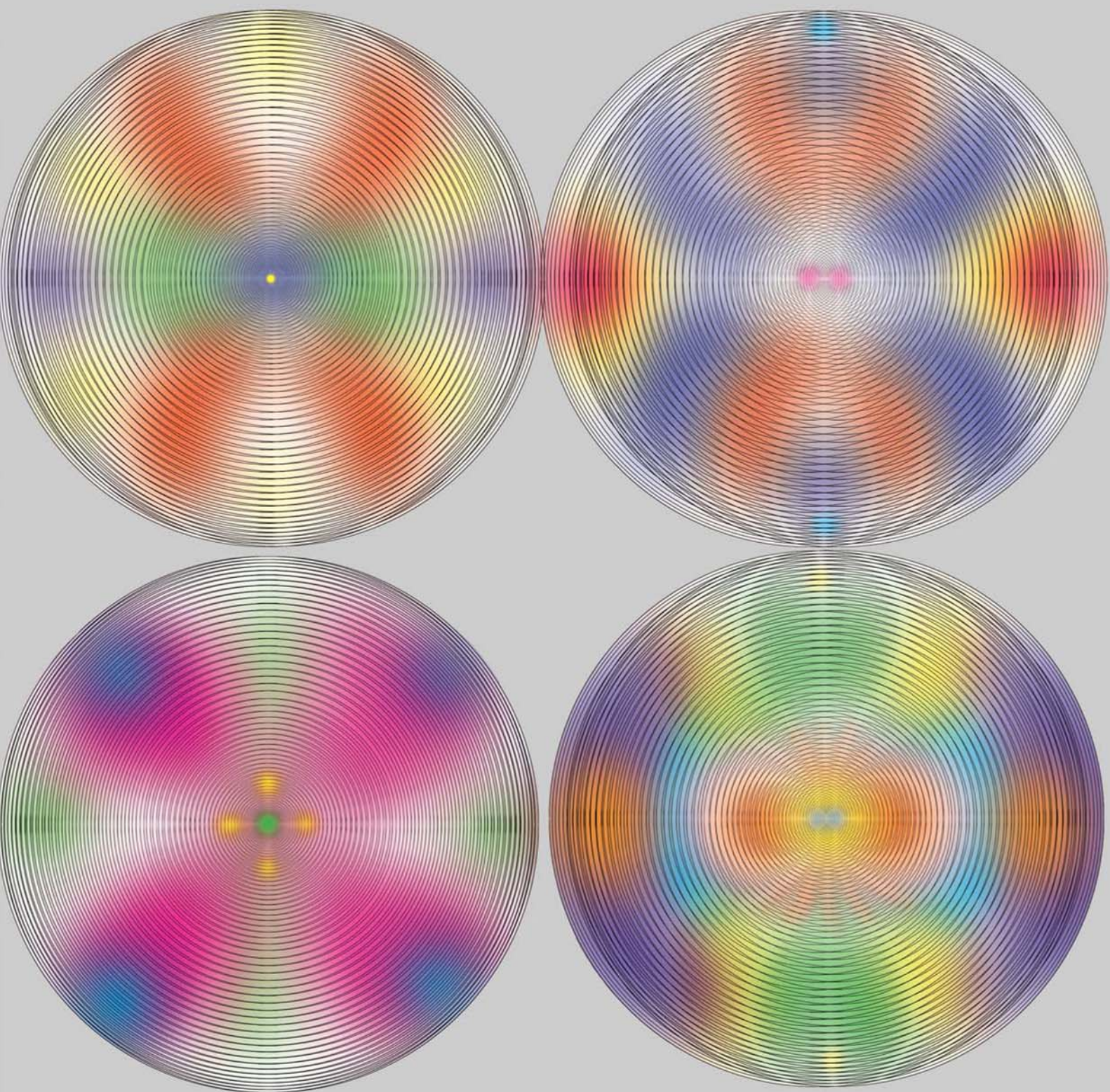


НОЯБРЬ/ДЕКАБРЬ

ISSN 0130-2221
2010 · №6

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

ТАНГРАМ

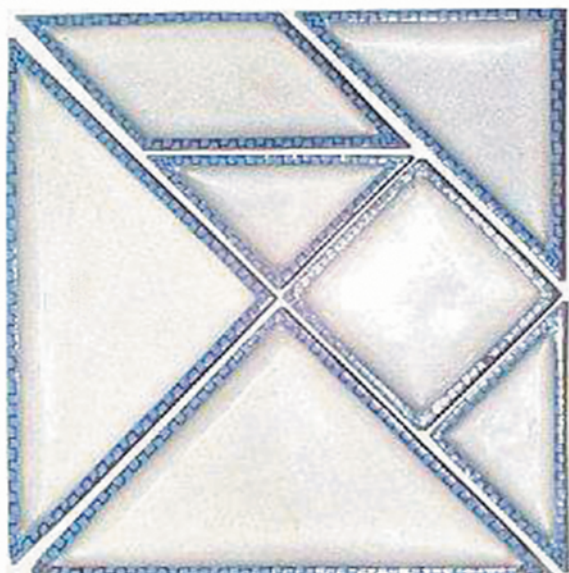


Наверное, многие наши читатели знакомы с этой замечательной головоломкой: квадрат разделен на семь частей (их называют тангами), из которых нужно складывать другие фигуры. Традиционно многие из них напоминают людей или животных. На рисунке показано, как, например, можно сложить изображение кошки.

Скорее всего, танграм изобрели на востоке – в Китае или Японии – более 300 лет назад. В Европе и Америке эта игра появилась позже и была особенно популярна в XIX – начале XX вв. В то время было придумано огромное количество разных задач для танграма, и сейчас их насчитывается более 5000. Говорят, что у Наполеона Бонапарта во время его ссылки на острове Святой Елены были набор танграма и книга с заданиями.

Е.Епифанов

(Продолжение — на странице 34 внутри журнала)



Набор фарфоровых блюдец,
выполненных в виде тангов
(Китай, около 1860 года)



Деревянный танграм

журнал©
Квант НОЯБРЬ 2010 №6
ДЕКАБРЬ 2010

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



Учредитель —
Российская академия наук
Издатель —
ООО НПП ОО «Бюро Квантум»

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

В.В.Козлов

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С.С.Кротов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**А.А.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,
А.Н.Виленин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин,
Н.П.Долбиллин (заместитель главного
редактора), В.Н.Дубровский,
А.А.Егоров, А.В.Жуков,**

А.Р.Зильберман, П.А.Кожевников,

**С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,
В.В.Произолов, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров,
В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,
А.И.Черноуцан (заместитель главного
редактора)**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,
В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков,
Л.Д.Фаддеев**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант,
Я.Е.Шнайдер**

Товарный знак «Журнал «Квант»
является собственностью
ООО НПП ОО «Бюро Квантум»
© 2010, РАН,
журнал «Квант»

- 2 Над пожаром – самолет. *В.Вышинский, М.Кудров, А.Стасенко*
5 Разбиения на домино и функции высоты. *Е.Карпов, К.Кохась*
13 О муарах, оживших иллюстрациях и пользе моделей.
З.Пятакова, А.Пятаков

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 17 Задачи M2199–M2205, Ф2205–Ф2212
19 Решения задач M2176–M2183, Ф2190–Ф2195
25 О покрытии целых чисел прогрессиями

К М Ш

- 27 Задачи
28 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»
28 Летний турнир имени А.П.Савина.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Стереометрия для всех

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 35 Метод изогональных прямых. *И.Кушнир*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 37 Чудеса инверсии. *Т.Емельянова*

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 38 Электричество из фруктов. *Э.Марчук*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 40 Движение заряженных частиц в магнитном поле. *А.Черноуцан*

ОЛИМПИАДЫ

- 44 LI Международная математическая олимпиада
45 XLI Международная олимпиада школьников по физике

ИНФОРМАЦИЯ

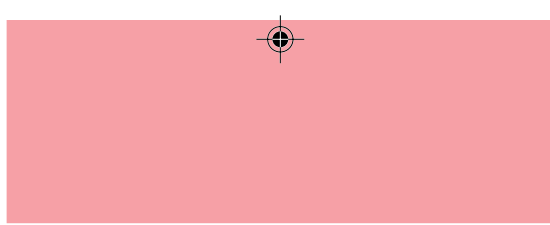
- 49 Очередной набор в ОЛ ВЗМШ
55 Федеральная заочная физико-техническая школа при МФТИ
58 Новый прием в школы-интернаты при университетах
59 Конкурс «Свободный полет» в 2011 году
60 Ответы, указания, решения
63 Напечатано в 2010 году
Памяти А.Р.Зильбермана (25)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье З.Пятаковой и А.Пятакова*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

The McGraw-Hill Companies

Этот номер журнала «Квант» вышел
при финансовой поддержке компании
The McGraw-Hill Companies



Над пожаром – самолет

В.ВЫШИНСКИЙ, М.КУДРОВ, А.СТАСЕНКО

«**Т**О ЛЕТО БЫЛО ГРОЗАМИ ПОЛНО, / ЖАРОЙ И ДУХОЮ НЕБЫВАЛОЙ, / ... / И солнце даже в полдень было ало» (Н.Гумилев). В таких условиях высокая вероятность страшных лесных пожаров. Вот художественное описание одного из них: «Огонь шел торопливой, рокошущей лавиной, бешено неся всему смерть. Деревья, будто собираясь бежать, пытались сорваться с места, раскачиваясь и тревожа корни. Но тщетно гудели они вершинами, тщетно роняли смолистые слезы. Еще мгновение – и враз вспыхивает, подобно оглушительному взрыву, целая стена ужаснувшихся деревьев, с треском одеваются хвои в золото, и все тонет в огне. Дальше и дальше, настойчиво и властно плывет пылающая лава, и нет сил остановить ее» (из повести «Тайга» В.Я.Шишкова).

Оказывается, сила, способная остановить пожар, есть. Это – авиация. И действительно, кто кроме противопожарного самолета сможет за несколько секунд набрать десяток тонн воды из реки, озера или моря и сбросить их на пылающую полосу леса с безопасной высоты? Конечно, чем больше высота, тем безопасней. Но если забраться слишком высоко – то что долетит до земли? Рассеянное облако капелек?

Благодаря многолетнему опыту уже выработана минимальная норма: для тушения крупного лесного пожара перед его фронтом нужно создать полосу орошения порядка десяти метров шириной, причем на каждый квадратный метр площади орошения должен выпасть примерно один литр воды. Понятно, что существует оптимальная высота работы самолета такая, что, с одной стороны, ширина падающей массы воды успеет вырасти до десяти метров за счет деформации и дробления ее первоначального объема, а с другой – еще не вся масса превратится в капли, легко уносимые ветром.

Можно оценить и длину полосы орошения. Если самолет сбросит, например, три тонны воды (или $3 \cdot 10^3$ л), то при норме поверхностной плотности 1 л/м^2 и требуемой ширине полосы 10 м получим длину порядка 300 м. Но это если бы вся вода долетала до этой полосы и оседала равномерно. А если долетает только половина, то эта длина сокращается вдвое, а если треть, то... И тут уже нужно строить физико-математическую модель процессов, происходящих со сброшенной водой.

Для начала обратимся к эксперименту. В летных условиях трудно что-либо измерить внутри падающей массы воды (разве что посадить туда аквалангиста с парашютом и приборами). Однако, кое-что дают и внешние впечатляющие кино съемки (рис.1). Прежде

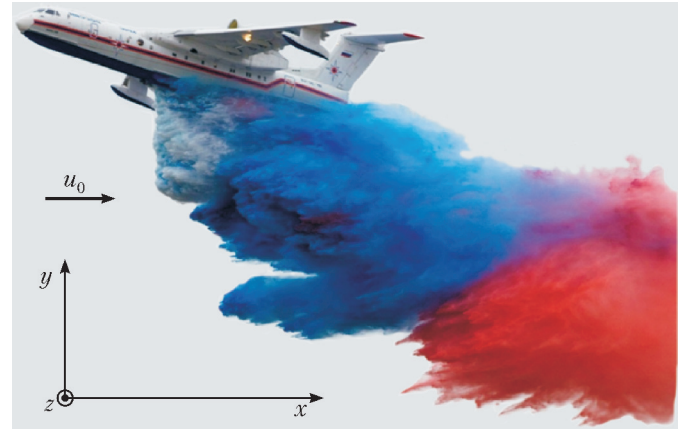


Рис. 1. Противопожарный самолет, сбрасывающий воду

всего, видно, что жидкость через некоторое время после «выпадения» из люка распадается на части (рис.2). Этот распад происходит из-за воздействия набегающего (со скоростью u_0) потока воздуха, который сплющивает жидкость в поперечном направлении.

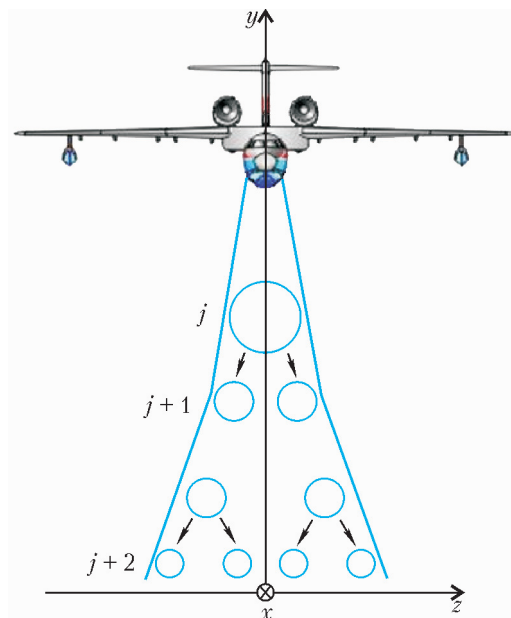


Рис. 2. Дробление жидкости при падении на землю

Жидкость дробится на части на расстоянии порядка 10 м по вертикали от самолета. В этот момент скорость падения жидкости составляет приблизительно 10 м/с , а горизонтальная скорость относительно земли почти равна скорости самолета.

Конечно, в этом процессе «почти вертикального» падения происходит интенсивный сдвиг поверхностного слоя воды. Экспериментаторы установили, что до момента дробления основного объема жидкости в виде капель уже потеряны 20–30% от начальной массы. В результате образуется широкий спектр размеров «кусков» воды – от крупных фрагментов, продолжающих разрушаться под напором воздуха, до мелкой водяной пыли, далеко простирающейся за самолетом, которая будет унесена ветром или восходящим горячим потоком от пожара.

Разумеется, нас прежде всего интересует судьба тех фрагментов первоначальной массы воды, которые должны попасть в нужное место на поверхности земли. Это похоже на проблему бомбометания, которая была решена изобретением приборов, учитывающих скорость и высоту полета, ветер, а также расстояние до цели. Только в рассматриваемом случае «бомба» имеет переменную массу и непредсказуемую форму. А как заманчиво было бы сделать этакое бортовое устройство, которое вычисляло бы, с учетом всех определяющих факторов, тот момент, когда нужно нажать кнопку сброса воды. Или еще лучше – чтобы оно само нажало такую кнопку.

В принципе, современный уровень развития аэродинамики позволяет численно решить такую задачу, да вот беда – долго ждать, пока даже самые современные компьютеры проведут вычисления. Но попробуем исследовать отдельные черты явления, пользуясь теми подсказками, которые уже представил нам летный эксперимент.

Прежде всего, выделим в струе воды, вытекающей из самолета, горизонтально-плоский фрагмент воды, который первоначально имел форму прямоугольного люка. Рассматриваемая нами жидкость обдувается встречным потоком воздуха. Используя современный пакет программ численного исследования, получим

характерную картину (рис.3), соответствующую определенному моменту времени. В нашем случае выбраны скорость полета $u_0 = 70 \text{ м/с}$ и момент времени $t = 0,27 \text{ с}$.

Конечно, на рисунке приведена только половина «вида сверху» этого слоя (в целях экономии места) – поскольку имеется вертикальная плоскость симметрии. Под рисунком приведена принятая декартова система координат: ось x направлена вдоль скорости «обдува» слоя воды (она равна скорости полета с противоположным знаком), ось z – перпендикулярна ей и лежит в горизонтальной плоскости, ось y – вертикальна. Здесь же дана цветная оцифровка значений скорости и геометрический масштаб. Стрелками показано направление скоростей воздуха. Видны истонченные концевые области сильно деформированного «прямоугольника», с которых должны особенно интенсивно срываться более мелкие фрагменты и капли. За бывшим прямоугольником видно образование вихрей, которые способствуют удержанию капель вблизи падающей массы воды.

Но эта модель плоского слоя предполагает, что кто-то насильно удерживает воду между двумя фиксированными плоскостями. В реальности уже через короткий промежуток времени оставшаяся масса воды будет сплюснута набегающим потоком воздуха и станет скорее похожа на вертикальный блин, который далее развалится на части; эти части, в свою очередь, сплющатся и развалятся и так далее – вплоть до падения на землю или полного распыления на мелкие капли (в случае очень большой высоты полета).

И тут возникает другая модель постадийного дробления (см. рис.2). Пусть на некотором этапе процесса – его номер j – водяной фрагмент имеет форму шара радиусом r_j . Сплющиваясь под напором воздуха, он превращается в блин (по-научному, эллипсоид вращения) с отношением осей $\Delta x/\Delta y = 1/10$, после чего

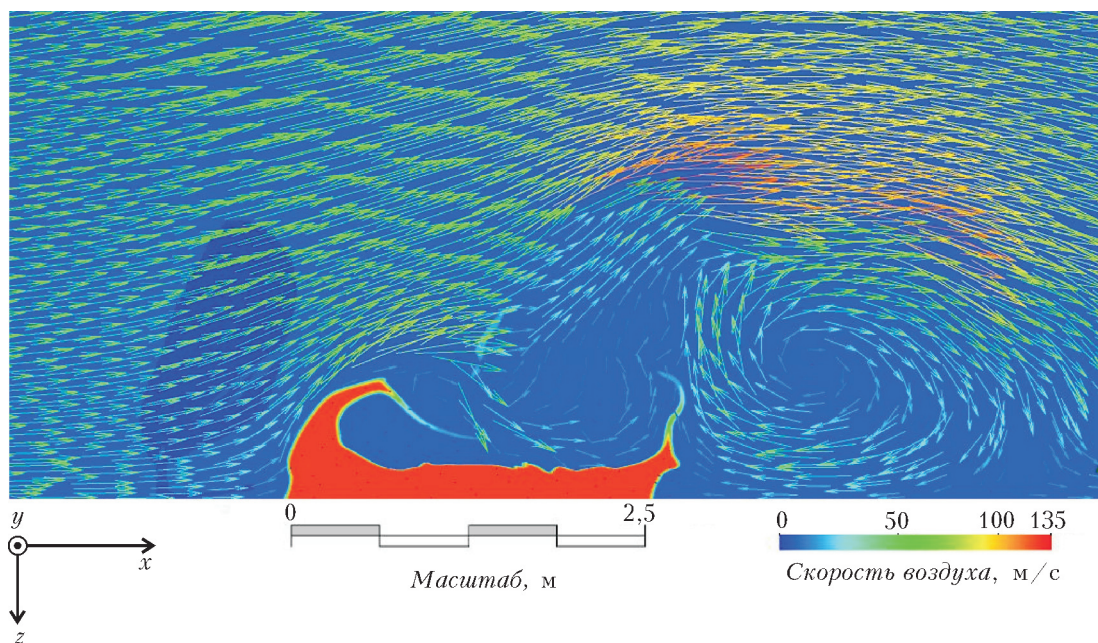


Рис. 3. Распределение скорости и образование вихря в падающем фрагменте воды

распадается на две части, каждая из которых снова принимает форму шара, теперь уже радиусом $r_{j+1} = \frac{r_j}{\sqrt[3]{2}}$, и так далее. Тот факт, что в знаменателе стоит $\sqrt[3]{2}$, соответствует предположению о достаточно малом времени распада j -фрагмента на два $(j+1)$ -фрагмента, в течение которого срыв капле пренебрежимо мал: $m_j = 2m_{j+1}$, или $r_j^3 = 2r_{j+1}^3$. Но между двумя последовательными дроблениями изменяются и масса m , и горизонтальная скорость u , и вертикальная скорость v падающего фрагмента, и, конечно, его форма – фрагмент стремится принять форму блина для последующего распада на два $(j+2)$ -фрагмента.

Строго описать все это можно, но сложно. Поэтому используем приближенные соотношения, получаемые из соображений размерности.

Уравнения второго закона Ньютона в проекциях на оси x , y примут вид (здесь индекс j опущен)

$$m \frac{du}{dt} = -CS\rho_{\text{воз}} uV,$$

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - CS\rho_{\text{воз}} vV,$$

где $V = \sqrt{u^2 + v^2}$ – модуль скорости падения фрагмента, $\rho_{\text{воз}}$ – плотность воздуха, S – поперечное сечение тела, C – безразмерный коэффициент, так называемый коэффициент сопротивления.

А что же происходит с массой воды? Примем, что скорость ее изменения во времени зависит от модуля скорости обдува, площади поперечного сечения и плотностей воздуха $\rho_{\text{воз}}$ и самой воды $\rho_{\text{воды}}$:

$$\frac{dm}{dt} = -\alpha VS\sqrt{\rho_{\text{воз}} \rho_{\text{воды}}},$$

где α , как и C , – безразмерный коэффициент.

Знак «минус» в правой части первых двух уравнений указывает на то, что сила, действующая со стороны воздуха, противоположна по направлению соответствующей компоненте скорости тела относительно воздуха (за это сила и называется силой сопротивления). А в третьем уравнении знак «минус» указывает на то, что масса убывает со временем.

Конечно, приведенная система уравнений не является результатом строго вывода. Но что поделать – даже великие физики говорят, что «... если мы хотим, чтобы от науки была какая-то польза, мы должны строить догадки...», а если вы думали, что наука достоверна, – вы ошибались» (Р.Фейнман).

А польза безусловно есть. Прежде всего, проанализируем эту систему уравнений.

В частности, из первых двух уравнений (для u и v) получается точное решение для случая падения тела в

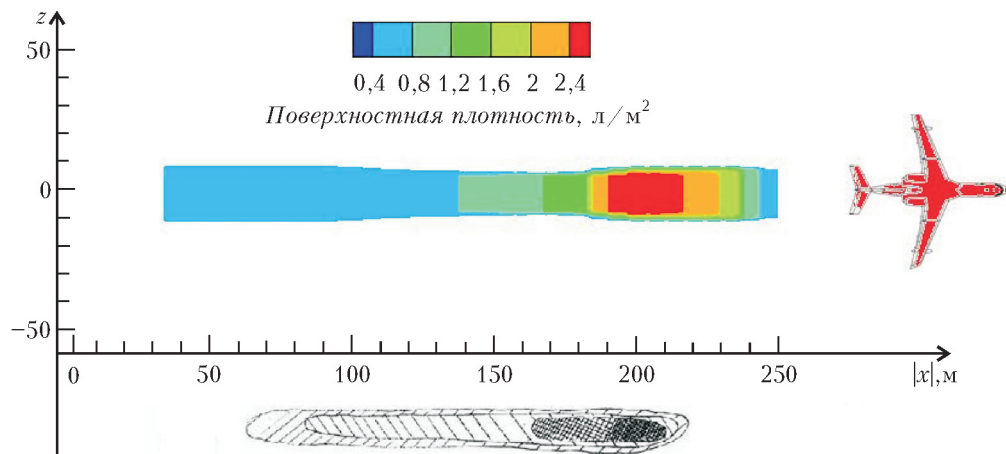


Рис. 4. Поверхностное распределение выпавшей жидкости

вакууме (когда $\rho_{\text{воз}} = 0$): $u = u_0$ (постоянная скорость полета), $v = -gt$. Отсюда для траектории получаем уравнение параболы (в параметрическом виде) $x = x_0 + u_0 t$, $y = y_0 - \frac{gt^2}{2}$ (здесь x_0 – начальная абсцисса сброса массы, y_0 – высота «полета»).

Далее, из второго уравнения (для v) видно, что если тело постоянной массы уронить с нулевой начальной скоростью ($u \equiv 0$, $V \equiv v$), то при $t \rightarrow \infty$ достигается конечная скорость падения $v_\infty = -\sqrt{\frac{mg}{CS\rho_{\text{воз}}}}$. Отсюда понятно, почему парашюты должны иметь большую площадь (S – в знаменателе!).

Разумеется, эту систему обыкновенных дифференциальных уравнений нужно решать численно, что вполне доступно бортовому компьютеру в летных условиях. Надо только подобрать подходящие значения безразмерных коэффициентов C и α из сравнения заранее проведенных экспериментов с результатами расчета. Проведя такую работу, можно быстро предсказать распределение выпавшей на почву жидкости. Один из таких расчетов приведен на рисунке 4 для следующих условий: $u_0 = 70$ м/с, $y_0 = 40$ м. Здесь же дано сравнение с экспериментально измеренным распределением (полоска внизу).

Конечно, в этой статье отображена только часть великолепной картины, богатой физическими явлениями. В ней не затронуты многие интересные вопросы. Например: почему ширина зоны орошения заметно больше ширины люка и даже фюзеляжа самолета? Тут играет роль турбулентная диффузия: элементы воздуха и жидкости участвуют в хаотическом движении, которое накладывается на их «среднее» движение, рассмотренное выше, и приводит к «размазыванию» траекторий падающих частиц. Кроме того, не учтены и такие факторы: струйно-вихревой след самого самолета, опускающийся вниз; горячий поток смеси воздуха, паров воды, углекислого газа и сажи, поднимающийся вверх; возможность бокового ветра; наконец, модель самого пожара. Но об этом лучше поговорить, когда вы поступите в Московский физико-технический институт. Чего вам и желаем.



Разбиения на домино и функции высоты

Е.КАРПОВ, К.КОХАСЬ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ РАССКАЗЫВАЕМ О ТОМ, КАК разбиения некоторых «клетчатых» фигур на «домино» (т.е. фигурки, состоящие из двух соседних клеток) могут быть истолкованы стереометрически и к каким результатам приводит эта точка зрения.

1. Ромбики на треугольной решетке

Рассмотрим плоскость, разбитую на равносторонние треугольники со стороной 1 прямыми, пересекающимися под углом 60° . Фигуру, состоящую из двух соседних по стороне треугольных клеток, будем называть доминошкой. Таким образом, доминошка – это ромб одного из трех типов (рис.1). Хотя слово «ромб» точно описывает форму этих фигурок, мы для единообразия все же предпочитаем слово «доминошка».

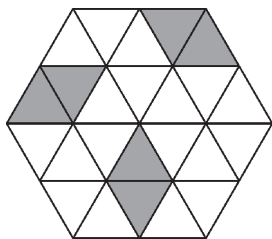


Рис.1. Доминошки на треугольной решетке

Если какая-либо фигура разбита на доминошки, можно строить новые разбиения с помощью специальных преобразований – флипов. *Флип* – это поворот шестиугольника, состоящего из трех доминошек, на 60° (рис.2). Зафиксируем на плоскости правильный шестиугольник F со стороной n . Очевидно, его можно разбить на доминошки очень многими способами. Представим себе, что мы нарисовали каждый такой способ разбиения на отдельной картинке. Спрашивается, как устроено это труднообозримое множество картинок?

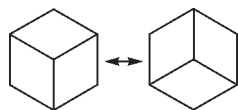


Рис.2. Флип

Нас будут интересовать следующие вопросы.

1. Верно ли, что с помощью флипов можно из любого разбиения фигуры F на домино получить любое другое?

И если да, то

2. Какое число флипов нам понадобится для самой длинной такой перестройки?

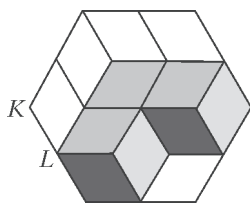


Рис.3

Ответы на эти вопросы довольно очевидны (наек: посмотрите на рисунок 3). Но мы опишем весьма технический подход к решению этой задачи. Он пригодится для ответа на аналогичные вопросы на других решетках.

Для каждого разбиения шестиугольника F на домино мы зададим функцию на узлах решетки, которую будем называть *функцией высоты* этого разбиения. Ее можно задать, например, так.

Правило построения функции высоты. Треугольная решетка состоит из прямых линий трех направлений. Ориентируем каждое из этих направлений. Будем считать, что движение по горизонтали вправо, движение влево вниз и движение влево вверх увеличивают высоту, а движение по горизонтали влево, движение вправо вверх и движение вправо вниз уменьшают высоту – см. рисунок 4, где стрелочками отмечены направления движения, увеличивающие высоту. Выберем теперь любой узел решетки и зададим в нем значение функции высоты произвольным образом. Например, пусть $h(K) = 4$ (см. рис.3). Будем двигаться по ребрам нашего разбиения и последовательно задавать высоту в узлах, полагая, что сдвиг по ребру увеличивает или уменьшает высоту на 1 по описанным правилам. Например, высоту в точке L положим равной 3, так как движение от K к L идет в направлении, понижающем высоту. Переходя от узла к узлу, мы определим функцию высоты для всех узлов фигуры F (рис.5,а).

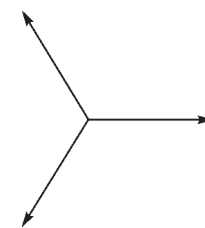


Рис.4. Направления, в которых высота растет

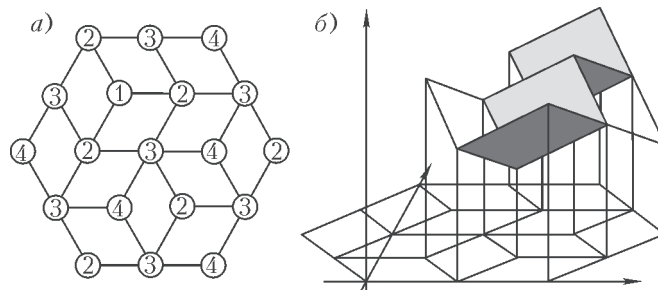


Рис.5. а) Функция высоты; б) график функции высоты

Последнее обстоятельство, впрочем, нуждается в пояснении. В правиле не указано, в каком порядке мы обходим узлы шестиугольника. В математике для всякой конструкции, имеющей произвол в определении, принято доказывать корректность этой конструкции, т.е. что ее выполнение однозначно и непротиворечиво задает конструируемый объект. Гипотетически возможна ситуация, когда, задав значение высоты в

очередном узле, мы обнаружим, что это значение нарушает правило по отношению к соседнему узлу, или, что то же самое, если обойдя какой-либо циклический маршрут на нашем разбиении (и задавая вдоль пути функцию высоты), мы вдруг обнаружим, что значение высоты в конце пути не совпадает с начальным значением. В нашем случае указанные опасения не реализуются. Действительно, заметим, что при обходе вершин каждого ромба высота задается корректно, поскольку увеличение высоты на одной стороне ромба компенсируется уменьшением высоты на противоположной стороне. А поскольку любой цикл состоит из обходов ромбов, то не может возникнуть противоречия и при обходе любого из циклов.

Любое замощение шестиугольника ромбами легко расшифровывается нашим глазом как плоское изображение трехмерной картины «коробка, частично заполненная кубиками» (см. рис.3). При этом флип – это просто добавление или вынимание кубика из коробки. Покажем, как можно воссоздать эту картинку, используя функцию высоты. Будем пользоваться обычной декартовой системой координат в трехмерном пространстве. Расположим шестиугольник F в горизонтальной плоскости (OXY) и из каждого узла решетки проведем вертикально вверх (в направлении оси OZ) отрезок, длина которого равна значению функции высоты. Соединим верхние концы отрезков, стоящих в соседних узлах нашего разбиения. Получится каркас многогранной поверхности (на рисунке 5,б эта конструкция выполнена для части замощения). Это та поверхность, которую мы *видим* на рисунке 3, фактически она представляет собой график функции высоты.

Нетрудно видеть, что значения функций высоты двух замощений, отличающихся флипом, совпадают всюду, кроме центра шестиугольничка, в котором произошел флип. Это значит, что графики этих функций высоты различаются лишь внутри того шестиугольничка, где происходил флип. Удалим совпадающие части графиков, тогда оставшиеся грани определяют некоторый многогранник, расположенный над этим шестиугольничком. Это и есть тот самый кубик, который добавляется или убирается из коробки. Рассмотрим отдельно такой кубик (рис.6, возле каждой вершины указана ее высота). Ясно, что функция высоты $h(v)$ – это фактически сумма координат вершины v , или, что то же самое, расстояние от узла v до плоскости $x + y + z = 0$, умноженное на $\sqrt{3}$. Это наблюдение оправдывает название «функция высоты».

Сделаем еще одно замечание. Мы только что описали, как по функции высоты построить «коробку, частично заполненную кубиками». А о какой коробке, собственно, идет речь? Что такое «коробка без кубиков»? Поскольку флип, соответствующий выниманию кубика, уменьшает значение функции высоты в каком-то узле, то после вынимания всех кубиков получается минимально возможная функция высоты. Таким образом, «коробка без кубиков» – это график минимально

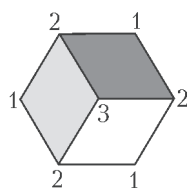


Рис.6

возможной функции высоты. Когда мы разглядываем картинку с разбиением на ромбы, наш мозг однозначно восстанавливает пустую коробку (в том числе и на тех картинках, где коробка частично заполнена), и это дает «биологическое» доказательство существования минимальной функции высоты. Докажите существование минимальной функции высоты математически (почему она единственна?).

Теперь понятно, что с помощью флипов из любого разбиения можно получить любое другое. Например, можно сначала вынуть все кубики из коробки, заданной первым разбиением, а потом добавить все кубики, которые должны быть во второй коробке. Это ответ на первый вопрос.

Количество кубиков в заполненной коробке равно n^3 . Поэтому для переделывания одного разбиения в другое потребуется не более n^3 флипов. Действительно, пусть даны две кучи кубиков A и B . Рассмотрим два возможных алгоритма: 1) убираем все кубики из кучи A , после чего кладем кубики, чтобы получилась куча B ; 2) добавляем кубики к куче A , пока коробка не заполнится, после чего вынимаем из полной коробки кубики так, чтобы осталась куча B . Вместе эти алгоритмы требуют $2n^3$ флипов. Значит, для выполнения одного из них понадобится не более n^3 флипов. С другой стороны, нельзя получить полную коробку из пустой меньше чем за n^3 флипов. Мы ответили и на второй вопрос.

2. Доминошки на клетчатой плоскости

Рассмотрим обычную клетчатую плоскость. Клетки – это единичные квадраты, а доминошкой будем называть любой прямоугольник 1×2 , состоящий из двух клеток, имеющих общую сторону. Зафиксируем прямоугольник P на клетчатой плоскости и будем рассматривать всевозможные замощения этого прямоугольника доминошками.

В этом разделе флипом будем называть преобразование, состоящее в том, что мы выбираем квадрат 2×2 , разбитый на две доминошки, и поворачиваем его на

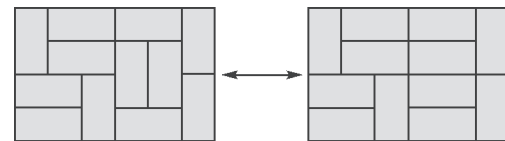


Рис.7. Два покрытия доминошками, отличающиеся одним флипом

90° (рис.7). Нас будут интересовать те же два вопроса о флипах: можно ли с их помощью перестроить любое разбиение на домино в любое другое и сколько для этого потребуется операций.

На этот раз никакой объемной картинке не видно, наше пространственное воображение молчит. Поэтому мы поступим аналогично рассуждениям из предыдущего параграфа: придумаем функцию на узлах решетки, которая будет измерять высоту какого-то пространственного объекта, и посмотрим, что, собственно, она измеряет. Функция высоты для прямоугольников впервые рассматривалась У.Тёрстоном [1].

Правило построения функции высоты. Раскрасим клетки плоскости в шахматном порядке. Пользуясь этой раскраской, построим ориентированный граф G следующим образом (рис.8,а): вершины графа – это

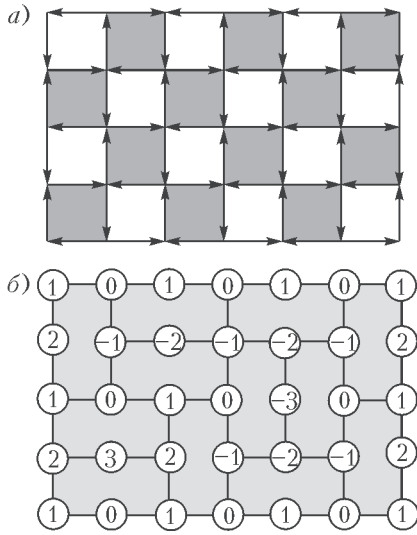


Рис.8. а) Шахматная раскраска и направленные ребра графа; б) разбиение прямоугольника на домино и его функция высоты

узлы решетки, принадлежащие прямоугольнику P , а ребра – стороны клеток; причем стороны черных клеток направлены по часовой стрелке, а белых – против часовой стрелки. Высоту задаем так: произвольно зададим высоту какого-нибудь узла, а после этого будем двигаться по сторонам доминошек нашего разбиения, полагая, что при движении по стрелке происходит увеличение высоты на 1, а при движении против стрелки – уменьшение на 1 (рис.8,б). Обойдя все узлы, мы полностью определим функцию высоты.

Корректность этого определения не вполне очевидна. Проведем эксперимент: возьмем тримино (рис.9). Пусть высота левого нижнего угла A равна 1. Обойдем

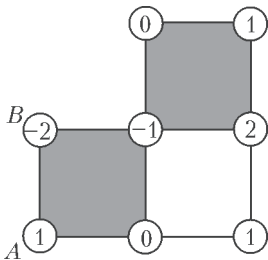


Рис.9. Тримино

границу тримино против часовой стрелки. Дойдя до вершины B , мы вдруг обнаруживаем, что на ребре BA высота задана с нарушением правила! Таким образом, данное правило построения функции высоты для некоторых фигур действительно может быть некорректным.

На самом деле, эти соображения ничего не опровергают, так как мы применяем наше правило к фигурам, разбитым на домино. Докажем, что если фигура уже разбита на домино, то правила корректно задают функцию высоты. Пусть, двигаясь по циклу и определяя функцию высоты в узлах, мы пришли к противоречию в исходном узле, т.е. при движении по циклу количество «попутных» стрелок не совпало с количеством «встречных» стрелок. Можно считать, что цикл несамопересекающийся, иначе возьмем тот из маленьких подциклов, на которые распадается цикл, на

котором тоже не удастся определить функцию высоты. Цикл ограничивает многоугольник, разбитый на доминошки. Обходя каждую доминошку по часовой стрелке, мы встречаем стрелки по движению и против движения одинаковое число раз. Получаем, что общее количество стрелок по движению совпадает с общим количеством стрелок против, но при этом все стрелки внутри многоугольника подсчитаны дважды – один раз по направлению цикла, один – против. Значит, на границе многоугольника, т.е. в исходном цикле, одинаковое количество стрелок по движению по часовой стрелке и против. Противоречие.

Функцию высоты, заданную на узлах, и ее график можно продолжить до многогранной поверхности (на рисунке 10 эта поверхность показана упрощенно: шестигульные «границы» на самом деле неплоские). Тогда

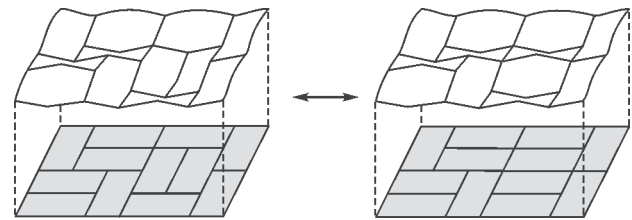


Рис.10. График функции высоты и его преобразование при флипе

для каждого флипа разность подграфиков этих поверхностей до и после флипа определяет некоторый многогранник – «кирпич», аналог кубика из п. 1. Чтобы понять, как выглядит этот кирпич, рассмотрим квадрат 2×2 , разбитый на домино двумя способами (рис.11).

Расположим наш квадрат 2×2 в горизонтальной плоскости OXY . Для каждого узла на рисунке 11 рассмотрим точку в трехмерном пространстве, у которой аппликата (т.е. z -координата) равна значению

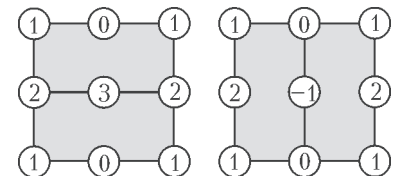


Рис.11. Флип в квадрате 2×2 и функция высоты

функции высоты в этом узле. Мы построили 10 точек. Они определяют многогранник, изображенный на рисунке 12 (закрашенные грани проектируются в контур квадрата). Это и есть наш «кирпич». Сторонам исходного квадрата 2×2 соответствуют некоторые грани «кирпича» (потому что высота в серединах сторон квадрата отличается от высоты в вершинах), на рисунке эти грани закрашены.

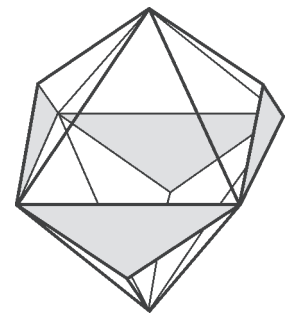


Рис. 12

Американские математики Элвис, Ларсен, Куперберг и Пропп, написавшие фундаментальную статью о разбиениях на домино [2], заметили, что с точностью до некоторой деформации графика функции высоты можно считать, что «кирпич» – это параллелепипед $2 \times 2 \times 1$. Точнее,

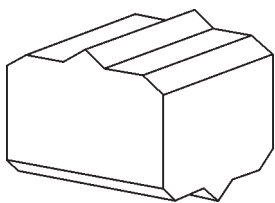


Рис.13. Граненый кирпич

это параллелепипед, у которого сделаны выступы на средних линиях граней и скосы на ребрах (рис.13). Благодаря этим выступам мы не можем, к примеру, положить один кирпич на другой – выступы мешают плотной укладке. Кирпичи приходится укладывать друг на друга со сдвигом, как это делают в обычной кирпичной кладке, – выступающие части кирпичей накладываются на скошенные ребра и в результате кирпичи плотно прилегают друг к другу. При взгляде на кирпич сверху мы воспринимаем выступ как линию, разбивающую квадратную грань кирпича на две доминошки. Поэтому любая куча плотно уложенных кирпичей сверху выглядит как разбиение некоторой фигуры на домино.

Функция высоты, которую мы определили выше, обладает таким свойством: если f и g – две функции высоты, то $\min(f, g)$ – тоже функция высоты (докажите!). Отсюда следует, что существует минимальная функция высоты. Благодаря этому обстоятельству выполнение флипов можно интерпретировать как заполнение кирпичами некоторой «коробки». Пустая коробка – график минимальной функции высоты – имеет довольно хитрую форму: что-то вроде октаэдра. На рисунке 14 показана часть «пустой коробки»,

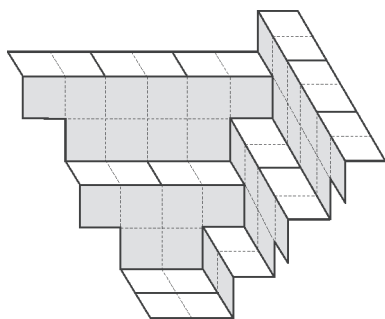


Рис.14. Коробка для замощений домино прямоугольника 8×6

соответствующей прямоугольнику 8×6 . Чтобы не усложнять картинку, выступы и скосы не показаны, за исключением тех, что разделяют горизонтальные поверхности коробки на доминошки. Вид сверху на ту же коробку показан на рисунке 15 (закрашены те части коробки, которые не показаны на рисунке 14, указана высота, на которой находятся горизонтальные части коробки).

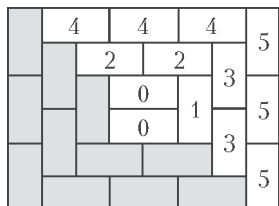


Рис.15. Коробка. Вид сверху

На примере коробки для квадрата 6×6 опишем процесс заполнения пустой коробки по слоям (рис.16, всюду отмечены высоты видимых граней). В самый нижний ряд пустой коробки можно положить лишь 1 кирпич (рис. 16,а); здесь и на следующих рисунках место, куда мы кладем кирпичи, подкрашено. Во второй ряд помещается $1 \times 2 = 2$ кирпича (рис.16,б), в третий – $2 \times 2 = 4$

кирпича (рис.16,в), в четвертый – $2 \times 3 = 6$ кирпичей (рис.16,г), наконец, в пятый ряд можно положить $3 \times 3 = 9$ кирпичей (рис.16,д). Но это еще не все. Хотя коробка заполнена, мы можем продолжать класть кирпичи сверху так, чтобы они образовывали «горку», симметричную уже уложенным кирпичам. Поэтому в шестой ряд можно положить $3 \times 2 = 6$ кирпичей (рис.16,е), в седьмой – $2 \times 2 = 4$ кирпича (рис.16,ж), в восьмой – $2 \times 1 = 2$ кирпича (рис.16,з) и в девятый ряд на вершину всей этой пирамиды – $1 \times 1 = 1$ – последний кирпич (рис.16,и). Заполненная коробка «с горкой» изображена на рисунке 16,к.

