журнал© Квант НОЯБРЬ ДЕКАБРЬ 2007 №6

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Учредители — Российская академия наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна), ИФТТ РАН

Бюро Квантум

TENEX В праздновании 100-летнего юбилея академика И.К.Кикоина финансовое участие принимает ОАО «ТЕХСНАБЭКСПОРТ»

К 100-ЛЕТИЮ И.К.КИКОИНА

«Принцип определенности» Кикоина

С.КРОТОВ

Моя первая встреча с Исааком Константиновичем Кикоиным (ИКК) произошла ровно 40 лет назад (эти строки писались в сентябре 2006 года). В учебном расписании осеннего семестра первокурсников физфака МГУ стояли лекции по первому разделу курса общей физики – по механике, которые должен был читать академик Кикоин. Сама по себе возможность посещать лекции академика (хотя тогда для меня, студента-первокурсника, что академик, что профессор – все это были титулы-добавки, подчеркивающие некий неведомый, но, по-видимому, очень важный статус их носителей) воспринималась как неожиданный поворот судьбы (особенно после школьных уроков по физике).

Не могу сказать, что то, как именно излагал свое представление о механике Ньютона ИКК, способствовало моему прозрению. Но абсолютно точно я впервые получил возможность познакомиться из первых рук с тем, как настоящие физики воспринимают окружающую действительность. Изложение было удивительно (как я это теперь понимаю) физичным и живым, что принципиально отличало его от школьных шаблонов и схем, хотя мы еще в школе самостоятельно перелистывали кирпичи-учебники по механике и Хайкина, и Стрелкова…

На лекциях ИКК очень важным был момент откровения. Без особого труда мне удавалось в целом следить за логикой изложения, хотя иногда не все воспринималось с первого предъявления и требовало самостоятельных размышлений. Это было явно не по-школьному, без излишних упрощений и моделирования, что в полной мере я оценил лишь впоследствии. (Справедливости ради, стоит напомнить, что именно тогда появился на русском языке многотомный курс Нобелевского лауреата Р.Фейнмана, который занял особое положение среди учебников физики. Не скрою, что и по сегодняшний день он входит в число моих настольных книг, являясь образцом построения курса общей физики, в котором явно и органично запечатлена яркая индивидуальность его создателя.)

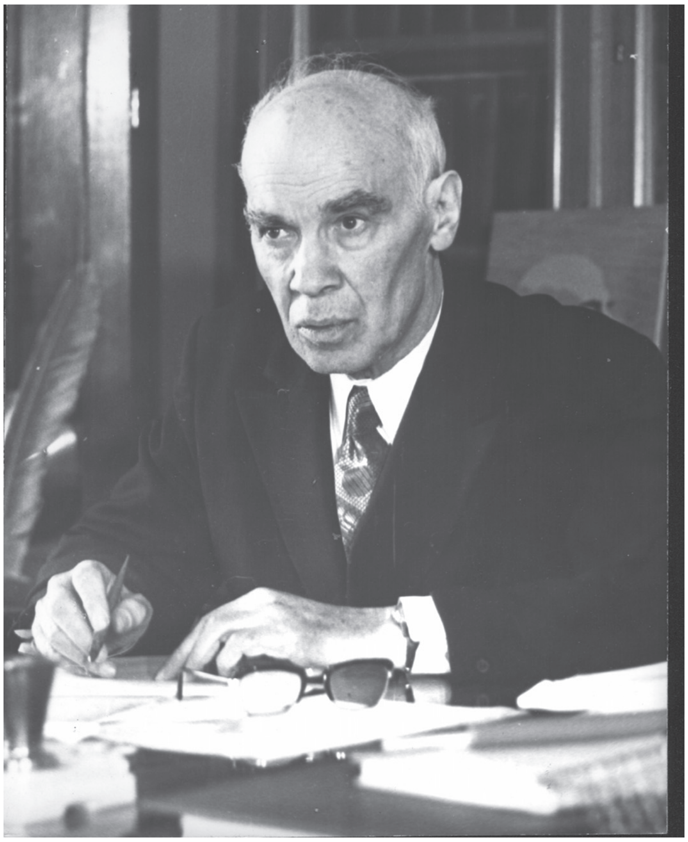
Статья печатается с сокращениями. Полный текст статьи будет опубликован в специальном выпуске «Библиотечки «Квант», посвященном И.К.Кикоину.

Едва ли мне было тогда по силам дать истинную оценку этой стороне деятельности ИКК. Помню, что, учитывая вполне естественный студенческий радикализм, некоторые физфаковские радетели-материалисты причисляли тогда (как правило, в форме «из уст в уста») Кикоина с его подходом к изложению механики к «чуждым нам» махистам, чем подпускали в наивные студенческие души туман критического недоверия. И лишь спустя много лет, когда я сам стал читать курс общей физики в МГУ и впервые не без удовольствия проштудировал «Механику» Э.Маха, я на этом примере оценил свойственную ИКК самостоятельность подхода к любому делу.

