ЯНВАРЬ / ФЕВРАЛЬ

ISSN 0130-2221

2015 • №1

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

310 лет первому российскому математическому плакату

(Продолжение – на с. 12 внутри журнала)

КВАНТ

ЯНВАРЬ ФЕВРАЛЬ 2015 № 1

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Два графа

Е.СОКОЛОВ

Граф Лев Николаевич Толстой в своей повести «Хаджи-Мурат» так описывает летнее российское разнотравье:

«Есть прелестный подбор цветов этого времени года: красные, белые, розовые, душистые, пушистые кашки; наглые маргаритки; молочно-белые с ярко-желтой серединой «любишь-не-любишь» с своей прелой пряной вонью; желтая сурепка с своим медовом запахом; высоко стоящие лиловые и белые тюльпановидные колокольчики; ползучие горошки; желтые, красные, розовые, лиловые, аккуратные скабиозы; с чуть розовым пухом и чуть слышным приятым запахом подорожник; васильки, ярко-синие и голубые на солнце и в молодости и краснеющие вечером и под старость...»

Во всех музеях мира мы встретим натюрморты с цветами

– Как так? Разве васильки бывают красными? – удивился я, откладывая книгу. – Да, нет! Красных васильков не бывает!

Однако я был не прав – красные васильки есть! Пришло лето, и в музее-усадьбе «Ясная поляна», где жил и творил великий писатель, я нашел их среди ярко синих полевых васильков. Лев Николаевич был прав!

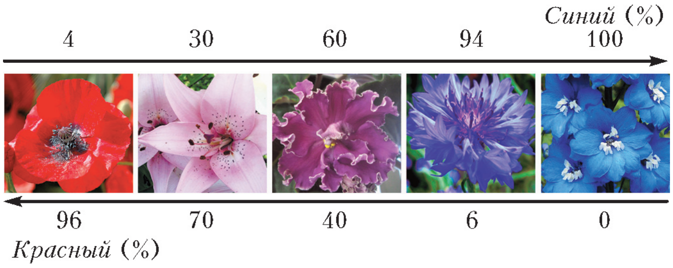
Как рождается цвет

Мир дан нам в цвете. Физика так объясняет появление цвета.

Приходящий к нам от Солнца свет – белый. Мы даже иногда говорим бесцветный. Но эта бесцветность кажущаяся. На самом деле, солнечный свет – это смесь семи ярчайших цветов, семи цветов радуги. Вы помните их названия? Если нет, то вам поможет фраза: «Каждый Охотник Желает Знать, Где Сидит Фазан». Буква К –

В «Ясной поляне» у Льва Николаевича всегда много цветов это красный цвет, О – оранжевый, Ж – желтый, З – … (продолжите этот ряд самостоятельно).

– А где в этом ряду черный цвет? А где пурпурный, малиновый, салатный и все те тысячи оттенков, которые наш глаз различает в повседневной жизни?



Вы не замечали, что в красном всегда есть немного синего?

– Все цвета, которые мы видим вокруг, возникают при смешении семи чистых цветов. Так, линия «алый-пурпурный-лиловый-синий», широко представленная в окраске цветов, соответствует смешению в разных пропорциях красного и синего цвета. А вот черный цвет – это отсутствие света вообще. Так, например, сажа черна именно потому, что поглощает все, что на нее падает.

Упражнение 1. Почему нам всегда видятся черными зрачок глаза и дырочки в розетке? Почему если на покрашенной поверхности есть глубокая ямка, то, как ни заливай ее краской, она всегда будет видна нам как черное пятно?

Упражнение 2. А из каких цветов состоит серый цвет?

Итак, приходящий к нам от Солнца свет не имеет цвета. Цвет появляется у него лишь после взаимодействия с веществом. Разные молекулы поглощают разные цвета солнечного света. Поэтому после отражения или прохождения света через вещество в нем остаются только те цвета, которые молекулы отказалась «есть». При соприкосновении с веществом свет становится окрашенным. Если вещество, входящее в состав краски, поглощает все, кроме красного, цвета, то мячик, покрашенный такой краской, на свету будет казаться нам красным, и такую краску, конечно, назовут красной.

Упражнение 3. А каким мы будем видеть этот мячик, при освещении его синим светом?

А если молекулы поглощают шесть цветов из семи: красный, оранжевый, желтый, голубой, синий, фиолетовый, то такую краску назовут…

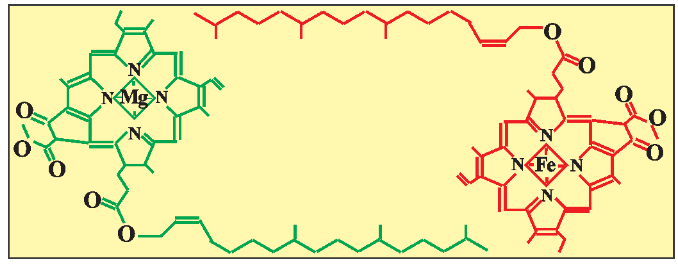
– Конечно, зеленой!

А вот вопрос посложнее.

Упражнение 4. Как назовут краску, которая поглощает пять цветов из семи: красный, оранжевый, зеленый, голубой и фиолетовый?

Краски Природы

Молекулы, которые Природа использует в качестве красок, называются пигментами. Самый заметный пигмент на нашей планете – это, несомненно, $C_{55}H_{72}O_5N_4Mg$, т.е. *хлорофилл* (от греч. «зеленый» и «лист»). Живой организм, имеющий такие молекулы, мы называем растением.



Это не китайские драконы, а две главные молекулы растительного и животного царств – хлорофилл и гем

Атом магния, который находится в центре чудесного кружева из атомов углерода, азота и водорода, поглощает весь падающий свет, кроме зеленого. Этот, оставшийся «несъеденным», отраженный зеленый свет и придает лесам и полям их изумрудный цвет. А сама же молекула хлорофилла после поглощения света приобретает волшебную способность – она начинает синтезировать углеводы из углекислого газа и воды:

$$CO_2 + H_2O \rightarrow (CH_2O)_n + O_2 .$$

Благодаря этой постоянно идущей реакции, на Земле поддерживается жизнь.

Если в молекуле хлорофилла атом магния заменить атомом железа, то измененная молекула будет поглощать все цвета, кроме красного. Такую молекулу химики называют *«гем»* (от греч. «кровь»). Она является главной частью молекулы гемоглобина (от греч. «кровь» и лат. «шар»), которую организм животных, обладающих кровообращением, использует для транспортировки кислорода. Именно эта молекула придает красный цвет крови животных.

– Так что же, самые главные молекулы растительного и животного царства близнецы-сестры?

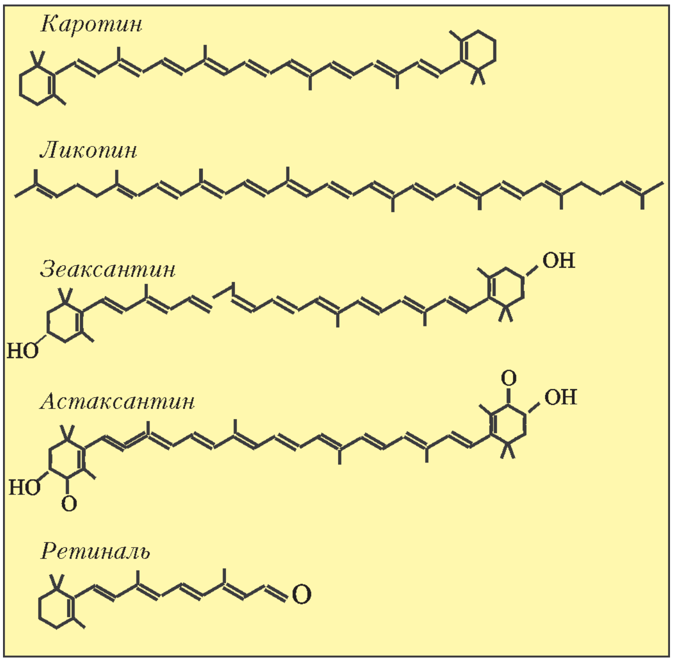
– Да, это так! И даже виноградная улитка (Helix pomatia), у которой аристократическая голубая кровь, оригинальна лишь в одном – вместо магния и железа в ее молекуле гемоглобина – медь.

Упражнение 5. Какие цвета поглощает гемоглобин (точнее, гемоцианин) виноградной улитки ?

Заканчивается лето, и наступает «золотая» осень. Хлорофилл распадается, и главными поставщиками красок Природы становятся *каротин* и *ликопин*.

Молекула каротина (от лат. «морковь») $C_{40}H_{56}$ представляет собой длинную цепочку атомов углерода и водорода (углеводородов), которая заканчивается двумя бензольными кольцами. Такая конструкция очень хорошо поглощает весь свет, кроме желтого. Поэтому морковь, хурма и плоды манго, содержащие много каротина, имеют красивый желто-оранжевый цвет.

«Углеводородный» скелет молекулы каротина очень стабилен. Но вот ее концы, бензольные кольца, могут изменяться, реагируя на химическое окружение. При этом изменяются и «вкусы» молекулы – она начинает «есть» уже другие цвета, и предметы, содержащие такие модифицированные молекулы, приобретают новую окраску. Например, если бензольные кольца раскроются, то модифицированная молекула вместо жел-



Коллекция пигментов-каротиноидов

того будет оставлять «несъеденным» красный свет. Вот почему спелые помидоры, при созревании которых происходят именно такие изменения в структуре каротина, имеют красный свет. Химики называют такую

Продукты, окрашенные каротиноидами, не только полезны, но и приятны на вид

модифицированную молекулу каротина ликопином. Свои собственные названия получили у них и другие модификации каротина – зеаксантин $C_{40}H_{56}O_2$ и астаксантин $C_{40}H_{52}O_4$. Первый придает желтый цвет кукурузе, яичному желтку и апельсину, а второй отвечает за розово-красный цвет вареных раков и креветок.

Природа – непревзойденный изобретатель. Она имеет в своем распоряжении миллионы молекул-красителей, но, даже используя всего-навсего одну конструкцию, она способна раскрасить наш мир сотнями цветов!

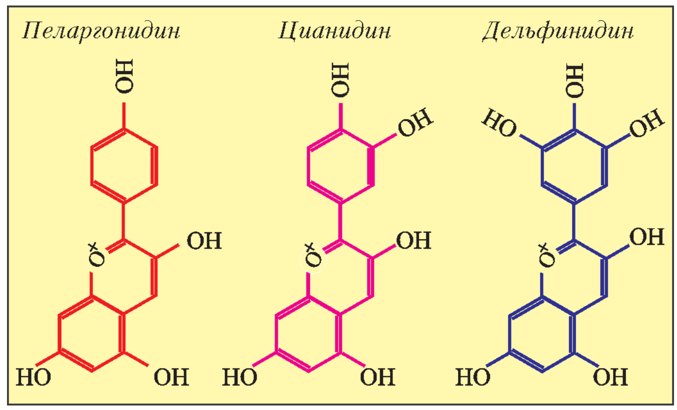
А самое удивительное, что конструкцию типа «каротин» Природа использовала и для создания нашего цветового зрения!

Вот как современная наука объясняет механизм зрения. Главной светочувствительной молекулой у всех позвоночных (люди, звери, птицы...), а также у осьминога является молекула ретиналя $C_{20}H_{28}O$. Вы узнали ее? Это разделенная пополам молекула каротина, к которой присоединен атом кислорода. С помощью атома кислорода молекула ретиналя соединяется с белком и образует светочувствительное вещество нашего глаза – зрительный пурпур, или родопсин. При поглощении света ретиналем сигнал об этом воспринимается зрительным нервом: мы видим свет. В зависимости от сорта белка, который присоединился к молекуле ретиналя, родопсин будет чувствителен к разным цветам. В нормальном глазе человека есть три типа родопсина: один воспринимает красный, другой – зеленый и третий – синий цвет. В организме человека ретиналь производится с помощью деления молекулы каротина. И если поступление каротина (он еще называется витамином А) в организм прекращается, то люди начинают страдать «куриной слепотой» – плохо видят в темноте.

Упражнение 6. Предложите простой способ восстановления зрения в этом случае.

Краска для цветов

Для цветов Природа приготовила особые краски – антоцианиды (от греч. «цветок»). Эта группа состоит из трех молекул: пеларгонидина $C_{15}H_{11}O_5$, цианидина



Антоцианы – специальные «краски» для цветов

$C_{15}H_{11}O_6$ и дельфинидина $C_{15}H_{11}O_7$. Пеларгонидин поглощает все, кроме красного, цвета. Поэтому он дает алую окраску. Свое название этот пигмент получил от латинского названия герани (Pelargonium), из которой был первоначально выделен. Дельфинидин поглощает все, кроме синего, цвета и дает синюю окраску. Первоначально дельфинидин был выделен из растения живокость. Поэтому в его имени закрепилось латинское название живокости – дельфиниум (Delphinium). Цианидин (от лат. «голубой») определяет окраску черной смородины, ежевики, вишни. Натуралисты определяют цвет цианидина как фиолетовый. И здесь они повторяют распространенную ошибку!

В быту название «фиолетовый» мы обычно используем неправильно. Мы называем этим словом цвет, который получается при смешении красной и синей красок. Например, мы называем фиолетовыми чернила, которые получаются при смешении красных и синих чернил. Это привычно, но неправильно. Поэтому давайте в нашем разговоре о молекулах использовать правильные термины и говорить, что цианидин имеет красно-синий цвет.

Отметим, что настоящий фиолетовый цвет мы видим в природе очень редко. Не потому, что его мало, как раз его в природе очень даже много, а просто потому, что этот цвет лежит на границе нашего восприятия и мы, в отличие от пчел, не замечаем его в окраске цветов.

Настоящий фиолетовый цвет иногда можно увидеть как очень красивый фиолетовый отлив черного оперения грача. Но это пример второго способа окраски, который использует Природа, – структурной окраски. Структурная окраска возникает за счет интерференции света при отражении от поверхностей с микроструктурой (крылья насекомых, перья птиц, раковины моллюсков), а также при рассеянии света в объеме вещества (цвет нашего голубого неба).

Примеры структурной окраски в художественных миниатюрах

Упражнение 7. Ученые научились выделять красящие пигменты из растений, а вот выделить те замечательные краски, которые окрашивают крылья некоторых тропических бабочек, у них не получилось, хотя многие пытались это сделать. В чем причина их неудачи?

Итак, пеларгонидин поглощает все, кроме красного, цвета, дельфинидин – все, кроме синего, а цианидин – оставляет «непоглощенными» красный и синий цвета. Теперь становится понятным, почему мак красный, а василек синий: в маке содержится пеларгонидин, а в васильке – дельфинидин. Остается непонятным одно – откуда синий василек берет алый пеларгонидин, чтобы покраснеть? Разгадать эту загадку нам помогут абстрактное мышление и физические принципы.

Взглянем еще раз на рисунок с антоцианами. Что перед нами? Можно, следуя традиции, сказать: «Три молекулы». А можно сказать иначе: «Это одна система атомов, находящаяся в трех разных состояниях». Правильный ход! Назовем нашу систему атомов «супермолекулой», а ее состояния – «нейтральным» (цианидин), «водородным» (пеларгонидин) и «гидроксильным» (дельфинидин). Если бы наша супермолекула жила изолированно, то ее состояние оставалось бы все время неизменным. Но в живых организмах она находится в водяном растворе. А в водяном растворе всегда присутствуют химически активные части молекул воды – атом водорода H и гидроксильная группа OH. Состояние (и цвет) нашей супермолекулы изменяется тогда, когда этим блуждающим частицам удастся сменить своих «антиподов» в химических связях.

Вы ухватили главное? В васильке уже есть супермолекулы! Только они находятся в «гидроксильном» состоянии. Чтобы они покраснели, их нужно перевести в «водородное» состояние. Выяснить, как это можно сделать, нам поможет принцип Ле Шателье: *в устойчивых системах под действием внешнего воздействия происходят такие изменения, которые стремятся конпенсировать результаты внешнего воздействия.*

В применении к нашей ситуации этот принцип работает так. Представим, что мы («внешнее воздействие») добавляем в раствор, в котором находится наша супермолекула, дополнительное количество атомов водорода (химики скажут – мы увеличиваем кислотность среды). Тогда наша молекула, согласно принципу Ле Шателье, будет пытаться хоть как-нибудь скомпенсировать это увеличение. Сделать это она может только одним способом – отдать в раствор свою гидроксильную группу и присоединить к себе атом водорода. Одним атомом водорода в растворе станет меньше (правильнее сказать: двумя, поскольку освободившаяся гидросильная группа свяжет еще одид атом водорода, образовав молекулу воды), частичная компенсация произошла! Итак, в кислом растворе наша супермолекула переходит в «водородное» состояние и окрашивает раствор в красный цвет.

Упражнение 8. Смешайте варенье из черной смородины с уксусом или лимонным соком (эти оба ингредиента являются кислотами). Понаблюдайте за изменением окраски варенья.

При добавлении в раствор гидроксильных групп (химики скажут – раствор становится щелочным) молекула пожертвует одним атомом водорода и на освободившееся место присоединит группу OH. Так она внесет свой маленький вклад в компенсацию внешнего воздействия, а мы сразу увидим это – раствор станет синим!

Упражнение 9. Смешайте варенье из черной смородины (растерев его) с раствором питьевой соды (раствор соды является щелочным раствором). Понаблюдайте за изменением окраски варенья.

Гортензия меняет цвет своих цветов в зависимости от кислотности полива. По-видимому, ее сок совсем нейтральный, что позволяет легко переводить нашу супермолекулу в разные состояния

Итак, объяснение механизма работы «красно-синей» линии окраски растений построено. Наша супермолекула изменяет свою красно-синюю окраску в зависимости от кислотности сока растения. В кислотной среде (мак, герань, роза) она отдает в раствор гидросильную группу и на ее место присоединяет атом водорода. При этом она становится красной. В щелочной среде (василек, дельфиниум, незабудка) она на место водорода присоединяет к себе гидроксильную группу и становится синей. Поэтому, согласно нашей теории, синий василек начинает краснеть тогда, когда за счет каких-то причин начинает увеличиваться кислотность его сока. Василек становится сначала сине-красным, а затем – полностью красным.

В доказательство правильности нашей теории мы проделали следующий опыт. Алые лепестки розы мы поместили в раствор питьевой соды (щелочной раствор), а синие цветки василька – в раствор уксуса (кислотный раствор). Произошло то, что и предсказывает наша теория, – окраска лепестков поменялась.

Упражнение 10. Природные пигменты, в том числе и сок васильков, всегда использовались в пищевой промышленности для окраски продуктов. Поясните суть старинного рецепта, который непосвященному кажется абсурдным: «Для придания шампанскому розового оттенка добавить ложку сока синего василька в десятиведерную бочку отбродившего виноградного сока...»

Лондонское Королевское общество

Один из несомненных плюсов научной работы – участие в научных конференциях. Их всегда стараются проводить в самых интересных местах, что позволяет совместить полезное с приятным. Если место проведения конференции – Лондон, то будьте уверены, что вас ждет экскурсия по маршруту «Букингемский дворец – Вестминстерское аббатство – Парламент – Трафальгарская площадь – Национальная галерея – Тауэр». На пути экскурсии находится здание Королевского общества (The Royal Society). Королевское общество – это английская академия наук, первая в мире академия, основанная в 1662 году.

При академии есть музей «Центр истории науки», в котором хранятся архивы сэра Исаака Ньютона, научные инструменты сэра Генри Кавендиша и даже квадрант сэра Френсиса Дрейка – первого англичанина, совершившего кругосветное путешествие. Но мой взгляд всегда останавливается на небольшом кусочке бумаги розового цвета. Это – лакмусовая бумага, то, с чего для всех нас в школе начиналась химия. Не знаю как вас, но меня всегда чрезвычайно интересовал вопрос о том, как делают эту волшебную бумагу. Сегодня я знаю ответ на этот вопрос и хочу поделиться им с вами.

В этом музее царит дух семнадцатого века

Изобретатель лакмуса – Роберт Бойль (1627–1691). Сэр Роберт Бойль был совершенно необычным человеком. Тринадцатый ребенок Ричарда Бойля, графа Коркского, он уже в возрасте восьми лет стал студентом Итонского университета. К тридцати годам он становится известным в Европе ученым-энциклопедистом. Он – и философ, и физик, и химик, и богослов, и поэт. Его самые известные открытия и изобретения – это лакмусовая бумага, современные чернила, откачивающий насос, получение вакуума, наблюдение холодного кипения, создание аналитической химии, анализ минеральных вод, получение белого фосфора, открытие газового закона. Он – инициатор создания и президент Лондонского Королевского общества, директор Ост-Индской торговой компании, меценат (весь свой капитал Бойль завещал на развитие науки в Англии).

Бойль проводит и оптические исследования, в частности – изучает вопрос о появлении цвета в природе. Он формирует те понятия, которые сегодня нам кажутся простыми и понятными, но которые в его время были крайне революционными. Заметив зависимость цвета сока растений от кислотности среды, он создает первый химический прибор – индикатор кислотности среды. Для этого он пропитывает полоску бумаги сине-красным соком лакмусова лишайника. Так появилась первая лакмусовая бумага. Это был первый шаг от древней алхимии к современной химической науке.

Места, связанные с именем Роберта Бойля: Замок Лисмор, Итон, Оксфорд, Лондон

И сделал этот шаг ГРАФ РОБЕРТ БОЙЛЬ.

Диаграммы Юнга и q-комбинаторика

Е.СМИРНОВ

Гауссовы биномиальные коэффициенты

Рассмотрим невозрастающую последовательность натуральных чисел $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k$. Сопоставим ей картинку на клетчатой бумаге: в первой строке картинки расположим λ_1 квадратиков, во второй – λ_2, и так далее, так, чтобы все строки были бы выровнены по левому краю. Получившуюся картинку назовем *диаграммой Юнга*, отвечающей последовательности $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. В качестве примера на рисунке 1 изображена диаграмма Юнга, отвечающая последовательности $(6, 4, 4, 2)$.

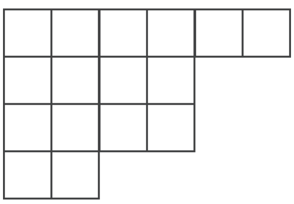


Рис. 1

Зафиксируем два натуральных числа, n и m, и рассмотрим прямоугольник размера $n \times m$ клеток и все диаграммы Юнга, которые можно вписать в этот прямоугольник (мы считаем, что левый верхний угол диаграммы совпадает с левым верхним углом прямоугольника). Они будут отвечать последовательностям $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k$, для которых $k \leq n$, а $\lambda_1 \leq m$.

Пример 1. Пусть $m = n = 2$. Тогда таких диаграмм шесть (рис.2).

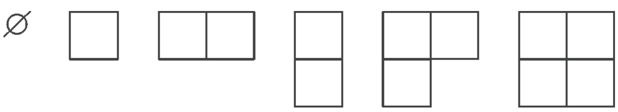


Рис. 2

(Отметим, что пустую диаграмму мы тоже считаем диаграммой Юнга, состоящей из нуля клеточек.)

Найти число диаграмм Юнга, вписанных в прямоугольник $n \times m$, – это простая задача по комбинаторике. Действительно, каждая диаграмма ограничена снизу и слева путем, который соединяет левый нижний угол прямоугольника с правым верхним. Каждый такой путь состоит из $m + n$ звеньев, причем ровно m из них горизонтальны, а n вертикальны. Значит, число таких путей равно числу способов указать, какие из $m + n$ звеньев будут горизонтальными, т.е. числу сочетаний $\binom{m+n}{m}$ (в этой статье мы будем использовать именно такое обозначение, а не, возможно, более привычное читателю C_{m+n}^m). На рисунке 3 изображен пример диаграммы Юнга, вписанной в прямоугольник размера 5×6.

Теперь рассмотрим следующий, более сложный вопрос. Сколько существует диаграмм, вписанных в прямоугольник $n \times m$ и состоящих из заданного числа квадратиков – это число еще называется *весом* диаграммы? Обозначим число диаграмм веса k через a_k (при этом мы считаем m и n фиксированными). Пока что мы можем сказать про эти числа немногое. Во-первых, $a_0 = a_{mn} = 1$ (в прямоугольнике существует только одна диаграмма из нуля квадратиков и одна – из mn, т.е. весь прямоугольник). Во-вторых, как мы видели только что, $a_0 + a_1 + \ldots + a_{mn} = \binom{m+n}{m}$: общее число всех диаграмм в прямоугольнике равно числу сочетаний из $m + n$ элементов по m. Также ясно, что при всех k в пределах от 0 до mn значения a_k будут положительны – но как они себя ведут и как их вычислить, не вполне ясно. Дальнейшая наша задача будет состоять в изучении последовательности $a_0, \ldots, a_{mn}$.

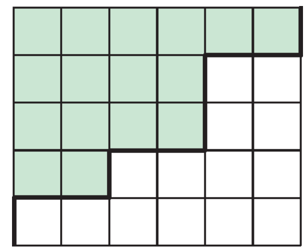


Рис. 3. Путь на клетчатой бумаге, отвечающий диаграмме Юнга

Для работы с последовательностями в комбинаторике часто применяется такой полезный инструмент, как производящие функции. А именно, если у нас есть какая-либо последовательность $(b_0, b_1, \ldots, b_m, \ldots)$, конечная или бесконечная, мы можем рассмотреть следующую сумму, зависящую от переменной q:

$$B(q) = b_0 + b_1 q + b_2 q^2 + \ldots + b_m q^m + \ldots$$

Эта сумма называется *производящей функцией* последовательности b_m. Если последовательность конечна, то это выражение является многочленом от переменной q; если же она бесконечна, то это уже будет не многочлен, а *степенной ряд*. Зачастую изучение производящей функции последовательности позволяет получить какие-то новые сведения о самой последовательности; подробнее об этом можно прочесть, например, в книгах С.К.Ландо «Лекции о производящих функциях» (МЦНМО, 2002) и «Введение в дискретную математику» (МЦНМО, 2012).

Вернемся к последовательности a_k (напомним, что она зависит не только от веса диаграммы k, но еще и от размеров прямоугольника, т.е. от m и n). Рассмотрим ее производящую функцию, которую мы будем обозначать несколько необычным образом – через $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}_q$:

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}_q = \sum_{k=0}^{mn} a_k q^k .$$

Это многочлен степени mn.

Пример 2. Несложно вычислить многочлен $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}_q$ при $m = 1$: он равен

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}_q = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n ,$$

т.е. это сумма геометрической прогрессии со знаменателем q.

Пример 3. Пример 1 показывает, что $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_q = 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4$.

Многочлен $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}_q$ (иногда мы будем опускать индекс q и писать просто $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}$) называется *гауссовым биномиальным коэффициентом*, или *q-биномиальным коэффициентом*. Причина такого названия проста: если вычислить его значение при $q = 1$, мы получим сумму всех его коэффициентов – т.е. как раз обычный биномиальный коэффициент $\binom{m+n}{m}$. Далее мы выясним, что эти многочлены обладают рядом свойств, которые очень похожи на свойства обычных биномиальных коэффициентов.

Треугольник Паскаля

Обычные биномиальные коэффициенты удобно представлять в виде треугольника Паскаля – треугольной таблицы, каждый элемент которой равен сумме двух стоящих над ним элементов (рис.4). Это выражается хорошо известным равенством

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \end{array}$$

Рис. 4. Треугольник Паскаля

$$\binom{m+n}{m} = \binom{m+n-1}{m-1} + \binom{m+n-1}{m}.$$

Запишем такой же треугольник, в котором теперь будут стоять q-биномиальные коэффициенты. Выпишем первые его несколько строк – например, при $m + n \le 4$. Мы получим следующую таблицу (рис.5):

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \qquad 1 \\ 1 \qquad 1+q \qquad 1 \\ 1 \qquad 1+q+q^2 \qquad 1+q+q^2 \qquad 1 \\ 1 \qquad 1+q+q^2+q^3 \qquad 1+q+2q^2+q^3+q^4 \qquad 1+q+q^2+q^3 \qquad 1 \end{array}$$

Рис. 5. q-треугольник Паскаля

При этом, как и для обычных биномиальных коэффициентов, по краям нашей таблицы стоят единицы, т.е. $\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} = 1$.

Упражнение 1. Докажите, что q-треугольник Паскаля симметричен:

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix}.$$

Из нашего q-треугольника Паскаля видно, что q-биномиальный коэффициент уже не является суммой двух коэффициентов, стоящих над ним, т.е.

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} \ne \begin{bmatrix} m+n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m+n-1 \\ m \end{bmatrix}$$

(хотя бы потому, что левая и правая части имеют разную степень как многочлены от q).

Однако можно заметить, что рекуррентное соотношение все же имеет место, только выглядит немного иначе: так, каждый элемент таблицы получается как сумма элемента сверху-слева от него и элемента сверху-справа, *домноженного на некоторую степень переменной* q. Так, скажем,

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + q\left(1 + q + q^2\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + q\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

а

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \left(1 + q + q^2\right) + q^2\left(1 + q + q^2\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + q^2\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно подметить и общее правило, оно выглядит так:

Предложение 1.

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + q^m\begin{bmatrix} m+n-1 \\ m \end{bmatrix}. \qquad (*)$$

Доказательство. Как уже было сказано, подстановка $q = 1$ превращает это равенство в равенство с участием обычных биномиальных коэффициентов:

$$\binom{m+n}{m} = \binom{m+n-1}{m-1} + \binom{m+n-1}{m}. \qquad (**)$$

Приведем сначала доказательство этого равенства, использующее определение биномиального коэффициента как числа диаграмм Юнга, а потом модифицируем его так, чтобы получилось равенство (*).

Будем вести индукцию по $m + n$. База очевидна; докажем индуктивный переход. Рассмотрим произвольную диаграмму Юнга, вписанную в прямоугольник $m \times n$. Она ограничена снизу некоторой ломаной; посмотрим на ее первое звено. Оно может быть либо вертикальным, и тогда оставшаяся часть ломаной ограничивает диаграмму Юнга в прямоугольнике размера $(m-1)\times n$, изображенном на рисунке 6 слева красным цветом; либо горизонтальным – и тогда оставшаяся часть ломаной задает диаграмму в прямоугольнике размера $m \times (n-1)$, который обведен на рисунке 6 справа синей линией. Таким образом, общее количество диаграмм Юнга равно суммарному

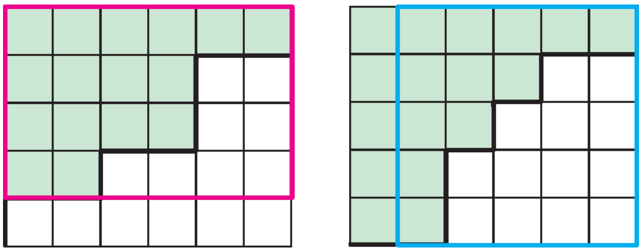


Рис. 6. Два типа диаграмм Юнга

количеству диаграмм Юнга внутри красного и синего прямоугольников. Согласно предположению индукции, диаграмм первого типа будет $\binom{m+n-1}{m}$, а диаграмм второго типа – $\binom{m+n-1}{m}$. Равенство $(**)$ доказано.

Что меняется, когда мы переходим от обычных биномиальных коэффициентов к q-биномиальным? Теперь нас интересует не просто количество всех диаграмм Юнга, а количество диаграмм каждого веса по отдельности. Попробуем проследить за этим.

Итак, пусть первое звено диаграммы вертикально. Тогда пересечение нашей диаграммы и красного прямоугольника есть диаграмма *того же самого веса*, что и исходная, – значит, суммарный вклад в производящую функцию, который дадут диаграммы первого типа, равен в точности $\begin{bmatrix} m+n \\ m-1 \end{bmatrix}$. Напротив, если первое звено горизонтально, то внутри синего прямоугольника будет лежать вся диаграмма, кроме первого столбца, который имеет высоту m, – тем самым, вес всей диаграммы будет на m больше, чем вес диаграммы внутри синего прямоугольника. Поэтому вклад всех диаграмм второго типа будет в q^m раз больше, чем q-биномиальный коэффициент, «считающий» диаграммы в синем прямоугольнике, т.е. будет равняться $q^m\begin{bmatrix} m+n-1 \\ m \end{bmatrix}$. Сложив эти два выражения, получаем требуемую производящую функцию.

Явная формула для гауссовых биномиальных коэффициентов и q–бином Ньютона

Биномиальные коэффициенты зачастую бывает удобнее вычислять не при помощи рекуррентного соотношения, а по явной формуле:

$$\binom{m+n}{m} = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m} = \frac{(m+n)!}{m!\cdot n!}.$$

Оказывается, что ее аналог существует и для q-биномиальных коэффициентов, и доказательство его лишь незначительно сложнее. Для того чтобы вывести эту явную формулу, определим сперва понятие q-аналога натурального числа.

Всякое натуральное число n встречается в треугольнике Паскаля: $n = \binom{n}{1}$. Условимся, что q-аналогом натурального числа n является многочлен от q, равный $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$. Обозначим этот многочлен через $[n]_q$ (иногда, следуя нашему стандартному соглашению, мы будем писать просто $[n]$). Таким образом, q-аналог натурального числа n – это сумма первых n членов геометрической прогрессии со знаменателем q и начальным членом 1:

$$[n]_q = 1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Обратите внимание, что суммирование ведется до $n-1$, а не до n. Однако при подстановке $q = 1$ многочлен $[n]_q$ становится равным в точности n.

Упражнение 2. Докажите, что для любых натуральных n и m имеют место равенства

$$[m+n]_q = [m]_q + q^m[n]_q = [n]_q + q^n[m]_q.$$

Из этого упражнения и полученного нами выше рекуррентного соотношения нетрудно вывести и явную формулу для q-биномиальных коэффициентов:

Предложение 2. *Имеет место формула*

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \frac{[n+1]\cdot[n+2]\cdot\ldots\cdot[n+m]}{[1]\cdot[2]\cdot\ldots\cdot[m]}.$$

Доказательство. Докажем это равенство по индукции по $m+n$. *База индукции*: при $m+n=1$ равенство очевидно.

Переход. Запишем для $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}$ равенство из предложения 2 и воспользуемся для $\begin{bmatrix} m+n-1 \\ m-1 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} m+n-1 \\ m \end{bmatrix}$ предположением индукции:

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + q^m\begin{bmatrix} m+n-1 \\ m \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{[n+1]\cdot\ldots\cdot[n+m-1]}{[1]\cdot\ldots\cdot[m-1]} + q^m\frac{[n]\cdot\ldots\cdot[n+m-1]}{[1]\cdot\ldots\cdot[m]}.$$

Вынеся за скобку множитель, общий для обеих дробей, получим

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \frac{[n+1]\cdot\ldots\cdot[n+m-1]}{[1]\cdot\ldots\cdot[m-1]}\left(1+q^m\frac{[n]}{[m]}\right).$$

Теперь осталось преобразовать выражение в скобках и воспользоваться результатом упражнения 2:

$$1+q^m\frac{[n]}{[m]} = \frac{[m]+q^m[n]}{[m]} = \frac{[m+n]}{[m]}.$$

Тем самым, мы получаем требуемое:

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \frac{[n+1]\cdot\ldots\cdot[n+m-1]}{[1]\cdot\ldots\cdot[m-1]}\cdot\frac{[m+n]}{[m]}.$$

Это равенство, как и в случае «обычных» биномиальных коэффициентов, можно переписать в более красивом виде, если ввести понятие q-факториала. Обычный факториал числа n определяется как произведение всех натуральных чисел от 1 до n (при этом мы считаем, что $0! = 1$). Точно так же можно определить и q-факториал:

$$[n]! = [1]\cdot[2]\cdot\ldots\cdot[n].$$

Как и прежде, мы полагаем $[0]! = 1$. В соответствии с нашим общим принципом, значение многочлена $[n]!$ при $q = 1$ равняется «обычному» факториалу числа n.

Умножив числитель и знаменатель правой части равенства из предложения 2 на $[n]!$, получим еще один вариант явной формулы для q-биномиального коэффициента:

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \frac{[m+n]!}{[m]!\cdot[n]!}.$$

Отсюда, в частности, получается «комбинаторное» доказательство того факта, что $[m+n]!$ делится на $[m]!\cdot[n]!$ без остатка как многочлен от q – отметим, что из явного вида формул для q-факториалов это вовсе не очевидно.

Биномиальные коэффициенты, как следует из самого их названия, возникают в *биноме Ньютона* – в равенстве $(1+x)^n = \sum\binom{n}{k}x^k$. У этого равенства тоже имеется q-аналог, который выглядит следующим образом:

Теорема 1 (q-бином Ньютона).

$$(1+xq)(1+xq^2)\ldots(1+xq^n) = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\frac{k(k+1)}{2}} x^k.$$

Как и следует ожидать, подстановка $q = 1$ превращает данное равенство в обычный бином Ньютона.

Доказательство этой теоремы мы представим в виде нескольких упражнений.

Упражнения

3. Докажите, что если раскрыть скобки в левой части, то коэффициент при $q^l x^k$ будет равняться числу разбиений числа l в сумму k *различных* целых положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит n.

4. Постройте биекцию (взаимно однозначное соответствие) между разбиениями числа l в сумму k различных целых положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит n, и диаграммами Юнга веса $l - \frac{k(k+1)}{2}$, вписанными в прямоугольник размера $(n-k)\times k$.

5. Выведите теорему 1 из двух предыдущих упражнений.

Формула Эйлера

Итак, мы уже довольно много знаем про функцию $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}$ – производящую функцию для числа разбиений, вписанных в прямоугольник размера $m\times n$. Наша дальнейшая цель – получить производящую функцию для числа всевозможных разбиений на плоскости, без каких-либо ограничений на слагаемые и их количество. Делать мы это будем в два этапа.

Сначала выпишем формулу для q-биномиального коэффициента, полученную в предыдущем разделе:

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \frac{[n+1]\cdot[n+2]\cdot\ldots\cdot[n+m]}{[1]\cdot[2]\cdot\ldots\cdot[m]}.$$

В этой дроби в числителе и знаменателе одинаковое число сомножителей, а именно m. Теперь воспользуемся тем, что каждое из q-чисел есть геометрическая прогрессия со знаменателем q, и представим каждое из них в виде дроби:

$$[k] = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{k-1} = \frac{1-q^k}{1-q}.$$

Сомножители $1/(1-q)^m$ в числителе и знаменателе сократятся, и мы получим несколько иное выражение для q-биномиального коэффициента:

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})\ldots(1-q^{n+m})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^m)}$$

(еще раз обращаем внимание читателя на то, что правая часть на самом деле является многочленом – числитель делится на знаменатель без остатка как многочлен от q).

Теперь посмотрим, как будет меняться это выражение, если менять n, а m фиксировать. Что будет, если n «очень большое» – скажем, тысяча? Тогда в числителе будет стоять многочлен вида

$$(1-q^{1001})(1-q^{1002})\ldots(1-q^{1000+m}) = 1 - q^{1001} + \ldots,$$

свободный член которого равен 1, а потом следуют «очень много» (в данном случае – 1000) коэффициентов, равных нулю. Таким образом, чем больше n, тем больше нулевых коэффициентов подряд будет в числителе. Знаменатель же останется неизменным, он от n никак не зависит.

Таким образом, можно сказать, что при стремлении n к бесконечности выражение в числителе стремится к единице, а сам q-биномиальный коэффициент стремится к величине, обратной знаменателю:

$$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^m)}.$$

Конечно же, как всегда бывает при обращении с разного рода пределами, этому высказыванию нужно придать строгий математический смысл. Это можно сделать двумя разными способами. Один из них состоит в том, чтобы рассматривать все выражения от q как *функции*, а само q – как переменную (скажем, вещественную). Тогда q-биномиальный коэффициент будет функцией на прямой, и в левой части выражения будет стоять функциональная последовательность, с которой уже можно обходиться средствами математического анализа – например, исследовать ее на сходимость при тех или иных значениях q. Так, эта последовательность будет сходиться при $|q| < 1$, а при $|q| > 1$ – расходиться; там, где эта последовательность сходится, ее предел будет равен значению функции, стоящей в правой части. Подробнее об обращении с функциональными последовательностями можно прочесть в любом учебнике математического анализа, например в книге В.А.Зорича «Математический анализ. Том 1» (МЦНМО, 2007).

Другой способ состоит в том, чтобы рассматривать все наши выражения как *формальные степенные ряды*, т.е. «многочлены бесконечной степени». Правую часть равенства при этом также следует понимать как степенной ряд: для этого нужно заменить каждый из сомножителей $\frac{1}{1-q^k}$ на бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем q^k и перемножить все m этих прогрессий. Тогда можно будет говорить о *покоэффициентной* сходимости в вышеописанном смысле: будем говорить, что последовательность формальных степенных рядов $A_n(q)$ сходится к $A(q)$, если каждый из коэффициентов у $A_n(q)$ начиная с какого-то момента совпадает с соответствующим коэффициентом у $A(q)$ (в качестве упражнения попробуйте записать это при помощи кванторов). Желающих узнать больше об обращении с формальными степенными рядами отсылаем к книге А.Л.Городенцева «Алгебра. Учебник для студентов-математиков. Часть 1» (МЦНМО, 2013) или к уже упоминавшейся книге С.К.Ландо «Введение в дискретную математику».

Комбинаторный смысл последнего выражения тоже понятен: полученный степенной ряд есть производящая функция для числа диаграмм Юнга, вписанных в полосу высоты m (т.е. состоящих не более чем из m строк), но без каких-либо ограничений на длины этих строк. Коэффициент этого ряда при q^k будет равен количеству диаграмм Юнга из k квадратиков, количество строк в которых не превосходит m.

Обратите внимание, что здесь впервые утрачивает смысл подстановка $q = 1$: очевидно, что общее количество диаграмм Юнга в полосе посчитать нельзя (оно бесконечно), тогда как выписать производящую функцию оказывается возможным.

Остался последний шаг: устремим к бесконечности в полученной формуле число m, т.е. максимальное количество строк диаграммы Юнга. Тогда получится производящая функция для числа *всех* диаграмм Юнга, без каких-либо ограничений на их размер. Она будет представляться как *бесконечное произведение*. Мы получили знаменитую теорему Эйлера.

Теорема 2 (Л.Эйлер). *Производящая функция*

$$P(q) = p_0 + p_1 q + \ldots + p_l q^l + \ldots,$$

где p_l – число диаграмм Юнга из l квадратиков, задается бесконечным произведением:

$$P(q) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k}.$$

Бесконечное произведение, возникающее в правой части равенства, есть предел последовательности конечных произведений:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k} = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-q^k}.$$

Этот предел также можно понимать одним из двух описанных выше способов: либо как предел последовательности функций, сходящихся при $|q| < 1$, либо как покоэффициентный предел последовательности формальных степенных рядов $\left(1+q+q^2+\ldots\right)\left(1+q^2+q^4+\ldots\right)\ldots\left(1+q^m+q^{2m}+\ldots\right)$. Несложно видеть, что предел, понимаемый во втором смысле, существует, т.е. коэффициенты такого произведения стабилизируются: если умножить произвольный ряд на $\frac{1}{1-q^m} = 1 + q^m + q^{2m} + \ldots$, то первые m членов ряда, начиная с нулевого, останутся неизменными. Иначе говоря, чтобы вычислить очередной (k-й) член этого ряда, нужно перемножить только *конечное* число (в данном случае k) первых сомножителей – остальные не окажут на коэффициент при q^k никакого влияния.

Мы получили теорему Эйлера в качестве следствия утверждений о явном виде q-биномиальных коэффициентов. Однако она допускает куда более простое доказательство, которое мы также предлагаем найти читателю.

Упражнение 6. Придумайте доказательство теоремы Эйлера, не использующее q-биномиальных коэффициентов. Иначе говоря, докажите непосредственно, что производящая функция для числа разбиений

$$P(q) = p_0 + p_1 q + p_2 q^2 + \ldots$$

равна

$$P(q) = \left(1+q+q^2+\ldots\right)\left(1+q^2+q^4+\ldots\right)\ldots\left(1+q^k+q^{2k}+\ldots\right)\ldots$$

Пентагональная теорема Эйлера

В связи с теоремой о производящей функции для числа разбиений упомянем еще один замечательный результат, также принадлежащий Эйлеру. Оказывается, если начать вычислять ряд, *обратный* к $P(q)$ – иначе говоря, бесконечное произведение $\prod_{k=1}^{\infty}(1-q)$, получится следующее:

$$P(q)^{-1} = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - q^{35} - q^{40} + \ldots$$

(В качестве упражнения предлагаем читателю проверить это вычисление, скажем, до члена q^{10} включительно.)

Здесь можно сделать сразу несколько интересных наблюдений. Во-первых, видно, что все коэффициенты этого ряда равны либо 0, либо ± 1, причем по мере увеличения степени ненулевые члены встречаются все реже и реже. Во-вторых, все члены, кроме свободного, идут парами: два отрицательных, два положительных, потом снова два отрицательных и так далее. Разность между степенями в паре равняется номеру пары: сначала это единица (q и q^2), потом два (q^5 и q^7), потом три (q^{12} и q^{15}) и так далее.

Наконец, последовательность степеней 1, 5, 12, 22, 35 … тоже была хорошо известна Эйлеру – это так называемые *пятиугольные числа*, которые равняются

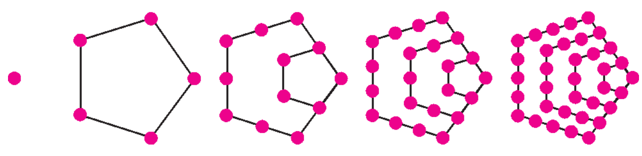


Рис. 7. Пятиугольные числа

числу точек в пятиугольнике, сторона которого равна 1, 2, 3 … точкам соответственно (рис.7). Нетрудно видеть, что m-е пятиугольное число равняется $m(3m-1)/2$.

Оказывается, имеет место следующий результат:

Теорема 3 (пентагональная теорема Эйлера) *Ряд, обратный к ряду* $P(q)=\sum p_n q^n$ *, имеет вид*

$$P(q)^{-1}=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(q^{\frac{m(3m-1)}{2}}+q^{\frac{m(3m+1)}{2}}\right).$$

Эта теорема имеет несколько существенно разных доказательств. Наверное, самое простое из них можно найти в статье Д.Фукса «О раскрытии скобок, об Эйлере, Гауссе, Макдональде и об упущенных возможностях», опубликованной в журнале «Квант» №8 за 1981 год, или в лекции 3 книги С.Л.Табачникова и Д.Б.Фукса «Математический дивертисмент» (МЦНМО, 2011). И эту статью, и эту книгу мы горячо рекомендуем читателю. Там же можно прочесть о том, как с помощью пентагональной теоремы Эйлера удается очень быстро вычислять числа разбиений p_n.

