

ISSN 0130-2221

2022 · № 3

МАРТ

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



# Граммовый Кроссворд



**По горизонтали:** 2. Четырехугольник, балансирующий между ромбом и квадратом. 7. Кодированная телеграмма. 8. «... или математическое кольцо» – научный трактат Ричарда Деламейна. 10. Правильный звездчатый многоугольник. 11. Объемное изображение, воспроизведенное с помощью интерференции волн. 14. Символическая комбинация из букв. 15. Криптографический алгоритм для шифрования групп из битов. 17. «Переведем килограммы в ..., а кубические метры в кубические сантиметры» (А.Перышкин, «Физика»). 19. Чертеж функции от нескольких переменных.

(Продолжение см. на с. 15)

## В номере:

### УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук  
Математический институт  
им. В.А.Стеклова РАН  
Физический институт  
им. П.Н.Лебедева РАН

### ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,  
М.Н.Бондаров, А.А.Варламов,  
С.Д.Варламов, А.П.Веселов,  
А.Н.Виленкин, Н.П.Долбилин,  
С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,  
А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,  
П.А.Кожевников (заместитель главного  
редактора), С.П.Коновалов, К.П.Кохась,  
А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, А.Б.Минеев,  
В.Ю.Протасов, А.М.Райгородский,  
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,  
А.В.Устинов, А.И.Черноуцан  
(заместитель главного редактора)

### РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,  
А.А.Боровой, В.В.Козлов,  
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,  
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

### ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

### ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,  
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,  
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,  
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

- 2 Шуховские башни (к 100-летию башни на Шаболовке). *Н.Андреев, Н.Панюнин*  
7 Квантовая природа поверхностного натяжения. *Р.Кречетников, А.Зельников*

### УЧЕНЫЕ РАЗМЫШЛЯЮТ

- 13 Математика на пути в теоретическую физику. *А.Варламов*

### ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 16 Задачи М2690–М2693, Ф2697–Ф2700  
17 Решения задач М2678–М2681, Ф2685–Ф2688

### КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 24 Прямолинейные образующие однополостного гиперboloида

### КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 27 Задачи 25–28

### «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 28 Задачи

### ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 29 Бурлаки, трактриса и детская скакалка. *С.Дворянинов*

### ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 33 Наблюдение двупреломления в кристалле кальцита. *Ю.Носов*

### ОЛИМПИАДЫ

- 35 Региональный этап XLVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике

### ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 37 Олимпиада «Ломоносов». Физика

- 41 Ответы, указания, решения  
Вниманию наших читателей (12,40)

### НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «Квантовая природа поверхностного натяжения»*  
II *Граммовый кроссворд*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогулки с физикой*

# Шуховские башни

(к 100-летию башни на Шаболовке)

Н.АНДРЕЕВ, Н.ПАНЮНИН

В 1920 И 1921 ГОДАХ НАД МАЛОэтажным в то время районом Шаболовки выросла удивительная по красоте башня, причем росла «сама по себе» – рядом не было ни кранов, ни лесов. Сто лет назад – в середине марта 2022 года – строительство, продолжавшееся ровно два года, закончилось. Эта 150-метровая башня, построенная по проекту Владимира Григорьевича Шухова, стала одним из узнаваемых архитектурных символов Москвы (рис. 1).

Шухов учился в Императорском Московском техническом училище (ныне МГТУ имени Н.Э. Баумана). В семейных преданиях сохранились воспоминания Владимира Григорьевича. На лекциях по аналитической геометрии в училище говорили, что гиперboloиды – хорошая тренировка для ума, но не имеют практического при-



Рис. 1

Статья подготовлена по материалам проекта «Математические этюды» и книги «Математическая составляющая».

менения. Теперь же башня на Шаболовке служит еще и наглядным пособием первокурсникам механико-математического факультета МГУ на том самом курсе аналитической геометрии.

Дневник В. Г. Шухова сохранил для нас математические расчеты по проекту и датировку постройки башни (рис. 2):

«1920

Сборка кольца башни у основания начата 14 марта 1920 года.

[...]

1922

28 февраля. Башня закончена, и мачта поставлена.

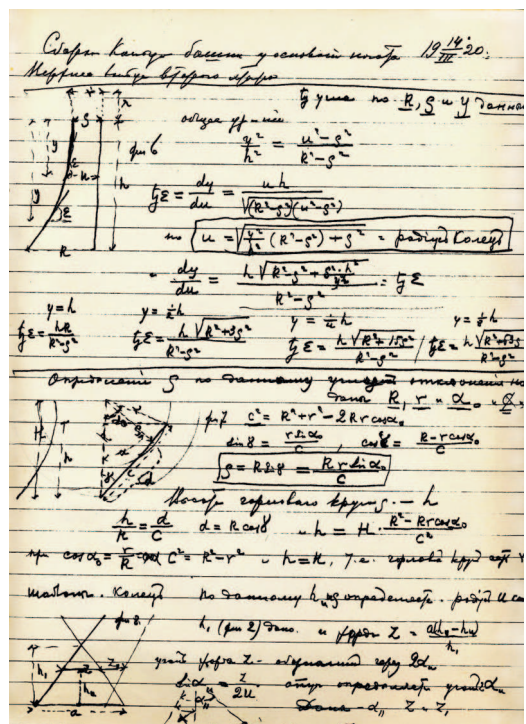


Рис. 2

14 марта. Первое заседание комиссии по приемке башни Наркомпочтелем.

21 марта. Акт сдачи башни. Статьи в газетах «Известия» и «Рабочая Москва».

19 марта 1922 года опробовали передатчик Шаболовской радиостанции, а в сентябре 1922 года с Шаболовки прозвучала первая радиопередача.

Конструкция башни на Шаболовке состоит из шести секций, каждая из которых – это однополостный гиперболоид вращения, образованный прямыми стальными швеллерами, расположенными по образующим гиперболоида.

Гипербола – кривая на плоскости, модуль разности расстояний от любой точки которой до двух данных, называемых фокусами, постоянен (рис. 3). Гипербола

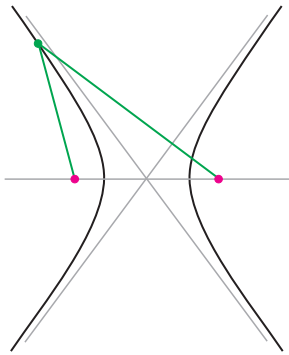


Рис. 3

является коническим сечением, наряду с эллипсом и параболой, но отличается от них тем, что у нее есть асимптоты – прямые, к которым она приближается, но никогда их не достигает. У изучаемой в школе гиперболы  $y = 1/x$  асимптоты перпендикулярны друг другу и совпадают с осями декартовой системы координат (рис. 4).

При вращении гиперболы вокруг ее оси симметрии, перпендикулярной отрезку с концами в фокусах, получается поверхность – однополостный гиперболоид вращения. Оказывается, что через каждую точку гиперболоида проходят две прямые, полностью лежащие на нем. Каждая из них при вращении вокруг оси гиперболоида «заметает» всю поверхность. Такие линии называются образующими. Образующие делятся на два семейства: в одно

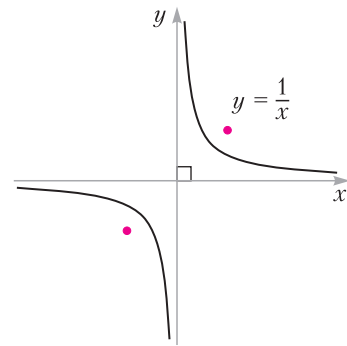


Рис. 4

семейство попадают те образующие, которые при вращении вокруг оси переходят друг в друга. Соответственно и однополостный гиперболоид двумя способами можно представить как своеобразный «паркет», выложенный прямыми одного семейства (рис. 5).

Таким образом, изогнутая поверхность состоит из прямых. Именно это свойство и использовал В. Г. Шухов: каждая секция башни на Шаболовке «соткана» из образующих двух семейств. Гиперболоидная конструкция отличается простотой изготовления и большой прочностью. Для сравнения, самая известная в то время башня – башня Эйфеля – состоит более чем из 10 тысяч различных типов деталей, изготовленных по специальному заказу с боль-

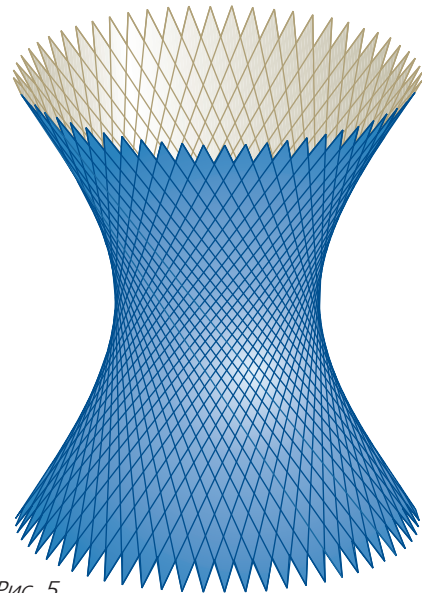


Рис. 5

шой точностью. А башни Шухова сконструированы из прямых швеллеров. В первоначальном плане В.Г. Шухова по возведению башни в Москве предполагалось, что башня будет девятисекционной и выше Эйфелевой на 50 метров, но при этом четверо легче!

В. Г. Шухов спроектировал и построил в России более двухсот гиперболоидных конструкций. Чаще всего это были водонапорные башни, но были и пожарные каланчи, и опоры для линии электропередачи (НиГРЭС через Оку под Нижним Новгородом), маяки (под Херсоном). Были попытки делать подобные мачты для кораблей («Андрей Первозванный» и «Император Павел I»). Даже в случае самых простых конструкций — односекционных водонапорных башен — каждый проект был уникален: выполнение технических требований соединялось с архитектурной привязкой к местности.



ВСЕРОССИЙСКАЯ ПРОМЫШЛЕННАЯ  
И ХУДОЖЕСТВЕННАЯ ВЫСТАВКА.  
Г. НИЖНИЙ НОВГОРОД, 1896 Г.

Рис. 6

Первая гиперболоидная конструкция была опробована на территории конторы А.В. Барии, где работал Шухов. А публично первая такая конструкция была представлена на Всероссийской промышленной и художественной выставке, проходившей в 1896 году в Нижнем Новгороде (рис. 6). Привилегия (в современных терминах — патент) на ажурную башню в виде гиперболоида была заявлена в том же 1896 году (рис. 7).

Самая известная из башен Шухова — действительно башня на Шаболовке. История ее постройки начинается с постановления Совета Рабоче-Крестьянской Обороны от 30 июля 1919 года: «Для обеспечения надежной и постоянной связи центра Республики с западными государственными и окраинами Республики поручается Народному Комиссариату Почт и Телеграфов установить в чрезвычайно срочном порядке в г. Москве радиостанцию, оборудованную приборами и машинами наиболее совершенными и обладающими мощностью, достаточной для выполнения ука-

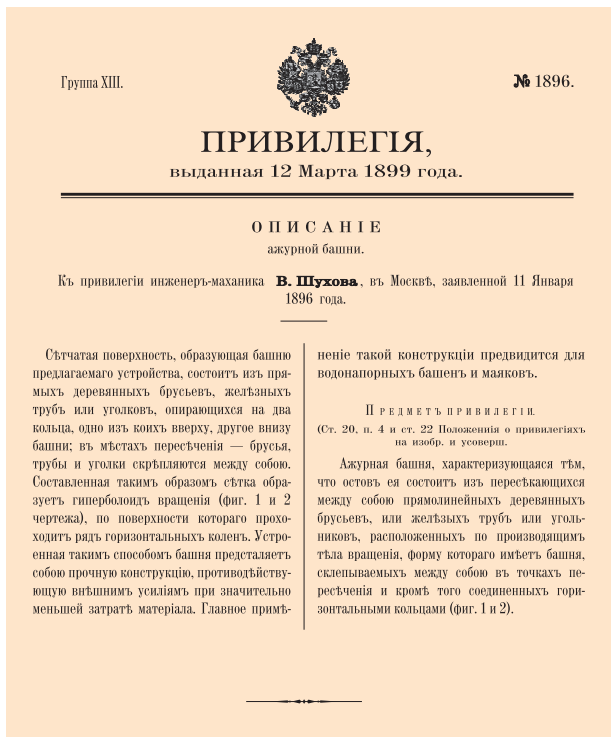


Рис. 7

занной задачи...». Далее были проекты, согласования, поиск материалов. Само строительство, как мы знаем, началось в марте 1920 года.

Кроме разработки собственно конструкции башни, Владимир Григорьевич придумывает уникальный метод постройки. Кранов необходимой высоты тогда не было, и обычно сооружения строились в лесах. Но по телескопическому методу Шухова даже леса были не нужны!

Все секции башни собирались на земле. На верхнее кольцо готовой конструкции устанавливались блоки, через которые проходили тросы, идущие к низу новой секции. Ее низ стягивался — для того чтобы он прошел через равную ему верхнюю горловину уже возведенной конструкции. А далее вручную, лебедками, очередная секция поднималась наверх. (рис. 8, 9)

«Подъем второй секции начался 16 апреля 1921 года. 18-го поднята на 8 м, 19-го — на 16, 20-го — на 24. 21-го в течение дня — на полметра. Секция установлена в семь часов вечера 21 апреля 1921 года», — запись из дневника Шухова.

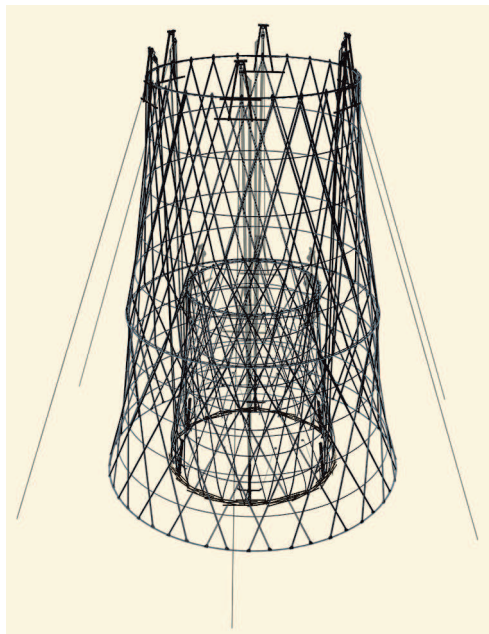


Рис. 8

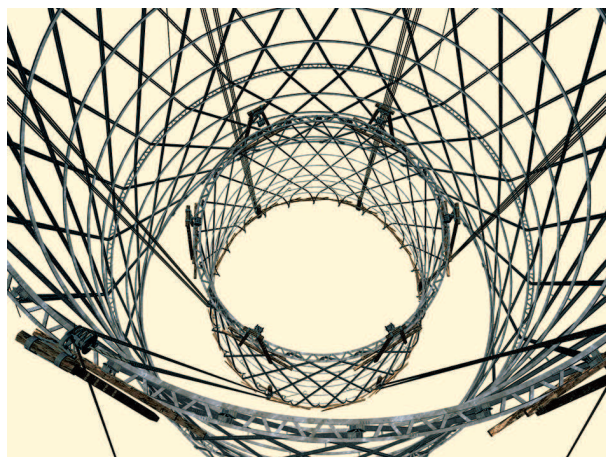


Рис. 9

Сколько нужно блоков — за сколько точек поднимать очередную секцию? Математический ответ — 3. Но если одна лебедка немного отстанет, то конструкция перекосячится и упадет. Если предположить возможность отставания любых двух лебедок, то и пяти блоков мало. На первых этапах — и секции тяжелые, и, кроме того, идет апробирование метода — Шухов использует 6 блоков, расставленных по правильному шестиугольнику. И лишь две последние секции было решено поднимать на трех блоках.

Не все шло гладко при возведении башни. Из дневника В. Г. Шухова: «29 июня 1921 года. При подъеме четвертой секции третья сломалась. Четвертая упала и повредила вторую и первую в семь часов вечера» (рис. 10). Выводы комиссий подтвердили, что авария произошла из-за некачественного поставленного металла, а не ошибок проекта. Но надо ремонтировать первые две секции, строить заново третью...

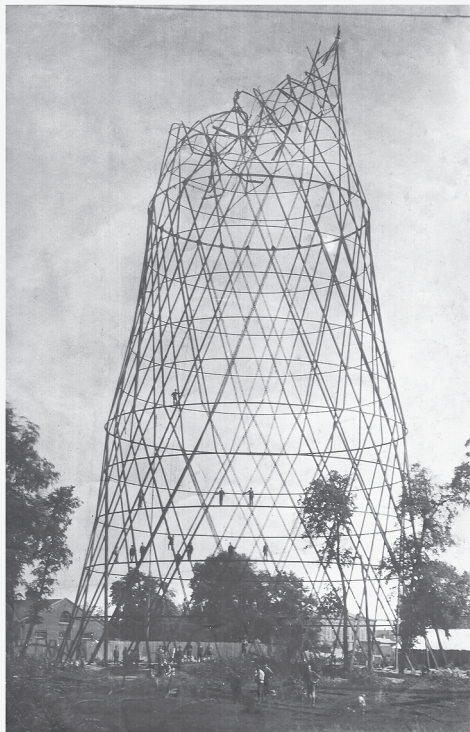
Из дневника В. Г. Шухова 1921 года:

«27 октября. Подъем третьей секции начался. Холодный ветер. Работа идет спокойно. Шестиугольник пока действует очень хорошо.

28 октября. Подъем продолжается. Секция поднята на половину второго этажа.

29 октября. Подъем кончился [...]. После обеда началось закрепление. Дополнительные подъемы по 2 и 3 дюйма.

18 ноября. Четвертую секцию почти закончили. Был на башне.



ФОТОГРАФИЯ В. Г. ШУХОВА

Рис. 10

24, 25 ноября. Был на башне. Верхние двуноги поставлены, и секция готова к подъему.

28 ноября. Был на башне. Вечером нагрузили низ и приподняли на 6 дюймов.

29 ноября. Начался подъем секции. На башне холодно. Мороз 13 °С.

30 ноября. Подъем продолжается. К вечеру секция поднята на 40 метров.

1 декабря. Подняли до верха. Секция вышла за шестое кольцо.

2 декабря. К 12-ти часам секция встала на свое место. В 2 часа поднялись верхолазы, 12 человек, для закрепления. Мороз 12 °С.

3 декабря. На работах продолжают закреплять четвертую секцию.

24 декабря. Пятая секция готова к подъему.

26 декабря. Начало подъема пятой секции. [...] Испытание подъема на трех двуногах вместо шести.

27 декабря. Пятая секция поднята на половину высоты.

28 декабря. Пятая секция вышла за четвертую на 10 метров.

29 декабря. По случаю сильного снега и ветра подъем пятой секции приостановлен. [...]

Укрепление кольца первой/второй секций, где надо поставить 4 заклепки 5/8 дюйм.

30 декабря. В 2 часа дня пятая секция встала на свое место. В 4 часа верхолазы закрепили шесть ног.

31 декабря. Закрепление пятой секции».

Из дневника В. Г. Шухова 1922 года:

«9 февраля. Утром шестая секция установлена. Погода тихая, —8 °С. К 4-м часам укреплено 8 ног.

Башня красива, только пятая секция имеет редкую сетку.

10 февраля. Закреплены все 24 ноги шестой секции.

14 февраля. Поставлено кольцо шестой секции, и башня, таким образом, закончена. Приступили к установке верхушки с обязательством окончить работу в 10 дней.

Работа по обработке и установке четырех секций и ремонту двух нижних секций продолжалась пять месяцев. Вся работа продолжалась два года. Со дня заключения контракта с Электросвязью по постройке башни прошло 2,5 года.

21 февраля. Поднята верхняя будка, и приступлено к подъему мачты деревянной. Дан чертеж флага.

22 февраля. Поднята деревянная мачта, приступили к укосинам.

23 февраля. Поднята одна укосина, с тягой. Начался подъем второй укосины.

28 февраля. Башня закончена, и мачта поставлена».

За последние десятилетия в разных странах появилось несколько высотных гиперболических сооружений. И все их авторы признают огромный вклад, который внес в разработку таких конструкций великий русский инженер и ученый Владимир Григорьевич Шухов.



# Квантовая природа поверхностного натяжения

Р. КРЕЧЕТНИКОВ, А. ЗЕЛЬНИКОВ

**П**ОНЯТИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО натяжения первоначально было введено итальянским философом-иезуитом, теологом, инженером и математиком Никколо Кабео в 1629 году и позже более подробно развито Иоганном Андреасом фон Зегнером, венгерским математиком, более чем за полвека до фундаментальных работ Томаса Юнга и Пьер-Симона Лапласа по капиллярности. Закон для скачка капиллярного давления  $\Delta p = 2\sigma/R$  на поверхности капли воды радиусом  $R$  и с поверхностным натяжением  $\sigma$  был описан Юнгом словами в 1805 году и позднее математически доказан Лапласом. Однако еще до того, как было введено понятие поверхностного натяжения, капиллярность использовалась греческим математиком и инженером Героном Александрийским (10–70 гг.) в ряде изобретений, описанных в его книге «Пневматика», включая водяные часы.

В настоящее время поверхностное натяжение объясняется как сопротивление поверхности жидкости внешней силе из-за связующей природы ее молекул. Основная модель силы, которая удерживает

молекулы жидкости вместе, обычно описывается потенциалом Леннарда-Джонса (рис. 1)

$$\varphi = 4U \left( \left( \frac{r_m}{r} \right)^{12} - \left( \frac{r_m}{r} \right)^6 \right), \quad (1)$$

где  $2^{1/6}r_m \approx r_m$  – межмолекулярное расстояние, при котором  $\varphi$  имеет минимум, а  $U$  – глубина потенциальной ямы, достаточная для того, чтобы жидкость конденсировалась и только редкие молекулы могли ее покинуть за счет теплового движения. Еще в 1940-х годах, при проведении экспериментов с суспензиями кварцевого порошка, Теодор Овербек обнаружил, что энергия взаимодействия между частицами спадает быстрее, чем  $r^{-6}$ , на расстояниях  $r$ , превышающих длину волны абсорбции  $\lambda_a$  данного вещества. Это побудило Хендрика Казимира и Дирка Польдера в 1948 году пересмотреть ван-дер-ваальсово притяжение  $(r_m/r)^6$ . Они обнаружили, что,

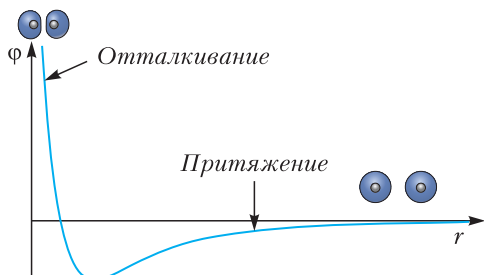


Рис. 1. Потенциал Леннарда-Джонса



Хендрик Казимир (около 1950-х годов)

как следствие запаздывания из-за конечности скорости света  $c$ , потенциал взаимодействия ведет себя не как  $r^{-6}$ , а пропорционально  $r^{-7}$  при  $r > \lambda_a$ , поскольку время  $\Delta t = r/c$ , за которое электромагнитное поле распространяется на расстояние  $r$ , превышает характерный период колебаний молекул  $\lambda_a/c$ . Когда Казимир упомянул об этом Нильсу Бору во время прогулки, последний пробормотал, что эффект должен быть связан с энергией вакуума, что вдохновило исследование Казимира, которое мы подробно обсудим ниже – это поможет нам понять природу поверхностного натяжения.

Однако сначала давайте рассмотрим общепринятую точку зрения на происхождение поверхностного натяжения, сравнив молекулу на границе раздела и в объеме (рис. 2,а). В объеме межмолекулярные взаимодействия статистически изотропны и подчиняются потенциалу типа (1). Мы видим, что на границе раздела у молекулы меньше соседей и, соответственно, отсутствуют некоторые связи. Это означает, что требуется работа  $A$  для разрыва этих связей, чтобы вывести эту молекулу из объема и, таким образом, создать новую поверхность размером  $\sim r_m^2$ . Следовательно, при известном соотношении между работой и силой  $A = Fl$  должна присутствовать некоторая сила  $F$ , притягивающая молекулу воды обратно в объем, пока совершается работа по вытягиванию ее из объема к поверхности, скажем, на расстояние  $l$ .