Мне отчетливо запомнилась своеобразная манера ИКК слегка покачиваться из стороны в сторону, когда он что-то рассказывал, а доходя да самого главного, вдруг на мгновение замирать, прикрыв глаза и прислушиваясь к произнесенному, как бы смакуя сказанное. Так было и на одной из первых лекций, когда в связи с обсуждением физических понятий события и времени зашла речь о «Слове о полку Игореве». В то время в исторической литературе появились сомнения относительно даты его написания, но ИКК, с уверенностью ссылаясь на описанное в «Слове…» солнечное затмение, привел свои абсолютно понятные, простые (да, все гениальное просто) и физически обоснованные соображения (основывавшиеся на законах движения планет Солнечной системы) относительно даты обсуждавшегося в произведении события. А следовательно, и о возможной дате появления упоминания о нем в «Слове…».

Следующая, менее формальная моя встреча с ИКК состоялась в Санкт-Петербурге (тогда Ленинграде) на Всесоюзной олимпиаде школьников по физике. Он возглавлял жюри олимпиады и вел его заседание. Представ абсолютно земным собеседником, ИКК на равных общался со всеми присутствующими, независимо от их статуса, при этом безошибочно вникал в суть задач и их решений. Мгновенное проникновение в предмет обсуждения, дополненное при этом определенной самоиронией, шутками, придавало изначально серьезному и ответственному мероприятию особое человеческое звучание. Оно вызывало во мне ощущение причастности, с одной стороны, к чему-то значительному, а с другой – к просто общему делу.

Начав приблизительно в это же время сотрудничать с журналом «Квант» как автор, я стал бывать в помещении редакции на Ордынке. Помню то особое, почти детское удивление, когда, открывая входную дверь, можно было в отдалении, в нише под рукописным приветствием входящим увидеть сиротливую пару настоящих калош, тех обычных черно-красных калош, но очень большого размера. Все это выглядело очень трогательным, а главное, наполняло мой приход особым содержанием. Я понимал, что ИКК здесь. Да, он регулярно бывал, читал, обсуждал, переживал. Ведь счастливые годы создания и первых шагов журнала «Квант» остались позади, и теперь предстоял заботливый родительский глаз.



Именно в помещении редакции на Ордынке несколько лет спустя меня впервые официально представили академику Кикоину. В то лето 1980 года трагически погиб член редколлегии журнала «Квант» Иосиф Шаевич Слободецкий, который, будучи душой журнала, с самого его основания руководил «Задачником «Кванта» по физике. Учитывая, что с 1973 года я стал активным участником олимпиадного движения, входил в предметные комиссии и жюри, участвовал в составлении задач и иногда находил красивые решения, мне было предложено войти в состав редколлегии (наконец-то стать сопричастным) и возглавить этот раздел в журнале. Предложение по тому времени было невероятным, поскольку среди «композиторов» «Задачника» были подлинные корифеи. Судьба явно испытывала мое тщеславие, тестировала на прочность. «Спустившись на землю», я придумал промежуточный вариант своего руководства в виде триумвирата: А.Зильберман, Е.Сурков и я. Свое согласие, а значит и признание всей меры ответственности, я должен был произнести перед ИКК. До сих пор помню его мудрый, спокойный, в чем-то домашний взгляд, в котором одновременно была выражена и вся серьезность поручаемого мне дела. Помню, что, стараясь не обнаружить всех переполняющих меня чувств и не произнести лишних слов, я тогда впервые в жизни дал себе клятву – «никогда ничем не подвести».

ИКК регулярно появлялся на заседаниях редколлегии «Кванта», которые проходили раз в месяц. Для меня это мероприятие означало тогда очень многое. Это была и особая честь, и особое удовольствие, и особая ответственность прямого общения с большим числом уникальных личностей. Все очень серьезно и заинтересованно обсуждали содержание будущих номеров журнала, живо реагировали на происходящее вокруг. Была удивительно захватывающая творческая атмосфера. Создавалось впечатление слаженно играющего симфонического оркестра, которым дирижировал (почему-то напоминавший мне Евгения Мравинского) академик Кикоин.

Следующие мои воспоминания и переживания связаны с 75-летием ИКК. Поскольку было запланировано специальное заседание редколлегии, мы договорились, что в качестве подарка юбиляру будет выпущен самодельный (нетипографский) номер журнала, для которого все руководители традиционных разделов журнала придумают что-то интересное, по возможности с юмором. Я около недели мучился, составляя юбилейный задачник из пяти задач по физике. Не буду здесь воспроизводить условия всех задач, но за одну из них мне до сих пор не стыдно. Вот ее условие: «Требуется оценить энергию связи редколлегии журнала «Квант». Решение: «Чтобы оценить энергию связи редколлегии журнала «Квант», нужно ее разогнать и определить необходимую для этого работу». Как мне казалось, кроме прямого смысла главным в задаче был, если хотите, скрытый подтекст. Ведь не секрет, что «Квант», в силу разных причин, оказывал на некоторых окружающих и … раздражающее воздействие. Но благодаря ИКК журнал походил на «локоть, который не укусишь». Поэтому задача вроде бы раззадоривала недоброжелателей – мол, пусть попробуют. Когда на чествовании мне дали слово для приветствия юбиляра, помимо прочего я, следуя общему руслу заседания, зачитал условия и решения всех пяти задач. Мне показалось тогда, по улыбке и блеску глаз самого ИКК и аплодисментам членов редколлегии, что задачник получился.