Благодаря интерпретации с заполнением коробки ясно, что с помощью флипов любое замощение можно перестроить в любое другое. Сколько же для этого потребуется флипов? Проведем вычисление для квадрата $2n \times 2n$.

Лемма 1. *Наибольшее количество кирпичей в конфигурации, построенной по разбиению квадрата $2n \times 2n$ на домино, равно $n(2n - 1)(2n + 1)/3$.*

Доказательство. Выше мы подробно описали процесс заполнения пустой коробки для квадрата 6×6 . В случае квадрата произвольного размера по аналогичным соображениям суммарное количество кирпичей равно

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n - 1)n + n^2 + n(n - 1) + \dots + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1.$$

Теперь требуемую формулу читатель легко докажет с помощью метода математической индукции.

Как и в предыдущем параграфе, из утверждения леммы следует, что для перестройки одного разбиения квадрата $2n \times 2n$ на домино в другое потребуется не более $n(2n - 1)(2n + 1)/3$ флипов.

3. Крепости Янга

Теперь рассмотрим более экзотическую решетку. Возьмем обычную клетчатую плоскость и в каждой клетке проведем диагонали (рис.17). Плоскость оказалась разбитой на равнобедренные прямоугольные треугольники. Зафиксируем терминологию: эти треугольники мы теперь будем называть *клетками*. Исходную квадратную решетку будем называть *базовой квадратной решеткой*. Фигуру, состоящую из двух соседних клеток, – т.е. треугольник \blacktriangle или ромб \blacklozenge – будем называть *доминошкой*. Таким образом, в этом параграфе слово «доминошка» имеет совсем не то значение, к которому мы привыкли: это не прямоугольничек 1×2 , а совершенно другая фигура – ромб или треугольник, состоящий из двух маленьких треугольничков. Чтобы лишний раз подчеркнуть нетипичный смысл этого слова, мы всюду ниже будем выделять его курсивом. Итак, мы будем рассматривать разбиения некоторых фигур на доминошки.

Фигуры, разбитые на доминошки, мы будем преобразовывать с помощью флипов. *Флип* – это преобразование одного из двух типов:

- Поворот на 90° квадрата, состоящего из двух *треугольных доминошек*. $\blacktriangle \leftrightarrow \blacktriangle$

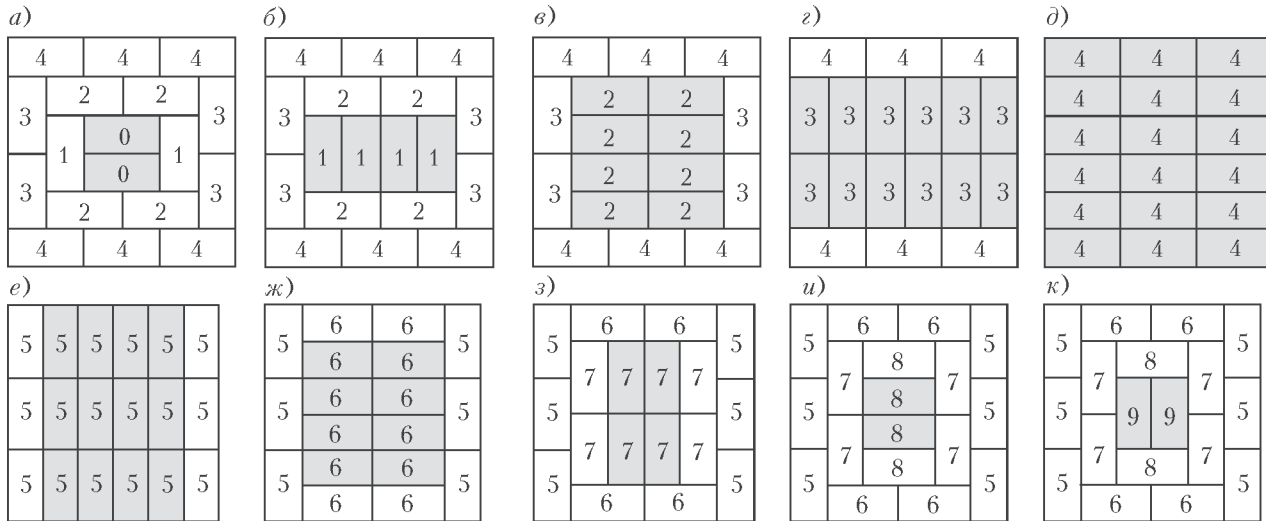


Рис.16. Последовательное заполнение коробки

• Замена двух средних линий ромба, состоящего из четырех ромбических доминошек, на две диагонали этого ромба (в результате получается ромб, разбитый на четыре треугольные доминошки) или наоборот. Такое преобразование возможно, только если центр ромба находится в узле базовой квадратной решетки.



Будем рассматривать следующие фигуры. Возьмем на базовой квадратной решетке квадрат $N \times N$ и, проходя вдоль каждой его стороны, добавим на каждом втором единичном отрезке границы выступающую наружу четвертинку квадратика. Получится фигура, напоминающая чертеж крепости (выступающие треугольники – это «бастионы»). Ее мы так и будем называть – крепость Янга (в честь первого, кто систематически исследовал разбиения этих фигур на домино [3]). При нечетном n имеется два вида крепостей (рис.17), при четном – один вид (с точностью до поворотов).

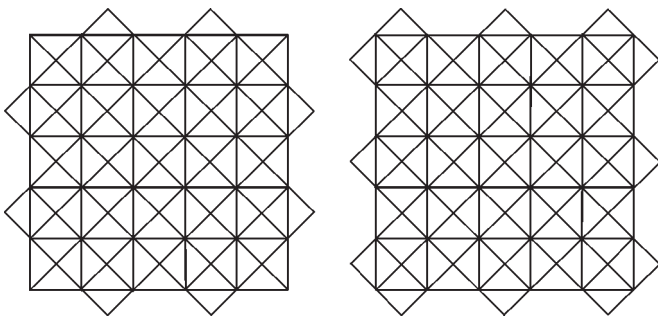


Рис.17. Два варианта крепости порядка 5

Крепости интересны тем, что для них подсчитано, сколькими способами их можно разбить на домино. Ответ фантастический. Крепость размера $2N \times 2N$ можно разбить на домино 5^{N^2} способами! Для нечетных размеров ответ немного похуже. Например, крепость размера 2011×2011 без угловых бастионов (как на рисунке 17 слева) разбивается на домино $2 \cdot 5^{1006 \cdot 1005}$ способами. К сожалению, доказать это непросто, хотя доказательство элементарно. Для более

простых фигур на этой решетке, например для квадратов или ромбов, хороших формул для числа разбиений, по-видимому, нет.

Чтобы не увязнуть в деталях конструкций, зависящих от четности, ограничимся рассмотрением крепостей нечетного размера без угловых бастионов (см. рис.17, слева). Для других крепостей утверждения, приводимые ниже, аналогичны.

Нас интересуют все те же два вопроса о флипах.

Зафиксируем какое-либо разбиение крепости на домино. Функция высоты для этого разбиения задается следующим образом.

Правило построения функции высоты. Раскрасим узлы базовой квадратной решетки в синий и оранжевый цвета в шахматном порядке (рис.18). Произвольно зададим высоту какого-нибудь узла, а после этого будем двигаться по сторонам доминошек нашего разбиения, полагая, что

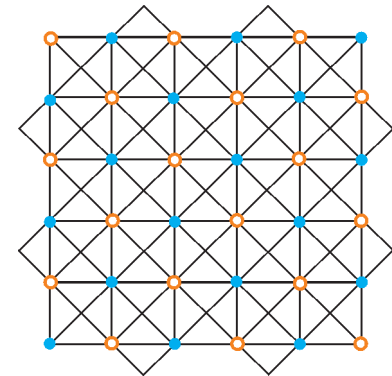


Рис.18. Раскраска узлов крепости

при движении по диагонали высота не меняется, при движении по вертикали или горизонтали от синей вершины к оранжевой высота возрастает на 1, а при движении от оранжевой к синей – убывает на 1.

Теорема 1. Правила корректно задают функцию высоты для любого разбиения крепости.

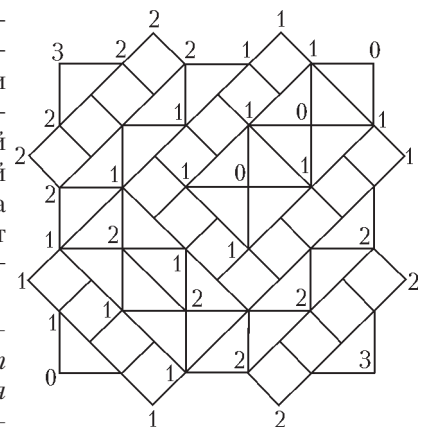


Рис.19. Функция высоты

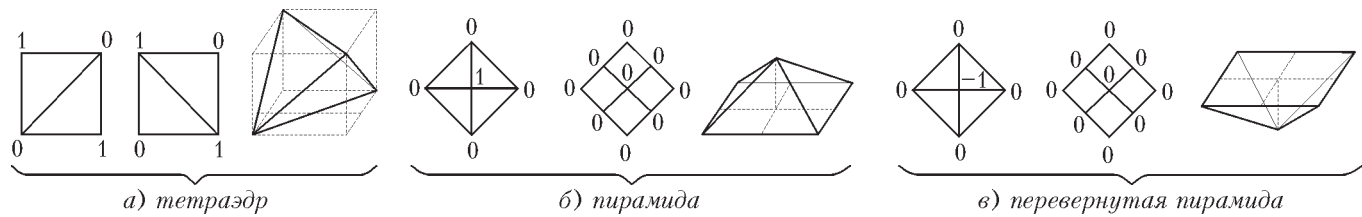


Рис.20. Три вида кирпичей для крепости Янга

Докажите это самостоятельно.

Заметим, кстати, что конструкции, с помощью которых мы задавали функции высоты, не являются единственно возможными. Например, если мы уже придумали трехмерную модель, ничто не мешает повернуть ее в пространстве. В результате высоты всех точек изменятся довольно хитро и комбинаторное правило, задающее функцию высоты, может стать совершенно неудобоваримым.

Теперь, когда функция высоты задана, мы можем сконструировать «кирпичи», соответствующие флипам. Как и в предыдущем параграфе, рассмотрим фигуру (квадрат из двух доминошек или ромб из четырех доминошек), в которой выполняется флип, и для каждого узла этой фигуры построим точку в трехмерном пространстве, у которой z -координата равна значению функции высоты в этом узле. Построенные точки определяют некоторый многогранник. Флипу первого вида соответствует тетраэдр, а флипам второго вида – четырехугольная пирамида (рис.20).

Итак, выполнение флипа – это добавление или вынимание кирпича из некоторой коробки, где под коробкой мы, как и раньше, понимаем график минимальной функции высоты. Разбиение на домино, соответствующее пустой коробке, показано на рисунке 21 слева; полной коробке (т.е. максимальной функции высоты) соответствует разбиение на рисунке 21 справа. Как видим, у нашей коробки две противополож-

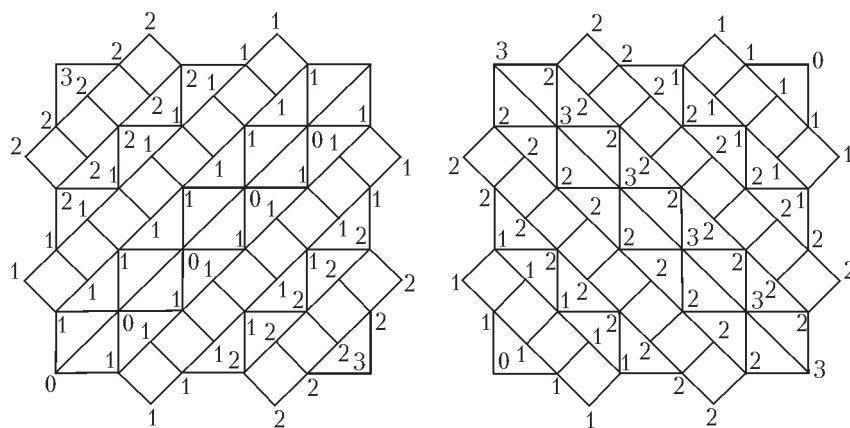


Рис.21. Пустая и заполненная коробки

ные вершины крепости расположены низко (на высоте 0), а две другие – высоко (на высоте 3). Таким образом, коробка для кирпичей по форме близка к тетраэдру (сравните с рисунком 20,а). Несколько примеров заполнения коробки показаны на рисунках 23–27.

Опишем процесс заполнения пустой коробки по слоям на примере коробки 5×5 . Самое низкое место в пустой коробке – это диагональ, идущая слева снизу вправо вверх (рис.21, слева). Положим вдоль этой диагонали 5 тетраэдров, верхние ребра тетраэдров находятся на высоте 1 (рис.22,а; на рисунке 25 показано, как выглядит коробка, когда добавлен один тетраэдр). На диагонали осталось 6 точек, находящихся на высоте 0. С крайними мы ничего сделать не сможем, а остальные 4 точки накроем перевернутыми пирамидами (кирпичи третьего вида, см. рис.20,в), получится большая плоская площадка на высоте 1 (рис.22,б). На этой площадке мы можем поставить 6 пирамид (кирпичи второго вида, см. рис.20,б), вершины пирамид должны находиться над отмеченными узлами. Другое размещение пирамид тут невозможно, потому что, как мы отмечали, центр ромба, где происходит соответствующий флип, должен лежать на базовой квадратной сетке; если же, к примеру, сделать флип в ромбе с центром на рассматривавшейся диагонали, то это приведет к удалению одной из только что уложенных перевернутых пирамид (рис.26). Итак, добавив 6 пирамид, мы получили картинку, изображенную на рисунке 22,в. Добавленные пирамиды соприкасаются друг с другом и с коробкой ребрами на высоте 1, положим на эти ребра тетраэдры: 9 тетраэдров на ребра, идущие в одном диагональном направлении, и 4 – на ребра второго диагонального направления; результат показан на рисунке 22,г.

Оставшиеся внутри площадки вершины на высоте 1 накроем 6 перевернутыми пирамидами, получится большая плоская площадка на высоте 2 (рис.22,д). На эту площадку мы ставим 4 пирамиды с вершинами, расположенными над отмеченными узлами, результат показан на рисунке 22,е. Если теперь закрыть ребра, лежащие на высоте 2, пятью тетраэдрами, получится заполненная коробка (см. рис. 21, справа).

Вся эта конструкция напоминает укладывание яиц в коробку: сначала кладут подложку с лунками для яиц, потом кладут сами яйца, а сверху их закрывают перевернутой подложкой и т.д.

Для подсчета количества флипов нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. $1 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-2) + 3 \cdot (n-3) + \dots$

$$\dots + (n-2) \cdot 2 + (n-1) \cdot 1 = (n-1)n(n+1)/6.$$

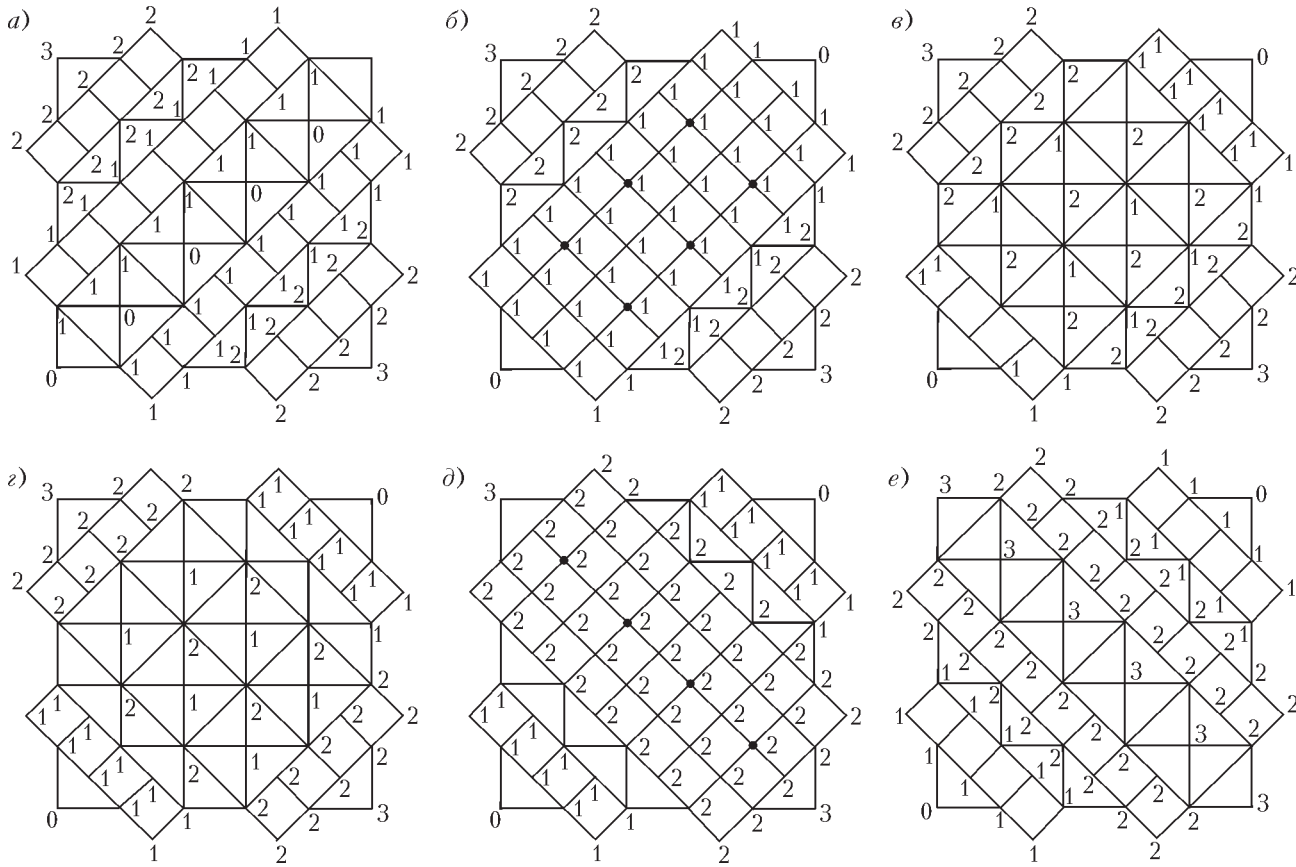


Рис.22. Заполнение коробки Янга по слоям

Доказательство. Обозначим эту сумму через S и запишем ее так:

$$S = 1 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-2) + 3 \cdot (n-3) + \dots \\ \dots + (n-2) \cdot (n-(n-2)) + (n-1) \cdot (n-(n-1)).$$

Раскроем скобки:

$$S = 1 \cdot n - 1 + 2 \cdot n - 2 \cdot 2 + 3 \cdot n - 3 \cdot 3 + \dots$$

Соберем все положительные слагаемые вместе и вынесем n за скобку, все отрицательные слагаемые тоже соберем вместе:

$$S = n \cdot (1 + 2 + \dots + (n-1)) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2).$$

Воспользуемся известными соотношениями:

$$1 + 2 + \dots + (n-1) = n(n-1)/2,$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = (n-1)n(2n-1)/6.$$

Получится как раз доказываемая формула. Лемма 2 доказана.

Напомним, что мы рассматриваем крепости Янга при нечетном N .

Теорема 2. Любое замощение крепости Янга может быть перестроено в любое другое замощение при помощи не более чем $(N+1)(2N^2 - 2N + 3)/6$ плиток. Эта оценка точная.

Доказательство. Как и в случае коробки с кубиками из п. 1, всего лишь нужно проверить, что «полная

коробка» содержит $(N+1)(2N^2 - 2N + 3)/6$ кирпичей. Напомним, что в нашей модели кирпич – это четырехугольная пирамида вершиной вверх, пирамида вершиной вниз или тетраэдр.

Выше мы подробно описывали процесс заполнения коробки (см. рис.22). В общем случае сначала в пустую коробку кладется один ряд из N тетраэдров. Далее они закрываются одним рядом из $(N-1)$ перевернутых пирамид. На образовавшуюся горизонтальную площадку ставят два ряда из $(N-2)$ обычных пирамид. Далее на них кладутся три ряда из $(N-2)$ тетраэдров (над каждым диагональным ребром, идущим слева снизу вправо вверх) и два ряда из $(N-3)$ тетраэдров (над каждым диагональным ребром, идущим слева сверху вправо вниз) и т.д.

Подсчитаем количество пирамид. Перевернутых пирамид будет $1 \cdot (N-1) + 3 \cdot (N-3) + \dots$. Обычных пирамид $2 \cdot (N-2) + 4 \cdot (N-4) + \dots$. При нечетном N это одинаковые суммы, они отличаются только порядком слагаемых. Обозначим количество пирамид каждого вида через P . Тогда

$$2P = 1 \cdot (N-1) + 3 \cdot (N-3) + \dots$$

$$\dots + 2 \cdot (N-2) + 4 \cdot (N-4) + \dots =$$

[переставляем слагаемые местами]

$$= 1 \cdot (N-1) + 2 \cdot (N-2) + 3 \cdot (N-3) + 4 \cdot (N-4) + \dots$$

По лемме 2 это число равно $(N-1)N(N+1)/6$.

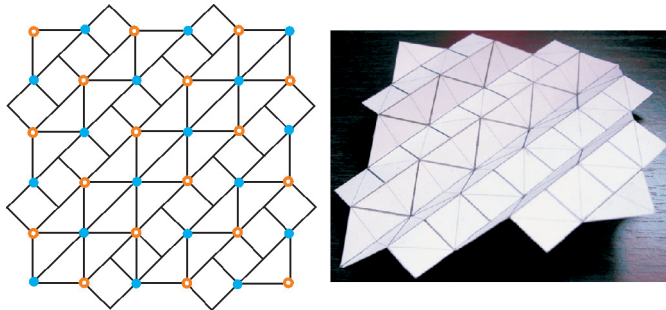


Рис.23. Пустая коробка. Диагональ, идущая с Ю-З на С-В, находится на высоте 0, два ряда из восьми квадратов находятся на высоте 1, два ряда из четырех квадратов находятся на высоте 2, вершины на С-З и Ю-В находятся на высоте 3

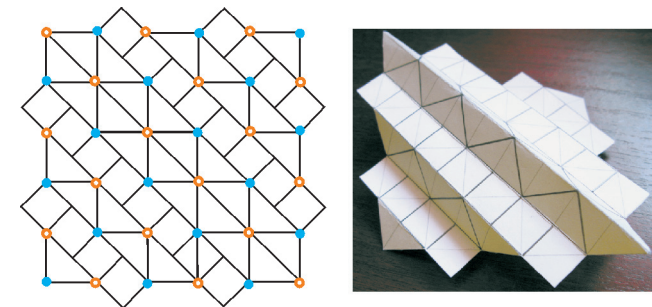


Рис.24. Заполненная коробка. Диагональ с С-З на Ю-В находится на высоте 3, и высота уменьшается до 0 в вершинах на Ю-З и С-В

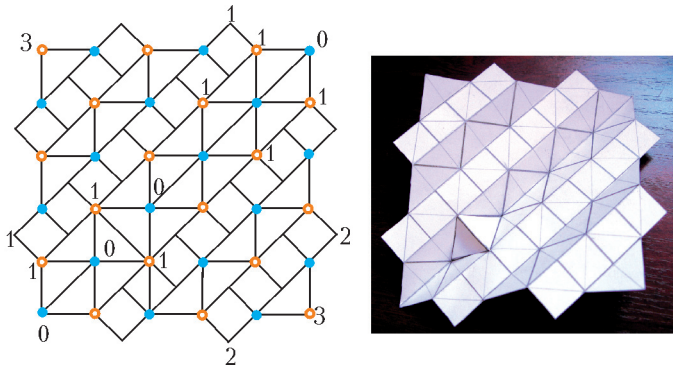


Рис.25. Здесь в центральную «канаву» вставлен тетраэдр, в результате ребро стало повернутым на 90° (флип первого типа)

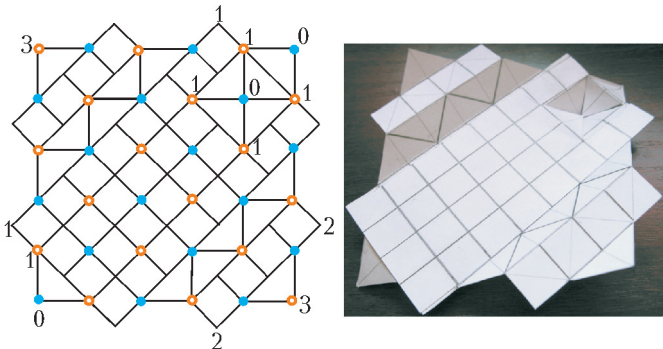


Рис.26. В левом нижнем углу точка находится на высоте 0, верхняя сторона прилегающего к ней треугольника — на высоте 1, прямоугольник 8×4 находится на высоте 1. В правом верхнем углу вынута пирамида, и вершина находится на высоте 0, а края пирамиды — на высоте 1 (флип второго типа)

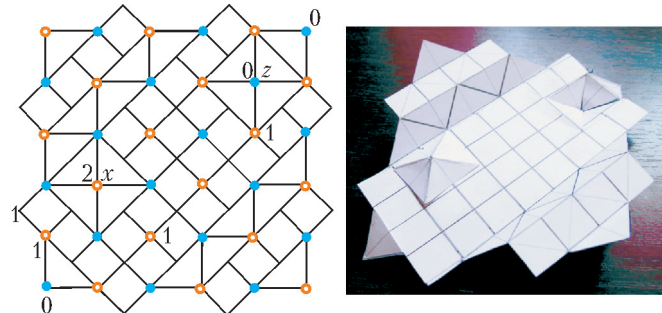


Рис.27. Одна пирамида выступает слева (ее вершина x на высоте 2), а одна вынута справа (ее вершина z на высоте 0). Большая площадка из квадратов находится на высоте 1

Теперь вычислим количество тетраэдров. Обозначим его через T . Как следует из описания заполнения коробки,

$$T = 1 \cdot N + (3 \cdot (N - 2) + 2 \cdot (N - 3)) + \\ + (5 \cdot (N - 4) + 4 \cdot (N - 5)) + \dots \\ \dots + ((N - 2) \cdot 3 + (N - 3) \cdot 2) + N \cdot 1.$$

В каждой скобке второе слагаемое запишем чуть иначе, увеличив его второй множитель на 2: вместо $2 \cdot (N - 3)$ напишем $2 \cdot (N - 1) - 4$, вместо $4 \cdot (N - 5)$ напишем $4 \cdot (N - 3) - 8$ и т.д. Кроме того, для единообразия к самому последнему слагаемому — оно имеет вид $N \cdot 1$ — добавим нулевое слагаемое, получится $N \cdot 1 + (N - 1) \cdot 0$; но при этом добавленное нулевое слагаемое модернизируем в стиле предыдущих преобразований — получится $N \cdot 1 + (N - 1) \cdot 2 - 2 \cdot (N - 1)$. В результате формула примет вид

$$T = 1 \cdot N + 2 \cdot (N - 1) + 3 \cdot (N - 2) + \dots \\ \dots + N \cdot 1 - (4 + 8 + 12 + \dots + 2 \cdot (N - 1)).$$

Положительные слагаемые в правой части по лемме дают сумму $N(N+1)(N+2)/6$, а отрицательные — учетверенную сумму последовательных натуральных чисел от 1 до $(N-1)/2$, которая равна $(N-1)(N+1)/8$. Итого: $T = (N+1)(N^2 - N + 3)/6$. А общее число кирпичей равно $2P + T = (N+1)(2N^2 - 2N + 3)/6$. Теорема 2 доказана.

Литература

1. W.P. Thurston. *Conway's tiling group* // American Mathematical Monthly. 1990. V. 97. Pp. 757–773.
2. N. Elkies, G. Kuperberg, M. Larsen, J. Propp. *Alternating sign matrices and domino tilings* // Journal of Algebraic Combinatorics. 1992. V. 2.
3. Bo-Yin Yang. *Three enumeration problems concerning Aztec diamonds* // Ph.D. thesis. Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology. Cambridge, Massachusetts, 1991.



О муарах, ОЖИВШИХ ИЛЛЮСТРАЦИЯХ И ПОЛЬЗЕ МОДЕЛЕЙ

З.ПЯТАКОВА, А.ПЯТАКОВ

В НАШЕ ВРЕМЯ ЭЛЕКТРОННЫЕ КНИГИ ВСЕ СИЛЬНЕЕ теснят своих бумажных собратьев, но те так просто сдавать позиции не намерены. Недавно появились книжки с картинками, «оживающими» в тот момент, когда читатель начинает перелистывать их страницы (рис.1). От старой доброй книги подобных



Рис. 1. Книжки с «оживающими» картинками

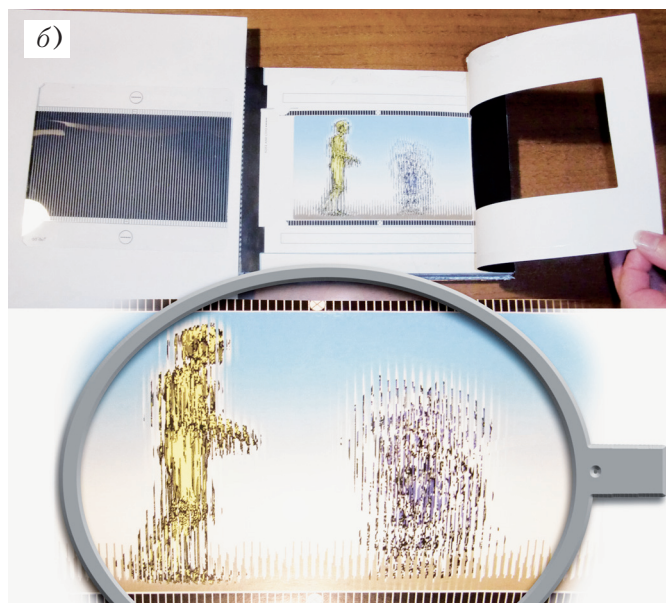
способностей, казалось бы, никак нельзя ожидать. Неудивительно, что за рубежом эти книги уже стали лидерами продаж. На полках наших книжных магазинов книжки такого типа пока еще не появились, но



Рис. 2. Как же устроена «оживающая» картинка?

читатель может легко найти их в Интернете по ключевому слову Scanimation.

В наши руки попал экземпляр такой книги, оживляющей героев сериала «Звездные войны», и мы не смогли удержаться, чтобы не посмотреть, что там внутри. С помощью лезвия бритвы мы разделили слои, из которых была склеена страница книги (рис.2,а). Оказалось, что под прозрачной пленкой с нанесенной на ней решеткой из вертикальных черных линий скрывается рисунок, в котором можно угадать первоначальный образ иллюстрации, но при пристальном разгля-



дывании становится заметно, что он состоит из серий вертикальных полос (рис.2,б; вставка). Эти серии полос соответствуют различным фазам движения объекта. Если снова наложить прозрачную пленку с вертикальной штриховкой на рисунок и начать двигать ее (рис.2,в), то картинка оживет, и фигуры начнут свое движение.

Вам ничего это не напоминает?

Отвлечемся от космических баталий и зайдем в тихую комнату, на окнах которой висят легкие тюлевые занавески. Посмотрите, что будет, если наложить шторы одна на другую, – возникнет переменчивая картина из светлых и темных областей. Такие картины называются *муарами* – от красивого французского слова *moiré*, означающего ткань с разводами, перемежающуюся на свету различными оттенками. Муары возникают всегда, когда накладываются друг на друга периодические структуры, будь то нити полотна, решетки изгороди или зубья расчески (рис.3).

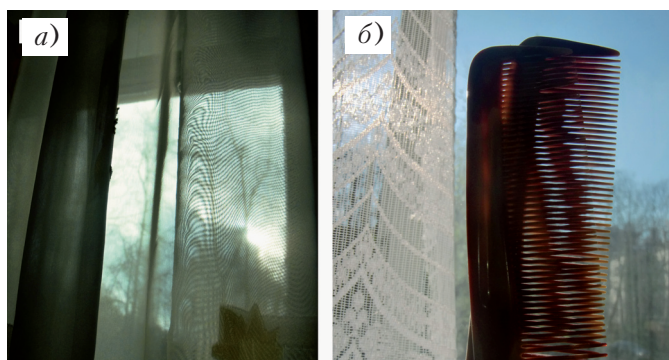


Рис.3. Возникновение муаров

Муары могут наблюдать и пользователи компьютера – при рассматривании в мелком масштабе полосатых рисунков откуда ни возьмись появляются кольца, причем при изменении масштаба рисунка размеры колец меняются. Для дизайнеров и фотографов муары превращаются в досадную помеху, с которой они стараются разными методами бороться.

Мы предлагаем читателю создать свои узоры и поэкспериментировать с ними, а чтобы это не было пустой забавой, заодно промоделировать с помощью муаровых узоров явления интерференции волн. Действительно, у муаров и электромагнитных волн есть одно общее свойство – периодичность. Так, в электромагнитной волне периодически меняются в пространстве и во времени электрическое и магнитное поля, а для муара характерна периодичность в пространстве. Если в некоторой области пространства встречаются две волны, то происходит наложение волн друг на друга, подобно тому, как накладываются друг на друга две гребенки (см. рис.3,б). И при определенных условиях возникает интерференционная картина с характерным чередованием максимумов и минимумов интенсивности. Таким образом, для объяснения интерференции можно пользоваться моделью муаров. Правда, здесь нужно сделать небольшую оговорку – обычно для света характерна гармоническая, т.е. синусоидальная зависимость напряженности поля от времени и коорди-

наты, в нашем же случае мы рисуем решетки с резкими краями и изменение происходит только в пространстве. Но в принципе нам ничто не мешает нарисовать и синусоидальное распределение интенсивности – картина муаров существенно не изменится, только станет менее резкой.

Ну, а теперь приступим к опытам. Распечатаем периодические системы штрихов (рис.4,а) или концентрических колец (рис.4,б) сначала на прозрачной

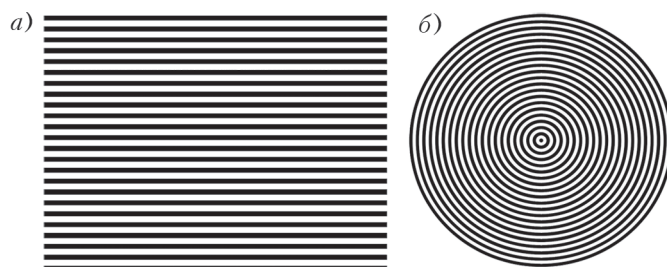


Рис.4. Периодические структуры штрихов и колец

пленке, а затем на бумаге. Наложим эти две распечатки – прозрачную и непрозрачную – друг на друга под различными углами, и мы увидим неоднородное распределение плотности штрихов (рис.5).

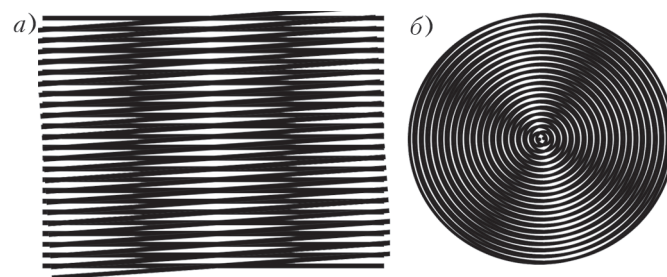


Рис.5. Муаровая модель интерференции плоских и сферических волн

Те же самые опыты можно проводить даже без печати картинок на пленке, а просто разглядывая их на экране компьютера в каком-либо графическом редакторе, позволяющем работать с отдельными объектами и прозрачностью. Поворачивая решетки друг относительно друга, можно наблюдать, как меняется картина.

Отметим, что случай параллельных линий моделирует интерференцию плоских волн, а системы концентрических окружностей – интерференцию сферических волн. На этих моделях легко увидеть, как зависит интерференционная картина от угла между плоскими волнами (см. рис.5,а) и от расстояния между точечными источниками (см. рис.5,б). Чем ближе друг к другу направления распространения волн или места расположения точечных источников, тем шире интерференционные полосы (рис.6). Этот факт хорошо известен, но, тем не менее, не очень хорошо укладывается в сознании человека, только начавшего изучать явление интерференции волн. Муаровая модель позволяет прочувствовать эти закономерности «на кончиках пальцев».

Заметим еще одно свойство муаров (см. рис.6): муаровые узоры намного крупнее, чем породившая их структура. Это обстоятельство с успехом используется

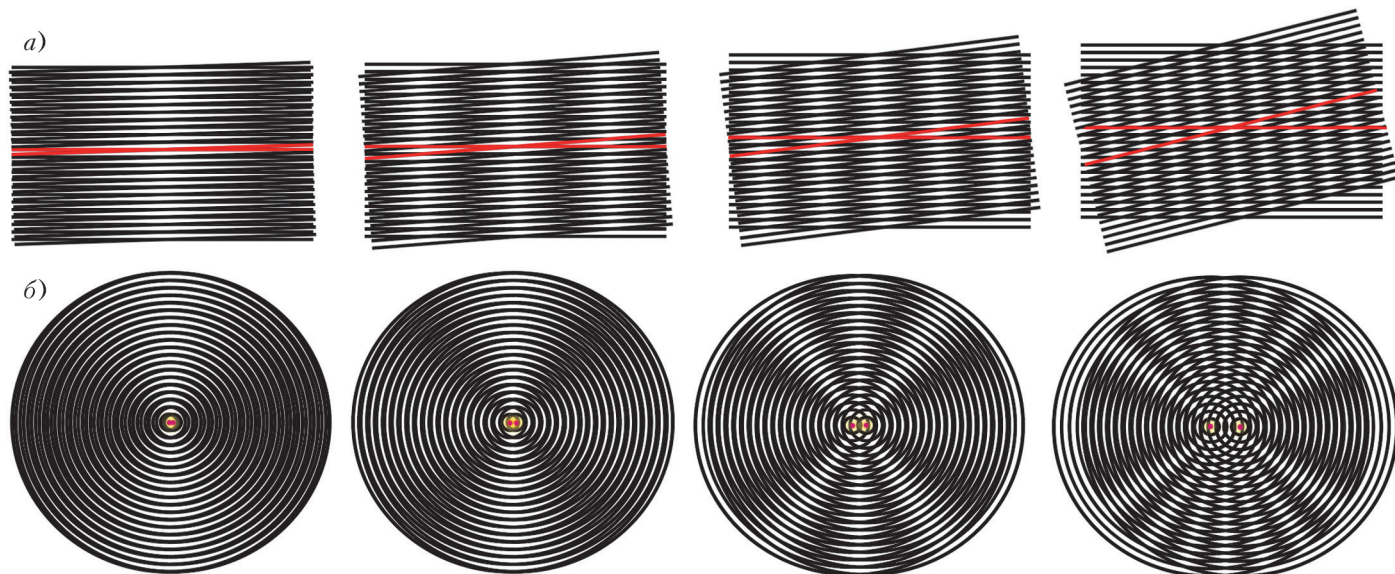


Рис.6. Взаимное расположение источников света и ширина интерференционных полос

в современной микроскопии сверхвысокого разрешения. Представим себе, что мы хотим изучить поверхность с таким мелким рельефом, что в обыкновенный оптический микроскоп увидеть ее уже нельзя. И тут на помощь приходит эффект муаров: если осветить объект излучением с периодическим распределением интенсивности в пространстве, т.е. так, чтобы световое пятно само образовывало решетку из темных и светлых полос, то эти две решетки (рельеф и подсветка) дадут крупную муаровую картину, которую легко увидеть в микроскоп. Правда, нужно еще уметь отделить само изображение от муаров. Однако, зная структуру подсветки, а также сняв кадр при однородном освещении, с помощью вычислений можно получить изображение поверхности с разрешением, вдвое превосходящем возможности микроскопа. Конечно, объем вычислений при обработке изображений будет значителен, но в наш цифровой век это никого не смущает.

А можно ли с помощью муаров делать количественные расчеты интерференционных картин? К сожалению, здесь все не так просто. Электромагнитная волна, в отличие от муаров, меняется и в пространстве и во времени, и разности хода двух волн в одной точке пространства нельзя однозначно поставить в соответствие какое-либо расстояние на картине муаров. В то же время для понимания качественных закономерностей интерференционных картин муары вполне помогают.

Наконец, муары позволяют разобраться в одном из самых сложных вопросов физической оптики: в понятии когерентности. Напомним, что волны называются когерентными, если разность фаз возбуждаемых волнами колебаний остается постоянной во времени. Попробуем сопоставить понятию когерентности наглядные образы с помощью все той же муаровой модели.

Нарисуйте на прозрачной пленке (или в графическом редакторе) несколько коротких элементов решеток со случайным расстоянием между ними (рис.7,а) или повернутыми на небольшой случайный угол друг относительно друга (рис.7,б). Здесь важно, чтобы рассто-

яние между системами решеток или угол, на который они повернуты, были именно случайными величинами, т.е. не подчинялись никакому заранее заданному закону. Если наложить такие решетки друг на друга, то уже не будет видно четкой интерференционной картины с определенным периодом, а получится некоторое среднее распределение освещенности (рис.7,в, г). В таком случае говорят, что волны являются некогерентными, причем определить на глаз причину некогерентности нельзя. Но в случае с рисунками 7,в и 7,г все же понятно, что причины, вызвавшие некогерентность, разные.

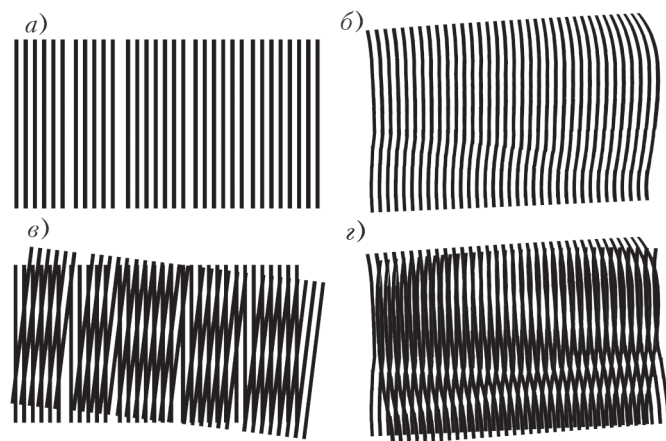


Рис.7. Иллюстрация нарушения когерентности на модели муаров

Обычно выделяют два вида когерентности – пространственную и временную. Пространственная когерентность означает, что разность хода волн, излученных *разными точками* протяженного источника *в один и тот же момент* времени, остается постоянной во времени. Временная когерентность означает, что разность хода волн, излученных *одной точкой* источника *в разные моменты* времени, остается постоянной во времени.

Иллюстрацией нарушения временной когерентности будет случайное распределение расстояний между системами решеток (см. рис.7,а), а иллюстрацией нарушения пространственной когерентности – случайное распределение углов наклона решеток (см. рис.7,б). При этом можно считать, что по горизонтальной оси на этих рисунках представлено время.

Как же количественно охарактеризовать когерентность? Для этого существуют понятия длины и времени когерентности. (В школьном курсе физики эти понятия не вводятся, более подробно с ними можно ознакомиться в учебниках для вузов, например – в «Курсе общей физики» И.В.Савельева.) Длина когерентности – это максимальная разность хода волн, излученных источником, при которой еще наблюдается устойчивая интерференционная картина. Время когерентности – это максимальная разность времен прихода волн в данную точку пространства, при которой еще наблюдается устойчивая интерференционная картина. Для света, распространяющегося в вакууме, длина когерентности l связана со временем когерентности τ следующим образом: $l = c\tau$, где c – скорость света.

Время когерентности для точечного источника можно определить как длительность одного импульса, или, как говорят, цуга излучения. За это время случайное изменение фазы колебаний достигает значения порядка π . Длина отдельного элемента периодической структуры на рисунке 7,а как раз и характеризует время когерентности. Если мы будем рассматривать части муара размером меньше этой длины, то увидим четкую картину, а если будем рассматривать в более крупном масштабе – уввы, видно будет только нечто среднее.

Для пространственной когерентности вводится радиус когерентности – характерный размер источника, при котором волны, излучаемые им, можно считать когерентными. Радиус когерентности определяется как $r = \lambda / \Phi$, где λ – длина волны излучения, Φ – диапазон углов, в котором наблюдатель может зарегистрировать излучение источника. В случае пространственной когерентности максимальный угол, на который повернуты решетки друг относительно друга на рисунке 7,б, и характеризует радиус когерентности.

Для каждого источника света ограничения пространственной и временной когерентности действуют одновременно, только могут проявляться в разной мере. Например, для источников малых размеров, излучающих разные длины волн (таких, как лампочка накаливания), сильнее проявляется ограничение временной когерентности, а для протяженных источников, излучающих в узком диапазоне длин волн, сильнее проявляется ограничение пространственной когерентности.