Еще одно доказательство пентагональной теоремы Эйлера основано на использовании q-бинома Ньютона, с которым мы имели дело выше; это доказательство можно прочесть, например, в брошюре «Диаграммы Юнга, плоские разбиения и знакочередующиеся матрицы» (МЦНМО, 2014), принадлежащей автору этой статьи.

Вместо заключения. А что дальше?..

Подведем итоги. Мы выяснили, чему равна производящая функция для диаграмм Юнга в прямоугольнике; оказалось, что эта функция ведет себя очень похоже на обычный биномиальный коэффициент. Нам удалось выписать несколько тождеств на многочлены от q, которые при подстановке $q = 1$ дают известные числовые тождества (в частности, бином Ньютона).

Это проявление некоторого общего принципа: у большинства важных комбинаторных объектов и связанных с ними тождеств имеются q-аналоги; их рассмотрение зачастую позволяет глубже понять природу исходных объектов. Так, например, изучение q-биномиальных коэффициентов позволило нам вывести производящую функцию для диаграмм Юнга на плоскости (без каких-либо ограничений).

Задачи, которые мы рассмотрели, допускают огромное количество вариаций и обобщений. Так, например, можно рассматривать диаграммы Юнга не на плоскости, а в пространстве – башни из кубиков. В этом случае даже вопрос о количестве диаграмм Юнга внутри прямоугольного параллелепипеда уже становится довольно нетривиальным; ответ на него получил в начале XX века британский военный и математик П.Макмагон. Макмагону же принадлежит и вычисление производящей функции для числа трехмерных диаграмм – как в ограниченной «коробке», так и на плоскости. Последняя производящая функция также записывается в виде бесконечного произведения, похожего на эйлеровское, – она выглядит так:

$$P_{3D}(q)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1-q^k\right)^k}.$$

Доказательство этой формулы изложено, например, в уже упоминавшейся брошюре автора статьи. Кроме того, много интересного о трехмерных диаграммах Юнга можно прочесть в статье В.Горина «Что можно сложить из кубиков?», опубликованной в «Кванте» №3 за 2012 год.

Интересно, что дальнейшему обобщению производящая функция Макмагона пока что не поддается – никакого ее аналога для четырехмерных диаграмм Юнга не известно! Точно так же неясно, что является правильным четырехмерным аналогом q-биномиальных коэффициентов, т.е. как выглядит производящая функция для числа диаграмм Юнга в четырехмерном параллелепипеде.

Может быть, кому-то из читателей когда-нибудь удастся ответить на эти вопросы?

Но́вый спо́собъ аріѳме́тіки ѳео́ріки илѝ зри́телныѧ

(Начало см. на 2-й странице обложки)

Плакат с таким названием, напечатанный в 1705 году, был, по всей видимости, первым изданным в России научно-техническим плакатом. Его составил Василий Киприянов, сподвижник Петра I, библиотекарь московской Школы математических и навигацких наук.

На плакате рассказано в общих словах о предназначении арифметики, описаны свойства натуральных чисел и дробей, а также подробно изложены правила основных операций с числами: сложения – «аддицио», вычитания – «субстракцио», умножения – «мултипликацио» и деления – «дивизио». На примерах показано, как все эти действия нужно выполнять – в те времена уже вовсю пользовались привычным для нас методом «в столбик».

Но плакат интересен не только математическим содержанием. Это фактически произведение искусства (кстати, подлинный экземпляр этого плаката хранится в Эрмитаже). В верхней части плаката расположен государственный герб, под ним – аллегорическое изображение дворца точных наук, в центре которого на троне восседает «царица наук» арифметика. Колонны подписаны названиями других наук – геометрии, стереометрии, астрономии, оптики, меркатории (навигации), географии, фортификации и архитектуры. Под каждой колонной есть небольшой рисунок, раскрывающий содержание этих наук. По бокам плаката в медальонах находятся портреты знаменитых ученых: Пифагор, Гиппарх, Птолемей, Коперник, Архимед, «Царь Алфонский» (вероятно, имелся в виду живший в XIII веке в Испании король Леона и Кастилии Альфонс X, увлекавшийся астрономией), Тихо Браге, Фокилид. В нижней части плаката помещены посвящение Петру I и описание некоторых его свершений и побед. Там же изображены Московский Кремль и Петербург в виде крепости с надписью «С. Петрополис, 1703».

Глядя на такое обилие мельчайших деталей и подробностей, остается лишь догадываться, сколько труда потратили на изготовление этой гравюры сделавшие ее мастера!

Подробнее о плакате вы можете прочитать в книге В.В.Данилевского «Русская техническая литература первой четверти XVIII века» (1954 г.) и на сайте «Математических этюдов» www.etudes.ru в разделе «Colloquium».

Е.Епифанов

Да будет свет!

Л.БЕЛОПУХОВ

Нобелевскую премию 2014 года по физике получили японские инженеры-физики Исаму Акасаки, Хироши Амано и Сюдзи Накамура «за изобретение эффективных синих светодиодов, приведших к появлению ярких и энергосберегающих источников белого света».

Ключевое слово формулировки «светодиод» говорит о том, что это изобретение – из области полупроводниковой техники. А другие, простые и всем понятные, слова отражают факт огромного значения этого достижения для нашей жизни, или, говоря словами завещания Альфреда Нобеля, достижения, «принесшего наибольшую пользу человечеству».

Светодиодами занимались многие. Впервые свечение некоторых природных полупроводников было зафиксировано радиотехниками – в 1907 году сотрудником компании Г.Маркони Генри Раундом, а в 1923 году – Олегом Лосевым в Нижегородской радиолаборатории. Почти 40 лет этот эффект назывался «свечением Лосева». Но только после создания к середине XX века современной квантовой теории физики твердого тела пришло понимание этого явления.

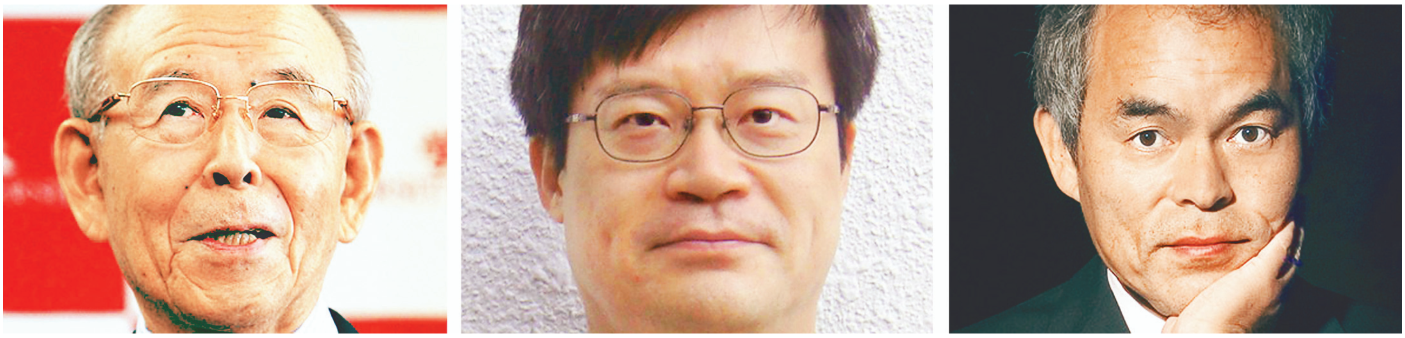
Первый светодиод, излучающий красный свет, был изобретен в 1961 году в США Ником Холоньяком и быстро нашел использование в индикаторных и сигнальных устройствах. Но достоточно яркие красные светодиоды были вначале очень дорогими. Начиная с 1980 года в ряде стран (США, Япония, Россия) продолжались работы по созданию светодиодов всех цветов радуги – от красного до голубого. Однако их стоимость продолжала оставаться высокой, а эффективность была недостаточной для того, чтобы создать осветительные устройства, конкурирующие с лампами накаливания или газоразрядными лампами. Возможность получения многочисленных световых оттенков стала широко использоваться в дизайне, шоу-бизнесе и дорогих игрушках.

Но две группы японских исследователей продолжали упорную работу по созданию эффективных светодиодов не для зрелищного удовольствия, а для освещения улиц и помещений. Главную трудность при этом представляли достаточно интенсивные светодиодные источники синего цвета. Только они в комбинации с уже созданными источниками красного, желтого и зеленого цветов могли дать источник белого света.

Вспомним основные положения теории полупроводников, существенные для понимания процессов в светодиодах и трудностей, стоявших перед исследователями. Достаточно рассмотреть только кристаллические полупроводники, в которых атомы связаны друг с другом парами обобществленных валентных электронов (так называемая ковалентная связь). Например, элементы четвертой группы периодической системы – кремний, германий. Каждый атом таких элементов имеет 4 электрона, находящихся в среднем дальше от ядра, чем другие электроны. Эти электроны являются валентными, т.е. способными на связь с соседними атомами. Когда атомы находятся близко друг к другу, устанавливается симметричная картина – атомы связаны друг с другом четырьмя парами электронов. Эта ковалентная связь достаточно прочная, что означает невозможность валентному электрону получить малую порцию энергии, чтобы оторваться от своей связи. Согласно квантовой физике твердого тела, ковалентный электрон не может, слегка увеличив свою энергию, остаться частично привязанным к атому. У него могут быть только два состояния – или сильно связанное, или свободное. Иное природой (квантовыми законами) запрещено. Поэтому минимально необходимая для освобождения электрона энергия получила в физике твердого тела название ширины запрещенной зоны энергий.

Такую энергию электрон иногда может получить от соседнего атома, когда тот в своем колебательном движении будет иметь амплитуду, значительно отличающуюся от средней. Колебательное движение атомов кристаллической решетки твердого тела существует при любой температуре (согласно квантовой теории, даже при абсолютном нуле). При температуре порядка 300 К (комнатная температура) средняя энергия колебательного движения атомов составляет 0,025 эВ. А ширина запрещенной зоны энергий в полупроводниках по крайней мере в 50 раз больше. Чтобы валентному электрону приобрести такую энергию и стать свободным, один из соседних атомов должен испытать очень сильное колебание, энергия которого будет значительно отличаться от средней. Это – событие крайне редкое, поэтому оторвавшихся электронов мало. Но зато эти электроны способны к более или менее свободному хаотическому перемещению по кристаллу. А в электрическом поле их перемещение становится ориентированным, похожим на направленное движение свободных электронов проводимости в металле. Кристалл проводит ток, хотя и достаточно слабый. Удельная проводимость таких веществ в 10^{12} раз меньше, чем у проводников (металлов). Поэтому они получили название полупроводников.

Но у полупроводников есть очень важное качественное отличие от металлов – образование «дырок». Вакантное место в конструкции связей, образовавшееся после освобождения одного из электронов, долго не остается таким – оно замещается каким-нибудь валентным электроном от одного из соседних атомов. Этот процесс может повторяться снова



Японские инженеры-физики Исаму Акасаки, Хироши Амано и Сюдзи Накамура и снова. Каждый освободившийся электрон рождает освободившуюся «квартиру» – дырку в стройной структуре ковалентных связей. Перемещения электронов из одного положения в другое хаотичны – дырка хаотично перемещается по кристаллу. Но в электрическом поле эти перемещения становятся ориентированными. Перемещение отсутствия отрицательного заряда эквивалентно перемещению положительного заряда. Ток, соответствующий этому перемещению, является током положительных зарядов – дырок, а связанная с ними проводимость называется дырочной. Число дырок соответствует числу освободившихся электронов, поэтому электронная и дырочная проводимости полупроводника имеют примерно одинаковую величину. Эта суммарная проводимость чистого полупроводника получила название собственной проводимости.

Отличие собственной проводимости полупроводников от чисто электронной проводимости металлов – не только количественное. Совершенно по-другому меняется проводимость полупроводников, например, при изменении температуры. При повышении температуры резко (экспоненциально) увеличивается вероятность отрыва электронов от атомной связи, а значит, резко увеличивается концентрация электронов и дырок. Проводимость полупроводников экспоненциально увеличивается с температурой, тогда как у металлов при нагревании она, напротив, уменьшается (по линейному закону).

Очевидно, что на проводимость полупроводников может влиять и наличие посторонних примесей и с помощью примесей полупроводник можно целенаправленно «испортить». Например, сделать так, что его проводимость станет почти чисто электронной – без образования дырок. Для этого нужно к четырехвалентному элементу добавить некоторое строго контролируемое количество пятивалентного элемента – мышьяка или фосфора. При охлаждении и кристаллизации атомы примеси будут встраиваться в конструкцию четырехвалентных атомов, но при этом у каждого атома примеси остается «бесхозный» пятый электрон. В электрическом поле эти электроны будут такими же электронами проводимости, как и собственные свободные электроны полупроводника. Но, во-первых, их будет значительно больше (обычно в 10^6 раз больше), а во-вторых, при этом не образуется дырок. Такой примесный полупроводник будет почти на 100% обладать только электронной проводимостью и лишь на малые доли процента – дырочной проводимостью. Он называется полупроводником *n*-типа (от negative – отрицательный), а примесь называется донорной (дающей).

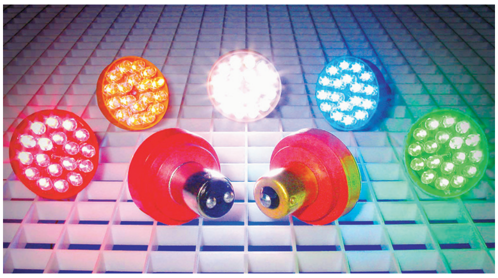
Но можно сделать наоборот – добавить к четырехвалентному элементу примесь трехвалентного – галлия или индия. Когда его атомы будут встраиваться в структуру четырехвалентных атомов, им для образования четырех парноэлектронных связей с соседями будет не хватать одного электрона – образуется дырка. Так же, как и в случае собственной проводимости, дырка начнет замещаться электронами соседних атомов и перемещаться по кристаллу. В электрическом поле это перемещение будет носить характер тока положительных зарядов. Такой примесный полупроводник будет почти на 100% обладать только дырочной проводимостью и лишь на доли процента – электронной. Он называется полупроводником *p*-типа (от positive – положительный), а примесь называется акцепторной (принимающей).

Главное применение примесных полупроводников – это создание полупроводниковых приборов, основанных на свойствах *p*–*n*-перехода – контакта полупроводников *n*- и *p*-типа. При контакте начинается диффузия электронов проводимости из полупроводника *n*-типа в область контакта и диффузия дырок из полупроводника *p*-типа в область контакта. Но диффузия быстро заканчивается – ее обрывает то, что полупроводник *n*-типа, потеряв часть электронов, приобретает избыточный положительный заряд, а полупроводник *p*-типа – избыточный отрицательный заряд. На пути дальнейшего перемещения электронов и дырок возникает потенциальный барьер. Внутреннее электрическое поле этого барьера направлено от полупроводника *n*-типа к полупроводнику *p*-типа, тем самым препятствуя дальнейшему перемещению электронов и дырок. Поэтому *p*–*n*-контакт часто называют запирающим слоем.

Но если этот контакт подключить к источнику тока так, чтобы в запирающем слое появилось электрическое поле, противоположное по направлению внутреннему полю потенциального барьера (для этого нужно положительный полюс источника тока подсоединить к полупроводнику *p*-типа), то потенциальный барьер на пути зарядов значительно ослабнет. По цепи пойдет ток, сила которого будет экспоненциально увеличиваться с увеличением приложенного напряжения. При одном и том же напряжении она в тысячи раз будет больше силы тока через чистый (беспримесный) полупроводник. Такое подключение *p*–*n*-перехода называют прямым. Если же источник тока подключить в противоположном направлении, то потенциальный барьер, наоборот, возрастет, и тока через контактную область практически не будет (вернее, он будет очень слабеньким). Такое подключение называют обратным. Таким образом, через *p*–*n*-переход проходит ток практически только одного направления. Переменный ток «выпрямляется» (при этом в течение полупериода переменного синусоидального тока контакт ток не пропускает). По аналогии с первыми радиолампами, появившимися на рубеже XX века, устройство было названо диодом.

Главное достоинство полупроводниковых выпрямителей по сравнению с ламповыми – это их компактность. Полупроводниковый диод стал быстро усложняться добавлением других электродов для целей усиления и генерирования сигналов, комбинация *p*–*n*-переходов (получившая название транзистора) стала основным элементом полупроводниковых радиосхем и многих других приборов, в которых применение радиоламп из-за их громоздкости было затруднено или вовсе невозможно. Создатели первых полупроводниковых устройств Уильям Бредфорд Шокли, Джон Бардин и Уолтер Хаузер Браттейн в 1956 году стали Нобелевскими лауреатами « за исследования полупроводников и открытие транзисторного эффекта». Полупроводниковая революция так сильно изменила лицо человеческой цивилизации, что этого не могли предположить и самые смелые фантасты.

В 1961 году началось исследование еще одного свойства *p*–*n*-перехода – генерирование им света. И действительно, в области контакта должно возникать электромагнитное излучение – рождение квантов лучистой энергии. Ведь при прямом подключении *p*–*n*-перехода к источнику тока интенсивное движение в области контакта свободных электронов и дырок навстречу друг другу должно приводить к случайному (вероятностному) замещению дырок электронами. В физике этот процесс называется рекомбинацией электрона и дырки. Электрон при этом скачком приобретает отрицательную потенциальную энергию (отрицательную потому, что это энергия сил притяжения). И точно так же, как и при рекомбинации электрона и иона, при этом должен появиться квант излучения, энергия которого равна величине появляющейся у электрона потенциальной энергии связи. Это – процесс, обратный освобождению электрона при разрушении ковалентной связи. Поэтому квант излучения, возникающий при рекомбинации электрона и дырки, имеет энергию, равную ширине запрещенной зоны.

Яркие и энергосберегающие осветительные светодиодные устройства

На заре полупроводниковой революции основными полупроводниковыми веществами были кремний и германий. Ширина запрещенной зоны у них (при комнатной температуре) составляет 1,12 эВ и 0,66 эВ. Следовательно, такую энергию имеют кванты, рождающиеся при рекомбинации электрона и дырки в контактной области *p–n*-перехода в диоде, основанном на кремнии или германии. Однако наглядной, привычной характеристикой кванта является не его энергия, а соответствующая ей длина волны. Для кремния она равна 1,11 мкм, а для германия – 1,88 мкм. Это – инфракрасное излучение, энергия которого, в конечном счете, уходит на нагревание всего диода.

И вот, в 1961 году начались работы по поиску полупроводниковых материалов, диоды из которых могли бы генерировать излучение в видимом диапазоне спектра. Стало ясно, что такие материалы должны быть не чистыми элементами, а химическими соединениями элементов второй или третьей группы периодической системы с элементами пятой или шестой группы, взятыми примерно в одинаковой пропорции. Они и были синтезированы. Вот некоторые из них: арсенид галлия GaAs, фосфид галлия GaP, сернистый кадмий CdS, селенистый цинк ZnSe и нитрид галлия GaN. Ширина запрещенной зоны у них составляет (в эВ) 2,0, 2,26, 2,42, 2,68 и 3,27, а длины волн (в нм) и цвета – 740 (красный), 550 (желто-зеленый), 514 (зеленый), 464 (сине-зеленый) и 380 (фиолетовый).

Теоретические расчеты для этих полупроводников и прогнозирование их свойств значительно сложнее, чем для «простых» четырехвалентных элементов – кремния и германия. Поэтому синтез этих полупроводников необходимой чистоты, дальнейшее легирование их донорными или акцепторными примесями (термин «легирование» взят из металлургии, где так называют добавление малого количества нужных примесей к основному металлу), создание диодных устройств потребовали большого объема экспериментальных исследований и оказались очень непростыми технологическими операциями.

Чтобы создать, например, тонкий кристалл (пленку) чистого нитрида галлия, нужно осаждать его из газовой фазы (значит, предварительно обратив его в пар) на ровную поверхность кристалла сапфира. Сапфир – это глинозем (Al_2O_3), легированный некоторыми элементами (например, железом и титаном). Отдельной трудной задачей становится выращивание идеально ровных (с допуском не больше нанометра) кристаллических пластин сапфира.

В 1985 году в университете японского города Нагоя Исаму Акасаки и Хироши Аману добились первых успехов в создании тонких пленок нитрида галлия на сапфировой подложке. Некоторое время получаемые светодиоды имели малую интенсивность света – в зоне контакта примесных полупроводников многие электроны и дырки проходили «мимо» друг друга, не давая рекомбинации и излучения. Одной из причин этого была нерегулярность кристаллической решетки, вызванная ее обязательными дефектами (случайными нарушениями порядка). Японские исследователи пошли по пути использования трехэлементных полупроводников, например соединений нитрида галлия с индием и алюминием. Кроме того, оказалось целесообразным создавать многослойную структуру чередующихся различных чистых и примесных полупроводников – так называемую гетероструктуру. За создание гетероструктур для целей микрополупроводниковой электроники российский физик Жорес Алферов в 2000 году был удостоен Нобелевской премии.

Именно на базе гетероструктур Сюдзи Накамура в 1993 году создал яркие синие светодиоды, и в Японии начался их промышленный выпуск. Практически сразу же после этого развернулись работы по производству источников белого света. В одном из вариантов смешивались излучения красного, зеленого и синего светодиодов, которые в сумме давали белый свет.

Но наиболее перспективным оказалось использование синего светодиода для освещения люминесцентных веществ (люминофоров), которые, поглощая синие кванты, дают вторичное излучение квантов разного цвета. А в смеси с синим человеческое зрение воспринимает это излучение как привычный белый (солнечный) свет. То же самое происходит и в обычных люминесцентных лампах дневного света. В них люминофор освещается ультрафиолетовым излучением, рождающимся в газовом разряде в парах ртути, наполняющих лампу. Поскольку световой КПД этих ламп несколько выше, чем у ламп накаливания, они получили в настоящее время большое распространение, несмотря на экологическую опасность использования ртути. Белые светодиодные источники не имеют этого недостатка, а их световая эффективность значительно выше. Кроме того, подбором люминофоров можно получать различный белый свет – холодный или теплый.

Потребовалось еще два десятка лет, чтобы «яркие и энергосберегающие источники белого света», как об этом сказано в формулировке Нобелевского комитета, стали достаточно доступными по своей цене. В России сегодня светодиодная лампа для домашнего освещения стоит 150–200 рублей. Но зато она не перегорает в течение нескольких десятков лет и потребляет энергии в 10 раз меньше, чем обычные лампы накаливания. Поэтому затраты на покупку светодиодных ламп окупаются за 1–2 года.

По прогнозам многих ученых, уже через 10–15 лет почти все осветительные устройства на Земле станут светодиодными. А ведь на освещение сегодня человечество тратит почти 20% всей производимой электроэнергии. Легко подсчитать, что при мировом производстве электроэнергии $8,3 \cdot 10^{19}$ Дж (в 2013 г.) экономия на освещении, полученная от замены современных источников света на светодиодные, составляющая 18% от этой величины, эквивалентна постройке ста (!) 5-гиговаттных электростанций ежегодно (5 ГВт – это мощность крупнейших тепловых электростанций).

Вот что на самом деле скрывается за словами «яркие и энергосберегающие» новые осветительные светодиодные устройства.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1–2015» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2366» или «Ф2373». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2366 – М2369, М2370а, М2373 предлагались на XXXVI Турнире городов, задачи М2371, М2372 – на XVIII Кубке памяти А.Н.Колмогорова.

Задачи М2366–М2373, Ф2373–Ф2379

М2366. С начала учебного года Андрей записывал свои оценки по математике. Получая очередную оценку (2, 3, 4 или 5), он называл ее *неожиданной*, если до этого момента она встречалась реже каждой из всех остальных возможных оценок. (Например, если бы он получал с начала года подряд оценки 3,4,2,5,5,5,2,3,4,3, то неожиданными были бы первая пятерка и вторая четверка.) За весь учебный год Андрей получил 40 оценок – по 10 пятерок, четверок, троек и двоек (неизвестно, в каком порядке). Можно ли точно сказать, сколько оценок были для него неожиданными?

Е.Бакаев

М2367. Докажите, что в любом описанном около окружности многоугольнике найдутся три стороны, из которых можно составить треугольник.

Т.Казицына, Б.Френкин

М2368. Внутри прямоугольного треугольника построили две равные окружности так, что первая касается одного из катетов и гипотенузы, вторая касается другого катета и гипотенузы, а еще эти окружности касаются друг друга. Пусть M и N – точки касания окружностей с гипотенузой. Докажите, что середина отрезка MN лежит на биссектрисе прямого угла треугольника.

Е.Бакаев

М2369. Гриша записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Гриша повторил эту процедуру k раз, и все k раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение k.

И.Богданов, Г.Гальперин

М2370. Можно ли все натуральные делители числа 100! (включая 1 и само число) разбить: а) на две группы; б) на 100 групп так, чтобы в группах было одинаковое количество чисел и произведение чисел первой группы равнялось произведению чисел второй группы?

в) Найдите все натуральные n, для которых можно разбить все делители числа n на две группы так, чтобы в группах было одинаковое количество чисел и произведение чисел первой группы равнялось произведению чисел второй группы.

М.Малкин

М2371. а) Назовем центром трехклеточного уголка точку, принадлежащую всем трем его клеткам. Шахматную доску 99×99 полностью покрыли трехклеточными уголками без наложений, после чего каждый уголок повернули вокруг своего центра на $90°$ (в любом направлении). Докажите, что при этом какая-то клетка доски оказалась непокрытой ни одним уголком.

б) Решите ту де задачу, если каждый уголок разрешается повернуть вокруг своего центра на $90°$ или на $180°$.

А.Грибалко

М2372*. Дана сфера Ω и точка P внутри нее. Через P проводятся три попарно перпендикулярные хорды AA', BB' и CC'. Точки X, X' – проекции точки P на плоскости ABC и $A'B'C'$. Докажите, что все прямые XX' проходят через одну точку.

А.Заславский

М2373*. В некотором государстве ценятся золотой и платиновый песок. Золото можно менять на платину, а платину – на золото по курсу, который определяется натуральными числами g и p так: x граммов золотого песка равноценны y граммам платинового, если $xg = yp$ (числа x и y могут быть нецелыми). Сейчас у банкира есть по килограмму золотого и платинового песка, а $g = p = 1001$. Государство обещает каждый день уменьшать одно из чисел g и p на единицу, так что через 2000 дней они оба станут единицами; но последовательность уменьшений неизвестна. Может ли банкир каждый день менять песок так, чтобы в конце гарантированно получить хотя бы по 2 кг каждого песка?

И.Богданов

Ф2373. По горизонтальной поверхности ползут с постоянными скоростями два жука: синий и красный. Ваня построил графики зависимостей координат жуков от времени (рис.1). По горизонтальным осям

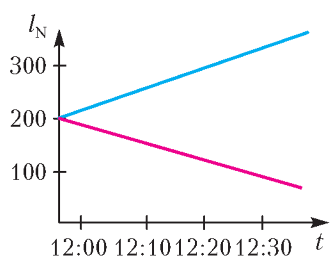


Рис. 1

отложено время (в часах и минутах), а по вертикальным – расстояния (в сантиметрах) от жуков до начала координат в направлениях на север (N) и на восток (E). Линии для красного жука – красные, а для синего – синие. В какой момент расстояние между жуками было самым маленьким? Каким было это расстояние?

В.Жуков

Ф2374. Маленькая бусинка массой m надета на тонкую проволоку и скользит без трения вдоль этой проволоки, замкнутой в кольцо, имеющее форму эллипса. Плоскость кольца вертикальна, длинная полуось эллипса вертикальна и имеет размер a, а короткая полуось эллипса горизонтальна и имеет размер b. Скорость движения бусинки в верхней точке кольца равна v. Какова по величине сила, с которой проволока действует на бусинку в точках траектории: 1) верхней; 2) нижней; 3) крайней по горизонтали?

С.Варламов

Ф2375. «Долетайте до самого Солнца, и домой возвращайтесь скорей!» – на заре космической эры была сложена песня с такой строчкой. Какое минимальное время требуется для полета космического корабля к Солнцу и обратно, если двигатели корабля работают только вблизи Земли на старте и финише?

Д.Солнцев

Ф2376. В огромной длинной горизонтальной трубе квадратного сечения, которая разбита на три «камеры» двумя толстыми поршнями, есть центральная камера и две боковые, достаточно длинные (рис.2). Две стенки трубы вертикальны и две стенки горизонтальны. Стенки и поршни тепло не проводят. Центральная камера почти доверху заполнена водой, а над водой находится воздух при атмосферном давлении. Давление в левой и правой камерах все время атмосферное. Трения между поршнями и стенками трубы нет. В начальный момент поршни и вода неподвижны, расстояние между поршнями равно 40 м. Поршни отпускают, и в течение некоторого времени система переходит в новое положение равновесия. Считая, что температура в начале и в конце одинакова и равна 81 °С, вычислите высоту уровня воды в конечном состоянии (в положении равновесия системы). На какое расстояние сместятся поршни? Сколько воды испарится? Какое количество теплоты нужно будет подвести в центральную камеру, чтобы температура в ней не изменилась? Высота трубы равна 40 м. Удельная теплота испарения воды 2,3 МДж/кг.

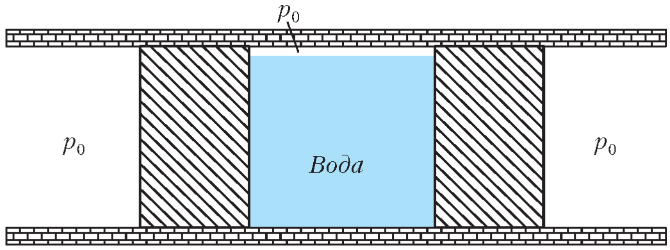


Рис. 2

Д.Ягнятинский

Ф2377*. Из капельки мыльного раствора диаметром $d = 2$ мм с коэффициентом поверхностного натяжения $\sigma = 40$ мДж/м^2 выдули мыльный пузырь диаметром $D = 8$ см. Найдите величину электрического заряда, который нужно сообщить пузырю, чтобы он начал всплывать в воздухе. Оцените разумность полученного результата вычислений. Плотность воздуха $\rho = 1{,}2$ кг/м^3.

М.Пузырев

Ф2378. В однородном вертикальном магнитом поле B на параллельных горизонтальных толстых медных (сопротивления нет) направляющих, расстояние между которыми L, лежит перемычка, сопротивление которой R и масса m. К направляющим подключают заряженный до напряжения U конденсатор емкостью C. Трения нет. Перемычка приходит в движение. Какой будет установившаяся скорость перемычки? Какова эффективность (КПД) преобразования электрической энергии, отобранной у конденсатора, в механическую энергию? Какое количество теплоты выделилось в сопротивлении перемычки?

А.Старов

Ф2379*. Научно-исследовательское судно провело наблюдение за волнением, вызванным упавшим в южной части Тихого океана метеоритом. При этом была получена зависимость периода колебаний волн T от времени наблюдения t. Результаты измерений представлены в таблице (время $t = 0$ соответствует началу наблюдений в 12:00):

t, ч	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
T, с	5,7	5,0	4,3	3,7	3,3	3,1	2,8	2,6	2,5	2,3

Волна с длиной волны λ, распространяющаяся по поверхности воды в направлении оси x, описывается периодической функцией с уменьшающейся амплитудой: $y(t, x) = f(\omega t - kx)$. Эта функция периодична по времени с периодом $T = 2\pi/\omega$ и периодична по координате с пространственным периодом $\lambda = 2\pi/k$. Фазовая скорость распространения такой волны равна $v = \omega/k$. Оцените по этим данным расстояние от корабля до места падения метеорита, а также момент времени его падения.

Указания. Дисперсия волн в океане (зависимость фазовой скорости от длины волны) описывается законом $v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$ (гравитационные волны на «глубокой» воде). Скорость распространения фронта волны с длиной волны λ определяется групповой скоростью $u = d\omega/dk$. Групповая скорость u может быть найдена по формуле Эйлера: $u = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}$.

А.Гуденко

Решения задач М2349–М2355, Ф2355–Ф2362

М2349. *Профессор Выбегалло написал 1001 статью. В каждой статье он может поставить ссылки на другие статьи, но никакие две статьи не должны ссылаться друг на друга. Выбегалло получит значимость k, если после этого у него будет k статей, на каждую из которых ссылаются хотя бы k статей. Какой наибольшей значимости он может добиться?*

Ответ: 667.

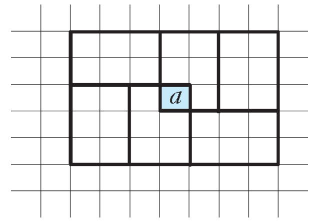
Пусть найдется k статей, на каждую из которых ссылается k других. Обозначим множество этих k статей через X. Заметим, что всего ссылок, ведущих из X в X, не более $\frac{k(k-1)}{2}$ (это общее количество пар элементов множества X). Значит, в множестве X найдется статья, на которую идет не более $\frac{k-1}{2}$ ссылок из X. Следовательно, на эту статью идет не менее $k - \frac{k-1}{2} = \frac{k+1}{2}$ ссылок не из множества X. Отсюда $1001 - k \geq \frac{k+1}{2}$. Преобразуя это неравенство, получаем $2002 \geq 3k + 1$, откуда $k \leq 667$.

Остается построить пример, где найдутся 667 статей, на каждую из которых ссылается хотя бы 667 статей. Выберем множество X из 667 статей, расположим их по кругу и на каждую статью сошлемся в следующих за ней по часовой стрелке 333 статьях. Остается 334 статьи, не вошедшие в X – в каждой из них сошлемся на все статьи из X. Легко видеть, что на каждую статью из множества X сделано ровно 667 ссылок.

И.Богданов, Е.Молчанов

М2350. *Клетки таблицы 7×5 заполнены числами так, что в каждом прямоугольнике 2×3 (вертикальном или горизонтальном) сумма чисел равна нулю. Заплатив 100 рублей, можно выбрать любую клетку и узнать, какое число в ней записано. Какого наименьшего числа рублей хватит, чтобы наверняка определить сумму всех чисел таблицы?*

Ответ: 100 рублей.



Пусть в центральной клетке таблицы написано число a. Тогда сумма S всех чисел таблицы равна $-a$, поскольку сумму $S + a$ можно разбить на шесть нулевых сумм по шесть слагаемых так, как показано на рисунке. Следовательно, достаточно узнать одно число – центральное.

С другой стороны, таблица, заполненная числами a и $-a$ в шахматном порядке, удовлетворяет условию задачи. Значит, сумма $S = -a$ может быть любой, и хотя бы одно число узнать нужно.

Е.Бакаев, Л.Медников, А.Семенов

М2351. *Дан многочлен двадцатой степени с целыми коэффициентами. На плоскости отметили все точки с целыми координатами, у которых ординаты не меньше 0 и не больше 10. Какое наибольшее число отмеченных точек может лежать на графике этого многочлена?*

Ответ: 20 точек.

Пример. $x(x-1)(x-2)\ldots(x-19)$.

Оценка. Пусть нашлись такие многочлен $P(x)$ и 21 точка с абсциссами $x_1 < \ldots < x_{21}$. По аналогу теоремы Безу для многочленов с целыми коэффициентами число $|P(x_{21}) - P(x_i)| \leq 10$ делится на $x_{21} - x_i \geq 11$ при всех i от 1 до 10. Отсюда $P(x_{21}) - P(x_i) = 0$ при всех i от 1 до 10.

Аналогично, $P(x_1) - P(x_k) = 0$ при всех k от 12 до 21. В итоге, все числа $P(x_1), \ldots, P(x_{10}), P(x_{12}), \ldots$ $\ldots, P(x_{21})$ одинаковы и равны, скажем, C. Тогда мы знаем 20 корней многочлена $P(x) - C$ степени 20. Значит,

$$P(x) - C = a(x - x_1)\ldots(x - x_{10})(x - x_{12})\ldots(x - x_{21}),$$

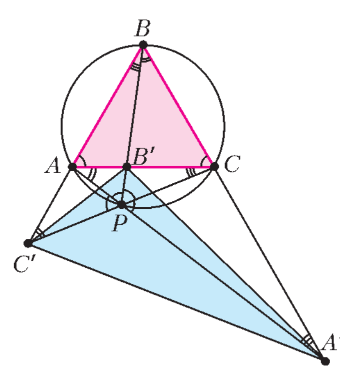
где a – старший коэффициент $P(x)$. Тогда

$$|P(x_{11}) - C| \geq 10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 9 \cdot 10 > 10.$$

Это противоречит тому, что C и $P(x_{11})$ принадлежат отрезку [0; 10].

Г.Жуков, Л.Медников, А.Семенов

М2352. *Дан правильный треугольник ABC площади 1 и точка P на его описанной окружности. Прямые AP, BP, CP пересекают прямые BC, CA, AB в точках A', B', C' соответственно. Найдите площадь треугольника $A'B'C'$.*



Ответ: 2.

Для определенности будем считать, что P лежит на дуге AC, не содержащей точку B (см. рисунок).

Заметим, что

$$\angle CAB = \angle ACB = \angle APB = \angle BPC =$$
$$= \angle APC' = \angle CPA' = 60^\circ,$$
$$\angle PBC = \angle PAC = \angle PC'A, \ \angle PBA = \angle PCA = \angle PA'C.$$

Следовательно, следующие пары треугольников подобны: BPC' и $A'PB$; $C'PA$ и APB'; $A'PC$ и CPB'. Из первого подобия следует, что $BP^2 = C'P \cdot A'P$, из второго: $AP^2 = C'P \cdot B'P$, из третьего: $CP^2 = B'P \cdot A'P$. Вычислим площадь треугольника $A'B'C'$ как сумму площадей треугольников $C'B'P$, $C'A'P$ и $A'B'P$ (используя тот факт, что углы при вершине P этих треугольников равны 120°):

$$S_{A'B'C'} = \left(C'P \cdot B'P + B'P \cdot A'P + A'P \cdot B'P\right)\frac{\sqrt{3}}{4} =$$
$$= \left(AP^2 + BP^2 + CP^2\right)\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Сумма $AP^2 + BP^2 + CP^2$ не зависит от положения точки P на окружности и равна $2a^2$, где a – длина стороны треугольника ABC. Это можно доказать, например, с использованием скалярного произведения (далее O и R – центр и радиус описанной окружности):

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 =$$
$$= \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}\right)^2 + \left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OP}\right)^2 \left(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OP}\right)^2 =$$
$$= AO^2 + BO^2 + CO^2 + 3PO^2 + 2\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}, \overrightarrow{OP}\right) =$$
$$= 6R^2 + 0 = 2a^2.$$

Итак, $S_{A'B'C'} = a^2\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2S_{ABC} = 2$.

А.Заславский

М2353. *На окружности расположены n фишек. За ход можно взять две из них и переместить в противоположных направлениях на равные дуги. а) Докажите, что не более чем за n – 1 ход можно добиться того, чтобы точки, в которых стоят фишки, образовывали правильный n-угольник? б) Решите ту же задачу с дополнительным ограничением: в процессе перемещения фишкам запрещается перескакивать через другие фишки.*

Пусть данная окружность единичного радиуса и имеет центр в начале координат, тогда положение каждой фишки задается полярными углами $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ (углы определены с точностью до $2\pi k$). Рассмотрим точки ψ_0, $\psi_1 = \psi_0 + \dfrac{2\pi}{n}$, $\psi_2 = \psi_0 + \dfrac{2\pi \cdot 2}{n}$, … …, $\psi_{n-1} = \psi_0 + \dfrac{2\pi \cdot (n-1)}{n}$, лежащие в вершинах правильного n-угольника. Подберем ψ_0 так, чтобы величина $\psi_0 + \ldots + \psi_{n-1} = n\psi_0 + C$ (где $C = \dfrac{2\pi}{n}\left(1 + 2 + \ldots + (n-1)\right)$ отличалась от суммы $K = \varphi_0 + \ldots + \varphi_{n-1}$ на $2\pi m$ для некоторого целого m. Нужное ψ_0, очевидно, можно подобрать; подойдет, например, $\psi_0 = \dfrac{K - C}{n}$.

Далее, на i-м ходе переносим i-ю и n-ю фишки так, чтобы i-я фишка оказалась в точке ψ_i (если она случайно оказалась в точке ψ_i уже перед ходом, просто перейдем к следующему ходу). Заметим, что при выполнении операций величина $\varphi_0 + \ldots + \varphi_{n-1}$, определенная с точностью до целого кратного 2π, не меняется. Поэтому после $(n-1)$-й операции последняя n-я фишка автоматически займет положение ψ_0. Задача а) решена.

Перед тем как привести решение задачи б), рассмотрим сначала такую общую ситуацию. Пусть на окружности отмечено n различных *белых* точек $A_1, \ldots, A_n$ и n различных *черных* точек. Скажем, что задан *проект*, если черные точки обозначены некоторым образом $B_1, \ldots, B_n$ и для каждой пары точек A_i, B_i одна из двух возможных дуг, их соединяющих, покрашена, причем дуга покрашена красным, если от A_i к B_i она проходится по часовой стрелке, и покрашена синим в противном случае.

Проект назовем *хорошим*, если он удовлетворяет следующим трем условиям: (i) сумма длин красных дуг равна сумме длин синих дуг, (ii) никакие дуги разных цветов не имеют общих точек и (iii) нет двух дуг одного цвета, одна из которых целиком содержит другую.

Докажем следующее **утверждение** (на рисунке 1 изображен пример хорошего проекта и показан процесс выполнения ходов, который описан в доказательстве утверждения):

Пусть для данного хорошего проекта в точках $A_1, \ldots, A_n$ находится по фишке. Тогда не более чем за n – 1 ход из условия задачи можно добиться того, чтобы фишки оказались в вершинах $B_1, \ldots, B_n$ соответственно, причем в процессе выполнения ходов каждая фишка из своего начального положения A_i двигалась к конечному положению B_i только в одном направлении вдоль покрашенной дуги A_iB_i, и ни одна фишка не перескакивает через другую.

Докажем утверждение индукцией по n. База $n = 1$

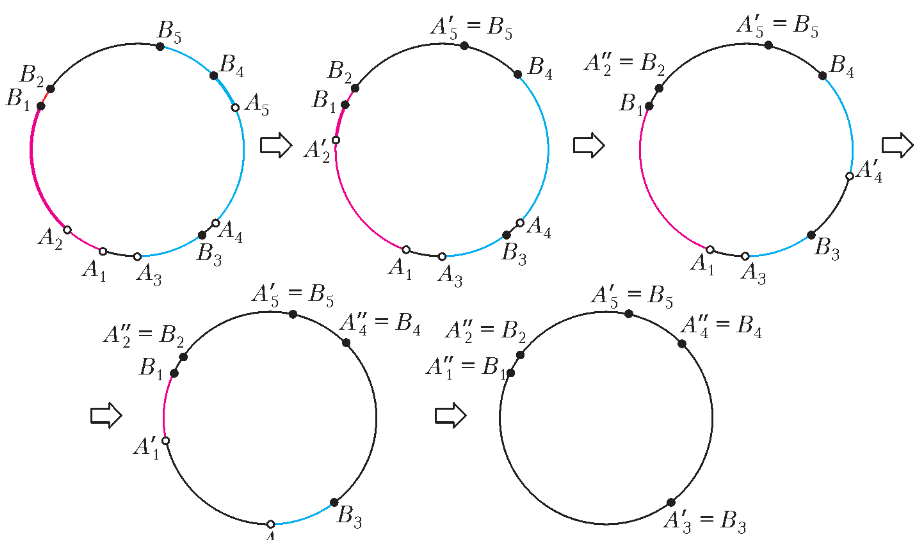


Рис. 1

очевидна, так как условие (i) выполнено, только если $B_1 = A_1$, т.е. когда не нужно делать ни одного хода.

Пусть теперь дан хороший проект, в котором даны $k > 1$ различных белых точек $A_1, \ldots, A_k$ и k различных черных точек $B_1, \ldots, B_k$. Можем предполагать, что для всех i точки A_i и B_i различны, иначе точку $A_i = B_i$ можно исключить из рассмотрения и применить к оставшимся предположение индукции (дуга A_iB_i нулевой длины не покрыта ни одной покрашенной дугой, значит, через фишку, находящуюся в точке A_i, не перепрыгнет ни одна из фишек).

Пойдем от некоторой синей дуги против часовой стрелки, пока не встретим конец красной дуги B_t. Пойдем от B_t по часовой стрелке, пока не встретим конец синей дуги B_s. Рассмотрим красную дугу A_tB_t и синюю дугу A_sB_s. Предположим, что на дуге A_tB_t кроме A_t есть еще одна точка A_i. В силу условия (ii) A_i должна являться концом красной дуги A_iB_i. По условию (iii) дуга A_iB_i должна продолжаться за точку B_t, что противоречит выбору B_t. Проведенное рассуждение означает, что на дуге A_tB_t нет других точек A_i, кроме A_t. Аналогично, на дуге A_sB_s нет других точек A_i, кроме A_s. Для определенности пусть дуга A_tB_t по длине не больше дуги A_sB_s. Выполним такой ход: возьмем фишки, находящиеся в точках A_t и A_s, и переместим вдоль дуг A_tB_t и A_sB_s соответственно на длину дуги A_tB_t. В процессе выполнения хода фишки не перепрыгивали через другие. По окончании хода фишка из A_t переместилась в B_t, а фишка из A_s переместилась в точку A_s'. После этого хода можем исключить из рассмотрения точку B_t (см. аналогичные рассуждения выше) и забыть про фишку, которая в ней находится, белую точку A_s заменить на белую точку A_s', а синюю дугу A_sB_s заменить на $A_s'B_s$. Легко видеть, что условия (i), (ii), (iii) останутся выполненными. Таким образом, совершив один ход, мы приходим к хорошему проекту для $k-1$ белых и $k-1$ черных точек, остается воспользоваться предположением индукции.

Перейдем к решению задачи б). Пусть белые точки A_i – начальные положения фишек, а черные точки – вершины правильного n-угольника из решения пункта а) Достаточно доказать, что для таких черных и белых точек есть хороший проект.