Кроме участия в общем подарке, не возбранялось подготовить и индивидуальные сувениры. Зная со слов самого ИКК о его слабости к виртуозам-стеклодувам, создателям вакуумных устройств, я разыскал на физфаке стеклодувную мастерскую. Моя идея состояла в том, чтобы в форме небольшой колбы сделать лампу накаливания, вольфрамовая нить-спираль которой была бы изогнутой в виде написанной фамилии «КИКОИН». Это было несколько проще того, что я хотел вначале – чтобы спираль была изогнута в форме кикоинской подписи. Не могу сказать, что в результате получился шедевр экспериментаторского искусства. Более того, при включении лампы-колбы в сеть через небольшой промежуток времени после появления долгожданного свечения фамилии нить, как и следовало ожидать, «приказала долго жить». Однако юбиляр был очень великодушен и по достоинству оценил мой прибор одноразового действия. По крайней мере, уходя, он не забыл взять лампу с собой (хотя к этому моменту она уже не работала).

Еще одной запомнившейся мне «авантюрой» с участием ИКК была моя поездка в Швецию в 1984 году (моя первая индивидуальная командировка в капстрану) на Международную олимпиаду по физике в качестве корреспондента журнала «Квант». Вся процедура оформления началась с прямого звонка ИКК первому заместителю министра, который должен был подтвердить Кикоину включение моего имени в список командируемых (напоминаю, что я в то время был рядовым ассистентом МГУ) и согласие руководства Министерства просвещения СССР на выделение соответствующих валютных средств. Непосредственное оформление документов заняло не меньше трех месяцев, но времени все равно не хватило – до самого отъезда ничего не было понятно. Наконец, настал такой момент, когда через три дня начиналась олимпиада. Одновременно со мной в Швецию оформлялась команда школьников – участников олимпиады и двух руководителей, в компании с которыми я и должен был лететь. У них все шло по плану – и загранпаспорта с визами, и билеты на самолет, и наличная валюта уже ждали их в министерстве. А моя ситуация, как это часто бывало, зависла – ни да, ни нет. И тогда ИКК без промедления по знаменитой «вертушке» позвонил министру М.А.Прокофьеву (у них, насколько мне известно, были теплые неформальные отношения). ИКК знал, как без лишних слов и эмоций добиваться результатов даже в практически безвыходных ситуациях (он потрясающе знал нашу систему изнутри). Как впоследствии оказалось, несмотря на полученные ранее заверения второго лица в министерстве, без еще одного прямого звонка Кикоина министру ничего бы не состоялось – система работала в режиме постоянного выжидания удобного момента для отказа. Остановившаяся было машина опять закрутилась. На олимпиаду я полетел с опозданием, совсем один, но полетел. В этом, как потом выяснилось, была по тем временам и своя прелесть. На протяжении всей командировки я принадлежал только себе (может быть, я был слишком наивен). Это была награда за терпение. Возвращались в Москву все вместе. Не стану пересказывать свои ощущения от той поездки, скажу лишь, что все было на уровне чуда, подаренного мне одним жестом (которого могло и не быть) ИКК. И все потому, что он пообещал. Был бы на моем месте кто-то другой, ИКК сделал бы то же самое (и делал, я это точно знаю).

После возвращения из Швеции я позвонил ИКК, и он пригласил меня заехать к нему домой в часы обеда, чтобы рассказать о поездке и обсудить в неформальной обстановке накопившиеся дела. ИКК с большим вниманием выслушал мои впечатления от олимпиады. Поинтересовался, не младший ли Сигбан (Кай Сигбан – лауреат Нобелевской премии по физике 1981 года, сын Манне Сигбана – Нобелевского лауреата по физике 1924 года) возглавлял Международный оргкомитет олимпиады. В своей догадке он оказался абсолютно прав. Когда я от имени Международного оргкомитета вручил ИКК специальную папку участника олимпиады, он, быстро перелистав ее содержимое, с интересом стал разглядывать карту Стокгольма. Мы вместе нашли на ней здание городской Ратуши, в которой проходил прием, устроенный для участников олимпиады королем Швеции. ИКК отнесся к этому факту с большим одобрением, соглашаясь, что Международные олимпиады школьников вполне могут быть отнесены к разряду событий государственного значения. Узнав, что участников олимпиады разместили в живописном предместье Стокгольма (г.Сигтуна) в очень престижном учебном заведении, в котором воспитывались многие выдающиеся политики и общественные деятели, ИКК вспомнил удивительные подробности, связанные с историей этого города, и опять же оценил королевский размах устроителей олимпиады.

Ушел ИКК внезапно. По крайней мере, для нас. Его хоронили в лютый мороз 30 декабря 1984 года. Я как сейчас помню, что близкие и просто любившие его (да и кое-кто из нелюбивших) всю церемонию прощания простояли без головных уборов. Нахлынуло ощущение какой-то безысходности, покинутости и, я бы даже сказал, незащищенности. Он так много сил и внимания уделял журналу, во все времена был его надежной опорой и защитой, и вдруг мгновенно, без предупреждения все изменилось, ноги перестали чувствовать землю. Время приостановилось...