На пространственных масштабах меньше длины когерентности или на временных интервалах меньше времени когерентности интерференцию волн наблюдать можно, а если мы рассматриваем большую область пространства или большой интервал времени, то в среднем распределение энергии будет однородным. Именно такую картину мы и наблюдаем при наложении света, например, двух лампочек накаливания. Для лампочки время когерентности составляет около 10^{-8} с,

и наш глаз, конечно, не замечает быстрых мельканий интерференционной картины – ведь характерное время реакции глаза приблизительно 0,1 с. Получается, что за время реакции глаза интерференционная картина успевает измениться десятки миллионов раз! Большинство природных источников света имеют малое время когерентности, и поэтому мы не наблюдаем интерференции независимых источников.

Чтобы побороть временную некогерентность, «делают» два источника из одного. Например, в классическом опыте Юнга два небольших отверстия в экране освещались одной световой волной. В таком случае эти источники-отверстия уже будут связаны друг с другом по времени, т.е. будут когерентными. Для борьбы с пространственной некогерентностью необходимо уменьшить размер источника, т.е. выделить из него малую часть. В том же опыте Юнга, если отверстия расположить слишком далеко друг от друга или сделать их слишком крупными, вступит в действие ограничение пространственной когерентности, и интерференционная картина размажется.

Но существуют и такие источники света, которые без всяких дополнительных ухищрений могут давать интерференционную картину. Это – лазеры. Для лазера время когерентности оказывается порядка 10^3 с, а длина когерентности составляет приблизительно 10^{11} м – больше диаметра земной орбиты! Однако и в лазерах часто вступает в действие ограничение пространственной когерентности. Например, если внимательно посмотреть на пятно, даваемое обычной лазерной указкой (только не заглядывайте прямо в сам лазер, это опасно для глаз), там можно увидеть постоянно изменяющуюся структуру из множества точек. Эти точки действуют как независимые источники, и такой свет не обладает пространственной когерентностью, что связано с большим углом расходимости обычной лазерной указки.

О лазерах можно рассказывать долго, но о них можно прочитать в других статьях и книгах. Наша же статья подходит к завершению, и мы надеемся, что сравнение таких, казалось бы, далеких вещей – света и муаров – позволит вам лучше понять и то и другое.



Рис.8. Что же здесь изображено?

Напоследок попробуйте отгадать, что изображено на рисунке 8. Догадались? А сможете подобрать такую решетку, чтобы оживить эту картинку?

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 марта 2011 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №6–2010» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «M2199» или «Ф2205». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvant.info и phys@kvant.info соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задача M2200 предлагалась на Болгарской национальной математической олимпиаде 2010 года, задача M2201 – на VI Всероссийской олимпиаде по геометрии имени И.Ф.Шарыгина.

Задачи M2199–M2205, Ф2205–Ф2212

M2199. Натуральное число, имеющее в десятичной записи n цифр, назовем n -драконом, если оно является точным квадратом и для любого $k = 1, 2, \dots, n - 1$ после вычеркивания k последних цифр (отрубаем хвост дракону) оно будет точным квадратом. Для какого наибольшего n существует n -дракон?

В. Сендеров

M2200. Таблица 2×2010 (2 горизонтальных ряда по 2010 клеток) разделена на единичные клетки. Иван ставит горизонтальное домино $\square\square$, которое покрывает в точности две клетки таблицы; затем Петр ставит вертикальное домино $\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}$, которое покрывает две клетки таблицы; потом Иван снова ставит горизонтальное домино, Петр снова ставит вертикальное домино и т.д. (каждый раз домино можно ставить только на еще не покрытые клетки). Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Определите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Попробуйте также изучить эту игру на таблице $2 \times n$ при различных значениях n .

Э. Колев

M2201. Рассматриваются прямые, проходящие через вершину B треугольника ABC , пересекающие сторону AC в точке K , а описанную окружность треугольника ABC – в точке M , отличной от B . Найдите геометрическое место центров описанных окружностей треугольников AMK .

Ю. Блинов

M2202. Дана арифметическая прогрессия из 22 различных натуральных чисел, каждое из которых явля-

ется точной степенью (т.е. степенью натурального числа, большей 1). Докажите, что разность этой прогрессии больше 2010.

П. Кожевников

M2203. Дан правильный mn -угольник. Среди его вершин m вершин покрашены красным, а n – синим (никакая вершина не покрашена дважды). Докажите, что некоторый отрезок с концами в красных точках равен некоторому отрезку с концами в синих точках.

И. Богданов, С. Берлов

M2204. Дан четырехугольник $ABCD$, описанный около окружности. Прямая l проходит через вершину A , пересекает отрезок BC в точке M и луч DC – в точке N . Пусть I_1, I_2, I_3 – центры окружностей, вписанных в треугольники ABM, MNC, NDA . Докажите, что прямая l проходит через точку пересечения высот треугольника $I_1I_2I_3$.

Н. Белухов

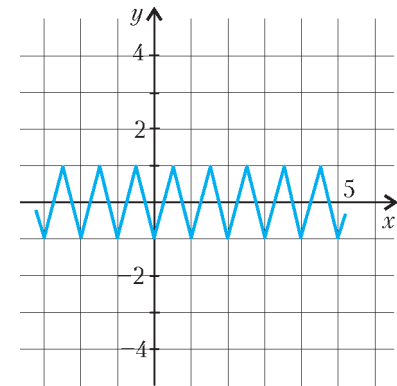


Рис. 1

M2205*. На рисунке 1 изображен график функции $g(x)$, т.е. $g(x)$ – периодическая функция с периодом 1 такая, что

$$g(x) = \begin{cases} 4x - 1, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ -4x - 1, & \text{если } -\frac{1}{2} \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Положим $f(x) = x + g(x)$. Для данного действительного числа t определим последовательность $\{s_n(t)\}$ следующим правилом: $s_0(t) = t$, $s_{n+1}(t) = f(s_n(t))$ при $n \geq 0$. Докажите, что для некоторого числа t_0 последовательность $\{s_n(t_0)\}$ всюду плотна, т.е. для любых чисел $a < b$ найдется номер n такой, что $a < s_n(t_0) < b$.

Д.Фон-Дер-Флаас

Ф2205.¹ На горизонтальной поверхности льда нарисована окружность радиусом $R = 10$ м. В центре окружности находится заяц, а волк, как вы, наверное, уже догадались, — на окружности. Заяц начинает двигаться по прямой с постоянной скоростью $v_0 = 2$ м/с, как показано на рисунке 2. Волк должен двигаться по окружности так, чтобы расстояние между ним и зайцем все время оставалось равным начальному. До какой точки окружности волк сможет добраться, не нарушая правил игры? Коэффициент трения о лед $\mu = 0,05$. Волк движется строго по окружности, не подпрыгивая. (Ф1303)

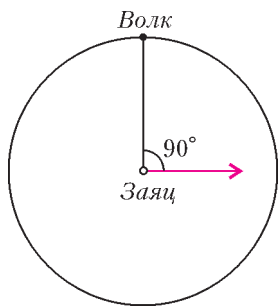


Рис. 2

Ф2206. Прямоугольный сосуд с водой стоит на двух опорах, разнесенных на расстояние L друг от друга. Над сосудом на перекладине подвешен на нити кусок свинца массой M на расстоянии l от центра сосуда (рис.3). Силы реакции опор при этом равны N_1 и N_2 . Нить удлиняют так, что свинец погружается в воду. Какими станут после этого силы реакции опор? Плотность свинца в n раз больше плотности воды. (Ф1253)

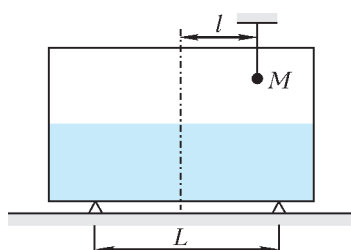


Рис. 3

Ф2207. Погремушка в виде полого стального шара объемом 0,2 л содержит внутри 300 стальных шариков радиусом 1 мм каждый. Ее трясут так, что шарики внутри непрерывно сталкиваются между собой и со стенками, издавая ужасный шум. Считая скорость погремушки равной 1 м/с, оцените число соударений между шариками за 1 минуту. Излучаемая звуковая мощность равна 10 Вт, выделением тепла при ударах пренебречь. (Ф1219)

¹ Задачи по физике в этом номере журнала представляют собой подборку избранных задач А.Р.Зильбермана за прошлые годы. Александр Рафаилович был автором столько задач, что многие из них выходили под разными псевдонимами (всего набралось более 100 псевдонимов). Однако самые удачные задачи он подписывал своим настоящим именем. Именно такие задачи и вошли в предлагаемую подборку.

В конце каждой задачи указан ее изначальный номер, что позволит читателю найти ее решение (например, в Интернете).

Ф2208. В сосуде под поршнем находится некоторое количество жидкого азота и его паров при температуре $T_1 = 78$ К (точка 1 на рисунке 4). Поршень медленно отодвигают, увеличивая объем сосуда при постоянной температуре (участок 1–2–3). В точке 3

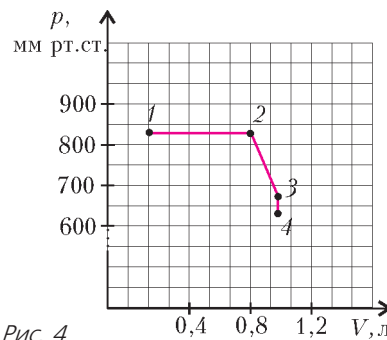


Рис. 4

давление в сосуде становится равным 686 мм рт.ст. Поршень закрепляют и охлаждают сосуд до температуры $T_2 = 76$ К, давление при этом уменьшается до 657 мм рт.ст. (точка 4). Каким будет давление в сосуде, если при этой температуре медленно передвинуть поршень в начальное положение? Какая масса жидкости первоначально была в сосуде? Молярная масса азота $M = 28$ г/моль. Плотность ртути $\rho = 13,6$ г/см³. (Ф1310)

Ф2209. Лампочку для карманного фонаря подключают к источнику напряжения длинными проводами. При длине проводов 10 м ток через лампочку оказался равным 0,17 А, при 20 м — 0,13 А. Каким будет ток через лампочку при длине проводов 40 м? Каким станет этот ток, если лампочку подключить прямо к источнику? Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало. Зависимость тока через лампочку от напряжения на ней приведена на рисунке 5. (Ф1311)

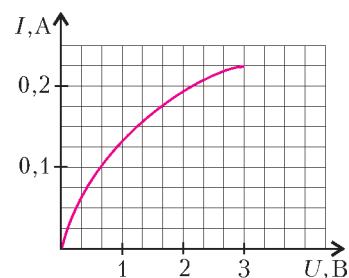


Рис. 5

Ф2210. Электрическая лампочка включена в сеть частотой 50 Гц последовательно с катушкой, индуктивность которой 1 Гн. Параллельно лампочке подключили конденсатор неизвестной емкости, и оказалось, что лампочка горит при этом с той же яркостью, что и без конденсатора. Определите его емкость. (Ф1272)

Ф2211. Из нескольких одинаковых CL -звеньев, подключенных друг за другом, собрана цепь для измерений на частоте 50 Гц (рис.6). К выходу последнего звена был подключен конденсатор, после чего ток, потребляемый всей цепью от источника, и разность фаз между этим током и приложенным напряжением перестали зависеть от числа подключенных звеньев. Какую емкость C_x имел подключенный

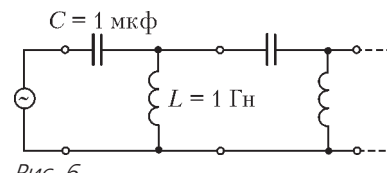


Рис. 6

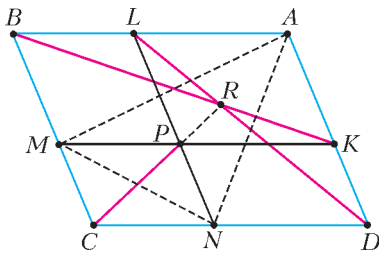
конденсатор? Можно ли дать однозначный ответ на этот вопрос? (Ф1242)

Ф2212. Нелинейность вольт-амперной характеристики лампы накаливания связана с тем, что сопротивление нити увеличивается с ее нагревом. Получите зависимость тока через лампу от приложенного к ней напряжения при следующих упрощающих предположениях: теплоотдачу считайте связанной с излучением ($P_{\text{изл}} \sim T^4$, где T – температура нити); сопротивление нити $R \sim T$. Параметры лампы: 60 Вт, 220 В. Теперь снизим напряжение до 200В. Какой будет мощность лампы? Сильно ли упадет световой поток? (Ф1227)

Решения задач M2176–M2183, Ф2190–Ф2195

M2176. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M и N . Докажите, что медианы треугольников ABM , ADN и CMN , проведенные соответственно из вершин B , D и C , пересекаются в одной точке.

Проведем через M и N прямые, параллельные сторонам параллелограмма. Теперь в конструкции (см. рисунок) участвуют две тройки параллельных прямых – AD , BC , LN и AB , CD , KM , и наша задача эквивалентна тому, что прямые BK , CP и DL пересекаются в одной точке.



Это несложно доказать, например, при помощи векторов. Положим $\overline{CB} = \vec{a}$, $\overline{MB} = \alpha\vec{a}$, $\overline{CD} = \vec{b}$, $\overline{ND} = \beta\vec{b}$. Пусть R – точка пересечения BK и CP . Тогда $\overline{CR} = t\overline{CP} = t(\overline{CM} + \overline{CN}) = t((1-\alpha)\vec{a} + (1-\beta)\vec{b})$. С другой стороны, $\overline{CR} = \overline{CB} + \overline{BR} = \overline{CB} + s\overline{BK} = \vec{a} + s(\vec{b} - \alpha\vec{a}) = (1-s\alpha)\vec{a} + s\vec{b}$. Приравняв два разложения вектора \overline{CR} по векторам \vec{a} и \vec{b} , получаем $s = t(1-\beta)$ и $t(1-\alpha) = 1-s\alpha = 1-t(1-\beta)\alpha$, откуда $t = \frac{1}{1-\alpha\beta}$. Как видим, t симметрично относительно α и β , поэтому, обозначая $R' = CP \cap DL$, для вектора $\overline{CR'}$ мы получим (сделав выкладки, аналогичные приведенным выше) то же самое выражение, что и для вектора \overline{CR} . Значит, точка $R = R'$ и есть общая точка прямых BK , CP и DL .

Замечания. Интересная интерпретация данного сюжета получится, если представить, что точки K и L движутся с постоянными скоростями по прямым DA и BA , начиная движение из точек D и B соответственно (параллелограмм $ABCD$ – фиксированный), и в каждый момент времени мы рассматриваем наш рисунок. Тогда легко видеть, что направление прямой CP не меняется, поэтому точка пересечения $R = BK \cap DL$ движется по фиксированной прямой. В случае равенства скоростей точек K и L параллелограмм $CMPN$ в любой момент является ромбом, поэтому R движется

по биссектрисе угла BCD (это утверждение предлагалось в качестве задачи на зональном этапе Всероссийской олимпиады в 2001 году).

Другой пример. Если $CL \perp AB$ и $CK \perp AD$, то KM и LN – высоты треугольника CKL , поэтому CP – третья высота. Так как CP проходит через $R = BK \cap DL$, то $CR \perp KL$ (последнее утверждение – задача с устной Московской олимпиады по геометрии 2010 года).

Отметим в заключение, что при гомотетии с центром A и коэффициентом $1/2$ прямая, проходящая через точки C , P и $R = BK \cap DL$, переходит в прямую, проходящую через середины отрезков BD , KL и AR , т.е. в *прямую Гаусса* для четверки прямых AB , AD , BK и DL . Как видим, несложная конструкция данной задачи оказывается связана с интересными (и более трудными) вопросами.

Л.Емельянов, П.Кожевников, А.Полянский, Д.Храмцов

M2177. Существует ли такой угол α , что для любого натурального n число $\cos n\alpha$ – рационально, а число $\sin n\alpha$ – иррационально?

Ответ: существует.

Один из возможных примеров $\alpha = \arccos \frac{1}{3}$. Докажем, что этот пример подходит. Имеем $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Лемма. Для любого t и целого $n \geq 0$ выполнены равенства

$$\cos nt = T_n(\cos t),$$

$$\sin nt = \sin t \cdot U_n(\cos t),$$

где T_n и U_n – многочлены с целыми коэффициентами.

Доказательство легко получается по индукции (с базой $n = 0, 1$) с помощью равенств

$$\cos(k+1)t = 2\cos t \cos kt - \cos(k-1)t, \quad (1)$$

$$\sin(k+1)t = 2\sin t \cos kt + \sin(k-1)t.$$

Из леммы следует, что при всех натуральных n число $\cos n\alpha$ – рационально, а число $\sin n\alpha$ – иррационально либо равно 0. Остается доказать, что $\sin n\alpha \neq 0$.

По индукции докажем, что $\cos n\alpha = \frac{p_n}{3^n}$, где p_n не кратно 3. База $n = 0, 1$ очевидна ($p_0 = p_1 = 1$). Переход следует из формулы (1): $\cos(k+1)\alpha = \frac{2p_k}{3^{k+1}} - \frac{p_{k-1}}{3^{k-1}} = \frac{2p_k - 9p_{k-1}}{3^{k+1}}$, и $p_{k+1} = 2p_k - 9p_{k-1}$ не делится на 3.

Таким образом, при натуральных n число $\cos n\alpha$ не является целым, значит, $\sin n\alpha \neq 0$.

Замечания. Аналогично рассмотренному случаю $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ можно доказать, что $\cos n\alpha$ не является

целым ни при каком натуральном n , если $\cos \alpha = \frac{p}{q}$, где p и q – взаимно простые целые числа, $0 < |p| < q$, $q \neq 2$. Таким образом, $\cos p\alpha$, где a рационально, принимает лишь следующие рациональные значения:

$0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}$. Естественным обобщением этого утверждения является рассмотрение в качестве значений функции суперпозиции простейших – квадратных иррациональностей. В частном случае ее решение дает знаменитая **теорема Гаусса**. Вот одна из возможных формулировок.

Пусть калькулятор (вычисляющий с абсолютной точностью) имеет кнопки

$$1, +, -, \times, :, \sqrt{\quad}$$

(и неограниченную память). На этом калькуляторе можно вычислить значение $\cos \frac{2\pi}{n}$ тогда и только тогда, когда $n = 2^\alpha p_1 \dots p_l$, где α – целое неотрицательное, p_1, \dots, p_l – различные простые числа вида $2^{2^s} + 1$.

Нетрудно показать, что эта теорема решает задачу и для всех чисел $\cos \pi a$, где a рационально. Об этой теореме можно прочесть в статье С. Гиндикина «Дебют Гаусса» («Квант» № 1 за 1972 г.).

В. Сендеров

M2178. В Швамбрании некоторые города связаны двусторонними беспосадочными авиарейсами. Рейсы разделены между тремя авиакомпаниями, причем если какая-то авиакомпания обслуживает линию между городами A и B , то самолеты других компаний между этими городами не летают. Известно, что из каждого города летают самолеты всех трех компаний. Докажите, что можно, вылетев из некоторого города, вернуться в него, воспользовавшись по пути рейсами всех трех компаний и не побывав ни в одном из промежуточных городов дважды.

Вылетим из любого города A первой компанией, попадем в город B , из него вылетим второй компанией, далее третьей, затем снова первой, второй, третьей и т.д. Рассмотрим самый первый момент, когда на этом пути встретился город B , где мы уже были. Тогда кусок нашего пути от первого посещения города B до второго и будет искомым. В самом деле, если мы в первый раз вылетели из города B в город Γ , то из Γ сразу вернуться в B мы не могли. Поэтому между двумя посещениями города B мы совершили хотя бы три перелета и, значит, воспользовались по пути рейсами всех трех компаний.

С. Берлов

M2179. В вершинах куба расставили числа $1^2, 2^2, \dots, 8^2$ (в каждую из вершин – по одному числу). Для каждого ребра посчитали произведение чисел в его концах. Найдите наибольшую возможную сумму всех этих произведений.

Ответ: 9420.

Раскрасим вершины куба в два цвета так, чтобы концы каждого ребра были разноцветными. Пусть в вершинах одного цвета стоят числа a_1, a_2, a_3, a_4 , а в вершинах другого – числа b_1, b_2, b_3, b_4 , причем числа с одинаковыми номерами стоят в противоположных вершинах. Тогда, как легко проверить, указанная в

условии сумма произведений будет равна

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4).$$

По неравенству о средних,

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) &\leq \\ &\leq (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4)^2 / 4 = \\ &= (1^2 + 2^2 + \dots + 8^2)^2 / 4 = 10404, \end{aligned}$$

причем равенство достигается только при $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$ (условие максимальности). С другой стороны, сумма $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4$, где a_i и b_i – числа $1^2, 2^2, \dots, 8^2$, минимальна тогда, когда 8^2 умножается на 1^2 , 7^2 – на 2^2 , 6^2 – на 3^2 , 5^2 – на 4^2 (условие минимальности). В самом деле, пусть 8^2 умножается на $a^2 \neq 1^2$, а 1^2 – на b^2 . Понятно, что, умножив 8^2 на 1^2 , а a^2 – на b^2 , мы уменьшим сумму $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4$. Затем аналогично показываем, что мы уменьшим сумму, умножив 7^2 на 2^2 , и т.д. Оказывается, можно добиться *одновременного* выполнения условия максимальности и условия минимальности: для этого надо в вершины одного цвета поставить числа $1^2, 4^2, 6^2$ и 7^2 , а в вершины другого – остальные таким образом, чтобы 8^2 и 1^2 , 7^2 и 2^2 , 6^2 и 3^2 , 5^2 и 4^2 стояли в противоположных вершинах. Понятно, что такая расстановка и даст искомым максимум сумм произведений, равный

$$\begin{aligned} 10404 - (8^2 \cdot 1^2 + 7^2 \cdot 2^2 + 6^2 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 4^2) &= \\ &= 10404 - 984 = 9420. \end{aligned}$$

Замечание. Тот факт, что числа $1^2, 2^2, \dots, 8^2$ можно разбить на две группы по 4 числа с равными суммами чисел, не случаен. Заметим, что $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$, поэтому

$$\begin{aligned} ((n+3)^2 - (n+2)^2) - ((n+1)^2 - n^2) &= \\ &= (2n+5) - (2n+1) = 4 \end{aligned}$$

при любом n . Отсюда

$$\begin{aligned} (1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2) - (5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2) &= \\ &= 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + 6^2 + 7^2 - 8^2 = 4 - 4 = 0. \end{aligned}$$

Д. Фон-дер-Флаасс

M2180. Многочлен x^{2010} разделили на многочлен $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ с остатком. В качестве неполного частного был получен многочлен $P(x)$. Докажите, что коэффициенты многочлена $P(x)$ положительны.

Из процесса деления столбиком легко вытекает

Лемма. Если ненулевой многочлен с неотрицательными коэффициентами делится на $x - c$, где $c > 0$, то у неполного частного все коэффициенты положительны. Далее, заметим, что при делении на произведение многочленов можно вычислять неполные частные последовательно, т.е. для вычисления неполного частного

при делении многочлена Q_1 на $f_1 f_2$ достаточно сначала получить неполное частное Q_2 при делении Q_1 на f_1 , а затем получить неполное частное Q_3 при делении Q_2 на f_2 . Действительно, пусть $\frac{Q_1}{f_1} = Q_2 + \frac{r_1}{f_1}$, $\frac{Q_2}{f_2} = Q_3 + \frac{r_2}{f_2}$, где остатки r_1, r_2 — многочлены степени меньше чем степени f_1 и f_2 соответственно. Тогда $\frac{Q_1}{f_1 f_2} = Q_3 + \frac{r_2}{f_2} + \frac{r_1}{f_1 f_2} = Q_3 + \frac{r_2 f_1 + r_1}{f_1 f_2}$. Так как степень $r_2 f_1 + r_1$ меньше степени $f_1 f_2$, то Q_3 — неполное частное при делении Q_1 на $f_1 f_2$.
Наконец, заметим, что $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$. Отсюда получаем утверждение задачи, применяя трижды лемму для деления многочлена x^{2010} последовательно на $x-1, x-2$ и $x-3$.

П. Кожевников

M2181*. Даны n бесконечных в обе стороны арифметических прогрессий. Известно, что каждое из чисел $1, 2, 3, \dots, 2n!$ принадлежит хотя бы одной из прогрессий. Докажите, что каждое целое число принадлежит хотя бы одной из данных прогрессий. Насколько можно уменьшить число $2n!$, чтобы утверждение осталось верным?

Ответим на первый вопрос задачи. На второй дан ответ в заметке И. Богданова в конце раздела.

Все рассматриваемые здесь арифметические прогрессии непостоянные и бесконечные в обе стороны. Докажем индукцией по n следующее утверждение, обобщающее утверждение задачи:

пусть прогрессии A и A_1, \dots, A_n таковы, что каждый из некоторых $2n!$ последовательных членов A принадлежит хотя бы одной из прогрессий A_1, \dots, A_n . Тогда каждый член A принадлежит хотя бы одной из прогрессий A_1, \dots, A_n .

База $n = 1$ очевидна. Пусть утверждение верно для $n - 1$ прогрессий A_i . Пусть $a_1, a_2, \dots, a_{2n!}$ есть $2n!$ последовательных членов прогрессии A , d — разность прогрессии. Среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{n+1} найдутся два, принадлежащих одной из прогрессий A_1, \dots, A_n пусть для определенности a_j и $a_{j+k} = a_j + kd$ ($1 \leq k \leq n$) лежат в A_n . Разобьем прогрессию A на k прогрессий (с разностью kd) B_1, B_2, \dots, B_k так, что прогрессия B_i содержит число a_i для $i = 1, 2, \dots, k$ соответственно. Каждая из прогрессий B_i содержит ровно $2n!/k \geq 2(n-1)!$ из чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2n!}$, значит, из чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2n!}$ можно взять $2(n-1)!$ последовательных членов прогрессии B_i . Каждая из прогрессий B_i либо целиком содержится в A_n , либо не пересекается с A_n . Во втором случае к ней и прогрессиям A_1, \dots, A_{n-1} применимо предположение индукции. Поэтому каждый член прогрессий B_i , а значит и прогрессии A , является членом одной из прогрессий A_1, \dots, A_n .

П. Кожевников, И. Богданов

M2182. Дан выпуклый четырехугольник $A_1 A_2 A_3 A_4$, никакие две стороны которого не параллельны. Для

каждого $i = 1, 2, 3, 4$ рассмотрим окружность ω_i , лежащую вне четырехугольника, касающуюся прямых $A_{i-1} A_i, A_{i+1} A_{i+2}$ и касающуюся отрезка $A_i A_{i+1}$ в точке T_i (индексы рассматриваются по модулю 4, так что $A_0 = A_4, A_5 = A_1$ и $A_6 = A_2$; рис. 1). Докажите, что прямые $A_1 A_2, A_3 A_4$ и $T_2 T_4$ пересекаются в

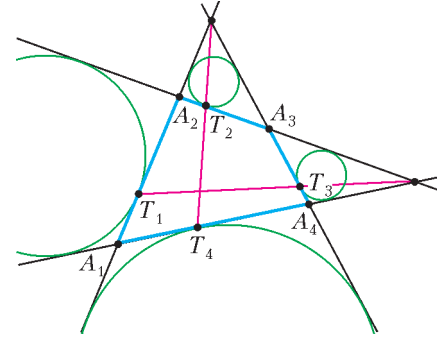


Рис. 1

одной точке тогда и только тогда, когда прямые $A_2 A_3, A_4 A_1$ и $T_1 T_3$ пересекаются в одной точке.

Лемма. Пусть четыре прямые l_i ($i = 1, 2, 3, 4$), среди которых нет параллельных, касаются окружности ω в точках K_i , и прямые $l_1, l_3, K_2 K_4$ пересекаются в одной точке. Тогда прямые $l_2, l_4, K_1 K_3$ также пересекаются в одной точке.

Доказательство леммы. Пусть O — центр окружности ω , положим $X = l_1 \cap l_3 \cap K_2 K_4, Y = l_2 \cap l_4$ (рис. 2). Имеем $OX \perp K_1 K_3, OY \perp K_2 K_4$. Пусть $Z = OX \cap$

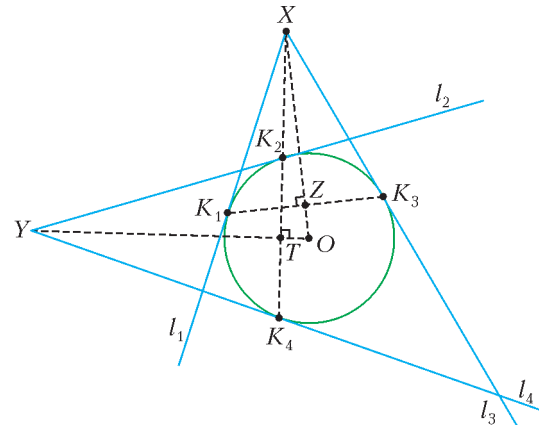


Рис. 2

$\cap K_1 K_3, T = OY \cap K_2 K_4$. Заметим, что $\triangle OK_1 X \sim \triangle OK_2 Y \sim \triangle OTK_2$, откуда $OY \cdot OT = OK_2^2 = OK_1^2 = OX \cdot OZ$. Это означает, что $\triangle OXT \sim \triangle OYZ$, значит, $YZ \perp OX$, поэтому $Y \in K_1 K_3$. Лемма доказана.

Достаточно доказать, что если прямые $A_2 A_3, A_4 A_1, T_1 T_3$ пересекаются в одной точке, то и прямые $A_1 A_2, A_3 A_4, T_2 T_4$ пересекаются в одной точке, так как обратное утверждение аналогично.

Пусть прямые $A_2 A_3, A_4 A_1, T_1 T_3$ проходят через точку P . Предположим, что окружность ω_1 касается прямых $A_1 A_4$ и $A_2 A_3$ в точках T'_4 и T'_2 соответственно (рис. 3). Пусть T'_3 — вторая точка пересечения прямой $T_1 T_3$ и

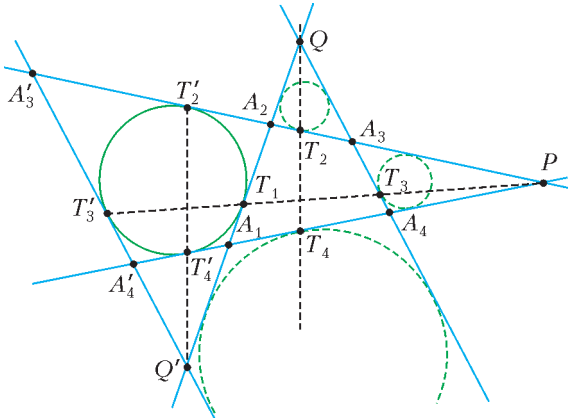


Рис. 3

окружности ω_1 . Пусть касательная к ω_1 , проходящая через T'_3 , пересекает прямые A_1A_4 и A_2A_3 в точках A'_4 и A'_3 соответственно. Гомотетия с центром P , переводящая ω_1 в ω_3 , переводит T'_3 в T_3 , поэтому $A_3A_4 \parallel A'_3A'_4$. Пусть $Q = A_1A_2 \cap A_3A_4$, $Q' = A_1A_2 \cap A'_3A'_4$. Применяя лемму к окружности ω_1 и прямым A_1A_2 , A_2A_3 , $A'_3A'_4$, A_4A_1 , получаем, что точки Q' , T'_2 , T'_4 лежат на одной прямой. Гомотетия с центром A_1 , переводящая треугольник QA_1A_4 в треугольник $Q'A_1A'_4$, переводит T_4 в T'_4 (так как T_4 и T'_4 – соответствующие точки касания в подобных треугольниках QA_1A_4 и $Q'A_1A'_4$), поэтому $Q'T'_4 \parallel QT_4$. Аналогично, гомотетия с центром A_2 , переводящая треугольник QA_2A_3 в треугольник $Q'A_2A'_3$, переводит T_2 в T'_2 , следовательно, $Q'T'_2 \parallel QT_2$. Так как точки Q' , T'_2 , T'_4 лежат на одной прямой, то точки Q , T_2 , T_4 также лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Утверждение задачи останется верным, если заменить окружности ω_i на окружности, касающиеся прямых $A_{i-1}A_i$, $A_{i+1}A_{i+2}$ и отрезка A_iA_{i+1} , пересекающиеся с четырехугольником. При этом точки T_i заменятся на точки, симметричные T_i относительно середин отрезков A_iA_{i+1} .

Замечание 2. Утверждение леммы – это переформулировка известного критерия гармоничности четырехугольника $(K_1K_2K_3K_4)$.

П. Кожевников

M2183. Дано натуральное число n . Назовем множество K , состоящее из точек плоскости с целыми координатами, связным, если для любых двух точек $R, S \in K$ существуют натуральное l и последовательность точек $R = T_0, T_1, \dots, T_l = S$, принадлежащих K , такая, что длина любого отрезка вида T_iT_{i+1} равна 1. Для связного множества K обозначим через $\delta(K)$ количество попарно неравных векторов в множестве $\Delta K = \{\overline{RS} \mid R, S \in K\}$. Найдите максимальное возможное значение $\delta(K)$, если K пробегает все связные множества из $2n + 1$ точек плоскости с целыми координатами.

Ответ: $2n^2 + 4n + 1$.

Если K состоит из точек $(0, 0), (0, 1), (0, 2), \dots, (0, n), (-1, 0), (-2, 0), \dots, (-n, 0)$, то ΔK состоит из всех векторов вида (x, y) , где x и y – целые неотрицательные числа, не превосходящие n (таких векторов $(n + 1)^2$), либо целые неположительные числа, не превосходящие n (таких векторов $(n + 1)^2$). Количество таких векторов равно $2(n + 1)^2 - 1 = 2n^2 + 4n + 1$, поскольку нулевой вектор был учтен дважды. Остается доказать, что для любого связного множества точек с целыми координатами выполнено $\delta(K) \leq 2n^2 + 4n + 1$.

Рассмотрим граф G , вершины которого являются точками множества K , а ребра – отрезки длины 1. Ребра бывают одного из двух типов – горизонтальные и вертикальные. По условию граф G связный. Если в графе G найдется ребро, после удаления которого граф остается связным, то удалим это ребро. Последовательно удаляем ребра таким образом, пока это возможно. В конечном итоге мы придем к связному графу G' , который при удалении любого ребра перестает быть связным. Это означает, что G' – дерево. Пусть в этом дереве h горизонтальных и v вертикальных ребер. Как известно, в дереве число ребер на 1 меньше числа вершин, т.е. $h + v = 2n$.

По графу G' определим новый граф Γ следующим образом. Вершинами Γ объявим все векторы \overline{XY} , где $X, Y \in K$ (таким образом, в графе Γ содержится $(2n + 1)^2$ вершин). Две «вершины» \overline{XY} и $\overline{X'Y'}$ графа Γ соединим ребром, если векторы \overline{XY} и $\overline{X'Y'}$ равные, а XX' и YY' – ребра в графе G (одного типа). Как нетрудно видеть, каждая упорядоченная пара $(\overline{XX'}, \overline{YY'})$ ребер (возможно, совпадающих) одинакового типа (горизонтальных или вертикальных) графа G' определяет единственное ребро графа Γ , поэтому в графе Γ проведено $h^2 + v^2$ ребер. Легко видеть, что в Γ нет циклов (иначе циклы были бы и в G'), поэтому количество N компонент связности графа Γ равно разности количеств вершин и ребер. Получаем, что

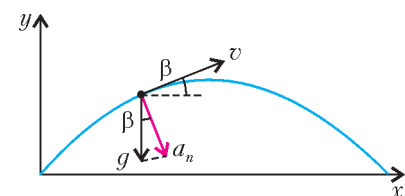
$$N = (2n + 1)^2 - (h^2 + v^2) \leq (2n + 1)^2 - \frac{1}{2}(h + v)^2 = (2n + 1)^2 - 2n^2 = 2n^2 + 4n + 1.$$

Остается заметить, что в каждой компоненте связности графа Γ все «вершины» – равные векторы, и, значит, $\delta(K) \leq N$.

В. Омеляненко, К. Савенков

Ф2190. Камень брошен с начальной скоростью $v_0 = 40$ м/с под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Найдите максимальную угловую скорость вращения вектора скорости камня в процессе свободного полета.

Если в какой-то точке полета скорость камня \vec{v} составляет угол β с горизонтом, то радиус кривизны траектории R



вычисляется по формуле (см. рисунок)

$$a_n = g \cos \beta = \frac{v^2}{R}, \text{ откуда } R = \frac{v^2}{g \cos \beta}.$$

Для угловой скорости получаем

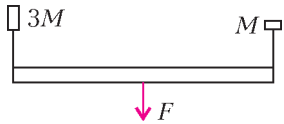
$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{g \cos \beta}{v}.$$

При движении от точки броска до верхней точки траектории $\cos \beta$ монотонно возрастает, а модуль скорости v монотонно убывает. Следовательно, угловая скорость максимальна в верхней точке, где $\cos \beta = 1$, а $v = v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, и равна

$$\omega_{\max} = \frac{g}{v_0 \cos \alpha} \approx 0,3 \text{ с}^{-1}.$$

А. Камнев

Ф2191. На гладком горизонтальном столе находится легкий стержень, к концам которого привязаны короткие нерастяжимые куски легкой нити (см. рисунок). К свободным концам кусков нити прикреплены грузы массами M и $3M$, лежащие на столе. К середине стержня приложена сила F , параллельная кускам нити и перпендикулярная стержню. Найдите ускорение середины стержня.



Запишем второй закон Ньютона для грузов и стержня:

$$T_1 = 3Ma_1, \quad T_2 = Ma_2, \quad F - T_1 - T_2 = 0$$

(масса стержня равна нулю). Кроме того, равна нулю сумма вращательных моментов сил, действующих на стержень, например, относительно его середины:

$$T_1 \frac{l}{2} - T_2 \frac{l}{2} = 0.$$

Решая полученные уравнения, находим

$$a_1 = \frac{F}{6M}, \quad a_2 = \frac{F}{2M}.$$

Ускорение середины стержня равно (подумайте, почему)

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{F}{3M}.$$

А. Повторов

Ф2192. Имеются 16 одинаковых батареек с ЭДС $\varepsilon = 1 \text{ В}$ и внутренним сопротивлением $r = 1 \text{ Ом}$ каждая. Сопротивление нагрузки $R = 1 \text{ Ом}$. Как нужно соединить батарейки, чтобы получить максимальный ток нагрузки? Найдите этот ток.

Рассмотрим только случай соединения $N = m \times n$ источников в прямоугольник – n параллельных групп из m последовательно соединенных источников (либо m последовательных групп из n параллельно соединенных источников). Внутреннее сопротивление такой батареи равно $mr/n = m^2r/N$, а ЭДС равна $m\varepsilon$. Сила

тока через нагрузку, равная

$$I = \frac{m\varepsilon}{\frac{m^2r}{N} + R} = \frac{\varepsilon}{\frac{mr}{N} + \frac{R}{m}},$$

максимальна, когда

$$\frac{mr}{N} = \frac{R}{m}, \text{ т.е. } m = \sqrt{N} \sqrt{\frac{R}{r}}$$

(минимум знаменателя в выражении для тока находится с помощью неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом). При $R = r$, как задано в условии задачи, максимальный ток получается при соединении источников в квадрат $m = n = \sqrt{N}$, ток при этом равен

$$I = \frac{\varepsilon \sqrt{N}}{2r} = 2 \text{ А}.$$

(Если же $R = 4r$, то $m = 2\sqrt{N}$, $n = \sqrt{N}/2$. Внутреннее сопротивление батареи опять равно сопротивлению нагрузки, а ток через каждый источник в обоих случаях равен $\varepsilon/(2r)$.)

А. Зильберман

Дополнение к решению

Можно ли убедиться в том, что никакое другое соединение (не в форме прямоугольника) не может дать еще больший ток? Перебором заниматься не хочется – ведь можно потом вместо 16 источников взять 64 или 256. Оказывается, это можно строго доказать, выразив ток через нагрузку R с помощью закона сохранения энергии (для общности рассмотрим N разных источников)

$$I^2 R = (\varepsilon_1 I_1 - I_1^2 r_1) + \dots + (\varepsilon_N I_N - I_N^2 r_N) = \\ = \frac{\varepsilon_1^2}{4r_1} - r_1 \left(I_1 - \frac{\varepsilon_1}{2r_1} \right)^2 + \dots + \frac{\varepsilon_N^2}{4r_N} - r_N \left(I_N - \frac{\varepsilon_N}{2r_N} \right)^2.$$

Видно, что максимальный ток через нагрузку будет достигнут, если удастся собрать схему так, чтобы

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1}{2r_1}, \dots, I_N = \frac{\varepsilon_N}{2r_N}.$$

При этом

$$I_{\max} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2}{4Rr_1} + \dots + \frac{\varepsilon_N^2}{4Rr_N}}.$$

Именно такие токи реализуются в предложенных выше прямоугольных схемах.

С. Кротов

Ф2193. В сосуде под поршнем находится 1 моль газа. Его температура увеличивается на 1 градус в минуту, а объем за 3 минуты изменился от 30 литров до 31 литра. Давление же газа за это время практически не менялось. Найдите это давление.

Поскольку давление постоянно, то

$$\frac{V}{T} = \frac{V + \Delta V}{T + \Delta T},$$

где $\Delta T = 3$ К. Отсюда $V\Delta T = T\Delta V$, т.е.

$$T = \frac{V\Delta T}{\Delta V} = 90 \text{ К.}$$

Давление найдем из уравнения Менделеева–Клапейрона:

$$p = \frac{\nu RT}{V} \approx 25 \text{ кПа.}$$

А.Газов

Ф2194. Два протона летят навстречу друг другу вдоль одной прямой. В некоторый момент скорости протонов равны v и $2v$, а расстояние между ними равно d . Найдите максимальное ускорение одного из протонов за время их движения.

Максимальное ускорение протонов соответствует максимальной силе взаимодействия, т.е. минимальному расстоянию между частицами. В момент максимального сближения скорости протонов одинаковы и могут быть найдены из закона сохранения импульса:

$$m \cdot 2v - mv = 2mu, \text{ т.е. } u = \frac{v}{2}.$$

Из закона сохранения энергии имеем

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{m(2v)^2}{2} + \frac{kq^2}{d} = \frac{2m(v/2)^2}{2} + \frac{kq^2}{r}.$$

Выражаем отсюда минимальное расстояние r между протонами и подставляем в выражение для ускорения одного из них:

$$a = \frac{kq^2}{r^2 m} = \frac{\left(\frac{9}{4}mv^2 + \frac{kq^2}{d}\right)^2}{kq^2 m}.$$

Д.Протонов

Ф2195. Униполярный индуктор представляет собой быстро вращающийся постоянный магнит в форме диска. Диск выполнен из магнитного сплава, способного создавать сильное магнитное поле, и покрыт тонким проводящим слоем никеля. При вращении диска между осью вращения и боковой поверхностью возникает разность потенциалов, которую можно измерить с помощью неподвижного вольтметра (рис.1). Если же к оси вращения и боковой поверхности подсоединить батарейку, то магнит начнет

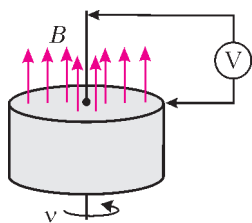


Рис. 1

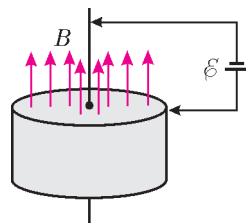


Рис. 2

быстро вращаться, превратившись в электродвигатель. Точно так же, если быстро вращать вал обычного электромотора, он превращается в генератор, и наоборот, если на электрический генератор подать напряжение, он превращается в электромо-

тор. На рисунке 2 показана схема такого реально работающего униполярного электродвигателя, ротором которого является сильный постоянный магнит в форме диска радиусом $r_0 = 2$ см, насаженного на ось. При подключении с помощью скользящих контактов батарейки с ЭДС $\epsilon = 1,5$ В диск начинает быстро вращаться.

1) Что покажет неподвижный вольтметр на рисунке 1 при частоте вращения диска $\nu = 3000$ об/мин? Какова полярность этой разности потенциалов? Вращение происходит против часовой стрелки, если смотреть сверху.

2) Пренебрегая трением, оцените предельную частоту вращения (об/мин) намагниченного диска (ротора униполярного двигателя на рисунке 2). Укажите направление вращения ротора (если смотреть сверху) при заданной полярности батарейки и заданном направлении вектора \vec{B} .

Примечание. Считайте, что в проводящем никелевом слое вектор индукции \vec{B} магнитного поля перпендикулярен поверхности диска, постоянен и равен $B = 1$ Тл. Также для упрощения считайте, что ток в проводящем слое течет вдоль радиуса между осью и контактом.

