

С. П. КОЛОСОВ
Ю. А. СИДОРОВ

**НЕЛИНЕЙНЫЕ
ЦЕПИ:
ДВУХ-
ПОЛЮСНИКИ
И ЧЕТЫРЕХ-
ПОЛЮСНИКИ.
НЕСТАЦИОНАРНЫЕ
ЦЕПИ**

✓

С. П. КОЛОСОВ
Ю. А. СИДОРОВ

НЕЛИНЕЙНЫЕ
ЦЕПИ:
ДВУХ-
ПОЛЮСНИКИ
И ЧЕТЫРЕХ-
ПОЛЮСНИКИ.
НЕСТАЦИОНАРНЫЕ
ЦЕПИ



МОСКВА
ИЗДАТЕЛЬСТВО МАИ

1993

ББК 22.2.2
УДК 621.372.4.5

Рецензенты: доктор технических наук *Б.Г. Меньшов*
и доктор технических наук *А.К. Явленский*

Колосов С.П., Сидоров Ю.А.

К 60 Нелинейные цепи: двухполосники и четырехполосники.
Нестационарные цепи: Учеб. пособие. — М.: Изд-во МАИ,
1993. — 232 с.: ил.

ISBN 5-7035-0317-5

Изложены вопросы ТНЦ, применяемых в современных системах автоматики. Рассмотрены нелинейные двухполосники и их исходные характеристики. Приведены методы анализа магнитных и диэлектрических цепей. Даны задачи, иллюстрирующие большинство рассматриваемых методов. Для студентов электротехнических и электромеханических специальностей.

К $\frac{2202020000 - 35}{094(02) - 93}$ 16 — 91

ББК 22.2.2

ISBN 5-7035-0317-5

© С.П. Колосов, Ю.А. Сидоров, 1993

ПРЕДИСЛОВИЕ

В учебной литературе часть материала раздела «Нелинейные электрические цепи» курса «Теоретические основы электротехники» рассматривалась до сих пор на примере конкретных электротехнических устройств. В приемах расчета этих устройств много общего, поэтому их целесообразно систематизировать, определив группы нелинейных схем и их режимов, наиболее часто повторяющихся либо перспективных. После выявления специфических особенностей каждой группы и обобщения методики их анализа методы расчета в общем виде можно ввести в теорию нелинейных цепей.

В предлагаемом учебном пособии, в основу которого положена наша книга «Нелинейные двухполосники и четырехполосники» (Изд-во «Высшая школа», 1981), сделана попытка в какой-то мере выполнить поставленную задачу. Для сложных разветвленных цепей часто не удается получить удобные решения графоаналитическим или аналитическими методами, и здесь имеет смысл использовать аналоговую и цифровую вычислительную технику.

Следует отметить нецелесообразность применения для расчетов на ЦВМ излишне точных приемов общего характера, сводимых к составлению и решению численными методами весьма сложных систем уравнений, учитывающих малозначимые для данного конкретного случая особенности нелинейных характеристик, несущественные гармонические составляющие и т.д.

Сфера применения электротехнических устройств с нелинейными элементами, работающими в режиме, не поддающемся линеаризации, расширяется. Разработку таких устройств производят с ориентацией на прецеденты или интуитивно (путем изобретательства). Использование ЦВМ делает целесообразной алгоритмизацию синтеза электрических нелинейных цепей, что не только повышает качество разработок, но и позволяет получить принципиально новые схемотехнические решения даже известных технических задач. Кроме того, такой подход необходим для проектирования твердотельных схем, экспериментальная поэлементная отработка которых практически невозможна. Поэтому для современного инженера совершенно необходимо знание общих основ синтеза нелинейных цепей и путей их реализации.

Настоящее пособие преследует цель помочь студентам научиться применять для расчета характеристики нелинейных двухполюсников и семейства входных и выходных характеристик нелинейных четырехполюсников. Из большого разнообразия нелинейностей и режимов работы особое внимание уделено тем, которые наиболее часто встречаются в современных устройствах автоматики. Изложение ведется в порядке возрастания сложности материала: сначала рассматриваются установившиеся режимы в цепях постоянного тока (отдельно с двухполюсниками и четырехполюсниками), затем — в цепях переменного тока; даются краткие сведения о расчете переходных процессов в нелинейных цепях и о синтезе нелинейных цепей; приводятся примеры алгоритмизации электротехнических уравнений для применения вычислительной техники при расчете нелинейных цепей. В последней главе дана характеристика линейных цепей с переменными параметрами, расчет которых весьма специфичен и сходен с расчетом нелинейных цепей.

Авторы надеются, что их книга поможет студентам в изучении общих основ теории нелинейных цепей и существенно облегчит усвоение материала таких дисциплин, как «Элементы автоматики», «Электроника», «Электрические машины», «Электрооборудование» и «Теория автоматического управления».

К главам 1—5 даются задачи, иллюстрирующие большинство рассматриваемых методов и приемов расчета; часть задач приведена с решениями.

Авторы выражают признательность рецензентам — профессору Б.Г. Меньшову (заведующему кафедрой теоретической электротехники и электрификации промышленности МИНГ им. И.М. Губкина) и профессору А.К. Явленскому (заведующему кафедрой ТОЭ ЛИАП) за ряд ценных замечаний, сделанных в процессе подготовки рукописи к печати. Кроме того, авторы благодарят своих коллег Л.Б. Соболева и В.Г. Орешникова за помощь в написании некоторых параграфов книги.

Отзывы об учебном пособии, которые будут приняты с благодарностью, просим направлять по адресу: 125871 Москва, ГСП, Волоколамское шоссе, 4, Издательство МАИ.

ВВЕДЕНИЕ

Все реальные электрические цепи являются нелинейными. Рассмотрим цепь, которая в границах определенных режимов принята линейной. Как только частота, токи и напряжения в этой цепи достигнут достаточно больших значений, начинают проявляться нелинейные эффекты: происходит насыщение ферромагнитных сердечников, нарушается пропорциональность между поляризацией и полем в диэлектриках, изменяются геометрические размеры конденсаторов, температура (следовательно, и сопротивление) проводников и т.д. Таким образом, нелинейными являются цепи, параметры которых зависят от тока или напряжения.

В простейших случаях линейные элементы цепи можно свести к нелинейным и говорить о нелинейном сопротивлении $R(i)$ или $R(u)$, нелинейной индуктивности $L(i)$ или $L(\Psi)$ и нелинейной емкости $C(u_c)$ или $C(Q)$. Выражение для напряжения на ветви, содержащей последовательно включенные нелинейные элементы R , L , C , можно записать в виде нелинейного уравнения

$$u = R(i)i + \frac{d[iL(i)]}{dt} + \int \frac{i}{C(u_c)} dt$$

вместо известного уравнения линейной цепи

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt.$$

Напомним, что нелинейным называется уравнение, которое содержит переменные и их производные не в первой степени либо в котором коэффициенты зависят от переменных и их производных. Общих методов решения нелинейных уравнений не существует, и лишь для некоторых случаев могут быть найдены точные решения, выраженные известными функциями. В этом — главная трудность анализа нелинейных цепей.

Особенно важно то, что к нелинейным уравнениям, а значит, и к нелинейным цепям неприменим принцип наложения. Именно неприменимость принципа наложения может служить определением нелинейной цепи, ко-

торию, если это не приводит к недопустимым качественным изменениям или большим количественным погрешностям, следует пытаться описывать линейными зависимостями, т.е. сводить нелинейные цепи к линейным. Возможность пренебрежения нелинейностью (линеаризация) зависит от свойств (характеристик) и режима работы элементов, входящих в цепь, а также от конкретных особенностей и технического назначения цепи.

Если линеаризация неосуществима, то для упрощения анализа нелинейных цепей часто прибегают к рациональному изменению информации (исходных данных) о входящих в них нелинейностях. При этом должны быть сохранены все характерные черты изучаемого нелинейного процесса и исключены для упрощения исследования лишь несущественные факторы. Ограничившись приближенным представлением характеристик нелинейной цепи, иногда удается получить точное решение упрощенных нелинейных уравнений.

Далеко не всегда можно сразу правильно определить факторы, которыми следует пренебречь при анализе данной нелинейной цепи. Поэтому обычно сначала осуществляют экспериментальную проверку результатов упрощенного подхода и уже затем уточняют выбранный упрощенный способ анализа и определяют пределы его применимости.

Известно, что нелинейности могут оказаться вредными (нелинейные искажения сигналов при передаче и преобразовании информации, искаженные формы кривых тока и напряжения в энергетических установках и т.д.), однако только с помощью нелинейных элементов могут быть созданы важнейшие электротехнические устройства: усилители, стабилизаторы, преобразователи частоты, выпрямители и др. Развитие автоматики, телемеханики, радиотехники, вычислительной техники и т.д. вообще невозможно без применения нелинейных цепей и разработки новых нелинейных элементов.

АНАЛИЗ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ В ЦЕПЯХ ПОСТОЯННОГО ТОКА С НЕЛИНЕЙНЫМИ ДВУХПОЛЮСНИКАМИ

§ 1.1. Исходные характеристики двухполосников и их классификация

Двухполосником называют часть электрической цепи, рассматриваемую по отношению к двум зажимам. (В частном случае нелинейный двухполосник превращается в нелинейное сопротивление.) Условное обозначение нелинейного двухполосника показано на рис. 1.1.

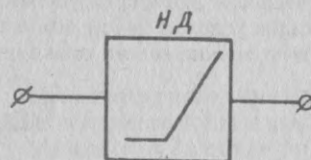


Рис. 1.1

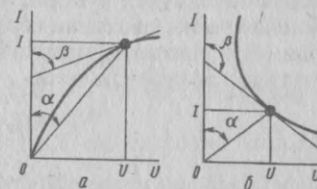


Рис. 1.2

Общепринятой характеристикой нелинейного двухполосника является вольт-амперная характеристика (ВАХ) $I = f(U)$ — зависимость тока, проходящего через двухполосник, от подводимого к нему напряжения, определенная для установившегося режима. Для линейного двухполосника эта характеристика представляет собой прямую линию.

Прежде чем рассмотреть особенности вольт-амперных характеристик, покажем, что в общем случае каждая точка ВАХ определяется статическим и дифференциальным сопротивлениями.

Под статическим сопротивлением двухполосника понимают отношение постоянного напряжения на двухполоснике к току в нем:

$$R_{ст} = U/I. \quad (1.1)$$

Дифференциальным сопротивлением называют величину

$$R_{диф} = dU/dI, \quad (1.2)$$

характеризующую двухполосник при малых отклонениях от рассматриваемой точки нелинейной характеристики.

В общем случае статическое и дифференциальное сопротивления не равны. Их значения совпадают только для линейных двухполюсников ($R_{ст} = R_{диф} = R$).

Статическое сопротивление, как видно из рисунка 1.2, пропорционально тангенсу угла α , образованного секущей, проведенной из начала координат в рассматриваемую точку характеристики, с осью I :

$$R_{ст} = \frac{m_U}{m_I} \operatorname{tg} \alpha = m_R \operatorname{tg} \alpha. \quad (1.3)$$

Здесь m_U — масштаб напряжения; m_I — масштаб тока; m_R — масштаб сопротивления.

Дифференциальное сопротивление пропорционально тангенсу угла β , образованного касательной в рассматриваемой точке характеристики с осью I :

$$R_{диф} = \frac{m_U}{m_I} \operatorname{tg} \beta = m_R \operatorname{tg} \beta. \quad (1.4)$$

В дальнейшем будем считать, что статическое и дифференциальное сопротивления равны тангенсам соответствующих углов, и будем помнить о необходимости учитывать масштаб. Кроме того, можно ввести также понятия «статическая проводимость»

$$G_{ст} = 1/R_{ст} \quad (1.5)$$

и «дифференциальная проводимость»

$$G_{диф} = 1/R_{диф}. \quad (1.6)$$

Если рассмотреть ВАХ двухполюсников и обобщить их по некоторым признакам, все многообразие этих характеристик можно свести к пяти основным типам, которые (в первом квадранте) показаны на рис. 1.3.

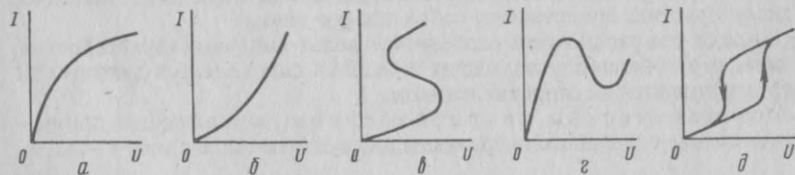


Рис. 1.3

В некоторых задачах практического применения ВАХ двухполюсников могут иметь зону нечувствительности как по напряжению (рис. 1.4,а), так и по току (рис. 1.4,б). Вольт-амперные характеристики могут быть также симметричными относительно начала координат и несимметричными.

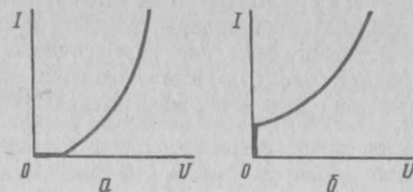


Рис. 1.4

На рис. 1.5 показаны некоторые симметричные ВАХ: основная, т.е. без зоны нечувствительности, с зоной нечувствительности по напряжению и с зоной нечувствительности по току. В случае симметричных характеристик $I(U) = -I(-U)$.

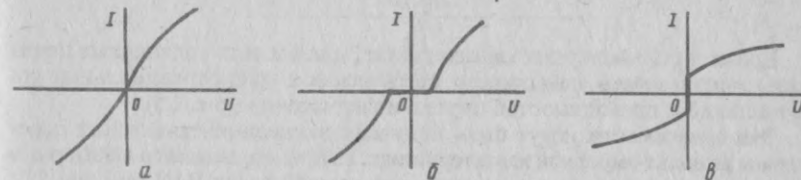


Рис. 1.5

Несимметричные характеристики $I(U) \neq -I(-U)$ бывают двух видов: мнимо несимметричные и явно несимметричные.

Мнимо несимметричные ВАХ симметричны относительно некоторой точки на оси ординат (рис. 1.6,а, б, д и е) или на оси абсцисс (рис. 1.6,в, з, ж и з). Как правило, такие характеристики соответствуют активным двухполюсникам и могут быть приведены к началу координат, если вместо исходного активного двухполюсника использовать пассивный, имеющий симметричную характеристику и включенный параллельно с источником тока (рис. 1.6,а, б, д и е) или последовательно с источником напряжения (рис. 1.6, в, з, ж, и з).

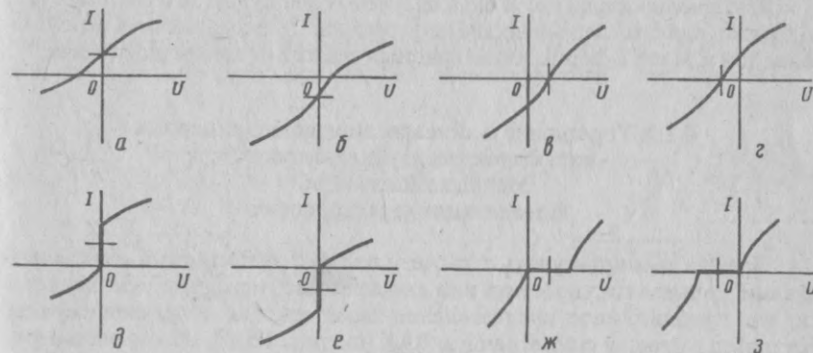


Рис. 1.6

К явно несимметричным ВАХ относят такие, которые в первом и третьем квадрантах представлены сочетанием основных вольт-амперных характеристик разного типа (рис. 1.7,а), сочетанием нелинейной характеристики и линейной (рис. 1.7,б) или сочетанием основных ВАХ одного типа, но имеющих при одних и тех же значениях $|U|$ различные значения $|I|$ (рис. 1.7,в).

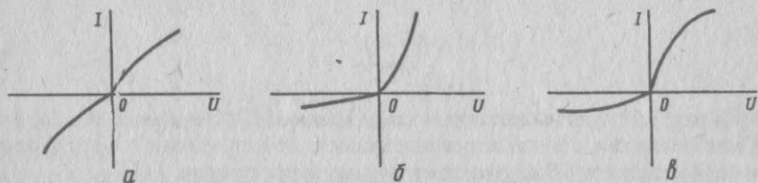


Рис. 1.7

Кроме вольт-амперных характеристик, для расчета нелинейных цепей можно использовать зависимости статических и дифференциальных сопротивлений и проводимостей от тока и напряжения (рис. 1.8).

Эти зависимости могут быть получены экспериментально или пересчитаны из вольт-амперной характеристики. Например, задаваясь некоторыми значениями тока $I(I_1, I_2, \dots)$, можно для каждой точки ВАХ (см. рис. 1.2)

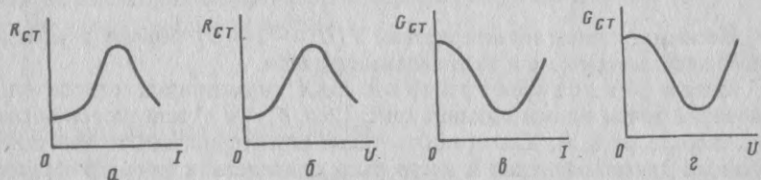


Рис. 1.8

определить $R_{ст}$ ($R_{ст1}, R_{ст2}, \dots$) или $R_{диф}$ ($R_{диф1}, R_{диф2}, \dots$) и построить графики $R_{ст}(I)$ или $R_{диф}(I)$.

Все характеристики могут быть получены одна из другой и поэтому будут содержать одинаковое количество информации. Целесообразность использования той или иной формы характеристики зависит от конкретной задачи.

§ 1.2. Упрощение и линеаризация вольт-амперных характеристик двухполюсников.

Метод компенсации.

Идеализация характеристик

Прежде чем приступить к расчету цепей с нелинейными двухполюсниками, попытаемся упростить или линеаризовать исходные характеристики, т.к. приближенное представление характеристик облегчает расчеты. Например, упрощая симметричную ВАХ (см. рис. 1.5, б), можно рассматривать ее без учета зоны нечувствительности или в одном квадранте, или в

обоих сразу; мнимо несимметричные ВАХ (см. рис. 1.6) могут быть приведены к началу координат, т.е. превращены в симметричные, и т.п.

Вольт-амперные характеристики бывают двух видов: линеаризуемые, которые в определенном режиме и для определенного диапазона воздействий могут быть сведены к линейной характеристике, и существенно нелинейные (их линеаризация приводит к потере каких-либо свойств нелинейного двухполюсника). Наиболее частый случай — линеаризация относительно начала координат с помощью касательной или секущей (рис. 1.9).

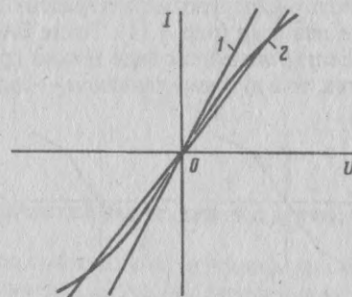


Рис. 1.9

Линеаризация при небольших отклонениях сигнала от рабочего режима возможна и для любой точки характеристики, если нелинейный двухполюсник заменить источником постоянного напряжения и сопротивлением, равным дифференциальному сопротивлению нелинейного двухполюсника на прямолинейном участке (метод компенсации). При этом исходный пассивный нелинейный двухполюсник сводится к линейному активному двухполюснику, внутреннее сопротивление которого равно дифференциальному сопротивлению исходного двухполюсника в рабочей точке.

Подобная замена для двух характеристик нелинейного двухполюсника — с насыщением по току и по напряжению — показана на рис. 1.10. Из рисунка видно, что, проведя касательные к ВАХ в рабочих точках, определяемых значениями тока и напряжений I_1, U_1 (рис. 1.10, б) и I_2, U_2 (рис. 1.10, д), требуемые напряжения найдем из соотношения $U_1 = -U_{i1} + R_{i1}I_1$ для первой и $U_2 = U_{i2} + R_{i2}I_2$ для второй характеристики, где $R_{i1} = \text{tg } \beta_1$ и

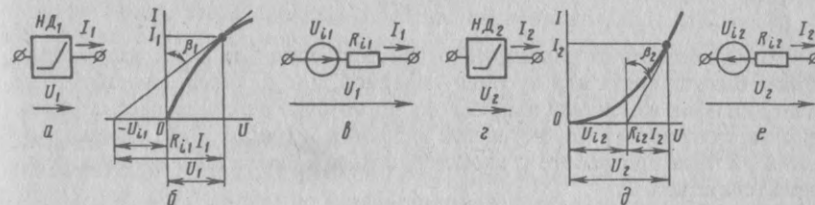


Рис. 1.10

$R_{i2} = \text{tg } \beta_2$, а U_{i1} и U_{i2} — отрезки на оси абсцисс. Эти уравнения могут быть реализованы в виде линейного источника напряжения U_i с линейным внутренним сопротивлением R_i , причем направление ЭДС источника совпадает с направлением тока для первой характеристики (рис. 1.10,а) и не совпадает для второй (рис. 1.10,б), что отвечает второму закону Кирхгофа для этих цепей. Следует иметь в виду, что значения U_{i1} , R_{i1} и U_{i2} , R_{i2} изменяются при изменении режима работы и справедливы только в ограниченной области вблизи рабочей точки.

Иногда участки вольт-амперных характеристик могут быть заменены несколькими прямыми линиями (рис. 1.11). Такие ВАХ называют кусочно-линейными. Если в линейном виде можно представить ограниченный набор характеристик, то в кусочно-линейном — любую характеристику.

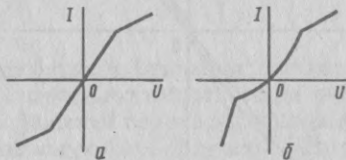


Рис. 1.11

Вид линеаризованной характеристики, которая должна быть взята для расчета данного нелинейного двухполюсника, во многом зависит от режима его работы в конкретной схеме, т.е. от пределов изменения воздействующего на него напряжения. Например, характеристику рис. 1.12,а (частный случай основной характеристики рис. 1.3,а) можно рассматривать в виде отдельных прямых линий при изменении напряжения: 1) $U = 0 - U_1$ (рис. 1.12,б); 2) $U = U_1 - U_2$ (рис. 1.12,в); 3) $U > U_2$ (рис. 1.12,г).

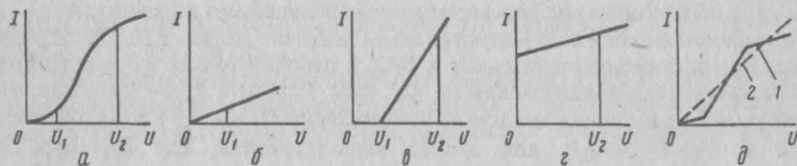


Рис. 1.12

В зависимости от диапазона воздействий одна и та же характеристика может быть принята или кусочно-линейной, или целиком линейной. Так, если диапазон изменения напряжения достаточно велик, то рассматриваемую характеристику можно свести к прямой 2 (рис. 1.12,в). Однако точность расчета при работе с характеристикой 1 значительно выше, чем с характеристикой 2.

Во многих случаях вводятся дополнительные допущения: малые сопротивления принимаются равными нулю, а большие — бесконечными; зонной гистерезиса пренебрегают и т.д. Идеализация характеристик может

быть проведена, если сопротивление нагрузки существенно больше или меньше статических сопротивлений соответствующих участков ВАХ. Такие характеристики называют идеализированными (рис. 1.13).

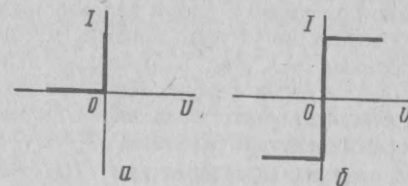


Рис. 1.13

§ 1.3. Графический расчет цепей с двухполюсниками

Нелинейные цепи простой конфигурации удобно рассчитывать известными из курса математики методами графического решения уравнений, непосредственно использующими графическое изображение исходных характеристик двухполюсников.

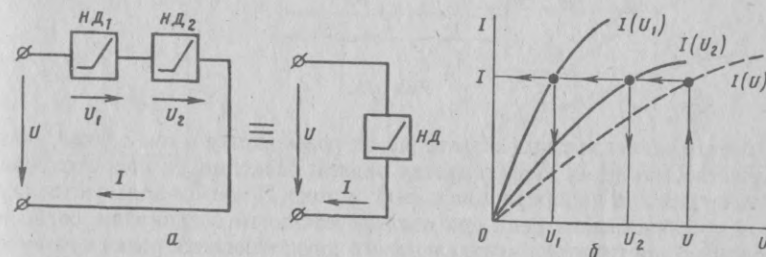


Рис. 1.14

Последовательное соединение. При расчете цепи с последовательным соединением нелинейных двухполюсников $НД_1$ и $НД_2$ (рис. 1.14,а), вольт-амперные характеристики которых показаны на рис. 1.14,б, необходимо воспользоваться вторым законом Кирхгофа и, задаваясь произвольными значениями ординат (токов), суммировать соответствующие им абсциссы (напряжения). В результате суммирования получится ВАХ, соответствующая всей цепи, которую можно рассматривать как один эквивалентный нелинейный двухполюсник (см. рис. 1.14,а). Далее по напряжению U , приложенному к цепи, находят ток I и падения напряжений на двухполюсниках U_1 и U_2 . Аналогично можно построить эквивалентную характеристику участка цепи с несколькими последовательно соединенными нелинейными двухполюсниками. Рассмотренный метод получил название метода эквивалентных характеристик.

Если последовательно с двухполюсником включен источник напряжения, то ВАХ участка цепи с этим двухполюсником и источником получается смещением характеристики влево на величину ЭДС, если направление ЭДС источника совпадает с током, и вправо — если не совпадает.

При фиксированном значении U ток и падения напряжений на двух нелинейных двухполюсниках могут быть найдены методом пересечения. Для этого одну из заданных ВАХ (рис. 1.15) следует перенести вправо от начала координат вдоль оси абсцисс на величину приложенного напряжения и повернуть так, чтобы получить зеркальное отображение ее относительно вертикали. Тогда вследствие равенства $U_1 = U - U_2$ точка пересечения зеркально отображенной характеристики $I(U_2)' = I(U - U_2)$ одного двухполюсника с характеристикой другого двухполюсника $I(U_1)$ определит искомый ток I и падения напряжений U_1 и U_2 .

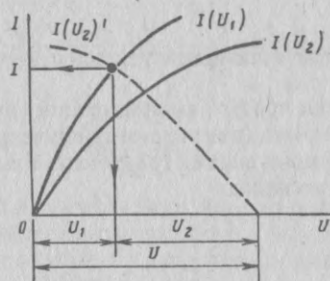


Рис. 1.15

Метод эквивалентных характеристик применяется в том случае, когда в качестве исходных характеристик заданы зависимости сопротивлений (статических или дифференциальных) от тока. При этом пользуются правилом преобразования цепи при последовательном соединении, согласно которому сопротивление эквивалентного двухполюсника равно сумме сопротивлений последовательно соединенных двухполюсников (при одном и том же токе). Таким образом, если заданы характеристики $R_{ст1}(I)$ и $R_{ст2}(I)$ (рис. 1.16,а) нелинейных двухполюсников НД₁ и НД₂ (рис. 1.14,а),

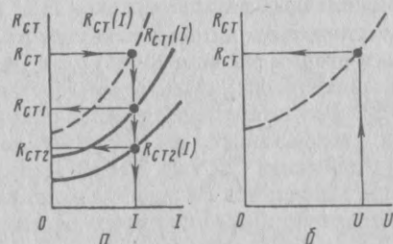


Рис. 1.16

то, задаваясь произвольными значениями абсцисс (токов), следует просуммировать соответствующие им значения ординат (статических сопротивлений). В результате суммирования получим зависимость $R_{ст}(I)$ для двухполюсника, эквивалентного двум заданным. Используя эту характеристику, нужно построить промежуточную зависимость $R_{ст}(U)$ (рис. 1.16,б) и отложить по оси абсцисс напряжение U , приложенное к цепи. Определив значение $R_{ст}$, перенести его на график исходных и эквивалентной характеристик (см. рис. 1.16,а), найти ток в цепи I и статические сопротивления заданных двухполюсников $R_{ст1}$ и $R_{ст2}$. Падения напряжений на этих двухполюсниках определяются по закону Ома: $U_1 = R_{ст1}I$ и $U_2 = R_{ст2}I$.

Параллельное соединение. При расчете цепи с параллельным соединением нелинейных двухполюсников (рис. 1.17,а) необходимо воспользоваться первым законом Кирхгофа: задаваясь произвольными значениями абсцисс (напряжений), просуммировать соответствующие значения ординат (токов). Полученная ВАХ будет соответствовать эквивалентному нелинейному двухполюснику. Далее по заданному току I определяются напряжение U и токи ветвей I_1 и I_2 (рис. 1.17,б).

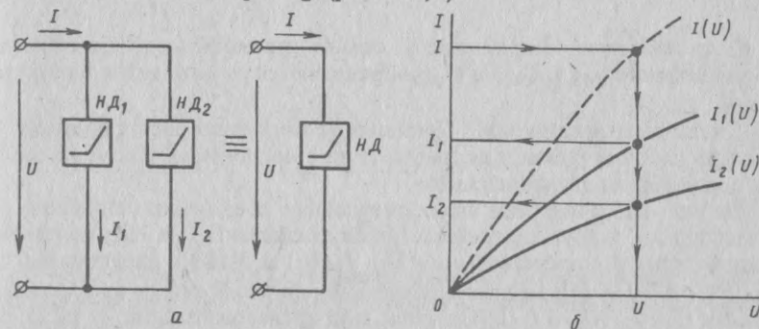


Рис. 1.17

Если же задано напряжение U , строить эквивалентную вольт-амперную характеристику не надо, т.к. токи I_1 и I_2 определяются из характеристик $I_1(U)$ и $I_2(U)$, а суммарный ток $I = I_1 + I_2$.

Аналогичный подход может быть использован при параллельном соединении нескольких нелинейных двухполюсников.

В случае параллельного включения двухполюсника с источником тока ВАХ участка цепи с этим двухполюсником получается смещением характеристики вверх на величину тока источника, если его направление совпадает с напряжением, и вниз — при несовпадении.

Если при параллельном соединении двухполюсников заданы зависимости $G_{ст1}(U)$ и $G_{ст2}(U)$ (рис. 1.18,а), то, пользуясь правилом преобразования цепи при параллельном соединении и задаваясь значениями абсцисс (напряжений), просуммируем соответствующие значения ординат (статических проводимостей) и в результате получим характеристику для эквивалентного двухполюсника. Далее необходимо построить промежуточную

характеристику $G_{ст}(I)$ и по заданному току I найти значение статической проводимости $G_{ст}$ (рис. 1.18, б). Перенос значения этой проводимости на эквивалентную характеристику (рис. 1.18, а) позволит определить приложенное к цепи напряжение U и статические проводимости $G_{ст1}$ и $G_{ст2}$ двухполюсников НД₁ и НД₂. Токи параллельных ветвей найдем по закону Ома: $I_1 = G_{ст1}U$ и $I_2 = G_{ст2}U$.

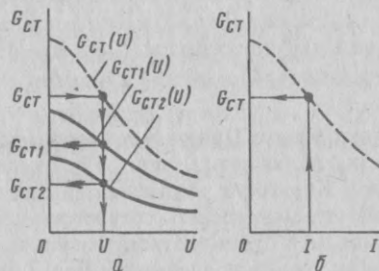


Рис. 1.18

Если же задано напряжение U , строить эквивалентную характеристику нет необходимости, т.к. $G_{ст1}$ и $G_{ст2}$ определяются по исходным характеристикам.

Смешанное соединение. Применяя те же приемы расчета, можно определить рабочий режим для любой цепи с последовательно-параллельным соединением двухполюсников.

На рис. 1.19, а показана схема смешанного соединения линейного сопротивления R и двух нелинейных двухполюсников НД₁ и НД₂, характеристики которых (соответственно $I_3(U_3)$, $I_1(U_1)$ и $I_2(U_2)$) представлены на рис. 1.19, б. После замены двух параллельных двухполюсников одним эквивалентным $(I_2 + I_3)(U_2) = I_1(U_2)$, а затем двух последовательных — также од-

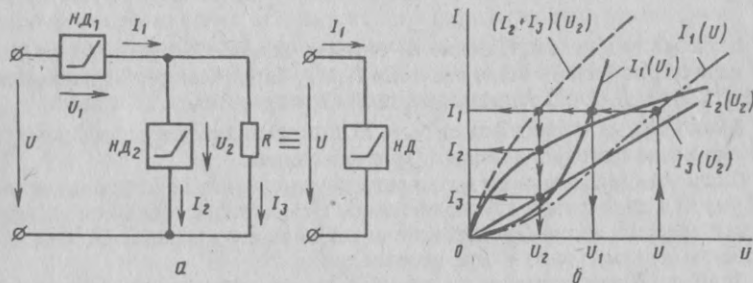


Рис. 1.19

ним эквивалентным $I_1(U)$ по заданному напряжению U находим ток I_1 . Определив ток I_1 , найдем напряжение U_1 и U_2 ; зная напряжение U_2 , найдем токи I_2 и I_3 .

Если при смешанном соединении двухполюсников заданы зависимости сопротивлений или проводимостей от тока или напряжения, целесообразно получить из этих зависимостей вольт-амперные характеристики и использовать их для расчета, т.к. в случае смешанного соединения эти исходные зависимости менее удобны, чем ВАХ, поскольку для расчета необходимо использовать как зависимости $R_{ст}(I$ или $U)$, так и зависимости $G_{ст}(I$ или $U)$ и переходить от одной к другой.

Расчет цепи с двумя узлами. Графическое построение для расчета цепи с параллельными ветвями возможно и для случая, когда наряду с нелинейными двухполюсниками в них имеются источники постоянной ЭДС, включенные последовательно с двухполюсниками (рис. 1.20, а). Для этого вместо ВАХ двухполюсников $I_1(U_1)$, $I_2(U_2)$ и $I_3(U_3)$ предварительно строят характеристики каждой ветви с учетом ЭДС $E_1(U)$, $E_2(U)$ и $E_3(U)$ (смещение влево на величину E_1 и E_2 и вправо — на E_3 по оси абсцисс), а затем строят эквивалентную характеристику параллельных ветвей

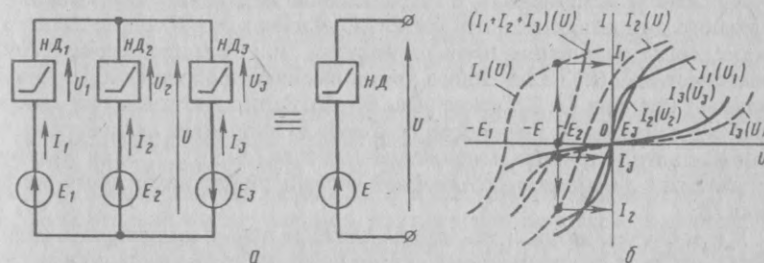


Рис. 1.20

$(I_1 + I_2 + I_3)(U)$ (рис. 1.20, б). Эта характеристика смещена влево от начала координат на величину E , которую можно рассматривать как ЭДС эквивалентной цепи.

Поскольку сумма токов в узле $(I_1 + I_2 + I_3)$ равна нулю, в эквивалентной цепи ток отсутствует. Следовательно, точка пересечения характеристики $(I_1 + I_2 + I_3)(U)$ с осью абсцисс и есть решение задачи. Отсюда, как показано на рис. 1.20, б, находят токи в каждой ветви I_1 , I_2 и I_3 , а по соответствующим вольт-амперным характеристикам рассчитывают напряжения U_1 , U_2 и U_3 .

Описанный метод применим и для случая, когда не все параллельные ветви содержат источники.

Расчет сложной цепи с одним и двумя нелинейными двухполюсниками. При расчете сложных электрических цепей, используя методы преобразования, необходимо упрощать схемы, пытаясь свести их к одноконтурным или к схемам с двумя узлами. Если электрическая цепь любой сложности содержит несколько источников напряжения и один нелинейный двухполюсник, для расчета такой цепи можно применить метод эквивалентного генератора. Для этого выделяют ветвь с двухполюсником, а остальную часть цепи изображают в виде активного двухполюсника (рис. 1.21), который может быть заменен эквивалентным источником на-

пряжения. Схема сведется к одноконтурной, состоящей из линейного сопротивления и нелинейного двухполюсника, и рассчитывается методом эквивалентных характеристик или методом пересечения.

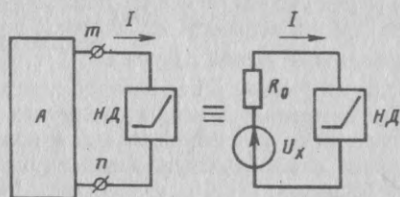


Рис. 1.21

Как известно из раздела «Линейные электрические цепи», напряжение эквивалентного источника U_x и сопротивление R_0 (входное сопротивление пассивного двухполюсника относительно зажимов m и n) определяются в режиме, когда выделенная ветвь разомкнута. При этом необходимо, чтобы характеристика $I(U)$ нелинейного двухполюсника проходила через начало координат (т.е. при $I = 0$ должно быть $U = 0$). Если же исходная характеристика смещена, нужно перенести ее в начало координат включением дополнительного источника напряжения или тока (см. § 1.1). Этот источник учитывается в дальнейшем в линейной части цепи при нахождении напряжения U_x .

В том случае, когда сколь угодно сложная цепь с источниками напряжения содержит два нелинейных двухполюсника, можно выделить две эти ветви, а остальную часть цепи представить в виде активного четырехполюсника (рис. 1.22).

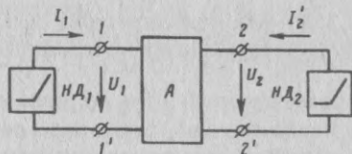


Рис. 1.22

Известно, что если в две ветви одновременно ввести по одному источнику, ЭДС которых равны напряжениям на разомкнутых зажимах этих ветвей, токи в них определяются из схемы рис. 1.23. Упрощение задачи состоит в том, что вместо большого числа заданных источников, действующих в ветвях сложной цепи, теперь имеем только два (U_{x1} и U_{x2}), включенные в ветви с нелинейными двухполюсниками, а вся сложная линейная часть цепи стала пассивным четырехполюсником. Следует отметить, что если токи в ветвях с двухполюсниками определяют из схемы рис. 1.23, то во всех других ветвях их получают суммированием токов режима холостого хода активного четырехполюсника (при определении напряжений U_{x1} и U_{x1}) и режима схемы рис. 1.23.

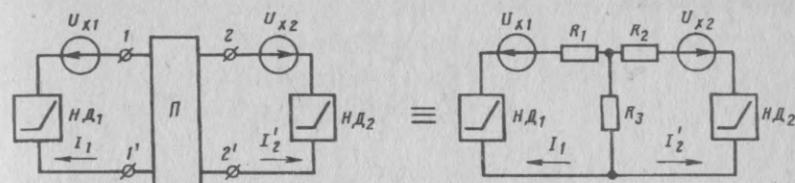


Рис. 1.23

Затем линейный пассивный четырехполюсник нужно заменить T -образной схемой замещения и рассчитать эквивалентную схему как схему с двумя узлами, предварительно определив значения сопротивлений R_1 , R_2 и R_3 . Для этого пользуются соотношениями T -образной схемы замещения: $R_1 = R_{11} - R_{12}$, $R_2 = R_{22} - R_{12}$, $R_3 = R_{12}$. Сопротивления R_{11} , R_{12} и R_{22} находят или из схемы четырехполюсника (если она известна), или из режима холостого хода как коэффициенты R системы уравнений четырехполюсника.

Такой подход к расчету цепи с двумя нелинейными двухполюсниками не является единственным. Можно разомкнуть только одну ветвь, например с двухполюсником $НД_2$ (см. рис. 1.22), и определить напряжение между разомкнутыми зажимами 2 и $2'$ и входное нелинейное сопротивление относительно одного двухполюсника. Если это удастся сделать, схема рис. 1.22 преобразуется в одноконтурную, имеющую в отличие от схемы рис. 1.21 два нелинейных двухполюсника.

Расчет сложной цепи с тремя нелинейными двухполюсниками. Если цепь содержит произвольное количество линейных сопротивлений, источников и три нелинейных двухполюсника, можно выделить три эти ветви, а остальную линейную часть цепи представить в виде активного шестиполюсника (рис. 1.24). Как и ранее, введем в каждую из трех ветвей по одному источнику. ЭДС U_{x1} , U_{x2} , U_{x3} (рис. 1.25) будут равны напряжениям U_1 , U_2 , U_3 на зажимах $1-1'$, $2-2'$ и $3-3'$ соответственно, если одновременно разомкнуть внешние цепи. Исходный линейный активный шести-

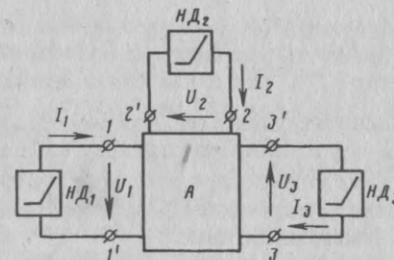


Рис. 1.24

полюсник превратится в пассивный, который описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} U_1 &= R_{11} I_1 + R_{12} I_2 + R_{13} I_3; \\ U_2 &= R_{21} I_1 + R_{22} I_2 + R_{23} I_3; \\ U_3 &= R_{31} I_1 + R_{32} I_2 + R_{33} I_3. \end{aligned} \quad (1.7)$$

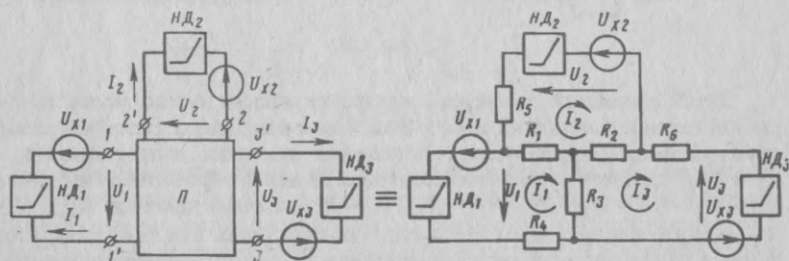


Рис. 1.25

Согласно теореме взаимности $R_{12} = R_{21}$, $R_{13} = R_{31}$, $R_{23} = R_{32}$, поэтому уравнения (1.7) содержат только шесть независимых параметров. Следовательно, простейшая эквивалентная схема шестиполюсника должна содержать шесть сопротивлений. На рис. 1.25 показана одна из таких возможных схем, имеющая три независимых контура и отвечающая (1.7). Для этой схемы

$$\begin{aligned} R_{11} &= R_1 + R_3 + R_4, & R_{22} &= R_1 + R_2 + R_5, & R_{33} &= R_2 + R_3 + R_6, \\ R_{12} &= R_{21} = -R_1, & R_{13} &= R_{31} = -R_3, & R_{23} &= R_{32} = -R_2. \end{aligned}$$

Сопротивления R_1, R_2, \dots можно определить, используя режим холостого хода. Так, разомкнув зажимы 2—2' и 3—3' и подавая питание со стороны зажимов 1—1', получим

$$U'_1 = (R_1 + R_3 + R_4) I_1, \quad U'_2 = -R_1 I_1, \quad U'_3 = -R_3 I_1,$$

откуда $R_1 = \left| \frac{U'_2}{I_1} \right|$, $R_3 = \left| \frac{U'_3}{I_1} \right|$, $R_4 = \frac{U'_1}{I_1} - R_1 - R_3$ и т.д.

Расчет этой цепи затруднителен, поэтому преобразуем звезду (сопротивления R_1, R_2, R_3) в эквивалентный треугольник (сопротивления $R'_{12}, R'_{23}, R'_{31}$) (рис. 1.26). В этом случае получаются три пары ветвей, соединенных параллельно, и цепь может быть рассчитана с помощью графических построений, изложенных ранее.

Расчет сложной цепи с четырьмя и более нелинейными двухполюсниками. В сложной цепи из четырех нелинейных двухполюсников можно выделить эти ветви, а остальная часть образует активный линейный вось-

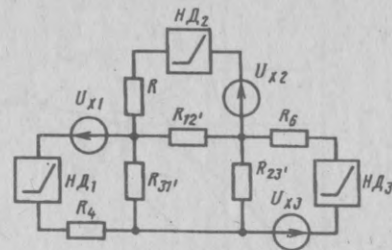


Рис. 1.26

миполюсник (рис. 1.27). Далее активный восьмиполюсник можно превратить в пассивный, при этом источники будут во внешних цепях.

Упростить схему пассивного восьмиполюсника нельзя, т.к. она в общем случае не содержит последовательных и параллельных соединений, а также звезду и треугольник. Для этого сложного случая воспользуемся методом последовательных приближений (метод итераций), который состоит

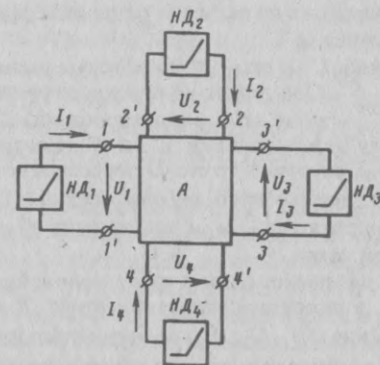


Рис. 1.27

в последовательном уточнении первоначально полученного тем или иным способом первого приближения. Выберем одну из ветвей на рис. 1.27, например ветвь с нелинейным двухполюсником HD_4 , имеющим вольт-амперную характеристику $I_4 = f(U_4)$, показанную на рис. 1.28. На этой характеристике выберем любое значение тока, например I'_4 , найдем линейное сопротивление в точке A' ($R'_4 = U'_4/I'_4$) и заменим нелинейный двухполюсник HD_4 линейным сопротивлением R'_4 . В цепи осталось три нелинейных двухполюсника, и восьмиполюсник превратился в шестиполюсник. Рассчитаем его и получим действительное значение тока в четвертой ветви I'_4 с сопротивлением R'_4 . Точка A' не лежит на вольт-амперной характеристике и потому не является решением задачи.

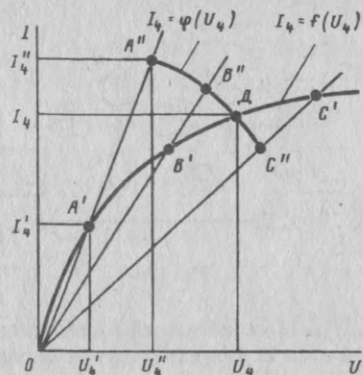


Рис. 1.28

Выберем следующие значения тока и сопротивления R''_4 , соответствующие точке B' . Опять рассчитаем цепь и получим ток, определяемый точкой B'' . Эта точка также не является решением задачи, но расположена ближе к ВАХ, чем точка A'' .

Зададимся точкой C' и еще раз произведем расчет, который даст значение тока в точке C'' . Она лежит ниже характеристики $I_4 = f(U_4)$, тогда как точки A' и B'' — выше этой характеристики. Следовательно, решение задачи находится между точками C'' и B'' . Соединим точки A'' , B'' и C'' кривой $I_4 = \varphi(U_4)$, которая в точке D пересечет вольт-амперную характеристику $I_4 = f(U_4)$ нелинейного двухполюсника НД₄. Эта точка и соответствующие ей значения тока I_4 и напряжения U_4 являются решением задачи для четвертой ветви.

Выполнив еще раз расчет цепи с тремя нелинейными двухполюсниками НД₁, НД₂, НД₃ и линейным сопротивлением $R_4 = U_4/I_4$, найдем токи I_1, I_2, I_3 и напряжения U_1, U_2, U_3 во всех остальных ветвях.

Если сложная цепь содержит пять нелинейных двухполюсников, то последовательные приближения проводят уже в двух ветвях, например в ветвях с нелинейными двухполюсниками НД₄ и НД₅.

Порядок действия такой: задаваясь некоторым значением тока в пятой ветви (точка A' , рис. 1.29,б), находим линейное сопротивление R'_5 ; установив $R'_5 = \text{const}$, рассчитаем четвертую ветвь при различных значениях линейного сопротивления R_4 (прямые 1, 2 на рис. 1.29,а) и построим кривую $I_4 = \varphi_1(U_4)$. В данном случае оказалось достаточным сделать две итерации.

В четвертой ветви установим сопротивление, соответствующее точке A'' (рис. 1.29,а), и найдем уточненное значение тока в пятой ветви (точка A'' , рис. 1.29,б). Точка A'' лежит вне характеристики $I_5 = f(U_5)$, поэтому зададимся другим значением тока (сопротивления) в пятой ветви (точка B' , рис. 1.29,б), опять несколько раз рассчитаем четвертую ветвь (прямые 1, 2, 3, рис. 1.29,а) и построим кривую $I_4 = \varphi_2(U_4)$. Уточним ток в пятой ветви (точка B'' , рис. 1.29,б) и т.д.

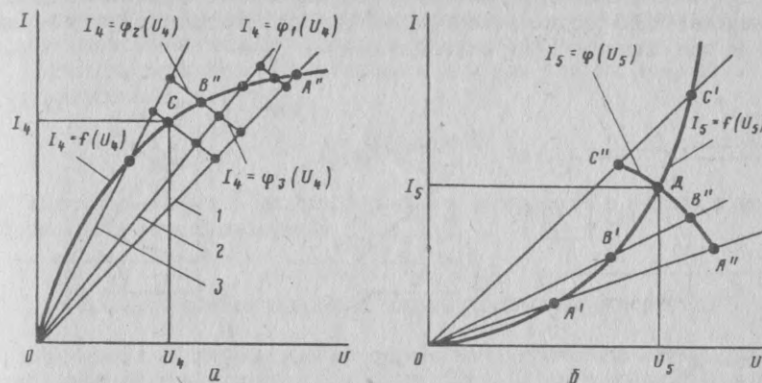


Рис. 1.29

Выполнив серию таких операций, построим кривую $I_5 = \varphi(U_5)$ (рис. 1.29,б) и найдем точку D , которая является рабочей точкой характеристики $I_5 = f(U_5)$. Теперь при сопротивлении $R_5 = U_5/I_5$ повторим расчет четвертой ветви. Точка C пересечения кривой $I_4 = \varphi_3(U_4)$ (рис. 1.29,а) с характеристикой $I_4 = f(U_4)$ есть решение задачи для четвертой ветви.

Таким образом, расчет двух ветвей закончен: определены значения I_4, U_4, R_4 и I_5, U_5, R_5 . Теперь достаточно заменить нелинейные двухполюсники НД₄ и НД₅ линейными сопротивлениями R_4 и R_5 соответственно и рассчитать токи и напряжения в остальных трех нелинейных двухполюсниках.

Рассмотренные случаи включают в себя практически все возможные в технике варианты цепей с нелинейными двухполюсниками. Несмотря на то, что цепи с четырьмя нелинейными двухполюсниками или пятью встречаются редко, необходимо знать, как подойти к расчету таких цепей. Действительно, нелинейные двухполюсники включаются в цепь для придания ей определенных свойств. Когда нелинейных двухполюсников немного, можно легко определить их суммарное влияние на цепь и предугадать ее свойства. При большом числе нелинейных двухполюсников правильный выбор требуемых исходных вольт-амперных характеристик и способа соединения элементов вряд ли возможен и операции при расчете цепи настолько громоздки, что целесообразно исследовать ее экспериментально или воспользоваться вычислительной техникой.

§ 1.4. Релейный эффект в цепи с двухполюсником, имеющим отрицательное дифференциальное сопротивление

В цепи с нелинейным двухполюсником с падающим участком ВАХ может возникнуть релейный эффект, т.е. скачкообразное изменение тока.

Пусть цепь соответствующими преобразованиями приведена к цепи с последовательно соединенными линейным сопротивлением R и нелинейным двухполюсником НД (рис. 1.30,а).

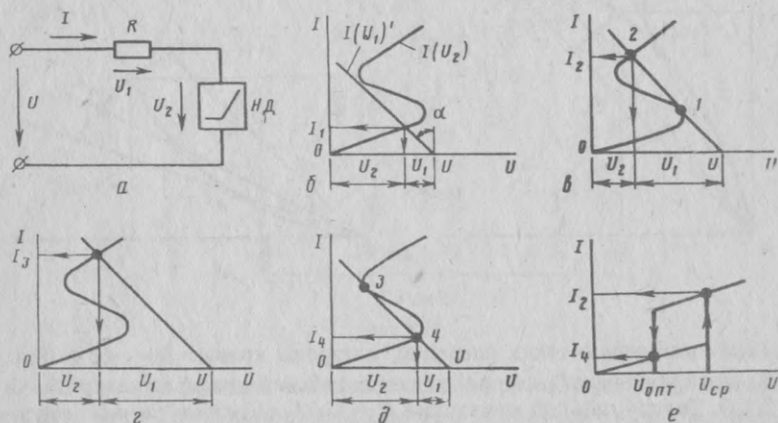


Рис. 1.30

Если использовать метод пересечения и увеличивать входное напряжение U , то линейная характеристика $I(U_1)'$ будет смещаться вправо параллельно самой себе (рис. 1.30,б). При дальнейшем увеличении входного напряжения наступит момент, когда характеристика $I(U_1)'$ коснется характеристики $I(U_2)$ (точка 1 на рис. 1.30,в). Теперь даже при незначительном увеличении напряжения U произойдет скачкообразное изменение тока, и рабочий режим будет соответствовать току в цепи I_2 и падениям напряжений U_1 и U_2 , определяемым точкой 2 (т.к. рабочая точка должна лежать на пересечении характеристик). Входное напряжение, при котором происходит такое явление, называют напряжением срабатывания ($U_{ср}$). Дальнейшее увеличение входного напряжения не приведет к каким-либо качественным изменениям расчетных соотношений (рис. 1.30,г).

При уменьшении входного напряжения U до значения, при котором произойдет соприкосновение характеристик $I(U_1)'$ и $I(U_2)$ в точке 3 (рис. 1.30,д), ток опять изменится скачком, и рабочий режим будет соответствовать току в цепи I_4 и падениям напряжений U_1 и U_2 , определяемым точкой 4. Входное напряжение, при котором произойдет такое явление, названо напряжением отпускания ($U_{отп}$). График самого релейного эффекта, т.е. зависимость $I=f(U)$, дан на рис. 1.30,е.

Диапазон напряжений срабатывания и отпускания, а следовательно, и ширина зоны характеристики нелинейного двухполюсника между точками 1 и 3 определяются коэффициентом возврата $k = U_{отп}/U_{ср} \leq 1$.

Следует также отметить, что релейный эффект в принципе может быть получен изменением не только напряжения U , но и сопротивления R , что равнозначно изменению угла наклона линейной ВАХ.

Условием возникновения релейного режима является соприкосновение характеристик, т.е.

$$|R_{диф}| = R. \quad (1.8)$$

Релейный эффект, естественно, может возникнуть и в цепи с двумя нелинейными двухполюсниками.

§ 1.5. Нелинейная аппроксимация исходных характеристик

Удобные и наглядные для простых схем графические методы становятся слишком громоздкими для сложных схем. Кроме того, даже для простых схем эти методы требуют высокой точности выполнения чертежей и выбора удовлетворительного масштаба. Для сложных схем графическими методами невозможно установить общие закономерности, найти оптимальные решения, варьировать параметры и т.д. Здесь предпочтительнее пользоваться аналитическими методами расчета, которые основаны на аппроксимации вольт-амперных характеристик или зависимостей сопротивлений от тока (напряжения), т.е. на замене нелинейной характеристики аналитической функцией, приближенно выражающей заданную зависимость.

Метод расчета, при котором часть расчетных операций выполняется аналитически, а часть — графически, называется графоаналитическим.

Точная аппроксимация характеристики обычно приводит к сложным математическим соотношениям, что очень затрудняет анализ, и на практике поэтому не стремятся к особо точной аппроксимации. Аппроксимирующее выражение при этом должно удовлетворять двум требованиям: 1) по возможности более точно проявлять характер аппроксимирующей зависимости и всегда отражать определяющие для анализа исследуемого явления свойства этой зависимости; 2) быть максимально простым, чтобы были простыми и решения уравнений, в которые вводится выражение при анализе цепи. Поэтому для одной и той же характеристики в одних режимах может оказаться предпочтительным один вид аппроксимации, в других режимах — другой.

Задачу аппроксимации характеристик можно разбить на две части: выбор типа аппроксимирующей функции и определение ее коэффициентов. Обычно используются следующие виды аппроксимации (на примере ВАХ):

а) степенной полином

$$i = \sum_{k=0}^n a_k u^k = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n, \quad (1.9)$$

при помощи которого можно аппроксимировать характеристики с любой степенью точности. Однако для высокоточных характеристик требуются полиномы высоких порядков, крайне неудобные для работы, т.к. содержат

большое число членов. К этому виду относятся также линейная, кусочно-линейная аппроксимация и аппроксимация с помощью неполных полиномов;

б) гиперболический синус

$$i = \alpha \operatorname{sh} \beta u; \quad (1.10)$$

в) гиперболический тангенс

$$i = \alpha \operatorname{th} \beta u \quad (1.11)$$

или

$$i = \alpha (1 + \operatorname{th} \beta u). \quad (1.12)$$

Достоинство аппроксимации вида (1.12) в том, что она правильно передает изменение крутизны (первой производной) и кривизны (второй производной) характеристики. В тех задачах, где существенную роль играет изменение этих параметров, данный способ аппроксимации незаменим;

г) экспоненциальный полином

$$i = \sum_{k=1}^n a_k e^{b_k u} = a_1 e^{b_1 u} + a_2 e^{b_2 u} + a_3 e^{b_3 u} + \dots + a_n e^{b_n u}, \quad (1.13)$$

с помощью которого возможно достаточно точно передать любую характеристику. В основном физические процессы в нелинейных цепях подчиняются законам пропорционального роста, согласно которым скорость изменения функции пропорциональна самой функции. Именно таким процессам адекватна экспонента. С учетом трудностей, связанных с определением коэффициентов аппроксимации, обычно используют одночленные или двухчленные полиномы:

$$i = a \cdot e^{bu}; \quad (1.14)$$

$$i = a_1 e^{b_1 u} + a_2 e^{b_2 u}. \quad (1.15)$$

Кроме того, при разделении аргументов (например, при действии нескольких частичных напряжений) возможно отделение составляющих в виде

$$i = a e^{b(u_1 + u_2)} = a e^{b u_1} \cdot e^{b u_2}; \quad (1.16)$$

д) тригонометрический полином

$$\begin{aligned} i &= a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \sin ku + b_0 + \sum_{k=1}^n b_k \cos ku = \\ &= a_0 + a_1 \sin u + a_2 \sin 2u + \dots + a_n \sin nu + \\ &+ b_0 + b_1 \cos u + b_2 \cos 2u + \dots + b_n \cos nu. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Полином (1.17) применяется сравнительно редко, т.к. удовлетворительное приближение достигается только при большом количестве членов (не менее пяти).

Для решения второй части, т.е. для определения коэффициентов аппроксимирующей функции, чаще всего используются метод выбранных точек и метод выравнивания.

Метод выбранных точек заключается в рациональном выборе наиболее характерных точек, через которые проходит аппроксимирующая кривая. Число выбранных точек равно числу определяемых коэффициентов в аналитическом выражении. Точки выбираются таким образом, чтобы все они лежали в предполагаемой рабочей области и отражали основные особенности аппроксимирующей кривой.

Например, для выбора двух точек (функция имеет два коэффициента) нужно, чтобы одна находилась в области максимально ожидаемого аргумента, а другая — в области наибольшего изгиба кривой.

Покажем, как следует пользоваться методом выбранных точек, если аппроксимация выполнена полиномом второго порядка

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2. \quad (1.18)$$

На вольт-амперной характеристике выберем три точки с координатами $u_1, i_1; u_2, i_2; u_3, i_3$. Подставляя эти значения в (1.18), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} i_1 &= a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_1^2; \\ i_2 &= a_0 + a_1 u_2 + a_2 u_2^2; \\ i_3 &= a_0 + a_1 u_3 + a_2 u_3^2 \end{aligned} \quad (1.19)$$

с тремя неизвестными (a_0, a_1, a_2). Решение этой системы позволит определить коэффициенты аппроксимации.

Наиболее трудоемким является определение коэффициентов в том случае, когда аппроксимация выполнена с помощью трансцендентных функций. Например, если для аппроксимации выбрано выражение (1.10), то, задавшись двумя точками ($u_1, i_1; u_2, i_2$), получим

$$\begin{aligned} i_1 &= \alpha \operatorname{sh} \beta u_1; \\ i_2 &= \alpha \operatorname{sh} \beta u_2, \end{aligned} \quad (1.20)$$

откуда

$$\frac{\operatorname{sh} \beta u_1}{\operatorname{sh} \beta u_2} = \frac{i_1}{i_2} = k. \quad (1.21)$$

Это уравнение относительно β решается графически построением зависимости $k = f(\beta)$.

Затем определяется α :

$$\alpha = \frac{i_1}{\operatorname{sh} \beta u_1} = \frac{i_2}{\operatorname{sh} \beta u_2}. \quad (1.22)$$

При использовании метода выравнивания аппроксимирующую функцию $i = f(u)$ представляют в виде линейной зависимости

$$i' = a_0 + a_1 u', \quad (1.23)$$

где новые переменные i' и u' связаны с переменными i и u выражениями

$$i' = \varphi_1(u, i) \quad (1.24)$$

и

$$u' = \varphi_2(u, i). \quad (1.25)$$

Коэффициенты a_0 и a_1 определяются в результате совместного решения двух уравнений, получаемых подстановкой двух пар конкретных числовых значений u'_1, i'_1 и u'_2, i'_2 в (1.23). В свою очередь, значения u'_1, i'_1, u'_2, i'_2 определяются подстановкой в (1.24) и (1.25) конкретных числовых значений u_1, i_1, u_2, i_2 .

Рассмотрим часто встречающуюся аппроксимирующую функцию вида

$$i = a u^n. \quad (1.26)$$

Прологарифмировав ее, получим выражение, аналогичное (1.23):

$$\ln i = \ln a + n \ln u_1. \quad (1.27)$$

Если теперь зададимся на вольт-амперной характеристике двумя точками с координатами u_1, i_1 и u_2, i_2 , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \ln i_1 &= \ln a + n \ln u_1; \\ \ln i_2 &= \ln a + n \ln u_2, \end{aligned} \quad (1.28)$$

совместное решение которой позволит определить неизвестные a и n .

Коэффициенты аппроксимирующей функции можно также найти методом наименьших квадратов, который основан на условии минимизации среднеквадратичной ошибки отклонения от исходной характеристики.

Рассмотрим цепь, состоящую из последовательно соединенных линейного сопротивления R и нелинейного двухполюсника НД (рис. 1.31,а). Двухполюсник задан вольт-амперной характеристикой (кривая 1, рис. 1.31,б), которая на некотором интервале может быть аппроксимирована параболой второго порядка

$$I = a U_2^2 \quad (1.29)$$

достаточно точно совпадающей с исходной ВАХ (кривая 2, рис. 1.31,б).

Согласно второму закону Кирхгофа

$$U = U_1 + U_2 = RI + \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{I}. \quad (1.30)$$

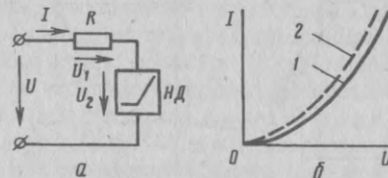


Рис. 1.31

Решение этого квадратного уравнения позволит определить ток как функцию напряжения и параметров цепи.

Если в качестве исходной характеристики задана зависимость $R_{ст}(I)$, она также может быть аппроксимирована в требуемом интервале некоторой функцией, и ток можно найти из уравнения

$$U = U_1 + U_2 = RI + R_{ст}(I)I. \quad (1.31)$$

Аппроксимирующее выражение нелинейной характеристики затем может быть линеаризовано (как было показано для графического варианта) с помощью касательной или секущей. Аналитическая линеаризация с помощью касательной заключается в том, что кривая на соответствующем участке заменяется линейным членом разложения ее в ряд Тейлора в окрестности рабочей точки или в ряд Маклорена, если линеаризация производится относительно начала координат. При линеаризации с помощью секущей необходимо выбрать положение секущей (угловой коэффициент), которое обычно определяется методом наименьших квадратов.

§ 1.6. Расчет цепей

с двухполюсниками методом компенсации

Если в электрическую цепь включить нелинейный двухполюсник (рис. 1.32,а), имеющий вольт-амперную характеристику, показанную на рис. 1.32,б (так называемая вентильная характеристика), то к прямой ветви этой характеристики $I = f_1(U)$ можно применить метод компенсации (см. § 1.2). Из эквивалентной схемы для определения тока I' , показанной на рис. 1.32,в, имеем

$$I' = \frac{U - U_i}{R_i + R_n}. \quad (1.32)$$

Рабочая точка (I', U_1') определяется током нагрузки и должна лежать на прямолинейном участке характеристики. Это дает возможность, найдя по методу компенсации значения U_i и R_i , не прибегать в дальнейшем к вольт-амперной характеристике, а непосредственно из (1.11) на-

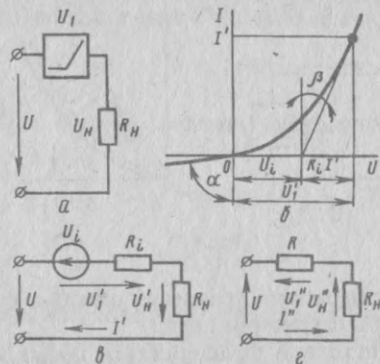


Рис. 1.32

ходить ток I' при изменениях значения входного напряжения U или сопротивления нагрузки R_N . При этом необходимо иметь в виду, что такие расчеты справедливы только для случая, когда значения тока I' не выходят из зоны, ограниченной участком, вне которого ВАХ и прямая линия начинают расходиться.

При изменении полярности входного напряжения U расчет ведется по обратной ветви характеристики $-I = f_2(-U)$, которая практически во всем рабочем диапазоне может быть линеаризована и заменена одним сопротивлением R . Из эквивалентной схемы (см. рис. 1.26,з) находим

$$I'' = \frac{U}{R + R_N} \approx \frac{U}{R'} \quad (1.33)$$

где $R = \operatorname{tg} \alpha$ — статическое (дифференциальное) сопротивление для обратного направления тока ($R \gg R_N$).

§ 1.7. Магнитные цепи при постоянном магнитном потоке

Далее будет показано, что магнитная цепь и ее параметры аналогичны электрической цепи и ее параметрам, поэтому рассмотренные ранее методы и приемы расчета электрических цепей с нелинейными двухполюсниками полностью применимы и для расчета магнитных цепей. Чтобы провести указанную аналогию, необходимо определить параметры магнитной цепи, уяснить ее особенности и понять соотношения, определяемые физическими процессами, протекающими в ней.

Для увеличения магнитного потока при заданной намагничивающей силе, а также для придания магнитному полю желаемой конфигурации некоторые части электротехнического устройства выполняются из фер-

ромагнитных материалов. Как известно, эти ферромагнитные части называют магнитопроводами (сердечниками). Магнитный поток создается током, протекающим по навивке на магнитопровод обмотке.

Систему ферромагнитных тел, предназначенную направлять и концентрировать магнитный поток, совместно с обмоткой называют магнитной цепью. Если весь магнитопровод выполнен из одного ферромагнитного материала, магнитную цепь называют однородной и соответственно неоднородной, если магнитопровод выполнен из материалов с различными магнитными свойствами. Магнитная цепь, во всех сечениях которой магнитные потоки одинаковы, называется неразветвленной; в разветвленной магнитной цепи потоки в различных частях неодинаковы.

Если в полностью размагниченном ферромагнитном материале монотонно увеличивать напряженность и определять индукцию в установившемся режиме, то зависимость магнитной индукции от напряженности магнитного поля $B = f(H)$, называемая кривой начального намагничивания, будет иметь вид, представленный на рис. 1.33.

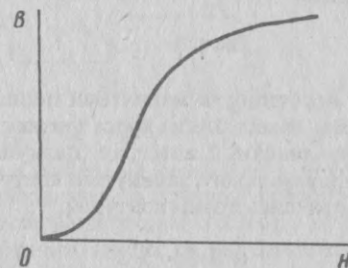


Рис. 1.33

Вследствие необратимости процессов намагничивания магнитное состояние зависит от предшествующих воздействий. (Свойство магнитного состояния сохранять след предшествующих воздействий называют гистерезисом.) После ряда повторных достаточно медленных изменений напряженности поля в пределах $\pm H$ (от $+H_1$ до $-H_1$; от $+H_2$ до $-H_2$ и т.д.) устанавливается статическая симметричная петля гистерезиса (рис. 1.34). Когда же достигается предельное значение $\pm H_{\max}$, форма собственно петли уже не изменяется, а растут только безгистерезисные участки в области насыщения. Такая петля называется предельной петлей гистерезиса; другие петли названы частными циклами (или частными петлями).