Вначале покажем, что можно сделать проект, удовлетворяющий условию (i). Обозначим черные точки произвольно $B_1, \ldots, B_n$. Проведем между A_1 и B_1 красную дугу, между A_2 и B_2 – синюю, на каждом очередном m-м шаге проводим дугу A_mB_m красного цвета, если до этого момента сумма длин уже проведенных красных дуг меньше, чем сумма длин уже проведенных синих дуг. В противном случае проводим дугу синего цвета. В результате после проведения n дуг разность сумм длин красных и синих дуг будет меньше чем 2π. Но из решения пункта а) вытекает, что сумма n дуг, проходимых от A_i к B_i по часовой стрелке, кратна 2π, это означает, что разность между суммами длин проведенных нами красных и синих дуг кратна 2π. Единственная возможность – эта разность равна 0, а это и значит выполнение условия (i).

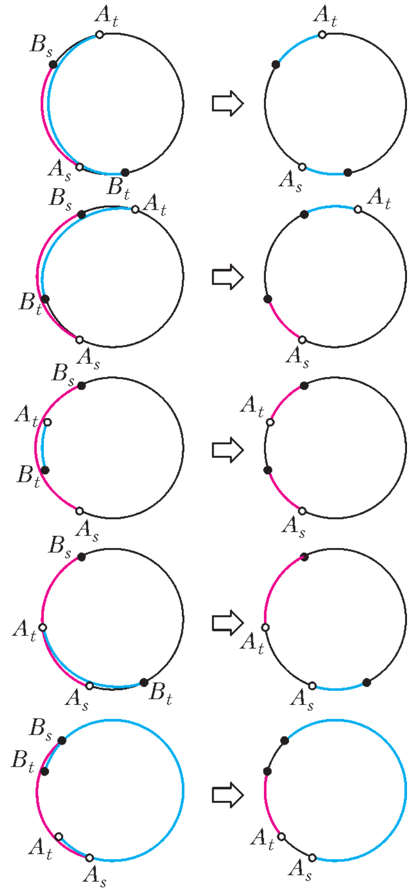


Рис. 2

Теперь среди всех возможных проектов, удовлетворяющих условию (i), выберем проекты с минимальной суммой длин дуг, а среди них выберем проект P с наименьшим количеством пар одноцветных дуг, одна из которых целиком содержит другую. Такие пары назовем *вложенными*.

Докажем, что для проекта P выполнено условие (ii). Предположим противное: некоторые две дуги A_tB_t и A_sB_s разных цветов пересекаются. В каждом из случаев (рис.2) можем поменять обозначения точек B_t и B_s и получить проект, в котором по-прежнему выполнено условие (i), но сумма длин дуг меньше – противоречие.

Докажем, что для проекта P выполнено условие (iii). Предположим противное, и пусть для определенности некоторая красная дуга A_tB_t содержит красную дугу A_sB_s (рис.3). Поменяем обозначения точек B_t и B_s, получим проект, по-прежнему удовлетворяющий условиям (i) и (ii). Сумма длин дуг при этой операции не изменилась, но исчезла одна вложенная пара дуг A_tB_t, A_sB_s. Заметим, что каждая из дуг A_tB_s, A_sB_t содержит дугу A_sB_s и содержится в дуге A_tB_t. Рассмотрим любую другую красную дугу $w = A_iB_i$, $i \neq s, t$. Если w содержит одну из дуг A_tB_s, A_sB_t, то w содержит и A_sB_s. Если w содержится в одной из дуг A_tB_s, A_sB_t, то w содержится и в A_tB_t. Если w содержит обе дуги A_tB_s, A_sB_t, то w содержит и A_tB_t (и A_sB_s). Если w содержится в каждой из дуг A_tB_s, A_sB_t, то w содержится и в A_sB_s (и A_tB_t). Это означает, что количество вложенных пар среди пар (w, A_tB_s), (w, A_sB_t) не больше, чем среди пар (w, A_tB_t), (w, A_sB_s). Тем самым, после обмена B_t и B_s общее количество вложенных пар строго уменьшилось, что противоречит выбору проекта P.

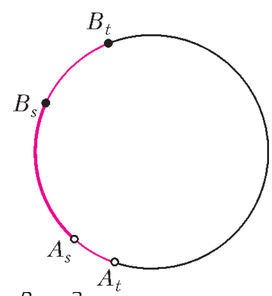


Рис. 3

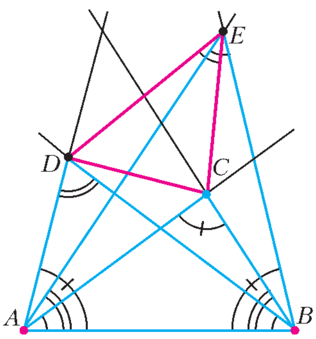
П.Кожевников

M2354. *Дан треугольник, у которого нет равных углов. Петя и Вася играют в такую игру: за один ход Петя отмечает точку на плоскости, а Вася красит ее по своему выбору в красный или синий цвет. Петя выиграет, если какие-то три из отмеченных им и покрашенных Васей точек образуют одноцветный треугольник, подобный исходному. За какое наименьшее число ходов Петя сможет гарантированно выиграть (каков бы ни был исходный треугольник)?*

Ответ: за 5 ходов.

За 4 хода Пете не выиграть, поскольку Вася может покрасить каждым цветом по две точки.

Покажем, как выиграть за 5 ходов. Отметим три точки A, B, C, образующие треугольник, подобный данному. Если Вася покрасит их в один цвет, то он уже проиграл. Поэтому можно считать, что Вася покрасил точки A и B в красный цвет, а C – в синий. Отметим точки D и E по ту же сторону от AB, что и C, так, чтобы были подобны треугольники ABC, BDA и EAB. Если хоть одна из точек D и E красная, то Петя уже выиграл. Осталось показать, что треугольники EDC и EAB подобны. Рассмотрим случай $\angle A < \angle B < \angle C$ (см. рисунок), другие случаи аналогичны. Из равенства углов подобных треугольников следует, что



$$\angle DAE = \angle DAB - \angle EAB = \angle C - \angle B = \\ = \angle EBA - \angle CBA = \angle CBE.$$

Кроме того, $DA : BC = AB : CA = EA : BE$. Значит, треугольники DAE и CBE подобны. Отсюда в треугольниках EDC и EAB углы E равны, и $DE : CE = AE : BE$, следовательно, они подобны.

Замечание. Описать рассмотренную конструкцию можно таким образом: лучи AC и BD симметричны относительно серединного перпендикуляра l к отрезку AB (образуют угол, равный $\angle A$ с отрезком AB), аналогично, пары лучей AE и BC, AD и BE симметричны относительно l (образуют, соответственно, углы, равные $\angle A$ и $\angle C$ с отрезком AB). Полученная картинка обладает следующим интересным свойством. Пусть точки C', D', E' симметричны точкам C, D, E относительно l соответственно (C' – точка пересечения лучей AE и BD и т.д.). Тогда шесть точек C, D, E, C', D', E' лежат на одной окружности.

К.Кноп, Л.Медников, А.Семенов

M2355*. *Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, не представимых в виде $\dfrac{p^a - p^b}{p^c - p^d}$, где p – простое, a, b, c, d – натуральные числа.*

Докажем сначала две вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Если $p > 1$ – натуральное число и $(p^k - 1) \vdots (p^n - 1)$, то $k \vdots n$.*

Доказательство леммы.

Разделим k на n с остатком: $k = qn + r$, где $0 \le r < n$. Тогда $p^k - 1 = p^r\left(p^{qn} - 1\right) + \left(p^r - 1\right)$. Первое слагаемое делится на $p^n - 1$. Значит, $\left(p^k - 1\right) \vdots \left(p^n - 1\right)$ тогда и только тогда, когда $\left(p^r - 1\right) \vdots \left(p^n - 1\right)$. При $r = 0$ это, очевидно, выполнено, а при $0 < r < n$ имеем $0 < p^r - 1 < p^n - 1$, поэтому $p^r - 1$ не делится на $p^n - 1$.

Лемма 2. *При любом натуральном $a > 3$ число $a^2 - 1$ имеет не менее двух различных простых делителей.*

Доказательство леммы.

Одно из чисел $a - 1$ и $a + 1$ не делится на 4; поскольку $a > 3$, у этого числа есть простой делитель $p > 2$. Оставшееся число не делится на p и также имеет какой-то простой делитель $q \ne p$. Значит, число $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$ делится на pq.

Перейдем к решению. Мы покажем, что любое число вида $D = 81 \cdot 4^n$ при $n > 1$ нельзя представить в требуемом виде. Предположим, что $D = \dfrac{p^a - p^b}{p^c - p^d}$; не умаляя общности, можно считать, что $a > b$ и $c > d$. Тогда

$$D = p^{b-d} \cdot \frac{p^{a-b} - 1}{p^{c-d} - 1}.$$

Отсюда $b \ge d$, а также, в силу леммы 1, $a - b = k(c - d)$ при натуральном k. Обозначив $\alpha = c - d$, получим

$$81 \cdot 4^n = p^{b-d}\left(1 + p^\alpha + \ldots + p^{(k-1)\alpha}\right). \qquad (1)$$

Возможны три случая.

Случай 1. Пусть $p = 2$; тогда $2^{b-d} = 4^n$ и $81 = 1 + 2^\alpha + \ldots + 2^{(k-1)\alpha}$. Это невозможно, ибо двоичное разложение числа 81 единственно и выглядит как $81 = 1 + 2^4 + 2^6$.

Случай 2. Пусть $p = 3$; тогда $3^{b-d} = 81$ и

$$4^n = 1 + 3^\alpha + \ldots + 3^{(k-1)\alpha}. \qquad (2)$$

Так как правая часть четна, то $k \vdots 2$; при этом $k \ne 2$, ибо в противном случае $\left(2^n\right)^2 - 1 = 3^\alpha$, что противоречит лемме 2. Значит, $4^n = \left(1 + 3^\alpha\right)\left(1 + 3^{2\alpha} + \ldots + 3^{(k-2)\alpha}\right)$, и во второй скобке опять число слагаемых должно быть четным. Следовательно, $4^n \vdots \left(1 + 3^{2\alpha}\right)$, что невозможно, ибо $1 + 3^{2\alpha}$ больше 2 и не делится на 4.

Случай 3. Пусть теперь $p > 3$. Тогда $b - d = 0$, и $81 \cdot 4^n = 1 + p^\alpha + \ldots + p^{(k-1)\alpha}$. Если k нечетно, то правая часть нечетна, что невозможно. Значит, k четно, и

$$81 \cdot 4^n = \left(1 + p^\alpha\right)\left(1 + p^\alpha + \ldots + p^{(k-2)\alpha}\right). \qquad (3)$$

Если $k = 2$, то получаем $\left(9 \cdot 2^n\right)^2 - 1 = p^\alpha$, что невозможно по лемме 2. Если $k \vdots 4$, то из правой скобки в (3) выносится сомножитель $1 + p^{2\alpha}$; но он не делится ни на 3, ни на 4, и при этом он больше 2, что невозможно. Значит, количество слагаемых в правой скобке нечетно (и больше одного), а тогда и само выражение нечетно, и поэтому оно является степенью тройки, не превосходящей 81. С другой стороны, так как количество слагаемых в этой скобке не меньше трех, выражение в правой скобке больше, чем $p^{4\alpha} > 3^{4\alpha} > 81$. Противоречие.

Замечание 1. Похожими рассуждениями можно показать, например, что числа вида $D = 16 \cdot 9^n$ при $n > 1$ также не представимы в требуемом виде.

Замечание 2. Покажем, что числа вида $2q$, где q – простое число вида $12s - 1$, также не представимы в нужном виде (отсюда можно вывести утверждение задачи с помощью теоремы Дирихле о простых числах в арифметических прогрессиях). Предположив, что верно равенство $2q = p^{b-d}\left(1 + p^{\alpha} + \ldots + p^{(k-1)\alpha}\right)$, приходим к следующим двум случаям.

1) Если $b - d = 0$, то соображения четности дают $p > 2$, k – четно. При четном $k > 2$ правая часть делится на $1 + p^{\alpha}$, при этом частное больше 2, что невозможно. Если же $k = 2$, то $2q = 1 + p^{\alpha}$. Так как $(2q-1)\vdots 3$, то $p = 3$. Но тогда при нечетном α имеем $2q \vdots 4$, что неверно; при четном α имеем $2q \equiv 2 \pmod 8$, значит, $(q-1)\vdots 4$ – тоже неверно.

2) При $b - d > 0$ приходим к единственной возможности: $p = 2$, $q = 1 + 2^{\alpha} + \ldots + 2^{(k-1)\alpha}$. При $\alpha = 1$ имеем $q = 2^k - 1$, откуда $q + 1$ не делится на 3, что неверно. При $\alpha > 1$ имеем $(q-1)\vdots 4$ – снова противоречие.

Д.Белов, И.Богданов, В.Сендеров

Ф2355. *Из речного порта A к расположенному ниже по течению реки порту B одновременно стартовали буксир и четыре (N) загруженных плота. Расстояние между портами L, скорость течения реки u. Буксир тащит плоты по одному, при этом его скорость v относительно воды с буксируемым плотом такая же, как и без плота. За какое минимальное время все плоты могут быть доставлены в порт B? Время, нужное для сцепления и расцепления плотов с буксиром, мало. Размерами плотов и буксира в сравнении с L можно пренебречь.*

Для того чтобы все загруженные плоты доплыли до порта B за минимальное время, необходимо, чтобы они прибыли в порт B одновременно. Значит, на буксировку каждого плота в направлении пункта назначения должно быть потрачено одинаковое время. Плоты без буксира плывут со скоростью течения, т.е. относительно воды не движутся. Допустим, первый плот был в момент старта взят на буксир и его тащили вперед в течение времени τ. Для возвращения буксира к оставшимся позади плотам требуется такое же время. Потом буксир подтягивает второй плот к первому и снова возвращается к плотам, оставшимся позади. И так далее. Время τ нужно подобрать таким, чтобы к моменту, когда буксир подтащит последний плот к группе плотов, все они оказались бы в пункте назначения. Общее время движения будет равно $2\tau + 2\tau + 2\tau + \tau = 7\tau$ (или $\tau(2N-1)$). При этом самый первый плот из всего этого времени в течение промежутка 6τ (или $2\tau(N-1)$) плыл без помощи буксира и только в течение времени τ его тащил буксир. Следовательно,

$$\tau(v + u) + 6\tau u = L,$$

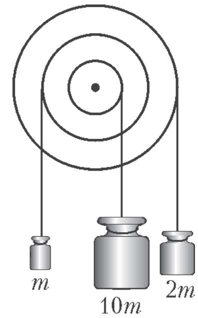
откуда

$$\tau = \frac{L}{v + 7u}, \quad t_{\min} = 7\tau = \frac{7L}{v + 7u}$$

$$\left(\text{или } t_{\min} = \frac{(2N-1)L}{v + (2N-1)u}\right).$$

Р.Аванесян, Э.Хачатрян

Ф2356. *Три невесомых шкива радиусами R, 2R и 3R концентрично скреплены между собой в единый блок и насажены на ось, на которой блок может вращаться без трения (см. рисунок). На шкивы намотаны невесомые и нерастяжимые нити, к которым подвешены грузы массами 10m, m и 2m соответственно Найдите ускорение груза массой 10m.*



Сначала рассмотрим «очевидное» решение. Из рисунка сразу видно, что блок из шкивов будет вращаться по часовой стрелке, ибо суммарный вращающий момент, образуемый силами тяжести, действующими на два правых груза, заведомо больше вращающего момента, создаваемого силой тяжести, действующей на левый груз. Пусть угловое ускорение блока равно ε. Тогда линейные ускорения грузов, подвешенных на нитях, намотанных на шкивы радиусами R, $2R$ и $3R$, будут равны $R\varepsilon$, $2R\varepsilon$ и $3R\varepsilon$ соответственно, причем ускорение левого груза направлено вертикально вверх, а ускорения двух правых грузов – вертикально вниз. Обозначим силы натяжения нитей через T_1, T_2 и T_3 соответственно. Тогда, выбрав для каждого груза в качестве положительного направление его ускорения, можем записать уравнения движения грузов:

$$10m \cdot R\varepsilon = 10mg - T_1,$$

$$m \cdot 2R\varepsilon = T_2 - mg,$$

$$2m \cdot 3R\varepsilon = 2mg - T_3.$$

Эта система, к сожалению, имеет четыре неизвестных: ε, T_1, T_2 и T_3. Поэтому необходимо еще одно уравнение. Его можно записать для вращения блока. Если момент инерции блока обозначить через I, а положительным направлением считать вращение по часовой стрелке, то получаем

$$I\varepsilon = R \cdot T_1 - 2R \cdot T_2 + 3R \cdot T_3.$$

Так как все шкивы невесомые, то момент инерции блока равен нулю: $I = 0$, поэтому последнее уравнение (после сокращения на R) можно записать в виде

$$T_1 - 2T_2 + 3T_3 = 0.$$

Таким образом, получаем систему из четырех уравнений, решая которую, находим

$$T_1 = \frac{45}{8}mg$$

(значения остальных переменных нас не интересуют). Тогда суммарная сила, действующая на груз массой

$10m$, равна $10mg - \frac{45}{8}mg = \frac{35}{8}mg$, и ускорение этого груза составляет

$$a_1 = \frac{35}{8}mg : (10m) = \frac{7}{16}g .$$

Казалось бы, все в порядке, но давайте попробуем найти еще и ускорение груза массой $2m$. Это можно сделать, вычислив предварительно силу натяжения нити T_3, но можно и рассуждая логически. Так как радиус шкива, к которому нитью прикреплен груз массой $2m$, втрое больше радиуса шкива с грузом массой $10m$, то и ускорение будет в 3 раза больше и составит

$$a_3 = 3 \cdot \frac{7}{16}g = \frac{21}{16}g .$$

Это больше, чем ускорение свободного падения! Иными словами, груз массой $2m$ пойдет вниз стремительней, чем если бы он свободно падал. Что-то здесь не так.

Впрочем, ответ выползает на поверхность, если не полениться и все-таки найти силу натяжения нити T_3. Она оказывается равной $\left(-\frac{5}{8}mg\right)$, т.е. *отрицательному* числу. А это означает, что если бы груз массой $2m$ соединялся со шкивом не нитью, а жестким стержнем, то этот стержень сам толкал бы груз вниз (дополнительно к силе тяжести) и груз получил бы такое ускорение. Оно и неудивительно – из условия сразу видно, что главной «движущей силой» блока является груз массой $10m$, а остальные – так, довески.

Ну, а теперь приступим к правильному решению. Поскольку груз массой $2m$ будет фактически свободно падать и его нить не будет натянута, то останется система из двух грузов массами m и $10m$. Для нее составляем «урезанную» систему – на этот раз из трех уравнений:

$$10m \cdot R\varepsilon = 10mg - T_1 ,$$

$$m \cdot 2R\varepsilon = T_2 - mg ,$$

$$T_1 - 2T_2 = 0 .$$

Отсюда получаем

$$T_1 = \frac{30}{7}mg , \; 10mg - T_1 = 10mg - \frac{30}{7}mg = \frac{40}{7}mg ,$$

$$a_1 = \frac{40}{7}mg : (10m) = \frac{4}{7}g .$$

Отметим, что это ускорение больше, чем полученное первоначально. В чем дело – понятно: грузу массой $10m$ не надо «тратить силы» на толкание груза массой $2m$, поэтому он и будет ускоряться быстрее.

И.Акулич

Ф2357. *Днем 21 июня Солнце «стоит» высоко, и на каждый квадратный метр поверхности земли падает излучение, несущее мощность $W = 1$ кВт. Ветра нет, влажность воздуха невысокая, температура воздуха $t_0 = 20$ °C. Оцените время, за которое высохнет лужа на асфальте, если ее начальная глубина $h = 1$ см. Нужные данные отыщите самостоятельно.*

На каждом квадратном метре лужи находится $\rho Sh = 10$ кг, или $\nu = \frac{\rho Sh}{M} = 555{,}55$ моль, воды. Предположим, что температура воздуха и воды в луже остается неизменной, а вся тепловая энергия солнечных лучей, падающих на поверхность лужи, идет на испарение воды. Известны удельная теплота испарения воды при температуре 100 °C: $L = 2{,}256$ МДж/кг, или молярная теплота $L_M = 40{,}6$ кДж/моль, и удельная теплоемкость жидкой воды: $c_ж = 4180$ Дж/(кг·К), или молярная теплоемкость $C_M = 75{,}24$ Дж/(моль·К). Молекулы воды трехатомные, поэтому молярная теплоемкость водяного пара при постоянном объеме равна $C_V = 3R = 24{,}93$ Дж/(моль·К). Чтобы вычислить молярную теплоту испарения воды при температуре $t_0 = 20$ °C, нужно найти изменение внутренней энергии одного моля воды при испарении и работу, которую совершает при этом пар.

Рассмотрим ситуацию, в которой легкая перегородка отделяет друг от друга области с сухим воздухом и с влажным воздухом при влажности 100%. Давление по одну и по другую сторону от перегородки одно и то же (атмосферное). Парциальное давление насыщенного водяного пара по одну сторону от перегородки уравновешивается соответствующей частью общего давления воздуха по другую сторону перегородки. Поэтому работа водяного пара при испарении одного моля воды при некоторой выбранной температуре T равна произведению давления насыщенного пара на объем, который занимает моль насыщенного водяного пара при выбранной температуре, а это как раз равно произведению RT. Изменение внутренней энергии одного моля воды в процессе, когда воду сначала нагрели до температуры 100 °C, затем испарили, а потом водяной пар охладили до начальной температуры t_0, равно

$$\Delta U = C_M(100 - t_0) + (L_M - R(273 + 100)) - C_V(100 - t_0) .$$

А количество теплоты, необходимое для испарения одного моля воды при температуре $t_0 = 20$ °C, равно

$$\Delta Q = \Delta U + R(273 + t_0) = C_M(100 - t_0) + L_M - (C_V + R)(100 - t_0) = 43{,}96 \text{ кДж/моль} .$$

Общее количество теплоты, нужное для испарения воды на одном квадратном метре лужи, пропорционально количеству молей воды $\nu = 555{,}55$ моль на этой площади. А время, необходимое для испарения всей воды в луже, равно

$$\tau = \frac{\nu \Delta Q}{W} \approx 24422 \text{ с} \approx 7 \text{ ч} .$$

С.Варламов

Ф2358. *Электрические заряды равномерно распределены по длинному тонкому изолированному стержню MN с линейной плотностью зарядов σ. 1) Покажите, что в произвольной точке K электрическое поле*

$\vec{E}$ стержня направлено по биссектрисе угла MKN. 2) Определите направление и величину напряженности электрического поля в плоскости, которая перпендикулярна стержню и содержит одну из конечных точек стержня. 3) Определите напряженность электрического поля отрезка AB, равномерно заряженного с линейной плотностью σ, в точке O, удаленной от отрезка на расстояние r (рис.1). Углы α и β заданы.

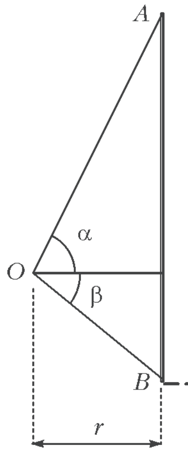


Рис. 1

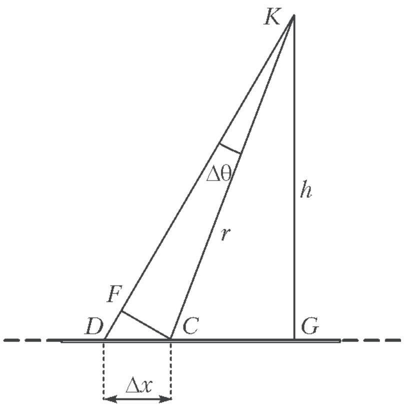


Рис. 2

1) Выделим на стержне очень маленький участок CD длиной Δx, который виден из точки K под углом $\Delta\theta$ (рис.2). Из подобия треугольников KGC и CDF можно записать следующие равенства:

$$\Delta x = CF\frac{r}{h} = r\Delta\theta\frac{r}{h} = \frac{r^2}{h}\Delta\theta .$$

Так как на отрезке CD находится заряд $\Delta q = \sigma\Delta x$, где σ – заряд, приходящийся на единицу длины, то величина напряженности электрического поля от этого заряда определяется выражением

$$\Delta E = k\frac{\Delta q}{r^2} = k\frac{\sigma}{h}\Delta\theta .$$

Эта величина непосредственно не зависит от угла θ, указывающего направление на выделенный малый отрезок стержня, а зависит только от угла $\Delta\theta$, под которым виден этот отрезок Δx. Таким образом, векторы напряженности электрического поля от малых отрезков заряженного стержня, расположенных симметрично относительно биссектрисы угла MKN, имеют одну и ту же величину, и их результирующая направлена вдоль этой биссектрисы (рис.3). Ясно, что для любой заданной точки K найдется такое значение θ, при котором $\angle MKN = 2\theta$, и тогда, суммируя результаты для согласованных пар маленьких отрезков стержня, получаем результат для всего стержня в целом.

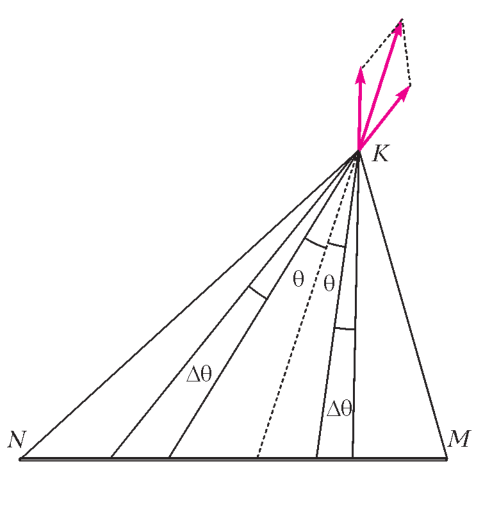


Рис. 3

2) Используя уже полученный результат, можно сказать, что направление электрического поля $\vec{E}$ в точке плоскости на расстоянии h от конца M «бесконечно» длинного стержня составляет угол 45° со стержнем (рис.4). Величину напряженности E можно найти с помощью метода наложения. Представим себе, что два очень длинных равномерно заряженных стержня соединены вплотную. Результирующая напряженность поля будет равна векторной сумме напряженностей полей от двух половин стержня (см. рис.4). Направление результирующей напряженности, очевидно, перпендикулярно стержню (ввиду симметрии), а ее величина в $\sqrt{2}$ раз больше напряженности поля E от одного стержня. Поле такого «объединенного» стержня можно найти с помощью теоремы Гаусса, окружив отрезок стержня длиной l воображаемым цилиндром радиусом h и посчитав поток вектора напряженности через замкнутую поверхность:

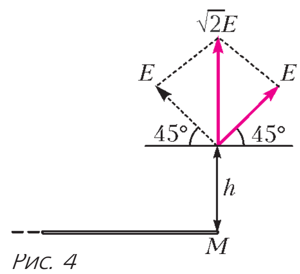


Рис. 4

$$\varepsilon_0\Phi = q, \text{ или } \varepsilon_0\cdot\sqrt{2}E\cdot 2\pi hl = \sigma l ,$$

откуда

$$E = \frac{\sqrt{2}\sigma}{4\pi\varepsilon_0 h} = k\frac{\sqrt{2}\sigma}{h} .$$

3) Напряженность электрического поля $\vec{E}$ отрезка AB в точке O направлена вдоль биссектрисы $\angle AOB$ под углом $\frac{\alpha-\beta}{2}$ к направлению OO' (рис.5). Найдем, чему равна проекция поля $E_\perp$ на это направление. Разобьем отрезок на маленькие кусочки и запишем принцип суперпозиции:

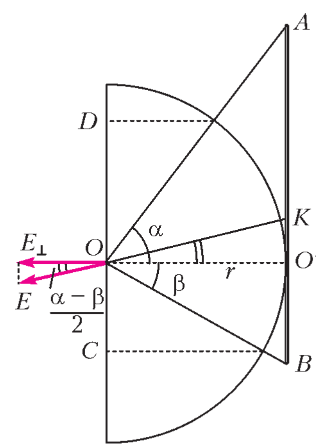


Рис. 5

$$E_\perp = \sum_i E_{i\perp} = \sum_i E\cos\theta_i =$$

$$= \sum_i k\frac{\sigma\Delta x_i}{s_i^2}\cos\theta_i .$$

Такая сумма пугает обилием индексов «i», и за знак суммы можно вынести только $k\sigma$. Однако расчет можно упростить, придав геометрический смысл оставшемуся выражению. Для этого проведем касающуюся отрезка окружность с центром в точке наблюдения. Тогда (обозначения ясны из рисунков 5 и 6)

$$\Delta y_i = \Delta x_i\cos\theta_i , \quad \Delta z_i = \frac{\Delta y_i r}{s_i} , \; \frac{r}{s_i} = \cos\theta_i .$$

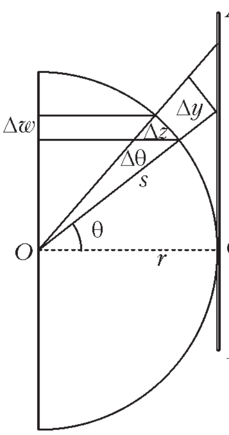


Рис. 6

Следовательно,

$$E_{\perp}=k\frac{\sigma}{r^2}\sum_i\frac{\Delta y_i r}{s_i}\frac{r}{s_i}=$$

$$=k\frac{\sigma}{r^2}\sum_i\Delta z_i\cos\theta_i=$$

$$=k\frac{\sigma}{r^2}\sum_i\Delta w_i=k\frac{\sigma}{r^2}\cdot DC=$$

$$=k\frac{\sigma}{r^2}\left(r\sin\alpha+r\sin\beta\right)=$$

$$=2k\frac{\sigma}{r}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Окончательно получаем

$$E=\frac{E_{\perp}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=2k\frac{\sigma}{r}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

А.Бычков

Ф2359. *На стеклянном баллоне лампочки накаливания написано: 220 В, 10 Вт. Сопротивление спирали холодной лампочки, измеренное с помощью мультиметра, оказалось равным 484 Ом. Какой ток потечет через эту лампочку, если включить ее в сеть постоянного тока напряжением 110 В?*

Мультиметр при измерении какого-то сопротивления пропускает по нему небольшой ток, который во много раз меньше рабочего тока лампочки. Расчетное сопротивление R горячей лампочки, работающей при напряжении $U = 220$ В и мощности $P = 10$ Вт, равно $\frac{U^2}{P} = 4840$ Ом, и оно в десять раз больше ее холодного сопротивления $r = 484$ Ом. Следовательно, температура горячей лампочки T примерно в 10 раз выше, чем комнатная температура t, при которой измерялось ее холодное сопротивление. Если считать, что величина сопротивления просто пропорциональна абсолютной температуре, то рабочая температура лампочки в этом случае равна примерно $T = 3000$ К. Эта температура гораздо больше температуры окружающей лампочку среды, поэтому тепловые (и световые) потери лампочки по закону Стефана–Больцмана пропорциональны четвертой степени температуры. Обратным потоком тепла за счет излучения среды можно в таком случае пренебречь. Поступающая из электрической сети мощность равна

$$UI=U\frac{U}{R}=\frac{U^2}{r}\frac{t}{T}.$$

Она с точностью до множителя равна T^4. В то же время отношение $\frac{U}{I}$ равно

$$\frac{U}{I}=R=r\frac{T}{t}.$$

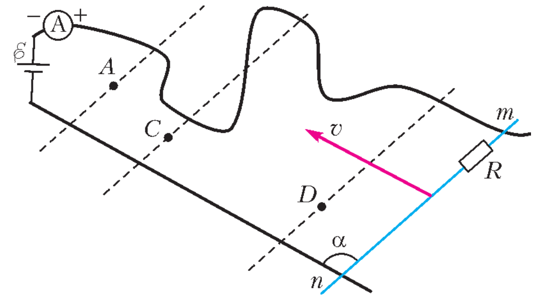
Комбинируя эти соотношения, можно найти зависимость тока, текущего через лампочку, от напряжения на ней:

$$I=U^{0,6}\cdot\mathrm{const}.$$

В итоге ток через лампочку при напряжении на ней 110 В будет равен примерно 30 мА.

А.Старов

Ф2360. *Две толстые медные шины лежат на горизонтальном столе (см. рисунок; вид сверху). К шинам подключена идеальная батарейка с ЭДС $\mathcal{E}$ = 1 В. На*



шинах находится медная перемычка mn, которая движется поступательно с постоянной горизонтальной скоростью v = 1 м/с в направлении, указанном стрелкой. В перемычку вставлено сопротивление R = = 1 Ом. В одну из шин «врезан» идеальный амперметр и указано расположение (знаки) его клемм. Вертикальное и однородное магнитное поле направлено вверх (от рисунка к читателю), его индукция равна по модулю B = 1 Тл. Какой ток тек через амперметр в моменты времени, когда перемычка проходила через точки A и C, если в момент прохождения перемычки через точку D амперметр показывал I = +1А? Каким было расстояние между точками касания перемычкой шин в момент прохождения перемычкой точки D? Угол между перемычкой и прямой шиной равен $\alpha = 2\pi/5 = 72°$. *Для измерения расстояний на рисунке пользуйтесь линейкой с миллиметровыми делениями.*

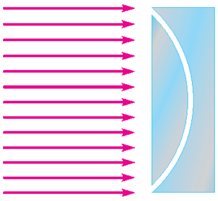
При движении перемычки меняется магнитный поток в замкнутом контуре, образованном участками шин, перемычкой и батарейкой с подводящими проводами. Длины участков перемычки между местами контакта шин и перемычки для случаев A, C и D относятся друг к другу как 3:2:6. Ширине перемычки L, когда она проходит через точку D, соответствует суммарная ЭДС в контуре, равная 1 В. Следовательно, ЭДС индукции, связанная с движением перемычки, равна по модулю $U = 2$ В. При прохождении перемычкой точек A и C величины ЭДС в выбранном контуре, связанные с движением перемычки, равны 1 В и $2/3$ В соответственно. Следовательно, ток через амперметр при прохождении перемычкой точки A равен нулю, а при прохождении точки C он равен $-1/3$ А.

Длина участка перемычки между точками касания ею шин в момент прохождения через точку D равна

$$L=\frac{U}{Bv\sin\alpha}\approx 2{,}1\ \text{м}.$$

Д.Сергеев

Ф2361. *Стеклянную плоскопараллельную пластинку в форме диска диаметром d = 4 см разрезали на две части с одинаковыми массами m = 10 г в виде собирающей и рассеивающей линз с фокусными расстояниями F_1 = +10 см и F_2 = –10 см соответственно (см. рисунок). Линзы раздвинули так, что между ними образовался небольшой зазор постоянной толщины δ = 1 мм. Система линз облучается мощным пучком лазерного излучения интенсивностью I =*



$= 10$ *кВт/см*^{2}. *Рассчитайте эффективную силу взаимодействия между линзами, возникающую из-за преломления света. Через какое время линзы «схлопнутся»? На поверхности линз нанесено просветляющее покрытие. Потерями в стекле пренебречь. Силу тяжести не учитывать.*

Сила, действующая на собирающую линзу, равна полному изменению импульса фотонов, падающих на линзу в единицу времени. Импульс изменяется из-за преломления света в стекле. При этом происходит изменение только направления движения фотонов без изменения величины их импульсов. Уменьшение составляющей импульса вдоль оптической оси для фотонов, падающих за секунду на кольцо радиусом r и толщиной dr, равна действующей на это кольцо силе:

$$df = \frac{I}{c} \cdot 2\pi r dr (1 - \cos\varphi) \approx \frac{I\pi r\varphi^2}{c} dr \approx \frac{I\pi r^3}{cF^2} dr .$$

Полная сила, действующая на собирающую линзу, равна

$$f = \int \frac{I\pi r^3}{cF^2} dr = \frac{I\pi d^4}{64cF^2} = 4{,}2 \cdot 10^{-6} \text{ Н} .$$

Очевидно, что при выходе из системы линз, представляющей собой плоскопараллельную пластинку, пучок вновь распространяется параллельно оптической оси, а значит, рассеивающая линза восстанавливает импульс фотонов. Иными словами, сила, действующая на рассеивающую линзу, по величине тоже равна f, но направлена в сторону собирающей линзы. Таким образом, в поле лазерного излучения между линзами возникает эффективная сила притяжения, равная

$$f = 4{,}2 \cdot 10^{-6} \text{ Н} .$$

Под действием этой силы линзы, двигаясь с ускорением

$$a = \frac{f}{m} = 4{,}2 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}^2 = 0{,}42 \text{ мм/с}^2 ,$$

столкнутся через время

$$t = \sqrt{\frac{2(\delta/2)}{a}} \approx 1{,}54 \text{ с} .$$

А.Гуденко

Ф2362. *Тончайшая паутинка, случайно попавшая в кадр при фотографировании со вспышкой удаленного предмета (узоров гардины), на фотографии превратилась в яркую широкую линию, пересекающую кадр (рис.1). Каково расстояние от линзы объектива фотоаппарата до паутинки? Линзу объектива считайте тонкой. Кадр на рисунке в увеличенном масштабе воспроизводит светочувствительную матрицу размером* $4{,}3 \times 5{,}8$ мм.

Указание. Технические характеристики фотоснимка: диафрагма $D = 2{,}75$ мм, фокусное расстояние линзы объектива $F = 14$ мм, выдержка $\tau = 1/80$ с, присутствует фотовспышка.

Рис. 1

Если паутинка находится на расстоянии a от переднего фокуса объектива и фокусируется на плоскость на расстоянии Δb за плоскостью матрицы, расположенной в задней фокальной плоскости объектива (рис.2),

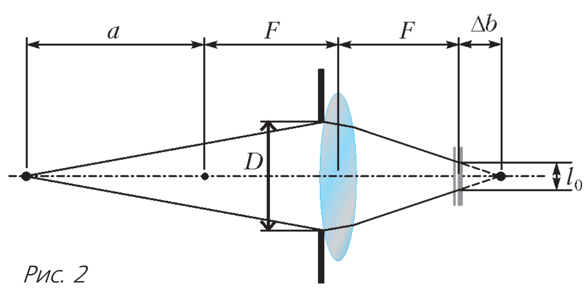


Рис. 2

то из формулы линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \text{ или } \frac{1}{a+F} + \frac{1}{F+\Delta b} = \frac{1}{F},$$

получаем

$$a\Delta b = F^2 .$$

Отсюда находим

$$a = F\left(\frac{D}{l_0} - 1\right),$$

где l_0 – толщина изображения паутинки на матрице. С помощью линейки измеряем толщину паутинки на снимке: $l = 10$ мм, размер фотоснимка: $H = 144$ мм, размер матрицы: $h = 5{,}8$ мм и определяем увеличение Γ, с которым матрица воспроизводится на снимке:

$$\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{144 \text{ мм}}{5{,}8 \text{ мм}} = 24{,}8 .$$

Тогда

$$l = \Gamma l_0 ,\quad l_0 = \frac{l}{\Gamma} ,\quad a = F\left(\frac{D}{l_0} - 1\right) = F\left(\frac{D\Gamma}{l} - 1\right).$$

Таким образом, расстояние от паутинки до объектива составляет

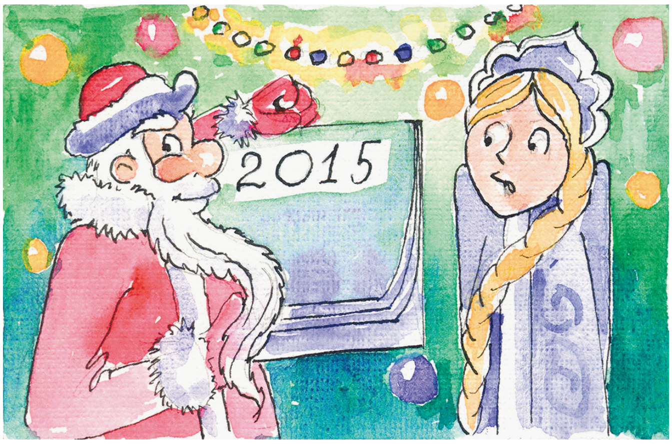
$$d = a + F = F\frac{D\Gamma}{l} \approx 10 \text{ см} .$$

А.Гуденко

Задачи

1. Можно ли число 2015 представить в виде суммы пяти последовательных натуральных чисел?

Т.Волосникова

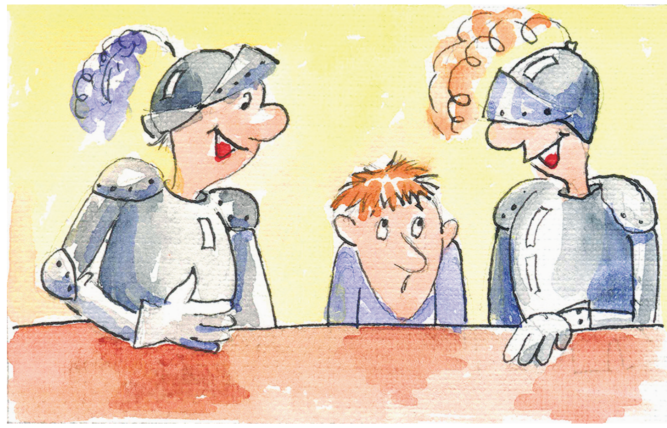


2. У нас во дворе растут две березы и две рябины. Когда Вася смотрит из своего окна, то он видит две березы, стоящие между двумя рябинами. Когда Петя смотрит из своего окна, то он видит две рябины, стоящие между двумя березами. Как такое может быть?

С.Дворянинов

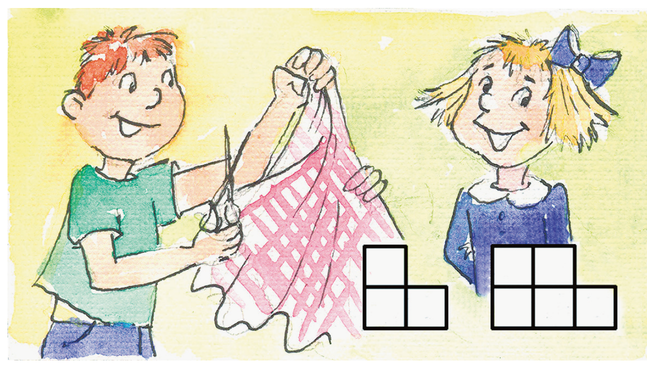
3. Вокруг круглого стола сидят одиннадцать человек – каждый либо рыцарь, либо лжец. Рыцарь всегда говорит правду, а лжец всегда лжет. Каждого из них спросили: «Кто сидит справа от тебя?» Могли ли все одиннадцать ответить «лжец»?

Н.Агаханов, О.Подлипский



4. На какое наименьшее количество фигурок можно полностью разрезать квадрат 7×7, если фигурки – трехклеточные уголки и пятиклеточные фигурки, как на рисунке? Фигурки можно поворачивать и переворачивать.

Н.Агаханов, О.Подлипский

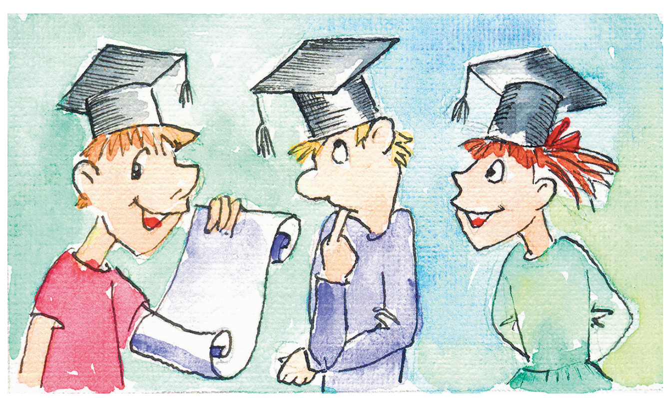


5. Боря, Валя и Гера сочинили теорему:

Даны два многоугольника, имеющие равные площади. Тогда один из них можно разрезать на 100 частей, из которых можно сложить другой.

Верна ли теорема Бори, Вали и Геры?

П.Кожевников



Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Иллюстрации Д.Гришуковой

Про волчок и гироскоп

С.ДВОРЯНИНОВ

В прежние времена, когда часы-будильники были механические, многие ребята с нетерпением ждали, когда же такое нужное в повседневной жизни устройство ... сломается. Тогда можно было снять корпус часов и увидеть его механизм – систему связанных одна с другой шестеренок. Они отличались количеством зубьев. Покрутишь одну шестеренку, не очень быстро, а соседняя с ней в ответ может вращаться очень даже быстро. Все зависит от передаточного числа – от отношения числа зубцов на каждой шестеренке.

А потом, если часы починить не удавалось, наступал следующий этап – механизм разбирался на отдельные части. И вот на столе десяток маленьких волчков – ось и на ней шестеренка. Можно было взять ось двумя пальцами и закрутить ее в вертикальном положении. После этот волчок еще долго крутился на столе и не падал. Почему название такое – волчок? Возможно, маленькие волчата кружатся подобным образом, пытаясь поймать себя за собственный хвост и падая потом в изнеможении от усталости.

Есть еще такая игрушка – юла. Она раскручивается периодическим нажатием ручки. Обычный волчок со временем падает, потому что из-за трения скорость его вращения уменьшается. А у юлы идет постоянная энергетическая подпитка, которая компенсирует потери кинетической энергии.

Удивительное это все-таки явление: стоит волчок на одной ножке и не падает! Если мы попытаемся вращающийся волчок наклонить, то сделать это не удастся. В ответ волчок лишь уйдет немного в сторону и продолжит вращаться, как ни в чем не бывало. Это его свойство лучше почувствовать своими руками, и вот как.

Когда будете менять камеру или покрышку на своем велосипеде, не спешите ставить колесо на место. Возьмите ось колеса в обе руки, расположите ее горизонтально и попросите товарища это колесо раскрутить. Так, колесо крутится, вы ощущаете его вес. А теперь попробуйте колесо наклонить влево или вправо, наклоняя ось, или повернуть колесо влево-вправо. Вы сразу заметите, что сделать это ой как нелегко. При малейшей попытке изменить положение оси колеса давление на ваши пальцы увеличивается. Однако вы без особых усилий можете перемещать колесо вперед-назад или вверх-вниз – при таких перемещениях ось колеса сохраняет свое первоначальное направление. А вот при поворотах или наклонах это направление меняется. Этот простой опыт наглядно показывает основное свойство волчка – сохранять в пространстве направление оси вращения неизменным.