Мне кажется, что, несмотря на разные предчувствия и ожидания, на около месяца висевшую над журналом завесу таинственности, связанную с недолгим внутриакадемическим противостоянием интересов, история распорядилась справедливо. Главным редактором журнала «Квант» Президиум Академии наук назначил директора Института физики твердого тела, создателя одного из подмосковных, как это принято сегодня называть, наукоградов, академика Юрия Андреевича Осипьяна.

С января 1985 года прошло двадцать с небольшим лет. Очень многое за это время изменилось и вокруг, и у нас в журнале. Произойди чудо и доведись мне сегодня встретиться с ИКК, не на все из поставленных создателем журнала «Квант» вопросов я легко бы нашел ответы. Особенно, когда речь заходит о тираже, который, по сравнению с лучшими годами из кикоинских времен, упал почти в 100 раз. Но хочется надеяться, что в целом, с учетом всех имевших место катаклизмов, ИКК остался бы нами доволен. По крайней мере, все эти годы и редколлегия, и редакция, претерпев неизбежные изменения как по числу, так и по составу, старались делать все возможное, а иногда и на грани возможного, чтобы журнал «Квант» оставался верен тем принципам, которые в него заложил ИКК.

К 100-ЛЕТИЮ И.К.КИКОИНА

Взрыв

Л.БЕЛОПУХОВ

Я ПОМНЮ, СЛОВНО ЭТО БЫЛО ВЧЕРА, ТОТ ДЕкабрьский день ровно пятьдесят лет назад. Пустынная, чуть присыпанная снежком степь неподалеку от Ташкента. На небольшой высотке – несколько десятков людей. Среди них маститые академики и члены-корреспонденты – М.М.Лаврентьев, Л.И.Седов, М.А.Садовский, доктора и кандидаты наук. И мы – молодые ученые, всего лишь несколько лет назад закончившие вуз, а в этот момент разработчики и участники предстоящего события.

Все взоры устремлены на одну точку в степи, где в полутора километрах от высотки виднеется маленький столбик – репер. Три часа дня – в Москве полдень. В те дни в полдень по радио звучали сигналы точного времени – «пи», «пи», «пи». И ровно в момент третьего «пи» что-то произошло. Там, где только что стоял репер, земля стала вздыматься. В степи словно расцвел живой цветок, чьи лепестки поднимались все выше и выше – до 600-метровой высоты, потом загибались и опадали вниз. Не было мощного звука, только дрогнула земля по всей округе, и на тысячи километров по земным недрам разбежалась сейсмическая волна, как при землетрясении. Это и было землетрясение, но не природное, а сотворенное человеком в пустынной местности и поэтому безопасное для людей.

19 декабря 1957 года состоялся уникальный научный эксперимент – мощный подземный взрыв. На глубине 40 метров был взорван заряд взрывчатого вещества, эквивалентный тысяче тонн тротила. Два дня непрерывным потоком возили грузовики от ближайшей железнодорожной станции этот смертоносный груз – пятьдесят железнодорожных вагонов. Эксперимент стал завершающей точкой в научной работе по исследованию подземных взрывов «на выброс» и обоснованию их дальнейшего применения в горном и строительном деле. Это было крупное научное достижение.

Взрыв–разрушитель

Почти у всех людей слово «взрыв» вызывает отрицательные эмоции. Грохот, пламя, разрушения, гибель людей – сегодняшнее телевидение часто «украшает» свои передачи такими сюжетами. Взрывы гремят в военных кинофильмах и современных боевиках. Ветераны войны – от Великой отечественной до афганской и чеченской – знают о взрывах по собственному опыту. А ведь были еще и ядерные («атомные») взрывы. И сейчас в подземных бункерах лежат ядерные заряды, способные уничтожить земную жизнь, если подорвать их все.

Для военных целей люди стали применять взрыв уже почти тысячу лет назад, когда началось использование пороха для артиллерийских и саперных целей. В 1552 году при осаде Казани саперы войска Ивана Грозного (по-видимому, это были иностранные специалисты) произвели подкоп под стены Казанского кремля, и взрывом тонны пороха в нужный момент перед штурмом стена была разрушена. В тротиловом эквиваленте заряд составлял около 50 килограммов.

