$\Delta''_a = \frac{\Delta'_a - m'_a + \Delta'''_a - m'''_a}{2} + m''_a$$

$$\Delta''_b = \frac{\Delta'_b - m'_b + \Delta'''_b - m'''_b}{2} + m''_b$$

Выражая  $\Sigma \mathcal{E}_A^k, \Sigma \mathcal{E}_B^k, \Sigma \Pi_A^k, \Sigma \Pi_B^k$  в 100 делениях красной рейки (в полуса- жнях), получим поправку  $\delta U_k$  в  $\frac{1}{2000}$  сажени по такой формуле:

$$\delta U_k = (\Sigma \mathcal{E}_A^k - \Sigma \Pi_A^k) + (\Sigma \mathcal{E}_B^k - \Sigma \Pi_B^k)$$

После этого остается перевести исправленную разность уровней в метры и его доли, — пользуясь тем значением переводящего коэффициента, которое было принято при вычислении поправок штрихов, расположенных чрез  $\frac{1}{20}$  сажени.

Предполагается, конечно, что контрольные марки на красных сторонах расположены чрез метр. Если же марки расположены чрез  $x$  делений рейки в  $\frac{1}{200}$  сажени, то надлежит  $m'_a, m'''_a, m'_b \dots$  умножить на  $\frac{94}{x}$ .

*Пример.* На рейках с подразделениями чрез  $\frac{1}{200}$  сажени на красных сто- ронах, марки на красных сторонах были при штрихах 50-ом, 144-ом и 238-ом, т. е. располагались чрез 94 деления или чрез расстояние, очень близкое к метру.

Из исследований оказалось:

перед началом работ	$S_A = 1066.45$	
	$M_A = 1002.69$	$m'_a = +2.69$
	$S_b = 1066.59$	

	$M_b = 1002.79$	$m'_b = +2.79$
--	-----------------	----------------

по окончании работ	$S_A = 1066.55$	
	$M_A = 1002.75$	$m'''_a = +2.75$
	$S_b = 1066.59$	

	$M_b = 1002.80$	$m'''_b = +2.80$
--	-----------------	------------------

во время исполнения секции между марками № 9 и № 10	$M_a = 1002.73$	$m''_a = +2.73$
	$M_b = 1002.82$	$m''_b = +2.82$

Так как 100 делений рейки *должны быть* равными 1066.81 мм, то имеем:

$$\Delta'_a = -0.36 \text{ мм} = -0.34 \text{ д. р.}$$

$$\Delta'''_b = -0.26 \text{ мм} = -0.24 \text{ д. р.}$$

$$\Delta'_b = -0.22 \text{ мм} = -0.21 \text{ д. р.}$$

$$\Delta'''_a = -0.22 \text{ мм} = -0.21 \text{ д. р.}$$

Знак „д. р.“ обозначает величину, выраженную в  $\frac{1}{2000}$  сажени.

Теперь имеем:

$$\Delta''_a = + 2.73 + \frac{-0.34 - 2.69 - 0.24 - 2.75}{2}$$

$$\Delta''_b = + 2.82 + \frac{-0.21 - 2.79 - 0.21 - 2.80}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta''_a = -0.28 \\ \Delta''_b = -0.18 \end{array} \right\} \text{ в } \frac{1}{2000} \text{ сажени.}$$

Выписка из полевого журнала между марками № 9 и № 10 дает в полусаженях:

$$\begin{array}{r} \Sigma Z'_A = 30,10 \\ \Sigma II'_A = 39,20 \\ \hline - 9,1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \Sigma Z'_B = 35,50 \\ \Sigma II'_B = 46,00 \\ \hline - 10,5 \end{array}$$

Поэтому:

$$\delta U^k = (-9,1)(-0,28) + (-10,5)(-0,18) = + 4,44 \text{ д. р.}$$

Наблюденная разность уровней в полусаженях:

$$- 19,604.0$$

$$\text{поправка} \quad + 4.4$$

$$\text{исправленное } U = -19,599.6$$

Исправленная разность уровней в метрах равна 20, 9090.

Если в *некоторых местах* рейки *изменяется заметные случайные погрешности*, то поступают так.

На графике поправки дециметровых штрихов черной стороны рейки А откладывают при штрихах 10, 20 и 30, на ординатах, соответственно величины  $\Delta''_a$ ,  $2\Delta''_a$ ,  $3\Delta''_a$ , выраженные в миллиметрах и соединяют прямой концы этих откладываний. Отметив те места графика, где разность ординат графика и построенной прямой более  $\pm 0.2$  мм, определяют для таких мест по графику „случайную“ поправку: ордината графика минус ордината прямой. То же самое проделывают по графику черной стороны рейки В, используя величину  $\Delta''_b$ .

В журнале нивелировки находят те отсчеты по рейкам, которые требуют по графику исправления за *случайные* ошибки штрихов, выписывают с графика *случайные* поправки этих отсчетов красными чернилами на полях журнала, по ним *соображают* и вычисляют *случайные* поправки в разностях уровней и постепенно их суммируют от штатива к штативу — красными чернилами, на нижних клапанах листов журнала.

Суммарную поправку за *случайные* ошибки штрихов на всем ходе между двумя марками прибавляют к поправке за *систематическую погрешность в размерах делений* реек *A* и *B*, вычисляемой по формуле (3) или (4). Нужно сказать, что описанное введение поправок за *случайные* отклонения графика поправок от прямой, выражающей систематическую погрешность в размере делений, стоит делать лишь в том случае, когда число отклонений, больших  $\pm 0.2$  мм, на всей рейке не превышает 5—10-ти; иначе потребуются слишком большой труд.

Если имеем на красной стороне рейки случайные погрешности, превышающие  $\pm 0.2$  мм, то при построении на графике поправок прямой, выражающей систематический ход, нужно будет величины  $\Delta''_a$  или  $\Delta''_b$  перевести предварительно из  $\frac{11}{10}$  см, или из  $\frac{1}{2000}$  сажени, в миллиметры и получить затем *случайные* поправки в миллиметрах; подсчет по журналу поправок за случайные ошибки штрихов будет вестись так-же в миллиметрах, а получив суммарную поправку в миллиметрах на весь ход между марками, затем ее переводят в  $\frac{11}{10}$  см (или в  $\frac{1}{2000}$  сажени) и *прибавляют* к поправке *би* за систематическую погрешность в делениях рейки, вычисляемую согласно вышесказанного.

Иногда для нижней части рейки систематическая поправка  $\Delta$  ее 100 делений заметно имеет иное значение, чем для средней или верхней части рейки. Тогда приходится график поправок разбить на две или три части, и в каждой части подобрать прямую, от которой точки графика не отклонялись-бы более, чем на  $\pm 0.15$  мм.

Далее, пользуясь этими прямыми, соображают систематические поправки: отсчетов  $s_1$ , приходящихся в первой части рейки; отсчетов  $s_2$ —приходящихся во второй части рейки; отсчетов  $s_3$ —приходящихся в третьей части рейки. Эти систематические поправки выражают в виде формул:

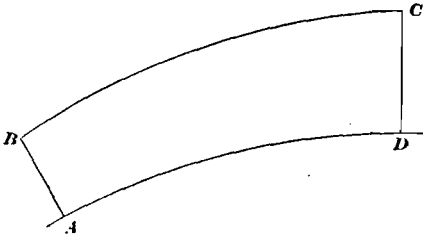
$$\left. \begin{array}{l} \text{для I части} \dots \dots \dots k_1 s_1 \\ \text{. II} \text{ ,} \dots \dots \dots c + k_2 s_2 \\ \text{. III} \text{ ,} \dots \dots \dots c_1 + k_3 s_3 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Далее из полевого журнала выписывают: суммы отсчетов по первой части рейки при взглядах назад, суммы отсчетов по той-же части рейки при взглядах вперед; суммы отсчетов по второй части рейки при взглядах назад; сумма отсчетов по второй части рейки при взглядах вперед; и т. д. Потом образуют разности соответственных сумм взглядов назад и вперед (для каждой части рейки) и умножают такие разности соответственно на  $k_1, k_2, k_3$ ; к таким произведениям для второй и третьей части рейки должно еще прибавить соответственно  $c$  или  $c_1$ , умноженные на число взглядов *назад* по второй или третьей части минус число взглядов *вперед* по той-же части рейки. Понятно, что в данном приеме график поправок нужно построить так: взять средние значения из поправок штрихов (одних и тех-же), выведенных до и после полевой кампании, и учесть изменение длины 100 делений рейки к моменту работы.