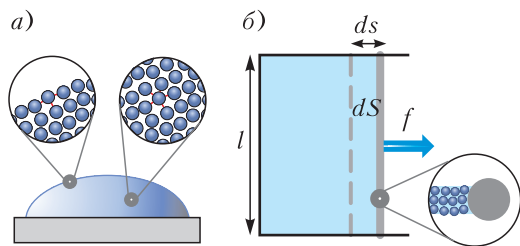


Рис. 2. а) Недостающие межмолекулярные связи вблизи границы раздела жидкость–пар приводят к увеличению свободной энергии на единицу площади, т.е. к поверхностному натяжению. б) Поверхностное натяжение как сила на единицу длины границы мыльной пленки с воздухом

Положительность совершаемой работы следует и из того, что молекула на границе находится в заметно более мелкой потенциальной яме по сравнению с молекулой в объеме жидкости. Значит, при этом увеличивается потенциальная энергия границы раздела точно так же, как поднятие тела в гравитационном поле увеличивает его потенциальную энергию гравитации. Прибегая к той же аналогии, становится ясно, что площадь поверхности имеет тенденцию уменьшаться, подобно тому, как тело стремится занять наименьшую доступную высоту в гравитационном поле. Это, в свою очередь, приводит к силе, противодействующей растяжению свободной поверхности, тем самым, демонстрируя, что имеется поверхностное натяжение.

Действительно, предположим, что мы хотим растянуть мыльную пленку на проволочной рамке шириной  $l$  на величину  $ds$  (рис. 2,б). Поскольку площадь увеличивается на  $dS = lds$ , требуется работа  $dA = 2\sigma lds$ , где множитель 2 обусловлен наличием двух поверхностей мыльной пленки. Отсюда заключаем, что сила, которую мы прикладываем к рамке из проволоки, равна  $f = dA/ds = 2\sigma l$ . Она нужна для того, чтобы уравновесить силу натяжения пленки. В состоянии равновесия приложенная сила на единицу длины определяет коэффициент поверхностного натяжения:  $\sigma = f/(2l)$ .

Учитывая, что поверхностное натяжение оказывается таким же, как плотность поверхностной энергии, порядок величины  $\sigma$  на границе раздела жидкость–пар должен быть порядка энергии связи  $e$ , деленной на площадь поперечного сечения молекулы  $r_m^2$ . Для большинства масел, для которых межмолекулярные взаимодействия являются ван-дер-ваальсовскими, энергия связи близка к тепловой энергии:  $e \approx k_B T \approx (1/40)$  эВ и поэтому  $\sigma \sim 0,02$  Дж  $\cdot$  м $^{-2}$ . Для воды же водородные связи приводят к большему значению  $\sigma \sim 0,072$  Дж  $\cdot$  м $^{-2}$ , а для ртути  $e \sim 1$  эВ и, таким образом,  $\sigma \sim 0,5$  Дж  $\cdot$  м $^{-2}$ . Энергию связи, естественно, можно оценить и по

удельной теплоте испарения  $L$ , так как  $e \approx mL$ , где  $m = M/N_A$  – масса отдельной молекулы для данной молярной массы  $M$ .

Несмотря на всю убедительность вышеприведенных соображений, оценки поверхностного натяжения на их основе часто отличаются от реальных значений поверхностного натяжения в несколько раз: например, для метанола разница будет в три раза, а для воды в два раза. Следовательно, поверхностное натяжение должно быть *больше, чем просто разрыв связей* между молекулами, и это то, что мы хотим объяснить в настоящей статье.

Начнем с простых квантово-механических расчетов Казимира. При достаточно низких температурах, когда можно пренебречь тепловыми флуктуациями, энергия нулевых колебаний электромагнитного поля состоит из вклада всех возможных мод  $\frac{1}{2}\hbar\omega$ , где  $\omega = ck$  – частота колебаний и  $k$  – волновое число, пропорциональное импульсу. Эта энергия впервые появилась в теории Макса Планка об излучении абсолютно черного тела в формуле для средней энергии осциллятора частоты  $\omega$ , находящегося в равновесии с излучением при температуре  $T$ :

$$E = \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/(k_B T)} - 1}. \quad (2)$$

Когда  $T \rightarrow 0$ ,  $E \rightarrow \frac{1}{2}\hbar\omega$ . Фактически, эта энергия нулевых колебаний нужна для того, чтобы  $E$  не имела квантовых поправок первого порядка к  $k_B T$  в классическом пределе  $k_B T \gg \hbar\omega$ . Если рассматривать одномерный ящик длиной  $a$ , то из-за квантования разрешенные волновые числа  $k = \pi n/a$  и, следовательно, полная энергия электромагнитного поля представляет собой сумму по всем возможным волновым числам:

$$E = 2 \cdot \frac{1}{2} \hbar c \sum_{n=1}^{\infty} k_n = \frac{\hbar c \pi}{a} \sum_{n=1}^{\infty} n, \quad (3)$$

которая, очевидно, расходится; множитель 2 введен из-за двух поляризаций для каждой стоячей волны в ящике. Чтобы понять бесконечность суммы  $\text{Sum} = \sum_{n=1}^{\infty} n$ ,

можно ввести ее так называемую экспоненциальную регуляризацию

$$\text{Sum}(\epsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\epsilon n} = -\frac{d}{d\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\epsilon n}, \quad (4)$$

которая в пределе положительных  $\epsilon \rightarrow 0$  должна восстановить изначальное выражение и в которой последняя сумма легко вычисляема:  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\epsilon n} = e^{-\epsilon}/(1 - e^{-\epsilon})$ . В результате, после разложения в ряд Тейлора, получаем

$$\text{Sum}(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{1}{12} + o(\epsilon^2) \underset{\epsilon \rightarrow 0}{=} \infty - \frac{1}{12}. \quad (5)$$

По сути, Казимир показал что расходящийся член  $\epsilon^{-2}$  возникает из-за вклада  $E(\infty)$  всей Вселенной, в которую помещен ящик конечного размера  $a$ . Эта бесконечная величина  $E(\infty)$  не влияет на силу взаимодействия между проводящими пластинами, так как она не зависит от размера ящика  $a$  и, таким образом, может быть вычтена из (5), оставляя нам конечную (или, как принято называть в физике, перенормированную) энергию  $E(a) = E - E(\infty) = -\hbar c \pi / (12a)$ , которая зависит от размера ящика  $a$  и, следовательно, приводит к силе притяжения  $F = -\partial E / \partial a$  между стенками ящика (рис. 3). Величина  $E(\infty)$  соответствует ультрафиолетово расходящейся сумме вкладов всех возможных длин волн в одномерной неограниченной Вселенной – поскольку их спектр непрерывный, то  $E(\infty) = \hbar c \int_0^{\infty} dk$ . Конечно, для верного представления мы должны учитывать трехмерность пространства, и в

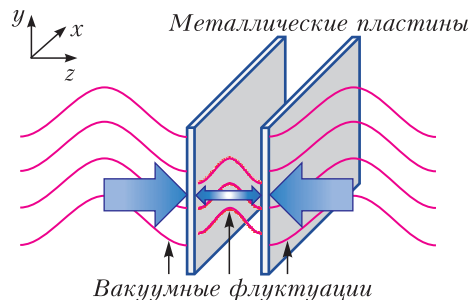


Рис. 3. Эффект Казимира

этом случае выражение (3) видоизменяется с учетом всех направлений волновых векторов, и для энергии на единицу площади  $S$  металлических пластин мы получаем

$$\frac{E}{S} = \hbar \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} \omega(k_x, k_y, n), \quad (6)$$

где теперь  $\omega = c \left( k_x^2 + k_y^2 + \left( \frac{\pi n}{a} \right)^2 \right)^{1/2}$ . Уравнение (6) должно быть перенормировано способом, подобным тому, что использовался в одномерных вычислениях: путем вычитания главной ультрафиолетовой расходимости  $E(\infty)$ . Читатель может провести расчеты с помощью формулы Эйлера–Маклорена

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) - \int_0^{\infty} F(z) dz = -\frac{1}{2} F(0) - \frac{1}{12} F'(0) + \frac{1}{720} F'''(0) + \dots, \quad (7)$$

что дает силу Казимира на единицу площади

$$\frac{F(a)}{S} = -\frac{\hbar c \pi^2}{720 a^3}. \quad (8)$$

Она оказывается небольшой; для  $a = 1$  мкм, например,  $F(a)/S = -4 \cdot 10^{-4}$  Н·м<sup>-2</sup>.

Хотя существование и величина силы Казимира хорошо установлены экспериментально с высокой точностью, до сих пор существуют некоторые разногласия относительно ее природы и толкования. Как отметил Нобелевский лауреат Джулиан Швингер, сила Казимира считается «одним из наименее интуитивных следствий квантовой электродинамики». Когда Казимир рассказал Вольфгангу Паули о притяжении двух проводящих пластин, последний отверг эту идею как «абсолютную чепуху», основываясь на простом расчете плотности электромагнитной энергии нулевых колебаний

$$\rho_E = \frac{\hbar}{2c} \int_0^{k_{\max}} 2k^3 dk = \frac{\hbar k_{\max}^4}{4c}, \quad (9)$$

где он взял  $k_{\max} = 2\pi/r_e$  с классическим радиусом электрона  $r_e = 2,82 \cdot 10^{-13}$  см, что дает  $\rho_E \sim 10^{33}$  эВ·см<sup>-3</sup>. Это превышает принятый в настоящее время вклад темной

энергии Вселенной в  $10^{30}$  раз! Отсюда Паули заключил, что этот гравитационный эффект энергии нулевых колебаний был бы настолько огромным, что радиус Вселенной «даже не смог бы достигнуть Луны». Тем не менее, Паули в конце концов согласился с Казимиром.

В настоящее время важность эффекта Казимира трудно переоценить. В квантовой хромодинамике энергия Казимира кварковых и глюонных полей вносит существенный вклад в полную энергию нуклонов. В гравитации, астрофизике и космологии поляризация вакуума в результате эффекта Казимира может управлять процессом инфляции. В атомной физике эффект Казимира приводит к поправкам в энергетических уровнях ридберговских состояний. В математической физике это стимулировало развитие методов регуляризации и перенормировки. А в физике конденсированного состояния, имеющей отношение к повседневной жизни, эффект Казимира определяет многие явления смачивания и прилипания, в частности способность геккона «бегать вверх и вниз по дереву любым способом, даже головой вниз» (рис. 4), как отмечалось Аристотелем еще в 4 веке до нашей эры. Два тысячелетия спустя было понято, что гекконы используют миллионы крошечных волосков на ногах, с тем чтобы прикрепляться даже к молекулярно гладким поверхностям. На расстояниях, меньших длины волны поглощения, эффекты запаздывания не важны и вычисления силы Казимира можно упростить. Тогда для  $a \sim 1,7$  Å оценка дает  $F/S = 7 \cdot 10^4$  Н·см<sup>-2</sup> – если геккон испытывает хотя бы долю этой величины, он вполне может взобраться на стену.



Рис. 4. Геккон на стекле

Несмотря на то, что дисперсионное соотношение  $\omega(k_x, k_y, n)$  в (6) является линейным, квадратный корень в трехмерном случае не допускает «чистого» вычитания вклада от непрерывных (вдоль поверхности пластины) компонент волновых чисел  $k_x, k_y$ , как в одномерном случае. Это приводит к их запутыванию с дискретными компонентами  $k_z = \pi n/a$ , и, следовательно, после вычитания  $E(\infty)$  непрерывные компоненты «просачиваются» в перенормированную таким образом  $E(a)$  и приводят к остаточным ультрафиолетовым расходимостям в напряжениях вблизи границы вещества.

Можно было бы считать, что эти расходимости являются результатом предположения Казимира об идеально проводящих металлических пластинах, однако проблема расходимости плотности энергии и, следовательно, напряжений вблизи границы остается и в теории Евгения Лифшица 1956 года, обобщающей расчеты Казимира на реальные материалы, в частности на диэлектрики, и с тех пор является открытой проблемой в квантовой теории поля. На качественном уровне расходимость электромагнитных напряжений можно понять из попарного суммирования межмолекулярных ван-дер-ваальсовых потенциалов  $\phi = -4U(r_m/r)^6$ , которое для напряжения вдоль границы вещества и вакуума в точке, расположенной на расстоянии  $l$  от

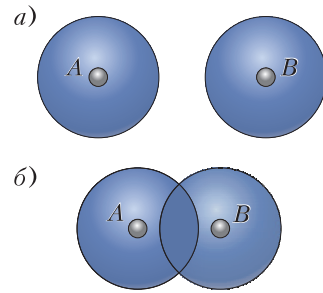
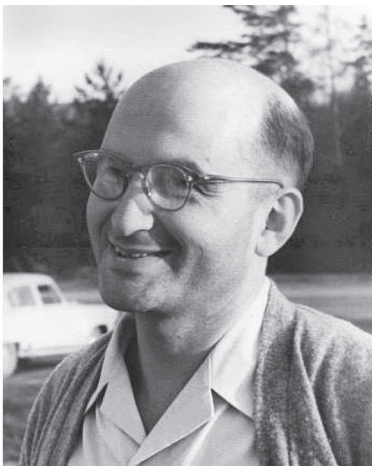


Рис. 5. Атомы гелия: неперекрывающиеся (а) и перекрывающиеся (б) электронные орбитали

поверхности, приводит к выражению  $-\frac{\pi}{3} \frac{U r_m^6}{l^3}$ , которое, очевидно, расходится при приближении к границе  $l \rightarrow 0$ , что качественно аналогично результату теории Лифшица.

Расходящиеся члены в электромагнитных напряжениях уравниваются короткодействующими отталкивающими напряжениями, феноменологически представленными степенью  $-12$  в (1). Например, в случае атомов гелия обеднение электронной плотности в области перекрытия, отделяющей ядра друг от друга, обуславливает их отталкивание (рис. 5). Член  $r^{-12}$  также связывают с принципом запрета Паули для фермионов из-за антисимметрии их волновых функций, приводящей к обменному взаимодействию между идентичными частицами, которое отлично от кулоновского электростатического отталкивания и даже сильнее на более коротких расстояниях, тем самым обеспечивая устойчивость материи.

Возвращаясь к вопросу о происхождении поляризации вакуума вблизи границы жидкости, напомним, что последняя состоит из молекул, взаимодействующих посредством обмена фотонами. При докритических температурах эти фотоны преимущественно виртуальны, т.е. на очень короткое время они, в силу принципа неопределенности Гейзенберга, способны заимствовать необходимую энергию из вакуума, с тем чтобы долететь к другой молекуле и вернуть заимствованную энергию обратно в вакуум. В формулировке квантовой механики через интегралы Фейн-



Евгений Лифшиц (1954 год)

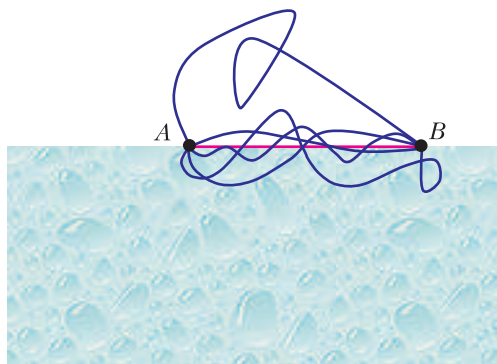


Рис. 6. Обмен виртуальными частицами происходит не только по кратчайшему пути из  $A$  в  $B$ , но и по бесконечному количеству квантовомеханических возможных траекторий

мана по путям, две молекулы  $A$  и  $B$  взаимодействуют, обмениваясь виртуальными частицами не только по кратчайшему пути из  $A$  в  $B$ , но и по сгустку всех возможных траекторий, в том числе и проходящих через вакуум (рис. 6). Хотя виртуальные частицы *ненаблюдаемы*, они ощущают присутствие материи и неоднородность пространства, например границу между веществом и вакуумом, а их совокупное действие приводит к *наблюдаемым* следствиям, в частности к эффекту Казимира и квантовой поляризации вакуума вне вещества.

Последний эффект оказался решающим для точного расчета поверхностного натяжения. Однако потребовалось несколько десятилетий, чтобы разработать математические методы, в частности спектральную геометрию, чтобы извлечь из теории Лифшица как перенормируемые расходимости, связанные с изотропной энергией нулевых колебаний вакуума (9), так и перенормируемые вклады, которые отвечают за неразрешенную физику на масштабах, меньших межатомных  $r_m$ , и определяют

зависимость давления вблизи границы среды от направления. Как следствие, было показано что поверхностное натяжение является интегральной мерой отклонения поведения жидкости от изотропного состояния, знакомого читателю из принципа Паскаля, в соответствии с которым давление внутри жидкости не зависит от направления. Также было обнаружено, что поляризация вакуума и индуцированные ею напряжения вносят значимый вклад в поверхностное натяжение.

В повседневной жизни мы привыкли игнорировать тот факт, что наша Вселенная является квантовой, потому что гораздо удобнее думать, что мы живем в детерминированном классическом мире. Но только «на поверхности» природа является классической. Выше мы показали, что в буквальном смысле слова можно прикоснуться к квантовой механике на границе жидкости из-за квантового происхождения поверхностного натяжения. Хотя квантовая механика обычно ассоциируется с микроскопическими системами, ее применимость выходит далеко за малые масштабы. Например, предел Чандрасекара – масса звезды, выше которой давление вырождения электронов в ядре звезды становится недостаточным, чтобы уравновесить собственное гравитационное самопритяжение – имеет квантовое происхождение из-за принципов запрета Паули и неопределенности Гейзенберга. На еще больших масштабах галактики образовались из первичных квантовых флуктуаций, которые усилились во время расширения ранней Вселенной. Поэтому вакуум не пустой, а на самом деле «живой», будучи наполнен квантовыми флуктуациями, которыми обусловлено в том числе и наше существование.

#### Вниманию наших читателей

Подписаться на журнал «Квант» можно с любого номера в любом почтовом отделении. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964.

Купить журнал «Квант» возможно в магазине «Математическая книга» издательства МЦНМО (адрес интернет-магазина: [biblio.mcsme.ru](http://biblio.mcsme.ru)), а также в московских книжных магазинах «Библио-глобус», «Молодая гвардия», «Московский дом книги» и в редакции журнала. Архив вышедших номеров журнала «Квант» имеется на сайте <http://kvant.ras.ru>

# Математика на пути в теоретическую физику

**А.ВАРЛАМОВ**

**Т**РУДНО ВСПОМНИТЬ, КОГДА Я впервые столкнулся с математикой. Наверное, в возрасте лет трех, когда мой старший брат угощал меня привезенными из Москвы мандаринами. Он выдавал их мне по одному при условии, что при получении очередного я скажу, сколько штук уже съел до того. Так, уже в нежном возрасте, я научился считать до пяти – дальше начиналась крапивница.

Затем в истории моих отношений с математикой следует длительный период тет-а-тет с книгами Перельмана и томом Детской энциклопедии – в английской школе мои одноклассники разговоры о геометрических местах точек не поддерживали. Заинтересованных собеседников я впервые повстречал, перейдя после седьмого класса в физико-математическую школу. Здесь я вскоре обнаружил, что наша компания делится на две неравные группы: в первой математику любят как искусство, ради нее самой; во второй же хотели поскорей разобраться с дифференциальными уравнениями для того, чтобы решать уравнения Ньютона с зависящими от расстояния силами. Я явно принадлежал ко второй группе.

Помимо хороших учителей и занятий по углубленным школьным программам математики и физики, нас всех привлекала романтика Большой науки, которая, конечно же, находилась за семью горами: на Физтехе, в МГУ, в Новосибирском уни-

верситете. Чтобы оказаться там поскорее, мы читали «Высшую математику для начинающих» Зельдовича, «Аналитическую геометрию» Привалова, «Основы математического анализа» Фихтенгольца и другие книги, купленные без особого разбора. Читали сами, и понимали в меру своей одаренности – для подавляющего большинства это все же было весьма поверхностное чтение.

Тем не менее, поступив на Физтех, некоторые из нас ошибочно восприняли регулярное посещение университетских курсов математики с некоторым высокомерием («а, я это уже знаю»). Все казалось им знакомым и легким, однако равномерная сходимости для них по-прежнему не отличалась от обычной. Впоследствии такая поверхностность стала серьезной проблемой – некоторые студенты, пришедшие на Физтех из далеких деревенских школ и напряженно вникающие в тонкости алгебры и анализа, подошли к теории дифференциальных уравнений, теории функций комплексного переменного и функциональному анализу более подготовленными, а затем ушли вперед навсегда.

Большую роль в формировании будущих физиков-теоретиков на протяжении многих десятилетий играл и играет теоретический минимум Ландау. Эта, разработанная Ландау и хранимая его учениками, система из девяти экзаменов включала в себя два экзамена по математике и семь по теоретической физике. С последними все было ясно: один экзамен – один том Ландау. Экзамены же по математике предполагали, что сдающий умеет решать задачи по дифференциальному и интегральному исчислениям, векторному анализу, тен-

---

Андрей Андреевич Варламов – профессор, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института сверхпроводимости и инновационных материалов Совета по науке Италии, постоянный член Редакционной коллегии журнала «Квант».

зорной алгебре, брать интегралы вычетами, уметь решать дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами методом Лапласа, делать аналитические продолжения и исследовать асимптотическое поведение решений, уметь обращаться со специальными функциями и многое другое.

Теорминимум оказался бесценным воспитателем. На первых курсах физтеха он стимулировал тех, кто решился его сдать, пройти ускоренно программу очередного семестра, выполнить заранее все лабораторные работы и теоретические задания, по возможности сдать экзамены, а затем с наслаждением сесть за «Механику» Ландау и Лифшица или за «Задачник по высшей математике», составленный Гюнтером и Кузьминым для инженеров транспорта в 1912 году, решать методом «выжженной земли» задачу за задачей, вычислять интеграл за интегралом. Читать «Векторный анализ» Кочина, доставать рукописные лекции Коренева по тензорному анализу...

И вот, экзамены по математике I, механике, теории поля сданы, впереди «символ веры» – квантовая механика. Здесь не обойтись без знания всего того, что составляет суть математики II, поэтому начинать нужно с нее. Полгода проходит в борьбе с рядами Фурье, полиномами Эрмита, функциями параболического цилиндра и вычетами.

Наконец, теорминимум сдан, и на базовой кафедре Физтеха в Институте теоретической физики имени Л.Д. Ландау несколько счастливых начинают заниматься собственно наукой. У каждого свой научный руководитель, своя

задача в определенной области теоретической физики. Соответственно, знания в различных областях математики придется углублять дальше: уравнения в частных производных – тем, кто занимается решением гидродинамических задач и решением уравнения Навье–Стокса, функциональное интегрирование – в задачах квантовой теории поля, ренормализационная группа – в теории фазовых переходов второго рода.

Подход теоретика нашего поколения к математике утилитарен: не бывает неберущихся интегралов. Если невозможно вычислить интеграл точно, то следует изучить все его асимптотики, а в промежуточной области проинтегрировать численно. В отличие от чистых математиков, как и в детстве, нас интересует результат – физическая задача должна быть доведена до ответа, который может быть измерен на эксперименте и сравнен с теоретическим





предсказанием или, наоборот, теория сумеет объяснить имеющиеся экспериментальные результаты. При этом особое значение имеют приближенные методы, интуитивное понимание происходящих в природе процессов, которые помогают найти частное решение там, где чистая математика оказывается бессильной. Здесь незаменимым помощником служит книга Мигдала «Качественные методы в квантовой теории»

На протяжении многих лет я занимаюсь, главным образом, теорией нормальных металлов и сверхпроводимостью. Мой рабочий аппарат составляют теория функций комплексного переменного, аналити-

ческое продолжение, теория специальных функций, дифференциальные уравнения в обычных и частных производных, функциональный анализ, в особенности решение спектральных задач, функциональное интегрирование, теория функций Грина, теория вероятностей и топология. Знаний математики мне, конечно же, не хватает. Так, думаю, что более глубокое изучение в молодости топологии и теории фракталов позволило бы мне получить более интересные результаты в теории электронных топологических переходов и в теории квазикристаллов по сравнению с тем, что было мною сделано.