Продолжим наши эксперименты с волчком. Раскрутив волчок на листе картона, его можно подбросить вверх. Покрутившись в воздухе и снова оказавшись на картонке, волчок продолжит свое вращение. Картонку можно немного наклонить – ось вращения останется вертикальной. Правда, при этом точка опоры волчка потихоньку начнет скользить по наклонной плоскости вниз. Чтобы этого не происходило, в картонке можно сделать небольшое углубление – лунку, в которую помещается опора. Тогда картонку можно наклонять в разные стороны довольно значительно, а ось волчка будет оставаться вертикальной.

А теперь – самое интересное. Вообразим, что мы, находясь на Северном полюсе Земли, раскрутили наш волчок вокруг вертикальной оси и поместили его на горизонтальную картонку. На картонке указаны направления на север и на юг, на запад и на восток, и картонку можно располагать согласно этим направлениям. Закроем наш волчок, например, бумажным колпаком. Пусть он там вращается, оставаясь невидимым для нас. По компасу отправимся теперь из указанной точки вдоль меридиана в сторону экватора, держа картонку с волчком перед собой. В каждой точке земной поверхности вертикаль направлена вдоль радиуса Земли; соответственно, в каждой точке – своя горизонтальная плоскость. Так вот, когда мы будем двигаться вдоль меридиана с севера на юг, нам будет казаться, что наша горизонтальная картонка сохраняет неизменным свое горизонтальное положение. Но когда мы пройдем половину пути до экватора и попадем на параллель, соответствующую 45° северной широты, картонка повернется в пространстве от своего начального положения на угол в 45°. Но для нас это изменение пройдет абсолютно незаметным.

Уберем теперь колпак, скрывавший наш волчок. Как вы думаете – каким окажется направление оси вращения? Будет ли ось по-прежнему располагаться вертикально? Нет, теперь ось волчка вертикальной не будет. Она будет сохранять направление вертикали на Северном полюсе. А угол между этой старой вертикалью и новой вертикалью в достигнутой нами точке будет равен 45° . Именно на такой угол в северном направлении будет теперь отклонена ось волчка от вертикали (рис.1).

Итак, при движении вдоль меридиана к югу ось волчка отклоняется к северу. Будем наблюдать за этим отклонением. Пусть в некоторой точке нашего пути отклонение оси от вертикали составило, скажем, 30°.

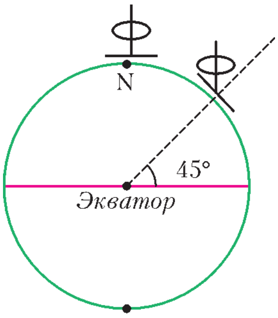


Рис. 1

Ясно, что теперь мы попали в точку, соответствующую (45 – 30 = 15) пятнадцати градусам северной широты. Тем самым, вращающийся волчок показывает изменение широты при движении волчка по поверхности Земли и, следовательно, может служить для определения широты местонахождения.

Рассмотрим теперь такой крайний случай. Мы раскрутили волчок на Северном полюсе и отправились с ним по меридиану на Южный полюс. Ясно, что на Южном полюсе нам должно казаться, что теперь волчок крутится «вверх ногами», а в середине пути, на экваторе, ось будет горизонтальной. Правда, задолго до этого момента волчок неизбежно выскочит из своего подпятника или же диск волчка чиркнет по плоскости картонки. Как бы осторожно мы не несли в руках волчок на картонке, перемещать его по всей поверхности Земли не удастся. Стало быть, требуется какое-то специальное крепление волчка.

И такое крепление было изобретено. Рассмотрим простейший вариант. Пусть ось волчка – это подвижный диаметр кольца, которое расположено в вертикальной плоскости, содержащей меридиан. При перемещении вдоль меридиана положение оси волчка относительно кольца будет меняться. Совершим обход вокруг земного шара по меридиану из Северного полюса до Южного и назад по другому меридиану. За время такого путешествия ось волчка сделает в кольце полный оборот, своего рода сальто-мортале. Точнее говоря, это кольцо сделает один оборот вокруг своего диаметра (т.е. оси волчка), сохраняющего постоянное направление.

Так, хорошо. Но почему мы говорим только про широту и про движение вдоль меридиана? Причина вот в чем. Напомним, что в каждой точке земной поверхности нормаль (т.е. вертикальная прямая) и меридиан лежат в одной плоскости. Эта плоскость проходит через данную точку и диаметр Земли, соединяющий два полюса. При движении по меридиану ось волчка тоже лежит в этой плоскости. А вот для параллели это не так. В данной точке на Земле нормаль к поверхности и параллель, проходящая через эту точку, не лежат в одной плоскости. Исключение составляют лишь точки экватора (экватор и нормаль в любой его точке лежат в экваториальной плоскости).

Запустим теперь вертикальный волчок в точке экватора и отправимся в путь строго вдоль экватора. Тогда в каждой точке пути по углу отклонения оси волчка от вертикали мы легко определим изменение долготы по сравнению с начальной. А для того чтобы ось волчка могла при этом занимать в пространстве любое положение и отклоняться не только к северу-югу, но и к востоку-западу, наше кольцо нужно поместить внутрь другого кольца, которое лежит в плоскости, перпендикулярной направлению на север (рис.2). Название этой конструкции – карданов подвес, по имени Джероламо Кардоно, который детально описал этот подвес в своей получившей широкую известность книге «Хитроумное устройство вещей» (1550 г.).

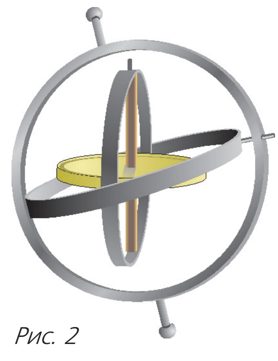


Рис. 2

В технике подобное устройство называют гироскопом. *Гиро* означает кружусь, вращаюсь, а *скоп* – смотрю, наблюдаю. Термин этот предложил Жан Фуко в 1852 году. Это его знаменитый маятник экспериментально доказывает вращение Земли вокруг своей оси. Маятник сохраняет плоскость своих колебаний так же, как гироскоп сохраняет направление оси вращения. И маятник, и гироскоп обладают свойством сохранения вращательного момента. Соответствующая теория не проста, и говорить о ней пока мы не будем. Сейчас для нас важны лишь легко осуществимые эксперименты с гироскопом, о которых рассказывалось выше.

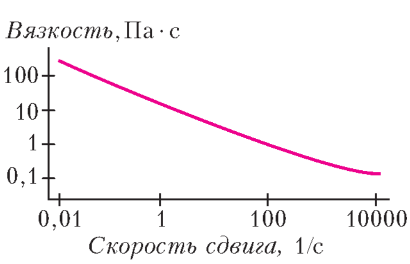
Чтобы вращение гироскопа со временем не замедлялось, его ось совмещают с ротором электродвигателя. Гироскопы устанавливают на самолетах, кораблях, ракетах, космических аппаратах. Их изготовление относится к точной механике. Масса гироскопа может быть весьма значительной – до нескольких десятков килограммов, а скорость вращения – до тысячи оборотов в минуту.

Интересно, а с какой скоростью можно закрутить детский волчок? Сможете ответить на этот вопрос?

Тиксотропия – что это?

(Начало см. на 4-й странице обложки)

Тиксотропия – это свойство некоторых веществ уменьшать свою вязкость при механическом воздействии и увеличивать ее в состоянии покоя. На рисунке показано, как уменьшается вязкость водорастворимой краски при увеличении скорости сдвига. Когда мы вынимаем кисть из банки с краской и делаем это достаточно медленно, то на кисти остается довольно много краски, так как вязкость ее высока. Коснувшись кистью с краской стены, мы начинаем интенсивно двигать ею из стороны в сторону, уменьшая этим вязкость краски в сотни раз. В результате краска становится жидкой, стекает с кисти и растекается тонким слоем по поверхности стены. Но сразу после того, как мы перестаем «дергать» этот слой краски, вязкость только что нанесенного слоя краски начинает увеличиваться. Если бы этого роста вязкости не происходило, то краска стекала бы с ее поверхности, как вода.



То же относится и к процессу нанесения на кожу косметического крема.

К.Богданов

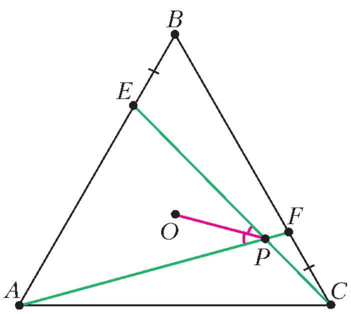
Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы завершаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу: savin.contest@gmail.com (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

11. Валентин умеет писать только цифры 1 и 9 и знак «+». Он хочет записать сумму нескольких чисел, чтобы значение суммы равнялось 2015. Какое наименьшее число слагаемых ему для этого потребуется?

Т.Волосникова



12. В равностороннем треугольнике ABC на сторонах AB и BC выбраны точки E и F соответственно так, что $BE = CF$. Пусть O – центр треугольника, а P – точка пересечения AF и CE. Докажите, что OP – биссектриса угла EPA.

В.Расторгуев

13. Дана таблица 2×20. В ее клетки нужно расставить числа 1, 2, ..., 40 так чтобы каждое число встретилось ровно один раз, а суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце таблицы были нечетными. Сколькими способами это можно сделать?

Н. Агаханов

14. На плоскости отметили несколько точек красным цветом так, что расстояние между любыми двумя красными точками не превосходит 1. Докажите, что все красные точки можно накрыть шаблоном в виде квадрата со стороной 1.

П.Кожевников

15. За завтраком 37 гномов сидели за круглым столом. За обедом они хотят сесть за этот же стол так, чтобы количество сидящих между каждыми двумя гномами поменялось. Получится ли у них это сделать?

Е.Бакаев

XX Летний турнир имени А.П.Савина

Двадцатый, юбилейный, турнир математических боев имени А.П.Савина проходил с 26 июня по 2 июля 2014 года в Костромской области на базе отдыха «Берендеевы Поляны» – месте, которое уже стало традиционным для этого мероприятия. В турнире приняло участие 36 команд школьников, окончивших 6–9 классы (в некоторых командах шестых классов были и пятиклассники), из Москвы, Санкт-Петербурга, Черноголовки и Ярославля. В течение недели дети решали предложенные им задачи, а в свободное время имели возможность играть в волейбол, футбол, настольный теннис, а также в различные интеллектуальные игры.

В первый день была проведена своеобразная разминка – игра «Математический квадрат», в которой школьники соревновались в решении задач на скорость и могли наладить работу в команде.

На следующий день у команд 9 классов начался круговой турнир матбоев. В остальных классах была проведена командная олимпиада, по результатам которой команды 6 и 8 классов было решено поделить на две лиги: первую и высшую. После этого в сформированных лигах также начались матбои. Приводим полный список призеров турнира:

Лига	Диплом	Команда	Руководитель
6 первая	I	НГШ-1 (Москва)	К.Г.Кваша
6 первая	II	НГШ-2 (Москва)	Л.М.Фельдман
6 высшая	I	ЦДО-6 (Москва)	И.С.Коломеец
6 высшая	II	Фрактал-6 (Санкт-Петербург)	А.П.Вальтман
6 высшая	II	2007-5 (Москва)	Н.Б.Волкова
6 высшая	III	2007-6 (Москва)	О.Е. Данченко
6 высшая	III	1514-5 (Москва)	Л.О.Бычкова
7 класс	I	179-7А (Москва)	А.А.Марачев
7 класс	I	179-7Б (Москва)	А.А.Марачев
7 класс	II	1543-7А (Москва)	О.Е.Орел
7 класс	III	Ярославль-7	И.Е.Преображенский

7 класс	III	ФМЛ 30-7 (Санкт-Петербург)	А.В.Садовников
8 первая	I	Сборная ЛМШ	И.С.Коломеец
8 высшая	I	179-8 (Москва)	С.А.Дориченко
8 высшая	III	1543-8А (Москва)	А.В.Антропов
8 высшая	III	2007-8 (Москва)	Е.Г.Лысенок
8 высшая	III	ЮМШ-8 (Санкт-Петербург)	А.А.Солынин
9 класс	I	1543-9 (Москва)	К.А.Скопцов
9 класс	II	Черноголовка	Л.Н.Головко
9 класс	II	2007-9 (Москва)	В.В.Трушков

В один из дней для участников были организованы экскурсии, но главным событием этого дня стала личная олимпиада. Во всех параллелях лучшими стали школьники из Москвы. Гран-при личной олимпиады получили в 6 классе *Алеся Иванова* (5 класс школы 2007), в 7 классе – *Борис Шаповал*, в 8 классе – *Тимофей Зайцев* (оба из школы 179). В 9 классе гран-при не присуждался, а первое место разделили *Андрей Балакин* и *Никита Цой* (оба из школы 2007).

Организаторами турнира в этом году выступили Фонд математического образования и просвещения, а также образовательная программа «Большая перемена». Отбором задач и составлением вариантов занималась методическая комиссия в следующем составе: А.Д.Блинков, А.В.Шаповалов, И.В.Раскина, Э.А.Акопян, Ю.С.Котельникова, П.В.Чулков, В.В.Трушков, Е.В.Бакаев, О.А.Заславский, А.В.Хачатурян, А.В.Грибалко, А.Г.Банникова, М.А.Артемьев, В.В.Арутюнов, А.А.Заславский, А.П.Зерцалов, А.А.Гаркавый. Приятно отметить, что этот список ежегодно пополняется новыми людьми, и те, кто еще совсем недавно приезжали на турнир в качестве участников, уже являются полноправными членами жюри.

Наиболее интересные задачи турнира приведены ниже.

ЗАДАЧИ

Арифметика и алгебра

1. Коля написал натуральное число, все цифры которого различны. Если поменять местами любые две цифры этого числа, отличающиеся на 1, то оно увеличится, а если поменять местами любые две цифры, отличающиеся на 2, то оно уменьшится. Какое наибольшее число мог написать Коля?

Н.Чернятьев

2. В записи натурального числа ровно 2014 цифр, причем центральные четыре цифры это 2, 0, 1, 4 (именно в таком порядке). Может ли это число быть точным квадратом?

А.Шаповалов

3. В одиночных камерах сидят 4 друга-математика. Каждому из них сообщили, что их номера в списке различны, двузначны и один из этих номеров равен сумме трех других. Но, даже узнав номера троих других, никто из них не смог вычислить свой номер. Так какие же у них были номера?

А.Шаповалов

4. Вокруг стола с метровыми промежутками стоят p блюдец (p – простое), на каждом лежит по одному печенью. Карлсон проходит вокруг стола k метров, останавливается и берет печенье с блюдца. Затем Малыш, стартовав из того же места, проходит вокруг стола m метров, останавливается и берет там печенье с блюдца. Потом Карлсон от места своей остановки идет k метров и берет печенье с блюдца (если оно там еще осталось) и т.д. Все переходы они делают в одном направлении. Кому из них достанется больше печенья и на сколько, если k и m – натуральны, различны и оба меньше p?

М.Шаповалов

5. Саша написал программу, которая последовательно вычисляет сумму натуральных чисел, начиная с 2014, убирая при этом в каждом слагаемом произвольно одну цифру в десятичной записи (разрешается убирать и первую цифру, даже если после нее стоит ноль). Программа должна закончить работу, как только полученная на очередном шаге сумма будет нацело делиться на 3. Может ли так случиться, что программа будет работать бесконечно?

А.Грибалко

6. Петя написал на доске натуральное число, а потом стер последнюю цифру и написал ее чуть выше, в показателе степени. Оказалось, что результат делится на первое написанное число. Какое максимальное число мог первоначально написать на доске Петя?

А.Шаповалов

Геометрия

7. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $AB = BC = CD$ и $\angle AOD = 120°$. Докажите, что $AO = DO$.

Е.Бакаев

8. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки E и F соответственно. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точки A на EF, из точки B на AE и из точки D на AF, пересекаются в одной точке.

А.Гаркавый

9. На сторонах выпуклого четырехугольника построены правильные треугольники во внутреннюю сторону. Оказалось, что треугольники, построенные на одной паре противоположных сторон, имеют общую вершину. Докажите, что треугольники, построенные на другой паре противоположных сторон, имеют общий центр.

Е.Бакаев

10. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно, BH – высота треугольника ABC. Докажите, что ортоцентры треугольников AC_1B_1 и CA_1B_1, а также точки H и B_1 лежат на одной окружности.

Д.Швецов

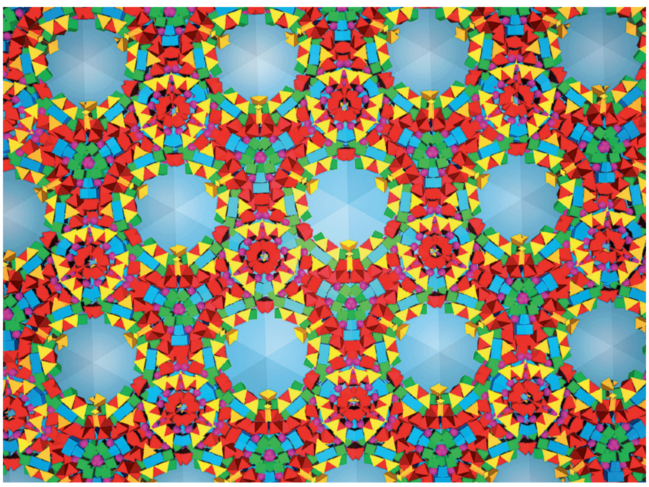
11. На доске нарисованы три прямые, проходящие через одну точку и образующие попарно углы в 60°, а

(Продолжение см. на с. 34)

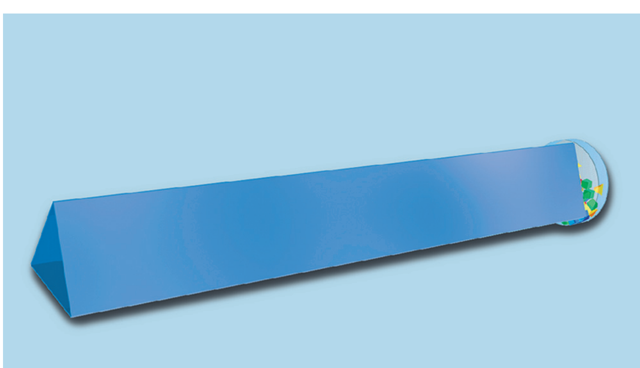
Калейдоскоп в калейдоскопе

Калейдоскоп «Кванта» этого номера посвящен... калейдоскопу!

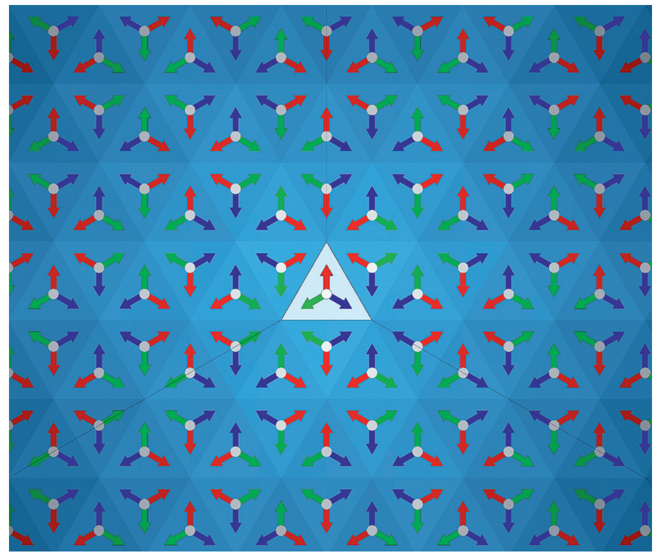
Название происходит от греческих слов καλος – красивый, ειδος – вид, σκοπεω – смотрю, наблюдаю. Этот оптический прибор-игрушка был придуман в начале XIX века и быстро стал любимой забавой во многих странах, включая Россию.



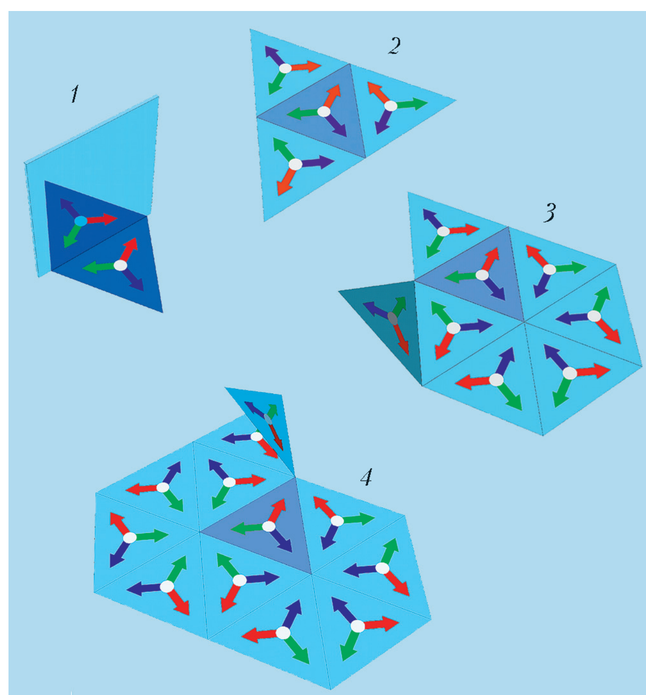
Внутри цилиндрической тубы калейдоскопа расположены три длинных прямоугольных зеркала, образующих зеркальную призму. За треугольником в основании призмы расположена «засыпка». При вращении калейдоскопа она пересыпается, составляя случайную картинку. Образовавшаяся в треугольнике картинка отражается в зеркалах и заполняет все поле зрения красивым узором.



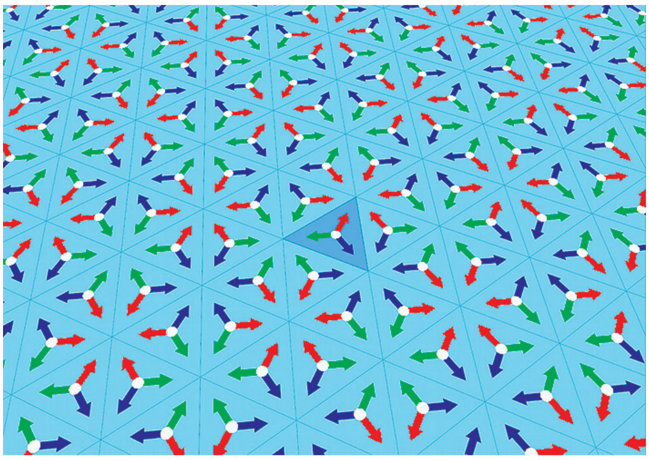
В обычных калейдоскопах используются одинаковые зеркала, а значит, треугольник в основании призмы равносторонний.



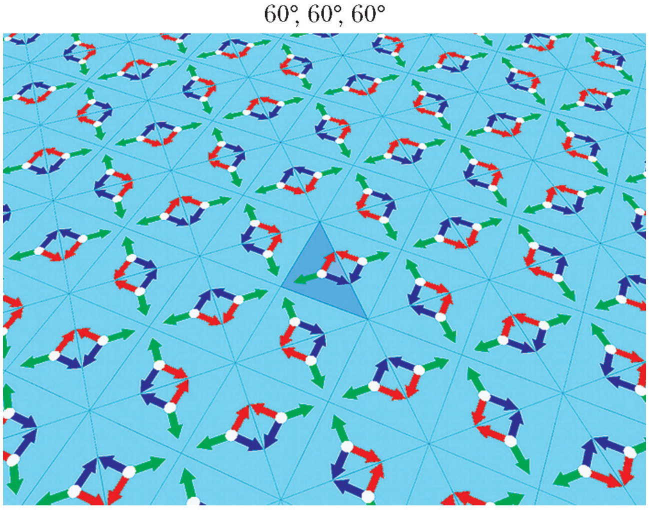
Отразим треугольник, расположенный на плоскости, относительно его сторон, затем новые треугольники отразим относительно получившихся сторон и т. д. (каждое отражение эквивалентно переворачиванию треугольника). Постепенно получится изображение, которое и наблюдается в калейдоскопе.



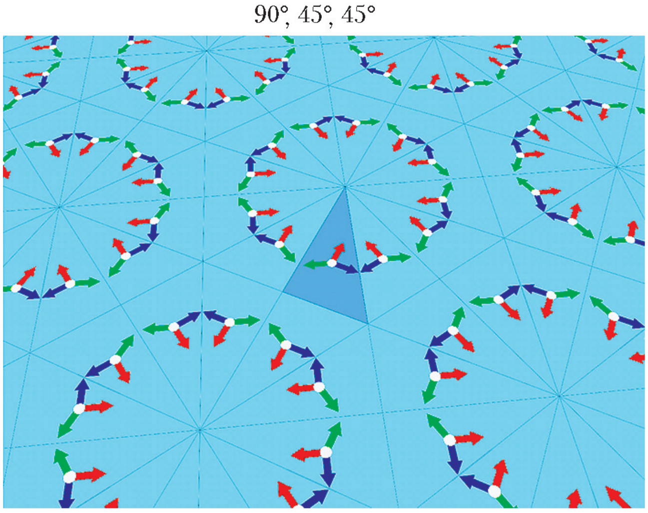
При этом в случае правильного треугольника получающаяся картинка не зависит от порядка перекладываний. А может ли быть картинка «красивой» и не зависеть от порядка отражений при других углах треугольника? Оказывается, для этого углы треугольника должны быть равны $180^\circ/k$, $180^\circ/m$, $180^\circ/n$ при некоторых натуральных k, m, n. Кроме равностороннего треугольника есть только два подходящих: с углами 90°, 45°, 45° и 90°, 30°, 60°.



60°, 60°, 60°

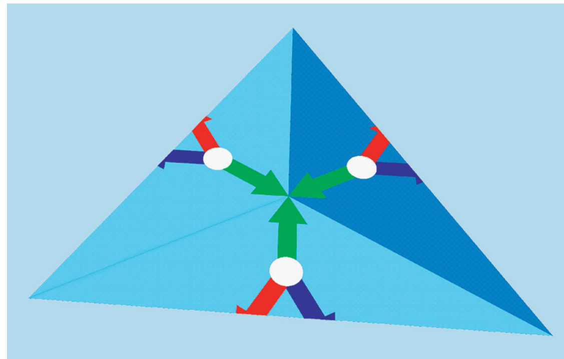


90°, 45°, 45°



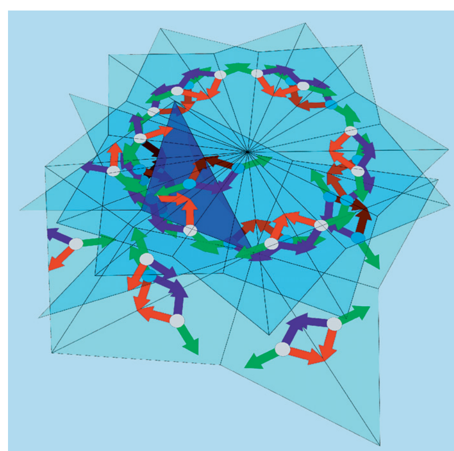
90°, 30°, 60°

Но почему для калейдоскопа не подходит, например, треугольник с углами 120°, 30°, 30°? Ведь процедура с отражением относительно сторон приводит к замощению плоскости. Приведенный рисунок поможет вам разобраться, в чем проблема.



Для произвольного треугольника его всевозможные отражения относительно сторон будут накладываться друг на друга. В таком калейдоскопе будут видны лишь перемешанные нерегулярные «обломки» изначального треугольника, и о красоте говорить не приходится.

Кроме указанных трех типов треугольных зеркальных призм калейдоскоп можно сделать в виде зеркальной призмы на прямоугольнике.



Заинтересовавшимся математикой калейдоскопа рекомендуем статью Э.Б.Винберга «Калейдоскопы и группы отражений» (Математическое просвещение, сер. 3, 2003, вып. 7, с. 45–63, http://www.mccme.ru/free-books/matpros.html).

Материал подготовил Н.Андреев
по мотивам фильма «Калейдоскоп»
проекта «Математические этюды»
(http://etudes.ru)

(Начало см. на с. 30)

также 2014 различных точек. Петя выписал на доске все расстояния от этих точек до прямых. Могли ли числа на доске образовывать в некотором порядке арифметическую прогрессию?

А.Грибалко

12. Из 6 палочек разной длины сложили два треугольника одинакового периметра. Длины палочек отличаются не более чем в 7 раз. Всегда ли из них можно сложить два треугольника разного периметра?

А.Шаповалов

Комбинаторные задачи

13. В пещере лежали в ряд 100 мешков массами 1 кг и 2 кг. В некоторых мешках разбойники хранили золото, в остальных – серебро. Рядом с каждым двухкилограммовым мешком лежали два мешка с серебром, а рядом с каждым килограммовым – хотя бы один мешок с серебром. Али-Баба унес из пещеры все золото. Какое наибольшее количество золота ему могло достаться?

А.Шаповалов

14. Алиса и Базилио делят добытую кучу из 100 кошельков, в которых лежат 1, 2, …, 100 золотых соответственно. Ходят по очереди, начинает Алиса. За один ход можно вынуть из кучи любой кошелек и либо взять его себе, либо отдать напарнику. Как только у кого-то наберется 50 кошельков, другой забирает из кучи все остальные. Какое наибольшее количество золотых может обеспечить себе Алиса, как бы ни действовал Базилио?

А.Шаповалов

15. Петя отметил на окружности 20 красных и 20 синих точек. Затем Вася проводит хорды так, чтобы концы каждой хорды были одного цвета и чтобы эти хорды не пересекались (даже в вершинах). Какое наибольшее количество хорд Вася гарантированно сможет провести, как бы ни отметил точки Петя?

Е.Бакаев

16. Есть n^3 единичных кубиков. Петя раскрашивает их в два цвета (возможно, по-разному), причем каждую грань – в один цвет. Вася победит, если сможет сложить из всех кубиков куб со стороной n, у которого каждая грань одноцветна. При каком наименьшем n Петя не сможет ему помешать?

А.Шаповалов

17. В каждую из n одинаковых пробирок налито не более половины пробирки раствора разной концентрации. Химик знает, где что, и может перелить из одной пробирки в другую любое нужное ему количество раствора (лишь бы пробирка не переполнилась). За какое наименьшее число переливаний он гарантированно может добиться, чтобы раствор в каждой пробирке был одинаковой концентрации (при этом некоторые пробирки, возможно, опустеют)?

А.Шаповалов

18. В королевстве Кривых Весов запрещены чашечные весы, показывающие равновесие при равенстве масс грузов на чашах. Однако для любого $a > 1$ разрешены неравноплечие весы, показывающие равновесие, если вес груза на левой чаше в a раз больше веса на правой. Имея всего одни весы, Толя за два взвешивания может из 8 монет выявить одну фальшивую (более легкую). Чему равно a у Толиных весов? (Все настоящие монеты весят одинаково.)

А.Шаповалов

19. Шесть команд в однокруговом турнире набрали 10, 7, 6, 6, 3 и 3 очка. Сколько очков (не обязательно целое число) начислялось за победу, если за ничью давали 1 очко, а за поражение 0?

А.Шаповалов

20. В шахматном турнире участвуют 14 игроков. В каждом туре они разбиваются на пары случайным образом, но два шахматиста, игравшие друг с другом раньше, второй раз играть не могут. Турнир заканчивается, когда такое разбиение произвести невозможно. Найдите минимально возможное число туров.

А.Блинков

21. Клетчатая полоска $1 \times n$ разбита на единичные клетки. Можно ли стороны клеток раскрасить в три цвета так, чтобы при выкидывании отрезков любого из цветов по оставшимся отрезкам можно было пройти из каждой вершины в любую другую?

А.Шаповалов

22. Андрей закрасил некоторые клетки квадрата 100×100. Далее ему разрешается закрашивать клетки по следующему правилу: если в квадрате 2×2 закрашены три клетки, то он закрашивает четвертую. Какое наименьшее количество клеток Андрей должен закрасить изначально, чтобы в дальнейшем он сумел закрасить весь квадрат?

А.Гаркавый

23. Квадратная таблица 5×5 заполнена числами. Петя переставил ее столбцы так, что никакой столбец не остался на месте. В получившейся таблице Вася переставил строки так, что никакая строка не осталась на месте. В итоге получилась исходная таблица. Каково наибольшее возможное количество различных чисел в ней?

Б.Френкин

24. На клетчатой доске 100×100 стоит невидимая ладья. За один вопрос можно указать любой набор клеток и узнать, сколько из них побиты ладьей. Сколько таких вопросов нужно, чтобы наверняка узнать положение ладьи? (Считается, что ладья бьет поле, на котором стоит.)

А.Шаповалов

Публикацию подготовили Л.Медников, А.Грибалко

Как воздух сопротивляется движению тела

А.СТАСЕНКО

Проблема авиации и сопротивления воздуха ... заключает в себе еще много неизведанного, и счастлива та страна, которая имеет средства для изучения этого неизведанного.

Н.Е.Жуковский

Эту мысль отец русской авиации сформулировал еще в прошлом тысячелетии. С тех пор, конечно, знания о силе сопротивления значительно углубились. Во всем мире были построены тысячи аэрогазогидродинамических установок, в которых тела различной формы обтекались различными газами и жидкостями (воздухом, водородом, нефтью ...) в широком диапазоне значений давления, температуры, плотности, вязкости, теплопроводности и т.п. И были написаны тысячи диссертаций и книг по эмпирическому исследованию «проблемы сопротивления».

Мы же попробуем сделать некоторые качественные оценки характера зависимости этого сопротивления от самых важных определяющих параметров – скорости обтекания v, плотности ρ обтекающего потока, характерного размера R обтекаемого тела. Почему именно от этих параметров? Ну, хотя бы потому, что для покоящегося тела ($v = 0$) сила сопротивления, очевидно, равна нулю. Кроме того, существует скорость звука $v_{зв}$, тесно связанная со скоростью теплового движения молекул (с которой они обмениваются друг с другом импульсами при столкновениях); значит, что-то должно измениться, когда скорость обтекания становится близкой к звуковой ($v \sim v_{зв}$). Да и с плотностью все ясно – ведь при той же скорости сопротивление воды будет гораздо выше, чем сопротивление воздуха. И совсем уж понятно, что сила сопротивления большому телу будет больше, чем малому.

Итак

$$F = f(v, \rho, R).$$

Выделим несколько характерных областей на оси значений скорости обтекания v и пройдемся по порядку номеров этих областей в сторону увеличения v (рис.1).

Понятно, что на покоящееся тело ($v = 0$) со стороны окружающей среды может действовать только сила Архимеда (сила плавучести). Но каковы физические причины силы сопротивления движущемуся телу?

Тут можно привести по крайней мере два соображения. Во-первых, поверхность движущегося тела увлекает ближайший слой среды вдоль касательной, этот слой «тащит» за собой следующий и так далее – возникает так называемое сопротивление трения, связанное с такой характеристикой среды, как вязкость. Во-вторых, при движении тела появляется некая асимметрия – давления «спереди» и «сзади» становятся неодинаковыми, и возникает так называемое лобовое сопротивление.

Сопротивление трения существенно для случая малой скорости («ползущее» движение тела), малых размеров тела

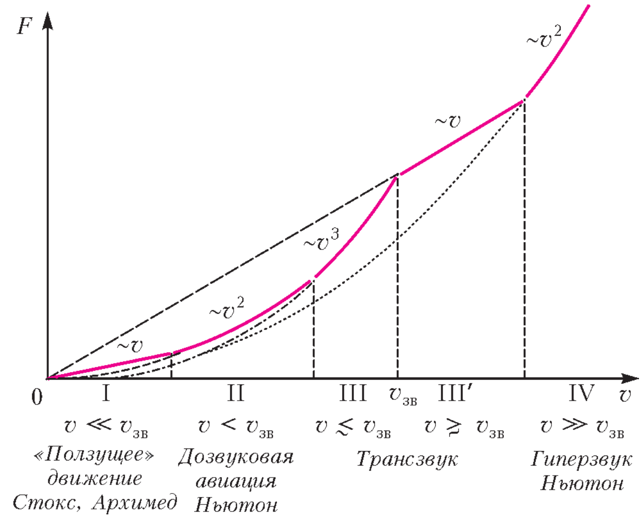


Рис. 1

и большой вязкости окружающей среды. Такое движение легко наблюдать, например, уронив дробинку в сосуд с глицерином или (что ближе к теме статьи) следя за оседанием мельчайших пылинок в солнечном луче, проникшем в комнату. В гидродинамике доказано, что при таком (ламинарном) обтекании сила сопротивления пропорциональна скорости движения тела относительно среды (см. рис.1, область I):

$$F \sim v.$$

Для случая шара такую зависимость получил Джордж Стокс (1819–1903) и использовал Роберт Милликен (1868–1953) при измерении электрического заряда микрокапель масла, оседающих в воздухе. Кстати, Архимед (около 287–212 до н.э.) тоже считал, что скорость и сила тяги повозки линейно связаны друг с другом.

Область II (см. рис.1) наиболее привычна для популярной литературы – это область дозвуковой авиации, где размеры тел намного больше длины свободного пробега молекул воздуха, так что его можно считать сплошной средой. В этой области сопротивление тел совсем легко оценивается из соображений размерности:

$$F \sim \rho v^2 R^2,$$

$$\left[\rho v^2 R^2\right] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} \cdot \text{м}^2 = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н} = [F].$$

А можно сказать и такие разумные слова: поток массы через поперечное сечение обтекаемого тела $S_\perp$ равен $\rho v S_\perp$; но каждая единица массы несет удельный импульс, равный ее скорости v; следовательно, полный поток импульса, т.е. сила, действующая на тело, есть $\rho v^2 S_\perp$, где $S_\perp \sim R^2$. При этом предполагается, что в непосредственной близости от тела налетающая масса среды тормозится до нуля. Вероятно, так и рассуждал Исаак Ньютон (1643–1727), который получил аналогичную зависимость лет триста тому назад, когда еще не было авиации.

С ростом скорости движения (область III на рисунке 1) мы приближаемся к скорости звука, воздух становится сжимаемым, так что его плотность ρ растет с увеличением скорости. В результате имеем

$$F \sim v^3.$$

Эту зависимость первыми подметили артиллеристы еще сотню лет назад, когда самолеты летали со скоростью мотоцикла или даже птицы.

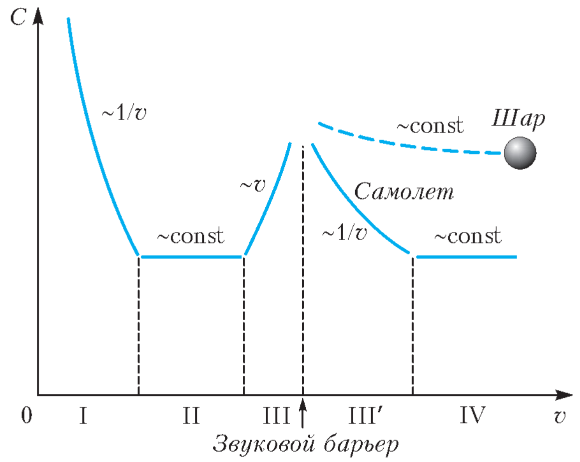


Рис. 2

Наконец, область IV на рисунке 1 соответствует гиперзвуковым скоростям, достижимым для ракет и аэрокосмических летательных аппаратов. Но как ни удивительно, получается, что и в этой области сказал свое слово Ньютон. Предположим, что тело движется в среде покоящихся молекул. Тогда каждая из них (в простейшем предположении упругого удара) передаст телу импульс mv, а поскольку их поток пропорционален $nv\pi R^2$, то суммарный поток импульса будет пропорционален $mvnvR^2 = \rho v^2 R^2$ (ведь $mn = \rho$). Эти рассуждения аналогичны приведенным выше при обсуждении области II; отличие в том, что теперь указана некоторая структура газа (состоящего из молекул). Но, конечно, молекулы не собираются «покоиться» (да и Ньютон ничего не знал о молекулах) – просто скорость тела относительно воздуха столь велика, что поперечным «тепловым» отклонением молекул от прямых линий можно пренебречь. Кстати, такой поток аналогичен движению на шоссе автомобилей, обгоняющих друг друга (их поперечная «тепловая» скорость много меньше продольной). В физике всюду полезно искать аналогии.

А области IV предшествует область III′ – область сверхзвуковой авиации. Самолеты со стреловидными крыльями имеют сопротивление $F \sim v$ – как дробинки в области I.

На рисунке 2 приведена зависимость от скорости так называемого коэффициента сопротивления (безразмерная величина)

$$C = \frac{F}{\rho \frac{v^2}{2} S_\perp},$$

где $S_\perp$, как и выше, – площадь сечения тела, перпендикулярная вектору скорости. Именно этот коэффициент исследуют экспериментально в аэродинамических трубах «развитых стран» в зависимости от многих параметров (вязкости, плотности, температуры газа, формы тела...). В отличие от самолета шар – довольно тупое тело, он имеет заметно большую силу сопротивления. Для него в области III′ график изображен пунктирной линией.

Конечно, вся кривая, описывающая зависимость F (или C) от скорости v, не содержит резких изломов и разрывов – она непрерывная и гладкая. Но как был прав Николай Егорович Жуковский (1847–1921), считая проблему сопротивления воздуха весьма непростой, а страну, в которой изучают эту проблему, – счастливой.

Однако точнее обо всем этом Вы, наш дорогой Читатель, можете узнать на факультете аэромеханики и летательной техники Московского физико-технического института (государственного университета).

Радужное рассеяние

В.СЫЩЕНКО

Место профессора Дермюррея за преподавательским столом пустовало, в то время как желудки учеников колледжа Эйнштейна[1] наполнялись завтраком, а их сердца – предвкушением интересной лекции. Ну не любили они желчного Дермюррея, но физика-то в этом не виновата! Однако оставался вопрос: замена преподавателя или замена предмета?

Интрига разрешилась, когда в аудиторию вошел профессор Ван-Теллер.

– Здравствуйте! Вчера вышел новый номер Astrophysical Journal, и у коллеги Дермюррея случилось несварение желудка. Поэтому сегодня вы в моем распоряжении, – профессор улыбнулся своей фирменной улыбкой и потер ладони. – Насколько я понял, вы забрались в атомную и ядерную физику, изучаете рассеяние частиц на различных мишенях, опыт Резерфорда и все такое?

Хор голосов вполне можно было расценить как утвердительный ответ.

– Ну что ж, в таком случае сегодня мы с вами... – профессор снял очки и принялся протирать стекла, – ... сделаем шаг назад и... – профессор посмотрел сквозь очки на свет и, видимо, остался доволен результатом, – ... поговорим об оптике! – Широкий взмах руки с очками подчеркнул ударение на последнем слове. – Шаг в сторону и обобщение, как говорил один классик. И если вы думаете, что изучили оптику вдоль и поперек, то к концу нашей сегодняшней встречи вы поймете, как глубоко заблуждались!

– Ну конечно, третье измерение: вдоль, поперек, а теперь еще и в глубину... – прошептал Джерри на ухо Никки. Никки тихонько хихикнула, а школьный компьютер не замедлил вывести реплику на классную доску за спиной профессора.

– Вы, похоже, привыкли, что когда я прихожу на замену, то стараюсь обходиться без математики? – продолжал тем временем профессор. Класс одобрительно загудел. – Однако сегодня нам совсем без формул не обойтись. Как же нам поступить, чтобы не нарушить традицию? – профессор обвел взглядом класс. – Решение напрашивается само собой: пусть формальную сторону нам напомнит... мисс Гринвич!

Одобрительный шум показал, что бóльшая часть аудитории всецело одобряет столь удачное решение проблемы, кое-кто даже зааплодировал.

«Да, быть любимым учеником – нелегкая доля!» – подумала Никки, поднимаясь с места. Профессор, похоже, умел читать мысли, так как закивал головой и заулыбался еще шире.

[1] Об этом удивительном колледже подробнее можно узнать из книги Н.Горькавого «Астровитянка». (*Прим.ред.*)

– Проще всего, – начала Никки, – представить себе пролет классической частицы, например метеорита, мимо притягивающего тела, например нашей Луны (если частица не притягивается, а отталкивается, это не важно). Не будь этого притяжения, частица двигалась бы по прямой и пролетела бы на расстоянии b от центра притяжения (рис.1). Назовем это расстояние прицельным параметром.

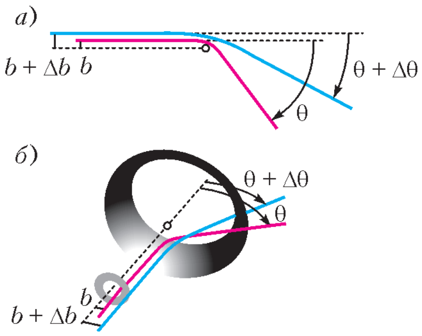


Рис.1. а) Траектории частицы в притягивающем поле, соответствующие прицельным параметрам b и $b + \Delta b$; б) то же в поле отталкивания

– Из-за притяжения наша частица, пролетая мимо тела, отклонится на некоторый угол θ. Зависимость угла отклонения от прицельного параметра всегда можно рассчитать, если мы знаем закон взаимодействия между налетающей частицей и притягивающим телом. Например, для нашего метеорита это будет старый добрый закон тяготения Ньютона.

– Но вот вопрос: если на наше притягивающее тело налетает не одна частица, а целый пучок, широкий и однородный, то какая доля частиц отклонится на угол θ?

– Изрядная доля частиц твоего метеоритного потока просто врежется в нашу многострадальную Луну! – вмешался принц Дитбит. – Ты можешь подсчитать, сколько?

– И я могу, и любой, кто вовремя выполняет домашние задания. Очень простая и красивая задача! – Смех в аудитории подтвердил: задача действительно простая. – Но не будем отвлекаться, – Никки попыталась изобразить на лице выражение строгой учительницы, но без особого успеха, – и рассмотрим оставшиеся метеориты, те, которые не врезались. Понятно даже ежику, которого приносила профессор Франклин на первой паре, что точно попасть в заданный прицельный параметр, а значит и в заданный угол отклонения, невозможно. Поэтому в задаче рассеяния вопрос ставится так: какая доля частиц рассеется в небольшой интервал углов $\Delta\theta$ вблизи интересующего нас угла θ? Легко сообразить, что это будут те частицы, которые прилетают под прицельными параметрами между b и $b + \Delta b$. И не важно, насколько плотным пучком движутся налетающие частицы, их доля, рассеянная в этот интервал углов, будет пропорциональна ширине «входного» интервала Δb:

$$\frac{\Delta N}{N} \sim \Delta b \sim \frac{\Delta b}{\Delta\theta}\Delta\theta \sim \frac{\Delta\theta}{\Delta\theta/\Delta b}.$$

Зная зависимость $\theta(b)$, мы можем найти величину $\Delta\theta/\Delta b$ (не будем делать вид, будто не знаем, что такое производная) ...