Разбивка графика поправок на части может быть применена в крайне редких случаях, когда совпадают два обстоятельства: 1) заметные *систематические* отклонения графика от прямой; 2) наличность значительного рельефа по ходу нивеллировки.



**80. Ортометрическая поправка нивелировки.** Уровенные поверхности между собою не параллельны, поэтому расстояния между поверхностями  $AD$  и  $CB$ , считаемые по нормальям например к поверхности  $AD$  (см. чертеж 185), в разных местах не будут равны между собою. Другими словами, если  $AD$  есть поверхность океана, то высота над нею точки  $B$  может из нивелировки получиться равной и отрезку  $BA$ , и отрезку  $CD$ . Возникает вопрос, — что именно понимать под *разностью высот точек* и как в нивелировке устранить неопределенность в выводе высот точек, обусловленную параллельностью уровенных поверхностей.



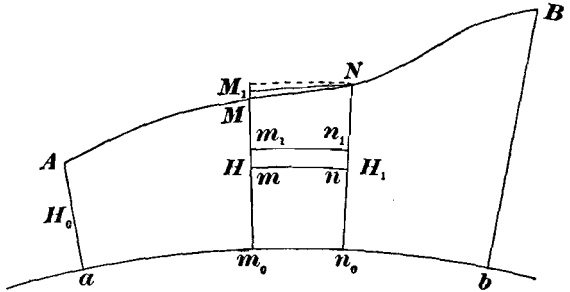
Черт. 185.

Обычно в теории точного нивелирования с этою целью вводят понятие о так называемых *ортометрических* *альтитудах* и о разностях *ортометрических* высот. Под ортометрической *альтитудой* понимают расстояние точки  $C$  от поверхности океана, считаемое по нормали, проведенной из  $C$  к этой поверхности. Следовательно, точки, лежащие на поверхности, параллельной поверхности океана, будут иметь равные *ортометрические* высоты, и наоборот, точки, лежащие на одной уровенной поверхности, будут иметь *разные* ортометрические высоты.

Очевидно, чтобы от разности уровней, полученных в точном нивелировании, перейти к разности ортометрических *альтитуд*, необходимо в выводы нивелировки вводить поправки, которые и называются *ортометрическими* поправками нивелировки.

Пусть поверхность  $am_0n_0b$  — основная уровенная поверхность, на которой высоты равны нулю. Если чрез  $H_1$  назовем ортометрическую высоту точки  $N$  (см. черт. 186) чрез  $H$  — ортометрическую высоту бесконечно-близкой к ней точки  $M$ , то, проведя чрез  $N$  элемент  $NM_1$  *уровенной* поверхности, имеем:  

$$H_1 = H + MM_1 - (M_1m_0 - Nn_0)$$



Черт. 186.

Так как  $MM_1$  — есть измеренная в нивелировке разность уровней, то  $(M_1m_0 - Nn_0)$  и есть *ортометрическая поправка* разности уровней двух бесконечно-близких точек  $M$  и  $N$ . Для получения  $(M_1m_0 - Nn_0)$  возьмем две точки  $m$  и  $m_1$ , принадлежащие уровенным поверхностям  $mn$  и  $m_1n_1$ , отстоящим по высоте в точке  $m$  на  $dh$  ( $mm_1 = dh$ ). Если  $g$  — значение ускорения силы тяжести в  $m$ , то по теореме Клеро имеем:

$$g = g_{45}^{\circ} (1 - \alpha \cos 2\varphi)$$

$g_{45}^{\circ}$  — ускорение силы тяжести на уровне океана под широтой  $45^{\circ}$ ,  $\varphi$  — широта точки  $m$ ,  $\alpha = 0.0026$ .

Для уровенных поверхностей  $mn$  и  $m_1n_1$  имеем:

$$g dh = \text{постоянному } C$$

Отсюда:

$$g d^2 h + dg \cdot dh = 0$$

$$d^2 h = - \frac{dg}{g} \cdot dh$$

причем очевидно  $d^2 h$  есть изменение  $dh$  при переходе из  $m$  в  $n$  — то ес

$$d^2 h = n_1 n - m_1 m$$

( $d^2 h$  обусловлено именно непараллельностью  $mn$  и  $m_1 n_1$ ); но:

$$dg = 2 \alpha g^{\circ}_{45} \text{Sin } 2 \varphi d \varphi$$

вследствие чего:

$$d^2 h = -2 \alpha \text{Sin } 2 \varphi d \varphi dh$$

с отбрасыванием малых членов третьего порядка. Суммируя  $d^2 h$  при продвиге от  $m_0$  до  $M$ , мы очевидно и получим  $M_1 m_0 - N n_0$ .

Итак, поправка ортометрическая в разности уровней точек  $M$  и  $N$  вычислится так:

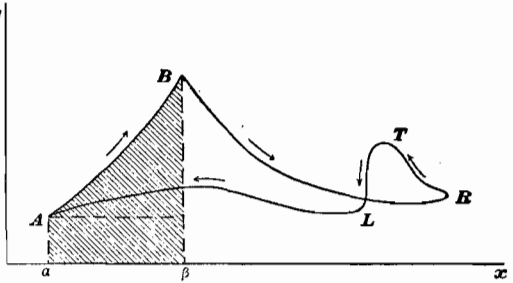
$$\varepsilon_M^N = \int_0^H d^2 h = -2 \alpha \text{Sin } 2 \varphi d \varphi \int_0^H dh = -2 \alpha H \text{Sin } 2 \varphi d \varphi$$

Чтобы вычислить ортометрическую поправку в разности уровней точек  $A$  и  $B$ , имеющих широты  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , пишем:

$$\varepsilon_A^B = -2 \alpha \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} H \text{Sin } 2 \varphi d \varphi$$

Поправку  $\varepsilon_A^B$  вычисляют *механически*, для чего на оси абсцисс откладывают величины  $\alpha \text{Cos } 2 \varphi$  (см. черт. 187) для точек нивелировки  $A, B, R, T, L \dots$ , взятых на ходе нивелирования с достаточной частотой, а на соответственных ординатах — высоты  $H$  (приближенные) тех-же точек над уровнем океана. Соединяя непрерывной кривой построенные точки, получим кривую  $ABRTLA$ , причем элемент площади этой кривой между ее двумя бесконечно близкими ординатами и осью  $x$ -ов будет:  $H dx = -H \cdot 2 \alpha \text{Sin } 2 \varphi d \varphi$ .

Следовательно, если мы вычислим *планиметром* площадь заштрихованной фигуры  $\alpha A B \beta \alpha$ , то она и выразит ортометрическую поправку в разности уровней точек  $A$  и  $B$ . Зная ортометрическую поправку альтитуды точки  $A$ , из такого вычисления планиметром площадей получим в конце концов ортометрические поправки альтитуд точек  $B, R, T, L \dots$ . Очевидно площадь  $ABRTLA$  выразит собою *ортометрическую* невязку полигона  $ABRTLA$ , которая конечно *не равна нулю*. Это значит лишь, что если к ортометрической высоте  $H_A$  точки  $A$  мы прибавим разность уровней  $U$ , полученную в полигоне  $ABRTLA$ , то:



Черт. 187.

$$H_A + U$$

не будет равно  $H_A$ , т. е.  $(\Sigma \text{З} - \Sigma \text{П})$  в замкнутом полигоне не должна быть равна нулю. Другими словами *невязка*  $\delta$  полигона должна быть вычисляема так:

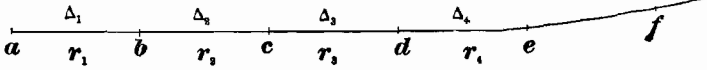
$$\delta = U + \text{ортометрическая невязка.}$$

Для больших нивелировок ортометрические поправки достигают значений в несколько десятков миллиметров и следовательно ни в каком случае *не могут быть пренебрегаемы*.