### Граммовый кроссворд

(Начало см. на 2-й с. обложки)

**20.** Астрологическая карта звездного неба в момент рождения человека. **23.** Учитель начальной школы византийского образца. **24.** Дольная единица массы. **26.** Нумерологическая система. **27.** «Человеку весело подсчитывать циферки и ...» (А.Лемберг, «Мифологии древнего мира»). **31.** Компьютерная последовательность из двух элементов. **33.** Письменный гранит на старинный лад. **34.** «Почем ... славы» – увлекательная книга Виктории Токаревой. **35.** Ретвит в Инстаграме. **39.** Беспроводное сообщение, переданное Александром Поповым. **40.** Наглядное представление соотношения ряда величин. **41.** Показатель массы квадратного метра бумаги. **42.** Рассказ Константина Паустовского, в котором «от калориферов веет теплом, как из Сахары». **44.** Графическая запись относительной влажности воздуха. **45.** «... множества» – популярная книга Паоло Вирно. **46.** «Леонардо да Винчи почти всегда на своих портретах шифровал имя модели: то ... какая, то можжевельная веточка» (Н.Фохт, «Улыбочку!»). **47.** Дидактическая игра доминошного типа, развивающая зрительную память. **48.** Динамометр для измерения малых усилий.

**По вертикали:** **1.** Логическая задача, авторство которой принадлежит Льюису Кэрроллу. **2.** Раздел прикладной математики. **3.** Новое число, содержащее те же цифры, что и исходное, но в другом порядке. **4.** Звуковоспроизводящий механический аппарат с рупором. **5.** «Когда вредная примесь составляет одну миллионную часть, мы вдыхаем ежедневно ... отравы» (А.Попович, «Повесть о жизни и смерти»). **6.** «Понадобится с

полтонны обогащенного урана, а во всем мире вряд ли наберутся и ...» (С.Снегов, «Прометей раскованный. Повесть об Игоре Курчатове»). **9.** «Пиктография и ... имеют свою историю: графический знак всегда может быть заменен звуковым» (Г.Шпет, «Эстетические фрагменты»). **12.** Индивид с низким темпом речи. **13.** Аналоговый носитель звуковой информации. **16.** «Через шесть минут после взрыва приборы-самописцы в Иркутске зафиксировали магнитную бурю, которая длилась почти шесть часов, – эта странная ... сохранилась до наших дней» (Н.Непомнящий, «Тайна Тунгусского метеорита»). **17.** Вогнутый многоугольник, образуемый из диагоналей правильного шестиугольника. **18.** Графический перевертыш. **21.** «... – двенадцать гладко обработанных каменных пластин – была найдена на второй день раскопок» (Н.Буянов, «Клятва на мече»). **22.** График изменения ритма работы во времени. **23.** Грамматическая сущность единственного или множественного числа. **25.** Синтезированная термограмма, вписавшаяся в алгоритм динамической тепловой томографии. **28.** Рисунок на скале. **29.** Устройство для кодирования пар букв. **30.** «Лишние ...» – прозаическая миниатюра Евгения Косенкова, умудрившаяся «шестнадцать раз в сутки делать пробежку на двадцать километров». **32.** Графическое отображение ценностного потенциала саморазвития ученика. **36.** Лента с записью колебаний атмосферного давления. **37.** Анализ крови. **38.** Геометрическая бабочка. **43.** Лучеперая рыба, заплывшая в компьютерный анимационный фильм Эндрю Стэнтона «В поисках Немо».

Составил В.Закревский

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru) и [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru) соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи M2690 – M2693 предлагались на региональном этапе XLVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Задачи Ф2697 – Ф2700 предлагались на Инженерной олимпиаде школьников 2021/22 учебного года. Автор задач – С.Муравьев.

## Задачи M2690–M2693, Ф2697–Ф2700

**M2690.** У Васи есть  $n$  конфет нескольких сортов, где  $n \geq 145$ . Известно, что если из данных  $n$  конфет выбрать любую группу, содержащую не менее 145 конфет (в частности, можно выбрать группу из всех данных  $n$  конфет), то существует такой сорт конфет, что выбранная группа содержит в точности 10 конфет этого сорта. Найдите наибольшее возможное значение  $n$ .

А.Антропов

**M2691.** На плоскости отмечены  $N$  точек. Любые три из них образуют треугольник, величины углов которого в градусах выражаются натуральными числами. При каком наибольшем  $N$  это возможно?

Е.Бакаев

**M2692.** В окружность  $\Omega$  вписан шестиугольник  $AECDBF$  (рис. 1). Известно, что точка  $D$  делит дугу  $BC$  пополам, а треугольники  $ABC$  и  $DEF$  имеют общую

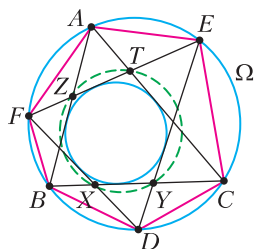


Рис. 1

вписанную окружность. Прямая  $BC$  пересекает отрезки  $DF$  и  $DE$  в точках  $X$  и  $Y$ , а прямая  $EF$  пересекает отрезки  $AB$  и  $AC$  в точках  $Z$  и  $T$  соответственно. Докажите, что точки  $X, Y, T, Z$  лежат на одной окружности.

Д.Бродский

**M2693.** Докажите, что существует натуральное число  $b$  такое, что при любом натуральном  $n > b$  сумма цифр числа  $n!$  не меньше  $10^{100}$ .

Д.Храмцов

**Ф2697.** Незнайка решил изготовить «инновационного ваньку-встаньку». Для этого он взял очень много шаров одинаковой плотности, радиусы которых отличаются вдвое. Незнайка скрепил шары так, что все их центры лежат на одной прямой, а радиус каждого последующего меньше радиуса предыдущего в 2 раза. Незнайка решил, что из-за большой массы самого нижнего шара такая конструкция, поставленная на большой шар, будет устойчивой. Но «ванька-встанька» устойчивым не был. Объясните, почему.

Знайка посоветовал Незнайке прикрепить к самой нижней точке большого шара точечное массивное тело (рис. 2; массивное тело показано цветной жирной точкой). Какую оно должно иметь массу, чтобы «инновационный ванька-встанька»

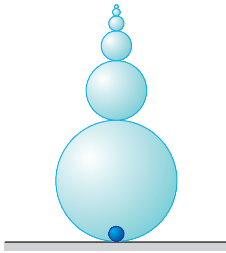


Рис. 2

стал устойчивым? Масса самого большого шара  $m$ .

**Ф2698.** Кривошипно-шатунный механизм состоит из кривошипа  $OA$  (стержня, прикрепленного к шарниру  $O$ ), шатуна  $AB$  (стержня, шарнирно прикрепленного к кривошипу в точке  $A$ ) и ползуна  $B$  (точечной детали, шарнирно связанной с шатуном и способной перемещаться вдоль поверхности). Известно, что механизм находится в равновесии в положении, показанном на рисунке 3. Найдите коэффициент трения между ползуном и поверхностью, если  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$ , массы кривошипа и шатуна одинаковы, масса ползуна пренебрежимо мала.

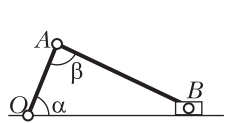


Рис. 3

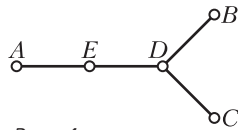
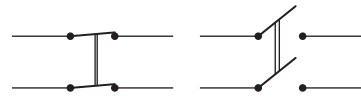


Рис. 4

**Ф2699.** Четыре одинаковых стержня  $AE$ ,  $ED$ ,  $DB$  и  $DC$  соединены так, как показано на рисунке 4. В точках соединения обеспечен тепловой контакт между стержнями. Температуры точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  поддерживаются равными  $t_A = t$ ,  $t_B = 2t$ ,  $t_C = 3t$  соответственно. Найдите температуру точки  $D$ . Известно, что поток тепла по стержню зависит от его длины, площади сечения и материала и пропорционален разности температур его концов. Поток тепла через боковые поверхности стержней можно пренебречь.

**Ф2700.** При фотографировании в помещении с помощью двух фотоламп с ограниченным ресурсом работы используется следующая методика работы. При наводке на резкость, выборе экспозиции и т.д.



Двухполюсный выключатель

Рис. 5

лампы включают не на полную мощность последовательно, а при фотографировании лампы включают параллельно, обеспечивая максимальную освещенность фотографируемого объекта. Предложите такую схему соединения двух ламп, чтобы лампы были подключены к источнику последовательно, но при включении одного выключателя их соединение с источником менялось на параллельное. Во сколько раз возрастает освещенность объекта при таком переключении? Считайте, что вся энергия, выделяющаяся в лампах, превращается в световую. В распоряжении имеются один идеальный источник электрического напряжения, две одинаковые электрические лампы, один двухполюсный выключатель и провода. Двухполюсный выключатель (рис. 5) одновременно замыкает или размыкает два провода.

**Решения задач M2678–M2681, Ф2685–Ф2688**

**M2678.** Дан треугольник  $ABC$ . Пусть  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  – середины сторон  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ , а  $O_a$ ,  $O_b$ ,  $O_c$  – центры окружностей, описанных около треугольников  $SAC'$ ,  $ABA'$ ,  $BCB'$  соответственно (рис. 1). Докажите, что треугольники  $ABC$  и  $O_aO_bO_c$  подобны.

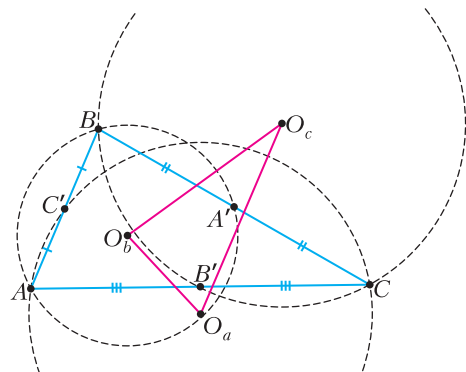


Рис. 1

Задача может быть решена, например, следующим вычислением. Ниже используем стандартные обозначения для сторон и углов треугольника:  $a = BC$ ,  $b = CA$ ,  $c = AB$ ,  $\alpha = \angle BAC$ ,  $\beta = \angle CBA$ ,  $\gamma = \angle ACB$ . Заметим, что  $O_a$ ,  $O_b$ ,  $O_c$  лежат на серединных перпендикулярах к  $CA$ ,  $AB$  и  $BC$  соответственно. Эти серединные перпендикуляры пересекаются в центре  $O$  описанной окружности треугольника  $ABC$  (рис. 2). Ее радиус обозначим через  $R$ .

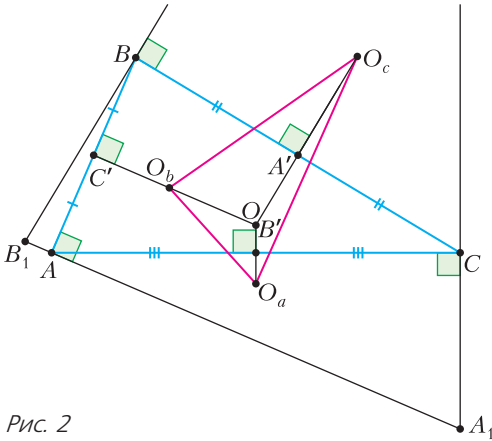


Рис. 2

Далее,  $O_a$  лежит на серединном перпендикуляре к  $AC'$ , поэтому длина проекции отрезка  $OO_a$  на прямую  $AB$  равна  $c/4$ , откуда  $OO_a = \frac{c}{4 \sin \alpha} = \frac{Rc}{2a}$ . Аналогично

$$\text{найдем } OO_c = \frac{Rb}{2c}.$$

Теперь  $O_aO_c$  можно найти по теореме косинусов из треугольника  $OO_aO_c$ :  $O_aO_c^2 =$

$$= \frac{R^2}{4} \left( \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{c^2} + 2 \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{b}{c} \cdot \cos \gamma \right). \quad \text{Под-}$$

ставляя  $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ , окончательно

$$\text{получаем } O_aO_c^2 = \frac{b^2 R^2}{4} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right).$$

Аналогично, получая выражения для  $O_cO_b$  и  $O_bO_a$ , имеем  $O_cO_b : O_bO_a : O_aO_c = a : c : b$ . Приведем схему одного из возможных геометрических решений.

Построим перпендикуляры: к  $AC$  через точку  $C$ , к  $CB$  через точку  $B$ , к  $BA$  через точку  $A$  (см. рис. 2). В пересечении этих перпендикуляров возникает треугольник

$A_1B_1C_1$ , подобный треугольнику  $ABC$ . Треугольник  $A_2B_2C_2$  с вершинами в серединах отрезков  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  также подобен треугольнику  $ABC$ . Это можно объяснить, рассмотрев поворотную гомотетию с центром  $X$ , переводящую  $ABC$  в  $A_1B_1C_1$  (кстати, в нашем случае точкой  $X$  будет являться точка Брокара). Тогда существует поворотная гомотетия с тем же центром  $X$ , которая переводит  $ABC$  в  $A_2B_2C_2$ . Наконец, нетрудно понять, что треугольник  $A_2B_2C_2$  гомотетичен треугольнику  $O_aO_bO_c$  с центром  $O$  и коэффициентом 2.

Дон Луу, П. Кожевников

**M2679.** На доске написано число 7. Петя и Вася по очереди приписывают к текущему числу по одной цифре, начиная Петя. Цифру можно приписать в начало числа (кроме нуля), в его конец или между любыми двумя цифрами. Побеждает тот, после чьего хода число на доске станет точным квадратом. Может ли кто-нибудь гарантированно победить, как бы ни играл соперник?

Докажем, что ни один из игроков не сможет гарантированно победить.

На первом ходе Вася не проиграет, так как нет точных двузначных квадратов с цифрой 7. Далее покажем, что каждый из игроков может гарантированно не проиграть, выбрав на своем ходу одну из цифр 7 или 8 и приписав эту цифру в конце текущего числа.

Поскольку точный квадрат не может оканчиваться ни на 7, ни на 8, при такой стратегии соперник может выиграть, только приписав новую цифру в конце числа. Тогда предположим, что на приписывание к текущему числу  $A$  цифры 7 есть выигрышный ответ – приписывание цифры  $x$ , а на приписывание к текущему числу  $A$  цифры 8 есть выигрышный ответ – приписывание цифры  $y$ . В таком случае оба числа  $\overline{A7x}$  и  $\overline{A8y}$  являлись бы точными квадратами, разность между которыми меньше 20. Но каждое из этих чисел хотя бы трехзначное (больше 100), и тогда разность между соседними точными квад-

ратами не меньше  $11^2 - 10^2 > 20$ . Противоречие.

А.Грибалко

**M2680.** Для натурального  $n > 1$  рассмотрим правильный  $(2^n - 1)$ -угольник  $A_0A_1A_2 \dots A_{2^n-2}$ . Докажите равенство

$$\frac{1}{A_0A_1} = \frac{1}{A_0A_2} + \frac{1}{A_0A_4} + \frac{1}{A_0A_8} + \dots + \frac{1}{A_0A_{2^{n-1}}}.$$

Пусть  $O$  – центр многоугольника. Применим теорему синусов к треугольникам  $A_0A_kO$  для  $k = 0, \dots, n-1$ . Тогда остается доказать следующее равенство для

$$\alpha = \frac{\pi}{2^n - 1}:$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 4\alpha} + \dots + \frac{1}{\sin 2^{n-1}\alpha},$$

или, эквивалентно,

$$\frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 4\alpha} + \dots + \frac{1}{\sin 2^{n-1}\alpha} + \frac{1}{\sin 2^n\alpha} = 0.$$

Применим равенства вида  $\frac{1}{\sin 2x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x$  и «телескопируем»:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 4\alpha} + \dots + \frac{1}{\sin 2^{n-1}\alpha} + \frac{1}{\sin 2^n\alpha} &= \\ &= (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha) + (\operatorname{ctg} 2\alpha - \operatorname{ctg} 4\alpha) + \dots \\ &\quad \dots + (\operatorname{ctg} 2^{n-1}\alpha - \operatorname{ctg} 2^n\alpha). \end{aligned}$$

В результате приходим к верному равенству для  $\alpha = \frac{\pi}{2^n - 1}$ :

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} 2^n \alpha = 0.$$

Ле Хоанг, Нго Тхай

**M2681.** Найдите все пары положительных рациональных чисел  $a < b$  такие, что  $a^a = b^b$ .

**Ответ:**  $a_k = \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}$ ,  $b_k = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$ , где  $k \in \mathbb{N}$ .

Пусть  $a = \frac{p}{q}$  и  $b = \frac{r}{s}$ , тогда наше равенство запишется так:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{r}{s}}, \left(\frac{p}{q}\right)^{ps} = \left(\frac{r}{s}\right)^{rq}.$$

Из взаимной простоты чисел  $p$  и  $q$ , а также чисел  $r$  и  $s$  следуют такие равенства:

$$\begin{cases} p^{ps} = r^{rq}, \\ q^{ps} = s^{rq}. \end{cases} \quad (1)$$

Заметим, что  $q > 1$  и  $s > 1$ . В противном случае числа  $a$  и  $b$  становятся натуральными и  $a^a < b^b$ , т.е. исходное равенство не выполняется.

Так как по условию  $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ , то  $ps < rq$  и из системы (1) получаются следующие условия на  $p, q, r$  и  $s$ :

$$\begin{cases} q > s > 1, \\ p = r = 1, \\ p > r > 1. \end{cases} \quad (2)$$

Далее нам понадобится следующая лемма, которую легко доказать с помощью разложения на простые множители.

**Лемма.** Пусть  $p, r, m$  и  $n$  – натуральные числа и пусть  $p^m = r^n$ . Тогда найдется такое натуральное число  $i$ , что  $p = i^{\frac{n}{(m,n)}}$

и  $r = i^{\frac{m}{(m,n)}}$ .

(Здесь скобками обозначен наибольший общий делитель данных чисел.)

**Следствие.** Если дополнительно к условиям леммы добавить условие  $p > r$  или  $p = r = 1$ , то  $p$  будет делиться на  $r$ .

Применяя следствие к системе (1), с учетом условий (2), получаем, что найдутся такие натуральные числа  $k$  и  $l$ , что  $p = kr$  и  $q = ls$ . Так как  $(p, q) = 1$ , то и  $(k, l) = 1$ . Подставляя полученные выражения для  $p$  и  $q$  в систему (1), получим

$$\begin{cases} p^{krs} = r^{rls}, & \begin{cases} p^k = r^l, \\ q^{krs} = s^{rls}, & \begin{cases} q^k = s^l; \\ \left\{ \begin{aligned} (kr)^k &= r^l, & \begin{cases} k^k &= r^{l-k}, \\ (ls)^k &= s^l, & \begin{cases} l^k &= s^{l-k}. \end{cases} \end{aligned} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \quad (3)$$

Далее, так как  $ps < rq$  (поскольку по условию  $a < b$ ), то  $krs < rls$  и, значит,  $k < l$ . А так как  $(k, l) = 1$ , то и  $(k, l - k) = 1$ . Применяя лемму к системе (3), получаем, что найдутся такие натуральные числа  $i$  и  $j$ ,

что

$$\begin{cases} k = i^{l-k}, \\ l = j^{l-k}, \\ r = i^k, \\ s = j^k. \end{cases} \quad (4)$$

Заметим, что  $j > i$ , т.е.  $l > k$ .

Докажем, что  $l - k = 1$ . Предположим противное, т.е.  $l - k \geq 2$ , тогда из (4) следует

$$\begin{aligned} l - k &= j^{l-k} - i^{l-k} = \\ &= (j - i)(j^{l-k-1} + j^{l-k-2}i + \dots + i^{l-k-1}) > \\ &> (j - i)(l - k), \\ &1 > j - i. \end{aligned}$$

Последнее неравенство противоречит тому, что  $j - i \geq 1$ . Таким образом,  $l = k + 1$ . Подставляя это выражение для  $l$  в (3), получим, что  $r = k^k$  и  $s = (k + 1)^k$ . Далее,  $p = kr = k^{k+1}$  и  $q = ls = (k + 1)^{k+1}$ , откуда

$$\begin{cases} a_k = \frac{p}{q} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}, \\ b_k = \frac{r}{s} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k. \end{cases} \quad (5)$$

Покажем, что для любого натурального  $k$  выражения (5) для  $a_k$  и  $b_k$  удовлетворяют условию задачи.

Так как  $\frac{k}{k+1} < 1$ , то  $a_k < b_k$ . Далее,

$$\begin{aligned} a_k^{a_k} &= \left(\frac{k}{k+1}\right)^{(k+1)\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{k^{k+1}}{(k+1)^k}}, \\ b_k^{b_k} &= \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k\left(\frac{k}{k+1}\right)^k} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{k^{k+1}}{(k+1)^k}}. \end{aligned}$$

Задача решена.

Заметим, что в качестве следствия можно получить решение такой задачи:

*Найти все натуральные  $m < n$  такие, что  $m^n = n^m$ .*

Наше равенство можно переписать в виде

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Применяя результат задачи M2681 к последнему равенству, получим:  $k = 1$ ,  $a = \frac{1}{n} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$  и  $b = \frac{1}{m} = \frac{1}{2}$ , т.е.  $m = 2$  и  $n = 4$ .

Можно показать, что произвольное решение уравнение  $a^a = b^b$  (при  $a < b$ ) в положительных действительных числах имеет вид

$$\begin{cases} a = \left(\frac{t}{t+1}\right)^{t+1}, \\ b = \left(\frac{t}{t+1}\right)^t, \end{cases}$$

где  $t$  – произвольное положительное действительное число. При этом  $a$  и  $b$  будут одновременно рациональными только при натуральных  $t$ .

В заключение отметим, что в классической книге В.Серпинского «О решении уравнений в целых числах» написано, что задачей нахождения всех решений уравнения  $x^y = y^x$  в рациональных положительных числах  $x$  и  $y$  занимались многие математики. После замены  $x = 1/b$  и  $y = 1/a$  эта задача превращается в нашу задачу M2681.

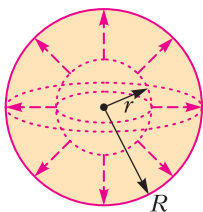
*И.Дорофеев*

**Ф2685.**<sup>1</sup> *В объеме шарообразного и однородного по плотности астероида происходит выделение тепла. Плотность источников тепла постоянна во всем объеме (физика выделения тепла остается космической тайной). Определите минимальный радиус астероида, при котором вещество в его центре будет находиться в жидком состоянии. Внешних источников тепла нет. Считайте известными следующие величины: плотность мощности источников  $q$ , коэффициент теплопроводности вещества астероида  $\lambda$ , температура плавления  $T_0$ , коэффициент черноты (коэффициент излучения) поверхности астероида  $\alpha$ , постоянная Стефана–Больцмана  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ . Сделайте численный расчет для железа*

<sup>1</sup> Автор решений задач Ф2685–Ф2688 – А.Власов.

при  $q = 1 \text{ Дж}/(\text{с} \cdot \text{м}^3)$ ,  $\lambda = 92 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ,  $T_0 = 1539 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $\alpha = 0,9$  (железо литое, необработанное).

При постоянной мощности источников постоянным (стационарным) будет и радиальное распределение температуры в шаре астероида. Для определения радиальной функции температуры выделим внутри астероида сферу радиусом  $r$  (см. рису-



нок). Записываем энергетическое равенство:

$$-\lambda \frac{dT}{dr} \cdot 4\pi r^2 = q \cdot \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Левая часть соотношения записана в соответствии с законом Фурье и определяет мощность теплового потока через поверхность выделенной сферы. В правой части равенства записана мощность тепловых источников внутри сферы. После упрощения получаем простое дифференциальное уравнение

$$-\lambda \frac{dT}{dr} = \frac{q}{3} r.$$

Это уравнение элементарно интегрируется. С учетом «заказанной» температуры в центре астероида находим радиальную функцию температуры:

$$T(r) = T_0 - \frac{q}{6\lambda} r^2.$$

Для поверхности астероида справедливо второе энергетическое равенство, которое определено полученным нами дифференциальным уравнением и законом теплового излучения Стефана–Больцмана:

$$\frac{q}{3} R = \alpha \sigma T_R^4, \text{ или } T_R = \left( \frac{qR}{3\alpha\sigma} \right)^{1/4}.$$

Радиус астероида определяем по температуре на его поверхности:

$$\left( \frac{qR}{3\alpha\sigma} \right)^{1/4} = T_0 - \frac{q}{6\lambda} R^2.$$

Это не очень «хорошее» уравнение. Для его решения используем метод итераций. Уравнение запишем в виде

$$R = \sqrt{\frac{6\lambda T_0}{q}} \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{q}{3\alpha\sigma} \right)^{1/4} \cdot \frac{1}{T_0} \cdot R^{1/4}}.$$

После вычисления констант уравнение принимает вид

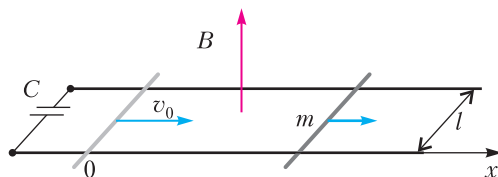
$$R = 921,7 \sqrt{1 - 0,0328 R^{1/4}}.$$

В нулевом приближении  $R = 921,7 \text{ м}$ . Итерационный процесс сходится очень быстро. В приближении четырех знаков решение получается уже на втором шаге:  $R \approx 836,5 \text{ м}$ .