1) На свободные электроны в проводящем слое при вращении диска действует сила Лоренца, равная $F_L = evB$, где e – заряд электрона, $v = \omega r = 2\pi\nu r$ – линейная скорость. При указанных на рисунке 1 направлениях магнитного поля и вращения диска сила Лоренца направлена к центру диска. В результате возникает перераспределение зарядов: электроны будут скапливаться в центре, а на боковой поверхности образуется нескомпенсированный положительный заряд. Это приведет к возникновению электрического поля \vec{E} , направленного по радиусу к центру. Равновесие наступит, когда в каждой точке проводящего слоя кулоновская сила скомпенсирует силу Лоренца:

$$eE = evB, \text{ т.е. } E = vB.$$

Разность потенциалов $\Delta\phi$ между боковой поверхностью диска ($r = r_0$) и его центром ($r = 0$) равна

$$\Delta\phi = \int_0^{r_0} E dr = \frac{1}{2} v B r_0.$$

Эта разность потенциалов и будет измерена вольтметром:

$$U = \Delta\phi = \frac{1}{2} v r_0 B = \pi\nu r_0^2 B = 62,8 \text{ мВ},$$

причем «минус» – в центре диска, а «плюс» – на боковой поверхности.

2) Диск разгоняется моментом силы Ампера, возникающей в результате взаимодействия радиально направленного тока с магнитным полем диска. В соответствии с правилом левой руки, диск будет вращаться так же, как и на рисунке 1, – против часовой стрелки, если смотреть сверху. Разгон диска прекратится, когда сила тока станет равной нулю, т.е. когда разность потенциалов $\Delta\phi$, обусловленная действием силы Лоренца,

станет равной ЭДС батарейки \mathcal{E} :

$$\Delta\varphi = \mathcal{E}, \text{ или } \pi v_{\text{пред}} r_0^2 B = \mathcal{E},$$

откуда

$$v_{\text{пред}} = \frac{\mathcal{E}}{\pi r_0^2 B} \approx 7,2 \cdot 10^4 \text{ об/мин.}$$

А.Гуденко

О покрытии целых чисел прогрессиями

Данная заметка посвящена точному ответу на последний вопрос в задаче M2181 из Задачника «Кванта»: *Насколько можно уменьшить число $2n!$, чтобы утверждение осталось верным?*

Факт, который мы докажем, высказал в качестве гипотезы знаменитый венгерский математик П.Эрдеш в 1965 году. Впервые его (весьма сложно и неэлементарно) доказали через пять лет Р.Криттенден и К.Ванден Эйнден. Мы приводим (с некоторыми изменениями) доказательство, предложенное Жи-Вей Суном в 1995 году.

Гипотеза Эрдеша состояла в следующем.

Теорема. *Рассмотрим n целочисленных арифметических прогрессий, бесконечных в обе стороны. Предположим, что нашлись 2^n последовательных целых чисел, каждое из которых лежит хотя бы в одной из них. Тогда и каждое целое число лежит хотя бы в одной из них.*

Замечание. Число 2^n в этой теореме нельзя заменить на меньшее. Действительно, пусть прогрессия A_j ($j =$

$= 1, 2, \dots, n$) состоит из всех чисел, делящихся на 2^{j-1} , но не делящихся на 2^j . Тогда прогрессии A_1, A_2, \dots, A_n содержат в объединении все целые числа, не делящиеся на 2^n , и только их; в частности, они содержат все числа от 1 до $2^n - 1$.

Таким образом, число $2n!$ в задаче M2181 можно заменить на 2^n , но не на меньшее число.

Напомним сначала одно обозначение, которое нам потребуется для доказательства теоремы. Пусть x – вещественное число. В согласии с *формулой Муавра* вводится обозначение¹

$$\exp(ix) = \cos x + i \sin x,$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Это обозначение хорошо согласуется с обычными правилами действия со степенями; именно, $\exp(ix + iy) = \exp(ix) \cdot \exp(iy)$ и, как следствие, $\exp(inx) = (\exp(ix))^n$ для любого целого n . Заметим, что $\exp(ix) = 1$ тогда и только тогда, когда x является целым кратным числа 2π (т.е. когда число $\frac{x}{2\pi}$ – целое).

Кроме того, нам потребуется следующая лемма, интересная сама по себе (но на первый взгляд далекая от нашей теоремы).

¹ Другое распространенное обозначение: e^{ix} . Подробнее о комплексных числах и, в частности, о формуле Муавра можно прочитать в статье С.Дориченко «Комплексные числа» в «Кванте» № 5 за 2008 год.

Памяти Александра Рафаиловича Зильбермана

11 ноября 2010 года ушел из жизни наш близкий друг, член редколлегии журнала «Квант» Александр Рафаилович Зильберман.

Он был выдающимся педагогом с глубоким и уникальным физическим мышлением, умевшим донести свое восхищение красотой любимой физики до своих многочисленных учеников.

В течение всех сорока лет существования журнала «Квант» Александр Рафаилович был одним из самых активных его сотрудников, автором многих статей и чуть ли не половины задач «Задачника «Кванта» по физике», а с 1981 года бессменно возглавлял эту рубрику.

Он участвовал в организации и проведении множества олимпиад и летних школ и был признан коллегами высочайшим в стране авторитетом по нетривиальным физическим задачам. Его ученики достигали больших высот сначала в олимпиадах, а потом и в науке.

Заслуги Александра Рафаиловича были отмечены многими наградами, но не это главное. Главное –



Александр Рафаилович Зильберман
(04.04.1946–11.11.2010)

благодарность и восхищение детей, учителей, друзей, всех тех, кто имел счастье с ним общаться и у него учиться.

Мы все никогда его не забудем.

Лемма. Пусть $z_1, z_2, \dots, z_k, a_1, a_2, \dots, a_k$ – комплексные числа, причем $z_d \neq 0$ при всех $d = 1, 2, \dots, k$. Предположим, что равенство

$$a_1 z_1^t + a_2 z_2^t + \dots + a_k z_k^t = 0 \quad (1)$$

выполняется при всех $t = 0, 1, \dots, k - 1$. Тогда оно выполняется и для всех целых t .

Доказательство леммы. Если некоторые из чисел z_1, z_2, \dots, z_k равны, то мы можем сгруппировать соответствующие слагаемые в (1) и уменьшить значение k . Итак, можно считать, что все числа z_1, z_2, \dots, z_k различны. В этом случае мы докажем, что $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$, откуда, очевидно, следует требуемое. Предположим противное: некоторый коэффициент a_j ненулевой; можно считать, что $j = 1$.

Сделаем сначала небольшое замечание. Пусть $P(x) = p_{k-1}x^{k-1} + p_{k-2}x^{k-2} + \dots + p_0$ – произвольный многочлен не более чем $(k-1)$ -й степени. Тогда из равенств (1) следует, что

$$a_1 P(z_1) + \dots + a_k P(z_k) = 0; \quad (2)$$

действительно, для получения (2) достаточно сложить равенства (1), предварительно умножив равенство с t -ми степенями на p_t .

Нам осталось выбрать подходящий многочлен. Подставим в (2) многочлен $P(x) = (x - z_2)(x - z_3) \dots (x - z_k)$ степени $k - 1$; тогда в левой части обнулится все слагаемые, кроме первого, ибо $P(z_2) = P(z_3) = \dots = P(z_k) = 0$; первое же слагаемое будет иметь вид $a_1(z_1 - z_2)(z_1 - z_3) \dots (z_1 - z_k) \neq 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Замечание. Другое доказательство леммы можно получить, заметив, что последовательность $s_t = a_1 z_1^t + a_2 z_2^t + \dots + a_k z_k^t$ является линейной рекуррентной² порядка n .

Доказательство теоремы. «Сдвинув», если надо, прогрессии, можно считать, что каждое из чисел $0, 1, \dots$

² Заинтересовавшихся линейными рекуррентами отсылаем к соответствующему разделу статьи А.Егорова «Числа Пизо» в «Кванте» №5 за 2005 год.

$\dots, 2^n - 1$ лежит хотя бы в одной из них. Заметим, что любая прогрессия с разностью d состоит из всех чисел, имеющих фиксированный остаток от деления на d .

Итак, пусть j -я прогрессия ($j = 1, 2, \dots, n$) состоит из всех чисел, дающих остаток k_j при делении на d_j . Иначе говоря, целое число m принадлежит j -й прогрессии тогда и только тогда, когда число $\frac{m - k_j}{d_j}$ тоже целое. Вспомнив формулу Муавра, запишем последнее условие как

$$\exp\left(2\pi i \frac{m - k_j}{d_j}\right) = 1, \text{ или } u_j v_j^m - 1 = 0;$$

здесь мы для краткости ввели обозначения $u_j = \exp\left(-\frac{2\pi i k_j}{d_j}\right)$, $v_j = \exp\left(\frac{2\pi i}{d_j}\right)$; числа u_j и v_j не зависят от m .

Последнее условие хорошо тем, что оно позволяет записать также условие того, что m принадлежит хотя бы одной из прогрессий! Именно, это происходит тогда и только тогда, когда одно из полученных нами выражений обнулится, т.е.

$$(u_1 v_1^m - 1)(u_2 v_2^m - 1) \dots (u_n v_n^m - 1) = 0. \quad (3)$$

Раскроем все скобки в левой части этого равенства. Мы получим сумму из 2^n членов вида

$$a_1 z_1^m + a_2 z_2^m + \dots + a_n z_n^m = 0, \quad (4)$$

где числа a_j и z_j не зависят от m ; именно, каждое из чисел z_j является либо единицей, либо произведением нескольких (возможно, одного) различных чисел из v_1, v_2, \dots, v_n .

Эта переформулировка позволяет нам напрямую применить лемму. Действительно, поскольку все числа $0, 1, \dots, 2^n - 1$ лежат в наших прогрессиях, равенство (4) выполняется при всех $m = 0, 1, \dots, 2^n - 1$. Но тогда оно выполняется и при всех целых m ; это и означает, что каждое целое m лежит в одной из наших прогрессий.

И. Богданов

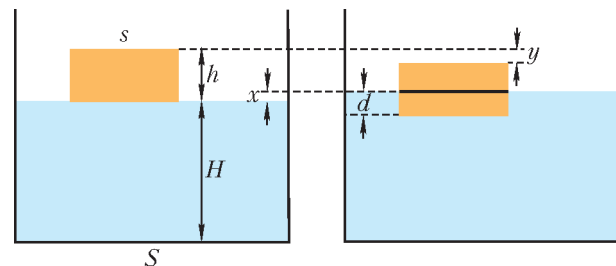
НАША ОБЛОЖКА

Где проходит ватерлиния?

(Начало см. на 4-й странице обложки)

...Известно, что всякая изолированная система стремится уменьшить свою потенциальную энергию. Попробуем применить этот принцип для поиска положения ватерлинии однородного деревянного бруска, плавающего в воде.

Пусть брусок имеет высоту h , площадь поперечного сечения s и сделан из материала плотностью ρ . Опустим брусок в сосуд с водой плотностью ρ_0 , площадь поперечного сечения которого S , а глубина воды в нем (до опускания бруска) H (см. рисунок). Брусок частично погрузится в



(Продолжение см. на с. 43)

Задачи

1. В фотоателье есть правило: если фотографий меньше ста, то напечатать одну фотографию стоит 3 руб. 50 коп., а если фотографий 100 или больше, то печать одной фотографии стоит 3 руб. Получается, что выгоднее отдать в печать 100 фотографий по 3 руб., чем 99 по 3,5 руб. При каком наименьшем числе фотографий можно добавить еще несколько фотографий, чтобы после этого плата за печать уменьшилась?

А.Ковальджи



2. Спичками изображена фигура, представляющая собой объединение четырех одинаковых кубиков. На изображении четвертый кубик не виден, он спрятан за тремя видимыми кубиками. Переложите девять спичек так, чтобы все четыре кубика этой фигуры можно было увидеть.

Н.Авилов

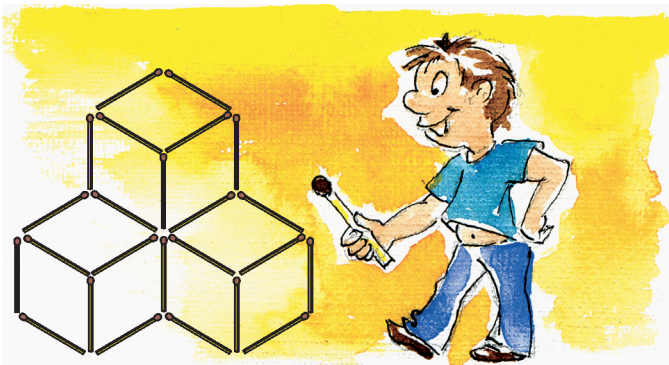


Иллюстрация Д.Гришуковой

3. Придумайте четырехзначное число, которое не делится на 2010, но если его запись повторить 15 раз, то полученное многозначное число будет делиться на 2010.

Н.Кушпель

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов. Задачи 3, 4, 5 предлагались на районном туре 77-й Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике.



4. Саша, Дима и Федя коллекционируют кусочки пазла «Крошка Енот». Пазл — это картинка, разрезанная на кусочки хитрой формы, среди которых нет одинаковых. Если бы у Федя был желтый кусочек с носом Енота, у Саши был зеленый кусочек с хвостом, а у Димы был синий кусочек с лапкой, то оказалось бы, что любые два мальчика, собравшись вместе, могли бы из своих кусочков составить картинку целиком. Докажите, что уже сейчас втроем мальчики смогут целиком составить пазл.

Ф.Бахарев



5. Разрежьте по клеточкам квадрат размером 10×10 клеток на 5 прямоугольных частей по схеме, показанной на рисунке, так, чтобы площадь прямоугольника A была больше площади каждой из остальных частей и при этом периметр прямоугольника B был больше периметра каждой из остальных частей.

К.Кохась

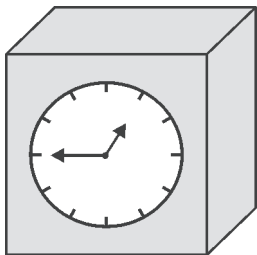


Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу: math@kvant.info (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

11. Настольные часы с часовой и минутной стрелками имеют форму куба с круглым циферблатом в центре одной из граней. На часах нет чисел и каких-либо пометок, показывающих, где у них верх. Поэтому можно случайно поставить их на бок или даже вверх ногами.



а) Какое время показывают часы на рисунке?

б) Есть ли в сутках хотя бы один такой момент, когда нельзя будет определить, какое время показывают эти часы?

Н.Стрелкова

12. По кругу стоят 10 бочек с водой. Сначала половину воды из первой бочки перелили во вторую, потом треть воды из второй бочки перелили в третью, затем четверть воды — из третьей бочки в четвертую, ..., после чего $1/10$ из девятой бочки перелили в десятую и, наконец, долили воду из десятой бочки в первую до ее исходного уровня. Могло ли в каждой бочке оказаться столько же воды, сколько было в ней вначале?

Г.Гальперин

13. Пусть N — натуральное число. Каких треугольников с целыми длинами сторон больше — разносторон-

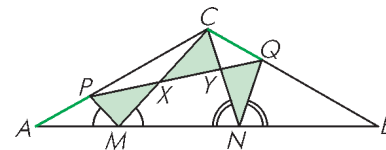
них, у которых длины стороны не меньше 1 и не больше $N + 3$, или всевозможных, у которых длины сторон не меньше 1 и не больше N ?

А.Эвнин

14. 60 детей построились парами и пошли в музей. По пешеходному переходу они шли толпой, а после него снова построились парами (но некоторые пары могли стать другими). Докажите, что в музее детей можно разбить на три равные группы так, чтобы дети в одной группе ни разу не были в одной паре.

И.Богданов

15. Угол C при вершине равнобедренного треугольника ABC равен 120° . Из вершины C выпустили внутрь треугольника два луча, которые, отразившись от основания AB в точках M и N (по закону «угол падения равен углу отражения»), попали соответственно на боковую сторону AC в точку P и на боковую сторону BC в точку Q . Известно, что $AP = CQ$. Пусть отрезок PQ пересекает CM в точке X , а CN — в точке Y . Докажите, что треугольники PMX , XCY и QNY равны.



В.Произволов

Летний турнир имени А.П.Савина

С наступлением лета школьники разъезжаются отдыхать. Но для некоторых ребят увлекательный отдых — решение математических задач. А также общение с теми, у кого такая же горячая любовь к математике. Каждый год в конце июня проходит турнир математических боев памяти А.П. Савина. В 2010 году он состоялся в 16-й раз. Как и раньше, он проходил на берегу живописного озера, на базе отдыха «Берендеевы Поляны» около Судиславля (Костромская область).

В соревнованиях приняли участие 38 команд из Москвы, Санкт-Петербурга, Костромы, Тамбова, Черноголовки, Харькова и Киева. Инициаторы проведения турнира — Григорий Вячеславович Кондаков и образовательная программа «Большая Перемена».

В первый день турнира прошла игра «Математическая абака».

Это увлекательное соревнование, где ребятам надо выбирать задачи как по сложности, так и по темам. Так, например, семиклассникам предложили задания по логике и теории чисел, арифметике и алгебре, а также задания, объединенные в группу с расплывчатым названием «Числа». Из победителей назовем команды, занявшие первые места. Среди 6 классов — это команда кружка «Квантик» (Москва). Среди семиклассников — первая команда гимназии 1514 (Москва). Команда школы 82 из Черноголовки (Московская область) стала лучшей в 8 классах. Команда «А» ЦО 218 (Москва) заняла 1 место среди 9 классов.

На следующий день команды 6–8 классов участвовали в командной олимпиаде, по результатам которой они были разделены на лиги. А девятиклассники уже начали сражаться: 6 команд составили отдельную лигу и за 5 дней провели полный круговой

турнир. Команды 6–8 классов разделились на подгруппы лиг 6 классов, 7 классов, 8 классов, а также смешанной лиги 7–8 классов.

Турнир математических боев – это не только борьба с задачами. Каждый вечер группы ребят и руководителей собираются возле листочков с результатами очередного тура, долго обсуждают итоги и пытаются делать прогнозы на следующий тур. Но надо признать, что в большей части групп лиг интриги не получилось: команды в итоге выстроились в таком порядке, когда команда, оказавшаяся в итоге выше, выигрывала у команды, оказавшейся ниже. Сложно было делать прогнозы в 9 классе: здесь три команды настойчиво выигрывали у остальных трех. Все шло к тому, что первые три команды выигрывают друг у друга по кругу, и так же произойдет среди оставшихся трех команд. Неужели команды не распределятся по местам? Все ждали последний тур. В итоге неожиданная «ничья» определила 3 и 4 места, а 1 и 2 место определились по личной встрече между командами.

В лиге 6 классов лучшей стала команда московской гимназии 1514, выиграв в финальном бою у шестиклассников школы 179. Зато семиклассники школы 179 заняли первое место, победив прошлогоднего победителя – команду кружка «Фрактал» из Санкт-Петербурга. Первое место в лиге 8 классов заняла сборная команда кружка А.В.Спивака, в которой играл только один ученик 8 класса, а остальные игроки – семиклассники. В результате упорной борьбы в лиге 9 классов лучшей стала команда кружка Т.П.Зориной с названием «Москва-Юг». Заметим, что эта команда выиграла не только два летних турнира – осенью 2009 года они увезли кубок турнира «Kostroma Open 8–9».

Список всех призеров турнира представлен на странице 30.

Один день турнира ребята отдыхают от математических боев. В это время проходит личная олимпиада, а точнее – целых четыре (по каждой из параллелей 6, 7, 8 и 9 классов). Среди шестиклассников лучшими стали *Степан Петров* из Санкт-Петербурга (школа 30) и пятиклассница *Дарья Николаева* (школа 464, Москва). Результат *Юли Зайцевой* (школа 179, Москва) в олимпиаде 7 классов был отмечен «гран-при», а первые дипломы получили два ее одноклассника *Илларион Дмитриев* и *Саша Ватузов*, а также *Андрей Зерцалов* из ЦО 218 Москвы. Но на этом дипломы, заработанные семиклассниками, не закончились – *Андрей Волгин* (7 класс, гимназия 1543, Москва) стал одним из лучших в олимпиаде 8 классов. Дипломы I степени также получили двое киевлян *Никита Щеглов* и *Данил Хилько* (оба – лицей 208) и москвич *Ваня Зверев* (школа 853, Москва). Команды киевского лицея 208, впервые приехавшие на турнир, увезли еще один диплом первой степени – его получил *Максим Чаудхари* в олимпиаде 9 классов. Вместе с ним такой результат



Сборная команда кружка А.В.Спивака



Математический бой

показали *Саша Корочкин* (гимназия 1514, Москва) и *Лев Синяков* (школа 350, Москва).

Обладателями дипломов II степени стали: *Зайцева Татьяна* (6 кл., школа 179, Москва), *Ипатов Михаил* (6 кл., гимназия 1, Кострома), *Виленский Самуил* (6 кл., школа 57, Москва), *Ионица Георгий* (7 кл., гимназия 1543, Москва), *Петренко Иван* (7 кл., лицей 17, Кострома), *Лебедева Дарья* (7 кл., лицей 533, Санкт-Петербург), *Лукашевич Дмитрий* (7 кл., гимназия 28, Кострома), *Чистопольская Алиса* (7 кл., гимназия 1543, Москва), *Белугина Виктория* (7 кл., лицей 533, Санкт-Петербург), *Гудков Сергей* (8 кл., гимназия 1514, Москва), *Райко Арсений* (8 кл., школа 179, Москва), *Зуев Антон* (8 кл., школа 179, Москва), *Мельниченко Петр* (8 кл., школа 315, Москва), *Мукин Тарас* (8 кл., лицей 14, Тамбов), *Князева Алиса* (8 кл., ФМЛ 27, Харьков), *Кулаков Петр* (8 кл., школа 82, Черноголовка), *Любчик Евгений* (8 кл., УВК 45 АГ, Харьков), *Хачатурян Марина* (8 кл., гимназия 1543, Москва), *Никитин Игорь* (8 кл., гимназия 1543, Москва), *Харитоновна Елена* (8 кл., лицей 208, Киев), *Заславский Олег* (8 кл., гимназия 1543, Москва), *Ситкин Александр* (8 кл., школа 179, Москва), *Меньшов Сергей* (9 кл., лицей 20, Междуреченск), *Ефимов Андрей* (9 кл., ЦО 218, Москва), *Сандрикова Мария* (9 кл., ЦО 218, Москва), *Феклина Анастасия* (9 кл., школа 179, Москва), *Королев Андрей* (9 кл., школа 1345, Москва), *Кульчицкий Юрий* (9 кл., лицей 208, Киев), *Попов Сергей* (9 кл., ЦО 218, Москва).

Дипломами III степени награждены *Пучка Тарас* (6 кл., школа 179, Москва), *Шибанкова Екатерина* (6 кл., школа 179, Москва), *Шатский Владимир* (6 кл., гимназия 1514, Москва), *Волков Виктор* (6 кл., школа 622, Москва), *Гришутин Александр* (6 кл., школа 827, Москва), *Тукачинский Владислав* (6 кл., гимназия 1514, Москва), *Золотов Борис* (6 кл., школа 3, Гатчина), *Румянцев Влад* (6 кл., школа 179, Москва), *Семин Иван* (6 кл., школа 30, Санкт-Петербург), *Полевой Сергей* (7 кл., «Интеллектуал», Москва), *Некрасова Татьяна* (7 кл., школа 179, Москва), *Исхаков Тимур* (7 кл., ЦО 218, Москва), *Смирнова Ирина* (7 кл., лицей 17, Кострома), *Махлина Екатерина* (7 кл., гимназия 1543, Москва), *Ванчурина Антонина* (7 кл., школа 179, Москва), *Бакунов Никита* (8 кл., ФМЛ 27, Харьков), *Савостьянов Антон* (8 кл., лицей 14, Тамбов), *Уруев Андрей* (8 кл., лицей 34, Кострома), *Щербань Яков* (8 кл., школа 82, Черноголовка), *Котельникова Юлия* (8 кл., гимназия 1543, Москва), *Говорухин Ярослав* (8 кл., школа 179, Москва), *Добровольская Анна* (9 кл., гимназия 1514, Москва), *Погорелов Иван* (9 кл., гимназия 1514, Москва), *Попеску Андрей* (9 кл., гимназия 1514, Москва), *Сафронов Кирилл* (9 кл., гимназия 1514, Москва), *Сердюк Ярослава* (9 кл., лицей 208, Киев), *Преображенский Анатолий* (9 кл., ЦО 218, Москва).

Также многие ребята были награждены похвальными грамотами.

Отбором задач и составлением вариантов занималась методи-

| Лига | Диплом | Команда | Капитан | Руководитель |
|--------------|------------|------------------------------------------------------------|--------------------|---------------------------------------------------------|
| Лига 9 кл. | I диплом | Сборная «Москва-Юг», Москва | Л.Синяков | Т.П.Зорина |
| Лига 9 кл. | II диплом | ЦО 218, Москва | А.Ефимов | А.Д.Блинков, Е.С.Горская |
| Лига 9 кл. | III диплом | Лицей 208, Киев | М.Чаудхари | Т.Д.Тимошкевич |
| Лига 8 кл. | I диплом | МММФ-8, Москва | О.Заславский | А.В.Спивак, Е.Б.Пронина |
| Лига 8 кл. | II диплом | «Эврика-8», Харьков | Е.Любчик | А.Л.Берштейн |
| Лига 8 кл. | II диплом | Гимназия 1543, Москва | М.Грачева | Т.В.Караваева, И.В.Раскина, М.А.Берштейн, А.В.Хачатурян |
| Лига 8 кл. | III диплом | Лицей 14, Тамбов | Т.Мукин | А.В.Бурмистрова |
| Лига 8 кл. | III диплом | Лицей 208, Киев | Н.Щеглов | Т.Д.Тимошкевич |
| Лига 7 кл. | I диплом | Школа 179, Москва | А.Ватузов | Д.В.Швецов, А.Ю.Юрков, Г.А.Кузнецов |
| Лига 7 кл. | II диплом | Кружок «Фрактал», Санкт-Петербург | Е.Цейтина | А.П.Храпкина, А.П.Погода |
| Лига 7 кл. | II диплом | ЦО 218, Москва | А.Зерцалов | Ю.А.Блинков, О.А.Карпов |
| Лига 7 кл. | III диплом | Школа 179, Москва | Е.Гаврилец | Д.В.Швецов, А.Ю.Юрков, Г.А.Кузнецов |
| Лига 7 кл. | III диплом | Гимназия 1514, Москва | И.Брауде-Золотарев | Л.О.Бычкова |
| Лига 6 кл. | I диплом | Гимназия 1514, Москва | В.Шатский | Л.О.Бычкова, Н.Т.Гребенник |
| Лига 6 кл. | II диплом | Школа 179, Москва | Т.Зайцева | Д.В.Швецов, А.Ю.Юрков, Г.А.Кузнецов |
| Лига 6 кл. | II диплом | Гимназия 1514, Москва | А.Рыбина | Л.О.Бычкова, А.Горденко |
| Лига 6 кл. | III диплом | Кружок «Квантик» Москва | В.Волков | И.А.Николаева |
| Лига 6 кл. | III диплом | сборная лицея 30 (Санкт-Петербург) и кружка ДНТТМ (Москва) | И.Семин | А.В.Садовников, Т.П.Зорина |
| Лига 7-8 кл. | I диплом | Гимназия 1514, Москва | Т.Григорьев | Т.В.Житникова |
| Лига 7-8 кл. | II диплом | Школа 179, Москва | А.Райко | Д.В.Швецов, А.Ю.Юрков, Г.А.Кузнецов, Т.П.Зорина |
| Лига 7-8 кл. | II диплом | ДНТТМ, Москва | Г.Ионица | Т.П.Зорина, А.В.Спивак |
| Лига 7-8 кл. | III диплом | Школа «Интеллектуал», Москва | А.Иглина | А.И.Сгибнев |
| Лига 7-8 кл. | III диплом | Школа 179, Москва | С.Фельдшеров | М.В.Прасолов |

ческая комиссия под общим руководством А.В.Шаповалова. Варианты лиги 9 классов составляли М.А.Берштейн, М.В.Прасолов, А.А.Заславский, 8 классов – А.В.Хачатурян, Н.Т.Гребенник, П.В.Мартынов, 7 классов – Д.В.Прокопенко, Ю.А.Блинков, А.И.Сгибнев, 6 классов – И.В.Раскина, А.П.Пагода, Н.Л.Чернятьев, варианты лиги 7–8 классов собирали Д.А.Калинин, Э.А.Акопян. Кроме них, в методкомиссии работали А.Д.Блинков, Е.С.Горская, Т.В.Караваева, Д.В.Швецов, А.Ю.Юрков, О.А.Карпов.

Книги и другие призы для победителей предоставили журнал «Квант», компании «Яндекс», «АВВУ» и Фонд математического образования и просвещения.

Конечно, такой турнир должен быть представлен не только участниками и победителями. Запоминаются яркие эмоции от побед (а порой и от неудач), но остаются в памяти яркие задачи. Приведем некоторые из задач турнира. У каждой задачи указано, для каких классов она наиболее подходит, а если известно, то и автор.

Избранные задачи турнира

1 (6–8). Произведение двух последовательных натуральных чисел может оканчиваться на 1000. Например, $1000 \cdot 1001 = 1001000$ или $8999 \cdot 9000 = 8999 \cdot 9 \cdot 1000 = \dots 1000$.

а) Может ли произведение четырех последовательных натуральных чисел оканчиваться на 1000?

б) Может ли произведение шести последовательных натуральных чисел оканчиваться на 1000?

Д.Шноль

2 (6–7). Нарисуйте 6-угольник и проведите прямую через две его вершины, которая разбивает его на два пятиугольника.

В.Гуровиц

3 (6–7). 2010 шариков раскрасили в 7 цветов радуги. На каждом шаре написали общее количество шаров такого же

цвета, как и этот. Чему может быть равна сумма чисел, обратных написанным?

Г.Гальперин

4. а) (6–8) В 10 кошельках лежали монеты. Достоинства любых двух монет из одного кошелька отличались не более чем на 1 берендейку. Монеты смешали и положили в непрозрачный мешок. Саша про монеты заранее ничего не знает. Он вынимает по одной монете из мешка, смотрит на нее и кладет в одну из 19 имеющихся коробок. Положив монету в коробку, потом ее уже нельзя переложить. Докажите, что Саша может действовать так, чтобы в каждой коробке достоинства любых двух монет отличались не более чем на 1 берендейку.

б) (7–8) В 10 кошельках лежали монеты так, что веса любых двух монет из одного кошелька отличались не более чем на 1 г (массы монет могут быть нецелыми). Монеты смешали и положили в непрозрачный мешок. Саша про массы монет заранее ничего не знает. Он вынимает одну монету из мешка, взвешивает, затем кладет монету в одну из имеющихся 20 коробок, вынимает следующую монету и т.д. (Положив монету в коробку, потом ее уже нельзя переложить.) Докажите, что Саша может действовать так, чтобы в каждой коробке массы любых двух монет отличались не более чем на 1 г.

в) Условие задачи такое же, как в п. б), но коробок 19.

А.Шаповалов

5 (6–7). У двух восьмизначных чисел произведения цифр положительны и равны. В каждом из чисел все цифры различны. Докажите, что у этих чисел равны и суммы цифр.

А.Шаповалов

6 (8–9). а) При каком наименьшем n найдется n -угольник, который можно разрезать на 13 равных частей?

А.Заславский

б) Существуют ли три попарно не подобных треугольника, каждый из которых можно разрезать на 26 равных треугольников?

А.Заславский, Б.Френкин

7 (7–9). Даны 10 бумажных прямоугольников. Вася может разрезать не более одного из них на два меньших прямоугольника. После этого он делит прямоугольники на две группы. Всегда ли он может добиться, чтобы суммы периметров в группах были одинаковы?

А.Шаповалов

8 (6–7). Коля и Толя по очереди закрашивают по две клетки на полоске 1×2010 . Коля хочет, чтобы расстояния между двумя отмеченными им за один ход клетками не повторялись. Сможет ли Толя ему помешать?

Н.Чернятьев

9 (7–8). У Саши есть 27 кусков сыра с массами 100, 200, 300, ..., 2700 граммов. Он очень хочет разложить весь сыр на кучки так, чтобы в каждой кучке был кусок, весящий столько же, сколько и все остальные куски в этой кучке вместе. Сколько кучек у него может получиться?

А.Грибалко

10 (7–8). В школе число мальчиков равно числу девочек. Ни в каком классе не учится больше, чем полшколы. Все ученики школы пришли на дискотеку. Диджей объявил белый танец. Докажите, что каждая девочка сможет пригласить мальчика из другого класса.

Фольклор

11 (8–9). Целые числа a, b, c, d удовлетворяют условию $a^3 + ba^2 + ca + d = 0$. Докажите, что число $c^2 - 4bd - 4ad$ – квадрат целого числа.

А.Хачатурян

12 (6–8). В летней школе мальчики и девочки живут в двух- и трехместных номерах (как мальчики, так и девочки занимают много и двух-, и трехместных номеров). Свободных мест нет. Посреди смены уехал один мальчик, живший в трехместном номере, а приехала новая девочка. Какое наименьшее количество школьников придется переселить, чтобы поселить девочку в трехместный номер?

В.Гуровиц

13 (7–8). Можно ли расставить в выражении $1 * 2 * 3 * \dots * 100 / (1 * 2 * 3 * \dots * 100)$ вместо звездочек знаки умножения и деления так, чтобы полученное выражение равнялось $1/10$?

Фольклор

14 (7–9). На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 1001. Двое играют в игру – по очереди стирают по одному числу, пока на доске не останется только два числа. Если одно из них делится на второе, побеждает первый, если нет – второй. Кто из игроков имеет возможность победить при любой игре противника?

А.Шаповалов

15 (6–8). Петя разбил клетчатый квадрат 7×7 на прямоугольники по границам клеток, и раскрасил прямоугольники в три цвета так, что прямоугольники одного цвета не соприкасались даже углами. Какое наибольшее число прямоугольников могло быть у Пети?

А.Шаповалов

16 (7–9). Есть $2n$ человек: n болеют за «Спартак» и n – за «Динамо». Можно спросить у любых двоих, за одну они болеют команду или за разные, и они честно ответят. Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это можно сделать?

И.Раскина

17 (7–9). Параллелограмм разбит на треугольники. Докажите, что один из них можно накрыть всеми остальными вместе.

А.Шаповалов

18 (7–9). В точном квадрате – более миллиона цифр. Какое наименьшее количество цифр может быть четными?

А.Шаповалов

19 (8–9). а) Леша говорит, что придумал квадратный трехчлен с целыми корнями. Потом он прибавил ко второму коэффициенту 2, а к свободному члену 6 и снова получил квадратный трехчлен с целыми корнями. С результатом сделал то же, снова получил квадратный трехчлен с целыми корнями и так делал 2010 раз, и все время получались целые корни. Могут ли его слова быть правдой?

б) Есть две арифметические прогрессии a_n, b_n . Известно, что при каждом n уравнение $x^2 + a_n x + b_n = 0$ имеет два корня. Докажите, что у всех этих уравнений есть общий корень.

А.Марачев, А.Заславский

20 (7–8). Всех участников турнира два раза разбивали на команды: первый раз для игры в «Абаку», второй – в «Завалинку». Размеры команд в каждой игре не обязательно одинаковы, но в каждой команде есть хотя бы один участник. Оказалось, что каждый участник играл в «Завалинку» в не меньшей по численности команде, чем в «Абаку». Докажите, что в «Абаку» играло не меньше команд, чем в «Завалинку».

А.Лебедев, А.Шаповалов

21 (8). У Ежика и Лисы есть кусочек сыра массой в целое число граммов. Они играют в шахматы. Если выигрывает Ежик, то он съедает 4 грамма, если выигрывает Лиса, то она съедает четверть оставшегося сыра. После нескольких игр осталось целое число граммов сыра, при этом Лиса и Ежик съели поровну сыра и набрали поровну очков. Сколько граммов сыра осталось?

Т.Голенищева-Кутузова, А.Хачатурян

22 (6–7). Робин-Бобин Барабек грабил 40 человек. Сначала он отобрал 6 пончиков у первого человека, разделил их на несколько одинаковых кучек и одну из кучек съел. У каждого из следующих он также отбирал по 6 пончиков, затем делил все имеющиеся к этому моменту пончики на равные кучки, одну съедая и т.д. Ограбив последнего, он разделил пончики на 6 кучек, а потом съел 6 пончиков. Сколько всего пончиков съел Робин, если до начала серии ограблений пончиков у него не было?

А.Шаповалов

23 (8–9). Есть одна монета, известно, что она – фальшивая. Есть еще девять таких же с виду монет. Как за три

(Продолжение см. на с. 34)

Стереометрия для всех

Стереометрия изучается в 10 и 11 классах и считается трудным предметом. Но многие стереометрические задачи доступны даже младшеклассникам. Мы собрали здесь несколько таких задач. А также добавили и более сложные задачи — формулировки их понятны любому, решения же требуют некоторой изобретательности (но минимум знаний).

Разминка

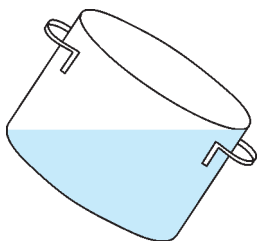


Рис. 1

1. Есть кран с водой и цилиндрическая кастрюля. Как набрать ровно половину кастрюли воды?

Решение. Наберем сначала полную кастрюлю, а потом отольем лишнее: будем наклонять ее до тех пор, пока не покажется дно (рис. 1).

2. Верно ли, что литровая и двухлитровая бутылки «Кока-Колы» подобны, т.е. одна получается из другой увеличением всех размеров в несколько раз?

Подсказка: решение не требует никаких вычислений!

3. а) Можно ли расположить пять одинаковых монет так, чтобы каждые две касались друг друга?

б) А можно ли расположить таким же образом шесть неоточенных карандашей?

Ответ. Можно в обоих пунктах.

Подсказка к пункту б): первые три карандаша положите на стол так, как показано на рисунке 2 (каждые два из них касаются друг друга).

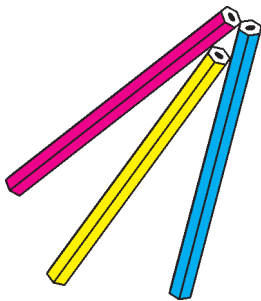


Рис. 2

Подсказка: подумайте, можно ли поместить первые два шара внутрь сферы радиуса 8 см.

6. Есть три одинаковых кирпича (прямоугольных параллелепипеда). Как с помощью линейки измерить длину диагонали кирпича (т.е. расстояние между двумя противоположными вершинами, не лежащими в одной грани)? Именно измерить, а не вычислить!

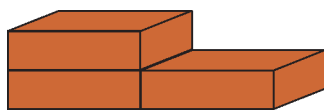


Рис. 3

Подсказка изображена на рисунке 3.

7. а) Можно ли выпилить из дерева выпуклую многогранную фигуру, отличную от куба, каждая грань которой квадрат?

б) А если фигура может быть невыпуклой?

Решение. а) Нельзя. *Указание:* в каждой вершине многогранника сходятся не меньше трех граней, а больше трех граней сдвигаться не может — сумма плоских углов при такой вершине будет не меньше 360° .

б) Можно: например, возьмем один кубик и приклеим к каждой его грани еще по такому же кубику. Такую фигуру можно выпилить.

8. Существует ли многогранник, все грани которого — равнобедренные прямоугольные треугольники?

Развертки

9. На одной из клеток клетчатой фигуры нарисовали краской букву P (рис. 4). На эту клетку поставили кубик с ребром, равным стороне клетки, и, перекатывая через ребра, прокатили по фигуре. При этом отпечаток буквы появился на грани кубика и на всех клетках, на которые становилась эта грань. В каких еще клетках появился отпечаток, и как именно там отпечаталась буква?

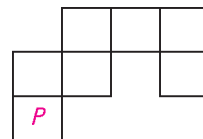


Рис. 4

10. Муравей сидит в вершине деревянного куба. Он хочет, двигаясь по поверхности куба, переползти в противоположную вершину по кратчайшему пути. Как ему это сделать?

Решение. Всего у куба шесть граней, три примыкают к вершине A , и три — к вершине B (рис. 5). Чтобы попасть из точки A в точку B , муравей должен в какой-то момент переползти с грани, примыкающей к A , на грань, примыкающую к B . Пусть это происходит на ребре XU в точке M . Но тогда ясно, что до этого момента муравью короче всего ползти по отрезку AM , а после этого момента короче всего ползти по отрезку MB . Вырежем мысленно те две грани, по которым ползет муравей, и расположим их на плоскости в виде прямоугольника (рис. 6). Для какой точки M путь $AM + MB$ будет самым коротким? Конечно же, для середины отрезка XU : тогда он просто равен диагонали AB нашего мысленного прямоугольника. Значит, надо сначала ползти из A по прямой в середину одного из ребер, не примыкающих ни к A , ни к B , а потом ползти из этой середины по прямой в точку B .

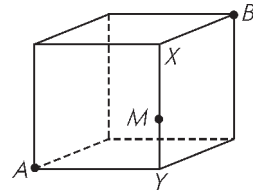


Рис. 5

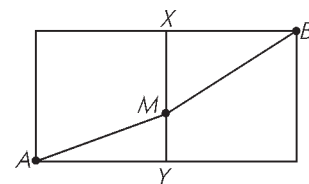
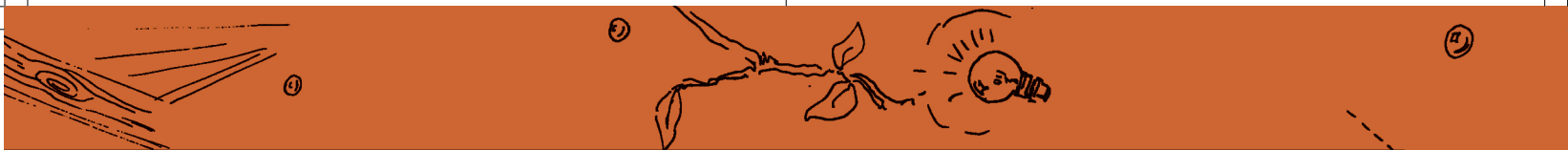


Рис. 6



11. В вершине A квадрата $ABCD$ сидит муравей. Точки A и C разделяет вертикальная стена в виде равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой BD . Как муравью попасть в точку C кратчайшим путем?

Подсказка: умный в гору не пойдет.

12*. Дан кирпич (прямоугольный параллелепипед), по поверхности которого ползает муравей. Изначально муравей сидит в углу. Верно ли, что среди всех точек поверхности на наибольшем расстоянии от муравья находится противоположный угол? (Расстоянием между точками, с точки зрения муравья, является длина кратчайшего пути между этими точками, проходящего по поверхности кирпича.)

13*. Бумажный тетраэдр разрезали по ребрам так, что получилась плоская развертка. Может ли случиться, что эту развертку нельзя расположить на плоскости без наложений (в один слой)?

Ответ: может.

Замечание: до сих пор не решена проблема — верно ли, что любой выпуклый многогранник можно так разрезать по ребрам, что получится несамопересекающаяся плоская развертка?

Шары в пространстве

14. а) Можно ли так расположить четыре одинаковых шара в пространстве, чтобы каждый касался всех остальных?

б) А пять шаров (не обязательно одинаковых)?

Решение. а) Положим три одинаковых шара на стол и сдвинем их так, чтобы любые два касались друг друга. Затем положим один шар сверху так, чтобы он коснулся остальных. (В итоге центры шаров будут располагаться в вершинах правильного тетраэдра со стороной, равной удвоенному радиусу шара.)

б) Возьмем пирамидку из четырех шаров, построенную в предыдущем пункте. В центр этой пирамидки поместим маленький шарик и начнем раздувать его, пока он не коснется остальных четырех шаров. Такой момент обязательно наступит, и касание будет сразу со всеми шарами пирамидки из-за ее симметричности.

15. Есть 20 шариков, склеенных так, что получилось две «цепочки» по 4 шарика в каждой и два «прямо-

угольника» из 6 шариков со сторонами 2 и 3 шарика (рис. 7). Как сложить эти 4 набора, чтобы получилась составленная из шариков треугольная пирамида?

16. В пространстве имеется точечная лампочка, светящая во все стороны. Можно ли подобрать 4 непрозрачных шара и так расположить их в пространстве, чтобы они не пересекались друг друга, не касались лампочки и полностью загорали свет от нее (т.е. чтобы любой луч, выходящий из лампочки, упирался в один из этих шаров)?

Решение. Рассмотрим в пространстве такой правильный тетраэдр, что наша лампочка попадет ровно в его центр. Опишем вокруг одной из граней тетраэдра окружность. Соединим лампочку лучами со всеми точками этой окружности. Получим бесконечный конус. В этот конус можно положить шар (любого размера), и

он закроет собой все лучи, идущие из лампочки внутри этого конуса. А как быть с лучами, идущими по границе конуса: они упрутся в наш шар или нет? Для надежности увеличим немного размеры нашего шара (не меняя положение его центра и так, чтобы не задеть лампочку): тогда лучи, идущие по границе конуса, тоже упрутся в шар. Теперь рассмотрим второй конус (полученный с помощью другой грани тетраэдра). И его можно закрыть шаром, надо только расположить его далеко от лампочки (взяв для этого шар достаточно большого радиуса), чтобы он не пересекался с предыдущим шаром. Аналогично строим и закрываем еще два конуса. Так как луч, выходящий из лампочки, лежит в одном из конусов, шары загораживают весь свет от нее.