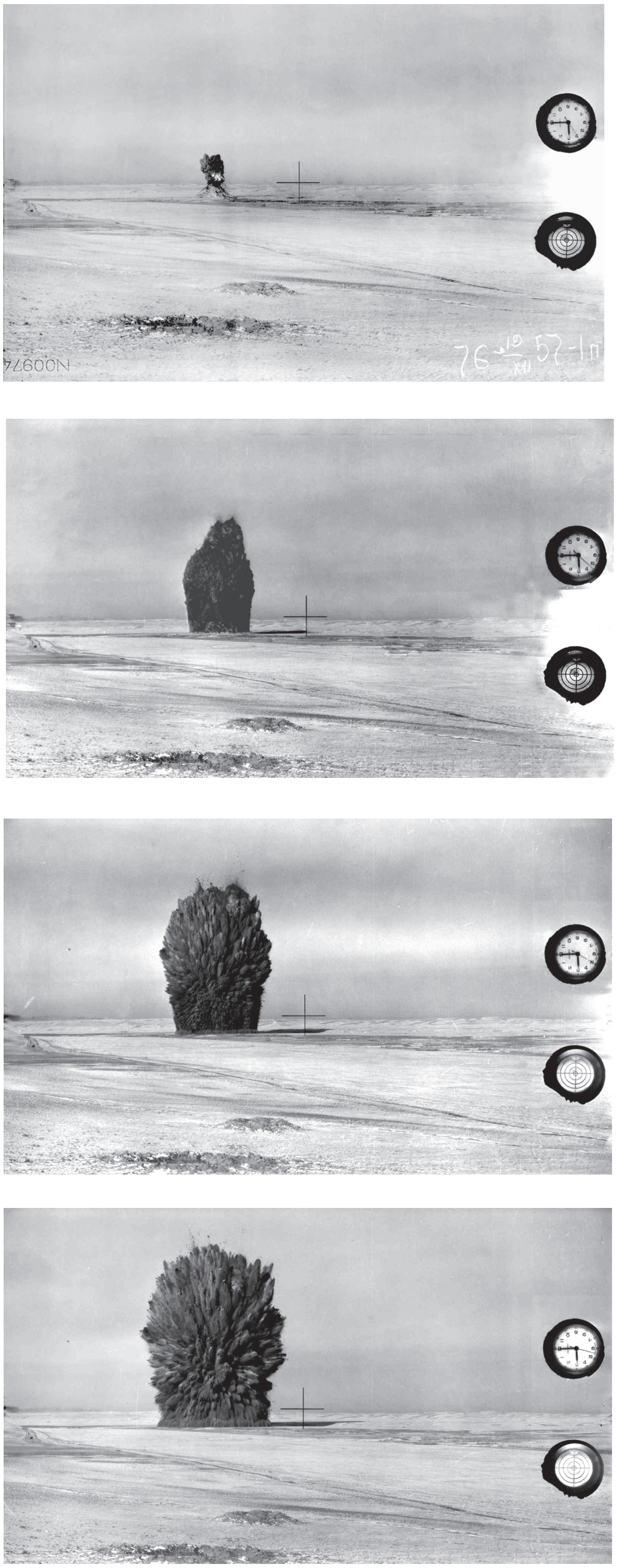
Апофеозом использования взрыва на войне для уничтожения людей стала Хиросимская трагедия, унесшая десятки тысяч жизней. Ну а самый крупный рукотворный взрыв прогремел 30 октября 1961 года на Новой Земле. Его тротиловый эквивалент – $5 \cdot 10^{10}$ килограммов, или 50 миллионов тонн. Больше половины длины земного экватора заняли бы железнодорожные составы, выстроившиеся впритык друг за другом для перевозки такого количества тротила.

Взрывы происходят и в природе. Гром – не что иное как последствие электрического взрыва в канале молнии. Взрывы гремят при извержениях вулканов, происходят в солнечной оболочке. Взрываются звезды – новые и сверхновые, взрываются даже галактики. Правда в космосе взрывы не гремят, греметь там нечему – нет газовой среды достаточной плотности.

В глубине истории теряется время, когда люди впервые стали делать взрывчатые или быстрогорящие смеси – пороха. Как почти все изобретения, это было сделано в Китае для развлечения властителей ракетами и фейерверками. (Любопытно, что и сейчас петарды и фейерверки в России – в основном китайского производства.) Наверное, от таких путешественников, как Марко Поло, арабы и европейцы в Средневековье узнали, что смесь угля, серы и селитры горит так быстро, что с ее помощью можно метать ядра и разрушать стены.

Взрыв–работник

Но уже и тогда порох стали применять в мирных целях. Взрыв становился работником. В том же далеком XVI веке пороховые взрывы использовались в шахтах и на горных карьерах для дробления скальных пород. А первому российскому инженеру – императору Петру I – приписывают изобретение остроумной взрывной «гасилки» пожаров. В бочку с водой помещался пороховой заряд с подведенными к нему огнепроводящими шнурами от огнеопасных мест помещения. При возгорании шнур подрывал пороховой заряд, взрыв которого с большой силой разбрызгивал воду, и она



Серия приведенных в статье фотографий иллюстрирует последовательные этапы мощного подземного взрыва, осуществленного ровно 50 лет назад. В этом уникальном научном эксперименте автор статьи принимал непосредственное участие

гасила начинавшийся пожар. Как и всегда в России, от изобретения до его внедрения – дистанция огромного размера. Пожары продолжали жечь русские города.

Всерьез взрыв стал работником после изобретения динамита в конце XIX века. Дело в том, что пороховые взрывы часто оказывались недостаточно эффективными для дробления твердых скальных пород, таких как гранит, диабаз. Химики изобрели более сильные взрывные вещества – соли гремучей кислоты, нитроглицерин и другие. Но они были очень опасны в применении – при небольших механических ударных воздействиях мог прогреметь взрыв. Хорошим примером такого взрывного вещества является йодистый азот, легко получаемый растворением кристаллического йода в нашатырном спирте. Образующийся белый порошок можно отфильтровать и, пока он не потеряет влагу, перемещать. Но как только влага испарится, достаточно легкой встряски, чтобы произошел взрыв. Энергия такого взрыва невелика, и вреда он не причиняет, но шум получается большой. Вещества этого типа сейчас используются в капсюлях патронов. Они взрываются от удара бойка пистолета или винтовки и провоцируют взрывное превращение основного заряда в патроне.