Характерными точками на предельной петле гистерезиса являются: значение индукции при напряженности, равной нулю, остаточная индукция B_R ; значение напряженности магнитного поля, необходимое для того, чтобы довести индукцию в предварительно намагниченном материале до нуля, — коэрцитивная сила H_C .

Даже в статических условиях нелинейная магнитная цепь имеет совершенно различные свойства в зависимости от своей «магнитной предисто-

рии». Поэтому принято характеризовать магнитные материалы основной кривой намагничивания — геометрическим местом вершин симметричных петель гистерезиса, получаемых при различных максимальных значениях напряженности магнитного поля для частных петель гистерезиса (см. рис. 1.34). Начальная и основная кривые намагничивания обычно близки друг к другу.

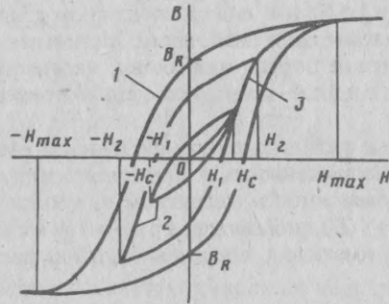


Рис. 1.34

Основные законы и особенности магнитной цепи. В основу расчета магнитных цепей положены известные из курса физики закон полного тока, согласно которому линейный интеграл (циркуляция) вектора напряженности H вдоль произвольного замкнутого контура l равен алгебраической сумме токов, охваченных этим контуром,

$$\oint_l H dl = \sum I \quad (1.34)$$

и принцип непрерывности магнитного потока: магнитный поток через произвольную замкнутую поверхность равен нулю, а линии вектора B (или магнитные силовые линии) всегда замкнуты, т.е.

$$\oint_S B dS = 0. \quad (1.35)$$

Поток вектора магнитной индукции B через некоторую поверхность S называют магнитным потоком:

$$\Phi = \int B dS. \quad (1.36)$$

При расчете магнитных цепей обычно используют допущение, позволяющее перейти от интегральных выражений к алгебраическим: считается, что H и B не изменяются вдоль поперечного сечения S магнитопровода, и расчет можно вести по некоторой средней силовой линии магнитопровода. Поэтому в дальнейшем под магнитной индук-

цией будем понимать некоторое среднее по сечению магнитопровода значение

$$B = \Phi / S, \quad (1.37)$$

а под линейным интегралом напряженности вдоль длины ab магнитной цепи (рис. 1.35,а) — магнитное напряжение на этой длине

$$\int_{ab} H dl = U_{m_{ab}} \quad (1.38)$$

или

$$Hl_{ab} = U_{m_{ab}}. \quad (1.39)$$

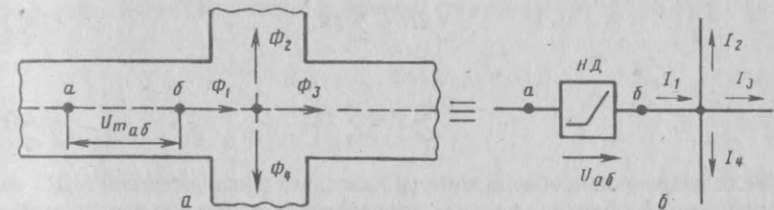


Рис. 1.35

Кроме того, при расчете не учитывают явление гистерезиса, и зависимость B от H определяют по основной кривой намагничивания, пренебрегая потоками рассеяния, которые создают в воздухе параллельные пути прохождения магнитного потока со значительно большими магнитными сопротивлениями.

Законы Кирхгофа для магнитной цепи. В соответствии с принципом непрерывности магнитного потока для узла магнитной цепи справедливо уравнение

$$\sum \Phi = 0, \quad (1.40)$$

выражающее первый закон Кирхгофа для магнитной цепи: алгебраическая сумма магнитных потоков в узле равна нулю. Причем потоки, направленные к узлу, записывают со знаком «+», а направленные от узла — со знаком «-».

Для магнитного узла, показанного на рис. 1.35,а, первый закон Кирхгофа запишем в виде

$$\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 - \Phi_4 = 0, \quad (1.41)$$

что соответствует уравнению токов электрического аналога этого магнитного узла (рис. 1.35,б).

Чтобы применить для магнитной цепи второй закон Кирхгофа, необходимо разбить ее на участки. Участки могут различаться по материалу,

поперечному сечению либо по тому и другому одновременно. Кроме того, различными являются участки одинакового сечения и материала, но находящиеся в зоне действия разных потоков (разветвленная цепь).

Произведение тока в обмотке на число витков составляет МДС обмотки:

$$F = IN. \quad (1.42)$$

Направление тока и МДС связаны правилом правоходового винта.

Из закона полного тока следует магнитный аналог второго закона Кирхгофа: алгебраическая сумма МДС обмоток в замкнутом контуре магнитной цепи равна алгебраической сумме магнитных напряжений на отдельных участках контура:

$$\sum IN = \sum HI, \quad (1.43)$$

или

$$\sum F = \sum U_m. \quad (1.44)$$

Если направление обхода контура совпадает с направлением МДС, то ее записывают со знаком «+»; если направление магнитного потока в участке совпадает с направлением обхода контура, магнитное напряжение на этом участке также записывают со знаком «+».

Составим уравнения по законам Кирхгофа для магнитной цепи рис. 1.36,а в такой последовательности:

- 1) зададимся положительными направлениями потоков Φ_1 , Φ_2 и Φ_3 ;
- 2) определим положительные направления МДС F_1 и F_2 , зная положительные направления токов I_1 и I_2 и направления намотки катушек N_1 и N_2 ;
- 3) выберем независимые контуры, например, левый и правый;
- 4) выберем направление обхода контуров (например, для первого контура — по часовой стрелке, для второго контура — против);

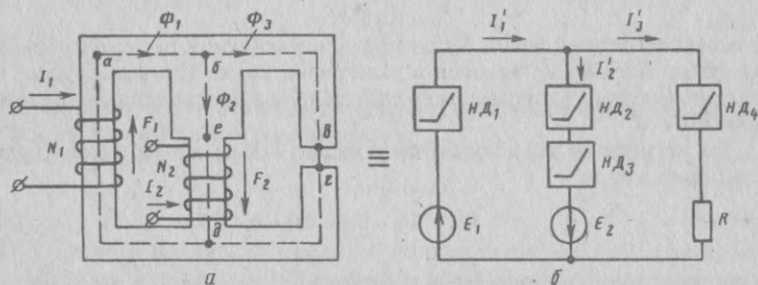


Рис. 1.36

5) наметим средние линии каждой ветви магнитной цепи и определим число витков: 1-й участок — $бад$; 2-й участок — $бе$; 3-й участок — $ед$; 4-й участок — $бв + гд$; 5-й участок — $вг$;

6) запишем уравнения Кирхгофа:

$$\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 0;$$

$$F_1 + F_2 = I_1 N_1 + I_2 N_2 = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3;$$

$$F_2 = I_2 N_2 = H_2 l_2 + H_3 l_3 - H_4 l_4 - H_5 l_5.$$

Аналогичные уравнения можно составить и для электрической цепи (рис. 1.36,б), являющейся аналогом магнитной цепи (рис. 1.36,а).

По аналогии с электрическими цепями в расчетные соотношения магнитных цепей могут быть введены понятия магнитного сопротивления

$$R_m = U_m / \Phi = l / (\mu_0 \mu S) \quad (1.45)$$

или магнитной проводимости

$$G_m = 1 / R_m. \quad (1.46)$$

Поскольку относительная магнитная проницаемость ферромагнитного участка зависит от индукции

$$\mu = B / (\mu_0 H), \quad (1.47)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Г/м}$, его магнитное сопротивление (проводимость) нелинейно и для расчета используют нелинейные характеристики, из которых наиболее часто применяют вебер-амперные (магнитные) характеристики участков магнитной цепи $\Phi = f(Hl)$ или $\Phi = f(IN)$. Вебер-амперные характеристики легко определить по кривой намагничивания материала участка $B(H)$ и его геометрическим размерам. Для этого значения ординат умножают на площадь поперечного сечения ($\Phi = BS$), а значения абсцисс — на длину соответствующего участка (HI) (рис. 1.37). Фактически вебер-амперные характеристики являются аналогами вольт-амперных характеристик, а участки магнитной цепи — аналогами электрических двухполюсников, т.е. магнитными двухполюсниками.

При расчете магнитных цепей можно также ввести понятия статических и дифференциальных магнитных сопротивлений и проводимостей и пользоваться зависимостями $R_{m_{ст}}(HI)$, $R_{m_{ст}}(\Phi)$, $R_{m_{диф}}(HI)$ и т.д.

Воздушный зазор в магнитной цепи является аналогом линейного сопротивления, и связь между напряженностью магнитного поля и индукцией в нем определяется уравнением

$$H_\delta = B_\delta / \mu_0 = 0,8 \cdot 10^6 B_\delta, \quad (1.48)$$

которое получается из (1.47), т.к. относительная магнитная проницаемость воздуха равна единице.

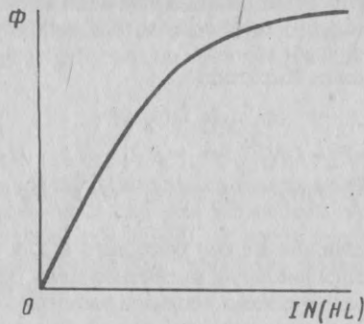


Рис. 1.37

Таким образом, очевидно, что между электрическими и магнитными цепями обнаруживается сходство. При этом аналогичны следующие уравнения и величины:

$$\begin{aligned}
 \Phi &\sim I \\
 F = IN &\sim E \\
 U_m = Hl &\sim U \\
 \sum \Phi = 0 &\sim \sum I = 0 \\
 \sum F = \sum U_m &\sim \sum E = \sum U \\
 R_m = Hl/\Phi = l/(\mu_0 \mu S) &\sim R = U/I = l/(\gamma S) \\
 G_m = 1/R_m &\sim G = 1/R \\
 B = \Phi/S &\sim J = I/S
 \end{aligned}$$

нелинейные магнитные двухполюсники (участки магнитной цепи) \sim нелинейным электрическим двухполюсникам

$$\begin{aligned}
 \Phi(Hl) \text{ или } \Phi(IN) &\sim I(U) \\
 R_{m_{ст}}, R_{m_{диф}}, G_{m_{ст}}, G_{m_{диф}} &\sim R_{ст}, R_{диф}, G_{ст}, G_{диф}
 \end{aligned}$$

линейное магнитное сопротивление (воздушный зазор) \sim линейному электрическому сопротивлению

магнитная цепь \sim электрической цепи

выбор положительных направлений потоков и магнитных напряжений, независимых магнитных контуров, направления обхода магнитных контуров и т.д. \sim выбору положительных направлений токов и напряжений, независимых электрических контуров, направления обхода электрических контуров и т.д.

методы и приемы расчета магнитных цепей \sim методам и приемам расчета электрических цепей

Таким образом, при графическом расчете магнитной цепи необходимо построить вебер-амперные характеристики магнитных двухполюсников, составить электрический аналог магнитной цепи и применить соответствующий метод расчета. Например, неразветвленную магнитную цепь (рис. 1.38,а) можно рассчитать или методом эквивалентных характеристик, или методом пересечения (см. § 1.3). Разветвленная магнитная цепь (рис. 1.38,б) представляет собой схему с двумя узлами, которую рассчитывают аналогично электрической цепи (см. § 1.3).

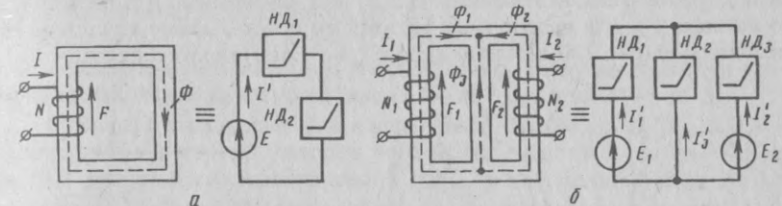


Рис. 1.38

Для расчета магнитных цепей применяются также аналитические методы, в том числе и метод компенсации (см. § 1.5, 1.6).

Магнитные цепи с постоянными магнитами. Явление остаточного намагничивания, характерное для ферромагнитных материалов, широко используется при изготовлении постоянных магнитов. При этом применяют так называемые магнитотвердые материалы, обладающие сравнительно большими коэрцитивной силой (десятки и сотни ампер на сантиметр) и площадью петли гистерезиса.

При расчете постоянных магнитов рассматривается часть петли гистерезиса, лежащей во втором квадранте и называемой кривой размагничивания (см. 1.34). Зная геометрические размеры магнитопровода, можно построить вебер-амперную характеристику (кривая 1, рис. 1.39), которая смещена от начала координат на величину

$$-F_R = -H_C l_m, \quad (1.49)$$

где F_R — остаточная МДС; l_m — длина средней силовой линии магнита.

Характеристика такого вида относится к мнимо несимметричным (см. § 1.1) и определяет активный магнитный двухполюсник. Она может быть перенесена в начало координат (кривая 2, рис. 1.39), если «последовательно» с пассивным магнитным двухполюсником включить источник МДС.

Рассмотрим кольцевой постоянный магнит без воздушного зазора (рис. 1.40,а), который представляет собой активный магнитный двухполюсник (за счет $-F_R$) и характеризуется кривой 1 на рис. 1.39. Его магнитным аналогом, отвечающим характеристике 2 на рис. 1.39, будет магнитная

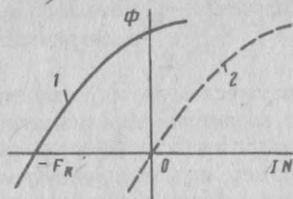


Рис. 1.39

цепь, показанная на рис. 1.40,б. Электрический аналог (рис. 1.40,в) можно рассматривать как активный двухполюсник, замкнутый накоротко, либо как пассивный двухполюсник, включенный на источник напряжения. Для расчета такого магнита, т.е. для определения магнитного потока, можно использовать эквивалентную (рис. 1.41,а) или исходную (рис. 1.41,б) характеристики.

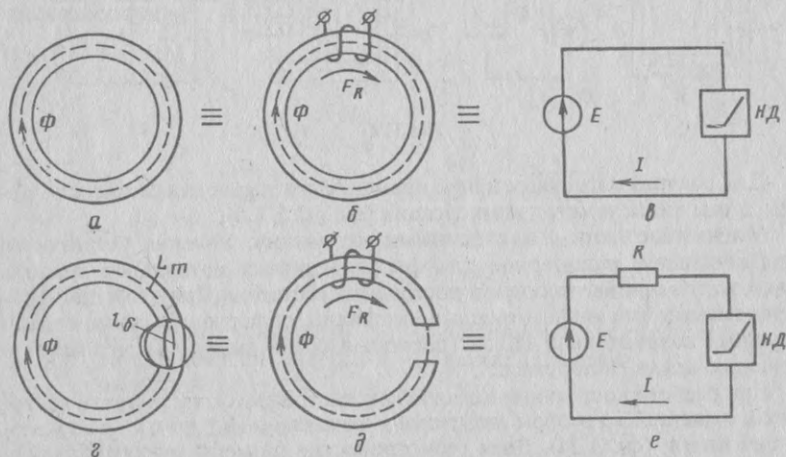


Рис. 1.40

Рассмотрим постоянный магнит с воздушным зазором (рис. 1.40,з), аналоги которого показаны на рис. 1.40,д и е. Для расчета такой магнитной цепи удобно использовать метод пересечения (см. § 1.3). Для этого определяют угол α (рис. 1.41 в), под которым проводят прямую линию, являющуюся характеристикой воздушного зазора. Воспользуемся уравнением (1.45), которое для определения магнитного сопротивления воздушного зазора будет иметь вид

$$R_{m, \delta} = \frac{l_{\delta}}{\mu_0 S_{\delta}}, \quad (1.50)$$

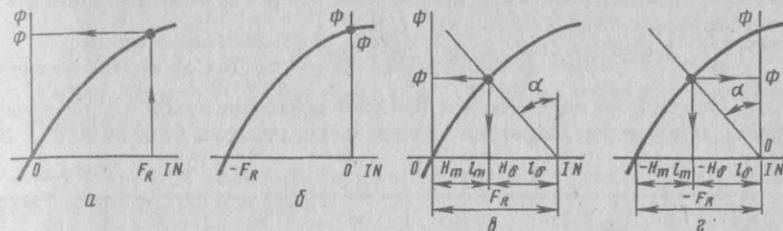


Рис. 1.41

где l_{δ} — длина средней силовой линии воздушного зазора; S_{δ} — площадь поперечного сечения воздушного зазора.

Используя (1.50), можно определить угол α , т.к. $\alpha = \arctg R_{m, \delta}$.

Линейную вебер-амперную характеристику воздушного зазора строят умножением левой части уравнения (1.48) на l_{δ} , а правой — на S_{δ} .

Точка пересечения линейной и нелинейной характеристик (рис. 1.41,в) является рабочей точкой, которая определяет магнитный поток Φ и магнитные напряжения магнитопровода $H_m l_m$ и воздушного зазора $H_{\delta} l_{\delta}$. Те же значения получаются при использовании для расчета исходной характеристики (рис. 1.41,г).

Магнитные индукции магнитопровода B_m и воздушного зазора B_{δ} определяют согласно уравнению (1.37):

$$B_m = \Phi/S_m \text{ и } B_{\delta} = \Phi/S_{\delta},$$

где S_m — площадь поперечного сечения магнита.

Следует заметить, что в рассмотренных магнитных цепях площади магнитопровода и воздушного зазора принимались обычно равными, т.к. воздушный зазор имел малую длину и выпучивание магнитного потока в воздушном зазоре было несущественно.

В цепях с постоянными магнитами длина воздушных зазоров значительна, а магнитный поток имеет сложную конфигурацию, замыкаясь не только по прямым линиям (см. рис. 1.40,з). Поэтому площадь поперечного сечения воздушного зазора S_{δ} в отдельных случаях значительно превышает площадь поперечного сечения магнита S_m .

Задачи

1.1. Вольт-амперная характеристика нелинейного двухполюсника описывается уравнением $I = aU + bU^3$. Определить статическое и дифференциальное сопротивления этого двухполюсника при напряжении $U = 4В$, если $a = 8 \cdot 10^{-3} А/В$ и $b = 5 \cdot 10^{-4} А/В^3$.

Ответ. $R_{ст} = 62,5 \text{ Ом}$; $R_{диф} = 31,25 \text{ Ом}$.

1.2. Определить статическое и дифференциальное сопротивления нелинейного двухполюсника при напряжении $U = 225$ В, если его вольт-амперная характеристика $I = 0,08 \cdot 10^{-3} U^{3/2}$.

Ответ. $R_{ст} = 833,3$ Ом ; $R_{диф} = 555,5$ Ом.

1.3. Нелинейный двухполюсник (ВАХ его приведена в табл. 1.1) работает в режиме, при котором напряжение на нем может меняться от 40 до 60 В.

Таблица 1.1

$U, В$	0	10	20	30	40	50	60
$I, мА$	0	120	175	210	235	260	285

Определить статические и дифференциальные сопротивления для граничных значений напряжений. Чему должны быть равны ЭДС источников и сопротивления эквивалентных схем, которыми можно заменить нелинейный двухполюсник в граничных точках?

Решение. Статические сопротивления при напряжениях 40 и 60 В пропорциональны $\operatorname{tg} \alpha_1$ и $\operatorname{tg} \alpha_2$ соответственно (рис. 1.42,а): $R_{ст1} = 40/0,235 = 170,2$ Ом ; $R_{ст2} = 60/0,285 = 210,5$ Ом.

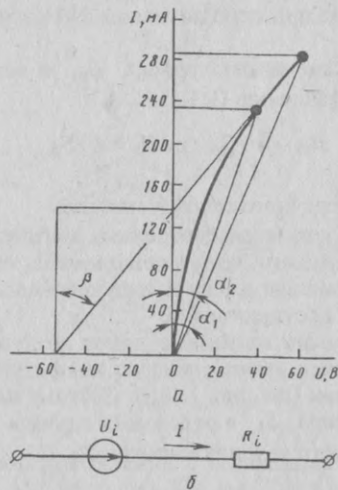


Рис. 1.42

Для определения дифференциальных сопротивлений и сопротивлений эквивалентных схем необходимо провести касательные к вольт-амперной характеристике в точках с напряжениями 40 и 60 В. В данном случае эти касательные совпадут. Поэтому дифференциальные сопротивления (и сопротивления эквивалентных схем) равны между собой и пропорциональны $\operatorname{tg} \beta$:

$$R_{диф} = R_i = 54/0,135 = 400 \text{ Ом.}$$

Пересечение касательной с осью абсцисс произошло в точке -54 В. Это и есть значение ЭДС источника эквивалентной схемы (рис. 1.42,б).

Ответ. $R_{ст1} = 170,2$ Ом ; $R_{ст2} = 210,5$ Ом ; $R_{диф} = 400$ Ом ; $U_i = -54$ В ; $R_i = 400$ Ом.

1.4. Зная ВАХ нелинейного двухполюсника (см. табл. 1.1), построить зависимости $R_{ст}(I)$ и $R_{диф}(I)$.

1.5. Используя ВАХ, заданную табл. 1.2, построить зависимости $G_{ст}(I)$ и $G_{диф}(I)$.

Таблица 1.2

$U, В$	0	2	6	10	15	20	25	30
$I, А$	0	0,1	0,2	0,26	0,3	0,33	0,35	0,36

1.6. Вольт-амперную характеристику нелинейного двухполюсника, приведенную в табл. 1.1, представить в виде ломаной кривой из прямолинейных отрезков и для каждого участка построить эквивалентную схему, заменив нелинейный двухполюсник линейным сопротивлением и источником ЭДС.

1.7. Цепь, представляющая собой последовательное соединение сопротивления R и двухполюсника, ВАХ которого приведена в табл. 1.2, подключается к источнику с напряжением $U = 27$ В.

Чему равен ток в цепи, если $R = 70$ Ом? Как надо изменить сопротивление, чтобы ток стал равен $0,2$ А?

Ответ. $I = 0,25$ А; увеличить на 35 Ом.

1.8. Нелинейный двухполюсник с вольт-амперной характеристикой $I = 0,01 U_{нд}^2$, соединенный последовательно с сопротивлением $R = 12$ Ом, подключен к источнику с напряжением $U = 12$ В. Определить ток в цепи и падения напряжений на элементах аналитическим и графическим способами. Каким должно быть сопротивление, включенное последовательно, чтобы падение напряжения на нелинейном двухполюснике было равно 4 В?

Ответ. $I = 0,444$ А ; $U_{нд} = 6,67$ В ; $U_R = 5,33$ В ; $R = 50$ Ом.

1.9. Для стабилизации тока в сопротивлении $R_H = 50$ Ом, подключенном к источнику постоянного напряжения, последовательно с сопротивлением включается нелинейный двухполюсник с ВАХ, представленной в табл. 1.3.

Таблица 1.3

$U, В$	0	3	10	20	25	30	40	50	60
$I, А$	0	0,1	0,2	0,275	0,295	0,3	0,3	0,305	0,32

В каких пределах может меняться напряжение источника, если $I = 0,3 \pm 0,005$ А?

Ответ. От 40 до 65 В.

1.10. Последовательно соединенные сопротивления R и нелинейный двухполюсник подключены к источнику с напряжением $U = 60$ В. Как должно меняться сопротивление R , чтобы при этом ток оставался в пределах $0,295 \dots 0,305$ А? Вольт-амперная характеристика нелинейного двухполюсника представлена в табл. 1.3.

Решение. Используя метод пересечения (для схемы рис. 1.43,а), соединяем точки вольт-амперной характеристики $I_1 = 0,295$ А и $I_2 = 0,305$ А с точкой на оси абсцисс $U = 60$ В (рис. 1.43,б). Искомые сопротивления пропорциональны $\operatorname{tg} \alpha_1$ и $\operatorname{tg} \alpha_2$ соответственно и составят: $R' = 32,5/0,295 = 110$ Ом; $R'' = 10/0,305 = 33$ Ом.

Ответ. От 110 до 33 Ом.

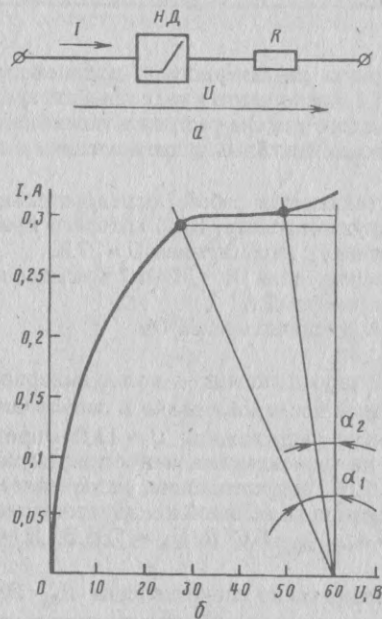


Рис. 1.43

1.11. Вольт-амперная характеристика последовательно соединенных сопротивления $R = 50$ Ом и нелинейного двухполюсника приведена в табл. 1.4.

Таблица 1.4

$U, В$	0	7,5	17	34	55	78	106	150
$I, А$	0	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6

Построить ВАХ нелинейного двухполюсника.

1.12. Вольт-амперная характеристика нелинейного двухполюсника описывается уравнением $I = 2,5/(U - 20)$. Нелинейный двухполюсник и включенное последовательно с ним сопротивление R присоединены к источнику с напряжением $U = 50$ В. Каким должно быть сопротивление $R = R_1$, чтобы в устойчивом режиме ток имел значение $I_1 = 0,5$ А? При каком значении $R = R_{кр}$ ток прервется?

Ответ. $R_1 = 5$ Ом; $R_{кр} = 90$ Ом.

1.13. Два нелинейных двухполюсника с вольт-амперными характеристиками, представленными в табл. 1.5, соединены последовательно и подключены к источнику с напряжением $U = 27$ В.

Таблица 1.5

$U, В$	0	1	2,5	5	7,5	10	15	20	25	30
$I_1, мА$	0	56	90	118	130	138	152	166	180	195
$I_2, мА$	0	2	4	10	18	30	55	90	130	175

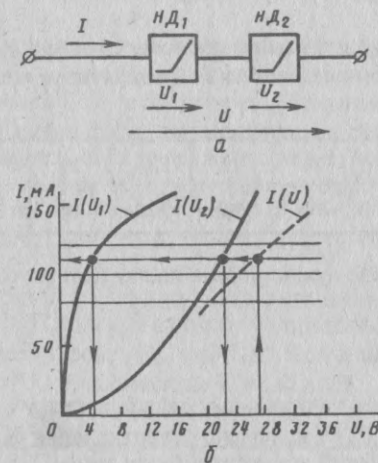


Рис. 1.44

Определить ток в цепи и напряжение на каждом двухполюснике.

Решение. Воспользуемся для решения задачи (рис. 1.44,а) методом эквивалентных характеристик и построим часть эквивалентной характеристики, задаваясь значениями токов от 80 до 120 мА (рис. 1.44,б):

$$\begin{aligned} I &= 80 \text{ мА}, U' = U'_1 + U'_2 = 2 + 18,7 = 20,7 \text{ В}; \\ I'' &= 100 \text{ мА}, U'' = U''_1 + U''_2 = 3,3 + 21,5 = 24,8 \text{ В}; \\ I''' &= 120 \text{ мА}, U''' = U'''_1 + U'''_2 = 5,4 + 24 = 29,4 \text{ В}. \end{aligned}$$

Перенесем значение напряжения питания $U = 27 \text{ В}$ на эквивалентную характеристику и найдем ток в цепи $I = 0,11 \text{ А}$, а затем напряжения $U_1 = 4,2 \text{ В}$ и $U_2 = 22,8 \text{ В}$.

Ответ. $I = 0,11 \text{ А}$; $U_1 = 4,2 \text{ В}$; $U_2 = 22,8 \text{ В}$.

1.14. Для двух нелинейных двухполюсников в табл. 1.6 заданы зависимости $R_{ст1}(I)$ и $R_{ст2}(I)$. При подключении цепи, представляющей собой последовательное соединение этих двухполюсников, к источнику с напряжением $U = 27 \text{ В}$ определить ток и падение напряжения на двухполюсниках.

Таблица 1.6

$I, \text{ мА}$	0	2	5	10	20	30	40	50	60
$R_{ст1}, \text{ Ом}$	500	500	480	400	260	160	100	70	60
$R_{ст2}, \text{ Ом}$	100	100	100	100	125	175	270	405	580

Ответ. $I = 52 \text{ мА}$; $U_1 = 3,9 \text{ В}$; $U_2 = 23,1 \text{ В}$.

1.15. Нелинейный двухполюсник, зависимость $R_{ст}(I)$ которого задана в табл. 1.7, включен последовательно с сопротивлением $R = 1130 \text{ Ом}$.

Таблица 1.7

$I, \text{ мА}$	0	2	5	10	20	30	40	50	60
$R_{ст}, \text{ Ом}$	600	600	580	500	385	335	370	475	640

Какое напряжение нужно подать на эту цепь, чтобы обеспечить в ней ток 40 мА?

Ответ. $U = 60 \text{ В}$.

1.16. Параллельно нелинейному двухполюснику с вольт-амперной характеристикой $I = 0,02 U^2$ включено сопротивление $R = 25 \text{ Ом}$. При каком напряжении сети общий ток в цепи будет равен 225 мА? Каким должно быть сопротивление R , чтобы при напряжении источника $U = 4 \text{ В}$ выполнялось условие $I_R/I_{нд} = 1/2$?

Ответ. $U = 2,5 \text{ В}$; $R = 25 \text{ Ом}$.

1.17. Параллельно нелинейному двухполюснику, который задан зависимостью $G_{ст}(U)$ (табл. 1.8), включено сопротивление $R = 500 \text{ Ом}$.

Таблица 1.8

$U, \text{ В}$	0	5	10	15	20	25	30	35	40
$G_{ст} \cdot 10^{-3}, \text{ См}$	1,67	2,0	2,94	2,7	2,32	2,04	1,82	1,63	1,52

При каком входном напряжении общий ток в цепи будет равен 114,6 мА?

Ответ. $U = 30 \text{ В}$.

1.18. Два параллельных нелинейных двухполюсника $НД_2$ и $НД_3$ включены последовательно с нелинейным двухполюсником $НД_1$. Определить токи во всех ветвях и напряжения на нелинейных двухполюсниках, если напряжение на входе $U = 27 \text{ В}$. Вольт-амперные характеристики нелинейных двухполюсников $I_1(U) = I_3(U)$ и $I_2(U)$ приведены в табл. 1.5.

Ответ. $I_1 = 162 \text{ мА}$; $I_2 = 26 \text{ мА}$; $I_3 = 136 \text{ мА}$; $U_1 = 18 \text{ В}$; $U_2 = U_3 = 9 \text{ В}$.

1.19. Нелинейный двухполюсник и сопротивление R_2 , соединенные параллельно, включены последовательно с сопротивлением R_1 . ВАХ нелинейного двухполюсника $I_1(U)$ задана в табл. 1.5. Определить токи в ветвях и напряжение на нелинейном двухполюснике, если $U = 20 \text{ В}$; $R_1 = 100 \text{ Ом}$; $R_2 = 400 \text{ Ом}$.

Ответ. $I_1 = 140 \text{ мА}$; $I_2 = 15 \text{ мА}$; $I_{нд} = 125 \text{ мА}$; $U_{нд} = 6 \text{ В}$.

1.20. В диагональ мостовой схемы, состоящей из двух ветвей: нелинейный двухполюсник $НД_1$ — сопротивление R_2 и сопротивление R_1 — нелинейный двухполюсник $НД_2$ включено сопротивление R_3 . Вольт-амперные характеристики нелинейных двухполюсников приведены в табл. 1.5. Найти токи во всех ветвях, если напряжение первого нелинейного двухполюсника изменяется от 10 до 20 В, а второго — от 23 до 30 В. Параметры схемы: $R_1 = 22 \text{ Ом}$; $R_2 = 64 \text{ Ом}$; $R_3 = 90 \text{ Ом}$; $U = 30 \text{ В}$.

Ответ. $I_1 = 0,23 \text{ А}$; $I_2 = 0,25 \text{ А}$; $I_3 = 0,1 \text{ А}$; $I_{нд1} = 0,15 \text{ А}$; $I_{нд2} = 0,13 \text{ А}$.

1.21. Мостовая схема (см. задачу 1.20) подключена к источнику с напряжением $U = 25 \text{ В}$. При каком значении сопротивления R_1 мост будет находиться в равновесии, если $R_2 = 45 \text{ Ом}$? Нелинейные двухполюсники имеют одинаковую ВАХ, представленную в табл. 1.9.

Таблица 1.9

$U, \text{ В}$	0	2,5	5	10	15	20	25
$I, \text{ А}$	0	0,12	0,2	0,325	0,4	0,45	0,475

Ответ. $R_1 = 25 \text{ Ом}$.

1.22. Построить вольт-амперную характеристику $I(U)$ цепи, представляющей собой четыре параллельные ветви: диод — сопротивление R_1 — источник E_1 ; диод — сопротивление R_2 — источник E_2 ; диод — сопротивление R_3 — источник E_3 ; сопротивление R_4 . Источники и диоды направлены навстречу друг другу; $E_1 = 20 \text{ В}$, $E_2 = 17 \text{ В}$; $E_3 = 10 \text{ В}$; $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 400 \text{ Ом}$. Диоды имеют идеализированные характеристики.

1.23. Цепь с двумя узлами: нелинейный двухполюсник НД_1 — источник E_1 ; нелинейный двухполюсник НД_2 ; сопротивление R_1 — источник E_2 имеет следующие параметры: $E_1 = 25 \text{ В}$, $E_2 = 23 \text{ В}$, $R_1 = 1000 \text{ Ом}$. ВАХ нелинейных двухполюсников определяются табл. 1.5. Источник E_1 направлен к верхнему узлу, источник E_2 — к нижнему.

Ответ. $I_1 = 0,124 \text{ А}$; $I_2 = 0,082 \text{ А}$; $I_3 = 0,042 \text{ А}$.

1.24. Цепь с двумя узлами состоит из следующих ветвей: нелинейный двухполюсник НД_1 — источник E_1 ; нелинейный двухполюсник НД_2 — источник E_2 ; нелинейный двухполюсник НД_3 . Источник E_1 направлен к нижнему узлу, источник E_2 — к верхнему. Вычислить токи в ветвях, если $E_1 = 5 \text{ В}$, $E_2 = 15 \text{ В}$, а нелинейные двухполюсники имеют одинаковые ВАХ, определяемые табл. 1.9.

Решение. Для нахождения токов в схеме с двумя узлами необходимо построить вольт-амперные характеристики параллельных ветвей, если известны ВАХ нелинейных двухполюсников. Для исходной схемы (рис. 1.45,а) такое построение показано на рис. 1.45,б.

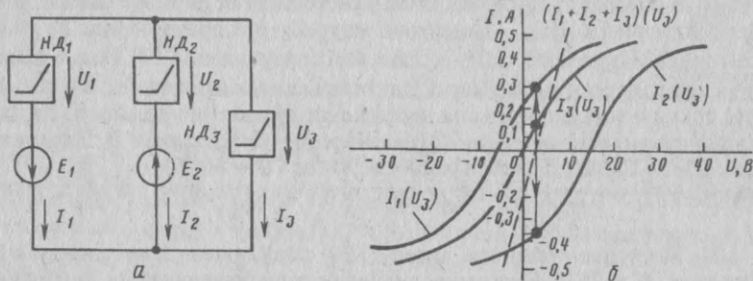


Рис. 1.45

Получив эквивалентную характеристику $(I_1 + I_2 + I_3)(U_3)$, точка пересечения которой с осью абсцисс ($\sim 2,25 \text{ В}$) есть решение задачи, восстановим из этой точки перпендикуляры до пересечения с характеристиками $I_1(U_3)$, $I_2(U_3)$ и $I_3(U_3)$ и найдем токи в ветвях: $I_1 = 0,26 \text{ А}$; $I_2 = -0,37 \text{ А}$; $I_3 = 0,11 \text{ А}$.

Ответ. $I_1 = 0,26 \text{ А}$; $I_2 = -0,37 \text{ А}$; $I_3 = 0,11 \text{ А}$.

1.25. Одноконтурная магнитная цепь имеет два одинаковых воздушных зазора $l_\delta = 0,08 \text{ см}$, участки $l_1 = 2,1 \text{ см}$ и $l_2 = 3,2 \text{ см}$, площадь поперечного сечения $S_1 = S_2 = 0,05 \text{ см}^2$. Относительная магнитная проницаемость материала первого участка $\mu_1 = 150$, второго — $\mu_2 = 600$. Определить ток в обмотке с числом витков $N = 1000$, создающий магнитный поток $\Phi = 10^{-5} \text{ Вб}$. Вычислить статическую индуктивность катушки.

Ответ. $I = 2,85 \text{ А}$; $L_{ст} = 3,5 \text{ мГн}$.

1.26. Кольцевой сердечник с обмоткой, число витков которой $N = 100$, имеет внутренний диаметр $d_{вт} = 40 \text{ мм}$, внешний диаметр $d_{внш} = 60 \text{ мм}$ и толщину $b = 10 \text{ мм}$. Построить зависимость $B = f(H)$ для ферромагнитного материала сердечника, если при воздушном зазоре $l_\delta = 0,1 \text{ мм}$ была получена зависимость $\Phi = f(IN)$, приведенная в табл. 1.10.

Таблица 1.10

$IN, \text{ А}$	0	43	65,3	93	109	127	150	181
$\Phi \cdot 10^{-4}, \text{ Вб}$	0	0,4	0,6	0,8	0,9	1	1,1	1,2

1.27. На кольцевом сердечнике из листовой стали Э31 (табл. 1.11) намотана обмотка с числом витков $N = 200$.

Какой величины ток необходимо пропустить через обмотку, чтобы создать в сердечнике поток $\Phi = 10^{-4} \text{ Вб}$? Внутренний диаметр сердечника $d_{вт} = 50 \text{ мм}$, внешний диаметр $d_{внш} = 70 \text{ мм}$, толщина $b = 10 \text{ мм}$. Как изменится магнитный поток, если ток уменьшить в два раза?

Таблица 1.11

$B, \text{ Тл}$	0	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65
$H, \text{ А/м}$	0	43	49	55	61	67	72,5	78	84	90	100
$B, \text{ Тл}$	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20
$H, \text{ А/м}$	110	123	137	155	173	192	210	240	300	395	520
$B, \text{ Тл}$	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50	1,55	1,60	1,70	1,80	1,90
$H, \text{ А/м}$	643	800	920	1100	1300	1800	2400	4000	6500	10500	21000

Ответ. $I = 0,198 \text{ А}$, $\Phi = 0,65 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}$.

1.28. Два кольцевых сердечника охвачены одной обмоткой с числом витков $N = 1000$. Определить ток в обмотке и магнитный поток в большем сердечнике, если поток в меньшем сердечнике $\Phi = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}$.

Сердечники изготовлены из листовой стали Э31 (см. табл. 1.11), толщина сердечников одинакова: $b = 20 \text{ мм}$. Размеры большого сердечника: $d_{вт} = 40 \text{ мм}$, $d_{внш} = 80 \text{ мм}$. Размеры меньшего сердечника: $d_{вт} = 30 \text{ мм}$, $d_{внш} = 40 \text{ мм}$, воздушный зазор $l_\delta = 1 \text{ мм}$.

Ответ. $I = 1,123 \text{ А}$; $\Phi = 1,685 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}$.

1.29. К обмотке с сопротивлением $R = 30 \text{ Ом}$ и числом витков $N = 800$, навитой на кольцевой сердечник из листовой стали Э31 (см. табл. 1.11), подведено постоянное напряжение $U = 27 \text{ В}$.

Длина средней линии сердечника $l_{\text{ср}} = 20 \text{ см}$, площадь сечения $S = 2 \text{ см}^2$ и длина воздушного зазора $l_{\delta} = 0,5 \text{ мм}$. Определить магнитный поток в сердечнике.

Ответ. $\Phi = 2,7 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}$.

1.30. Индукция в среднем стержне двухконтурной магнитной цепи $B = 0,8 \text{ Тл}$. Определить ток в обмотке с числом витков $N = 1000$, если магнитопровод изготовлен из листовой стали Э31 (см. табл. 1.11). Размеры магнитопровода: а) правый стержень: средняя линия — $0,29 \text{ м}$, площадь поперечного сечения — $8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; б) средний стержень: средняя линия — $0,11 \text{ м}$, площадь поперечного сечения — $4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; в) левый стержень: средняя линия — $0,289 \text{ м}$, воздушный зазор — $0,001 \text{ м}$, площадь поперечного сечения — $8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$. Обмотка навита на левом стержне.

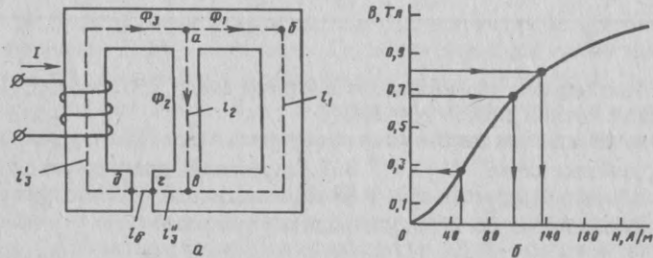


Рис. 1.46

Решение. Так как в среднем стержне магнитопровода (рис. 1.46,а) значение индукции задано ($B_2 = 0,8 \text{ Тл}$), можно найти в этом стержне напряженность магнитного поля, воспользовавшись кривой намагничивания $B(H)$ (рис. 1.46,б). Получим $H_2 = 137 \text{ А/м}$.

Для контура $abva$ по второму закону Кирхгофа

$$H_2 l_2 - H_1 l_1 = 0,$$

откуда

$$H_1 = \frac{H_2 l_2}{l_1} = \frac{137 \cdot 0,11}{0,29} = 52 \text{ А/м}.$$

По кривой намагничивания для $H_1 = 52 \text{ А/м}$ получим $B_1 = 0,275 \text{ Тл}$. Определим потоки Φ_1 и Φ_2 :

$$\Phi_1 = B_1 S_1 = 0,275 \cdot 8 \cdot 10^{-4} = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ Вб};$$

$$\Phi_2 = B_2 S_2 = 0,8 \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}.$$

По первому закону Кирхгофа для узла a

$$-\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3 = 0,$$

поэтому

$$\Phi_3 = \Phi_1 + \Phi_2 = 2,2 \cdot 10^{-4} + 3,2 \cdot 10^{-4} = 5,4 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}.$$

Найдем индукцию в левом стержне:

$$B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3} = \frac{5,4 \cdot 10^{-4}}{8 \cdot 10^{-4}} = 0,675 \text{ Тл}.$$

По кривой намагничивания для $B_3 = 0,675 \text{ Тл}$ получим $H_3 = 105 \text{ А/м}$. Напряженность магнитного поля в воздушном зазоре

$$H_{\delta} = 0,8 B_{\delta} \cdot 10^6 = 0,8 \cdot 0,675 \cdot 10^6 = 0,54 \cdot 10^6 \text{ А/м}.$$

Для контура $avgda$ по второму закону Кирхгофа

$$IN = H_2 l_2 + H_3 l_3 + H_{\delta} l_{\delta},$$

где

$$l_3 = l'_3 + l''_3.$$

Из последнего уравнения

$$I = \frac{H_2 l_2 + H_3 l_3 + H_{\delta} l_{\delta}}{N} = \frac{137 \cdot 0,11 + 105 \cdot 0,289 + 0,54 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3}}{1000} = \frac{585,415}{1000} \approx 0,585 \text{ А}.$$

Ответ. $I = 0,585 \text{ А}$.

1.31. Кольцевой постоянный магнит, внешний диаметр которого $d_{\text{вн}} = 50 \text{ мм}$, внутренний диаметр $d_{\text{вн}} = 30 \text{ мм}$ и толщина $b = 10 \text{ мм}$, имеет воздушный зазор $l_{\delta} = 10 \text{ мм}$. Определить магнитный поток и напряженность магнитного поля в воздушном зазоре и в теле магнита, если зависимость $B(H)$ приведена в табл. 1.12.

Таблица 1.12

$H_m, \text{ А/м}$	-9600	-9100	-8200	-6800	-4750	-1200	0
$B_m, \text{ Тл}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,05

Ответ. $\Phi = 0,14 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}$; $H_m = -1215 \text{ А/м}$; $H_{\delta} = -106930 \text{ А/м}$.

1.32. Два одинаковых подковообразных постоянных магнита, у каждого из которых длина средней линии $l_{\text{ср}} = 15 \text{ см}$ и площадь поперечного сечения $S = 1 \text{ см}^2$, сведены до соприкосновения и намагничены. Остаточная ин-

дукция в них равна $B_R = 1,05$ Тл. Определить зависимость потока от воздушного зазора при разделении магнитов. Зависимость $B(H)$ материала, из которого изготовлены магниты, представлена в табл. 1.12.

Глава 2

АНАЛИЗ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ В ЦЕПЯХ ПОСТОЯННОГО ТОКА С НЕЛИНЕЙНЫМИ ЧЕТЫРЕХПОЛУСНИКАМИ

§ 2.1. Исходные характеристики четырёхполосников и их систематизация.

Четырёхполосником называют часть электрической цепи, рассматриваемую по отношению к двум парам ее зажимов (рис. 2.1).

Если свойства двухполосников определяются одной вольт-амперной характеристикой, то для анализа четырёхполосников необходимо иметь два семейства ВАХ: входное и выходное. Каждая из характеристик семейства может иметь в качестве прототипа одну из ВАХ двухполосников (см. рис. 1.3—1.7).

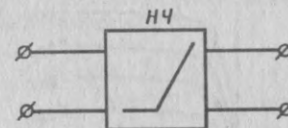


Рис. 2.1

Соотношения между токами и напряжениями на выходе и входе четырёхполосника для выбранных положительных направлений токов и напряжений (рис. 2.2) могут быть сведены к одной из следующих систем уравнений:

$$\begin{aligned}
 I_{\text{вх}} &= f_1(U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}); & I_{\text{вх}} &= f_1(U_{\text{вх}}, I_{\text{вых}}); \\
 I_{\text{вых}} &= f_2(U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}); & I_{\text{вых}} &= f_2(U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}); \\
 I_{\text{вх}} &= f_1(U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}); & I_{\text{вх}} &= f_1(U_{\text{вх}}, I_{\text{вых}}); \\
 I_{\text{вых}} &= f_2(I_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}); & I_{\text{вых}} &= f_2(I_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}).
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Нетрудно видеть, что первая система уравнений, изображенная графически на рис. 2.3а, б, д и е, представляет собой нелинейный вариант формы G -параметров. Следовательно, если возможна линейари-

зация этих характеристик, то аналитическое выражение будет иметь вид

$$I_{вх} = G_{11} U_{вх} + G_{12} U_{вых};$$

$$I'_{вых} = G_{21} U_{вх} + G_{22} U_{вых}.$$

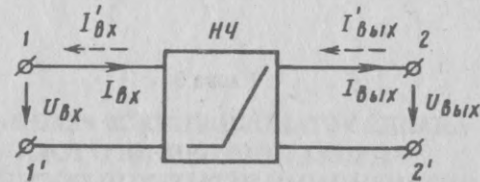


Рис. 2.2

Последующие три формы записи не имеют аналогии с принятыми формами уравнений линейных четырехполюсников, поскольку в каждой паре уравнений одна и та же величина входит как в левую, так и в правую части уравнений (в качестве и независимой, и зависимой величины). Достоинством таких форм записи является то, что они связаны с графическим представлением семейств входных и выходных ВАХ, которые иногда удобнее соответствующих принятым формам четырехполюсников графиков (например, последняя система уравнений (2.1) и рис. 2.3, в и г).

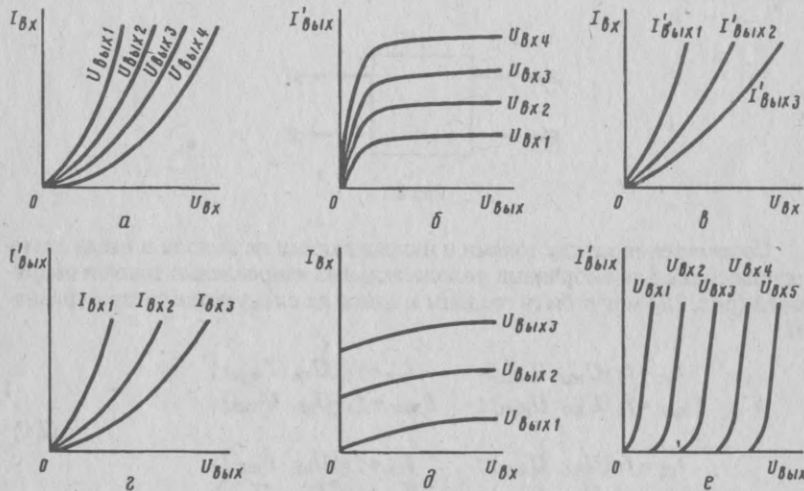


Рис. 2.3

Исходными характеристиками для четырехполюсников могут быть также семейства зависимостей сопротивлений или проводимостей либо

безразмерных зависимостей (передаточных коэффициентов) от входных и выходных токов и напряжений. Семейств характеристик такого рода должно быть четыре, т.к. нелинейный четырехполюсник определяется четырьмя независимыми нелинейными характеристиками (линейный четырехполюсник определяется тремя коэффициентами — для него справедлив неприменимый в данном случае принцип взаимности).

Например:

$$I_{вх} = f_{11}(U_{вх}) + f_{12}(U_{вых});$$

$$I'_{вых} = f_{21}(U_{вх}) + f_{22}(U_{вых}). \quad (2.2)$$

Нелинейные четырехполюсники бывают направленными и ненаправленными.

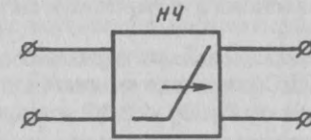


Рис. 2.4

Направленным четырехполюсником (рис. 2.4) называют такой, у которого выходные ток и напряжение не влияют на входные. Семейство его входных характеристик вырождается в одну ВАХ, и направленный четырехполюсник описывается одной характеристикой по входу и семейством характеристик — по выходу (т.е. описывается только тремя нелинейными зависимостями). Например:

$$I_{вх} = f_1(U_{вх})$$

$$I'_{вых} = f_2(U_{вх}, U_{вых}) \quad (2.3)$$

или

$$I_{вх} = f_{11}(U_{вх});$$

$$I'_{вых} = f_{21}(U_{вх}) + f_{22}(U_{вых}). \quad (2.4)$$

Ненаправленный четырехполюсник (рис. 2.5), у которого выходные ток и напряжение влияют на входные, может быть описан полной системой уравнений (2.1), (2.2).

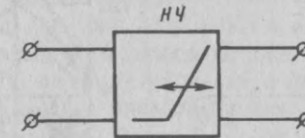


Рис. 2.5

Нелинейные четырехполюсники целесообразно подразделить еще на следующие две группы:

1) с выходными характеристиками без участков с отрицательными дифференциальными сопротивлениями, у которых при плавном изменении входного сигнала происходит плавное изменение выходного сигнала;

2) с выходными характеристиками, имеющими участки с отрицательными дифференциальными сопротивлениями, у которых при плавном изменении входного сигнала происходит скачкообразное изменение выходного сигнала.

К семейству выходных характеристик четырехполюсников первой группы может быть применен метод компенсации; к семейству характеристик второй группы, если рабочий участок захватывает область скачка, этот метод неприменим.

§ 2.2. Графический расчет цепей с направленными четырехполюсниками

Рассмотрим цепь с направленным четырехполюсником (рис. 2.6,а), для которой заданы: E_1 — ЭДС источника входного сигнала; R_1 — внутреннее сопротивление источника E_1 ; E_2 — ЭДС источника питания выходной цепи; R_H — сопротивление нагрузки; входная и выходные характеристики четырехполюсника (рис. 2.6,б и в). Внутренним сопротивлением R_2 источника E_2 можно или пренебречь, или включить его в состав сопротивления нагрузки R_H .

Расчет начинают с входной характеристики (рис. 2.6,б), на оси абсцисс которой откладывают значение E_1 и, используя метод пересечения, проводят прямую под углом $\alpha_1 = \text{arctg } R_1$. Выбор метода пересечения объясняется тем, что для входной (а также выходной) цепи с четырехполюсником

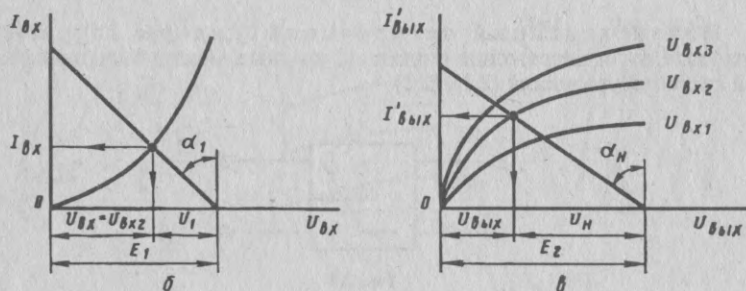
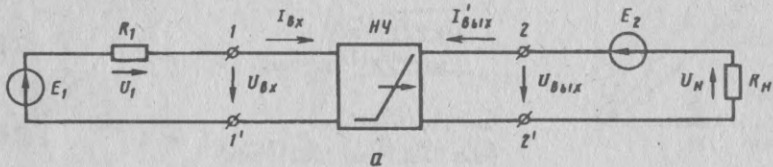


Рис. 2.6

по второму закону Кирхгофа можно записать $E_1 = U_1 + U_{вх}$ и получить, таким образом, цепь с последовательным соединением двух двухполюсников (один из которых нелинейный) при заданном значении входной ЭДС E_1 (см. § 1.3).

Рабочая точка на характеристике входной цепи дает возможность определить входной ток $I_{вх}$, входное напряжение четырехполюсника $U_{вх} = U_{вх2}$ и падение напряжения на сопротивлении R_1 графически или аналитически: $U_1 = R_1 I_{вх}$.

На выходных характеристиках (рис. 2.6,в), также используя метод пересечения, строят прямую под углом $\alpha_H = \text{arctg } R_H$. Пересечение ее с одной из характеристик семейства, соответствующей в данном случае значению входного напряжения $U_{вх2}$, даст рабочую точку на характеристиках выходной цепи. Далее графически или аналитически определяются выходной ток $I_{вых}$, выходное напряжение четырехполюсника $U_{вых}$ и падение напряжения на сопротивлении нагрузки R_H $U_H = R_H I_{вых}$.

Если необходимо получить определенный диапазон изменения выходного тока, следует изменять входное напряжение, например, от $U_{вх1}$ до $U_{вх4}$ (рис. 2.7,а). В этом случае переменное значение входного напряжения может быть обеспечено как изменением ЭДС входного сигнала E_1 , так и изменением сопротивления R_1 (см. рис. 2.6,а).

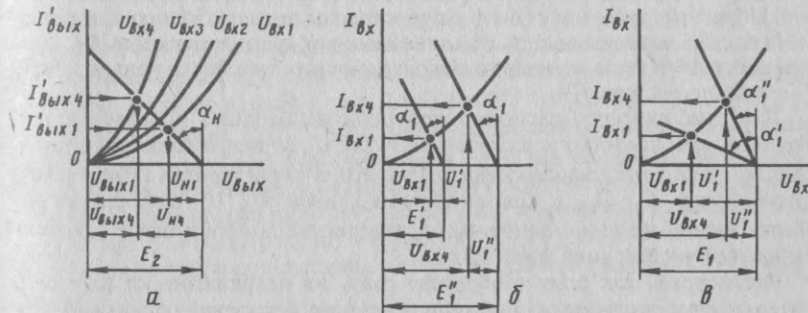


Рис. 2.7

Для этого следует отложить на оси абсцисс значения $U_{вх1}$ и $U_{вх4}$ и определить токи $I_{вх1}$ и $I_{вх4}$ (рис. 2.6,б и в), т.е. определить рабочий диапазон на входной вольт-амперной характеристике. Теперь можно графически найти значения ЭДС входного источника, если через точки с координатами $I_{вх1}$, $U_{вх1}$ и $I_{вх4}$, $U_{вх4}$ провести прямые под углом $\alpha_1 = \text{arctg } R_1$ (при этом $R_1 = \text{const}$) (рис. 2.7,б). Если $E_1 = \text{const}$, то сопротивления R'_1 и R''_1 равны соответственно $\text{tg } \alpha'_1$ и $\text{tg } \alpha''_1$ (рис. 2.7,в). Значения ЭДС E'_1 и E''_1 и сопротивлений R'_1 и R''_1 можно определить также, не прибегая к графическим построениям, а используя уравнение для входной цепи четырехполюсника: $E_1 = R_1 I_{вх} + U_{вх}$.

Вместо линейных сопротивлений R_H и R_1 в схеме рис. 2.6,а могут быть применены и нелинейные двухполюсники. Это будет означать, что прямые нагрузочные линии на рис. 2.6,б и в необходимо заменить зеркально отображенными ВАХ двухполюсников.

Если в аналогичную схему (см. рис. 2.6,а) включен направленный четырехполюсник, у которого при плавном изменении входного сигнала должно происходить скачкообразное изменение выходного сигнала, то для расчета цепи применяется тот же подход, что и для цепи с двухполюсником. При этом рассматривается, естественно, некоторый диапазон выходного тока (а не фиксированное значение), чтобы можно было использовать область выходных характеристик, позволяющих получить скачкообразное изменение тока. Заметим, что в принципе изменение тока можно также обеспечить при фиксированных входных величинах E_1 и R_1 за счет изменения E_2 и R_H .

Общий подход при этом аналогичен изложенному для случая релейного эффекта применительно к двухполюсникам (см. § 1.4).

§ 2.3. Графический расчет цепей с направленными четырехполюсниками и обратными связями

Чтобы изменить в нужном направлении характеристики четырехполюсника, будут использоваться положительные и отрицательные обратные связи. Обратные связи могут быть осуществлены по напряжению или по току. На рис. 2.8,а показана цепь с нелинейным четырехполюсником НЧ, имеющим обратную связь по напряжению с помощью линейного направленного четырехполюсника ЛЧ.

Для графического расчета такой цепи необходимо предварительно построить зависимость напряжения нагрузки U_H от напряжения источника сигнала U для четырехполюсника без обратной связи (кривая 3, рис. 2.8,в). В этом случае $U = U_{вх}$ и для построения кривой $U_H(U)$ используют семейство выходных вольт-амперных характеристик, изображенных совместно с нагрузочной прямой (рис. 2.8,б).

Рассмотрим, как влияет обратная связь на напряжение на нагрузке. При появлении напряжения на входе основного четырехполюсника возникает напряжение на нагрузке (кривая 3, рис. 2.8,в), которое, в свою очередь, является напряжением входа четырехполюсника обратной связи, т.е. $U_1 = U_H$. Характеристика $U_2(U_1)$ четырехполюсника с обратной связью показана на рис. 2.8,в (прямая 2), причем напряжение U_2 откладывают по оси абсцисс, чтобы получить единую систему координат для обоих четырехполюсников.

Из рис. 2.8,в (кривая 3) видно, что для получения на нагрузке, например, напряжения U_H , необходимо на вход основного четырехполюсника без обратной связи подать напряжение $U_{вх} = U$. Однако появившееся на нагрузке напряжение поступает на вход четырехполюсника с обратной связью, и на его выходе возникает напряжение U_2 (прямая 2, рис. 2.8,в). Если это напряжение суммируется с напряжением источника сигнала U (как показано на рис. 2.8, а), т.е. $U = U' + U_2$, то обратная связь будет поло-

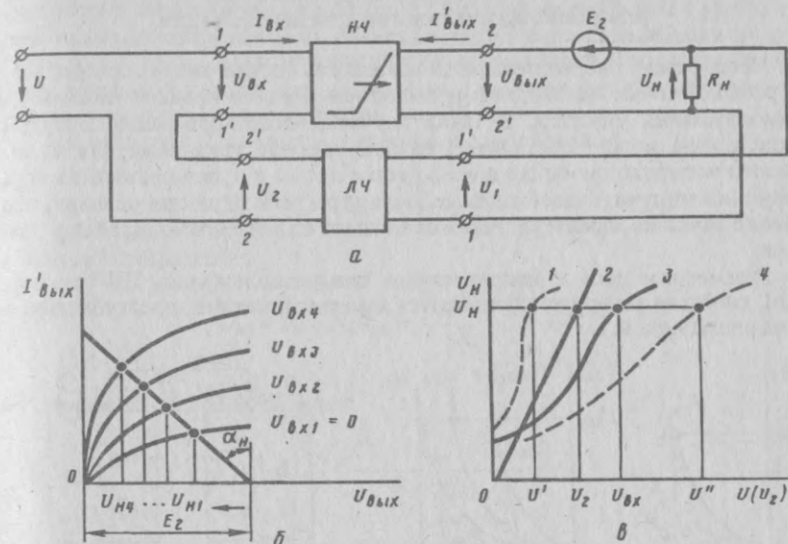


Рис. 2.8

жительной (ПОС). Это означает, что теперь для получения на нагрузке того же напряжения U_H требуется меньшее (на величину U_2) напряжение источника сигнала (кривая 1, рис. 2.8,в), т.к. $U' = U_{вх} - U_2$.

Характеристика $U_H(U)$ цепи с положительной обратной связью имеет большую крутизну, чем характеристика цепи без обратной связи. Это в пределе позволяет получить даже релейный эффект в цепях с четырехполюсниками, имеющими однозначные входные и выходные характеристики. Крутизна результирующей характеристики $U_H(U)$ зависит от наклона характеристики четырехполюсника с обратной связью (от глубины обратной связи).

Поменяв местами зажимы 2 и 2' или 1 и 1' у четырехполюсника с обратной связью (рис. 2.8,а), получим $U_{вх} = U'' - U_2$. Такую обратную связь называют отрицательной (ООС), т.к. теперь для создания на нагрузке напряжения U_H требуется повысить (на величину U_2) напряжение источника сигнала (кривая 4, рис. 2.8,в), поскольку $U'' = U_{вх} + U_2$.

За счет обратной связи происходит влияние выхода на вход у направленного четырехполюсника, и система «направленный четырехполюсник — обратная связь» превращается в ненаправленный четырехполюсник. Подобная внешняя обратная связь приводит к указанному преобразованию четырехполюсников, поэтому всякий ненаправленный четырехполюсник можно рассматривать как направленный с внутренней обратной связью. Отсюда, в частности, следует, что физической причиной возникновения релейных режимов может являться положительная внешняя или внутренняя обратная связь.

§ 2.4. Расчет цепей с направленными четырехполосниками методом компенсации

Часто режим работы четырехполосника выбирают таким образом, чтобы рабочие точки на входной и выходной характеристиках лежали на прямолинейных участках. В таких случаях, воспользовавшись методом компенсации, можно составить линеаризованные уравнения для нелинейного четырехполосника и всей цепи в целом и в дальнейшем из этих уравнений получить необходимые параметры всей цепи при условии, что рабочие точки на характеристиках не выходят из зоны прямолинейных участков.

Рассмотрим цепь с направленным четырехполосником НЧ (см. рис. 2.6,а), свойства которого описываются характеристиками, представленными на рис. 2.9,а и б.

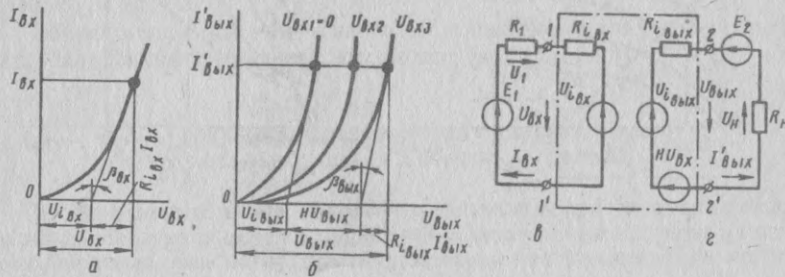


Рис. 2.9

Из входной характеристики четырехполосника (рис. 2.9,а) уравнение входного напряжения можно записать в следующем виде (см. § 1.2):

$$U_{\text{вх}} = U_{i_{\text{вх}}} + R_{i_{\text{вх}}} I_{\text{вх}}. \quad (2.5)$$

Уравнение выходного напряжения, получаемое из выходных характеристик четырехполосника (рис. 2.9, б), имеет более сложный вид, поскольку появляется член уравнения $(H U_{\text{вх}})$, определяющий положение той кривой семейства характеристик, на которой в данный момент лежит рабочая точка, относительно кривой, соответствующей $U_{\text{вх}} = 0$:

$$U_{\text{вых}} = U_{i_{\text{вых}}} + H U_{\text{вх}} + R_{i_{\text{вых}}} I'_{\text{вых}}. \quad (2.6)$$

Здесь $H = \Delta U_{\text{вых}} / \Delta U_{\text{вх}}$ — коэффициент передачи четырехполосника по напряжению при разомкнутых выходных зажимах.

Следует отметить, что всегда при рассмотрении семейства характеристик прямолинейные участки этих характеристик предполагают приблизительно параллельными и равноотстоящими друг от друга (рис. 2.9,б).

В соответствии с уравнениями (2.5) и (2.6) составим схему замещения четырехполосника, а также всей цепи в целом, которая состоит из

двух частей, относящихся к входу (рис. 2.9,в) и к выходу (рис. 2.9,г). Из этих схем видно, что входная цепь влияет на выход через зависимый источник напряжения $H U_{\text{вх}}$, а выходная цепь на вход не влияет. Четырехполосник, представленный данной схемой замещен. 1, является направленным и линейным в отличие от исходного (см. рис. 2.6,а).

Из схемы рис. 2.9,в найдем значения входного тока

$$I_{\text{вх}} = \frac{E_1 - U_{i_{\text{вх}}}}{R_1 + R_{i_{\text{вх}}}} \quad (2.7)$$

и входного напряжения

$$U_{\text{вх}} = E_1 - R_1 I_{\text{вх}} = \frac{R_{i_{\text{вх}}} E_1 + R_1 U_{i_{\text{вх}}}}{R_1 + R_{i_{\text{вх}}}}. \quad (2.8)$$

Из схемы рис. 2.9,г выходной ток

$$I'_{\text{вых}} = \frac{E_2 - U_{i_{\text{вых}}} - H U_{\text{вх}}}{R_{\text{н}} + R_{i_{\text{вых}}}}. \quad (2.9)$$

Отсюда после подстановки (2.8) находим

$$I'_{\text{вых}} = \frac{(R_1 + R_{i_{\text{вх}}})(E_2 - U_{i_{\text{вых}}}) - H(R_{i_{\text{вх}}} E_1 + R_1 U_{i_{\text{вх}}})}{(R_{\text{н}} + R_{i_{\text{вых}}})(R_1 + R_{i_{\text{вх}}})} = \frac{E_2 - U_{i_{\text{вых}}} - H \frac{R_{i_{\text{вх}}} E_1 + R_1 U_{i_{\text{вх}}}}{(R_{\text{н}} + R_{i_{\text{вых}}})(R_1 + R_{i_{\text{вх}}})}}{R_{\text{н}} + R_{i_{\text{вых}}}}. \quad (2.10)$$

Теперь можно найти напряжение на нагрузке:

$$U_{\text{н}} = R_{\text{н}} I'_{\text{вых}} = \frac{R_{\text{н}}}{R_{\text{н}} + R_{i_{\text{вых}}}} (E_2 - U_{i_{\text{вых}}}) - H R_{\text{н}} \frac{R_{i_{\text{вх}}} E_1 + R_1 U_{i_{\text{вх}}}}{(R_{\text{н}} + R_{i_{\text{вых}}})(R_1 + R_{i_{\text{вх}}})} \quad (2.11)$$

или

$$U_{\text{н}} = \frac{R_{\text{н}}}{R_{\text{н}} + R_{i_{\text{вых}}}} (E_2 - U_{i_{\text{вых}}} - H U_{\text{вх}}). \quad (2.12)$$

Падение напряжения на сопротивлении R_1 и выходное напряжение четырехполосника могут быть найдены соответственно как $U_1 = R_1 I_{\text{вх}}$ и $U_{\text{вых}} = E_2 - U_{\text{н}}$ или из (2.6).