Проекции

17. а) Если смотреть на аквариум спереди, то рыбка проплыла, как показано слева на рисунке 8. А если смотреть справа — то как на рисунке 8 справа. Нарисуйте вид сверху.



Рис. 8



Рис. 9

б) Та же задача для рисунка 9.

18. Может ли тень куба быть правильным шестиугольником?

19. Существует ли выпуклый многогранник, ни одна грань которого не является квадратом, с таким свойством: если посмотреть на него сверху, спереди и сбоку, то мы каждый раз увидим квадрат?

Разное

20. Можно ли расположить восемь пирамид в пространстве так, чтобы каждые две соприкасались гранями (по участку ненулевой площади)?

21. Верно ли, что каждая внутренняя точка любого выпуклого многогранника принадлежит какому-то отрезку, концы которого находятся на ребрах этого многогранника?

22. Пирамиду, основание которой правильный треугольник, а боковые грани равнобедренные прямоугольные треугольники, отразили относительно середины высоты пирамиды. Какая фигура будет пересечением исходной и отраженной пирамид?

Подсказка: эта фигура вам очень хорошо известна.

23. Можно ли разбить какую-нибудь призму на непересекающиеся пирамиды, у каждой из которых основание лежит на одном из оснований призмы, а вершина — на другом основании призмы?

24. Можно ли в пространстве составить замкнутую цепочку из нечетного числа одинаковых согласованно вращающихся шестеренок? Для простоты считайте шестеренки кругами; шестеренки сцеплены если соответствующие окружности в точке соприкосновения имеют общую касательную.

25*. Есть циркуль, линейка, бумага, карандаш и деревянный шар. Можно рисовать на шаре (циркулем и карандашом) и на бумаге (здесь можно пользоваться и линейкой). Как нарисовать на бумаге отрезок, равный радиусу шара?

Материал подготовил С.Дориченко

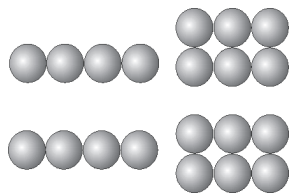
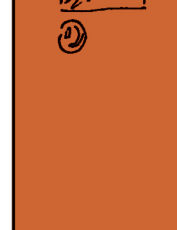


Рис. 7



(Начало см. на с. 28)

взвешивания на чашечных весах без гирь проверить, есть ли среди этих девяти монет хотя бы одна фальшивая монета? (Настоящие монеты весят одинаково, фальшивые тоже весят одинаково и тяжелее настоящих).

А. Шаповалов

24 (9). Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Еще одна окружность, проходящая через точки B и C , касается отрезка AD в точке M_{AD} . Аналогично определяются точки M_{AB} , M_{BC} , M_{CD} . Докажите, что прямые $M_{AB}M_{CD}$ и $M_{AD}M_{BC}$ перпендикулярны.

А. Волчкевич, Д. Швецов

25 (9). Внутри остроугольного треугольника ABC выбрана точка N , а на сторонах AB и BC – точки P и Q соответственно. Отрезки NP , NQ и NA делят треугольник ABC на треугольник и два четырехугольника. Оказалось, что упомянутые четырехугольники – две равные трапеции. Как относятся их основания?

А. Хачатурян

26 (8–9). Есть клетчатый бильярдный стол размером 101×99 . По углам стола расположены лузы. Можно ли запустить шар таким образом, чтобы на своем пути он прошел по всем вершинам всех квадратиков сукна, расположенных внутри стола?

А. Юрков

27 (9). *Правильным маршрутом* на бесконечной клетчатой плоскости назовем маршрут ладьи, который имеет начало, не имеет конца и ровно по одному разу проходит через каждую клетку плоскости (ладья каждым ходом перемещается в соседнюю клетку по вертикали или горизонтали). Можно ли во всех клетках плоскости расставить натуральные числа так, чтобы каждое число встре-

чалось ровно один раз и на некотором правильном маршруте числа только возрастали, а на другом правильном маршруте все время чередовалось возрастание и убывание чисел?

Б. Френкин

28 (7–9). Петя и Вася играют на шахматной доске в следующую игру. Каждым ходом игрок выбирает некоторую свободную клетку и проводит в ней обе диагонали – одну красным цветом, другую синим. Запрещается проводить диагональ так, чтобы она имела общий конец с уже проведенной диагональю такого же цвета. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Первым ходит Петя. Кто из них может выигрывать, как бы не играл противник?

А. Шаповалов

29 (7–9). На клетчатой доске 8×8 часть клеток отмечена. Известно, что ладья может пройти от любой отмеченной до любой другой, не перепрыгивая через неотмеченные клетки, причем единственным маршрутом (иначе говоря, нет замкнутых маршрутов ладьи по отмеченным клеткам). Какое наибольшее число клеток может быть отмечено?

Б. Френкин

30 (9). Через вершину C ромба $ABCD$ проведена прямая, пересекающая отрезки AB и BD в точках M и K соответственно. Окружность, проходящая через точки A , M и K , пересекает прямые BD и AD в точках P и L соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника $СКР$ совпадает с центром описанной окружности треугольника $СМL$.

Ю. Блинков

Публикацию подготовили Д. Калинин, А. Шаповалов

ГОЛОВОЛОМКИ

Танграм

(Начало см. на 2-й странице обложки)

«Квант» уже писал о танграме в №5 за 1989 год. В этом номере мы предлагаем еще несколько заданий. Ниже вы видите 13 выпуклых многоугольников. Чтобы сложить каждый из них, потребуется весь набор из семи тангов. Попробуйте сделать это. Оказывается, что другие выпуклые многоугольники из семи тангов сложить невозможно. Это установили китайские математики в 1942 году.

В заключение сформулируем одну забавную задачу.

Аня подарила на Новый Год своим младшим братьям Боре

и Вите по танграму. Задание для них было одно: сложить квадрат, используя для этого все части. Через несколько дней, после многих тщетных попыток решить головоломку, Боря убедился, что из его набора это сделать невозможно. Посмотрев на Борин набор, Аня догадалась, в чем дело: она ошиблась и положила две детали не в ту коробку! В итоге одному брату достался набор из пяти частей, а второму – из девяти. Боря предложил рассказать об этом Вите, но Аня немного поразмыслила и поняла, что из Витино набора все равно можно сложить квадрат. Так какие же части Аня упаковала неправильно?

Е. Епифанов



Метод изогональных прямых

И. КУШНИР

Для человеческого разума симметрия обладает, по-видимому, совершенно особой притягательной силой.

Р.Фейнман

Изогональными называются прямые, которые проходят через вершину треугольника и симметричны относительно биссектрисы внутреннего угла треугольника, имеющей с прямыми общую точку (рис.1). Этими прямыми занимались Птолемей, Брахмагупта, Лежандр, Лагранж, Штейнер и многие другие. Мы рассмотрим два вида изогональных прямых (изогоналей): первый – ортоизогональные, второй – все остальные.

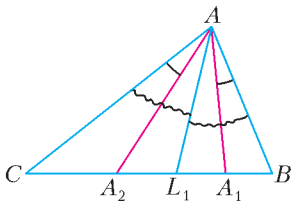


Рис. 1

Заметим, что биссектриса внутреннего угла треугольника изогональна сама себе.

Ортоизогональные прямые

Ортоизогональными прямыми мы назовем две изогоналей, из которых одна – высота треугольника.

Теорема 1 (главная). Для того, чтобы прямая была изогональна высоте треугольника, необходимо и достаточно, чтобы ей принадлежал центр O окружности, описанной около треугольника.

Доказательство. Необходимость. Пусть высота AH_1 (рис.2) изогональна прямой AA_1 , которая пересекает окружность, описанную около треугольника ABC , в точке D . Поскольку $\angle ADC = \angle ABH_1$, то $\angle ACD = 90^\circ$, значит, AD – диаметр.

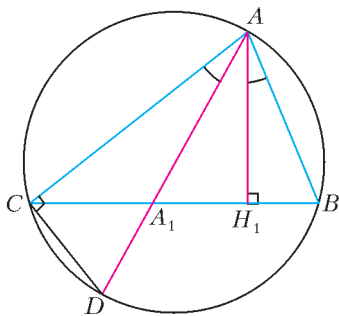


Рис. 2

Достаточность. Диаметр AD и высота AH_1 изогональны, так как $\angle CDA = \angle ABC$.

Задача 1. Докажите, что прямая OA , где O – центр описанной окружности треугольника ABC , перпендикулярна отрезку H_2H_3 (H_2 и H_3 – основания высот, проведенных из вершин B и C).

Решение. Разберем случай остроугольного треугольника ABC . Четырехугольник CH_2H_3B (рис.3) вписан в окружность с диаметром BC (поскольку углы BH_2C и CH_3B прямые). Тогда угол AH_2H_3 , дополнительный к углу CH_2H_3 ,

равен углу ABC (противоположному к углу CH_2H_3), и поскольку отрезки OA и AH_1 изогональны, $\angle H_2TA = 90^\circ$, где T – точка пересечения прямой OA с отрезком H_2H_3 .

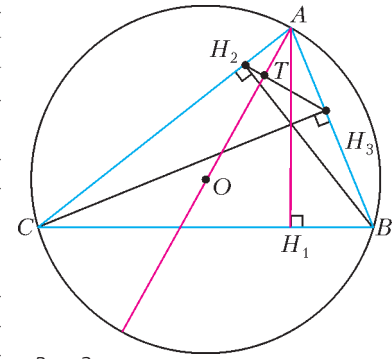


Рис. 3

Три задачи как одна

Задача 2. Для того чтобы треугольник был прямоугольным или равнобедренным, необходимо

и достаточно, чтобы медиана и высота, проведенные из какой-то одной вершины, были изогональны. Докажите это.

Задача 3. Определите углы треугольника, в котором биссектриса, медиана и высота, проведенные из одной вершины, делят угол на четыре равные части.

(Ответ: $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle ACB = 22^\circ 30'$.)

Задача 4. Определите углы треугольника, в котором высота и медиана, проведенные из одной вершины, делят угол на три равные части.

(Ответ: $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$.)

Задачи 2, 3, 4 решаются с помощью главной теоремы.

Ортоизогональи и проекция точки на две стороны треугольника, когда она движется по третьей

Пусть точка X движется по стороне BC (рис.4). Обозначим

через M и N проекции точки X на стороны AC и AB . Заметим, что точки A, M, X, N, H_1 принадлежат одной окружности – назовем ее γ_X .

Задача 5. Чтобы окружности γ_X и γ – окружность, описанная около треугольника ABC – внутренне касались, необходимо и достаточно ортоизогональности отрезков AX и AH_1 .

Действительно, в этом случае вершина A и центры окружностей γ_X и γ принадлежат одной прямой.

Задача 6. Чтобы отрезки AX и AH_1 были ортоизогональны, необходимо и достаточно, чтобы отрезок MN был параллелен стороне BC .

Решение. Отрезки AX и AH_1 ортоизогональны тогда и только тогда, когда равны дуги H_1N и MX , что равносильно параллельности отрезков MN и XH_1 (рис.5).

Основная формула.

Если отрезки AX и AH_1 ортоизогональны, то площадь S треугольника ABC вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} AA_0 \cdot MN,$$

где A_0 – точка пересечения прямой AH_1 с опи-

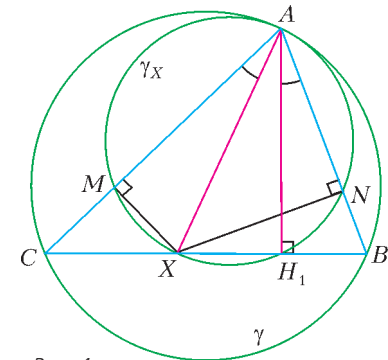


Рис. 4

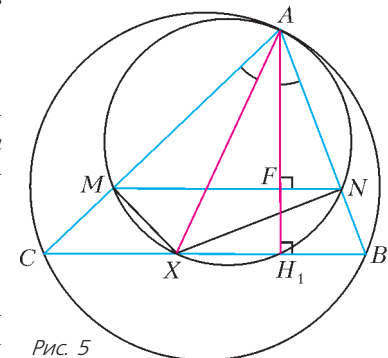


Рис. 5

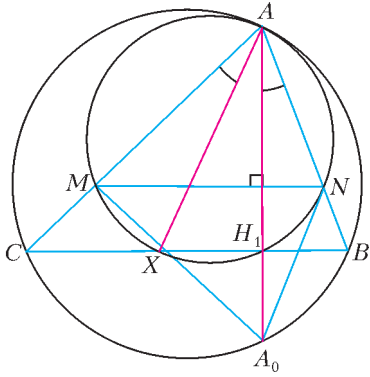


Рис. 6

В самом деле, $S_{ABC} = \frac{1}{2} AH_1 \cdot BC$. По задаче 5, окружности γ_X и γ касаются в точке A , а значит, гомотетичны с центром в точке A . При этой гомотетии M, H_1 и N переходят в точки C, A_0 и B соответственно. Отсюда $\frac{AH_1}{AA_0} = \frac{MN}{BC}$, и значит, $AH_1 \cdot BC = AA_0 \cdot MN$.

Общий случай изогональных прямых

Рассмотрим пары изогональных отрезков, не обязательно являющихся ортоизогональными.

Теорема 2. Если отрезки AA_1 и AA_2 изогональны, а треугольник ABC вписан в окружность, то существуют

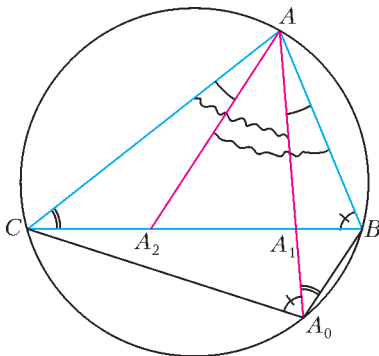


Рис. 7

два «изогональных подобия» треугольников (рис. 7) –

- первое: $\triangle ABA_0 \sim \triangle AA_2C$;
- второе: $\triangle CAA_0 \sim \triangle AA_1B$.

Покажем применение теоремы 2.

Задача 7. Докажите формулу биссектрисы $l_a^2 = bc - mn$, где $l_a = AL_1, L_1$ – основание биссектрисы, проведенной из вершины $A, m = BL_1, n = CL_1$.

Решение. Поскольку биссектриса изогональна сама себе, достаточно одного изогонального подобия: $\triangle ABW \sim \triangle AL_1C$ (рис. 8);

$$\frac{l_a + L_1W}{b} = \frac{c}{l_a}; \quad l_a^2 + l_a \cdot L_1W = bc, \quad l_a^2 = bc - l_a \cdot L_1W.$$

Поскольку $l_a \cdot L_1W = mn$ (произведение отрезков хорд), то $l_a^2 = bc - mn$.

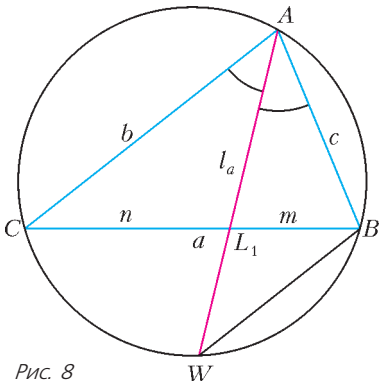


Рис. 8

Задача 8. Докажите основную формулу

$$S = \frac{1}{2} AW \cdot MN,$$

где S – площадь треугольника ABC, W – точка пересечения биссектрисы AL_1 с окружностью, описанной около треугольника ABC, M и N – проекции точки L_1 на стороны AC и AB .

санной около треугольника ABC окружностью.

Доказательство. Рассмотрим четырехугольник ANA_0M (рис. 6). Поскольку его диагонали AA_0 и MN перпендикулярны ($MN \parallel BC$), то его площадь равна половине их произведения: $\frac{1}{2} AA_0 \cdot MN$. Докажем, что этот четырехугольник равен велик треугольнику ABC .

Решение. Применив изогональное подобие треугольников AWB и ACL_1 (рис. 9), получим $AW \cdot l_a = bc$. Домножив обе части равенства на $\frac{1}{2} \sin \angle A$, имеем

$$\frac{1}{2} AW \cdot l_a \cdot \sin \angle A = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \angle A.$$

Поскольку $l_a \cdot \sin \angle A = MN$ (докажите!), то $S = \frac{1}{2} AW \cdot MN$, что и требовалось доказать.

Задача 9. Пусть точка F принадлежит окружности, описанной вокруг треугольника ABC, X – точка на стороне BC . Прямые AX и AF изогональны. Точки M и N – проекции точки X на стороны AC и

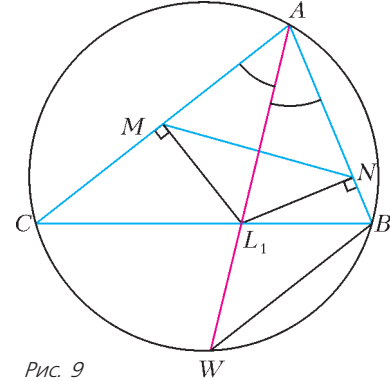


Рис. 9

AB . Докажите, что $S_{ABC} = \frac{1}{2} AF \cdot MN$.

Указание: воспользуйтесь теоремой 2 и учтите, что $MN = AX \cdot \sin \angle BAC$.

Задача 10. Докажите теорему Птолемея: пусть a, b, c, d – стороны вписанного четырехугольника, d_1, d_2 – его диагонали (рис. 10); тогда $ac + bd = d_1 \cdot d_2$.

Решение. Обозначим через A_1 точку пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. Построим отрезок AA_2 , изогональный отрезку AA_1 , и применим два изогональных подобия:

$$\triangle ABC \sim \triangle AA_2D, \quad \frac{AD}{AC} = \frac{DA_2}{BC},$$

или

$$AC \cdot DA_2 = AD \cdot BC; \tag{1}$$

$$\triangle DAC \sim \triangle A_2AB, \quad \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{A_2B},$$

или

$$AC \cdot A_2B = AB \cdot DC. \tag{2}$$

Сложим равенства (1) и (2):

$$AC (DA_2 + A_2B) = AD \cdot BC + AB \cdot DC,$$

или

$$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot DC$$

($d_1 \cdot d_2 = ac + bd$), что и требовалось доказать.

Теорему Птолемея теперь можно запомнить как два изогональных подобия.

Полвека назад я восторженно воскликнул: «Биссектриса любит окружность!» Только теперь я понял почему: она изогональна сама себе.

Чудеса инверсии

Т.ЕМЕЛЬЯНОВА

Речь пойдет о том, как с помощью инверсии одна задача может превратиться либо в одну из самых красивых теорем планиметрии (это будет теорема Веррьера), либо в одно из самых простых утверждений школьного курса.¹

Задача. Три окружности ω_1, ω_2 и ω_3 радиуса r проходят через точку S и касаются внутренним образом окружности ω радиуса R ($R > r$) в точках T_1, T_2 и T_3 соответственно. Докажите, что прямая T_1T_2 проходит через вторую (отличную от S) точку пересечения окружностей ω_1 и ω_2 .

Решение. Обозначим через O_1, O_2, O_3, O центры окружностей $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega$ соответственно. Докажем, что точки S и O совпадают. Из касания ω_1 и ω следует, что точки

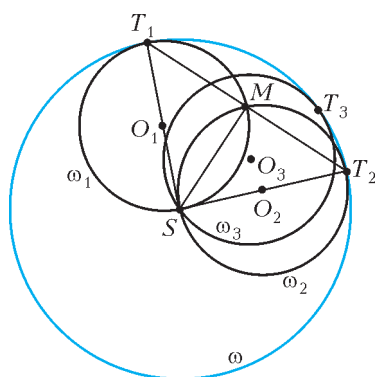


Рис. 1

O, O_1, T_1 лежат на одной прямой, причем $OO_1 = OT_1 - O_1T_1 = R - r$ (рис. 1). Аналогично, $OO_2 = OO_3 = R - r$, поэтому O — центр окружности, описанной около треугольника $O_1O_2O_3$. Поскольку $SO_1 = SO_2 = SO_3 = r$, точка S также является центром окружности, описанной около треугольника $O_1O_2O_3$. Отсюда следует, что точки S и O совпадают.

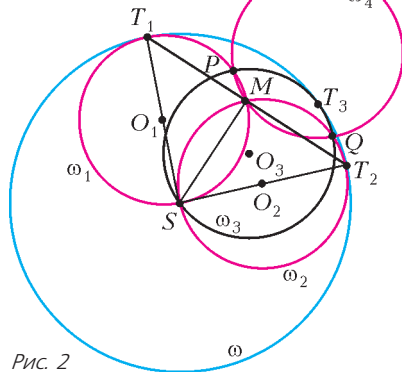


Рис. 2

Пусть M — середина отрезка T_1T_2 . Так как OM — медиана и высота равнобедренного треугольника OT_1T_2 , то M лежит на окружности, построенной на OT_1 как на диаметре, т.е. M лежит на ω_1 . Аналогично, M лежит на ω_2 .

А теперь приступим к превращениям.

Превращение 1. Дополним рисунок 1 некоторыми элементами. Оставшиеся точки пересечения окружностей назовем P и Q , а окружность, проходящую через точки P, Q, M , назовем ω_4 (рис.2). Радиус этой

окружности равен $r = \frac{R}{2}$, поскольку она проходит через середины сторон треугольника $T_1T_2T_3$. Произведем инверсию относительно некоторой окружности ω_0 с центром в точке M . Для большей наглядности образы точек при инверсии будем обозначать теми же буквами. При этом окружности ω_1, ω_2 и ω_4 (красные) перейдут в прямые ST_1, ST_2 и PQ (красные) соответственно, окружность ω_3 (черная) перейдет в окружность, на которой лежат точки P, Q, S , и окружность ω (синяя) также останется окружностью (рис.3). Прямая SM , делящая пополам угол между равными окружностями ω_1 и ω_2 , станет биссектрисой угла S треугольника PQS .

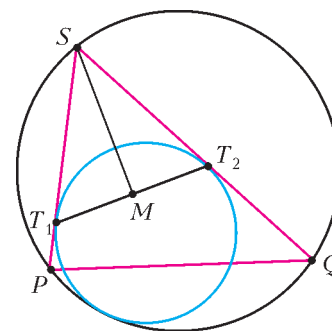


Рис. 3

Аналогично для прямых PM и QM . Таким образом, точка M будет центром вписанной окружности треугольника PQS .² Осталось сформулировать утверждение, вытекающее из утверждения задачи.

Теорема Веррьера. Пусть окружность, касающаяся описанной окружности треугольника SPQ , касается также его сторон SP и SQ в точках T_1 и T_2 соответственно. Тогда центр окружности, вписанной в треугольник SPQ , лежит на прямой T_1T_2 .

Превращение 2. Произведем инверсию рисунка 2 относительно окружности ω (S — ее центр). Окружности ω_1, ω_2 и ω_3 перейдут в прямые и образуют треугольник PQM , для которого ω — вневписанная окружность (рис.4). Утверждение задачи превращается в следующее

Утверждение. Вершины треугольника, центр вневписанной окружности и точки касания ее с продолжениями сторон, выходящими из этой вершины, лежат на одной окружности.

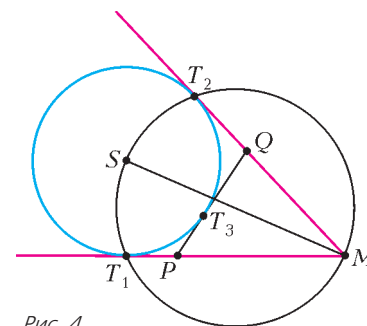


Рис. 4

Для доказательства достаточно рассмотреть окружность с диаметром SM (см. рис.4).

В заключение заметим, что это последнее простое **Утверждение** и **Теорема Веррьера** с точки зрения инверсии оказались в каком-то смысле эквивалентными³. Берем **Утверждение**, пара преобразований инверсии — и «готова» **Теорема!**

² Этот факт можно доказать и по-другому: поскольку окружности ω_1, ω_2 и ω_4 одинакового радиуса, их образы (красные прямые) будут на одинаковом расстоянии от точки M . Значит M — центр вписанной или вневписанной окружности треугольника PQS . Подумайте, почему для данного положения окружностей имеет место именно случай вписанной окружности. (Прим. ред.)

³ Все утверждения статьи опираются на конкретные взаимные расположения окружностей, представленные на рисунках. Подумайте, какие еще интересные утверждения можно получить, изменяя положения окружностей.

¹ Об инверсии можно прочитать, например, в статье В.Арнольда «Инверсия в цилиндрических зеркалах метро» в «Кванте» №5 за 2010 год или, более подробно, в статье В.Уроева «Инверсия» в «Кванте» №5 за 1984 год.

Электричество из фруктов

Э.МАРЧУК

Что такое химический источник тока

На сегодняшний день мы не можем представить свою жизнь без электричества. Наиболее распространенными источниками тока являются химические, в которых химическая энергия окислительно-восстановительной реакции преобразуется в электрическую. Первый химический источник тока был изобретен в 1800 году итальянским ученым Алессандро Вольта.

Область применения химических источников тока чрезвычайно широка – от миниатюрных элементов питания кардиостимуляторов до водородных топливных батарей, обеспечивающих энергией космические корабли. Без химических источников тока сегодня было бы невозможным не только использование разнообразной бытовой техники от плеера до мобильного телефона, но и обеспечение работы сложнейших приборов и компьютерной техники. Даже некоторые виды современного оружия приводятся в действие от сигнала, обеспечиваемого электрической батареей.

Основу химических источников тока составляют два металлических электрода: катод, содержащий окислитель, и анод, содержащий восстановитель, контактирующие с электролитом. Между электродами устанавливается разность потенциалов – электродвижущая сила, соответствующая свободной энергии окислительно-восстановительной реакции. Действие химических источников тока основано на двух пространственно разделенных процессах: при замкнутой внешней цепи на катоде происходит реакция окисления, образующиеся свободные электроны переходят по внешней цепи к аноду, где они участвуют в реакции восстановления.

Делаем батарейку из фруктов и овощей

Существует множество способов создать химический источник тока, однако наиболее просто и интересно получить электрическую энергию из обычных фруктов и овощей. Сок фруктов и овощей содержит соли и органические кислоты. Водород и кислород, содержащиеся в них, являются хорошими окислителями, т.е. при взаимодействии со многими металлами они отбирают у них электроны. Способность отдавать или присоединять электроны для различных металлов можно посмотреть в так называемом электрохимическом ряду в любом учебнике по химии или в справочнике.

Для изготовления источника тока необходимо выбрать в качестве электродов металлы, как можно более различающиеся по своим окислительно-восстановительным свойствам. В этом можно убедиться в ходе следующего эксперимента.

Вырежьте из медной фольги толщиной 0,2 – 1 мм две пластинки шириной 1 см и длиной около 1,5 – 2 см. (А можно использовать и обычную медную или покрытую медью монету.) Аналогично сделайте подобные пластинки из других металлов: стали, оцинкованного железа (например, вырежьте пластинку из старого оцинкованного ведра) и т.д. Получившиеся электроды необходимо хорошо зачистить и желательнее заострить один конец у каждой пластины. Приготовьте несколько фруктов и овощей, например яблоко, картофель, лимон, апельсин, помидор и т.п. Вставляя в каждый фрукт различные пары изготовленных электродов, измеряйте напряжение с помощью вольтметра, цифрового мультиметра или авометра. Сравните напряжение на клеммах при использовании электродов из одного и того же металла и напряжение на клеммах электродов из различных металлов. Как показывает опыт, напряжение на клеммах из одинаковых электродов практически отсутствует, а максимальное напряжение наблюдается на клеммах медно-цинковой пары.

Поэкспериментируем с фруктовой батарейкой

Можно провести еще несколько экспериментов с фруктовыми батарейками. Для начала попробуйте предположить, от чего будет зависеть напряжение на клеммах источников, и выберите фрукт, который, по-вашему мнению, должен дать максимальное напряжение с медно-цинковой парой. Вероятно, вы подумали о лимоне или апельсине. Каково будет ваше удивление, когда вы обнаружите, что из перечисленных выше фруктов и овощей максимальное напряжение дает яблоко. У лимона действительно наиболее кислая среда и, казалось бы, скорость химической реакции должна быть выше. Однако в соке яблока содержится больше различных кислот.

Но не нужно делать поспешных выводов. Не только напряжение на клеммах является характеристикой батарейки. Более важный параметр – это максимальная мощность источника, которая зависит от его внутреннего сопротивления. Здесь вас также ожидает сюрприз. Расположите электроды на расстоянии 1 см друг от друга и измерьте напряжение на клеммах, а затем проведите аналогичное измерение при расстоянии между электродами 4 – 6 см (рис.1). Измеренное напряжение оказывается одним и тем же.

Независимость напряжения на клеммах химического источника тока от расстояния между электродами возможна лишь в том случае, когда внутри самого источника электрический ток не протекает. Таким образом, напряжение на клеммах зависит только от скорости химических реакций на

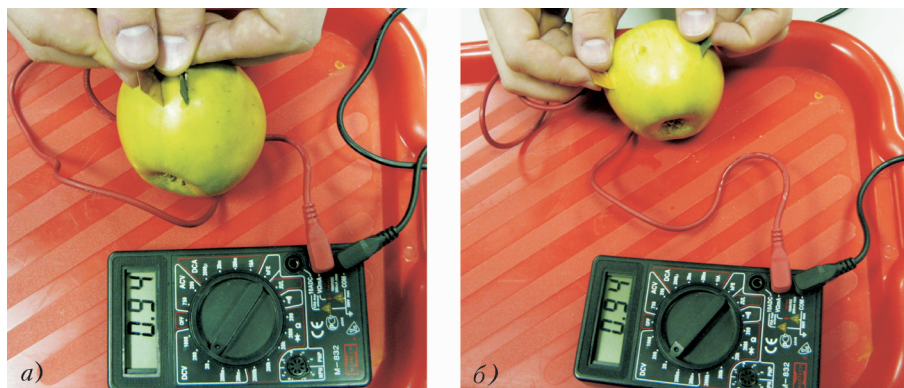


Рис. 1. Независимость напряжения фруктовой батарейки от расстояния между электродами

аноде и катоде, которая определяется выбором материалов электродов, а также электролитом, содержащимся в соке. Немаловажную роль при этом играет чистота поверхности электродов, поэтому перед проведением экспериментов необходимо с помощью мелкой наждачной бумаги тщательно удалить с поверхности электродов оксидную пленку. Удаление оксидной пленки позволит также уменьшить так называемый поляризационный эффект, который уменьшает фактическую ЭДС источника.

Из закона Ома для полной цепи следует, что сила тока максимальна в режиме короткого замыкания источника, когда сопротивление внешней нагрузки стремится к нулю. Миллиамперметр обладает ничтожно малым внутренним сопротивлением, и при подключении прибора непосредственно к клеммам фруктовой батарейки можно с большой точностью говорить о коротком замыкании. Измерение силы тока при этом необходимо провести как можно быстрее, поскольку источник быстро разряжается.

Рассчитать максимальную мощность имеющихся у вас фруктовых источников тока можно по формуле $P_{\max} = UI_{\max}$. На рисунке 2 приведена сравнительная диаграмма мощностей различных фруктовых батареек с медно-цинковой парой электродов. Значения, приведенные на диаграмме, не следует воспринимать как абсолютные, но у вас должна получиться примерно такая же картина. Таким образом, мощность

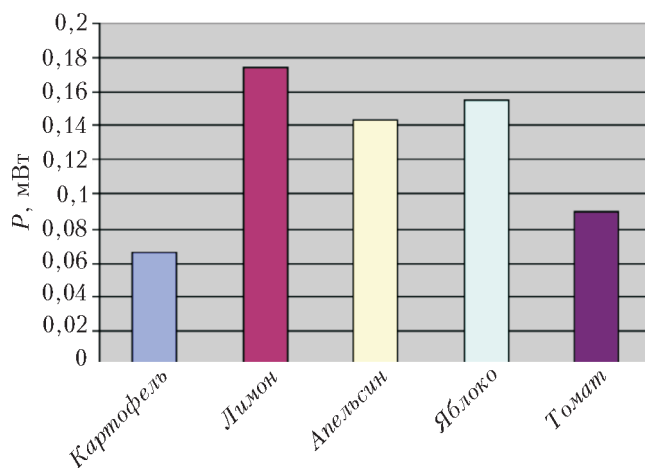


Рис. 2. Сравнительная диаграмма максимальных мощностей батареек

лимонной батарейки выше, а значит, из перечисленных фруктовых источников тока она обладает наилучшими электрическими характеристиками.

Отсутствие тока внутри отключенной фруктовой батарейки объясняется особенностями окислительно-восстановительных химических реакций, за счет которых возникает напряжение на электродах. В результате химической реакции под действием фруктового сока ионы цинка покидают поверхность цинкового электрода, и цинковый электрод приобретает отрицательный потенциал относительно раствора. Химическая реакция не зависит от присутствия в соке другого электрода. С медным электродом происходит аналогичная реакция, но, согласно электрохимическому ряду, с меньшей интенсивностью. Таким образом, между цинковым и медным электродами устанавливается разность потенциалов. При замыкании клемм источника электроны устремляются через внешнюю цепь от цинка к меди. Именно поэтому во всех случаях медный электрод являлся анодом, а цинковый – катодом.

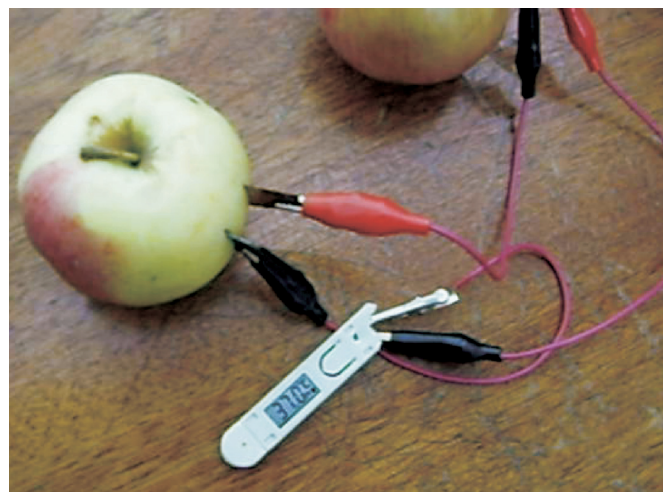


Рис. 3. Иллюстрация работы электронного термометра от фруктовых батареек

Вырывание в ходе химической реакции из металла ионов соответствующего химического элемента неизбежно приводит к разрушению электродов, которое в данном случае не может быть обратимо. Этим обстоятельством обусловлена невозможность подзарядки фруктовых батареек и, тем самым, невозможность изготовления на их основе аккумуляторов.

Максимальная мощность фруктовой батарейки мала и составляет десятые доли милливатта. Поэтому фруктовая батарейка может быть использована для питания только маломощных приборов, таких как электронные часы, калькулятор, маломощный светодиод и т.п.

Возьмите, например калькулятор и вашу батарейку. Если на калькуляторе имеется встроенная солнечная батарея, то ее необходимо заклеить непрозрачной бумагой. Соедините последовательно в батарею два источника из лимона или яблока и подсоедините к ней (соблюдая полярность) калькулятор. Вы увидите, что калькулятор работает. На рисунке 3 представлена фотография электронного термометра, работающего от батареи источников тока из двух яблок.

Для питания более мощных приборов необходимо будет соединять фруктовые источники тока в батарею. Подумайте, сколько необходимо фруктовых батареек и как их надо соединить для обеспечения работы нетбука *Aspire One* (с характеристиками 19 В и 1,58 А) или сотового телефона и можно ли сэкономить на количестве фруктов при соединении их в батарею.

Эксперименты с фруктовыми батарейками вы можете продолжить самостоятельно. Попробуйте, скажем, установить зависимость напряжения на клеммах и мощности элемента от площади поверхности электродов или попытайтесь построить разрядные характеристики различных фруктовых источников.

Желаем успехов!

Движение заряженных частиц в магнитном поле

А. ЧЕРНОУЦАН

В ЭТОЙ СТАТЬЕ БУДУТ РАССМОТРЕНЫ ЗАДАЧИ, В КОТОРЫХ на движущуюся частицу, помимо других сил, действует еще сила Лоренца со стороны магнитного поля. Магнитное поле во всех задачах считается однородным и не зависящим от времени.

Начнем с классической задачи.

Задача 1. Частица с массой m и зарядом q влетает со скоростью v в однородное магнитное поле с индукцией B под углом α к линиям индукции. Найдите траекторию частицы и опишите ее движение.

Решение. Во-первых, так как сила Лоренца направлена перпендикулярно скорости, то частица будет двигаться с постоянной скоростью v . Во-вторых, поскольку сила Лоренца направлена перпендикулярно вектору индукции \vec{B} , то проекция скорости на ось Z , параллельную \vec{B} , будет постоянной и равной $v_z = v \cos \alpha$. Следовательно, движение в перпендикулярной магнитному полю плоскости происходит с постоянной скоростью $v_{\perp} = v \sin \alpha$ по окружности. Радиус этой окружности R_{\perp} найдем из второго закона Ньютона в проекции на ось, направленную к центру окружности:

$$qv_{\perp}B = m \frac{v_{\perp}^2}{R_{\perp}}, \text{ и } R_{\perp} = \frac{mv_{\perp}}{qB}.$$

При этом период вращения

$$T = \frac{2\pi R_{\perp}}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{qB}$$

не зависит от величины и направления скорости. Таким образом, частица будет двигаться по винтовой линии (спирали) с шагом

$$h = v_z T = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{qB}.$$

Радиус кривизны винтовой линии R можно также найти из второго закона Ньютона:

$$qv_{\perp}B = m \frac{v^2}{R}, \text{ и } R = \frac{mv}{qB \sin \alpha} = \frac{R_{\perp}}{\sin^2 \alpha}.$$

Следующая задача на движение в магнитном поле в присутствии силы сопротивления среды продемонстрирует метод решения, основанный на установлении связей между изменениями переменных. Этот метод будет использоваться и в некоторых других задачах.

Задача 2. Частица с массой m и зарядом q влетает со скоростью v_0 в однородное магнитное поле с индукцией B перпендикулярно линиям индукции. На частицу при движе-

нии действует сила сопротивления среды, пропорциональная скорости: $\vec{F}_c = -\gamma \vec{v}$. Найдите перемещение частицы до ее остановки, а также путь, пройденный частицей.

Решение. Введем координатные оси X и Y , как показано на рисунке 1, и запишем второй закон Ньютона в проекциях на эти оси:

$$m \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = -F_c \sin \alpha + F_L \cos \alpha = -\gamma v_x + qv_y B,$$

$$m \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = -F_c \cos \alpha - F_L \sin \alpha = -\gamma v_y - qv_x B.$$

Умножив обе части равенств на Δt , получим уравнения, связывающие изменения проекций скорости с изменениями координат:

$$m \Delta v_x = -\gamma \Delta x + qB \Delta y,$$

$$m \Delta v_y = -\gamma \Delta y - qB \Delta x.$$

Проведя суммирование от начального момента до остановки, получим

$$0 = -\gamma x + qBy,$$

$$-mv_0 = -\gamma y - qBx,$$

где x и y – координаты точки остановки. Решая эту систему, найдем

$$x = \frac{qBmv_0}{\gamma^2 + (qB)^2}, \quad y = \frac{\gamma mv_0}{\gamma^2 + (qB)^2}.$$

Отсюда для перемещения частицы получаем

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{mv_0}{\sqrt{\gamma^2 + (qB)^2}}.$$

Чтобы найти путь частицы, запишем второй закон Ньютона в проекции на направление скорости:

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\gamma v.$$

Умножая на Δt и суммируя от начального момента до остановки, получим

$$-mv_0 = -\gamma l,$$

откуда находим путь:

$$l = \frac{mv_0}{\gamma}.$$

Как и следовало ожидать, путь оказался больше перемещения.

Далее будут рассмотрены задачи, где, кроме магнитного поля, на частицу будет действовать также однородное электрическое поле или поле тяжести. Хотя оба эти поля действуют на частицу с постоянной силой и их влияние можно считать одинаковым, но, по традиции, одни задачи формулируют с использованием поля тяжести, другие – с использованием электрического поля (хотя одно можно легко заменить на другое). Если про силу тяжести в задаче не говорится, то она (по умолчанию) отсутствует.

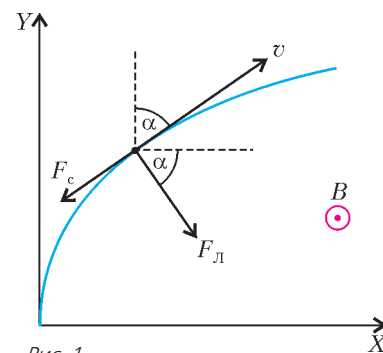


Рис. 1

Сначала – задача, непосредственно примыкающая к задаче 1.

Задача 3. Частица с массой m и зарядом q влетает со скоростью v в однородное магнитное поле с индукцией B перпендикулярно линиям индукции. Кроме магнитного поля, в этой области пространства создано еще однородное электрическое поле, напряженность которого равна E и параллельна вектору магнитной индукции. Найдите траекторию частицы и опишите ее движение.

Решение. В проекции на ось Z , параллельную \vec{B} , частица движется равноускоренно с ускорением $a_z = qE/m$, а в перпендикулярной плоскости – движется по окружности радиусом $R = mv/(qB)$ с периодом $T = 2\pi m/(qB)$. Траектория частицы – спираль постоянного радиуса с увеличивающимся шагом:

$$h_1 = \frac{a_z T^2}{2} = \frac{2\pi^2 m E}{q B^2}, \quad h_2 = 3h_1, \quad h_3 = 5h_1, \dots$$

В следующих задачах движение заряженной частицы не является свободным, но ограничено наличием связи, например нерастяжимой нити или стержня.

Задача 4 (ЕГЭ-2010). В однородном магнитном поле с индукцией B , направленной вертикально вниз, равномерно вращается в горизонтальной плоскости против часовой

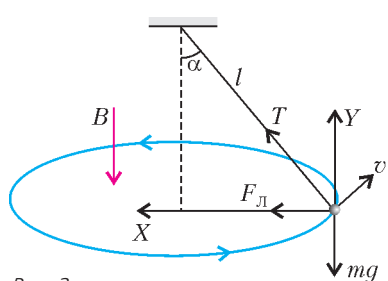


Рис. 2

стрелки (если смотреть сверху; рис.2) положительно заряженный шарик массой m , подвешенный на нити длиной l (конический маятник). Угол отклонения нити от вертикали равен α , скорость движения шарика равна v . Найдите заряд шарика.

Решение. При указанном в условии направлении движения шарика сила Лоренца направлена к центру окружности. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальную ось X , направленную от шарика к центру окружности, и на вертикальную ось Y :

$$T \sin \alpha + qvB = m \frac{v^2}{l \sin \alpha},$$

$$T \cos \alpha - mg = 0.$$

Исключая силу натяжения нити T , получим

$$mg \operatorname{tg} \alpha + qvB = m \frac{v^2}{l \sin \alpha},$$

откуда найдем заряд шарика:

$$q = \frac{m}{B} \left(\frac{v}{l \sin \alpha} - \frac{g}{v} \operatorname{tg} \alpha \right).$$

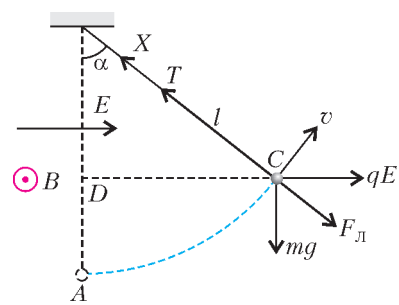


Рис. 3

Задача 5. Маленький шарик массой m , подвешенный на нити длиной l , несет на себе положительный заряд q . Система помещена в электрическое поле с напряженностью \vec{E} и в магнитное поле с индукцией \vec{B} , линии которых горизонтальны и перпендикулярны

друг другу (рис.3). Вначале шарик удерживают в нижнем положении, а затем отпускают. Найдите силу натяжения нити в тот момент, когда нить образует с вертикалью угол α .

Решение. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось X , направленную вдоль нити к центру окружности:

$$T - mg \cos \alpha - qE \sin \alpha - qvB = m \frac{v^2}{l}.$$

Чтобы найти скорость частицы v в рассматриваемый момент, используем теорему об изменении кинетической энергии. Так как работа силы тяжести, а также работа электрической силы не зависит от траектории, заменим дугу окружности на ломаную ADC : сила тяжести совершает работу на участке AD , а электрическая сила – на участке DC . Поскольку работа силы Лоренца равна нулю, теорема об изменении кинетической энергии примет вид

$$\frac{mv^2}{2} - 0 = qEl \sin \alpha - mgl(1 - \cos \alpha).$$

Решая полученные уравнения, находим силу натяжения нити:

$$T = 3qE \sin \alpha - mg(2 - 3 \cos \alpha) + qvB,$$

где

$$v = \sqrt{\frac{2qEl \sin \alpha}{m} - 2gl(1 - \cos \alpha)}.$$

Теперь рассмотрим несколько задач на свободное (без связей) движение в скрещенных полях. Самый простой случай – это равномерное движение в скрещенных под прямым углом электрическом и магнитном полях, когда сила Лоренца и электрическая сила компенсируют друг друга.