– Слава Юпитеру! – не сдержал эмоций мальчик в больших очках на первой парте. – Разве ж это жизнь – без дифференцирования и интегрирования?

– ... и даже выразить ее как функцию все того же угла рассеяния θ. Таким образом, доля частиц, вылетающих в заданный интервал углов, будет пропорциональна

$$\frac{\Delta N}{N\Delta\theta} \sim \frac{1}{\Delta\theta/\Delta b}.$$

Глядя на эту формулу, каждый может понять («Даже ежик!» – вполголоса проговорил Джерри), для чего физики строят эти гигантские и дорогие машины – ускорители. Ведь долю рассеянных под тем или иным углом частиц можно измерить экспериментально, поставив под нужным углом счетчик-детектор. А функция $\theta(b)$ определяется законом взаимодействия налетающей и рассеивающей частиц. Поэтому эксперимент по рассеянию – это способ промерить закон взаимодействия частиц, а для микроскопически малых расстояний – почти единственный способ!

– Спасибо, мисс Гринвич, достаточно! – Профессор Ван-Теллер жестом отправил Никки на место и обратился к аудитории: – Ну как, понятно было?

Большинство согласно закивало, а Джерри вдруг почувствовал, что не хуже ежика понимает, что дают науке эксперименты на ускорителях. Только группа студентов-аристократов по привычке выдала неодобрительное нытье.

– Прекрасно, 75% успеха – хороший результат для любого преподавателя, в следующий раз в этой роли выступит кто-нибудь другой. И запомните! – гаркнул Ван-Теллер в своем фирменном стиле. – Объяснять что-либо другим – лучший способ разобраться самому!

– Ну а теперь я вам расскажу кое-что новенькое. Формулу мисс Гринвич мы сохраним для дальнейшего использования, в ней есть все, что нам сегодня понадобится, а я, как и обещал, буду только рисовать картинки.

– Как справедливо заметила мисс Гринвич, вычисление и измерение сечения рассеяния позволяет получить массу полезной информации (дома подготовьте рефераты на эту тему, чем больше примеров из разных областей знания, фундаментальных и прикладных, тем лучше, срок – неделя). Но вот беда: рассчитать сечение аналитически можно лишь в нескольких простых случаях, один из них – ньютоновское или кулоновское взаимодействие по закону обратных квадратов. Что делать в остальных?

– Считать численно, на компьютере! – ответил Джерри, и вместе с ним – половина класса.

– Это так. Да только вот компьютер – всего лишь машина, в нее что заложишь, то и получишь...

– Да уж! – проскрипел старческим голосом суперкомпьютер колледжа.

– ... Но что закладывать и как проверить результат? – Тут Ван-Теллер вперил в Джерри такой строгий взгляд, что тот сразу почувствовал: его реферат должен непременно быть самым лучшим! – Нужно уметь заранее, на качественном уровне предугадывать результат, в нашем случае это поведение сечения в зависимости от закона взаимодействия с рассеивающим центром.

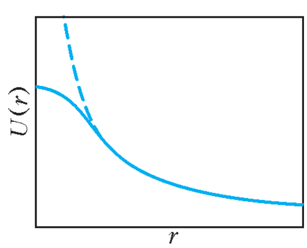


Рис.2. Потенциальная энергия частицы в отталкивающем кулоновском поле (штриховая кривая) и в поле, ограниченном в нуле (сплошная кривая)

– Пусть наш рассеивающий центр создает отталкивающее поле, спадающее с расстоянием подобно кулоновскому, но ограниченное в нуле (рис.2). Совсем, казалось бы, небольшое отличие, верно? Но минуту терпения, и вы увидите, сколь драматичны будут изменения!

– Пусть энергия нашей частицы больше максимума потенциальной энергии отталкивания в этом поле, так что частице с нулевым прицельным параметром ничто не помешает пролететь сквозь центр поля. Попробуем понять, как в этом случае будет выглядеть функция отклонения $\theta(b)$. В нуле угол отклонения, как мы уже сказали, будет нулевым, но и при очень больших прицельных параметрах он тоже будет стремиться к нулю. А что же будет в середине?

– Где-то между этими точками будет максимум, – ответила молчавшая до сих пор Дзинтара. – Как учил великий Поль Адриен Морис Дирак, существует расстояние, на котором женское лицо обладает наибольшей привлекательностью, коль скоро в нуле и на бесконечности привлекательность равна нулю.

Класс взревел дружным хохотом. «Что за ерунда?» – подумал Джерри, бросив быстрый взгляд на профиль Никки и убедившись, что даже классики науки могут ошибаться.

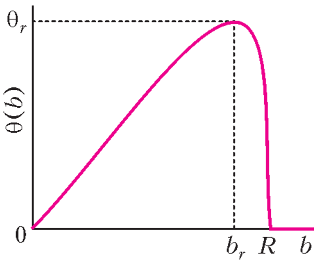


Рис.3. Пример функции отклонения, приводящей к явлению радужного рассеяния

– Верно! – подтвердил профессор и соединил две точки на рисунке горбатой кривой (рис.3). А отсюда следуют сразу две вещи. Во-первых, существует некоторый максимальный угол, обозначим его θ_r , за пределы которого рассеяние невозможно, сечение там обратится в ноль. А во-вторых, производная $\Delta\theta/\Delta b$ (смотрим все на формулу!) вблизи этого максимума будет стремиться к нулю! А ноль в знаменателе означает…

– Бесконечность! – почти хором ответил класс.

– Точно! Таким образом, сечение будет стремиться к бесконечности, т.е. вблизи максимального угла рассеяния θ_r будет наблюдаться сгущение траекторий. Такая ситуация носит название *радужного рассеяния*.

– А при чем же здесь радуга? – спросила Дзинтара.

– Очень своевременный вопрос! Давайте вспомним, как образуется радуга.

– После дождя… Преломление света… В каплях воды… – послышались несколько реплик, зависших на середине.

– Вижу, никто толком не знает, – ухмыльнулся Ван-Теллер, – как и ожидалось. Ну, давайте разбираться. Куда должно светить Солнце, чтобы на небе появилась радуга: в лицо вам или в спину?

Мнения в аудитории разделились примерно поровну. «Ох, а я ведь никогда не видела радуги!» – промелькнула грустная мысль в голове у Никки. Но природный оптимизм тут же взял верх: «Сколько еще интересного предстоит увидеть!»

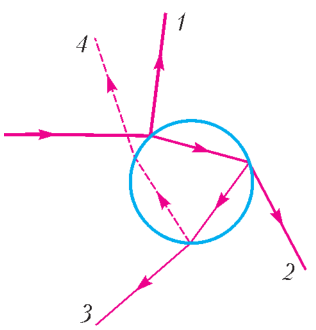


Рис.4. Четыре варианта судьбы светового луча в капле воды

– В спину! – подвел черту под дискуссией профессор Ван-Теллер. – И сейчас вы поймете, почему. Проследим за тем, что случится с лучом света, падающим на сферическую водяную каплю (рис.4). Во-первых, часть света отразится от поверхности капли. Но эта ветвь функции отклонения не будет обладать нужным нам максимумом. Во-вторых, свет может преломиться на границе, проникнуть внутрь капли, достичь поверхности, снова преломиться и выйти наружу. Этот вариант тоже не даст радуги. И, наконец, он может отразиться от внутренней поверхности и только после этого покинуть каплю. Именно эта, третья ветвь функции отклонения нам нужна!

– График именно этой функции я нарисовал на предыдущем рисунке (а формулу выведите самостоятельно, геометрической оптики и элементарной тригонометрии для этого достаточно). Оказывается, максимальный угол отклонения для видимого света и водяной капли в воздухе составляет приблизительно 42 градуса, и, как следует из нашей общей теории, вблизи этого направления будет наблюдаться сгущение лучей, или, иными словами, увеличение яркости рассеянного света.

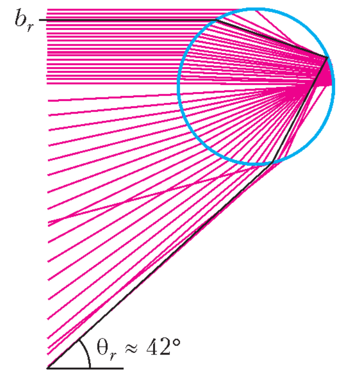


Рис.5. Сгущение лучей в оптимальном направлении

– Теперь обратите внимание вот на что. Картинка распределения лучей (рис.5) будет, как понятно тому самому ежику, симметричной относительно оси, параллельной падающим лучам и проходящей через центр капли. Так что рассеянные лучи будут концентрироваться на поверхности конуса с углом полураствора в те же самые 42 градуса. Но тогда легко понять, почему мы видим на небе дугу. В глаза наблюдателя попадет свет только от тех капель, которые в данный момент находятся под углом 42 градуса к нему, если отсчитывать от направления падающего света. – Для пущей наглядности профессор вытянул перед собой левую руку: – Вот направление падающего света, – правой рукой он пристроил свою знаменитую клюку к плечу левой так, что конец клюки указывал в пространство, – а вот направление на каплю, находящуюся на нужном месте. И еще мне в глаза попадет свет вот от этой капли, – профессор повернул клюку, сохраняя угол между ней и левой рукой, – и вот от этой, и от этой… – конец клюки описал в воздухе дугу.

– Первым это понял Рене Декарт. В далеком 1637 году он не поленился рассчитать углы отклонения для десяти тысяч значений прицельного параметра и обнаружил то самое сгущение лучей вблизи угла радуги. Он же объяснил возникновение радуги второго порядка – да-да, иногда на небе можно увидеть две радуги! – связанной с четвертой ветвью функции отклонения (см. рис.4). У них с радугой первого порядка будет общий центр, а яркость ее будет, разумеется, слабее. Единственное, чего не смог объяснить Декарт, – это цветов радуги, ведь в то время еще не знали, что для разных длин волн света показатель преломления воды (и не только ее) имеет различные значения. Теперь мы это знаем и понимаем, что для разных длин волн значения угла радуги θ_r будут немножко различаться (кстати, покажите, что чередование цветов в радуге второго порядка будет обратным по отношении к радуге первого порядка).

– Конечно, это не мы с вами первые такие умные. Еще Ньютон, открывший дисперсию света, проверил теорию радуги экспериментально. Он взял стеклянный шар, наполненный водой, и подвесил его на веревочке, переброшенной через блок. Сидя спиной к солнцу и поднимая шар, он видел постепенную смену цветов. Надо сказать, что со стеклянным шаром, как моделью капли, экспериментировали многие ученые еще в средние века, до Ньютона и даже Декарта. Кому-то не удалось опубликовать результаты своих исследований при жизни, а кого-то уморили за это в тюрьме.

«И почему я не удивляюсь?» – подумала Никки.

– Волновая оптика существенно обогащает проявления радуги. Во-первых, за счет дифракции свет будет загибаться в область геометрической тени (рис.6). Во-вторых, если мы снова посмотрим на функцию отклонения (см. рис.3), то увидим, что углам рассеяния, меньшим угла радуги, будут соответствовать два различных прицельных параметра. Соответствующие им два луча будут интерферировать между

(Продолжение см. на с. 40)

Отрезки, прямоугольники и... комбинаторика

В.ГОЛУБЕВ, П.КОЖЕВНИКОВ

Предлагаем читателю подумать над следующими задачами (ниже мы приведем их решения).

Задача 1. Сколько можно указать различных отрезков, концы которых расположены в целых точках числовой прямой, принадлежащих отрезку $[0;n]$, где n – натуральное число?

Задача 2. На координатной плоскости дан квадрат $n \times n$ с вершинами в целочисленных точках, стороны которого параллельны осям координат. Сколько можно указать различных прямоугольников, стороны которых параллельны осям, а все вершины – целочисленные точки, принадлежащие данному квадрату?

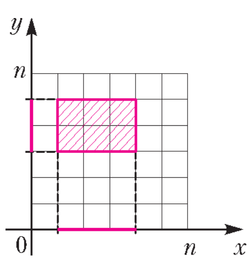
Задача 3. В координатном пространстве дан куб $n \times n \times n$ с вершинами в целочисленных точках, ребра которого параллельны осям координат. Сколько можно указать различных прямоугольных параллелепипедов, ребра которых параллельны осям, а все вершины – целочисленные точки, принадлежащие данному кубу? [1]

Решение задачи 1. Целочисленные точки на отрезке $[0;n]$ – это точки 0, 1, …, n, их количество равно $n+1$. Выбор отрезка с концами в этих точках равносилен выбору пары концов отрезка, т.е. выбору пары элементов из множества $\{0, 1, \ldots, n\}$. Тем самым, ответ в задаче: число сочетаний из $n+1$ по 2, которое равно $\frac{(n+1)n}{2}$.

Этот результат нам пригодится в задачах 2 и 3.

Решение задачи 2. Можно считать, что одна из вершин данного квадрата расположена в точке $(0;0)$, а другая – в точке $(n;n)$.

Спроектируем прямоугольник, удовлетворяющий условию задачи, на оси координат. Проекция на ость абсцисс – отрезок, концы которого принадлежат отрезку $[0;n]$, из задачи 1 вытекает, что ее можно выбрать $\frac{(n+1)n}{2}$ способами. Аналогичное утверждение верно для проекции на ось ординат. Независимый выбор двух проекций однозначно определяет выбор прямоугольника (см. рисунок). Тем самым, получаем ответ: $\left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2$.



Упражнения

1. Докажите, что в задаче 3 ответ такой: $\left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^3$.

2. Найдите и исправьте ошибку в следующем «решении» задачи 2.

Чтобы выбрать нужный прямоугольник, достаточно выбрать пару его противоположных вершин A и B. В качестве A может выступать любая из $(n+1)^2$ целочисленных точек, принадлежащих данному квадрату. Пусть вершина A уже выбрана. Вершиной B может быть любая из целочисленных точек, принадлежащих данному квадрату, которая имеет абсциссу, отличную от абсциссы точки A, и ординату, отличную от ординаты точки A. Таким образом, для каждой точки A имеется n^2 возможностей выбрать точку B. Для каждой конкретной пары A, B выбор вначале точки B, а затем точки A даст ту же пару. Значит, ответ в этой задаче: $\frac{(n+1)^2 n^2}{2}$.

Замечание. Обратим внимание, что, в силу известной формулы $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2$, ответ в задаче 2 может быть записан как $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$. Интересно, можно ли установить комбинаторное соответствие, дающее эту сумму?

3. Обобщите задачи 2 и 3 для прямоугольника $m \times n$ и параллелепипеда $m \times n \times k$.

Давайте вернемся еще раз к задаче 1. Попробуем сформулировать ее плоский аналог по-другому, заменив отрезок не на прямоугольник, а на квадрат. Получается другая задача.

Задача 2′. На координатной плоскости дан квадрат $n \times n$ с вершинами в целочисленных точках, стороны которого параллельны осям координат. Сколько можно указать различных *квадратов*, стороны которых параллельны осям, а все вершины – целочисленные точки, принадлежащие данному квадрату?

Формулировки задач 2 и 2′ отличаются лишь одним словом, но это отличие существенно. Чтобы решить задачу 2′, приведем сперва другое решение задачи 1.

Еще одно решение задачи 1. Зафиксируем некоторое число l из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ и найдем вначале количество различных отрезков длины l, концы которых расположены в целых точках числовой прямой, принадлежащих отрезку $[0;n]$. Этот вопрос решить несложно: возьмем отрезок $[0;l]$ и будем сдвигать его на 1 вправо, пока правый конец отрезка не совпадет с точкой n. Правый конец нашего отрезка длины l пройдет через точки l, $l+1$, …, $n-2$, n – всего $n-l+1$ возможных положений, а значит, и $n-l+1$ возможных положений отрезка длины l.

Чтобы завершить решение задачи 1, теперь достаточно суммировать величины $n-l+1$ для всевозможных длин $l = 1, 2, \ldots, n$. Итого: $n + (n-1) + \ldots + 1 = \frac{(n+1)n}{2}$.

Теперь мы можем немедленно получить решение задачи 2′, пользуясь подсчетом количества возможных положений отрезка длины l на отрезке длины n и идеей проектирования на оси (см. решение задачи 2).

Упражнения

4. Проведите нужные рассуждения и докажите, что ответ в задаче 2′ равен $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$, или $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. [2]

5. Сформулируйте и решите задачу 3′, аналогичную задаче 2′, про кубы в кубе $n \times n \times n$.

6. Обобщите задачу 2′ и для прямоугольника $m \times n$, где $m > n$.

---

[1] По сути, в задачах 1, 2 и 3 решается один и тот же вопрос для прямой (1-мерная задача), плоскости (2-мерная задача) и пространства (3-мерная задача).

[2] Здесь и далее мы используем известные формулы для суммы квадратов, кубов первых n натуральных чисел. Об этих формулах см. например, статью В.Абрамовича «Суммы одинаковых степеней натуральных чисел» в «Кванте» №5 за 1973 год.

Это звучит как шутка, но иногда новые задачи рождаются при невнимательном прочтении условий старых (сравните условия задач 2 и 2′).[3] Давайте в условии задачи 2′ пропустим фразу «стороны которых параллельны осям», получится еще более трудная

Задача 2″. На координатной плоскости дан квадрат $n \times n$ с вершинами в целочисленных точках, стороны которого параллельны осям координат. Сколько можно указать различных *квадратов*, у которых все вершины – целочисленные точки, принадлежащие данному квадрату?

Решение этой задачи и ее аналога для треугольной решетки читатель может узнать из статьи В.Журавлева и П.Самовола «Математические тайны печати царя Соломона» в «Кванте» №1 за 2012 год.

[3] Это действительно случается. Например, таким образом появилась непростая задача М2369 из «Задачника «Кванта» этого номера. В начальной (гораздо более простой) версии в ней даны 100 *подряд идущих натуральных* чисел.

В заключение приведем несколько задач, родственных разобранным, для самостоятельного решения.

Задача 4. Сколькими способами в данном клетчатом прямоугольнике 22×40 можно закрасить клетчатый прямоугольник: а) площади 35; б) периметра 72?

Задача 5 (олимпиада МФТИ 2013 г.). На клетчатой доске 22×25 требуется отметить тройку клеток так, чтобы центры этих клеток образовывали прямоугольный треугольник с катетами длины 4 и 7, параллельными краям доски. Сколькими способами это можно сделать?

Задача 6. На координатной плоскости дан квадрат $n \times n$ ($n \geq 7$) с вершинами в целочисленных точках, стороны которого параллельны осям координат. Сколько можно указать различных квадратов площади 25, все вершины которых – целочисленные точки, принадлежащие данному квадрату?

(Начало см. на с. 36)

собой, создавая дополнительные максимумы на освещенной стороне радуги. Их иногда можно увидеть в виде слабых розовато-зеленоватых полос.

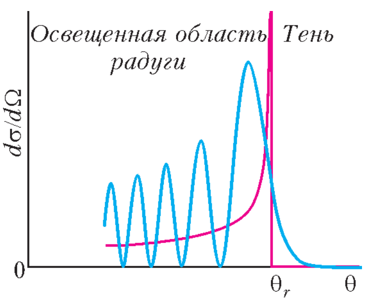


Рис.6. Сечения радужного рассеяния, рассчитанные в рамках геометрической оптики (красная линия) и волновой оптики Эйри (синяя линия)

– Приближенную теорию радуги на основе волновой оптики построил в 1838 году британский астроном Джордж Эйри. Да-да, он знаменит не только тем, что не прислушался к молодому Адамсу и проморгал открытие Нептуна! – При этом профессор Ван-Теллер почему-то строго посмотрел на Дзинтару. – Возникшая в теории радуги функция Эйри заняла прочное место в математической физике, в частности в квазиклассическом приближении квантовой механики. Точная теория оптической радуги была построена лишь в начале XX века.

– XX век принес нам не только более точную теорию оптической радуги. Вспомните, ведь поведение частиц в квантовой механике обладает волновыми свойствами. В 1959 году Кеннет Форд и Джон Арчибальд Уилер (тот самый, с черными дырами) исследовали возможность радужного рассеяния в квантовой механике и, тем самым, в атомной и ядерной физике. Ядерная радуга – это звучит гордо! В некоторых экспериментах удается увидеть радугу вплоть до десятого порядка!

Прозвеневший звонок вернул учеников и профессора с небес на землю, точнее – на лунную поверхность.

– Я мог бы рассказывать о радуге часами, но, как учил великий Ричард Фейнман, хороший учитель должен уметь вовремя остановиться и передать инициативу студентам. До встречи!

* * *

Во время ланча студенты все еще оставались под впечатлением от лекции.

– В древности у многих народов Земли было поверье, что пробежавшего под радугой ожидает счастье, – произнесла Дзинтара. – Люди всегда были наблюдательны и заметили, что к радуге нельзя приблизиться – она просто исчезает. Такой вот грустный символ недостижимости счастья, смягченный красотой явления. А красота всегда вселяла надежду.

Джерри был поглощен какими-то вычислениями на своем планшетнике, но в этот момент бросил на Дзинтару быстрый взгляд.

Когда после ланча студенты вышли в парк колледжа, Джерри встал перед Никки и торжественным тоном произнес:

– Сегодня произошли два исторических события! «Селена-Телеком» все-таки перечислил мне зарплату, а в Тропическом парке Луна-сити открывается новый фонтан. Чтобы достойно их отметить, я хочу пригласить тебя в Луна-сити на уикэнд.

* * *

Новый фонтан поражал воображение: с высокой скалы, нависавшей над искусственным озером, низвергался самый настоящий водопад, окутанный тучей брызг. Огибающая озеро дорожка, достигнув скалы, сменялась решетчатыми мостками с перилами, уводившими в пространство между скалой и потоком падающей воды. Желающие освежиться устремлялись по этим мосткам и со смехом выскакивали с другой стороны, а какой-то галантный кавалер раскрыл над своей спутницей невесть откуда взявшийся на Луне зонтик.

Был полдень по гринвичскому времени, которому подчинялся ритм местной жизни, но астрономический лунный полдень давно уже миновал и светившее сквозь прозрачный купол солнце отбрасывало заметные тени. Никки и Джерри не спеша шли по дорожке вокруг озера, приближаясь к водопаду, как вдруг…

В воздухе, заполненном водяными брызгами, вспыхнула и засияла удивительно чистыми и легкими красками она, радуга! От ощущения воздушности этого свечения, исходившего будто бы ниоткуда, захватывало дух.

– Так вот она какая! – воскликнула Никки. – Все фотографии в интернете, вместе взятые, – ничто!

– Никки! – Джерри говорил громко, то ли от волнения, то ли от желания перекрыть шум воды. – Помнишь, что говорила Дзинтара? Но мы-то теперь знаем, откуда берется радуга! Даже если мы перестанем ее видеть, капельки по-прежнему будут на нужных местах! Мы можем пробежать под ней!

Они посмотрели друг другу прямо в глаза, а потом, взявшись за руки, помчались по рукотворной тропинке.

Резиновый шарик, надутый гелием

С.ВАРЛАМОВ

ДЕНЬ РОЖДЕНИЯ ДОЧКИ! РАНО УТРОМ (ПОКА ОНА ЕЩЕ спит) надуваются гелием резиновые шарики и запускаются в спальню. Радость: шарики летают! Дернешь его за веревочку вниз, а он после этого опять к потолку летит! Однако на следующее утро все шарики, уменьшившиеся в размерах, лежат на полу… Почему?

Попробуем разобраться.

Если сразу после заполнения шарика гелием его объем примерно 6 литров, то через сутки объем уменьшается примерно вдвое – до 2,8 литра. При этом только что надутый гелием шарик такого же объема (2,8 литра) взлетает в воздухе, а шарик, сдувшийся за сутки до этого объема, не взлетает. Это говорит о том, что не только гелий непрерывно покидает шарик, но и воздух снаружи проникает сквозь тонкие стенки внутрь шарика. В частности, для конкретного случая, когда надутый гелием шарик с массой оболочки 1,8 граммов «жил своей жизнью» сутки, оказывается, что внутри шарика осталось такое количество гелия, что в чистом виде при атмосферном давлении он занимает объем всего 0,3 литра, а остальная часть объема шарика – 2,5 литра – занята воздухом.

Наши расчеты основываются на измерениях. Температура в комнате была $27\ ^\circ\text{C}$, давление воздуха – нормальное. Весы, на которых взвешивался «суточного возраста» шарик объемом 2,8 литра с остатками гелия и проникшим внутрь воздухом, показывали 1,5 грамма. Шарик с такой же массой оболочки, но только что заполненный чистым гелием, взлетал к потолку. Чтобы шарик не улетал с весов, к нему был прицеплен колпачок от шариковой ручки. Когда на весах находился шарик с прикрепленным к нему колпачком, весы показывали меньше на 1 грамм по сравнению с тем, если на весах лежал один колпачок.

Поскольку молярные массы кислорода и азота примерно одинаковы, для установления количественного состава смеси газов в шарике нужны дополнительные исследования.

Скорости диффузии разных газов через резиновые стенки шарика, очевидно, разные. Количество воздуха, проникшего через стенки шарика внутрь, сначала растет, а затем, когда парциальное давление гелия в шарике уменьшается, воздух начинает движение из шарика наружу. Это происходит потому, что за счет натяжения резиновых стенок парциальное давление воздуха внутри шарика в некоторый момент становится больше давления воздуха снаружи.

Интересно построить модель динамики газов (гелия и воздуха), движущихся через стенки шарика, и сравнить предсказания модели с экспериментальными данными. Необходимые для проверки модели измерения весьма просты. Сначала нужно подобрать два похожих шарика, у которых массы оболочек одинаковы, заполнить один из шариков чистым гелием, а затем в течение длительного времени (порядка суток) фиксировать показания весов, к которым прикреплен шарик. Измерения нужно сопровождать фотографированием шарика на фоне линейки, чтобы знать размеры шарика. Затем нужно провести второй эксперимент (быстрый), в котором второй такой же по массе шарик будет надуваться чистым гелием до таких же форм (такого же объема), какие имел первый шарик в процессе длительного эксперимента в разные моменты времени. Полученные данные позволят установить зависимость количеств воздуха и гелия, проникших через стенки в шарик, от времени.

Теперь попробуем создать математическую модель, описывающую процесс. Будем предполагать, что резиновая оболочка представляет собой сферу и что толщина стенок шарика в любой момент времени одинакова по всей поверхности оболочки. Пусть коэффициент диффузии любого сорта газа определяется только материалом стенок и не зависит от того, деформирована стенка или нет. Поскольку температуры газов внутри и снаружи одинаковы, давление пропорционально концентрации молекул газов. В модели следует учесть, что толщина стенок h шарика зависит от объема V газов внутри. Предположим, что начальная толщина недеформированных резиновых стенок шарика равна h_0, а V_0 – это начальный объем шарика, ограниченный стенками, которые вот-вот начнут растягиваться. Тогда при объеме шарика V толщину стенок можно найти из соотношения

$$V^{2/3}h = V_0^{2/3}h_0,$$

в котором учитывается, что плотность резины остается неизменной при ее деформациях растяжения в одних направлениях и сжатия в других направлениях. Поток молекул газа через стенку шарика наружу описывается формулой

$$\frac{d\left(Vn_{\text{вн}}\right)}{dt} = -\delta\frac{S}{h}\left(n_{\text{вн}} - n_{\text{сн}}\right),$$

где S – площадь поверхности шарика, δ – коэффициент диффузии, $n_{\text{вн}}$ и $n_{\text{сн}}$ – концентрации газа внутри и снаружи шарика.

Для гелия (г), концентрация которого снаружи оболочки очень мала, это соотношение принимает вид

$$\frac{d\left(Vn_{\text{вн}}\right)}{dt} = -\alpha\frac{S}{h}n_{\text{вн}},$$

или

$$\frac{d\left(Vn_{\text{г вн}}\right)}{dt} = -\alpha n_{\text{г вн}}V^{4/3}\frac{(4\pi)^{2/3}\cdot 3^{1/3}}{\left(V_0\right)^{2/3}h_0},$$

где α – коэффициент диффузии гелия.

Для воздуха (в) аналогичное соотношение выглядит так:

$$\frac{d\left(Vn_{\text{в вн}}\right)}{dt} = \beta\left(n_{\text{в сн}} - n_{\text{в вн}}\right)V^{4/3}\frac{(4\pi)^{2/3}\cdot 3^{1/3}}{\left(V_0\right)^{2/3}h_0},$$

где β – коэффициент диффузии воздуха через резину.

Суммарное давление газов внутри шарика весьма мало отличается от давления воздуха снаружи. Экспериментально измеренное отличие меньше, чем на 1%. Дополнительное давление создают растянутые резиновые стенки шарика. Зависимость этого дополнительного давления внутри от объема шарика тоже можно узнать экспериментально, но, поскольку оно мало в сравнении с атмосферным давлением, для совсем упрощенной модели можно считать, что давления газов внутри и снаружи просто одинаковы и равны атмосферному давлению. В этом приближении выполняется такое соотношение:

$$n_{\text{г вн}} + n_{\text{в вн}} = n_{\text{в сн}}. \quad (1)$$

Если учитывать, что давление внутри шарика на 1% больше давления снаружи, то уточненное соотношение для концентраций газов будет немного иным:

$$n_{\text{г вн}} + n_{\text{в вн}} = 1{,}01n_{\text{в сн}}. \quad (2)$$

Поскольку в наших опытах объем шарика через сутки уменьшился по сравнению с начальным объемом в два раза, а гелия в шарике осталась всего одна двадцатая часть от начального количества, то концентрация гелия в шарике уменьшилась в 10 раз. Из этих сведений можно оценить отношение коэффициентов диффузии газов (β/α) через резиновую стенку. Для получения оценки воспользуемся численным моделированием – ведь решить аналитически систему из двух дифференциальных уравнений и одного алгебраического соотношения с тремя неизвестными, похоже, совсем не просто.

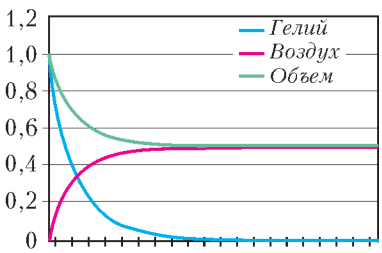


Рис. 1

На рисунке 1 приведены расчетные зависимости (в условных единицах) количеств веществ (гелия и воздуха) в объеме шарика и зависимость самого объема шарика от времени. Расчеты проведены с использованием программы Excel при подобранном отношении $\beta/\alpha = 0{,}5$ и для соотношения между концентрациями газов (1). Видно, что скорость диффузии гелия через резину примерно в два раза больше скорости диффузии воздуха. При использовании соотношения (1) объем шарика в модельном расчете со временем стабилизируется.

Если воспользоваться уточненным соотношением для концентраций газов (2), то ситуация изменится. На рисунке 2 приведены зависимости этих же величин, рассчитанные с использованием соотношения (2), при изменении масштаба по оси времени в 10 раз, т.е. времени с момента старта во втором численном эксперименте прошло в 10 раз больше. Видно, что после того как количество воздуха, проникшего внутрь шарика, достигло максимума, это количество очень медленно убывает со временем (до тех пор, пока стенки шарика не перестанут быть растянутыми).

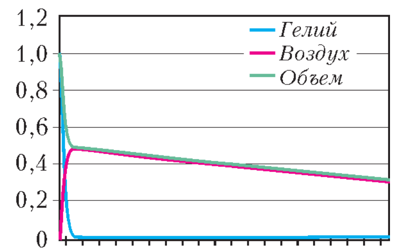


Рис. 2

Вот такие забавные мысли пришли мне в голову после дочкиного дня рождения.

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Между зеркалами

А.АНДРЕЕВ, А.ПАНОВ

В статье «Цилиндрическое зеркало-трубка» (см. «Квант» №1 за 2014 г.) мы рассказали о том, что если точечный источник света поместить внутрь зеркальной трубки, то на экране можно увидеть систему концентрических световых колец. А сейчас мы обсудим ситуацию, когда источник находится между двумя плоскими зеркалами.

Возьмите два небольших плоских зеркала, расположите их параллельно лицом друг к другу и разделите какими-нибудь прокладками толщиной в несколько миллиметров. Между зеркалами поместите небольшой источник света, например – маленький светодиод. Осветите при помощи этого устройства экран, и вы увидите картину, представленную на рисунке 1.

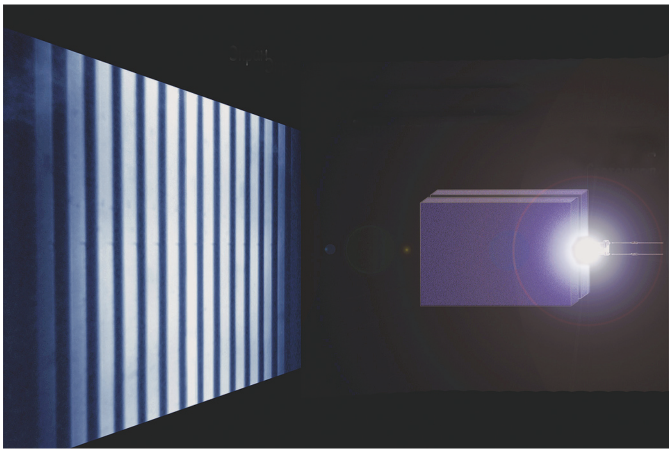


Рис. 1. На экране видно чередование более и менее ярких полосок

Как и в случае с трубкой, на экране наблюдается чередование более и менее ярких областей, на этот раз – прямолинейных полосок. И вновь возникает вопрос о причинах этого явления, правда никаких принципиально новых рассуждений и вычислений по сравнению с тем, что говорилось о трубке, не требуется. Чтобы убедиться в этом, посмотрим на рисунок 2. Видно, что лучи, испытавшие k отражений в щели между зеркалами, формируют на экране отдельную полосу. Соседние полосы пересекаются, и именно их пересечения видны как яркие полоски на экране.

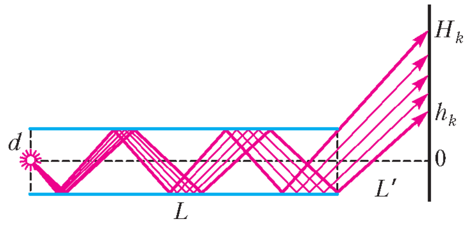


Рис. 2. Сечение пары зеркал перпендикулярной им плоскостью, проходящей через источник, и пучок световых лучей, испытавших $k = 5$ отражений в щели между зеркалами

На рисунке 2 расстояние между зеркалами обозначено буквой d, длина зеркал – L и расстояние до экрана – L'. Через h_k и H_k обозначены расстояния от краев полосы, сформированной k-кратно отраженными лучами, до центра экрана. Простая геометрия позволяет получить следующие формулы:

$$h_k = \left((2k-1)\frac{L'}{L} - 1 \right)\frac{d}{2},$$

$$H_k = \left((2k+1)\frac{L'}{L} + 1 \right)\frac{d}{2}, \quad k = 1, 2, 3 \ldots$$

При этом не испытавшие ни одного отражения лучи заполняют на экране целую полосу шириной $(L'/L+1)d$. Для ширины k-й полосы $\Delta = H_k - h_k$ и для ширины пересечения соседних полос $\delta = H_k - h_{k+1}$ получаем

$$\Delta = \left(\frac{L'}{L}+1\right)d \quad \text{и} \quad \delta = d .$$

Видим, что ширина полосы Δ не зависит от k, а ширина пересечения соседних полос δ, она же ширина узких ярких полосок на рисунке 1, равна расстоянию между зеркалами.

Теперь, пожалуй, можно сказать, что мы разобрались с изображением, представленным на рисунке 1. Нужно только добавить, что на самом деле наше устройство не только режет изображение на полоски, но и тасует их – шинкует и перемешивает.

Чтобы разобраться и с этим, внесем некоторые изменения в наш эксперимент – наделим световые лучи индивидуальностью и заставим их двигаться в обратном направлении. Другими словами, разместим исходное изображение на экране, а на месте точечного источника расположим входной зрачок фотокамеры, который в свою очередь будем считать точечным отверстием. На рисунке 3 изображена схема нового эксперимента (сравните с рисунком 1).

Рис. 3. Схема нового эксперимента

Мы видим, что исходное изображение – фрагмент картины Густава Климта «Золотая Адель» – после прохождения через щель между параллельными зеркалами на экране фотокамеры выглядит разрезанным на полоски, которые переставляются, да еще и с отражением. Картинка осложняется также и тем, что при прямом ходе лучей в некоторые точки на экране попадают по два световых луча (именно эти точки формируют на экране светлые полоски на рисунке 1), а при обратном ходе каждая такая точка будет иметь два образа на экране фотокамеры.

Приведем еще один, более простой, пример – изображение карандаша, пропущенное через ту же щель между зеркалами (рис.4).

Хотелось бы получить подобные изображения и с помощью трубки, но в той стеклянной, с которой мы работали, слишком велики потери при отражении и она не дает удовлетворительной картины. А подходящей зеркальной трубки у нас, к сожалению, пока нет.

Тем не менее, нами получены некоторые результаты, представленные на рисунке 5. Видно, что здесь изображение режется на кольца и соседние кольца поворачиваются друг относительно друга на $180°$.

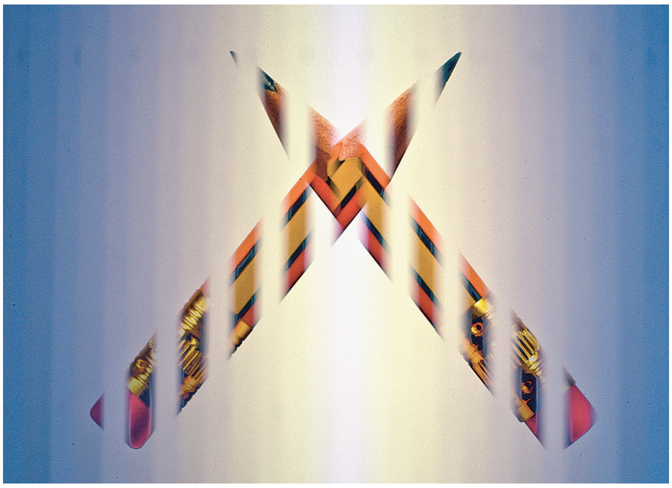


Рис. 4. Так выглядит карандаш, пропущенный через щель между зеркалами

Простые оптические схемы, с которыми мы экспериментировали, используются и в серьезной оптике. Вот несколько примеров.

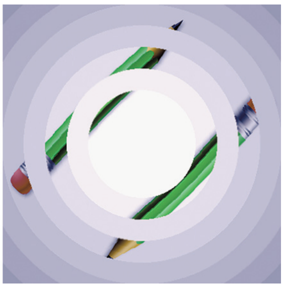


Рис. 5. Слева – реальный эксперимент, справа – компьютерная симуляция

Одним из наиболее часто используемых интерференционных спектральных приборов является интерферометр Фабри–Перо, который состоит из двух параллельных плоских зеркал с высокой отражательной способностью. Та же самая схема с параллельными плоскими или соосными сферическими зеркалами используется и в качестве лазерного резонатора. Правда, в отличие от наших экспериментов в интерферометре Фабри–Перо свет движется в направлении, почти что перпендикулярном к обоим зеркалам.

Посмотрим теперь, что получится, если к двум зеркалам добавить третье. Возьмем три длинные зеркальные полоски и составим из них треугольную призму, расположив их зеркальными поверхностями друг к другу. Это, конечно же, обычный калейдоскоп. Вот в калейдоскопе, как и в наших экспериментах, самая важная часть изображения создается лучами, которые почти что параллельны составляющим его зеркалам.

Существуют калейдоскопы и с большим, чем три, числом зеркал. Если это число сделать очень большим, то получится зеркало-трубка. А высококачественные зеркала-трубки используются в рентгеновских телескопах. В проекте HERO, осуществленном NASA, рентгеновский телескоп, собранный из нескольких батарей вложенных друг в друга зеркал-трубок, с помощью гигантского воздушного шара, наполненного гелием, поднимался на высоту 40 километров, где и проводились наблюдения рентгеновских источников.

Задачи и теоремы о представителях

А.РОМАНОВ

Самой известной и простой задачей о представителях, пожалуй, является такая.

Задача 1. *Какое наибольшее число ладей можно расставить на шахматной доске 8×8, чтобы ладьи не били друг друга, т.е. чтобы на каждой горизонтали и на каждой вертикали стояло не более одной ладьи?*

Ясно, что нельзя поставить более восьми ладей – горизонталей только восемь (как и вертикалей). А восемь ладей расставить несложно (проверьте это, если задача незнакома). Так расставленные ладьи можно назвать представителями вертикалей (или горизонталей), на которых они стоят.

Определение. *Пусть имеется прямоугольная таблица $M \times N$. Представителями вертикалей назовем такое подмножество P клеток таблицы, что на каждой вертикали имеется ровно одна клетка из P и на каждой горизонтали расположено не более одной клетки из P.*

Следующая задача позволяет по-новому взглянуть на представителей (ее связь с предыдущим определением проясняет первая из задач для самостоятельного решения, приведенных в конце статьи).

Задача 2. *На чаепитие собрались N школьников, каждый принес по два пирожных. Все пирожные разложили на N тарелок по два на тарелку. Докажите, что как бы ни были разложены пирожные, можно так раздать тарелки, что каждому достанется хотя бы одно пирожное, которое он сам принес.*

Предположим, что утверждение неверно и существуют натуральное N и способ разложить на N тарелок по два пирожных так, что невозможно правильно раздать их N школьникам. Тогда среди таких «плохих» натуральных N существует самое маленькое. Заметим, что $N > 1$, так как при $N = 1$ одному школьнику всегда достанется тарелка, на которой оба пирожных принес он. Рассмотрим «плохой» способ разложить пирожные для этого N. Выберем любую тарелку и отдадим ее школьнику, чье пирожное есть на выбранной тарелке. Если второе пирожное на этой тарелке принес другой школьник, то есть еще одна тарелка, на которой лежит другое пирожное этого школьника. Отдадим ему эту тарелку. Другое пирожное на второй отданной тарелке принес какой-то школьник. Если это не первый школьник, то продолжим раздавать тарелки. Процесс остановится, когда в отданной тарелке окажется второе пирожное первого школьника (может быть, это случится и в самом начале). Заметим, что в оставшихся тарелках нет пирожных школьников, уже получивших тарелки. Значит, осталось M школьников и M тарелок, в которых только их пирожные. Если $M = 0$, то все тарелки розданы школьникам правильно, а это противоречит предположению. Пусть $M > 0$. Но N было самым маленьким «плохим» числом, значит, оставшиеся M тарелок можно правильно раздать школьникам, следовательно, неверно предположение, с которого мы начали доказательство, т.е. утверждение доказано.

Следующая задача гораздо сложнее.

Задача 3. *А если каждый из N школьников принес по M пирожных и их разложили на N тарелок по M штук на тарелку?*

Заметим, что соображения вроде «выгодно давать школьнику тарелку, в которой много его пирожных», не работают. Например, если раздать M школьникам по тарелке, в которой $M - 1$ пирожных принес этот школьник, то все пирожные $(M + 1)$-го школьника могут оказаться розданными.

Как и в задаче 2, предположим, что утверждение неверно, и начнем с рассмотрения «плохого» способа разложить пирожные на N тарелок для самого маленького «плохого» N. Для этого способа можно раздать тарелки школьникам так, что наибольшее число тарелок роздано правильно (т.е. в них есть пирожные, которые принес школьник, получивший тарелку). Нам понадобятся представители для школьников. Дадим каждому школьнику маленький флажок с его именем. Те, кто получил «правильную тарелку», должны воткнуть флажок в свое пирожное на этой тарелке, а остальные – в свое пирожное на любой чужой тарелке. В результате в некоторых тарелках будут пирожные с флажками, а в некоторых – нет. Причем в нашем случае тарелок с флажками максимально возможное число – ведь если в тарелке есть флажок, ее можно правильно отдать школьнику. Раз есть тарелки без флажков, а флажков и тарелок по N, то есть тарелка, в которой не менее двух флажков. Выберем одну из таких тарелок и назовем ее первой (рис.1,*а*). Теперь выберем все тарелки, на которых есть пирожные тех школьников, чьи флажки в первой тарелке. Поставим эти тарелки рядом с первой и назовем их вторыми (рис.1,*б*).

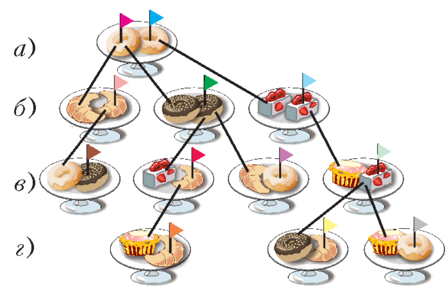


Рис. 1

Заметим, что если среди вторых найдется тарелка без флажка, то можно флажок из первой тарелки переставить в эту вторую и число тарелок с флажками увеличится, чего быть не может. Значит, в каждой из вторых тарелок есть флажок. Выберем третьи тарелки из еще не выбранных так, чтобы в каждой третьей было пирожное тех школьников, чьи флажки были во вторых тарелках (рис.1,*в*). Аналогично, в каждой третьей тарелке должен быть флажок, иначе можно в цепочке первая-вторая-третья переставить флажки и тарелок с флажками станет на одну больше. Так же выберем четвертые, пятые и т.д. тарелки, пока это будет возможно (рис.1,*г*). Рассмотрим все выбранные тарелки. Пусть их будет K, тогда всего на них MK пирожных. Если в какой-то выбранной тарелке есть флажок, то все пирожные школьника, чей это флажок, лежат в выбранных тарелках. В первой тарелке не менее двух флажков, а в остальных не менее одного, значит, всего не менее $K + 1$ флажков и не менее $M(K + 1)$ пирожных. Противоречие. Значит, предположение неверно и задача решена.

Верно и более сильное утверждение.