Во многих случаях значения $U_{i_{\text{вх}}}$ и $U_{i_{\text{вых}}}$ очень малы по сравнению с другими членами уравнений или взаимно компенсируются в

схемах с несколькими четырехполюсниками, и ими можно пренебречь. Тогда

$$I_{\text{вх}} = \frac{E_1}{R_1 + R_{i_{\text{вх}}}}; \quad (2.13)$$

$$U_{\text{вх}} = \frac{R_{i_{\text{вх}}}}{R_1 + R_{i_{\text{вх}}}} E_1; \quad (2.14)$$

$$I_{\text{вых}} = \frac{R_H}{R_H + R_{i_{\text{вых}}}} - \frac{HR_{i_{\text{вх}}} E_1}{(R_H + R_{i_{\text{вых}}})(R_1 + R_{i_{\text{вх}}})}; \quad (2.15)$$

$$U_H = \frac{R_H}{R_H + R_{i_{\text{вых}}}} \left(E_2 - \frac{R_{i_{\text{вх}}}}{R_1 + R_{i_{\text{вх}}}} HE_1 \right) \quad (2.16)$$

или

$$U_H = \frac{R_H}{R_H + R_{i_{\text{вых}}}} (E_2 - HU_{\text{вх}}). \quad (2.17)$$

Из (2.5) и (2.6) можно также получить любую общепринятую форму уравнений линейного активного четырехполюсника и использовать эти уравнения для расчета цепи, как было показано в разделе «Линейные электрические цепи».

Так, например, решая уравнения (2.5) и (2.6) относительно $I_{\text{вх}}$ и $I_{\text{вых}}$ получим систему уравнений четырехполюсника в форме G параметров с одним укороченным уравнением:

$$\begin{aligned} I_{\text{вх}} &= \frac{1}{R_{i_{\text{вх}}}} U_{\text{вх}} - \frac{1}{R_{i_{\text{вх}}}} U_{i_{\text{вх}}} = G_{11} (U_{\text{вх}} - U_{i_{\text{вх}}}); \\ I_{\text{вых}} &= -\frac{H}{R_{i_{\text{вых}}}} U_{\text{вх}} + \frac{1}{R_{i_{\text{вых}}}} U_{\text{вых}} - \frac{1}{R_{i_{\text{вых}}}} U_{i_{\text{вых}}} = \\ &= G_{21} U_{\text{вх}} + G_{22} (U_{\text{вых}} - U_{i_{\text{вых}}}) \end{aligned} \quad (2.18)$$

или для случая, когда $U_{i_{\text{вх}}} = 0$ и $U_{i_{\text{вых}}} = 0$:

$$\begin{aligned} I_{\text{вх}} &= \frac{1}{R_{i_{\text{вх}}}} U_{\text{вх}} = G_{11} U_{\text{вх}}; \\ I_{\text{вых}} &= -\frac{H}{R_{i_{\text{вых}}}} U_{\text{вх}} + \frac{1}{R_{i_{\text{вых}}}} U_{\text{вых}} = G_{21} U_{\text{вх}} + G_{22} U_{\text{вых}}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Схемы замещения четырехполюсников, отвечающих уравнениям (2.18) и (2.19), приведены соответственно на рис. 2.10, а и б. Отметим, что все три параметра линеаризованного направленного четырехполюсника G_{11} , G_{21} и

G_{22} (как и H , $R_{i_{\text{вх}}}$, $R_{i_{\text{вых}}}$ в предыдущем варианте записи) взаимно независимы. Аналогично может быть получена система уравнений в форме R -параметров, H -параметров и т.д.

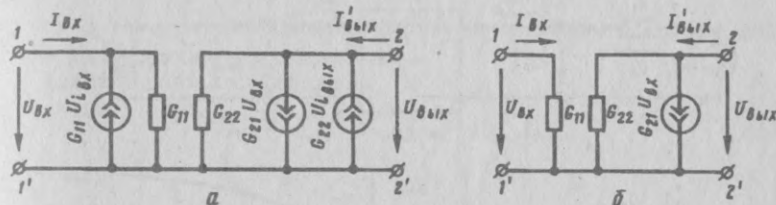


Рис. 2.10

В случае необходимости от источника тока в схемах замещения можно перейти к источникам напряжений и, кроме того, иметь зависимые источники не только от входного напряжения, но и от входного тока. Однако линеаризованный направленный четырехполюсник с зависимыми источниками всегда будет определяться тремя параметрами.

§ 2.5. Графический расчет цепей с ненаправленными четырехполюсниками

Как и в уже рассмотренных случаях, расчет цепи с ненаправленным четырехполюсником НЧ (рис. 2.11,а) состоит в нахождении входного и выходного токов, если заданы E_1 , R_1 , E_2 , R_H , входные (рис. 2.11,з) и выходные (рис. 2.11,с) характеристики четырехполюсника.

Целесообразно предварительно построить две промежуточные характеристики, относящиеся к схеме рис. 2.11,а в целом, координаты которых определяются из семейства входных и выходных характеристик и параметров схемы.

Расчет начинают с выходных характеристик (рис. 2.11,с), на которых строят нагрузочную прямую под углом $\alpha_H = \text{arctg } R_H$. Пересечение этой прямой с кривыми, соответствующими определенным значениям входного напряжения ($U_{\text{вх}1}$, $U_{\text{вх}2}$ и т.д.), дает возможность построить промежуточную зависимость $I'_{\text{вых}}(U_{\text{вх}})$ (рис. 2.11,б).

Кроме того, точки пересечения на выходных характеристиках позволяют определить значения $U_{\text{вых}1}$, $U_{\text{вых}2}$ и т.д. и, используя зависимость $I'_{\text{вых}}(U_{\text{вх}})$, построить вторую промежуточную кривую $I_{\text{вх}}(U_{\text{вх}})$. Обе промежуточные зависимости соответствуют сопротивлению нагрузки, равному R_H , и ЭДС источника питания выходной цепи, равной E_2 . Кривая $I_{\text{вх}}(U_{\text{вх}})$ показана пунктиром на графике входных характеристик (рис. 2.11,з), которые для удобства построений перевернуты на 180° .

Отложив на оси абсцисс (рис. 2.11,з) значение E_1 , построим прямую под углом $\alpha_1 = \text{arctg } R_1$. Рабочей точкой на семействе входных характеристик будет точка пересечения промежуточной кривой и прямой линии. На

оси ординат найдем значение входного тока $I_{вх}$; на оси абсцисс — значение входного напряжения $U_{вх}$ и, если нужно, напряжения U_1 .

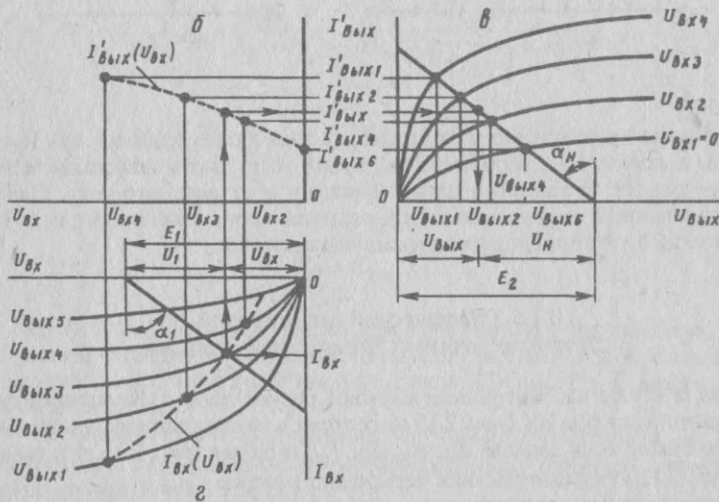
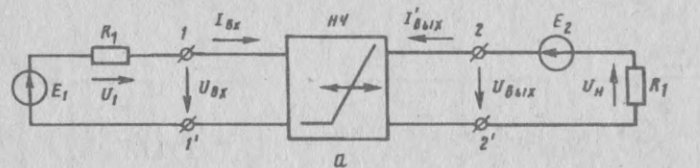


Рис. 2.11

Перенеся положение рабочей точки на промежуточную кривую $I'_{вых}(U_{вх})$ (рис. 2.11, б), получим значение выходного тока $I'_{вых}$, соответствующее входному сигналу четырехполюсника. Точка пересечения ординаты выходного тока $I'_{вых}$ с нагрузочной прямой (рис. 2.11, в) является рабочей точкой на семействе выходных характеристик, по которой далее определяют выходное напряжение четырехполюсника $U_{вых}$ и напряжение на нагрузке $U_н$.

§ 2.6. Расчет цепей с ненаправленными четырехполюсниками методом компенсации

Если рабочие точки на входных и выходных характеристиках ненаправленного четырехполюсника остаются в пределах прямолинейных участков, то для расчета цепи также можно применить метод компенсации.

Рассмотрим цепь с ненаправленным четырехполюсником НЧ (см. 2.11, а), характеристики которого показаны на рис. 2.12, а и б. Из входных

характеристик четырехполюсника (рис. 2.12, а) запишем уравнение входного напряжения

$$U_{вх} = U_{i_{вх}} + H_{вх} U_{вых} + R_{i_{вх}} I_{вх} \quad (2.20)$$

$H_{вх} = \Delta U_{вх} / \Delta U_{вых}$ — коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению при разомкнутых зажимах.

Для выходного напряжения

$$U_{вых} = U_{i_{вых}} + H_{вых} U_{вх} + R_{i_{вых}} I'_{вых} \quad (2.21)$$

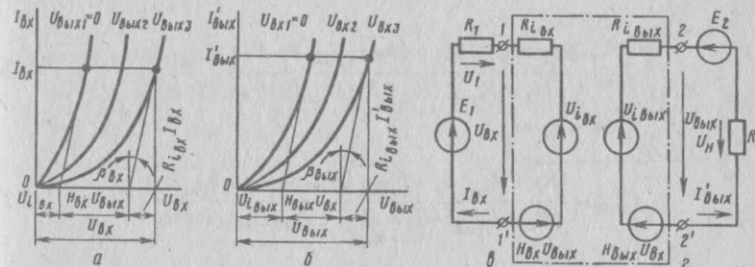


Рис. 2.12

$H_{вых} = \Delta U_{вых} / \Delta U_{вх}$ — коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению при разомкнутых выходных зажимах.

Согласно (2.20) и (2.21) можно составить схему замещения для четырехполюсника и для всей цепи в целом: для входной части цепи (рис. 2.12, в) и выходной части (рис. 2.12, г). Влияние выхода на вход и входа на выход происходит соответственно через зависимые источники напряжения $H_{вх} U_{вых}$ и $H_{вых} U_{вх}$. Четырехполюсник, представленный данной схемой замещения, является линейным в отличие от исходного (см. рис. 2.11, а).

Из схем рис. 2.12, в и г можно получить систему уравнений

$$\begin{aligned} E_1 &= (R_1 + R_{i_{вх}}) I_{вх} + U_{i_{вх}} + H_{вх} (E_2 - R_n I'_{вых}); \\ E_2 &= (R_n + R_{i_{вых}}) I'_{вых} + U_{i_{вых}} + H_{вых} (E_1 - R_1 I_{вх}), \end{aligned} \quad (2.22)$$

которая преобразуется относительно двух неизвестных $I_{вх}$ и $I'_{вых}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} E_1 - U_{i_{вх}} - H_{вх} E_2 &= (R_1 + R_{i_{вх}}) I_{вх} - H_{вх} R_n I'_{вых}; \\ E_2 - U_{i_{вых}} - H_{вых} E_1 &= -H_{вых} R_1 I_{вх} + (R_n + R_{i_{вых}}) I'_{вых}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Совместное решение уравнений системы (2.23) дает возможность определить входной ток

$$I_{\text{ВХ}} = \frac{(R_{\text{Н}} + R_{i_{\text{ВЫХ}}}) (E_1 - U_{i_{\text{ВХ}}}) - H_{\text{ВХ}} (H_{\text{ВЫХ}} R_{\text{Н}} E_1 + R_{i_{\text{ВЫХ}}} E_2 + R_{\text{Н}} U_{i_{\text{ВЫХ}}})}{(R_{\text{Н}} + R_{i_{\text{ВЫХ}}}) (R_1 + R_{i_{\text{ВХ}}}) - H_{\text{ВХ}} H_{\text{ВЫХ}} R_1 R_{\text{Н}}} \quad (2.24)$$

и выходной ток

$$I_{\text{ВЫХ}} = \frac{(R_1 + R_{i_{\text{ВХ}}}) (E_2 - U_{i_{\text{ВЫХ}}}) - H_{\text{ВЫХ}} (H_{\text{ВХ}} R_1 E_2 + R_{i_{\text{ВХ}}} E_1 + R_1 U_{i_{\text{ВХ}}})}{(R_{\text{Н}} + R_{i_{\text{ВЫХ}}}) (R_1 + R_{i_{\text{ВХ}}}) - H_{\text{ВХ}} H_{\text{ВЫХ}} R_1 R_{\text{Н}}} \quad (2.25)$$

Зная токи, найти напряжения $U_{\text{ВХ}}$, $U_{\text{ВЫХ}}$, U_1 и $U_{\text{Н}}$.

В тех случаях, когда значениями $U_{i_{\text{ВХ}}}$ и $U_{i_{\text{ВЫХ}}}$ можно пренебречь, имеем

$$I_{\text{ВХ}} = \frac{(R_{\text{Н}} + R_{i_{\text{ВЫХ}}}) E_1 - H_{\text{ВХ}} (H_{\text{ВЫХ}} R_{\text{Н}} E_1 + R_{i_{\text{ВЫХ}}} E_2)}{(R_{\text{Н}} + R_{i_{\text{ВЫХ}}}) (R_1 + R_{i_{\text{ВХ}}}) - H_{\text{ВХ}} H_{\text{ВЫХ}} R_1 R_{\text{Н}}} \quad (2.26)$$

и

$$I_{\text{ВЫХ}} = \frac{(R_1 + R_{i_{\text{ВХ}}}) E_2 - H_{\text{ВЫХ}} (H_{\text{ВХ}} R_1 E_2 + R_{i_{\text{ВХ}}} E_1)}{(R_{\text{Н}} + R_{i_{\text{ВЫХ}}}) (R_1 + R_{i_{\text{ВХ}}}) - H_{\text{ВХ}} H_{\text{ВЫХ}} R_1 R_{\text{Н}}} \quad (2.27)$$

При этом допущении входное напряжение

$$U_{\text{ВХ}} = \frac{(R_{\text{Н}} + R_{i_{\text{ВЫХ}}}) R_{i_{\text{ВХ}}} E_1 - H_{\text{ВХ}} R_1 R_{i_{\text{ВЫХ}}} E_2}{(R_{\text{Н}} + R_{i_{\text{ВЫХ}}}) (R_1 + R_{i_{\text{ВХ}}}) - H_{\text{ВХ}} H_{\text{ВЫХ}} R_1 R_{\text{Н}}} \quad (2.28)$$

а напряжение на нагрузке

$$U_{\text{Н}} = \frac{(R_1 + R_{i_{\text{ВХ}}}) E_2 - H_{\text{ВЫХ}} (H_{\text{ВХ}} R_1 E_2 + R_{i_{\text{ВХ}}} E_1)}{(R_{\text{Н}} + R_{i_{\text{ВЫХ}}}) (R_1 + R_{i_{\text{ВХ}}}) - H_{\text{ВХ}} H_{\text{ВЫХ}} R_1 R_{\text{Н}}} R_{\text{Н}} \quad (2.29)$$

Из (2.20) и (2.21) можно также получить любую общепринятую форму уравнений линейного активного четырехполюсника и использовать эти уравнения для расчета.

Решив уравнения (2.20) и (2.21) относительно $I_{\text{ВХ}}$ и $I_{\text{ВЫХ}}$ получим систему уравнений четырехполюсника в форме G -параметров:

$$\begin{aligned} I_{\text{ВХ}} &= \frac{1}{R_{i_{\text{ВХ}}}} U_{\text{ВХ}} - \frac{H_{\text{ВХ}}}{R_{i_{\text{ВХ}}}} U_{\text{ВЫХ}} - \frac{1}{R_{i_{\text{ВХ}}}} U_{i_{\text{ВХ}}} = \\ &= G_{11} (U_{\text{ВХ}} - U_{i_{\text{ВХ}}}) + G_{12} U_{\text{ВЫХ}}; \\ I_{\text{ВЫХ}} &= -\frac{H_{\text{ВЫХ}}}{R_{i_{\text{ВЫХ}}}} U_{\text{ВХ}} + \frac{1}{R_{i_{\text{ВЫХ}}}} U_{\text{ВЫХ}} - \frac{1}{R_{i_{\text{ВЫХ}}}} U_{i_{\text{ВЫХ}}} = \\ &= G_{21} U_{\text{ВХ}} + G_{22} (U_{\text{ВЫХ}} - U_{i_{\text{ВЫХ}}}) \end{aligned} \quad (2.30)$$

или с учетом того, что в некоторых случаях $U_{i_{\text{ВХ}}} = 0$ и $U_{i_{\text{ВЫХ}}} = 0$

$$\begin{aligned} I_{\text{ВХ}} &= \frac{1}{R_{i_{\text{ВХ}}}} U_{\text{ВХ}} - \frac{H_{\text{ВХ}}}{R_{i_{\text{ВХ}}}} U_{\text{ВЫХ}} = G_{11} U_{\text{ВХ}} + G_{12} U_{\text{ВЫХ}}; \\ I_{\text{ВЫХ}} &= -\frac{H_{\text{ВЫХ}}}{R_{i_{\text{ВЫХ}}}} U_{\text{ВХ}} + \frac{1}{R_{i_{\text{ВЫХ}}}} U_{\text{ВЫХ}} = G_{21} U_{\text{ВХ}} + G_{22} U_{\text{ВЫХ}}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Из (2.30) и (2.31) видно, что линеаризованный ненаправленный четырехполюсник характеризуется четырьмя взаимно независимыми параметрами: G_{11} , G_{12} , G_{21} и G_{22} ($H_{\text{ВХ}}$, $H_{\text{ВЫХ}}$, $R_{i_{\text{ВХ}}}$ и $R_{i_{\text{ВЫХ}}}$).

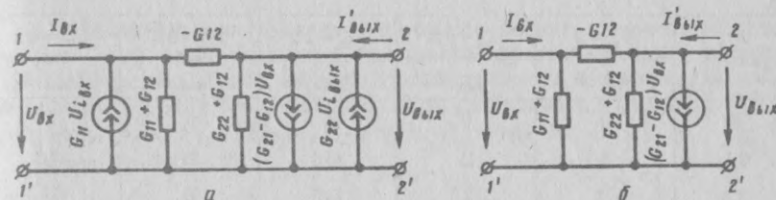


Рис. 2.13

На рис. 2.13,а приведена Π -образная схема замещения четырехполюсника, которая соответствует системе уравнений (2.30). Действительно, составив для этой схемы уравнения методом узловых напряжений, получим для левого узла:

$$\begin{aligned} I_{\text{ВХ}} &= (G_{11} + G_{12}) U_{\text{ВХ}} - G_{11} U_{i_{\text{ВХ}}} - G_{12} (U_{\text{ВХ}} - U_{\text{ВЫХ}}) = \\ &= G_{11} (U_{\text{ВХ}} - U_{i_{\text{ВХ}}}) + G_{12} U_{\text{ВЫХ}} \end{aligned}$$

для правого узла

$$\begin{aligned} I_{\text{ВЫХ}} &= (G_{22} + G_{12}) U_{\text{ВЫХ}} - G_{22} U_{i_{\text{ВЫХ}}} + (G_{21} - G_{12}) U_{\text{ВХ}} - G_{12} (U_{\text{ВЫХ}} - U_{\text{ВХ}}) = \\ &= G_{21} U_{\text{ВХ}} + G_{22} (U_{\text{ВЫХ}} - U_{i_{\text{ВЫХ}}}). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что Π -образная схема замещения, представленная на рис. 2.13,б, соответствует уравнениям (2.31). Известными методами преобразования можно получить систему уравнений в форме R -параметров, H -параметров и т.д., заменить Π -образную схему T -образной, и от источников тока перейти к источникам напряжений. Кроме того, источники в схемах замещения могут зависеть не только от входного напряжения, но и от входного тока и даже от сигналов промежуточных цепей схемы замещения и т.д. Однако всегда линеаризованный ненаправленный четырехполюсник с зависимыми источниками будет определяться четырьмя параметрами.

Задачи

2.1. Для цепи, изображенной на рис. 2.6, а, входная характеристика нелинейного направленного четырехполюсника приведена в табл. 2.1, выходные характеристики — в табл. 2.2.

Таблица 2.1

$U_{вх}, В$	0	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	5
$I_{вх}, мА$	0	2	3,25	5	7,5	10,5	13,5	17	25

Таблица 2.2

$I_{вых}, А$	$U_{вх} = 0$	$U_{вх} = 1 В$	$U_{вх} = 2 В$	$U_{вх} = 3 В$	$U_{вх} = 4 В$
	$U_{вых}, В$	$U_{вых}, В$	$U_{вых}, В$	$U_{вых}, В$	$U_{вых}, В$
0	0	0	0	0	0
0,1	8	11	15,5	21	27,5
0,2	12	17,5	23,5	31	38
0,3	15,5	22	30	38	46
0,4	18	26,5	35	44	53
0,5	20	30	40	50	60

Определить $I_{вх}$, $U_{вх}$, $I_{вых}$, $U_{вых}$ и падения напряжений на сопротивлениях R_1 и R_H , если $E_1 = 4 В$, $R_1 = 56 Ом$, $E_2 = 60 В$, $R_H = 96 Ом$.

Решение. Применяя метод пересечения к расчету входной цепи (рис. 2.14, а), найдем: $I_{вх} = 12,5 мА$, $U_{вх} = 3,3 В$ и $U_1 = 0,7 В$.

Исходные характеристики выходной цепи (рис. 2.14, б) построены при значениях входного напряжения 0, 1, 2, 3, 4 В, поэтому необходимо достроить характеристику при $U_{вх} = 3,3 В$. Методом пересечения можно опреде-

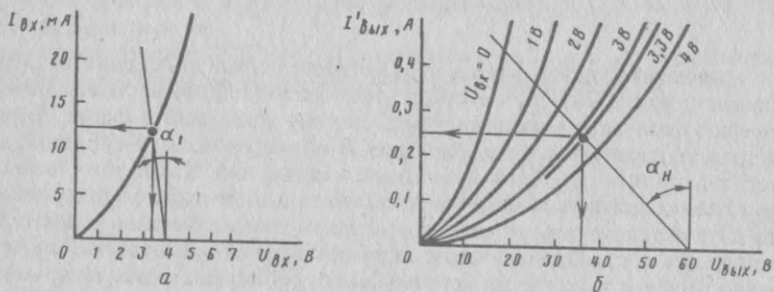


Рис. 2.14

лить рабочую точку, а затем ток и напряжения выходной цепи: $I'_{вых} = 0,25 А$, $U_{вых} = 36 В$, $U_H = 24 В$.

Ответ. $I_{вх} = 12,5 мА$; $U_{вх} = 3,3 В$; $U_1 = 0,7 В$; $I'_{вых} = 0,25 А$; $U_{вых} = 36 В$; $U_H = 24 В$.

2.2. В каких пределах должно изменяться сопротивление R_1 , чтобы в выходной цепи направленного четырехполюсника (см. рис. 2.6, а) ток изменялся от 0,28 до 0,4 А? Параметры цепи: $E_1 = 5 В$, $E_2 = 90 В$, $R_H = 160 Ом$. Входная и выходные характеристики четырехполюсника определены соответственно в табл. 2.1 и 2.2.

Ответ. От 59 до 2142 Ом.

2.3. Нелинейный направленный четырехполюсник, включенный в цепь (см. рис. 2.6, а), задан входной и выходными характеристиками, значения которых приведены в табл. 2.1 и 2.2 соответственно. Каковы пределы изменения ЭДС E_1 , если ток в выходной цепи увеличивается от 0,28 до 0,4 А? Параметры цепи: $R_1 = 320 Ом$, $E_2 = 90 В$, $R_H = 160 Ом$.

Ответ. От 9,4 до 1,6 В.

2.4. Составить линеаризованную схему замещения входной и выходной цепей нелинейного направленного четырехполюсника и определить ее параметры, используя метод компенсации, если рабочая точка на входной характеристике (табл. 2.3) определяется значениями $I_{вх} = 40 мА$, $U_{вх} = 7 В$, а рабочая точка на выходных характеристиках (табл. 2.4) — $I_{вых} = 5 А$, $U_{вых} = 45 В$.

Таблица 2.3

$U_{вх}, В$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$I_{вх}, мА$	0	2,5	6,5	11,5	18	24,5	32	40	49,5

Таблица 2.4

$I_{вых}, А$	$U_{вх} = 0$	$U_{вх} = 3,5 В$	$U_{вх} = 7 В$
	$U_{вых}, В$	$U_{вых}, В$	$U_{вых}, В$
0	0	0	0
1	8,5	15,5	24,5
2	14	23	32,5
3	18,5	28	37,5
4	22	32	42
5	25	35	45

Ответ. $U_{i_{вх}} = 2,6 В$; $R_{i_{вх}} = 110 Ом$; $U_{i_{вых}} = 10 В$; $R_{i_{вых}} = 3 Ом$; $H = 2,86$.

2.5. Используя схему замещения нелинейного направленного четырехполюсника, полученную в задаче 2.4, определить аналитически входные и выходные токи и напряжения в цепи, изображенной на рис. 2.6, а, если $E_1 = 16$ В, $R_1 = 140$ Ом, $E_2 = 81,8$ В, $R_H = 5$ Ом. Проверить расчеты графически.

Ответ. $I_{ВХ} = 0,0536$ А; $U_{ВХ} = 8,5$ В; $U_1 = 7,5$ В; $I_{ВЫХ} = 5,94$ А; $U_{ВЫХ} = 52,1$ В; $U_H = 29,7$ В.

2.6. В цепь, схема которой представлена на рис. 2.11, а, включен нелинейный ненаправленный четырехполюсник, входные и выходные характеристики которого приведены в табл. 2.5 и 2.6 соответственно.

Таблица 2.5

$U_{ВХ}, В$	$U_{ВЫХ} = 10$ В	$U_{ВЫХ} = 20$ В	$U_{ВЫХ} = 30$ В	$U_{ВЫХ} = 40$ В
	$I_{ВХ}, мА$	$I_{ВХ}, мА$	$I_{ВХ}, мА$	$I_{ВХ}, мА$
0	0	0	0	0
1	4	8	14	20
2	6,5	12,5	21	27,5
3	8	16,5	24	32
4	9	18,5	27	35
5	9,5	19,5	28,5	37,5
6	10	20	30	40

Таблица 2.6

$I_{ВЫХ}, А$	$U_{ВХ} = 0$	$U_{ВХ} = 2$ В	$U_{ВХ} = 4$ В	$U_{ВХ} = 6$ В
	$U_{ВЫХ}, В$	$U_{ВЫХ}, В$	$U_{ВЫХ}, В$	$U_{ВЫХ}, В$
0	0	0	0	0
1	7	11,5	15,5	23
2	11,5	17	23,5	32
3	15	22	30	39
4	17,5	26	35	44,4
5	20	30	40	50

Определить входные и выходные токи и напряжения, если $E_1 = 5$ В, $R_1 = 100$ Ом, $E_2 = 50$ В, $R_H = 7$ Ом. Каким должно быть сопротивление R_1 , чтобы ток в выходной цепи был равен 2,6 А? Можно ли в выходной цепи получить ток $I_{ВЫХ} = 2$ А?

Ответ. а) $I_{ВХ} = 21,5$ мА; $U_{ВХ} = 2,85$ В; $U_1 = 2,15$ В; $I_{ВЫХ} = 3,3$ А; $U_{ВЫХ} = 27$ В; $U_H = 23$ В; б) $R_1 = 0$; в) нельзя.

2.7. Для нелинейного ненаправленного четырехполюсника (см. рис. 2.11,а) заданы входные (табл. 2.7) и выходные (табл. 2.8) характеристики.

Таблица 2.7

$U_{ВХ}, В$	$U_{ВЫХ} = 0$	$U_{ВЫХ} = 50$ В	$U_{ВЫХ} = 100$ В
	$I_{ВХ}, мА$	$I_{ВХ}, мА$	$I_{ВХ}, мА$
0	0	0	0
0,2	0,095	0,18	0,27
0,4	0,175	0,27	0,36
0,6	0,24	0,34	0,435
0,8	0,3	0,4	0,5

Таблица 2.8

$I_{ВЫХ}, А$	$U_{ВХ} = 0$	$U_{ВХ} = 0,5$ В	$U_{ВХ} = 1$ В
	$U_{ВЫХ}, В$	$U_{ВЫХ}, В$	$U_{ВЫХ}, В$
0	0	0	0
0,5	14	28	45
1	23	41	61
1,5	30	50	69
2	35	56	75
2,5	40	60	80

Используя метод компенсации, составить линеаризованную схему замещения входной и выходной цепей этого четырехполюсника и определить ее параметры, если рабочие точки на входных и выходных характеристиках определяются значениями: $I_{ВХ} = 0,37$ мА, $U_{ВХ} = 0,7$ В и $I_{ВЫХ} = 2,5$ А, $U_{ВЫХ} = 80$ В.

Решение. Проведем касательную к рабочей точке на входных характеристиках (рис. 2.15,а) и параллельно ей касательную к характеристике при $U_{ВЫХ} = 0$. Найдем

$$U_{i_{ВХ}} = -0,26 \text{ В}; R_{i_{ВХ}} = \frac{0,6}{0,17} 10^3 = 3512 \text{ Ом}$$

$$(R_{i_{ВХ}} \text{ пропорционально } \operatorname{tg} \beta_{ВХ}); H_{ВХ} = \frac{\Delta U_{ВХ}}{\Delta U_{ВЫХ}} = \frac{-0,6 - (-0,26)}{50 - 0} = -0,0068.$$

Такие же построения проведем на выходных характеристиках (рис. 2.15,б) и определим:

$$U_{i_{ВЫХ}} = 20 \text{ В}; R_{i_{ВЫХ}} = 20/2,5 = 8 \text{ Ом} (R_{i_{ВЫХ}} \text{ пропорционально } \operatorname{tg} \beta_{ВЫХ});$$

$$H_{\text{ВЫХ}} = \frac{\Delta U_{\text{ВЫХ}}}{\Delta U_{\text{ВХ}}} = \frac{60 - 20}{1 - 0} = 40.$$

Далее составим схемы замещения входной (рис. 2.15,а) и выходной (рис. 2.15,б) цепей четырехполюсника. Следует иметь в виду, что при подстановке найденных значений в схему замещения входной цепи источники $U_{i_{\text{ВХ}}}$ и $H_{\text{ВХ}} U_{\text{ВЫХ}}$ изменят свое направление на противоположное.

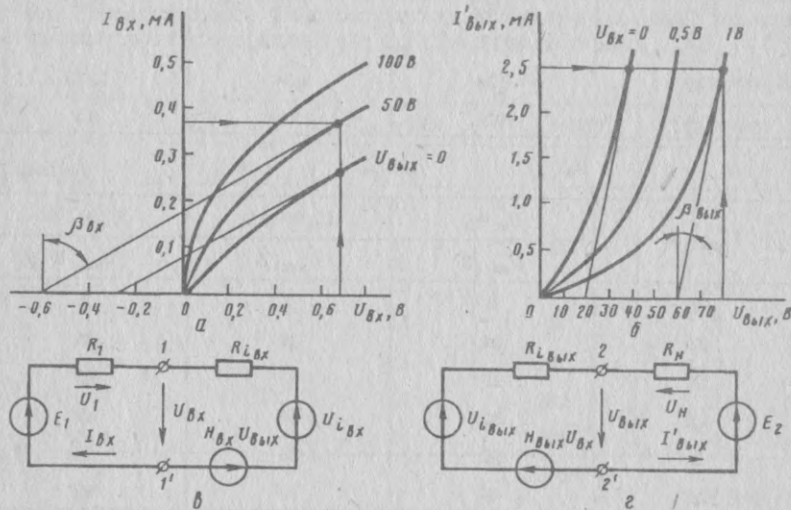


Рис. 2.15

Ответ. $U_{i_{\text{ВХ}}} = -0,26$ В; $R_{i_{\text{ВХ}}} = 3512$ Ом; $H_{\text{ВХ}} = -0,0068$; $U_{i_{\text{ВЫХ}}} = 20$ В; $R_{i_{\text{ВЫХ}}} = 8$ Ом; $H_{\text{ВЫХ}} = 40$.

2.8. Используя схему замещения нелинейного ненаправленного четырехполюсника, полученную в задаче 2.7, определить аналитически входные и выходные токи и напряжения цепи, изображенной на рис. 2.11,а, если $E_1 = 1$ В, $R_1 = 536$ Ом, $E_2 = 180$ В, $R_N = 28$ Ом. Проверить расчеты графически.

Решение. Для определения входного тока (рис. 2.15,а) подставим числовые значения в уравнение (2.24):

$$I_{\text{ВХ}} = \frac{(28 + 8)(1 + 0,26) + 0,0068(40 \cdot 28 \cdot 1 + 8 \cdot 180 + 28 \cdot 20)}{(28 + 8)(536 + 3512) + 0,0068 \cdot 40 \cdot 536 \cdot 28} = \frac{66,576}{149808} = 0,445 \text{ мА.}$$

Тогда напряжения входной цепи

$$U_1 = R_1 I_{\text{ВХ}} = 536 \cdot 0,445 \cdot 10^{-3} = 0,24 \text{ В;}$$

$$U_{\text{ВХ}} = E_1 - U_1 = 1 - 0,24 = 0,76 \text{ В.}$$

Выходной ток (рис. 2.15,б) найдем из уравнения (2.25):

$$I'_{\text{ВЫХ}} = \frac{(536 + 3512)(180 - 20) - 40(-0,0068 \cdot 536 \cdot 180 + 3512 \cdot 1 - 536 \cdot 0,26)}{(28 + 8)(536 + 3512) + 0,0068 \cdot 40 \cdot 536 \cdot 28} = \frac{539000}{149808} = 3,6 \text{ А.}$$

Напряжениями выходной цепи будут

$$U_H = R_N I'_{\text{ВЫХ}} = 28 \cdot 3,6 = 100,8 \text{ В;}$$

$$U_{\text{ВЫХ}} = E_2 - U_H = 180 - 100,8 = 79,2 \text{ В.}$$

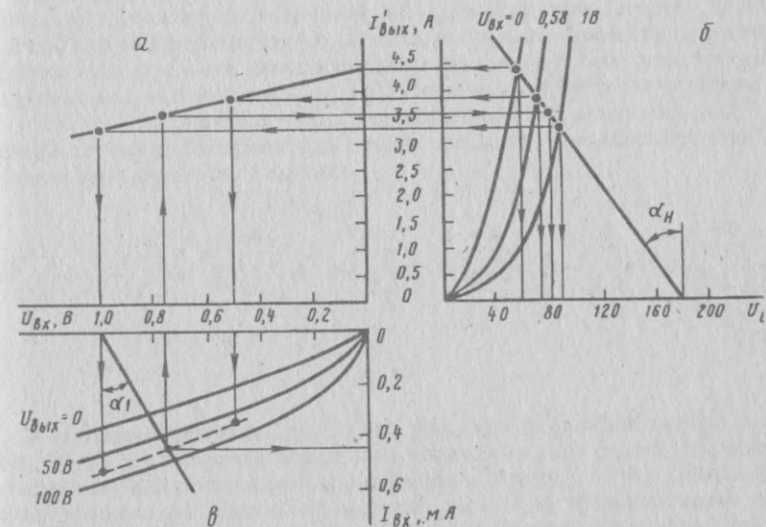


Рис. 2.16

Проверим расчеты графически. Предварительно продлим прямолинейные участки входных (рис. 2.16,а) и выходных (рис. 2.16,б) характеристик четырехполюсника, т.к. в табл. 2.7 и 2.8 заданы ограниченные числовые. Построения проводим в последовательности, рассмотренной в § 2.5.

На входных характеристиках получим следующие расчетные значения:
 $I_{\text{вх}} = 0,445 \text{ мА}$; $U_{\text{вх}} = 0,76 \text{ В}$, $U_1 = 0,24 \text{ В}$, на выходных характеристиках:
 $I'_{\text{вых}} = 3,575 \text{ А}$; $U_{\text{вых}} = 81 \text{ В}$; $U_H = 99 \text{ В}$.

Ответ. $I_{\text{вх}} = 0,445 \text{ мА}$; $U_{\text{вх}} = 0,76 \text{ В}$; $U_1 = 0,24 \text{ В}$; $I'_{\text{вых}} = 3,6 \text{ А}$; $U_{\text{вых}} = 79,2 \text{ В}$; $U_H = 100,8 \text{ В}$.

Глава 3

АНАЛИЗ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ В ЦЕПЯХ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА С НЕЛИНЕЙНЫМИ ДВУХПОЛЮСНИКАМИ

§ 3.1. Особенности, исходные характеристики и классификация двухполосников, работающих на переменном токе

В цепях переменного тока с нелинейными двухполосниками наблюдаются гораздо более сложные явления, чем в цепях постоянного тока. Будем полагать, что нелинейные двухполосники могут иметь свойства активного сопротивления (т.е. быть резистивными), а также могут быть реактивными (индуктивными или емкостными) или смешанными (активно-реактивными). Условные обозначения таких двухполосников показаны на рис. 3.1. Частный случай рассматриваемых двухполосников — нелинейные сопротивление, индуктивность и емкость.

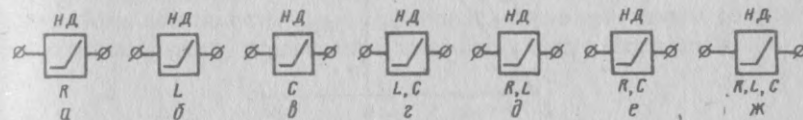


Рис. 3.1

В активно-реактивном двухполоснике, где нелинейна только одна часть, другая часть обычно может быть выделена в виде отдельных линейных активных или реактивных сопротивлений. Поэтому, если в схеме задан активно-реактивный двухполосник вида рис. 3.1, ж, предполагается, что нелинейны все три составляющие (R , L и C). Если же нелинейна только одна составляющая этого двухполосника (например R), он должен быть преобразован в двухполосник вида рис. 3.1, а, включенный последовательно с линейными индуктивностью и емкостью. Далее в качестве исходных будем рассматривать, как правило, двухполосники вида рис. 3.1, а, б и в.

Свойства нелинейных двухполосников на переменном токе описываются большим числом исходных характеристик, выбор координат которых зависит от физических процессов, протекающих в конкретных схемах, содержащих двухполосники. По виду характеристики аналогичны показанным на рис. 1.3—1.7.

В общем случае при синусоидальном напряжении ток в цепях с нелинейными двухполюсниками становится несинусоидальным, и для полного анализа явления нужно пользоваться характеристикой, связывающей мгновенные значения величин. Однако, как известно, прямая связь между мгновенными значениями тока и напряжения (закон Ома) наблюдается только у резистивного двухполюсника (рис. 3.1,а). У индуктивного (рис. 3.1,б) и емкостного (рис. 3.1,в) двухполюсников такая связь — интегродифференциальная, потому и форма исходных характеристик этих двухполюсников будет различной.

Резистивный двухполюсник описывается вольт-амперной характеристикой $i = f(u)$ (рис. 3.2), из которой, как и в случае постоянного тока, для каждой точки ВАХ могут быть получены значения активного статического сопротивления

$$R_{ст} = u/i = \operatorname{tg} \alpha \quad (3.1)$$

и активного дифференциального сопротивления

$$R_{диф} = du/di = \operatorname{tg} \beta. \quad (3.2)$$

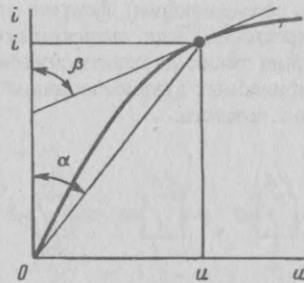


Рис. 3.2

Из характеристики $i = f(u)$ можно получить зависимости $R_{ст}(i)$, $R_{диф}(i)$, $R_{ст}(u)$ и $R_{диф}(u)$ и использовать их в качестве исходных.

Для индуктивного двухполюсника (см. рис. 3.1,б) первичной характеристикой является зависимость потокосцепления самоиндукции от тока $\Psi = f(i_L)$ (рис. 3.3). По аналогии с ранее изложенным здесь также могут быть введены понятия статической индуктивности

$$L_{ст} = \Psi/i_L = \operatorname{tg} \alpha \quad (3.3)$$

и дифференциальной индуктивности

$$L_{диф} = d\Psi/di_L = \operatorname{tg} \beta. \quad (3.4)$$

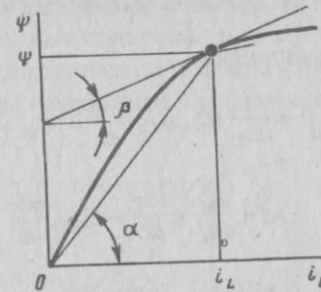


Рис. 3.3

На основании закона электромагнитной индукции напряжение на индуктивном двухполюснике

$$u_L = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d\Psi}{di_L} \cdot \frac{di_L}{dt} = \frac{d}{di_L} (L_{ст} i_L) \frac{di_L}{dt} = \left(L_{ст} + i_L \frac{dL_{ст}}{di_L} \right) \frac{di_L}{dt}, \quad (3.5)$$

или

$$u_L = \frac{d\Psi}{di_L} \cdot \frac{di_L}{dt} = L_{диф} \frac{di_L}{dt}. \quad (3.6)$$

Из характеристики $\Psi = f(i_L)$ можно получить зависимости $L_{ст}(i_L)$, $L_{диф}(i_L)$, $L_{ст}(\Psi)$ и $L_{диф}(\Psi)$. Как видно из (3.6), особенно удобна для расчета зависимость $L_{диф}(i_L)$, используя которую можно получить простую связь между мгновенными значениями тока и напряжения.

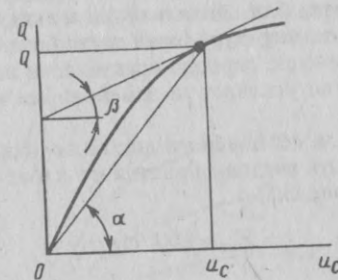


Рис. 3.4

Для емкостного двухполюсника (см. рис. 3.1, в) первичной характеристикой является зависимость заряда от напряжения $Q = f(u_C)$ (рис. 3.4), при этом следует различать статическую емкость

$$C_{ст} = Q/u_C = \operatorname{tg} \alpha \quad (3.7)$$

и дифференциальную емкость

$$C_{\text{диф}} = dQ/du_C = \text{tg } \beta. \quad (3.8)$$

Ток через емкостный двухполюсник

$$i_C = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{du_C} \cdot \frac{du_C}{dt} = \frac{d}{du_C} (C_{\text{ст}} u_C) \frac{du_C}{dt} = \left(C_{\text{ст}} + u_C \frac{dC_{\text{ст}}}{du_C} \right) \frac{du_C}{dt}, \quad (3.9)$$

или

$$i_C = \frac{dQ}{du_C} \cdot \frac{du_C}{dt} = C_{\text{диф}} \frac{du_C}{dt}. \quad (3.10)$$

Из характеристики $Q = f(u_C)$ могут быть получены зависимости $C_{\text{ст}}(u_C)$, $C_{\text{диф}}(u_C)$, $C_{\text{ст}}(Q)$ и $C_{\text{диф}}(Q)$, из которых наиболее удобна для расчета зависимость $C_{\text{диф}}(u_C)$.

Как правило, форма тока или напряжения особой роли не играет, и вольт-амперная характеристика может быть построена не для мгновенных, а для действующих $I = f_1(U)$, средних $I_{\text{ср}} = f_2(U_{\text{ср}})$ или амплитудных $I_m = f_3(U_m)$ значений тока и напряжения соответствующей фиксированной частоты. (При этом под действующим значением тока понимаем или действующее значение основной — первой — гармоники, или эквивалентное действующее значение несинусоидальной функции.) Методы расчета, основанные на таком допущении, называют квазилинейными и, т.к. предполагается, что форма токов и напряжений остается синусоидальной (как и в линейных цепях), а нелинейность сохраняется только для соотношений между действующими значениями тока и напряжения.

Рассмотрим группу двухполюсников, фактически обладающих квазилинейными свойствами. Так, например, если нелинейность основана на температурной зависимости сопротивления, то тепловой процесс, который обуславливает нелинейность ВАХ, протекает относительно медленно. Постоянная времени нагрева часто бывает столь велика, что даже при сравнительно низкой частоте температура таких двухполюсников и, соответственно, сопротивление в течение периода практически не изменяются, т.е. изменение температуры не успевает за изменениями мгновенных значений тока.

В общем случае для нелинейного двухполюсника при квазилинейном рассмотрении могут быть введены понятия полного статического сопротивления (рис. 3.5)

$$Z_{\text{ст}} = U/I = \text{tg } \alpha \quad (3.11)$$

и полного дифференциального сопротивления

$$Z_{\text{диф}} = dU/dI = \text{tg } \beta. \quad (3.12)$$

Эти справедливые для всех двухполюсников, показанных на рис. 3.1, понятия превращаются для первых трех двухполюсников соответственно в «активное статическое и дифференциальное сопротивления» $R_{\text{ст}}$ и

$R_{\text{диф}}$, «индуктивное статическое и дифференциальное сопротивления» $X_{L_{\text{ст}}}$ и $X_{L_{\text{диф}}}$ и «емкостное статическое и дифференциальное сопротивления» $X_{C_{\text{ст}}}$ и $X_{C_{\text{диф}}}$. По аналогии с цепями постоянного тока можно также использовать понятия «статические и дифференциальные проводимости».

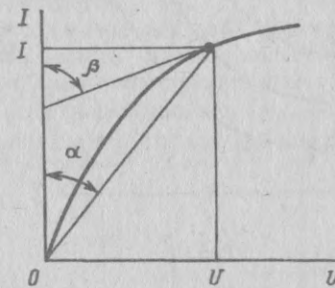


Рис. 3.5

Кроме вольт-амперных характеристик, в качестве исходных можно пользоваться зависимостями $Z_{\text{ст}}(I)$, $R_{\text{ст}}(I)$, $X_{L_{\text{ст}}}(I)$, $X_{C_{\text{ст}}}(I)$, $Z_{\text{ст}}(U)$ и т.д. Следует отметить, что характеристики $Z_{\text{ст}}(I)$, $Z_{\text{диф}}(I)$, $Z_{\text{ст}}(U)$ и $Z_{\text{диф}}(U)$ не дают полной информации о двухполюснике, т.к. не известно изменение фазовых сдвигов с изменением сигнала.

Вольт-амперные характеристики реактивных и активно-реактивных двухполюсников зависят от частоты, поэтому для анализа нелинейной цепи не при фиксированной, а при меняющейся частоте необходимо иметь зависимость тока от двух переменных (напряжения и частоты), т.е. семейство характеристик $I = f(U, \omega)$. На рис. 3.6 показано такое семейство характеристик для емкостного двухполюсника. При $\omega = \text{const}$ вместо семейства получается одна ВАХ; при $\omega = 0$ — вырожденная характеристика на постоянном токе.

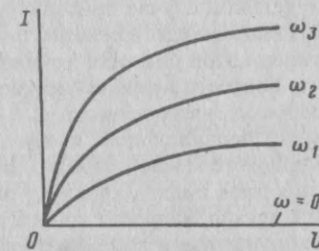


Рис. 3.6

Если в качестве исходных данных используются статические и дифференциальные сопротивления, их также следует рассматривать в функции двух переменных — тока и частоты или напряжения и частоты (рис.

3.7). Семейства характеристик двухполюсника могут быть представлены также в трехмерном пространстве.

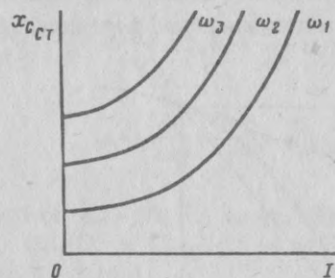


Рис. 3.7

При квазилинейном подходе существенной разницы между расчетом цепей переменного и постоянного тока нет, хотя методы расчета обычно усложняются, что связано с необходимостью учитывать фазовые сдвиги между током и напряжением.

Следует также отметить, что если расчет линейных цепей и цепей с нелинейными двухполюсниками постоянного тока можно проводить в известной степени формально, то для расчета нелинейных цепей переменного тока, как правило, необходимо предварительно уяснить сущность физических процессов, происходящих в конкретной анализируемой цепи. Только тогда можно выбрать рациональный метод расчета.

§ 3.2. Графический расчет квазилинейных цепей

За исключением случаев подлинной квазилинейности, расчет по действующим значениям всегда будет приближенным, т.к. степень несинусоидальности токов и напряжений в каждой конкретной цепи зависит от режима работы. В каждом отдельном случае придется ориентироваться на характеристики двухполюсников, снятые в режиме, близком к ожидаемому. Поскольку для оценки степени этой близости точных критериев не существует, будем полагать, что соответствующие ожидаемому режиму исходные характеристики на требуемой частоте имеются.

При последовательном, параллельном и смешанном соединениях двухполюсников на переменном токе возможны различные их комбинации, которые определяют тот или иной подход к расчету электрической цепи.

Так, если соединяются двухполюсники с одинаковыми свойствами (R и R ; L и L ; C и C) или двухполюсники и линейные элементы одного характера, то графический расчет проводят, как и для цепей на постоянном токе (см. § 1.3). Приемы расчета цепей на постоянном токе применимы и для активно-реактивных двухполюсников (R, L и R, L ; R, C и R, C ; R, L, C и R, L, C), если углы сдвига между током и напряжением в каждом из соединяемых двухполюсников одинаковы. В этом случае суммирование аб-

сцисс (напряжений) или ординат (токов) производят алгебраически (для соединения L и C вычитают абсциссы или ординаты).

При соединении двухполюсников с различными свойствами (R и C ; R и L) между собой или двухполюсников (R ; L ; C) и линейных комплексных сопротивлений необходимо учитывать углы сдвига между током и напряжением, которые для таких сочетаний двухполюсников и линейных сопротивлений легко определяются.

Если в цепи соединены активно-реактивные двухполюсники, то для расчета такой цепи, кроме вольт-амперных характеристик $I = f_1(U)$, необходимо иметь зависимости угла сдвига между током и напряжением от тока (или напряжения): $\varphi = f_2(I)$ или $\varphi = f_3(U)$. Это связано с тем, что в данном случае для каждой точки ВАХ углы сдвига будут разными (рис. 3.8,б).

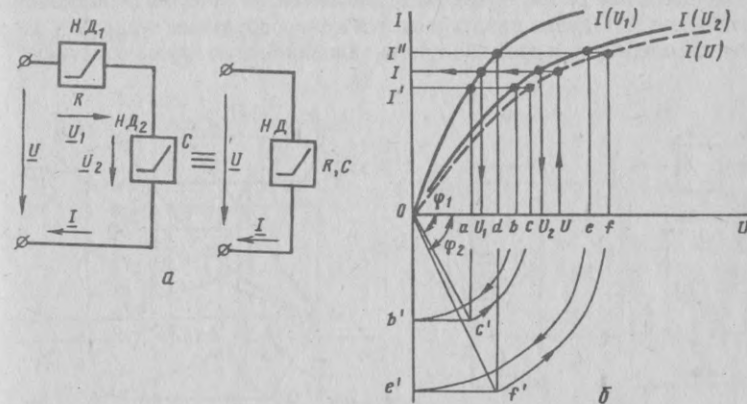


Рис. 3.8

Последовательное соединение. Резонанс напряжений. Рассмотрим последовательное соединение двух нелинейных двухполюсников ND_1 (R) и ND_2 (C) (рис. 3.8,а), вольт-амперные характеристики которых $I(U_1)$ и $I(U_2)$ представлены на рис. 3.8,б.

Так как для цепи синусоидального тока по второму закону Кирхгофа $U = U_1 + U_2$ или $U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2}$, сложение ординат (напряжений) для построения эквивалентной характеристики необходимо производить геометрически. Это построение показано на рис. 3.8,б для двух значений тока: I' и I'' . При токе в цепи I' падения напряжения на двухполюсниках ND_1 и ND_2 определяются соответственно отрезками на оси абсцисс oa и ob . Если считать, что вектор тока совпадает с осью абсцисс, то напряжение U_1 (отрезок oa) совпадает с осью абсцисс, а напряжение U_2 (отрезок ob) отстает от тока на угол 90° , и его необходимо повернуть на этот угол по часовой стрелке. Геометрическое сложение отрезков oa и ob' даст отрезок oc' , который необходимо повернуть до совпадения с осью абсцисс, а затем най-

ти точку пересечения этого отрезка, т.е. напряжения U , с током I . Аналогичное построение проведено и для тока I' . Поскольку свойства (характер фазового сдвига) двухполюсников (R и C) не меняются в зависимости от тока (напряжения), для любых значений тока угол сдвига между напряжениями U_1 и U_2 будет равен 90° .

Из графических построений на рис. 3.8,б видно, что в каждой точке эквивалентной вольт-амперной характеристики $I(U)$ меняется не только модуль напряжения, но и угол сдвига между током и напряжением (геометрически построенные отрезки oc' и of'). Таким образом, из рис. 3.8,б можно легко получить зависимость $\varphi(I)$ или $\varphi(U)$.

Рассмотрим теперь последовательное соединение двухполюсника НД (R) и линейного комплексного сопротивления, имеющего активно-емкостный характер (рис. 3.9,а). Вольт-амперные характеристики $I(U_1)$ и $I(U_2)$ приведены на рис. 3.9,б. В этом случае можно воспользоваться методом, изложенным ранее, объединив двухполюсник НД (R) и активное сопротивление R . Однако представляется целесообразным не делать промежуточной операции, а сразу получить эквивалентную характеристику.

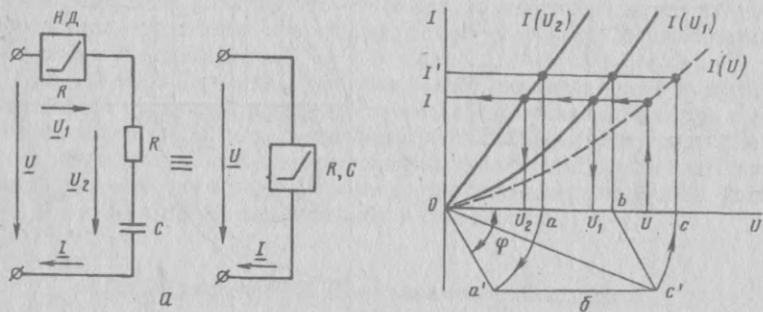


Рис. 3.9

Будем считать, что вектор тока совпадает с осью абсцисс, тогда при любых значениях тока напряжение U_1 будет совпадать с осью абсцисс, а напряжение U_2 — отставать от этой оси на угол $\varphi = \arctg \frac{X_C}{R}$. Значение напряжения U есть геометрическая сумма напряжений U_1 и U_2 (для одних и тех же токов).

На рис. 3.9,б показано построение одной точки эквивалентной характеристики $I(U)$ для тока I . Отрезок oa (напряжение U_2) необходимо повернуть по часовой стрелке на угол φ и сложить геометрически с отрезком ob (напряжение U_1). Полученный отрезок oc' (напряжение U) поворачивают до совпадения с осью абсцисс и находят точку пересечения этой абсциссы с линией заданного тока I . После построения эквивалентной характеристики по заданному входному напряжению U находят ток I в цепи и падения напряжений U_1 и U_2 .

Аналогично строят эквивалентную характеристику, если задана цепь с последовательно включенными активно-резистивными двухполюсниками. Однако в этом случае, как уже отмечалось, необходимо для каждого двухполюсника иметь, кроме вольт-амперной характеристики, зависимость $\varphi(I)$. Тогда, задаваясь значениями токов, можно найти значения напряжений и углов сдвига между током и напряжениями и произвести геометрические построения. При этом для каждой пары напряжений получатся различные углы сдвига между ними, т.к. $\psi_U = \varphi_1 - \varphi_2$.

В качестве исходных для графического расчета цепей можно использовать зависимости сопротивлений от тока и напряжения.

Если для схемы рис. 3.8,а известны зависимости $R_{ст}(I)$ и $X_{C_{ст}}(I)$ (рис. 3.10,а), то, задаваясь значениями тока, можно найти соответствующие им значения $R_{ст}$, $X_{C_{ст}}$ и $Z_{ст}$. Так как $Z_{ст} = \sqrt{R_{ст}^2 + X_{C_{ст}}^2}$, необходимо произвести геометрическое сложение $R_{ст}$ и $X_{C_{ст}}$, что и показано на рис. 3.10,а для тока I .

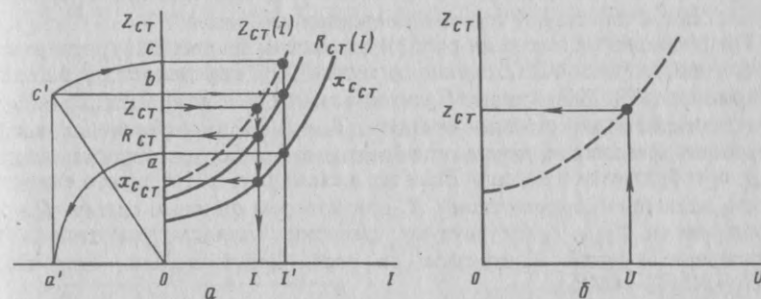


Рис. 3.10

Эквивалентную характеристику $Z_{ст}(I)$ используют далее для построения зависимости $Z_{ст}(U)$, по которой при заданном входном напряжении U можно определить значение $Z_{ст}$ (рис. 3.10,б). Это значение переносят на рис. 3.10,а и по эквивалентной характеристике $Z_{ст}(I)$ определяют ток в цепи I , после чего по характеристикам $R_{ст}(I)$ и $X_{C_{ст}}(I)$ находят $R_{ст}$ и $X_{C_{ст}}$. Значения падения напряжений на двухполюсниках (рис. 3.8,а) можно получить из закона Ома: $U_1 = R_{ст} I$ и $U_2 = R_{C_{ст}} I$.

При последовательном соединении для расчета цепи переменного тока, как и в цепи постоянного тока, можно применять метод пересечения, который в этом случае называют методом эллипса.

Рассмотрим схему, представленную на рис. 3.11,а. Введем для этой схемы условный ток короткого замыкания (ток в цепи при коротком замыкании зажимов двухполюсника НД):

$$I_k = U/X_C. \quad (3.13)$$

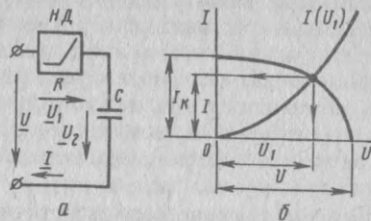


Рис. 3.11

Разделив уравнение $U^2 = U_1^2 + X_C^2 I^2$ на U^2 и используя соотношение (3.13), получим каноническое уравнение эллипса

$$U_1^2/U^2 + I^2/I_k^2 = 1 \quad (3.14)$$

с центром в начале координат и полуосями U и I_k . Переменным U_1 и I геометрически соответствуют текущие координаты эллипса.

Графический расчет цепи рис. 3.11,а показан на рис. 3.11,б, где точка пересечения эллипса с ВАХ двухполюсника $I(U_1)$ определяет ток в цепи I и напряжение U_1 . Напряжение U_2 можно найти по закону Ома: $U_2 = X_C I$. Метод эллипса является более общим случаем метода пересечения, когда вследствие фазовых сдвигов линейная вольт-амперная характеристика $I(U_2)$ преобразуется в эллипс. Если же в схеме рис. 3.11,а вместо емкости C было включено сопротивление R , при котором фазовые сдвиги между напряжениями U_1 и U_2 отсутствуют, уравнение эллипса превратилось бы в уравнение прямой в отрезках на осях. Действительно, при этом $U = U_1 + RI$, $I_k = U/R$ и

$$U_1/U + I/I_k = 1. \quad (3.15)$$

Метод эллипса применим и для цепи, в которой последовательно с нелинейным двухполюсником включено комплексное сопротивление. Эллипс для такой цепи строят без учета той составляющей комплексного сопротивления, которая имеет один характер с двухполюсником, а затем из координат эллипса вычитают координаты линейной ВАХ неучтенной части комплексного сопротивления.

Так, для цепи рис. 3.12,а строят эллипс (кривая 1, рис. 3.12,б), не учитывая сопротивление R (т.е. рассматривают схему рис. 3.11,а) и $I_k = U/X_C$. Теперь из абсцисс эллипса, которые получают, задаваясь некоторыми значениями токов в цепи, необходимо вычесть соответствующие абсциссы линейной вольт-амперной характеристики $I(U_R)$, построенной под углом $\alpha = \text{arctg} R$. Полученная эквивалентная кривая (кривая 2, рис. 3.12,б) лежит ниже эллипса (что соответствует физическим процессам, происходящим в цепи, т.к. $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} > X_C$), следовательно, действительное значение тока должно уменьшиться.

Точка пересечения эквивалентной кривой и вольт-амперной характеристики $I(U_1)$ есть рабочая точка, по которой определяют ток I и напря-

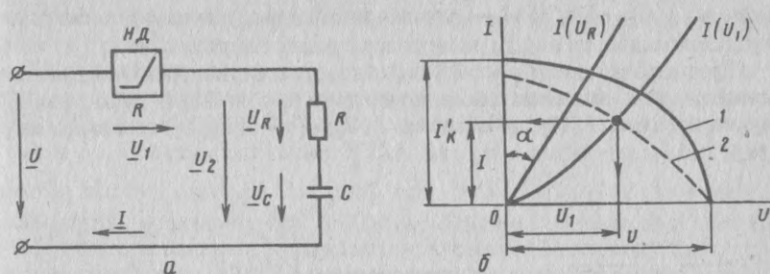


Рис. 3.12

жение U_1 . Напряжение U_2 и, если требуется, U_R и U_C можно найти по закону Ома: $U_2 = ZI$, $U_R = RI$ и $U_C = X_C I$.

Аналогично строят эллипс для цепи, показанной на рис. 3.13,а, при этом сначала емкость C не учитывают, и эллипс имеет полуоси, равные U и $I_k = U/R$ (кривая 1, рис. 3.13,б). Далее абсциссы эллипса складываются с соответствующими абсциссами линейной вольт-амперной характеристики $I(U_C)$, построенной под углом $\alpha = \text{arctg} X_C$, и поэтому эквивалентная кривая (кривая 2, рис. 3.13,б) лежит выше эллипса. Это объясняется известным соотношением $X = X_L - X_C$, когда реактивное сопротивление уменьшается, если в цепи последовательно с индуктивностью включают емкость.

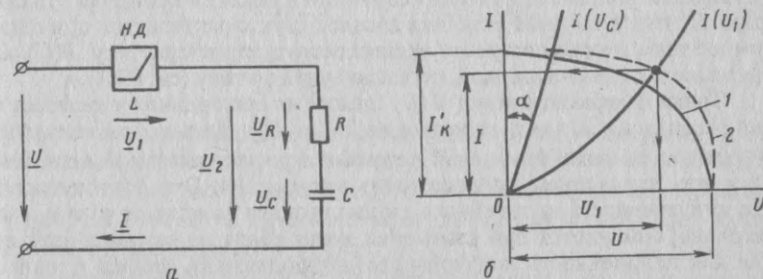


Рис. 3.13

Пересечение эквивалентной кривой с ВАХ двухполюсника $I(U_1)$ определяет рабочий режим цепи, т.е. ток I и напряжение U_1 . Напряжение U_2 , U_R и U_C находят по закону Ома.

Рабочие точки на рис. 3.12,б и 3.13,б можно также получить, повернув эллипсы на угол α относительно начала координат: по часовой стрелке, если сопротивление увеличивается (см. рис. 3.12), и против часовой стрелки — если уменьшается (см. рис. 3.13).

Графический расчет цепи, показанный на рис. 3.13,б, предполагает, что характеристики $I(U_C)$ и $I(U_1)$ не пересекаются. Если же это проис-

ходит и $I(U_C)$ и $I(U_L)$ — характеристики индуктивного и емкостного двухполюсников, то в цепи возможен резонанс напряжений.

Рассмотрим схему рис. 3.14,а, в которой нелинейный индуктивный двухполюсник включен последовательно с линейной емкостью. ВАХ двухполюсника $I(U_L)$ и емкости $I(U_C)$ ($\alpha = \text{arctg} X_C$) показаны на рис. 3.14,б.

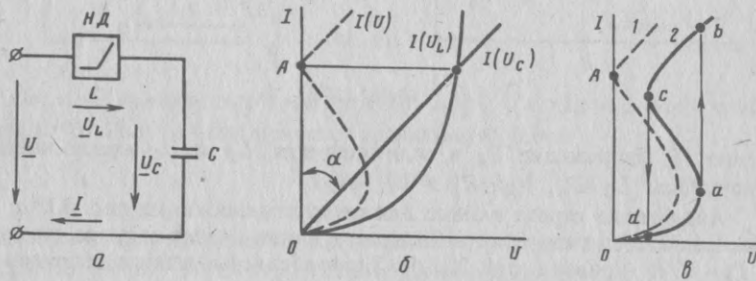


Рис. 3.14

Для такой цепи

$$U = |U_L - U_C|, \quad (3.16)$$

т.к. падения напряжений на индуктивности и емкости находятся в противофазе. Поэтому, вычитая значения абсцисс двух характеристик при одном и том же токе, можно построить эквивалентную характеристику $I(U)$, которая является вольт-амперной, неоднозначной по току (см. § 1.1).

Точка А характеристики $I(U)$ лежит на оси ординат и является точкой резонанса, т.к. здесь напряжения U_L и U_C взаимно компенсируются. В отличие от линейных цепей резонанс в рассматриваемой цепи можно получить изменением приложенного напряжения. Это объясняется тем, что индуктивность нелинейного двухполюсника зависит от тока и, следовательно, изменяется при изменении напряжения на зажимах всей цепи. Так как нелинейность индуктивного двухполюсника связана с наличием ферромагнитного сердечника, рассматриваемое явление называют феррорезонансом напряжений.

Графическое построение, показанное на рис. 3.14,б, проводят в предположении, что цепь обладает квазилинейными свойствами и в ней нет активного сопротивления. Однако в действительности потери в цепи существуют, как существуют и высшие гармоники. Поэтому фактическая характеристика будет иметь вид, представленный на рис. 3.14,в (кривая 2). На этой характеристике показано, что при изменении напряжения ток изменяется скачкообразно (из точки а в точку б и из точки с в точку д), т.е. в цепи имеет место релейный эффект. Следует заметить, что изменения тока сопровождаются изменениями угла сдвига в цепи.

Аналогичные явления возникают и в цепи с последовательно соединенными нелинейным емкостным двухполюсником и линейной индуктив-

ностью. Резонанс напряжений в такой цепи называют диэлектрическим резонансом.

Параллельное соединение. Резонанс токов. Рассмотрим схему, состоящую из двух параллельно соединенных нелинейных двухполюсников $НД_1(R)$ и $НД_2(C)$ (рис. 3.15,а), вольт-амперные характеристики которых $I_1(U)$ и $I_2(U)$ приведены на рис. 3.15,б. Для цепи синусоидального тока по первому закону Кирхгофа $I = I_1 + I_2$ или $I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2}$. Для получения эквивалентной характеристики $I(U)$ необходимо, задаваясь некоторыми значениями приложенного напряжения, сложить геометрически полученные значения токов I_1 и I_2 для одного и того же напряжения. Такое построение показано на рис. 3.15,б для одного значения напряжения U' . Вектор напряжения примем совпадающим с осью ординат, тогда ток I_1 (отрезок Ob) будет совпадать с напряжением U , а ток I_2 (отрезок Oa') будет опережать U на 90° . Полученный как геометрическая сумма отрезок oc' (ток I) необходимо повернуть до совпадения с осью ординат и получить точку пересечения этого тока с напряжением U' .