Динамит более безопасен. Динамит – это различные горючие волокнистые материалы (например, хлопковая вата), впитывающие нитроглицерин (с некоторыми добавками). Нитроглицерин, заполнивший поры наполнителя, оказывается гораздо менее чувствительным к механическим воздействиям. По своей взрывной силе динамит гораздо эффективнее пороха. Это изобретение было сделано шведским химиком и инженером Альфредом Нобелем (отец которого был военным инженеров в России в эпоху Крымской войны, а братья были главными создателями нефтяной промышленности на Кавказе). Быстрое распространение динамита в горнодобывающем и строительном деле принесло изобретателю капитал, проценты от которого составляют сейчас несколько миллионов евро в год и по завещанию А.Нобеля являются финансовой основой международных Нобелевских премий.

После изобретения динамита появилась вера в то, что мощные взрывные вещества смогут быть достаточно безопасны в обращении и, увы, при изготовлении артиллерийских снарядов, мин и бомб. Появились такие взрывные вещества, как тринитротолуол (тротил или тол) тетранитропентаэритрит (ТЭН), циклотриметилентринитроамин (гексоген) и их смеси. Это произошло еще при жизни А.Нобеля, и он, чувствуя ответственность и сожаление за эту сторону применения новых взрывных веществ, в числе премиальных номинаций завещал премию «За деятельность по сохранению мира».

Где сегодня применяется взрыв?

Сегодня взрыв-работник используется в самых разных областях техники и науки.

В горной и горнодобывающей промышленности – это сейсмическая разведка полезных ископаемых, вскрытие месторождений для их последующей карьерной добычи, взрывная отбойка в шахтах и горных выработках. Взрывные работы с применением пороха для добывания руд впервые были проведены в России (1617 г.) и уже потом получили распространение в Европе.

В строительном деле – снос конструкций, планировка дорог и площадок в горной местности, создание систем осушительных каналов, образование плотин и перемычек с помощью мощных взрывов.

В водном хозяйстве – углубление дна водоемов и речных фарватеров, уничтожение порогов и перекатов, ликвидация ледяных заторов при половодье. Кстати, первое зафиксированное в истории применение взрывчатых веществ в мирных целях произошло в середине XV века, когда с помощью пороховых зарядов было расчищено от камней и порогов русло литовской реки Неман. Эти работы, предположительно, были произведены итальянскими инженерами.

В нефте- и газодобывающей промышленности – ликвидация аварий бурового инструмента, застрявшего в скважине, повышение нефтеотдачи с помощью создания дополнительной трещиноватости пласта, создание подземных хранилищ нефти и газа, ликвидация пожаров нефтяных и газовых скважин их взрывным пережимом.

В отраслях металлообработки и металлургии – взрывное упрочнение металла, взрывная штамповка и сварка, дробление шлаков и крупного металлолома.

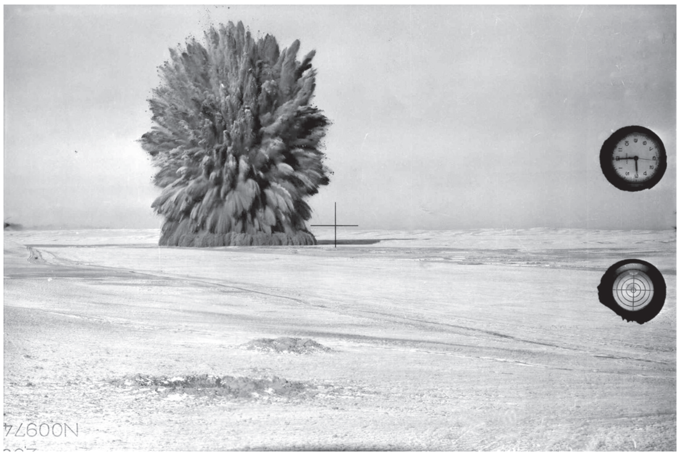
В научных исследованиях – изучение свойств газов, жидкостей и твердых тел при высоких взрывных давлениях и температурах, особенностей химической кинетики, явлений переноса и фазовых переходов в этих условиях, получение на короткое время сверхсильных магнитных полей (с индукцией до 1500 Тл), изучение «звездной материи» в начальной стадии ядерного взрыва.