**81. Вывод точности нивелировок.** Если назовем случайную ошибку нивелировки на километр хода чрез  $\eta$ , а систематическую ошибку так-же на километр хода чрез  $\sigma$ , то средняя ошибка  $\mu$  нивелирного хода длиною в  $L$  километров, представится формулой:

$$\mu^2 = \eta^2 L + \sigma^2 L^2$$

Случайная часть ошибки  $\mu$  на длинном ходе  $L$  действует менее заметно, чем часть систематическая; наоборот, на коротком ходе случайная часть



Черт. 188.

будет более заметно, чем часть систематическая. Поэтому коэффициент

$\eta$  следует выводить из коротких ходов, а коэффициент  $\sigma$  — из длинных ходов и из больших замкнутых полигонов.

Если имеем ход длиною в  $L$  километров (см. черт. 188) разбитый марками  $a, b, c, d, e, \dots$  на небольшие части, имеющие длины  $r_1, r_2, r_3, r_4, \dots$ , причем разности прямой и обратной нивелировки в этих частях оказались соответственно равными  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \dots$ , то по каждой части можно написать:

$$\left. \begin{aligned} \eta^2 r_1 &= \frac{\Delta_1^2}{4} - \sigma^2 r_1^2 \\ \eta^2 r_2 &= \frac{\Delta_2^2}{4} - \sigma^2 r_2^2 \\ \dots &\dots \dots \dots \\ \eta^2 r_n &= \frac{\Delta_n^2}{4} - \sigma^2 r_n^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Если имеем несколько *линий* нивелировки протяжением  $L_1, L_2, \dots, L_p$ , на которых разности прямой и обратной нивелировки соответственно равны:  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_p$ , то пренебрегая здесь действием случайных ошибок, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{s_1^2}{4} &= \sigma^2 L_1^2 & \sigma^2 &= \frac{s_1^2}{4 L_1^2} \\ \frac{s_2^2}{4} &= \sigma^2 L_2^2 & \sigma^2 &= \frac{s_2^2}{4 L_2^2} \\ \dots &\dots \dots \dots & & \\ \frac{s_p^2}{4} &= \sigma^2 L_p^2 & \sigma^2 &= \frac{s_p^2}{4 L_p^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Эти выводы  $\sigma^2$  понятно имеют разные веса; чтобы из них получить вероятное значение  $\sigma$ , им приписывают веса, пропорциональные длине линии  $L$ . Поэтому:

$$\sigma^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{\Sigma L} \sum_1^P \frac{s^2}{L} \dots \dots \dots (3)$$

Определив  $\sigma$ , выводим  $\eta$  из уравнений (1), написанных для всех частей всех *линий* нивелирной сети:

$$\eta^2 \Sigma r = \frac{\Sigma \Delta^2}{4} - \frac{\Sigma r^2}{4} \frac{1}{\Sigma L} \sum_1^P \frac{s^2}{L}$$

и так как  $\Sigma r = \Sigma L$ , то

$$\eta^2 = \frac{1}{4} \left[ \frac{\Sigma \Delta^2}{\Sigma L} - \frac{\Sigma r^2}{(\Sigma L)^2} \frac{\Sigma s^2}{L} \right] \dots \dots \dots (4)$$

Величина  $\eta$  не превышает  $\pm 1.2$  миллиметра, величина  $\sigma$  должна получаться менее  $\pm 0.3$  миллиметра.

Вывод величин  $\eta$  и  $\sigma$  из материала нивеллирной сети важен не только для оценки точности отдельных ходов (линий), но и для установления тех весов, с которыми разные элементы государственной нивеллирной сети должны войти при уравнивательных вычислениях этой сети.

Приведенный только что вывод может быть оспариваем в части, касающейся установления *порядков* действия случайных и систематических ошибок на длинных нивеллирных ходах, но он здесь приводится в том именно виде, как был принят Международной Геодезической Конференцией в 1913 году. Ниже приводится (на стр. 454) таблица, взятая из „*Die Nivellements von Hoher Genauigkeit*“ тригонометрич. отделения Германского Высшего Геодезического Управления за 1923 год.

В таблице:  $L$  и  $r$ —выражены в километрах;  $\Delta$  и  $S$ —в миллиметрах; величины  $\Delta^2$  и  $r^2$  сперва просуммированы по каждой линии.

Как видно, каждая линия разбита „твердыми“ точками (т. е. марками, взятыми в прямом и в обратном ходе) на короткие участки — вообще длиною менее километра. Поэтому общее число участков, по которым выводилось  $\Delta$ —велико и равно 632. Все *линии*—так-же в общем очень короткие—вследствии того, что они образовали систему из 11-ти замкнутых полигонов. Здесь Германская практика совсем не похожа на нашу—в С. С. С. Р. *линии* нивеллирования имеют протяжение от 100 до 500 км, а замкнутых полигонов образовано пока всего два (в западной части Европейской России). Применяя к данным таблицы формулу (1), получаем:

$$\sigma^2 = \frac{7.36}{2717.52} = 0.0027$$

$$\sigma = \pm 0.05 \text{ мм}$$

применяя-же формулу (4), находим:

$$\eta = \pm 0.32 \text{ мм}$$

Если имеем сеть не менее как в 10 замкнутых полигонов, то Лаллеман дает для этого случая такую формулу определения  $\sigma$  из невязок полигонов:

$$\sigma_k = \frac{1}{\Sigma L^2} \left[ \frac{1}{2} \Sigma f^2 - \eta^2 \Sigma L \right] \dots \dots \dots (5)$$

понимая под  $f$ —невязку полигона и включая при подсчете формулы (5) в число полигонов, сверх их общего числа, и *оглабающий общую их сеть многоугольник*. (Невязка  $f$  этого полигона будет равна  $\Sigma f$ ).

#### ГЛАВА XIV.

### О тригонометрическом нивеллировании.

**82. Измерение вертикальных углов.** Обычно в теодолитах и универсалах, употребляемых для наблюдений в триангуляциях, вертикальный круг соединяется неизменно с горизонтальной осью инструмента, а следовательно и с трубой, и имеет возрастающую по ходу часовой стрелки подпись делений; отсчитывание вертикального круга выполняется или посредством двух

№№ линий	$L$	$S$	$n$ = число участков на линии	$[\Delta^2]$	$[r^2]$	$\frac{S^2}{L}$	$L^2$
1	2.76	— 0.9	6	0.43	1.82	0.29	8
2	11.34	— 2.8	14	4.16	11.08	0.69	128
3	6.00	+ 0.4	9	4.24	4.22	0.03	36
4	10.17	+ 1.0	17	4.58	8.92	0.10	104
5	3.07	— 0.8	3	3.06	3.31	0.21	9
6	9.59	+ 0.4	13	7.04	10.11	0.02	92
7	28.26	+ 1.2	29	12.16	40.58	0.05	801
8	14.51	— 0.75	8	5.16	28.42	0.04	210
9	14.60	— 0.3	19	7.65	21.08	0.01	213
10	31.05	— 4.6	31	11.66	48.82	0.68	961
11	8.76	+ 0.4	5	2.46	15.39	0.02	77
12	14.66	+ 0.1	8	2.85	29.45	0.00	216
13	8.52	— 1.7	7	2.55	13.04	0.34	73
14	13.17	— 1.1	18	3.35	12.62	0.09	174
15	19.11	+ 3.0	15	11.56	32.29	0.47	365
16	40.82	— 1.5	27	18.63	82.41	0.06	1665
17	31.29	— 0.8	34	8.41	40.75	0.02	980
18	7.76	— 1.5	6	8.37	11.92	0.29	60
19	19.83	— 0.4	10	12.24	33.98	0.01	392
20	11.55	— 1.6	9	1.54	18.53	0.22	135
21	20.98	+ 1.48	19	17.31	31.11	0.10	441
22	16.94	+ 0.5	15	16.09	27.62	0.01	286
23	33.28	— 7.2	29	14.63	52.22	1.56	1108
24	21.43	+ 3.0	25	9.62	30.29	0.42	458
25	34.54	+ 4.0	41	12.49	46.45	0.46	1190
26	20.41	— 1.1	21	4.65	32.63	0.06	416
27	39.77	— 4.3	38	10.59	61.21	0.46	1584
28	25.87	+ 1.3	24	11.33	42.10	0.06	671
29	32.94	— 3.0	35	13.48	51.46	0.27	1082
30	27.53	+ 1.6	20	13.74	47.86	0.09	756
31	40.91	— 1.4	35	24.88	61.98	0.05	1673
32	57.96	— 3.2	42	13.69	99.67	0.18	3364
Суммы	679.38	—20.57	632	294.60	1053.34	7.36	19728