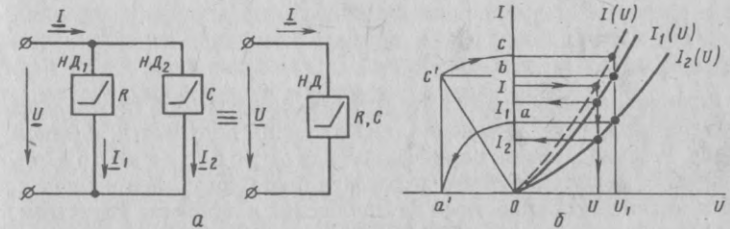


Рис. 3.15

После того как эквивалентная характеристика $I(U)$ построена, по заданному току I можно определить входное напряжение U , а затем токи I_1 и I_2 . Если же задано напряжение U , строить эквивалентную характеристику не нужно, т.к. токи I_1 и I_2 можно определить сразу по исходным вольт-амперным характеристикам $I_1(U)$ и $I_2(U)$.

Аналогичные построения могут быть проведены, если в качестве исходных характеристик заданы зависимости $G_{ст}(U)$ и $B_{ст}(U)$.

В цепи, состоящей из параллельно соединенных нелинейного индуктивного двухполюсника и линейной емкости (рис. 3.16,а), вольт-амперные характеристики которых $I_L(U)$ и $I_C(U)$ ($\alpha = \text{arctg} X_C$) пересекаются (рис. 3.16,б), возникает резонанс токов.

Так как

$$I = |I_L - I_C|, \quad (3.17)$$

то эквивалентную характеристику $I(U)$ получаем вычитанием ординат исходных характеристик. Точка А, лежащая на оси абсцисс, является точкой резонанса, т.к. в этой точке токи I_L и I_C взаимно компенсируются. Отсюда

следует, что в нелинейной цепи при параллельном соединении можно добиться резонанса изменением величины приложенного напряжения.

Из-за наличия в цепи потерь и высших гармоник, которыми мы пренебрегаем, фактическая характеристика цепи приобретает вид, показанный на рис. 3.16,в (кривая 2). По своему характеру кривые 1 и 2 являются характеристиками, неоднозначными по напряжению (см. § 1.1), на которых можно получить скачки напряжения из точки *a* в точку *b* и из точки *c* в точку *d* (кривая 2, рис. 3.16,в). Для этого необходимо иметь источник питания, в котором регулируется ток, а не напряжение, т.е. питать цепь от источника тока.

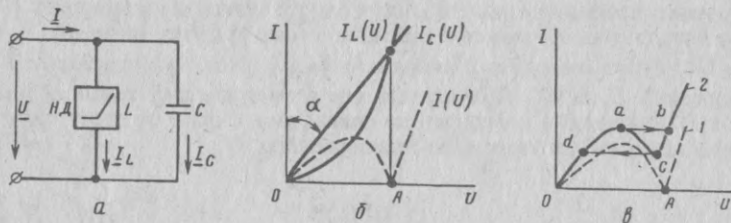


Рис. 3.16

Если же на входе цепи стоит источник напряжения, то эквивалентная характеристика (при изменении напряжения) получается плавной, без скачков. Резонанс в такой цепи называют феррорезонансом токов в отличие от диэлектрического резонанса токов, когда параллельно соединяются нелинейный емкостный двухполюсник и линейная индуктивность.

Смешанное соединение. При расчете цепей со смешанным соединением двухполюсников используют подход, применимый для цепей с последовательным и параллельным соединением.

Пусть задана цепь, изображенная на рис. 3.17,а, двухполюсники которой НД₁(*R*) и НД₂(*L*) и линейная индуктивность *L* имеют соответственно следующие исходные вольт-амперные характеристики: *I*₁(*U*₁), *I*₂(*U*₂) и *I*₃(*U*₂) (рис. 3.17,б).

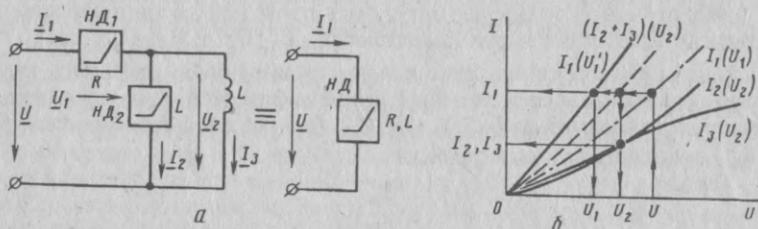


Рис. 3.17

Поскольку в параллельных ветвях находятся двухполюсник и линейный элемент одного характера, то промежуточная эквивалентная характе-

ристика (*I*₂ + *I*₃)(*U*₂) строится как для цепей постоянного тока, т.к. фазовые сдвиги между токами *I*₂ и *I*₃ в этом случае отсутствуют.

Суммарную же эквивалентную характеристику *I*₁(*U*) получают геометрическим сложением абсцисс характеристик *I*₁(*U*₁) и (*I*₂ + *I*₃)(*U*₂), т.к. теперь двухполюсники имеют разный характер (резистивный и индуктивный).

Подав на вход напряжение *U*, по суммарной эквивалентной характеристике *I*₁(*U*) определяют ток *I*₁; затем по характеристикам *I*₁(*U*₁) и (*I*₂ + *I*₃)(*U*₂) — напряжения *U*₁ и *U*₂ и после этого по характеристикам *I*₂(*U*₂) и *I*₃(*U*₂) — токи *I*₂ и *I*₃, которые в данном случае получились равными.

Как и для цепей постоянного тока, при смешанном соединении применение зависимостей *Z*_{ст}(*I*), *Z*_{ст}(*U*) и т.п. нецелесообразно, поскольку графические построения при этом очень усложняются.

§ 3.3. Нелинейная аппроксимация исходных характеристик квазилинейных цепей

Основные принципы аналитических методов расчета, изложенные при рассмотрении цепей постоянного тока (см. § 1.5), справедливы и для квазилинейных цепей переменного тока, однако уравнения при этом видоизменяются в связи с необходимостью учета фазовых сдвигов.

Рассмотрим цепь (рис. 3.18,а), состоящую из последовательно включенных нелинейного двухполюсника НД(*L*) и линейного сопротивления *R*. Для двухполюсника задана ВАХ (кривая 2, рис. 3.18,б), которая достаточно точно может быть аппроксимирована на некотором интервале параболой второго порядка *I* = *aU*² (кривая 1, рис. 3.18,б).

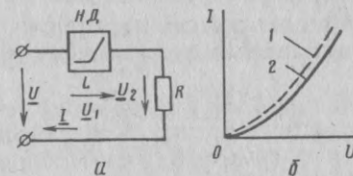


Рис. 3.18

Для модулей напряжений такой цепи запишем

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 = \frac{1}{a} I + R^2 I^2 \quad (3.18)$$

и, решив квадратное уравнение, определим ток как функцию напряжения и параметров цепи.

Если же в цепь (рис. 3.18,а) вместо сопротивления *R* включено, например, комплексное сопротивление *Z* = *R* + *jX*_{*L*}, то для составления уравнения используем известное тригонометрическое соотношение

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)};$$

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1 U_2 \cos(90^\circ - \psi_2) =$$

$$= I \left(Z^2 I + \frac{2Z}{\sqrt{a}} \sqrt{I} \sin \psi_2 + \frac{1}{a} \right), \quad (3.19)$$

где

$$\psi_2 = \arctg \frac{X_L}{R}; \quad Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}.$$

Если в качестве исходной характеристики (для цепи рис. 3.18,а) задана зависимость $X_{L_{\text{ст}}}(I)$, она также может быть аппроксимирована в требуемом интервале некоторой функцией. В этом случае ток найдем из уравнения

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 = [X_{L_{\text{ст}}}(I) I]^2 + (RI)^2. \quad (3.20)$$

§ 3.4. Расчет квазилинейных цепей методом компенсации

Метод компенсации применяют для расчета цепей переменного тока, если они обладают квазилинейными свойствами. Рассмотрим включенный последовательно с линейной индуктивностью L (рис. 3.19,а) нелинейный двухполюсник НД (R), имеющий вольт-амперную характеристику, приведенную на рис. 3.19,б, и применим метод компенсации (см. § 1.2) для рабочей точки, определяемой током I и напряжением U_1 . С помощью эквивалентной схемы, параметры которой определяются из графических построений рис. 3.19,б, составим линейное уравнение (рис. 3.19,в)

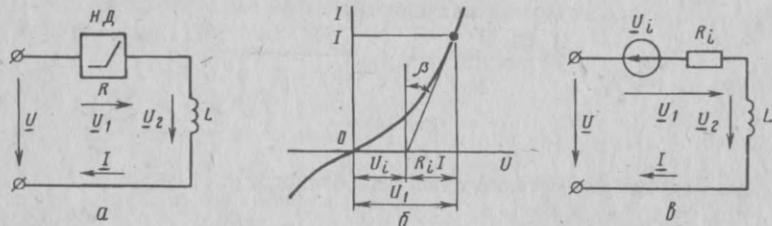


Рис. 3.19

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 = (U_i + R_i I)^2 + (X_L I)^2, \quad (3.21)$$

из которого можно определить ток в цепи:

$$I = \frac{-R_i U_i + \sqrt{(R_i^2 + X_L^2) U^2 - X_L U_i^2}}{R_i^2 + X_L^2}. \quad (3.22)$$

Если нелинейный двухполюсник НД имеет индуктивный или емкостный характер и включен последовательно с линейным активным сопротивлением R , ток в цепи

$$I = \frac{-X_i U_i + \sqrt{(R^2 + X_i^2) U^2 - R^2 U_i^2}}{R^2 + X_i^2}. \quad (3.23)$$

Квадратные уравнения (3.22), (3.23) являются как бы аналитическими вариантами метода эллипса.

Отметим, что фаза напряжения U_i всегда совпадает с фазой составляющей $R_i I$ (рис. 3.19,в) или $\pm jX_i I$, т.е. определяется соотношением $\frac{I}{I}$ или $\frac{I < \pm 90^\circ}{I}$. Из рис. 3.19,б видно, что модули напряжений U_i и $R_i I$ складываются алгебраически, а это возможно только при одинаковых фазах. Если линейное сопротивление X_L (см. рис. 3.19,а) или R изменяются, изменяется ток I как по модулю, так и по фазе, что приводит к изменению фазы напряжения U_i , которая, следовательно, может быть переменной и зависящей от тока I .

Как и в случае постоянного тока, этим методом можно пользоваться, если рабочий режим цепи в дальнейшем определяется значениями токов, не выходящими за пределы приблизительно прямолинейного участка ВАХ двухполюсника.

§ 3.5. Графический и графоаналитический расчет цепей по кривым мгновенных значений воздействий

Графический метод используется для нахождения формы выходного сигнала (тока или напряжения на участке цепи) и применяется для цепи с двухполюсниками одного характера. Пусть для нелинейного двухполюсника НД (R) (рис. 3.20) задана вольт-амперная характеристика для мгновенных значений. Рассмотрим несколько видов ВАХ.

На рис. 3.21,а показана симметричная характеристика с насыщением по току. Если приложенное напряжение синусоидально (рис. 3.21,в), то график тока (рис. 3.21,б) имеет несинусоидальную форму и строят его следующим образом:

- 1) ось абсцисс графиков напряжения u и тока i разбивают на ряд отрезков (в данном случае $\pi/4$, $\pi/2$ и т.д.);
- 2) на графике напряжения находят значения мгновенных напряжений, соответствующих выбранным значениям углов, и переносят на ВАХ;
- 3) мгновенные значения тока, полученные на вольт-амперной характеристике, переносят на график тока до пересечения с одноименными координатами углов.

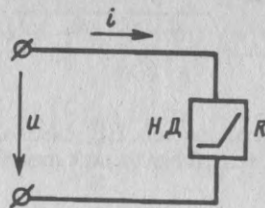


Рис. 3.20

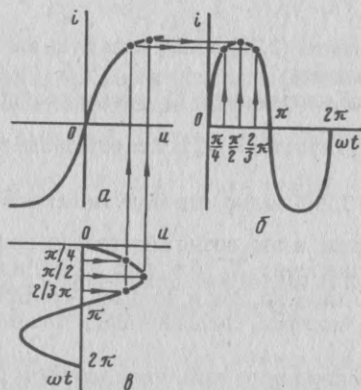


Рис. 3.21

Отметим следующие особенности несинусоидального тока для симметричной ВАХ с насыщением по току: 1) ток содержит только нечетные гармоники; 2) кривая тока затуплена; 3) форма кривой тока зависит от амплитуды напряжения: чем больше амплитуда, тем ближе к прямоугольной форма кривой тока; 4) в зависимости от амплитуды напряжения изменяются амплитуды гармоник и их фазовые сдвиги.

На рис. 3.22 показано графическое построение кривой тока для двухполосника, имеющего симметричную ВАХ с насыщением по напряжению. В этом случае несинусоидальный ток имеет следующие особенности:

- 1) пп. 1 и 4 предыдущего случая справедливы и для данной характеристики;
- 2) кривая тока заострена;
- 3) форма кривой тока зависит от амплитуды напряжения: чем больше амплитуда, тем более острой становится кривая тока.

Если задана явно несимметричная вольт-амперная характеристика (рис. 3.23,а), то, сохраняя особенности формы кривой тока в первом периоде для характеристики с насыщением по току, несинусоидальный ток будет иметь все гармоники и постоянную составляющую.

На рис. 3.24,а приведена явно несимметричная ВАХ с зоной нечувствительности по напряжению. Несинусоидальный ток (рис. 3.24,б) содер-

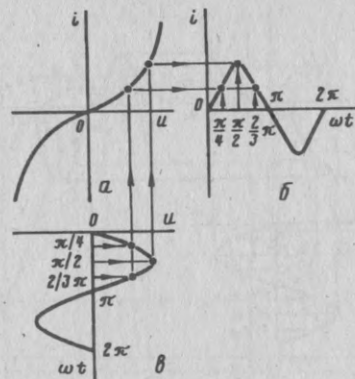


Рис. 3.22

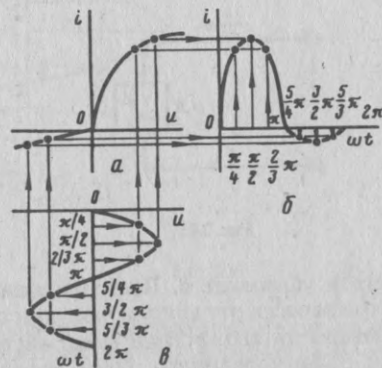


Рис. 3.23

жит постоянную составляющую, все гармоники и разрывы (за счет зоны нечувствительности).

Аналогично можно построить графически кривые тока для любого вида вольт-амперной характеристики как при синусоидальном, так и несинусоидальном приложенном напряжении. Подобные построения объединены общим названием «метод трех плоскостей».

Если в цепь включено несколько нелинейных резистивных двухполосников или нелинейных двухполосников и линейных сопротивлений, предварительно строят эквивалентную характеристику.

Теперь рассмотрим нелинейный емкостный двухполосник (рис. 3.25), у которого зависимость $Q(u)$ имеет гистерезисный характер (рис. 3.26,а). График $Q(t)$ отличается от ранее рассмотренных тем, что у гистерезисной кривой имеются восходящая и нисходящая ветви, на которые надо переносить мгновенные значения напряжений соответствующих участков си-

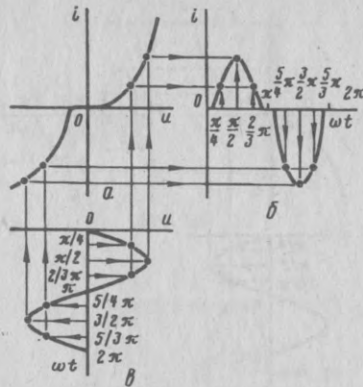


Рис. 3.24

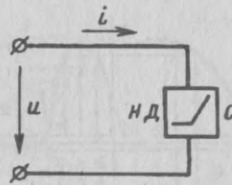


Рис. 3.25

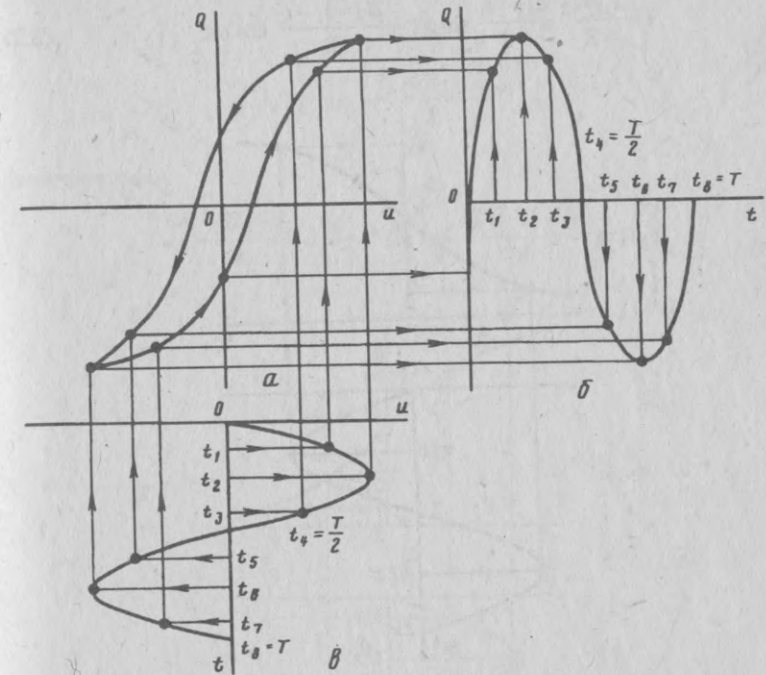


Рис. 3.26

нусоиды: возрастающего и убывающего. Построив зависимость $Q(t)$ и продифференцировав графически эту кривую, получим зависимость $i(t)$.

Если ВАХ резистивного двухполюсника имеет гистерезисный характер, то, заменив на рис. 3.26,а координаты $Q(u)$ координатами $i(u)$, на рис. 3.26,б получим зависимость $i(t)$. В этом случае кривая $i(t)$ сдвинута относительно начала координат, поэтому даже основная гармоника тока будет иметь фазовый сдвиг по отношению к напряжению.

Используя график входного напряжения $u(\omega t)$ и вольт-амперную характеристику $i(u)$, можно не только построить кривую тока $i(\omega t)$, как было показано выше, но и получить его аналитическое выражение. Наиболее удобен при этом приближенный графоаналитический метод гармонического анализа, основанный на использовании формул трех или пяти ординат.

Рассмотрим сначала метод трех ординат. Если на вход нелинейного двухполюсника (см. рис. 3.20), имеющего мнимо несимметричную ВАХ (см. рис. 1.6,а), подано синусоидальное напряжение, в цепи возникнет несинусоидальный ток, который можно разложить в ряд Фурье, ограничившись тремя его членами:

$$i = I_0 + I'_{1m} \sin \omega t + I''_{1m} \cos \omega t. \quad (3.24)$$

Теперь необходимо выполнить требование, чтобы в трех выбранных точках ординаты приближенного выражения (3.24) совпали с ординатами действительной ВАХ. В качестве таких точек берем те значения i , которые соответствуют трем моментам времени: $\omega t = 0; \pi/2$ и $3/2\pi$ (рис. 3.27). Подстановкой выбранных значений ωt в (3.24) получим уравнения:

$$\begin{aligned} \omega t = 0, & \quad i_2 = I_0 + I'_{1m}; \\ \omega t = \pi/2, & \quad i_3 = I_0 + I_{1m}; \\ \omega t = 3/2\pi, & \quad i_1 = I_0 - I'_{1m}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Решим эту систему уравнений относительно неизвестных I_0, I_1 и I'_1 :

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{i_1 + i_3}{2}; \\ I'_{1m} &= \frac{i_3 - i_1}{2}; \\ I''_{1m} &= \frac{2i_2 - i_1 - i_3}{2}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

С учетом (3.26) ток в цепи

$$i = \frac{i_1 + i_3}{2} + \frac{i_3 - i_1}{2} \sin \omega t + \frac{2i_2 - i_1 - i_3}{2} \cos \omega t. \quad (3.27)$$

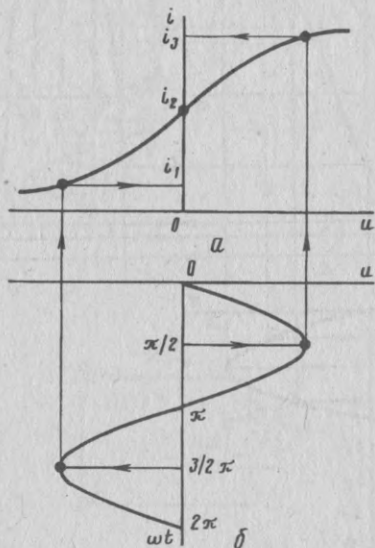


Рис. 3.27

Метод трех ординат применяют также при аппроксимации вольт-амперной характеристики $i(u)$ степенным полиномом второго порядка

$$i = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2. \quad (3.28)$$

Для простоты будем полагать, что синусоидальное напряжение, приложенное к цепи, имеет $U_m = 1$, т.е. $u = \sin \omega t$.

Тогда

$$i = a_0 + a_1 \sin \omega t + \frac{a_2}{2} (1 - \cos 2\omega t). \quad (3.29)$$

Выберем те же значения ωt и подставим их в (3.29):

$$\begin{aligned} \omega t = 0, & \quad i_2 = a_0; \\ \omega t = \pi/2, & \quad i_3 = a_0 + a_1 + a_2; \\ \omega t = 3/2 \pi, & \quad i_1 = a_0 - a_1 + a_2. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Из системы уравнений (3.30) получим

$$\begin{aligned} a_0 &= i_2; \\ a_1 &= \frac{i_3 - i_1}{2}; \\ a_2 &= \frac{i_1 - 2i_2 + i_3}{2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

и окончательно

$$i = \frac{i_1 + 2i_2 + i_3}{4} + \frac{i_3 - i_1}{2} \sin \omega t + \frac{2i_2 - i_1 - i_3}{4} \cos 2\omega t. \quad (3.32)$$

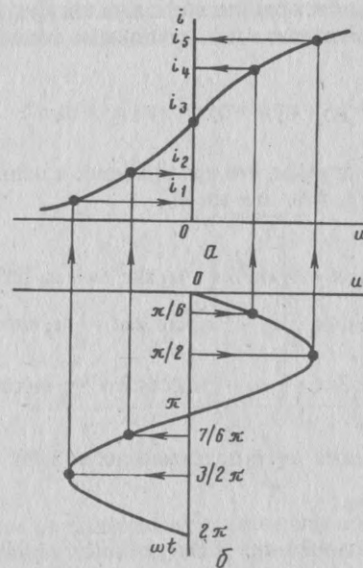


Рис. 3.28

Чтобы воспользоваться методом пяти ординат, необходимо записать ток в виде ряда Фурье, состоящего из пяти членов

$$i = I_0 + I'_{1m} \sin \omega t + I''_{1m} \cos \omega t + I'_{2m} \sin 2\omega t + I''_{2m} \cos 2\omega t, \quad (3.33)$$

и задаться пятью различными моментами времени t : например, $\omega t = 0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{7}{6}\pi$ и $\frac{3}{2}\pi$ (рис. 3.28). Подстановкой выбранных значений ωt в (3.33) получаем уравнения:

С учетом (3.26) ток в цепи

$$i = \frac{i_1 + i_3}{2} + \frac{i_3 - i_1}{2} \sin \omega t + \frac{2i_2 - i_1 - i_3}{2} \cos \omega t. \quad (3.27)$$

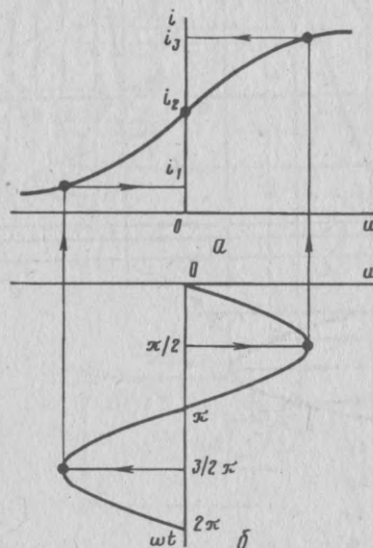


Рис. 3.27

Метод трех ординат применяют также при аппроксимации вольт-амперной характеристики $i(u)$ степенным полиномом второго порядка

$$i = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2. \quad (3.28)$$

Для простоты будем полагать, что синусоидальное напряжение, приложенное к цепи, имеет $U_m = 1$, т.е. $u = \sin \omega t$.

Тогда

$$i = a_0 + a_1 \sin \omega t + \frac{a_2}{2} (1 - \cos 2\omega t). \quad (3.29)$$

Выберем те же значения ωt и подставим их в (3.29):

$$\begin{aligned} \omega t = 0, & \quad i_2 = a_0; \\ \omega t = \pi/2, & \quad i_3 = a_0 + a_1 + a_2; \\ \omega t = 3/2 \pi, & \quad i_1 = a_0 - a_1 + a_2. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Из системы уравнений (3.30) получим

$$\begin{aligned} a_0 &= i_2; \\ a_1 &= \frac{i_3 - i_1}{2}; \\ a_2 &= \frac{i_1 - 2i_2 + i_3}{2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

и окончательно

$$i = \frac{i_1 + 2i_2 + i_3}{4} + \frac{i_3 - i_1}{2} \sin \omega t + \frac{2i_2 - i_1 - i_3}{4} \cos 2\omega t. \quad (3.32)$$

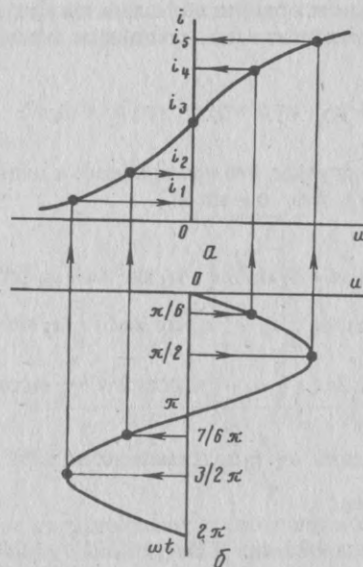


Рис. 3.28

Чтобы воспользоваться методом пяти ординат, необходимо записать ток в виде ряда Фурье, состоящего из пяти членов

$$i = I_0 + I'_{1m} \sin \omega t + I''_{1m} \cos \omega t + I'_{2m} \sin 2\omega t + I''_{2m} \cos 2\omega t, \quad (3.33)$$

и задаться пятью различными моментами времени t : например, $\omega t = 0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{7}{6}\pi$ и $\frac{3}{2}\pi$ (рис. 3.28). Подстановкой выбранных значений ωt в (3.33) получаем уравнения:

$$\begin{aligned}
 \omega t = 0, \quad i_3 &= I_0 + I'_{1m} + I'_{2m}; \\
 \omega t = \frac{\pi}{6}, \quad i_4 &= I_0 + 0,5I'_{1m} + 0,866I'_{1m} + 0,866I'_{2m} + 0,5I'_{2m}; \\
 \omega t = \frac{\pi}{2}, \quad i_5 &= I_0 + I'_{1m} - I'_{2m}; \\
 \omega t = \frac{7}{6}\pi, \quad i_2 &= I_0 - 0,5I'_{1m} - 0,866I'_{1m} + 0,866I'_{2m} + 0,5I'_{2m}; \\
 \omega t = \frac{3}{2}\pi, \quad i_1 &= I_0 - I'_{1m} - I'_{2m}.
 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Решая систему уравнений (3.34), найдем неизвестные I_0 , I'_{1m} , I'_{2m} и подставим их в (3.33).

Применение метода пяти ординат возможно также при аппроксимации вольт-амперной характеристики $i(u)$ степенным полиномом четвертого порядка:

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + a_4 u^4. \quad (3.35)$$

Для простоты снова примем, что приложенное к цепи синусоидальное напряжение имеет $U_m = 1$, т.е. $u = \sin \omega t$.

Тогда

$$\begin{aligned}
 i &= a_0 + a_1 \sin \omega t + a_2 \sin^2 \omega t + a_3 \sin^3 \omega t + a_4 \sin^4 \omega t = \\
 &= a_0 + a_1 \sin \omega t + \frac{1}{2} a_2 - \frac{1}{2} a_2 \cos 2\omega t + \frac{3}{4} a_3 \sin \omega t - \\
 &\quad - \frac{1}{4} a_3 \sin 3\omega t + \frac{3}{8} a_4 - \frac{1}{2} a_4 \cos 2\omega t + \frac{1}{8} a_4 \cos 4\omega t.
 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Выберем те же значения ωt и подставим их в (3.36):

$$\begin{aligned}
 \omega t = 0, \quad i_3 &= a_0; \\
 \omega t = \frac{\pi}{6}, \quad i_4 &= a_0 + 0,5 a_1 + 0,25 a_2 + 0,125 a_3 + 0,0625 a_4; \\
 \omega t = \frac{\pi}{2}, \quad i_5 &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4; \\
 \omega t = \frac{7}{6}\pi, \quad i_2 &= a_0 - 0,5 a_1 + 0,25 a_2 - 0,125 a_3 + 0,0625 a_4; \\
 \omega t = \frac{3}{2}\pi, \quad i_1 &= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4.
 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Решение системы уравнений (3.37) позволит определить коэффициенты a и подставить их значения в (3.36).

Следует иметь в виду, что точность определения амплитуд гармонических составляющих методами трех и пяти ординат относительно невелика, и ошибка растет вместе с ростом амплитуды приложенного к цепи на-

пряжения. Очевидно, что метод пяти ординат более точен. Определить целесообразность применения того или другого метода можно, проведя оценку вольт-амперной характеристики. На рис. 3.29 показана кривая, на которой отмечены значения токов метода трех ординат (i_1, i_3, i_5) и метода пяти ординат (i_1, i_2, i_3, i_4, i_5). Если отрезки на оси абсцисс одинаковы ($-U_m, -0,5U_m, 0, 0,5U_m, U_m$) и при этом выполняется условие

$$AB \parallel CD, \quad (3.38)$$

для такой кривой рациональнее использовать более простой метод трех ординат. С другой стороны, например для симметричной ВАХ (см. рис. 3.21, 3.22), метод трех ординат просто непригоден, т.к. в этом случае получится, что $I_0 = 0, I'_{1m} = 0$ (уравнение (3.26)) или $a_0 = 0, a_2 = 0$ (уравнение (3.31)). Следовательно, согласно аналитическим выражениям ток в цепи синусоидален, тогда как в действительности этого нет.

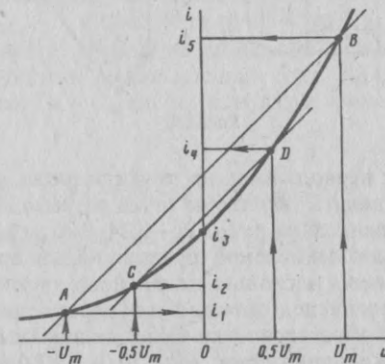


Рис. 3.29

Аналитическое представление тока в цепи можно получить более общим (и более точным) способом, если применить численное интегрирование, при котором вычисление определенного интеграла заменяется нахождением суммы конечного числа слагаемых. С этой целью период функции $i(\omega t)$, равный 2π , разбивается на m равных интервалов $\Delta\omega t$, так что $m \Delta\omega t = 2\pi$.

Расстояние от начала координат до середины k -го интервала составляет угол $\omega t = \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{m}$. Пусть $i_k(\omega t)$ есть значение периодической несинусоидальной функции в середине k -го интервала (рис. 3.30). Тогда

$$I_0 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m i_k(\omega t); \quad (3.39)$$

$$I'_{nm} = \frac{2}{m} \sum_{k=1}^m i_k(\omega t) \sin n \left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{2\pi}{m}; \quad (3.40)$$

$$I''_{nm} = \frac{2}{m} \sum_{k=1}^m i_k(\omega t) \cos n \left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{2\pi}{m}. \quad (3.41)$$

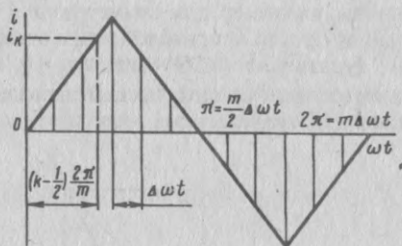


Рис. 3.30

Если в пределах периода имеются точки разрыва, целесообразно разбивку на интервалы делать так, чтобы точки разрыва не были в середине интервалов. Рассмотренный на рис. 3.21—3.24, 3.26 метод построения графика мгновенного значения искомой функции нельзя применить в тех случаях, когда в цепи имеется несколько нелинейных двухполюсников разного характера, включенных последовательно или параллельно. Это объясняется тем, что исходные характеристики таких нелинейных двухполюсников задаются различными координатами: $i(u)$, $\Psi(i_L)$, $Q(u_C)$, и построить эквивалентную характеристику невозможно. Для этого случая применим графоаналитический метод, в котором используются соотношения (3.6) и (3.10).

Рассмотрим нелинейную цепь (рис. 3.31,а), которая состоит из включенных последовательно резистивного и индуктивного двухполюсников. Ток, проходящий в цепи, изменяется по синусоидальному закону $i = I_m \sin \omega t$.

Тогда, по второму закону Кирхгофа,

$$u = u_R + u_L = R_{ст}(i) i + L_{диф}(i) \frac{di}{dt} = R_{ст}(i) I_m \sin \omega t + \omega L_{диф}(i) I_m \cos \omega t. \quad (3.42)$$

Оба нелинейных множителя ($R_{ст}$ и $L_{диф}$) уравнения (3.42) зависят от тока, и эти зависимости могут быть получены из исходных характеристик $i(u)$ и $\Psi(i_L)$. Задаваясь значениями времени $t(t_1, t_2, \dots)$, определяют токи $i(i_1, i_2, \dots)$, а затем по значениям токов — активное статиче-

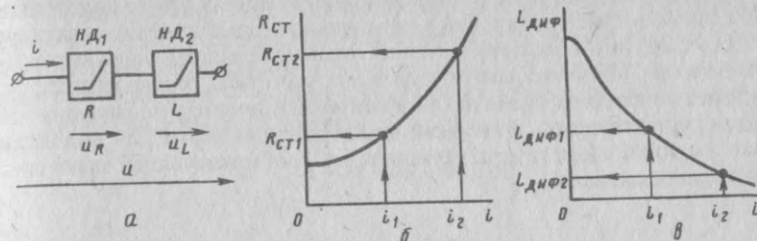


Рис. 3.31

ское сопротивление $R_{ст}(R_{ст1}, R_{ст2}, \dots)$ (рис. 3.31,б) и дифференциальную индуктивность $L_{диф}(L_{диф1}, L_{диф2}, \dots)$ (рис. 3.31,в). Подставляя полученные данные в (3.42), можно определить мгновенные значения напряжения $u(u_1, u_2, \dots)$ и построить график $u(t)$.

Если нелинейная цепь представляет собой параллельно включенные резистивный и емкостный двухполюсники (рис. 3.32,а), то при синусоидальном напряжении $u = U_m \sin \omega t$, используя первый закон Кирхгофа, получим

$$i = i_R + i_C = G_{ст}(u) u + C_{диф}(u) \frac{du}{dt} = G_{ст}(u) U_m \sin \omega t + \omega C_{диф}(u) U_m \cos \omega t. \quad (3.43)$$

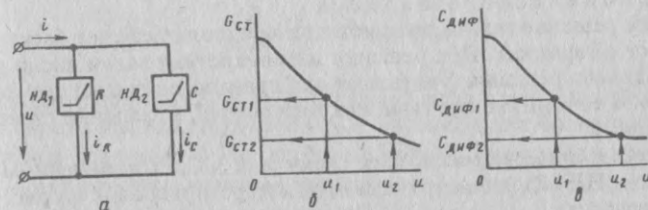


Рис. 3.32

Оба нелинейных множителя ($G_{ст}$ и $C_{диф}$) уравнения (3.43) зависят от напряжения. Графики $G_{ст}$ и $C_{диф}$ могут быть получены из исходных характеристик $i(u)$ и $Q(u_C)$. Задаваясь значениями времени $t(t_1, t_2, \dots)$, определяют напряжения $u(u_1, u_2, \dots)$, а затем по значениям напряжений — активную статическую проводимость $G_{ст}(G_{ст1}, G_{ст2}, \dots)$ (рис. 3.32, б) и дифференциальную емкость $C_{диф}(C_{диф1}, C_{диф2}, \dots)$ (рис. 3.32, в). Подстановкой полученных данных в (3.43) находят мгновенные значения тока $i(i_1, i_2, \dots)$ и строят график $i(t)$.

Итак, нелинейная электрическая цепь позволяет преобразовать частотный состав (частотный спектр) сигнала с получением новых частотных составляющих, отсутствовавших во входном сигнале. Характер их опреде-

ляется видом нелинейности; спектр выходного сигнала может быть найден разложением полученной кривой в гармоничный ряд. Линейная электрическая цепь (линейный фильтр) способна лишь перераспределить интенсивность сигнала и фазовые сдвиги отдельных частотных составляющих, уже имевшихся во входном сигнале (до практически полного подавления частот этих составляющих). Линейный фильтр используется для выделения нужной гармоники или группы гармоник, т.е. соответствующей части спектра выходного сигнала.

§ 3.6. Метод гармонического баланса

Этот метод является более точным, чем методы, основанные на квазилинейном подходе, т.к. позволяет учесть и некоторые гармонические составляющие. Поскольку ток и падения напряжений в нелинейной цепи в общем случае несинусоидальны, можно представить ожидаемое решение в виде суммы гармоник, у которых неизвестны амплитуды и начальные фазы. Если подставить теперь эту сумму в нелинейное дифференциальное уравнение, записанное для данной искомой величины, то все члены, входящие в дифференциальное уравнение, будут представлены в виде суммы гармоник. Просуммируем справа и слева от знака равенства все коэффициенты при членах, содержащих $\sin n\omega t$, и приравняем эти суммы друг другу; ту же операцию сделаем и с коэффициентами при $\cos n\omega t$. Повторив эти операции для всех значений n , получим систему из $2n$ алгебраических уравнений, которые и используются для определения неизвестных амплитуд и начальных фаз каждой гармоники. Такой метод называют методом гармонического баланса.

Точное решение задачи этим методом предполагает учет бесконечно множества гармоник. При решении же конкретных задач число гармоник в ожидаемом решении (учитывают, как правило, одну-две) ограничивают, при этом точный баланс гармоник нарушается, и решение становится приближенным.

В качестве примера рассмотрим схему рис. 3.33,а с нелинейным двухполюсником НД (R), симметричная ВАХ которого показана на рис. 3.33,б (первый квадрант).

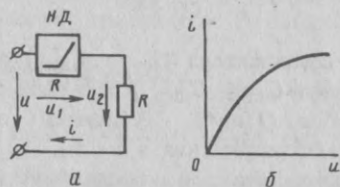


Рис. 3.33

Если на вход заданной цепи подано синусоидальное напряжение $u = U_m \sin \omega t$, ток будет несинусоидальным. Однако основная гармоника тока существенно преобладает над высшими гармониками, поэтому будем искать приближенное значение в виде $i = I_{1m} \sin \omega t$.

Предположим, что ВАХ нелинейного двухполюсника достаточно точно аппроксимируется на некотором интервале зависимостью $u_1 = ai^3$. Начальная фаза тока в данном случае равна нулю. Следовательно, неизвестный член уравнения — амплитудное значение тока первой гармоники I_{1m} .

По второму закону Кирхгофа,

$$u = u_1 + u_2 = ai^3 + Ri \quad (3.44)$$

или

$$\begin{aligned} U_m \sin \omega t &= aI_{1m}^3 \sin^3 \omega t + RI_{1m} \sin \omega t = \\ &= aI_{1m}^3 \left(\frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t \right) + RI_{1m} \sin \omega t = \\ &= \frac{3}{4} aI_{1m}^3 \sin \omega t - \frac{1}{4} aI_{1m}^3 \sin 3\omega t + RI_{1m} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Просуммируем коэффициенты при $\sin \omega t$ в левой и правой частях уравнения (3.45) и приравняем друг другу коэффициенты при этой гармонике:

$$U_m = \frac{3}{4} aI_{1m}^3 + RI_{1m} \quad (3.46)$$

или

$$\frac{3}{4} aI_{1m}^3 + RI_{1m} - U_m = 0. \quad (3.47)$$

Решим уравнение (3.47) по формулам Кардано или численными методами и определим амплитуду тока I_{1m} . Решение будет более точным, если представить его в виде $i = I_{1m} \sin \omega t + I_{3m} \sin 3\omega t$. Неизвестные члены уравнения — амплитудные значения тока первой I_{1m} и третьей I_{3m} гармоник.

Подставив ожидаемое решение в (3.44), получим

$$\begin{aligned} U_m \sin \omega t &= a (I_{1m} \sin \omega t + I_{3m} \sin 3\omega t)^3 + R (I_{1m} \sin \omega t + I_{3m} \sin 3\omega t) = \\ &= \frac{3}{4} aI_{1m}^3 \sin \omega t - \frac{1}{4} aI_{1m}^3 \sin 3\omega t + \frac{3}{2} aI_{1m}^2 I_{3m} \sin 3\omega t - \\ &- \frac{3}{4} aI_{1m}^2 I_{3m} \sin \omega t - \frac{3}{4} aI_{1m}^2 I_{3m} \sin 5\omega t + \frac{3}{2} aI_{1m} I_{3m}^2 \sin \omega t + \\ &+ \frac{3}{4} aI_{1m} I_{3m}^2 \sin 5\omega t - \frac{3}{2} aI_{1m} I_{3m}^2 \sin 3\omega t + \frac{3}{4} aI_{3m}^3 \sin 3\omega t - \\ &- \frac{1}{4} aI_{3m}^3 \sin 9\omega t + RI_{1m} \sin \omega t + RI_{3m} \sin 3\omega t. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Просуммируем коэффициенты при $\sin \omega t$ и при $\sin 3\omega t$ в левой и правой частях (3.48) и затем приравняем коэффициенты при одноименных гармониках друг другу:

$$U_m = RI_{1m} + \frac{3}{2} a I_{1m} I_{3m}^2 - \frac{3}{4} a I_{1m}^2 I_{3m} + \frac{3}{4} a I_{1m}^3; \quad (3.49)$$

$$0 = RI_{3m} + \frac{3}{2} a I_{1m}^2 I_{3m} + \frac{3}{4} a I_{3m}^3 - \frac{1}{4} a I_{1m}^3.$$

Система (3.49) дает возможность определить искомые неизвестные. Нетрудно заметить, что решения будут приближенными не только потому, что бесконечный тригонометрический ряд Фурье был ограничен, но и вследствие неучета высших гармоник в уравнениях (3.45) и (3.48). Если бы гармоники тока имели начальные фазы, число неизвестных членов уравнения стало бы вдвое большим.

Не для всякого вида аппроксимации и ограничения числа гармоник может быть получено решение, и тогда необходимо уменьшить число гармоник в решении или задаться другим аппроксимирующим выражением.

§ 3.7. Метод сопряжения интервалов (для расчета цепей с резистивными двухполюсниками)

Известно, что нелинейная вольт-амперная характеристика может быть представлена одним аналитическим выражением, аппроксимирующим ее в необходимой для данной конкретной задачи области. Если при этом требуется добиться определенной точности расчета, аппроксимация, как правило, оказывается достаточно сложной, и аналитическое нахождение искомых зависимостей затруднено.

Нелинейная ВАХ может быть представлена также несколькими аналитическими выражениями, справедливыми на отдельных участках интересующей нас области. Такой метод называют методом сопряжения интервалов (методом припасовывания), т.к. решения для отдельных участков (интервалов) должны сопрягаться (т.е. припасовываться).

Фактически переход от одного участка к другому равносильен коммутации, т.к. в точке сопряжения меняются параметры двухполюсника. Наиболее распространена замена нелинейных характеристик прямолинейными участками, поскольку при этом уравнения, относящиеся к отдельным участкам, будут линейными.

Рассмотрим цепь с нелинейным двухполюсником НД (R) (рис. 3.34,а), вольт-амперная характеристика $i(u_1)$ которого идеализированная (рис. 3.34,б): двухполюсник при одной полярности приложенного напряжения имеет сопротивление, равное нулю, а при другой — равно бесконечности.

В случае отсутствия в цепи емкости C эквивалентная вольт-амперная характеристика $i(u)$ (рис. 3.34,б) будет состоять из двух ветвей с характеристикой $i_R(u_2)$ и с характеристикой $i(u_1)$. Таким образом, при синусоидальном напряжении источника питания $u = U_m \sin \omega t$ ток в цепи i ($i = i_R$), а следовательно, и напряжение u_2 можно рассматривать на двух

интервалах: от 0 до π и от π до 2π . На первом интервале ток в цепи i будет синусоидальным, на втором — равным нулю (пунктирные полусинусоиды на рис. 3.34,в). При пульсирующем, но всегда положительном токе происходит выпрямление переменного тока. При этом конечное значение тока на первом интервале $i = I_m \sin \pi$ должно быть равным начальному току на втором ($i = 0$); конечное значение тока на втором интервале $i = 0$ — начальному току на третьем ($i = I_m \sin 2\pi$) и т.д.

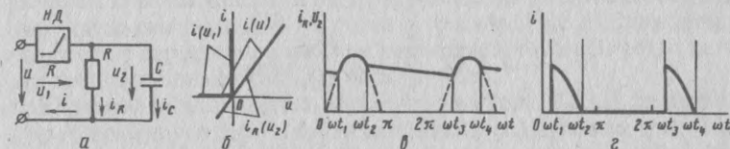


Рис. 3.34

При данной форме несинусоидального тока разложение его в ряд Фурье будет содержать постоянную составляющую:

$$I_{R\text{cp}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{U_m}{R} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{1}{\pi} \frac{U_m}{R} \approx 0,318 I_m. \quad (3.50)$$

Как видно из (3.50), постоянная составляющая невелика, поэтому если ее необходимо повысить, параллельно активному сопротивлению R включают емкость C (рис. 3.34,а).

В этом случае в тот момент, когда положительное напряжение на входе цепи u превысит напряжение на емкости u_2 , емкость начнет заряжаться, и от источника будет потребляться ток $i = i_R + i_C$. По достижении амплитудного значения напряжения u падает и становится меньше u_2 ; емкость начинает разряжаться на сопротивление R , сохраняя направление тока i , при этом $i_R = i_C$, а $i = 0$. Затем цикл повторяется.

Рассмотрим установившийся режим (сплошная кривая на рис. 3.34,в) на следующих интервалах времени: $\omega t_1 - \omega t_2$, $\omega t_2 - \omega t_3$, $\omega t_3 - \omega t_4$. Фактически этот режим, состоящий из двух чередующихся переходных процессов, является установившимся лишь в том смысле, что эти два процесса повторяются периодически. Такие установившиеся режимы называют квазистационарными.

Запишем дифференциальные уравнения для соответствующих интервалов времени:

$$\text{при } \omega t_1 \leq \omega t \leq \omega t_2$$

$$u_2 = U_m \sin \omega t;$$

$$i = i_R + i_C = \frac{u_2}{R} + C \frac{du_2}{dt} = \frac{U_m}{R} \sin \omega t + \omega C U_m \cos \omega t. \quad (3.51)$$

По мере удаления от максимума возрастает скорость уменьшения мгновенного значения приложенного напряжения du/dt , напряжения u и u_2 становятся равными в момент времени $\omega t = \omega t_2$, и $i = 0$. Для этого момента времени уравнение (3.51) будет иметь вид

$$0 = \frac{U_m}{R} \sin \omega t_2 + \omega C U_m \cos \omega t_2, \quad (3.52)$$

откуда

$$-\omega C U_m \cos \omega t_2 = \frac{U_m}{R} \sin \omega t_2$$

и

$$\omega t_2 = -\arctg(\omega RC). \quad (3.53)$$

Ток через нелинейный двухполосник (рис. 3.34,з) из (3.51) можно представить в виде

$$i = \frac{U_m}{R} \sqrt{1 + (\omega RC)^2} \sin(\omega t_2 - \omega t). \quad (3.54)$$

При $\omega t_2 \leq \omega t \leq \omega t_3$ емкость разряжается по экспоненциальному закону:

$$u_2 = A e^{-\frac{\omega t - \omega t_2}{\omega RC}}. \quad (3.55)$$

Постоянную A определяют из следующего условия: при $\omega t = \omega t_2$ $u_2 = U_m \sin \omega t_2$. Поэтому

$$u_2 = U_m \sin \omega t_2 e^{-\frac{\omega t - \omega t_2}{\omega RC}}. \quad (3.56)$$

При $\omega t = \omega t_3$ напряжение u_2 опять становится синусоидальным. Уравнение (3.56) для этого момента времени

$$U_m \sin \omega t_3 = U_m \sin \omega t_2 e^{-\frac{\omega t_3 - \omega t_2}{\omega RC}}$$

может быть преобразовано:

$$\sin \omega t_3 e^{\frac{\omega t_3}{\omega RC}} = \sin \omega t_2 e^{\frac{\omega t_2}{\omega RC}}. \quad (3.57)$$

Из (3.57) определяют момент времени ωt_3 . Очевидно, что $\omega t_3 = \omega t_1 + 2\pi$ и $\omega t_4 = \omega t_2 + 2\pi$.

Постоянная составляющая тока в активном сопротивлении

$$I_{R\phi} = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega t_1}^{\omega t_2} i d\alpha = \frac{1}{2\pi} \frac{U_m}{2} \sqrt{1 + (\omega RC)^2} [1 - \cos(\omega t_2 - \omega t_1)]. \quad (3.58)$$

§ 3.8. Магнитные цепи при переменном магнитном потоке

Выше были рассмотрены методы расчета цепей с нелинейными индуктивными двухполосниками. При этом в расчетах использовались или вольт-амперные характеристики (при квазилинейном подходе), или зависимости потокоцепления самоиндукции от тока.

Конструктивно нелинейный двухполосник (рис. 3.35,а) представляет собой дроссель (дресселли) с ферромагнитным сердечником (рис. 3.35,б). Особенность расчета цепей, рассматриваемых в данном параграфе, состоит в учете взаимосвязи между токами (напряжениями) в обмотках и потоками (индукциями) в сердечниках, т.е. здесь совместно анализируются электрическая и магнитная цепи.

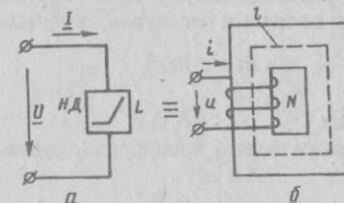


Рис. 3.35

С одной стороны, магнитный поток в сердечнике зависит от токов в обмотках, и поэтому при исследовании приходится в основном пользоваться методами, разработанными для магнитных цепей при постоянном магнитном потоке (см. § 1.7); с другой стороны, токи в обмотках зависят от характера изменения магнитного потока. Все это значительно усложняет исследование, поэтому при расчетах вводят ряд допущений (важнейшим из которых является квазилинейность).

В соответствии с квазилинейным подходом предполагают, что напряжение, ток и магнитный поток изменяются по синусоидальному закону. Нелинейность учитывается в зависимостях между амплитудным (действующим) значением магнитного потока и амплитудным (действующим) значением МДС (вебер-амперная характеристика).

Исходной характеристикой для получения зависимости $\Phi_m = f(I_m N)$ является динамическая кривая намагничивания $B_m = f(H_m)$. При одном и том же материале сердечника с изменением частоты динамические кривые изменяются. С увеличением частоты они располагаются ниже и становятся более пологими (рис. 3.36,а). Такая же закономерность наблюдается и для вебер-амперных характеристик (рис. 3.36,б). Заметим, что при расчетах ве-

бер-амперные характеристики чаще применяются для действующих $\Phi = f(IN)$ (рис. 3.36, в), а не для амплитудных значений потоков и МДС.

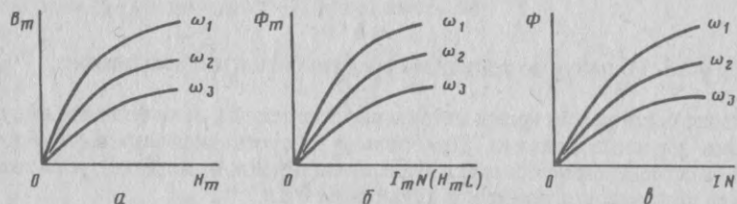


Рис. 3.36

Рассмотрим магнитную цепь на рис. 3.36, б и покажем, что магнитные параметры можно связать с электрическими, т.е. перейти от вебер-амперной характеристики $\Phi = f(IN)$ к вольт-амперной $I = \varphi(U)$ и таким образом определить индуктивность эквивалентной электрической схемы рис. 3.35, а (статическую и дифференциальную). Пренебрегая явлением гистерезиса, вихревыми токами и потоками рассеяния, получим

$$u = Ri + d\Psi/dt, \quad (3.59)$$

R — сопротивление обмотки.

Произведением Ri также можно пренебречь, поскольку оно меньше $d\Psi/dt$, и тогда

$$u = d\Psi/dt. \quad (3.60)$$

Если напряжение, приложенное к обмотке, синусоидально ($u = U_m \sin \omega t$), то (3.60) можно представить в следующем виде:

$$U_m \sin \omega t = N \frac{d\Phi_t}{dt}. \quad (3.61)$$

Отсюда, разделяя переменные, получим

$$\Phi_t = \frac{U_m}{N} \int \sin \omega t dt = -\frac{U_m}{\omega N} \cos \omega t = -\Phi_m \cos \omega t, \quad (3.62)$$

N — число витков обмотки.

Таким образом, при сделанных допущениях магнитный поток в сердечнике определяется напряжением U_m , числом витков N и частотой ω и не зависит от вебер-амперной характеристики.

Из (3.62) следует уравнение

$$\Phi_m = \frac{U_m}{\omega N} = \frac{\sqrt{2}U}{2\pi fN} = \frac{U}{4,44 fN}, \quad (3.63)$$

которое обычно записывают в виде зависимости напряжения от магнитного потока или магнитной индукции:

$$U = 4,44 f N \Phi_m = 4,44 f N S B_m. \quad (3.64)$$

Уравнение (3.64) дает возможность перейти от координаты Φ к координате U , а соотношение $I = IN/N$ — от координаты IN к координате I .

Таким образом, решить задачу нахождения тока в обмотке магнитной цепи (см. рис. 3.35, б) можно двумя путями: с использованием вебер-амперной характеристики или вольт-амперной. В первом случае по уравнению (3.63) определяют магнитный поток Φ ($\Phi = \Phi_m/\sqrt{2}$), затем по вебер-амперной характеристике (рис. 3.37, а) — ток I ($I = IN/N$). Во втором случае необходимо перейти от вебер-амперной характеристики (рис. 3.37, а) к вольт-амперной (рис. 3.37, б), т.е. от магнитной цепи (рис. 3.35, б) перейти к эквивалентной электрической (см. рис. 3.35, а) и далее по заданному входному напряжению U определить ток I (рис. 3.37, б).

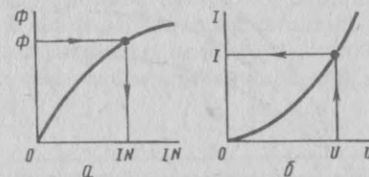


Рис. 3.37

Из (3.64) следует, что магнитные цепи при переменном магнитном потоке отличаются от магнитных цепей при постоянном магнитном потоке в основном тем, что в последнем случае ток обмотки зависит преимущественно от геометрических размеров и материала магнитопровода. В магнитных цепях при постоянном магнитном потоке существует зависимость тока обмотки только от сопротивления обмотки.

§ 3.9. Особенности цепей с диэлектриками

В предыдущих параграфах были рассмотрены методы расчета цепей с нелинейными двухполюсниками и, в частности, с нелинейными емкостными двухполюсниками. При этом в расчетах использовались вольт-амперные характеристики (при квазилинейном подходе) или зависимости заряда от напряжения.

Конструктивно нелинейный емкостный двухполюсник (рис. 3.38, а) представляет собой конденсатор (конденсаторы) с нелинейным диэлектриком (рис. 3.38, б). В качестве диэлектрика используются, например, сегнетокерамические диэлектрики (вариконды).

Известно, что у нелинейного диэлектрика диэлектрическая проницаемость существенно зависит от напряженности электрического поля, а реактивное сопротивление определяется состоянием диэлектрика. Для

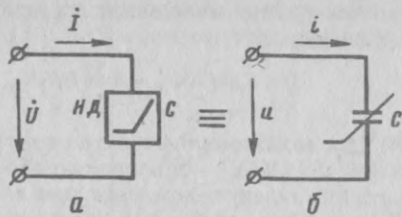


Рис. 3.38

описания физических процессов в диэлектрике необходимо рассмотреть зависимость электрического смещения (электрической индукции) от напряженности электрического поля $D = f(E)$, которая в общем случае изменяется с изменением частоты (рис. 3.39).

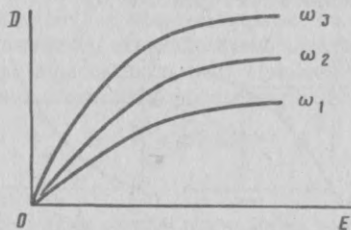


Рис. 3.39

Пренебрегая сопротивлением утечки и диэлектрическими потерями конденсатора, воспользуемся для перехода от электрического смещения D к проходящему через конденсатор току I теоремой Гаусса:

$$\int D \, dS = Q, \quad (3.65)$$

где S — поверхность; Q — заряд.

Для обычных источников питания с относительно низкими частотами можно полагать, что поток электрического смещения через наружные стенки диэлектрика и обкладки практически равен нулю (он должен учитываться в той мере и в той форме, в которых учитывается рассеяние в магнитной цепи). Аналогично тому, как ранее от уравнения (1.15) был совершен переход к (1.16), получим

$$DS = Q, \quad (3.66)$$

S — поверхность одной обкладки.

В соответствии с квазилинейным рассмотрением

$$D_t = D_m \sin \omega t; \\ i = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(SD_m \sin \omega t)}{dt}, \quad (3.67)$$

а действующее значение тока

$$I = k_1 fDS, \quad (3.68)$$

где k_1 — коэффициент, зависящий от того, какие значения величин (амплитудные, средние или действующие) использовались в исходных характеристиках.

Переход от напряженности электрического поля к электрическому напряжению также должен быть выполнен с учетом отмеченных обстоятельств (для этого вводят коэффициент k_2):

$$U = k_2 \int_0^d E \, dl = k_2 Ed, \quad (3.69)$$

d — расстояние между электродами плоского конденсатора.

Таким образом, уравнения (3.68), (3.69) позволяют перейти от зависимости $D = f(E)$ к вольт-амперной характеристике $I = \varphi(U)$ подобно тому, как при рассмотрении магнитных цепей осуществлялся переход от динамической кривой намагничивания к вебер-амперной, а затем к вольт-амперной характеристике.

§ 3.10. Расчет цепей с реактивными двухполюсниками методом сопряжения интервалов

Рассмотрим цепь с линейным сопротивлением и нелинейным индуктивным двухполюсником (рис. 3.40,а), имеющим идеализированную вебер-амперную характеристику (рис. 3.40,б). Магнитный поток в таком двухполюснике меняется от $+\Phi_{\max}$ до $-\Phi_{\max}$, и наоборот, т.е. магнитное состояние двухполюсника характеризуется только одним параметром $|\Phi_{\max}|$. Особенность расчета заключается в том, что состояние двухполюсника определяется не мгновенным значением подводимого к нему напряжения (как для двухполюсника со свойствами активного сопротивления, см. § 3.7), а величиной так называемого импульса напряжения. Действительно, поскольку $u_1 = N \frac{d\Phi_t}{dt}$, разделяя переменные, получаем

$$\Delta\Phi_t = \frac{1}{N} \int_{t_1}^{t_2} u_1 \, dt, \quad (3.70)$$

где $\Delta\Phi_t$ — приращение магнитного потока, определяемое импульсом напряжения за интервал времени $t_1 - t_2$.

Если напряжение, приложенное к цепи, изменяется по синусоидальному закону $u = U_m \sin \omega t$, то в положительный полупериод этого напряжения сердечник начинает перемагничиваться, т.е. магнитный поток изме-

няется от $-\Phi_{\max}$ до $+\Phi_{\max}$. При этом индуктивное сопротивление двухполюсника равно бесконечности, ток в цепи равен нулю и $u_1 = u$.

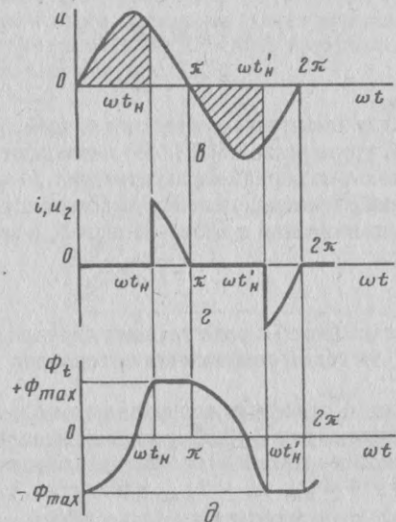
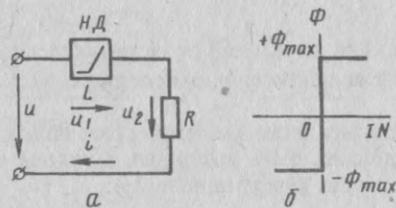


Рис. 3.40

Чтобы изменить магнитное состояние двухполюсника на противоположное, нужно создать приращение потока

$$\Delta\Phi = 2\Phi_{\max} \quad (3.71)$$

Необходимый для этого импульс напряжения (рис. 3.40,в) найдем по формуле

$$2\Phi_{\max} = \frac{1}{N} \int_0^{t_n} U_m \sin \omega t \, dt, \quad (3.72)$$

где t_n — момент времени, когда двухполюсник перемагничивается и его сопротивление станет равным нулю.

Проинтегрировав уравнение (3.72), получим

$$\cos \omega t_n = 1 - \frac{2\omega N \Phi_{\max}}{U_m}, \quad (3.73)$$

и отсюда определим угол начала импульса тока ωt_n :

$$\omega t_n = \arccos \left(\frac{U_m - 4\pi f N \Phi_{\max}}{U_m} \right). \quad (3.74)$$

Так как с момента времени ωt_n сопротивление двухполюсника становится равным нулю, все приложенное к цепи напряжение компенсируется падением напряжения на линейном сопротивлении R , т.е. $u_2 = u$. Ток в цепи в этот промежуток времени (рис. 3.40,з)

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin \omega t. \quad (3.75)$$

После перехода входного напряжения через нуль двухполюсник снова перемагничивается, т.е. магнитный поток изменяется от $+\Phi_{\max}$ до $-\Phi_{\max}$. Сопротивление двухполюсника становится равным бесконечности, и ток прекращается. Таким образом, угол прекращения импульса тока равен π .

Из (3.74) видно, что угол ωt_n зависит от амплитуды приложенного напряжения U_m и максимального значения магнитного потока Φ_{\max} . Физически это объясняется тем, что амплитудное значение магнитного потока Φ_m зависит от напряжения U (3.63) и в то же время ограничивается величиной Φ_{\max} . В интервалах $\omega t_n - \pi$, $\omega t_n - 2\pi$ и т.д. магнитный поток постоянный (рис. 3.40,д), что означает равенство нулю производной магнитного потока по времени и, следовательно, равенство нулю напряжения u_1 . Отсюда следует, что условием возникновения тока в цепи является неравенство

$$|\Phi_{\max}| < \Phi_m. \quad (3.76)$$

Если же $|\Phi_{\max}| \geq \Phi_m$, то ограничения магнитного потока не происходит, и ток в цепи равен нулю при любом значении ωt .

Метод сопряжения интервалов применяют и к цепи с нелинейным емкостным двухполюсником. В этом случае состояние двухполюсника определяется уже не импульсом напряжения, а импульсом тока. Действительно, с учетом (3.66) ток

$$i = \frac{dQ}{dt} = S \frac{dD_t}{dt}, \quad (3.77)$$

откуда после разделения переменных получим

$$\Delta D_t = \frac{1}{S} \int_{t_1}^{t_2} i dt, \quad (3.78)$$

где ΔD_t — приращение электрического смещения, определяемое импульсом тока за интервал времени $t_1 - t_2$.

Будем полагать, что зависимость $D = f(E)$ имеет прямоугольный характер, а электрическое смещение меняется от $+D_{\max}$ до $-D_{\max}$ и наоборот.

Чтобы изменить состояние двухполюсника на противоположное, создадим приращение электрического смещения

$$\Delta D = 2D_{\max}, \quad (3.79)$$

и тогда требуемый импульс синусоидального тока определится соотношением

$$2D_{\max} = \frac{1}{S} \int_0^{t_H} I_m \sin \omega t dt, \quad (3.80)$$

t_H — момент времени, когда двухполюсник скачкообразно меняет свое сопротивление.

Проинтегрировав уравнение (3.80), получим

$$\cos \omega t_H = 1 - \frac{2\omega S D_{\max}}{I_m}, \quad (3.81)$$

и определим отсюда угол ωt_H :

$$\omega t_H = \arccos \left(\frac{I_m - 4\pi f S D_{\max}}{I_m} \right). \quad (3.82)$$

Сравнение уравнений (3.74) и (3.82) подчеркивает сходство расчета магнитных и диэлектрических цепей. Соотношения для определения ωt_H (3.74), (3.82) и при $\omega t_H = 0, \pi, 2\pi, \dots$ получаются достаточно простыми вследствие того, что для активной нагрузки ток и напряжение совпадают по фазе и переходят через нуль в один и тот же момент времени (см. рис. 3.40, в и г). При включении в цепь (рис. 3.41, а), например, активно-индуктивной нагрузки нелинейный двухполюсник НД (L), имеющий идеализированную вебер-амперную характеристику (рис. 3.41, б), начинает перемagnичиваться в те моменты времени, когда ток в цепи i становится равным нулю. Эти моменты времени отличны от $\omega t = 0, \pi, 2\pi, \dots$, т.к. в такой цепи напряжение и ток не совпадают по фазе.

Требуемый для перемagnичивания импульс напряжения в этом случае определяется уравнением (3.72), однако нижний предел интервала

будет равен ωt_H (рис. 3.41, в). Полученное при интегрировании соотношение

$$\cos \omega t_H = \cos \omega t_H - \frac{2\omega N \Phi_{\max}}{U_m} \quad (3.83)$$

показывает, что, во-первых, углы начала и прекращения импульса тока в цепи зависят друг от друга и, во-вторых, уравнение (3.73) является частным случаем (3.83).

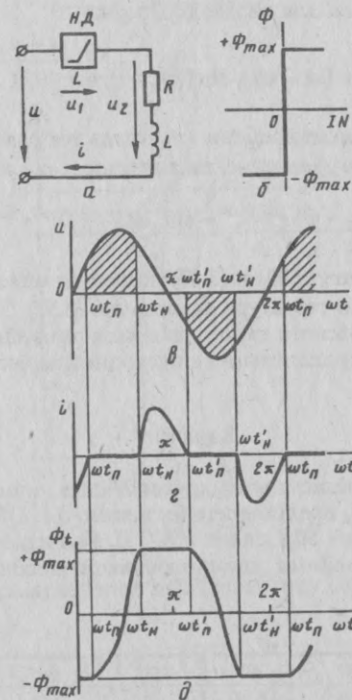


Рис. 3.41

Поскольку в момент времени ωt_H происходит коммутация цепи (при нулевых начальных условиях), для определения тока i необходимо рассмотреть переходный процесс, расчет которого дает известное соотношение

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi) + A e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (3.84)$$

где

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}; \varphi = \arctg \frac{X_L}{R}; \tau = L/R.$$

Постоянная интегрирования A может быть найдена из условия $i(\omega t_H) = 0$;

$$A = -I_m \sin(\omega t_H - \varphi) e^{\omega t_H / \omega \tau}. \quad (3.85)$$

Тогда из выражения для переходного тока

$$i = I_m \left[\sin(\omega t - \varphi) - \sin(\omega t_H - \varphi) e^{-\frac{\omega t - \omega t_H}{\omega \tau}} \right], \quad (3.86)$$

рассматриваемого в момент времени $\omega t_{\text{п}}$, когда ток равен нулю (рис. 3.41, з), можно получить второе уравнение, связывающее ωt_H и $\omega t_{\text{п}}$:

$$\sin(\omega t_{\text{п}} - \varphi) e^{\omega t_{\text{п}} / \omega \tau} = \sin(\omega t_H - \varphi) e^{\omega t_H / \omega \tau}. \quad (3.87)$$

Совместное решение (3.83) и (3.87) позволяет определить ωt_H и $\omega t_{\text{п}}$.

Уравнение (3.87) по структуре аналогично (3.57). Это свидетельствует об общности методов расчета двухполюсников различного характера, если принято допущение об идеализации их исходных характеристик.