Любопытства ради вычислим температуру на поверхности астероида:

$$T_R = \left( \frac{qR}{3\alpha\sigma} \right)^{1/4} = \left( \frac{1 \cdot 836,5}{3 \cdot 0,9 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}} \right)^{1/4} \text{ К} \approx \approx 271,9 \text{ К} \approx -1,25 \text{ }^\circ\text{C}.$$

**Ф2686.** Два параллельных проводящих рельса расположены в горизонтальной плоскости и замкнуты на конденсатор (см. рисунок). На рельсах, перпендику-



лярно им, лежит перемычка. В области пространства  $x > 0$  существует однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости системы. В начальный момент времени перемычке, которая находится в начале системы координат (вблизи границы магнитного поля), сообщается горизонтальная скорость  $v_0$ . Определите характер движения перемычки в магнитном поле. Дополнительные данные:  $B$  – индукция магнитного поля,  $m$  – масса перемычки,  $l$  – расстояние между рельсами,  $C$  – емкость конденсатора. Сопротивление перемычки и рельсов равно нулю. Трения в системе нет.

Контур пронизывает магнитный поток

$$\Phi = x l B.$$

В подвижной перемычке возникает ЭДС индукции

$$\varepsilon = -lBx'.$$

Уравнение контура имеет вид

$$-lBx' + \frac{q}{C} = 0.$$

Для силы тока получаем

$$-lBx'' + \frac{i}{C} = 0, \text{ и } i = lBCx''.$$

Записываем динамическое уравнение для перемычки:

$$mx'' = l^2 B^2 C x'', \quad (m - l^2 B^2 C) x'' = 0, \quad x'' = 0.$$

Очевидно, что после переходного процесса перемычка в магнитном поле будет двигаться с постоянной скоростью.

Определим изменение скорости перемычки при входе в область магнитного поля. Уравнение динамики для переходного процесса можно записать в виде

$$m\Delta v = i\Delta tBl.$$

Интегрируем (суммируем) до установившегося состояния:

$$m(v_0 - v) = qBl.$$

Накопленный заряд определяем из уравнения контура:

$$q = vCBl$$

и получаем

$$v = v_0 \frac{1}{1 + \frac{C(Bl)^2}{m}}, \quad q = vCBl = \frac{v_0 CBl}{1 + \frac{C(Bl)^2}{m}}.$$

После такого несложного решения следует сделать важное замечание по условию задачи. В данном варианте перемычка перед стартом не находилась в магнитном поле, а была на его границе. При входе в магнитное поле перемычка мгновенно изменяет скорость в соответствии с полученной для скорости формулой. Эта «мгновенность» объясняется отсутствием сопротивления контура. Если же сообщать скорость перемычке в присутствии магнитного поля, то при дальнейшем движении скорость уже не меняется и решение задачи существенно упрощается.

**Ф2687.** Сжатая пружина стоит на столе (рис.1). После пережигания нити, которая фиксирует пружину в сжатом

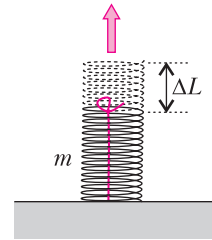


Рис. 1

состоянии, пружина распрямляется и подпрыгивает над столом. Определите время взаимодействия пружины с поверхностью стола, высоту, на которую «взлетает» центр масс пружины, и энергию, которая остается в пружине в виде энергии колебаний. Масса пружины  $m$ , ее коэффициент упругости  $k$ , величина начальной деформации  $\Delta L$  – известные величины. Решите задачу при выполнении соотношения  $k\Delta L \gg mg$ .

Первоначально рассмотрим более простой вариант задачи, в котором отсутствует гравитация: отпускается правый конец растянутой горизонтальной пружины, левый конец которой закреплен на вертикальной стенке (рис. 2). Надо определить характер движения витков пружины и характерное время движения (время сжатия).

При движении пружины на ее свободном конце образуется однородная область расслабления, которая увеличивается за счет «поглощаемых» витков. В этой области витки пружины не деформированы (или

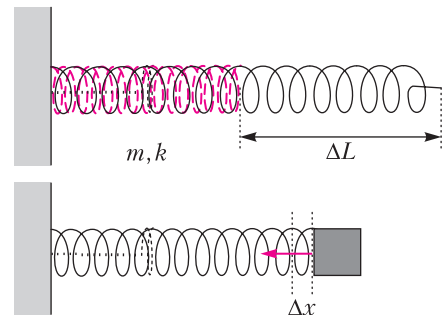


Рис. 2



не напряжены – и не сжаты и не растянуты, т.е. расслаблены). Движение этой области пружины можно представить как движение тела с переменной массой. При этом сила, действующая на разгоняющийся участок между неподвижной частью и уже движущейся частью пружины, остается постоянной и равной  $F = k\Delta L$ , где  $k$  – коэффициент упругости пружины,  $\Delta L$  – начальная деформация пружины. Эта сила за время  $\Delta t$  разгоняет очередной виток (часть витка), который приобретает некоторую скорость и в дальнейшем движется с этой приобретенной скоростью. Записываем второй закон Ньютона для такого движения:

$$F = k\Delta L = \frac{\Delta}{\Delta t}(mv).$$

Теперь предположим, что сжатый участок движется равномерно. Соответственно, равномерно движется и волновой фронт (передний край сжатого участка пружины). Но скорости этих движений различны. Скорость волнового фронта

$$u = \frac{L_0 + \Delta L}{\tau},$$

где  $\tau$  – время сжатия пружины до равновесного состояния. Скорость освобожденного конца пружины (и скорость всех витков в расслабленной части)

$$v = \frac{\Delta L}{\tau}.$$

Уравнение движения, с учетом сделанных предположений, переписывается в виде

$$k\Delta L = v \frac{\Delta m}{\Delta t}.$$

Для быстроты (скорости) накопления массы можно записать

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{m}{L_0 + \Delta L} u = \frac{m}{L_0 + \Delta L} \frac{L_0 + \Delta L}{\tau} = \frac{m}{\tau}.$$

Тогда для времени равномерного сжатия всей пружины получаем

$$\tau = \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

В итоге «оборванный» конец пружины движется равномерно. В конце сжатия (в состоянии отсутствия деформации) все витки пружины движутся с одинаковой

скоростью

$$v = \Delta L \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Теперь очевидна и формула периода колебаний пружины без груза, которая имеет возможность сжиматься и растягиваться:

$$T = 4\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

При этом следует отметить, что по форме колебания не являются гармоническими, однако их период не зависит от амплитуды. Это сложное колебание образует бесконечное число волн нечетных гармоник. Если подождать, то высшие гармоники затухнут и колебание пружины становится гармоническим. Оно будет содержать только основную гармонику.

Мы решили дополнительную задачу по сжатию (расслаблению) предварительно растянутой пружины. Теперь можно перейти к решению основной задачи. В нашей задаче пружина совершает обратное движение – расширение (от сжатого состояния к расслаблению). Но очевидно, что это движение является второй четвертью колебания пустой (без груза) пружины и в конце расширения все витки пружины будут иметь одинаковую скорость в соответствии с формулой  $v = \Delta L \sqrt{\frac{k}{m}}$ . При выполнении условия  $k\Delta L \gg mg$  высота прыжка пружины определяется из энергетического равенства:

$$k \frac{(\Delta L)^2}{2} = mgh, \text{ и } h = k \frac{(\Delta L)^2}{2mg}.$$

Теперь об энергии колебаний пружины после ее отскока. Если бы пружина была горизонтальной, то энергия колебаний была бы равна нулю. Но гравитация смещает равновесие. Если пружину поставить вертикально на стол, то она будет деформирована собственным весом (возникает гравитационное сжатие). Можно показать (читателю предлагается это сделать самостоятельно), что энергия этой деформации равна

$$E = \frac{1}{3} \frac{(mg)^2}{2k}.$$

(Продолжение см. на с. 26)

# Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида

Однополостный гиперболоид вращения – поверхность, образованная вращением гиперболы вокруг ее мнимой оси (оси симметрии, перпендикулярной отрезку с концами в фокусах). Через каждую точку гиперболоида проходят две прямые, полностью лежащие на нем. Каждая из них при вращении вокруг оси гиперболоида «заметает» всю поверхность. Таким образом, однополостный гиперболоид может быть получен и вращением прямой вокруг скрещивающейся с ней оси. Объединение этих двух взглядов на однополостный гиперболоид вращения является основой эффектных и запоминающихся моделей.

Самую простую модель, представляющую оба семейства образующих однополостного гиперболоида, можно сделать из шпажек для шашлыка и резиночек для плетения. Получаются как симметричные гиперболоиды (рис. 1), так и гиперболоиды со смещенной «талией» (рис. 2). Самое сложное в изготовлении этой модели – продумать последовательность соединений.

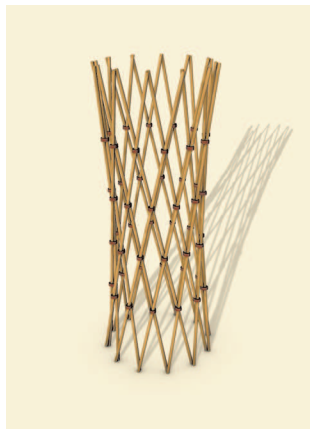


Рис. 1



Рис. 2



Рис. 3

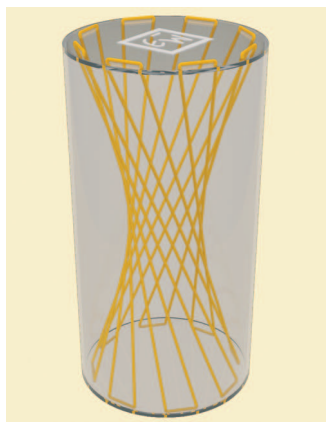


Рис. 4

Украшением рабочего стола может стать вращающаяся карандашница (рис. 3), в которой под одним и тем же углом просверлены отверстия. Карандаши представляют одно из двух семейств образующих однополостного гиперболоида. Вращая карандашницу, можно любоваться красивым разноцветным гиперболоидом.

Модель, демонстрирующая переход от интуитивно понятного цилиндра к гиперболоиду, использует прозрачный цилиндр (например, акриловый) и два круга-доньшка с отверстиями, через которые продевается резинка (рис. 4). Поворачивая один круг относительно другого, можно на-

блюдовать различные однополостные гиперboloиды. Небольшой недостаток этой модели — изменение длины образующих.

Однополостный гиперboloид с его прямолинейными образующими может стать основой и детской игрушки, и научного сувенира, и даже, будучи оснащенный ветряным пропеллером, — пугала для птиц на дачном участке.

Игрушка из детства — пуговица на закрученной веревочке (рис. 5). Растягивая руками петли веревочки, вы заставляете пуговицу вращаться (рис. 6, 7). Если принаоровиться и вовремя ослаблять натяжение веревочки, позволяя ей закрутиться в другую сторону, в эту игрушку можно играть бесконечно. А если заставить пуговицу вращаться быстро, то она начнет еще и звучать! В качестве «пуговицы» можно взять диск из дерева или картона, а в качестве образующих гиперboloида можно использовать, например, трубочки для питья. Тогда к звуку вращающегося диска будет добавляться еще и звук воздуха, проходящего через трубочки.

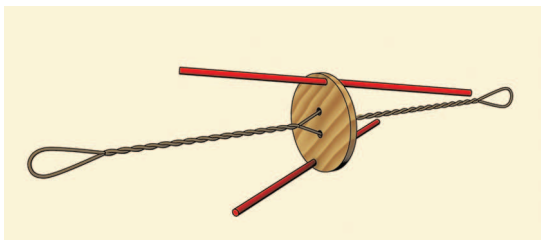


Рис. 5

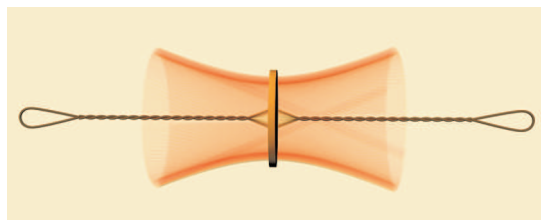


Рис. 6

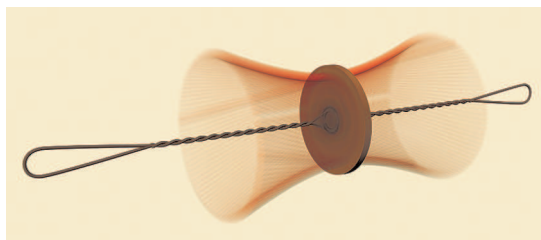


Рис. 7

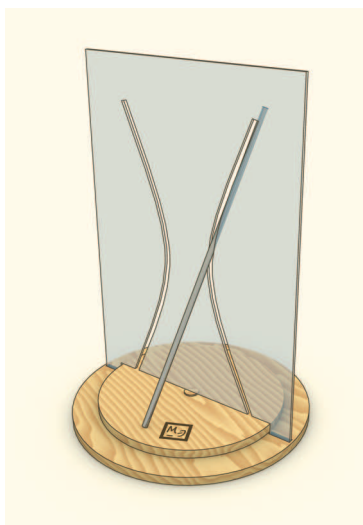


Рис. 8

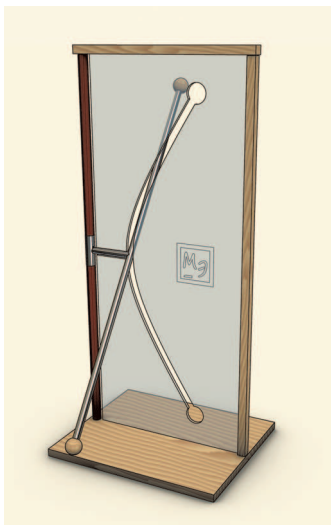


Рис. 9

Завораживающими являются и модели, в которых прямая проходит через изогнутую прорезь-гиперболу (рис. 8, 9). Они демонстрируют, что прямая при вращении вокруг скрещивающейся с ней оси замечает однополостный гиперboloид.

*По материалам проекта «Математические этюды» и книги «Математическая составляющая»*

(Начало см. на с. 16)

Она в 3 раза меньше энергии деформации безмассовой (невесомой) пружины под действием груза массой  $m$ . После пережигания нити начинается движение свободного конца пружины. Через время  $\tau = \sqrt{\frac{m}{k}}$  пружина выпрямляется и все ее витки получают одинаковую скорость  $v = \Delta L \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

Однако, можно показать, что в этот момент пружина будет иметь остаточную деформацию, которая определяется первоначальным гравитационным сжатием. Поэтому в свободном полете у пружины остается энергия колебаний, определяемая формулой  $E = \frac{1}{3} \frac{(mg)^2}{2k}$ .

Формулой  $E = \frac{1}{3} \frac{(mg)^2}{2k}$ .

**Ф2688.** Передняя стенка аквариума является собирающей линзой, задняя стенка – зеркало. Аквариум полностью залит водой. Перед передней стенкой стоит зажженная свеча (рис. 1). Найдите пол-



Рис. 1

ную информацию об изображении свечи в данной необычной оптической системе. Считайте известными следующие величины:  $F$  – фокусное расстояние линзы,  $L = 4F$  – длина аквариума (расстояние между линзой и зеркалом),  $n = 4/3$  – показатель преломления воды,  $d = 4/3 F$  – расстояние свечи от передней стенки аквариума. Информация об изображении должна содержать координату изображения, коэффициент увеличения, возможность получения изображения на экране.

При решении задачи будем использовать формулу линзы, а также выражения коэффициента увеличения изображения и смещения изображения плоскопараллельной пластиной:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d} + \frac{1}{F}, \quad k = \frac{f}{d} = \frac{dF}{d+F}, \quad \Delta f = a \frac{n-1}{n}.$$

Здесь  $d$  – расстояние от предмета до линзы,  $f$  – расстояние от изображения до линзы,  $a$  – толщина плоскопараллельной пластины,  $n$  – показатель преломления материала пластины. Используемая формула линзы отличается от школьной и записана в системе координат, которая совмещается с главной оптической осью линзы, а начало координат совмещается с оптическим центром линзы. Направление оси системы координат может быть выбрано произвольно. Величины подставляются в формулу линзы с соответствующим знаком «+» или «-», который они имеют в выбранной системе координат.

Находим координату первого изображения в линзе, когда  $d_1 = \frac{4}{3} F > 0$  и «работает» отрицательный фокус (точка фокуса расположена в отрицательной области оси  $x$ ):

$$f_1 = \frac{4F \cdot (-F)}{3\left(\frac{4}{3}F - F\right)} = -4F.$$

Первое изображение получается на плоскости зеркала (рис. 2). Определим первый коэффициент увеличения:

$$k_1 = \frac{f_1}{d_1} = \frac{-F}{\frac{4}{3}F - F} = -3.$$

Изображение увеличенное и перевернутое. Водяная пластина смещает изображение по ходу лучей на величину

$$\Delta f = 4F \frac{4/3 - 1}{4/3} = F,$$

т.е. изображение смещается за зеркало. Зеркало «отражает» изображение против первоначального хода лучей. Водяная пластина вторично смещает изображение на величину  $F$ , но уже в сторону линзы (лучи идут теперь в положительном направлении

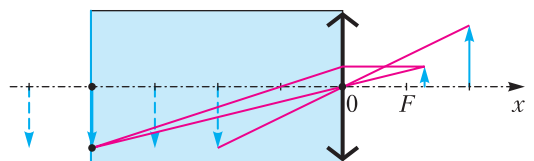


Рис. 2

нии оси  $x$ ). Это уже четвертое промежуточное изображение. Последним шагом рассчитываем вторичное изображение в линзе, когда  $d_5 = -2F$  и «работает» положительный фокус:

$$f_5 = \frac{-2F \cdot F}{-2F + F} = 2F$$

и соответствующий коэффициент увеличения:

$$k_5 = \frac{F}{-2F + F} = -1.$$

Общий коэффициент увеличения (учитываем, что  $k_2 = k_3 = k_4 = 1$ ) равен

$$k = k_1 \cdot k_5 = -3 \cdot (-1) = 3.$$

Таким образом, изображение свечи находится перед аквариумом на расстоянии двойного фокуса. При этом изображение увеличенное, прямое и действительное. Его можно получить на экране.

## КОНКУРС ИМЕНИ А. П. САВИНА

*Мы продолжаем конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на участников не младше 8–9 класса, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).*

*Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com. Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.*

*Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.*

*Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest Желаем успеха!*

**25.** В турнире по теннису участвовало  $N$  теннисистов, каждый сыграл с каждым один матч. В итоге оказалось, что все выиграли поровну матчей (ничьих в теннисе не бывает). В следующем году теннисистов стало на одного больше, и снова каждый сыграл с каждым один матч. Могло ли и теперь оказаться, что все выиграли поровну матчей?

*Б. Френкин*

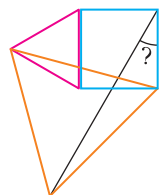


Рис. 1

**26.** Квадрат и два равно-сторонних треугольника расположены так, как показано на рисунке 1. Найдите угол, отмеченный знаком вопроса.

*М. Прасолов*

**27.** а) Сколько существует возрастающих арифметических прогрессий из 100 натуральных чисел, в которых все числа меньше миллиона?

б) Сколько существует возрастающих геометрических прогрессий из 10 натуральных чисел, в которых все числа меньше ста тысяч?

*Е. Бакаев*

**28.** Есть фигурки двух видов (рис. 2). Какое наибольшее количество таких фигурок можно без на-

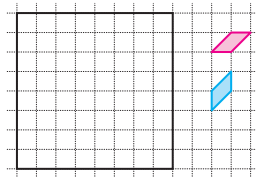


Рис. 2

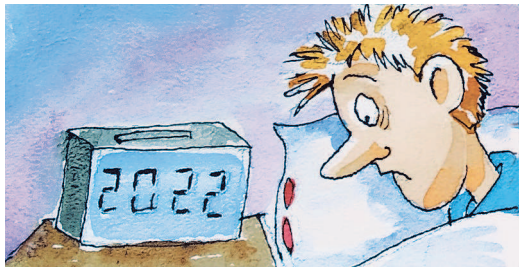
ложений расположить внутри квадрата  $8 \times 8$ ? Фигурки нельзя ни поворачивать, ни переворачивать, можно только сдвигать параллельно!

Решите задачу для двух вариантов:  
а) вершины фигурок должны находиться в узлах сетки;  
б) вершины фигурок могут не находиться в узлах сетки.

*Е. Бакаев*

## Задачи

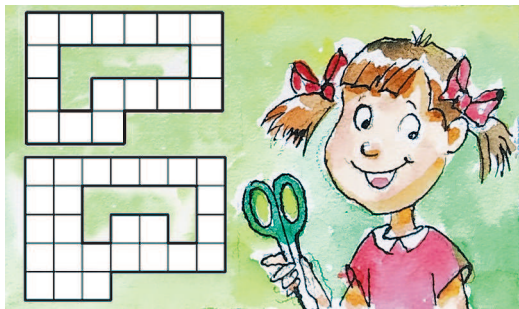
1. Электронные часы показывают время: часы, минуты и секунды; например 18:00:00. Однажды на часах две циф-



ры погасли, и остались только цифры 2, 0, 2, 2 (именно в таком порядке). Назовите самый поздний момент в сутках, когда это могло произойти.

*Д.Калинин*

2. Дана бумажная клетчатая фигура с дыркой (см. рисунок). Покажите, как разрезать эту фигуру на две части таким образом, чтобы из этих частей можно

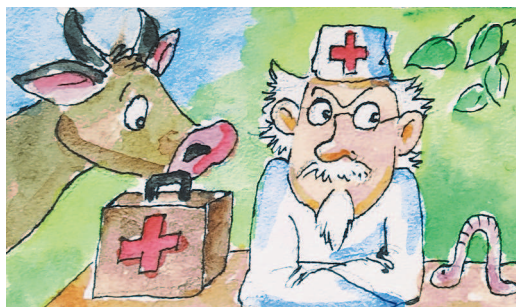


было сложить квадрат. Части можно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.

*М.Евдокимов*

3. Доктор Айболит хочет навестить и корову, и волчицу, и жучка, и червячка. Все четверо живут вдоль одной прямой дороги. Орлы готовы утром доставить Айболита к первому пациенту, а вечером забрать от последне-

Эти задачи предлагались на Математическом празднике.



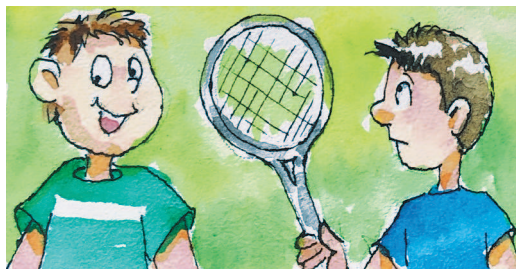
го, но три промежуточных перехода ему придется сделать пешком. Если Айболит начнет с коровы, то длина его кратчайшего маршрута составит 6 км, если с волчицы — 7 км, а если с жучка — 8 км.

Нарисуйте, как могли располагаться домики коровы, волчицы, жучка и червячка (достаточно одного примера расположения).