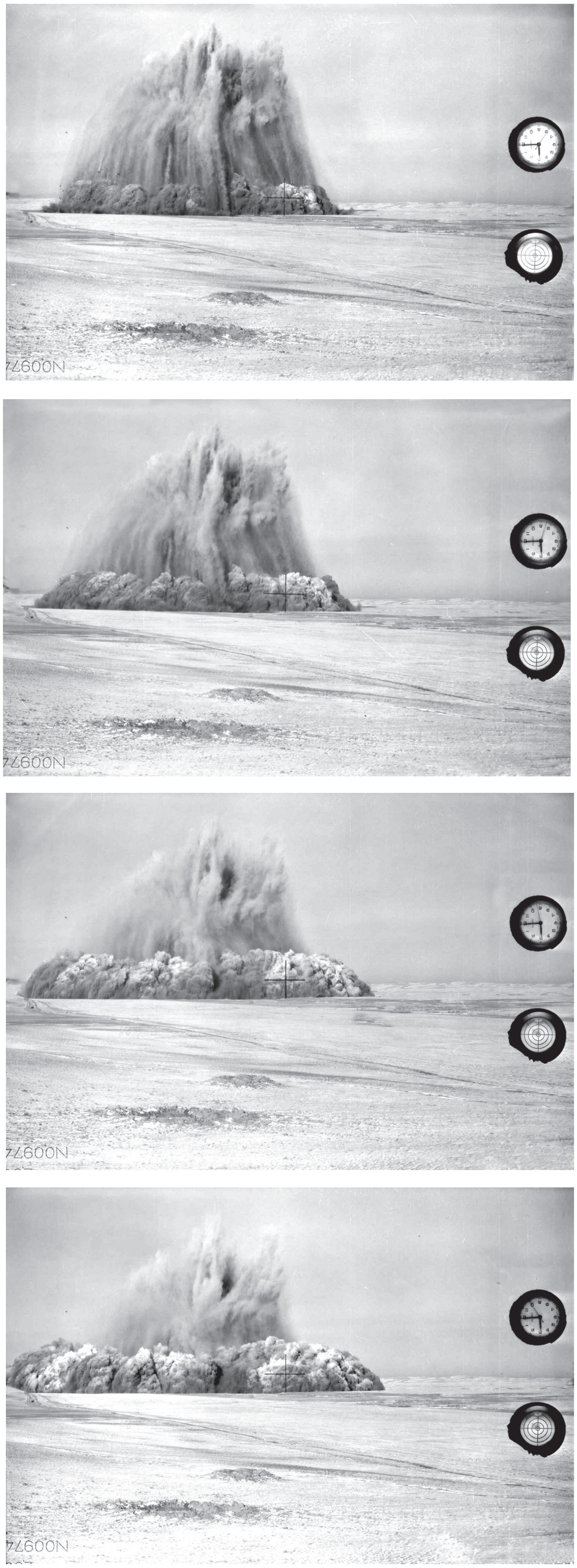
Но, пожалуй, самое важное использование взрывов в научных целях – это сейсмическое зондирование недр Земли с помощью сильных взрывов. Таким способом были получены сведения о внутреннем строении Земли – коре, мантии, жидком и твердом ядре, что дало возможность геологии из описательной науки стать полноценной наукой – геодинамикой.

Что же объединяет все эти столь различные аспекты применения взрыва? Что является наиболее характерным в этом необычном и кажущемся таким загадочным явлении природы?

Что же такое взрыв?

В «Физическом энциклопедическом словаре» (издание 1960 г.) дается такое определение: «Взрыв – внезапное изменение физического или химического состояния вещества, сопровождающееся крайне быстрым превращением (выделением) энергии, которое приводит к разогреву, движению и сжатию продуктов превращения и окружающей среды, возникновению интенсивного скачка давления, разрушению и разбрасыванию. В окружающей среде образуется и распространяется особого рода возмущение – ударная волна». Автор этого определения – А.Ф.Беляев, один из моих учителей, под диктовку которого я записал эти фразы



еще в 1950 году на втором курсе Физтеха на специальности «Физика взрыва».

Свыше 30 лет Александр Федорович Беляев руководил лабораторией физики взрывных процессов в Институте химической физики Академии наук СССР. Крупный ученый, обладавший незаурядным экспериментаторским талантом, той тщательностью в постановке опытов и их анализе, которая не оставляет места для сомнений в оценке результатов исследований и в выводах из них. Немаловажная деталь – за многие годы работы этой лаборатории, когда каждый день в железобетонной камере грохотали взрывы (по 130 граммов в тротиловом эквиваленте), не случилось *ни одного* несчастного случая. А ведь опытные заряды создавались из смесей взрывчатых веществ, их формовали, снаряжали детонаторами научные сотрудники и лаборанты, студенты и практиканты. И я помню внимание руководителя ко всем мелочам, его неуклонную суровость и неуступчивость в вопросах тщательного соблюдения правил безопасности, которые так и хотелось иной раз нарушить ради ускорения опыта и, как нам казалось, в конечном счете – ради науки.

Но взрыв остается явлением, которое может быть крайне опасным, особенно при его применении без надлежащего теоретического анализа. Пример тому – известная во взрывном деле «катастрофа в Оппау». На окраине этого небольшого немецкого городка в конце первой мировой войны существовал большой склад аммонийной селитры, которую в Германии научились синтезировать прежде всего для производства артиллерийского пороха взамен ставшей недоступной природной чилийской натриевой селитры. Если натриевая селитра в смеси с углем и серой (порох) легко воспламеняется и быстро горит, то поджечь смеси аммонийной селитры значительно сложнее. В чистом виде она считалась совершенно безопасной. После войны, когда Германия уже не имела права производить оружие и порох, эту селитру стали использовать как удобрение. Но в соединении с влагой воздуха селитра образует скально-трещиноватый монолит, и было решено добывать ее не механическим способом, а как горную породу – откалывать с помощью взрывов динамита. И работа вначале шла успешно, пока однажды в 1920 году весь массив селитры не прореагировал как взрывчатое вещество (а было ее там около 11000 тонн). Городок Оппау был полностью разрушен, число жертв исчислялось многими сотнями.