Задача 4. *На чаепитие собрались N школьников, каждый принес по пирогу массой не менее 1 кг. Все пироги как-то разрезали и разложили на M тарелок так, что в каждой тарелке лежит не более 1 кг. Докажите, что можно раздать школьникам по тарелке так, что каждому достанется хотя бы один кусочек пирога, который он сам принес.*

Понятно, что $M \geq N$. Попробуйте самостоятельно убедиться, что доказательство в задаче 3 с небольшими дополнениями является доказательством утверждения в задаче 4.

Можно сформулировать задачу 4 по-другому.

Задача 4а. *Прямоугольная таблица $M \times N$ заполнена неотрицательными числами, причем существует число*

$C > 0$ такое, что сумма чисел в любом столбце не меньше C, а сумма чисел в любой строке не больше C. Тогда можно из каждого столбца выбрать клетку с положительным числом так, что выбранные клетки будут стоять в различных строках. Таким образом, можно выбрать представителей столбцов из клеток с положительными числами.

То, что числа неотрицательные, важно: для произвольных чисел утверждение задачи 4а неверно. Проверьте это.

Классической задачей о представителях является задача о свадьбах.

Задача 5. *Рассмотрим некоторое конечное множество юношей, каждый из которых знаком с несколькими девушками. Спрашивается, при каких условиях можно женить юношей так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке?*

Теорема (Филип Холл, 1935). *Решение задачи о свадьбах существует тогда и только тогда, когда любые K юношей из данного множества из N юношей знакомы в совокупности по меньшей мере с K девушками ($1 \le K \le N$).*

Необходимость очевидна. Если какие-то K юношей знакомы с менее чем K девушками, то кому-то из них не найдется пары. Докажем достаточность от противного. Пусть N – наименьшее натуральное число, для которого теорема неверна. Очевидно, что $N > 1$. Может быть так, что каждые K юношей ($1 \le K < N$) знакомы более чем с K девушками, а может быть, что есть подмножество из K юношей, знакомых ровно с K девушками. В первом случае первый юноша может жениться на любой знакомой девушке, и тогда условие теоремы по-прежнему будет выполняться для оставшихся юношей и девушек. Действительно, пусть каждые K юношей знакомы более чем с K девушками. Одна из этих девушек, возможно, вышла замуж за первого юношу. Но без нее юношам знакомы не менее K девушек. Значит, после женитьбы любой пары остается $N - 1$ юноша и $M - 1$ девушка (где M – начальное число девушек), для которых условие теоремы по-прежнему выполняется. Но N было самым маленьким, для которого теорема неверна, значит, всех юношей можно женить.

Во втором случае есть K юношей, знакомых ровно с K девушками. Так как $K < N$, мы можем женить этих юношей на этих девушках. Покажем, что остальных юношей тоже можно женить. Рассмотрим произвольное подмножество из оставшихся $N - K$ юношей. Пусть в нем L юношей. Тогда, по условию теоремы, K женатых юношей плюс эти L юношей знакомы не менее чем с $K + L$ девушками. Так как K женатых юношей не знакомы с незамужними девушками, остальные L юношей должны быть знакомы с не менее чем L незамужними девушками. Значит, для оставшихся $N - K$ юношей выполнено условие теоремы, и они смогут жениться. Теорема доказана.

Теорема Холла позволяет решить задачу 4 другим способом. Назовем школьников юношами, а тарелки – девушками. Знакомыми школьника будем считать тарелки, на которых лежит кусочек пирога, который принес школьник. Условие теоремы Холла выполнено, так как любые K школьников принесли не менее K килограммов пирогов и для них потребуется не менее K тарелок.

Теорема (Д.Кёниг, 1931). *Пусть задана прямоугольная таблица, в клетках которой стоят нули и единицы. Линией в таблице назовем как строку, так и столбец этой таблицы. Тогда минимальное число линий, содержащих все единицы, равно максимальному числу единиц, которые могут быть выбраны так, чтобы среди них не нашлось двух, расположенных на одной и той же линии.*

Существуют прямые способы доказать теорему Кёнига, но проще воспользоваться теоремой Холла. Пусть m – минимальное число линий, содержащих все единицы, а M – максимальное число единиц, никакие две из которых не лежат на одной линии. Очевидно, что $m \ge M$. Докажем, что $m \le M$. Пусть минимальное покрытие m линиями состоит из r строк и s столбцов, где $r + s = m$. Так как перестановка строк и столбцов не влияют на m и M, можно так переставить строки и столбцы, чтобы линии покрытия были первыми r строками и s столбцами. Назовем юношами первые r строк таблицы, а девушками – столбцы с номерами, большими s (рис. 2). Юношу и девушку будем считать знакомыми, если на пересечении соответствующих строки и столбца стоит единица. Условия теоремы Холла выполнены в силу минимальности числа линий, иначе можно заменить какие-то K строк покрытия на $K - 1$ столбцов и все единицы останутся вычеркнутыми. Следовательно, можно женить юношей, т.е. выбрать в каждой из первых r строк по единице так, что никакие две единицы не лежат в одном столбце и ни одна не лежит в первых s столбцах. Рассуждая аналогично, мы можем выбрать s единиц в первых s столбцах, которые лежат в разных строках и не лежат в первых r строках. Итак, мы доказали существование m единиц, никакие две из которых не лежат на одной линии. Следовательно, $m \le M$, и доказательство завершено.

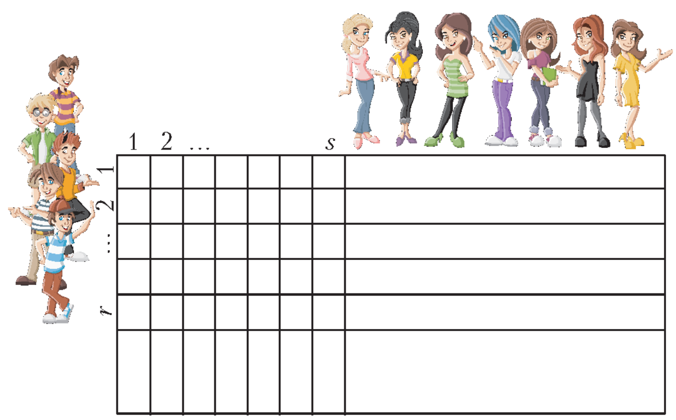


Рис. 2

В свою очередь, из теоремы Кёнига следует теорема Холла. Действительно, пусть таблица из M строк и N столбцов содержит единицы в клетках, если юноша, имеющий номер столбца, знаком с девушкой, имеющей номер строки. Ясно, что все единицы в такой таблице нельзя вычеркнуть менее чем N линиями, так как после вычеркивания K столбцов в оставшихся $N - K$ столбцов останутся единицы не менее чем в $N - K$ строках.

Задачи для самостоятельного решения

1. На шахматной доске 8×8 пометили 16 клеток так, что на каждой вертикали и каждой горизонтали оказалось по две помеченные клетки. Докажите, что на помеченных клетках можно расставить 8 белых и 8 черных фигур так, чтобы на каждой вертикали и горизонтали стояло по одной белой и одной черной фигуре.

2. Школьники на кружке решали задачи. Оказалось, что каждый решил по 4 задачи и каждая задача решена четырьмя школьниками. Докажите, что можно организовать разбор задач так, чтобы каждый школьник рассказал ровно одну задачу и все задачи были разобраны.

3. Пусть каждый юноша знаком не менее чем с m девушками, а каждая девушка – не более чем с m юношами (m – произволь-

(Продолжение см. на с. 53)

Задачи с экстремумами

А.ЧЕРНОУЦАН

Когда в задаче по физике требуется найти экстремум – максимум или минимум – некоторой физической величины, то у математически продвинутого абитуриента возникает естественная реакция: надо приравнять к нулю производную. Умение безошибочно вычислять производные является, несомненно, полезным, но встречается оно (и то довольно редко) только у учащихся выпускного класса, а с экстремумами сталкиваются (особенно на олимпиадах) и школьники предыдущих классов. Кроме того, решение через производную отнюдь не всегда является самым простым и самым изящным.

В этой статье вы познакомитесь с несколькими способами нахождения экстремума без производных. Там, где решение с производной не является сложным, мы будем приводить и его, наряду с одним или несколькими другими подходами.

Перечислим основные методы нахождения экстремума.

1. Использование неявных производных, имеющих физический смысл. Так, экстремум координаты достигается при нулевой проекции скорости, экстремум скорости – при нулевом ускорении, экстремум заряда – при нулевом токе. (Задачи 1, 10)

2. Исследование квадратного трехчлена. Можно выделять полный квадрат, использовать готовые формулы для вершины параболы, находить корни трехчлена (вершина лежит посередине между корнями). (Задачи 2, 3, 6, 8)

3. Использование тригонометрических преобразований и экстремумов тригонометрических функций. Например, если исследуемая функция свелась к синусу переменного угла, то максимум достигается при значении синуса, равном единице. Известный пример: дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту, выражается через синус двойного угла. (Задача 9)

4. Использование неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом для двух положительных чисел a и b:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\,,$$

причем равенство достигается при $a = b$. Это неравенство очевидно (при переносе правой части влево возникает полный квадрат). Если сумма фиксирована, то можно найти максимум произведения, если произведение фиксировано, то можно найти минимум суммы. (Задачи 2, 4, 5, 7)

Обобщением этого неравенства является общее неравенство Коши–Буняковского:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\,,$$

но я не встречался с его применением в школьной физике (если знаете, напишите в редакцию).

5. Переход к другой системе отсчета (СО). В новой системе отсчета нахождение экстремума может существенно упроститься. (Задачи 3, 4, 11, 12)

6. Использование графических методов. Нахождение экстремума может свестись к простому построению. Часто этот метод используется совместно с переходом к другой системе отсчета. (Задачи 3, 11, 12)

7. Использование исследуемой величины в качестве параметра уравнения. Если вы исследуете на минимум (или максимум) зависимость $y(x)$ (рис.1), то минимальному значению y будет соответствовать одно значение x, значениям $y > y_{\min}$ – два значения x, а при $y < y_{\min}$ уравнение относительно x не имеет решений. При этом сама функция $y(x)$ может иметь сложный вид. (Задачи 3, 4, 5, 6, 7, 8, 13)

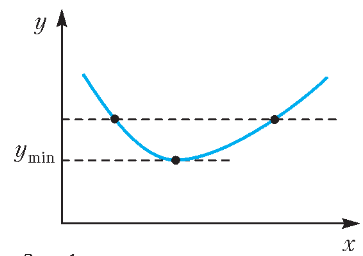


Рис. 1

8. Метод малых вариаций. При небольшом изменении параметра изменение исследуемой величины должно быть равно нулю (в первом порядке малости). (Задача 14)

А теперь – конкретные задачи.

Задача 1. *Точка движется вдоль оси x по закону $x = 2t^3 - 9t^2 + 12t$ (м). Найдите путь, пройденный точкой за первые 3 с движения.*

Решение. Начальная координата x_0 точки равна нулю. Координата x в момент времени $t_к = 3$ с равна $x_к = 9$ м, однако она дает нам значение не пути, а перемещения. Путь совпадает с перемещением только в том случае, когда на рассматриваемом отрезке времени нет точек разворота. Точки разворота – это экстремумы функции $x(t)$, в этих точках скорость обращается в ноль. Так как движение не равноускоренное, то готовыми формулами воспользоваться не удастся, придется брать производную:

$$v_x = x'(t) = 6t^2 - 18t + 12\,.$$

Решение уравнения $v_x = 0$ дает точки разворота $t_1 = 1$ с и $t_2 = 2$ с, находящиеся внутри рассматриваемого отрезка времени. Значения координат в эти моменты времени равны $x_1 = 5$ м и $x_2 = 4$ м соответственно. Пройденный путь будет равен

$$L = |x_1 - x_0| + |x_2 - x_1| + |x_к - x_2| = 5\text{ м} + 1\text{ м} + 5\text{ м} = 11\text{ м}\,.$$

Задача 2. *Цилиндрический сосуд заполняют водой до высоты h. На какой высоте надо проделать малое отверстие в боковой стенке сосуда, чтобы дальность падения водяной струи была максимальной?*

Решение. Если отверстие находится на высоте x, то расстояние до уровня воды равно $h - x$ и из закона сохранения энергии следует, что скорость вытекания воды равна $v = \sqrt{2g(h-x)}$ (формула Торричелли). Тогда дальность полета будет равна

$$l = vt = \sqrt{2g(h-x)}\sqrt{\frac{2x}{g}} = 2\sqrt{x(h-x)}\,.$$

Интересно, что дальность полета не зависит от g. Максимум подкоренного выражения можно найти либо с помощью производной, либо по графику параболы (есть два корня $x_1 = 0$ и $x_2 = h$, максимум лежит посередине: при $x = h/2$), либо даже через неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом (сумма сомножителей фиксирована, максимум произведения достигается при равенстве сомножителей). В любом случае получаем

$$l_{\max} = 2\sqrt{\frac{h}{2}\left(h - \frac{h}{2}\right)} = h\,.$$

Задача 3. *Автомобиль приближается к пункту А со скоростью $v_1 = 80$ км/ч. В тот момент, когда ему оста-*

валось проехать $L = 10$ км, из пункта A в перпендикулярном направлении выезжает грузовик со скоростью $v_2 = 60$ км/ч. Чему равно наименьшее расстояние между автомобилем и грузовиком?

Решение. Ясно, что расстояние между автомобилем и грузовиком имеет минимум – вначале это расстояние уменьшается, а при подъезде автомобиля к пункту A оно уже увеличивается. Зависимость расстояния (точнее, квадрата расстояния) между автомобилем и грузовиком от времени имеет вид

$$s^2 = \left(L - v_1 t\right)^2 + \left(v_2 t\right)^2 = \left(v_1^2 + v_2^2\right)t^2 - 2Lv_1 t + L^2 .$$

Проще всего исследовать это выражение на минимум с помощью производной. Приравняв производную к нулю, получим

$$t = \frac{Lv_1}{v_1^2 + v_2^2}, \quad s = \frac{Lv_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = 6 \text{ км}.$$

Можно выделить полный квадрат интересующего нас расстояния:

$$s^2 = \left(v_1^2 + v_2^2\right)\left(t - \frac{Lv_1}{v_1^2 + v_2^2}\right)^2 - \frac{L^2 v_1^2}{v_1^2 + v_2^2} + L^2$$

и получить тот же ответ.

Можно также прибегнуть к способу 7. Уравнение

$$\left(v_1^2 + v_2^2\right)t^2 - 2Lv_1 t + L^2 - s^2 = 0$$

при фиксированном минимальном s должно иметь единственное решение, т.е. его дискриминант должен быть равен нулю. Проверьте, что для s получается правильный ответ.

Однако самое короткое и красивое решение основано на переходе в систему отсчета одного из тел, например автомобиля. Второе тело, грузовик, в этой СО движется с постоянной скоростью

$$\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 ,$$

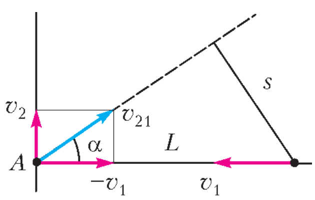


Рис. 2

т.е. по прямой, указанной на рисунке 2 пунктирной линией. Минимальное расстояние между неподвижным (в этой СО) автомобилем и грузовиком находится построением:

$$s = L\sin\alpha = L\frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} .$$

Задача 4. *Когда пассажиру осталось дойти до двери вагона расстояние $L = 25$ м, поезд тронулся с места и стал разгоняться с ускорением $a = 0{,}5$ м/с^2. Пассажир побежал с постоянной скоростью v. При каком минимальном значении v он догонит свой вагон?*

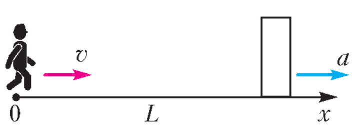


Рис. 3

Решение. Введем координатную ось x в направлении от человека к двери вагона с началом координат в точке начального положения человека (рис.3). В момент встречи координаты человека и двери совпадают (рис.4):

$$x_1 = vt, \;\; x_2 = L + \frac{at^2}{2}, \;\; x_1 = x_2, \;\; \frac{at^2}{2} - vt + L = 0 .$$

Минимальная скорость соответствует ситуации, когда человек и дверь встречаются один раз, т.е. человек догоняет дверь, но не обгоняет ее. Единственность решения означает обращение в ноль дискриминанта:

$$v^2 - 2aL = 0, \quad v = \sqrt{2aL} = 5 \text{ м/с} .$$

Можно реализовать ту же идею иначе. Единственность встречи означает, что в момент встречи скорости человека и двери равны, поэтому получаем уравнение $v = at$. Выражая отсюда t и подставляя в условие встречи, находим скорость.

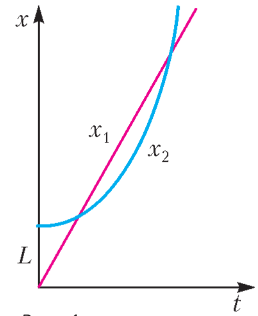


Рис. 4

А еще можно выразить из условия встречи скорость v в зависимости от времени t до встречи:

$$v = \frac{L}{t} + \frac{at}{2}$$

и найти минимум этого выражения либо с помощью производной, либо с помощью неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Поскольку произведение слагаемых фиксировано, то минимум суммы достигается при равенстве слагаемых:

$$\frac{L}{t} = \frac{at}{2}, \quad t = \sqrt{\frac{2L}{a}}, \quad v = \sqrt{2aL} .$$

Наконец, можно перейти в другую систему отсчета, например в СО человека. Человек стоит на месте, а дверь движется с начальной скоростью v в сторону человека и тормозится с ускорением a. Дверь «доедет» до человека при условии

$$\frac{v^2}{2a} \ge L, \quad v \ge \sqrt{2aL} .$$

Задача 5. *Конькобежец проходит расстояние $s = 450$ м с постоянной скоростью v, а затем тормозит до остановки с ускорением $a = 0{,}5$ м/с^2. При некотором значении скорости v общее время движения конькобежца будет минимально. Чему равно это время?*

Решение. Общее время движения на двух участках выражается формулой

$$t = \frac{s}{v} + \frac{v}{a} .$$

Исследовать это выражение на минимум можно с помощью производной, а можно, как в предыдущей задаче, с помощью неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Поскольку произведение слагаемых постоянно, то минимум суммы достигается при равенстве слагаемых:

$$\frac{s}{v} = \frac{v}{a}, \quad v = \sqrt{sa}, \quad t = 2\sqrt{\frac{s}{a}} = 60 \text{ с} .$$

Способ 7 также работает. При заданном t для v получим уравнение

$$v^2 - (at)v + as = 0 .$$

Минимальному t должно соответствовать только одно значение v. Из равенства нулю дискриминанта: $D = (at)^2 - 4as = 0$ получаем ответ.

Задача 6. *Определите наибольшее возможное давление ν молей идеального газа в процессе, происходящем по закону $T = T_0\left(1 - V_0/V\right)$, где T_0, V_0 – известные положительные постоянные ($V > V_0$).*

Решение. Выражая давление из уравнения Менделеева–Клапейрона: $p = \nu RT/V$, получим

$$p = \frac{\nu RT_0}{V}\left(1 - \frac{V_0}{V}\right).$$

Это выражение можно исследовать на максимум либо с помощью производной (если умеете, сделайте самостоятельно), либо как квадратичную функцию от $x = V_0/V$ (см. задачу 2):

$$p = \frac{\nu RT_0}{V_0}x\left(1 - x\right) .$$

Максимум достигается при $x = 1/2$ (посередине между корнями $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$), т.е. при $V = 2V_0$. Максимальное давление будет равно

$$p_{\max} = \frac{\nu RT_0}{4V_0}.$$

Если не додумались перейти к новой переменной, то можно, как обычно, прибегнуть к методу 7. Считая давление заданным, найдем его максимальное значение из условия, что уравнение для V

$$pV^2 - (\nu RT_0)V + \nu RT_0V_0 = 0$$

имеет одно решение (дискриминант равен нулю). Убедитесь, что получается правильный ответ.

Задача 7. *Источник тока с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r замыкают на реостат. При каком сопротивлении реостата на нем будет выделяться максимальная мощность? Чему она равна?*

Решение. Мощность, выделяющаяся на реостате, выражается формулой

$$P = I^2R = \frac{\mathscr{E}^2}{(R+r)^2}R.$$

Это выражение стремится к нулю как при $R \to 0$, так и при $R \to \infty$. Значит, оно должно быть максимально при некотором R. Кто научился хорошо дифференцировать, может попробовать найти максимум этого выражения с помощью производной. Мы поступим иначе. Преобразуем выражение для мощности, разделив на R числитель и знаменатель:

$$P = \frac{\mathscr{E}^2}{R + 2r + r^2/R}.$$

Из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом следует, что минимум выражения $R + r^2/R$, а значит максимум мощности, достигается при равенстве слагаемых, т.е. при

$$R = r.$$

Максимальная мощность при этом будет равна

$$P_{\max} = \frac{\mathscr{E}^2}{4r}.$$

Если бы мы не додумались до указанного преобразования, то могли бы пойти другим знакомым путем. Будем считать исследуемое выражение для $P(R)$ уравнением для R при заданной P, тогда при $P = P_{\max}$ это уравнение должно иметь одно решение, т.е. дискриминант должен обратиться в ноль (способ 7). Проделайте вычисления самостоятельно и убедитесь, что получается правильный ответ. Мы же обозначим еще один подход к этой задаче.

Мощность во внешней цепи можно выразить не как функцию R, а как функцию силы тока I:

$$P = \mathscr{E}I - I^2r$$

(мощность, переданная во внешнюю цепь, есть полная мощность источника минус тепловая мощность на внутреннем сопротивлении источника). Эта формула имеет даже более общий характер, чем формула $P(R)$, она применима при любой нагрузке внешней цепи. Зависимость $P(I)$ есть квадратичная функция с корнями $I_1 = 0$ и $I_2 = \mathscr{E}/r$, имеющая при $I = \mathscr{E}/(2r)$ максимальное значение $P_{\max} = \mathscr{E}^2/(4r)$.

Задача 8. *Найдите минимальное расстояние между маленьким предметом и его действительным изображением в собирающей линзе с фокусным расстоянием F.*

Решение. Опираясь на формулу линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

выразим расстояние между предметом и его изображением через d (поскольку изображение действительное, то $d > F$):

$$L = f + d = \frac{d^2}{d - F}.$$

Если рассматривать эту формулу как уравнение относительно d при заданном L:

$$d^2 - dL + FL = 0,$$

то минимум L соответствует единственному решению:

$$D = L^2 - 4FL = 0, \quad L = 4F, \quad d = \frac{L}{2} = 2F.$$

(До этого ответа можно догадаться: если $d \ne f$, то такое же L получится при замене d на f, а f на d.)

Впрочем, это не единственный способ. Можно решить через производную, а можно вместо L исследовать функцию

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{d} - \frac{F}{d^2},$$

которая является квадратичной функцией от $1/d$.

Задача 9. *По наклонной доске пускают снизу вверх маленькую шайбу с минимальной начальной скоростью, необходимой для достижения верхнего края доски. При некотором угле наклона доски время движения шайбы будет наименьшим. Чему равно это время? Коэффициент трения шайбы по доске $\mu = 0{,}75$, длина доски $l = 4$ м.*

Решение. Исключая v_0 из формул кинематики

$$0 = v_0 - at, \quad l = v_0t - \frac{at^2}{2},$$

получим

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}}.$$

Чтобы найти максимальное значение a, выразим его из уравнений динамики (рис.5; ось x направлена по ускорению, ось y – по силе нормальной реакции)

$$mg\sin\alpha + F_{тр} = ma,$$
$$N - mg\cos\alpha = 0,$$
$$F_{тр} = \mu N.$$

Находим

$$a = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

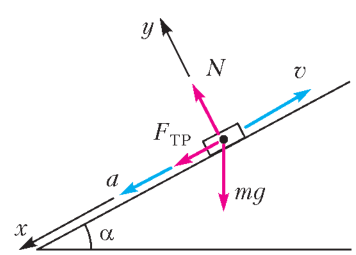


Рис. 5

Можно использовать производную, а можно прибегнуть к следующему преобразованию:

$$\sin\alpha + \mu\cos\alpha = \sqrt{1+\mu^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\sin\alpha + \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\cos\alpha\right) = \sqrt{1+\mu^2}\sin(\alpha+\beta),$$

где $\beta = \arccos\left(1/\sqrt{1+\mu^2}\right)$. Максимум этого выражения равен $\sqrt{1+\mu^2}$, следовательно, максимальное ускорение равно

$$a_{\max} = g\sqrt{1+\mu^2},$$

а минимальное время –

$$t_{\min} = \sqrt{\frac{2l}{a_{\max}}} = \sqrt{\frac{2l}{g\sqrt{1+\mu^2}}} = 0{,}8 \text{ с}.$$

Задача 10. *К нижнему концу недеформированной пружины жесткостью $k = 400$ Н/м прикрепили груз массой $m =$*

= 250 г и без толчка отпустили. Определите максимальную скорость груза.

Решение. Из закона сохранения энергии (потенциальная энергия тяготения отсчитывается от начального положения)

$$0 = -mgx + \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

выразим кинетическую энергию:

$$\frac{mv^2}{2} = mgx - \frac{kx^2}{2}.$$

Несложно найти максимум квадратичной функции в правой части равенства, однако мы лучше найдем точку максимума из физических соображений. Пока скорость возрастает, ускорение направлено вниз, когда скорость убывает, ускорение направлено вверх. В точке максимума ускорение равно нулю (скорость максимальна не только как функция x, но и как функция t). Второй закон Ньютона в этот момент имеет вид $mg - kx = 0$, откуда

$$x = \frac{mg}{k}.$$

Подставляя найденное x в выражение для кинетической энергии, найдем максимальную скорость:

$$v_{\max} = g\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,25 \text{ м/с}.$$

Следующие две задачи иллюстрируют графический метод анализа вместе с использованием дополнительной СО.

Задача 11. *По горизонтальной плоскости движется с постоянной скоростью $v_1 = 3$ м/с большая грифельная доска. По доске начинает скользить кусок мела, начальная скорость которого перпендикулярна скорости доски и равна $v_2 = 4$ м/с. Найдите минимальное значение скорости мела в процессе движения.*

Решение. Единственное, что можно сразу сказать о движении мела, это то, что его начальная скорость равна v_2, а конечная равна v_1 и направлена перпендикулярно к начальной. Чтобы узнать, как менялась скорость в процессе движения, перейдем в СО, связанную с доской. В этой СО доска неподвижна, а кусок мела скользит по ней по прямой линии с начальной скоростью $\vec{v}_0 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ (рис.6) до полной остановки. В процессе торможения его скорость относительно доски $\vec{v}_{\text{отн}}$ уменьшается от $\vec{v}_0$ до нуля, оставаясь все время параллельной $\vec{v}_0$. Скорость мела в первоначальной СО можно найти из закона сложения скоростей (рис.7):

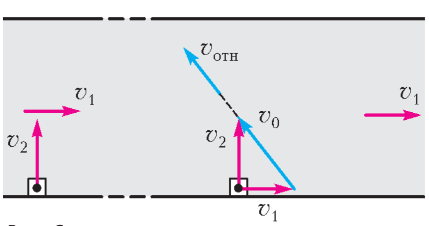


Рис. 6

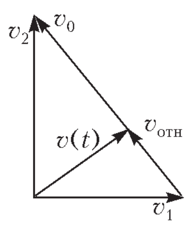


Рис. 7

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_1 + \vec{v}_{\text{отн}}.$$

Из рисунка 7 видно, что наименьшее значение $v(t)$ равно высоте прямоугольного треугольника (удвоенная площадь треугольника, деленная на гипотенузу):

$$v_{\min} = \frac{v_1 v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = 2,4 \text{ м/с}.$$

Задача 12. *Каким может быть максимальный угол отклонения налетающего шара массой m_1 при абсолютно упругом нецентральном ударе с покоящимся шаром массой $m_2 < m_1$? Поверхности шаров гладкие.*

Решение. Решение задачи «в лоб» является очень громоздким. Однако если проанализировать удар в СО центра масс, где импульс системы тел равен нулю, а потом вернуться в первоначальную (лабораторную) СО, то решение становится простым и наглядным. В СО центра масс шары движутся навстречу друг другу, шар массой m_2 движется со скоростью центра масс:

$$\tilde{v}_2 = v_{\text{ц}} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2},$$

а шар массой m_1 движется со скоростью

$$\tilde{v}_1 = v_1 - v_{\text{ц}} = \frac{m_2 v_1}{m_1 + m_2}$$

(знак « ~ » над буквой указывает на СО центра масс). После удара шары в этой СО разлетаются со скоростями $\tilde{u}_1$ и $\tilde{u}_2$, направленными противоположно друг другу (рис.8) и равными по модулю $\tilde{v}_1$ и $\tilde{v}_2$ соответственно (импульс системы равен нулю, как до удара, и энергия сохраняется). При этом угол между скоростью $\tilde{v}_1$ (параллельной $\vec{v}_{\text{ц}}$) и $\tilde{u}_1$ может быть любым от 0 (легкое касание шаров) до 180° (центральный удар). Чтобы найти конечную скорость u_1 первого шара в лабораторной СО, воспользуемся законом сложения скоростей (рис.9):

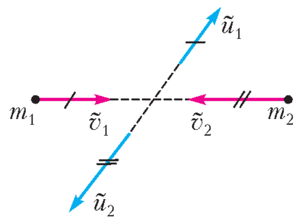


Рис. 8

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_{\text{ц}} + \vec{\tilde{u}}_1.$$

Как видно из рисунка 9, конец вектора $\vec{u}_1$ перемещается по окружности радиусом $\tilde{u}_1$ с центром в конце вектора $\vec{v}_{\text{ц}}$. Максимальный угол $\alpha_{\max}$ между векторами $\vec{v}_{\text{ц}}$ и $\vec{u}_1$ соответствует касательной к окружности, при этом

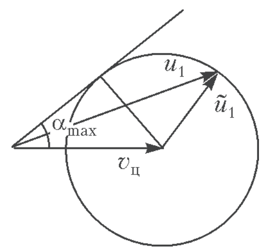


Рис. 9

$$\sin\alpha_{\max} = \frac{\tilde{u}_1}{v_{\text{ц}}} = \frac{\tilde{v}_1}{v_{\text{ц}}} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Следующая задача еще раз иллюстрирует нетривиальные возможности метода 7.

Задача 13. *Какую минимальную скорость надо придать волейбольному мячу в прыжке от самой поверхности земли, чтобы он перелетел через сетку высотой $h = 2,5$ м, расположенную на расстоянии $s = 6$ м от точки удара?*

Решение. По поводу этой задачи у меня есть особое воспоминание.

В 10 классе мы обсуждали эту задачу с Борисом Борисовичем Буховцевым. Борис Борисович рассказал, что в первом издании их знаменитого задачника они решали ее неправильно. Им казалось очевидным из соображений симметрии, что верхняя точка искомой траектории должна совпадать с верхней точкой сетки. Затем они получили письмо от читателя-школьника, который убедительно разъяснял их ошибку. Борис Борисович считал это прекрасным примером того, как осторожно надо относиться к «очевидным» утверждениям.

Запишем закон движения мяча в момент касания верхней точки сетки в проекциях на горизонтальную и вертикалькую оси:

$$s = (v_0\cos\alpha)t, \quad h = (v_0\sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2}.$$

Найдя t из первого уравнения и подставив во второе, получим

$$h = s\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gs^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} = s\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gs^2}{2v_0^2}\left(\mathrm{tg}^2\,\alpha + 1\right).$$

Если выразить отсюда v_0^2 и проанализировать на минимум как функцию $\mathrm{tg}\,\alpha$, то расчет получится весьма громоздким. Поэтому поступим проверенным способом: будем рассматривать формулу для v_0^2 как уравнение для $\mathrm{tg}\,\alpha$ при заданном v_0. При минимальном значении скорости $v_0 = v_{\min}$ это уравнение должно иметь одно решение:

$$D = s^2 - \frac{2gs^2}{v_{\min}^2}\left(h + \frac{gs^2}{2v_{\min}^2}\right) = 0\,.$$

Для $v_{\min}^2$ получаем квадратное уравнение, решая которое находим

$$v_{\min}^2 = g\left(h + \sqrt{s^2 + h^2}\right),\ \text{откуда}\ v_{\min} = \sqrt{90}\ \text{м/с} \approx 9{,}5\ \text{м/с}\,.$$

Последняя задача иллюстрирует метод малых вариаций.

Задача 14. *Точка старта С находится на прямолинейном шоссе, а точка финиша Ф – в распаханном поле на расстоянии d от шоссе, напротив точки шоссе А, расположенной на расстоянии l от точки старта. Скорость бега по шоссе* v_1, *а по полю* $v_2 < v_1$. *По какой траектории надо бежать, чтобы добежать до финиша за минимальное время?*

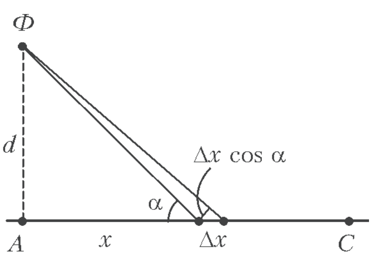


Рис. 10

Решение. Если свернуть с дороги на расстоянии x от точки A (рис.10), то время движения составит

$$t = \frac{l - x}{v_1} + \frac{\sqrt{x^2 + d^2}}{v_2}\,.$$

Исследовать эту функцию на минимум с помощью производной для школьника совсем не просто. Найдем минимальное время из следующих соображений: если немного изменить траекторию, сместив вперед или назад точку поворота, то изменение времени движения в первом приближении будет равно нулю. При приближении точки поворота на малое Δx время движения по дороге уменьшится на $\Delta x/v_1$, а время движения по полю увеличится на $\Delta x\cos\alpha/v_2$. Получаем уравнение

$$\frac{\Delta x\cos\alpha}{v_2} - \frac{\Delta x}{v_1} = 0\,,$$

откуда находим угол α, соответствующий минимальному времени, и искомое расстояние x:

$$\cos\alpha = \frac{v_2}{v_1}\,,\quad x = d\,\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{d\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{dv_2}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}}\,.$$

Заметим, что если x получится больше l, то бежать надо сразу по полю от точки старта к точке финиша.

Упражнения

1. Два тела начинают одновременно двигаться по прямой навстречу друг другу с начальными скоростями $v_{01} = 10$ м/с и $v_{02} = 20$ м/с и с постоянными ускорениями $a_1 = 2$ м/с^2 и $a_2 = 1$ м/с^2, направленными противоположно соответствующим начальным скоростям. Определите, при каком максимальном начальном расстоянии между телами они встретятся в процессе движения.

2. Какую максимальную долю энергии налетающего шара может составлять кинетическая энергия первоначально покоившегося шара при центральном абсолютно неупругом ударе?

3. Два камня расположены на одной горизонтали на расстоянии $L = 42$ м друг от друга. Один камень бросают вертикально вверх со скоростью $v_{01} = 5$ м/с, а второй одновременно бросают под углом $\alpha = 30°$ к горизонту по направлению к первому камню со скоростью $v_{02} = 8$ м/с. Чему равно наименьшее расстояние между камнями в процессе движения?

4. Брусок массой m = 2 кг равномерно перемещают по горизонтальной поверхности, прикладывая постоянную силу под некоторым углом к горизонту. При каком минимальном значении силы это возможно? Коэффициент трения бруска о поверхность μ = 0,75.

5. Скорость течения реки $v = 5$ м/с, ее ширина L = 32 м. Переправляясь через реку на лодке, скорость которой относительно воды $u = 4$ м/с, рулевой обеспечил наименьший возможный снос лодки течением. Чему равен этот снос?

6. Камень бросают под углом к горизонту со скоростью v_0 из точки, расположенной на высоте h над землей. Какова максимальная дальность полета камня по горизонтали?

Ушел из жизни Станислав Миронович Козел – известный педагог и ученый, много сделавший для развития школьного образования и олимпиадного движения, профессор Московского физико-технического института, проработавший на кафедре общей физики более 60 лет, в течение нескольких десятков лет член жюри всесоюзных и всероссийских олимпиад по физике, научный руководитель национальной сборной команды школьников России, автор замечательных задачников для школьников и студентов, научный руководитель проекта «Физикон».

Станислав Миронович внес большой вклад в становление «Кванта» – в течение 18 лет он был членом редколлегии нашего журнала, бессменно возглавляя рубрику «Практикум абитуриента» по физике.

Редколлегия и редакция журнала «Квант» приносят искренние соболезнования родным, близким и коллегам Станислава Мироновича Козела.

Станислав Миронович Козел (1930 – 2015)

XXXVI Турнир городов

ЗАДАЧИ ОСЕННЕГО ТУРА (2014 ГОД)

Базовый вариант

8 – 9 классы

1. (3)[1] Есть 99 палочек с длинами 1, 2, 3, …, 99. Можно ли из них сложить контур какого-нибудь прямоугольника?

Е.Бакаев

2. Существуют ли такие десять попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя:

а) (2) ровно в шесть раз;
б) (2) ровно в пять раз?

И.Акулич

3. (5) На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена точка K, а на стороне BC – точка L так, что $KB = LC$. Отрезки AL и CK пересекаются в точке P. Докажите, что отрезки DP и KL перпендикулярны.

Е.Бакаев

4. (5) См. задачу М2366 «Задачника «Кванта»

5. Даны N прямоугольных треугольников. У каждого выбрали по одному катету и нашли сумму их длин, затем нашли сумму длин оставшихся катетов и, наконец, нашли сумму длин всех гипотенуз. Оказалось, что три найденных числа являются длинами сторон некоторого прямоугольного треугольника. Докажите, что у всех исходных треугольников одно и то же отношение большего катета к меньшему, если:

а) (2) $N = 2$;
б) (3) N – любое натуральное число, большее 1.

Е.Бакаев

10 – 11 классы

1. а) (1) См. задачу 2,а для 8–9 классов.
б) (2) См. задачу 2,б для 8–9 классов.

2. (4) Вершины треугольника обозначены буквами A, B, C по часовой стрелке. Треугольник последовательно поворачивают по часовой стрелке: сначала вокруг вершины A на угол, равный $\angle A$, потом – вокруг вершины B на угол, равный $\angle B$, и так далее по циклу (каждый раз поворот делают вокруг текущего положения очередной вершины). Докажите, что после шести поворотов треугольник займет исходное положение.

В.Расторгуев

3. (5) Даны 15 целых чисел, среди которых нет одинаковых. Петя записал на доску все возможные суммы по 7 из этих чисел, а Вася – все возможные суммы по 8 из этих чисел. Могло ли случиться, что они выписали на доску одни и те же наборы чисел? (Если какое-то число повторяется несколько раз в наборе у Пети, то и у Васи оно должно повторяться столько же раз.)

И.Богданов

4. (5) См. задачу 5,б для 8–9 классов.

5. (5) На столе лежала кучка серебряных монет. Каждым действием либо добавляли одну золотую монету и записывали количество серебряных монет на первый листок, либо убирали одну серебряную монету и записывали количество золотых монет на второй листок. В итоге на столе остались только золотые монеты. Докажите, что в этот момент сумма всех чисел на первом листке равнялась сумме всех чисел на втором.

Е.Бакаев

Сложный вариант

8–9 классы

1. (4) Дана квадратная таблица. В каждой ее клетке стоит либо плюс, либо минус, причем всего плюсов и минусов поровну. Докажите, что или в каких-то двух строках, или в каких-то двух столбцах одинаковое количество плюсов.

Б.Френкин

2. (5) См. задачу М2367 «Задачника «Кванта».

3. (6) См. задачу М2370,а «Задачника «Кванта».

4. (7) На кольцевой дороге через равные промежутки расположены 25 постов, на каждом стоит полицейский. Полицейские пронумерованы в каком-то порядке числами от 1 до 25. Требуется, чтобы они перешли по дороге так, чтобы снова на каждом посту был полицейский, но по часовой стрелке за номером 1 стоял номер 2, за номером 2 стоял номер 3, …, за номером 25 стоял номер 1. Докажите, что если организовать переход так, чтобы суммарное пройденное расстояние было наименьшим, то кто-то из полицейских останется на своем посту.

Е.Бакаев

5. (8) См. задачу М2368 «Задачника «Кванта».

6. (8) Назовем натуральное число *ровным*, если в его записи все цифры одинаковы (например: 4, 111, 999999). Докажите, что любое n-значное число можно представить как сумму не более чем $n + 1$ ровных чисел.

А.Шаповалов

7. Паутина имеет вид клетчатой сетки 100×100 узлов (другими словами, это сетка 99×99 клеток). В каком-то ее углу сидит паук, а в некоторых 100 узлах к паутине приклеились мухи. За ход паук может переместиться в любой соседний с ним узел. Может ли паук гарантированно съесть всех мух, затратив не более:

а) (5) 2100 ходов;
б) (5) 2000 ходов?

И.Богданов

10–11 классы

1. (4) См. задачу М2367 «Задачника «Кванта».

2. (5) См. задачу 4 для 8–9 классов.

3. (6) См. задачу М2369 «Задачника «Кванта».

4. (7) Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA, AB в точках A', B', C' соответствен-

[1] В скобках после номера задачи указано максимальное количество баллов, присуждавшихся за решение. Итог подводился по трем задачам, в которых достигнуты наилучшие результаты.

но. Прямые AA', BB' и CC' пересекаются в точке G. Окружность, описанная около треугольника $GA'B'$, вторично пересекает прямые AC и BC в точках C_A и C_B. Аналогично определяются точки A_B, A_C, B_C, B_A. Докажите, что точки A_B, A_C, B_C, B_A, C_A, C_B лежат на одной окружности.

А.Заславский

5. (7) Петя посчитал количество всех возможных m-буквенных слов, в записи которых могут использоваться только четыре буквы T, O, W и N, причем в каждом слове букв T и O поровну. Вася посчитал количество всех возможных $2m$-буквенных слов, в записи которых могут использоваться только две буквы T и O, и в каждом слове этих букв поровну. У кого слов получилось больше? (Слово – это любая последовательность букв.)

Г.Погудин

6. (8) На столе лежал проволочный треугольник с углами $x°$, $y°$, $z°$. Хулиган Коля согнул каждую сторону треугольника на один градус, в результате чего получился невыпуклый шестиугольник с внутренними углами $(x-1)°$, $181°$, $(y-1)°$, $181°$, $(z-1)°$, $181°$. Докажите, что точки сгиба делили стороны исходного треугольника в одном и том же отношении.

И.Митрофанов

7. (10) См. задачу M2373 «Задачника «Кванта».

Публикацию подготовили С.Дориченко, Л.Медников

Избранные задачи LXXX Санкт-Петербургской олимпиады по математике

1 (6 класс)[1]. Для записи дроби, у которой числитель и/или знаменатель сами являются дробями, будем использовать дробные черточки разных размеров. При этом вычисление начинается с самой маленькой дробной черты и заканчивается самой большой, например $\dfrac{1}{\frac{4}{\frac{5}{3}}} = \dfrac{15}{4}$. По вертикали сверху вниз выписаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (именно в таком порядке). Расставьте между ними 8 горизонтальных черточек (все черточки разной длины), чтобы полученная сложная дробь была равна $\dfrac{7}{10}$.

К.Кохась

2 (6 класс). В примере на сложение цифры заменили буквами (причем разные цифры – разными буквами). Оказалось, что число

$$\text{КРЯКВА} + \text{КРЯ} + \text{КРЯ}$$

делится на 167. Докажите, что тогда число

$$\text{КВАКРЯ} + \text{КВА} + \text{КВА}$$

не делится на 167.

А.Солынин

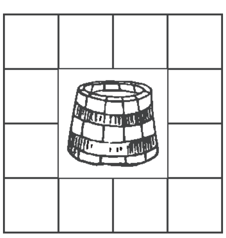


Рис. 1

3 (6 класс). Шахматная фигура «бадья» занимает квадратик 2×2 (рис.1). За один ход бадья может продвинуться на любое число клеток по горизонтали или на любое число клеток по вертикали, если только все клетки, по которым она проходит, свободны. Одна бадья бьет другую, если может за один ход встать в точности на ее место. Докажите, что в прямоугольнике 30×40 нельзя расставить больше 240 бадей так, чтобы они не били друг друга.

В.Франк

4 (7 класс). Несколько человек разного возраста сыграли несколько партий в настольный теннис. Каждый игрок сыграл по одной партии с четырьмя другими игроками, ничьих в настольном теннисе не бывает. Докажите, что либо найдется игрок, выигравший хотя бы у двух соперников старше его, либо найдется игрок, выигравший хотя бы у двух соперников младше его.

М.Антипов

5 (8 класс). На стороне AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбрана точка E, для которой $BE > AB$ (рис.2). Известно, что $AC > CD$. Докажите, что $ED < 2BC$.

А.Смирнов, Ф.Петров

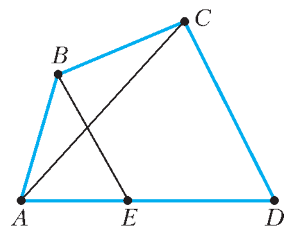


Рис. 2

6 (8 класс). На доске написаны три положительных числа x, y, z. Разрешается стереть одно из них, скажем z, и заменить на $\dfrac{1}{zx+zy}$. Можно ли такими операциями из набора чисел 2, 3, 6 получить набор чисел 2, 3, 4?

Ф.Петров

7 (9–10 классы). Квадратный трехчлен меняет местами пару различных чисел a и b (т.е $f(a)=b$ и $f(b)=a$). Докажите, что он не меняет местами никакую другую пару различных чисел.

А.Храбров

8 (9 класс). Назовем натуральное число *почтенным*, если сумма всех его делителей, включая 1, но не включая само число, на 1 меньше этого числа. Найдите все почтенные числа, некоторая точная степень которых тоже почтенна.

А.Голованов

9 (9 класс). На клетчатую плоскость со стороной клетки, равной 1, произвольным образом брошена салфетка 100×100. Она накрывает некоторые узлы (узел, лежащий на границе салфетки, тоже считается накрытым). Каким наименьшим числом прямых (идущих не обязательно по линиям сетки) заведомо можно покрыть все эти узлы?

А.Голованов

[1] В скобках после номера задачи указан класс, в котором она предлагалась.