Задачи

3.1. Нелинейный резистивный двухполюсник определяется ВАХ для действующих значений, представленных в табл. 3.1. Определить мгновенный ток в цепи, если $u = 50,9 \sin(\omega t - 90^\circ)$ В. Как изменится ток, если последовательно с нелинейным двухполюсником включить сопротивление $R = 60$ Ом?

Таблица 3.1

$U, \text{В}$	0	5	10	20	30	40	50
$I, \text{А}$	0	0,26	0,38	0,52	0,61	0,66	0,69

Ответ. 1) $i = 0,909 \sin(\omega t - 90^\circ)$ А;
2) $i = 0,571 \sin(\omega t - 90^\circ)$ А.

3.2. К квазилинейной цепи, представляющей собой последовательное соединение нелинейного резистивного двухполюсника и конденсатора с емкостью $C = 7,98$ мкФ, подведено напряжение $u = 50,9 \sin 2512t$ В. Определить мгновенный ток в цепи.

Вольт-амперная характеристика нелинейного двухполюсника приведена в табл. 3.1.

Решение. Для схемы (рис. 3.42, а) построим ВАХ нелинейного двухполюсника $I(U_R)$, емкости $I(U_C)$ и эквивалентную характеристику $I(U)$

(рис. 3.42, б). Для построения характеристики $I(U_C)$ необходимо определить сопротивление

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{2512 \cdot 7,98} = 50 \text{ Ом (tg } \alpha = X_C).$$

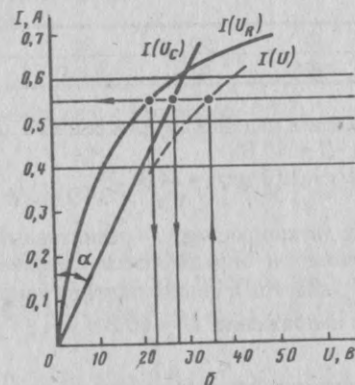
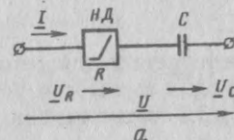


Рис. 3.42

Точки части эквивалентной характеристики найдем следующим образом:

$$I_1 = 0,4 \text{ А, } U_1 = \sqrt{U_{R1}^2 + U_{C1}^2} = \sqrt{12,5^2 + 20^2} = 23,6 \text{ В};$$

$$I_2 = 0,5 \text{ А, } U_2 = \sqrt{U_{R2}^2 + U_{C2}^2} = \sqrt{18,5^2 + 25^2} = 30,8 \text{ В};$$

$$I_3 = 0,6 \text{ А, } U_3 = \sqrt{U_{R3}^2 + U_{C3}^2} = \sqrt{28,5^2 + 30^2} = 41,7 \text{ В}.$$

Напряжение питания $U = U_m / \sqrt{2} = 50,9 / \sqrt{2} = 36$ В перенесем на эквивалентную характеристику и найдем $I = 0,55$ А, $U_R = 23$ В и $U_C = 27,5$ В.

$$\text{Угол } \varphi = \arctg \frac{U_C}{U_R} = \arctg \frac{27,5}{23} = \arctg 1,192 = 50^\circ.$$

Ответ. $i = 0,775 \sin(2512t + 50^\circ)$ А.

3.3. Квазилинейная цепь, состоящая из последовательно соединенных сопротивления $Z = (625 + j1080)$ Ом и нелинейного резистивного двухполюсника, ВАХ которого задана в табл. 3.2, подключена к источнику напря-

жения с действующим значением $U = 100$ В. Определить действующее значение тока в цепи.

Таблица 3.2

$U, В$	10	20	30	40	45	50
$I, мА$	2	5	10,5	20	31,5	100

Ответ. $I = 54$ мА.

3.4. Вольт-амперные характеристики для действующих значений двух нелинейных двухполюсников, один из которых резистивный, а другой — емкостный, заданы в табл. 3.1 и 3.3 соответственно.

Таблица 3.3

$U, В$	0	10	20	25	30	35
$I, А$	0	0,025	0,1	0,165	0,3	0,6

Определить ток в цепи и падения напряжений на двухполюсниках, если напряжение питания $U = 40$ В.

Ответ. $I = 0,53$ А; $U_1 = 21$ В; $U_2 = 34$ В.

3.5. Два нелинейных двухполюсника — резистивный и индуктивный — соединены последовательно и определяются зависимостями $R_{ст}(I)$ и $X_{L_{ст}}(I)$ (табл. 3.4). Чему равен ток в цепи и падения напряжений на двухполюсниках, если входное напряжение $U = 60$ В?

Таблица 3.4

$I, А$	0	0,5	1	2	3	4	5
$R_{ст}, Ом$	20	20	21	24	30,5	41	54,5
$X_{L_{ст}}, Ом$	10	10	10,5	14	22,5	38	65

Ответ. $I = 2,1$ А; $U_1 = 52$ В; $U_2 = 31$ В.

3.6. Нелинейный резистивный двухполюсник, ВАХ которого для действующих значений тока приведена в табл. 3.3, соединен последовательно с конденсатором емкостью $C = 1,99$ мкФ. К цепи подведено напряжение $U = 50$ В с частотой $f = 400$ Гц. Определить ток в цепи и падения напряжений на двухполюснике и конденсаторе, применив для расчета метод эллипса. Как изменится ток и падения напряжений, если в заданную цепь включить дополнительно активное сопротивление R , равное 50 Ом?

Решение. Найдем условный ток короткого замыкания в цепи рис. 3.43,а:

$$I_k = U/X_C = 50/200 = 0,25 \text{ А};$$

$$\left(X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{2\pi \cdot 400 \cdot 1,99} = 200 \text{ Ом} \right)$$

и построим часть эллипса, имеющего полуоси $I_k = 0,25$ Ом и $U = 50$ В (рис. 3.43,а).

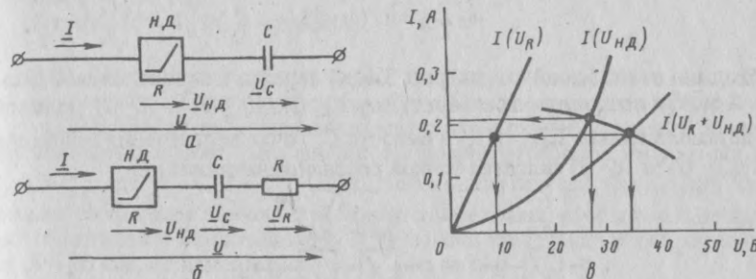


Рис. 3.43

Точка пересечения характеристики $I(U_{нд})$ с эллипсом и есть решение задачи:

$$I = 0,21 \text{ А}; U_{нд} = 27 \text{ В}; U_C = \sqrt{U^2 - U_{нд}^2} = \sqrt{50^2 - 27^2} = 42 \text{ В}.$$

Если в заданную цепь включить дополнительно активное сопротивление $R = 50$ Ом (рис. 3.43,б), то для расчета необходимо построить эквивалентную характеристику $I(U_R + U_{нд})$ и определить искомый ток и напряжения:

$$I = 0,18 \text{ А}; U_R = 9 \text{ В}; U_{нд} = 34,5 - 9 = 25,5 \text{ В};$$

$$U_C = \sqrt{U^2 - (U_R + U_{нд})^2} = \sqrt{50^2 - 34,5^2} = 36 \text{ В}.$$

Ответ. 1) $I = 0,21$ А; $U_{нд} = 27$ В; $U_C = 42$ В.

2) $I = 0,18$ А; $U_{нд} = 25,5$ В; $U_C = 36$ В; $U_R = 9$ В.

3.7. Нелинейный индуктивный двухполюсник соединен последовательно с конденсатором, сопротивление которого $X_C = 100$ Ом. Цепь обладает квазилинейными свойствами. ВАХ двухполюсника приведена в табл. 3.3. При каком входном напряжении в цепи наступит резонанс напряжений?

Ответ. $U = 30$ В.

3.8. Квазилинейная цепь представляет собой последовательное соединение активно-индуктивного нелинейного двухполюсника, характеристики которого приведены в табл. 3.5, и конденсатора с сопротивлением $X_C = 110$ Ом.

Таблица 3.5

$U, В$	18	32	41	47	51	54
$I, А$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$\varphi, град$	70	55	44	36	30	24

При каком значении входного напряжения в цепи будет наблюдаться резонанс напряжений?

Решение. Так как условием резонанса напряжений является равенство

$$\omega_0 L_{ст} = 1/(\omega_0 C),$$

необходимо от исходной схемы (рис. 3.44,а) перейти к эквивалентной схеме (рис. 3.44,б) и построить характеристики $R_{ст}(I)$, $X_{L_{ст}}(I)$ и $X_C(I)$ нелинейных двухполюсников НД₁, НД₂ и емкости C . Точка пересечения характеристик $X_{L_{ст}}(I)$ и $X_C(I)$ является точкой резонанса напряжений.

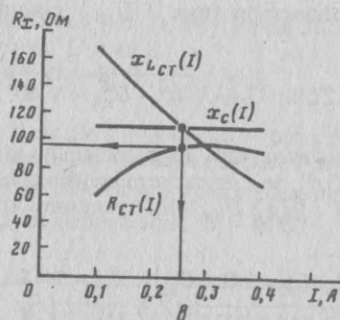
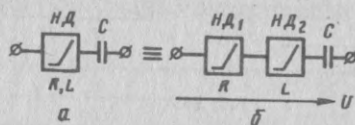


Рис. 3.44

Используем для построения характеристик $R_{ст}(I)$ и $X_{L_{ст}}(I)$ данные

табл. 3.5. Учитывая, что $\frac{U}{I} < \varphi = Z_{ст} < \varphi = R_{ст} + jX_{L_{ст}}$, получим:

$$Z_{ст1} < \varphi_1 = 180 \angle 70^\circ = (63,3 + j169) \text{ Ом};$$

$$Z_{ст2} < \varphi_2 = 160 \angle 55^\circ = (91,2 + j131) \text{ Ом};$$

$$Z_{ст3} < \varphi_3 = 137 \angle 44^\circ = (98,6 + j96) \text{ Ом};$$

$$Z_{ст4} < \varphi_4 = 117,5 \angle 36^\circ = (94 + j68,2) \text{ Ом};$$

$$Z_{ст5} < \varphi_5 = 102 \angle 30^\circ = (87,8 + j51) \text{ Ом};$$

$$Z_{ст6} < \varphi_6 = 90 \angle 24^\circ = (81,8 + j36) \text{ Ом}.$$

Из графика рис. 3.44 следует, что точке резонанса соответствуют ток $I = 0,255 \text{ А}$ и активное статическое сопротивление $R_{ст} = 97 \text{ Ом}$. Поэтому $U = R_{ст} I = 97 \cdot 0,255 = 24,73 \text{ В}$.

Ответ. $U = 24,73 \text{ В}$.

3.9. Активно-индуктивный нелинейный двухполюсник, характеристики которого заданы в табл. 3.5, соединен параллельно с конденсатором емкостью $C = 1,99 \text{ мкФ}$. Определить, при каком значении напряжения на зажимах цепи будет иметь место резонанс токов и чему равен при этом ток источника ($f = 400 \text{ Гц}$).

Ответ. $U = 47 \text{ В}; I = 0,324 \text{ А}$.

3.10. Нелинейный индуктивный двухполюсник включен последовательно с активным сопротивлением $R = 4 \text{ Ом}$ на источник с напряжением $U = 12,8 \text{ В}$. Вольт-амперная характеристика для действующих значений двухполюсника может быть аппроксимирована параболой второго порядка $I_{нд} = aU_{нд}^2$, где $a = 0,02 \text{ А/В}^2$. Определить аналитически ток в цепи. Каким должно быть новое значение входного напряжения, чтобы ток в цепи, где вместо активного сопротивления R включено комплексное сопротивление $Z = (4 - j3) \text{ Ом}$, не изменился?

Ответ. $I = 2 \text{ А}; U = 8,95 \text{ В}$.

3.11. Определить параметры схемы замещения нелинейного резистивного двухполюсника, используя метод компенсации, если рабочая точка на ВАХ для действующих значений (см. табл. 3.3) имеет координаты $I = 0,6 \text{ А}$ и $U = 35 \text{ В}$.

Ответ. $U_i = 25 \text{ В}; R_i = 16,7 \text{ Ом}$.

3.12. Квазилинейная цепь представляет собой последовательное соединение нелинейного резистивного двухполюсника и конденсатора с сопротивлением $X_C = 5 \text{ Ом}$. Определить мгновенное значение тока в цепи, если входное напряжение $u_{вх} = 60\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ В}$. Расчет произвести аналитически, используя параметры схемы замещения двухполюсника, полученные при решении задачи 3.11.

Ответ. $i = 1,27 \sin(\omega t + 78^\circ) \text{ А}$.

3.13. Вольт-амперная характеристика нелинейного резистивного двухполюсника задана в табл. 3.6. Двухполюсник подключается к источнику с напряжением $u = 40 \sin \omega t \text{ В}$ сначала непосредственно, а затем через линейное сопротивление $R = 100 \text{ Ом}$. Для обоих случаев построить график тока в цепи.

Таблица 3.6

$u, \text{ В}$	0	5	10	20	30	40
$i, \text{ А}$	0	0,15	0,23	0,3	0,32	0,33

Решение. Последовательность построений кривой тока, если задано напряжение источника питания, приведена в § 3.5. На рис. 3.45 дано решение этой задачи для конкретных числовых значений. Кривая тока построена для цепи с нелинейным двухполюсником. Если в цепь включено также линейное сопротивление, предварительно необходимо построить эквивалентную характеристику и использовать ее для графических построений.

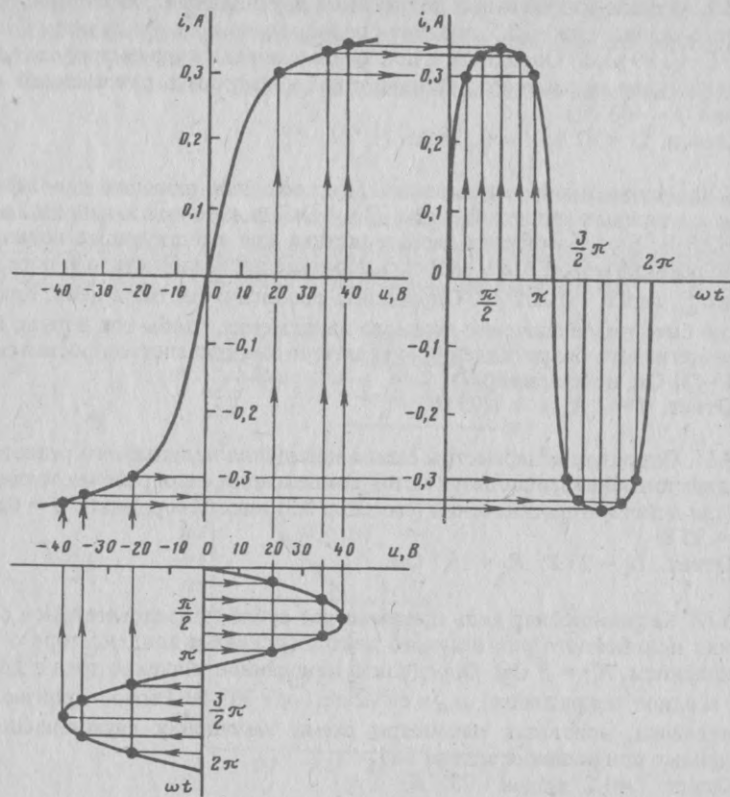


Рис. 3.45

3.14. Нелинейный резистивный и индуктивный двухполюсники включены последовательно. Зависимости $R_{ст}(i)$ и $L_{диф}(i)$ заданы в табл. 3.7. Построить график $u(t)$, если по цепи проходит ток $i = 4 \sin 2512 t$ А.

Таблица 3.7

i , А	0	0,5	1	2	3	4	5
$R_{ст}$, Ом	20	20	21	24	30,5	41	54,5
$L_{диф}$, мГн	16,2	15,5	15,2	14	11	10	10

Решение. Воспользуемся подходом, изложенным в § 3.5 (см. рис. 3.31). Для построения зависимости $u(t)$ необходимо подставить в уравнение (3.42) соответствующие значения $R_{ст}$ и $L_{диф}$ (рис. 3.46,а), задаваясь зна-

чениями углов (рис. 3.46,б, кривая $i(t)$). Результаты расчета сведены в табл. 3.8, график построен на рис. 3.46,б.

Таблица 3.8

ωt , град	$ i $, А	$R_{ст}$, Ом	$I_m \sin \omega t$, А	$L_{диф}$, мГн	$I_m \cos \omega t$, А	u_R , В	u_L , В	u , В
0	0	20	0	16,2	4	0	163	163
30	2	24	2	14	3,5	48	123	171
60	3,5	35	3,5	10	2	122,5	50,2	172,7
90	4	41	4	10	0	164	0	164
120	3,5	35	3,5	10	-2	122,5	-50,2	72,3
150	2	24	2	14	-3,5	48	-123	-75
180	0	20	0	16,2	-4	0	-163	-163
210	2	24	-2	14	-3,5	-48	-123	-171
240	3,5	35	-3,5	10	-2	-122,5	-50,2	-172,7
270	4	41	-4	10	0	-164	0	-164
300	3,5	35	-3,5	10	2	-122,5	50,2	-72,3
330	2	24	-2	14	3,5	-48	123	75
360	0	20	0	16,2	4	0	163	163

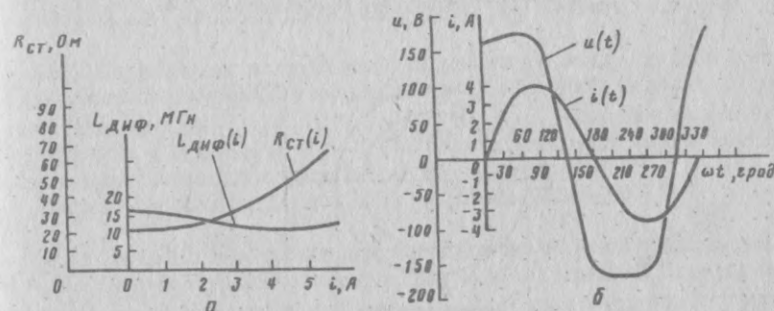


Рис. 3.46

3.15. ВАХ резистивного нелинейного двухполюсника аппроксимирована полиномом $i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2$. Определить ток в нелинейном двухполюснике, если напряжение на его зажимах $u = U_m \sin \omega t$.

$$\text{Ответ. } i = \frac{2a_0 + a_2 U_m^2}{2} + a_1 U_m \sin \omega t + \frac{a_2 U_m^2}{2} \sin(2\omega t - 90^\circ).$$

3.16. Индуктивная катушка с ферромагнитным сердечником и числом витков обмотки $N = 400$ подключена к сети переменного тока напряжением 115 В и частотой $f = 400$ Гц. Связь между магнитным потоком в сердечнике катушки и токов в обмотке с достаточной точностью определяется

зависимостью $I = 40\Phi + 26 \cdot 10^9 \Phi^3$ (где I выражен в амперах, Φ — в веберах). Пренебрегая потерями в меди обмотки и потоками рассеяния, найти действующее значение тока в обмотке.

Ответ. $I = 44,1$ мА.

3.17. Обмотка индуктивной катушки с числом витков $N = 500$ навита на кольцевой сердечник с внутренним диаметром $d_{вт} = 2$ см и внешним $d_{вн} = 2,8$ см. Толщина сердечника $b = 0,8$ см, коэффициент заполнения сталью $k = 0,85$. При подключении катушки к источнику переменного напряжения $U = 36$ В с частотой $f = 400$ Гц связь между напряженностью магнитного поля и индукцией в сердечнике выражается зависимостью $H = 20B + 90B^3$ (где H выражена в амперах на метр, B — в теслах). Пренебрегая рассеянием и активным сопротивлением обмотки, найти действующее значение тока в обмотке и эквивалентную статическую индуктивность катушки.

Решение. Используя размеры чертежа сердечника на рис. 3.47, проведем предварительные расчеты:

$$S = \frac{d_{вн} - d_{вт}}{2} bk = \frac{2,8 - 2}{2} \cdot 10^{-2} \cdot 0,8 \cdot 10^{-2} \cdot 0,85 = 0,275 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$l_{ср} = \frac{d_{вн} + d_{вт}}{2} = \frac{2,8 + 2}{2} \cdot 10^{-2} = 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

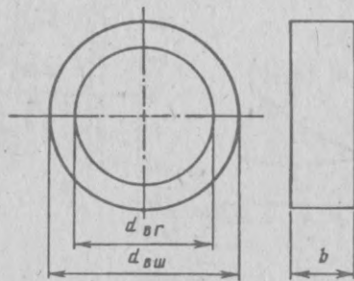


Рис. 3.47

Найдем амплитудное и действующее значения индукции:

$$B_m = \frac{U}{4,44NfS} = \frac{36 \cdot 10^4}{4,44 \cdot 500 \cdot 400 \cdot 0,275} = 1,475 \text{ Тл};$$

$$B = 1,045 \text{ Тл}.$$

Связь напряженности магнитного поля с индукцией задана аналитически:

$$H = 20B + 90B^3 = 20 \cdot 1,045 + 90 \cdot 1,045^3 = 123,4 \text{ А/м}.$$

Найдем ток в обмотке, воспользовавшись равенством $IN = Hl_{ср}$. Отсюда

$$I = \frac{Hl_{ср}}{N} = \frac{123,4 \cdot 2,4 \cdot 10^{-2}}{500} = 5,92 \cdot 10^{-3} \text{ А}.$$

Индуктивное статическое сопротивление и эквивалентная статическая индуктивность соответственно равны:

$$X_{Lст} = \frac{U}{I} = \frac{36}{5,92} \cdot 10^3 = 6,08 \cdot 10^3 \text{ Ом};$$

$$L_{эст} = \frac{X_{Lст}}{\omega} = \frac{6,08 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 400} = 2,42 \text{ Гн}.$$

Ответ. $I = 5,92$ мА; $L_{эст} = 2,42$ Гн.

3.18. Зависимость статической емкости нелинейного конденсатора от напряжения на его зажимах можно описать выражением $C_{ст} = (20 \cdot 10^{-10} u + 10^{-8})$ Ф. Определить ток в конденсаторе, если к нему приложено напряжение $u = (50 + 50 \sin 2500t)$ В.

Ответ. $i = 0,02625 \sin(2500t + 90^\circ) + 0,0125 \sin 5000t$ А.

3.19. Параллельно нелинейному конденсатору, между зарядом которого (выражается в кулонах) и напряжением на обкладках (в вольтах) существует зависимость $Q = 4 \cdot 10^{-7} u + 3,2 \cdot 10^{-11} u^3$, включена индуктивная катушка с $L = 79,7$ мГн и $R = 40$ Ом. Определить ток в неразветвленной части цепи, если входное напряжение $u = 100 \sin 2512t$ В.

Ответ. $i = 0,338 \sin(2512t - 72^\circ 39') + 0,06 \sin(7536t - 90^\circ)$ А.

3.20. На кольцевом сердечнике расположена обмотка с числом витков $N = 500$. Определить максимальные значения индукции B_m и напряженности H_m в сердечнике при подключении катушки к источнику с напряжением $U = 36$ В и частотой $f = 400$ Гц, если при этом потребляется ток $I = 120$ мА. Внешний диаметр сердечника $d_{вн} = 42$ мм, внутренний $d_{вт} = 32$ мм, толщина $b = 8$ мм, коэффициент заполнения сталью $k = 0,85$.

Ответ. $B_m = 1,2$ Тл., $H_m = 732$ А/м.

3.21. Вольт-амперная характеристика индуктивной катушки со стальным сердечником при частоте $f = 400$ Гц определяется уравнением $U = 50I - 3I^3$, где напряжение U измеряется в вольтах, а ток I — в амперах. Определить, при каком значении тока в цепи будет наблюдаться феррорезонанс напряжений, если последовательно с катушкой включен конденсатор емкостью $C = 30$ мкФ. Потерями в стали, обмотке и конденсаторе пренебрегаем.

Ответ. $I = 3,5$ А.

3.22. Индуктивная катушка со стальным сердечником и конденсатор емкостью $C = 1$ мкФ, соединенные параллельно, подключены к сети переменного тока с частотой $f = 400$ Гц. Пренебрегая потерями в стали, обмотке катушки и конденсаторе, определить, при каком напряжении сети в цепи будет наблюдаться феррорезонанс токов, если между действующими значениями тока в обмотке катушки и магнитного потока в его сердечнике существует зависимость $I = 150\Phi + 6 \cdot 10^9 \Phi^3$ (где I измеряется в амперах, Φ — в веберах). Обмотка катушки имеет 200 витков.

Ответ. $U = 215$ В.

3.23. Вольт-амперная характеристика индуктивной катушки со стальным сердечником представлена в табл. 3.9. Активное сопротивление катушки $R = 25$ Ом. При каком токе в цепи, которая представляет собой последовательное соединение этой катушки и конденсатора $C = 3,83$ мкФ, наступит феррорезонанс напряжений? Частота питающего напряжения $f = 400$ Гц.

Таблица 3.9

$U, В$	0	10	20	30	40	50	60	70
$I, А$	0	0,025	0,06	0,1	0,16	0,28	0,56	1,1

Ответ. $I = 0,56$ А.

3.24. Напряжение на входе цепи, которая представляет собой последовательное соединение нелинейного резистивного двухполюсника, имеющего вентильную ВАХ, и активного сопротивления $R = 500$ Ом, равно $u = 100 \sin \omega t$ В. Определить постоянную составляющую тока и напряжения на сопротивлении R . Решить задачу в трех вариантах: 1) ВАХ двухполюсника идеализированная ($R_{пр} = 0, R_{обр} = \infty$); 2) ВАХ кусочно-линейная ($R_{пр} = 50$ Ом, $R_{обр} = \infty$); 3) ВАХ кусочно-линейная ($R_{пр} = 50$ Ом, $R_{обр} = 5000$ Ом).

Ответ. 1) $I_0 = 0,064$ А; $U_R = 32$ В; 2) $I_0 = 0,058$ А; $U_R = 29$ В; 3) $I_0 = 0,052$ А; $U_R = 26$ В.

3.25. Определить момент начала импульса тока в цепи с последовательным соединением нелинейного индуктивного двухполюсника и активного сопротивления $R = 400$ Ом, если вебер-амперная характеристика двухполюсника прямоугольная и ее максимальные значения $\pm \Phi_{\max} = 1,62 \cdot 10^{-4}$ Вб. К цепи приложено напряжение $U = 208$ В с частотой $f = 400$ Гц. Число витков обмотки двухполюсника $N = 200$. Построить график мгновенного значения тока. Определить среднее значение тока.

Решение. Так как в схеме (рис. 3.48,а) для индуктивного двухполюсника задана идеализированная вебер-амперная характеристика (рис. 3.48,б), воспользуемся уравнением (3.74) и найдем угол начала импульса тока:

$$\omega t_H = \arccos \left(\frac{293 - 4\pi 400 \cdot 200 \cdot 1,62 \cdot 10^{-4}}{293} \right) = 63^\circ 40'.$$

На рис. 3.48,в показано, что кривая тока представляет собой части синусоиды от $63^\circ 40'$ до 180° и от $243^\circ 40'$ до 360° . Штриховкой на рис. 3.48,б показаны импульсы напряжения.

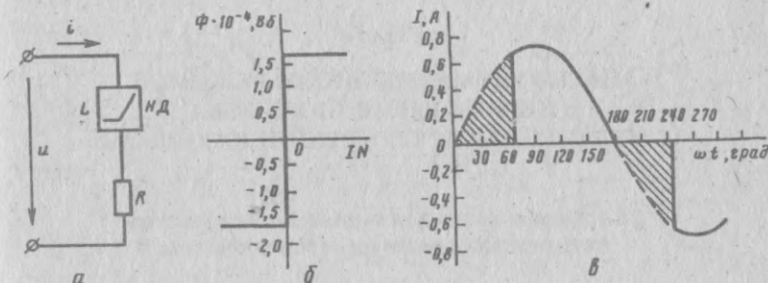


Рис. 3.48

Среднее значение тока

$$I_{cp} = \frac{2I_m}{T} \int_{\tau/2}^{\tau} \sin \omega t dt = \frac{2I_m}{\omega T} | -\cos \omega t |_{\tau/2}^{\tau} = \frac{208\sqrt{2}}{\pi \cdot 400} 1,443 = 0,336 \text{ А.}$$

Ответ. $\omega t_H = 63^\circ 40'$; $I_{cp} = 0,336$ А.

3.26. Каким должен быть ток, проходящий через нелинейный емкостный двухполюсник, необходимый для обеспечения значения $\omega t_H = \pi/2$? Зависимость $D_{\max} = f(E)$ двухполюсника имеет прямоугольный вид с максимальными значениями $\pm D_{\max} = 2,24 \cdot 10^{-2}$ Кл/м²; $S = 2,5 \cdot 10^{-3}$ м². Частота источника питания $f = 400$ Гц.

Ответ. $I = 0,2$ А.

Глава 4

**АНАЛИЗ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ
В ЦЕПЯХ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА
С НЕЛИНЕЙНЫМИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКАМИ**

§ 4.1. Особенности и исходные характеристики
четыреxpолосников на переменном токе

Как и двухполосники, нелинейные четырехполосники на переменном токе могут иметь свойства активного сопротивления (т.е. быть резистивными), а также могут быть реактивными (индуктивными или емкостными) и смешанными (активно-реактивными). В общем случае вход и выход четырехполосника описываются различными исходными характеристиками (см. рис. 1.3—1.7).

Для расчета цепей с четырехполосниками воспользуемся квазилинейным подходом. Семейства входных и выходных ВАХ могут быть описаны аналитическими выражениями, например, вида

$$\begin{aligned} I_{\text{вх}} &= f_1(U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}, \omega_{\text{вх}}, \omega_{\text{вых}}); \\ I_{\text{вых}} &= f_2(U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}, \omega_{\text{вх}}, \omega_{\text{вых}}), \end{aligned} \quad (4.1)$$

геометрически представляющими собой четырехмерные гиперобъемы.

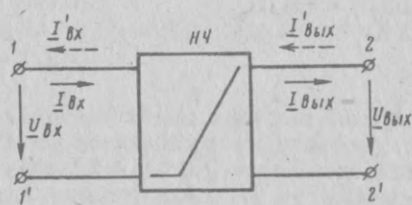


Рис. 4.1

Положительные направления токов и напряжений для четырехполосника при квазилинейном подходе показаны на рис. 4.1. Для мгновенных значений эти направления идентичны.

Если частоты источников входной и выходной цепи одинаковы, то каждое из семейств будет геометрически соответствовать объему; аналитические выражения при этом упрощаются:

$$\begin{aligned} I_{\text{вх}} &= f_1(U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}, \omega); \\ I_{\text{вых}} &= f_2(U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}, \omega). \end{aligned} \quad (4.2)$$

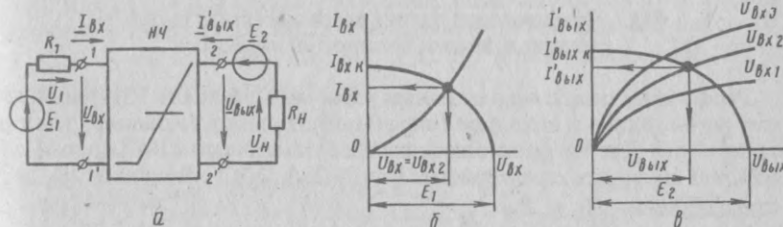


Рис. 4.2

На практике частоты источников E_1 и E_2 (рис. 4.2,а) остаются обычно неизменными в процессе работы (нередко при этом $\omega_{\text{вх}} \ll \omega_{\text{вых}}$), что позволяет рассматривать семейства ВАХ на плоскости

$$\begin{aligned} I_{\text{вх}} &= f_1(U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}); \\ I_{\text{вых}} &= f_2(U_{\text{вх}}, U_{\text{вых}}), \end{aligned} \quad (4.3)$$

частным случаем которых (при $\omega = 0$) являются характеристики четырехполосников на постоянном токе.

Система уравнений (4.3) представляет собой нелинейный вариант форм Y-параметров. Следовательно, если возможна линеаризация этих характеристик, аналитические выражения будут иметь вид

$$\begin{aligned} I_{\text{вх}} &= Y_{11} U_{\text{вх}} + Y_{12} U_{\text{вых}}; \\ I_{\text{вых}} &= Y_{21} U_{\text{вх}} + Y_{22} U_{\text{вых}}. \end{aligned}$$

Исходными характеристиками для четырехполосника могут быть также семейства зависимостей комплексных статических или дифференциальных сопротивлений или проводимостей либо безразмерных зависимостей (передаточных коэффициентов) от входных и выходных токов и напряжений. Семейств характеристик такого вида должно быть четыре, как и при постоянном токе.

Аналогично расчету цепей с двухполосниками на переменном токе семейства исходных характеристик четырехполосника не могут быть универсальными (см. § 3.2). В дальнейшем будем полагать, что применяемые в расчетах исходные характеристики сняты в режиме, близком к ожидаемому, и что частоты источников входной и выходной цепей не изменяются.

Следует отметить, что, если сопротивление $Z_1 = R_1$ и входное сопротивление четырехполосника (см. рис. 4.2) имеют одинаковый характер, расчет такой цепи ничем не отличается от расчета цепи на постоян-

ном токе (см. гл. 2); то же относится и к выходной цепи четырехполосника. В противном случае необходимо учитывать фазовые сдвиги между токами и напряжениями. Как будет показано далее, в этом и состоит особенность расчета цепей с четырехполосниками на переменном токе.

§ 4.2. Графический расчет квазилинейных цепей с направленными четырехполосниками

Рассмотрим цепь с направленным четырехполосником НЧ (рис. 4.2,а), у которого входное и выходное сопротивления имеют, например, реактивный характер. Для четырехполосника известны: входная ВАХ (рис. 4.2,б), семейство выходных характеристик (рис. 4.2,в), ЭДС источников E_1 и E_2 и сопротивления R_1 и R_H .

Расчет начинаем с входной цепи, для которой запишем уравнение для действующих значений:

$$E_1^2 = U_1^2 + U_{вх}^2 = (R_1 I_{вх})^2 + U_{вх}^2 \quad (4.4)$$

Далее введем входной условный ток короткого замыкания

$$I_{вх_к} = E_1/R_1 \quad (4.5)$$

и применим метод эллипса (см. § 3.2)

$$U_{вх}^2/E_1^2 + I_{вх}^2/I_{вх_к}^2 = 1. \quad (4.6)$$

На рис. 4.2,б построен эллипс с полуосями E_1 и $I_{вх_к}$, точка пересечения которого с ВАХ определяет рабочий режим входной цепи, т.е. входной ток $I_{вх}$ и напряжение на входных зажимах четырехполосника $U_{вх} = U_{вх2}$. Напряжение U_1 находим по закону Ома: $U_1 = R_1 I_{вх}$.

Для расчета выходной цепи также можно применить метод эллипса:

$$E_2^2 = U_H^2 + U_{вых}^2 = (R_H I_{вых})^2 + U_{вых}^2 \quad (4.7)$$

$$I_{вых_к} = E_2/R_H \quad (4.8)$$

$$U_{вых}^2/E_2^2 + I_{вых}^2/I_{вых_к}^2 = 1. \quad (4.9)$$

Точка пересечения эллипса с одной из характеристик семейства (в данном случае с характеристикой $U_{вх2}$, рис. 4.2,в) определяет выходной ток $I'_{вых}$ и выходное напряжение $U_{вых}$. Напряжение на нагрузке $U_H = R_H I'_{вых}$.

Для цепи, в которой вместо активных сопротивлений R_1 и R_H включены комплексные сопротивления Z_1 и Z_H , применяют метод, рассмотренный в § 3.2 (разд. «Последовательное соединение»): поворот эллипсов вокруг центра или суммирование (вычитание) координат эллипса и линейной характеристики.

Иногда в выходной цепи требуется обеспечить не фиксированное значение тока, а некоторый его диапазон, например от $I'_{вых1}$ и $I'_{вых3}$ (рис. 4.3,а). Как видно из рисунка, требуемый диапазон выходного тока можно получить, если изменить входное напряжение четырехполосника от $U_{вх1}$ до $U_{вх3}$ путем изменения модуля ЭДС E_1 или сопротивления R_1 (см. рис. 4.2,а). Рассмотрим оба случая.

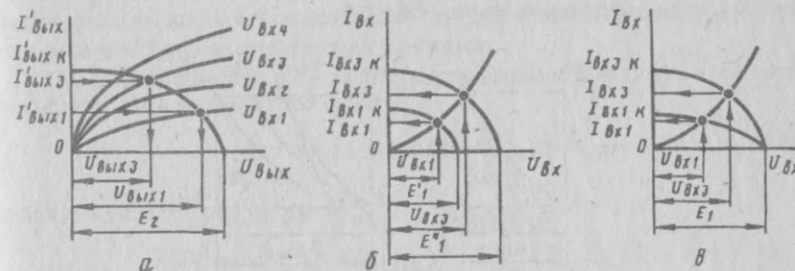


Рис. 4.3

Отложив на оси абсцисс значения $U_{вх1}$ и $U_{вх3}$, можно найти токи $I_{вх1}$ и $I_{вх3}$, т.е. определить требуемый рабочий диапазон на входной характеристике (рис. 4.3,б). Если при этом считать, что сопротивление $R_1 = \text{const}$, а изменяется ЭДС E_1 , то необходимо определить значения E'_1 и E''_1 или из уравнений эллипсов, подставляя туда текущие координаты $U_{вх1}$, $I_{вх1}$ и $U_{вх3}$, $I_{вх3}$, или из уравнений для входной цепи четырехполосника (см. рис. 4.2,а):

$$E'_1 = \sqrt{U_{вх1}^2 + (R_1 I_{вх1})^2}; \quad (4.10)$$

$$E''_1 = \sqrt{U_{вх3}^2 + (R_1 I_{вх3})^2}. \quad (4.11)$$

Если во входной цепи изменяется сопротивление R_1 при $E_1 = \text{const}$ (рис. 4.3,в), то, определив значения токов $I_{вх1}$ и $I_{вх3}$ по известным значениям напряжений $U_{вх1}$ и $U_{вх3}$, можно воспользоваться уравнениями эллипсов или уравнениями входной цепи четырехполосника:

$$R'_1 = \frac{\sqrt{E_1^2 - U_{вх1}^2}}{I_{вх1}}; \quad (4.12)$$

$$R''_1 = \frac{\sqrt{E_1^2 - U_{вх3}^2}}{I_{вх3}}. \quad (4.13)$$

Требуемый диапазон выходного тока может быть получен за счет изменения E_1 и R_1 , а также изменения ЭДС E_2 и сопротивления R_H в выходной цепи (см. рис. 4.2,а).

§ 4.3. Расчет квазилинейных цепей с направленными четырехполюсниками методом компенсации

Рассмотрим цепь с направленным четырехполюсником НЧ (рис. 4.2,а), вход и выход которого имеют реактивный характер и описываются зависимостями, представленными на рис. 4.4,а и б.

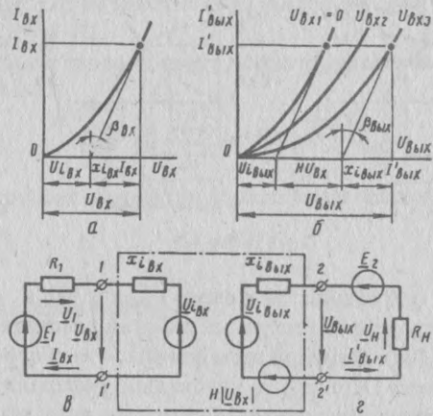


Рис. 4.4

Из входной характеристики четырехполюсника (рис. 4.4,а) запишем уравнение входного напряжения, используя метод компенсации (см. § 1.2):

$$U_{\text{вх}} = U_{i_{\text{вх}}} + X_{i_{\text{вх}}} I_{\text{вх}} \quad (4.14)$$

Уравнение выходного напряжения получим из рис. 4.4,б:

$$U_{\text{вых}} = U_{i_{\text{вых}}} + H U_{\text{вх}} + X_{i_{\text{вых}}} I'_{\text{вых}} \quad (4.15)$$

$H = \Delta U_{\text{вых}} / \Delta U_{\text{вх}}$ — коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению при разомкнутых выходных зажимах.

В соответствии с (4.14) и (4.15) составим схему замещения четырехполюсника, а также всей цепи, которая состоит из двух частей, относящихся к входу (рис. 4.4,а) и выходу (рис. 4.4,б). Из рассмотрения этих схем видно, что входная цепь влияет на выход через зависимый источник напряжения $H |U_{\text{вх}}|$, а выходная цепь на выход не влияет. Четырехполюсник, представленный данной схемой замещения, является направленным и в отличие от исходного (см. рис. 4.2,а) — линейным.

Отметим, что фаза напряжения $\underline{U}_{i_{\text{вх}}}$ и комплексного коэффициента H всегда совпадает с фазой составляющей $\pm jX_{i_{\text{вх}}} I'_{\text{вх}}$ (см. § 3.4), определяется соотношением

$$\frac{I'_{\text{вх}}}{I_{\text{вх}}} < \pm 90^\circ$$

и, следовательно, меняется с изменением выходного тока $I'_{\text{вх}}$. Сомножитель зависимого источника напряжения $|U_{\text{вх}}|$ учитывается только по модулю и на фазу выходного напряжения $\underline{U}_{\text{вых}}$ не влияет. Это объясняется тем, что от фазы входного напряжения зависит фаза выходного тока $I'_{\text{вх}}$, а значит, влияние $\underline{U}_{\text{вх}}$ в выходной цепи уже учтено.

Согласно схеме рис. 4.4,в запишем уравнение для входной цепи четырехполюсника в комплексной форме

$$\underline{E}_1 = \underline{U}_1 + \underline{U}_{\text{вх}} = R_1 I_{\text{вх}} + U_{i_{\text{вх}}} \pm jX_{i_{\text{вх}}} I_{\text{вх}} \quad (4.16)$$

и для модулей этих напряжений

$$E_1^2 = U_1^2 + U_{\text{вх}}^2 = (R_1 I_{\text{вх}})^2 + (U_{i_{\text{вх}}} + X_{i_{\text{вх}}} I_{\text{вх}})^2 \quad (4.17)$$

Входной ток

$$I_{\text{вх}} = \frac{-X_{i_{\text{вх}}} U_{i_{\text{вх}}} + \sqrt{(R_1^2 + X_{i_{\text{вх}}}^2) E_1^2 - R_1^2 U_{i_{\text{вх}}}^2}}{R_1^2 + X_{i_{\text{вх}}}^2} \quad (4.18)$$

и входное напряжение

$$U_{\text{вх}} = \frac{R_1^2 U_{i_{\text{вх}}} + X_{i_{\text{вх}}} \sqrt{(R_1^2 + X_{i_{\text{вх}}}^2) E_1^2 - R_1^2 U_{i_{\text{вх}}}^2}}{R_1^2 + X_{i_{\text{вх}}}^2} \quad (4.19)$$

Согласно схеме рис. 4.4,з запишем уравнение для выходной цепи четырехполюсника:

$$\underline{E}_2 = \underline{U}_H + \underline{U}_{\text{вых}} = R_H I'_{\text{вых}} + U_{i_{\text{вых}}} + H |U_{\text{вх}}| \pm jX_{i_{\text{вых}}} I'_{\text{вых}} \quad (4.20)$$

и для модулей этих напряжений

$$E_2^2 = U_H^2 + U_{\text{вых}}^2 = (R_H I'_{\text{вых}})^2 + (U_{i_{\text{вых}}} + H U_{\text{вх}} + X_{i_{\text{вых}}} I'_{\text{вых}})^2 \quad (4.21)$$

Отсюда выходной ток

$$I'_{\text{вых}} = \frac{-X_{i_{\text{вых}}} (U_{i_{\text{вых}}} + H U_{\text{вх}}) + \sqrt{(R_H^2 + X_{i_{\text{вых}}}^2) E_2^2 - R_H^2 (U_{i_{\text{вых}}} + H U_{\text{вх}})^2}}{R_H^2 + X_{i_{\text{вых}}}^2} \quad (4.22)$$

и напряжение на нагрузке

$$U_H = R_H \frac{-X_{i_{\text{вх}}} (U_{i_{\text{вх}}} + HU_{\text{вх}}) + \sqrt{(R_H^2 + X_{i_{\text{вх}}}^2) E_2^2 - R_H^2 (U_{i_{\text{вх}}} + HU_{\text{вх}})^2}}{R_H^2 + X_{i_{\text{вх}}}^2}. \quad (4.23)$$

Падение напряжения на сопротивлении R_1 и выходное напряжение четырехполюсника найдем соответственно как $U_1 = R_1 I_{\text{вх}}$ и $U_{\text{вх}} = \sqrt{E_2^2 - U_H^2}$ или из уравнения (4.15).

Для активно-реактивного сопротивления нагрузки ($Z_H = R_H \pm jX_H$) вместо (4.22) и (4.23) имеем

$$I_{\text{вх}} = \frac{-(X_H + X_{i_{\text{вх}}}) (U_{i_{\text{вх}}} + HU_{\text{вх}}) + \sqrt{[R_H^2 + (X_H + X_{i_{\text{вх}}})^2] E_2^2 - R_H^2 (U_{i_{\text{вх}}} + HU_{\text{вх}})^2}}{R_H^2 + (X_H + X_{i_{\text{вх}}})^2} \quad (4.24)$$

и

$$U_H = \sqrt{R_H^2 + X_H^2} \frac{-(X_H + X_{i_{\text{вх}}}) (U_{i_{\text{вх}}} + HU_{\text{вх}}) + \sqrt{[R_H^2 + (X_H + X_{i_{\text{вх}}})^2] E_2^2 - R_H^2 (U_{i_{\text{вх}}} + HU_{\text{вх}})^2}}{R_H^2 + (X_H + X_{i_{\text{вх}}})^2}. \quad (4.25)$$

Здесь X_H и $X_{i_{\text{вх}}}$ складываются, если оба эти сопротивления индуктивные или емкостные либо из большего значения вычитается меньшее, если характер сопротивлений различен.

Аналитическое выражение (4.24), как и (4.25), может быть записано в виде обобщенной формулы

$$I_{\text{вх}} = -B_{\text{вх}} M + \sqrt{Y_{\text{вх}}^2 E_2^2 - G_{\text{вх}}^2 M^2}, \quad (4.26)$$

где

$$B_{\text{вх}} = \frac{X_H + X_{i_{\text{вх}}}}{R_H^2 + (X_H + X_{i_{\text{вх}}})^2}; \quad (4.27)$$

$$G_{\text{вх}} = \frac{R_H}{R_H^2 + (X_H + X_{i_{\text{вх}}})^2}; \quad (4.28)$$

$$Y_{\text{вх}} = \frac{1}{\sqrt{R_H^2 + (X_H + X_{i_{\text{вх}}})^2}}; \quad (4.29)$$

$$M = U_{i_{\text{вх}}} + HU_{\text{вх}}. \quad (4.30)$$

Величины $B_{\text{вх}}$, $G_{\text{вх}}$ и $Y_{\text{вх}}$ представляют собой соответственно реактивную, активную и полную проводимости выходной цепи и могут быть определены непосредственно из схемы рис. 4.4,з.

Для упрощения приведенных ранее выражений во многих случаях величинами $U_{i_{\text{вх}}}$ и $U_{\text{вх}}$ можно пренебречь.

При расчете рассматриваемой цепи (рис. 4.4,в и з) можно также воспользоваться одной из общепринятых форм уравнений линейного активно-четыреполюсника, например формой Y -параметров:

$$\begin{aligned} I_{\text{вх}} &= \frac{1}{\pm jX_{i_{\text{вх}}}} U_{\text{вх}} - \\ &- \frac{1}{\pm jX_{i_{\text{вх}}}} U_{i_{\text{вх}}} = Y_{11} (U_{\text{вх}} - U_{i_{\text{вх}}}); \\ I'_{\text{вх}} &= -\frac{H}{\pm jX_{i_{\text{вх}}}} |U_{\text{вх}}| + \frac{1}{\pm jX_{i_{\text{вх}}}} U_{\text{вх}} - \\ &- \frac{1}{\pm jX_{i_{\text{вх}}}} U_{i_{\text{вх}}} = Y_{21} |U_{\text{вх}}| + Y_{22} (U_{\text{вх}} - U_{i_{\text{вх}}}) \end{aligned} \quad (4.31)$$

или для случая, когда $U_{i_{\text{вх}}} = 0$ и $U_{\text{вх}} = 0$,

$$\begin{aligned} I_{\text{вх}} &= Y_{11} U_{\text{вх}}; \\ I'_{\text{вх}} &= Y_{21} |U_{\text{вх}}| + Y_{22} U_{\text{вх}}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Схемы замещения четырехполюсника, соответствующие уравнениям (4.31) и (4.32), приведены на рис. 4.5,а и б.

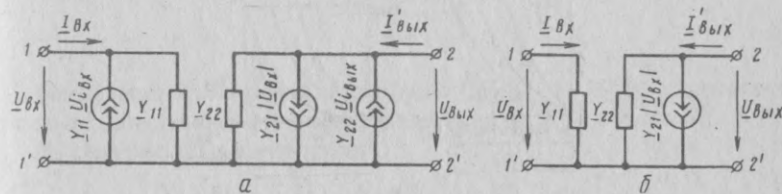


Рис. 4.5

Аналогично получают систему уравнений в форме Z -параметров, H -параметров и т.д. Источники тока можно заменить источниками напряжения, но всегда линеаризованный направленный четырехполюсник с зависимыми источниками будет определяться тремя параметрами (например, H , $X_{i_{\text{вх}}}$ и $X_{i_{\text{вх}}}$).

§ 4.4. Графический расчет квазилинейных цепей с ненаправленными четырехполосниками

Для расчета цепи с ненаправленным четырехполосником НЧ, вход и выход которого имеют реактивный характер (рис. 4.6), т.е. для определения токов $I_{ВХ}$ и $I_{ВЫХ}$, можно воспользоваться графическим методом (см. § 2.5).

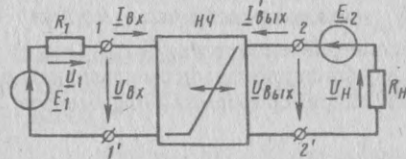


Рис. 4.6

В данном случае применяется та же последовательность графических построений, только вместо прямых нагрузочных линий на рис. 2.11, в и г необходимо построить эллипсы с полуосями соответственно E_2/R_N и E_1/R_1 .

§ 4.5. Расчет квазилинейных цепей с ненаправленными четырехполосниками методом компенсации

Рассмотрим цепь с ненаправленным четырехполосником НЧ (рис. 4.6), характеристики которого показаны на рис. 4.7, а и б. Пусть вход и выход этого четырехполосника имеют реактивный характер.

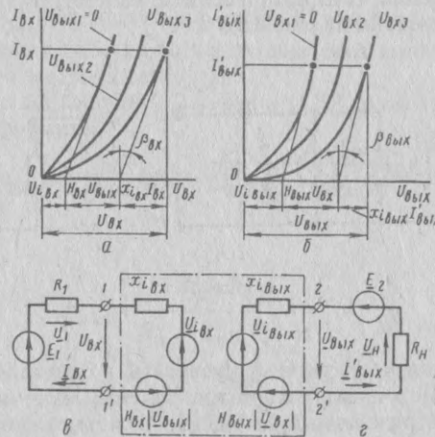


Рис. 4.7

Из входных характеристик четырехполосника (рис. 4.7, а) при расчете цепи методом компенсации следует уравнение входного напряжения

$$U_{ВХ} = U_{i_{ВХ}} + H_{ВХ} U_{ВЫХ} + X_{i_{ВХ}} I_{ВХ} \quad (4.33)$$

$H_{ВХ} = \Delta U_{ВХ} / \Delta U_{ВЫХ}$ — коэффициент передачи четырехполосника по напряжению при разомкнутых входных зажимах.

Для выходного напряжения

$$U_{ВЫХ} = U_{i_{ВЫХ}} + H_{ВЫХ} U_{ВХ} + X_{i_{ВЫХ}} I_{ВЫХ} \quad (4.34)$$

$H_{ВЫХ} = \Delta U_{ВЫХ} / \Delta U_{ВХ}$ — коэффициент передачи четырехполосника по напряжению при разомкнутых выходных зажимах.

Согласно (4.33) и (4.34) можно составить схему замещения для четырехполосника, а также для всей цепи в целом: входной ее части (рис. 4.7, в) и выходной части (рис. 4.7, г). Влияние выхода на вход и входа на выход осуществляется соответственно через зависимые источники напряжения $H_{ВХ} |U_{ВЫХ}|$ и $H_{ВЫХ} |U_{ВХ}|$. Четырехполосник, представленный данной схемой замещения, в отличие от исходного (см. рис. 4.6) является линейным.

Фаза напряжения $U_{i_{ВХ}}$ и комплексного коэффициента $H_{ВХ}$ всегда совпадает с фазой составляющей $\pm jX_{i_{ВХ}} I_{ВХ}$, а напряжения $U_{i_{ВЫХ}}$ и $H_{ВЫХ}$ — с фазой составляющей $\pm jX_{i_{ВЫХ}} I_{ВЫХ}$. Таким образом, фазовые сдвиги для входной цепи определяются соотношением

$$\frac{I_{ВХ} < \pm 90^\circ}{I_{ВХ}},$$

для выходной цепи

$$\frac{I_{ВЫХ} < \pm 90^\circ}{I_{ВЫХ}}.$$

Скопители зависимых источников $|U_{ВЫХ}|$ и $|U_{ВХ}|$ учитываются только по модулю и на фазы напряжений $U_{ВХ}$ и $U_{ВЫХ}$ не влияют.

Из схем рис. 4.7, в и г получаем

$$\begin{aligned} E_1 &= R_1 I_{ВХ} + U_{i_{ВХ}} + H_{ВХ} |U_{ВЫХ}| \pm jX_{i_{ВХ}} I_{ВХ}; \\ E_2 &= R_N I_{ВЫХ} + U_{i_{ВЫХ}} + H_{ВЫХ} |U_{ВХ}| \pm jX_{i_{ВЫХ}} I_{ВЫХ}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Записав комплексные величины уравнений (4.35) в алгебраической форме и разделив действительные и мнимые части, получим систему, состоящую из четырех уравнений. Решая эту систему, например, по правилу Крамера, определим действительные и мнимые части входного и выходного токов, затем комплексные значения этих токов и далее — напряжения $U_{ВХ}$, $U_{ВЫХ}$, U_1 и U_N .

Из схем замещения рис. 4.7, *в* и *г* можно также получить любую общепринятую форму уравнений активного четырехполюсника и использовать их для расчета, например, в форме *Y*-параметров:

$$\begin{aligned} I_{\text{ВХ}} &= \frac{1}{\pm jX_{i_{\text{ВХ}}}} U_{\text{ВХ}} - \frac{H_{\text{ВХ}}}{\pm jX_{i_{\text{ВХ}}}} |U_{\text{ВЫХ}}| - \\ &- \frac{1}{\pm jX_{i_{\text{ВХ}}}} U_{i_{\text{ВХ}}} = Y_{11} (U_{\text{ВХ}} - U_{i_{\text{ВХ}}}) + Y_{12} |U_{\text{ВЫХ}}|; \\ I_{\text{ВЫХ}} &= -\frac{H_{\text{ВЫХ}}}{\pm jX_{i_{\text{ВЫХ}}}} |U_{\text{ВХ}}| + \frac{1}{\pm jX_{i_{\text{ВЫХ}}}} U_{\text{ВЫХ}} - \\ &- \frac{1}{\pm jX_{i_{\text{ВЫХ}}}} U_{\text{ВЫХ}} = Y_{21} |U_{\text{ВХ}}| + Y_{22} (U_{\text{ВЫХ}} - U_{i_{\text{ВЫХ}}}) \end{aligned} \quad (4.36)$$

или для случая, когда $U_{i_{\text{ВХ}}} = 0$ и $U_{i_{\text{ВЫХ}}} = 0$,

$$\begin{aligned} I_{\text{ВХ}} &= Y_{11} U_{\text{ВХ}} + Y_{12} |U_{\text{ВЫХ}}|; \\ I_{\text{ВЫХ}} &= Y_{21} |U_{\text{ВХ}}| + Y_{22} U_{\text{ВЫХ}}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Из (4.36) и (4.37) видно, что линеаризованный ненаправленный четырехполюсник характеризуется четырьмя взаимно независимыми параметрами Y_{11} , Y_{12} , Y_{21} и Y_{22} ($H_{\text{ВХ}}$, $H_{\text{ВЫХ}}$, $X_{i_{\text{ВХ}}}$ и $X_{i_{\text{ВЫХ}}}$).

На рис. 4.8, *а* и *б* приведены Π -образные схемы замещения, соответствующие уравнениям (4.36) и (4.37).

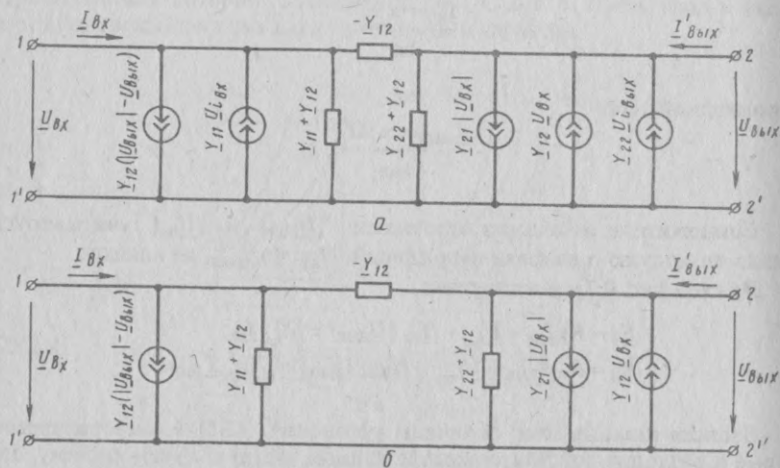


Рис. 4.8

В случае необходимости можно получить системы уравнений в форме *Z*-параметров, *H*-параметров и т.д., заменить Π -образную схему замещения

T-образной, от источников тока перейти к источникам напряжения, но всегда линеаризованный ненаправленный четырехполюсник с зависимыми источниками будет определяться четырьмя параметрами.

§ 4.6. Расчет цепей с направленными четырехполюсниками, имеющими идеализированные выходные характеристики

Как указывалось в § 1.4, ток в цепи может иметь релейный характер, если дифференциальное сопротивление соответствующих участков ВАХ отрицательное.

Рассмотрим сначала направленный четырехполюсник, у которого входное и выходное сопротивления, а также нагрузка являются резистивными.

Для упрощения расчета воспользуемся методом пусковых характеристик, который служит для определения угла начала импульса тока и сочетается с методом приспособывания. Суть метода пусковых характеристик заключается в том, что выходное сопротивление четырехполюсника до точки перегиба принимают равным бесконечности, а после точки перегиба — равным нулю, т.е. вместо семейства характеристик рис. 4.9, *а* рассматривают семейство идеализированных характеристик рис. 4.9, *б*. При необходимости всегда можно учесть то приблизительно постоянное по величине падение напряжения U_0 (рис. 4.9, *а*), которое возникает при прохождении в выходной цепи тока.

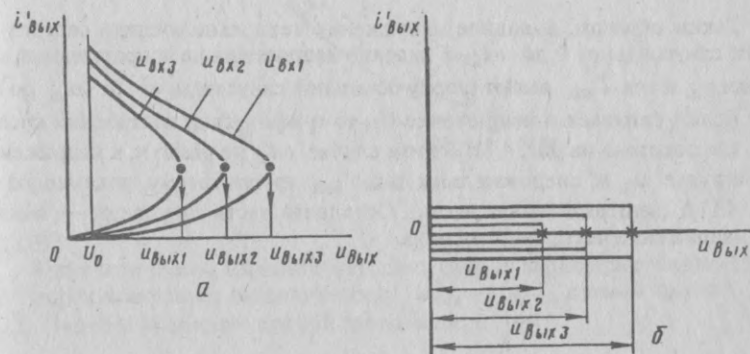


Рис. 4.9

Графически пусковую характеристику находят из семейства выходных характеристик как зависимость $u_{\text{ВЫХ}} = f_1(u_{\text{ВХ}})$ (рис. 4.10, *а*) или $u_{\text{ВЫХ}} = f_2(i_{\text{ВХ}})$, где значения $u_{\text{ВЫХ}}$ соответствуют точкам перегиба на рис. 4.9, *а*: $u_{\text{ВЫХ}1}$, $u_{\text{ВЫХ}2}$, $u_{\text{ВЫХ}3}$. Физический смысл пусковой характеристики определяется как зависимость наименьших значений выходных напряжений, при которых выходное сопротивление четырехполюсника изменяется от

бесконечности до нуля, от величины сигнала (напряжения или тока) на входе.

Графический расчет выходной цепи осуществляется следующим образом. Сначала строят пусковую характеристику (рис. 4.10,а), получаемую либо экспериментально, либо, как уже было показано, с помощью семейства выходных характеристик. Вид пусковых характеристик зависит от их положения относительно начала координат для реальных нелинейностей и, естественно, может отличаться от полученных на рис. 4.10,а. Если теперь отложить на оси абсцисс входное напряжение $u_{вх}$ и перенести точку пересечения его с пусковой характеристикой на синусоиду ЭДС источника питания $e_2 = E_{2m} \sin \omega t$ (рис. 4.10,б), можно определить угол начала импульса $\omega t_{н}$, с которого в цепи начинает проходить ток. Угол прекращения тока в цепи $\omega t_{п}$ равен π , т.к. в этот момент ЭДС e_2 равна нулю.

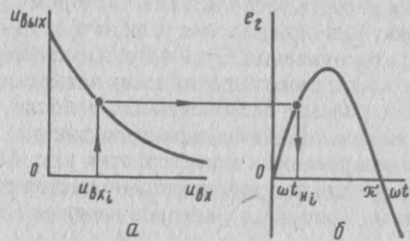


Рис. 4.10

Таким образом, выходное напряжение четырехполюсника состоит из части синусоиды от 0 до $\omega t_{н}$, а падение напряжения на сопротивлении нагрузки $u_{н}$ и ток $i'_{вых}$ имеют форму остальной синусоиды, т.е. от $\omega t_{н}$ до π .

Если учитывается напряжение U_0 , то графические построения проводят, как показано на рис. 4.11. В этом случае $\omega t_{п}$ не равно π , а напряжение на нагрузке $u_{н}$ и, следовательно, ток $i'_{вых}$ имеют форму, показанную на рис. 4.11,б (заштрихованная часть). Остальная часть синусоиды — выходное напряжение четырехполюсника.

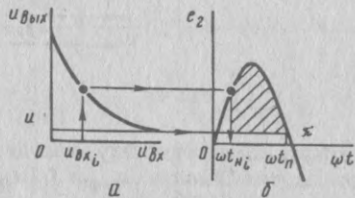


Рис. 4.11

Зная форму несинусоидальных функций (рис. 4.10,б и 4.11,б), можно разложить кривые в ряд Фурье и определить средние значения функций,

основную гармонику и т.д. Для метода пусковых характеристик можно составить две схемы замещения (рис. 4.12,а и б). На первой выходная часть четырехполюсника представлена в виде ключа K , который замыкается при $\omega t_{н}$ и размыкается при $\omega t_{п} = \pi$ ($U_0 = 0$), тем самым имитируя в определенные промежутки времени выходное сопротивление четырехполюсника, равное нулю или бесконечности. Если необходимо учесть напряжение U_0 , в схему замещения должен быть введен источник ЭДС U_0 и еще один ключ K_2 , размыкающийся одновременно с замыканием ключа K_1 (рис.

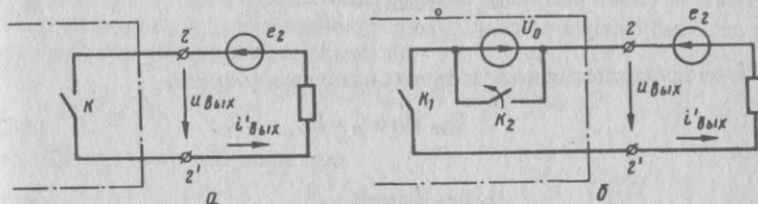


Рис. 4.12

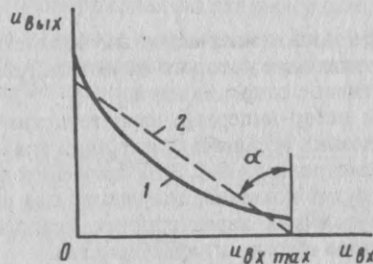


Рис. 4.13

4.12,б).

В аналитическом варианте метода пусковых характеристик необходимо аппроксимировать характеристику $u_{вых} = f(u_{вх})$ прямой линией (рис. 4.13). Записав уравнение прямой линии в виде

$$u_{вх} = U_{вх\max} - k u_{вых} \quad (4.38)$$

(где k — коэффициент, определяемый тангенсом угла наклона аппроксимирующей прямой α), для неизменного по величине входного сигнала $u_{вх}$, получим методом припасовывания угол начала импульса тока $\omega t_{н}$ из следующего уравнения:

$$u_{вх} = U_{вх\max} - k E_{2m} \sin \omega t_{н}. \quad (4.39)$$

Отсюда

$$\omega t_{Н_1} = \arcsin \left(\frac{U_{ВХ_{\max}} - u_{ВХ_1}}{kE_{2m}} \right). \quad (4.40)$$

Для случая, когда входным сигналом является ток, а не напряжение, из уравнения прямой линии ($i_{ВХ} = I_{ВХ_{\max}} - ku_{ВХ}$) угол $\omega t_{Н_1}$ определим аналогично:

$$\omega t_{Н_1} = \arcsin \left(\frac{I_{ВХ_{\max}} - i_{ВХ_1}}{kE_{2m}} \right). \quad (4.41)$$

Угол прекращения импульса тока находим из условия

$$E_{2m} \sin \omega t_{П} = U_0, \quad (4.42)$$

откуда

$$\omega t_{П} = \arcsin \frac{U_0}{E_{2m}}. \quad (4.43)$$

Из (4.43) видно, что для случая $U_0 = 0$ функция \arcsin равна нулю, а $\omega t_{П} = \pi$.

Рассмотрим теперь цепь с направленным четырехполюсником, входное и выходное сопротивления которого имеют индуктивный характер, а нагрузкой является активное сопротивление.

Приняв выходные вебер-амперные характеристики прямоугольными (рис. 4.14), для определения угла начала импульса тока можно воспользоваться способом, рассмотренным в § 3.10 применительно к реактивным двухполюсникам. Как будет показано, допущения при использовании идеализированных прямоугольных характеристик аналогичны допущениям при использовании метода пусковых характеристик.

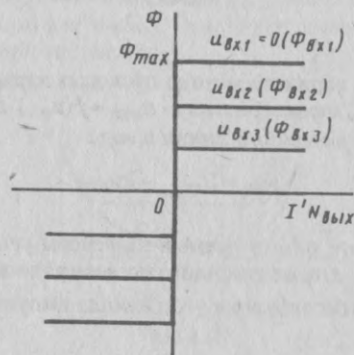


Рис. 4.14

При нулевом входном сигнале, применяя последовательность рассуждений § 3.10 (уравнения (3.50) — (3.54)), получим

$$\omega t_{Н_0} = \arccos \left(\frac{E_{2m} - 4\pi f N_{ВХ} \Phi_{\max}}{E_{2m}} \right). \quad (4.44)$$

Появление на входе четырехполюсника сигнала $u_{ВХ}$ приведет к изменению магнитного состояния четырехполюсника, который теперь будет перемещаться в пределах $\pm \Phi_{\max}$. В этом случае для изменения магнитного состояния выходной цепи на противоположное должно быть создано несколько меньшее приращение потока:

$$\Delta \Phi_i = 2\Phi_{\max_i} = 2\Phi_{\max} - \Phi_{ВХ_i} \quad (4.45)$$

откуда угол начала импульса тока

$$\omega t_{Н_1} = \arccos \left[\frac{E_{2m} - 2\pi f N_{ВХ} (2\Phi_{\max} - \Phi_{ВХ_1})}{E_{2m}} \right]. \quad (4.46)$$

Величина $\Phi_{ВХ_i}$ пропорциональна входному сигналу $u_{ВХ}$.