*И.Яценко, И.Раскина*

4. Среди 20 школьников состоялся турнир по теннису. Каждый участник проводил каждый день по одной встрече; в итоге за 19 дней каждый сыграл ровно по одному разу со всеми остальными. Теннисный корт в школе один, поэтому матчи шли по очереди. Сразу после своего первого выигрыша в турнире участник получал фирменную майку. Ничьих в теннисе не бывает. Петя стал одиннадцатым участником, получившим майку, а Вася — пятнадцатым. Петя получил свою майку в одиннадцатый день турнира. А в какой день получил майку Вася?

*Б.Френкин*



# Бурлаки, трактриса и детская скакалка

**С. ДВОРЯНИНОВ**

*Мы по берегу идем,  
Песню солнышку поем.*

Русская народная песня

## О произведениях искусства

Знаменитая картина Ильи Ефимовича Репина «Бурлаки на Волге» (рис. 1) прославил своего автора с момента появления в марте 1873 на художественной выставке в Санкт-Петербурге, а затем на Всемирной выставке в Вене. Возможно, под влиянием этой картины американский художник Фредерик Бриджмен написал бурлаков на Ниле (рис. 2). На картине Репина артель из одиннадцати человек тянет за собой грузевую баржу, на которой могли быть эльтонская соль или каспийская рыба, тюлений жир или персидские товары. Тяжел был труд бурлаков, которые, впрягшись в бечеву, тянули речные суда вверх по реке. Только в девятнадцатом веке им на смену пришли пароходы и буксиры.

Однако «бурлаков» можно увидеть и в наши дни, и тоже на Волге, в городе Самаре (рис. 3). Скульптурная композиция из бронзы на волжской набережной появилась 11 сентября 2014 года в честь 170-летия со дня рождения И.Е.Репина. Скульптор Н.Куклев в раме-мольберте представил пространственные копии героев картины на фоне великой реки.

Но сейчас не будем говорить об истории создания художественных шедевров и их достоинствах, а подумаем о механике – о кинематике и динамике. Артель бурлаков движется по берегу, который будем считать прямой линией. За их спиной – баржа. Какой будет ее траектория?

## Что такое линия тяги

*И надо б выйти, подтолкнуть,  
Но прыти нет –  
Авось подъедет кто-нибудь –  
И вытянет...*

В.С.Высоцкий

Представим себе такую ситуацию: зима, автомобильная трасса. В Якутии и на Алтае дороги называют трактами, например Чуйский тракт. По обеим сторонам – занесенные снегом поля. И одна машина съехала с дороги и выбраться самостоятельно из глубокого снега не может. Тогда трактор цепляет ее тросом, движется по дороге и вытяги-



Рис. 1



Рис. 2



Рис. 3

вает машину. Сцепка трактора и машины может быть и жесткой, при этом трос заменяют куском железной трубы. Траектория трактора – отрезок прямой. А по какой траектории перемещается машина?

Соответствующую модель легко изготовить. Возьмем П-образный кусок проволоки. К одному концу примотаем скотчем карандаш или стержень от шариковой ручки. Другой конец поместим в обойму, например в подходящий по диаметру корпус от той же ручки. Удерживая проволоку в вертикальной плоскости, будем медленно двигать обойму по бумаге вдоль прямой. На рисунке 4

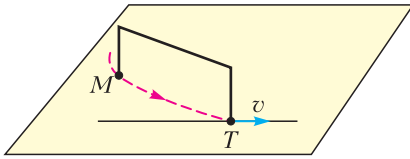


Рис. 4

точка  $T$  (буква  $T$  – от слова трактор) увлечает за собой красный карандаш  $M$  ( $M$  – от слова машина). На бумаге остается след от карандаша – кривая линия. Назовем эту линию линией тяги. Подчеркнем, что точку  $T$  следует перемещать очень медленно, а бумага должна быть шершавой, чтобы трение между бумагой и карандашом было большим.

Получить представление о линии тяги можно еще проще. К концу нити длиной  $L$  привяжем гайку  $M$ . На краю стола скотчем укрепим лист бумаги и положим на нее гайку с нитью. Будем медленно перемещать другой конец нити – точку  $T$  – вдоль края и тем самым тянуть гайку. Если руку остановить, то из-за трения остановится и гайка. Карандашом отметим на бумаге ее центр. Еще немного подвинем руку и в новом положении гайки отметим ее центр. Так получится пос-

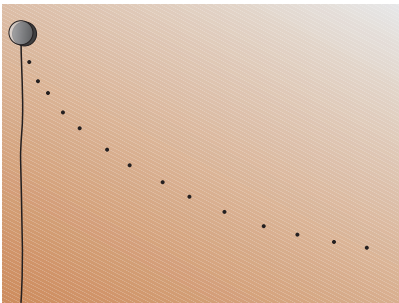


Рис. 5

ледовательность точек, лежащих на линии тяги (рис. 5). Последовательно соединив их гладкой кривой, мы получим приближенное изображение линии тяги.

Заметим, что слова *путь, дорога, шлях, большак, трасса* – это синонимы. По-английски – *tract*, по-французски – *tractus*. Латинское *trahere* означает тащить, притягивать. В русском языке есть еще похожее слово *трактир* – так изначально называли постоялый двор при большой дороге, где путники могли остановиться на ночь и хозяин ставил на стол самовар. Потом трактиры появились и в городах.

Мы знаем, что уравнение  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  – это уравнение окружности радиусом  $r$  с центром в точке  $(a; b)$ . Любая прямая на плоскости задается уравнением  $ax + by + c = 0$ . Эти линии можно задать и параметрически:

$$\begin{cases} x = a + r \cos t, \\ y = b + r \sin t, \end{cases} \quad \begin{cases} x = x_0 + pt, \\ y = y_0 + qt. \end{cases}$$

А какое уравнение имеет линия тяги? Получить это уравнение непросто. Линия тяги является предметом серьезных научных исследований. Наряду с ней рассмотрим известную в математике линию, которая называется трактрисой.

### Трактриса

*Но я видел Ногайскую бухту да тракты...*

В.С.Высоцкий

Всякая модель, учитывающая важнейшие характеристики реального объекта или какого-либо процесса, должна быть достаточно простой для того, чтобы можно было устанавливать свойства изучаемой системы и предсказывать ее поведение. Для описания траектории нашего карандаша будем считать, что она обладает таким свойством: *отрезок касательной от любой точки  $M$ , лежащей на траектории, до точки  $T$  имеет постоянную длину*.

Получаемая при этом кривая и называется трактрисой. Ее график в системе координат  $xu$  показан на рисунке 6. Трактриса – это идеальный математический объект. Линия тяги похожа на трактрису. Обе эти линии выпуклы вниз и асимптотически приближаются к оси абсцисс.



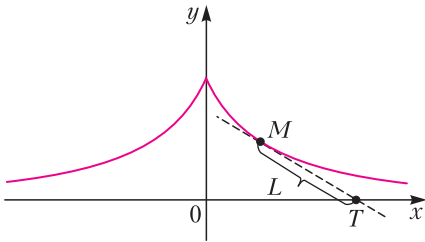


Рис. 6

**Вспомним про ускорение**

Предположим, что на плоскости имеется желоб в форме трактрисы. Тогда материальная точка  $M$ , например в виде шарика, под действием силы тяги будет двигаться по желобу, как по рельсам. При этом вектор скорости точки  $M$  лежит на касательной к трактрисе, а его длина зависит от абсолютной величины скорости.

А теперь рассмотрим реальное движение точки  $M$  по линии тяги под действием единственной силы тяги. Будем считать, что трение отсутствует или же оно очень мало по сравнению с силой тяги. В каждой точке траектории (или, что то же самое, в каждый момент времени) вектор ускорения точки  $M$  направлен в точку  $T$  – его направление, согласно закону Ньютона, совпадает с направлением действующей силы. А какое направление имеет при этом вектор скорости точки  $M$ ? Возможны два варианта, показанные на рисунке 7. В первом случае линия

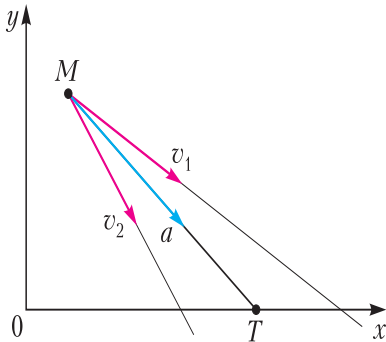


Рис. 7

скорости пересекает ось абсцисс *после* точки  $T$  (т.е. справа от нее), во втором случае – *до* точки  $T$  (т.е. слева от нее).

**Движение по окружности подсказывает ответ**

Итак, нас интересует взаимное положение векторов скорости и ускорения при криволи-

нейном движении. Хорошо известно, что в случае равномерного движения по окружности против часовой стрелки направление ускорения получается из направления скорости поворотом на  $90^\circ$  против часовой стрелки. В дополнение к этому рассмотрим неравномерное движение точки  $M$  по окружности согласно уравнениям

$$x(t) = \cos t^2,$$

$$y(t) = \sin t^2.$$

Ясно, что и угловая, и линейная скорости точки  $M$  возрастают. Тогда

$$x'(t) = -2t \sin t^2,$$

$$y'(t) = 2t \cos t^2,$$

$$x''(t) = -2 \sin t^2 - 4t^2 \cos t^2,$$

$$y''(t) = 2 \cos t^2 - 4t^2 \sin t^2.$$

Соответственно имеем три вектора:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t^2 \\ \sin t^2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -2t \sin t^2 \\ 2t \cos t^2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -2 \sin t^2 - 4t^2 \cos t^2 \\ 2 \cos t^2 - 4t^2 \sin t^2 \end{pmatrix}.$$

Это радиус-вектор  $\vec{r}(t)$  точки  $M$ , вектор ее скорости  $\vec{v}(t)$ , вектор ее ускорения  $\vec{a}(t)$ . При этом

$$\vec{a}(t) = -\frac{1}{t} \vec{v}(t) - 4t^2 \vec{r}(t),$$

или более кратко

$$\vec{a} = -\frac{1}{t} \vec{v} - 4t^2 \vec{r}.$$

Из рисунка 8 видно, что и в этом случае направление ускорения получается из на-

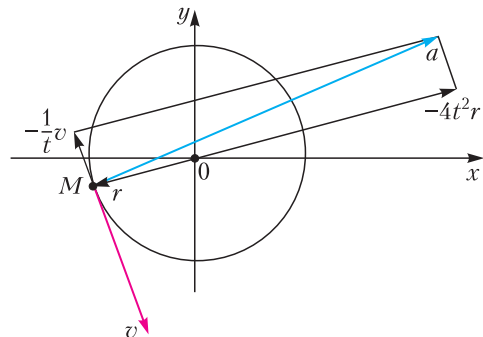


Рис. 8

правления скорости поворотом против часовой стрелки. Согласитесь, что движение по линии тяги похоже на движение по дуге окружности в третьей четверти, и поэтому для вектора скорости на рисунке 7 выбираем вариант  $\vec{v}_2$ .

Конечно, у нас еще могут оставаться сомнения в правильности нашего выбора. И тут нам на помощь приходит практика, которая, как известно, критерий истины. Чтобы узнать направление вектора мгновенной скорости точки  $M$ , вернемся к эксперименту с гайкой, о которой уже говорили. Быстро переведем конец нити  $T$  из стартовой точки в некоторое промежуточное положение, а потом мгновенно прекратим движение руки. Точка  $M$  продолжит движение с приобретенной скоростью. Прodelайте этот несложный опыт и убедитесь сами, что реализуется именно вариант  $\vec{v}_2$ .

### Так что же получается?

Итак, пусть на плоскости  $xy$  точка  $T$  с большой скоростью и даже с ускорением пробегает отрезок от точки  $0$  до точки  $T_s$  (буква  $s$  – от слова stop), помещает точку  $M$  в точку  $M_1$  и мгновенно останавливается в положении  $T_s$  (рис. 9). С этого момента взаимодействие точки  $M$  с точкой  $T$  прекращается, точка  $M$  продолжает движение по инерции по прямой, содержащей вектор  $\vec{v}$ . Вначале точка  $M$  будет приближаться к точке  $T$ , а затем удаляться от нее. В некоторый момент нить вновь окажется натянутой, и тут начнется самое интересное. Из положения  $M_2$  точка  $M$  начнет вращаться против часовой стрелки по окружности радиусом  $L$

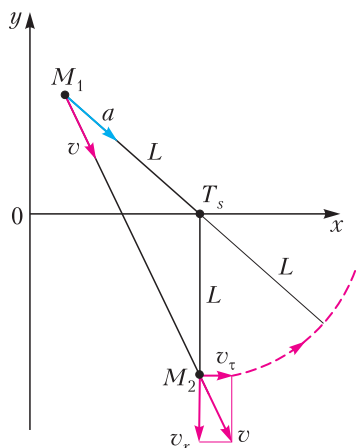


Рис. 9

вокруг неподвижной точки  $T_s$ . Почему? Ответ прост. Разложите вектор скорости точки  $M$  по двум направлениям – вдоль нити и вдоль перпендикуляра к ней. Таким образом, подтягивание точки  $M$  из ее стартового положения к оси абсцисс порождает вращение точки  $M$ . А что будет дальше?

Ясно, что если вращение нашей гайки происходит на столе, то вследствие трения оно начнет замедляться. Если ничего больше не делать, то точка  $M$  остановится. Но если *в нужный момент* перевести точку  $T$  из положения  $T_s$  в положение  $0$ , т.е. снова «подтянуть» точку  $M$  к оси абсцисс (можно сказать, подтянуть снизу вверх), то она получит подпитку кинетической энергии и продолжит вращение вокруг точки  $0$ . Управляя точкой  $T$ , а именно перемещая ее по отрезку, мы реализуем движение точки  $M$  по двум окружностям. С одной окружности на другую точка  $M$  переходит по линии тяги.

Это явление лежит в основе действия популярной детской игрушки – нейроскакалки. Нейроскакалка – это пластмассовый стержень длиной около 50 см. На одном его конце, как на оси, закреплено колесо, на другом – кольцо, позволяющее накинуть скакалку на нижнюю часть голени одной ноги, например правой. Чуть оторвав правую ногу от земли и перемещая ее вперед – назад, ребенок раскручивает скакалку. При этом надо успевать ловко поднимать и левую ногу, чтобы пропустить вращающуюся скакалку. Каждый перескок правой ноги в нужный момент, что называется в такт, увеличивает кинетическую энергию скакалки, она начинает крутиться на ноге, как на оси, все быстрее и быстрее. Колесо на ее конце (наша точка  $M$ ) при этом катится по земле. Можно сказать, что нога трудится.

Подобным же образом дети управляют и обычной веревочной скакалкой. На нее, конечно, действует сила тяжести, которая выше была не важна при движении по горизонтальной плоскости. Однако влияние силы тяжести мало по сравнению с воздействием на скакалку со стороны человека, поэтому качественное объяснение движения веревочной скакалки остается прежним.

# Наблюдение двупреломления в кристалле кальцита

Ю. НОСОВ

## Несколько слов о кристалле кальцита

Мы будем иметь дело с оптически прозрачным образцом кальцита ( $\text{CaCO}_3$ ), часто называемым исландским шпатом. Такое название закрепилось за кальцитом, поскольку первые месторождения этого прозрачного минерала были найдены в Исландии.

Для своих экспериментов воспользуемся кристаллом кальцита в форме ромбоэдра (рис. 1). Выколоть кристалл такой формы

оказывается совсем просто в силу совершенной спайности кальцита, т.е. способности кристалла раскалываться при ударе по определенным кристаллографическим плоскостям. Для кальцита такими плоскостями являются плоскости ромба  $\{1011\}$ , и после

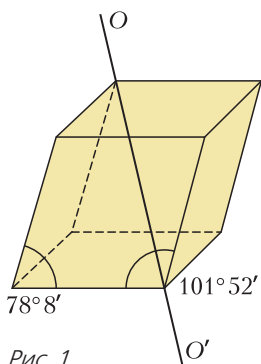


Рис. 1

с помощью нескольких ударов молотком) мы получим кристалл кальцита в виде ромбоэдра, образованного шестью гранями в форме ромба.

В 1669 году датский ученый Расмус Бартолин (1625–1698) обнаружил и описал свойство двойного преломления светового луча исландским шпатом. Он заметил, что, попадая на поверхность исландского шпата, луч света, преломляясь, раздваивается, причем в кристалле существует направление, вдоль которого подобное явление не происходит. Для одного луча он смог определить показатель преломления, а для другого – нет.

Лучам он дал название *solita* и *insolita* (лат) – обычный и необычный, в современной терминологии это обыкновенный луч (о-луч) и необыкновенный (е-луч). Обыкновенный луч подчиняется закону преломления света, т.е.  $\sin \alpha / \sin \beta = n$ , где  $\alpha$  – угол падения,  $\beta$  – угол преломления,  $n$  – показатель преломления второй среды относительно первой. Необыкновенный луч этому закону не подчиняется.

Объяснить явление двойного лучепреломления стало возможно лишь после открытия волновой природы света.

## Наш эксперимент

Начертим на бумажном листе черными линиями прямоугольный крест. Будем рассматривать этот крест сквозь кристалл кальцита. Мы увидим, что в общем случае каждая линия раздваивается. Вращая кристалл, добьемся положения, когда одна из прямых линий, горизонтальная, разделится на две (о- и е-лучи) с максимальным расстоянием  $a$  (рис. 2). Другая, вертикальная, линия не

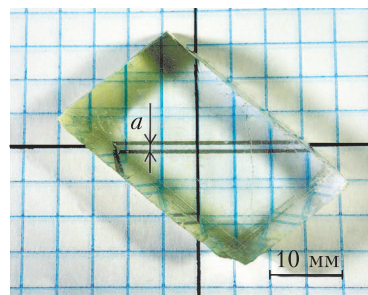


Рис. 2

разделилась. Измерив величину  $a$  (1,2 мм) и зная толщину кристалла, сквозь который прошел свет (10,5 мм), найдем угол  $\gamma$ , на который лучи света расходятся в объеме кристалла. Получаем  $\text{tg } \gamma = 1,2 / 10,5 \approx 0,11$ , откуда  $\gamma \approx 6^\circ 20'$ . Эта величина почти совпадает с углом расхождения лучей в кальците  $\gamma = 6^\circ 30'$ , приводимом в справочниках. Заметим также, что интенсивность разделившихся лучей одинакова, но она существенно меньше интенсивности исходной черты на бумаге.

Добавим к нашему рисунку еще две наклонные линии, проходящие через его центр (рис. 3). Видим, что эти добавочные линии тоже разделились, но на меньшую величину, чем горизонтальная линия. Мы получили странный, на первый взгляд, результат:

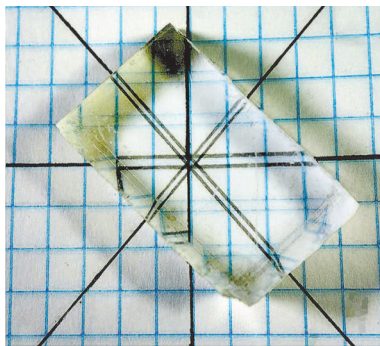


Рис. 3

прямые линии при рассматривании через кристалл кальцита могут раздваиваться в различной степени или даже совсем не раздваиваться. Почему это происходит?

Нанесем на лист бумаги несколько точек и будем рассматривать их через кальцит (рис. 4). Мы увидим два изображения каждой точки, соответствующие о- и е-лучам. Для всех точек линии, соединяющие их изображения, параллельны и вертикально ориентированы. Этот рисунок позволяет объяснить наблюдавшуюся картину раздваивания линий. Например, три левые точки на бумаге были расположены на вертикальной прямой. Видим, что после прохождения через кристалл изображения о- и е-лучей этих точек также находятся на одной и той же вертикальной прямой. Отсюда следует, что исходная вертикальная линия, составленная из множества точек, раздваиваться не будет.

Теперь будем поворачивать кристалл над рисунком с точками (рис. 5 и 6). Видим, что для каждой точки изображение, соответствующее одному лучу, остается неподвижным, а второе движется вокруг него. При этом линия, соединяющая их, остается параллельной диагонали тупого угла верхней грани.

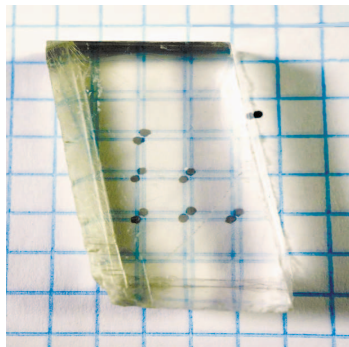


Рис. 5

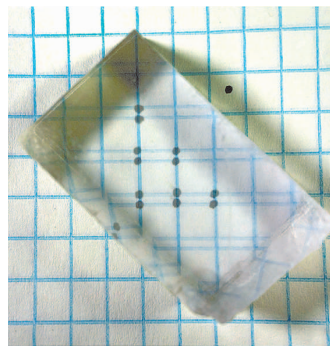


Рис. 4

Напомним, что в нашем опыте исходные лучи падают на кристалл перпендикулярно его ромбической грани  $\{1011\}$ . Поэтому, во-первых, о-луч (для него показатель преломления в кальците  $n_o = 1,658$ ) сохраняет исходное направление и не меняет его при вращении кристалла. Соответствующее ему точечное изображение остается неподвижным. Во-вторых, е-луч (показатель преломления в кальците  $n_e$  меняется в диапазоне 1,486–1,658) испытывает преломление в кристалле. Величина преломления зависит от кристаллографического направления, по которому падает исходный луч. Вращение кристалла приводит к вращению е-луча вокруг о-луча.

Где же в кальците проходит оптическая ось (линия  $O - O'$  на рисунке 1), т.е. то направление, вдоль которого свет, распространяясь, не испытывает двойного лучепреломления? Это направление  $[0001]$ , совпадающее с осью симметрии 3-го порядка в решетке кальцита (при повороте вокруг этой оси на угол  $2\pi/3$  тело переходит в само себя). В нашем опыте лучи света падают на кристалл не по направлению оптической оси, а под углом  $57^\circ 30'$  к ней. Поэтому мы и наблюдаем картину дву-преломления (двулучепреломления).

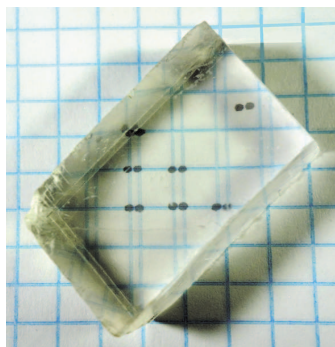


Рис. 6

# Региональный этап XLVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике

## Задачи олимпиады

9 класс

1. Петя написал на доске десять натуральных чисел, среди которых нет двух равных. Известно, что из этих десяти чисел можно выбрать три числа, делящихся на 5. Также известно, что из написанных десяти чисел можно выбрать четыре числа, делящихся на 4. Может ли сумма всех написанных на доске чисел быть меньше 75?

*П. Кожевников*

2. На доске девять раз (друг под другом) написали некоторое натуральное число  $N$ . Петя к каждому из 9 чисел приписал слева или справа одну ненулевую цифру; при этом все приписанные цифры различны. Какое наибольшее количество простых чисел могло оказаться среди 9 полученных чисел?

*И. Ефремов*

3. Дан квадратный трехчлен  $P(x)$ , не обязательно с целыми коэффициентами. Известно, что при некоторых целых  $a$  и  $b$  разность  $P(a) - P(b)$  является квадратом натурального числа. Докажите, что существует более миллиона таких пар целых чисел  $(c, d)$ , что разность  $P(c) - P(d)$  также является квадратом натурального числа.

*Н. Агаханов*

4. В компании некоторые пары людей дружат (если  $A$  дружит с  $B$ , то и  $B$  дружит с  $A$ ). Оказалось, что среди каждых 100 человек в компании количество пар дружащих людей нечетно. Найдите наибольшее возможное количество человек в такой компании.

*Е. Бакаев*

5. Пусть  $CE$  – биссектриса в остроугольном треугольнике  $ABC$ . На внешней биссектрисе угла  $ACB$  отмечена точка  $D$ , а на стороне  $BC$  – точка  $F$ , причем  $\angle BAD = 90^\circ = \angle DEF$ . Докажите, что центр окружности,

описанной около треугольника  $CEF$ , лежит на прямой  $BD$ .