10 (10 класс). На двух параллельных прямых отмечено по 40 точек. Их разбивают на 40 пар так, чтобы отрезки, соединяющие точки в одной паре, не пересекались друг с другом. (В частности, конец одного из отрезков не может лежать на другом отрезке.) Докажите, что число способов это сделать меньше 3^{39}.

Н.Филонов

11 (10 класс). Вписанная окружность ω треугольника ABC касается стороны AC в точке B_1 (рис.3). На окружности ω отмечены точки E и F такие, что $\angle AEB_1 = \angle B_1FC = 90°$. Касательные к окружности ω в точках E и F пересекаются в точке D, причем точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC. Точка M – середина стороны AC. Докажите, что прямые AE, CF и DM пересекаются в одной точке.

А.Смирнов

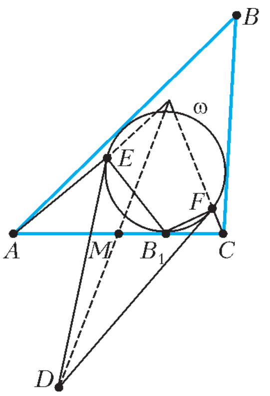


Рис. 3

12 (10–11 классы). Дано бесконечное множество натуральных чисел M. Известно, что для любых двух различных чисел a, $b \in M$ в множестве M также содержится хотя бы одно из чисел $a^b - 2$ и $a^b + 2$. Докажите, что в M содержится хотя бы одно составное число.

С.Берлов

13 (11 класс). В стране некоторые пары городов соединены дорогами, причем из каждого города выходит не более 100 дорог. Набор дорог называется *идеальным*, если эти дороги не имеют общих концов, но больше ни одной дороги с сохранением этого условия добавить к этому набору нельзя. (На рисунке 4 выделены две дороги, образующие идеальный набор.) Министерство транспорта каждый день выбирает какой-нибудь идеальный набор дорог и полностью разрушает их. Новых дорог министерство не строит. Докажите, что не более чем через 199 таких операций в стране вообще не останется дорог.

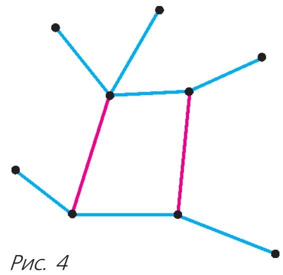


Рис. 4

С.Берлов

14 (11 класс). В каждой клетке квадрата $n \times n$ стоит ребенок. Каждый из них смотрит в сторону одной из соседних по стороне клеток (никто не смотрит за пределы квадрата) и видит либо ухо, либо затылок ребенка, стоящего в этой клетке. Какое наименьшее число детей может видеть ухо?

К.Кохась, А.Храбров

Публикацию подготовил К.Кохась

(Начало см. на с.44)

ное натуральное число). Тогда всех юношей можно поженить на знакомых девушках.

4. Докажите, что задача 4 статьи следует из теоремы Кёнига.

5 (XX Турнир городов). Имеется 20 бусинок десяти цветов, по две бусинки каждого цвета. Их как-то разложили в 10 коробок. Известно, что можно выбрать по бусинке из каждой коробки так, что все цвета будут представлены. Докажите, что число способов такого выбора есть ненулевая степень двойки.

Автор благодарит ученика школы 179 Владимира Арнольда, который в восьмом классе разработал метод доказательства задач 3 и 4, и коллегу С.Г.Слободника, познакомившего автора с теоремой Кёнига и ее доказательством без использования других теорем.

Литература

1. *М.Холл*. Комбинаторика. – М.: Мир, 1970.
2. *М.И.Башмаков*. Паросочетания и транспортные сети. – «Квант», 1970, №4.
3. *М.Л.Краснов и др*. Вся высшая математика. – Т.7. Изд. 2-е. – М.: КомКнига, 2012.

РЕКОРДСМЕН ПОД НОВЫЙ ГОД

Международное агентство регистрации рекордов «Интеррекорд» (Interrecord) преподнесло Евгению Гику, математику, шахматному мастеру и нашему постоянному автору, новогодний подарок: первым из российских журналистов зарегистрировало в своем агентстве. Наши поздравления!

В выданном сертификате написано: «Самое продолжительное ведение колонки в журнале. В течение 35 лет, с января 1980-го по январь 2015-го, Евгений Гик публиковал свои статьи в каждом номере одного и того же научно-популярного журнала как автор постоянной рубрики «Шахматная страничка», посвященной шахматам, компьютерам и математике. Всего вышло 286 номеров».

Речь, разумеется, идет о журнале «Квант». А «Интеррекорд» – младший брат «Гиннесса», можно даже сказать, его внук. Новое агентство регистрации рекордов существует только пять лет, но уже вышло на второе место в мире по числу зарегистрированных рекордов. Его представительства открыты в десятках стран и городов.

Агенство регистрирует рекорды во всех областях человеческой деятельности, природных явлений и событий. При этом выделяются три основные номинации: «самое-самое», «первое» и «единственное». Очевидно, данный рекорд относится к первому виду.

В Центральном Доме ученых сертификат Евгению Гику вручает официальный представитель Interrecord Наталья Курачева

Интересно, будет ли он когда-нибудь побит – сможет ли кто-нибудь из журналистов публиковать свои статьи в каком-нибудь журнале более 35 лет подряд? Впрочем, вполне возможно, что «Шахматная страничка» к тому времени отметит свое 40-летие, 50-летие…

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

(см. «Квант» №4 за 2014 г.)

1. Так как окружность отсекает от сторон равные дуги, то будут равны и хорды, стягивающие эти дуги. Тогда четыре равнобедренных треугольника, у каждого из которых вершина – центр O окружности, противоположная сторона – одна из данных хорд, а боковые стороны – радиусы, будут равны (по трем сторонам). Значит, перпендикуляры, опущенные из O на хорды-основания, тоже будут равны и, следовательно, будут радиусами окружности с центром O, вписанной в данный четырехугольник.

2. 11.

Приведем пример. Из полосок 1×10 составим 4 квадрата 10×10. Из этих четырех квадратов составим квадрат 20×20, как показано на рисунке 1. Легко видеть, что каждый ряд пересекает ровно 11 полосок.

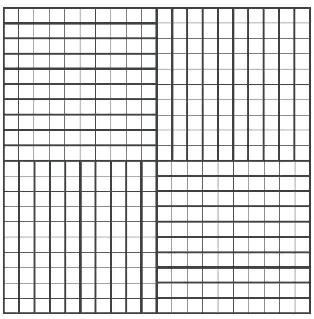


Рис. 1

Предположим, что удалось сделать разрезание на полоски таким образом, чтобы каждый горизонтальный и вертикальный ряд пересекал не более 10 полосок. Покрасим горизонтальные полоски красным, а вертикальные – синим (полоски в виде квадратиков 1×1 можно покрасить произвольно красным или синим).

Рассмотрим вертикальный ряд квадрата 20×20. Он пересекает не более 10 полосок, и среди них не более 9 горизонтальных (все полоски не могут быть горизонтальными, так как каждая горизонтальная полоска занимает только одну клетку вертикального ряда). Значит, в этом вертикальном ряду не более 9 красных клеток. Повторяя рассуждения для каждого вертикального ряда, получаем, что всего покрашено красным не более $9\cdot20$ клеток – это меньше половины площади квадрата. Аналогично доказываем (рассматривая горизонтальные ряды), что и синим покрашено меньше половины площади квадрата. Значит, остаются непокрашенные клетки – противоречие.

3. Будем доказывать неравенство $S_{ABKL}>\frac{1}{3}S_{DCKL}$ для выпуклого четырехугольника $ABCD$.[1]

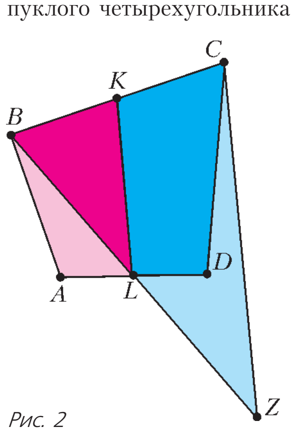


Рис. 2

Сумма углов четырехугольника $ABCD$ равна 360°. Пусть сумма углов A и D не меньше 180° (иначе сумма углов B и C не меньше 180°, и этот случай разбирается аналогично).

Построим точку Z, симметричную точке B относительно L (рис. 2). Тогда точка D лежит внутри угла CBZ. А поскольку

$$\angle LDC+\angle LDZ=\angle LDC+\angle BAL=\angle D+\angle A\ge180^\circ,$$

точка D лежит внутри треугольника BCZ (но вне треугольника KBL).

[1] В условии задачи, опубликованном в «Кванте» №4 за 2014 год, было пропущено условие выпуклости четырехугольника $ABCD$.

Тогда $S_{DCKL}<S_{ZCKL}$. Но KL – средняя линия треугольника CBZ, поэтому $S_{KBL}=\frac{1}{3}S_{ZCKL}$. Отсюда

$$S_{ABKL}>S_{KBL}=\frac{1}{3}S_{ZCKL}>\frac{1}{3}S_{DCKL}.$$

Отметим, что если в неравенстве $S_{ABKL}>\frac{1}{3}S_{DCKL}$ заменить число $\frac{1}{3}$ на большее, то для некоторых выпуклых четырехугольников неравенство будет нарушаться.

4. Подходят $n = 9$ и любое простое n вида $4m + 1$.

Докажем это. Заметим, что

$$(k+1)\cdot(k+2)\cdot\ldots\cdot(2k)=(n-k)\cdot(n-(k-1))\cdot\ldots\cdot(n-1).$$

Раскрыв скобки в произведении, стоящем справа от знака равенства, мы получим выражение, в котором все слагаемые делятся на n, кроме одного: $(-k)\cdot(-(k-1))\cdot\ldots\cdot(-1)=(-1)^k k!$. Значит, исходное число $k!+(k+1)\cdot(k+2)\cdot\ldots\cdot(2k)$ делится на n тогда и только тогда, когда делится на n число $A = k! + (-1)^k k!$. Если k нечетно, то $A = 0$ и на n делится.

Разберем случай четного k, тогда $A=2\cdot k!$.

Заметим, что если число $n = 2k + 1$ простое, то A не делится на n, поскольку A – произведение чисел 1, …, k и 2, и все они меньше n. Значит, подходит любое простое n вида $4m + 1$ (здесь $k = 2m$).

Пусть $n = 2k + 1$ – составное. Тогда $n = ab$ для некоторых неединичных a и b. Ясно, что $a > 2$, откуда $b<\frac{2k+1}{2}=k+\frac{1}{2}$, следовательно, $b\le k$. Аналогично, $a\le k$, откуда оба числа a и b есть среди множителей A. Если это разные множители, то A делится на их произведение, равное n.

Если $a = b$, то $n=a^2$. Если при этом $2a<\frac{a^2}{2}$, то $2a\le k$, и среди множителей A есть два различных числа a и $2a$, произведение которых делится на $a^2=n$, и, значит, снова A делится на n. Остался случай $2a\ge\frac{a^2}{2}$, т. е. $4\ge a$, откуда $n\le9$.

Так как случаи простого n уже разобраны, среди вариантов n = 3, 5, 7, 9, осталось рассмотреть только случай $n = 9$. Тогда $k = 4$ и $A=2\cdot4!=2\cdot24=48$, что не делится на 9.

5. Остаток, получившийся *при втором делении*, обозначим через Δ. Тогда при первом делении остаток равен 50Δ.

Пусть при первом делении делитель равен d, а частное равно c. При втором делении делитель равен уже c, а частное пусть равно a. Это дает нам основание записать два равенства:

$$2014=dc+50\Delta, \qquad (1)$$

$$2014=ca+\Delta. \qquad (2)$$

Сначала убедимся, что $c < d$. Допустим обратное – что $c\ge d$. Поскольку при делении 2014 на d получается частное c и еще какой-то остаток, то это значит, что дробь $\frac{2014}{d}$ больше c, но меньше $c + 1$. Отсюда $dc<2014<d(c+1)$.

Если $c\ge d$, то получаем следующую цепочку неравенств:

$$cd=dc<2014<d(c+1)=dc+d\le dc+c=c(d+1).$$

Или, короче: $cd<2014\le c(d+1)$, т.е. дробь $\frac{2014}{c}$ больше d, но меньше $d + 1$. А это означает, что при делении 2014 на c получится частное d, т. е. $a = d$ – см. равенство (2). Но в таком случае при делении 2014 на c остаток не мог бы измениться по сравнению с делением на d. Он же, как мы знаем, уменьшился в 50 раз. Противоречие. Итак, предположение о том, что $c\ge d$, было неверно, и потому $c < d$. Тогда опять же из равенства (1) получаем

$$2014 = dc + 50\Delta > dc > c^2 .$$

Поэтому $c < \sqrt{2014} = 44{,}8\ldots$, или $c \le 44$. Запомним пока что это ограничение. Теперь из уравнений (1) и (2) выразим Δ и приравняем полученные значения:

$$\Delta = \frac{2014 - dc}{50} = 2014 - ca .$$

Отсюда

$$2014 - dc = 50 \cdot 2014 - 50ca ,\ c(50a - d) = 49 \cdot 2014 .$$

Таким образом, число c является делителем произведения $49 \cdot 2014$. Вспомним, что при этом $c \le 44$ и, кроме того, c не является делителем числа 2014 (иначе при делении 2014 на c не получилось бы остатка). Так как $49 = 7 \cdot 7$, а разложение 2014 на простые сомножители таково: $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$, то без труда выясняется, что имеется лишь два возможных значения c: это 7 и 14. Проверим каждое из них.

1) $c = 7$. Опираясь на уравнение (2), при делении 2014 на 7 получаем неполное частное $a = 287$ и остаток $\Delta = 5$. Тогда из уравнения (1) получаем $50\Delta = 250$ и $d = 252$. Одно решение найдено.

2) $c = 14$. При делении 2014 на 14 получаем неполное частное $a = 143$ и остаток $\Delta = 12$. Тогда из уравнения (1) получаем $50\Delta = 600$ и $d = (2014 - 600) : 14 = 101$. Явное противоречие – делитель меньше остатка! Так что здесь решения нет.

Итак, окончательный ответ: 2014 делили на 252, получив неполное частное 7 и остаток 250. А если бы 2014 поделили на 7, получили бы неполное частное 287 и остаток 5. Как видно, остаток действительно снизился ровно в 50 раз.

XX ЛЕТНИЙ ТУРНИР ИМЕНИ А.П.САВИНА

1. 9673401.

Заметим, что написанное число не может содержать три последовательные цифры. Разобьем все цифры на 4 группы: {0, 1, 2}, {3, 4, 5}, {6, 7, 8}, {9}. Ввиду вышесказанного, из каждой тройки в числе могут присутствовать максимум две цифры, поэтому число не более чем семизначное. Таким образом, наибольшим оно будет, если начинается с 9 и содержит из каждой тройки ровно по две цифры. В этом случае цифра 8 отсутствует, значит, должны быть 6 и 7. Тогда в числе не может быть цифры 5, поэтому в нем содержатся 3 и 4. Аналогичным образом приходим к выводу, что в числе нет цифры 2, но есть 0 и 1. Наибольшее число, удовлетворяющее условию, которое можно составить из полученных цифр, это 9673401.

2. Может. Например,

$$\left(53 \cdot 10^{1005} + 19\right)^2 = 2809\underbrace{0\ldots0}_{1001}2014\underbrace{0\ldots0}_{1002}361 .$$

3. 10, 11, 33, 54.

Пусть $10 \le x < y < z < t \le 99$ – искомые номера, тогда $t = x + y + z$. Так как математик с номером t не смог узнать свой номер, то

$$z - (x + y) \ge 10 \Rightarrow z \ge x + y + 10 \ge 31 .$$

При этом z не может быть равно 31 или 32, поскольку при таких значениях число $z - (x + y)$ совпадает либо с x, либо с y, и математик с номером t узнал бы свой номер. Следовательно, $z \ge 33$.

Так как математик с номером x также не смог узнать свой номер, то

$$99 \ge y + z + t = x + 2y + 2z \ge x + 2y + 66 \Rightarrow 33 \ge x + 2y .$$

Последнее неравенство возможно только при $x = 10$ и $y = 11$. Тогда $2z \le 99 - x - 2y = 67$, откуда $z \le 33$. Таким образом, $z = 33$ и $t = x + y + z = 54$. Легко проверить, что найденные значения удовлетворяют условию.

4. Карлсону – на одно печенье больше.

И Карлсон, и Малыш вернутся к начальному блюдцу через p ходов, побывав у каждого блюдца при этом по разу. Пронумеруем блюдца по кругу числами от 0 до $p - 1$, начиная с блюдца, с которого стартовали Карлсон и Малыш. Рассмотрим произвольное блюдце с номером $n > 0$. Пусть Карлсон оказался у него через a ходов, а Малыш – через b ходов. Тогда у блюдца с номером $p - n$ они находились через $p - a$ и $p - b$ ходов соответственно. Так как $ak - bm$ делится на p, а числа k и m различны, то a и b также различны. Следовательно, печенье с одного из двух блюдец с номерами n и $p - n$ заберет Карлсон, а с другого – Малыш. Таким образом, из блюдец с номерами от 1 до $p - 1$ оба возьмут одинаковое количество печенья. Осталось заметить, что Карлсон первым заберет печенье из начального блюдца.

5. Может.

Пусть компьютер убрал в первом числе 0, а во всех остальных слагаемых убирает первую цифру. Тогда будет последовательно вычисляться сумма 214 + 15 + 16 + 17 + … Выпишем остатки от деления всех слагаемых на 3: 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, … В этой последовательности в начале стоит единица, а далее повторяется период $(0, 1, 2)$. Но в те моменты, когда будет происходить смена первой цифры исходного слагаемого (в том числе увеличение количества разрядов), в эту последовательность после нуля будет «вклиниваться» еще один ноль, после чего остатки снова будут идти в том же порядке.

Без учета «лишних» нулей вычисляемые суммы образуют периодическую последовательность 1, 1, 2, 1, 1, 2, … «Лишний» ноль на делимость никак не влияет, поэтому сумма никогда не станет кратна 3.

6. 9^9.

Пусть $N = 10a + b$ – исходное число (b – его последняя цифра), тогда $10a \equiv -b \pmod N$. Возведя это сравнение в степень b, получим $10^b a^b \equiv (-b)^b \pmod N$. По условию a^b кратно N, поэтому $(-b)^b$ также делится на N. Но b – это цифра, поэтому $b^b \le 9^9$. Следовательно, и N не превосходит 9^9. Осталось заметить, что 9^9 удовлетворяет условию: последняя цифра 9^9 равна 9, поэтому $9^9 = 10a + 9$, при этом a кратно 9, значит, a^9 делится на 9^9.

7. Отметим на прямой AC такую точку E, что треугольник BOE – равносторонний. Так как треугольники ABE и CBO симметричны относительно серединного перпендикуляра к отрезку AC, то они равны. Таким образом, $AO = AE + EO = CO + BO$. Аналогично, $DO = BO + CO$. Отсюда следует, что $AO = DO$.

8. Пусть указанные перпендикуляры AP и BQ пересекаются в точке X (рис.3). Точки B и P лежат на окружности с диаметром AE, поэтому

$$\angle APB = \angle AEB = $$
$$= 90° - \angle EBQ = \angle ABX .$$

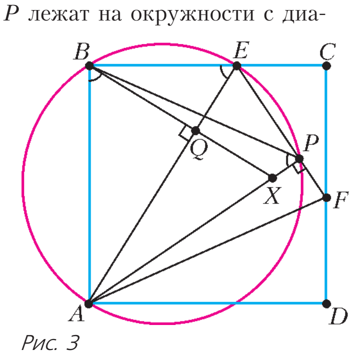


Рис. 3

Следовательно, треугольники APB и ABX подобны, откуда $\frac{AB}{AP} = \frac{AX}{AB}$, т.е. $AX = \frac{AB^2}{AP}$. Аналогично, если Y – точка пересечения перпендикуляров AP и DR, то $AY = \frac{AD^2}{AP}$. Так как $AB = AD$, то $AX = AY$, а это означает, что точки X и Y совпадают.

9. Пусть $ABCD$ – исходный четырехугольник, правильные треугольники, построенные на сторонах AB и CD, имеют общую вершину M, а N – центр правильного треугольника, построенного на стороне BC. Тогда при повороте на $60°$ вокруг точки M точка A перейдет в B, а C – в D. Следовательно, диагонали четырехугольника $ABCD$ равны и угол между ними составляет $60°$. Значит, при повороте на $120°$ вокруг точки N точка B перейдет в C, а луч BD станет сонаправленным лучу CA. Из этого и из равенства диагоналей следует, что точка D перейдет в A, поэтому точка N является центром правильного треугольника, построенного на стороне DA.

10. Пусть I – центр вписанной окружности, H_a и H_c – ортоцентры треугольников AC_1B_1 и CA_1B_1 соответственно (рис.4). Так как $IB_1 \parallel C_1H_a$ и $IC_1 \parallel B_1H_a$, то $IB_1H_aC_1$ – ромб. Аналогично, $IB_1H_cA_1$ – тоже ромб. Следовательно, при параллельном переносе на вектор $\overline{B_1I}$ точки B_1, H_a, H_c переходят в I, C_1, A_1 соответственно, а точка H – в точку K, являющуюся основанием перпендикуляра, опущенного из I на прямую BH. Из точек C_1, A_1 и K отрезок BI виден под прямым углом, поэтому они лежат на окружности с диаметром BI. Значит, точки H_a, H_c, H и B_1 также лежат на одной окружности.

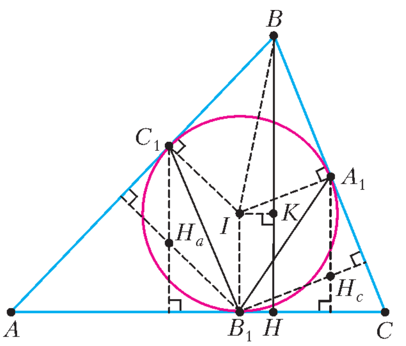


Рис. 4

11. Не могли.

Рассмотрим произвольную отмеченную точку X. Проведем через нее прямую, параллельную той из трех данных прямых, которая наиболее удалена от этой точки. При этом образуется равносторонний треугольник. Как известно, сумма расстояний от точки, лежащей внутри или на границе равностороннего треугольника, до его сторон равна высоте треугольника. Из этого следует, что сумма расстояний от точки X до двух из проведенных прямых равна расстоянию до третьей прямой.

Таким образом, на доске выписано 2014 троек чисел, в которых одно число равно сумме двух других. Предположим, что все числа образовали арифметическую прогрессию $a_1, a_2, \ldots, a_{3\cdot 2014}$ с разностью $d > 0$. Поделим все члены этой прогрессии на d, при этом образуется арифметическая прогрессия с разностью 1, которая также обладает указанным выше свойством.

Пусть a_i, a_j, a_k – расстояния от некоторой точки до прямых, причем $a_i + a_j = a_k$. Тогда $a_i + (a_i + j - i) = a_i + k - i \Leftrightarrow a_i = k - j$. Значит, все члены прогрессии являются целыми числами. Сумма такой прогрессии нечетна, так как в ней $3 \cdot 1007$ нечетных членов. С другой стороны, она складывается из троек чисел с четной суммой, поэтому и вся сумма четна. Противоречие.

12. Всегда.

Пусть a, b, c, d, e, f – длины палочек в порядке возрастания, p – полупериметр сложенных из них треугольников. Покажем, что можно поменять местами две палочки из разных треугольников так, чтобы была возможность снова сложить два треугольника. Поскольку длины всех палочек различны, то полученные треугольники будут иметь разные периметры.

Если палочки длины e и f находятся в разных треугольниках, то можно поменять их местами. Действительно, длина каждой из этих палочек меньше p, а сумма длин любых двух палочек, принадлежащих одному треугольнику, больше p.

Если же палочки длины e и f принадлежат одному треугольнику, то третья палочка в этом треугольнике имеет длину a. Рассмотрим следующие разбиения палочек на тройки:

1) (a, b, c) и (d, e, f);

2) (a, c, d) и (b, e, f);

3) (a, d, e) и (b, c, f).

Заметим, что в каждом варианте из отрезков второй тройки можно сложить треугольник, так как $d + e > b + e > b + c > p > f$. Предположим, что во всех трех вариантах из отрезков первой тройки нельзя сложить треугольник, т.е. $c - b \geq a$, $d - c \geq a$, $e - d \geq a$. Тогда $c \leq e - 2a$, $b \leq e - 3a$. Из равенства периметров начальных треугольников получаем $a + 2e < a + e + f = b + c + d \leq e - 3a + e - 2a + e - a = 3e - 6a$, т.е. $7a < e$, что противоречит условию.

13. 66 кг.

Оценка. Разобьем мешки на 34 группы – две крайние группы по два мешка и 32 группы по три соседних мешка. Крайние мешки в ряду могут быть только килограммовыми, а соседние с ними должны быть «серебряными», поэтому в каждой из крайних групп не более 1 кг золота.

У каждого мешка есть хотя бы один соседний «серебряный» мешок. Значит, в каждой тройке либо не более одного «золотого» мешка, либо два таких мешка, которые могут быть только соседними и килограммовыми. В любом случае в группе из трех мешков не более 2 кг золота. Таким образом, суммарное количество золота не превосходит $1 + 1 + 32 \cdot 2 = 66$ кг.

На рисунке 5 приведен **пример**. На каждом мешке написана его масса, белым обозначены мешки с золотом, серым – с серебром, а блок из трех мешков, в котором средний весит 2 кг, повторяется 32 раза.

Рис. 5

14. 2525, т.е. половину всех золотых.

Разобьем кошельки на пары, содержащие в сумме по 101 золотому. Базилио заберет ровно половину, если будет из каждой начатой Алисой пары отдавать второй кошелек тому же, кому достался и первый. Тогда каждый получит ровно по 25 пар. Значит, доля Алисы составит не больше половины.

Покажем, как Алиса может обеспечить себе не меньше половины. Если начатых пар нет, очередным ходом она берет себе кошелек с наибольшим числом золотых, иначе из начатой Базилио пары отдает кошелек тому же, кому достался и первый. Тогда после хода Алисы есть ровно одна начатая пара, и эта пара начата ею. У Базилио есть три варианта:

1) начать новую пару;

2) из начатой Алисой пары взять второй кошелек себе;

3) из начатой Алисой пары отдать второй кошелек Алисе.

В результате все пары разделятся на *целые* (оба кошелька пары достались одному игроку) и *поделенные* (кошельки пары попали в разные руки). Заметим, что все поделенные пары, кроме, быть может, одной, начаты Алисой. А именно, может случиться, что Базилио начнет пару, игра закончится, и второй кошелек пары уйдет не в те руки, что первый.

В итоге каждый получил поровну кошельков из поделенных пар, значит, поровну и из целых, т.е. из целых пар им досталось одинаковое число золотых. При этом из целых пар они получили по четному числу кошельков, поэтому количество поделенных пар четно. В поделенных парах Базилио мог получить больше Алисы только из последней. В этом случае рассмотрим предпоследнюю поделенную пару. Из нее Алиса взяла больше золотых, чем Базилио получил из последней. А так как суммы в парах одинаковы, то и из последней пары ей досталось больше, чем Базилио из предпоследней. Следовательно, в сумме Алиса получила не меньше Базилио.

15. 19 хорд.

Оценка. Покажем, что Вася всегда может провести не менее 19 хорд. Если какие-то две точки одного цвета являются соседними, то Вася соединяет их. Полученную хорду не пересечет никакая другая, поэтому данную пару точек и хорду можно стереть. Так Вася продолжает делать, пока это возможно. Если после этого все точки оказались стерты, то он провел 20 хорд. Если же точки остались, то их цвета чередуются. Тогда Вася выбирает любую точку A и соединяет хордой пару точек, соседних с ней. Затем он соединяет точки, соседние с теми, которые только что были соединены, и т.д. В итоге кроме точки A свободной останется только «противоположная» ей точка, а всего Вася проведет 19 хорд.

Пример. Пусть Петя отметил точки так, что их цвета чередуются. Тогда первая проведенная Васей хорда разобьет окружность на две дуги, содержащие нечетное число точек. После этого соединить все точки непересекающимися хордами невозможно, поэтому больше 19 хорд Вася провести не сможет.

16. При $n = 10$.

Докажем, что при $n = 10$ Петя помешать Васе не сможет. Для какого-то цвета (пусть белого) найдется не менее 500 кубиков с тремя гранями этого цвета. Назовем кубик *угловым*, если у него есть три белые грани с общей вершиной, и *реберным*, если у него есть две белые грани с общим ребром. Заметим, что каждый кубик из упомянутых 500 – реберный.

Пусть среди этих 500 кубиков есть 8 угловых. Тогда Вася может сложить белый снаружи куб. Для этого ему еще понадобится $12 \cdot 8 = 96$ реберных кубиков и $6 \cdot 8^2 = 384$ кубиков с хотя бы одной белой гранью. В сумме это меньше 500.

Пусть восьми угловых кубиков нет. Тогда среди 500 реберных кубиков есть не менее 493 неугловых. В каждом из них есть три грани с общей вершиной, из которых две белые, а одна, скажем, черная. В этом случае Вася может сложить куб, где две противоположные грани будут черными, а остальные четыре – белыми. Действительно, любой из 493 кубиков можно поместить нужным образом в вершины, на ребро или на грань такого куба, а для покрытия поверхности требуется всего $10^3 - 8^3 = 488$ кубиков.

При $n < 10$ Петя может раскрасить $\left[\frac{1}{2}n^3\right]$ кубиков полностью в белый цвет, а остальные – полностью в черный. Так как на стыке любых граней оба цвета одинаковы, то и во всем кубе все грани одного цвета. Поэтому все кубики другого цвета должны «спрятаться» внутрь, т.е. их должно быть не больше чем $(n-2)^3$. Однако $(n-2)^3 < \left[\frac{1}{2}n^3\right]$ при $n \le 9$.

17. За $n - 1$ переливаний.

Алгоритм. Пусть средняя концентрация всех растворов равна $m\%$ (под средней концентрацией раствора мы понимаем концентрацию его смеси). Если в какой-то пробирке концентрация отклоняется от $m\%$ в одну сторону, то найдется пробирка с отклонением в другую сторону. Пусть в пробирке A концентрация раствора больше $m\%$, а в B – меньше $m\%$, при этом обе пробирки заполнены не более чем наполовину. Посмотрим на среднюю концентрацию в этих пробирках. Если она равна $m\%$, просто сольем раствор из обеих пробирок в одну. Если больше $m\%$, то будем переливать раствор из A в B, пока концентрация в B не станет $m\%$. Если же меньше $m\%$, то можно получить в A концентрацию $m\%$, переливая из B в A. После этого пробирку, в которой получили m-процентный раствор, можно исключить из рассмотрения. Во второй пробирке раствора стало меньше, поэтому все пробирки, где концентрация раствора не равна $m\%$, заполнены не более чем наполовину и дальнейшие аналогичные действия всегда возможны. В итоге каждое переливание увеличивает число пробирок с концентрацией $m\%$ как минимум на одну. Поскольку при последнем переливании в обеих пробирках получится m-процентный раствор, то всего потребуется не более $n - 1$ переливаний.

Пример. Пусть одна пробирка наполовину заполнена раствором концентрации 60%, а в остальных – по полпробирки раствора концентрации $\left(50 - \frac{10}{n-1}\right)\%$. Тогда средняя концентрация всех растворов равна 50%. Каждое переливание уменьшает число пробирок с концентрацией менее 50% не больше чем на одну, поэтому менее чем за $n - 1$ переливаний нельзя получить во всех пробирках раствор одинаковой концентрации.

18. 1,5.

При каждом взвешивании монеты делятся на три группы: находящиеся на левой чаше, находящиеся на правой чаше и не участвующие во взвешивании. Если при первом взвешивании в одной из групп окажется не меньше четырех монет, то при попадании фальшивой монеты в эту группу наверняка выявить ее вторым взвешиванием не удастся, так как по крайней мере две из этих монет снова будут в одной группе. Следовательно, во время первого взвешивания монеты должны быть разбиты на две группы из трех монет и одну группу из двух монет. Сравнивать группы из трех монет нет смысла, так как если перевесит правая чаша, то это не даст никакой информации о местонахождении фальшивой монеты. Значит, первый раз должны сравниваться группы из трех монет на левой чаше и двух монет на правой. При этом должны быть возможны все три исхода, иначе второе взвешивание может не иметь смысла. Так как неизвестно, насколько фальшивая монета легче настоящей, равновесие должно означать, что все пять монет на весах настоящие. Следовательно, $a = 1{,}5$.

Теперь покажем, как при $a = 1{,}5$ Толя может выявить фальшивую монету за два взвешивания. Первым взвешиванием он определяет, в какой из трех групп находится фальшивая монета. При втором взвешивании Толя кладет на левую чашу одну из монет этой группы, а на правую – другую (если в группе три монеты, то третья во втором взвешивании не участвует). Доложив две заведомо настоящие монеты на левую чашу и одну на правую, Толя узнает, в какой группе фальшивая монета, что позволит определить ее.

19. 2,5 очка.

Всего на турнире было сыграно 15 матчей. Пусть за победу начислялось x очков, было k результативных встреч и $15 - k$ ничьих. Тогда суммарно команды набрали $kx + 2(15 - k)$ очков. По условию эта сумма равна 10 + 7 + 6 + 6 + 3 + 3 = 35, откуда получаем $k(x - 2) = 5$. Следовательно, $x > 2$.

Команда, набравшая 6 очков, выиграла хотя бы один матч, иначе набрала бы не больше 5 очков. Из ограничения $x > 2$ следует, что она могла выиграть не более двух матчей. Значит, x – целое или полуцелое число, в таком случае k – делитель числа 10. С другой стороны, $k \ge 4$, поскольку у каждой из первых четырех команд есть хотя бы один выигрыш. Следовательно, возможны только два варианта.

1) $k = 5$, $x = 3$. Но в этом случае команда, набравшая 10 очков, должна была одержать ровно три победы, т.е. $k \ge 6$. Противоречие.

2) $k = 10$, $x = 2{,}5$.

Пример такого турнира приведен в таблице 1.

Таблица 1

0	2,5	2,5	0	2,5	2,5	**10**
0	0	2,5	2,5	1	1	**7**
0	0	0	2,5	2,5	1	**6**
2,5	0	0	0	1	2,5	**6**
0	1	0	1	0	1	**3**
0	1	1	0	1	0	**3**

20. 7 туров.

Оценка. Пусть проведено не больше шести туров; докажем, что можно провести еще хотя бы один. Разобьем шахматистов случайным образом на пары. Допустим, в какой-то паре шахматисты A и B уже играли до этого. Среди остальных шести пар найдется такая, с игроками которой A и B в совокупности провели не более одной игры. Обозначим игроков этой пары C и D. Тогда, перегруппировав данные пары либо в (A, C) и (B, D), либо в (A, D) и (B, C), мы получим две новые пары, в которых до этого не было встреч. Повторяя эту процедуру, пока неподходящих пар не останется (каждый раз их становится как минимум на одну меньше), мы получим разбиение, в котором шахматисты каждой пары еще не играли.

Пример. Пронумеруем шахматистов числами от 1 до 14 и пусть в первых семи турах встречались шахматисты с номерами разной четности. Для этого можно, например, посадить шахматистов с нечетными номерами по кругу, а шахматисты с четными номерами могут после каждого тура переходить к следующему «нечетному» игроку по часовой стрелке. Тогда в каждой игре восьмого тура должны будут встретиться шахматисты с номерами одной четности, но семь шахматистов нельзя разбить на пары.

21. Нельзя.

Предположим, что требуемая раскраска существует. Общее число отрезков равно $3n + 1$, поэтому отрезков одного из цветов будет не меньше $n + 1$. При выкидывании отрезков этого цвета останется не более $2n$ отрезков. Таким образом, мы получим граф из $2n + 2$ вершин и не более $2n$ ребер, который не может быть связным.

22. 199 клеток.

Оценка. Доска 100×100 содержит 99^2 квадратов 2×2. На каждом шаге количество закрашенных квадратов 2×2 увеличивается, как минимум, на 1. Следовательно, в процессе закрашивания может быть сделано не более чем 99^2 шагов. Таким образом, изначально должно быть закрашено не менее $100^2 - 99^2 = 199$ клеток.

Пример. Пусть Андрей закрасил все клетки верхней строки и левого столбца. Правило, сформулированное в условии, позволит ему закрасить вторую строку, двигаясь слева направо, затем аналогично закрасить третью строку и т.д., пока не будет закрашен весь квадрат.

23. 7 чисел.

Оценка. Как столбцы, так и строки могли переставляться циклически или разбиваться на циклические пару и тройку. Если использовалась циклическая перестановка столбцов, то все столбцы состоят из одного и того же набора чисел, т.е. различных чисел не больше 5. Аналогична ситуация при циклической перестановке строк.

Если же было использовано разбиение как столбцов, так и строк на пару и тройку, то таблицу можно условно разбить на квадраты 2×2 и 3×3, а также прямоугольники 2×3 и 3×2, в каждом из которых и столбцы и строки переставлялись циклически. В квадратах может быть не более двух и трех различных чисел соответственно, а в прямоугольниках – не более одного (поскольку как в столбцах, так и в строках должны стоять одинаковые числа).

Таблица 2

1	2	3	4	4
3	1	2	4	4
2	3	1	4	4
5	5	5	6	7
5	5	5	7	6

Пример для 7 чисел приведен в таблице 2.

24. Два вопроса.

Оценка. Так как ладья может побить от 0 до 199 выбранных клеток, то для выявления одной из 10000 клеток одного вопроса недостаточно.

Пример. Пронумеруем столбцы нестандартно: левые – от 0 до 49, правые – от 51 до 100. В каждом столбце отметим число клеток, равное его номеру: в левых – самые верхние, в правых – самые нижние. Заметим, что в каждой паре столбцов, где в сумме отмечено ровно 100 клеток, на каждой горизонтали отмечена ровно одна клетка. Значит, всего в каждой горизонтали отмечено ровно 50 клеток.

Пусть в ответ на первый вопрос, в котором указан набор всех отмеченных клеток, мы получили число $m + 50$. Значит, ладья находится либо на отмеченных клетках столбца $m + 1$ (если $m \neq 49$), либо на неотмеченных клетках столбца m (если $m \neq 50$). На рисунке 6 приведен аналогичный пример для доски 10×10, и для всех возможных положений ладьи указано число побитых отмеченных клеток.

5	5	6	7	8	11	12	13	14	14
5	6	6	7	8	11	12	13	13	14
5	6	7	7	8	11	12	12	13	14
5	6	7	8	8	11	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

Рис. 6

Для каждого варианта ответа «подозрительные» клетки образуют расположенный в двух столбцах «зигзаг» или столбик из 51 клетки (для ответов 99 и 100). Покажем, как вторым вопросом найти ладью в случае, если она находится на «зигзаге». Понятно, что этот способ подойдет и для столбиков. Обозначим из двух столбцов «зигзага» тот, в котором больше клеток, через A, а второй – через B. Пронумеруем строки числами от 0 до 99 снизу вверх. Выберем для второго вопроса клетки так, чтобы в каждой строке их число было равно номеру строки, в столбце A выбранных клеток не было, а в B были выбраны все клетки, кроме клетки в нулевой строке. Тогда с «подозрительных» клеток столбца A ладья бьет разные количества выбранных клеток, не большие 99, а с «подозрительных» клеток B – разные количества выбранных клеток, не меньшие 149. Таким образом, получив ответ, мы можем однозначно определить положение ладьи.

На рисунке 7 показан пример набора клеток для второго вопроса в случае, когда на доске 10×10 на первый вопрос был получен ответ «7».

9				17						
8				16						
7			7	15						
6			6							
5			5							
4			4							
3			3							
2			2							
1			1							
0			0							

Рис. 7

ДВА ГРАФА

1. Свет попадает в зрачок и поглощается сетчаткой. Обратно, из глаза, он не выходит. Отсутствие света мы воспринимаем как черный цвет.

2. Возьмите серый кусок бумаги и поместите на черный фон. Бумага покажется вам ... белой. И, наоборот, новая белая рубашка на фоне рубашки, уже постиранной, кажется нам серой. Термин «серый» мы употребляем в том случае, когда сравниваем два белых предмета, которые в разной степени отражают падающий на них свет.

3. Весь падающий (синий) свет красная краска поглотит, и от мяча ничего не отразится. Мы скажем: «Мяч – черный».

4. В общем случае, когда в наш глаз попадает свет разных цветов, сказать сходу, каким будет наше восприятие, не просто. Надо использовать теорию цветового зрения Гельмгольца или прибегнуть к опыту. Смешаем, например, желтую и синюю краски, получится ... зеленая.

5. Все, кроме голубого.
6. Восстановить зрение в этом случае можно с помощью нашей обычной морковки или заморского манго.
7. Яркая окраска крыльев бабочек возникает за счет интерференции света при отражении от мелких чешуек, покрывающих крылья. Сами чешуйки – бесцветные. Это пример второго способа окраски – структурной окраски.
8. Варенье покраснеет.
9. Варенье посинеет.
10. Синий сок василька в кислой среде покраснеет и придаст напитку розовый цвет (красный с небольшой примесью синего).

ОТРЕЗКИ, ПРЯМОУГОЛЬНИКИ И... КОМБИНАТОРИКА

Задача 4. а) 1320.
Так как 35 раскладывается в произведение простых множителей 5 и 7, прямоугольник площади 35 может иметь вид 1×35, 5×7 или 7×5 (35×1 не помещается в данный прямоугольник). Для прямоугольника $k\times l$ имеется $(23-k)\times(41-l)$ способов, итого: $22\cdot6+18\cdot34+16\cdot36=1320$.
б) 3289.
Прямоугольник периметра 72 может иметь вид 1×35, 2×34,… …, 22×14, поэтому число способов равно

$$22\cdot6+21\cdot7+20\cdot8+\ldots+1\cdot27=$$
$$=(28-6)\cdot6+(28-7)\cdot7+\ldots+(28-27)\cdot27=$$
$$=28(6+7+\ldots+27)-\left(6^2+7^2+\ldots+27^2\right)=$$
$$=28\cdot\frac{33\cdot22}{2}-\left(1^2+2^2+\ldots+27^2\right)+\left(1^2+2^2+\ldots+5^2\right)=3289.$$

Задача 5. 2556.
Центры клеток – узлы решетки 21×24. Тройка центров клеток – три вершины прямоугольника 4×7 или 7×4. Для каждого такого прямоугольника тройку вершин можно выделить четырьмя способами, поэтому искомое число способов равно $4(22-4)(25-7)+4(22-7)(25-4)=2556$.
Задача 6. $3n^2-32n+88$.
Заметим, что квадрат с целочисленными вершинами площади 25 имеет сторону 5 и может располагаться двумя способами: либо его стороны параллельны осям, либо он вписан одним из двух способов в квадрат 7×7, у которого стороны параллельны осям (рис. 8). Итого получается

$$(n-4)^2+2(n-6)^2=3n^2-32n+88.$$

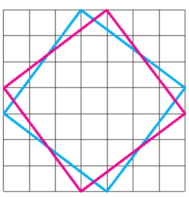


Рис. 8

ЗАДАЧИ С ЭКСТРЕМУМАМИ

1. $l_{\max}=150$ м. **2.** $\delta=0{,}25$. **3.** $l_{\min}=6$ м. **4.** $F_{\min}=1{,}2$ Н.
5. $l=24$ м. **6.** $l_{\max}=\sqrt{\frac{v_0^2}{g}\left(\frac{v_0^2}{g}+2h\right)}$.

XXXVI ТУРНИР ГОРОДОВ

ЗАДАЧИ ОСЕННЕГО ТУРА (2014 ГОД)

Базовый вариант

8–9 классы

1. Можно.
Например, из палочек длин 1, 2, 3 составим две стороны длины 3, а остальные палочки разобьем на 48 пар с суммой длин 103: (4, 99), (5, 98), …, (51, 52) и составим из них две стороны длины $24\cdot103=2472$.
2. а) Существуют; б) не существуют.
Решим сначала пункт б). Допустим, такие числа существуют. Пусть их наибольший общий делитель равен d. Тогда эти числа можно записать в виде a_1d, a_2d, …, $a_{10}d$, где все a_i – попарно различные натуральные числа. Следовательно, требование условия выглядит так:

$$(a_1d+a_2d+\ldots+a_{10}d)/10=5d,\ \text{или}\ a_1+a_2+\ldots+a_{10}=50.$$

В левой части этого равенства стоит сумма десяти различных натуральных чисел, которая, очевидно, не меньше суммы десяти наименьших натуральных чисел, т.е. $1+2+\ldots+10=55$. А поскольку правая часть равна 50, что меньше 55, то в данном случае ответ таков: не существуют.
Теперь разберемся с пунктом а). Здесь, рассуждая аналогично, приходим к равенству $a_1+a_2+\ldots+a_{10}=60$, которое уже вполне возможно (возьмем, например, числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 15). В качестве же d можно взять любое натуральное число (хотя бы единицу). Так что здесь ответ таков: существуют.
3. Треугольники KAD и LBA равны (как прямоугольные, по двум катетам). Значит, сумма углов LAB и AKD равна $90°$ (поскольку $\angle AKD=\angle ALB$, а $\angle LAB+\angle ALB=90°$ из прямоугольного треугольника ABL). Это значит, что отрезки AL и KD перпендикулярны. (Это следует также из того, что отрезок DK при повороте на $90°$ вокруг центра квадрата переходит в отрезок AL.) Аналогично, DL и CK перпендикулярны. Таким образом, прямые AL и CK содержат высоты треугольника DKL. Но в треугольнике все три высоты пересекаются в одной точке. Следовательно, P – точка пересечения высот (ортоцентр), откуда прямая DP содержит третью высоту и, значит, перпендикулярна KL.
5. Рассмотрим для наглядности случай $N=3$ (случай любого другого N разбирается точно так же). Приставим треугольники ABC, CDE и EFG друг к другу так, как показано на рисунке 9. Получится, что AK – сумма «первых» катетов, а KG – сумма «вторых». По условию, $AC+CE+$ $+EG=AG$. Но это возможно, только если точки C и E лежат на отрезке AG (иначе ломаная $ACEG$ длиннее отрезка AG). Следовательно, $\angle CAB=\angle ECD=$ $=\angle GEF$, а это и означает, что у исходных треугольников одно и то же отношение большего катета к меньшему.