Задача 6. В области пространства имеются скрещенные под прямым углом электрическое поле с напряженностью \vec{E} и магнитное поле с индукцией \vec{B} . Какой должна быть скорость заряженной частицы, чтобы ее ускорение в этой области было равно нулю?

Решение. Будем считать заряд частицы положительным. Тогда электрическая сила $\vec{F}_{эл} = q\vec{E}$ направлена вдоль вектора \vec{E} . Значит, сила Лоренца должна быть направлена в противоположную сторону (рис.4). Поскольку сила Лоренца перпендикулярно скорости, вектор скорости \vec{v} должен лежать в плоскости, перпендикулярной силе Лоренца. Чтобы сила Лоренца была направлена в нужную (а не в противоположную) сторону, вектор \vec{v} должен составлять с вектором \vec{B} любой угол $0 < \alpha < 180^\circ$, но отложенный в направлении, указанном на рисунке. Величину скорости найдем из уравнения

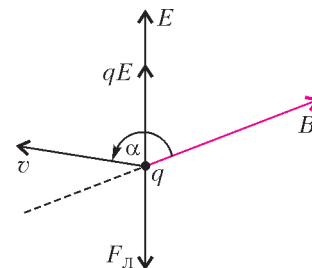


Рис. 4

$$qE = qvB \sin \alpha, \quad \text{откуда} \quad v = \frac{E}{B \sin \alpha}.$$

Отметим, что такую же скорость может иметь и отрицательно заряженная частица, просто обе силы – и электрическая сила, и сила Лоренца – изменят свои направления на противоположные.

Задача 7. Частицу с массой m и зарядом $q > 0$ помещают в область пространства, содержащую скрещенные под прямым углом электрическое поле с напряженностью \vec{E} и

магнитное поле с индукцией \vec{B} . Частицу сначала удерживают на месте, а затем отпускают. Найдите, на какое наибольшее расстояние удалится частица от точки старта в направлении линий электрического поля. Попробуйте описать движение частицы и определить характеристики этого движения.

Решение. Введем такие координатные оси: ось X – в направлении вектора \vec{E} , ось Y – перпендикулярно оси X в направлении отклонения частицы магнитным полем (рис.5).

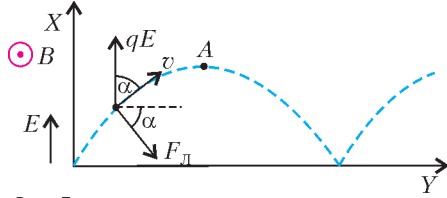


Рис. 5

В проекции на ось Y второй закон Ньютона принимает вид

$$m \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = qvB \cos \alpha = qv_x B,$$

где α – угол между скоростью и осью X (см. задачу 2). Умножая обе части уравнения на Δt и суммируя, получим

$$mv_y = qx B. \tag{1}$$

Запишем теперь закон сохранения энергии:

$$qEx = \frac{mv^2}{2}, \tag{2}$$

т.е. работа электрического поля равна изменению кинетической энергии частицы (работа силы Лоренца равна нулю). В точке A наибольшего удаления вдоль оси X скорость направлена параллельно оси Y , и уравнение (1) принимает вид

$$mv = qBx.$$

Выражая отсюда скорость и подставляя ее в закон сохранения энергии (2), найдем наибольшее удаление частицы в направлении электрического поля:

$$x = \frac{2mE}{qB^2}. \tag{3}$$

Для получения дальнейшей информации о движении частицы запишем второй закон Ньютона в проекции на ось X :

$$m \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = qE - qvB \sin \alpha = qE - qv_y B.$$

Умножая на Δt и суммируя, получим

$$mv_x = qEt - qBy. \tag{4}$$

Обратим внимание, что точки, в которых $v_x = 0$, имеют координату $y = \frac{E}{B}t$, т.е. они удаляются вдоль оси Y со скоростью $V = E/B$.

Для упрощения картины движения перейдем в систему отсчета, которая движется вдоль оси Y со скоростью V . Здесь скорость частицы и ее координата выражаются формулами

$$\tilde{v}_y = v_y - \frac{E}{B}, \quad \tilde{y} = y - \frac{E}{B}t.$$

Уравнение (4) приобретает вид

$$v_x = -\frac{qB}{m} \tilde{y}, \tag{5}$$

а с учетом уравнения (1), –

$$\tilde{v}_y = v_y - \frac{E}{B} = \frac{qB}{m}x - \frac{E}{B}. \tag{6}$$

В этой системе отсчета движение частицы происходит с постоянной скоростью $\tilde{v} = E/B$:

$$\begin{aligned} \tilde{v}^2 &= v_x^2 + \tilde{v}_y^2 = v_x^2 + \left(v_y - \frac{E}{B}\right)^2 = \\ &= (v_x^2 + v_y^2) - 2v_y \frac{E}{B} + \left(\frac{E}{B}\right)^2 = \left(\frac{E}{B}\right)^2 \end{aligned}$$

(мы использовали уравнения (1) и (2)). Подставляя в это уравнение выражения (5) и (6) для v_x и \tilde{v}_y , получим уравнение траектории:

$$\left(x - \frac{mE}{qB^2}\right)^2 + \tilde{y}^2 = \left(\frac{mE}{qB^2}\right)^2.$$

Из этого уравнения следует, что в системе отсчета, движущейся со скоростью $V = \frac{E}{B}$ вдоль оси Y , частица движется со скоростью V по окружности радиусом $R = \frac{mV}{qB} = \frac{mE}{qB^2}$, центр которой расположен на оси X на расстоянии R от начала координат. Через время $T = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi m}{qB}$ частица вернется на ось Y (в этот момент $x = 0$) и остановится. Траектория частицы совпадает с траекторией точки на ободке катящегося колеса, т.е. представляет собой так называемую циклоиду. Шаг циклоиды (расстояние между точками остановки) равен $2\pi R$.

Замечание. Объяснение полученному результату дает электродинамика специальной теории относительности. Там доказывается, что при переходе в указанную систему отсчета поля преобразуются так, что электрическое поле полностью исчезает и происходит движение по окружности в магнитном поле.

В последней задаче мы рассмотрим движение в магнитном поле двух заряженных частиц, взаимодействующих друг с другом.

Задача 8 (олимпиада «Ломоносов-2009»). Две частицы одной и той же массы m , заряды которых равны по модулю, но противоположны по знаку, находятся в однородном магнитном поле с индукцией B в плоскости, перпендикулярной вектору \vec{B} , на расстоянии L друг от друга. Частицы одновременно отпускают. Найдите минимальное расстояние между частицами.

Решение. Введем оси координат так: ось X направим от положительно заряженной частицы к отрицательно заряженной частице, ось Y – перпендикулярно оси X в плоскости, перпендикулярной линиям индукции, в направлении отклонения частиц в начале движения (рис.6). Частицы движутся навстречу друг другу и отклоняются магнитным полем в одном направлении, так что отрезок, соединяющий частицы, остается все время параллельным оси X .

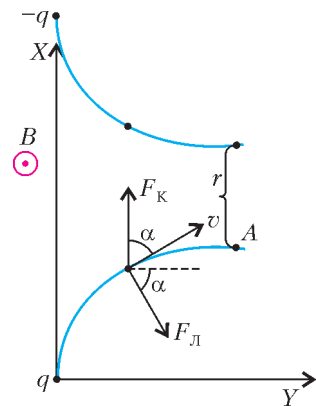


Рис. 6

Запишем, например, для положительно заряженной частицы второй закон Ньютона в проекции на ось Y (см. рис.6):

$$m \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = qvB \cos \alpha = qv_x B.$$

Умножая на Δt и суммируя, получим $mv_y = qxv_x B$, или, выразив координату частицы x через расстояние между частицами, –

$$mv_y = \frac{q(L-r)B}{2}. \quad (7)$$

В момент, когда расстояние между частицами минимально (точка A), $v_x = 0$, и уравнение (7) принимает вид

$$mv = \frac{q(L-r)B}{2}. \quad (8)$$

Поскольку сила Лоренца работу не совершает, закон сохранения энергии запишем в виде

$$-\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} + 2\frac{mv^2}{2}. \quad (9)$$

Подставив сюда v из уравнения (8), после преобразований получим уравнение

$$r^2 - Lr + \frac{m}{\pi\epsilon_0 LB^2} = 0. \quad (10)$$

Это уравнение имеет два положительных корня:

$$r = \frac{L}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m}{\pi\epsilon_0 B^2 L^3}} \right).$$

Возникает вопрос: какой же из корней правильный? При заданном L решение существует в следующем диапазоне значений B :

$$B_0 \leq B \leq \infty, \text{ где } B_0 = \sqrt{\frac{4m}{\pi\epsilon_0 L^3}}.$$

При $B < B_0$ корни отсутствуют, что означает, что минимального расстояния не существует, т.е. частицы обязательно столкнутся друг с другом. А при $B \rightarrow \infty$ минимальное расстояние должно стремиться не к нулю, а к L . Таким образом, правильным является больший корень

$$r = \frac{L}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4m}{\pi\epsilon_0 B^2 L^3}} \right).$$

Но вот что выглядит удивительным и непонятным: при $B = B_0$, когда дискриминант равен нулю, минимальное расстояние между частицами равно $L/2$. Следовательно, минимальное расстояние между частицами никогда не может быть меньше $L/2$! Чтобы понять, почему так происходит, выразим проекцию скорости на ось X из закона сохранения

энергии (9) и уравнения (7):

$$\begin{aligned} v_x^2 &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r m} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L m} - v_y^2 = \\ &= \frac{q^2(L-r)}{4\pi\epsilon_0 r L m} - \frac{q^2(L-r)^2 B^2}{4m^2} = \frac{q^2 B^2 (L-r)}{4m^2 r} \left(r^2 - Lr + \frac{m}{\pi\epsilon_0 L B^2} \right) \end{aligned}$$

Примерный график зависимости v_x^2 от r изображен на рисунке 7 для трех случаев: $B > B_0$, $B = B_0$ и $B < B_0$. Выражение в последних скобках совпадает с левой частью уравнения (10); точки пересечения графика с абсциссой совпадают с корнями этого уравнения. Частицы движутся в области от L до большего корня r ; в области между корнями движение невозможно, поэтому область от меньшего корня до нуля недостижима. При $B < B_0$ расстояние между частицами уменьшается от L до нуля (частицы сталкиваются).

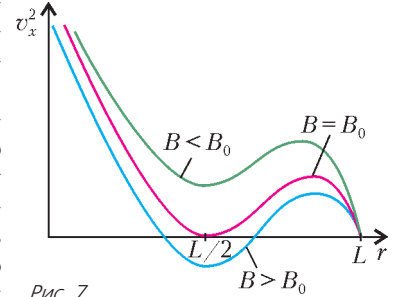


Рис. 7

Упражнения

1. Электрон влетает со скоростью v в область пространства, где созданы параллельные друг другу магнитное поле с индукцией \vec{B} и электрическое поле с напряженностью \vec{E} , под углом α к линиям полей. При каких α частица вернется в начальную точку?
2. Грузик с массой m и зарядом q , подвешенный на невесомой нити, находится в вертикальном магнитном поле с индукцией B . Грузик дважды приводят во вращение в горизонтальной плоскости, причем радиусы вращения в обоих случаях одинаковы, а направления вращения противоположны. На сколько отличаются угловые скорости этих вращательных движений?
3. Частица с зарядом q движется равномерно и прямолинейно в электрическом поле с напряженностью \vec{E} и магнитном поле с индукцией \vec{B} , линии которых взаимно перпендикулярны. Кроме того, на частицу действует сила сопротивления среды, пропорциональная скорости: $\vec{F}_c = -k\vec{v}$. Найдите модуль и направление скорости частицы.
4. Маленький шарик с зарядом q , подвешенный на длинной нити в горизонтальном магнитном поле с индукцией B , совершает колебания в плоскости, перпендикулярной вектору индукции. Силы натяжения нити при прохождении шариком нижней точки в разных направлениях отличаются на ΔT . На сколько крайнее положение шарика выше нижнего?

Где проходит ватерлиния?

(Начало см. на с. 26)

воду, в результате чего уровень воды в сосуде поднимется на x , а верхняя поверхность бруска опустится на y . Можно показать, что суммарная потенциальная энергия воды и бруска изменится при этом на

$$\Delta W = g \left(x^2 \left(\frac{\rho_0 S}{2s} (S-s) \right) - x(\rho h (S-s)) \right).$$

Выражение в скобках достигает минимума при $x = x_{\min} =$

$\frac{\rho}{\rho_0} \frac{s}{S} h$. При этом, соответственно, $y = y_{\min} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{S-s}{S} h$. Таким образом, расстояние от нижней поверхности бруска до ватерлинии (черная жирная прямая на рисунке) равно

$$d = x_{\min} + y_{\min} = \frac{\rho}{\rho_0} h.$$

Разумеется, полученная формула совпадает с той, которую можно было бы вывести, применяя закон Архимеда.

К. Богданов

ОЛИМПИАДЫ

LI Международная математическая олимпиада

Со 2 по 14 июля 2010 года в столице Казахстана Астане прошла LI Международная математическая олимпиада (ММО), собравшая 517 лучших юных математиков из 96 стран мира. Участники олимпиады имели возможность познакомиться с историей и культурой Казахстана, многообразной и необычной архитектурой современной Астаны.

Россию в этом году представляли шестеро выпускников 11 класса: *Станислав Ерохин* и *Кирилл Савенков* из Санкт-Петербурга (оба – ФМЛ 239), *Федор Ивлев* из Троицка (СУНЦ МГУ), *Марсель Матдинов* из Оренбурга (СУНЦ МГУ), *Василий Мокин* из Саратова (лицей прикладных наук), *Виктор Омеляненко* из Белгорода (лицей 38). Еще до нынешней олимпиады за плечами наших участников было много достижений на международном уровне. Все они призеры престижных соревнований: Болгарской и Китайской национальных математических олимпиад, турнира сильнейших стран мира Romanian Master of Mathematics, а В.Омеляненко, К.Савенков и М.Матдинов выступали в составе команды России и на предыдущей ММО.

Завершающим этапом подготовки команды России к ММО-2010 стали летние учебно-тренировочные сборы, которые проходили с 13 июня по 2 июля в детском лагере «Страна КОМПЬЮТЕРИЯ» (Тверская область). Большой вклад в успешное выступление команды внесли преподаватели сборов: аспирант Института системного анализа *А.Акопян*, педагог ФМЛ 239 Санкт-Петербурга к.ф.-м.н. *С.Берлов*, преподаватель МГУ и МФТИ к.ф.-м.н. *А.Гарбер*, профессор Ярославского государственного университета д.ф.-м.н. *В.Дольников*, научный сотрудник Петербургского отделения Математического института РАН к.ф.-м.н. *Д.Карпов*, программист из Москвы *Г.Челноков*.

Олимпиада в Астане была одной из самых сложных в истории международных олимпиад. Особенно трудными оказались задачи 3, 5 и 6 (с задачей 5 успешно справились менее 10 процентов всех участников олимпиады, а с задача-

ми 3 и 6 – менее 5 процентов). Наша сильная и опытная команда в целом уверенно преодолела трудности и заняла второе место в неофициальном командном зачете.

Приводим результаты выступления команды России (каждая задача оценивалась из 7 баллов), а также таблицу с результатами стран, занявших первые 25 мест в рейтинге команд:

| Участник | Баллы по задачам | | | | | | Сумма баллов | Медаль |
|-------------------|------------------|---|---|---|---|---|--------------|------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | |
| Омеляненко Виктор | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 0 | 35 | золотая |
| Ерохин Станислав | 7 | 7 | 2 | 7 | 7 | 1 | 31 | золотая |
| Матдинов Марсель | 6 | 0 | 2 | 7 | 6 | 7 | 28 | золотая |
| Мокин Василий | 7 | 7 | 0 | 7 | 0 | 7 | 28 | золотая |
| Савенков Кирилл | 7 | 7 | 0 | 7 | 0 | 5 | 26 | серебряная |
| Ивлев Федор | 7 | 7 | 0 | 7 | 0 | 0 | 21 | серебряная |

| Рейтинг | Страна | Сумма баллов | Количество медалей | | |
|---------|----------------|--------------|--------------------|---------|--------|
| | | | золото | серебро | бронза |
| 1 | Китай | 197 | 6 | 0 | 0 |
| 2 | Россия | 169 | 4 | 2 | 0 |
| 3 | США | 168 | 3 | 3 | 0 |
| 4 | Корея | 156 | 4 | 2 | 0 |
| 5 | Казахстан | 148 | 3 | 2 | 0 |
| 5 | Таиланд | 148 | 1 | 5 | 0 |
| 7 | Япония | 141 | 2 | 3 | 0 |
| 8 | Турция | 139 | 1 | 3 | 2 |
| 9 | Германия | 138 | 1 | 3 | 2 |
| 10 | Сербия | 135 | 1 | 3 | 2 |
| 11 | Вьетнам | 133 | 1 | 4 | 1 |
| 11 | Италия | 133 | 1 | 3 | 2 |
| 13 | Венгрия | 129 | 2 | 2 | 1 |
| 13 | Канада | 129 | 2 | 1 | 2 |
| 15 | Австралия | 128 | 1 | 3 | 1 |
| 16 | Румыния | 127 | 2 | 1 | 2 |
| 16 | Иран | 127 | 0 | 4 | 2 |
| 18 | Перу | 124 | 1 | 3 | 1 |
| 19 | Тайвань | 123 | 1 | 3 | 1 |
| 20 | Гонконг | 121 | 1 | 2 | 3 |
| 21 | Болгария | 118 | 1 | 2 | 3 |
| 22 | Украина | 117 | 1 | 2 | 3 |
| 22 | Сингапур | 117 | 0 | 4 | 1 |
| 24 | Польша | 116 | 2 | 1 | 1 |
| 25 | Великобритания | 114 | 1 | 1 | 2 |



Команда России на LI Международной математической олимпиаде. Слева направо: *Ф.Ивлев*, *В.Мокин*, *К.Савенков*, *М.Матдинов*, *В.Омеляненко*, *С.Ерохин*

Руководители команды благодарны *Дмитрию Юрьевичу Дойхену*, оказывающему постоянную поддержку участию команды России в международных математических соревнованиях.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Найдите все функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$f([x]y) = f(x)[f(y)]$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}$.

Франция

2. Точки I – центр окружности, вписанной в треугольник ABC , а Γ – окружность, описанная около этого треугольника. Прямая AI пересекает окружность Γ в точках A и D . Точка E выбрана на дуге BCD , а точка F – на стороне BC так, что

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2} \angle BAC.$$

Точка G – середина отрезка IF . Докажите, что прямые DG и EI пересекаются в точке, лежащей на окружности Γ .

Гонконг

3. Найдите все функции $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такие, что число

$$(g(m) + n)(m + g(n))$$

является точным квадратом при любых $m, n \in \mathbb{N}$.

США

4. Пусть P – точка внутри треугольника ABC . Прямые AP , BP и CP вторично пересекают окружность Γ , описанную около треугольника ABC , в точках K , L и M соответственно. Касательная к окружности Γ , проведенная через точку C , пересекает прямую AB в точке S . Известно, что $SC = SP$. Докажите, что $MK = ML$.

Польша

5. В каждой из шести коробок $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ изначально находится ровно по одной монете. Разрешается производить операции следующих двух типов:

Тип 1: выбрать любую непустую коробку B_j , где $1 \leq j \leq 5$, убрать из нее одну монету и добавить две монеты в коробку B_{j+1} .

Тип 2: выбрать любую непустую коробку B_k , где $1 \leq k \leq 4$, убрать из нее одну монету и поменять местами содержимое (возможно пустое) коробки B_{k+1} с содержимым (возможно пустым) коробки B_{k+2} .

Существует ли конечная последовательность таких операций, приводящая к ситуации, в которой коробки B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 пусты, а в коробке B_6 находится ровно $2010^{2010^{2010}}$ монет?

Нидерланды

6. Даны последовательность a_1, a_2, a_3, \dots , состоящая из положительных действительных чисел, и натуральное число s . Известно, что при всех $n > s$ выполняется равенство

$$a_n = \max \{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}.$$

Докажите, что существуют натуральные числа l и N такие, что $l \leq s$ и $a_n = a_l + a_{n-l}$ при всех $n \geq N$.

Иран

Публикацию подготовили руководители команды России на LI ММО Н.Агаханов, П.Кожевников, М.Пратусевич, Д.Терёшин

XI Международная олимпиада школьников по физике

В этом году Международная физическая олимпиада (МФО) проходила в Загребе (Республика Хорватия) с 17 по 25 июля. На олимпиаду прибыли 376 школьников из 82 стран.

В сборную команду России вошли:

Карелина Любовь – Екатеринбург, гимназия 9, затем СУНЦ УрГУ, учитель-наставник Иванова Наталья Вадимовна (гимназия 9),

Алексеев Алексей – Бийский лицей-интернат Алтайского края, учителя-наставники Аполонский Александр Николаевич и Моргунов Михаил Николаевич,

Анашкин Виктор – Бийский лицей-интернат Алтайского края, учителя-наставники Аполонский Александр Николаевич и Моргунов Михаил Николаевич,

Горностаев Дмитрий – с.Шокша (Республика Мордовия), Шокшинская школа, учитель-наставник Подлесный Дмитрий Владимирович (Саровский физико-технический институт),

Стройнов Евгений – Рязань, лицей 52, затем СУНЦ МГУ, учитель-наставник Окс Сергей Николаевич (СУНЦ МГУ).

Нашу команду возглавили профессор Московского физико-технического института (МФТИ) Станислав Миронович Козел и доцент МФТИ Валерий Павлович Слободянин. В составе российской делегации в качестве наблюдателей были доценты МФТИ Дмитрий Анатольевич Александров и Михаил Николаевич Осин.

Подготовка команды уже многие годы проводится по стандартной схеме. За год до Международной олимпиады

на заключительном этапе Всероссийской олимпиады формируется группа кандидатов в количестве 22–24 человек. Они получают задание для подготовки к первым летним



Награды получены

сборам, которые проходят на базе Московского физико-технического института. На этих сборах в течение девяти дней ребята изучают технику физического эксперимента, выполняют разработанные специально для них экспериментальные задания. Шестнадцать участников, с наивысшим рейтингом, получают приглашение на зимние квалификационные сборы, где продолжается освоение техники физического эксперимента и изучение наиболее сложных вопросов теории. Затем «сборники» выполняют три теоретических и два экспериментальных задания, и в итоге достаточно четко определяется костяк сборной команды. Окончательный состав участников последних летних сборов утверждается по итогам заключительного этапа Всероссийской олимпиады.

Как и в прошлые годы, на последние сборы в 2010 году были приглашены восемь кандидатов в команду России. На сборах оттачивались навыки экспериментальной работы на сложном современном оборудовании и дополнительно изучались элементы специальной теории относительности, волновой оптики, ядерной физики и ряд других тем, входящих в программу МФО. Во время сборов с командой работали преподаватели кафедры общей физики МФТИ, СУНЦ МГУ, научные сотрудники институтов Российской академии наук, а также студенты Физтеха – победители Международных физических олимпиад прошлых лет.

На олимпиаде участникам были предложены три теоретические задачи (их условия приводятся ниже) и одно экспериментальное задание, состоящее из двух частей. В первой части экспериментального задания ребята должны были исследовать упругие свойства пластмассового кольца. (Здесь наша сборная потеряла всего 8% от общего числа баллов – замечательный результат!) Во второй части задания нужно было исследовать взаимодействие кольцевого и цилиндрического магнитов. При выполнении этой части задания от участников требовалось продемонстрировать как экспериментальное мастерство, так и понимание того, что такое устойчивость системы.

Сравнительные результаты выступления на олимпиаде стран, все участники которых получили медали, приведены в следующей таблице:

| | Страна | Золото | Серебро | Бронза |
|----|-----------|--------|---------|--------|
| 1 | Китай | 5 | | |
| 2 | Таиланд | 5 | | |
| 3 | Тайвань | 5 | | |
| 4 | Индонезия | 4 | 1 | |
| 5 | Германия | 3 | 1 | 1 |
| 6 | Венгрия | 3 | | 2 |
| 7 | Сингапур | 1 | 4 | |
| 8 | Россия | 1 | 3 | 1 |
| 9 | Индия | 1 | 3 | 1 |
| 10 | Вьетнам | 1 | 3 | 1 |
| 11 | США | 1 | 2 | 2 |
| 12 | Корея | 1 | 2 | 2 |
| 13 | Англия | 1 | 1 | 3 |
| 14 | Гонконг | 1 | 1 | 3 |

Из этой таблицы видно, что, как и в прошлые годы, лидирует группа стран из Юго-Восточной Азии. Команды этих стран устойчиво добиваются высоких результатов в Международных олимпиадах не только по физике, но и по другим предметам.

Члены сборной команды России показали следующие результаты:

| Участник | Теория | Эксперимент | Сумма | Медаль |
|------------|-------------|-------------|-------------|---------|
| | (30 баллов) | (20 баллов) | баллов (50) | |
| Карелина | | | | |
| Любовь | 23,0 | 18,7 | 41,7 | золото |
| Стройнов | | | | |
| Евгений | 16,5 | 17,8 | 34,3 | серебро |
| Алексеев | | | | |
| Алексей | 16,0 | 16,7 | 32,7 | серебро |
| Горностаев | | | | |
| Дмитрий | 18,3 | 13,0 | 31,3 | серебро |
| Анаскин | | | | |
| Виктор | 13,1 | 13,0 | 26,1 | бронза |

Ниже приводятся условия задач теоретического тура олимпиады.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

Задача 1. Заряд-изображение в проводнике

Введение. Метод изображений

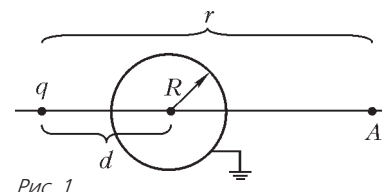
На расстоянии d от центра металлической заземленной сферы радиусом R находится точечный заряд q . При этом на сфере появляется индуцированный заряд, распределенный по ее поверхности с некоторой поверхностной плотностью. Электрическое поле и потенциал, которые создают индуцированные заряды на поверхности сферы, совпадают с электрическим полем и потенциалом, создаваемыми одним точечным зарядом q' , который находится внутри сферы.

Задание 1. Заряд-изображение

- Чему равен потенциал сферы?
- Выразите q' и d' (расстояние от центра сферы до заряда-изображения q') через величины q , d и R .
- Получите выражение для силы, которая действует на заряд q . Отталкивающая ли эта сила?

Задание 2. Электрическое поле, экранированное сферой

Необходимо определить, как влияет заземленная металлическая сфера на электрическое поле в точке A с противоположной (относительно заряда q) стороны сферы (рис.1). Точка A находится на прямой, соединяющей заряд q и центр сферы, расстояние от точки A до точечного заряда q равно r .



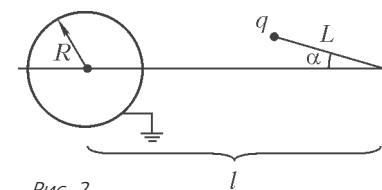
- Определите вектор напряженности электрического поля в точке A .

б) Запишите выражение для напряженности электрического поля на большом расстоянии от заряда ($r \gg d$). Используйте приближение: при $a \ll 1$ $(1+a)^{-2} \approx 1-2a$.

в) Определите расстояние d , при котором заземленная металлическая сфера полностью экранирует поле заряда q (напряженность поля в точке A равна 0).

Задание 3. Малые колебания в поле заземленной металлической сферы

Точечный заряд q массой m подвешен на нити длиной L , закрепленной на стене вблизи заземленной металлической сферы (рис.2). Точка, в которой нить крепится к стене, находится на расстоянии l от центра сферы. При решении не учитывайте электростатическое влияние стены, а также действие гравитационных сил. Точечный заряд рассматривайте как математический маятник.



- Определите силу,

которая действует на заряд q , при заданном угле α . Укажите направление силы.

б) Выразите проекцию этой силы на ось, перпендикулярную нити, через l , L , R , q и α .

в) Определите циклическую частоту малых колебаний маятника.

Задание 4. Электростатическая энергия системы

Считая известными заряд q , радиус сферы R и расстояние d , определите:

а) электростатическую энергию взаимодействия заряда q и индуцированных зарядов на поверхности сферы;

б) электростатическую энергию взаимодействия зарядов, индуцированных на поверхности сферы;

в) полную электростатическую энергию взаимодействия системы.

Указание. Вы можете воспользоваться интегралом:

$$\int_d^{\infty} \frac{xdx}{(x^2 - R^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{d^2 - R^2}.$$

Задача 2. Физика дымовой трубы

Введение

Газообразные продукты горения из топки выводятся в атмосферу, имеющую температуру $T_{\text{воз}}$, с помощью высокой дымовой трубы поперечным сечением S и высотой h (рис.3). В топке происходит сгорание твердого топлива при темпера-

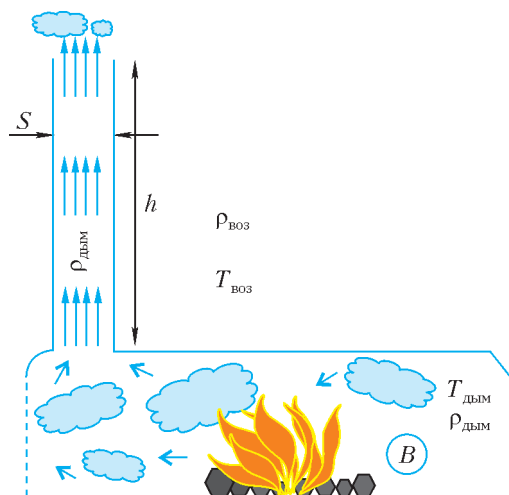


Рис. 3

туре $T_{\text{дым}}$. Объем газов, выходящих из трубы за единицу времени, равен V .

Предполагается, что:

скоростью газов на входе в топку можно пренебречь;

образовавшиеся газы имеют такую же плотность, как и воздух при тех же температуре и давлении, и пока газ находится в топке, его можно рассматривать как идеальный;

давление воздуха изменяется с высотой в соответствии с законами гидростатики, изменением плотности воздуха с высотой можно пренебречь;

течение газов удовлетворяет уравнению Бернулли, которое утверждает, что величина $\frac{1}{2}\rho v^2(z) + \rho qz + p(z) = \text{const}$ сохраняется в любой точке потока, здесь ρ – плотность газа,

$v(z)$ – его скорость, $p(z)$ – его давление, z – высота;

изменением плотности газов вдоль трубы можно пренебречь.

Задание 1

а) Какова должна быть минимальная высота трубы для обеспечения ее нормальной работы, т.е. чтобы она могла

отводить в атмосферу все образующиеся в топке газы? Выразите результат через B , S , $T_{\text{воз}}$, $g = 9,81 \text{ м/с}^2$, $\Delta T = T_{\text{дым}} - T_{\text{воз}}$.

Внимание! В каждом последующем задании предполагается, что высота трубы как раз равна найденной здесь минимальной высоте.

б) Предположим, что построены две дымовые трубы, предназначенные для одних и тех же целей. Они имеют одинаковые поперечные сечения, но должны работать в различных местностях: одна – в холодной местности, где средняя температура воздуха равна -30°C , а другая – в теплой местности, где средняя температура воздуха равна 30°C . Температура выделяющихся газов составляет 400°C . Если расчетная высота трубы в холодной местности равна 100 м, то какова должна быть высота трубы в теплой местности?

в) Как изменяется скорость течения газов вдоль трубы? Нарисуйте график этой зависимости, предполагая, что поперечное сечение трубы постоянно. Обозначьте на графике точку вхождения газов в трубу.

г) Как изменяется давление газов с высотой внутри трубы?

Солнечная электростанция

Движение газов через трубу можно использовать для создания солнечной электростанции. Идею такой электростанции иллюстрирует рисунок 4. Солнце нагревает воздух

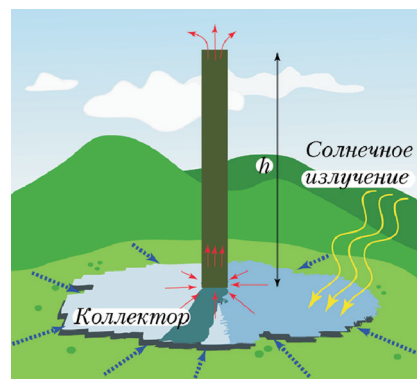


Рис. 4

под коллектором площадью S_k , который открыт по периметру, чтобы воздух мог свободно поступать внутрь. Теплый воздух поднимается вверх по дымоходу (тонкие красные стрелки), а холодный поступает в коллектор извне (толстые пунктирные синие стрелки), тем самым обеспечивается непрерывная циркуляция воздуха. Поток воздуха приводит в движение турбину – таким образом вырабатывается электрическая энергия. Энергию солнечного излучения, падающего на единицу площади поверхности коллектора за единицу времени, обозначим через G . Предположим, что вся эта энергия идет на нагревание воздуха в коллекторе (удельная теплоемкость воздуха равна c , ее зависимостью от температуры можно пренебречь). КПД солнечной электростанции на основе трубы определим как отношение кинетической энергии потока воздуха в трубе к энергии солнечного излучения, затрачиваемой на нагревание этой же массы воздуха перед поступлением в трубу.

Задание 2

а) Каков КПД этой солнечной электростанции?

б) Нарисуйте график, показывающий, как изменяется КПД электростанции в зависимости от высоты трубы h .

Опытная электростанция в Манзанаресе

Опытная солнечная электростанция на основе трубы, построенная в Манзанаресе (Испания), имеет трубу высотой 195 м и радиусом 5 м, диаметр коллектора 244 м. Удельная

теплоемкость воздуха $c = 1012$ Дж/(кг·К), плотность нагретого воздуха $\rho = 0,9$ кг/м³, средняя температура окружающего воздуха $T_{\text{атм}} = 295$ К. В Манзанаресе в течение солнечного дня мощность солнечного излучения на единицу площади в среднем равна $G = 150$ Вт/м².

Задание 3

а) Чему равен КПД опытной электростанции? Оцените его численно.

б) Какова максимальная мощность опытной электростанции?

в) Сколько энергии дает электростанция в течение одного типичного солнечного дня?

Задание 4

а) На сколько возрастет температура воздуха при входе в трубу (теплый воздух) относительно температуры окружающего воздуха (холодный воздух)? Запишите общую формулу и сделайте оценку для опытной электростанции.

б) Чему равен массовый поток воздуха через систему?

Задача 3. Упрощенная модель атомного ядра

Введение

Несмотря на то что атомное ядро – квантовый объект, некоторые закономерности, касающиеся его свойств (таких, как радиус и энергия связи), можно вывести из нескольких простых положений:

1) ядро состоит из нуклонов (протонов и нейтронов);

2) ядерные силы, связывающие нуклоны в ядре, являются короткодействующими (они действуют только между соседними нуклонами);

3) количество протонов Z в ядре приблизительно равно количеству нейтронов N , т.е. $Z \approx N \approx A/2$ где A – общее количество нуклонов ($A \gg 1$).

Задание 1. Атомное ядро как плотно упакованная система нуклонов

Согласно простейшей модели, ядро можно представить как шар, плотно заполненный нуклонами, которые представляют собой шарики радиусом $r_N = 0,85$ фм (1 фм = 10^{-15} м). Ядерные силы действуют только при непосредственном контакте двух нуклонов. Объем ядра V больше суммы объемов нуклонов AV_N , где $V_N = \frac{4}{3}\pi r_N^3$ – объем нуклона. Отношение $f = AV_N/V$ называется фактором упаковки и представляет собой относительную часть объема, заполненную ядерным веществом.

а) Определите фактор упаковки f , если нуклоны упакованы, как в простой кубической кристаллической решетке, где каждый нуклон занимает место в вершине куба.

Внимание! В каждом последующем задании считайте фактор упаковки атомных ядер равным фактору упаковки, полученному здесь. Если вы не смогли его вычислить, в дальнейшем используйте $f = 1/2$.

б) Оцените среднюю плотность массы ρ_m , плотность заряда ρ_q и радиус R ядра, имеющего A нуклонов. Средняя масса нуклона равна $1,67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Задание 2. Энергия связи атомных ядер – объемные и поверхностные факторы

Энергия связи – это энергия, необходимая для разделения ядра на отдельные нуклоны. Если данный нуклон находится внутри ядра, то он вносит в полную энергию связи энергию $\epsilon_V = 15,8$ МэВ (1 МэВ = $1,602 \cdot 10^{-13}$ Дж). Вклад одного нуклона, находящегося на поверхности ядра, в общую энергию связи приблизительно равен $\epsilon_V/2$.

Выразите энергию связи E ядра, содержащего A нуклонов, через величины A , ϵ_V и f . Сделайте поправку на то, что часть нуклонов находится на поверхности ядра.

Задание 3. Влияние электростатических (кулоновских) сил на энергию связи

Электростатическая энергия однородно по объему заряженного шара радиусом R с общим зарядом Q_0 равна

$$U = \frac{3Q_0^2}{20\pi\epsilon_0 R}, \text{ где } \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 \cdot \text{Н}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}.$$

а) Используя эту формулу, выразите электростатическую энергию ядра. В ядре между протонами действуют кулоновские силы, причем сам на себя протон кулоновскими силами не действует. Это обстоятельство можно учесть путем замены $Z^2 \rightarrow Z(Z-1)$. Используйте это в дальнейших расчетах.

б) Запишите полную формулу для энергии связи, включающую основной (объемный) фактор, а также поправки на поверхностную энергию и энергию электростатического взаимодействия протонов.

Задание 4. Деление тяжелых ядер

Деление ядер – это процесс расщепления ядра на части (на более легкие ядра). Предположим, что ядро с A нуклонами распадается на два одинаковых осколка.

а) Подсчитайте общую кинетическую энергию $E_{\text{кин}}$ в момент, когда центры этих осколков находятся на расстоянии $d \geq 2R(A/2)$, где $R(A/2)$ – радиус каждого осколка. Большое ядро в начальный момент времени находилось в состоянии покоя.

б) Предположим, что $d = 2R(A/2)$. Подсчитайте $E_{\text{кин}}$ по формуле, полученной в части а), для ядер с $A = 100, 150, 200, 250$ (результат запишите в МэВ). Оцените, для каких значений A возможно деление ядра в рамках данной модели.

Задание 5. Реакции передачи

а) В современной физике энергетические свойства ядер и ядерные реакции описываются в единицах массы. Например, если ядро (имеющее нулевую скорость) находится в возбужденном состоянии с энергией выше основного состояния на величину $E_{\text{воз}}$, то его масса $m = m_0 + E_{\text{воз}}/c^2$, где m_0 – масса покояющегося ядра в основном состоянии, c – скорость света.

Ядерная реакция $^{16}\text{O} + ^{54}\text{Fe} \rightarrow ^{12}\text{C} + ^{58}\text{Ni}$ – это пример так называемой реакции передачи, в которой некоторая часть одного ядра («кластер») переходит в другое ядро. В нашем примере передаваемая другому ядру часть – это ^4He (α -частица). Реакции передачи проходят с максимальной вероятностью, если скорость продукта реакции (в нашем случае ^{12}C) равна по модулю и направлению скорости налетающей частицы (в нашем случае ^{16}O). Мишень ^{54}Fe первоначально находится в состоянии покоя. Ядро ^{58}Ni оказывается в одном из возбужденных состояний. Найдите энергию возбужденного состояния (и выразите ее в МэВ), если кинетическая энергия налетающего ядра ^{16}O равна 50 МэВ. Массы покоя частиц в основном состоянии равны: $M(^{16}\text{O}) = 15,99491$ а.е.м., $M(^{54}\text{Fe}) = 53,93962$ а.е.м., $M(^{12}\text{C}) = 12,00000$ а.е.м., $M(^{58}\text{Ni}) = 57,93535$ а.е.м., где 1 а.е.м. = $1,6605 \cdot 10^{-27}$ кг.

б) Образовавшееся ядро ^{58}Ni (из части а)), находящееся в возбужденном состоянии, переходит в основное состояние, испуская при этом гамма-квант в направлении движения. Рассмотрите реакцию в системе отсчета, в которой ядро ^{58}Ni покоится, и найдите энергию отдачи $E_{\text{отд}}$, т.е. кинетическую энергию ^{58}Ni после испускания гамма-кванта. Какова энергия гамма-кванта E_γ в этой системе отсчета? Какова энергия гамма-кванта $E_{\text{дет}}$ в лабораторной системе отсчета, т.е. какой будет энергия гамма-кванта, измеренная детектором, который покоится в лабораторной системе отсчета и расположен в направлении движения ядра ^{58}Ni ?

Публикацию подготовили

С.Козел, В.Слободянин, Д.Александров, М.Осин

Очередной набор в ОЛ ВЗМШ

Открытый лицей «Всероссийская заочная многопредметная школа» (ОЛ ВЗМШ) Российской академии образования, работающий при Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова, в сорок седьмой раз проводит набор учащихся.

ОЛ ВЗМШ – государственное учреждение дополнительного образования, причем не только для школьников. «ОТКРЫТЫЙ» – значит доступный для всех желающих пополнить свои знания в одной или нескольких из следующих областей науки: математика, биология, филология, физика, экономика, химия, правоведение, история, информатика (перечисление – в хронологическом порядке открытия отделений).

Сейчас ОЛ ВЗМШ совместно с другими научно-педагогическими учреждениями ведет исследовательские работы по разработке новых интерактивных технологий в образовании и переводу части своих учебно-методических комплексов на язык современных телекоммуникаций, в частности – по организации Интернет-отделения ОЛ ВЗМШ.

За время существования ВЗМШ удостоверения о ее окончании получили несколько сотен тысяч школьников и тысячи кружков – групп «Коллективный ученик ВЗМШ».

Обучение в школе ЗАОЧНОЕ, т.е. начиная с сентября–октября 2011 года все поступившие будут систематически получать специально разработанные для заочного обучения материалы, содержащие изложение теоретических вопросов, методов рассуждений, разнообразные задачи для самостоятельной работы, образцы решений задач, деловые игры, контрольные и практические задания.

Контрольные работы учащихся будут тщательно проверяться и рецензироваться преподавателями ВЗМШ – студентами, аспирантами, преподавателями и научными сотрудниками МГУ, а также других вузов и учреждений, где имеются филиалы школы. Многие из преподавателей в свое время сами закончили ВЗМШ и поэтому особенно хорошо понимают, как важно указать, помимо конкретных недочетов, пути ликвидации имеющихся пробелов в знаниях, порекомендовать дополнительную литературу, поругать за невнимательность и похвалить за заметный (а иногда – и за самый маленький) прогресс и трудолюбие.

Поступившие в ОЛ ВЗМШ смогут узнать об увлекательных вещах, часто остающихся за страницами школьного учебника, познакомиться с интересными нестандартными задачами и попробовать свои силы в их решении. Для многих станет откровением, что задачи бывают не только в математике, физике и химии, но и в биологии, филологии, экономике и других науках. Решение задач поможет прояснить и сделать интересными многие разделы, казавшиеся непонятными и скучными.

Одна из особенностей учебных программ и пособий ВЗМШ – в том, что они созданы действующими на переднем крае науки талантливыми учеными и опытными незаурядными педагогами. Недаром на X Всемирном конгрессе по математическому образованию, который прошел летом 2004 года в Дании, рассказ о 40-летней работе математического отделения ОЛ ВЗМШ вызвал неподдельный интерес и одобрение участников.

Чтобы успешно заниматься в заочной школе, вам придется научиться самостоятельно и продуктивно работать с книгой, грамотно, четко, коротко и ясно излагать свои мысли, а это, как известно, умеют далеко не все. Возможно, наша заочная школа поможет вам выбрать профессию, найти свое место в окружающем мире.

Все выполнившие программу ОЛ ВЗМШ получают дипломы. Хотя формальных преимуществ они не дают, приемные комиссии многих вузов учитывают, что обладатели этих удостоверений в течение продолжительного времени самоотверженно трудились над приобретением знаний, научились самостоятельно творчески работать, а это значит, что из них получатся хорошие студенты и, в дальнейшем, грамотные, вдумчивые, широко образованные специалисты.

Если у вас имеется такая возможность, вы будете частично общаться с нашей школой с помощью Интернета – чем дальше, тем больше.

Для поступления в ОЛ ВЗМШ надо успешно выполнить вступительную контрольную работу. Приемную комиссию интересует, в первую очередь, ваше умение рассуждать, попытки (пусть поначалу не совсем удачные) самостоятельно мыслить и делать выводы. Преимуществом при поступлении пользуются проживающие в сельской местности, поселках и небольших городах, где нет крупных научных центров и учебных заведений и где получить дополнительное образование можно лишь заочно.