*И. Фролов*

6. Последовательность чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{2022}$  такова, что  $a_n - a_k \geq n^3 - k^3$  для любых  $n$  и  $k$  таких, что  $1 \leq n \leq 2022$  и  $1 \leq k \leq 2022$ . При этом  $a_{1011} = 0$ . Какие значения может принимать  $a_{2022}$ ?

*Н. Агаханов*

7. Петя разбил клетчатый квадрат  $100 \times 100$  некоторым образом на домино – клетчатые прямоугольники  $1 \times 2$  и в каждом домино соединил центры двух его клеток синим отрезком. Вася хочет разбить этот же квадрат на домино вторым способом и в каждом своем домино соединить две клетки красным отрезком. Вася хочет добиться того, чтобы из каждой клетки можно было пройти в любую другую, идя по синим и красным отрезкам. Обязательно ли у него будет возможность это сделать?

*Е. Бакаев*

8. В трапеции  $ABCD$  диагональ  $BD$  равна основанию  $AD$ . Диагонали  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $E$ . Точка  $F$  на отрезке  $AD$  выбрана так, что  $EF \parallel CD$ . Докажите, что  $BE = DF$ .

*А. Кузнецов*

9. См. задачу M2691 «Задачника «Кванта»».

10. См. задачу M2693 «Задачника «Кванта»».

10 класс

1. См. задачу 1 для 9 класса.

2. Дан квадратный трехчлен  $P(x)$ . Докажите, что существуют попарно различные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  такие, что выполняются равенства

$$P(b+c) = P(a), P(c+a) = P(b), P(a+b) = P(c).$$

*Н. Агаханов*

3. См. задачу M2690 «Задачника «Кванта»».

4. Пусть  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , где  $n$  – натуральное число. Известно, что числа  $a_0, a_1, \dots, a_n$  – целые, при этом  $a_n \neq 0$ ,  $a_{n-k} = a_k$  при всех  $k = 0, 1, \dots, n$  и  $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 = 0$ . Докажите, что число  $P(2022)$  делится на квадрат некоторого натурального числа, большего 1.

*Е. Холмогоров*

5. См задачу M2692 «Задачника «Кванта»».

6. На доске написаны три последовательных нечетных числа. Может ли сумма остатков от деления этих трех чисел на 2022 равняться некоторому простому числу?

*Н. Агаханов*

7. Дан вписанный четырехугольник  $ABCD$ , в котором  $\angle A = 2\angle B$ . Биссектриса угла  $C$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $E$ . Докажите, что  $AD + AE = BE$ .

*А. Кузнецов*

8. См. задачу 9 для 9 класса.

9. В вершины правильного 100-угольника поставили 100 фишек, на которых написаны номера 1, 2, ..., 100, именно в таком порядке по часовой стрелке. За ход разрешается поменять местами некоторые две фишки, стоящие в соседних вершинах, если номера этих фишек отличаются не более чем на  $k$ . При каком наименьшем  $k$  серией таких ходов можно добиться расположения, в котором каждая фишка сдвинута на одну позицию по часовой стрелке (по отношению к своему начальному положению)?

*С. Берлов*

10. См. задачу 10 для 9 класса.

*11 класс*

1. См. задачу 1 для 9 класса.

2. См. задачу 2 для 10 класса.

3. В треугольной пирамиде  $ABCD$  на ее гранях  $BDC$  и  $ACD$  нашлись соответственно точки  $A'$  и  $B'$  такие, что  $\angle AB'C = \angle AB'D = \angle BA'C = \angle BA'D = 120^\circ$ . Известно, что прямые  $AA'$  и  $BB'$  пересекаются. Докажите, что точки  $A'$  и  $B'$  равноудалены от прямой  $CD$ .

*А. Заславский*

4. В компании некоторые пары людей дружат (если  $A$  дружит с  $B$ , то и  $B$  дружит

с  $A$ ). Оказалось, что при любом выборе 101 человека из этой компании количество пар дружащих людей среди них нечетно. Найдите наибольшее возможное количество человек в такой компании.

*Е. Бакаев, И. Богданов*

5. Пусть  $S$  – 100-элементное множество, состоящее из натуральных чисел, не превосходящих 10000. Отметим в пространстве все точки, каждая из координат которых принадлежит множеству  $S$ . К каждой из 1000000 отмеченных точек  $(x; y; z)$  прикрепим шарик с написанным на нем числом

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + yz + zx}.$$

На каком наибольшем количестве шариков может быть написано число, равное 2?

*П. Козлов*

6. См. задачу 6 для 9 класса.

7. Произведение цифр натурального числа  $n$  равно  $x$ , а произведение цифр числа  $n + 1$  равно  $y$ . Может ли так случиться, что произведение цифр некоторого натурального числа  $m$  равно  $y - 1$ , а произведение цифр числа  $m + 1$  равно  $x - 1$ ?

*А. Кузнецов*

8. См. задачу 9 для 10 класса.

9. Трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  вписана в окружность  $\omega$ . Диагонали  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $P$ . Точка  $M$  – середина отрезка  $AB$ . Серединный перпендикуляр к отрезку  $AD$  пересекает окружность  $\omega$  в точках  $K$  и  $L$ . Точка  $N$  – середина дуги  $CD$  описанной окружности треугольника  $PCD$ , не содержащей точку  $P$ . Докажите, что точки  $K, L, M$  и  $N$  лежат на одной окружности.

*А. Кузнецов*

10. Даны неотрицательные числа  $a, b, c, d$  такие, что  $a + b + c + d = 8$ . Докажите, что

$$\frac{a^3}{a^2 + b + c} + \frac{b^3}{b^2 + c + d} + \frac{c^3}{c^2 + d + a} + \frac{d^3}{d^2 + a + b} \geq 4.$$

*А. Кузнецов*

*Публикацию подготовили  
Н. Агаханов, И. Богданов,  
П. Кожевников, И. Подлипский*

# Олимпиада «Ломоносов»

## Физика

В 2021/22 учебном году олимпиада «Ломоносов» по физике в МГУ проводилась в два этапа – отборочный и заключительный.

### Отборочный этап

Отборочный этап проходил в форме заочного испытания. Задания отборочного этапа составлялись отдельно для учащихся младших (7–9) и старших (10–11) классов. Эти задания были размещены в личных кабинетах участников на сайте <https://olymp.msu.ru>. Доступ к условиям заданий был открыт для участников с 29 октября по 5 ноября 2021 года. Прием решений и ответов для каждой группы учащихся прекращался одновременно с их завершением. Победители и призеры отборочного этапа были приглашены для участия в заключительном этапе олимпиады. Поскольку числовые данные в условиях задач для каждого участника были индивидуальными, приводимые в журнале решения задач и ответы к ним даны в общем виде.

#### 7–9 классы

1. Автомобиль двигался из пункта *A* в пункт *B*. Первую треть своего пути он ехал со скоростью  $v_1 = 60$  км/ч. Далее треть всего времени автомобиль двигался со скоростью  $v_2$ . Оставшийся путь он ехал со скоростью  $v_3 = 50$  км/ч. Определите среднюю скорость  $v_{\text{ср}}$  автомобиля на всем пути. Ответ приведите в км/ч, округлив до десятых.

2. На горизонтальном столе лежат два одинаковых кубика, связанных пружинкой (рис. 1). Масса каждого кубика  $M$ . Правый кубик соединен с легкой чашей нерастяжимой нитью, перекинутой через блок. Коэффициент трения между кубиками и столом  $\mu = 0,1$ . В исходном состоянии нить слегка натянута, а пружина не деформирована. Грузик какой минимальной массы  $m$  нужно осторожно (без толчка) положить на чашу, чтобы левый

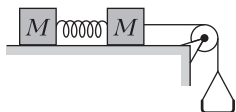


Рис. 1

кубик сдвинулся с места? Нить, пружину и блок считайте невесомыми. Ответ приведите в граммах, округлив до десятых.

3. В калориметре находится смесь воды и льда в состоянии термодинамического равновесия. Через время  $\tau_1 = 30$  мин после включения спирали, подключенной к источнику постоянного напряжения, весь лед растаял, а еще через время  $\tau_2$  вода нагрелась на  $\Delta t = 5$  °С. Пренебрегая теплоемкостью калориметра, определите отношение  $n$  массы воды  $m_v$  к массе льда  $m_l$  в момент включения спирали. Удельная теплоемкость воды  $c = 4,2$  Дж/(г·°С), удельная теплота плавления льда  $\lambda = 340$  Дж/г. Ответ округлите до десятых.

4. Два резистора сопротивлениями  $R_1 = 25$  Ом и  $R_2 = 100$  Ом соединены параллельно и включены в цепь постоянного тока (рис. 2). Какая мощность  $N$  выделяется на участке между точками *A* и *B*, если идеальный амперметр, включенный последовательно с резистором сопротивлением  $R_2$ , показывает силу тока  $I_2$ ? Ответ округлите до целых.

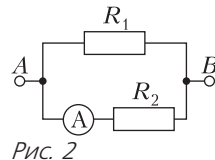


Рис. 2

5. Непрозрачный цилиндрический сосуд высотой  $H$  и радиусом  $3r_0$  до краев наполнен водой. В центре сосуда на дне расположено круглое зеркало радиусом  $2r_0$ . Точечный источник света находится над поверхностью воды точно над серединой зеркала. На какое минимальное расстояние  $h_{\text{мин}}$  от поверхности воды можно приблизить источник света, чтобы при этом все световые лучи, отраженные от зеркала, вышли из сосуда? Показатель преломления воды примите равным  $n = 1,33$ , а  $r_0 = 10$  см. Ответ приведите в сантиметрах, округлив до десятых.

#### 10–11 классы

1. Маленькая шайба соскальзывает с некоторой высоты  $h$  по гладкой наклонной плоскости, плавно переходящей на горизонтальный участок гладкой поверхности, и испытывает центральное абсолютно упругое соударение с шайбой вдвое меньшей массы (рис. 3). Вторая шайба после соударения попадает на наклонную шероховатую поверхность, плавно сопряженную с горизонталь-

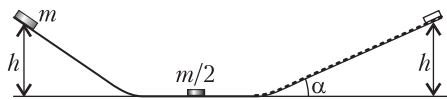


Рис. 3

ной поверхностью посредством гладкого участка. Определите угол  $\alpha$ , который образует с горизонтом шероховатая наклонная поверхность, если эта шайба поднимается по ней на такую же высоту  $h$ . Коэффициент трения между шайбой и шероховатой поверхностью  $\mu$ . Ответ приведите в градусах, округлив до целых.

2. На шероховатом горизонтальном столе находится брусок массой  $M$  с прикрепленной к нему легкой нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый неподвижный блок (рис. 4). Ко второму концу нити привя-

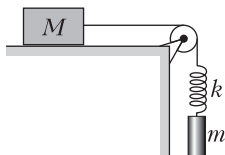


Рис. 4

зана легкая пружина жесткостью  $k = 10$  Н/м с подвешенным на ней грузом массой  $m = 100$  г. В начальном состоянии груз удерживают в таком положении, что нить слегка натянута, а пружина не деформирована, причем правый конец нити и пружина занимают вертикальное положение. В некоторый момент груз отпускают из состояния покоя. Спустя время  $\tau = \pi/30$  с  $\approx 0,105$  с после этого брусок сдвигается с места. Найдите коэффициент трения  $\mu$  между бруском и столом. Ответ округлите до сотых.

3. В теплоизолированном вертикальном цилиндре под тяжелым теплоизолирующим поршнем находится идеальный одноатомный газ. Расстояние между поршнем и дном сосуда  $H = 1$  м. Сверху на поршень медленно насыпают малую порцию песка, масса которой  $m$  значительно меньше массы поршня. На какую величину  $\Delta U$  изменится в результате этого внутренняя энергия газа? Ускорение свободного падения примите равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Ответ приведите в миллиджоулях, округлив до целых.

4. В цепи, схема которой показана на рисунке 5, в некоторый момент замыкают ключ  $K$ . Найдите напряжение  $U$  на катушке к тому моменту, когда через резистор проте-

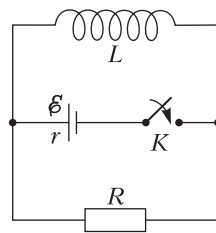


Рис. 5

чет заряд  $q = 1$  мКл. Индуктивность катушки  $L = 1$  мГн, сопротивление резистора  $R = 4$  Ом, ЭДС источника  $\varepsilon$ , а его внутреннее сопротивление  $r = 1$  Ом. Ответ приведите в вольтах, округлив до десятых.

5. Стекланный кубик освещается широким пучком параллельных световых лучей, параллельных одной из его граней, как показано на рисунке 6. Определите ширину  $d$

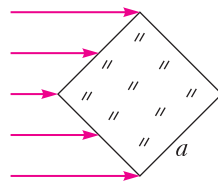


Рис. 6

параллельного пучка лучей, выходящих из кубика в направлении падающего пучка. Длина ребра кубика  $a$ , коэффициент преломления стекла  $n = 1,5$ . Ответ приведите в сантиметрах, округлив до десятых.

### Заключительный этап

Заключительный этап олимпиады проводился 24–26 февраля 2022 года в дистанционном формате на портале <https://exam.distant.msu.ru/>. Для участия в заключительном этапе к рабочему месту испытуемого предъявлялись определенные технические требования (с ними можно ознакомиться на сайте олимпиады).

Задание для учащихся 7–9 классов состояло из четырех задач по темам, изучаемым в рамках программы по физике для основной общеобразовательной школы. Задания для учащихся 10–11 классов были составлены в полном соответствии с Кодификатором ЕГЭ 2021 года по физике и охватывали основные разделы Кодификатора, а именно: 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику, 3) электродинамику и 4) оптику. Типовое задание состояло из четырех раз-



личных разделов, включающих задачи и уточняющие вопросы по теории. На выполнение заданий для всех классов отводилось 4 астрономических часа (240 минут).

7–9 классы

1. По гладкой наклонной доске ударом запустили снизу вверх маленький шарик. На расстоянии  $l = 0,6$  м от исходной точки шарик побывал дважды: через  $t_1 = 1$  с и  $t_2 = 2$  с после начала движения. Определите начальную скорость  $v_0$  шарика. Трение и сопротивление воздуха считайте пренебрежимо малыми.

2. В сосуде с водой, имеющей температуру  $0^\circ\text{C}$ , плавает кусок льда массой  $m_{\text{л}} = 100$  г, в который вмержла дробинка массой  $m_{\text{д}} = 5$  г. Какое минимальное количество теплоты  $Q$  нужно сообщить воде, чтобы кусок льда с дробинкой начал тонуть? Плотность воды  $\rho_{\text{в}} = 1$  г/см<sup>3</sup>, плотность льда  $\rho_{\text{л}} = 0,9$  г/см<sup>3</sup>, удельная теплота плавления льда  $\lambda = 340$  Дж/г. Объемом дробинки по сравнению с объемом льда можно пренебречь.

3. В схеме, показанной на рисунке 7,  $R_1 = 1$  Ом,  $R_2 = 2$  Ом,  $R_3 = 3$  Ом. Известно, что на сопротивлении  $R_1$  выделяется мощ-

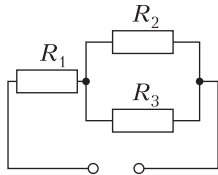


Рис. 7

ность  $N_1 = 25$  Вт. Какая мощность  $N_2$  выделяется на сопротивлении  $R_2$ ?

4. В комнате длиной  $L = 5$  м и высотой  $H = 3$  м на стене висит плоское зеркало (рис. 8). Человек смотрит в него с расстояния  $l = 2$  м. Какова минимальная высота  $s$  зеркала, если человек видит в нем противоположную стену от пола до потолка?

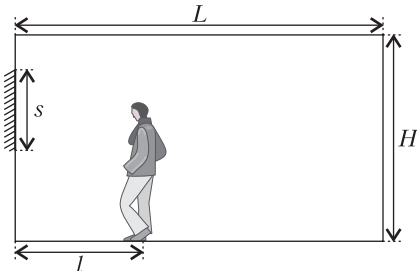


Рис. 8

10–11 классы

1. **Задача.** По двум прямым дорогам, перпендикулярным друг другу, едут с постоянными скоростями два автомобиля (рис. 9).

В некоторый момент времени расстояние между автомобилями стало минимальным и равным  $s = 100$  м, а через  $\tau = 10$  с оно удвоилось. Найдите скорость  $v_1$  первого автомобиля, если скорость второго автомобиля  $v_2 = 36$  км/ч.

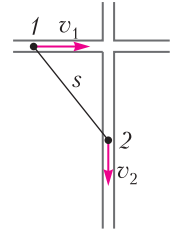


Рис. 9

Ответ приведите в км/ч.

**Вопросы.** Дайте определение скорости. Сформулируйте закон сложения скоростей.

2. **Задача.** На гладком льду озера лежит достаточно длинная доска массой  $M = 1$  кг. На край доски ставят модель автомобиля с включенным двигателем, развивающим постоянную мощность  $N = 2$  Вт. Все колеса автомобиля являются ведущими, а его масса в  $n = 3$  раза меньше массы доски. Автомобиль начинает движение вдоль оси доски с проскальзыванием колес. Коэффициент трения колес о доску  $\mu = 0,3$ . Считая колеса автомобиля легкими, определите расстояние  $x$ , на которое сместится автомобиль относительно доски к моменту, когда колеса перестанут проскальзывать. Ускорение свободного падения примите равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**Вопросы.** Как определяется импульс системы материальных точек? Сформулируйте закон сохранения импульса.

3. **Задача.** В прочном сосуде объемом  $V = 0,1$  м<sup>3</sup> находится смесь из  $v_1 = 0,05$  моль водорода и  $v_2 = 1$  моль сухого воздуха. Найдите относительную влажность  $f$  воздуха в сосуде после сгорания водорода и охлаждения содержимого сосуда до температуры  $t = 20^\circ\text{C}$ . Давление насыщенного водяного пара при этой температуре  $p_{\text{н}} = 2330$  Па. Массовая доля кислорода в воздухе составляет примерно 23%. Универсальная газовая постоянная  $R = 8,31$  Дж/(моль · К).

**Вопросы.** Какие виды парообразования вы знаете? Дайте определение удельной теплоты парообразования.

4. **Задача.** Горизонтально расположенный цилиндр разделен подвижным поршнем массой  $m = 5$  кг на две равные части объемом  $V = 1$  л каждая. С одной стороны от поршня находится насыщенный водяной пар при температуре  $t = 100^\circ\text{C}$ , с другой – воздух

при той же температуре. Цилиндр поставили вертикально так, что снизу оказался пар. На какое расстояние  $x$  опустится поршень, если температуру в обеих частях цилиндра поддерживают неизменной? Площадь основания цилиндра  $S = 0,01 \text{ м}^2$ . Ускорение свободного падения примите равным  $g = 10 \text{ м/с}^2$ , а нормальное атмосферное давление  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ .

**Вопросы.** Дайте определения влажности и относительной влажности воздуха.

**5. Задача.** Маленький шарик массой  $m = 10 \text{ г}$ , несущий заряд  $q = 10^{-6} \text{ Кл}$ , надет на гладкую непроводящую спицу, расположенную горизонтально (рис. 10). С помо-

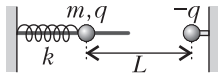


Рис. 10

щью легкой непроводящей пружины шарик связан с неподвижной опорой. На одном горизонтальном уровне с этим шариком и в той же вертикальной плоскости закреплен второй маленький шарик, несущий заряд  $-q$ . В положении равновесия расстояние между шариками  $L = 50 \text{ см}$ . Когда подвижный шарик сместили от положения равновесия на малое расстояние и отпустили, он стал совершать гармонические колебания с частотой  $f = 1,47 \text{ Гц}$ . Найдите жесткость пружины  $k$ . Электрическая постоянная  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ .

**Указание.** При расчетах воспользуйтесь приближенной формулой  $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$ , справедливой при  $\alpha x \ll 1$ .

**Вопросы.** Дайте определение напряженности электрического поля. Сформулируйте принцип суперпозиции электрических полей.

**6. Задача.** Длинная диэлектрическая плита наклонена под углом  $\alpha$  к горизонту и имеет две части поверхности – гладкую верхнюю и шероховатую нижнюю (рис. 11). Прямоугольная пластмассовая пластинка массой

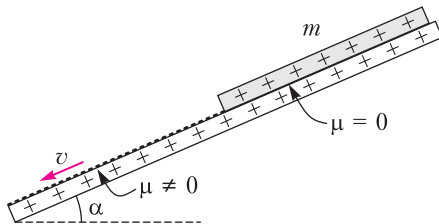


Рис. 11

$m = 100 \text{ г}$  покоится, располагаясь целиком на шероховатой части, если угол наклона плиты не превышает  $\alpha_{\text{пр}} = 30^\circ$ . Пластинку смещают вдоль плиты так, что ее нижний край совпадает с границей шероховатой части, и отпускают без начальной скорости. Скорость пластинки к моменту, когда она целиком окажется на шероховатой части плиты, равна  $v_1$ . Если же по плите равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью  $\sigma = +3 \text{ мкКл/м}^2$ , а по пластинке заряд  $q = +3 \text{ мкКл}$ , то скорость пластинки в том же положении оказывается равной  $v_2$ . Во сколько раз  $v_1$  меньше  $v_2$ ? Электрическую постоянную примите равной  $\epsilon_0 = 9 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ , а ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Поляризационными эффектами можно пренебречь.

**Вопросы.** Дайте определение емкости. Запишите формулу для емкости плоского конденсатора.

**7. Задача.** Тонкая собирающая линза плотно вставлена в круглое отверстие в непрозрачной ширме. На расстоянии  $l = 8 \text{ см}$  от линзы расположен экран, перпендикулярный ее главной оптической оси. По другую сторону от линзы в ее главном фокусе находится точечный источник света. При этом на экране наблюдается светлое пятно диаметром  $D = 5 \text{ см}$ . Когда источник переместили в точку, находящуюся на главной оптической оси линзы на удвоенном фокусном расстоянии от линзы, диаметр светлого пятна на экране стал равным  $d = 3 \text{ см}$ . Найдите фокусное расстояние линзы  $F$ .

**Вопросы.** Дайте определения фокусного расстояния и оптической силы тонкой линзы.

**8. Задача.** Узкий световой пучок падает на тонкую собирающую линзу параллельно ее главной оптической оси и образует светлое пятно на экране, параллельном плоскости линзы и расположенном за ней на расстоянии  $l = 20 \text{ см}$ . Когда линзу передвинули на расстояние  $\delta = 0,5 \text{ см}$  в направлении, перпендикулярном ее главной оптической оси, центр пятна сместился на величину  $\Delta = 1 \text{ см}$ . Найдите фокусное расстояние линзы  $F$ .

**Вопросы.** Дайте определения фокусного расстояния и оптической силы тонкой линзы.

Публикацию подготовил С.Чесноков

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## «Квант» для младших школьников (см. «Квант» №2)

1. 76 и 70.

Обозначим через  $x$  возраст, в котором Сидоров производил свои подсчеты. Тогда возраст Сидоровой в этот момент составлял  $x - 6$  лет, а в момент заключения брака им было  $\frac{x}{2}$  и  $\left(\frac{x}{2} - 6\right)$  лет соответственно. Последнее условие позволяет составить уравнение  $x + 8 - \left(\frac{x}{2} - 6\right) = \frac{2}{3}(x + 8) \Rightarrow \frac{x}{6} = 14 - \frac{16}{3} \Rightarrow x = 52$ . Итак, к моменту бракосочетания супругам было 26 лет и 20 лет. Из этого немедленно следует ответ.

2. 1011 положительных и 1010 отрицательных. Будем двигаться вдоль исходного ряда и фиксировать знаки чисел. Из условия следует, что знак при этом менялся 1010 раз – четное число раз. Поэтому знаки первого и последнего чисел совпадают. Значит, добавленное произведение будет положительным.

3. Можно. При этом получится два креста и восемь четырехклеточных фигурок. Пусть  $x$  и  $y$  – число четырехклеточных и пятиклеточных фигурок соответственно. Тогда получаем уравнение  $4x + 5y = 42$ , из которого видно, что  $y$  – четное число, не кратное 4 и не превосходящее 8, т.е. либо 2, либо 6. Но случай  $x = 3, y = 6$

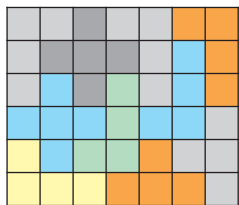


Рис. 1

невозможен, поскольку угловые клетки нельзя покрыть пятиклеточными крестами и четырехклеточными фигурками. Случай  $x = 8, y = 2$  изображен на рисунке 1.