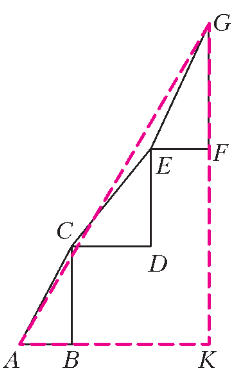


Рис. 9

10–11 классы

2. *Первое решение.* Нетрудно заметить, что центры поворотов каждый раз лежат на прямой l, проходящей через исходную сторону AC. Пусть длины сторон треугольника равны a, b, c. Тогда на прямой l последовательно откладываются отрезки c, $-a$, b, $-c$, a, $-b$, сумма этих «сдвигов» равна 0. После первых трех поворотов треугольник снова будет касаться прямой l своей стороной AC, но будет лежать по другую сторону от l и сдвинется вдоль прямой на некоторое расстояние. За три следующих поворота он вернется в исходную полуплоскость и сдвинется на такое же расстояние в обратную сторону, т.е. в итоге совпадет с исходным.
Второе решение. Композиция первых трех поворотов даст поворот на $180°$, т.е. центральную симметрию относительно некоторой точки O. При этом исходный треугольник ABC перейдет в центрально симметричный ему треугольник $A'B'C'$. Композиция следующих трех поворотов даст центральную симметрию относительно точки, центрально симметричной

точке O, т.е. снова относительно O. При этом треугольник $A'B'C'$ перейдет в треугольник ABC.

3. Могло.

Рассмотрим набор из семи различных натуральных чисел, семи противоположных им чисел и нуля. Пусть $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_7$ – сумма произвольных семи чисел из этого набора. Тогда сумма оставшихся восьми чисел $a_8, a_9, \ldots, a_{15}$ равна $-S$ (так как сумма всех 15 чисел равна нулю). Значит, сумма 8 чисел $-a_8, -a_9, \ldots, -a_{15}$ (которые также входят в наш набор) равна S. Соответствие между семерками $\{a_1, a_2, \ldots, a_7\}$ и восьмерками $\{-a_8, -a_9, \ldots, -a_{15}\}$, очевидно, взаимно однозначно.

5. Пусть в начале было n серебряных монет, а в конце – m золотых. Будем изображать ситуацию в каждый момент точкой $(k; l)$ на координатной плоскости (k – число золотых монет на столе, l – число серебряных). Каждое действие – сдвиг на единицу вправо или вниз – будем изображать соответствующим отрезком. В результате получится ступенчатая ломаная, соединяющая точки $(0; n)$ и $(m; 0)$ (рис.10). При сдвиге вправо на первом листке записывается число, равное площади столбца, расположенного под проведенным отрезком, при сдвиге вниз на втором листке записывается число, равное площади планки, расположенной левее проведенного отрезка. Поэтому в конце сумма чисел на каждом листке будет равна площади, ограниченной проведенной ломаной и осями координат.

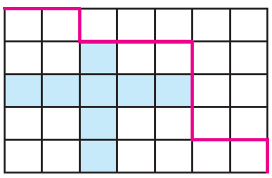


Рис. 10

Сложный вариант

8–9 классы

1. Предположим, что в таблице $n \times n$ удалось расставить знаки так, что количества плюсов во всех строках различны. Если при этом нет строки, заполненной одними плюсами, то в строках реализуются по одному разу все количества плюсов от 0 до $n - 1$. Но тогда общее число плюсов равно $n(n-1)/2 < n^2/2$. Противоречие.

Пусть есть строка, заполненная плюсами. Тогда нет столбца без плюсов. Если во всех столбцах количества плюсов различны, то это все числа от 1 до n, и общее число плюсов равно $n(n+1)/2 < n^2/2$. Значит, в каких-то двух столбцах плюсов поровну.

4. Будем считать, что длина дороги равна 25. Пусть при переходе от исходной расстановки A в некоторую расстановку B каждый из полицейских переместился. Докажем, что суммарное пройденное расстояние можно уменьшить. Не менее 13 полицейских шли на новое место в одном направлении, пусть по часовой стрелке. Рассмотрим расстановку C, получающуюся из B сдвигом на одно место против часовой стрелки. Теперь при переходе из A в C как минимум у 13 полицейских пройденные расстояния уменьшились на 1, а у остальных, если и увеличились, то не больше чем на 1 (они могли и не увеличиться, если теперь полицейскому будет ближе идти по другой стороне круга). В результате суммарное расстояние уменьшилось как минимум на 1.

6. Пусть $A_n = 1\ldots1$ (n единиц). Докажем по индукции более сильное утверждение: *любое число $a \le A_n$ можно представить как сумму не более чем n ровных чисел.*

База ($n = 1$) очевидна. *Шаг индукции.* Число A_{n+1} само ровное. Если же $a \le A_{n+1} - 1 = 10A_n$, то a можно записать в виде $qA_n + r$, где $0 \le q \le 9$, $0 \le r \le A_n$. Число qA_n – ровное, а r можно представить как сумму не более чем n ровных чисел по предположению индукции.

7. а), б) Может.

Первое решение. Разделим сетку на 10 горизонтальных *полосок* 9×99 клеток. Пусть паук двигается слева направо по нижнему краю нижней полоски, пока не увидит муху, приклеенную в этой же полоске над ним. Тогда он пересекает полоску по вертикали, съедая муху, и продолжает движение направо по верхнему краю полоски, пока не увидит муху, приклеенную под ним. Затем снова переходит на нижний край полоски и т.д. Достигнув правого края полоски, он переходит по вертикали на нижний край следующей полоски. Всего на это он затратит не более 99 + 9k + 10 ходов, где k – количество мух в первой полоске. Далее он повторяет «процедуру», двигаясь справа налево вдоль второй полоски, и т.д. Все 100 мух он съест не более чем за $10 \cdot 99 + 9 \cdot 100 + 9 \cdot 10 = 1980$ ходов.

Второе решение. (Панкратов Виктор, Долгопрудный, ФМЛ 5, 9 класс). Занумеруем горизонтальные линии, проходящие через узлы, числами от 1 до 100. Покрасим красным цветом линии с номерами 5, 15, … 95 (10 линий), а синим – линии с номерами 1, 10, 20, … 100 (11 линий). Дополним красные линии (проведя 99 вертикальных единичных отрезков) до красной змейки, а синие линии – до синей змейки (змейка идет из левого верхнего угла в один из нижних углов). Длина красной змейки $99 \cdot 11$, а синей $99 \cdot 12$.

От любой мухи можно дойти как до красной змейки, так и до синей, не более чем за 5 ходов. Муху, от которой до красной змейки можно дойти за 3 или менее ходов, назовем красной, а иначе – назовем синей. От любой синей мухи до синей змейки можно дойти не более чем за 1 ход.

Если красных мух не меньше 59, то алгоритм такой: идем по красной змейке, как только доходим до точки, ближайшей к какой-нибудь мухе, отходим к этой мухе, забираем ее и возвращаемся на красную змейку, идем по ней дальше. Длина пути будет не более $99 \cdot 11 + 59 \cdot 6 + 41 \cdot 10 = 1853$ (забирая синюю муху, мы тратим не более 10 ходов, забирая красную муху – не более 6).

Если же красных мух не более 58, то синих мух не менее 42, и тогда алгоритм тот же, только идем по синей змейке и собираем мух. Длина пути не более $99 \cdot 12 + 42 \cdot 2 + 58 \cdot 10 = 1852$ (забирая красную муху, мы тратим не более 10 ходов, забирая синюю муху – не более 2).

10–11 классы

4. Докажем, что указанные шесть точек равноудалены от центра I вписанной в треугольник ABC окружности.

Хорды $B'C_A = A'C$ и $A'C_B$ описанной окружности треугольника $GA'B'$ пересекаются в точке C, поэтому $B'C \cdot C_AC = A'C \cdot C_BC$. Так как $B'C = A'C$, то и $C_AC = C_BC$. Значит, $A'C_AC_BB'$ – равнобедренная трапеция и серединный перпендикуляр к ее основанию C_AC_B содержит биссектрису угла C, т.е. проходит через I.

Для секущих, проведенных из точки A к той же окружности, верно равенство $AB' \cdot AC_A = AG \cdot AA'$. Аналогично, $AC' \cdot AB_A = AG \cdot AA'$. Так как $AB' = AC'$, то и $AC_A = AB_A$. Значит, серединный перпендикуляр к ее отрезку B_AC_A содержит биссектрису угла A, т.е. проходит через I.

Итак, точка I равноудалена от точек B_A, C_A, C_B. Аналогично доказывается ее равноудаленность от точек A_B, C_A, C_B. И так далее.

5. Слов получилось поровну.

Установим взаимно однозначное соответствие между словами Пети и Васи. Разобьем Васино слово из $2m$ букв на блоки из двух букв. Заменим каждый блок TT на букву T, блок OO – на букву O, блок TO – на букву W, и блок OT – на букву N. Мы получим слово из m букв, в котором букв T и O будет поровну (изначально их было поровну, замена блоков TO и OT убирает равное число букв T и O, а значит, и блоков TT будет столько же, сколько блоков OO). Итак, каждому слову Васи мы сопоставили слово Пети.

Наоборот, по каждому m-буквенному слову Пети легко восстановить, из какого слова Васи оно получилось по описанно-

му выше правилу: надо заменить буквы по правилу $T \to TT$, $O \to OO$, $W \to TO$, $N \to OT$ (ясно, что при этом мы получим слово из $2m$ букв, в котором букв Т и О поровну).
Это и означает, что Васиных слов столько же, сколько Петиных.

6. *Первое решение.* Превратим стороны полученного шестиугольника в векторы $\vec{a}$, $\vec{u}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$, $\vec{c}$, $\vec{w}$, поставив на них стрелки в направлении обхода (обход начинается с вершины с углом $181°$).
Заметим, что угол между векторами $\vec{a}$ и $-\vec{u}$ равен $(x-1)°$, а угол между векторами $\vec{w}$ и $\vec{a}$ равен $1°$ (по условию), откуда угол между векторами $\vec{w}$ и $-\vec{u}$ равен $x°$. Найдя таким образом углы между векторами $\vec{w}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, видим, что углы между ними такие же, как и между векторами сторон исходного треугольника.
Заметим, что $\vec{w}+\vec{a}+\vec{u}+\vec{b}+\vec{v}+\vec{c}=\vec{0}$. Повернем вектор $\vec{a}$ на $1°$ так, чтобы он стал сонаправлен вектору $\vec{w}$. Полученный вектор обозначим $\vec{a}'$. Аналогично построим векторы $\vec{b}'$ и $\vec{c}'$. Из векторов $\vec{w}+\vec{a}'$, $\vec{u}+\vec{b}'$ и $\vec{v}+\vec{c}'$ составляется треугольник, равный исходному треугольнику ABC: эти векторы по модулю равны соответствующим сторонам треугольника ABC и углы между ними такие, как в ABC. Следовательно, $\vec{w}+\vec{a}'+\vec{u}+\vec{b}'+\vec{v}+\vec{c}'=\vec{0}$. Сравнивая с предыдущим равенством, получаем $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}'+\vec{b}'+\vec{c}'$. Но в этом равенстве правая часть получается из левой части поворотом на $1°$. Значит, обе суммы равны нулю. Поэтому из векторов $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{c}'$ составляется треугольник. Этот треугольник подобен треугольнику ABC, так как имеет равные с ним углы. Таким образом, длины векторов $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{c}'$ пропорциональны длинам сторон исходного треугольника, что и требовалось.
Набросок второго решения. Пусть точка излома на одной из сторон треугольника делит ее в некотором отношении k. Если на двух других сторонах выбрать точки излома, делящие стороны в том же отношении k, то из полученных «погнутых» сторон сложится нужный шестиугольник (проверьте!).
Зафиксируем на первой из сторон точку излома. Тогда для решения задачи достаточно доказать, что точки излома на второй и третьей сторонах восстанавливаются однозначно.
Идея доказательства такова. Будем пристраивать к первой стороне вторую сломанную сторону (под требуемым в условии углом), варьируя точку излома. Свободная вершина второй стороны тогда будет двигаться по некоторой прямой m. Аналогично, пристраивая к первой стороне третью (под требуемым в условии углом) и варьируя на ней точку излома, получим, что свободная вершина третьей стороны также движется по некоторой прямой n. Можно показать, что прямые m и n не параллельны. Но тогда они пересекаются в единственной точке, т.е. оставшиеся вершины шестиугольника восстанавливаются однозначно.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ LXXX САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

1. Возможный пример показан на рисунке 11.
Эту задачу удобно решать не простым подбором, а сначала немного подумать. Впрочем, это правило относится ко многим задачам. Допустим, дробные черточки как-то уже расставлены. Тогда полученную сложную дробь можно преобразовать, не делая никаких сокращений, так что получится обычная дробь, в числителе и знаменателе которой находятся исходные числа от 1 до 9. Теперь, если мы сократим дробь, должно получиться $7/10$. Попробуем разбить исходные числа на две группы, чтобы произведение чисел в первой группе при делении на произведение чисел во второй давало результат $7/10$. Очевидно, что число 1 при преобразованиях дроби всегда остается в числителе, а 2 – в знаменателе, т.е. 1 должно быть в первой группе, а 2 – во второй. Далее, ясно, что число 7 должно быть в первой группе (чтобы числитель делился на 7), а число 5 – во второй (иначе знаменатель не сможет делиться на 5). Кроме того, поскольку ни 7, ни 10 не делятся на 3, числа 3, 6 и 9 (делящиеся на 3) должны быть распределены по группам так, чтобы все тройки сократились. Немного поэкспериментировав, мы приходим к выводу, что подходит такое разбиение: 1, 7, 8, 9 – первая группа; 2, 3, 4, 5, 6 – вторая. Осталось лишь придумать, как организовать деление.

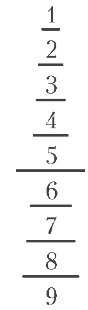


Рис. 11

Так получается приведенный пример. Другой пример получится, если взять разбиение 1, 3, 4, 6, 7 – первая группа; 2, 5, 8, 9 – вторая. Способ расставить дробные черточки для такого разбиения изобретите самостоятельно.

2. Заметим, что

$$\text{КРЯКВА} + \text{КРЯ} + \text{КРЯ} =$$
$$= 1000 \cdot \text{КРЯ} + \text{КВА} + 2 \cdot \text{КРЯ} = 1002 \cdot \text{КРЯ} + \text{КВА}.$$

По условию это число делится на 167. Еще заметим, что множитель 1002 делится на 167. Следовательно, число КВА делится на 167. Допустим, что число КВАКРЯ + КВА + КВА тоже делится на 167. Тогда, аналогично, КРЯ делится на 167. Но это невозможно: оба числа КВА и КРЯ не могут делиться на 167, поскольку разность между ними меньше 100 и на 167 не делится.

3. Поэкспериментировав с бадьями, нетрудно изобрести такую вот довольно плотную расстановку бадей (рис.12). Здесь бадьи занимают $4/5$ всей площади: приклеим к каждой бадье пустую клеточку, расположенную под ней, плоскость окажется разбита на полученные пятиклеточные фигуры. Таким образом, здесь на каждые 5 клеток приходится одна бадья, и интуитивно кажется ясным, что это самое плотное расположение бадей.

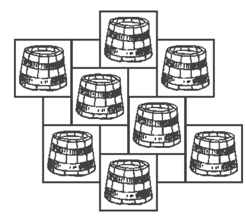


Рис. 12

Если это так, то, поскольку площадь прямоугольника из условия задачи равна 1200, количество бадей в нем не может быть больше $1200/5 = 240$.
Для решения задачи осталось выделить «рациональное зерно», которое содержится в этом потоке сознания.
Докажем, что каждой бадье можно сопоставить пустую клетку так, что разным бадьям будут соответствовать разные пустые клетки. Этого достаточно для доказательства утверждения задачи, поскольку количество клеток, занятых бадьями, а также сопоставленных бадьям, в сумме не больше площади доски, т.е. 1200 клеток. Как мы уже видели, количество бадей в этом случае не больше 240.
Заметим, что если бадья стоит не у нижнего края доски, то хотя бы одна из двух клеток A, B, расположенных под бадьей, свободна (рис.13). Действительно, допустим, что эти клетки заняты. Если они принадлежат одной бадье, то эта бадья находится под боем у первой. Если же они принадлежат разным бадьям, то эти бадьи сами бьют друг друга. Таким образом, мы можем каждой бадье, стоящей не у нижнего края доски, сопоставить пустую клетку, расположенную под этой бадьей. Очевидно, разным бадьям будут соответствовать разные клетки.

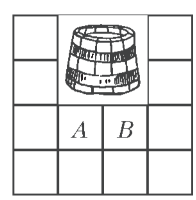


Рис. 13

Теперь объясним, как мы будем сопоставлять клетки бадьям, стоящим у нижнего края доски (кроме бадьи, стоящей в правом нижнем углу, если такая есть). Будем последовательно

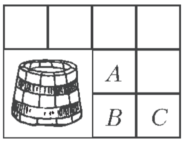


Рис. 14

рассматривать бадьи, стоящие у нижнего края, слева направо. Рассмотрим клетки A и B, расположенные справа от очередной бадьи (рис.14).

Очевидно, они обе не могут быть заняты, так как тогда бадья, занимающая эти клетки, находилась бы под боем у рассматриваемой бадьи. Если клетка A свободна, то клетка B, очевидно, тоже свободна. Ясно, что до сих пор клетка B еще не была сопоставлена ни одной бадье, и мы сопоставим ее нашей бадье.

Если же клетка A занята, то клетки B и C свободны, и лишь одна из них могла быть ранее сопоставлена «вышестоящей» бадье. Тогда мы сопоставим нашей бадье вторую клетку.

Осталось сопоставить что-нибудь бадье, стоящей в правом нижнем углу, если такая есть. Заметим, что до сих пор рассмотренные бадьи вместе с сопоставленными им клетками в сумме накрывают кратное 5 количество клеток. Площадь всей доски тоже делится на 5. Поэтому если в углу стоит бадья (занимающая 4 клетки), то на доске найдется хотя бы одна пустая клетка, еще не затронутая сопоставлениям. Вот ее-то и сопоставим угловой бадье.

Замечание. Утверждение о том, что в плотной упаковке, приведенной в начале решения задачи, $4/5$ всей площади занято

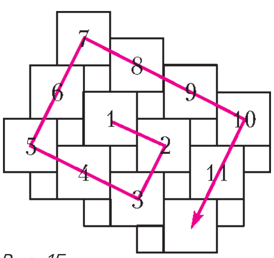


Рис. 15

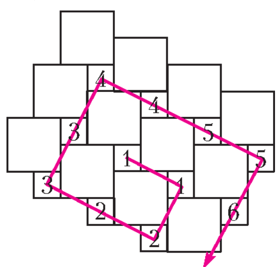


Рис. 16

бадьями, не следует понимать буквально. Пронумеруем бадьи, двигаясь по спирали, как показано на рисунке 15. Пустые клетки тоже пронумеруем, двигаясь по спирали, но каждый номер будем использовать 2 раза (рис.16). Теперь мы можем каждой бадье сопоставить две (!) пустых клетки с тем же номером. Получается, что при таком взгляде на вещи бадьи занимают $4/6$ всей площади. Читатель легко придумает аналогичное рассуждение, показывающее, что «бадьями занято менее 1% всей площади».

4. Предположим противное. Пусть игроков было n. Если один из них выиграл у троих человек, то либо два из них младше его, либо два из них старше его и, значит, нужный игрок найден. Поэтому нам осталось разобрать случай, когда каждый теннисист проиграл по крайней мере две партии и, значит, суммарное количество поражений всех игроков не меньше $2n$. Заметим, что суммарное по всем игрокам количество побед плюс суммарное количество поражений равно $4n$ (поскольку каждый сыграл 4 партии). Если кто-то проиграл хотя бы три партии, то общее количество поражений строго больше $2n$, и тогда общее количество побед строго меньше $2n$, что невозможно, поскольку суммарное количество побед равно суммарному количеству поражений. Стало быть, каждый теннисист выиграл ровно у двоих. Тогда самый старший участник обыграл двух человек (младше его).

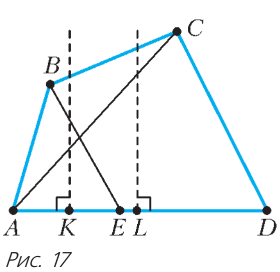


Рис. 17

5. Пусть K – середина отрезка AE, L – середина AD (рис.17). Как нетрудно видеть, $KL = \frac{1}{2}ED$ (например, потому, что отрезок KL отображается в ED при гомотетии с центром A и коэффициентом 2). Так как $AB < BE$, точка B лежит левее серединного перпендикуляра к отрезку AE. А поскольку $AC > CD$, точка C лежит правее серединного перпендикуляра к AD. Таким образом, отрезок BC пересекает оба перпендикуляра, значит, его длина не меньше расстояния между перпендикулярами, т.е. KL, что и требовалось.

6. Нельзя.

Заметим, что при выполнении указанной операции не меняется выражение $xy + yz + zx + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Действительно,

$$xy + yz + zx + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + (x+y)z + \frac{1}{z} =$$

$$= xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{\frac{1}{z(x+y)}} + (x+y)\frac{1}{z(x+y)} =$$

$$= xy + yz' + z'x + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z'},$$

где $z' = \frac{1}{z(x+y)}$. Но для набора 2, 3, 6 указанное выражение равно 37, а для набора 2, 3, 4 оно равно $27\frac{1}{12}$.

7. Пусть $f(x) = px^2 + qx + r$ и $a < b$. Тогда по условию

$$pa^2 + qa + r = b \text{ и } pb^2 + qb + r = a. \qquad (*)$$

Вычтем из первого равенства второе и сократим на $a - b \neq 0$, получим равенство

$$p(a+b) + q = -1.$$

Поэтому сумма любых двух переставляемых местами чисел равна $-\frac{1+q}{p}$. С другой стороны, если сложить равенства $(*)$, то получится соотношение

$$p\left(a^2 + b^2\right) + q(a+b) + 2r = a + b.$$

Из него мы найдем, что сумма квадратов любых двух переставляемых местами чисел равна $-\frac{(1-q)(1-q)}{p^2} - \frac{2r}{p}$. Осталось заметить, что пара чисел однозначно определена, если заданы их сумма и сумма квадратов.

8. Все степени двойки.

Пусть n – почтенное число. Тогда сумма $d_1 + d_2 + \ldots + d_l$ его делителей, отличных от n, равна $n - 1$. У числа n^k заведомо есть делители

$$d_1, d_1n, \ldots, d_1n^{k-1}, d_2, d_2n, d_2n^{k-1}, \ldots, d_l, d_ln, \ldots, d_ln^{k-1}.$$

Все они различны и отличны от n^k, а их сумма равна

$$\left(1 + n + n^2 + \ldots + n^{k-1}\right)\left(d_1 + d_2 + \ldots + d_l\right) =$$
$$= \left(1 + n + n^2 + \ldots + n^{k-1}\right)(n-1) = n^k - 1.$$

Следовательно, у числа n^k (как того требует условие) нет делителей, отличных от вышеперечисленных. Это означает, что n является степенью простого числа. В противном случае, если n делится на p^r (и не делится на p^{r+1}), то в приведенном выше списке делителей числа n^k отсутствует делитель p^{r+1}.

Итак, пусть $n = p^m$. Тогда сумма отличных от n делителей числа n равна $1 + p + p^2 + \ldots + p^{m-1}$, что по условию равно $p^m - 1$. Но

$$1 + p + p^2 + \ldots + p^{m-1} = \frac{p^m - 1}{p - 1},$$

что меньше $p^m - 1$ при $p \neq 2$ и равно $p^m - 1$ при $p = 2$. Таким образом, числа $n = 2^m$ удовлетворяют условию задачи, а остальные числа не удовлетворяют условию.

9. Потребуется 141 прямая.

Покажем, что 141 прямой покрыть узлы можно. Проекция салфетки на ось OX – это отрезок, по длине не превосходящий диагонали салфетки, т.е. $100\sqrt{2}$. Рассмотрим вертикальные линии сетки, пересекающие проекцию салфетки (рис.18). Таких прямых не больше чем $\left[100\sqrt{2}\right]+1=142$. Если их оказалось 141 или меньше, цель достигнута. Если же их ровно 142, то самая левая и самая правая из них содержат ровно по одному узлу, накрытому салфеткой, этот факт доказан в лемме ниже. Заменим эти две прямые на одну прямую, проходящую через упомянутые узлы. В результате все нужные точки покрыты 141 прямой.

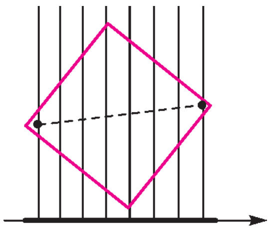


Рис. 18

Лемма. Если салфетку пересекают 142 вертикальные линии сетки, то самая левая и самая правая из них содержат ровно по одному узлу, накрытому салфеткой.

Доказательство. Действительно, пусть проекции двух смежных сторон салфетки на горизонтальную прямую равны a и b, $a \ge b$. Допустим, что на одной из крайних прямых оказалось два или более узла. Тогда эта прямая отсекает от салфетки прямоугольный треугольник Δ_1 с гипотенузой, не меньшей 1. Высота этого треугольника не превосходит $100\sqrt{2}-141$. Треугольник Δ_1 подобен треугольнику Δ_2, который отсекает от салфетки прямая, проходящая через одну из вершин квадрата – верхнюю или нижнюю в зависимости от того, у какой из них проекция правее. Гипотенуза этого треугольника не превосходит диагонали квадрата, т.е. $100\sqrt{2}$, а высота равна a или b и, значит, не меньше b. Нам известно, что $a+b \ge 141$. Тогда

$$(a-b)^2 = 2\left(a^2-b^2\right)-(a+b)^2 \le 20000-141^2 = 119,$$

т.е. $a - b < 11$ и $b = \left((a+b)-(a-b)\right)/2 > 65$. Записывая пропорциональность высот и гипотенуз в подобных треугольниках Δ_1 и Δ_2, получаем $\dfrac{65}{100\sqrt{2}} < 100\sqrt{2}-141$. С другой стороны, $\dfrac{65}{100\sqrt{2}} > \dfrac{65}{143} = \dfrac{5}{11} > 0{,}45 > 100\sqrt{2}-141$ – противоречие. (В последней оценке мы пользовались тем, что $\sqrt{2} < 1{,}4145$.)

Докажем теперь, что не всегда возможно провести 140 прямых так, чтобы они проходили через все узлы. Рассмотрим квадрат, диагональ которого – отрезок, соединяющий точки (0;0) и (141;0) (рис.19). Его сторона равна $\dfrac{141}{\sqrt{2}} < 100$, поэтому его можно накрыть салфеткой со стороной 100. Проверим, что узлы, принадлежащие квадрату, нельзя покрыть 140 прямыми. На диагонали квадрата расположено 142 узла. Если диагональ не лежит ни на одной из проведенных прямых, то эти узлы должны покрываться различными прямыми, что невозможно, поскольку прямых всего 140. Поэтому прямая $y = 0$ заведомо проведена. Теперь докажем по индукции, что при $0 \le k \le 69$ проведены прямые $y = \pm k$. База $k = 0$ уже проверена. Установим переход от $k - 1$ к k. По предположению индукции уже проведены прямые $y = 0$, $y = \pm 1$, …, $y = \pm(k-1)$ (всего $2k - 1$ прямая). Рассмотрим очередную прямую $y = k$, на ней лежит $142 - 2k$ узлов. Если она не проведена, то эти узлы покрыты различными прямыми, что невозможно, поскольку нам осталось провести $140-(2k-1)=141-2k$ прямых. Значит, она проведена. Аналогично, должна быть проведена и прямая $y = -k$.

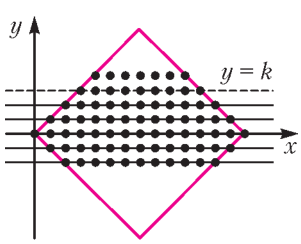


Рис. 19

Итак, мы установили, что заведомо проведено $2\cdot 69+1=139$ прямых. Но при этом точки $(70;\pm70)$ и $(71;\pm70)$ все еще остались непокрытыми. Они являются вершинами прямоугольника и поэтому не могут быть покрыты одной прямой.

10. Назовем разбиение из условия задачи *хорошим*. Будем доказывать по индукции более сильное утверждение: если на двух параллельных прямых отмечено $2n$ точек, то количество хороших разбиений этих точек на пары меньше 3^{n-1}.

База $n = 2$ очевидна. Установим переход от всех чисел, не превосходящих n, к $n + 1$. Обозначим точки на верхней прямой буквами $A_1, A_2, \ldots, A_m$ (слева направо), а на нижней прямой – $B_1, B_2, \ldots, B_{2n+2-m}$ (рис.20). Рассмотрим точку A_1. Возможны 3 случая.

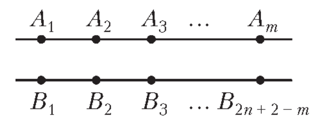


Рис. 20

1) Если точка A_1 в паре с какой-то точкой на верхней прямой, то это заведомо точка A_2, а остальные $2n$ точек образуют хорошее разбиение. Следовательно, количество хороших разбиений $2n + 2$ точек, содержащих пару A_1A_2, меньше 3^{n-1}.

2) Если точка A_1 в паре с точкой B_1, то остальные точки опять образуют хорошее разбиение. Как и в предыдущем случае, получаем, что число хороших разбиений $2n + 2$ точек, содержащих пару A_1B_1, меньше 3^{n-1}.

3) Если точка A_1 в паре с некоторой точкой B_l на нижней прямой ($l > 1$), то слева от точки B_l расположено четное количество отмеченных точек, иначе их было бы нельзя разбить на пары. Таким образом, в этом случае точка A_1 может быть в паре лишь с точками $B_3, B_5, \ldots$ Заметим, что точки, лежащие под прямой A_1B_{2k+1}, разбиваются на пары лишь единственным образом, причем точки B_1 и B_2 обязательно образуют пару. Удалив эту пару, мы видим, что количество хороших разбиений в рассматриваемом случае снова не превосходит 3^{n-1}.

Таким образом, суммарное количество хороших разбиений $2(n+1)$ точек меньше чем $3^{n-1}+3^{n-1}+3^{n-1}=3^n$.

Немного модифицировав рассуждения индукционного перехода, можно доказать, что количество хороших пар не превосходит a^n, где $a=\dfrac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)$ – квадрат золотого сечения.

Действительно, рассматривая те же случаи, получаем, что в первом случае число хороших пар не превосходит a^n. Объединив второй и третий случай, мы приходим к рассмотрению ситуации, когда точка A_1 находится в паре с точкой B_{k+1}, $k = 0, 1, \ldots$ Точки, лежащие под прямой A_1B_{2k+1}, разбиваются на пары единственным образом. А количество отмеченных точек, расположенных выше прямой A_1B_{2k+1}, равно $2(n-k)$. По предположению индукции количество хороших разбиений этих точек меньше a^{n-k}. Следовательно, количество хороших разбиений, в которых точка A_1 состоит в паре с какой-нибудь точкой на нижней прямой, меньше чем

$$a^n + a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1 = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} < \frac{a}{a-1}a^n.$$

Итого, количество хороших разбиений меньше чем

$$a^n + \frac{a}{a-1}a^n = \frac{2a-1}{a-1}a^n = a^{n+1}$$

(последнее равенство выполнено в силу того, что a есть корень уравнения $\dfrac{2a-1}{a-1}=a$).

11. Заметим сначала, что поскольку $\angle AEB_1 = \angle CFB_1 = 90^\circ$, точка пересечения прямых AE и CF лежит на окружности ω

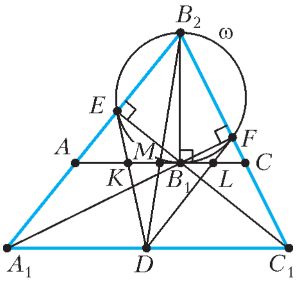


Рис. 21

и диаметрально противоположна точке B_1 (рис.21), обозначим эту точку через B_2. Очевидно, диаметр B_2B_1 перпендикулярен прямой AC. Точки пересечения прямых ED и FD с прямой AC обозначим через K и L.

Теперь заметим, что $KE = KB_1$ как отрезки касательных, и в прямоугольном треугольнике AEB_1 такое равенство возможно, лишь если точка K – середина гипотенузы AB_1. Аналогично, точка L – середина B_1C. Продолжим прямые B_2E и B_1F до пересечения в точке A_1, а прямые B_2C и B_1E – до пересечения в точке C_1. В треугольнике $A_1B_2C_1$ отрезки A_1F и C_1E являются высотами, они пересекаются в точке B_1. Значит, B_2B_1 тоже высота, и поэтому $A_1C_1 \parallel AC$. Тогда продолжение медианы EK треугольника AEB_1 проходит через середину отрезка A_1C_1, продолжение медианы FL треугольника B_1FC тоже проходит через середину A_1C_1. Таким образом, точка D есть середина отрезка A_1C_1. Кстати, проделанное рассуждение обосновывает жесткость полученной картинки.

Мы получили, что B_2D – медиана треугольника $A_1B_2C_1$, поэтому она пересекает отрезок AC, параллельный стороне A_1C_1, в его середине M, откуда и следует требуемое.

12. Предположим, что множество M состоит только из простых чисел. Тогда все числа из множества M нечетные (так как любое число вида $2^b \pm 2$ составное при $b \ge 3$). Возьмем в множестве M два произвольных числа a, $b \ge 3$. Если a дает остаток 1 при делении на 3, то a^b также дает остаток 1. Тогда $a^b + 2$ делится на 3 и по нашему предположению $a^b + 2$ не может принадлежать множеству M. Значит, в этом случае множеству M принадлежит число $a^b - 2$. Аналогично, если a дает остаток 2 при делении на 3, то a^b также дает остаток 2, $a^b - 2$ составное, и тогда в этом случае множество M должно содержать число $a^b + 2$.

Если множество M содержит хотя бы одно простое число a, дающее остаток 1 при делении на 3, то в множестве M, как мы установили, содержится число вида $a^b - 2$, дающее остаток 2. Тогда число $\left(a^b - 2\right)^a + 2$ тоже принадлежит M. Заметим, что это число дает при делении на a тот же остаток, что и число $(-2)^a + 2 = -2^a + 2$. Но это число делится на a, значит, оно составное. Делимость следует[1], например, из малой теоремы Ферма.

Аналогично, если простое число $a \in M$ дает остаток 2 при делении на 3, то в множестве M содержится число $\left(a^b + 2\right)^a - 2$, которое по тем же причинам делится на a.

13. Рассмотрим дорогу между городами A и B. Докажем, что не более чем за 199 дней она будет разрушена. Предположим, что она не была разрушена за 198 дней. Тогда каждый день разрушалась хотя бы одна дорога, выходящая из города A, или хотя бы одна дорога, выходящая из города B (в противном случае к разрушаемому набору можно было бы добавить дорогу AB и, значит, он был не идеальным). Таким образом, за 198 дней будут разрушены все дороги, выходящие из городов A и B, кроме дороги AB. Но тогда дорога AB заведомо попадет в следующий идеальный набор и будет разрушена на 199-й день.

[1] В этом также можно убедиться, раскрыв по биному сумму $(1+1)^a = 1 + C_a^1 + C_a^2 + \ldots + C_a^{a-1} + 1$ и заметив, что для простого a все биномиальные коэффициенты $C_a^k = \dfrac{a!}{k!(a-k)!}$ делятся на a.

Итак, мы про каждую дорогу доказали, что по истечении 199 дней она будет разрушена. Поэтому через 199 дней в стране не останется ни одной дороги.

14. Наименьшее число детей, которые могут видеть ухо, равно $n + 2$.

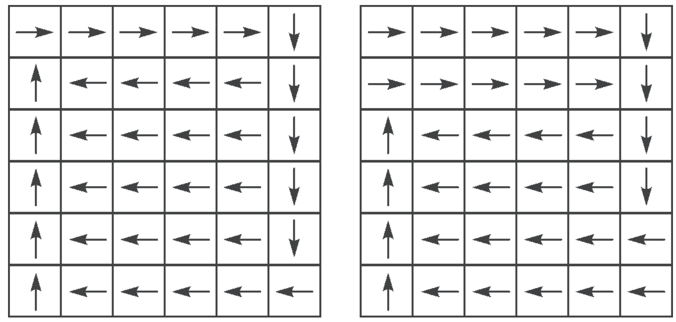


Рис. 22

Два возможных примера показаны на рисунке 22.

Рассмотрим произвольного ребенка. Если он не видит уха, то он смотрит в чей-то затылок. Тогда стоящий перед ним либо видит чье-то ухо, либо также смотрит в затылок. Таким образом, мы получаем цепочку из стоящих в ряд детей, в которой самый первый ребенок видит чье-то ухо. Заметим, что в этой цепочке не более $n - 1$ ребенка. Поскольку общее количество детей равно n^2, то цепочек не меньше чем

$$\frac{n^2}{n-1} = n + 1 + \frac{1}{n-1}.$$

Значит, их хотя бы $n + 2$. Стало быть, как минимум $n + 2$ ребенка видят чье-то ухо.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: (495) 930-56-48
E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь
www.Pareto-print.ru

В ГОРОДЕ СОЧИ ШАХМАТНЫЕ НОЧИ

В ноябре прошлого года в Сочи, в Олимпийской деревне состоялся поединок за шахматную корону между чемпионом мира Магнусом Карлсеном (Норвегия) и претендентом на этот титул Виши Анандом (Индия). Карлсен победил со счетом 6,5:4,5 и сохранил свой титул.

Перед стартом высказывались два мнения. Согласно одному, время работает на руку более молодому гроссмейстеру (разница в двадцать лет должна сказаться), и Карлсен без труда возьмет верх, как и в их первом матче. Но многие знатоки полагали, что Ананд провел глубокий анализ и теперь будет достойно противостоять норвежцу. Результат получился среднеарифметическим… С одной стороны, Виши действительно играл успешнее, чем в 2013 году, с другой, Карлсен выиграл достаточно уверенно – 3:1 по победам вместо прежних 3:0. Так что обе стороны правы, а вот чемпион мира снова Магнус Карлсен!

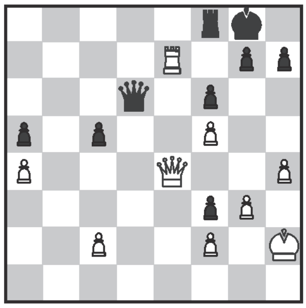
Приведем все три победы Карлсена, причем внимание сосредоточим на критических моментах.

М.Карлсен–В.Ананд

2-я партия

Испанская партия

1. e4 e5 2. ♘f3 ♘c6 3. ♗b5 ♘f6 4. d3 ♗c5 5. 0-0 d6 6. ♖e1 0-0 7. ♗:c6 bc 8. h3 ♖e8 9. ♘bd2 ♘d7 10. ♘c4 ♗b6 11. a4 a5 12. ♘:b6 cb. 13. d4 ♕c7 14. ♖a3! Ладья тонко подключается к игре, она может пригодиться и в центре, и на флангах. **14…♘f8 15. de de 16. ♘h4! ♖d8 17. ♕h5 f6 18. ♘f5 ♗e6 19. ♖g3 ♘g6 20. h4!** Здесь у белых была красивая возможность пожертвовать ладью: 20. ♗h6! gh 21. ♖:g6+ hg 22. ♕:g6+ ♔f8 23. ♕:f6+ ♕f7 24. ♕:h6+ ♔e8 25. ♕h8+ ♔d7 26. ♖d1+ ♔c7 27. ♕:e5+ ♔b7 28. ♘d6+ ♖:d6 29. ♖:d6. Король убежал, но за слона у белых масса пешек! Однако Карлсен решил, что проще довести дело до победного конца техническим путем. **20…♗:f5 21. ef ♘f4 22. ♗:f4 ef 23. ♖c3! c5 24. ♖e6!** В тяжелофигурном окончании белые фигуры гораздо активнее. **24…♖ab8. 25. ♖c4! ♕d7 26. ♔h2! ♖f8 27. ♖ce4 ♖b7 28. ♕e2 b5 29. b3 ba 30. ba ♖b4 31. ♖e7 ♕d6 32. ♕f3 ♖:e4 33. ♕:e4 f3+.** Не спасает 33…♔h8 34. ♖e8 h6 35. ♕d3! **34.g3.** (См. диагр.)



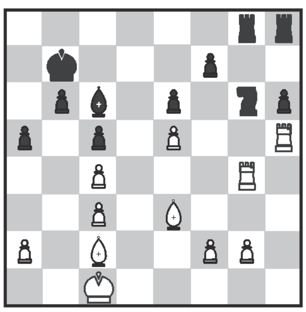
34…h5?? Грубый просмотр в цейтноте, хотя позиция у Ананда несладкая. **35. ♕b7!** Ферзь и ладья белых долго хозяйничали на открытой вертикали «е», но неожиданно с решающим эффектом перестроились по седьмой горизонтали. Небольшой математический этюд. **Черные сдались.**

М.Карлсен–В.Ананд

6-я партия

Сицилианская защита

1. e4 c5 2. ♘f3 e6 3. d4 cd 4. ♘:d4 a6 5. c4. Означает, что дальнейшая игра будет протекать в позиционном ключе. **5…♘f6 6. ♘c3 ♗b4 7. ♕d3 ♘c6 8. ♘:c6 dc 9. ♕:d8+ ♔:d8 10. e5 ♘d7 11. ♗f4.** Чемпион мира охотно разменял ферзей, получив позицию в своем духе – у белых больше пространства для маневров. **11… ♗:c3+ 12. bc ♔c7 13. h4.** Приступая к зажиму на королевском фланге. **13…b6 14. h5 h6 15. 0-0-0 ♗b7 16. ♖d3 c5 17. ♖g3! ♖ag8 18. ♗d3 ♘f8 19. ♗e3 g6 20. hg ♘:g6 21. ♖h5!** Белые не спешат забирать на h6 – как известно, в шахматах угроза сильнее исполнения. **21…♗c6 22. ♗c2 ♔b7 23. ♖g4 a5 24. ♗d1 ♖d8 25. ♗c2 ♖dg8.** Если бы дальше все шло гладко, Магнус наверняка вписал бы эту победу в список своих лучших достижений…



26. ♔d2?? Однако он допускает ужасный просмотр, отступает королем не в ту сторону, и теперь Ананд мог нанести элементарной тактический удар, после которого чемпион мира вряд ли бы устоял. Простой удар 26…♘:e5! полностью менял картину на доске. После 27. ♖:g8 следовали два промежуточных шаха – 27…♘:c4+ 28. ♔d3 ♘b2+, и белые оставались у разбитого корыта.

26…a4?? Поразительно, но и Виши не заметил простой реплики черных, наверно, не поверил в подарок соперника и прошел мимо счастливой возможности. **27. ♔e2.** Больше подарков не предусмотрено. **27…a3 28. f3! ♖d8 29. ♔e1 ♖d7 30. ♗c1 ♖a8 31. ♔e2 ♗a4 32. ♗e4+ ♗c6 33. ♗:g6 fg 34. ♖:g6 ♗a4 35. ♖:e6 ♖d1 36. ♗:a3 ♖a1 37. ♔e3 ♗c2 38. ♖e7+. Черные сдались.**

Первая половина завершилась в пользу чемпиона – 3,5:2,5, а ведь могло случиться наоборот…

М.Карлсен–В.Ананд

11-я партия

Испанская партия

1. e4 e5 2. ♘f3 ♘c6 3. ♗b5 ♘f6 4. 0-0 ♘:e4 5. d4 ♘d6 6. ♗:c6 dc 7. de ♘f5 8. ♕:d8+ ♔:d8. Ферзи разменены, и такие спокойные позиции в духе Карлсена. **9. h3 ♗d7 10. ♘c3 h6 11. b3 ♔c8 12. ♗b2 c5 13. ♖ad1 b6 14. ♖fe1 ♗e6 15. ♘d5 g5 16. c4 ♔b7 17. ♔h2 a5 18. a4 ♘e7! 19. g4 ♘g6 20. ♔g3 ♗e7 21. ♘d2 ♖hd8 22. ♘e4 ♗f8! 23. ♘ef6.** Белая конница расположилась грозно, но на кого ей нападать? **23…b5 24♗c3 bc 25. bc♔c6! 26. ♔f3♖db8.**

27. ♔e4! Карлсен смело подтягивает короля к центру, и после 27…♖b3 28. ♖b1 ♖ab8 29. ♖:b3 ♖:b3 30. ♗:a5 ♖a3 31. ♗:c7 ♖: a4 все шло к мирному исходу. **27…♖b4??** Ананд делает импульсивный ход, совершая непостижимую оплошность, – на ровном месте отдает ладью за слона и сразу оказывается в безнадежном положении. Нервы не выдержали! **28. ♗: b4cb 29. ♘h5 ♔b7 30. f4! gf 31. ♘h:f4 ♘:f4 32. ♘:f4! ♗:c4 33. ♖d7! ♖a6 34. ♘d5! ♖c6 35. ♖:f7 ♗c5 36. ♖:c7+!** Эффектное завершение партии. **36…♖:c7 37. ♘:c7 ♔c6 38. ♘b5 ♗:b5 39. ab+ ♔:b5. 40. e6 b3 41. ♔d3 ♗e7 42. h4! a4 43. g5 hg 44. hg a3 45. ♔c3. Черные сдались.** Матч завершился.

Итак, Магнус Карлсен второй раз стал чемпионом мира. Аналитики еще долго будут исследовать, в чем причина его успеха. Но автору, кажется, удалось это установить. Дело в том, что незадолго до второй встречи с Анандом норвежец сыграл в США блицпартию с самым богатым человеком на планете Биллом Гейтсом. У Гейтса было 2 минуты на партию, у Магнуса 30 секунд, и он объявил мат американскому миллиардеру на девятом ходу всего за 11 секунд! Так что в Сочи Магнус был на подъеме и в хорошем настроении.

Б.Гейтс–М.Карлсен

1. e4 ♘c6 2. ♘f3 d5 3. ♗d3 ♘f6 4. ed ♕:d5 5. ♘c3 ♕h5 6. 0-0 ♘g4 7. h3 ♘ce5 8. hg ♘f:g4 9. ♘:e5 ♕h2×.

Е.Гик

Индекс 90964

Прогулки с физикой

Тиксотропия – что это?

Оказывается, это то, что помогает красить стены или наносить на лицо крем ...

(Продолжение – на с. 29 внутри журнала)