верньеров, или посредством двух микроскоп-микрометров. Верньеры помещаются на алидаде, насаженной свободно на горизонтальную ось инструмента и несущей на себе уровень; от этой алидады идет вниз отросток в виде языка, в который упирается с одной стороны микрометренный винт, а с другой — стержень противодействующей винту пружины. Микроскопы, служащие для отсчитывания вертикального круга, прикрепляются или к алидаде такого-же устройства, как только что описанное, или к рычагам, ответвляющимся от одной из подставок горизонтальной оси; в последнем случае уровень при алидаде вертикального круга заменяется уровнем при этой подставке.

Назовем *местом зенита* и обозначим чрез *М. З.* отсчет на вертикальном круге, когда визирная ось трубы находится в вертикале горизонтальной оси инструмента и когда пузырек уровня при алидаде вертикального круга (или пузырек уровня при подставке трубы в надлежащем случае) находится на середине. (Очевидно, что в идеально выверенном и совершенно-правильно установленном инструменте при отсчете *М. З.* на вертикальном круге визирная ось трубы будет совпадать с отвесной линией). Нетрудно сообразить, что при „круге право“ мимо нуля верньера при алидаде вертикального круга будут проходить деления этого круга с постепенно *убывающими* подписями, если труба становится, начиная с нулевого, на все более и более возрастающие по величине зенитные расстояния; наоборот, при „круге лево“ мимо нуля верньера при алидаде вертикального круга будут проходить деления этого круга с постепенно возрастающими подписями, если труба ставится, начиная с нулевого, на все более и более возрастающие по величине зенитные расстояния. Точно так-же легко видеть, что отсчет *М. З.* остается постоянным для наблюдений при круге право и для наблюдений при круге лево\*).

Зенитное расстояние  $z_A$  любого предмета *A*, как угол, отсчитываемый от направления в зенит до направления из центра вертикального круга на предмет *A*, будет очевидно равен разности *М. З.* и отсчета по вертикальному кругу при наведении трубы на *A*. Если этот последний отсчет мы назовем чрез *П* для наблюдений при круге право и чрез *Л* — для наблюдений при круге лево, то на основании вышеизложенного пишем:

$$\left. \begin{aligned} z_A &= Л - М. З. \\ z_A &= М. З. - П \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

а отсюда: 
$$z = \frac{Л - П}{2} + М. З. = \frac{Л + П}{2} \dots \dots \dots (2)$$

формулы (1) и (2) показывают, что из двукратных наблюдений одного и того же хорошо видимого предмета, исполненных при круге право и при круге лево, *можно вывести заранее* место зенита *М. З.*, и затем пользоваться им при измерениях зенитных расстояний всех подлежащих наблюдению с данной тригонометрической станции сигналов; эти сигналы можно уже наблюдать лишь при одном положении трубы и при вычислении зенитных расстояний применять одну из формул (1). Но вследствие неизбежных перемен, происходящих с течением времени в инструменте, *не следует полагаться на неизменяемость места зенита*, а надлежит при измерениях зенитных расстояний на данной станции все предметы наблюдать как при круге право, так и при круге лево — одинаковое число раз при том и другом положении трубы. При таком порядке, выводимые из отсчетов на каждый предмет во время самых наблюдений величины *М. З.* позволяют судить об

\* ) Или же отсчет *М. З.* при круге право отличается на 360° от *М. З.* при круге лево.

отсутствии грубых промахов в отсчетах и наведениях, о точности этих отсчетов и наведений и о переменах, происходящих в инструменте. Словом, постоянство этих величин  $M, Z$  играет при измерении зенитных расстояний ту же роль, что и постоянство двойной коллимационной ошибки при измерении горизонтальных направлений. При каждом наведении трубы надо перед отсчетом вертикального круга приводить на середину пузырек уровня при алидаде этого круга или-же, если уровень находится при подставке трубы, — делать отсчеты по концам его пузырька.

Зенитные расстояния предметов  $A, B, C, D, \dots$  подлежащие определению со станции  $O$ , наблюдаются несколькими приемами; каждый прием состоит из двух полуприемов: в первом полуприеме предметы наблюдаются в порядке  $A, B, C, D, \dots$ ; во втором полуприеме, который исполняется после перевода трубы через зенит, — предметы наблюдаются в обратном порядке  $D, C, B, A$ . Наибольшая погрешность в измеряемых зенитных расстояниях тригонометрических сигналов обуславливается переменами земного преломления, вследствие чего точность определения этих зенитных расстояний мало возрастает с увеличением числа приемов. Поэтому и число приемов которыми измеряются в триангуляциях зенитные расстояния, значительно меньше числа приемов для наблюдения горизонтальных направлений. Обычно зенитные расстояния наблюдают в шести приемах на пунктах I-го класса \*) в трех приемах на пунктах II класса и нередко без перестановки вертикального лимба (которая во многих инструментах и невозможна) — между приемами\*\*).

Выгоднейшим для измерения зенитных расстояний временем является промежуток от 9 до 11 часов дня и от 1 до 3 пополудни. Хотя в это время изображения сигналов не ясны и расплывчаты вследствие значительных колебаний их по азимуту, но в это-же время дня перемены в положении изображения по высоте почти равны нулю, между тем как во время утреннего и вечернего периода спокойных, отчетливых изображений положение изображения быстро изменяется по высоте. Кроме того, промежуток от 1 до 3 часов дня приходится признать наивыгоднейшим для измерения зенитных расстояний еще по другим соображениям, стоящим в связи с вопросом о земном преломлении.

**83. Формулы тригонометрического инвеклирования.** Земная атмосфера на разных высотах имеет разную плотность, а следовательно и разную преломляемость, так что луч света от одной точки к другой идет не по прямой, а по кривой линии, обращенной обыкновенно своею вогнутостью к поверхности земли. Это искривление луча происходит в вертикальной плоскости\*\*\*), и потому не оказывает влияния на горизонтальные углы, но зенитное расстояние оно изменяет весьма значительно. Наблюдатель в  $A$  видит точку в  $B$  не по направлению хорды  $AB$ , а по направлению касательной  $Ad$  к последнему элементу *рефракционной* кривой  $AcB$ . Если прямые  $zAC$  и  $BC$  совпадают с отвесными линиями в  $A$  и  $B$ , то угол  $zAB = \xi$  называется *истинным* зенитным расстоянием, а угол  $zAd = z$  — *видимым* зенитным расстоянием. При нормальном распределении плотностей в атмосфере  $z$  всегда менее  $\xi$ .

\*) В настоящее время на работах по триангуляции I класса, исполняемых в С. С. С. Р. Высшим Геодезическим Управлением и Военно-Топографическим Управлением, измерение зенитных расстояний с пунктов I класса на пункты I-го же класса совсем не производится; причины этого приведены в § 84.

\*\*) Если вертикальный круг не может переставляться, то в разных приемах предмет наблюдают на *разных* горизонтальных нитях трубы.

\*\*\*) Искривление луча происходит и в горизонтальной плоскости, но в весьма незначительных размерах; наибольшая величина этой т. н. боковой рефракции оценивается в одну секунду.