Решения задач вступительной работы надо написать на русском языке в обычной ученической тетради в клетку (на некоторые отделения – на открытке или на двойном тетрадном листе; см. ниже). Желающие поступить сразу на несколько отделений каждую работу присылают *в отдельной тетради*. На обложке тетради укажите: *фамилию, имя, отчество, год рождения, базовое образование* (сколько классов средней школы будет закончено *к сентябрю 2011 года*), *полный почтовый адрес* (с индексом), *откуда узнали об ОЛ ВЗМШ* (из «Кванта», от друзей, из афиш заочной школы и т.п.), *на какое отделение хотите поступить*.

Вступительные работы обратно не высылаются.

Без вступительной работы, только по заявлению, принимаются на индивидуальное обучение победители областных (краевых, республиканских) туров всероссийских олимпиад по соответствующим предметам, а также участники финальных туров этих олимпиад.

Учащиеся ОЛ ВЗМШ частично возмещают расходы на свое обучение. По просьбе тех, кто не в состоянии внести эту плату, ОЛ ВЗМШ готов обратиться в школу, в орган народного образования, к другому спонсору с ходатайством об оплате этим благотворителем соответствующих расходов.

Помимо индивидуального обучения, на всех отделениях ВЗМШ, кроме экономического и биологического, имеется форма обучения «Коллективный ученик». Это группа учащихся, работающая под руководством преподавателя (школьного учителя, преподавателя вуза, студента или другого энтузиаста), как правило, по тем же пособиям и программам, что и индивидуально. *Прием в эти группы проводится до 15 октября 2011 года*. Для зачисления группы требуется заявление ее руководителя (с указанием его профессии и должности, со списком учащихся и сообщением о том, в каком классе они будут учиться с сентября 2011 года); заявление должно быть подписано руководителем группы, заверено и подписано руководителем учреждения, при котором будет работать группа. Работа с группами «Коллективный ученик» может оплачиваться школами как факультативные занятия.

Обо всех наших отделениях вы можете узнать на обще-школьном сайте ОЛ ВЗМШ:

www.vzmsch.ru

На ваши вопросы мы ответим по электронной почте:

vzms@yandex.ru

На Северо-Западе России работает Заочная школа Ленинградского областного Министерства образования, созданная

при Санкт-Петербургском государственном университете и имеющая отделения математики, биологии и химии.

Желающие поступить на отделение математики, проживающие на Северо-Западе России (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми республиках), высылают вступительные работы по адресу: 197755 Санкт-Петербург, Лисий Нос, Ново-Центральная ул., д.21/7, Северо-Западная ЗМШ (на прием).

Проживающие в остальных регионах России, дальнем и ближнем зарубежье высылают свои работы по математике в адрес ОЛ ВЗМШ или соответствующего филиала.

Адрес ОЛ ВЗМШ: 119234 Москва, Воробьевы горы, МГУ, ОЛ ВЗМШ, на прием (укажите отделение)

Телефон: (495) 939-39-30

Адреса филиалов математического отделения ОЛ ВЗМШ: 241035 г.Брянск, ул. Мало-Орловская, д. 8, тел.: (4832) 56-18-08, e-mail: brotek@mail.ru;

610002 г. Киров, а/я 2039, ЦДООШ, тел.: (8332) 35-15-03, 35-15-04, e-mail: sms@extedu.kirov.ru, сайт: <http://cdoosh.kirov.ru>;

150000 г. Ярославль, ул. Советская, д.14, тел.: (0852) 11-82-03, e-mail: olimp@olimp.edu.yar.ru

Ниже вы найдете краткие сведения о каждом отделении ОЛ ВЗМШ и условия вступительных контрольных заданий.

Отделение математики

Из этого отделения, открывшегося в 1964 году, выросла вся заочная школа (вначале она так и называлась – математическая).

За время обучения вы более глубоко, чем в обычной школе, сможете осознать основные идеи, на которых базируется курс элементарной математики, познакомиться (по желанию) с некоторыми дополнительными, не входящими сейчас в школьную программу разделами, а также научиться решать олимпиадные задачи. На последнем курсе большое внимание уделяется подготовке к сдаче школьных выпускных экзаменов и вступительных экзаменов в вузы.

На отделении созданы учебно-методические комплексы, приспособленные для заочного обучения. Часть из них издана массовым тиражом. Осуществляется перевод уже апробированных и вновь создаваемых материалов на электронный язык в интерактивном режиме, отделение готовится к работе в Интернете. Практически каждый год издаются и «проходят обкатку» новые пособия, расширяющие и дополняющие программу обучения.

Окончившие отделение математики получают, в зависимости от желания и способностей, либо подготовку, необходимую для выбора математики как профессии, либо математическую базу для успешного усвоения вузовского курса математики, лежащего в основе профессиональной подготовки по другим специальностям: ведь сейчас математика служит мощным инструментом исследований во многих отраслях человеческой деятельности. Поступившие в этом году на первый курс смогут выбрать новые пособия, разработанные для будущих физиков и биологов, химиков и историков...

Обучение длится 5 лет. Можно поступить на любой курс. Для этого к сентябрю 2011 года надо иметь следующую базу: на 1-й курс – 6 классов средней школы, на 2-й курс – 7 классов, на 3-й – 8, на 4-й – 9, на 5-й – 10 классов. При этом поступившим на 2-й, 3-й и 4-й курсы будет предложена часть заданий за предыдущие курсы. Для поступивших на 5-й курс обучение проводится по специальной интенсивной программе.

Для поступления надо решить хотя бы часть задач помещенной ниже вступительной работы (около номера каждой

задачи в скобках указано, учащимся каких классов она предназначена; впрочем, можно, конечно, решать и задачи для более старших классов). На обложке тетради напишите, на какой курс вы хотите поступить и в каком классе будете учиться с 1 сентября 2011 года.

Срок отправки вступительной работы – до 15 апреля 2011 года.

Группы «Коллективный ученик» (на все курсы по любой программе) принимаются без вступительной работы.

Работы можно отправлять по электронному адресу: priem@vzms.org

Сайт математического отделения:

<http://math.vzms.org>

Задачи

1 (6–10). Лариса хочет получить в результате сложения двух двенадцатизначных чисел, все цифры которых четны, число, у которого имеется двенадцать нечетных цифр. Удастся ли ей это сделать?

2 (8–10). Известно, что $\frac{mn}{n^2 + 12m^2} = \frac{1}{7}$. Найдите $\frac{3mn}{2n^2 - 5m^2}$.

3 (6–10). Может ли сумма кубов двух последовательных натуральных чисел равняться кубу следующего за ними натурального числа?

4 (7–10). Угол A треугольника ABC равен 48° . Точка E лежит на стороне BC так, что прямая AE делит данный треугольник на два равнобедренных треугольника. Найдите наибольший угол треугольника ABC .

5 (9–10). Могут ли все члены арифметической прогрессии из натуральных чисел быть простыми?

6 (6–10). На обычную шахматную доску (размером 8×8 клеток) кладут длинную линейку. Какое наибольшее число клеток может пересечь ее длинный край?

7 (8–10). Может ли уравнение $x^2 + ax + b = 0$ иметь целый корень, если a и b – нечетные числа?

8 (8–10). Пусть M – точка пересечения диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$. Найдите значение DM , если $AM = 1$, $BM = 2$, $CM = 4$.

9 (8–10). Пусть $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. В каких пределах может изменяться значение выражения $ab + bc + ca$?

10 (7–10). Несколько землекопов, копая по очереди, вырыли яму. При этом каждый работал столько времени, сколько нужно всем остальным, чтобы они (остальные) вместе выкопали такую же яму целиком. Во сколько раз быстрее они выкопали бы эту яму, работая все вместе, если всего землекопов: а) пятеро; б) n человек? (Каждый землекоп работает с постоянной скоростью, но у разных землекопов производительность может быть разной.)

11 (7–10). Пусть H – точка пересечения высот AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC , причем $AH = BC$. Найдите угол A этого треугольника.

12 (7–10). Пусть a , b и c – натуральные числа, расположенные в порядке возрастания, причем сумма обратных им чисел, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ и $\frac{1}{c}$, равна целому числу. Найдите все тройки $(a; b; c)$ таких чисел.

Отделение биологии

Прием ведется на два потока – трехгодичное обучение на базе 8 классов и двухгодичное на базе 9 классов. Зачисление на отделение осуществляется на конкурсной основе по результатам вступительной работы.

Учащимся восьмых классов необходимо решить задачи 1–5 помещенной ниже вступительной работы, девятиклассникам – задачи 2–6. В ответах можно использовать и факты,

найденные в литературе, и собственные идеи. Просим для сведений, почерпнутых из книг, приводить ссылки на источники.

Вместе с работой пришлите конверт с маркой и заполненным адресом (для отправки вам решения Приемной комиссии).

Вступительную работу можно отправить по электронной почте по адресу uchenikivzmsb@gmail.com

Не забудьте в письме указать свои имя, фамилию, класс, а также полный почтовый адрес.

Срок отправки вступительной работы – не позднее 20 июля 2011 года.

Задачи

1. В экологии существует представление о викариатах. Викариатами называются виды, которые занимают схожие экологические ниши в разных зоогеографических областях: например, европейский крот в Евразии и сумчатый крот в Австралии. Предложите как можно больше пар викариатов. Для каждой пары опишите, в чем заключается сходство экологических ниш, а в чем – их различие.

2. Ландшафтные (лесные, степные, торфяные и т.д.) пожары помимо экономической катастрофы несут в себе также и очень существенное влияние на экосистемы. Постарайтесь описать как можно больше примеров такого влияния, разделив их на кратковременные и длительные. Отдельно рассмотрите случаи небольших пожаров и пожаров на всей площади биотопа.

3. В медицине используются разные виды наркоза. Предложите как можно больше механизмов действия наркоза на пациентов. Для каждого предложенного механизма рассмотрите ограничения и негативные эффекты такого наркоза.

4. Представьте себе, что перед вами стоит задача разработать лекарство для борьбы с определенным вирусным заболеванием. Такое лекарство должно избирательно уничтожать вирусы в организме заболевшего человека, не поражая собственные клетки и ткани организма. Предложите возможные принципы действия такого лекарства.

5. Эусоциальность – это тип социальной организации, при котором группа животных состоит из одной размножающейся особи и множества неразмножающихся, которые ее «обслуживают». Классическим примером эусоциальности являются муравьи и пчелы. В настоящее время эусоциальность обнаружена у разных неродственных между собой видов животных (насекомые, грызуны, плоские черви). По каким особенностям вида (поведенческим, экологическим, физиологическим и т.д.) можно предположить наличие у него эусоциальности?

6. Известно, что организмы получают весь генетический материал от родителей (или родителя). Известно также, что существуют случаи, когда в организме экспрессируются гены, которые не могут быть обнаружены в гено типе родителей. Перечислите как можно больше таких случаев, указав для каждого источник появления этих «новых» генов.

Отделение физики

Обучение на отделении одно-, двух- и трехгодичное. На трехгодичный поток (курс Ф3) принимаются оканчивающие в 2011 году 8 классов средней школы, на двухгодичный (курс Ф2) – оканчивающие 9 классов и на одногодичный (курс Ф1) – 10 классов. Учащиеся, оканчивающие десятый класс, могут пройти ускоренно всю программу за один год (курс Ф0). Для поступления на курс Ф3 нужно решить задачи 1–5 приведенной ниже вступительной работы, на курс Ф2 – задачи 4–9, на курс Ф1 – задачи 5–10, на курс Ф0 – задачи

4–10. На обложке тетради следует указать фамилию, имя и отчество, код курса (Ф0, Ф1, Ф2 или Ф3), сколько классов будет закончено к 1 сентября 2011 года, полный почтовый адрес (с индексом), e-mail (если есть), телефон.

Срок отправки вступительной работы – до 1 июня 2011 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются на курсы Ф1, Ф2, Ф3 без вступительной работы, только по заявлению руководителя.

E-mail отделения физики: olphys@polly.phys.msu.ru

Сайт: <http://phys.problems.ru>

Задачи

1. Два жука ползают с одной и той же скоростью: один по треугольнику AOB , а другой – по треугольнику COD , причем точка O является центром квадрата $ABCD$. Нарисуйте, как будет выглядеть траектория одного жука в системе отсчета, связанной с другим жуком. Известно, что жуки начинают двигаться одновременно из точки O вдоль диагонали BD .

2. Надутый пляжный матрац выпускает за минуту объем воздуха $V_1 = 100 \text{ см}^3$. Сколько времени после надувания матрац может удерживать на плаву человека массой $M = 100 \text{ кг}$? Размеры матраца в надутом состоянии $180 \times 50 \times 20 \text{ см}$, масса матраца много меньше массы человека, а объем стенок матраца много меньше объема воздуха в нем. Давление воздуха в матраце считайте равным атмосферному.

3. Кусок льда, находящийся в калориметре при температуре $t_1 = -40 \text{ }^\circ\text{C}$, залили водой того же объема при температуре $t_2 = 4 \text{ }^\circ\text{C}$, в результате чего $m = 20 \text{ г}$ воды замерзло. Пренебрегая теплоемкостью калориметра и теплообменом с окружающей средой, найдите объем воды в калориметре в состоянии теплового равновесия. Необходимые табличные данные возьмите из справочника.

4. Сопротивления резисторов электрической схемы, изображенной на рисунке 1, одинаковы и равны сопротивлению лампочек. Во сколько раз изменится сила тока через лампочку и выделяемая на ней мощность, если к каждой лампочке параллельно подсоединить еще по одной такой же лампочке? Напряжение в сети считать постоянным.

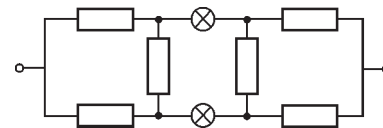


Рис. 1

5. Параллельный пучок света проходит через щель в плоском экране с нижней зеркальной поверхностью и падает вертикально на искривленное зеркало (рис.2). Зеркало лежит на горизонтальном столе и представляет собой участок поверхности цилиндра радиусом R и шириной $R/2$, ось которого проходит через точку O перпендикулярно плоскости рисунка. Найдите ширину возникающих на столе светлых полос, если ширина щели $R/2$.

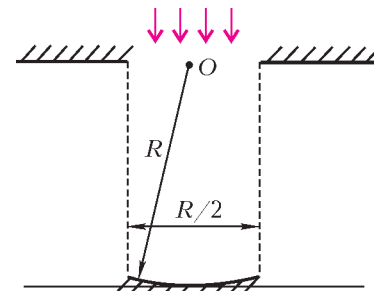


Рис. 2

6. Дорога имеет закругление в виде четверти окружности радиусом $R = 50 \text{ м}$ (рис.3). Первый велосипедист движется по дороге равномерно со скоростью $v_1 = 5 \text{ м/с}$. В тот момент, когда он оказывается в точке A , находящейся на расстоянии $L = 100 \text{ м}$ от начала закругления, из этой точки стартует второй велосипе-

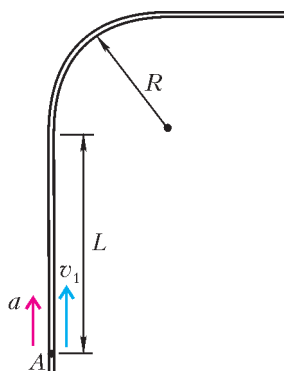


Рис. 3

дист в том же направлении с ускорением $a = 0,25 \text{ м/с}^2$. На прямолинейных участках он движется равноускоренно, а на закругленном участке сохраняет скорость постоянной. Найдите, через какой промежуток времени после начала движения второго велосипедиста он догонит первого, и определите расстояние от точки А до точки, в которой это произойдет.

7. Цилиндр радиусом R , ось которого расположена параллельно земле, вращается с постоянной угловой скоростью ω . Поверхность цилиндра мокрая, так что при вращении с него разлетаются капли воды. Начальная скорость любой капли равна скорости точки цилиндра, с которой она слетает. Найдите, какая часть воды, разбрызгиваемой в единицу времени, попадает обратно на цилиндр.

8. Небольшое тело соскальзывает без начальной скорости с наклонной плоскости, верхняя половина которой гладкая, а нижняя – шероховатая. Известно, что вторую половину пути тело проходит в $n = 2,2$ раза быстрее, чем первую. Чему будет равно n , если установить эту плоскость шероховатым концом вверх?

9. Конструкция в форме буквы И состоит из двух вертикальных столбиков длиной L и наклонной перекладины длиной $l = 5L/4$ (рис.4). Столбики и перекладина сделаны из одного и того же материала и имеют одинаковые площади поперечного сечения. Масса столбика m . Найдите, во сколько раз сила деформации правого столбика больше у его нижнего конца по сравнению с верхним.

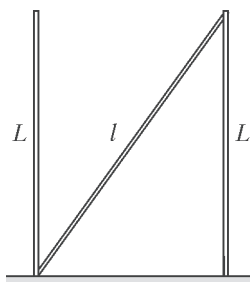


Рис. 4

10. В двух частях цилиндрического сосуда длиной L , разделенных непроницаемой подвижной перегородкой, находятся по $\nu = 2$ моль кислорода и озона. Постепенно молекулы озона (O_3) разрушаются, и в обеих частях сосуда оказывается кислород. Найдите, на сколько при этом смещается перегородка, пренебрегая ее трением о стенки сосуда.

На отделение принимаются учащиеся, имеющие базовое образование в объеме 8, 9 и 10 классов средней школы. Полная программа обучения на отделении – три года. Программа включает следующие одногодичные курсы:

Отделение химии

- общая химия (с элементами неорганической химии);
- неорганическая химия;
- органическая химия;
- химия окружающей среды (полгода).

Если вы хотите научиться решать задачи, вам будет полезен курс «Методы решений задач по химии». Его можно совмещать с другими курсами.

Более подробные сведения о программе и порядке обучения высылаются вместе с извещением о решении Приемной комиссии.

Задачи вступительной работы, помещенные ниже, – общие для всех поступающих, независимо от базового образования.

Прием на отделение проводится в течение всего 2011 года. Однако желательно отправить вступительную работу до 15 июня 2011 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы.

Наш сайт: <http://www.chem-dist.ru>

Задачи

1. Сколько атомов N содержится в 1,3 л азота при температуре 127°C и давлении 1 атм?

2. На кусок алюминия массой 2,3 г подействовали избытком 20%-го раствора соляной кислоты. Взлетит ли шарик массой 5 г, наполненный выделившимся газом?

3. Опишите (кратко) схему получения сульфата меди, используя в качестве исходных веществ только серу, медь и воду. В уравнениях реакций должны быть проставлены коэффициенты; обязательно укажите условия протекания реакций.

4. Приведите 5 разных реакций получения гидроксида калия.

5. Напишите структурные формулы всех продуктов, которые могут образоваться при нагревании смеси изопропилового и н-бутилового спирта с концентрированной серной кислотой.

Отделение филологии

За время существования отделения подготовлено и издано большое количество уникальных учебных пособий по русскому языку, общему языкознанию, истории и теории литературы.

На отделение принимаются все желающие, имеющие базовую подготовку в объеме 7 классов.

Отделение предлагает на выбор 18 учебных программ. Подробно о них рассказано на нашем сайте. Также сведения о программах и порядке обучения высылаются вместе с извещением о решении Приемной комиссии. При оценке вступительной работы учитывается, в каком классе вы учитесь.

Вы хотите исправить грамотность? Познакомиться с любопытными проблемами теории и практики русского языка? Освоить приемы лингвистического или литературоведческого анализа? Узнать кое-что о журналистике и оценить свои творческие способности? Приобрести навыки, необходимые для успешной сдачи экзаменов в вуз? Тогда выполните и пришлите нам вступительное задание, вопросы которого приведены ниже.

Внимание! На первой странице укажите следующие данные: Ф.И.О., какой класс заканчиваете, полный (с индексом!) почтовый адрес, телефон. Вместе с выполненным заданием пришлите, пожалуйста, стандартный конверт с маркой и заполненным вашим адресом (с индексом) для ответа Приемной комиссии.

Срок отправки вступительной работы – до 15 мая 2011 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы.

Если вопросы, предложенные нами, для вас пока сложны, но вы хотите у нас учиться, пришлите информацию о себе, и мы постараемся помочь.

Наш e-mail: filologiyvzms@mail.ru

Наш сайт: <http://philologist.su>

Вопросы

1. Встречались ли вам в русской литературе герои, обретающие счастье? Если да – назовите их и докажите, что это действительно так. Если нет – попытайтесь объяснить почему.

2. Вместе с героями «Евгения Онегина» читатель посещает несколько балов. Найдите описание танца, особенности исполнения которого в столице и в провинции поэт мастерски передает при помощи аллитерации. Назовите танец и главу книги.

3. Исправьте и объясните ошибки:

• Оптимистические настроения в стихотворениях поэта позволяют отнести его к декадентам.

• В школах необходимо постоянно дискредитировать здоровый образ жизни.

• Пришлось согласиться скрипя сердцем.

• Находясь в пути, всегда вспоминается дом.

4. Кит – *млекопитающее*. Укажите, какой частью речи является выделенное слово, каким способом оно образовано, разберите по составу, дайте фонетическую транскрипцию и определите синтаксическую функцию в данном предложении.

5. Возьмите небольшое интервью у инопланетянина.

Отделение экономики

Хотите научиться разбираться в экономике? Узнать изнутри работу маркетологов, банкиров, предпринимателей? Открыть свою собственную фирму, пока – в экономической игре? Тогда эта информация для вас!

Обучение на отделении заочное, все учебные материалы школьники получают по почте (часть материалов учащиеся могут получить по Интернету и электронной почте для тех, у кого они есть). Учиться на экономическом отделении могут те, кто в 2011 году закончит 7–10 класс, срок обучения от 1 года до 4 лет. Обучение индивидуальное (формы учебы «Коллективный ученик» на экономическом отделении нет).

Программа экономического отделения включает изучение экономической теории и знакомство с практикой экономики и бизнеса. Сначала все учащиеся познакомятся с основами экономики, а далее вы сможете выбрать такие предметы, как предпринимательство и менеджмент, бухгалтерский учет и финансы, мировая экономика и география, экономическая история. Учащиеся 10–11 классов в дополнение к курсу экономики получают необходимую подготовку по русскому языку и литературе, математике, обществознанию, что поможет лучше сдать ЕГЭ, успешно участвовать в предметных олимпиадах и поступить в лучшие вузы страны.

Учась на экономическом отделении, вы сможете заочно познакомиться со студентами, выпускниками и даже преподавателями МГУ им. М.В.Ломоносова, узнаете о разнообразных замечательных профессиях в экономике, одну из которых, возможно, вы выберете для себя в будущем.

Во время обучения ученики становятся участниками увлекательной бизнес-игры, которая будет вестись по переписке (а также через Интернет).

Для поступления на отделение вам нужно выполнить вступительное задание.

Прочитайте текст:

Прошлое лето выдалось жарким, иногда чувствовалась гарь лесных пожаров, и школьнику Тёпе Экономову иногда казалось, что ему просто нечем дышать. Но даже в это время он не бросал думать о том, как ему разбогатеть и к окончанию школы начать свой бизнес. Однажды, когда он отдыхал в деревне у своей бабушки Настасьи (ах, как там хорошо и легко дышалось!), ему пришла в голову отличная идея: он будет продавать воздух! Ведь воздух нужен всем, особенно в загазованном городе, где он живет. Он вспомнил, что в городском парке рядом с его домом тоже дышалось свежо. Хорошо, что до него никто не догадался продавать воздух в парке, так что идея принадлежит именно ему. Парк-то ничей!

Он стал рассуждать. Во всем мире люди за все платят. Никто не позволит тебе сорвать овощи с чужой грядки – их надо купить на рынке. Так же и другие ресурсы – например, золото это простой металл, а люди так дорого за него платят. Даже за воду и то приходится платить! А воздух человеку жизненно необходим! Может быть, люди просто привыкли к тому, что воздух достается бесплатно? Раз Тёпа первым догадался его продавать, то пусть все гуляющие по парку платят ему! По выходным, когда в школе нет уроков, он будет стоять в парке и собирать деньги со всех желающих подышать свежим воздухом. Правда, нужно еще найти деньги, чтобы заделать дыры в заборе парка (нельзя же допустить, чтобы мальчишки лазали туда бесплатно) и напечатать квитанции, но тут Тёпа рассчитывал на помощь бабушки, которая держит в деревне корову и летом продает молоко дачникам.

Внимание: задание

Оцените рассуждения Тёпы Экономова, скажите, прав ли он и почему. Постарайтесь изложить свои мысли коротко, в нескольких предложениях. Найти ответ на наш вопрос вам помогут Интернет, учебники и справочники, научно-популярные журналы (например, «Наука и жизнь»), друзья и учителя.

Свои ответы присылайте по электронной почте econ@vzms.ru или обычным письмом с указанием полного почтового адреса и индекса, фамилии, имени и отчества (в письме всю информацию о себе пишите, пожалуйста, печатными буквами). Озаглавьте письмо: «Экономика, вступительное задание-2011». Укажите класс, в котором вы сейчас учитесь. Пожалуйста, укажите источник информации об ОЛ ВЗМШ – «Квант», «Наука и жизнь», афиша, другое (например, узнал от учителя, друзей).

Срок отправки вступительной работы – до 31 мая 2011 года.

Наш адрес в Интернете: www.vzms.ru/page/econ.

Отделение государства и права

Школьникам 8–11 классов и группам «Коллективный ученик» предлагаются два курса.

1) Годовой курс «Беседы о правах человека, нравственности, праве, законе и государстве». В курсе даются современные представления об основных понятиях, связанных с правом, законом и государством, рассказывается об основах российского законодательства, правах человека. Разбираются примеры судебных процессов, приводятся общекультурные примеры, связанные с направленностью курса.

2) Полугодовой курс «Беседы об основах демократии».

Мы предлагаем проходить курсы именно в таком порядке. И только старшеклассники, если они не успевают пройти оба курса подряд, но обязательно хотят пройти именно второй курс, могут начинать прямо с него.

Желающие учиться должны сообщить свой полный почтовый адрес, адрес электронной почты (если есть), фамилию, имя и отчество, сколько классов закончено. При оценке вступительной работы, вопросы которой приведены ниже, мы учитываем возраст (базовое образование) поступающего. В письмо обязательно *вложите обычный конверт с маркой и вашим адресом* (чтобы мы могли вам ответить) и ответы на приведенные ниже вопросы.

Срок отправки вступительной работы – до 1 июня 2011 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы.

Вопросы

1. Вот несколько тем из тех, которые мы будем проходить в наших курсах: 1) государство; 2) право и правда; 3) права человека; 4) примеры судебных процессов в России в разные времена; 5) демократия в России и в США; 6) альтернативные демократии; 7) история человечества... Что из названных разделов вам интереснее?

2. Читали ли вы дополнительную литературу по каким-нибудь вопросам из этого списка? Или, может быть, какую-то дополнительную литературу, связанную с общественными науками?

3. Что вас больше интересует: философия, политика, экология, история, что-то еще?

4. Каковы, по-вашему, различия и сходство между обычаями и традицией?

Отделение истории

Обучение на историческом отделении позволит всем, в том числе жителям самых отдаленных городов и деревень, расширить свой кругозор, подготовиться к поступлению в вуз. Успешно прошедшие курс обучения получают диплом.

А зачем нужно изучать историю? Во-первых, это просто интересно. Любопытно знать, как жили когда-то люди, во что одевались, чем питались, что читали, как женились и выходили замуж, за что боролись и «на что напарывались». Во-вторых, это полезно. Только зная прошлое, можно понять настоящее и прогнозировать будущее. Мы поможем вам в этом разобраться.

Специально для вас опытные преподаватели пишут книжки. Последние новости из мира истории вы узнаете одними из первых! Мы будем поддерживать с вами постоянную связь. По нашим книжкам вы будете выполнять особые задания и сообщать нам, что вы раскопали. Ведь, в сущности, труд историка и состоит из этих раскопок: историк-археолог, копая землю и песок, отыскивает крупинки ушедших времен; историк-архивариус копается в груды бумаг и достает из архивов и даже из частной переписки все, что может позволить ему понять образ времени; историк-теоретик как увлекательный роман читает археологические таблицы, сухие сводки, статистику и восстанавливает по ним живую ткань ушедшей жизни. У историка особая профессия: он в одном лице следователь, прокурор и адвокат времени.

Вступительное задание, приведенное ниже, нужно выполнить на двойном листе бумаги.

Срок отправки вступительной работы – до 1 июня 2011 года.

Задание

1. Отгадайте, кто это

• С легкой руки Фридриха II его прозвали «русский Гамлет».

• Его отец – внук Петра I по материнской линии и внучатый племянник Карла XII по отцовской.

• Его мать, немецкая принцесса, приехала в Россию в 15 лет; пришла к власти в 33 года; правила 34 года, не имея на трон законных прав.

• Придя к власти в 42 года, он отменил указ Петра I о престолонаследии, которым чуть не воспользовалась его мать, желавшая передать власть внуку, минуя сына.

• Православный царь, глава католического Мальтийского ордена.

• Главная черта его правления – мелочный деспотизм.

• Во время военных походов мог отправить в Сибирь прямо с плаца за нечеткий шаг, оторвавшуюся пуговицу или плохо напудренные ботинки.

• Проверять преданность придворных внезапной ночной тревогой, требуя явиться ко двору без всякого промедления, хоть бы и в ночной рубашке.

• При нем за ношение одежды на французский манер и использование одновременно трех цветов – красного, синего и белого – подвергали аресту.

• Чтобы ослабить Англию, отправил 22 тысячи казаков завоевывать Индию, и только его смерть вернула воинов с дороги.

• Боясь заговора, этот император построил себе замок и в нем был убит.

• Его старший сын мечтал о конституции для России, а дал ее Польше.

2. **Опишите**, не более чем в 7 предложениях, портрет русского правителя, образ которого воплощен в трагедии А.С.Пушкина, заканчивающейся строкой «...народ безмолвствует».

Внимание! ОЛ ВЗМШ проводит набор на курс «Общественное знание». Курс включает следующие дисциплины: философия, социология, политология, теория государства, государственное устройство России, право, экономика.

Слушателям направляются оригинальные учебные пособия, созданные на основе многолетнего опыта работы авторов курса. Проверка знаний осуществляется с помощью общепринятой системы тестирования.

Программа курса рассчитана на 1 год. Обучение носит заочный характер и имеет целью дать выпускникам школ – как крупных городов, так и небольших сел – глубокие знания по общественным дисциплинам, подготовить их к успешной сдаче ЕГЭ.

Для записи на курс необходимо отправить заявление *до 1 июня 2011 года*. В заявлении укажите: фамилию, имя, отчество, свой полный домашний адрес (с индексом), класс, в котором вы будете учиться с 1 сентября 2011 года.

Заявление отправьте по адресу: 119234 Москва, Воробьевы горы, МГУ, ОЛ ВЗМШ (курс «Общественное знание»).

Отделение информатики

Отделение приглашает школьников, интересующихся информатикой, с образованием не ниже 6 классов средней школы. В 2011/12 учебном году мы набираем школьников для обучения программированию на языке Паскаль. Для успешного выполнения практических заданий должна быть возможность работы на компьютере.

Для зачисления необходимо прислать анкету с ответами на приведенные ниже вопросы. В письмо вложите сложенный пополам длинный (110×220 мм) конверт с обратным адресом. Пожалуйста, не пытайтесь «впихнуть» конверт внутрь письма целиком – он будет поврежден при вскрытии.

Внимание! Ответы на вопросы анкеты присылайте на двойном тетрадном листе или на листе А4, сложенном пополам. На первой странице обязательно должны быть следующие данные: фамилия, имя, отчество; класс, в котором вы будете учиться с 1 сентября 2011 года; полный (с индексом!) почтовый адрес; телефон с кодом города; e-mail (если есть); есть ли у вас возможность регулярного выхода в Интернет; как вы узнали о нашей школе. На этой странице больше ничего не должно быть. Ответы на вопросы нужно уместить на следующих трех страницах. Старайтесь писать развернуто, но в то же время коротко. Не пытайтесь искать ответы на вопросы в книжках и в Интернете – это не повлияет на ваше зачисление, но не даст нам возможности понять, кто приходит к нам учиться, познакомиться с вами.

Можно присылать ответы на вопросы по электронной почте на адрес vzms@programming-school.ru, однако в этом

случае вы получите ответ также по электронной почте. Если вы посылаете электронное письмо, ответы на вопросы должны быть прямо в тексте письма (а не в отдельном файле!).

Срок отправки анкеты – до 15 мая 2011 года.

Наш сайт: <http://vzms.programming-school.ru>

Вопросы

1. Есть ли у вас какие-то достижения в области информатики на олимпиадах, конференциях?
2. Нравится ли вам заниматься математикой? Какие темы вам интересны?
3. Изучаете ли вы в школе информатику? Какие темы вы изучили?

Федеральная заочная физико-техническая школа при МФТИ

Федеральная заочная физико-техническая школа (ФЗФТШ) при Московском физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор в 8–11 классы учащихся 7–10 классов общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий и т.п.), расположенных на территории Российской Федерации.

ФЗФТШ при МФТИ как государственное образовательное учреждение профильного дополнительного образования детей работает с 1966 года. За прошедшие годы школу окончили более 80 тысяч учащихся; практически все ее выпускники поступают в ведущие вузы страны, а каждый второй студент МФТИ – ее выпускник. Финансирует школу Министерство образования и науки РФ.

Научно-методическое руководство школой осуществляет Московский физико-технический институт (государственный университет). Обучение в школе ведется по двум предметам – физике и математике.

Цель нашей школы – помочь учащимся 8–11 классов общеобразовательных учреждений, интересующимся физикой и математикой, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам, а также способствовать их профессиональному самоопределению.

Набор в 8, 9, 10 и 11 классы на 2011/12 учебный год проводится на заочное, очно-заочное и очное отделения.

Заочное отделение (индивидуальное обучение)

Тел./факс: (495) 408-51-45, e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Прием на заочное отделение проводится на конкурсной основе по результатам выполнения приведенного ниже вступительного задания по физике и математике. Полная программа обучения рассчитана на 4 года, т.е. с 8 по 11 классы включительно, но начать обучение можно с любого из указанных классов.

В течение учебного года, в соответствии с программой ФЗФТШ, ученик будет получать по каждой теме задания по физике и математике (5 заданий по каждому предмету для 8 класса, 6–7 заданий по каждому предмету для 9, 10 и 11 классов), а затем – рекомендуемые авторские решения этих заданий вместе с проверенной работой. Задания содержат теоретический материал, разбор характерных примеров и задач по соответствующей теме и 8–12 контрольных вопросов и задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные. Задания составляют опытные преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ, а также выпускники МФТИ. Работы учащихся-заочников проверяют студенты, аспиранты и выпускники МФТИ (из них 80% – выпускники нашей школы).

Срок отправления решения вступительного задания – не позднее 1 марта 2011 года. Проверенные вступительные

4. Изучали ли вы какие-нибудь языки программирования? Какие?

5. Какие операционные системы вы знаете?

6. Какими компьютерными программами вы регулярно пользуетесь?

7. Знакомы ли вам следующие конструкции и приходилось ли вам писать программы с их использованием: а) условия; б) циклы; в) массивы; г) функции?

8. Знаете ли вы, что такое рекурсия, индукция, в чем различия между ними? Приходилось ли вам применять эти методы при решении задач?

работы обратно поступающему не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 2011 года.

Вне конкурса в ФЗФТШ принимаются *победители* областных, краевых, республиканских, всероссийских олимпиад по физике и математике 2010/11 учебного года. Им необходимо до 15 мая 2011 года выслать в ФЗФТШ выполненную вступительную работу по физике и математике вместе с копиями дипломов, подтверждающих участие в перечисленных выше олимпиадах.

Тетрадь с выполненными заданиями (по физике и математике) высылайте по адресу:

141700 Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9, ФЗФТШ при МФТИ.

Вступительное задание по физике и математике ученик выполняет самостоятельно в одной школьной тетради на русском языке, сохраняя тот же порядок задач, что и в задании. Тетрадь нужно выслать в конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). На *внутреннюю* сторону обложки тетради наклейте справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса. На *лицевую* сторону обложки наклейте лист бумаги, четко заполненный по приведенному ниже образцу.

Образец

| | | | | | | | | |
|----------|---|---|---|-----|----|----|----|---|
| Л. № | | | | | | | | |
| № задачи | 1 | 2 | 3 | ... | 14 | 15 | 16 | Σ |
| Ф. | | | | | | | | |
| М. | | | | | | | | |

1. Республика, край, область *Кемеровская область*
2. Фамилия, имя, отчество *Чистова
Галина Сергеевна*
3. Класс, в котором учитесь *восьмой*
4. Номер школы *35*
5. Вид школы (обычная, лицей, гимназия, с углубленным изучением предмета) *лицей*
6. Подробный домашний адрес (с указанием индекса), телефон, e-mail *654041 г. Новокузнецк,
ул. Волжская, д.74, кв.3,
e-mail: dio@rdsc.ru*
7. Адрес школы и телефон, факс, e-mail *654041 г. Новокузнецк,
ул. Циолковского, д. 65,
тел.(3843)35-19-72,
must@yandex.ru*
8. Каким образом к вам попало это объявление?

На конкурс ежегодно приходит более 3 тысяч вступительных работ. Пожалуйста, обратите внимание на правильность заполнения анкеты! Пишите аккуратно, лучше печатными буквами.

Для получения ответа на вступительное задание и для отправки вам первых заданий *обязательно* вложите в тетрадь *два одинаковых* бандерольных конверта размером 160 × 230 мм. На конвертах четко напишите свой домашний адрес.

Очно-заочное отделение (обучение в факультативных группах)

Тел./факс:(498) 744-63-51, e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Факультативные группы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении *двумя преподавателями* – физики и математики, в отдельных случаях разрешается обучение по одному предмету. Руководители факультатива принимают в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ФЗФТШ.

Группа (не менее 7 человек) принимается в школу, если директор общеобразовательного учреждения сообщит в ФЗФТШ фамилии, имена, отчества ее руководителей и поименный алфавитный список обучающихся (Ф.И.О. полностью с указанием класса *текущего учебного года и итоговых оценок* за вступительное задание по физике и математике), адрес, телефон, факс и e-mail школы. Все эти материалы и конверт для ответа о приеме в ФЗФТШ с обратным адресом одного из руководителей следует выслать *до 25 июня 2011 года* по адресу: 141700 Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9, ФЗФТШ при МФТИ (с пометкой «Факультатив»). *Тетради с работами учащихся не высылаются.*

Работа руководителей факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением как руководство профильными факультативными занятиями по предоставлению ФЗФТШ при МФТИ соответствующих сведений.

Руководители, работающие с учащимися, будут *в течение учебного года* получать учебно-методические материалы (программы по физике и математике, задания по темам программ, решения заданий с краткими рекомендациями по оценке работ учащихся), приглашаться на курсы повышения квалификации учителей физики и математики, проводимые на базе МФТИ. Работы учащихся проверяют и оценивают руководители факультативных групп, а в ФЗФТШ ими *высылаются ведомости с итоговыми оценками по каждому заданию и итоговая ведомость за год.*

Очное отделение (обучение в вечерних консультационных пунктах)

Тел.: (498) 744-65-83, e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Для учащихся Москвы и Московской области по программе ФЗФТШ работают вечерние консультационные пункты. Набор в них проводится по результатам вступительных экзаменов по физике и математике и собеседования, которые проходят во второй половине сентября.

Программы ФЗФТШ при МФТИ являются профильными дополнительными образовательными программами и едины для всех отделений. Кроме того, ученикам всех отделений будет предложено участвовать в физико-математической олимпиаде «ФИЗТЕХ-2011», которая, как правило, проводится на базе МФТИ и в ряде городов России в конце марта, в других очных и заочных олимпиадах МФТИ и его факультетов. Для учащихся 9–11 классов на базе МФТИ работает субботний лекторий по физике и математике по программе ФЗФТШ. Лекции читают преподаватели института (как правило, авторы заданий). Подробнее об этих мероприятиях можно прочитать на сайте ФЗФТШ:

<http://www.school.mipt.ru>

По окончании учебного года учащиеся, успешно выполнившие программу ФЗФТШ, переводятся в следующий класс, а выпускники (одинадцатиклассники) получают свидетельство об окончании школы с итоговыми оценками по физике и математике.

Ученикам, зачисленным в ФЗФТШ, будет предложено оплатить безвозмездный целевой взнос для обеспечения учебного процесса в соответствии с уставными целями школы. Сумма вноса может ориентировочно составлять для учащихся заочного отделения 2000–3000 руб. в год, для очного 3500–6000 руб. в год, для очно-заочного 2800–4500 руб. (с каждой факультативной группы) в год.

Для учащихся Украины работает Киевский филиал ФЗФТШ при МФТИ (обучение платное). Желающим в него поступить следует высылать работы по адресу: 03680 Украина, г. Киев, б-р Вернадского, д. 36, ГСП, Киевский филиал ФЗФТШ при МФТИ. Телефоны: 8-(10-38-044) 424-30-25, 8-(10-38-044) 422-95-64.

Для учащихся из зарубежных стран возможно только платное обучение на заочном и очно-заочном отделениях.

Внимание! Прислав нам решенное вступительное задание, вы даете согласие на обработку ваших персональных данных (в соответствии с Федеральным законом от 27.07.2006 г. №152-ФЗ), которые будут использованы исключительно для отправки вам материалов по почте и учета вашей успеваемости.

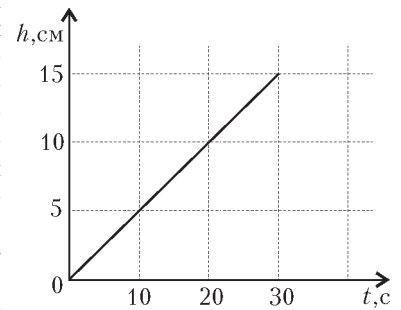
Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике. Номера задач, обязательных для выполнения (заочное и очно-заочное отделения), даны в таблице (номера классов указаны на текущий 2010/11 учебный год).

| | 7 класс | 8 класс | 9 класс | 10 класс |
|------------|---------|---------|---------|----------|
| Физика | 1 – 5 | 6 – 10 | 8 – 13 | 11 – 16 |
| Математика | 1 – 5 | 5 – 10 | 6 – 12 | 10 – 16 |

ВСТУПИТЕЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ

1. Ученик начинает наполнять водой первоначально пустой сосуд с вертикальными стенками, измеряя при этом уровень воды. Скорость поступления воды в сосуд $m_0 = 50$ г/с. По результатам

измерений учеником был построен график зависимости уровня воды в сосуде от времени (см. рисунок). Определите: 1) скорость поднятия уровня воды; 2) площадь поперечного сечения сосуда.



2. Катер, поднимающийся вверх по реке, встретился у моста с плотом и продолжил движение. Повернув назад через время $\tau = 1$ ч, катер догнал плот на расстоянии $L = 4$ км от моста ниже по течению. Определите скорость течения реки. Скорость катера относительно воды (скорость катера в стоячей воде) остается постоянной во время всего движения.

3. Стержень состоит из двух цилиндрических стержней одного и того же сечения. Первый стержень изготовлен из материала плотностью ρ_1 и имеет длину l_1 . Второй стержень изготовлен из материала с большей плотностью. Если отрезать от первого стержня часть длиной $\Delta l = 0,5l_1$, то масса всего стержня уменьшится на 10%. Как изменилась бы масса всего стержня, если бы только от второго стержня отрезали часть, равную половине его длины?

4. При взвешивании пустого сосуда показания динамометра были $P_1 = 2 \text{ Н}$. После доливания в сосуд неизвестной жидкости объемом $V = 200 \text{ мл}$ показания динамометра стали $P_2 = 3,6 \text{ Н}$. Какова плотность налитой в сосуд жидкости?

5. При измерении давления в озере с пресной водой в точках, находящихся на одной вертикали, оказалось, что давление p_1 воды на расстоянии $h = 5 \text{ м}$ от дна в 3 раза больше давления p_2 на глубине $h = 5 \text{ м}$. Определите глубину озера в данном месте. Атмосферное давление $p_0 = 10^5 \text{ Па}$, $g = 10 \text{ Н/кг}$.

6. Определите наименьшую площадь плоской однородной льдины толщиной $h = 50 \text{ см}$, способной удержать на воде автомобиль массой $M = 1,5 \text{ т}$. Поверхность льдины не заливается водой.

7. Груз массой $m_1 = 300 \text{ кг}$ поднимают подъемным краном с постоянной скоростью на высоту $h = 20 \text{ м}$ за время $t_1 = 60 \text{ с}$. Определите мощность, развиваемую мотором крана. За какое время на ту же высоту будет равномерно поднят груз массой $m_2 = 200 \text{ кг}$? Считать, что мощность мотора одна и та же в обоих случаях.

8. На сколько километров пути хватит $V = 10 \text{ л}$ бензина для автомобиля, двигатель которого развивает при скорости $v = 54 \text{ км/ч}$ полезную мощность $P = 69 \text{ кВт}$ и имеет КПД 40%? Удельная теплота сгорания бензина $q = 4,6 \cdot 10^7 \text{ Дж/кг}$, плотность бензина $\rho = 800 \text{ кг/м}^3$. Значение КПД двигателя определяется отношением полезной работы к количеству теплоты, выделившемуся при сгорании топлива.