Если входное и выходное сопротивления четырехполюсника имеют емкостный характер, то по аналогии с уравнением (3.62) для нулевого входного сигнала можно записать:

$$\omega t_{Н_0} = \arccos \left(\frac{I'_{ВХ_{\max}} - 4\pi f S D_{\max}}{I'_{ВХ_{\max}}} \right). \quad (4.47)$$

При ненулевом входном сигнале

$$\omega t_{Н_1} = \arccos \left[\frac{I'_{ВХ_{\max}} - 4\pi f S (2D_{\max} - D_{ВХ_1})}{I'_{ВХ_{\max}}} \right], \quad (4.48)$$

т.е. получаем выражение, аналогичное по структуре (4.46).

В свою очередь, выражения (4.46) и (4.48) по структуре близки к (4.40) и (4.41), и можно сделать вывод, что рассмотренный метод является по существу вариантом метода пусковых характеристик. На основании соответствия указанных двух пар уравнений нетрудно убедиться, что и в случае реактивных четырехполюсников возможно применение графического варианта расчета, подобно выполненному на рис. 4.10. Разница состоит лишь в том, что здесь должны быть использованы косинусоиды $\Phi_1 = f_1(\omega t)$ и $D_1 = f_2(\omega t)$ как интегральные кривые от синусоид в соответствии с (3.50) и (3.58). Пусковые характеристики при этом представляют собой зависимости $\Phi = \varphi_1(u_{ВХ})$ и $D = \varphi_2(i_{ВХ})$ соответственно. Во многих случаях параметры выбирают так, что в отсутствие входного сигнала соблюдается условие

$$\omega t_{Н_0} = \pi, \quad (4.49)$$

т.е. выходное сопротивление четырехполюсника равно бесконечности, а ток — нулю.

Подставив (4.49) в (4.44), можно определить значение Φ_{\max} . Оно будет равно амплитудному значению потока Φ_m :

$$\Phi_{\max} = \Phi_m = \frac{E_{2m}}{2\pi f N_{\text{ВЫХ}}} \quad (4.50)$$

Выражение (4.50) позволяет привести (4.46) к виду

$$\omega t_{\text{Н}} = \arccos \left(\frac{\frac{1}{2\pi f N_{\text{ВЫХ}}} E_{2m} - \Phi_{\text{ВХ}}}{\frac{1}{2\pi f N_{\text{ВЫХ}}} E_{2m}} \right) \quad (4.51)$$

Аналогичная подстановка (4.49) в (4.47) дает возможность преобразовать (4.48):

$$\omega t_{\text{Н}} = \arccos \left(\frac{\frac{1}{2\pi f R_{\text{Н}} S} E_{2m} - D_{\text{ВХ}}}{\frac{1}{2\pi f R_{\text{Н}} S} E_{2m}} \right), \quad (4.52)$$

$$E_{2m}/R_{\text{Н}} = I_{\text{ВЫХ}m}.$$

Выражения (4.40), (4.41) (4.51) и (4.52) могут быть записаны в виде обобщенной формулы

$$\omega t_{\text{Н}} = \arccos F \left(\frac{M - X_{\text{ВХ}}}{NE_{2m}} \right), \quad (4.53)$$

в которой F , M , N , и $X_{\text{ВХ}}$ представляют собой соответствующие члены исходных формул.

Заметим, что величины $\Phi_{\text{ВХ}}$ и $D_{\text{ВХ}}$ легко привести к соответствующим значениям входных токов и напряжений. Так, при синусоидальном входном сигнале

$$\Phi_{\text{ВХ}} = \frac{U_{\text{ВХ}m}}{\omega N_{\text{ВХ}}} \int_0^{\pi} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{U_{\text{ВХ}m}}{\pi f N_{\text{ВХ}}}, \quad (4.54)$$

при постоянном сигнале

$$\Phi_{\text{ВХ}} = \frac{U_{\text{ВХ}}}{\omega N_{\text{ВХ}}} \int_0^{\pi} d\alpha = \frac{U_{\text{ВХ}}}{2f N_{\text{ВХ}}}, \quad (4.55)$$

при линейно нарастающем сигнале

$$\Phi_{\text{ВХ}} = \frac{U_{\text{ВХ}}}{\omega^2 N_{\text{ВХ}}} \int_0^{\pi} \alpha \, d\alpha = \frac{U_{\text{ВХ}}}{8f^2 N_{\text{ВХ}}}. \quad (4.56)$$

Полученные ранее соотношения для определения углов начала и прекращения импульса тока позволяют определить средние и действующие значения функций, основную гармонику и т.д. Так, среднее значение выходного напряжения четырехполюсника для рис. 4.10,б

$$U_{\text{ВЫХ}cp} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega t_{\text{Н}}} E_{2m} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{E_{2m}}{\pi} (1 - \cos \omega t_{\text{Н}})$$

после замены $\cos \omega t_{\text{Н}}$ на $\sqrt{1 - \sin^2 \omega t_{\text{Н}}}$ и подстановки вместо $\sin \omega t_{\text{Н}}$ его значения, найденного из (4.39), будет иметь вид

$$U_{\text{ВЫХ}cp} = \frac{E_{2m}}{\pi} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{U_{\text{ВХ}max} - u_{\text{ВХ}}}{kE_{2m}} \right)^2} \right]. \quad (4.57)$$

Среднее значение напряжения на нагрузке находят аналогично:

$$U_{\text{Н}cp} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} E_{2m} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{E_{2m}}{\pi} (1 + \cos \omega t_{\text{Н}}) = \frac{E_{2m}}{\pi} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{U_{\text{ВХ}max} - u_{\text{ВХ}}}{kE_{2m}} \right)^2} \right]. \quad (4.58)$$

Получение безразрывных характеристик для схемы в целом ($u_{\text{ВЫХ}} = f(u_{\text{ВХ}})$ имеет плавный характер) позволяет линеаризовать их. Для цепей, содержащих четырехполюсники со скачкообразно меняющимися выходными параметрами, линеаризация возможна только при условии питания выходной части схемы от источника переменного напряжения (пилособразного, прямоугольного и синусоидального). Это явление называется *вибрационной линеаризацией*.

Необходимо отметить, что для более сложных схем можно применять хорошо развитые методы анализа цепей с переменными периодическими и скачкообразно меняющимися параметрами, если только идеализация на базе метода пусковых характеристик и сведение задачи к коммутирующему ключу в выходной части схемы (см. рис. 4.12,а и б) являются допустимыми.

Задачи

4.1. Для квазилинейной цепи с нелинейным направленным четырехполюсником (см. рис. 4.2,а), вход и выход которого имеют емкостный характер, заданы: $\underline{E}_1 = 4 \angle 30^\circ$ В, $R_1 = 125$ Ом, $\underline{E}_2 = 100 \angle 0^\circ$ В, $Z_H = R_H = 25$ Ом входная (табл. 4.1) и выходные (табл. 4.2) характеристики четырехполюсника.

Определить $I_{вх}$, $\underline{U}_{вх}$, \underline{U}_1 , $I_{вых}$, $\underline{U}_{вых}$, \underline{U}_H , используя метод эллипса. В каких пределах нужно менять ЭДС E_1 , чтобы в выходной цепи получить изменение тока $I_{вых}$ от 3,76 до 3,15 А?

Таблица 4.1

$U_{вх}, В$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4
$I_{вх}, мА$	0	12,5	18,5	23,5	27	30	32	35

Таблица 4.2

$I'_{вых}, А$	$I_{вх} = 10$ мА	$I_{вх} = 20$ мА	$I_{вх} = 30$ мА
	$U_{вых}, В$	$U_{вых}, В$	$U_{вых}, В$
0	0	0	0
1	15	21	31
2	24	34	47
3	30	44	60
4	35	52	70
5	40	60	80

Решение. Рассматривая входную цепь четырехполюсника, определим условный ток короткого замыкания

$$I_{вхк} = E_1 / R_1 = 4 / 125 = 0,032 \text{ А}$$

и построим на входной характеристике (рис. 4.15,а) часть эллипса с полуосями 4 В и 32 мА. Из рисунка найдем $I_{вх} = 27,3$ мА и $U_{вх} = 2,05$ В. Напряжения $U_1 = R_1 I_{вх} = 125 \cdot 0,0273 = 3,41$ В.

Сдвиг фаз между ЭДС \underline{E}_1 и входным током $I_{вх}$

$$\varphi = \arctg \frac{U_{вх}}{U_1} = \arctg \frac{2,05}{3,41} = \arctg 0,6011 = 31^\circ.$$

Тогда

$$\underline{I}_{вх} = 0,0273 \angle 61^\circ \text{ А}; \quad \underline{U}_1 = 3,41 \angle 61^\circ \text{ В}; \quad \underline{U}_{вх} = 2,05 \angle -29^\circ \text{ В}.$$

Условный ток короткого замыкания выходной цепи четырехполюсника $I_{выхк} = E_2 / R_H = 100 / 25 = 4$ А.

Построив на выходных характеристиках (рис. 4.15,б) часть эллипса с полуосями 100 В и 4 А и характеристику при $I_{вх} = 27,3$ мА, получим $I_{вых} = 3,25$ А и $U_{вых} = 57,5$ В. Напряжение $U_H = R_H I_{вых} = 25 \cdot 3,25 = 81,25$ В.

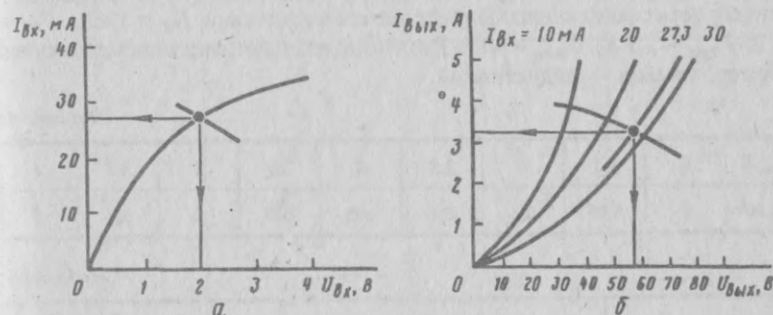


Рис. 4.15

Сдвиг фаз между ЭДС \underline{E}_2 и выходным током $I_{вых}$

$$\varphi = \arctg \frac{U_{вых}}{U_H} = \arctg \frac{57,5}{81,25} = \arctg 0,695 = 35^\circ.$$

С учетом этого угла

$$\underline{I}_{вых} = 3,25 \angle 35^\circ \text{ А}; \quad \underline{U}_{вых} = 57,5 \angle -55^\circ \text{ В}; \quad \underline{U}_H = 81,25 \angle 35^\circ \text{ В}.$$

Из выходных характеристик получаем, что для изменения выходного тока от 3,76 до 3,15 А необходимо изменять входной ток от 10 до 30 мА. При таких входных токах $U'_{вх} = 0,375$ В и $U''_{вх} = 2,5$ В, $U'_1 = 125 \cdot 0,01 = 1,25$ В и $U''_1 = 125 \cdot 0,03 = 3,75$ В.

Тогда

$$E'_1 = \sqrt{U'^2_{вх} + U'^2_1} = \sqrt{0,375^2 + 1,25^2} = 1,31 \text{ В};$$

$$E''_1 = \sqrt{U''^2_{вх} + U''^2_1} = \sqrt{2,5^2 + 3,75^2} = 4,5 \text{ В}.$$

Ответ. а) $\underline{I}_{вх} = 0,0273 \angle 61^\circ$ А; $\underline{U}_{вх} = 2,05 \angle -29^\circ$ В; $\underline{U}_1 = 3,41 \angle 61^\circ$ В;
 $\underline{I}_{вых} = 3,25 \angle 35^\circ$ А; $\underline{U}_{вых} = 57,5 \angle -55^\circ$ В; $\underline{U}_H = 81,25 \angle 35^\circ$ В;
 б) от 1,31 до 4,5 В.

4.2. Определить $I_{вх}$, $\underline{U}_{вх}$, \underline{U}_1 , $I_{вых}$, \underline{U}_H , если вход и выход нелинейного направленного четырехполюсника (см. рис. 4.2,а) имеют резистивный характер, а параметры схемы те же, что и в задаче 4.1.

Ответ. $I_{\text{вх}} = 0,0216 \angle 30^\circ \text{ А}$; $U_{\text{вх}} = 1,3 \angle 30^\circ \text{ В}$; $U_1 = 2,7 \angle 30^\circ \text{ В}$; $I_{\text{вых}} = 2,4 \angle 0^\circ \text{ А}$; $U_{\text{вых}} = 40 \angle 0^\circ \text{ В}$; $U_H = 60 \angle 0^\circ \text{ В}$.

4.3. Используя метод компенсации, определить параметры схемы замещения нелинейного направленного четырехполюсника (см. рис. 4.2,а), если рабочие точки на входной (табл. 4.3) и выходной (табл. 4.4) характеристиках четырехполюсника определяются значениями $I_{\text{вх}} = 5 \text{ мА}$, $U_{\text{вх}} = 4 \text{ В}$, $I_{\text{вых}} = 2,5 \text{ А}$, $U_{\text{вых}} = 40 \text{ В}$. Вход четырехполюсника имеет емкостный характер, а выход — индуктивный.

Таблица 4.3

$U_{\text{вх}}, \text{ В}$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$I_{\text{вх}}, \text{ мА}$	0	0,05	0,2	0,4	0,75	1,25	2	3,1	5

Таблица 4.4

$I'_{\text{вых}}, \text{ А}$	$U_{\text{вх}} = 0$	$U_{\text{вх}} = 2 \text{ В}$	$U_{\text{вх}} = 4 \text{ В}$
	$U_{\text{вых}}, \text{ В}$	$U_{\text{вых}}, \text{ В}$	$U_{\text{вых}}, \text{ В}$
0	0	0	0
0,5	8	15	22,5
1	12,5	22	30
1,5	15,5	25,5	34,5
2	18	28	37,5
2,5	20	30	40

Ответ. $U_{i_{\text{вх}}} = 3 \text{ В}$; $X_{i_{\text{вх}}} = 200 \text{ Ом}$; $U_{i_{\text{вых}}} = 10 \text{ В}$; $X_{i_{\text{вых}}} = 4 \text{ Ом}$; $H = 5$.

4.4. В цепь (рис. 4.2,а) включен нелинейный направленный четырехполюсник, схема замещения которого получена в задаче 4.3. Определить $I_{\text{вх}}$, $U_{\text{вх}}$, U_1 , $I_{\text{вых}}$, $U_{\text{вых}}$, U_H , если $E_1 = 6 \text{ В}$, $R_1 = 600 \text{ Ом}$, $E_2 = 100 \text{ В}$, $Z_H = R_H = 25 \text{ Ом}$. Написать выражения мгновенных значений входного и выходного токов при условии, что $e_1 = 8,46 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ В}$, а $e_2 = 141 \sin(\omega t - 15^\circ) \text{ В}$.

Ответ. $I_{\text{вх}} = 6,825 \text{ мА}$; $U_{\text{вх}} = 4,365 \text{ В}$; $U_1 = 4,095 \text{ В}$; $I_{\text{вых}} = 3,54 \text{ А}$; $U_{\text{вых}} = 46,6 \text{ В}$; $U_H = 88,5 \text{ В}$; $i_{\text{вх}} = 0,00963 \sin(\omega t + 91^\circ 50') \text{ А}$; $i'_{\text{вых}} = 4,99 \sin(\omega t - 42^\circ 40') \text{ А}$.

4.5. Для квазилинейной цепи (см. рис. 4.6) с нелинейным ненаправленным четырехполюсником, вход и выход которого имеют резистивный характер, заданы следующие значения: $E_1 = 5 \text{ В}$; $R_1 = 50 \text{ Ом}$; $E_2 = 100 \text{ В}$;

$L_H = 5,7 \text{ мГн}$; $f = 400 \text{ Гц}$. Входные и выходные характеристики четырехполюсника заданы соответственно в табл. 4.5 и 4.6.

Таблица 4.5

$I_{\text{вх}}, \text{ мА}$	$U_{\text{вх}} = 20 \text{ В}$	$U_{\text{вх}} = 40 \text{ В}$	$U_{\text{вх}} = 60 \text{ В}$
	$U_{\text{вх}}, \text{ В}$	$U_{\text{вх}}, \text{ В}$	$U_{\text{вх}}, \text{ В}$
0	0	0	0
10	2	1,2	0,65
20	2,75	1,85	1,1
40	3,7	2,7	1,75
60	4,25	3,3	2,3
80	4,75	3,75	2,8
90	5	4	3

Таблица 4.6

$U_{\text{вых}}, \text{ В}$	$U_{\text{вх}} = 0$	$U_{\text{вх}} = 1,5 \text{ В}$	$U_{\text{вх}} = 3 \text{ В}$	$U_{\text{вх}} = 4,5 \text{ В}$
	$I_{\text{вых}}, \text{ А}$	$I_{\text{вых}}, \text{ А}$	$I_{\text{вых}}, \text{ А}$	$I_{\text{вых}}, \text{ А}$
0	0	0	0	0
10	0,9	1,7	3	4,7
20	1,6	2,8	4,2	6
40	2,5	4,1	5,8	7,7
60	3,2	5	6,8	8,8
80	3,75	5,65	7,7	9,6
90	4	6	8	10

Определить графически токи и напряжения цепи.

Ответ. $I_{\text{вх}} = 53 \text{ мА}$; $U_{\text{вх}} = 2,35 \text{ В}$; $U_1 = 2,65 \text{ В}$; $I_{\text{вых}} = 5,8 \text{ А}$; $U_{\text{вых}} = 56 \text{ В}$; $U_H = 83 \text{ В}$.

4.6. Выходные характеристики нелинейного ненаправленного четырехполюсника (см. рис. 4.6) заданы в табл. 4.6. Определить параметры схемы замещения выходной цепи четырехполюсника, которая имеет резистивный характер, используя метод компенсации, если рабочая точка определяется следующими значениями: $I_{\text{вых}} = 7,7 \text{ А}$, $U_{\text{вых}} = 80 \text{ В}$.

Ответ. $U_{i_{\text{вх}}} = -60 \text{ В}$; $R_{i_{\text{вх}}} = 36 \text{ Ом}$; $H_{\text{вых}} = -48,66$.

4.7. У нелинейного направленного четырехполюсника (см. рис. 4.2,а) с отрицательным дифференциальным сопротивлением выходных характеристик вход и выход имеют резистивный характер. Определить графически и аналитически углы начала и прекращения импульса тока в выходной цепи, если $e_2 = 42,5 \sin \omega t$ В, а падение напряжения на четырехполюснике при прохождении тока в выходной цепи $U_0 = 4$ В. В момент начала импульса тока $u_{вх} = 0,225$ В. Зависимость $u_{вых}(u_{вх})$ представлена в табл. 4.7.

Таблица 4.7

$u_{вх}, В$	0	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,55
$u_{вых}, В$	50	44	38	27,5	17,5	10	5,5	4,5

Решение. Применив графический метод (рис. 4.16,а и б), получим $\omega t_H = 36^\circ$ и $\omega t_{II} = 174^\circ$.

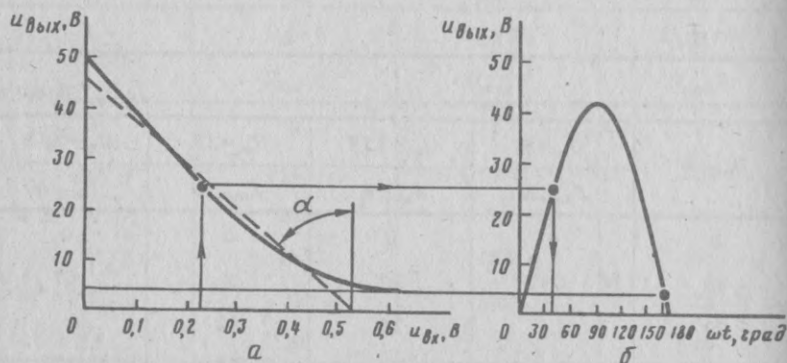


Рис. 4.16

Аналитически углы начала и прекращения импульса тока можно найти из (4.40) и (4.43), если аппроксимировать характеристику $u_{вых}(u_{вх})$ прямой линией, как показано на рис. 4.16,а.

Тогда

$$\omega t_H = \arcsin \left(\frac{0,525 - 0,225}{0,01168 \cdot 42,5} \right) = \arcsin 0,6064 = 37^\circ 20';$$

$$\omega t_{II} = \arcsin \frac{4}{42,5} = \arcsin 0,0944 = 174^\circ 35'.$$

Ответ. Графически — $\omega t_H = 36^\circ$; $\omega t_{II} = 174^\circ$; аналитически — $\omega t_H = 37^\circ 20'$; $\omega t_{II} = 174^\circ 35'$.

Глава 5

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

§ 5.1. Общая характеристика переходных процессов в нелинейных цепях

Переходные процессы в цепях с нелинейными двухполюсниками и четырехполюсниками описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, для которых не существует общих методов решения (даже для цепей первого и второго порядка найдены аналитические решения только для некоторых частных случаев). Очень важно то, что характер решения этих уравнений (в отличие от линейных уравнений) зависит от величин подводимых напряжений, а принцип наложения к нелинейным цепям неприменим. Для нелинейных цепей не существует стандартных сигналов, реакции на которые (например, на единичную функцию $1(t)$ или импульсную функцию $\delta(t)$) полностью определяли бы динамические свойства цепи. Прежний смысл понятий передаточной функции $H(p)$ и амплитудно-фазовой характеристики $H(j\omega)$ здесь также утрачен. В общем случае для определения свойств нелинейной цепи надо исследовать ее для всех возможных воздействий.

В то же время переходные процессы в нелинейных цепях намного разнообразнее, и некоторые особенности используются для разработки различных электротехнических устройств, реализация которых в линейных цепях невозможна.

Рассмотрим кратко ряд наиболее распространенных методов исследования переходных процессов в нелинейных цепях, иллюстрируемых, как правило, одним и тем же простым примером.

Проводимые оценки рассматриваемых методов не следует считать категорическими, т.к. приемлемость того или иного метода расчета зависит, во-первых, от особенностей конкретной задачи и, во-вторых, от уровня вычислительной техники, осуществляющей расчеты.

Следует отметить, что в нелинейных цепях (в отличие от линейных) ни один метод не должен применяться формально, без предварительного выяснения физических процессов в схеме.

§ 5.2. Метод интегрируемой аппроксимации

Этот метод применяется в том случае, если для нелинейности удастся подобрать приближенное аналитическое выражение, которое в данной кон-

кретной задаче приводит к дифференциальному уравнению, имеющему решение в аналитической форме. Это удается редко и лишь для уравнений невысокого порядка.

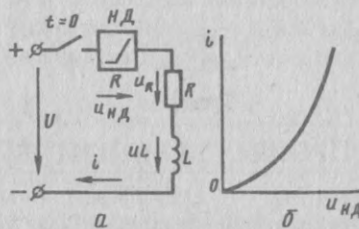


Рис. 5.1

В качестве примера рассмотрим расчет переходного процесса в схеме рис. 5.1,а где постоянное напряжение включается на последовательно соединенные нелинейный двухполюсник НД (R) и индуктивную катушку. Переходный процесс в цепи описывается нелинейным дифференциальным уравнением

$$u_L + u_R + u_{нд} = L \frac{di}{dt} + Ri + f(i) = U. \quad (5.1)$$

Предположим, что характеристика $i = f(u_{нд})$ (рис. 5.1,б) может быть аппроксимирована на некотором интервале параболой второго порядка $i = au_{нд}^2$ или $u = u_{нд} = \sqrt{i/a}$. Тогда дифференциальное уравнение примет вид

$$L \frac{d}{dt}(au^2) + Rau^2 + u = U \quad (5.2)$$

или

$$2Lau \frac{du}{dt} + Rau^2 + u = U. \quad (5.3)$$

Отсюда после разделения переменных получаем

$$t = -2La \int_0^u \frac{u}{Rau^2 + u - U} du = \frac{L}{R} \left(\ln \frac{U}{U - Ri - \sqrt{i/a}} + \frac{1}{\Delta} \ln \frac{2R\sqrt{ai} + 1 - \Delta}{2R\sqrt{ai} + 1 + \Delta} - \Lambda \right), \quad (5.4)$$

где $\Delta = \sqrt{4RaU + 1}$; $\Lambda = \frac{1}{\Delta} \ln \frac{1 - \Delta}{1 + \Delta}$.

Полученная функция $t = f(i)$ не может быть представлена как явная функция $i = \varphi(t)$, поэтому для построения графика $i = \varphi(t)$ необходимо задаться несколькими значениями i и определить соответствующие значения t .

§ 5.3. Метод графического интегрирования

Этот метод достаточно трудоемкий и используется для относительно простых случаев, например для расчета цепей, описываемых дифференциальными уравнениями с разделяемыми переменными, т.к. здесь возможно построение графика функции, кривая которого ограничивает площадь, пропорциональную соответствующему значению времени.

Рассмотрим применение метода графического интегрирования для расчета цепи рис. 5.1,а. Разделив переменные в уравнении (5.1)

$$dt = L \frac{1}{U - Ri - f(i)} di \quad (5.5)$$

и проинтегрировав левую и правую части по соответствующим переменным, с учетом нулевых начальных условий получим

$$t = \int_0^t dt = \int_0^i \frac{L}{U - Ri - f(i)} di. \quad (5.6)$$

Построив далее график зависимости

$$\varphi(i) = \frac{L}{U - Ri - f(i)}, \quad (5.7)$$

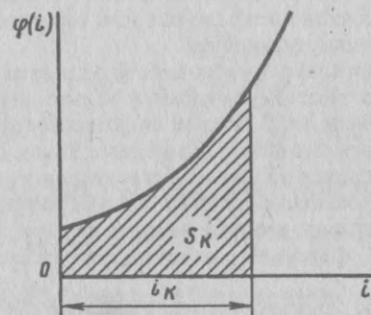


Рис. 5.2

по соответствующей площади (с учетом масштабов) найдем зависимость $t = f(i)$ (либо $i = \varphi(t)$), как показано для тока i_k на рис. 5.2.

§ 5.4. Метод фазовой плоскости

Обычно при исследовании переходных процессов в электрических цепях выясняют зависимость различных параметров цепи от времени и в соответствии с этим при построении графиков по оси абсцисс откладывают время t , а по оси ординат — исследуемые параметры: ток, напряжение, величину заряда и т.д. Однако те же явления можно рассматривать в иной системе координат: например, откладывать по оси абсцисс исследуемую величину (i, u, Q), а по оси ординат — скорость изменения этой величины во времени ($di/dt, du/dt, dQ/dt$).

Координатную плоскость, в которой по одной оси (как правило, по оси абсцисс) откладывают исследуемую величину x , а по другой (ось ординат) — скорость изменения этой величины во времени $y = dx/dt$, называют фазовой плоскостью. При таком подходе время в явном виде не присутствует на графике, но он дает полную информацию о процессе.

Переходный процесс на фазовой плоскости изображается некоторой прямой (или кривой), если он описывается дифференциальным уравнением не выше второго порядка. Для исследования цепей, описываемых уравнениями выше второго порядка, метод фазовой плоскости практически не пригоден.

Изменение состояния системы можно изображать движением некоторой точки на фазовой плоскости. Эту точку называют изображающей, или представляющей. Координаты изображающей точки x и y определяют ее положение на фазовой плоскости и характеризуют состояние процесса в рассматриваемый момент времени. С течением времени изображающая точка перемещается, описывая на фазовой плоскости линию, называемую фазовой траекторией. Вид фазовой траектории зависит от схемы и параметров цепи.

Для неперiodического процесса фазовая траектория представляет собой замкнутую кривую (для линейной цепи окружность или эллипс), описываемую изображающей точкой в течение каждого периода, для неперiodического процесса — незамкнутую кривую.

В верхней полуплоскости производная координаты $y > 0$, и, следовательно, изображающая точка перемещается только вправо — в направлении возрастающих значений x . В нижней полуплоскости $y < 0$, и изображающая точка может перемещаться только влево. Таким образом, изображающая точка всегда движется по фазовой траектории в направлении движения часовой стрелки. В зависимости от начальных условий получаются различные фазовые траектории, которые никогда не пересекаются. Так как на оси абсцисс $dx/dt = 0$, фазовые траектории пересекают эту ось под прямым углом.

Семейство фазовых траекторий, изображающих возможные в данной цепи процессы, называют фазовым портретом. Фазовый портрет позволяет охватить всю совокупность движений в рассматриваемой системе, которые могут возникнуть при различных начальных условиях. За-

ключение о характере движений может быть сделано без предварительного нахождения аналитических выражений интегралов исходных уравнений даже в том случае (что очень важно), когда эти выражения не могут быть получены.

Точки фазовой плоскости, в которых одновременно $dx/dt = 0$ и $dy/dt = 0$, называют особыми точками. Они соответствуют условиям равновесия (покоя) рассматриваемой цепи и могут быть устойчивыми или неустойчивыми.

Особую точку, через которую не проходит ни одна фазовая траектория и которую окружают замкнутые фазовые траектории, называют центром. Центр соответствует случаю безразличного равновесия.

Особая точка, являющаяся асимптотической для фазовых траекторий, называется фокусом. Фокус устойчивый, если изображающая точка приближается к нему, и неустойчивый, — если точка удаляется.

Особую точку, через которую проходят фазовые траектории, называют узлом. Если движение по фазовой траектории направлено к узлу, узел устойчивый, если движение направлено от узла — неустойчивый.

Для переходных процессов (колебательных, аперiodических и т.п.) в линейных цепях первого и второго порядков имеются фазовые портреты, с которыми можно сравнить полученный фазовый портрет исследуемой цепи. Для некоторых нелинейных цепей также существуют фазовые портреты, однако число разновидностей таких цепей велико, и создать для них фазовые портреты трудно.

Как правило, фазовые портреты составляют для цепей без источника питания, т.е. для свободного режима; в некоторых случаях можно получить фазовый портрет и с учетом принужденного режима.

Для построения графика зависимости $i(t)$ необходимо определить моменты времени, соответствующие точкам фазовой траектории. Промежуток времени Δt , в течение которого совершается переход от k -й точки (x_k, y_k) фазовой траектории к близкой к ней $(k+1)$ -й точке (x_{k+1}, y_{k+1}) , можно приближенно рассчитать следующим образом. Так как $y = dx/dt$, то

$$\Delta t = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{y} dx.$$

Обозначив $1/y = f(x)$, в соответствии с теоремой о среднем имеем

$$\Delta t = f(\xi) (x_{k+1} - x_k) = f(\xi) \Delta x \quad (x_k < \xi < x_{k+1}).$$

При небольшом интервале Δt и монотонном изменении y в этом интервале можно принять

$$f(\xi) \approx 1/y_{\text{ср}},$$

где

$$y_{\text{ср}} = \frac{y_k + y_{k+1}}{2}.$$

Тогда

$$\Delta t = \Delta x / y_{\text{ср}}.$$

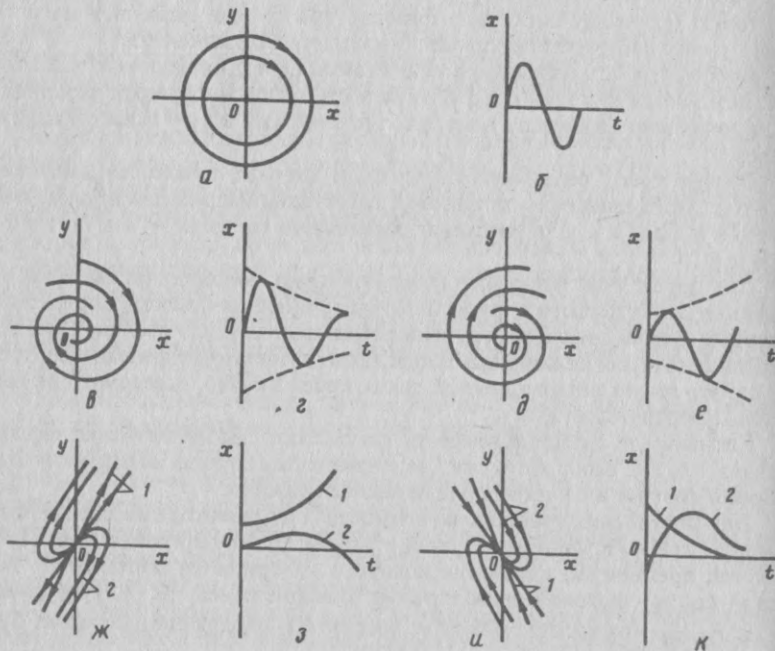


Рис. 5.3

На рис. 5.3 показаны некоторые фазовые портреты для линейных цепей (свободный режим) и особые точки, а также графики зависимостей $x = f(t)$ (для одной фазовой траектории), которые определяют соответствующие фазовые портреты.

Построим фазовую траекторию переходного процесса (с учетом принужденного режима) для схемы рис. 5.1, а.

Представив дифференциальное уравнение (5.1) в виде

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L} [U - Ri - f(i)] \quad (5.8)$$

и задавшись различными значениями i , найдем соответствующие значения di/dt (рис. 5.4). Полученный график свидетельствует об аperiodическом

характере переходного процесса с установившимися значениями $di/dt = 0$, $i = I_y$.

Из рис. 5.4 можно получить зависимость $i(t)$, если разбить участок оси абсцисс от 0 до I_y на малые интервалы Δi , найти для этих интервалов $y_{\text{ср}} = (di/dt)_{\text{ср}}$ и определить соответствующие значения Δt .

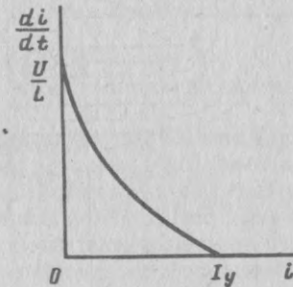


Рис. 5.4

§ 5.5. Метод последовательных приближений

Данный метод состоит в последовательном уточнении полученного первого приближения, нахождение которого составляет одну из основных трудностей метода.

Рассмотрим схему рис. 5.1, а. Для удобства расчета заменим нелинейный двухполюсник НД (R) и линейное сопротивление R эквивалентным нелинейным двухполюсником, воспользовавшись методом суммирования вольт-амперных характеристик (см. § 1.3). Характеристика эквивалентного двухполюсника $i(u_R + u_{\text{нд}})$ показана на рис. 5.5, б.

Дифференциальное уравнение такой цепи

$$u_L + u_{R_{\text{нд}}} = L \frac{di}{dt} + f_1(i) = U \quad (5.9)$$

нелинейно, однако в данном случае можно в первом (грубом) приближении линеаризовать его, заменив кривую $i(u_R + u_{\text{нд}})$ прямой линией $i'(u)$ (см. рис. 5.5, б), которая проходит через начало координат и точку на характеристике $i(u_R + u_{\text{нд}})$, соответствующую установившемуся режиму. Поскольку при этом все сопротивления линейные, установившийся ток

$$I = \frac{U}{R + R_{\text{нд}_{\text{ср}}}} = \frac{U}{R_{1\text{ср}}}, \quad (5.10)$$

где

$$R_{1\text{ср}} = \text{tg } \alpha.$$

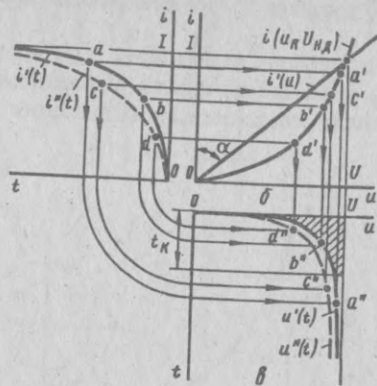


Рис. 5.5

Дифференциальное уравнение, описывающее процесс в такой цепи, линейно

$$L \frac{di'}{dt} + R_{1ct} i' = U \quad (5.11)$$

и, как известно, имеет решение

$$i' = I \left(1 - e^{-\frac{R_{1ct}}{L} t} \right) \quad (5.12)$$

Построив график зависимости $i'(t)$ в линейной цепи (рис. 5.5,а), используем нелинейную характеристику $i(u_R + u_{нд})$ для нахождения точки кривой $u'(t)$. Графическое построение зависимости $u'(t)$ показано на рис. 5.5 для точек a и b . Таким образом, проведен первый этап уточнения решения, поскольку для построения кривой $u'(t)$ использовалась не прямая линия $i'(u)$ (см. рис. 5.5,б), а исходная нелинейная характеристика $i(u_R + u_{нд})$.

График зависимости $u'(t)$ строят для дальнейшего уточнения решения, т.к. на основании (5.9)

$$i = \frac{1}{L} \int_0^t (U - u) dt, \quad (5.13)$$

и методом графического интегрирования находят для произвольного момента времени t_k (рис. 5.5, в) соответствующий ток (с учетом масштабов)

$$i_k = S_k / L. \quad (5.14)$$

Задаваясь значениями времени t_1, t_2, \dots , можно найти токи i_1, i_2 и построить на рис. 5.5,а новую кривую $i''(t)$, более точно выражающую зависимость тока от времени, чем приближенная функция (5.12). По этой кривой и нелинейной характеристике $i(u_R + u_{нд})$ строят зависимость $u''(t)$, как показано на рис. 5.5, для двух точек (c и d).

Далее опять задаются значениями времени и уточняют зависимость $i(t)$. Следует отметить, что этот метод требует проверки на сходимость.

§ 5.6. Метод сопряжения интервалов

Этот метод рассматривался при расчете квазиустановившихся режимов в цепях переменного тока (см. § 3.6). Напомним, что идея метода заключается в разбивке процесса на ряд следующих друг за другом интервалов, внутри которых переходный процесс может быть описан точно или приближенно линейным или интегрируемым нелинейным дифференциальным уравнением. Постоянные интегрирования этих уравнений определяют по граничным условиям исходя из требования непрерывности решения (эту операцию и называют сопряжением).

Метод сопряжения интервалов в принципе универсален, но для цепей высокого порядка и при длительно протекающем переходном процессе, а также при стремлении повысить точность расчета за счет уменьшения выбираемых интервалов вычисления становятся громоздкими. При расчете можно использовать цифровые вычислительные машины. В этом случае представляется наиболее удобным (негромоздким) описываемый ниже метод конечных приращений.

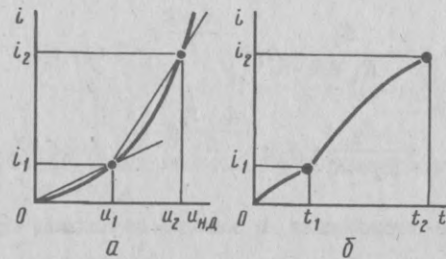


Рис. 5.6

Рассмотрим метод сопряжения интервалов применительно к схеме рис. 5.1,а. Разобьем вольт-амперную характеристику на участки. Это удобнее всего сделать, применив кусочно-линейную аппроксимацию (рис. 5.6,а). Тогда:

для первого участка

$$i = (i_1/u_1) u = u/R_1;$$

$$R_1 = u_1/i_1; \quad (5.15)$$

$$u = R_1 i; \quad (5.16)$$

для второго участка

$$i = i_1 + \frac{i_2 - i_1}{u_2 - u_1} (u - u_1) = i_1 + \frac{u - u_1}{R_2};$$

$$R_2 = \frac{u_2 - u_1}{i_2 - i_1}; \quad (5.17)$$

$$u = R_2 i + u_1 (1 - R_2/R_1). \quad (5.18)$$

Используя полученные значения, вместо (5.1) получим два линейных уравнения:

для первого участка

$$R_1 i + Ri + L \frac{di}{dt} = E = E_1 \begin{cases} 0 \leq i \leq i_1; \\ 0 \leq t \leq t_1; \end{cases} \quad (5.19)$$

для второго участка

$$R_2 i + Ri + L \frac{di}{dt} = E - u_1 \left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right) = E_2 \begin{cases} i_1 \leq i \leq i_2; \\ t_1 \leq t \leq t_2. \end{cases} \quad (5.20)$$

Решения дифференциальных уравнений для участков имеют следующий вид:

$$i = \frac{E_1}{R_1 + R} + A_1 e^{-\frac{R_1 + R}{L} t}, \quad 0 \leq t \leq t_1; \quad (5.21)$$

$$i = \frac{E_2}{R_2 + R} + A_2 e^{-\frac{R_2 + R}{L} (t - t_1)}, \quad t_1 \leq t \leq t_2. \quad (5.22)$$

Постоянную интегрирования A_1 находим из условия, что при $t = 0$ $i = 0$:

$$A_1 = -\frac{E_1}{R_1 + R}.$$

Тогда для первого участка получим

$$i = \frac{E_1}{R_1 + R} \left(1 - e^{-\frac{R_1 + R}{L} t}\right), \quad 0 \leq t \leq t_1. \quad (5.23)$$

Подстановка в (5.23) $i = i_1$ и $t = t_1$ дает

$$i_1 = \frac{E_1}{R_1 + R} \left(1 - e^{-\frac{R_1 + R}{L} t_1}\right). \quad (5.24)$$

Отсюда находим момент времени

$$t_1 = -\frac{L}{R_1 + R} \ln \left(1 - \frac{R_1 + R}{E_1} i_1\right). \quad (5.25)$$

Постоянную интегрирования A_2 определяем из уравнения тока для второго участка. При $t = t_1$ $i = i_1$

$$A_2 = i_1 - \frac{E_2}{R_2 + R}.$$

Уравнение тока для второго участка

$$i = \frac{E_2}{R_2 + R} + \left(i_1 - \frac{E_2}{R_2 + R}\right) e^{-\frac{R_2 + R}{L} (t - t_1)}, \quad t_1 \leq t \leq t_2. \quad (5.26)$$

Момент времени t_2 находим из условия, что при $i = i_2$ $t = t_2$. Тогда

$$i_2 = \frac{E_2}{R_2 + R} + \left(i_1 - \frac{E_2}{R_2 + R}\right) e^{-\frac{R_2 + R}{L} (t_2 - t_1)}, \quad (5.27)$$

отсюда

$$t_2 = t_1 - \frac{L}{R_2 + R} \ln \left[1 + \frac{R_2 + R}{E_2} (i_1 - i_2)\right]. \quad (5.28)$$

По уравнениям для токов различных участков можно построить зависимость $i = \varphi(t)$ (рис. 5.6,б).

§ 5.7. Метод конечных приращений (последовательных интервалов)

Этот наиболее общий метод (метод численного интегрирования) довольно трудоемок. Рассматриваемый интервал времени разбивают на достаточно малые промежутки времени Δt (шаг интегрирования) и в соответствии с этим дифференциалы величин, входящие в уравнения, заменяют их конечными приращениями в течение шага интегрирования. Вероятно, самый естественный переход от некоторого этапа решения дифференциального уравнения к следующему — это применение ряда Тейлора. Так как ряд Тейлора бесконечен, для практического применения необходимо ограничиться некоторым числом его членов. Если первое опу-

ценное слагаемое ряда Тейлора имеет порядок h^2 , метод носит название «метода Эйлера».

Точки, полученные численным решением дифференциального уравнения, можно нанести на график. При решении методом Эйлера экстраполяцию от каждой предыдущей точки к последующей производят исходя из предположения, что решение в интервале между вычисленными точками есть прямая линия. Для более точной экстраполяции используют кривую, определяемую алгебраическим уравнением, степень которого выше единицы. Эти действия лежат в основе метода, известного под названием «метод Адамса», при котором допускается экстраполяция решения на большем интервале и с большей точностью, чем возможно при использовании метода Эйлера. Зависимости, получаемые при вычислениях, становятся сложнее. Еще более точным является метод Рунге-Кутты, т.к. здесь погрешность на каждом шаге равна h^5 .

Таким образом, численные методы решения дифференциальных уравнений (Эйлера, Адамса, Рунге-Кутты) можно объединить под общим названием «метод конечных приращений» (последовательных интервалов).

Вернемся к схеме рис. 5.1,а. Характеристика нелинейного двухполюсника, входящего в эту схему, показана на рис. 5.7,а. Нелинейное дифференциальное уравнение (5.1) может быть представлено уравнением (5.8). Заменив производную di/dt отношением конечных приращений, получим приближенное уравнение

$$\Delta i \approx \frac{1}{L} [U - Ri - f(i)] \Delta t. \quad (5.29)$$

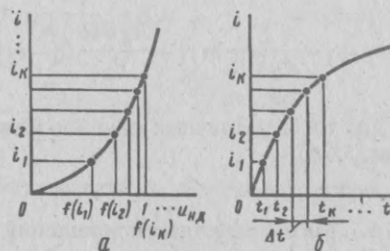


Рис. 5.7

Разобьем время переходного процесса на ряд одинаковых малых интервалов Δt . Тогда для любого $(k + 1)$ -го интервала $(k = 0, 1, 2, \dots)$

$$\Delta i_{k+1} = i_{k+1} - i_k \approx \frac{1}{L} [U - Ri_k - f(i_k)] \Delta t, \quad (5.30)$$

где i_k и i_{k+1} — мгновенные значения тока в начале и в конце рассматриваемого интервала времени.

Таким образом, можно шаг за шагом вычислить ряд мгновенных значений тока: по начальному значению i_0 определяют ток в конце первого интервала i_1 , по i_1 находят i_2 и т.д. (рис. 5.7,б).

Расчет удобно вести в табличной форме. Например, для рассматриваемой задачи составлена табл. 5.1. Решение получается тем точнее (см. рис. 5.7), чем меньше интервал времени Δt . Однако за счет роста суммарного количества интервалов увеличивается общая погрешность расчета, т.к. происходит постоянное наращивание ошибки, и все последующие вычисления зависят от погрешностей, вносимых при расчетах предшествующих интервалов. В этом состоит основной недостаток указанного метода. Поэтому, уменьшая интервал времени Δt , необходимо применять специально разработанные приемы коррекции ошибок, что, однако, приводит к еще большему увеличению числа расчетных операций. Для расчета на цифровых вычислительных машинах указанные интервалы могут быть выбраны весьма малыми.

Таблица 5.1

k	$t_k = k\Delta t$	i_k	Ri_k	$f(i_k)$	$U - Ri_k - f(i_k)$	Δi_{k+1}	$i_{k+1} = i_k + \Delta i_{k+1}$
0	0	$i_0 = 0$	0	0	U	Δi_1	$i_1 = \Delta i_1$
1	$t_1 = \Delta t$	i_1	Ri_1	$f(i_1)$	$U - Ri_1 - f(i_1)$	Δi_2	$i_2 = i_1 + \Delta i_2$
2	$t_2 = 2\Delta t$	i_2	Ri_2	$f(i_2)$	$U - Ri_2 - f(i_2)$	Δi_3	$i_3 = i_2 + \Delta i_3$
...
...

§ 5.8. Метод пространства состояний

Как известно, для расчета переходных процессов в нелинейных цепях необходимо решать дифференциальные уравнения цепи, записанные на основании первого и второго законов Кирхгофа. Эти уравнения могут быть составлены как в классической форме, так и в форме уравнений состояний.

Выбор переменных при записи уравнений Кирхгофа для нелинейных цепей имеет одну особенность: если в цепи есть нелинейные реактивные двухполюсники, то в качестве переменных иногда удобнее использовать потокосцепления и заряды, а не токи и напряжения, как в линейных цепях. Это объясняется тем, что часто бывают заданы вебер-амперная или кулон-вольтная характеристики нелинейных реактивных двухполюсников. Кроме того, если характеристики нелинейных двухполюсников содержат даже разрывы первого рода, потокосцепление и заряд не имеют скачков при работе на этих участках характеристики.

Порядок уравнения, описывающего нелинейную цепь, обычно совпадает с количеством реактивных линейных и нелинейных двухполюсников. Так, цепь с одним нелинейным реактивным двухполюсником (например,

индуктивным) описывается нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$f_1(d\Psi/dt, \Psi, t) = 0. \quad (5.31)$$

Это уравнение необходимо дополнить вебер-амперной характеристикой двухполюсника

$$\Psi = \Psi(i), \quad (5.32)$$

которая может быть задана аналитически, графически или в виде таблицы.

Уравнение (5.31) можно записать в нормальной форме (в форме уравнения состояния):

$$d\Psi/dt = f_2(\Psi, t). \quad (5.33)$$

Выбор той или иной формы записи нелинейного дифференциального уравнения обусловлен способом решения задачи. Так, в § 5.5 и 5.6 был использован классический метод решения переходных процессов.

Проиллюстрируем теперь расчет переходного процесса в цепи первого порядка, описанного уравнениями состояния, с помощью численного интегрирования. Рассмотрим цепь, содержащую нелинейный индуктивный двухполюсник и линейное сопротивление R , подключаемые к источнику напряжения U (рис. 5.8). Пусть задана вебер-амперная характеристика $\Psi = f_1(i)$ или $i = f_2(\Psi)$. Выбираем в качестве переменной состояния потокоцепления Ψ . Запишем уравнение состояния:

$$d\Psi/dt = U - Rf_2(\Psi). \quad (5.34)$$

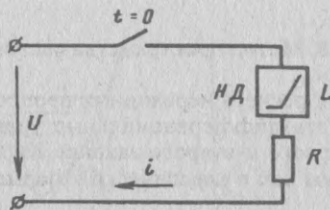


Рис. 5.8

Решение (5.34) имеет вид

$$\Psi = \Psi(0) + \int_0^t U dt - R \int_0^t f_2(\Psi) dt. \quad (5.35)$$

Будем решать уравнение (5.35) численно, полагая, что на шаге интегрирования T ток $i = f_2(\Psi)$ постоянен. Тогда для некоторого k -го шага интегрирования получим

$$\Psi[(k+1)T] = \Psi(kT) + UT - Ri(kT)T,$$

где

$$i(kT) = f_2[\Psi(kT)]. \quad (5.36)$$

Как видно из структуры (5.36), для решения исходного уравнения (5.34) используют метод конечных приращений (последовательных интервалов), рассмотренный в § 5.7.

Рассчитаем теперь переходный процесс в схеме рис. 5.1,а, где нелинейный резистивный двухполюсник задан вольт-амперной характеристикой, приведенной на рис. 5.1,б. Здесь в качестве переменной состояния можно выбрать ток i . Запишем уравнение состояния

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i + \frac{1}{L}U - \frac{1}{L}U_{нд}(i), \quad (5.37)$$

где $U_{нд}(i)$ — характеристика нелинейного двухполюсника.

Решение (5.37) имеет вид

$$i = e^{-\frac{R}{L}t} i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)} U d\tau - \frac{1}{L} \int_0^t e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)} U_{нд}(i) d\tau, \quad (5.38)$$

$i(0)$ — начальное условие.

Приняв то же допущение (постоянство напряжения на нелинейном двухполюснике на шаге интегрирования), получим расчетную формулу:

$$i[(k+1)T] = e^{-\frac{R}{L}T} i(kT) + \frac{1}{L} \left(e^{-\frac{R}{L}T} - 1 \right) \left(-\frac{L}{R} \right) U - \frac{1}{L} \left(e^{-\frac{R}{L}T} - 1 \right) \left(-\frac{L}{R} \right) U_{нд}(kT). \quad (5.39)$$

Цепь второго порядка описывается двумя нелинейными дифференциальными уравнениями первого порядка или одним уравнением второго порядка. Пусть в схеме рис. 5.9 все три двухполюсника нелинейные. Их характеристики описываются следующими зависимостями:

$$U_1 = f_1(i) \text{ или } i = f_2(U_1); \quad (5.40)$$

$$\Psi = f_3(i) \text{ или } i = f_4(\Psi); \quad (5.41)$$

$$Q = f_5(u_3) \text{ или } u_3 = f_6(Q). \quad (5.42)$$

Далее для этой цепи можно записать уравнения

$$dQ/dt = f_4(\Psi); \quad (5.43)$$

$$f_1(i) + d\Psi/dt + f_6(Q) = U. \quad (5.44)$$

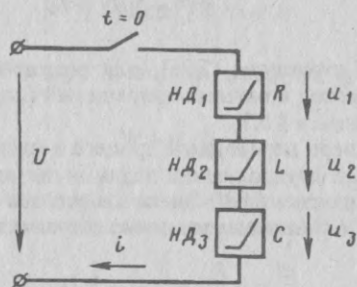


Рис. 5.9

Эта система может быть приведена к одному нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка. Дифференцируя уравнение (5.44) (по правилу дифференцирования неявных функций) и подставляя в него (5.43), получим

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} + \left[\frac{\partial f_1}{\partial i} \frac{\partial f_4}{\partial \Psi} \right] \frac{d\Psi}{dt} + \frac{\partial V_6}{\partial Q} f_4(\Psi) = U. \quad (5.45)$$

Систему (5.45) можно записать в форме уравнений состояний

$$\begin{aligned} dQ/dt &= f_4(\Psi); \\ d\Psi/dt &= -f_1[f_4(\Psi)] - f_6(Q) + U. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Цепь, содержащая n нелинейных реактивных двухполюсников, описывается в общем случае системой n нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Если переменные являются переменными состояниями, то уравнения состояния цепи в матричной форме имеют вид

$$dX/dt = A(X)X + BW, \quad (5.47)$$

где X — вектор (матрица) состояния порядка n , включающий токи индуктивных двухполюсников и напряжения емкостных двухполюсников (или потокосцепления и заряды); $A(X)$ — вектор (матрица) коэффициентов размером $n \times n$, элементы которой зависят от переменных состояния; B — вектор (матрица) постоянных коэффициентов размером $m \times n$ (m — число источников напряжений и тока); W — вектор (матрица) источников напряжения и тока.

§ 5.9. Методы усреднения

Эти частные и приближенные методы основаны на следующем всегда возможном допущении: параметр цепи в некотором интервале вре-

мени меняется незначительно, и поэтому может быть принят для этого интервала постоянным, равным его значению.

Примитивный вариант такого подхода был использован в § 5.5 для нахождения первого приближения, где сопротивление нелинейного двухполюсника сначала было принято постоянным для всего времени протекания переходного процесса (сопротивление определялось грубо, т.к. усреднялось только по начальному и конечному значениям).

Наиболее широко эти методы используются для цепей переменного и вообще периодически меняющегося тока, в которых какая-то координата цепи (огibaющая амплитуд синусоиды, постоянная составляющая) меняется медленно и в пределах периода может быть принята постоянной.

Для случая медленного изменения огibaющей амплитуд применяется вариант метода усреднения, называемый методом медленно меняющихся амплитуд. Математические операции метода сводятся к тому, что выражение для огibaющей представляют в виде гармонического ряда и уравнение цепи интегрируют в пределах периода. Тогда все гармонические члены будут равны нулю, и остается только достаточно простое приближенное решение, соответствующее постоянным членам и показывающее изменение амплитуды основной (первой) гармоники в переходном процессе (без учета составляющих).

Для цепи периодического тока с постоянной составляющей метод усреднения (метод медленно меняющейся постоянной составляющей) дает приближенное решение для закона изменения постоянной составляющей (без учета переменных составляющих).

Задачи

5.1. Нелинейный резистивный двухполюсник, ВАХ которого выражается уравнением $i = 0,0315u^{3/2}$, включен последовательно с индуктивностью $L = 0,021$ Гн. Установить связь между напряжением на нелинейном двухполюснике и временем при подключении этой цепи к источнику постоянного напряжения $U = 16$ В. Задачу решить методом интегрируемой аппроксимации.

5.2. Нелинейный индуктивный двухполюсник, характеристика которого описывается уравнением $i = a\Psi^4$ (где $a = 625 \cdot 10^4$), соединен последовательно с сопротивлением $R = 50$ Ом. Определить закон изменения тока в цепи при включении ее на постоянное напряжение $U = 12$ В. Задачу решить методом интегрируемой аппроксимации.

5.3. В цепи, представляющей собой последовательное соединение нелинейного двухполюсника и линейного сопротивления, ключ замыкается в момент времени $t = 0$. Определить закон изменения тока в цепи, если $U = 50$ В, $R = 25$ Ом. Нелинейный двухполюсник имеет индуктивный характер (зависимость потокосцепления от тока приведена в табл. 5.2). Задачу решить методом сопряжения интервалов.

Таблица 5.2

i, A	0	0,2	0,5	0,7	0,8	1,0	1,2	1,5	2,0	2,5
$\Psi \cdot 10^{-4}, Вб$	0	0,45	1,05	1,45	1,6	1,8	1,88	1,95	1,99	2,0

5.4. Последовательно соединенные индуктивность $L = 0,02$ Гн и нелинейный резистивный двухполюсник подключены к источнику постоянного напряжения $U = 20$ В. В момент времени $t = 0$ источник отключается, а цепь закорачивается. Определить закон изменения тока в индуктивности. Характеристика нелинейного двухполюсника задана в табл. 5.3. Задачу решить методом графического интегрирования.

Таблица 5.3

$u, В$	0	5	10	20	30	40
i, A	0	0,15	0,23	0,3	0,32	0,33

5.5. Конденсатор, емкость которого $C = 100$ мкФ, заряжен до напряжения $U = 40$ В. Определить ток при разряде этого конденсатора на нелинейный резистивный двухполюсник (характеристика задана в табл. 5.4). Задачу решить методом последовательных приближений.

Таблица 5.4

$u, В$	0	5	10	20	30	40
i, A	0	0,05	0,11	0,22	0,295	0,33

Решение. Линеаризуем вольт-амперную характеристику нелинейного двухполюсника, как показано на рис. 5.10,б, и найдем зависимость $u_{нд}(t) = u_R(t)$ для линейной цепи. Решение уравнения для RC -цепи в свободном режиме будет иметь вид

$$u_{R_0} = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{t}{RC}},$$

где $R = 40/0,33 = 121,2$ Ом; $RC = 121,2 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 0,012$ с.

Используя независимые начальные условия $u_C(0) = 40$ В и уравнение цепи $u_C + u_R = 0$, найдем (учитывая, что принужденная составляющая напряжения равна нулю)

$$u_R = -40e^{-83,3t} В,$$

или, для удобства построений,

$$u_R = 40e^{-83,3t} В.$$

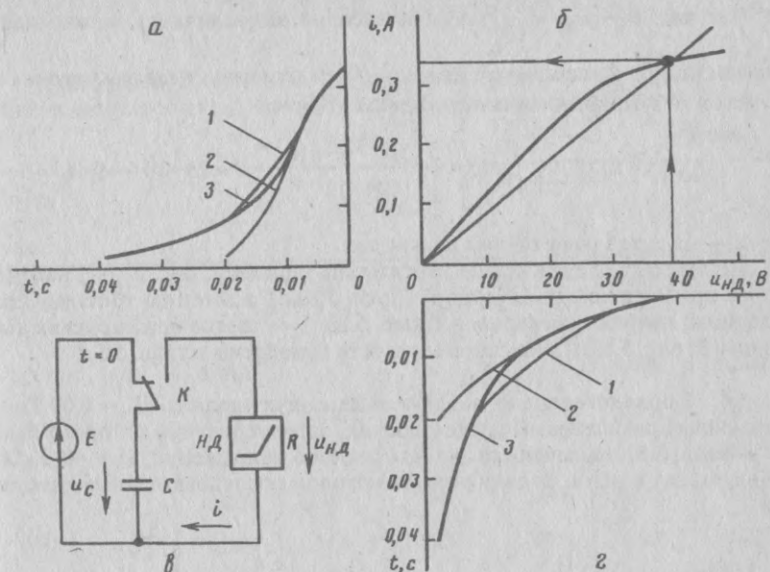


Рис. 5.10

Построим кривую напряжения $u_{нд}(t)$ на рис. 5.10,г (кривая 1) по данным табл. 5.5 (первое приближение).

Таблица 5.5

$t, с$	Первое приближение		Второе приближение			Третье приближение		
	$u_{нд}, В$	i, A	$S, мм^2$	$u_{нд}, В$	i, A	$S, мм^2$	$u_{нд}, В$	i, A
0	40	0,33	0	40	0,33	0	40	0,33
0,005	26,5	0,275	600	25	0,265	590	25,3	0,27
0,01	17,5	0,195	1040	14	0,13	1011	14,7	0,165
0,015	11,5	0,125	1360	6	0,065	1200	10	0,11
0,02	7,5	0,08	1540	1,5	0,015	1320	7	0,075
0,03	3,3	0,033	—	—	—	—	3,3	0,033
0,04	1,5	0,015	—	—	—	—	1,5	0,015

Затем перенесем значения напряжения $u_{нд}(t)$ на вольт-амперную характеристику (рис. 5.10,б) и получим первое приближение тока $i(t)$ (кривая 1, рис. 5.10,а).

Так как $u_C = u_{нд} = \frac{1}{C} \int_0^t i dt$ (по абсолютной величине), можно найти

второе приближение напряжения $u_{нд}(t)$, подсчитав площадь кривой $i(t)$. С учетом ненулевых начальных условий получим

$$u_{нд}(t) = u_{нд}(0) - \frac{1}{C} mS = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{100 \cdot 10^{-6}} S = 25 \cdot 10^{-3} S, \text{ В,}$$

где m — масштаб по осям тока и времени.

По второму приближению напряжения (кривая 2, рис. 5.10,з) находим второе приближение тока (кривая 2, рис. 5.10,а), а затем по третьему приближению напряжения (кривая 3, рис. 5.10,з) — третье приближение тока (кривая 3, рис. 5.10,а). Результаты расчета приведены в табл. 5.5.

5.6. Последовательно соединенные индуктивность $L = 0,08$ Гн и нелинейный резистивный двухполюсник, характеристика которого задана в табл. 5.3, включаются на постоянное напряжение $U = 40$ В. Определить ток в цепи. Задачу решить методом последовательных интервалов.

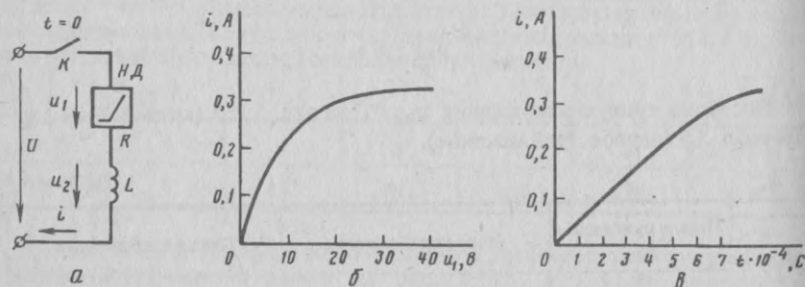


Рис. 5.11

Решение. В дифференциальном уравнении цепи (рис. 5.11,а)

$$L \frac{di}{dt} + u_1 = U$$

заменяем производную отношением конечных приращений и получим приближенное уравнение

$$\Delta i \approx \frac{U - u_1}{L} \Delta t.$$

Разобьем время переходного процесса на ряд малых одинаковых интервалов $\Delta t = 0,1$ мс. Тогда для любого (k -го) интервала

$$i_{k+1} = i_k + \Delta i_{k+1} = \frac{U - u_1}{L} \Delta t.$$

Используя ВАХ нелинейного двухполюсника (рис. 5.11,б), проведем расчет и сведем его в табл. 5.6. Зависимость $i(t)$ показана на рис. 5.11,в.

Таблица 5.6

Номер интервала	$t_k, \text{ мс}$	$i_k, \text{ А}$	$u_{1k}, \text{ В}$	$U - u_{1k}, \text{ В}$	$\frac{U - u_{1k}}{L}, \text{ В/Гн}$	$\Delta i_{k+1}, \text{ А}$	$i_{k+1}, \text{ А}$
0	0	0	0	40	500	0,05	0,05
1	0,1	0,05	1,5	38,5	481	0,0481	0,0981
2	0,2	0,0981	3	37	462	0,0462	0,1443
3	0,3	0,1443	4,75	35,25	440	0,044	0,1883
4	0,4	0,1883	7	33	412	0,0412	0,2295
5	0,5	0,2295	10	30	375	0,0375	0,267
6	0,6	0,267	14,5	25,5	320	0,032	0,299
7	0,7	0,299	20	20	250	0,025	0,324
8	0,8	0,324	35	5	62	0,0062	0,33
9	0,9	0,33	—	—	—	—	—

5.7. Нелинейный емкостный двухполюсник с характеристикой, представленной в табл. 5.7, соединен последовательно с сопротивлением $R = 200$ Ом.

Таблица 5.7

$u, \text{ В}$	0	20	40	60	80	100	120	130	140	150
$Q \cdot 10^{-2}, \text{ Кл}$	0	0,15	0,3	0,5	0,7	1	1,5	1,9	2,45	3,1

Определить закон изменения напряжения на нелинейном двухполюснике при включении цепи на постоянное напряжение $U = 150$ В. Задачу решить методом графического интегрирования.

5.8. В момент времени $t = 0$ нелинейный емкостный двухполюсник, заряженный предварительно до напряжения $U = 140$ В, замыкается на сопротивление $R = 1000$ Ом. Определить ток в цепи. Характеристика нелинейного двухполюсника приведена в табл. 5.7. Задачу решить методом последовательных интервалов.

5.9. Последовательно соединенные сопротивление $R = 10 \text{ Ом}$ и нелинейный индуктивный двухполюсник включены в цепь с источником постоянного напряжения $U = 1 \text{ В}$. Определить ток в цепи, если характеристика нелинейного двухполюсника описывается уравнением $i = \Psi^2$. Задачу решить методом пространства состояний.

Решение. Схема цепи приведена на рис. 5.8 и описывается исходным уравнением (5.34), решением которого является уравнение (5.36).

Расчетные значения зависимостей $\Psi(t)$ и $i(t)$ приведены в табл. 5.8. По результатам таблицы построены соответствующие графики на рис. 5.12.

Таблица 5.8

k	$t = kT, \text{ с}$	$\Psi(kT), \text{ В}$	$i(kT), \text{ А}$
0	0	0	0
1	0,1	0,1	0,01
2	0,2	0,19	0,036
3	0,3	0,254	0,0645
4	0,4	0,289	0,0835
5	0,5	0,305	0,093
6	0,6	0,312	0,097
7	0,7	0,315	0,0992
8	0,8	0,3158	0,0997
9	0,9	0,3161	0,0999
10	1,0	0,3162	0,09998

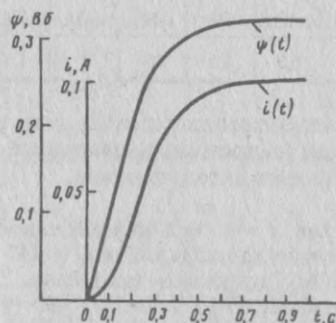


Рис. 5.12

Глава 6

СИНТЕЗ И СХЕМНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

Как известно, задача синтеза линейных цепей сводится к нахождению (реализации) такого четырехполюсника (в более частном случае — двухполюсника), передаточная функция которого (либо две или три передаточные функции) соответствовала бы заданной. Напомним, что свойства четырехполюсника полностью определяются этой передаточной функцией $H(p)$ (или двумя, или тремя) либо однозначно связанными с ней амплитудно-фазовой характеристикой $H(j\omega)$, переходной функцией $h(t)$ или импульсной переходной функцией $h'(t)$. Варианты передаточных функций очень разнообразны, и задача синтеза пассивных линейных четырехполюсников сводится к нахождению обладающей заданной передаточной функцией схемы четырехполюсника, состоящей из резисторов, конденсаторов и дросселей (или только конденсаторов и резисторов, или только конденсаторов и дросселей) с определенными значениями их параметров.

Переходя к синтезу нелинейных четырехполюсников, напомним, что в общем случае здесь невозможно определить реакцию цепи на заданное воздействие по известной ее реакции на какое-либо другое известное воздействие, т.к. даже при заданной форме воздействия (например, синусоидальной неизменяемой частоты) реакция принципиально зависит от его величины и т.д. Важнейшая особенность синтеза нелинейных цепей состоит в том, что для достаточно полного отражения свойств нелинейного четырехполюсника нужно задать не передаточную функцию $H(p)$, а несколько конкретных видов воздействия с известными реакциями, которые охватывали бы всю область ожидаемых в рабочем режиме сигналов.

Синтез нелинейных цепей сводится к нахождению схемы четырехполюсника с линейными и, главное, нелинейными резисторами, конденсаторами и дросселями с определенными нелинейными характеристиками. Выпускаемые промышленностью стандартные нелинейные элементы далеко не всегда могут удовлетворить растущим требованиям. С этим связана еще одна специфическая особенность синтеза нелинейных цепей, касающаяся их реализации, — создание сложных нелинейных характеристик из более простых нелинейностей.

Отметим, что при синтезе нелинейных цепей всегда приходится предельно задаваться полной схемой цепи. Это же необходимо и при син-

тезе линейных цепей, поскольку выбор метода синтеза предопределяет если не полную конфигурацию цепи, то во всяком случае общий характер ее структуры (например, цепочечная безындуктивная и т.п.).