4. Опустим из вершины прямого угла  $B$  перпендикуляр  $BE$  на гипотенузу. При этом точка  $E$  совпадает с серединой гипотенузы, т.е.  $AC = 2CE$ . В треугольнике  $BEK$   $\angle EBK = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ \Rightarrow BK = 2EK$ .

В то же время в треугольнике  $CMK$   $\angle MKC = 60^\circ \Rightarrow \angle KMC = 30^\circ \Rightarrow MK = 2CK$ .

Значит,  $BM = 2EC = AC$ , что и требовалось.

## Конкурс имени А.П.Савина (см. «Квант» №1)

17. Да, существует.

См. примеры на рисунках 2 и 3. На рисунке 2 части переходят друг в друга при параллельном переносе, а на рисунке 3 – при повороте.

На рисунке 3 верхняя граница «капли» состоит из полуокружности радиуса 2 с центром  $O$ , а нижняя граница – из двух полуокружностей

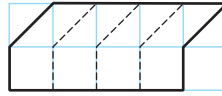


Рис. 2

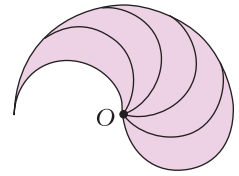


Рис. 3

радиуса 1 (одна «смотрит» внутрь капли, а другая – «наружу»). Если повернуть левую маленькую полуокружность вокруг  $O$  на  $180^\circ$  (по часовой стрелке), получится правая маленькая полуокружность. Если же ее поворачивать на углы, кратные  $180^\circ/n$ , получится разрезание на  $n$  частей.

18. а) Не может.

Посчитаем общее количество пар соседних клеток. В каждом столбце 100 пар соседних по вертикали клеток. Значит, всего пар соседних по вертикали клеток  $100 \cdot 100$ . Столько же будет пар соседних по горизонтали клеток. Итого пар соседних клеток  $2 \cdot 100 \cdot 100$ , что не делится на 3.

б) Может.

*Первый способ.* Поделим квадрат на две равные части ломаной из перегородок, симметричной относительно его центра (рис. 4). Если длина ломаной равна трети всех перегородок, т.е.  $2 \cdot 100 \cdot 99/3 = 6600$ , останется закрасить одну из половинок квадрата. Тогда, в силу симметрии, пар соседних белых клеток будет столько же, сколько пар соседних черных.

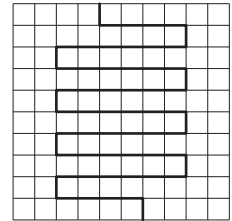


Рис. 4

А раз это все оставшиеся пары, то их количество также будет составлять треть от общего числа пар соседних клеток. Ломаная состоит из 100 вертикальных перегородок и 99 горизонтальных отрезков. Общая длина горизонтальных отрезков равна  $6600 - 100 = 6500$ . Возьмем среди них 97 отрезков одной длины и 2 более коротких отрезка другой длины, как на рисунке 4. Их нетрудно подобрать, например 97 отрезков по 66 (длина такого отрезка должна быть четной) и 2 отрезка по 49, получится  $97 \cdot 66 + 2 \cdot 49 = 6500$ , поэтому общая длина нашей ломаной равна 6600 – как раз треть всех перегородок, что и требовалось.

*Второй способ.* Пару соседних белых клеток будем называть бб, и аналогично другие типы пар – чч и бч.

Для начала найдем подходящий пример не для квадрата  $100 \times 100$ , а для полоски  $1 \times 100$ . Сделаем сначала блок из 34 белых клеток, внутри него будет 33 пары бб. За ним поставим блок из 34

черных клеток, внутри него будет 33 пары чч. Затем пусть следует последовательность бчбчбч..., где соседние клетки разных цветов. Новых пар бб и чч не появится, а значит, все оставшиеся пары будут типа бч, и их будет  $99 - 33 - 33 = 33$  штуки. Такую строчку будем обозначать Б:

$$B = \underbrace{\text{ббб...ббб}}_{34} \underbrace{\text{ччч...ччч}}_{34} \underbrace{\text{бчбчбч...}}_{32}$$

Рассмотрим также строчку Ч, которая получится из строчки Б, если каждую букву б заменить на ч, а ч – на б. В строке Ч тоже будет поровну пар бб, чч и бч.

Теперь запишем строчку Б вертикально и справа от каждой буквы б запишем строку Б, а справа от каждой буквы ч – строку Ч. (Пример для строк длины 7 показан на рисунке 5.) Тем самым мы получили таблицу  $100 \times 100$ , где каждая строчка – либо Б, либо Ч, и каждый столбец – либо Б, либо Ч.

б	б	б	б	ч	ч	ч	б
б	б	б	б	ч	ч	ч	б
б	б	б	б	ч	ч	ч	б
ч	ч	ч	ч	б	б	б	ч
ч	ч	ч	ч	б	б	б	ч
ч	ч	ч	ч	б	б	б	ч
б	б	б	б	ч	ч	ч	б

Позтому и в горизонтальных рядах поровну пар типов бб, чч, бч, и в вертикальных тоже. Значит, их поровну и во всей таблице.

Рис. 5

19. Заметим, что шесть треугольников, примыкающих к шестиугольнику (на рисунке 6 они покрашены зеленым), подобны друг другу, так как каждые два соседних треугольника подобны по трем углам. Пусть стороны шестиугольника равны  $a_1, a_2, \dots, a_6$ . Тогда другие стороны треугольников –  $xa_1, ya_1, xa_2, ya_2$  и т.д. Сумма периметров шести зеленых треугольников равна, с одной стороны, сумме периметров двух больших правильных треугольников, т.е.  $3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 21$ , а с другой стороны, она равна

$$(1 + x + y)(a_1 + a_2 + \dots + a_6).$$

Так как сумма  $a_1 + a_2 + \dots + a_6$  это периметр шестиугольника и по условию равна 7, то  $1 + x + y = 21/7 = 3$ , а значит,  $x + y = 2$ .

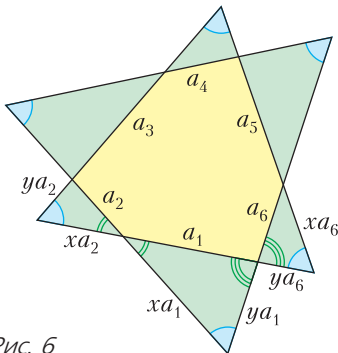


Рис. 6

Таким образом, в треугольнике, подобном зеленому, сумма двух сторон равна 2, угол между ними равен  $60^\circ$  и третья сторона равна 1. Докажем следующую лемму: Пусть в треугольнике  $ABC$ :  $AB + BC = 2, AC = 1, \angle B = 60^\circ$ . Тогда  $AB = BC = 1$ . Первый способ (для тех, кто знает теорему косинусов). Запишем теорему косинусов для треугольника  $ABC$ , обозначив  $t = AB$ :

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos 60^\circ &= AC^2, \\ t^2 + (2-t)^2 - 2t(2-t)\frac{1}{2} &= 1, \\ t^2 + 4 + t^2 - 4t - 2t + t^2 &= 1, \\ 3t^2 + 3 - 6t &= 0, \\ (t-1)^2 &= 0, \end{aligned}$$

откуда  $AB = t = 1$ , тогда и  $BC = 1$ .

Второй способ (для тех, кто не знает теорему косинусов). Отметим точку  $N$  на продолжении отрезка  $AB$  за точку  $B$  так, что  $BN = BC$  (рис. 7).

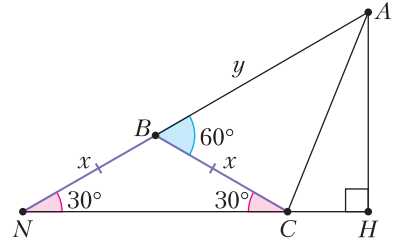


Рис. 7

Треугольник  $BCN$  равнобедренный с углом  $\angle NBC = 120^\circ$  и поэтому  $\angle BNC = 30^\circ$ . Опустим перпендикуляр из точки  $A$  на прямую  $NC$ . Тогда треугольник  $ANH$  – прямоугольный с углом  $30^\circ$ , поэтому катет  $AH$  в два раза меньше гипотенузы  $AN = AB + BN = AB + BC = 2$ , значит,  $AH = 1$ . Таким образом, из точки  $A$  к прямой  $NC$  проведены два равных отрезка  $AC = AH = 1$ , и при этом  $AH$  – перпендикуляр. Значит, точки  $C$  и  $H$  совпадают, и угол  $\angle ACN$  прямой, а тогда  $\angle ACB = 60^\circ$ . Значит, треугольник  $ABC$  равносторонний и  $AB = BC = 1$ .

20. Обозначим числа Фибоначчи как  $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, \dots$ . Решения основаны на следующем свойстве, которое несложно доказать по индукции:

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

а) Для  $n$ , дающих остатки 0 или 2 при делении на 6.

Количество чисел должно быть четным, поэтому  $n:2$ . Сумма чисел тоже должна быть четной, т.е.  $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$  четно, а значит,  $F_{n+2}$  нечетно. Четными являются те числа Фибоначчи, номер которых делится на 3 (это тоже несложно доказывается по индукции), поэтому

$n + 2 \mid 3$ . Таким образом,  $n$  не может давать остатки 1, 3, 4, 5 при делении на 6.

Покажем, что для всех остальных  $n$  числа можно разбить на группы нужным образом.

При  $n$ , кратном 6, разобьем все числа Фибоначчи на блоки по 6 подряд идущих. Рассмотрим один из таких блоков  $F_k, F_{k+1}, \dots, F_{k+5}$ . Числа  $F_{k+2}, F_{k+3}, F_{k+4}$  положим в одну группу, а остальные три числа – в другую. Тем самым в две группы мы поместили по три числа с одинаковой суммой, ведь  $F_{k+2} = F_k + F_{k+1}$ ,  $F_{k+5} = F_{k+3} + F_{k+4}$ . Поступив так с каждым блоком, получим в итоге группы, количества и суммы чисел в которых одинаковые.

При  $n$ , дающем остаток 2 при делении на 6, поступим схожим образом. Первые два числа  $F_1 = 1$  и  $F_2 = 1$  поместим в разные группы, а все оставшиеся числа  $F_3, F_4, \dots$  разобьем на блоки по 6 подряд идущих, которые будем раскладывать по группам так же, как в предыдущем случае.

б) Ни для каких  $n$ .

Из трех групп выберем ту, в которой нет ни  $F_n$ , ни  $F_{n-1}$ . Сумма чисел в этой группе не больше, чем сумма всех остальных чисел  $F_1 + F_2 + \dots + F_{n-2}$ , что равняется  $F_n - 1$ . Но тогда в этой группе сумма чисел меньше, чем в группе, содержащей  $F_n$ . Получаем противоречие.

## Региональный этап XLVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике

*9 класс*

1. Может.

*Пример:* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 20. В этом наборе три числа (5, 10, 20) делятся на 5, четыре числа (4, 8, 12, 20) делятся на 4, а общая сумма равна 71.

2. 6.

Пусть  $S$  – сумма цифр числа  $N$ . Тогда суммы цифр полученных чисел будут равны  $S + 1, S + 2, \dots, S + 9$ . Три из этих сумм будут делиться на 3. По признаку делимости на 3, соответствующие три числа на доске также будут делиться на 3. При этом они будут больше 3, а значит, будут составными. Поэтому больше 6 простых чисел на доске оказаться не может.

Шесть простых чисел может оказаться даже при  $N = 1$  – например, если Петя получит, среди прочих, числа 11, 13, 41, 61, 17 и 19.

3. Пусть  $P(x) = ux^2 + vx + w$ . По условию,

$$(a - b)(u(a + b) + v) =$$

$$= (ua^2 + va + w) - (ub^2 + vb + w) = P(a) - P(b) = n^2.$$

Поскольку  $n$  – натуральное число,  $a - b \neq 0$ . Бу-

дем искать подходящие пары чисел  $(c, d)$  в виде  $c = a + k$  и  $d = b - k$ . Тогда разность  $P(c) - P(d)$  будет равна

$$\begin{aligned} (c - d)(u(c + d) + v) &= (a - b + 2k)(u(a + b) + v) = \\ &= \frac{a - b + 2k}{a - b} n^2. \end{aligned}$$

Таким образом, нам достаточно подобрать такие  $k$ , для которых дробь  $\frac{a - b + 2k}{a - b}$  будет квадратом натурального числа. При  $k = (a - b)m$  дробь будет равна нечетному числу  $2m + 1$ . Тогда нам подойдут те  $m$ , при которых  $2m + 1$  будет квадратом нечетного числа.

4. 101.

Рассмотрим граф дружб, в котором вершины – это люди в компании, а два человека соединены ребром, если они дружат.

Если граф – это цикл, содержащий 101 вершину, то на любых 100 вершинах ровно 99 ребер, так что такая компания удовлетворяет условиям задачи. Осталось показать, что не существует такой компании из 102 человек (тогда и компании из более чем 102 человек тоже быть не может). Ниже мы приводим один из способов сделать это; мы предполагаем, от противного, что такая компания нашлась.

Рассмотрим произвольное множество из 101 вершины и индуцированный подграф на этих вершинах, пусть в нем  $k$  ребер. Выбрасывая из этого подграфа произвольную вершину, скажем степени  $d$ , получаем 100 вершин с нечетным количеством ребер  $k - d$ . Значит, степень любой вершины в нашем подграфе имеет четность, отличную от четности  $k$ , т.е. степени всех вершин подграфа имеют одну и ту же четность. Но, как хорошо известно, в графе из нечетного числа вершин все вершины не могут иметь нечетную степень. Поэтому все эти степени четны, а число ребер  $k$  нечетно.

Пусть теперь во всем графе на 102 вершинах  $l$  ребер. При выкидывании любой вершины, скажем степени  $d$ , получается подграф с нечетным числом ребер  $l - d$ ; аналогично рассуждению выше получаем, что и во всем графе степени всех вершин имеют одинаковую четность. Заметим, что наш граф не может быть пустым (т.е. не иметь ребер) или полным (т.е. иметь все  $C_{102}^2$  ребер), иначе на любых 100 вершинах будет либо 0, либо  $C_{100}^2 = 99 \cdot 50$  ребер, т.е. четное количество. Тогда найдется вершина, соединенная хоть с какой-то другой вершиной, но не со всеми. Иначе говоря, есть вершины  $u$ ,  $v_1$  и  $v_2$  такие, что  $u$  соединена с  $v_1$ , но не с  $v_2$ . Степени вершин  $v_1$  и  $v_2$  в исходном графе одной четности,

поэтому после удаления  $u$  они будут иметь разную четность. Это невозможно по доказанному выше.

5. Окружность, описанную около треугольника  $CEF$ , обозначим через  $\omega$ , а ее центр – через  $O$ . Внешняя ( $CD$ ) и внутренняя ( $CE$ ) биссектрисы угла  $ACB$  перпендикулярны. Тогда  $\angle DAE = \angle DCE = 90^\circ$ , и четырехугольник  $ADCE$  вписан. Поэтому  $\angle ADE = \angle ACE$ , откуда  $\angle BEF = 180^\circ - \angle AED - \angle DEF = 90^\circ - \angle AED = \angle ADE = \angle ACE = \angle ECF$ . Значит,  $\omega$  касается  $AB$  (в точке  $E$ ; рис. 8).

Выберем на отрезке  $BC$  такую точку  $P$ , что  $PE \parallel AC$ . Тогда  $\angle PEC = \angle ECA = \angle PCE$ , откуда  $PC = PE$ . Поскольку  $OC = OE$ , получаем, что  $PO$  – биссектриса внешнего угла  $BPE$ .

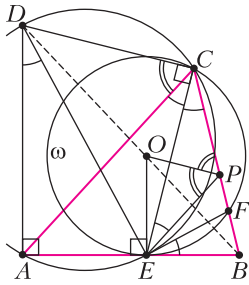


Рис. 8

Совершим гомотегию с центром  $B$ , переводящую треугольник  $BPE$  в  $BCA$ . Тогда прямая  $PO$  перейдет в  $CD$ , а прямая  $EO$  (перпендикулярная  $AB$ ) – в  $AD$ . Значит, точка  $O$  перейдет в  $D$ , откуда и следует, что точка  $O$  лежит на  $BD$ .

6.  $a_{2022} = 2022^3 - 1011^3 = 7 \cdot 1011^3$ .

Записывая условие при  $n = 2022$ ,  $k = 1011$  и при  $n = 1011$ ,  $k = 2022$ , получаем

$$a_{2022} = a_{2022} - a_{1011} \geq 2022^3 - 1011^3$$

и

$$-a_{2022} = a_{1011} - a_{2022} \geq 1011^3 - 2022^3,$$

т.е.  $a_{2022} \geq 2022^3 - 1011^3 \geq a_{2022}$ . Отсюда и следует ответ.

7. Не обязательно.

Занумеруем вертикали слева направо числами от 1 до 100. Пусть  $a$  – верхняя строка квадрата, а  $b$  – строка сразу под ней. Пусть в Петинском разбиении эти строки заняты вертикальными домино  $a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_{98} - b_{98}$  и горизонтальными домино  $a_{99} - a_{100}, b_{99} - b_{100}$ . Очевидно, что оставшуюся часть доски можно разбить на домино (например, на горизонтальные), поэтому такое разбиение существует.

Предположим, что существует Васинское разбиение на домино, удовлетворяющее требованиям задачи. Если в Васинском разбиении какая-то из клеток  $a_1, a_2, \dots, a_{98}$  занята вертикальным домино, то это – то же домино, что и в Петинском разбиении, и из этих двух клеток нельзя добраться до остальных. Поэтому в Васинском разбиении обязательно должны присутствовать домино  $a_1 - a_2, a_3 - a_4, \dots, a_{97} - a_{98}$ . Аналогично, клетки  $a_{99}$  и  $a_{100}$  не могут быть накрыты горизонтальными

домино, поэтому они накрыты вертикальными домино  $a_{99} - b_{99}$  и  $a_{100} - b_{100}$ . Но тогда из четырех клеток  $a_{99}, a_{100}, b_{99}, b_{100}$  нельзя попасть в остальные – противоречие.

8. Поскольку  $AD \parallel CB$ , треугольники  $EAD$  и  $ECB$  подобны, и потому  $\frac{BE}{DE} = \frac{BC}{AD}$ .

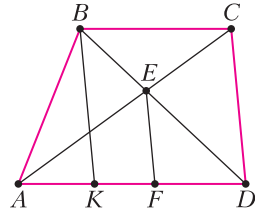


Рис. 9

Достроим треугольник  $BCD$  до параллелограмма  $BCDK$  (рис. 9). Тогда треугольники  $DEF$  и  $DBK$  подобны, поэтому  $\frac{DF}{DE} = \frac{DK}{DB}$ . Наконец, поскольку  $DK = BC$  и  $DB = DA$ , получаем

$$\frac{DF}{DE} = \frac{DK}{DB} = \frac{BC}{AD} = \frac{BE}{DE},$$

откуда и следует, что  $DF = BE$ .

10 класс

2. Пусть  $d$  – абсцисса вершины параболы  $y = P(x)$ , так что прямая  $x = d$  – ось симметрии параболы. Тогда для любых чисел  $t$  и  $s$  с суммой  $2d$  (т.е. таких, что точки  $t$  и  $s$  симметричны относительно  $d$ ) выполнено  $P(t) = P(s)$ . Таким образом, любая тройка попарно различных чисел  $a, b, c$  таких, что  $a + b + c = 2d$ , будет удовлетворять условию задачи. Можно взять, скажем,  $a = \frac{2d}{3} - 1, b = \frac{2d}{3}, c = \frac{2d}{3} + 1$ .

4. Достаточно доказать такое утверждение: многочлен  $P(x)$  делится на  $(x - 1)^2$ . Действительно, после деления (например, столбиком) в частном получится многочлен  $Q(x)$  с целыми коэффициентами, и тогда равенство  $P(x) = (x - 1)^2 Q(x)$  влечет равенство  $P(2022) = 2021^2 \cdot Q(2022)$ , из которого следует утверждение задачи, поскольку  $Q(2022)$  – целое число.

Для доказательства утверждения сделаем замену  $t = x - 1$ , положим  $R(t) = P(t + 1) = a_n(t + 1)^n + a_{n-1}(t + 1)^{n-1} + \dots + a_1(t + 1) + a_0$  и докажем, что  $R(t)$  делится на  $t^2$ , т.е. что последние два коэффициента многочлена  $R(t)$  равны 0.

Свободный член многочлена  $R$  равен  $R(0) = a_n + a_{n-1} + \dots + a_0 = 0$ .

Поскольку в многочлене  $(t + 1)^k$  коэффициент при  $t$  равен  $k$ , коэффициент при  $t$  многочлена  $R$  равен  $na_n + (n - 1)a_{n-1} + \dots + a_1$ . Из условий  $a_{n-k} = a_k$  следует, что удвоенный коэффициент при  $t$  равен

$$\begin{aligned} &(na_n + (n - 1)a_{n+1} + \dots + a_1) + \\ &+ (na_0 + (n - 1)a_1 + \dots + a_{n-1}) = \\ &= n(a_n + a_{n-1} + \dots + a_0) = 0. \end{aligned}$$

Тем самым, задача решена.

*Замечание.* Другое решение можно получить, доказав, что  $P(1) = P'(1) = 0$ .

**6.** Не может.

Пусть  $r$  – остаток меньшего из данных нечетных чисел при делении на 2022, так что  $r$  – некоторое нечетное число из множества  $\{1, 3, 5, \dots, 2021\}$ . Если  $r \leq 2017$ , то два других остатка равны  $r + 2$  и  $r + 4$ , так что сумма остатков равна  $r + (r + 2) + (r + 4) = 3(r + 2)$  – это число составное, так как делится на 3 и больше 3. Отдельно рассмотрим случаи  $r = 2019$  и  $r = 2021$ . В первом случае остатки данных чисел равны 2019, 2021 и 1. Во втором случае остатки данных чисел равны 2021, 1 и 3. В обоих случаях сумма остатков делится на 3 и больше 3.

**7.** Обозначим  $\angle ABC = \alpha$ , тогда по условию  $\angle DAB = 2\alpha$ . На продолжении отрезка  $AB$  за точку  $A$  отметим точку  $F$  так, что  $AD = AF$  (рис. 10). Тогда треугольник  $AFD$  равнобедренный, и его

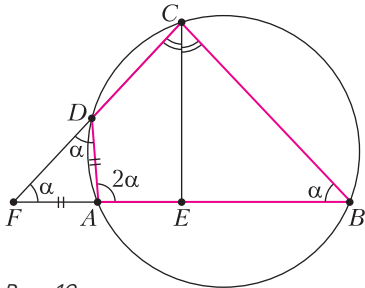


Рис. 10

углы при основании равны. Так как  $\angle FAD = 180^\circ - 2\alpha$ , то  $\angle AFD = \angle ADF = \alpha$ . Поскольку четырехугольник  $ABCD$  – вписанный, то  $\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - \angle ADF$ . Следовательно, точки  $C, D$  и  $F$  лежат на одной прямой. Тогда  $\angle CFB = \alpha = \angle CBF$ , поэтому треугольник  $FCB$  равнобедренный. Значит, его биссектриса  $CE$  совпадает с медианой. Итого,  $BE = EF = AD + AE$ , что и требовалось.

**9.** 50.

*Пример.* Фишку 50 последовательно 99 раз меняем со следующей против часовой стрелки. Получаем требуемое расположение.

*Оценка.* Предположим, что при некотором  $k < 50$  требуемая расстановка получена.

В каждый момент времени считаем покрашенной дугу от фишки 100 до фишки 1 по часовой стрелке. Так как фишки 100 и 1 нельзя поменять за один ход, каждая конкретная фишка  $m$  ( $2 \leq m \leq 99$ ) могла попасть на покрашенную дугу или покинуть покрашенную дугу только путем обмена с одной из фишек 1 или 100.