9. В сосуд с водой при температуре $t = 20^\circ \text{C}$ помещают лед при температуре $t_0 = 0^\circ \text{C}$. После того как лед частично растаял и установилось тепловое равновесие, оказалось, что масса льда уменьшилась на $m_{\text{л}} = 84 \text{ г}$. Определите начальную массу воды в сосуде. Удельная теплоемкость воды $c_{\text{в}} = 4200 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$, удельная теплота плавления льда $\lambda_{\text{л}} = 330 \text{ кДж/кг}$. Теплоемкостью сосуда и потерями тепла пренебречь. Опыт проводился при нормальном атмосферном давлении.

10. В осветительном приборе, работающем от сети напряжением 220 В , используются три одинаковые параллельно соединенные лампочки накаливания. Каждая из них при напряжении 220 В имеет номинальную мощность 75 Вт . Одна из ламп перегорела, и ее заменили на энергосберегающую лампу, потребляющую при том же напряжении на 80% меньше электроэнергии, чем лампочка накаливания. Как и на сколько изменится сила тока в осветительном приборе? Сопротивлением проводов пренебречь.

11. Автомобиль разгоняется с места по прямолинейному участку дороги со скоростью $v = 108 \text{ км/ч}$ за время $\tau = 10 \text{ с}$. Во сколько раз отличаются расстояния, пройденные автомобилем за первую и последнюю секунды разгона? Движение автомобиля считать равноускоренным.

12. Брусок массой $m = 2,8 \text{ кг}$ перемещают вверх вдоль вертикальной стены, прикладывая направленную под углом α к вертикали силу, модуль которой $F = 70 \text{ Н}$. Найдите ускорение бруска, если известно, что $\sin \alpha = 0,6$, а коэффициент трения скольжения между стеной и бруском $\mu = 0,4$. Считать $g = 10 \text{ м/с}^2$.

13. На конце однородного стержня длиной $L = 2 \text{ м}$ и массой $M = 1 \text{ кг}$ закреплено пустое ведро такой же массы. Стержень подвешен таким образом, что вся конструкция находится в равновесии, при этом стержень располагается горизонтально. В ведро наливают некоторое количество воды. Для того чтобы стержень остался в равновесии, точку подвеса пришлось передвинуть на $l = 30 \text{ см}$. Какой объем воды налили в ведро?

14. На сайте одной из фирм, занимающихся организацией полетов на аэростатах (воздушных шарах), указаны основ-

ные характеристики теплового аэростата модели «07АТН»: объем, занимаемый воздухом в аэростате, $V = 2000 \text{ м}^3$, масса оболочки и оборудования (газовые горелки для подогрева воздуха плюс баллоны) $m_1 = 250 \text{ кг}$. До какой температуры следует прогреть воздух внутри оболочки, чтобы аэростат смог поднять пилота и двух пассажиров общей массой $m_2 = 250 \text{ кг}$? При расчетах принять температуру окружающего воздуха равной $t = 15^\circ \text{C}$, его давление – равным нормальному атмосферному давлению, а оболочку считать тонкой и нерастяжимой.

15. Два моля идеального одноатомного газа находятся в равновесном состоянии при температуре $T = 250 \text{ К}$. Газ сначала нагревают изобарно, а затем изохорно. В результате давление газа увеличилось на 20%, а объем увеличился в 1,5 раза. Какую суммарную работу совершил газ? Какое суммарное количество теплоты он получил в этих двух процессах?

16. Маленький проводящий шарик массой $m = 90 \text{ мг}$ подвешен в вакууме на легкой непроводящей нити и имеет заряд $q = 10 \text{ нКл}$. После того как под шариком на одной с ним вертикали на расстоянии $r = 10 \text{ см}$ от него поместили такой же шарик, имеющий некоторый отрицательный заряд, сила натяжения нити увеличилась на 30%. Шарики приводят в соприкосновение и разводят на прежнее расстояние. Найдите новое значение силы натяжения нити.

ВСТУПИТЕЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

1. Решите уравнение

$$(x - 2)^3 + (x + 2)^3 = 2(x - 3)(x^2 + 3x + 9).$$

2. Решите неравенство

$$\frac{5(4 - 3x)}{6} - \frac{2(3x + 4) - 5(6x + 1)}{14} \geq \frac{2x - 4}{21}.$$

3. Сейчас отец старше сына в четыре раза, а через пять лет он будет старше сына только в три раза. Сколько лет им обоим сейчас?

4. На лугу паслись лошади под присмотром деревенских мальчишек. Если бы вы пожелали узнать, сколько всего ног на лугу, то насчитали бы 140 ног. А если бы вы пересчитали головы, то оказалось бы, что всех голов – лошадиных и человеческих – 37. Сколько на лугу лошадей и сколько мальчишек?

5. Ластик на 25% дешевле карандаша, а ручка – на 20% дороже карандаша. На сколько процентов ручка дороже ластика?

6. Артем может выполнить некоторую работу за 4 дня, Борис выполнит ту же работу за 6 дней, а Володя – за 3 дня.

а) За какое время они выполнят работу, если будут работать вместе?

б) За совместную работу им заплатили 2700 рублей. Сколько заработал каждый из них?

7. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - ax + 3 = 0$:

а) имеет корень, равный 7;

б) имеет ровно одно решение;

в) не имеет решений?

8. В сплав меди и олова, содержащий 22 кг олова, добавили 15 кг меди, после чего содержание меди в сплаве повысилось на 33%. Сколько весил сплав первоначально?

9. Через какое время после того, как часы показывали 5 часов ровно, минутная стрелка догонит часовую? (Стрелки часов движутся плавно, без скачков.)

10. Биссектриса угла A при основании AC равнобедренного треугольника ABC пересекает сторону BC в точке K .

Найдите угол ABC , если известно, что треугольники ABK и AKC – равнобедренные с основаниями AB и CK .

11. При каких значениях параметра a прямые, заданные уравнениями

$$y = 13a^2x + a \text{ и } y = (a^4 + 36)x + 3a + 4,$$

параллельны, но не совпадают?

12. При каких целых значениях n дробь $\frac{2n^2 + n - 1}{n + 2}$ есть целое число?

13. Вычислите $\sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha$, если

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 7.$$

Новый прием в школы-интернаты при университетах

Специализированный учебно-научный центр (СУНЦ) МГУ (школа имени академика А.Н. Колмогорова), а также СУНЦ НГУ, СУНЦ УрГУ и Академическая гимназия СПбГУ объявляют набор учащихся в 10 классы (двухгодичное обучение) на физико-математическое и химико-биологическое отделения и в 11 классы (одногодичное обучение) на физико-математическое отделение. В рамках двухгодичного физико-математического отделения кроме основного профиля выделяется компьютерно-информационный класс (СУНЦ МГУ). Химико-биологическое отделение представлено специализациями по химии и биологии.

Зачисление в школу проводится на конкурсной основе. Первый (необязательный) тур экзаменов – заочный письменный экзамен по математике и физике или химии. Успешно выдержавшие заочный экзамен в апреле-мае приглашаются в областные центры Российской Федерации на устные экзамены. Однако *допускается участие в очном туре школьников, не участвовавших в заочном туре.*

Победители заочного тура СУНЦ МГУ будут приглашены на очный тур (в марте 2011 года, вместе с победителями олимпиады «Покори Воробьевы горы»), где получат возможность досрочно поступить в СУНЦ МГУ.

Ниже приводятся условия задач *заочного* вступительного экзамена. Работа должна быть выполнена в обычной ученической тетради, на обложке которой указываются фамилия, имя, отчество (полностью), желаемый профиль обучения, подробный домашний адрес с индексом, контактные телефоны (домашний и мобильный), электронный адрес (если имеется), адрес и номер школы, класс.

Работу нужно отправить простой бандеролью на имя Приемной комиссии по одному из следующих адресов (в зависимости от выбранного учебного заведения):

121357 Москва, Кременчугская ул., 11, СУНЦ МГУ (внимание: жители Москвы принимаются в школу без предоставления общежития), телефон Приемной комиссии: (495)445-11-08, сайт: <http://www.pms.ru>, e-mail: priem@pms.ru;

199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/96, Академическая гимназия;

620137 Екатеринбург, ул. Голощекина, 30, СУНЦ УрГУ;
630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, СУНЦ НГУ (Олимпиадный комитет).

Срок отправки работ – не позднее 15 февраля 2011 года (по почтовому штемпелю). Работы, высланные позже этого срока, рассматриваться не будут. *Обязательно вложите конверт с маркой, заполненный на ваш домашний адрес.*

14. Сократите дробь

$$\frac{x^2y^2 + 2x^2y - y^2 + 3 - 2y - 3x^2}{5x^2y - 3y^2 - 18 - 2xy^2 + 6x^2 - 15y + x^2y^2 - 12x - 10xy}.$$

15. Сумма первых тринадцати членов арифметической прогрессии равна 130. Известно, что четвертый, десятый и седьмой члены этой прогрессии, взятые в указанном порядке, представляют собой три последовательных члена геометрической прогрессии. Найдите первый член арифметической прогрессии.

16. В равнобедренном треугольнике PQR на основании PR взята точка N . Окружности, вписанные в треугольники PQN и QRN , касаются отрезка QN в точках A и B . Найдите длину отрезка AB , если $RN - PN = 8$.

Если вы не сможете решить все задачи – не отчаивайтесь: Приемная комиссия рассмотрит работы с любым числом решенных задач.

Вступительные экзамены второго, *очного* тура будут проводиться с 20 марта по 20 мая 2011 года по регионам.

Вступительное задание заочного тура

Математика

Для поступающих в 10 класс

1. Каждое натуральное число может быть представлено в виде суммы некоторого числа квадратов нечетных чисел (например, $5 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$). Представьте число: а) 2011; б) 2012 в виде суммы *наименьшего* возможного числа нечетных квадратов.

2. Из пунктов A и B одновременно с постоянными скоростями выехали навстречу друг другу два велосипедиста, встретились в 70 км от A и продолжили движение, каждый – в своем направлении. В конечных пунктах велосипедисты отдохнули по одному часу, а затем выехали назад с прежними скоростями. Их вторая встреча произошла в 40 км от A . Найдите расстояние AB .

3. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника ABC , равны 8, 15 и 17. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности.

4. На параболе $y = x^2$ выбрали точки A, B, C и D так, что прямые AB и CD пересекаются на оси ординат. Найдите абсциссу точки D , если абсциссы точек A, B и C равны a, b и c соответственно.

5. На биссектрису угла BAC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) опущен перпендикуляр BK , а на биссектрису угла ABC – перпендикуляр AL . Найдите KL , если $AB = c$.

6. Найдите наибольшее возможное значение суммы $S = x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{99}x_{100} + x_{100}x_1$, если все числа x_1, \dots, x_{100} неотрицательны и $x_1 + x_2 + \dots + x_{100} = 1$.

Для поступающих в 11 класс

1. Запишите число: а) 2010; б) 2009 в виде суммы *наименьшего* возможного числа квадратов нечетных чисел.

2. Семь грибников набрали вместе 100 грибов. Обязательно ли найдутся 3 грибника, собравшие вместе не менее 50 грибов, если: а) каждый из семерых собрал разное количество грибов; б) среди грибников могут быть собравшие одинаковое количество грибов?

3. В окружность единичного радиуса вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого AC и BD пересекаются в точке M . Найдите площадь этого четырехугольника, если произведение площадей треугольников AMB и CMD равно $1/4$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} = xy, \\ x^5 + y^5 = 8xy. \end{cases}$$

5. На биссектрису угла BAC треугольника ABC опущен перпендикуляр BK , а на биссектрису угла ABC – перпендикуляр AL . Найдите KL , если $\angle ACB = \gamma$, а $AB = c$.

6. На доске выписаны 120 действительных чисел (не обязательно различных). Известно, что среди попарных произведений этих чисел ровно 2010 отрицательных. Сколько нулей среди выписанных чисел?

Физика

(физико-математическое отделение)

Поступающие в 10 класс решают задачи 1–6, поступающие в 11 класс решают задачи 1–8. Необязательно решить все задачи. Решите те, какие удастся.

1. На круглом футбольном мяче, лежащем в центре поля, находится муравей. Он бежит по поверхности мяча кратчайшим путем к самой верхней точке мяча с постоянной по величине скоростью 8 м/с. Накрапывает мелкий дождик, и капли падают вертикально со скоростью 6 м/с. В некоторый момент времени скорость муравья направлена вертикально вверх. В этот же момент одна из капелек находится на расстоянии 1 мм от самой верхней точки мяча. Поскольку матч еще не начался, два школьника играют в физическую игру, состоящую в том, что они выбирают самые разные системы отсчета (тела, которые считаются неподвижными) и ищут скорости других тел относительно выбранных систем отсчета. Вася выбрал в качестве системы отсчета туловище муравья, а Петя – ту самую каплю. Какова по величине скорость капли в Васиной системе отсчета и какова по величине скорость муравья в Петиней системе отсчета? Какова скорость центра мяча в тех же системах отсчета?

2. Вася бросил палку длиной 1 м с крыши школы. В некоторый момент скорости ее концов оказались такими: одна равна 8 м/с и направлена на север, другая равна 6 м/с и направлена на восток. Какой будет скорость центра палки через 0,2 с, если она к этому моменту все еще будет находиться в полете? С какой угловой скоростью вращается палка?

3. Атлет находится на прямом участке дорожки стадиона. Он стартует из состояния покоя и первую половину пути длиной L бежит с ускорением a_1 , а вторую половину пути – с «замедлением» a_2 ($a_2 < a_1$). Какова средняя скорость атлета на дистанции и с какой скоростью он придет к финишу? Как изменятся результаты, если спортсмен с теми же ускорениями будет бежать по половине времени всего забега?

4. Диаметр колес простого дорожного велосипеда 0,7 м. Расстояние от педалей до оси, вокруг которой они вращаются, 15 см. Диаметр ведущей «звездочки» в 3 раза больше диаметра «звездочки» на заднем колесе. Масса велосипедиста 70 кг, масса велосипеда 10 кг, причем массой колес можно пренебречь в сравнении с массой рамы. Велосипедист начинает движение из состояния покоя на горизонтальной дороге. С каким максимальным ускорением движется велосипедист после старта?

5. В озере плавает, находясь в равновесии, кусок льда, имеющий форму куба. Если медленно приподнимать его, чтобы он весь оказался над поверхностью воды, то потребуются совершить механическую работу 10^3 Дж. Какую минимальную механическую работу нужно совершить, чтобы из состояния равновесия утопить лед так, чтобы он весь оказался под водой? Какова длина ребра ледяного куба?

6. Школьник Вася проводит дома сложный эксперимент. Он берет пустую кастрюлю диаметром 21 см и высотой 15 см и последовательно наливает в нее порции воды по 100 мл. Каждая из порций имеет температуру на 1°C выше, чем предыдущая. Первая порция имеет температуру 0°C . Теплоемкость стенок кастрюли 420 Дж/К. Начальная температура стенок кастрюли 20°C . Какой будет температура воды в кастрюле к тому моменту, когда она будет заполнена целиком и установится тепловое равновесие? Теплообменом с окружающими телами можно пренебречь.

7. Источник с ЭДС 10 В имеет внутреннее сопротивление 0,5 Ом. Он питает нагревательное устройство (для детского питания), которое самостоятельно «выбирает» требуемую ему мощность. В течение первой минуты работы шел постоянный ток 10 А. В течение второй минуты ток изменялся линейно и уменьшился до нуля. Внутри устройства находилось 100 мл чая. На сколько увеличилась температура за эти две минуты? Считайте, что вся поступающая в устройство энергия идет на нагрев напитка.

8. Две покоящиеся в космосе вдаль от других тел материальные точки, имеющие одинаковые массы m и электрические заряды q , скреплены невесомой нерастяжимой и непроводящей ток прочной гибкой нитью длиной L . Незаряженное тело малых размеров массой M движется в направлении средней точки нити со скоростью v , перпендикулярной нити. При соприкосновении тела и нити они друг относительно друга не проскальзывают, но и не прилипают друг к другу. На каком минимальном расстоянии друг от друга будут находиться заряженные материальные точки в процессе движения? Какими будут скорости тела массой M и материальных точек массами m через большое время?

Химия

(химико-биологическое отделение)

1. Горением называется реакция с самопроизвольным выделением тепла и света; при этом на 1 г смеси исходных веществ выделяется более 1,5 кДж тепла. При полном хлорировании 1 моль углерода выделяется 133 кДж, а при полном хлорировании 1 моль магния выделяется 645 кДж. Может ли гореть магний, залитый четыреххлористым углеродом – жидкостью, которую использовали для наполнения огнетушителей? Приведите уравнения возможных реакций и расчеты.

2. С какими из перечисленных веществ может реагировать бром и при каких условиях:

1) бромид натрия, 2) иодид натрия, 3) хлор, 4) вода, 5) серная кислота.

Напишите уравнения соответствующих реакций, если они возможны.

Конкурс «Свободный полет» в 2011 году

Подробно об этом конкурсе, проводимом благотворительным фондом «Новая мысль» начиная с 2010 года, рассказывалось в Декларации Оргкомитета конкурса, опубликованной в «Кванте» №6 за 2009 год. Сейчас мы хотим обратить

внимание участников конкурса на некоторые изменения и уточнения, внесенные в Положение о проведении конкурса.

Участники конкурса разбиваются на две возрастные категории – до 18 лет и до 35 лет. Каждый участник конкурса представляет на рассмотрение жюри свой проект, который может быть либо отдельно сформулированной задачей с ее

решением, либо отдельно сформулированной проблемой или задачей без предоставления решения.

Порядок оформления работ, присылаемых на конкурс:

Структура предоставляемых на конкурс материалов должна начинаться с отдельного, не скрепленного с работой, листа участника. Он должен содержать следующую информацию о конкурсante – паспортные данные, почтовый и электронный адрес, телефон для связи.

Сам отчет начинается с титульного листа участника. Титульный лист должен включать следующие данные – Ф.И.О., возраст (полное число лет), город (область), название работы, краткое содержание работы (аннотацию). Объем самой работы не должен превышать 10 машинописных страниц. Работа представляется только в электронном виде и высылается обязательно по двум адресам –

admin@kvant.info и novmysl@finam.ru

Факт получения работы каждого участника будет сразу же подтвержден по электронной почте.

Сроки проведения конкурса:

прием работ – до 15 апреля 2011 года, работа жюри – до 31 мая, оповещение победителей и вручение премий – до 30 июня, размещение работ на сайте фонда «Новая мысль» – до 31 августа 2011 года.

Распределение призов:

в возрастной категории до 18 лет (не ранее 1993 г. р.) – три премии по 100000 рублей,

в возрастной категории до 35 лет (не ранее 1976 г.р.) – четыре премии по 150000 рублей.

Подробная и регулярно обновляемая информация о конкурсе «Свободный полет» (включающая изложение целей конкурса, Декларацию Оргкомитета, а также текущие пояснения, комментарии и пр.) размещается на сайте благотворительного фонда «Новая мысль» novmysl.finam.ru

Оргкомитет конкурса

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №5)

1. На 843.

Поскольку K и $Ч$ – однозначные не равные нулю цифры, то $K = 9$, а $Ч = 1$. Тогда $KTO - TO = 900$. Кроме того, $OE - TO = 57$, следовательно, $KOE - KTO = OE - TO = 57$, т.е. $KTO - TO$ больше, чем $KOE - KTO$ на $900 - 57 = 843$.

2. Если год не високосный, то число пятниц может быть другим. Например, в текущем 2010 году: 31 декабря в нем – пятница, а всего дней $365 = 7 \cdot 52 + 1$, т.е. перед 31 декабря идут 52 недели, в которых поровну четвергов, пятниц и суббот. Докажем, что в високосном году число пятниц такое же. Всего в нем 366 дней. В первых 52 неделях четвергов, пятниц и суббот поровну – по 52. Четверг и суббота – не соседние дни, значит, в последние два дня года нет ни четверга, ни субботы. Ни один из двух последних дней не может быть и пятницей – иначе другой будет либо четвергом, либо субботой.

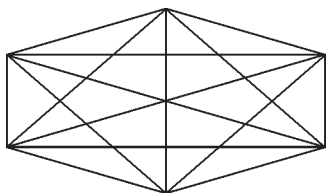


Рис. 1

3. Один из возможных примеров показан на рисунке 1. Он получается из правильного шестиугольника растяжением в 2 раза в горизонтальном направлении.

4. Чтобы состав тронулся с места, нужно, постепенно увеличивая силу тяги локомотива, привести в натяжение все сцепки между вагонами. Если же машинист сначала сдает немного назад, то ближайшая к локомотиву сцепка (или даже несколько сцепок) провисает до момента, когда после небольшого разгона локомотива начинает растягиваться вновь. Из-за большой массы локомотив к этому моменту приобретает значительный импульс, что помогает растяжению сцепки. В результате машинист при меньшей силе тяги, не надрывая двигателя локомотива, приводит в движение весь состав.

5. A – правдец, B – хитрец, B – лжец.

Из первой фразы A следует, что он либо правдец, либо лжец, либо хитрец, говорящий правду. Первую фразу B не может произнести ни правдец, ни лжец, а только хитрец, говорящий правду. Теперь по первой фразе B ясно, что он либо лжец, либо лгущий хитрец. Поскольку с B пока есть неясность,

вторая фраза A – правда, и сказать ее мог только правдец (потому что если бы A был хитрецом, то сейчас была бы его очередь лгать). Вторая фраза B , как теперь ясно, ложь, но он и есть сейчас лгущий хитрец. Наконец, третья фраза B тоже ложь, а тогда B – лжец, ибо, будь он хитрецом, он бы сейчас говорил правду.

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

$$1. \cos \alpha_n = \frac{\pi E}{vB} n.$$

$$2. \Delta\omega = \frac{qB}{m}.$$

$$3. v = \frac{qE}{\sqrt{(qB)^2 + k^2}}; \text{ перпендикулярно } \vec{B} \text{ под углом } \alpha \text{ к } \vec{E}$$

таким, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{qB}{k}$.

$$4. h = \frac{(\Delta T)^2}{8q^2 B^2 g}.$$

LI МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Приведем решения задач, предложенные на олимпиаде членами нашей команды.

1 (К.Савенков). Ответ: $f(x) = c$, где $c \in \{0\} \cup [1; 2)$.

Подстановка показывает, что указанные в ответе функции удовлетворяют условию.

Подставив в данное уравнение $x \in [0; 1)$, получим $f(0) = f(x)[f(y)]$. Пусть найдется такое y_0 , что $[f(y_0)] \neq 0$,

тогда для любого $x \in [0; 1)$ имеем $f(x) = \frac{f(0)}{[f(y_0)]} = c$ – постоянное число. Подставив теперь в данное уравнение $y \in [0; 1)$ и

любое x , получим $f([x]y) = [c]f(x)$; в частности, при $y = 0$ левая часть равна $f(0)$, поэтому для $y \in [0; 1)$ и любого x имеем $f([x]y) = [c]f(x) = f(0)$. Так как $[x]y$, где $y \in [0; 1)$, может принимать любые значения, то f тождественно равна $f(0)$. Подставляя в исходное уравнение $x = y = 0$, имеем

$f(0) = f(0)[f(0)]$, откуда $f(0) = 0$ или $[f(0)] = 1$, что соответствует функциям, указанным в ответе.

$\angle SBP = \angle SPA$. Тогда

$$\angle TBL = \angle SPB - \angle SBT = \angle SPA - \angle SVA = \angle PAV = \angle KAV.$$

Из равенства углов $\angle TBL = \angle KAV$ следует равенство дуг TL и KV , откуда $TV \parallel KL$.

5 (С.Ерохин). Ответ: существует.

Текущее распределение монет задается строкой (b_1, b_2, \dots, b_6) , где b_i – количество монет в коробке B_i . Так, $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ – начальная ситуация, а $(0, 0, 0, 0, 0, b)$, где $b = 2010^{2010^{2010}}$, – требуемая ситуация. Покажем, что, применяя операции 1 и 2 типа, мы можем выполнить следующую операцию типа 3:

$$(x, y, z, n, 0, 0) \rightarrow (x, y, z, 0, 2^n, 0).$$

Действительно, выполняем последовательно

$$\begin{aligned}
(\dots, n, 0, 0) &\xrightarrow{1 \text{ раз тип 1}} (\dots, n-1, 2, 0) \xrightarrow{2 \text{ раза тип 1}} \\
(\dots, n-1, 0, 2^2) &\xrightarrow{1 \text{ раз тип 2}} (\dots, n-2, 2^2, 0) \xrightarrow{2^2 \text{ раз тип 1}} \\
(\dots, n-2, 0, 2^3) &\xrightarrow{1 \text{ раз тип 2}} (\dots, n-3, 2^3, 0) \xrightarrow{2^3 \text{ раз тип 1}} \\
(\dots, n-3, 0, 2^4) &\xrightarrow{1 \text{ раз тип 2}} (\dots, 1, 2^{n-1}, 0) \xrightarrow{2^{n-1} \text{ раз тип 1}} \\
(\dots, 1, 0, 2^n) &\xrightarrow{1 \text{ раз тип 2}} (\dots, 0, 2^n, 0).
\end{aligned}$$

Возьмем начальную ситуацию и выполняем последовательно:

$$\begin{aligned}
(1, 1, 1, 1, 1, 1) &\xrightarrow{1 \text{ раз тип 1}} (0, 3, 1, 1, 1, 1) \xrightarrow{3 \text{ раза тип 1}} \\
(0, 0, 7, 1, 1, 1) &\xrightarrow{1 \text{ раз тип 1}} (0, 0, 7, 3, 1) \xrightarrow{3 \text{ раза тип 1}} \\
(0, 0, 7, 0, 0, 7) &\xrightarrow{1 \text{ раз тип 1}} (0, 0, 6, 2, 0, 7) \xrightarrow{1 \text{ раз тип 1}} \\
(0, 0, 6, 1, 2, 7) &\xrightarrow{2 \text{ раза тип 1}} (0, 0, 6, 1, 0, 11) \xrightarrow{1 \text{ раз тип 2}} \\
(0, 0, 6, 0, 11, 0) &\xrightarrow{1 \text{ раз тип 2}} (0, 0, 5, 11, 0, 0) \xrightarrow{\text{тип 3}} \\
(0, 0, 5, 0, 2^{11}, 0) &\xrightarrow{1 \text{ раз тип 2}} (0, 0, 4, 2^{11}, 0, 0) \xrightarrow{\text{тип 3}} \\
(0, 0, 4, 0, 2^{2^{11}}, 0) &\xrightarrow{1 \text{ раз тип 2}} (0, 0, 3, 2^{2^{11}}, 0) \xrightarrow{\text{тип 3}} \dots \\
\dots (0, 0, 1, 0, a, 0) &\xrightarrow{1 \text{ раз тип 2}} (0, 0, 0, a, 0, 0), \text{ где } a = 2^{2^{2^{2^{21}}}}.
\end{aligned}$$

Итак, мы пришли к ситуации $(0, 0, 0, a, 0, 0)$. Заметим, что $a > b$. Действительно, $b = 2010^{2010^{2010}} < (2^{11})^{2010^{2010}} = 2^{11 \cdot 2010^{2010}} < 2^{2010^{2011}} < 2^{(2^{11})^{2011}} = 2^{2^{11 \cdot 2011}} < 2^{2^{16}} < a$, так как $2^{2^{11}} > 16$. Учитывая, что b делится на 4, завершаем процесс, применяя последовательно

$$\begin{aligned}
(0, 0, 0, a, 0, 0) &\xrightarrow{\frac{a-b}{4} \text{ раз тип 2}} \left(0, 0, 0, \frac{b}{4}, 0, 0\right) \xrightarrow{\frac{b}{4} \text{ раз тип 1}} \\
&\rightarrow \left(0, 0, 0, 0, \frac{b}{2}, 0\right) \xrightarrow{\frac{b}{2} \text{ раз тип 1}} (0, 0, 0, 0, 0, b).
\end{aligned}$$

6 (В.Мокин). Положим $b_i = \frac{a_i}{i}$, $i = 1, 2, \dots, s$. Индукцией по n легко установить, что каждое число a_n представляется в виде суммы n слагаемых вида b_i (для $n = 1, 2, \dots, s$ это очевидно). Пусть b_l – наибольшее из чисел b_1, \dots, b_s . Покажем, что для любого фиксированного $k \in \{s-l+1, s-l+2, \dots, s\}$ в последовательности $a_k, a_{k+l}, a_{k+2l}, \dots$ начиная с некоторого t выполнено $a_{k+(t+1)l} - a_{k+tl} = l \cdot b_l = a_l$ (проведа рассуждения для каждого $k = s-l+1, s-l+2, \dots, s$, получим требуемое в задаче утверждение).

Положим $c_t = a_{k+tl} - (k+tl)b_l$, $t = 0, 1, 2, \dots$. Заметим, что $a_{k+(t+1)l} = \max\{a_j + a_{k+(t+1)l-j}\} \geq a_{k+tl} + a_l$. (*)

Предположим противное: пусть для бесконечного множества различных t в (*) верно строгое неравенство. Для таких t имеем $c_{t+1} = a_{k+(t+1)l} - (k+(t+1)l)b_l > a_{k+tl} - (k+tl)b_l = c_t$;

следовательно, множество $\{c_t | t = 1, 2, \dots\}$ бесконечно. Рассмотрим некоторое представление a_{k+tl} в виде суммы $k + tl$ слагаемых вида b_i ; пусть в таком представлении d'_t слагаемых, равных b_l , и $d'_t = k + tl - d_t$ слагаемых, меньших b_l : $a_{k+tl} = d_t b_l + (b_{i_1} + \dots + b_{i_{d'_t}})$. Обозначим через b наибольшее из чисел b_1, \dots, b_s , меньших b_l (если такого нет, то d'_t всегда равно 0). Имеем $a_{k+tl} \leq d_t b_l + d'_t b = (k+tl)b_l - d'_t(b_l - b)$. Поскольку $a_{k+tl} \geq a_k + ta_l = a_k + tl b_l$, имеем оценку $(k+tl)b_l - d'_t(b_l - b) \geq a_k + tl b_l$, откуда $d'_t \leq \frac{kb_l - a_k}{b_l - b}$, т.е. d'_t ограничена некоторой постоянной величиной. Тогда

$$c_t = a_{k+tl} - (k+tl)b_l = d_t b_l + (b_{i_1} + \dots + b_{i_{d'_t}}) - (k+tl)b_l.$$

После сокращений в последнем выражении остается d'_t слагаемых вида $(b_i - b_l)$. По доказанному, d'_t не превышает константы, а каждое слагаемое может принимать лишь конечное число значений, т.е. множество $\{c_t | t = 1, 2, \dots\}$ конечно. Противоречие.

ХЛІ МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

ЗАДАЧА 1

1. а) $\varphi = 0$. б) $q' = -q \frac{R}{d}$, $d' = \frac{R^2}{d}$. в) $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R d}{(d^2 - R^2)^2}$.
2. а) $\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r^2} - \frac{qR/d}{(r - (d - R^2/d))^2} \right) \vec{r}$.
б) $\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \left(1 - \frac{R}{d} \right) \left(1 - 2 \frac{R}{r} \left(1 + \frac{R}{r} \right) \right) \vec{r}$.
в) $E_A \rightarrow 0$ при $d \rightarrow R$.
3. а) $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}}{(l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha - R^2)^2}$.
б) $F_{\perp} = F \sin(\alpha + \beta)$, где $\sin \beta = \frac{L \sin \alpha}{d}$.
- в) $\omega = \frac{q}{(l-L)^2 - R^2} \sqrt{\frac{Rl}{4\pi\epsilon_0 m L}}$.
4. а) $W_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R}{d^2 - R^2}$. б) $W_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R}{d^2 - R^2}$.
в) $W = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R}{d^2 - R^2}$.

ЗАДАЧА 2

1. а) $h_{\min} = \frac{B^2}{2gS^2} \frac{T_{\text{воз}}}{\Delta T}$. б) $h_t = 145$ м. в) $v = \sqrt{2gh \frac{\Delta T}{T_{\text{воз}}}}$;
скорость изменяется скачком от 0 до v , когда газ входит в трубу из точки.
г) $p(z) = p(0) - (\rho_{\text{воз}} - \rho_{\text{дым}})gh - \rho_{\text{дым}}gz$.
2. а) $\eta = \frac{gh}{cT_{\text{атм}}}$. б) Зависимость линейная.
3. а) $\eta = 0,64\%$. б) $P_{\max} = GS\eta = 45$ кВт.
- в) $W = 360$ кВт·ч, если есть 8 солнечных часов в день.
4. а) $\Delta T \approx 9,1$ К. б) $m_0 = 760$ кг/с.

ЗАДАЧА 3

1. а) $f = \frac{\pi}{6}$. б) $\rho_m = 3,4 \cdot 10^{17}$ кг/м³, $\rho_q = 1,6 \cdot 10^{25}$ Кл/м³,
 $R \approx 1,06 \cdot A^{1/3}$ фм.

2. $E = (A - A_{\text{пов}})a_V + A_{\text{пов}} \frac{a_V}{2}$, где $A_{\text{пов}} \approx 4,84A^{2/3} - 7,80A^{1/3} + 4,19$, $a_V = 15,8$ МэВ – удельная энергия связи на один внутренний нуклон.

3. а) $W = \frac{3}{20\pi\epsilon_0} \frac{Q_0^2}{R}$. б) $E = (A - 3f^{1/3}A^{2/3} + 6f^{2/3}A^{1/3} - 4f)a_V - \frac{3f^{1/3}e^2}{20\pi\epsilon_0 r_N} \left(\frac{A^{5/3}}{4} - \frac{A^{2/3}}{2} \right)$.

4. а) $E_{\text{кин}} = 2E\left(\frac{A}{2}\right) - E(A) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{A}{4}\right)^2 \frac{e^2}{d}$.
 б) $E_{\text{кин}}^{(100)} = -33,95$ МэВ, $E_{\text{кин}}^{(150)} = -30,93$ МэВ,
 $E_{\text{кин}}^{(200)} = -14,10$ МэВ, $E_{\text{кин}}^{(250)} = +5,06$ МэВ; $A_{\text{min}} = 227$.

5. а) $E_{\text{возб}}^{(\text{Ni})} = 10,866$ МэВ. б) $E_{\text{отд}} = \frac{E_\gamma^2}{2m_{\text{Ni}}c^2}$, где
 $E_\gamma = 10,86$ МэВ; $E_{\text{дет}} = E_\gamma \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} = 10,927$ МэВ.

НАПЕЧАТАНО В 2010 ГОДУ

| | № журнала | с. |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|-----------|
| Памяти В.И.Арнольда | 4 | 2 |
| Памяти М.Гарднера | 3 | 25 |
| Памяти А.Р.Зильбермана | 6 | 25 |
| Статьи по математике | | |
| Геометрия звездного неба. <i>В.Протасов</i> | 2 | 14 |
| Два занятия школьного кружка при МГУ. <i>В.Арнольд</i> | 4 | 4 |
| Инверсия в цилиндрических зеркалах метро. <i>В.Арнольд</i> | 5 | 2 |
| Многогранный Делоне. <i>Н.Долбилин</i> | 1 | 2 |
| – « – | 2 | 2 |
| О сумме телесных углов многогранника. <i>И.Богданов</i> | 3 | 9 |
| Разбиения на домино и функции высоты. <i>Е.Карпов, К.Кохась</i> | 6 | 5 |
| Теоремы софиста Горгия и современная математика. <i>Д.Фон-Дер-Флаасс</i> | 5 | 16 |
| Статьи по физике | | |
| Метеорологические наблюдения: распределенные в пространстве и во времени. <i>В.Гордин</i> | 3 | 2 |
| – « – | 4 | 11 |
| Над пожаром – самолет. <i>В.Вышинский, М.Кудров, А.Стасенко</i> | 6 | 2 |
| О муарах, оживших иллюстрациях и пользе моделей. <i>З.Пятакова, А.Пятаков</i> | 6 | 13 |
| Темная энергия во вселенной. <i>В.Рубаков</i> | 5 | 8 |
| Что может электростатика. <i>К.Богданов</i> | 2 | 10 |
| Что такое ЯМР-томография? <i>А.Варламов, А.Ригамонти</i> | 1 | 8 |
| Нанотехнологии | | |
| Как рассмотреть нанообъект в оптический микроскоп. <i>А.Ежов</i> | 2 | 23 |
| Как управлять светом с помощью магнитного поля. <i>В.Белотелов</i> | 1 | 12 |
| Квантовые и волновые явления в наномире. <i>В.Тимошенко</i> | 3 | 17 |
| Новости науки | | |
| Нобелевская премия за «школьную» физику | 1 | 17 |
| Из истории науки | | |
| По страницам сочинения Герона Александрийского «О диоптре». <i>А.Жуков</i> | 3 | 23 |
| Математический мир | | |
| Интервью с Н.Н.Константиновым | 1 | 19 |
| 105 лет академику С.М.Никольскому | 3 | 15 |
| Задачник «Кванта» | | |
| Задачи М2161 – М2205, Ф2068 – Ф2212 | 1 – 6 | |

| | № журнала | с. |
|-------------------------------------------------------------------------|-------------------|------------|
| Решения задач М2139 – М2183, Ф2153 – Ф2195 | 1 – 6 | |
| Еще раз об окружностях, вписанных в криволинейные фигуры | 3 | 35 |
| О покрытии целых чисел прогрессиями | 6 | 25 |
| КМШ | | |
| Задачи | | 1–6 |
| Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8» | 1, 4, 5, 6 | |
| Летний турнир имени А.П.Савина | 6 | 28 |
| Победители конкурса имени А.П.Савина | 4 | 30 |
| Статьи по математике | | |
| Иррациональность корней из 2, 3, 5 и 6. <i>А.Спивак</i> | 1 | 35 |
| Как всегда, на высоте! <i>Г.Филипповский</i> | 5 | 36 |
| Мыльные пузыри и хорды. <i>А.Шень</i> | 2 | 37 |
| Подвиг юного Бертольда. <i>А.Котова</i> | 1 | 37 |
| Хорошо темперированный клавир. <i>И.Гельфанд, А.Шень</i> | 3 | 37 |
| Статьи по физике | | |
| Веревка из паутины. <i>Д.Багров</i> | 4 | 28 |
| Тепловые явления глазами пассажира автобуса. <i>В.Котов</i> | 2 | 40 |
| Калейдоскоп «Кванта» | | |
| Математика | | |
| Квадрирование квадрата | 4 | 32 |
| Стереометрия для всех | 6 | « |
| Цепные дроби вокруг нас | 2 | « |
| Физика | | |
| Нано... | 1 | « |
| Постоянные магниты | 3 | « |
| Цвет | 5 | « |
| Школа в «Кванте» | | |
| Математика | | |
| Замечательные точки треугольника и тригонометрия. <i>Г.Филипповский</i> | 4 | 31 |
| Метод изогональных прямых. <i>И.Кушнир</i> | 6 | 35 |
| Физика | | |
| Красное небо, синяя луна. <i>А.Стасенко</i> | 1 | 39 |
| Обжегшись на молоке, на воду дуют... <i>А.Стасенко</i> | 3 | 42 |
| О работе, точке приложения силы и точильном круге. <i>В.Птушенко</i> | 5 | 40 |
| Сверхзвуковые самолеты и конус Маха. <i>Е.Соколов</i> | 3 | 40 |
| Увеличительная линейка. <i>В.Дроздов</i> | 5 | 42 |
| Физический факультатив | | |
| Две простые, но не вполне тривиальные формулы. <i>М.Каганов</i> | 1 | 41 |
| О теплопередаче и не только. <i>А.Краснощуб</i> | 5 | 43 |
| Физики в тумане. <i>С.Варламов</i> | 2 | 42 |

| | № журнала | с. |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|----|
| Математический кружок | | |
| Долгий путь короля. <i>Н.Белухов</i> | 4 | 39 |
| Об одной забытой задаче. <i>А.Толыго</i> | 2 | 45 |
| Описанные четырехугольники и ломаные. <i>Н.Белухов, П.Кожевников</i> | 1 | 45 |
| О пользе графиков. <i>М.Горелов</i> | 3 | 44 |
| Чудеса инверсии. <i>Т.Емельянова</i> | 6 | 37 |
| Лаборатория «Кванта» | | |
| Каустики на плоскости и в пространстве. <i>А.Андреев, А.Панов</i> | 3 | 48 |
| Обтекание вращающихся тел. <i>С.Бетяев</i> | 3 | 49 |
| О плавании одномерных объектов. <i>М.Давлетшин,</i> <i>В.Соловьев, Ф.Стрельников, Е.Юносов</i> | 4 | 36 |
| Электричество из фруктов. <i>Э.Марчук</i> | 6 | 38 |
| Наши наблюдения | | |
| «Небесные врата» | 5 | 7 |
| Синицы и ... физика | 2 | 44 |
| Практикум абитуриента | | |
| Физика | | |
| Два этюда о динамике. <i>Е.Соколов</i> | 5 | 47 |
| Движение заряженных частиц в магнитном поле. <i>А.Черноуцан</i> | 6 | 40 |
| Динамика движения по окружности. <i>А.Черноуцан</i> | 1 | 50 |
| Задачи механики в инерциальных системах отсчета. <i>В.Шутов</i> | 2 | 51 |
| Задачи на уравнение моментов сил. <i>А.Черноуцан</i> | 4 | 42 |
| Неравенство Коши в задачах по физике. <i>В.Гребень</i> | 3 | 50 |
| Олимпиады | | |
| Всероссийская студенческая олимпиада по физике | 2 | 58 |
| Заключительный этап XXXVI Всероссийской олимпиады школьников по математике | 5 | 50 |
| Заключительный этап XLIV Всероссийской олимпиады школьников по физике | 5 | 53 |
| Избранные задачи Московской физической олимпиады | 4 | 51 |
| LI Международная математическая олимпиада | 6 | 44 |
| XVIII Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон» | 3 | 56 |
| XLI Международная олимпиада школьников по физике | 6 | 45 |
| XIV Международный турнир «Компьютерная физика» | 5 | 57 |
| LXXIII Московская математическая олимпиада | 4 | 48 |
| Московская студенческая олимпиада по физике 2010 года | 5 | 59 |
| Региональный этап XXXVI Всероссийской олимпиады школьников по математике | 2 | 54 |
| Региональный этап XLIV Всероссийской олимпиады школьников по физике | 2 | 55 |
| XXXI Турнир городов (весенний тур) | 4 | 47 |
| XXXI Турнир городов (осенний тур) | 1 | 54 |
| Информация | | |
| Вниманию наших читателей! | 5 | 52 |
| Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор» | 2 | 60 |
| Заочная школа МИФИ | 1 | 56 |
| —«— | 2 | 60 |
| Заочная школа СУНЦ НГУ | 3 | 54 |
| Заочная школа «Юный математик» | 1 | 58 |
| Заочное отделение Малого мехмата МГУ | 1 | 57 |
| Конкурс «Свободный полет» | 1 | 57 |
| Конкурс «Свободный полет» в 2011 году | 6 | 59 |
| Новый прием в школы-интернаты при университетах | 6 | 58 |
| Очередной набор в ОЛ ВЗМШ | 6 | 49 |

| | № журнала | с. |
|-------------------------------------------------------|-----------|------------|
| «Свободный полет» продолжается! | 5 | 31 |
| Современная механика и робототехника для школьников | 1 | 55 |
| Федеральная заочная физико-техническая школа при МФТИ | 6 | 55 |
| «Квант» улыбается | 5 | 35 |
| Коллекция головоломок | | |
| Головоломки из проволоки | 5 | 2-я с.обл. |
| Два, три, четыре ... | 3 | « |
| «Развертка» куба | 2 | « |
| Светофор | 4 | « |
| Танграм | 6 | « |
| Шахматная страничка | | |
| Квартет ферзей | 5 | 3-я с.обл. |
| Кое-что о ладьях | 4 | « |
| Корона остается на родине шахмат | 3 | « |
| Мемориал Таля | 2 | « |
| Олимпиада на Севере | 6 | « |
| Прогулки с физикой | | |
| Влажные пятна от воды | 4 | 4-я с.обл. |
| Где проходит вагерлиния? | 6 | « |
| Липкая электростатика | 2 | « |
| Люминесцентная лампа в микроволновке | 5 | « |
| Пока горит свеча... или кристалл | 1 | « |
| Что такое пена? | 3 | « |

журнал © Квант

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов,
С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова,
А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.В.Сумнина,
В.М.Хлебникова**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

**Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ
по печати. Рег. св-во №0110473**

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: 930-56-48

E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info,

phys@kvant.info

Сайт: kvant.info

**Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени
«Чеховский полиграфический комбинат»**

142300 г.Чехов Московской области,

Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru

Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00

Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59

Где проходит ватерлиния?

На сколько погрузится однородный деревянный брусок, если положить его на поверхность воды? Ответить на этот вопрос очень легко. Достаточно вспомнить о силе Архимеда. Однако можно решить эту задачу и иначе...



(Продолжение - на странице 26 внутри журнала)