Разность  $r = \xi - z$  называют *углом земного преломления* или просто земным преломлением. Многочисленные изыскания убеждают, что величина земного преломления не может быть определена точно, так как зависит не только от расстояния между точками  $A$  и  $B$ , но еще от времени дня, от вида и свойств местности между  $A$  и  $B$ , температуры и давления воздуха в момент измерения  $z$ , температуры почвы, высоты луча над почвой и т. д. Вот почему вертикальные углы измеряют менее точно, чем углы горизонтальные: бесполезна высокая точность визирования трубой и отсчетывания по вертикальному кругу, если точность определения  $z$  совершенно поглощается при переходе от  $z$  к  $\xi$  ошибкой в определении угла земного преломления. Для простоты вычислений принимают обыкновенно, что кривая  $AcB$  представляет круговую дугу; в таком предположении земное преломление, как угол между касательной и хордой, очевидно пропорционально длине дуги  $AcB$ , или — пропорционально длине дуги  $ab$  лежащей на ровной поверхности океана. С другой стороны длина дуги  $ab$ , пропорциональна углу  $C$  между отвесными линиями  $AC$  и  $BC$ ; следовательно, земное преломление  $r$  пропорционально углу  $C$ ; обычно и принимают, что

$$r = k \cdot \frac{C}{2},$$

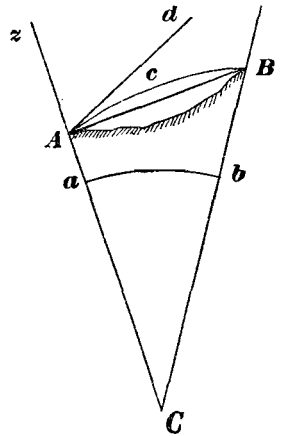
понимая под  $k$  так называемый *коэффициент земного преломления*. Земное преломление, а следовательно и его коэффициент, имеет наибольшую величину за день на рассвете, пред восходом солнца; от восхода солнца до полудня  $k$  непрерывно уменьшается; наименьшая величина  $r$  и  $k$  и наименьшая скорость изменения  $k$  приходится на время от 11 до 2-х часов пополудни; с 2 часов пополудни  $k$  возрастает непрерывно вплоть до утра следующего дня. Из многочисленных опытов следует, что наименьшее за сутки близполуденное значение  $k$  довольно постоянно для разных дней и даже для разных мест; наоборот, значение  $k$  в другие моменты дня для разных дней и разных мест весьма различно. Поэтому же, *только измерения в близполуденное время зенитные расстояния* можно перечислять на соответствующие истинные зенитные расстояния посредством формулы:

$$\xi = z + k \cdot \frac{C}{2},$$

с подстановкой в нее *среднего* значения  $k$ , выводимого из *опытов* \*).

Пусть проекции тригонометрических точек  $A$  и  $B$  (черт. 189) на ровную поверхность океана суть точки  $a$  и  $b$ . Назовем: высоту  $Aa$  точки  $A$  над океаном чрез  $h$ , высоту  $Bb$  точки  $B$  над океаном — чрез  $h_1$ , длину дуги  $ab$  (горизонтальное расстояние между  $a$  и  $b$ ) чрез  $s$ . Обозначив углы треугольника  $ABC$  чрез  $A$ ,  $B$  и  $C$ , напишем:

$$\frac{BC - AC}{BC + AC} = \operatorname{tg} \frac{A - B}{2} \operatorname{cotg} \frac{A + B}{2} \dots \dots \dots (1)$$



Черт. 189.

\* Все только что сказанное предполагает однако, что луч  $AB$  идет везде выше почвы метров на 6—8; вблизи почвы — напр. на высоте 2-х метров — ход изменения преломления за сутки будет существенно иной, так как здесь главное влияние будет обусловлено температурой почвы (см. точное нивелирование).



или, называя чрез  $R$  радиус кривизны дуги  $ab$  и заменяя в (1)  $BC$  чрез  $R + h_1$ ,  $AC$  чрез  $R + h$  и  $A + B$  чрез  $180 - C$ , получим:

$$\frac{h_1 - h}{2R + (h_1 + h)} = \operatorname{tg} \frac{A - B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}$$

$$h_1 - h = \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A - B}{2} \cdot 2R \left(1 + \frac{h_1 + h}{2R}\right)$$

По малости угла  $C$  можно принять:

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{C}{2} + \frac{1}{3} \frac{C^3}{8} = \frac{s}{2R} + \frac{s^3}{24R^3}$$

Следовательно:

$$h_1 - h = s \cdot \operatorname{tg} \frac{A - B}{2} \left(1 + \frac{s^2}{24R^2}\right) \left(1 + \frac{h_1 + h}{2R}\right) \dots \dots \dots (2)$$

В формуле (2) всегда можно пренебречь стоящей в скобках величиной  $\frac{s^2}{24R^2}$  и переписать ее так:

$$h_1 - h = s \cdot \operatorname{tg} \frac{A - B}{2} \left(1 + \frac{h_1 + h}{2R}\right) \dots \dots \dots (2)'$$

Для мест-же, лежащих над морем не выше километра, влияние члена  $\frac{h_1 + h}{2R}$  будет ничтожно по сравнению с погрешностью в  $h_1 - h$ , обусловленной неточностью определения земного преломления. Поэтому можно формулу (2)' переписать так:

$$h_1 - h = s \cdot \operatorname{tg} \frac{A - B}{2} \dots \dots \dots (3)$$

употребляя формулу (2)' лишь в соответственных районах.

Остается  $A$  и  $B$  выразить чрез измеренные зенитные расстояния. Здесь представляется два случая:

- 1) когда наблюдалось только одно зенитное расстояние в  $A$  или в  $B$  (*одностороннее нивелирование*) и
- 2) когда наблюдались два зенитных расстояния и в  $A$  и в  $B$  и притом одновременно (*взаимные наблюдения*).

*1-ый случай.* Если измерено зенитное расстояние  $z$  только в  $A$ , то:

$$A = 180 - z - r; \quad B = z + r - C$$

$$\frac{A - B}{2} = 90^\circ - \left\{ z - \left(\frac{C}{2} - r\right) \right\}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A - B}{2} = \operatorname{cotg} \left\{ z - \frac{1 - k}{2} C \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Вследствие малости  $\frac{1 - k}{2} C$  можно написать:

$$\operatorname{cotg} \left\{ z - \frac{1 - k}{2} C \right\} = \operatorname{cotg} z + \frac{1 - k}{2} \frac{C}{\operatorname{Sin}^2 z}$$

Но вследствие близости  $z$  к  $90^\circ$ , можно в малом члене  $\frac{1-k}{2} \frac{C}{\text{Sin}^2 z}$  заменить  $\text{Sin}^2 z$  чрез единицу; заменяя-же еще  $C$  чрез  $\frac{s}{R}$ , формулу (4) перепишем так:

$$\text{tg} \frac{A-B}{2} = \text{cotg} z + \frac{1-k}{2R} \cdot s$$

Следовательно

$$h_1 - h = s \text{cotg} z + \frac{1-k}{2R} s^2 \dots \dots \dots (5)$$

2-ой случай. Если измерены одновременно зенитные расстояния:  $z$  — точки  $B$  из  $A$  и  $z_1$  — точки  $A$  из  $B$ , то, называя углы земного преломления в  $A$  и  $B$  чрез  $r$  и  $r_1$ , получим:

$$A = 180^\circ - z - r; \quad B = 180^\circ - z_1 - r_1$$

$$\frac{A-B}{2} = \frac{z_1-z}{2} + \frac{r_1-r}{2} = \frac{z_1-z}{2} + \frac{k_1-k}{4} C$$

причем  $r$  заменен чрез  $k \frac{C}{2}$ , а  $r_1$  чрез  $k_1 \frac{C}{2}$

Отсюда:

$$\text{tg} \frac{A-B}{2} = \text{tg} \left( \frac{z_1-z}{2} + \frac{k_1-k}{4} C \right) = \text{tg} \frac{z_1-z}{2} + \frac{k_1-k}{4} \cdot \frac{C}{\text{Cos}^2 \frac{z_1-z}{2}}$$