Далее при рассмотрении схем в большинстве случаев будем считать сопротивление нагрузки на выходе четырехполюсника столь большим, что $i_H \approx 0$.

§ 6.1. Синтез вольт-амперной характеристики нелинейного двухполюсного элемента резистивного четырехполюсника гармоническим методом

Рассмотрим синтез нелинейного резистивного четырехполюсника (рис. 6.1, а) в установившемся режиме с помощью гармонического метода (метода тригонометрических формул).

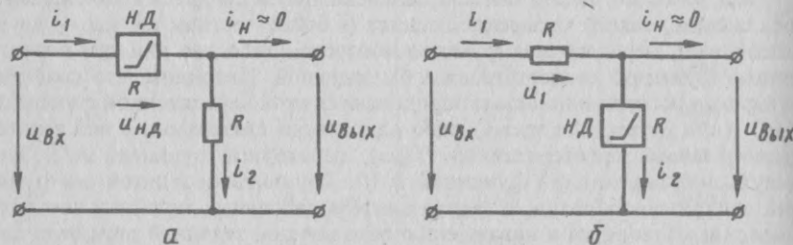


Рис. 6.1

Пусть на вход подается гармонический сигнал

$$u_{вх} = U_{m_{вх}} \cos \omega t, \quad (6.1)$$

$U_{m_{вх}} = \text{const}$.

Условимся считать, что выходной сигнал содержит только n -ю гармонику, а фазовый сдвиг незначителен. Тогда, учитывая, что $i_1 = i_2$, получим

$$u_{вх} = Ri_2 = Ri_1 = U_{m_{вх}} \cos n\omega t. \quad (6.2)$$

Требуется найти вольт-амперную характеристику $i_{нд}(u_{нд}) = i_1(u_{нд})$ нелинейного резистивного двухполюсника, который обеспечил бы этот режим. Сначала найдем эквивалентную вольт-амперную характеристику $i_1(u_{вх})$, которая является входной характеристикой ненагруженного четырехполюсника (см. рис. 6.1, а).

Представим пока еще не известную эквивалентную характеристику $i_1(u_{вх})$ в виде степенного ряда

$$i_1 = a_0 + a_1 u_{вх} + a_2 u_{вх}^2 + a_3 u_{вх}^3 + a_4 u_{вх}^4 + \dots \quad (6.3)$$

При этом выходной сигнал

$$u_{вых} = R(a_0 + a_1 U_{m_{вх}} \cos \omega t + a_2 U_{m_{вх}}^2 \cos^2 \omega t + a_3 U_{m_{вх}}^3 \cos^3 \omega t + a_4 U_{m_{вх}}^4 \cos^4 \omega t + \dots), \quad (6.4)$$

что подтверждает возможность возникновения новых гармонических составляющих в цепи с нелинейным резистивным двухполюсником.

Пусть в поставленной задаче $n = 2$, т.е. выходной сигнал содержит только вторую гармонику. Тогда (6.4) примет вид

$$U_{m_{вх}} \cos 2\omega t = Ra_0 + Ra_1 U_{m_{вх}} \cos \omega t + Ra_2 U_{m_{вх}}^2 \cos^2 \omega t + Ra_3 U_{m_{вх}}^3 \cos^3 \omega t + Ra_4 U_{m_{вх}}^4 \cos^4 \omega t + \dots, \quad (6.5)$$

или

$$U_{m_{вх}} (2 \cos^2 \omega t - 1) = Ra_0 + Ra_2 U_{m_{вх}}^2 \cos^2 \omega t, \quad (6.6)$$

откуда

$$a_0 = -\frac{U_{m_{вх}}}{R}, \quad (6.7)$$

$$a_2 = \frac{2U_{m_{вх}}}{RU_{m_{вх}}^2}, \quad (6.8)$$

причем a_1 , a_3 , и a_4 тождественно равны нулю.

Следовательно, эквивалентная ВАХ представляет собой квадратичную параболу вида

$$i_1 = -\frac{U_{m_{вх}}}{R} + \frac{2U_{m_{вх}}}{RU_{m_{вх}}^2} u_{вх}^2 \quad (6.9)$$

откуда легко найти искомую характеристику $i_{нд}(u_{нд})$ (см. § 1.3 и рис. 6.2).

При точной реализации ВАХ выражением (6.6), а также при строго фиксированной амплитуде входного сигнала выходной сигнал будет содержать только вторую гармонику. При несоблюдении этих условий (а также при нестабильности частоты ω) на выходе должен быть поставлен соответствующий фильтр.

Изложенная идея в принципе справедлива и для более сложных задач, требующих учета нескольких гармоник выходного сигнала с определенными фазовыми сдвигами, при более сложных входных воздействиях и т.д., а также может быть использована для синтеза реактивных четырехполюсников, но в установившемся режиме.

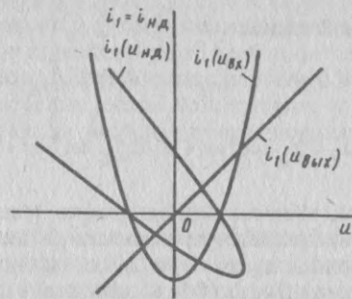


Рис. 6.2

§ 6.2. Синтез вольт-амперной характеристики нелинейного двухполюсного элемента резистивного четырехполюсника методом трех плоскостей

Обратимся сначала к простейшей схеме Г-образного резистивного четырехполюсника, нелинейный элемент которого включен либо в горизонтальную (см. рис. 6.1,а), либо в вертикальную (см. рис. 6.1,б) ветвь. Будем полагать заданными аналитические зависимости или временные графики входного воздействия $u_{вх}(t)$ и реакции на выходе $u_{вых}(t)$, а также линейное сопротивление R . Требуется найти вольт-амперную характеристику $i_{нд}(u_{нд})$ нелинейного резистивного двухполюсника НД.

Для схемы рис. 6.1,б падение напряжения на линейном сопротивлении R

$$Ri_1(t) = u_{вх}(t) - u_{вых}(t). \quad (6.10)$$

Найдя из соотношения $u_{вых}(t)$ обратную зависимость $t(u_{вых})$ и подставив ее в (6.10) (т.е. исключив тем самым время t), получим

$$Ri_1(u_{вых}) = u_{вх}(u_{вых}) - u_{вых}. \quad (6.11)$$

Учитывая, что $u_{вых} = u_{нд}$, а $i_1 = i_2$, запишем расчетное выражение

$$Ri_2(u_{нд}) = u_{вх}(u_{вых}) - u_{вых} \quad (6.12)$$

которое отличается от искомой вольт-амперной характеристики $i_2(u_{нд})$ только масштабом, определяемым линейным сопротивлением R .

Соответствующие операции, очевидно, могут быть выполнены как аналитически, так и графически. Рассмотрим графический вариант, полагая, что воздействие и реакция изображаются кривыми, представленными на рис. 6.3,а и б. Входящую в расчетное выражение (6.12) зависимость $u_{вх}(u_{вых})$ называют иногда обратной характеристикой преобразования в отличие от характеристики преобразования четырехполюсника $u_{вых}(u_{вх})$. Зависимость $u_{вх}(u_{вых})$ легко найти из построений на рис. 6.3, которые сход-

ны с используемым при анализе нелинейных цепей способом определения реакции по заданному входному воздействию и ВАХ цепи (см. § 3.5).

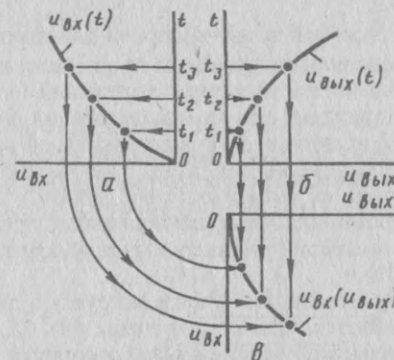


Рис. 6.3

Дальнейшие построения, показанные на рис. 6.4, связаны с определением разности, стоящей в правой части (6.12). Величину $Ri_2(u_{нд})$ здесь определяют как разность обратной характеристики преобразования и биссектрисы угла (при равных масштабах обоих напряжений), которая в этом случае представляет собой характеристику $u_{вых}(u_{вых})$. ВАХ нелинейного резистивного двухполюсника $i_2(u_{нд}) = i_2(u_{вых})$ находят просто изменением масштаба. Способ реализации таких характеристик будет рассмотрен ниже (см. рис. 6.14).

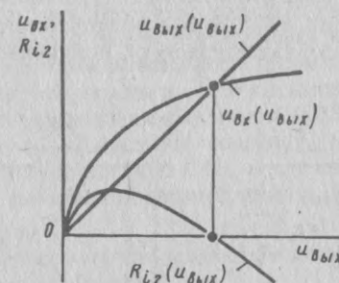


Рис. 6.4

Возвращаясь к схеме рис. 6.1,а, запишем выражение для падения напряжения на нелинейном двухполюснике НД:

$$u_{нд}(t) = u_{вх}(t) - u_{вых}(t). \quad (6.13)$$

Подставляя, как и прежде, в это выражение $t(u_{вых})$, получим

$$u_{нд}(u_{вых}) = u_{вх}(u_{вых}) - u_{вых}. \quad (6.14)$$

Учитывая, что $u_{\text{вх}} = Ri_2$, а $i_2 = i_1$, найдем расчетное выражение

$$u_{\text{нд}}(Ri_1) = u_{\text{вх}}(u_{\text{вх}}) - u_{\text{вх}} \quad (6.15)$$

которое отличается от искомой вольт-амперной характеристики $u_{\text{нд}}(i_1)$ только масштабом, определяемым линейным сопротивлением R .

Из равенства правых частей расчетных выражений (6.12) и (6.15) следует, что графические операции при их использовании будут одинаковыми, но если для схемы с нелинейностью в вертикальной ветви получается вольт-амперная характеристика, то для схемы с нелинейностью в горизонтальной ветви — обратная ей ампер-вольтовая. Поэтому при одинаковых характеристиках преобразования четырехполюсников, представленных на рис. 6.1, кривые вольт-амперной и ампер-вольтовой характеристик будут одинаковыми.

Очевидно, что, если необходимо учесть нагрузку четырехполюсника, методика расчета не меняется. Однако для схемы рис. 6.1, б результат будет относиться к эквивалентной нелинейности, состоящей из параллельно соединенных нелинейного резистивного двухполюсника и нагрузочного сопротивления, причем последнее может быть и нелинейным. Поскольку сопротивление нагрузки предполагается заданным, ВАХ нелинейного двухполюсника находят известными из анализа способами.

Если для схемы рис. 6.1, а сопротивление нагрузки будет линейным, то в расчеты просто вводят эквивалентное линейное сопротивление, равное параллельно соединенным двум сопротивлениям: R и R_n . В случае нелинейной нагрузки (рис. 6.5, а) имеем несколько усложненный вариант четырехполюсника с двумя нелинейными двухполюсниками, т.к. параллельное соединение сопротивления R и двухполюсника нагрузки дает некоторый эквивалентный нелинейный двухполюсник НД_2 , показанный на рис. 6.5, б.

Рассмотрим схему рис. 6.5, б. Будем считать заданными вольт-амперную или ампер-вольтовую характеристику нелинейного двухполюсника НД_2 $i_2(u_2)$ или $u_2(i_2)$.

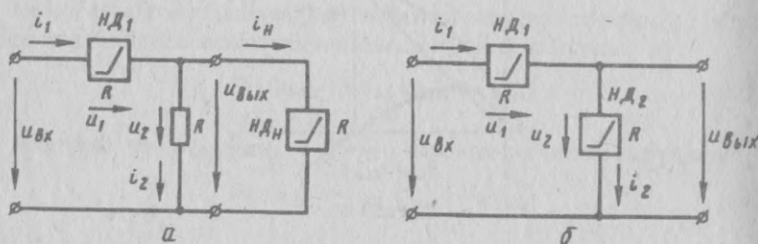


Рис. 6.5

Падение напряжения на нелинейном двухполюснике НД_1

$$u_1(i_1) = u_1[i_2(u_2)],$$

т.к. $i_1 = i_2$. Тогда

$$u_{\text{вх}}(t) = u_1[i_2[u_2(t)]] + u_{\text{вх}}(t). \quad (6.16)$$

Используя, как и ранее, обратную зависимость $t(u_{\text{вх}})$, и учитывая, что $u_2 = u_{\text{вх}}$ получим

$$u_1[i_2(u_2)] = u_{\text{вх}}(u_{\text{вх}}) - u_{\text{вх}}. \quad (6.17)$$

Очевидно, что зависимость $u_1[i_2(u_2)] = u_1(u_2)$ может быть найдена теми же графическими операциями, что и для выражения (6.15). Для определения искомой ампер-вольтовой характеристики $u_1(i_1)$ должна быть исключена переменная u_2 . Делают это по заданной ампер-вольтовой характе-

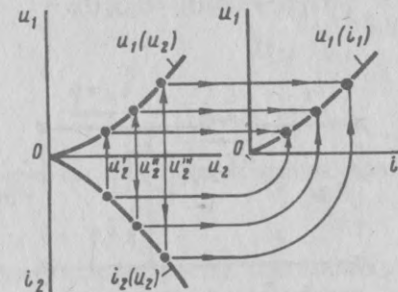


Рис. 6.6

ристике нелинейного двухполюсника НД_2 дополнительными построениями, показанными на рис. 6.6.

Важно отметить, что четырехполюсник с двумя нелинейностями как самостоятельный вариант смягчает требования к виду нелинейности, поскольку «результатирующая» нелинейность формируется здесь как комбинация двух нелинейностей, каждая из которых имеет более простой вид. Это подтверждается сопоставлением выражений (6.15) и (6.17), показывающих, что для схемы рис. 6.1 изменением линейного сопротивления можно менять только масштаб нелинейной ВАХ, а для схем рис. 6.5 с изменением вида произвольно выбираемой характеристики $u_2(i_2)$ меняется и форма характеристики $u_1(i_1)$.

Очевидно, что рассмотренным здесь более общим методом решается и задача предыдущего параграфа.

§ 6.3. Синтез вольт-амперной характеристики нелинейного резистивного двухполюсного элемента активно-реактивного четырехполюсника

Оставим постановку задачи прежней, но вместо линейного сопротивления схема пусть содержит линейный реактивный элемент, например, индуктивность L , как показано на рис. 6.7.

Тогда падение напряжения на индуктивности

$$L \frac{di_1(t)}{dt} = u_{вх}(t) - u_{вых}(t), \quad (6.18)$$

откуда

$$Li_1(t) = \int_0^t u_{вх}(t) dt - \int_0^t u_{вых}(t) dt, \quad (6.19)$$

или в более краткой записи,

$$Li_1(t) = \bar{U}_{вх}(t) - \bar{U}_{вых}(t). \quad (6.20)$$

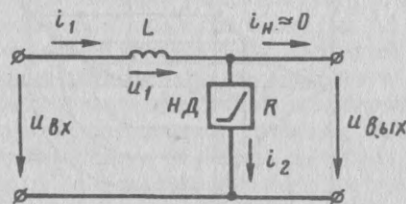


Рис. 6.7

Через $\bar{U}(t)$ здесь выражены значения соответствующих интегралов для моментов времени t .

Если теперь, как и ранее, воспользуемся обратной зависимостью $t(u_{вых})$ и учтем, что $u_{вых}$ равно напряжению $u_{нд}$ на нелинейном двухполюснике, а $i_1 = i_2$, получим выражение

$$Li_1(u_{вых}) = \bar{U}_{вх}(u_{вых}) - \bar{U}_{вых}(u_{вых}), \quad (6.21)$$

которое отличается от искомой вольт-амперной характеристики $i_2(u_{нд})$ только масштабом, определяемым индуктивностью L .

Обратим внимание на внешнее сходство (6.12) и (6.21). Эти выражения различаются лишь тем, что последнее соотношение для получения входящих в его правую часть слагаемых должно быть предварительно проинтегрировано.

Соответствующие графические построения показаны на рис. 6.8. Сначала (рис. 6.8, а и б) выполнялись графики $\bar{U}_{вх}(t)$ и $\bar{U}_{вых}(t)$, дающие значения интегралов входного и выходного сигналов, а также разность $[\bar{U}_{вх}(t) - \bar{U}_{вых}(t)]$ (рис. 6.8, в). Затем (рис. 6.8, г) из функции, соответствующей этой разности, было исключено время t и согласно (6.21) получена зависимость $Li_1(u_{вых})$. Искомую ВАХ нелинейного двухполюсника $i_2(u_{нд}) = i_1(u_{вых})$ находят простым изменением масштаба.

Введение реактивных элементов в схему существенно влияет на характер нелинейности и обычно смягчает требования к виду нелинейности двух-

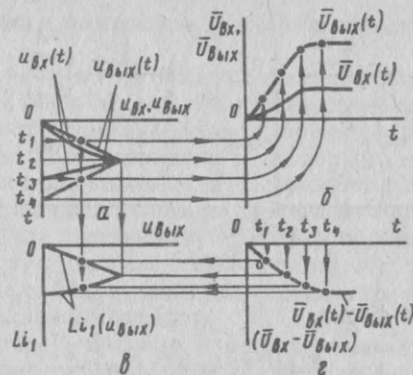


Рис. 6.8

полюсника по сравнению с чисто резистивным вариантом четырехполюсника.

§ 6.4. Синтез характеристик нелинейных реактивных двухполюсных элементов активно-реактивного четырехполюсника

Будем считать общую постановку задачи прежней, за исключением положения о том, что схема будет содержать известный линейный резистор и нелинейный реактивный двухполюсник, характеристику которого требуется определить. Напомним, что нелинейный емкостный двухполюсник обычно характеризуется зависимостью заряда или емкости от напряжения: $Q(u_C)$ или $C(u_C)$, а нелинейный индуктивный двухполюсник — зависимостью потокоцепления или индуктивности от тока: $\Psi(i_L)$ или $L(i_L)$. Здесь как емкость, так и индуктивность могут быть статическими или дифференциальными.

Пусть схема имеет вид, представленный на рис. 6.9, а. Ток в цепи равен скорости изменения заряда конденсатора Q по времени:

$$i_2(t) = i_1(t) = \frac{dQ(t)}{dt}.$$

Отсюда

$$R \frac{dQ(t)}{dt} = u_{вх}(t) - u_{вых}(t), \quad (6.22)$$

что по структуре соответствует (6.18).

Проинтегрировав (6.22), получим

$$RQ(t) = \int_0^t u_{вх}(t) dt - \int_0^t u_{вых}(t) dt, \quad (6.23)$$

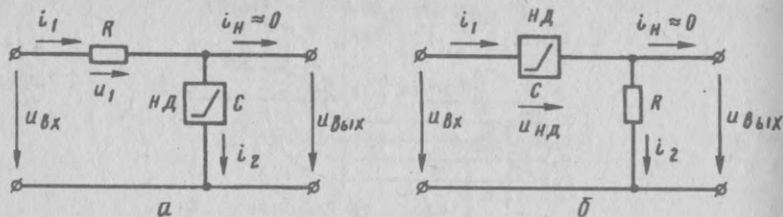


Рис. 6.9

или в более краткой форме

$$RQ(t) = \bar{U}_{\text{вх}}(t) - \bar{U}_{\text{вых}}(t). \quad (6.24)$$

Воспользовавшись обратной зависимостью $t(u_{\text{вых}})$ и учитывая, что $u_{\text{вых}}$ равно напряжению на двухполюснике $u_{\text{нд}}$, получим

$$RQ(u_{\text{вых}}) = \bar{U}_{\text{вх}}(u_{\text{вых}}) - \bar{U}_{\text{вых}}(u_{\text{вых}}). \quad (6.25)$$

Выражение (6.25) отличается от искомой вольт-кулонной характеристики $Q(u_{\text{нд}})$ только масштабом, определяемым линейным сопротивлением R . Для графического решения этого уравнения нужно выполнить те же операции, что и при решении (6.21).

Если нужно охарактеризовать нелинейный двухполюсник вольт-фарадной характеристикой, достаточно продифференцировать полученную зависимость:

$$C_{\text{диф}}(u_C) = \frac{d}{du_C} [Q(u_C)].$$

Для схемы рис. 6.9,б необходимо найти обратную зависимость для напряжения на емкостном двухполюснике $t(u_{\text{нд}})$, что несложно сделать, поскольку

$$u_{\text{нд}}(t) = u_{\text{вх}}(t) - u_{\text{вых}}(t).$$

Вольт-кулонная характеристика $Q(u_C)$ может быть найдена из следующего выражения:

$$RQ(u_{\text{нд}}) = \bar{U}_{\text{вых}}(u_{\text{нд}}). \quad (6.26)$$

§ 6.5. Реализация синтезированных цепей

Рассмотренные примеры иллюстрируют идею синтеза, предполагающую схему нелинейной цепи заданной. Очевидно, что все операции здесь легко алгоритмируются, при этом многообразные схемные варианты мо-

гут быть объединены в значительно меньшее количество вариантов алгоритмов.

Важной особенностью практического синтеза нелинейных цепей, как и линейных, остается выбор оптимальной реализации. Специфической трудностью здесь является изменение характера реакции при изменении амплитуды воздействия. Даже оставаясь в рамках одного воздействия, можно столкнуться с необходимостью просмотра вариантов схем с нелинейностями резистивного варианта или варианта с реактивностями, причем реактивности можно выбирать линейными и нелинейными. При такой постановке задачи, т.е. при включении в нее и выбора схемы, обобщенная алгоритмизация будет значительно затруднена, если не заменить ее каким-то направленным перебором схемных вариантов.

Реализация схемы Г-образного четырехполюсника с нелинейностями в обеих ветвях смягчает требования к характеру нелинейности по сравнению с вариантом одной нелинейности. Дальнейшее упрощение характера используемых нелинейностей может быть достигнуто либо применением усложненных вариантов четырехполюсников (например, мостовые и т.д.), либо каскадным соединением нескольких Г-образных четырехполюсников.

В последнем случае можно исходить из наиболее близкой к требуемой реальной нелинейности и на ее основе определить (методами анализа), какой должна быть форма входного сигнала на содержащем эту нелинейность четырехполюснике, чтобы выходной сигнал имел заданную форму. Рассматривая такой четырехполюсник как конечный каскад, получают, что найденная форма входного сигнала будет для предоконечного каскада выходной (входным сигналом по-прежнему является заданное воздействие для всего каскада). Затем операцию повторяют, вынося требования к третьему от конца четырехполюснику, и т.д., пока синтезированный и заданный входные сигналы с требуемой точностью не совпадут.

Заметим, что в простейшем, с точки зрения расчетных операций, варианте формирования каскада предполагается применение нелинейных направленных четырехполюсников. В общем случае это приводит к невозможности реализации каскада пассивными схемами, т.к. возникает необходимость в развязывающих цепях усилительных устройств. Сложный характер нелинейностей с отрицательными и неоднозначными характеристиками резистивных, индуктивных и емкостных двухполюсников обычно требует применения активных схем.

Остановимся кратко на общей идее формирования сложных нелинейных двухполюсников (которые входят в состав рассмотренных четырехполюсников) из более простых двухполюсников. Рассмотрим эту задачу в резистивном варианте, т.е. применительно к формированию вольт-амперной характеристики $i(u)$.

Пусть заданная ВАХ имеет вид, представленный на рис. 6.10,а. Аппроксимируем ее тремя сопрягающимися прямыми согласно рис. 6.10,б. Соответствующий ей двухполюсник может быть в принципе реализован схемой рис. 6.10,в, состоящей из трех источников ЭДС, сопротивлений и диодов.

Действительно, при напряжении, имеющем значения от 0 до E_1 , входной сигнал меньше напряжения источника E_1 , первый диод остается закрытым, и $i = 0$. При $u > E_1$ первый диод открывается, и в цепи возникает

ток $i = \frac{u - E_1}{R_1}$. Когда напряжение u превышает E_2 , открывается второй диод.

На интервале $E_2 < u < E_3$ ток $i = \frac{u - E_1}{R_1} + \frac{u - E_1 - E_2}{R_2}$. Очевидно, что для напряжений u , больших E_3 , ток $i = \frac{u - E_1}{R_1} + \frac{u - E_1 - E_2}{R_2} + \frac{u - E_1 - E_2 - E_3}{R_3}$.

Соответствующим подбором сопротивлений можно обеспечить нужный наклон участков характеристики.

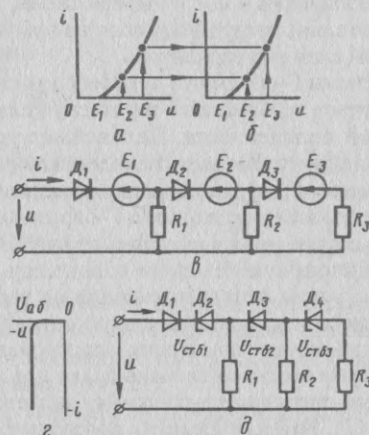


Рис. 6.10

Заданная ВАХ здесь сформирована на простейших нелинейностях в виде трех односторонних диодов, но схема содержит три источника энергии. Если же использовать специальные стабилитроны (опорные диоды), имеющие характеристику, показанную на рис. 6.10,з (здесь требуется три типа диодов с разными значениями напряжения стабилизации $U_{стб}$), то заданная ВАХ может быть реализована пассивной схемой рис. 6.10,д.

При необходимости реализации нелинейных емкостных и индуктивных двухполюсников часто используют не нелинейные емкости и индуктивности, а резистивные двухполюсники типа рассмотренных ранее, включаемые через соответствующие активные фазосдвигающие схемы (четырёхполюсники). Некоторые из них будут рассмотрены далее.

§ 6.6. Мутаторы, скалары и ротаторы

Четырёхполюсники, которые при нагрузке их нелинейным (или линейным) резистивным двухполюсником на входе приобретают свойства нелинейной (или линейной) индуктивности или емкости, называются соответственно *LR*- или *CR*-мутаторами. Существуют также *LC*-мутаторы.

Если нужно изменить не характер нагрузки, а масштаб соответствующей нелинейной характеристики, применяют четырехполюсники, называемые скалорами. Наконец, если необходимо повернуть на нужный угол исходную вольт-амперную, вебер-амперную или кулон-вольтную характеристику, используются четырехполюсники, называемые ротаторами.

Ознакомимся с общими принципами реализации мутаторов на примере *LR*-мутаторов. Для уяснения физических процессов в четырехполюсниках, выполняющих функции мутаторов, рассмотрим сначала так называемые *Е*-преобразования. Идея их состоит в том, что, если в некоторой схеме задана реакция на воздействие $u_1(t)$, всегда можно найти иную, измененную схему с сохраненным видом реакции, изменив вместе со схемой и входное воздействие, которое теперь будет иметь вид $u_2(t)$. Иными словами, суть рассматриваемого метода состоит в преобразовании источника сигнала, что и дало название методу.

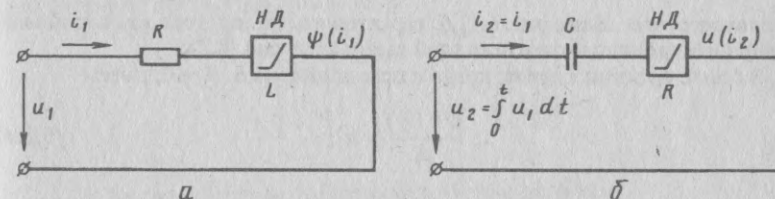


Рис. 6.11

В простейших случаях достаточно изменить масштаб, продифференцировать или проинтегрировать обе части уравнения, описывающего процессы в исходной цепи. В качестве примера рассмотрим схему рис. 6.11,а, состоящую из источника напряжения $u_1(t)$ и последовательно соединенных линейного сопротивления R и нелинейного индуктивного двухполюсника с вебер-амперной характеристикой $\Psi(i_L)$. Поставим задачу замены нелинейного индуктивного двухполюсника нелинейным резистивным двухполюсником с сохранением характера изменения тока в цепи, т.е.

$$i_1(t) = i_2(t). \quad (6.27)$$

Составим уравнение исходной цепи:

$$Ri_1 + \frac{d\Psi(i_1)}{dt} = u_1. \quad (6.28)$$

Проинтегрировав (6.28), получим

$$R \int_0^t i_1 dt + \Psi(i_1) = \int_0^t u_1 dt. \quad (6.29)$$

Это новое уравнение можно рассматривать как уравнение цепи, имеющей источник напряжения

$$u_2 = \int_0^t u_1 dt \quad (6.30)$$

и содержащей последовательно соединенные линейную емкость $C = 1/R$ и нелинейный резистивный двухполюсник с ампер-вольтной характеристикой $u(i) = \Psi(i)$.

Представим уравнение (6.29) в виде

$$\frac{1}{C} \int_0^t i_2 dt + u(i_2) = u_2 \quad (6.31)$$

что соответствует схеме рис. 6.11,б, характер изменений тока в которой аналогичен изменениям тока в исходной схеме согласно (6.27).

В более простом случае, когда в исходной схеме $R = 0$, имеем

$$\frac{d\Psi(i_1)}{dt} = u_1; \quad (6.28a)$$

$$\Psi(i_1) = \int_0^t u_1 dt; \quad (6.29a)$$

$$u_2 = \int_0^t u_1 dt \quad (6.30a)$$

и

$$u(i_2) = u_2, \quad (6.31a)$$

что соответствует переходу от схемы рис. 6.12,а к схеме 6.12,б.

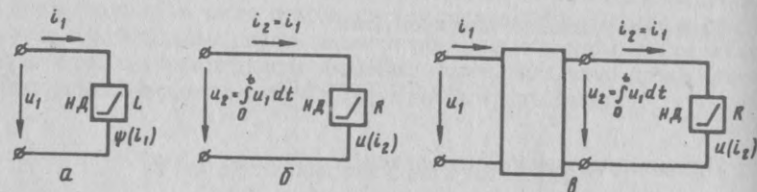


Рис. 6.12

Очевидно, что переход от исходного двухполюсника рис. 6.12,а к двухполюснику с аналогичными входными параметрами, но вместо нелинейно-

го индуктивного двухполюсника содержащему нелинейный резистивный двухполюсник, можно осуществить включением между входом и резистивным двухполюсником четырехполюсника, обеспечивающего преобразование входного напряжения по закону (6.30,а) при сохранении характера изменения входного тока, как показано на рис. 6.12,в.

Такого рода четырехполюсники, позволяющие заменить линейный или нелинейный индуктивный двухполюсник соответствующим резистивным двухполюсником, и являются LR -мутаторами.

С учетом сформулированных условий запишем систему уравнений LR -мутатора в форме B -параметров*:

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{p} u_1; \\ i_2 &= i_1, \end{aligned} \quad (6.32)$$

что соответствует матричной записи

$$\begin{vmatrix} u_2 \\ i_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} u_1 \\ i_1 \end{vmatrix}. \quad (6.33)$$

Для формы A -параметров соответственно получим

$$\begin{aligned} u_1 &= pu_2; \\ i_1 &= i_2 \end{aligned} \quad (6.34)$$

и

$$\begin{vmatrix} u_1 \\ i_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} u_2 \\ i_2 \end{vmatrix}. \quad (6.35)$$

Мутаторы используются не только для преобразования схемы математически, но и могут быть физически реализованы.

Из (6.32)—(6.35) видно, что условие обратимости четырехполюсника ($A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$) в этом случае не выполняется, и LR -мутатор может быть реализован только активным четырехполюсником (с зависимыми источниками).

Возможны различные варианты схемы замещения LR -мутатора. Так, на рис. 6.13,а и б изображена схема с двумя источниками, составленная на базе уравнений (6.32) в форме B -параметров. Здесь вход и выход развязаны гальванически, причем выходное напряжение u_2 обеспечивается зависимым источником ЭДС, выдающим интеграл от входного напряжения u_1 ,

*Здесь и далее p обозначает оператор дифференцирования, а $1/p$ — оператор интегрирования.

а прежнее значение и направление входного тока i_1 обеспечены зависимым источником тока во входной цепи, генерирующим ток i_2 .

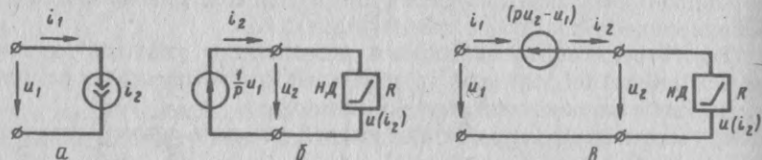


Рис. 6.13

На рис. 6.13,б изображена схема с одним источником, полученная на базе уравнений (6.34) в форме А-параметров. Здесь вход и выход связаны гальванически, а ЭДС источника определяется величиной $(ru_2 - u_1)$, что требует дополнительной операции алгебраического суммирования при реализации этого источника.

Не останавливаясь на реализации скалоров, по существу представляющих собой усилители напряжения или тока, рассмотрим кратко принципы реализации ротаторов на примере R-ротатора, позволяющего повернуть на некоторый угол α вольт-амперную характеристику резистивного двухполюсника $i(u)$ и получить резистивный двухполюсник с требуемой характеристикой $i'(u')$, как показано на рис. 6.14,а и б.

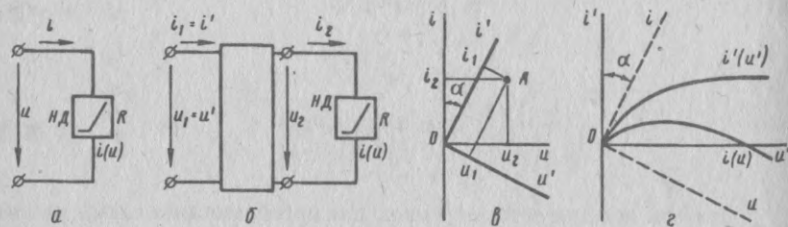


Рис. 6.14

Учитывая, что поворот характеристики на некоторый угол в одном направлении эквивалентен повороту координатных осей в противоположном направлении и используя известную из аналитической геометрии формулу поворота осей (рис. 6.14,в), получим уравнения ротатора рис. 6.14,б (без учета масштабных коэффициентов по осям u и i):

$$\begin{aligned} u_1 &= (\cos \alpha) u_2 - (\sin \alpha) i_2; \\ i_1 &= (\sin \alpha) u_2 + (\cos \alpha) i_2. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Входная ВАХ такого четырехполюсника, нагруженного на резистивный двухполюсник $i(u)$, и будет, очевидно, иметь требуемый вид $i'(u')$.

Уравнениям (6.36) соответствует матричная запись в форме А-параметров:

$$\begin{vmatrix} u_1 \\ i_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} u_2 \\ i_2 \end{vmatrix}. \quad (6.37)$$

Параметры T- или П-образной схемы замещения могут быть получены из (6.37) путем использования формул соответствия между А-параметрами и параметрами указанных схем.

В теоретическом плане роль мутаторов очень велика, поскольку они позволяют свести цепь с линейными и нелинейными R, L и C к цепи, содержащей только линейные и нелинейные R (либо только L или только C).

Отметим особую важность этого рода элементов для реализации сложного вида нелинейностей в твердотельных (интегральных) схемах. Рис. 6.14,г иллюстрирует, например, получение неоднозначной характеристики путем поворота однозначной характеристики (получаемой более просто в исходном состоянии) на угол α по часовой стрелке.

Техническая реализация схем замещения мутаторов, скалоров и ротаторов связана с разработкой полупроводниковых усилительных схем и выходит за рамки данного курса.

АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ПРИМЕНЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ ДЛЯ РАСЧЕТА НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

До сих пор делалась попытка осветить в общих чертах методы расчета установившихся и переходных процессов в нелинейных электрических цепях, а также в какой-то степени систематизировать эти методы исходя из конфигурации схем и распространенных режимов работы нелинейностей. Поэтому изложение велось на достаточно простых примерах. В случае более сложных схем (и, особенно, режимов работы, не сводимых в условиях конкретных задач к применению методов компенсации и пусковых характеристик), когда надо использовать сложные аппроксимации нелинейностей, становится необходимым применение современной вычислительной техники, особенно для задач синтеза нелинейных цепей. Использование того или иного вида вычислительных машин (ЦВМ или АВМ) определяется конкретными задачами.

Отметим, что зависящие от исследуемых схем структурные схемы АВМ составляют по особым правилам, и эти схемы не всегда являются подобными или дуальными исследуемым схемам в электрическом смысле. То есть здесь, как и при исследовании на ЦВМ, требуется предварительное программирование.

Можно полагать, что для расчета сложных схем, особенно при необходимости достаточно точного описания нелинейностей, наиболее рационально применение смешанных вычислительных устройств: комбинированных, использующих сочетание различных вычислительных устройств (АВМ — ЦВМ) и их элементов в рамках решения одной задачи, и гибридных, использующих элементы с неразделимыми и цифровыми признаками. Конечной целью здесь, как и в других областях применения вычислительной техники, является разработка проблемы автоматизированного анализа и синтеза нелинейных цепей, соответствующих наиболее распространенным схемам и режимам конкретных электротехнических устройств.

Решение этой проблемы должно включать следующие этапы:

- 1) дальнейшую систематизацию нелинейных цепей по видам схем и режимам работы (подсхем);
- 2) систематизацию вычислительных операций и выбор наиболее подходящих вычислительных средств;

- 3) разработку подпрограмм, соответствующих отдельным подсхемам;
- 4) разработку операционной системы, позволяющей проектировщику составить и ввести в машину программу для данного конкретного случая, набранную из подпрограмм.

Поставленная цель требует для своего достижения большого объема памяти машины и высокого быстродействия.

Вопрос о необходимости использования вычислительной техники приходится решать в каждом отдельном случае исходя из конкретных задач и имеющихся вычислительных средств. Здесь можно лишь заметить, что в этих условиях не следует чрезмерно увлекаться применением вычислительной техники, особенно цифровой, и перекладывать на ЦВМ решение задачи с начала и до конца. В принципе всегда возможны два подхода к исследованию. В одном случае ведется тщательная подготовка исходных данных и определяется их математическая связь, с тем чтобы иметь возможность получить численные результаты. Такие результаты обычно бывает трудно истолковать. В другом случае предварительно, по возможности глубоко, анализируют физику процессов и разбирают их на легко контролируемые этапы. Это дает известную гарантию от ошибок, а само решение становится логической цепью отдельных результатов и гораздо легче может быть осмыслено и оценено качественно.

Применительно к использованию вычислительной техники необходимо максимально проработать аналитические решения на основе изложенных ранее методов, которые для сложных задач будут неминуемо включать только отдельные этапы. Однако аналитическое и численное решения данного этапа существенно различаются. В результате аналитического решения исходная информация этапа становится компактной и обозримой и представляется в виде ограниченной совокупности изученных функций. Аналитическое решение содержит информацию о множестве подобных процессов в разнородных цепях не только электрических, но магнитных и других аналогах, различающихся лишь значениями параметров; оно может быть использовано и в других случаях, объем вычислений при этом также сокращается. Численное решение этапа — формализованный процесс, дающий информацию только об одном конкретном (даже без вариаций) случае. Численное преобразование также неминуемо приводит к искажению исходной информации, например, при замене дифференциальных уравнений разностными, итерациях, округлениях и т.д. Попытка добиться нужной точности уменьшением шага сетки приводит к увеличению числа неизвестных значений искомой функции, вследствие чего резко увеличиваются объем вычислений и количество ошибок, подлежащих корректировке.

Далее в этой главе будут рассмотрены аналитические и численные решения установившихся и переходных процессов в нелинейных электрических цепях постоянного и переменного тока с нелинейными двухполюсниками и четырехполюсниками, имеющими однозначные вольт-амперные характеристики. Показано, что возможности расчета схем определенной конфигурации и сложности существенно расширяются, т.к. среди них появляются схемы, которые не рассматривались в предыдущих главах. К ним относятся, например, преобразование звезды в эквивалентный треугольник (и наоборот) на постоянном и переменном токе, расчет схемы с двумя узлами на переменном токе. Расчеты, связанные с такими преобразованиями, очень трудоемки и выполняются с привлечением ЦВМ.

Как известно, программирование можно проводить различными способами и на различных языках (Паскаль, Бейсик и др.), в том числе и с использованием стандартных программ. Основой в каждом случае является алгоритмизация электротехнических уравнений. Решение этой задачи рассмотрено в последующих разделах, причем разбирались только те примеры, при решении которых наиболее полно проявляются преимущества вычислительной техники.

Сказанное относилось непосредственно к исследованию электротехнических устройств, которое сводилось к аппарату теории электрических цепей, однако все это в полной мере может быть отнесено к исследованиям, требующим применения аппарата теории электромагнитного поля с учетом нелинейности сред. При этом в последнем случае также намечается четкая тенденция в развитии поэтапного аналитического рассмотрения с более широким использованием самого общего подхода с позиций математической физики.

§ 7.1. Установившиеся режимы в цепях постоянного тока

Как известно, аналитические методы расчета электрических цепей ограничены возможностями точного решения нелинейных алгебраических уравнений. Сложная нелинейная электрическая цепь с помощью аппроксимации исходных нелинейных характеристик может быть описана системой нелинейных алгебраических уравнений, которую в общем виде можно представить так:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0; \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0; \\ &\dots \dots \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Для решения (7.1) можно использовать либо стандартную, либо специально разработанную программу. Поэтому одной из задач анализа сложной нелинейной цепи является приведение уравнений, написанных на основании первого и второго законов Кирхгофа, к уравнениям вида (7.1). Следует заметить, что методы численного решения нелинейных уравнений, например, метод Ньютона, также позволяют непосредственно программировать для решения на ЦВМ систему уравнений (7.1).

Рассмотрим в качестве примера схему со смешанным соединением нелинейных двухполюсников (рис. 7.1). Если аппроксимировать вольт-амперные характеристики, то, используя законы Кирхгофа, можно записать

$$\begin{aligned} U - U_1(I_1) - U_2(I_2) &= 0; \\ U_2(I_2) - RI_3 &= 0; \\ I_1 - I_2 - I_3 &= 0. \end{aligned} \quad (7.2)$$

На основании аппроксимации зависимостей $R_{ст}(I)$ получим

$$\begin{aligned} U - R_{ст1}(I_1)I_1 - R_{ст2}(I_2)I_2 &= 0; \\ R_{ст2}(I_2)I_2 - RI_3 &= 0; \\ I_1 - I_2 - I_3 &= 0. \end{aligned} \quad (7.3)$$

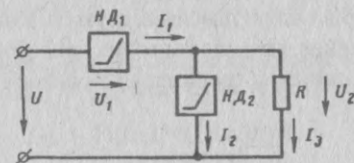


Рис. 7.1

Системы уравнений (7.2) и (7.3) являются частным случаем (7.1), где роль неизвестных x_1, x_2, x_3 выполняют токи I_1, I_2, I_3 , поэтому для решения (7.2) и (7.3) можно обратиться к стандартной программе.

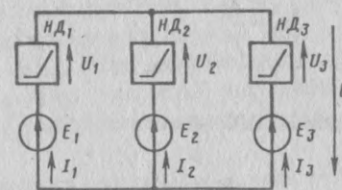


Рис. 7.2

Для цепи с двумя узлами (рис. 7.2) при аппроксимации ВАХ получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} U &= E_1 - U_1(I_1); \\ U &= E_2 - U_2(I_2); \\ U &= E_3 - U_3(I_3); \\ I_1 + I_2 + I_3 &= 0. \end{aligned} \quad (7.4)$$

После аппроксимации зависимостей $R_{ст}(I)$ уравнения примут вид:

$$\begin{aligned} U &= E_1 - R_{ст1}(I_1)I_1; \\ U &= E_2 - R_{ст2}(I_2)I_2; \\ U &= E_3 - R_{ст3}(I_3)I_3; \\ I_1 + I_2 + I_3 &= 0. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Теперь, подставив, например, первое уравнение системы (7.4) во второе и третье и приравняв все три уравнения нулю, получим новую систему уравнений, которая является частным случаем (7.1). Аналогичная операция должна быть проведена и с уравнениями (7.5).

По данной методике могут быть составлены уравнения и для более сложных схем, содержащих большое число нелинейных двухполюсников, источников и ветвей. Задача преобразования звезды в эквивалентный треугольник (и наоборот) решается аналогично (рис. 7.3). В этом случае по заданным характеристикам нелинейных двухполюсников НД₁, НД₂, НД₃ необходимо найти характеристики нелинейных двухполюсников НД₁₂, НД₂₃, НД₃₁. Напомним условие эквивалентности обеих схем: токи I_1, I_2, I_3 и напряжения U_{12}, U_{23}, U_{31} звезды и треугольника должны быть равны.

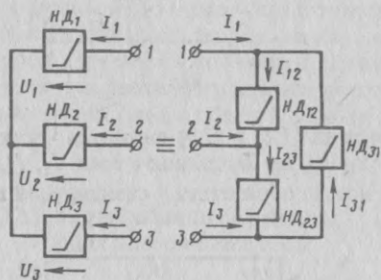


Рис. 7.3

При аппроксимации ВАХ имеем:
для звезды

$$\begin{aligned} U_{12} &= U_1(I_1) - U_2(I_2); \\ U_{23} &= U_2(I_2) - U_3(I_3); \\ U_{31} &= U_3(I_3) - U_1(I_1); \end{aligned} \quad (7.6)$$

для треугольника

$$\begin{aligned} U_{12} &= U_{12}(I_{12}); \\ U_{23} &= U_{23}(I_{23}); \\ U_{31} &= U_{31}(I_{31}). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Кроме того, для схемы треугольника на основании первого закона Кирхгофа

$$\begin{aligned} I_1 - I_{12} + I_{31} &= 0; \\ I_2 - I_{23} + I_{12} &= 0; \\ I_3 - I_{31} + I_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Совместное решение (7.6) и (7.7) позволяет определить неизвестные $I_1, I_2, I_3, I_{12}, I_{23}, I_{31}$. Так, если звезда преобразуется в эквивалентный треугольник, то система уравнений (7.6) будет заданной, и необходимо правые ее части подставить в (7.7):

$$\begin{aligned} U_1(I_1) - U_2(I_2) - U_{12}(I_{12}) &= 0; \\ U_2(I_2) - U_3(I_3) - U_{23}(I_{23}) &= 0; \\ U_3(I_3) - U_1(I_1) - U_{31}(I_{31}) &= 0. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Решая (7.9) совместно с (7.8), находим неизвестные $I_{12}, I_{23}, I_{31}, I_1, I_2, I_3$.

В случае преобразования треугольника в эквивалентную звезду заданной является система уравнений (7.6), правые части которой подставляют в (7.7):

$$\begin{aligned} U_{12}(I_{12}) - U_1(I_1) + U_2(I_2) &= 0; \\ U_{23}(I_{23}) - U_2(I_2) + U_3(I_3) &= 0; \\ U_{31}(I_{31}) - U_3(I_3) + U_1(I_1) &= 0. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Совместным решением (7.10) и (7.8) определяют неизвестные $I_1, I_2, I_3, I_{12}, I_{23}, I_{31}$.

Одноразовое решение уравнений (7.9), (7.8) или (7.10), (7.8) позволяет найти одно значение неизвестных токов. Если теперь с некоторым шагом в данном диапазоне изменять напряжения U_{12}, U_{23}, U_{31} и многократно (в цикле) решать исходные уравнения, получим искомые ВАХ нелинейных двухполюсников НД₁₂, НД₂₃, НД₃₁ (по известным характеристикам двухполюсников НД₁, НД₂, НД₃) или ВАХ нелинейных двухполюсников НД₁, НД₂, НД₃ (по известным характеристикам двухполюсников НД₁₂, НД₂₃, НД₃₁).

Аналогично составляется система уравнений, если заданы зависимости $R_{ст}(I)$. В этом случае уравнения (7.6) и (7.7) соответственно примут следующий вид:

$$\begin{aligned} U_{12} &= R_{ст1}(I_1) I_1 - R_{ст2}(I_2) I_2; \\ U_{23} &= R_{ст2}(I_2) I_2 - R_{ст3}(I_3) I_3; \\ U_{31} &= R_{ст3}(I_3) I_3 - R_{ст1}(I_1) I_1 \end{aligned} \quad (7.11)$$

и

$$\begin{aligned} U_{12} &= R_{ст12}(I_{12}); \\ U_{23} &= R_{ст23}(I_{23}); \\ U_{31} &= R_{ст31}(I_{31}). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Совместное решение (7.11), (7.12) и (7.8) позволит осуществить требуемые преобразования.

Для нелинейного четырехполюсника в форме, например, А-параметров, можно записать и решить следующие уравнения:

$$\begin{aligned} U_1 - A_{11}(U_1) U_2 - A_{12}(U_1) I_2 &= 0; \\ I_1 - A_{21}(I_1) U_2 - A_{22}(I_1) I_2 &= 0. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Зависимости коэффициентов A от первичных тока и напряжения определяются экспериментально с использованием режимов холостого хода и короткого замыкания.

§ 7.2. Установившиеся режимы в квазилинейных цепях

В общем случае нелинейный двухполюсник при квазилинейном рассмотрении описывается характеристиками $I(U)$ и $\varphi(I)$ или $\varphi(U)$, которые должны быть учтены при составлении уравнений по законам Кирхгофа. Поэтому для решения задачи отдают предпочтение зависимостям $R_{ст}(I)$ или $R_{ст}(U)$, $X_{Lст}(I)$ или $X_{Lст}(U)$ и $X_{Cст}(I)$ или $X_{Cст}(U)$. Нелинейные двухполюсники, отвечающие этим характеристикам, являются резистивными, индуктивными и емкостными.

Рассмотрим одноконтурную цепь R, L, C (рис. 7.4). Уравнение этой цепи можно записать так:

$$\underline{U} = (R_{ст}(I) + jX_{Lст}(I) - jX_{Cст}(I))\underline{I}. \quad (7.14)$$

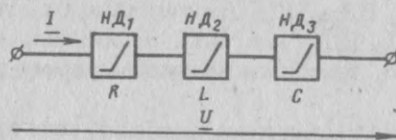


Рис. 7.4

Если необходимо вычислить только действующее значение тока, в уравнение $U = Z_{ст}(I)I = \sqrt{R_{ст}(I)^2 - (X_{Lст}(I) - X_{Cст}(I))^2} I$ подставляют выражения, аппроксимирующие зависимости $R_{ст}(I)$, $X_{Lст}(I)$ и $X_{Cст}(I)$, и решают, используя стандартную программу, уравнение n -й степени. Далее определяют, какое из n значений тока является истинным.

Если по условиям задачи, кроме действующего значения тока, нужно определить и его фазу, комплексные величины напряжения и тока (в (7.14)) следует представить в виде действительных и мнимых частей ($\underline{U} = U' + jU''$ и $\underline{I} = I' + jI''$). Тогда (7.14) может быть преобразовано в систему уравнений

$$\begin{aligned} U' &= R_{ст}(I)I' - X_{Cст}(I)I''; \\ U'' &= X_{Lст}(I)I' + R_{ст}(I)I''; \\ I^2 &= I'^2 + I''^2, \end{aligned} \quad (7.15)$$

где $X_{ст}(I) = X_{Lст}(I) - X_{Cст}(I)$.

Полученную систему, конечно, можно привести к уравнениям вида (7.1) и решить ее известными методами, при этом, однако, особенности уравнений квазилинейных цепей учтены не будут. Действительно, в

(7.15) нелинейность выражается зависимостями $R_{ст}$ и $X_{ст}$ от действующего значения тока, а относительно действительных и мнимых частей этого тока (I' и I'') первые два уравнения являются линейными. Это обстоятельство позволяет построить эффективный алгоритм решения, использующий линейность системы относительно части переменных. Итерации состоят в следующем: на k -м шаге решается линейная система уравнений при некотором значении тока I_k :

$$\begin{aligned} U' &= R_{ст}(I_k)I'_k - X_{ст}(I_k)I''_k; \\ U'' &= X_{ст}(I_k)I'_k + R_{ст}(I_k)I''_k. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Из (7.16) находят неизвестные I'_k и I''_k , затем вычисляют ток $I_{k+1} = \sqrt{I_k'^2 + I_k''^2}$, и опять решают линейную систему уравнений (7.16) при подстановке в нее I_{k+1} , находят новые неизвестные I'_{k+1} и I''_{k+1} и т.д. Для повышения устойчивости вычислительного алгоритма можно каждое следующее приближение определять как среднее арифметическое от нескольких предыдущих итераций.

Таким образом определяют некоторый режим квазилинейной цепи, который находится при заданном начальном значении тока $I_k = I_0$. Варьируя начальные приближения, можно найти и другие установившиеся режимы. Отметим, что на каждом шаге система уравнений (7.15) является невырожденной, т.к. ее определитель $R_{ст}(I_k)^2 + X_{ст}(I_k)^2 \neq 0$.

Рассмотрим числовой пример расчета квазилинейной цепи при последовательном соединении R, L и C . Для упрощения вычислений будем полагать в этой цепи (рис. 7.4) нелинейным только двухполюсник ND_2 . Пусть задано:

$$R = 2 \text{ Ом}; X_C = 1 \text{ Ом}; X_{Lст}(I) = \frac{2}{1 + I^2} \text{ Ом};$$

$$\underline{U} = 1,41 \angle 45^\circ \text{ В.}$$

Уравнения (7.15) при исходных числовых данных примут вид

$$1 = 2I' - \left(\frac{2}{1 + I^2} - 1 \right) I'';$$

$$1 = \left(\frac{2}{1 + I^2} - 1 \right) I' + 2I'';$$

$$I = \sqrt{I'^2 + I''^2}.$$

Задаваясь точностью вычислений $\varepsilon = |I_k - I_{k+1}| = 0,001$, требуемую точность, как видно из табл. 7.1, можно получить уже на пятом шаге итераций. Из табл. 7.1 следует, что действующее значение искомого тока равно 0,696 А, а начальная фаза

$$\Psi = \arctg \frac{I''}{I'} = \arctg \frac{0,401}{0,569} = 35^\circ.$$

Таблица 7.1

κ	I, A	I', A	I'', A
0	0	0,600	0,200
1	0,632	0,580	0,375
2	0,691	0,570	0,399
3	0,696	0,569	0,401
4	0,696	0,569	0,401

Таким образом, искомый ток в цепи $\underline{I} = 0,696 \angle 35^\circ = (0,569 + j0,401) A$. Расчет проводился на ЭВМ, но числовые данные подобраны так, что он может быть легко проверен вручную.

При анализе установившихся процессов в нелинейных цепях переменного тока возникают трудности, связанные с расчетом всех возможных режимов. Например, при последовательном соединении R, L, C в цепи может возникнуть резонанс напряжений и ВАХ $I(U)$ всей цепи будет иметь зону неоднозначности. Поэтому при одном значении входного напряжения может быть получено всего одно значение тока, а при другом — три. Это обстоятельство значительно затрудняет расчет, т.к. требует при использовании итерационной процедуры подбора начальных приближений, т.е. такой величины I_0 , чтобы итерации определяли все решения.

Рассмотрим числовой пример, где для цепи рис. 7.4 заданы следующие параметры:

$$R = 1 \text{ Ом}; X_{ст}(I) = (9 - 5I) \text{ Ом}; \underline{U} = 1 \angle 0^\circ \text{ или } 2,5 \angle 0^\circ \text{ В.}$$

Система уравнений (7.15) примет в этом случае следующий вид:

$$\begin{aligned} U' &= I - (9 - 5I) I''; \\ 0 &= (9 - 5I) I' + I''; \\ I &= \sqrt{I'^2 + I''^2}. \end{aligned}$$

Определим предварительно возможные режимы в исходной цепи. Полное сопротивление цепи $Z_{ст}(I) = \sqrt{1 + (9 - 5I)^2}$ Ом, а $U = Z_{ст}(I) I$, поэтому последнее соотношение в развернутом виде представляет собой уравнение четвертой степени относительно I :

$$25I^4 - 90I^3 + 82I^2 - U^2 = 0.$$

При $U = 1$ В корни этого уравнения, найденные при помощи стандартной программы на ЭВМ, следующие:

$$I_1 = -0,104 A; I_2 = 0,118 A; I_{3,4} = (1,793 \pm j0,167) A.$$

Действующее значение тока — величина положительная, поэтому в цепи существует единственный режим, при котором $I = 0,118 A$.

Предложенная выше итерационная процедура уже на четвертом шаге дает это же значение тока с заданной точностью 0,001 А:

$$\underline{I} = 0,118 \angle -84^\circ 40' = (0,011 - j0,118) A.$$

При расчете начальное приближение тока $I_0 = 0$.

С другой стороны, если $U = 2,5$ В, корни уравнения четвертой степени будут следующими:

$$I_1 = -0,243 A; I_2 = 0,339 A; I_3 = 1,545 A; I_4 = 1,958 A.$$

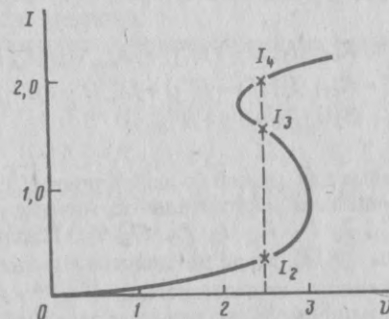


Рис. 7.5

Таким образом, возможны три режима цепи при этом напряжении: $I = I_2, I = I_3, I = I_4$ (рис. 7.5). Однако, выбрав начальное приближение для итераций $I_0 = 0$, получим лишь одно значение тока: $I = 0,339 \angle -82^\circ 24' = (0,045 - j0,337) A$. Согласно теории нелинейных цепей решение $I = I_2$ при $U = 2,5$ В (рис. 7.5) справедливо, если напряжение изменялось от 0 до этого значения. При уменьшении напряжения от $U > 2,5$ В до $U = 2,5$ В решением будет $I = I_4$.

Для решения уравнения в комплексной форме это значение тока следует подставить в исходные уравнения:

$$\underline{I} = 1,958 \angle 38^\circ 19' = (1,54 + j1,216) A.$$

Точка $I = I_3$ является точкой неустойчивого равновесия.

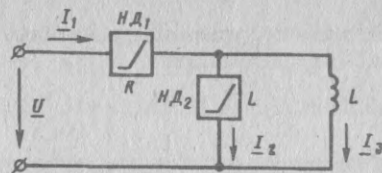


Рис. 7.6

Расчет значительно усложняется, если цепь является многоконтурной. Так, например, для схемы рис. 7.6 на основании законов Кирхгофа можно записать в комплексной форме:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= R_{ст} (I_1) \underline{I}_1 + jX_{L_{ст}} (I_2) \underline{I}_2; \\ \underline{U} &= R_{ст} (I_1) \underline{I}_1 + jX_L \underline{I}_3; \\ \underline{I}_1 &= \underline{I}_2 + \underline{I}_3. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Если теперь подставить комплексные значения напряжений и токов в виде действительных и мнимых частей, то система уравнений (7.17) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} U' + jU'' &= R_{ст1} (I_1) (I_1' + jI_1'') + jX_{L_{ст}} (I_2) (I_2' + jI_2''); \\ U' + jU'' &= R_{ст1} (I_1) (I_1' + jI_1'') + jX_L (I_3' + jI_3''); \\ I_1 + jI_1'' &= I_2' + jI_2'' + I_3' + jI_3''. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Число неизвестных для данной (и любой другой) схемы составляет $3n$, т.к. необходимо определить действительные, мнимые и действующие значения токов: $I_1, I_1', I_1'', I_2, I_2', I_2'', I_3, I_3', I_3''$. Шесть уравнений можно получить из системы (7.18), разделив действительные и мнимые части, а остальные три уравнения — из соотношения $I^2 = I'^2 + I''^2$.

Таким образом, окончательное решение заданной схемы цепи, представленной на рис. 7.6, получим из совместного рассмотрения следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} U' - R_{ст1} (I_1) I_1' + X_{L_{ст}} (I_2) I_2' &= 0; \\ U' - R_{ст1} (I_1) I_1' + X_L I_3' &= 0; \\ U'' - R_{ст1} (I_1) I_1'' - X_{L_{ст}} (I_2) I_2'' &= 0; \\ U'' - R_{ст1} (I_1) I_1'' - X_L I_3'' &= 0; \\ I_1 - I_2 - I_3 &= 0; \\ I_1' - I_2' - I_3' &= 0; \\ I_1^2 - I_1'^2 - I_1''^2 &= 0; \\ I_2^2 - I_2'^2 - I_2''^2 &= 0; \\ I_3^2 - I_3'^2 - I_3''^2 &= 0. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Как видно, (7.19) представляет собой частный случай системы (7.1). Ее характерной особенностью является линейность первых шести уравнений относительно неизвестных $I_1, I_1', I_2, I_2', I_3$ и I_3' . Поэтому для определения искомых токов можно реализовать своеобразный алгоритм расчета подобно тому, как сделано ранее для цепи с последовательным соединением R, L, C . Рассмотрим этот алгоритм.

Пусть задана цепь, в которой действуют n неизвестных токов (n — число конечное). На нулевом шаге задаются начальные приближения $I_{10}, I_{20}, \dots, I_{n0}$ и решается линейная система, состоящая из $2n$ уравнений (подобная первым шести уравнениям системы (7.19)).

Результатом расчета являются действительные и мнимые части n неизвестных токов: $I'_{10}, I''_{10}, I'_{20}, I''_{20}, \dots, I'_{n0}, I''_{n0}$. Далее вычисляются новые приближенные действующие значения токов: $I_{11} = \sqrt{I'_{10}{}^2 + I''_{10}{}^2}$, $I_{21} = \sqrt{I'_{20}{}^2 + I''_{20}{}^2}, \dots, I_{n1} = \sqrt{I'_{n0}{}^2 + I''_{n0}{}^2}$, они подставляются в $2n$ -уравнения, из которых находятся $I'_{11}, I''_{11}, I'_{21}, I''_{21}, \dots, I'_{n1}, I''_{n1}$ и т.д. Алгоритм исключает заикливание или неустойчивость итераций и обеспечивает быструю сходимость процедуры к решению путем вычисления (как отмечалось ранее) среднего арифметического действующих значений токов после некоторого числа итераций.

Аналогично составляется и решается система уравнений для схемы с двумя узлами (рис. 7.7):

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{E}_1 - R_{ст1} (I_1) \underline{I}_1 - jX_{L_{ст2}} (I_1) \underline{I}_1; \\ \underline{U} &= \underline{E}_2 - R_{ст3} (I_2) \underline{I}_2 + jX_{C_{ст4}} (I_2) \underline{I}_2; \\ \underline{U} &= \underline{E}_3 - jX_{L_{ст5}} (I_3) \underline{I}_3 + jX_{C_{ст6}} (I_3) \underline{I}_3; \\ \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (7.20)$$

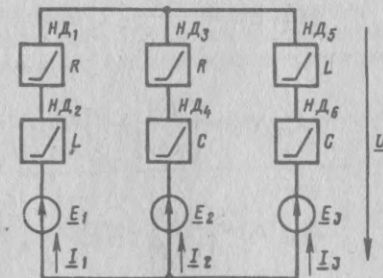


Рис. 7.7

Так, подставив, например, второе уравнение в первое и третье, разделим действительные и мнимые части, добавим недостающие три уравнения вида $I^2 = I'^2 + I''^2$ и окончательно получим

$$\begin{aligned}
& E'_2 - E'_1 - R_{\text{ср3}}(I_2)I'_2 - X_{C_{\text{ср3}}}(I_2)I''_2 + \\
& + R_{\text{ср1}}(I_1)I'_1 - X_{L_{\text{ср2}}}(I_1)I''_1 = 0; \\
& E'_2 - E'_3 - R_{\text{ср3}}(I_2)I'_2 - X_{C_{\text{ср3}}}(I_2)I''_2 - \\
& - X_{L_{\text{ср5}}}(I_3)I'_3 + X_{C_{\text{ср5}}}(I_3)I''_3 = 0; \\
& E''_2 - E''_1 - R_{\text{ср3}}(I_2)I''_2 + X_{C_{\text{ср3}}}(I_2)I'_2 + \\
& + R_{\text{ср1}}(I_1)I'_1 + X_{L_{\text{ср2}}}(I_1)I''_1 = 0; \\
& E''_2 - E''_3 - R_{\text{ср3}}(I_2)I''_2 + X_{C_{\text{ср3}}}(I_2)I'_2 + \\
& + X_{L_{\text{ср5}}}(I_3)I'_3 - X_{C_{\text{ср5}}}(I_3)I''_3 = 0; \\
& I_1 + I_2 + I_3 = 0; \\
& I'_1 + I'_2 + I'_3 = 0; \\
& I''_1 - I''_2 - I''_3 = 0; \\
& I_1^2 - I_2^2 - I_3^2 = 0; \\
& I_2^2 - I_1^2 - I_3^2 = 0; \\
& I_3^2 - I_1^2 - I_2^2 = 0.
\end{aligned} \tag{7.21}$$

Рассмотрим расчет цепи с двумя узлами при следующих значениях параметров схемы:

$$\begin{aligned}
\underline{E}_1 &= (100 + j100) \text{ В}; \quad \underline{E}_2 = (116 + j87) \text{ В}; \\
\underline{E}_3 &= (57 + j124) \text{ В}; \quad R_1 = R_2 = R_3 = 1 \text{ Ом};
\end{aligned}$$

$$X_{\text{ср1}}(I_1) = \left(\frac{52}{1 + I_1^2} - 2 \right) \text{ Ом};$$

$$X_{\text{ср2}}(I_2) = \left(\frac{101}{1 + I_2^2} - 3 \right) \text{ Ом};$$

$$X_{\text{ср3}}(I_3) = \left(\frac{113}{1 + I_3^2} - 3,5 \right) \text{ Ом}.$$

Составив уравнения для этой цепи, аналогичные (7.21), и подставляя в них числовые данные, получим

$$\begin{aligned}
& -16 - I'_1 + \left(\frac{52}{1 + I_1^2} - 2 \right) I''_1 + I'_2 - \left(\frac{101}{1 + I_2^2} - 3 \right) I''_2 = 0; \\
& 43 - I'_1 + \left(\frac{52}{1 + I_1^2} - 2 \right) I''_1 + I'_3 - \left(\frac{113}{1 + I_3^2} - 3,5 \right) I''_3 = 0; \\
& 13 - I''_1 + \left(\frac{52}{1 + I_1^2} - 2 \right) I'_1 + I''_2 + \left(\frac{101}{1 + I_2^2} - 3 \right) I'_2 = 0; \\
& -24 - I''_1 - \left(\frac{52}{1 + I_1^2} - 2 \right) I'_1 + I'_3 + \left(\frac{113}{1 + I_3^2} - 3,5 \right) I'_3 = 0; \\
& I'_1 + I'_2 + I'_3 = 0; \\
& I''_1 + I''_2 + I''_3 = 0; \\
& I_1^2 - I_2^2 - I_3^2 = 0; \\
& I_2^2 - I_1^2 - I_3^2 = 0; \\
& I_3^2 - I_1^2 - I_2^2 = 0.
\end{aligned}$$

Для того, чтобы сразу оценить результаты, полученные при расчете на ЭВМ, числовые данные подбирались таким образом, что один из режимов цепи был заранее известен:

$$\begin{aligned}
I_1 &= 5 \text{ А}; \quad I_1' = 4 \text{ А}; \quad I_1'' = 3 \text{ А}; \\
I_2 &= 10 \text{ А}; \quad I_2' = 8 \text{ А}; \quad I_2'' = 6 \text{ А}; \\
I_3 &= 15 \text{ А}; \quad I_3' = -12 \text{ А}; \quad I_3'' = -9 \text{ А}.
\end{aligned}$$

Зададим начальные приближения токов $I_{10} = I_{20} = I_{30} = 0$ при точности вычислений $\Sigma = 0,001$ А. После десяти итераций были получены результаты, приведенные в табл. 7.2. При вычислениях каждая последующая итерация определялась как среднее арифметическое двух предыдущих.

Таблица 7.2

n	$I_n, \text{ А}$	$I'_n, \text{ А}$	$I''_n, \text{ А}$
1	0,153	-0,056	-0,144
2	0,312	-0,175	-0,260
3	0,462	0,231	0,400

Такие же результаты получены при начальных приближениях $I_{n0} = 1$ А и $I_{n0} = 1,5$ А. Отметим, что этот режим цепи заранее известен не был. Затем было задано начальное приближение $I_{n0} = 100$ А и после 13 итераций получены данные, приведенные в табл. 7.3.

Таблица 7.3

n	I_n, A	I'_n, A	I''_n, A
1	5,003	3,999	3,000
2	10,007	7,999	5,999
3	14,998	-11,999	-8,999

Аналогичными были результаты и при других начальных приближениях: $I_{n0} = 20 A$; $I_{n0} = 8 A$; $I_{n0} = 2,5 A$.