Поскольку изначально и в конце фишка  $m$  не была на покрашенной дуге, она сделала одина-

ковое количество входов на покрашенную дугу и выходов с покрашенной дуги. При  $m \leq 50$  фишка  $m$  не могла меняться с фишкой 100, поэтому она могла делать вход или выход только путем обмена с фишкой 1. При входе фишка 1 совершает сдвиг на 1 по часовой стрелке, а при выходе – на 1 против часовой стрелки. Проведем аналогичные рассуждения для фишек  $m \geq 51$ , которые не могут меняться с фишкой 1.

Тем самым, мы получаем, что фишки 1 и 100 совершат одинаковый сдвиг по и против часовой стрелки, поэтому они останутся на своих позициях. Противоречие.

11 класс

**3.** Из условия задачи следует, что точки  $A, A', B, B'$  лежат в одной плоскости, поэтому прямые  $BA'$  и  $AB'$  пересекают ребро  $CD$  в одной точке  $X$  (рис. 11). Из условия следует, что эти прямые

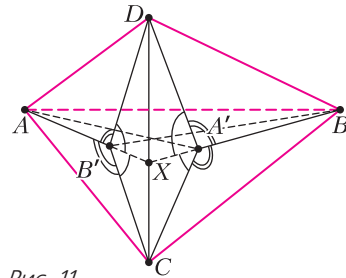


Рис. 11

являются биссектрисами углов  $CA'D, CB'D$  соответственно. Отсюда, по свойству биссектрисы,  $CA' : A'D = CX : XD = CB' : B'D$ , а поскольку  $\angle CA'D = \angle CB'D = 120^\circ$ , треугольники  $CA'D$  и  $CB'D$  подобны. Поскольку  $CD$  – общая сторона этих треугольников, эти треугольники равны. В этих равных треугольниках равны соответствующие высоты из вершин  $A'$  и  $B'$ . Это и требовалось доказать.

**4.** 102.

В решении ниже мы рассматриваем граф дружб, в котором вершины – это люди в компании, а два человека соединены ребром, если они дружат.

Рассмотрим 102 вершины и построим на них следующий граф. Одну вершину  $x$  соединим с тремя другими  $v_1, v_2, v_3$ . Остальные 98 вершин разобьем на пары и соединим вершины в каждой паре. Получился граф с  $98/2 + 3 = 52$  ребрами. При удалении любой вершины удаляется нечетное число ребер, т.е. остается также нечетное число. Поэтому компания, описанная в условии, может состоять из 102 человек.

Осталось показать, что не существует такой компании из 103 человек (тогда и компании из более чем 103 человек тоже быть не может). Предпола-

гаем от противного, что такая компания нашлась. Существует всего  $n = C_{103}^2 = 51 \cdot 103$  способов выбросить две вершины из 103, оставив 101. Прономеруем эти способы числами от 1 до  $n$ . Пусть  $a_i$  – количество ребер на оставшихся 101 вершинах в  $i$ -м способе; по предположению, все числа  $a_i$  нечетны, а значит, нечетна и их сумма  $S$  (поскольку число  $n$  нечетно).

С другой стороны, рассмотрим любое ребро  $uv$ . Это ребро учтено в числе  $a_i$  ровно тогда, когда вершины  $u$  и  $v$  не выброшены в  $i$ -м способе, т.е. когда выброшена какая-то пара из оставшихся 101 вершин. Это происходит в  $k = C_{101}^2 = 50 \cdot 101$  способах. Итак, каждое ребро учтено в  $S$  четное количество  $k$  раз, поэтому  $S$  должно быть четным. Противоречие.

**5.**  $3C_{100}^2 = 14850$ .

Назовем тройку натуральных чисел  $(x, y, z)$ , элементы которой принадлежат  $S$ , *хорошей*, если

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + zx). \quad (*)$$

Таким образом, нам надо найти наибольшее возможное количество хороших троек.

Выясним, когда тройка хорошая. Перепишем  $(*)$  как квадратное уравнение относительно  $x$ :

$$x^2 - 2x(y + z) + (y - z)^2 = 0.$$

Решая его, получаем

$$x = (y + z) \pm 2\sqrt{yz} = (\sqrt{y} \pm \sqrt{z})^2,$$

откуда  $\sqrt{x} = \pm\sqrt{y} \pm \sqrt{z}$ . Иначе говоря, тройка является хорошей тогда и только тогда, когда одно из чисел  $\sqrt{x}$ ,  $\sqrt{y}$  и  $\sqrt{z}$  равно сумме двух других.

Пусть  $s_1 < s_2 < \dots < s_{100}$  – все элементы множества  $S$ . Положим  $t_i = \sqrt{s_i}$ . Оценим количество хороших троек  $(x, y, z)$ , в которых  $z$  – наибольшее число, т.е.  $\sqrt{z} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ . Заметим, что при любых  $1 \leq i < j \leq 100$  есть не более одной такой тройки, в которой  $\sqrt{x} = t_i$  и  $\sqrt{z} = t_j$  (по этим значениям восстанавливается  $\sqrt{y} = \sqrt{z} - \sqrt{x}$ ). Поэтому оцениваемое количество не превосходит количества таких пар чисел  $(i, j)$ , т.е.  $C_{100}^2$ . Аналогично, количества хороших троек, в которых наибольшими являются  $x$  и  $y$ , не превосходят  $C_{100}^2$ . Поэтому общее количество хороших троек не больше  $3C_{100}^2$ .

Эта оценка достигается, если положить  $s_i = i^2$ , т.е.  $t_i = i$ : действительно, тогда при любых  $i < j$  найдется хорошая тройка  $(s_i, s_{j-i}, s_j)$ .

**7.** Не может.

Из условия следует, что  $x, y \geq 1$ , поскольку произведение цифр натурального числа не может быть отрицательным. Следовательно, числа  $n$  и

$n + 1$  не содержат нулей в десятичной записи. Тогда эти числа отличаются лишь последней цифрой, причем у числа  $n + 1$  она больше на один. Таким образом,  $y > x$ . Если  $x - 1 > 0$ , то, рассуждая аналогично, мы получим, что  $y - 1 < x - 1$ , это противоречит доказанному выше. Следовательно,  $x - 1 = 0$ . Тогда  $x = 1$ , и в десятичной записи числа  $n$  все цифры равны 1. Отсюда следует, что в числе  $n + 2$  последняя цифра – двойка, а остальные цифры – единицы, поэтому  $y = 2$ . Значит,  $y - 1 = 1$ , и число  $m$  состоит лишь из единиц. Но тогда число  $m + 1$  не содержит нулей в десятичной записи. Однако произведение его цифр равно нулю, противоречие.

**9.** Обозначим через  $O$  центр окружности, описанной около трапеции  $ABCD$ . Тогда  $\angle COD = 2\angle CAD = \angle PAD + \angle ADP = \angle CPD$  (рис. 12).

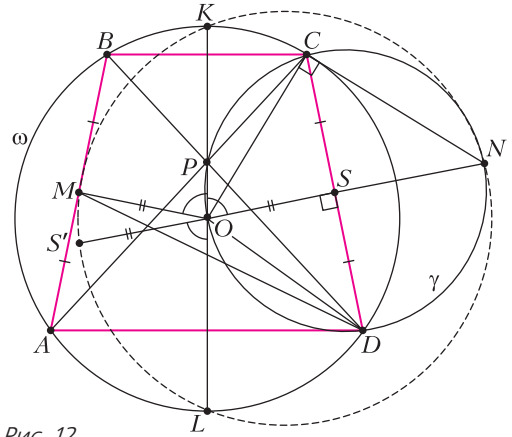


Рис. 12

Здесь мы воспользовались тем, что центральный угол вдвое больше вписанного и что внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, с ним не смежных. Следовательно, точка  $O$  лежит на окружности  $\gamma$ , описанной около треугольника  $CPD$ , и поскольку  $OC = OD$ , то  $O$  – середина дуги  $CPD$ . Тогда отрезок  $ON$  – диаметр окружности  $\gamma$ , а прямая  $ON$  – серединный перпендикуляр к отрезку  $CD$ . В частности, середина отрезка  $CD$ , обозначим ее через  $S$ , лежит на отрезке  $ON$ . Из сказанного выше,  $\angle OCN = 90^\circ = \angle CSN$ . Значит, окружность, описанная около треугольника  $SCN$ , касается прямой  $OC$ , поэтому  $OS \cdot ON = OC^2 = OK \cdot OL$ . Отметим точку  $S'$ , симметричную точке  $S$  относительно точки  $O$ . Тогда  $OK \cdot OL = OS' \cdot ON$ , поэтому точки  $S', K, L, N$  лежат на одной окружности.

Теперь заметим, что точки  $M$  и  $S$  симметричны относительно прямой  $KL$ . Значит,  $OS' = OS = OM$  и  $\angle LOS' = \angle KOS = \angle KOM$ . Таким образом, точки  $M$  и  $S'$  симметричны относительно серединного перпендикуляра к  $KL$ . Следовательно,



но, точки  $K, M, S'$  и  $L$  лежат на одной окружности. Из сказанного выше, на этой окружности лежит также и точка  $N$ , что и требовалось.

10. Заметим, что

$$\frac{a^3}{a^2 + b + c} = a - \frac{a(b+c)}{a^2 + b + c} \geq a - \frac{a(b+c)}{2a\sqrt{b+c}} = a - \frac{\sqrt{b+c}}{2}.$$

Здесь мы оценили знаменатель по неравенству о средних:

$$a^2 + b + c \geq 2a\sqrt{b+c}.$$

Сложим полученное неравенство с тремя аналогичными. Теперь нам достаточно доказать, что

$$a + b + c + d - \frac{\sqrt{a+b}}{2} - \frac{\sqrt{b+c}}{2} - \frac{\sqrt{c+d}}{2} - \frac{\sqrt{d+a}}{2} \geq 4.$$

Поскольку  $a + b + c + d = 8$ , это равносильно неравенству

$$\frac{\sqrt{a+b}}{2} + \frac{\sqrt{b+c}}{2} + \frac{\sqrt{c+d}}{2} + \frac{\sqrt{d+a}}{2} \leq 4.$$

Но из неравенства между средним арифметическим и средним квадратичным мы получаем, что

$$\frac{\sqrt{a+b}}{2} + \frac{\sqrt{c+d}}{2} \leq \sqrt{\frac{(\sqrt{a+b})^2 + (\sqrt{c+d})^2}{2}} = 2$$

и, аналогично,

$$\frac{\sqrt{b+c}}{2} + \frac{\sqrt{d+a}}{2} \leq 2.$$

Складывая эти два неравенства, получаем требуемое.

## Олимпиада «Ломоносов»

### Физика

#### Отборочный этап

7–9 классы

1. Пусть  $\tau$  – все время движения автомобиля,  $s$  – весь пройденный им путь. Тогда из условия задачи вытекает  $\tau = t_1 + t_2 + t_3$ ,  $s = s_1 + s_2 + s_3$ ,  $s_1 = \frac{s}{3}$ ,  $t_2 = \frac{\tau}{3}$ ,  $s_2 + s_3 = \frac{2s}{3}$ ,  $t_1 + t_3 = \frac{2\tau}{3}$ . Учитывая, что  $s_2 = \frac{v_2\tau}{3}$ ,  $s_3 = \frac{2s}{3} - \frac{v_2\tau}{3}$ ,  $t_1 = \frac{s}{3v_1}$  и  $t_3 = \frac{s_3}{v_3}$ , получим

$$v_{\text{ср}} = \frac{2v_3 + v_2}{2 + v_3/v_1}.$$

2. Левый кубик сдвинется с места, когда сила упругости растянутой пружины станет равной по модулю максимальному значению силы трения покоя, т.е. при условии, что  $kx = \mu Mg$ , где  $k$  – коэффициент жесткости пружины,  $x$  – ее растяжение. До тех пор, пока левый кубик остается неподвижным, растяжение пружины совпадает с модулем перемещения правого кубика и чаши.

Масса  $m$  грузика, лежащего на чаше, минимальна, если левый кубик начнет сдвигаться в момент, когда правый кубик остановится. В этом случае изменение потенциальной энергии грузика  $mgx$  расходуется только на работу против сил трения при движении правого кубика и потенциальную энергию деформации пружины:  $mgx = \mu Mgx + \frac{kx^2}{2}$ . В итоге получаем  $m = \frac{3}{2}\mu M$ .

3. Пусть мощность, передаваемая спиралью содержимому калориметра, равна  $N$ . Поскольку в момент включения спирали смесь воды и льда находилась при температуре таяния льда, то  $m_{\text{л}}\lambda = N\tau_1$ . По условию на нагрев образовавшейся и имевшейся в калориметре воды потребовалось время  $\tau_2$ . Следовательно,

$$(m_{\text{л}} + m_{\text{в}})c\Delta t = N\tau_2, \text{ и } n = \frac{m_{\text{в}}}{m_{\text{л}}} = \frac{\tau_2\lambda}{\tau_1 c\Delta t} - 1.$$

4. Поскольку резисторы соединены параллельно,  $I_1 R_1 = I_2 R_2$ . Ток в неразветвленной цепи  $I = I_1 + I_2$ . По закону Джоуля–Ленца,  $N = R_{\text{общ}} I^2$ , где  $R_{\text{общ}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ . Из записанных выражений находим

$$N = \frac{(R_1 + R_2) R_2}{R_1} I_2^2.$$

5. Построим ход луча, падающего на край зеркала (рис. 13). По закону преломления света  $\sin \alpha = n \sin \beta$ , где  $\sin \alpha =$

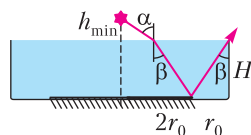


Рис. 13

$= \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + h_{\text{min}}^2}}$ , а  $\sin \beta =$   
 $= \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + H^2}}$ . Отсюда получим

$$h_{\text{min}} = \sqrt{\frac{r_0^2 + H^2}{n^2} - r_0^2}.$$

10–11 классы

1. Скорость первой шайбы перед ударом определяем из законов сохранения механической энергии  $mgh = \frac{mv_0^2}{2}$ . Из законов сохранения импульса и механической энергии определяем скорость второй шайбы:  $v_1 = \frac{4v_0}{3}$  и записываем закон изменения механической энергии второй шайбы:  $\frac{mv_1^2}{4} - \mu \frac{m}{2} gh \operatorname{ctg} \alpha = \frac{m}{2} gh$ . Окончательно получаем  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{9\mu}{7}$ .

2. Брусок сдвинется с места, когда сила натяжения нити  $T$  превысит максимальное значение силы трения покоя между бруском и столом:

$T > \mu Mg$ . По закону Гука,  $T = ky$ , где  $y$  – удлинение пружины. Найдём величину  $y(\tau) = y_0$  в момент времени  $\tau$ . Совместим начало отсчета с нижним концом недеформированной пружины, координатную  $y$  направим вертикально вниз. По второму закону Ньютона для груза имеем  $my'' = mg - ky$  с начальными условиями  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ . Заменой переменных  $\eta = y - \frac{mg}{k}$  приходим к уравнению  $\eta'' + \frac{k}{m}\eta = 0$ , описывающему гармонические колебания с круговой частотой  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . С учетом начальных условий  $\eta(0) = -\frac{mg}{k}$ ,  $\eta'(0) = 0$  решение этого уравнения имеет вид  $\eta(t) = -\frac{mg}{k} \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$ . Переходя вновь к переменной  $y$ , находим  $y_0$  и из уравнения  $\mu Mg = ky_0$  получаем

$$\mu = \frac{m}{M} \left( 1 - \cos \sqrt{\frac{k}{m}} \tau \right).$$

**3.** Изменение внутренней энергии идеального одноатомного газа  $\Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T$ , где  $\nu$  – количество молей газа. Уравнения Менделеева–Клапейрона для начального и конечного состояний газа имеют вид  $pV = \nu RT$ ,  $(p + \Delta p)(V - \Delta V) = \nu R(T + \Delta T)$ . Пренебрегая произведением малых величин  $\Delta p \Delta V$ , из этих уравнений находим  $\nu R \Delta T = V \Delta p - p \Delta V$ . Поскольку газ теплоизолирован,  $p \Delta V = \Delta U$ . Из условий равновесия поршня массой  $M$  в начальном и конечном состояниях:  $pS = Mg + p_0 S$ ,  $(p + \Delta p)S = (M + m)g + p_0 S$ , где  $S$  – площадь поршня,  $p_0$  – атмосферное давление, находим  $\Delta p = \frac{mg}{S} = \frac{mgH}{V}$ . Объединяя записанные выражения, получаем

$$\Delta U = \frac{3}{5} mgH.$$

**4.** Рассмотрим момент времени, когда напряжение на катушке равно  $U$ . Обозначим через  $I_L$ ,  $I_R$  и  $I_r$  силы токов, текущих в этот момент через катушку, резистор и источник соответственно. По закону электромагнитной индукции,  $U = L \frac{\Delta I_L}{\Delta t}$ . По закону Ома для участка цепи с резистором,  $U = I_R R$ , для участка цепи, содержащего ЭДС,  $U = \mathcal{E} - I_r r$ . Поскольку  $I_r = I_L + I_R$ , то  $U = \mathcal{E} - \left( I_L + \frac{U}{R} \right) r$ . Кроме того,  $L \Delta I_L = R I_R \Delta t = R \Delta q$ , где  $\Delta q = I_R \Delta t$  – заряд, протекший через резистор  $R$  за время  $\Delta t$ . Так как до замыкания ключа ток через катушку отсутствовал, то  $L I_L = R q$ . Окончательно получаем

$$U = \frac{R}{R+r} \left( \mathcal{E} - \frac{Rr q}{L} \right).$$

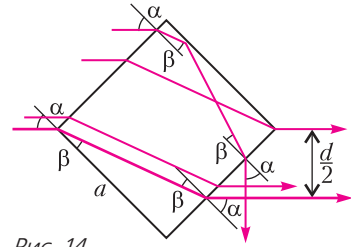


Рис. 14

**5.** Ход лучей, падающих на верхнюю половину кубика, изображен на рисунке 14. Видно, что  $\frac{d}{2} = a(1 - \operatorname{tg} \beta) \sin \alpha$ , или с учетом закона преломления  $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}$ ,  $\frac{d}{2} = a \left( 1 - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right) \sin \alpha$ . Поскольку  $\alpha = 45^\circ$ , то  $d = 2a \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{n^2 - 0,5}} \right) \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

(Окончание следует)

# КВАНТ

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,  
А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,  
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**М.Н.Грицук**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован  
в Комитете РФ по печати.  
Рег. св-во ПИ №ФС77–54256**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,  
«Квант»**

**Тел.: +7 916 168-64-74**

**E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru**

## Отпечатано

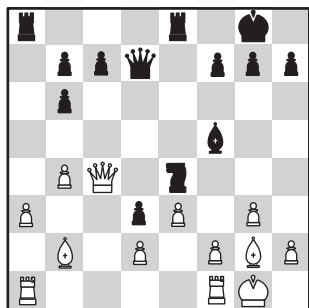
**в соответствии с предоставленными  
материалами  
в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,  
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8  
Тел.: (831) 218-40-40**

## Возвращение В ОФЛАЙН

Первый этап гран-при ФИДЕ в Берлине завершился неожиданной победой Хикару Накамуры, получившего специальное приглашение от организаторов. Американский гроссмейстер, известный как один из сильнейших мировых игроков в быстрые шахматы и блиц, два года не играл «вживую» с классическим контролем и в последнее время специализируется на шахматных стримах. Он регулярно выигрывает престижное интернет-соревнование – «титульный вторник» на chess.com, а недавно стал обладателем биткойна в наиболее представительном турнире в истории на lichess.org. Победа на этапе гран-при ФИДЕ сделала Накамуру фаворитом в борьбе за путевку в турнир претендентов.

**Х.Накамура – А.Есипенко**  
Берлин, 2022

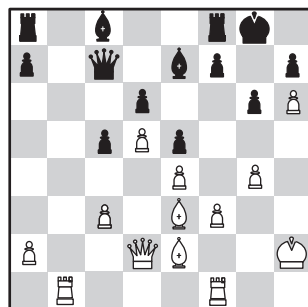
1. c4 e5 2. c3 f6 3. f3 c6 4. g3 d5 5. cd d5 6. g2 c5 7. 0-0 0-0 8. c2 f6 9. a3 d4 10. d4 ed 11. b4 f b6?! Точнее 11... f e7 12. a4 b8 с дальнейшим b6. Ход в партии отдает белым преимущество двух слонов и стратегическую инициативу. 12. a4 f e8 13. b6 ab 14. e3 d3. Сыграно излишне резко, но и альтернатива в виде 14...b5 15. b2 de 16. fe a6 без намеков на контригру не выглядит привлекательной. 15. c3 c4 16. c4 f5 17. b2 d7.



18. f e4! Профессиональный ход, который было бы трудно сделать любителю. Белые разменивают сильного слона на коня, чтобы максимально активизировать ферзя. 18... f e4 19. f3 c6 20. a1 c7 21. f4 f6 22. c4 d8 23. f c1 c e6?! Допускает симпатичную комбинацию, но и после 23...b5 держаться сложно. 24. b5! f b5 25. f e4! (чтобы забрать на c7 с темпом) f7 26. e7 c e7 27. c7 d7 28. c8+ d8 29. f6 gf 30. g4+ f8 (30... h8 31. b4!, и черный ферзь перегружен) 31. d8+ d8 32. b4+ c e7 33. b5 a3 34. f2 c5 35. d3. Белые переходят в выигранный эндшпиль с лишней пешкой и технично реализуют преимущество. 35...b5 36. c3 c e7 37. c2 g7 38. d4 f7 39. g4+ h8 40. b4 c e8 41. d6 f7 42. c5 c e8 43. g4 g7 44. h4 d7 45. h5 g8 46. h6, черные сдались.

**Х.Накамура – А.Гришук**  
Берлин, 2022

1. d4 f6 2. c4 g6 3. c3 g7 4. e4 d6 5. c2 0-0 6. c3. Современная трактовка стариндийской защиты в духе системы Авербаха, о которой рассказывалось в предыдущем номере. 6...e5 7. d5 a6 8. h4 c5 9. c2 c6 10. h5 cd 11. cd a5 12. h6!? В прошлом гроссмейстеры предпочитали открывать линию для атаки. Накамура выбирает план игры на ограничение чернополюсного слона. 12... h8 13. f3 d7 14. b1 a4 15. d2 c3 16. bc c7 17. g4 c8! Техническая перегруппировка. Типичное вскрытие 17... e8 18. h3 f5? в подобной позиции смертельно для черных: 19. gf gf 20. g1+ f7 21. g5. 18. h3 d7 19. f2 f6 20. 0-0 e7 (заслуживало внимание 20... c5 21. d3 a4 22. c4 b6, завязывая борьбу на ферзевом фланге) 21. h2 c5 22. d3 b6 23. c5 bc.



24. f4! ef 25. f4 d7 26. c4?! (точнее 26. g5, не допуская слона на f6) 26... ab8? Серьезная ошибка, необходимо 26... f6!, занимая большую диагональ. Теперь же она переходит под контроль белых. 27. c3! f6 28. b3 b6 29. g5 f7 30. c1! Перевод слона на большую диагональ решает исход партии. 30... d8 31. b2 f8 32. c2 d8 33. f3 c8 34. c3 b3 35. ab fg 36. c3 f1 37. h8+ f7 38. h7+ c8 39. g6+! (обходя последнюю нехитрую ловушку черных: 39. f1? h3+!) e7 40. g5+ f6 41. h7 d7 42. g8, и так как пешку не остановить, черные сдались.

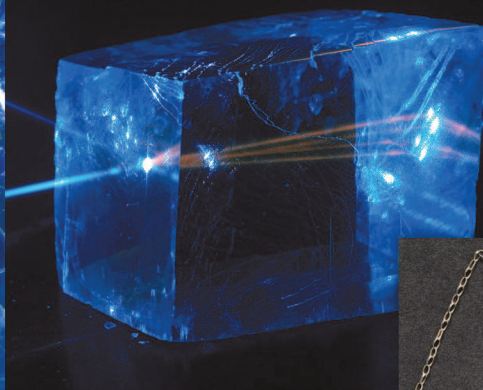
*А.Русанов*

Чем интересен кристалл исландского шпата?



*Продукты с физикой*

ДВОЙНОЕ ЛУЧПРЕЛОМЛЕНИЕ



(ПОДРОБНЕЕ – НА С. 33 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)

ISSN 0130-2221 22003



9 770130 222221