но, вследствие малости  $\frac{z_1-z}{2}$ , можно положить  $\text{Cos}^2 \frac{z_1-z}{2} = 1$ ,

а потому:

$$h_1 - h = s \text{tg} \frac{z_1-z}{2} + s^2 \frac{k_1-k}{4R} \dots \dots \dots (6)$$

Предполагая-же при одновременных наблюдениях в  $A$  и в  $B$  равенство углов  $r_1$  и  $r$ , а следовательно и коэффициентов  $k$  и  $k_1$ , получим обычно употребляющуюся в практике формулу для вычисления высот по взаимным зенитным расстояниям:

$$h_1 - h = s \text{tg} \frac{z_1-z}{2} \dots \dots \dots (7)$$

При наблюдениях в  $A$  центр вертикального круга не совпадает с  $A$ , а находится выше на „высоту инструмента“  $i$ ; кроме того, труба направляется не на  $B$ , а на верх сигнала  $B$ , высоту которого над  $B$  (над землей) назовем чрез  $a_1$ . Понимая под  $z$  непосредственно измеренное зенитное расстояние в  $A$  на  $B$ , мы очевидно в формулу (5) должны под знак котангенса

ввести  $z + \frac{a_1-i}{s \text{Sin} 1''}$  а в формуле (7) заменить  $z$  чрез  $z + \frac{a_1-i}{s \text{Sin} 1''}$  и  $z_1$  чрез

$z_1 + \frac{a-i}{s \text{Sin} 1''}$ , если  $a$  есть высота сигнала в  $A$ , а  $i_1$  — высота инструмента

при наблюдениях в  $B$ . Принимая-же во внимание, что можно при  $z$  близком к  $90^\circ$  принять:

$$\operatorname{cotg} \left( z + \frac{a_1 - i}{s \operatorname{Sin} 1''} \right) = \operatorname{cotg} z - \frac{a_1 - i}{s}$$

$$\operatorname{tg} \left[ \frac{z_1 - z}{2} + \frac{(a - i_1) - (a_1 - i)}{2s \operatorname{Sin} 1''} \right] = \operatorname{tg} \frac{z_1 - z}{2} + \frac{(a - i_1) - (a_1 - i)}{2s}$$

получим такие окончательные формулы:

1) при односторонних наблюдениях:

$$h_1 - h = s \operatorname{cotg} z + s^2 \frac{1 - k}{2R} - (a_1 - i) \quad \dots \dots \dots (8)$$

2) при двусторонних наблюдениях:

$$h_1 - h = s \operatorname{tg} \frac{z_1 - z}{2} - \frac{a_1 + i_1}{2} + \frac{a + i}{2} \quad \dots \dots \dots (9)$$

Необходимо отметить, что в практике двусторонние наблюдения исполняются *не одновременно*, а с промежутком между наблюдениями в  $A$  и в  $B$  совершенно произвольным по величине. Такой организации работ, чтобы *одновременно* два геодезиста наблюдали-бы из  $A$  в  $B$  и из  $B$  в  $A$ —никогда не проводится. Тем не менее, если получены  $z_1$  и  $z$ , то  $h_1 - h$  выводится по формуле (9). Если по формуле (8) вычислить сперва  $h_1 - h$  по  $z$ , а затем—по  $z_1$ , то в среднем из двух таких выводов получим то, что дает формула (9). Очевидно, что обычное применение формулы (9) не является выводом  $h_1 - h$  из одновременных двусторонних наблюдений, а выводом *сразу* среднего  $h_1 - h$  из двух односторонних, неодновременных наблюдений.

**84. О точности определения высот из тригонометрического нивелирования.** Ошибки высот, определяемых по формулам (5), (6) и (7) § 83, можно считать происходящими только вследствие ошибок в величинах  $z$ ,  $z_1$  и  $k$ , т. е. при вычислении средней ошибки  $\Delta h$  в разности  $h_1 - h$  можно  $s$  и  $R$  считать безошибочными. Называя чрез  $\Delta z$  и  $\Delta k$  средние ошибки в  $z$  и  $k$ , напомним

из формулы (5) . . .  $\Delta h = \pm s \sqrt{\frac{\Delta z^2 \operatorname{Sin}^2 1''}{\operatorname{Sin}^4 z} + \frac{s^2 \Delta k^2}{4 R^2}}$

из формулы (6) . . .  $\Delta h = \pm s \sqrt{\frac{2 \Delta z^2 \operatorname{Sin}^2 1''}{4 \operatorname{Cos}^4 \frac{z_1 - z}{2}} + \frac{s^2 2 \Delta k^2}{16 R^2}}$

из формулы (7) . . .  $\Delta h = \pm s \sqrt{\frac{2 \Delta z^2 \operatorname{Sin}^2 1''}{4 \operatorname{Cos}^4 \frac{z_1 - z}{2}}}$

Полагая-же, как уже делали ранее:  $\operatorname{Sin} z = 1$  и  $\operatorname{Cos} \frac{z_1 - z}{2} = 1$ , напомним окончательно:

для одностороннего наблюдения:

$$\Delta h = \pm s \sqrt{(\Delta z \operatorname{Sin} 1'')^2 + \frac{s^2 \Delta k^2}{4 R^2}} \quad \dots \dots \dots (a)$$

для двусторонних наблюдений:

$$1) \Delta h = \frac{s}{\sqrt{2}} \sqrt{(\Delta z \sin 1'')^2 + \frac{s^2 \Delta k^2}{4 R^2}} \dots \dots \dots (b)$$

$$2) \Delta h = \frac{s}{\sqrt{2}} \Delta z'' \sin 1'' \dots \dots \dots (c)$$

Нужно теперь отметить, что формулой (7) и вытекающей из нее формулой (9) приходится пользоваться только потому, что различие величин  $k_1$  и  $k$  в формуле (6) мы не можем в практике определить сколь-нибудь надежно; в действительности даже при одновременном измерении в  $A$  и  $B$  взаимных зенитных расстояний, мы не имеем оснований полагать  $k=k_1$  и  $r=r_1$ . Другими словами, хотя при двусторонних наблюдениях применения формулы (7) и (9) для определения  $h_1-h$ , но подсчет ошибки  $\Delta h$  в этом случае надлежит делать все-таки по формуле (b), а не (c). По исследованиям разных ученых среднее значение  $k$  оказывается равным 0.14, а значение  $\Delta k$  для близкородственных наблюдений принимается около  $\pm 0.03$ ; (см. Zechariae „Geodätischen Hauptpunkte“) за сутки истинное значение  $k$  колеблется от 0.10 до 0.20. Принимая  $\Delta k = \pm 0.03$  и полагая  $\Delta z = \pm 2''.0$  получим для  $\Delta h$  при одностороннем нивеллировании:

	$s = 3$	$s = 6$	$s = 20$
$s \Delta z \sin 1''$	0,030	0,060	0,200
$s^2 \frac{\Delta k}{2R}$	0,012	0,090	1,000
$\Delta h$	0,038	0,108	1,020

$s$  в километрах

$\Delta h$  в метрах

Эта таблица показывает, что при расстояниях *больших* 6—7 км влияние ошибочности принятого при вычислении формулы (8) значения  $k$  или влияние неверности предположения о равенстве  $r$  и  $r_1$  при вычислении по формуле (9), поглощает совершенно влияние на вывод  $h_1-h$  ошибки в зенитном расстоянии. Очевидно, что за десятые доли метра в разностях высот, определяемых из тригонометрического нивеллирования, можно ручаться лишь при расстояниях меньших 6—7 км; при больших расстояниях влияние неверного учета действия рефракции возрастает так быстро и значительно, что самое тригонометрическое нивеллирование, как метод определения *высот опорных точек*, становится сомнительным при распространении его на большие площади. Правда, при наблюдениях с высоких сигналов и в местностях, где луч идет везде достаточно высоко над почвой можно принимать  $\Delta k = \pm 0,01$ ; тогда при  $s = 20$  км и при двустороннем нивеллировании  $\Delta h$  будет всего  $\pm 0,275$  м, но все-таки очевидно, что передача высот из одного геодезического нивеллирования на площади значительного района, а тем более целого государства, совершенно не допустима. Вопрос решается здесь тем, что во-первых во всех государствах исполняется нивеллирование высокой точности, марки которого связываются точной нивеллировкой с пунктами триангуляции; таким образом отдельные цепи треугольников государственной триангуляции оказываются вставленными между реперами государственного нивеллирования, чем и достигается устранение накопления недопустимых по размерам ошибок в альтитудах геодезического нивеллирования. Во-вторых, передача высот из геодезического нивеллирования выполняется, *допуская* в формулах (8) и (9) *расстояния  $s$  не более 10 км.* Для

этой цели передачу высот делают, используя выгодно комбинации точек I, II и даже III класса, т. е. разбивая расстояние между точками I класса на части пунктами II и III класса, приходящимися между пунктами I класса.