Иллюстрирующие сходимость итерационной процедуры к известному решению при начальных приближениях $I_{n0} = 2,5 A$ (k — шаг процедуры) графики приведены на рис. 7.8.

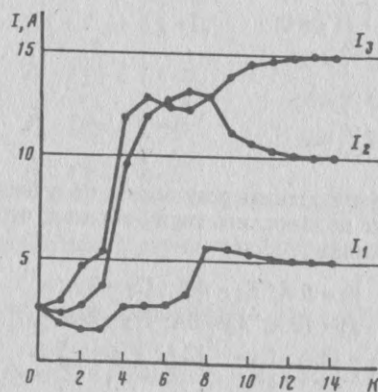


Рис. 7.8

Числовые данные подбирались таким образом, чтобы в каждой из ветвей был возможен резонанс напряжений, т.е. могло бы существовать по крайней мере еще одно решение, которое и было получено при начальном приближении $I_{n0} = 2,2 A$ (весьма близком к $I_{n0} = 1,5 A$ и $I_{n0} = 2,5 A$). Результаты этого расчета приведены в табл. 7.4.

Таблица 7.4

n	I_n, A	I'_n, A	I''_n, A
1	0,284	-0,068	-0,269
2	12,706	10,130	7,668
3	12,489	-10,062	-7,398

Рассмотренные примеры показывают, что для выбора начальных приближений и анализа полученных результатов необходимо понимать физическую сущность процессов, происходящих в тех или иных цепях. Так как среднее время расчета цепи с двумя узлами на ЦВМ ЕС 1033 при некотором начальном приближении составило от 7 до 15 с, это позволило изменять начальное приближение в широком диапазоне при незначительных затратах машинного времени. Рассмотренная методика может использоваться в схемах нелинейной электрической цепи любой сложности, с ее помощью осуществляется преобразование звезды в эквивалентный треугольник (и наоборот).

Будем полагать, что в общем случае каждая из ветвей звезды и треугольника состоит из трех двухполюсников: резистивного, индуктивного и емкостного и система уравнений имеет следующий вид: для звезды

$$\begin{aligned} \underline{U}_{12} &= (R_{cr1}(I_1) + jX_{L_{cr1}}(I_1) - jX_{C_{cr1}}(I_1)) \underline{I}_1 - \\ &- (R_{cr2}(I_2) + jX_{L_{cr2}}(I_2) - jX_{C_{cr2}}(I_2)) \underline{I}_2; \\ \underline{U}_{23} &= (R_{cr2}(I_2) + jX_{L_{cr2}}(I_2) - jX_{C_{cr2}}(I_2)) \underline{I}_2 - \\ &- (R_{cr3}(I_3) + jX_{L_{cr3}}(I_3) - jX_{C_{cr3}}(I_3)) \underline{I}_3; \\ \underline{U}_{31} &= (R_{cr3}(I_3) + jX_{L_{cr3}}(I_3) - jX_{C_{cr3}}(I_3)) \underline{I}_3 - \\ &- (R_{cr1}(I_1) + jX_{L_{cr1}}(I_1) - jX_{C_{cr1}}(I_1)) \underline{I}_1; \end{aligned} \quad (7.22)$$

для треугольника

$$\begin{aligned} \underline{U}_{12} &= (R_{cr12}(I_{12}) + jX_{L_{cr12}}(I_{12}) - jX_{C_{cr12}}(I_{12})) \underline{I}_{12}; \\ \underline{U}_{23} &= (R_{cr23}(I_{23}) + jX_{L_{cr23}}(I_{23}) - jX_{C_{cr23}}(I_{23})) \underline{I}_{23}; \\ \underline{U}_{31} &= (R_{cr31}(I_{31}) + jX_{L_{cr31}}(I_{31}) - jX_{C_{cr31}}(I_{31})) \underline{I}_{31}; \end{aligned} \quad (7.23)$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}; \\ \underline{I}_2 &= \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}; \\ \underline{I}_3 &= \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Покажем, как осуществляется преобразование, например, треугольника в эквивалентную звезду. Исходными данными для преобразования являются зависимости $R_{cr12}(I_{12})$, $X_{L_{cr12}}(I_{12})$, $X_{C_{cr12}}(I_{12})$, $R_{cr23}(I_{23})$, $X_{L_{cr23}}(I_{23})$, $X_{C_{cr23}}(I_{23})$, $R_{cr31}(I_{31})$, $X_{L_{cr31}}(I_{31})$, $X_{C_{cr31}}(I_{31})$ и напряжения \underline{U}_{12} , \underline{U}_{23} , \underline{U}_{31} , которые необходимо менять с некоторым шагом в определенном диапазоне, чтобы получить искомые характеристики $R_{cr1}(I_1)$, $X_{L_{cr1}}(I_1)$, $X_{C_{cr1}}(I_1)$, $R_{cr2}(I_2)$, $X_{L_{cr2}}(I_2)$, $X_{C_{cr2}}(I_2)$, $R_{cr3}(I_3)$, $X_{L_{cr3}}(I_3)$, $X_{C_{cr3}}(I_3)$.

Найдем прежде всего токи \underline{I}_{12} , \underline{I}_{23} , \underline{I}_{31} . Для этого представим комплексные напряжения и токи в уравнениях (7.23) в виде действительной и мнимой частей. Тогда

$$\begin{aligned}
& U'_{12} - R_{\text{ст}12} (I_{12}) I'_{12} + X_{L_{\text{ст}12}} (I_{12}) I''_{12} - \\
& - X_{C_{\text{ст}12}} (I_{12}) I''_{12} = 0; \\
& U'_{23} - R_{\text{ст}23} (I_{23}) I'_{23} + X_{L_{\text{ст}23}} (I_{23}) I''_{23} - \\
& - X_{C_{\text{ст}23}} (I_{23}) I''_{23} = 0; \\
& U'_{31} - R_{\text{ст}31} (I_{31}) I'_{31} + X_{L_{\text{ст}31}} (I_{31}) I''_{31} - \\
& - X_{C_{\text{ст}31}} (I_{31}) I''_{31} = 0; \\
& U''_{12} - R_{\text{ст}12} (I_{12}) I'_{12} - X_{L_{\text{ст}12}} (I_{12}) I_{12} + \\
& + X_{C_{\text{ст}12}} (I_{12}) I_{12} = 0; \\
& U''_{23} - R_{\text{ст}23} (I_{23}) I'_{23} - X_{L_{\text{ст}23}} (I_{23}) I_{23} + \\
& + X_{C_{\text{ст}23}} (I_{23}) I_{23} = 0; \\
& U''_{31} - R_{\text{ст}31} (I_{31}) I'_{31} - X_{L_{\text{ст}31}} (I_{31}) I_{31} + \\
& + X_{C_{\text{ст}31}} (I_{31}) I_{31} = 0; \\
& I_{12}^2 - I_{12}'^2 - I_{12}''^2 = 0; \\
& I_{23}^2 - I_{23}'^2 - I_{23}''^2 = 0; \\
& I_{31}^2 - I_{31}'^2 - I_{31}''^2 = 0.
\end{aligned} \tag{7.25}$$

Решая систему (7.25) с использованием методики, описанной выше, найдем токи I_{12} , I'_{12} , I''_{12} , I_{23} , I'_{23} , I''_{23} , I_{31} , I'_{31} , I''_{31} . Подставив действительные и мнимые значения этих токов в уравнения (7.24), определим токи \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{I}_3 (в алгебраической форме).

Разделив в (7.22) действительные и мнимые части напряжений \underline{U}_{12} , \underline{U}_{23} , \underline{U}_{31} и токов \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{I}_3 , получим систему из шести уравнений, позволяющую определить искомые зависимости:

$$\begin{aligned}
R_{\text{ст}1} (I_1), \quad X_{\text{ст}1} (I_1) &= X_{L_{\text{ст}1}} (I_1) - X_{C_{\text{ст}1}} (I_1); \\
R_{\text{ст}2} (I_2), \quad X_{\text{ст}2} (I_2) &= X_{L_{\text{ст}2}} (I_2) - X_{C_{\text{ст}2}} (I_2); \\
R_{\text{ст}3} (I_3), \quad X_{\text{ст}3} (I_3) &= X_{L_{\text{ст}3}} (I_3) - X_{C_{\text{ст}3}} (I_3).
\end{aligned}$$

Как видно, искомые характеристики получены не в полном объеме, т.к. зависимости $X_{\text{ст}1} (I_1)$, $X_{\text{ст}2} (I_2)$, $X_{\text{ст}3} (I_3)$ являются эквивалентными и из них невозможно выделить $X_{L_{\text{ст}1}} (I_1)$, $X_{C_{\text{ст}1}} (I_1)$ и др. Но это не существенно, поскольку реактивные двухполюсники, включенные последовательно (или параллельно), оказывают на цепь суммарное влияние.

Таким образом, для преобразования треугольника в эквивалентную звезду (и наоборот) необходимо совместное решение восемнадцати уравнений. Ранее было показано, что для расчета схемы с двумя узлами, состоящей из трех ветвей, нужно совместно решить девять уравнений, т.е. без применения вычислительной техники анализ таких задач практически невозможен.

Для нелинейного четырехполюсника в квазилинейном режиме можно записать следующие уравнения в форме А-параметров:

$$\begin{aligned}
\underline{U}_1 - \underline{A}_{11} (U_1) \underline{U}_2 - \underline{A}_{12} (U_1) \underline{I}_2 &= 0; \\
\underline{I}_1 - \underline{A}_{21} (I_1) \underline{U}_2 - \underline{A}_{22} (I_1) \underline{I}_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{7.26}$$

Разделим действительные и мнимые части комплексных коэффициентов четырехполюсника:

$$\begin{aligned}
\underline{A}_{11} (U_1) &= A'_{11} (U_1) + jA''_{11} (U_1); \\
\underline{A}_{12} (U_1) &= A'_{12} (U_1) + jA''_{12} (U_1); \\
\underline{A}_{21} (I_1) &= A'_{21} (I_1) + jA''_{21} (I_1); \\
\underline{A}_{22} (I_1) &= A'_{22} (I_1) + jA''_{22} (I_1).
\end{aligned} \tag{7.27}$$

Подставив (7.27) в систему уравнений (7.26), получим

$$\begin{aligned}
\underline{U}_1 - (A'_{11} (U_1) + jA''_{11} (U_1)) \underline{U}_2 - \\
- (A'_{12} (U_1) + jA''_{12} (U_1)) \underline{I}_2 &= 0; \\
\underline{I}_1 - (A'_{21} (I_1) + jA''_{21} (I_1)) \underline{U}_2 - \\
- (A'_{22} (I_1) + jA''_{22} (I_1)) \underline{I}_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{7.28}$$

Из этих уравнений можно получить выражения для действительных и мнимых частей:

$$\begin{aligned}
U_1 - A'_{11} (U_1) U_2 + A''_{11} (U_1) U_2 - \\
- A'_{12} (U_1) I_2 + A''_{12} (U_1) I_2 &= 0; \\
I_1 - A'_{21} (I_1) U_2 + A''_{21} (I_1) U_2 - \\
- A'_{22} (I_1) I_2 + A''_{22} (I_1) I_2 &= 0; \\
U_1' - A'_{11} (U_1) U_2' - A''_{11} (U_1) U_2'' - \\
- A'_{12} (U_1) I_2' - A''_{12} (U_1) I_2'' &= 0; \\
I_1' - A'_{21} (I_1) U_2' - A''_{21} (I_1) U_2'' - \\
- A'_{22} (I_1) I_2' - A''_{22} (I_1) I_2'' &= 0;
\end{aligned} \tag{7.29}$$

Если теперь к (7.29) добавить уравнения, связывающие действующие значения вторичных токов и напряжений с их действительными и мнимыми частями

$$\begin{aligned}
U_2^2 - U_2'^2 - U_2''^2 &= 0; \\
I_2^2 - I_2'^2 - I_2''^2 &= 0,
\end{aligned} \tag{7.30}$$

то совместным решением уравнений (7.29) и (7.30) можно будет определить неизвестные U_2 , U_2' , U_2'' , I_2 , I_2' , I_2'' .

§ 7.3. Установившиеся режимы существенно нелинейных цепей

При расчете нелинейных цепей по мгновенным значениям, т.е. с учетом формы сигналов, исследования во многих случаях упрощает использо-

вание схемы алгоритмов, составляемой непосредственно по записанным на основании законов Кирхгофа уравнениям без приведения их к одному уравнению соответствующего порядка и без записи в форме уравнений состояния.

Так, для последовательной цепи рис. 7.4 запишем

$$i_R(i) + \frac{d\Psi(i)}{dt} + \frac{1}{C_{\text{диф}}(Q)} \int_0^t i dt = u. \quad (7.31)$$

Если задан закон изменения тока i в цепи и имеется полная информация о всех нелинейных двухполюсниках, то закон изменения напряжения на отдельных элементах и общее напряжение могут быть найдены в результате выполнения операций, представленных на схеме рис. 7.9 и логически вытекающих из уравнения (7.31).

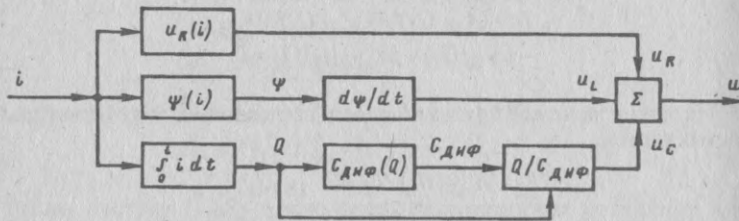


Рис. 7.9

Схему рис. 7.9 можно рассматривать как графическое представление одного из вариантов математического алгоритма решения (7.31) и как математический алгоритм процессов обработки сигналов, проявляющихся при заданных условиях в исходной схеме рис. 7.4. В последнем случае схему рис. 7.9 можно интерпретировать как вариант того же алгоритма процессов, но реализуемого с разделением нелинейных и интегродифференциальных операций, в то время как в исходной схеме оба эти вида операций осуществляются в нелинейных элементах схемы одновременно.

Схема рис. 7.9 может быть реализована с помощью аналоговой вычислительной техники. В то же время эта схема содержит четкий алгоритм решения, легко переводимый на требуемый алгоритмический язык и допускающий использование ЦВМ. В простейшем случае этот алгоритм может быть применен для графического или графоаналитического решения.

На рис. 7.10,а дана схема параллельного соединения (дуальная рассмотренной). Уравнение для этой схемы может быть представлено в виде

$$i_R(u) + \frac{1}{L_{\text{диф}}(\Psi)} \int_0^t u dt + \frac{dQ(u)}{dt} = i. \quad (7.32)$$

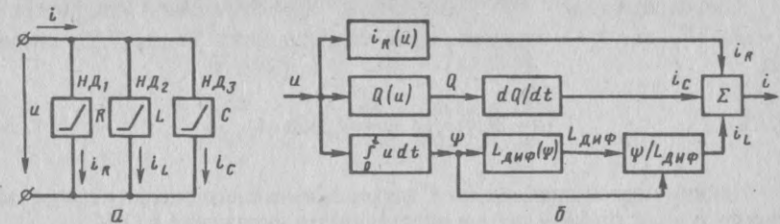


Рис. 7.10

При заданном законе изменения подводимого напряжения ток в цепи можно найти, в частности, с помощью математического алгоритма, представленного на рис. 7.10,б.

Нетрудно заметить, что рассматриваемый прием не претендует на универсальность, т.к. возможны случаи, когда на одном из отдельно взятых элементов схемы оказываются незадаанными ни закон изменения напряжения, ни закон изменения тока. Однако обычно при исследовании и разработке конкретных технических устройств необходимые данные (чаще всего расположенный на выходе элемент) имеются или могут быть заданы, и рассматриваемый прием становится эффективным и для разветвленных схем с параллельно-последовательными участками.

Отметим, что часто сложность конфигурации подлежащих анализу электронно-полупроводниковых схем (и особенно количество входящих в них и подлежащих совместному рассмотрению нелинейных элементов) сильно преувеличивается. Практически в пределах даже одного конструктивного или функционального блока при предварительном учете его фактического режима работы, как правило, можно, во-первых, выделить несколько развязанных между собой участков электрической цепи, во-вторых, линеаризовать значительную часть нелинейностей и объединить несколько нелинейностей в одну эквивалентную нелинейность, обычно более простого вида.

Выше рассматривался один из наиболее легко алгоритмизируемых методов гармонического баланса, который позволяет учесть и некоторые гармонические составляющие. Однако, как видно из уравнений (3.49), даже в простейшем случае найти искомые неизвестные довольно сложно. Поэтому предложим метод, позволяющий, с одной стороны, представить решение в виде суммы нескольких гармоник, а с другой — более просто определить их амплитуды и начальные фазы.

Суть метода состоит в последовательной подстановке приближений решения в исходное дифференциальное уравнение и уточнении последующих приближений с использованием так называемой двойной итерационной схемы. При этом на каждом шаге выделяется линейная часть, что позволяет эффективно построить вычислительный алгоритм, сходимость которого подтверждается численными экспериментами.

Рассмотрим метод применительно к катушке индуктивности, уравнение которой при напряжении $u = U_m \sin \omega t$ имеет следующий вид:

$$u_L + u_R = \frac{d\Psi}{dt} + Ri = U_m \sin \omega t. \quad (7.33)$$

Аппроксимируем вебер-амперную характеристику выражением $\Psi = ai + bi^3$, где b — отрицательный коэффициент. Тогда (7.33) примет вид

$$(a + 3bi^2) \frac{di}{dt} + Ri = U_m \sin \omega t. \quad (7.34)$$

Найдем первое приближение для тока, имеющего только первую гармонику $i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_{11})$, и подставим это выражение в (7.34):

$$\omega (a + 3bi_1^2) I_{1m} \cos(\omega t + \varphi_{11}) + RI_{1m} \sin(\omega t + \varphi_{11}) = U_m \sin \omega t. \quad (7.35)$$

Теперь, разложив \cos и \sin суммы двух углов по правилам тригонометрии, получим

$$\omega (a + 3bi_1^2) I_{1m} (\cos \omega t \cos \varphi_{11} - \sin \omega t \sin \varphi_{11}) + RI_{1m} (\sin \omega t \cos \varphi_{11} + \cos \omega t \sin \varphi_{11}) = U_m \sin \omega t. \quad (7.36)$$

Поскольку ток и напряжение синусоидальны, ток можно представить в комплексной форме: $I_{1m} = I'_{11m} + jI''_{11m}$, $I_{1m} = \sqrt{I'^2_{11m} + I''^2_{11m}}$. Известно, что в этом случае нелинейность проявляется в зависимостях действующих (амплитудных) значений, поэтому в (7.36) мгновенное значение тока i_1 можно заменить амплитудным I_{1m} . Кроме того, $I_{1m} \cos \varphi_{11} = I'_{11m}$, и $I_{1m} \sin \varphi_{11} = I''_{11m}$. С учетом этого уравнение (7.36) преобразуется следующим образом:

$$\omega (a + 3bI^2_{1m}) I'_{11m} \cos \omega t - \omega (a + 3bI^2_{1m}) \times I''_{11m} \sin \omega t + RI'_{11m} \sin \omega t + RI''_{11m} \cos \omega t = U_m \sin \omega t. \quad (7.37)$$

Приравняем коэффициенты при одноименных гармониках слева и справа в (7.37) и с учетом связи между токами I_{1m} , I'_{11m} и I''_{11m} получим

$$\begin{aligned} RI'_{11m} - \omega (a + 3bI^2_{1m}) I''_{11m} &= U_m; \\ \omega (a + 3bI^2_{1m}) I'_{11m} + RI''_{11m} &= 0; \\ I^2_{1m} - I'^2_{11m} - I''^2_{11m} &= 0. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Уравнения (7.38) линейны относительно неизвестных I'_{11m} и I''_{11m} , поэтому решаем их с учетом рекомендаций § 7.3. Угол $\varphi_{11} = \arctg \frac{I''_{11m}}{I'_{11m}}$.

Представим теперь ожидаемое решение в виде суммы двух гармоник (второе приближение):

$$i_2 = I_{12m} \sin(\omega t + \varphi_{12}) + I_{32m} \sin(3\omega t + \varphi_{32}).$$

Уравнение для второго приближения имеет вид

$$\begin{aligned} (a + 3bI^2_{2m}) \frac{di_2}{dt} + Ri_2 &= U_m \sin \omega t + \\ + (a + 3bI^2_{1m}) \frac{di_1}{dt} - (a + 3bI^2_{11}) \frac{di_1}{dt}, \end{aligned} \quad (7.39)$$

где

$$I_{2m} = \sqrt{I^2_{12m} + I^2_{32m}} = \sqrt{I'^2_{12m} + I''^2_{12m} + I'^2_{32m} + I''^2_{32m}}.$$

Подставив вместо i_2 , $\frac{di_2}{dt}$, i_1 и $\frac{di_1}{dt}$ соответствующие тригонометрические выражения, получим

$$\begin{aligned} (a + 3bI^2_{2m}) (\omega I_{12m} \cos(\omega t + \varphi_{12}) + 3\omega I_{32m} \times \\ \times \cos(3\omega t + \varphi_{32})) + R (I_{12m} \sin(\omega t + \varphi_{12}) + I_{32m} \times \\ \times \sin(3\omega t + \varphi_{32})) = U_m \sin \omega t + 3bI^3_{1m} \omega \times \\ \times \cos(\omega t + \varphi_{11}) - 3bI^3_{1m} \omega \sin^2(\omega t + \varphi_{11}) \cos(\omega t + \varphi_{11}). \end{aligned} \quad (7.40)$$

Преобразуем входящие в (7.40) тригонометрические функции, разделим токи I_{12m} и I_{32m} на действительные и мнимые части. Затем, приравняв коэффициенты при одноименных гармониках, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} RI'_{12m} - \omega (a + 3bI^2_{2m}) I''_{12m} &= U_m - 2,25bI^3_{1m} \omega \sin \varphi_{11}; \\ \omega (a + 3bI^2_{2m}) I'_{12m} + RI''_{12m} &= 2,25bI^3_{1m} \omega \cos \varphi_{11}; \\ RI'_{32m} - 3\omega (a + 3bI^2_{2m}) I''_{32m} &= -0,75bI^3_{1m} \omega \sin 3\varphi_{11}; \\ 3\omega (a + 3bI^2_{2m}) I'_{32m} + RI''_{32m} &= 0,75bI^3_{1m} \omega \cos 3\varphi_{11}; \\ I^2_{2m} - I'^2_{12m} - I''^2_{12m} - I'^2_{32m} - I''^2_{32m} &= 0. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Уравнения (7.41) линейны относительно I'_{12m} , I''_{12m} , I'_{32m} и I''_{32m} и решаются, как показано в § 7.3. Углы $\varphi_{12} = \arctg I''_{12m}/I'_{12m}$ и $\varphi_{32} = \arctg I''_{32m}/I'_{32m}$.

Так же рассчитывают третье приближение тока

$$i_3 = I_{13m} \sin(\omega t + \varphi_{13}) + I_{33m} \sin(3\omega t + \varphi_{33}) + I_{53m} \sin(5\omega t + \varphi_{53}),$$

используя уравнение, аналогичное (7.39):

$$(a + 3bI^2_{3m}) \frac{di_3}{dt} + Ri_3 = U_m \sin \omega t +$$

$$+ (a + 3bi^2_{2m}) \frac{di_2}{dt} - (a + 3bi^2_2) \frac{di_2}{dt} \quad (7.42)$$

и т.д.

Рассмотрим теперь решение уравнения Дуффинга:

$$y'' + \mu y' + y^3 = \sin \omega t. \quad (7.43)$$

В таком виде можно представить целый ряд электротехнических уравнений цепей, например:

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q^3 = E_m \sin \omega t;$$

$$C \frac{d^2 \Psi}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dt} + \frac{1}{L} \Psi^3 = I_m \sin \omega t.$$

Здесь в последовательной и параллельной цепях напряжение на нелинейном емкостном двухполоснике и ток в нелинейном индуктивном двухполоснике пропорциональны Q^3 и Ψ^3 соответственно.

Подставим первое приближение ожидаемого решения в виде

$$y_1 = Y_{1m} \sin(\omega t + \varphi_{11})$$

в (7.43) и после ряда тригонометрических преобразований получим

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + Y_{1m}^2) Y'_{11m} - \mu \omega Y''_{11m} &= 1; \\ \mu \omega Y'_{11m} + (-\omega^2 + Y_{1m}^2) Y''_{11m} &= 0; \\ Y_{1m}^2 - Y_{11m}^2 - Y_{11m}^{\prime 2} &= 0. \end{aligned} \quad (7.44)$$

В первых двух уравнениях коэффициентом 0,75 перед Y_{1m}^2 пренебрегаем, т.к. в дальнейших приближениях он значительно усложняет уравнения.

Для второго приближения

$$y_2 = Y_{12m} \sin(\omega t + \varphi_{12}) + Y_{32m} \sin(3\omega t + \varphi_{32})$$

уравнения будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + Y_{2m}^2) Y'_{12m} - \mu \omega Y''_{12m} &= 1 + 0,25 Y_{1m}^3 \cos \varphi_{11}; \\ \mu \omega Y'_{12m} + (-\omega^2 + Y_{2m}^2) Y''_{12m} &= 0,25 Y_{1m}^3 \sin \varphi_{11}; \\ (-9\omega^2 + Y_{2m}^2) Y'_{32m} - 3\mu \omega Y''_{32m} &= 0,25 Y_{1m}^3 \cos 3\varphi_{11}; \\ 3\mu \omega Y'_{32m} + (-9\omega^2 + Y_{2m}^2) Y''_{32m} &= 0,25 Y_{1m}^3 \sin 3\varphi_{11}; \\ Y_{2m}^2 - Y_{12m}^2 - Y_{12m}^{\prime 2} - Y_{32m}^2 - Y_{32m}^{\prime 2} &= 0. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Задаваясь третьим приближением

$$y_3 = Y_{13m} \sin(\omega t + \varphi_{13}) + Y_{33m} \sin(3\omega t + \varphi_{33}) + Y_{53m} \sin(5\omega t + \varphi_{53}),$$

получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + Y_{3m}^2) Y'_{13m} - \mu \omega Y''_{13m} &= 1 + Y_{2m}^2 Y_{12m} \cos \varphi_{12} - \\ &- 0,75 Y_{12m}^3 \cos \varphi_{12} + 0,75 Y_{12m}^2 Y_{32m} \cos(\varphi_{32} - 2\varphi_{12}) - \\ &- 1,5 Y_{12m} Y_{32m}^2 \cos \varphi_{12}; \\ \mu \omega Y'_{13m} + (-\omega^2 + Y_{3m}^2) Y''_{13m} &= Y_{2m}^2 Y_{12m} \sin \varphi_{12} - \\ &- 0,75 Y_{12m}^3 \sin \varphi_{12} + 0,75 Y_{12m}^2 Y_{32m} \sin(\varphi_{32} - 2\varphi_{12}) - \\ &- 1,5 Y_{12m} Y_{32m}^2 \sin \varphi_{12}; \\ (-9\omega^2 + Y_{3m}^2) Y'_{33m} - 3\mu \omega Y''_{33m} &= Y_{2m}^2 Y_{32m} \cos \varphi_{32} + \\ &+ 0,25 Y_{12m}^3 \cos 3\varphi_{12} - 1,5 Y_{12m}^2 Y_{32m} \cos \varphi_{32} - 0,75 Y_{32m}^3 \cos \varphi_{32}; \\ 3\mu \omega Y'_{33m} + (-9\omega^2 + Y_{3m}^2) Y''_{33m} &= Y_{2m}^2 Y_{32m} \sin \varphi_{32} + \\ &+ 0,25 Y_{12m}^3 \sin 3\varphi_{12} - 1,5 Y_{12m}^2 Y_{32m} \sin \varphi_{32} - 0,75 Y_{32m}^3 \sin \varphi_{32}; \\ (-25\omega^2 + Y_{3m}^2) Y'_{53m} - 5\mu \omega Y''_{53m} &= 0,75 Y_{12m}^2 Y_{32m} \cos(\varphi_{32} + 2\varphi_{12}) - \\ &- 0,75 Y_{12m} Y_{32m}^2 \cos(\varphi_{12} - 2\varphi_{32}); \\ 5\mu \omega Y'_{53m} + (-25\omega^2 + Y_{3m}^2) Y''_{53m} &= 0,75 Y_{12m}^2 Y_{32m} \sin(\varphi_{32} + 2\varphi_{12}) - \\ &- 0,75 Y_{12m} Y_{32m}^2 \sin(\varphi_{12} - 2\varphi_{32}); \\ Y_{3m}^2 - Y_{13m}^2 - Y_{13m}^{\prime 2} - Y_{33m}^2 - Y_{33m}^{\prime 2} - Y_{53m}^2 - Y_{53m}^{\prime 2} &= 0. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Углы сдвига фаз гармоник тока φ_{13} , φ_{33} и φ_{53} находятся известным способом:

$$\varphi_{13} = \arctg \frac{Y'_{13m}}{Y_{13m}}, \quad \varphi_{33} = \arctg \frac{Y'_{33m}}{Y_{33m}}, \quad \varphi_{53} = \arctg \frac{Y'_{53m}}{Y_{53m}}.$$

Для решения уравнений (7.46) при $\mu = 0,1$ была составлена программа, результаты расчета по которой приведены в табл. 7.5. Интересно проследить, как изменялась амплитуда, например, первой гармоники, в результате первого, второго и третьего приближений (табл. 7.6).

Таблица 7.5

ω	0	0,05	0,25	0,4	0,45	0,5	1,0	1,2	2,0	3,0	3,2
Y_{13m}	1,0	1,13	0,92	1,2	0,55	0,94	1,44	1,6	2,35	3,41	0,1029
φ_{13}	—	0°	-3°	-13°	-19°	-7°	-9°	-11°	-27°	-67°	-179°
Y_{33m}	0	0,14	0,09	0,39	1,27	0,58	0,12	0,1	—	—	—
φ_{33}	—	-1°	4°	-110°	-176°	-177°	162°	161°	—	—	—
Y_{53m}	0	0,12	0,94	0,1	0,16	0,09	0,006	—	—	—	—
φ_{53}	—	-3°	-45°	-116°	-110°	-102°	-31°	—	—	—	—

Таблица 7.6

ω	0,05	0,25	0,45	1,0	2,0	3,0	3,2
Y_{11m}	1,0	1,02	1,06	1,32	2,1	3,02	0,1045
Y_{12m}	1,07	1,06	0,72	1,43	2,33	3,34	0,1036
Y_{13m}	1,13	0,92	0,55	1,44	2,35	3,41	0,1029

В заключение отметим, что не для всякого вида аппроксимации и ограничения числа гармоник может быть получено решение, и в этом случае необходимо уменьшить число гармоник в решении либо задаться другим аппроксимирующим выражением.

§ 7.4. Переходные процессы

В нелинейных цепях переходные процессы находят, как правило, численным интегрированием, для которого наиболее подходит метод конечных приращений (см. § 5.7) и тот же метод в комбинации с методом пространства состояний (см. § 5.8).

Алгоритмизация электротехнического уравнения (5.1), описывающего процесс, происходящий в схеме, изображенной на рис. 5.1,а, осуществлялась методом конечных приращений и привела к уравнению (5.30). Это уравнение, а также табл. 5.1 рекомендовались для расчета, который может быть проведен и без применения вычислительной техники. Однако интервал времени Δt (шаг интегрирования) при таком расчете нельзя выбирать малым, т.к. это значительно увеличило бы трудоемкость расчета. Основой для программирования остаются уравнение (5.30) и табл. 5.1.

Рассмотрим теперь алгоритм численного интегрирования уравнений состояния на базе метода Эйлера. Запишем решение, приняв за момент коммутации начальный момент очередного шага интегрирования $t = kT$:

$$X(t) = e^{A(t-kT)}X(kT) + e^{A(t-kT)} \int_{kT}^t e^{-A\tau} BW(\tau) d\tau, \quad (7.47)$$

T — шаг интегрирования.

Вычислим значения переменных в $t = (k+1)T$, приняв вектор ЭДС постоянным на интервале $kT \leq t \leq (k+1)T$ и равным $W(kT)$:

$$\begin{aligned} X[(k+1)T] &= e^{AT}X(kT) + A^{-1}(e^{AT} - E)BW(kT) = \\ &= HX(kT) + GW(kT). \end{aligned} \quad (7.48)$$

Матрицы H и G при постоянном шаге интегрирования достаточно вычислить один раз. В методе Эйлера e^{AT} раскладывают в степенной ряд и учитывают только первые два члена, т.е.

$$e^{AT} = E + AT. \quad (7.49)$$

Тогда

$$H = E + AT; \quad (7.50)$$

$$G = BT. \quad (7.51)$$

Несколько сложнее расчет на базе метода трапеций, согласно которому решение уравнений состояния ищем в виде

$$X[(k+1)T] = X[kT] + \frac{T}{2} [X'[(k+1)T] + X'(kT)], \quad (7.52)$$

где $X'[(k+1)T]$ и $X'(kT)$ — производные в моменты времени $t = (k+1)T$ и $t = kT$.

Подставив значения этих производных из уравнения состояния в уравнение (7.35), получим

$$\begin{aligned} X[(k+1)T] &= \left(E - \frac{T}{2}A\right)^{-1} \left(E + \frac{T}{2}A\right) X(kT) + \\ &+ \left(E - \frac{T}{2}A\right)^{-1} BT \frac{W(kT) + W[(k+1)T]}{2}. \end{aligned} \quad (7.53)$$

По сравнению с методом Эйлера метод трапеций дает более высокую точность решения (при одинаковом шаге интегрирования), но программа вычислений усложняется из-за дополнительной операции обращения матрицы $\left(E - \frac{T}{2}A\right)$ и необходимости вычисления $W[(k+1)T]$. Еще более высокую точность, как указывалось в § 5.7, обеспечивает метод Рунге — Кутты.

Алгоритмизация исходного уравнения (5.34) для нелинейной цепи (см. рис. 5.8) была проведена уравнением (5.36), которым и необходимо пользоваться при расчете этой цепи на ЦВМ.

Схема нелинейной цепи (см. рис. 5.1), имеющей исходное уравнение (5.37), алгоритмизирована уравнением (5.39).

§ 7.5. Синтез цепей

Синтез нелинеаризуемых электрических цепей, как следует из гл. 6, относится к группе задач, требующих выполнения нестандартной последовательности операций, характерных для данного конкретного случая синтеза.

Не рассматривая всей проблемы машинного синтеза нелинейных цепей в целом (поскольку доведение программ технической реализации синтезируемых цепей относится уже к области автоматизированного проекти-

рования устройств), остановимся на самой характерной части таких программ — определении характеристик нелинейного элемента, обеспечивающего в выбранной схеме заданную конкретную реакцию $u_{\text{вых}}(t)$ при заданном входном воздействии $u_{\text{вх}}(t)$. Как указывалось, вследствие зависимости реакции $u_{\text{вых}}(t)$ от амплитуды сигнала здесь приходится задавать несколько взаимосвязанных пар ожидаемых воздействий и требуемых выходных реакций, соответствующих предполагаемому диапазону рабочих сигналов синтезируемого нелинейного четырехполюсника. Этим обстоятельством обусловлена необходимость многократных расчетов по одному и тому же алгоритму, что делает рассмотренные методы синтеза приемлемыми только при условии использования вычислительной техники.

Остановимся подробнее на последовательности операций (логическом алгоритме) при синтезе схем рис. 6.1,б, 6.6 и 6.8,а. По ходу пояснения графоаналитических методов решения этих задач подчеркивалось сходство требуемых операций для выполнения разных вариантов. Так, для одного нелинейного резистивного двухполюсника исходное соотношение (6.10) было приведено к уравнению (6.12). Для линейной индуктивности в горизонтальной ветви имеют место соответственно исходное соотношение (6.18) и уравнение (6.21), а для нелинейного емкостного двухполюсника в вертикальной ветви — соотношения (6.22) и (6.25).

Для всех трех случаев необходимы следующие однотипные операции.

1. На основании второго закона Кирхгофа составляют уравнения с правой частью вида $u_{\text{вх}}(t) - u_{\text{вых}}(t)$ (см. уравнение (6.10)). При этом, если в цепи имеется реактивный элемент, то в правой части выполняют интегрирование по времени (см. уравнения (6.19) и (6.23)).

2. Совершают переход от переменной t к переменной $u_{\text{вых}}$, т.е. уравнение приводят к параметрическому виду (см. уравнения (6.12), (6.21) и (6.25)).

3. Получают разность в правых частях уравнений (6.12), (6.21) и (6.25).

4. Восстанавливают масштаб искомых характеристик путем деления на постоянный множитель левой части уравнений (6.12), (6.21) и (6.25).

Приведенная последовательность операций легко может быть представлена на соответствующем алгоритмическом языке.

Из материала предыдущих параграфов следует, что те же операции составляют основу вычислений и других вариантов Г-образных четырехполюсников, если при этом сохраняется порядок уравнения. Здесь лишь появляются некоторые дополнительные несложные операции, легко включаемые в рассмотренный логический алгоритм и расширяющие его возможности путем введения условных переходов ("если ..."), подобных замечаниям к первой операции.

Такие алгоритмы для исследования электрических цепей могут дать еще более важные для практики результаты при условии разработки систем автоматизированной оптимизации параметров схемы, облегчающих нахождение варианта с нелинейной характеристикой, приближающейся к требуемой или располагаемой. В этом случае возможны принципиально новые схемотехнические решения даже известных технических задач.

Глава 8

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

§ 8.1. Общая характеристика нестационарных цепей

Нестационарными цепями (а также цепями с переменными параметрами или параметрическими цепями) называются электрические цепи, параметры которых R , L и C (или хотя бы один из них), будучи независимыми от действующих в цепи напряжений и токов, изменяются с течением времени за счет внешних по отношению к рассматриваемой цепи воздействий. Это могут быть механические, тепловые, световые и т.п. воздействия, а также воздействия в виде электрических сигналов какой-то другой электрической цепи.

На рис. 8.1,а показан один из простейших примеров нестационарной цепи — выходная, питаемая от напряжения $u(t)$ часть направленного четырехполюсника, поскольку выходное сопротивление четырехполюсника будет меняться во времени под воздействием напряжения на входе $u_{\text{вн}}(t)$.

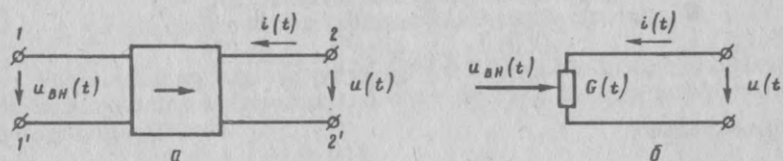


Рис. 8.1

Так как у направленных четырехполюсников сигнал передается только с входных зажимов на выходные, а сигналы на выходе не влияют на вход, при исследовании выходной цепи входная пара зажимов может рассматриваться как управляемый со стороны входа двухполюсник.

Условное изображение схемы, где учтено сказанное, представлено на рис. 8.1,а; для случая активного сопротивления управляемого двухполюсника — на рис. 8.1,б. Процесс управления проводимостью $G(t)$ внешним напряжением $u_{\text{вн}}(t)$ называется модуляцией, а ток в цепи $i(t)$ — соответственно модулированным. Воздействие напряжения $u_{\text{вн}}(t)$ на проводимость резистора $G(t)$ условно показано стрелкой. Аналогичный вид будет иметь и схема цепи с телефонной угольной мембраной, если под внешним воздействием подразумевать давление звука на мембрану.

Заметим, что нестационарная цепь остается линейной, но описывается в общем случае уже линейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами вида

$$a_0(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t) x = f(t). \quad (8.1)$$

где коэффициенты $a_0(t)$, $a_1(t)$ и т.д. являются функциями параметров цепи, которые предполагаются нестационарными.

Для частного случая последовательной цепи, содержащей нестационарные R , L и C , имеем

$$R(t)i + \frac{dL(t)i}{dt} + \int_0^t \frac{i}{C(t)} dt = u$$

или

$$L(t) \frac{di}{dt} + \frac{dL(t)}{dt} i + R(t)i + \int_0^t \frac{i}{C(t)} dt = u.$$

Дифференцируя это выражение по времени, получим

$$L(t) \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{dL(t)}{dt} \frac{di}{dt} + \frac{d^2 L(t)}{dt^2} i + \frac{dL(t)}{dt} \frac{di}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} i + R(t) \frac{di}{dt} + \frac{1}{C(t)} i = \frac{du(t)}{dt}$$

и, окончательно,

$$L(t) \frac{d^2 i}{dt^2} + \left[2 \frac{dL(t)}{dt} + R(t) \right] \frac{di}{dt} + \left[\frac{d^2 L(t)}{dt^2} + \frac{dR(t)}{dt} + \frac{1}{C(t)} \right] i = \frac{du}{dt}. \quad (8.2)$$

В случае достаточно малых скоростей (и ускорений) изменения соответствующих параметров за время переходного процесса (а для процессов в цепях переменного тока — за время одного периода) полученное выражение, очевидно, упростится:

$$L(t) \frac{d^2 i}{dt^2} + R(t) \frac{di}{dt} + \frac{1}{C(t)} i = \frac{du}{dt}. \quad (8.3)$$

Несмотря на то, что принцип наложения применим для уравнений с переменными коэффициентами, регулярных методов их решения не существует.

Рассмотрим один специальный прием, использующий метод приспособывания (см. § 3.7). Как известно, переходный процесс на каждом интервале может быть описан линейным (а в принципе — и нелинейным, но интегрируемым) уравнением. Постоянные интегрирования этих уравнений определяются по граничным условиям (см. § 8.2).

Другими словами, если параметры $R(t)$, $L(t)$ и $C(t)$ на выбранном интервале Δt изменяются незначительно, они могут быть заменены усредненными для этого интервала значениями R_{cp} , L_{cp} и C_{cp} . Тогда (8.3) упрощается до уравнения с постоянными коэффициентами

$$L_{cp} \frac{d^2 i}{dt^2} + R_{cp} \frac{di}{dt} + \frac{1}{C_{cp}} i = \frac{du}{dt}, \quad (8.4)$$

справедливого для интервала Δt .

Такой подход (фактически — применение кусочно-линейной аппроксимации в сочетании с методом приспособывания), когда параметры для некоторого интервала времени полагаются постоянными, получил название метода фиксированных ("замороженных") коэффициентов.

В более общих случаях линейные уравнения с переменными коэффициентами исследуются численными методами (методом конечных приращений) или последовательных интервалов (см. гл. 5) с применением ЦВМ. Отдельные частные случаи (см. ниже) могут быть исследованы более просто.

§ 8.2. Переходные процессы в цепях постоянного тока с периодически и скачкообразно меняющимися параметрами

Рассмотрим частный случай цепи (рис. 8.2,а), в которой двухполюсник RC подключается к источнику постоянного тока E через периодически коммутируемый ключ.

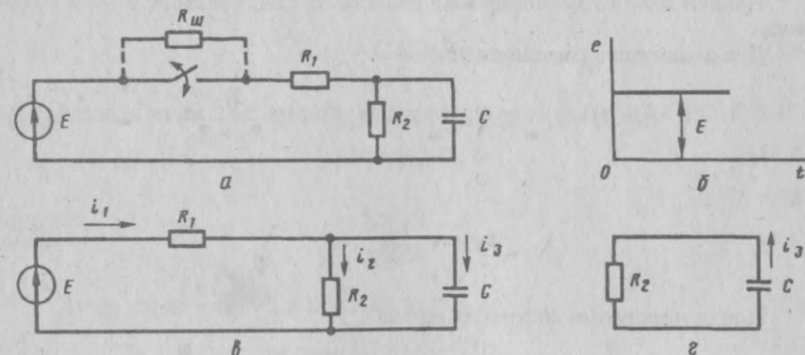


Рис. 8.2

Обозначим длительность замкнутого состояния ключа t_3 , а длительность разомкнутого состояния t_p . Предполагается, что эти два состояния периодически следуют друг за другом. Тогда период повторения (рис. 8.3)

$$T = t_p + t_3.$$

В разомкнутом состоянии ключа его сопротивление равно бесконечности. Если же ключ шунтирован сопротивлением $R_{ш}$, двухполюсник будет связан с источником через это сопротивление. В замкнутом состоянии ключа его сопротивление равно нулю (рис. 8.3).

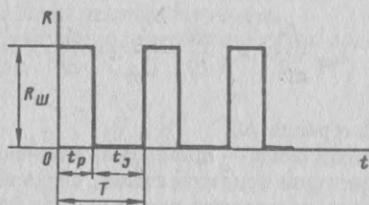


Рис. 8.3

Такой периодически коммутируемый ключ можно рассматривать как нестационарное активное сопротивление, периодически изменяющееся от нуля (при отсутствии $R_{ш}$) до бесконечности.

Заметим, что в случае $R_{ш} = \infty$ конфигурация цепи для замкнутого и разомкнутого состояний цепи будет различной, как показано на рис. 8.2, б и в. В последнем случае источник питания отключен, и конденсатор C разряжается на сопротивление R_2 .

В такой схеме процессы исследуются методом припасовывания и отдельно рассчитываются для схем рис. 8.2, б и в. Постоянные интегрирования определяются по граничным условиям исходя из требования непрерывности решения.

Найдем закон изменения напряжения на конденсаторе в этих условиях.

Для замкнутого состояния ключа

$$u_C(t) = u_{C_{от}}(t) + u_{C_{зп}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + E \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad (8.5)$$

где

$$p_1 = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}. \quad (8.6)$$

Для разомкнутого состояния ключа

$$u_C = u_{C_{от}}(t) = A_2 e^{p_2 t}, \quad (8.7)$$

где

$$p_2 = -\frac{1}{R_2 C}. \quad (8.8)$$

Так как процесс периодический, могут быть составлены рекуррентные формулы и использован аппарат уравнений в конечных разностях.

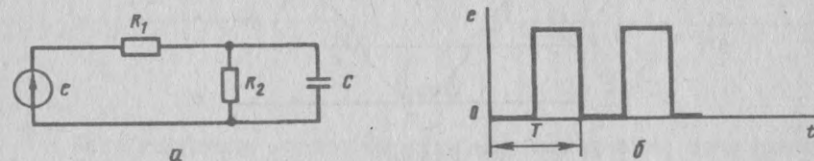


Рис. 8.4

Считаем необходимым предостеречь от применения изложенного подхода к очень похожему внешне, но принципиально другим так называемым импульсным цепям (или, точнее, к цепям с импульсным питанием). Эти схемы (рис. 8.4, а) отличаются от рассмотренных тем, что питаются от источников ЭДС, генерирующих импульсы, при этом конфигурация схемы как при подаче импульса, так и в паузе остается неизменной, поскольку внутреннее сопротивление источника равно нулю. К этим простым линейным цепям, находящимся под действием импульсов, применимы все методы расчета переходных процессов в линейных цепях.

§ 8.3. Установившийся режим в нестационарной цепи переменного тока при гармоническом изменении параметров

Рассмотрим частный случай, когда проводимость управляемого двухполюсника, модулируемая внешним сигналом $u_{вн}(t)$, изменяется по закону

$$G(t) = G(1 + \sin \omega_{вн} t), \quad (8.9)$$

как показано на рис. 8.5, а, при этом напряжение питания цепи (рис. 8.5, б)

$$u(t) = U_m \sin \omega t, \quad (8.10)$$

причем

$$\omega_{вн} < \omega. \quad (8.11)$$

Тогда установившийся ток в цепи (8.5, в)

$$i(t) = u(t) G(t), \quad (8.12)$$

$$\text{или } i(t) = U_m G(1 + \sin \omega_{вн} t) \sin \omega t,$$

$$i(t) = U_m G \sin \omega t + \frac{U_m G}{2} \cos(\omega - \omega_{\text{ВН}}) t - \frac{U_m G}{2} \cos(\omega + \omega_{\text{ВН}}) t. \quad (8.13)$$

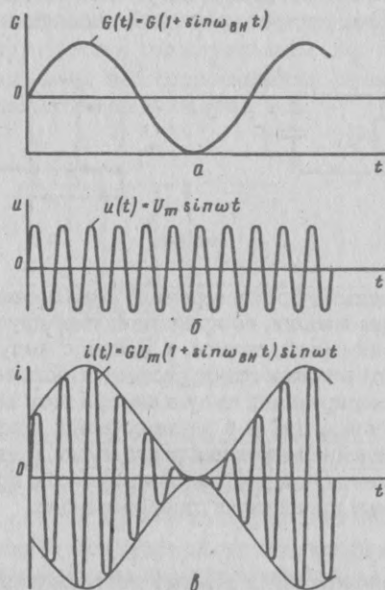


Рис. 8.5

В этом случае ток в цепи будет представлять собой сумму сигнала частотой ω и двух других гармонических составляющих с так называемыми боковыми частотами $(\omega - \omega_{\text{ВН}})$ и $(\omega + \omega_{\text{ВН}})$. Однако составляющая имеет частоту меньшую, чем источник питания, а другая — большую, что иллюстрируется графиками амплитудных спектров рис. 8.6. Рассматриваемый процесс носит название амплитудной модуляции, причем ω называется несущей частотой, а $\omega_{\text{ВН}}$ — частотой модуляции.

Здесь обнаруживается качественно новое явление, присущее нестационарным цепям: в выходном сигнале (в данном случае ток i) появляются новые частотные составляющие, которые в источнике питания отсутствовали.

Заметим, что огибающая тока на рис. 8.5, в будет в принципе отличаться от синусоиды. Однако при достаточно большой разнице в частотах ω и $\omega_{\text{ВН}}$ этим обстоятельством часто пренебрегают. Напомним (см. гл. 3): методы расчета, основанные на допущении, что в действительности несинусоидальные токи и напряжения являются синусоидальными, называются квазилинейными.

Кривая на рис. 8.5, в, показывающая изменение амплитуды тока в соответствии с законом модуляции, называется огибающей.

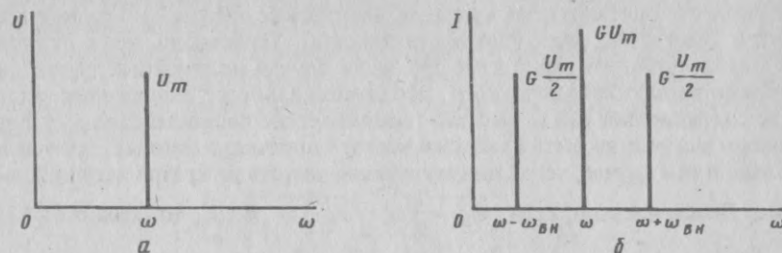


Рис. 8.6

Если модуляция осуществляется сложным сигналом, представляющим собой периодическую несинусоидальную функцию (т.е. сумму гармонических составляющих, включая постоянную составляющую), то модулированный сигнал вместо (8.13) может быть описан выражением

$$i(t) = U_m G (m_0 + m_1 \sin \omega_{1\text{ВН}} t + m_2 \sin \omega_{2\text{ВН}} t + m_3 \sin \omega_{3\text{ВН}} t + \dots) \sin \omega t, \quad (8.14)$$

где m_0, m_1, m_2 и т.д. — глубина модуляции соответствующей частотной составляющей (в (8.9) коэффициент модуляции был равен 1).

При модуляции таким сложным сигналом амплитудный спектр модулированного колебания будет состоять из колебания несущей частоты ω (если в сигнале имеется постоянная составляющая) и двух боковых полос (рис. 8.7).

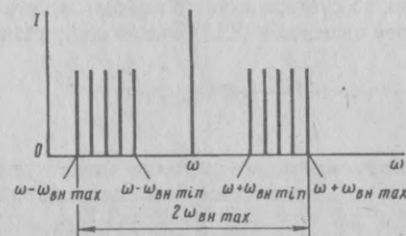


Рис. 8.7

Здесь $\omega_{\text{ВН min}}$ и $\omega_{\text{ВН max}}$ — соответственно минимальная и максимальная модулирующие частоты, а общая ширина спектра, определяемая наиболее высокой частотой модулирующих колебаний, равна $2\omega_{\text{ВН max}}$. Заметим, что равенство амплитуд отдельных составляющих полос спектра условно: в действительности амплитуды боковых частот зависят от глубины модуляции и могут быть различными.

Очевидно, что на выходе параметрической цепи могут появляться как высшие гармонические составляющие (имеющие более высокую частоту,

чем источник питания), так и низшие, называемые обычно субгармониками (частота их ниже частоты источника). Характерно, что в отличие от рассмотренного ранее классического случая нелинейных цепей под воздействием периодического несинусоидального напряжения здесь при соотношении (8.11) высшие гармонические составляющие и субгармоники могут и не быть кратными частоте источника питания, причем не только в том случае, когда модулирующая частота не кратна несущей частоте. Действительно, если $\omega_{\text{вх}} = \frac{1}{2}\omega, \frac{1}{3}\omega, \frac{1}{4}\omega$ и т.д., то согласно (8.13) второе его слагаемое даст $\omega_{\text{вых}} = \frac{1}{2}\omega, \frac{2}{3}\omega, \frac{3}{4}\omega$ и т.д., третье слагаемое дает $\omega_{\text{вых}} = \frac{3}{2}\omega, \frac{4}{3}\omega, \frac{5}{4}\omega$ и т.д.

Теперь рассмотрим вариант, когда частота модулирующего сигнала $\omega_{\text{вх}}$ больше частоты источника питания ω . Другими словами, в отличие от (8.11), в данном случае имеем

$$\omega_{\text{вх}} > \omega. \quad (8.15)$$

Здесь сохраняется справедливость приведенных выше выражений и общий характер выходного сигнала, хотя несущий и модулирующий сигналы как бы поменялись местами. Особенность этого случая состоит в том, что если модулирующая частота при соблюдении условия (8.15) кратна несущей, т.е.

$$\omega_{\text{вх}} = n\omega, \quad (8.16)$$

где n — целое число, то субгармоники в выходном сигнале не возникают. Действительно, второе слагаемое (8.13) можно представить в виде

$$\frac{U_m G}{2} \cos(\omega_{\text{вх}} - \omega)t, \quad (8.17)$$

при этом частота модулирующего сигнала может принимать значения $\omega_{\text{вх}} = \omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega$ и т.д., а эквивалентные составляющие выходного сигнала $\omega_{\text{вых}} = 0, \omega, 2\omega, 3\omega$ и т.д. Третье слагаемое при этом дает $\omega_{\text{вых}} = 2\omega, 3\omega, 4\omega, 5\omega$ и т.д.

Отмеченное возникновение новых гармонических составляющих, которых не было в сигнале источника питания, является одной из важнейших качественных особенностей параметрических цепей.

§ 8.4. Некоторые особенности нестационарных цепей

В качестве примера реализации свойств нестационарных цепей рассмотрим два явления, возникающих в периодически коммутируемых цепях. Это прежде всего так называемое синхронное выпрямление, идея которого проиллюстрирована рис. 8.8,а. Эта схема отличается от схемы рис. 8.2,а

тем, что питается от источника переменного напряжения E . Ключ коммутируется синхронно с напряжением источника, т.е. он замкнут при одной полуволне питающего напряжения и разомкнут при следующей полуволне (рис. 8.8,б). На сопротивление R при этом поступает напряжение в виде полуволн одного знака, содержащее нулевую гармонику, т.е. постоянную составляющую.

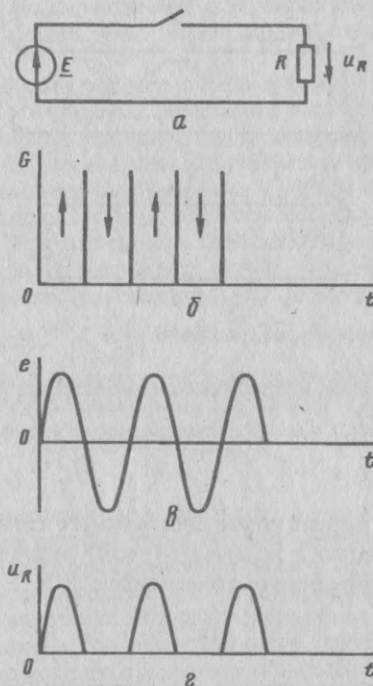


Рис. 8.8

Рассмотрим еще один пример возможностей периодически коммутируемых цепей — схему рис. 8.9,а и сопоставим ее со схемой рис. 8.9,б, которая представляет собой простейший резистивный двухполюсник (сопротивление R). Покажем, что при определенных условиях схема рис. 8.9,а может рассматриваться как активное сопротивление. Такая замена, с конструктивно-технологической точки зрения, очень рациональна при изготовлении твердотельных схем.

Пусть ключ схемы рис. 8.9,а периодически переключается с тактовой частотой f : это равноценно наличию в цепи двух нестационарных скачкообразно изменяющихся сопротивлений.

Если ключ находится в левом положении и конденсатор зарядился до напряжения u_1 , то при правом положении ключа конденсатор перезарядится до u_2 . Заряд, переносимый при этом от левой половины к правой,

$$Q = C(u_1 - u_2),$$

$$i = C(u_1 - u_2)f. \quad (8.18)$$

Нетрудно видеть, что среднее значение потребляемого схемой тока i

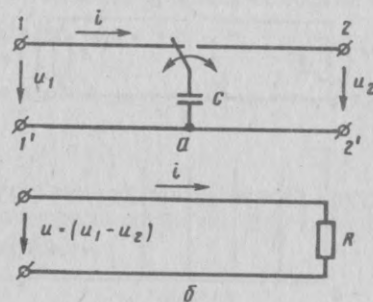


Рис. 8.9

будет таким же, как тока, потребляемого резистором

$$R = \frac{u_1 - u_2}{i} = \frac{1}{Cf}. \quad (8.19)$$

Если при этом частота изменения входного сигнала $f_{вх}$ (т.е. частота изменения напряжения u_1 при $u_2 = U_2 = \text{const}$) много меньше частоты тактового сигнала (частоты переключения ключа) f

$$f_{вх} \ll f, \quad (8.20)$$

то в первом приближении связанные с дискретизацией явления можно не учитывать и рассматривать схему рис. 8.9,а как непосредственную замену схемы рис. 8.9,б.

Отметим, что, меняя тактовую частоту f , в соответствии с (8.19) можно изменять и эквивалентное сопротивление R .

§ 8.5. Автопараметрический режим нелинейной электрической цепи

Возьмем резисторный двухполюсник, питаемый синусоидальным напряжением (см. (8.10)) и обладающий симметричной нелинейной вольт-амперной характеристикой. Пользуясь методом трех плоскостей (см. § 3.2), построим график изменения его тока в функции времени $i(t)$. После этого при условии неизменной амплитуды и частоты питающего напряжения, т.е. при

$$U_m = \text{const} \text{ и } \omega = \text{const},$$

нетрудно построить зависимость значений стационарной проводимости двухполюсника от времени $G(t)$ как отношение мгновенного тока i к мгновенному значению напряжения в каждый отдельный момент времени.

Очевидно, что таким же будет график тока $i(\omega t)$ для нестационарной цепи вида рис. 8.1,б, если аналогичные изменения проводимости двухполюсника $G(t)$ вызваны внешними модулирующими воздействиями. Для обоих случаев справедливо выражение (8.12) с той лишь разницей, что в нелинейной цепи это создается за счет внутренних свойств самой нелинейной цепи. Подобный режим может быть назван автопараметрическим.

Таким образом, можно говорить об известной внешней аналогии между нестационарными и нелинейными цепями в рассмотренных условиях и о возможности сводить один вид цепей к другому (см. § 4.6).

Зависимость $G(t)$ при анализе должна быть разложена в тригонометрический ряд и, таким образом, может быть найден спектр тока. Боковая полоса, соответствующая субгармоническим колебаниям, в этом спектре будет отсутствовать. Эта особенность объясняется следующим.

Как известно, при симметричной форме вольт-амперной характеристики, период повторения зависимости $G(t)$ равен половине периода питающего напряжения, т.е. $T_d = \frac{\pi}{\omega}$. При несимметричной форме характери-

стики (например, характеристика вентиляного типа) ток в положительный и отрицательный периоды имеет разную форму. Тогда период повторения зависимости $G(t)$ будет равен целому периоду питающего напряжения: $T_d = \frac{2\pi}{\omega}$.

Таким образом, разложение в ряд будет, во-первых, содержать только те гармоники, частота которых выше частоты питающего напряжения; во-вторых, эти гармоники кратны основной частоте. Другими словами, будут выдержаны условия соотношений (8.15) и (8.16), при которых, как было показано выше, субгармонические составляющие в токе отсутствуют.

Для возникновения автопараметрического режима с субгармониками необходимо, чтобы изменение проводимости в нелинейной цепи имело период T_d больший, чем период питающей сети:

$$T_d > T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (8.21)$$

Последнее условие требует наличия в цепи двухполюсника реактивного элемента и элемента с падающей ВАХ или характеристикой релейного типа. К их числу относится, например, разрядник, идеализированная характеристика которого показана на рис. 8.10,а. При увеличении напряжения до значения U_C проводимость скачком меняется от нуля до бесконечности. Нулевая проводимость восстанавливается при уменьшении напряжения до несколько меньшего значения U_p .

Пример автопараметрической цепи, создающей субгармонические составляющие в кривой тока, дан на рис. 8.10,б. Если параметры цепи подобраны так, что конденсатор C заряжается через вентиль НД₁ и сопротив-

ление R_1 за время, большее периода питающего напряжения, а разряжается через сопротивление R_2 на разрядник $НД_2$ через доли полупериода, период кривой тока будет больше периода питающего напряжения, т.е. возникнут субгармонические составляющие. Расчет схемы рис. 8.10,б выполняется методом сопряженных интервалов.

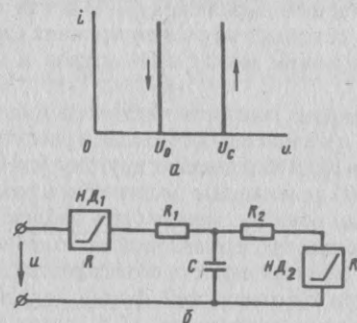


Рис. 8.10

Рассмотренный режим может быть отнесен к автопараметрическим релаксационным колебаниям. В цепях с нелинейными резисторами, емкостями и индуктивностями возможно появление субгармоник резонансного характера за счет нелинейных резонансов, возникающих на субгармониках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колосов С.П., Сидоров Ю.А. Нелинейные двухполюсники и четырехполюсники. -М., 1981.
2. Бессонов Л.А. Нелинейные электрические цепи. -М.,1977.
3. Митропольский Ю.А. Машинный анализ нелинейных резонансных цепей. - Киев, 1981.
4. Жеребцов И.П. Основы электротехники. Электрические и магнитные цепи. -Л., 1987.
5. Нейман Л.Р. Теоретическая электротехника. -Л.,1988.
6. Данилов Л.В. Ряды Вольтерра-Пикара в теории нелинейных электрических цепей.-М.,1987.
7. Андреев В.С. Теория нелинейных цепей.-М.,1982.
8. Буртаев Ю.В., Овсянников П.Н. Теоретические основы электротехники. -М., 1984.
9. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. -М.,1984.
10. Матханов П.Н. Основы анализа электрических цепей. Нелинейные цепи. -М.,1986.
11. Крылов В.В., Корсаков С.Я. Основы теории цепей для системотехников. -М., 1990.
12. Бакалов В.П., Игнатов А.Н., Круг Б.И. Основы теории электрических цепей. -М., 1989.
13. Белецкий А.Ф. Анализ нелинейных резистивных электрических цепей. -Л.,1990.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	5
Глава 1. Анализ установившихся режимов в цепях постоянного тока с нелинейными двухполюсниками	7
§1.1. Исходные характеристики двухполюсников и их классификация	7
§1.2. Упрощение и линеаризация вольт-амперных характеристик двухполюсников. Метод компенсации. Идеализация характеристик	10
§1.3. Графический расчет цепей с двухполюсниками	13
§1.4. Релейный эффект в цепи с двухполюсником, имеющим отрицательное дифференциальное сопротивление	23
§1.5. Нелинейная аппроксимация исходных характеристик	25
§1.6. Расчет цепей с двухполюсниками методом компенсации	29
§1.7. Магнитные цепи при постоянном магнитном потоке	30
Задачи	39
Глава 2. Анализ установившихся режимов в цепях постоянного тока с нелинейными четыреполюсниками	51
§2.1. Исходные характеристики четыреполюсников и их систематизация	51
§2.2. Графический расчет цепей с направленными четыреполюсниками	54
§2.3. Графический расчет цепей с направленными четыреполюсниками и обратными связями	56
§2.4. Расчет цепей с направленными четыреполюсниками методом компенсации	58
§2.5. Графический расчет цепей с ненаправленными четыреполюсниками	61
§2.6. Расчет цепей с ненаправленными четыреполюсниками методом компенсации	62
Задачи	66

Глава 3. Анализ установившихся режимов в цепях переменного тока с нелинейными двухполюсниками	73
§3.1. Особенности, исходные характеристики и классификация двухполюсников, работающих на переменном токе	74
§3.2. Графический расчет квазилинейных цепей	78
§3.3. Нелинейная аппроксимация исходных характеристик квазилинейных цепей	87
§3.4. Расчет квазилинейных цепей методом компенсации	88
§3.5. Графический и графоаналитический расчет цепей по кривым мгновенных значений воздействий	89
§3.6. Метод гармонического баланса	100
§3.7. Метод сопряжения интервалов (для расчета цепей с резистивными двухполюсниками)	102
§3.8. Магнитные цепи при переменном магнитном потоке	105
§3.9. Особенности цепей с диэлектриками	107
§3.10. Расчет цепей с реактивными двухполюсниками методом сопряжения интервалов	109
Задачи	114
Глава 4. Анализ установившихся режимов в цепях переменного тока с нелинейными двухполюсниками	126
§4.1. Особенности и исходные характеристики четырехполюсников на переменном токе	126
§4.2. Графический расчет квазилинейных цепей с направленными четырехполюсниками	128
§4.3. Расчет квазилинейных цепей с направленными четырехполюсниками методом компенсации	130
§4.4. Графический расчет квазилинейных цепей с ненаправленными четырехполюсниками	134
§4.5. Расчет квазилинейных цепей с ненаправленными четырехполюсниками методом компенсации	134
§4.6. Расчет цепей с направленными четырехполюсниками, имеющими идеализированные выходные характеристики	137
Задачи	144
Глава 5. Переходные процессы в нелинейных цепях	149
§5.1. Общая характеристика переходных процессов в нелинейных цепях	149
§5.2. Метод интегрируемой аппроксимации	149
§5.3. Метод графического интегрирования	151
§5.4. Метод фазовой плоскости	152
§5.5. Метод последовательных приближений	155
§5.6. Метод сопряженных интервалов	157
§5.7. Метод конечных приращений (последовательных интервалов)	159
§5.8. Метод пространства состояний	161
§5.9. Методы усреднения	164

Задачи	165
Глава 6. Синтез и схемная реализация нелинейных цепей	171
§6.1. Синтез вольт-амперной характеристики нелинейного двухполюсного элемента резистивного четырехполюсника гармоническим методом	172
§6.2. Синтез вольт-амперной характеристики нелинейного двухполюсного элемента резистивного четырехполюсника методом трех плоскостей	174
§6.3. Синтез вольт-амперной характеристики нелинейного резистивного двухполюсного элемента активно-реактивного четырехполюсника	177
§6.4. Синтез характеристик нелинейных реактивных двухполюсных элементов активно-реактивного четырехполюсника	179
§6.5. Реализация синтезированных цепей	180
§6.6. Мутаторы, скалоры и ротаторы	182
Глава 7. Алгоритмизация электротехнических уравнений и применение вычислительной техники для расчета нелинейных цепей	188
§7.1. Установившиеся режимы в цепях постоянного тока	190
§7.2. Установившиеся режимы в квазилинейных цепях	194
§7.3. Установившиеся режимы существенно нелинейных цепей	205
§7.4. Переходные процессы	212
§7.5. Синтез цепей	213
Глава 8. Нестационарные электрические цепи	215
§8.1. Общая характеристика нестационарных цепей	215
§8.2. Переходные процессы в цепях постоянного тока с периодически и скачкообразно меняющимися параметрами	217
§8.3. Установившийся режим в нестационарной цепи переменного тока при гармоническом изменении параметров	219
§8.4. Некоторые особенности нестационарных цепей	222
§8.5. Автопараметрический режим нелинейной электрической цепи	224
Литература	227