**85. Определение коэффициента земного преломления.** Коэффициент  $k$  можно определить двумя методами:

1) определяя из геодезического нивелирования разность уровней точек, альтитуды которых известны из геометрического нивелирования;

2) исполняя *одновременные* наблюдения взаимных зенитных расстояний. *1 способ.* Из черт. 189 имеем:

$$\frac{\xi_1 + \xi}{2} = 90^\circ + \frac{s}{2R \cdot \text{Sin } 1''} \dots \dots \dots (a)$$

Из формулы (2) § 83 пишем:

$$\text{tg } \frac{\xi_1 - \xi}{2} = \frac{h_1 - h}{2} \left( 1 - \frac{h_1 + h}{2R} \right) \dots \dots \dots (b)$$

Из формул (a) и (b), зная из геометрического нивелирования  $h_1$  и  $h$ , выводим  $\xi_1$  и  $\xi$ .

Далее:

$$k = \frac{2R \text{ Sin } 1''}{s} (\xi - z); \quad k_1 = \frac{2R \text{ Sin } 1''}{s} (\xi_1 - z_1) \dots \dots (c)$$

Конечно, в (c) нужно подставить для  $z$  и  $z_1$  не наблюдаемые их значения, а исправленные приведениями к *центрам знаков* в  $A$  и  $B$ , т. е. вместо  $z$

подставляется  $z + \frac{a_1 - i}{s \text{ Sin } 1''}$ , и вместо  $z_1$  величина  $z_1 + \frac{a - i_1}{s \text{ Sin } 1''}$ .

Этот способ требует расстояний между  $A$  и  $B$  около 20—30 км и, конечно, очень тщательного определения  $z$  и  $z_1$

*2 способ.* В основе его лежит допущение  $k = k_1$ .

Из тр-ка  $ABC$  (черт. 189) имеем:

$$\angle A = 180 - (z + r)$$

$$\angle B = 180 - (z_1 + r)$$

$$r = 180 - \frac{A + B}{2} = \frac{z + z_1}{2}$$

Так как:

$$\frac{A + B}{2} = 90 - \frac{C}{2} = 90 - \frac{s}{2R \text{ Sin } 1''}$$

то, вводя в  $z$  и  $z_1$  приведения  $\frac{a_1 - i}{s \text{ Sin } 1''}$  и  $\frac{a - i_1}{s \text{ Sin } 1''}$ , получим:

$$r = k \cdot \frac{s}{2R \text{ Sin } 1''} = 90 + \frac{s}{2R \text{ Sin } 1''} - \frac{z + z_1}{2} - \frac{a_1 - i + a - i_1}{2s \text{ Sin } 1''}$$

$$k = 1 - \frac{R}{s} \text{ Sin } 1'' [z + z_1 - 180] - \frac{R}{s^2} [(a + a_1) - (i_1 + i)] \dots \dots (d)$$

Основным должно считать *первый* способ.

Приведем следующую таблицу надежных определений величины  $k$ , исполненных Бесселем, Кларком, Байером, Теннером, Струве.

Имена ученых	Названия триангуляций	Среднее значение
Кларк	Английская	0.158
Бессель	Прусская	0.137
Байер	Прусская	0.145
Теннер	Западно-русская	0.145
Струве	Лифляндская	0.124

В среднем для Европы  $k = 0.14$ .

В юго-восточных частях Р. С. Ф. С. Р. и на Кавказе получались для  $k$  бóльшие значения, около 0.17.

---

К О Н Е Ц .

---

## Замеченные опечатки и пропуски.

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
2	1 снизу	$C$	$c$
3	1 сверху	$AC=ac$	$Ac=ac$
"	2 "	$ACa$	$Aca$
"	3 "	$\rho=AC$	$\rho=Ac$
5	4 "	1722	1822
"	12 "	<i>косванную</i>	<i>косвенную</i>
6	10 "	$\pm 15$ числа,	$\pm 1,5$ единицы числа,
9	12 "	точки $m$ а $mm_1$	точки $m$ , а $mm_1$
"	22 "	$PM_1$ и $P_1$	$PM_1$ и $P_1$
"	Черт. 4, левый конец дуги	$o$	$u$
15	12 сверху	$abcd$	$abed$
"	26 "	$bc$	$be$
"	29 "	долгот $8'40'$	долгот $8'40''$
16	25 "	свою работ	свою работу
17	3 "	$\delta\epsilon\eta\zeta, \epsilon\lambda\gamma\varrho$	$\delta\epsilon\eta\zeta, \epsilon\lambda\gamma\varrho$
"	5 "	$abcd, dchg, cfih,$	$abed, dehg, efih$
"	6 "	$abcd, \epsilon\lambda\gamma\varrho$	$abed \epsilon\lambda\gamma\varrho$
"	7 "	$cfih \lambda\varphi\zeta$	$efih \lambda\varphi\zeta$
20	Черт. 9, нижняя линия левый конец	—	$F'$
25	10 сверху	метриеские	метрические
"	*) 1 "	случае,	случаи,
28	4 снизу	до 80 м.	до 60 м.
30	7 "	$cae$	$cal$
31	1 "	<i>идуция с земли.</i>	<i>идуция с земли. (см. черт. 30а).</i>
36	8 "	$aAb$ и $cAd,$	$aAb, cAd,$ и $fAg,$
"	6 "	$aAb,$	$fAg,$
38	17,16 снизу	кото-рое	кото-рые
39	13 снизу	с триангуляций	с триангуляцией
43	4 сверху	из друх	из двух
44	3 снизу	перпендикулярь	перпендикуляр
45	7 сверху	$PC MC,$	$PC, MC$
"	18 снизу	$(g)-(h),$ из $(h)-(i)$	$(h)-(g),$ из $(i)-(h)$
46	5 "	$m_{q_1} m_{q_2} \dots$	$m_{q_1}, m_{q_2}, \dots$
"	4 "	$Q=$	$Q_1=$
47	2 "	$\frac{\partial A_k}{\partial B'_k} = \frac{1}{3}$	$\frac{\partial A_k}{\partial B'_k} = -\frac{1}{3}$
51	5 сверху	$= \frac{2}{3} m\sqrt{k} \sqrt{\quad}$	$= \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot m\sqrt{k} \cdot \sqrt{\quad}$
52	3 снизу	$\frac{m_{ak}}{a_k} =$	$\frac{m_{an}}{a_n} =$

раница	Строка	Напечатано	Должно быть
53	2 сверху	$\frac{m_{ak}}{a_n} =$	$\frac{m_{an}}{a_n} =$
"	1 снизу	которым	котором
55	15 "	$H_h =$	$H_n =$
56	10 сверху	измерении	измерений
59	3 "	<i>рабочче</i>	<i>рабочие</i>
62	2 снизу	ловами	словами
65	12 сверху	правым	левым
66	6 сверху	$-k_m t_o^M (t_m - t_o) +$	$-k_m t_o^M (t_m - t_o) +$
67	12 снизу	(черт. без	(см. стр. 69, черт. без
68	14 "	действительно	действительно
70	26 "	крупнешего	крупнейшего
71	9 "	ению	нению
72	15 сверху	изменении	измерении
"	3 снизу	полоса <i>E</i> ; при	полоса <i>E</i> . При
78	Черт. 616 правый, сверху	<i>l</i>	<i>e</i>
80	Между 4 и 5 строками сверху		значение угла <i>a</i> . Требуя, чтобы
81	19 сверху	0.1.	0.1 деления.
84	9 снизу	деление	делении
87	9 сверху	енным	ленным
"	7 снизу	чланах	членах
89	16 снизу	$+ e \frac{-x}{a}$	$+ e \frac{-x}{a}$
91	10 сверху	<i>g</i> ,	<i>g</i> ,
"	11 "	растяжения	растяжение
"	5 снизу	натяжения	натяжения,
95	21 сверху	) что	), что
"	13 снизу	<i>t</i>	<i>t</i>
"	2 снизу	$= hl + \Sigma e + hlk ($	$= nl + \Sigma e + nlk ($
"	1 "	$= hl_1 + \Sigma e_1 + hl_1 k_1 ($	$= nl_1 + \Sigma e_1 + nl_1 k_1 ($
97	12 сверху	$\frac{1}{100000}$	$\frac{1}{1000000}$
98	19 "	вводится.	вводится.
101	4 снизу	усовершенствованным	усовершенствованным
107	5 сверху	—1822. гг.	—1882 гг.
115	25 снизу	пузырька а	пузырька, а
117	10 "	<i>J x</i>	<i>J, x</i>
127	21 сверху	<i>I'</i>	<i>f</i>
"	23 "	камера <i>K</i>	камера <i>kk</i>
"	15 анизу	камеру <i>K</i>	камеру <i>kk</i>
130	1 сверху	$n - o =$	$n - \rho =$
131	8 снизу	<i>BCA</i> а	<i>BCA</i> , а
132	4 сверху	(см. нижнюю	(см. верхнюю



Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
140	9 сверху	$=\rho_m \dots (L)$	$=\rho_m$
"	13 "	$-\frac{d\rho_m}{2}$	$-\frac{d\rho_m}{2} \dots (L)$
142	5 "	$+\frac{a-b'}{2}\delta$	$+\frac{a+b'}{2}\delta$
"	10 "	$\frac{b'-a}{2n}z\delta$	$\frac{b'-a}{2n_0}z\delta$
"	1 снизу	$=S a\delta +$	$=S + a\delta$
144	15 сверху	$\frac{\delta}{2a_0} a ($	$\frac{\delta}{2n_0} a ($
146	3, 2 и 1 снизу	$\rho > 0$ $\rho_1 > 0$ $\rho_1 < 0$	$\rho > 0$ $\rho_1 > 0$ $\rho_1 < 0$
"	7 снизу	псложениях	положениях
147	12 "	3-ие	3-ье
"	2 "	$-\Delta_0 =$	$-\Delta_{\sigma} =$
152	Черт. 92	в конусе <i>осо</i> пропу- щена буква <i>x</i>	в конусе <i>осо</i> поставить букву <i>x</i>
"	10 снизу	горузонтальной	горизонтальной
155	1 и 2 стро- ки снизу	, которые идут через	, через которые идут
156	8 сверху	чертеж 97 и 100).	Черт. 95, 97 и 100).
"	Черт. 95	в отдельном чертеже (справа—снизу пропу- щена в середине буква <i>f</i>	поставить букву <i>f</i> в середине правого чер- тежа
162	7 и 8 сверху	12-ти; так как	12-ти. Так как
173	17 "	из отовляющим	изготовляющим
178	15 снизу	, которое	, которая
184	1 сверху	делений	деления
187	2 снизу	по $\delta_1, \delta_2,$	под $\delta_1, \delta_2,$
189	1 сверху	$4^\circ$ а иногда	$4^\circ$ , а иногда
191	10 "	$\dots (k-1)\sigma^\circ$	$\dots, \text{от } (k-1)\sigma^\circ$
197	1 снизу	$N =$	$N_b =$
202	1 сверху	$N$ , а углы	$M$ , а углы
207	18 "	за час	за полчаса
211	8 снизу	уменьщить	уменьшить
212	13 "	целиндров	цилиндров
218	27 "	номер <i>s</i>	номер <i>S</i>
223	9, 10 и 12 сверху	$\alpha_1 \omega_1 \quad \alpha_2 \omega_2 \quad \alpha_k \omega_k$	$\sigma_1 \omega_1 \quad \sigma_2 \omega_2 \quad \sigma_k \omega_k$
234	13 "	соотственнно	соответственно
245	4 сверху	окончательного	окончательно
247	12 "	о и $\rho_1$	$\rho$ и $\rho_1$
257	1 сверху по- следн. графа	III	I—III
257	*)	Отсчитыванмому	Отсчитываемому
258	12 сверху	треугольника	треугольника

Строка	Напечатано	Должно быть
9 снизу	$(M_A^S - \theta_S)$	$(M_A^S - \theta_A)$
9 сверху	части (m).	части формулы (m).
4 снизу	наблюдениях	наблюдениях
3 „	таиже	также
1 „	вид	виду
20 „	единственне	единственное
8, 7, и 5 снизу	$= 0$	$= 0$
10, 11, и 13 сверху	$= 0$	$= 0$
12 снизу	друг друга	друг друга
8 „	осуществлении что	осуществлении, что
9 сверху	понимаем	понимаемое
3 снизу	$(2) = -k_1 - \alpha_2 K$	$(2) = k_1 + \alpha_2 K$
18 сверху	<i>COD</i> (черт. 144)	<i>COD, DOE</i> (черт. 144)
18 сверху	2 n—3 точек	n—3 точек
7 и 8 снизу	в § 48 но	в § 48, но,
25 сверху	. . . $a_n$ ;	. . . $a_n$ ;
9 „	. . . $= z_n = 0$	. . . $+ z_n = 0$
14 снизу	невязку $v$ : $v =$	невязку $v =$
10 „	(1,2)	(1,2);
4 „	. <i>Sin</i> $\alpha$ а	. <i>Sin</i> $\alpha$ , а
14 снизу	<i>Sin</i> ( $\alpha'_s - \alpha'_s$ ) $y_{k,s}$	<i>Sin</i> ( $\alpha'_s - \alpha'_k$ ) $y_{k,s}$
8 сверху	. . . . . $p_n =$	. . . . . ; $p_n =$
4 снизу	$-\frac{\text{Sin } \alpha'_n}{d_n \text{Sin } 1''}$	$-\frac{\text{Sin } \alpha'_n}{d_n \text{Sin } 1''}$
5 „	(2)	(20)
21 „	$l_m = \frac{(l)}{n}$	$l_m = \frac{[l]}{n}$
4 сверху	$\frac{a_1}{D_1} = A$	$\frac{a_1}{D_1} = A_1$
8 сверху	$z_o =$	$z_o =$
9 снизу	$(\alpha_1 + b_1)$	$(\alpha_1 + b_1)$
10 сверху в 1 и 2 графе	$= +0,219 \times$	$= +0,269 \times$
1 сверху	<i>Bc</i>	<i>BC</i>
19 „	по $P_o$	под $P_o$
5 снизу	(5) могут	(5) § 41 могут
7 сверху в 1 графе табл.	$x = +0,2973$	$x = +0,2880$
5 сверху	арифметический	арифметический
3 снизу	$= \Sigma \omega_s + . . .$	$= \Sigma \{ \omega_s + . . . \} \dots (3)$
2 сверху	$f_1$ а	$f_1$ , а
8 снизу	примере	ниже примере
2 „	-0.674	-0.692
11 сверху	параллельностью	непараллельностью
8 и 9 „	$\frac{s^2}{24 R^2}$	$\frac{s^2}{12 R^2}$
1 снизу	$+\frac{a-i}{s \text{Sin } 1''}$	$+\frac{a-i_1}{s \text{Sin } 1''}$