Сейчас аммонийная селитра – это удобрение в порошке или гранулах, совершенно безопасное с взрывной точки зрения и нехорошее только тогда, когда им злоупотребляют (пресловутые «нитраты»). Но в то же время аммонийная селитра – главная составляющая часть (до 80%) взрывчатых смесей: аммонита, аммотола и динамона, самых употребляемых во всем мире взрывчатых веществ в горнодобывающем и строительном деле. Теория взрыва помогла разобраться в этих «чудесах» с аммонийной селитрой.

Прежде чем возвратиться к анализу определения взрыва по А.Ф.Беляеву, я приведу еще одно определение взрыва из «Большой советской энциклопедии» (издание 1971 г.). Его автором является старший меня на один курс по Физтеху (и, соответственно, тоже один из учеников А.Ф.Беляева) К.Е.Губкин, которого по таланту можно с полным основанием назвать «блестящим» ученым – в нем способности незаурядного физика-теоретика объединились с пониманием и знанием эксперимента. Вот его определение: «Взрыв – процесс освобождения большого количества энергии в ограниченном объеме за короткий промежуток времени. В результате взрыва вещество, заполняющее объем, в котором происходит освобождение энергии, превращается в сильно нагретый газ с очень высоким давлением. Этот газ с большой силой воздействует на окружающую среду, вызывая ее движение. Взрыв в твердой среде сопровождается ее разрушением и дроблением».

Оба определения очень похожи. Они характеризуют взрыв как необычайно сложный процесс, включающий ряд химических и физических явлений. Поэтому невозможно определить врыв кратко – в первом определении 44 слова, во втором 54. Основные явления при взрыве – выделение энергии, образование сильно сжатого нагретого газа, вовлечение в движение окружающей среды (ее разрушение, если она твердая), образование в этой среде ударной волны.

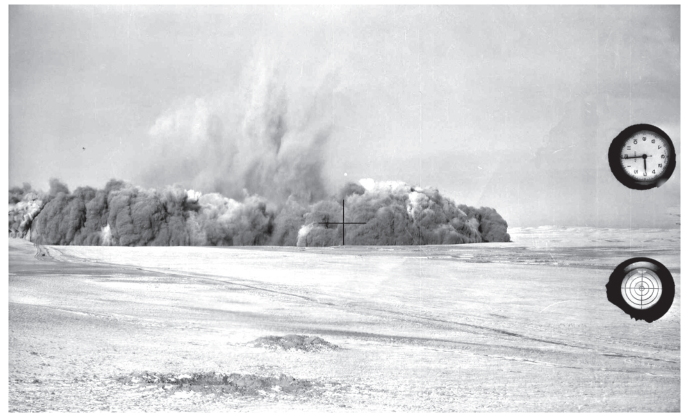
Самое характерное – внезапность явления

В обоих определениях взрыва настораживает количественная неопределенность характеристик – «внезапное», «крайне быстрое», «интенсивный», «ограниченный объем», «большое количество энергии», «короткий промежуток времени», «сильно нагретый газ с очень высоким давлением». В энциклопедиях, рассчитанных на массового пользователя, такая неопределенность оценок возможно оправдана. Но в научных работах это не допускается. В чем же дело?

Оправданием этой неопределенности может служить разница в масштабах взрывных явлений, разнородность их внутренних процессов. Взрывной характер носит, например, образование микротрещин. Энергия, выделяющаяся при этом, невелика по техническим меркам, чего не скажешь о последствиях, которыми может стать разрушение конструкции или безвозвратная потеря произведения пластического искусства.

Пример из совсем другой области – взрывное, скачкообразное изменение интенсивности магнитного поля в земной атмосфере, когда к Земле подходит выброшенная солнечным взрывом порция плазмы. В земном магнитном поле возникает (в результате явления электромагнитной индукции) ударная магнитогазодинамическая волна, в которой интенсивность магнитного поля возрастает в несколько раз. Изменение плотности энергии земного магнитного поля при этом невелико – оно много меньше, например, изменений тепловой энергии земной атмосферы. Последствия же нам известны.

В обоих этих экзотических, разнородных по своей внутренней ситуации случаях взрыва есть общее – фактор внезапности для человека. Пожалуй, это и следует выделить в определении взрыва как самое



характерное. В первом случае внезапность характеризуется долями секунды (психологическое «было» и «не стало»). Во втором – временем порядка минуты, но для человеческого организма это тоже внезапность – он не успевает своевременно перестроиться и приспособиться. Но почти во всех других взрывных процессах внезапность характеризуется временем нарастания эффекта (например, давления в звуковой волне), много меньшим естественной человеческой меры – нашего пульса.

Сложность понимания взрыва заложена в объяснении этой самой внезапности – почему освобождение энергии происходит так быстро и почему освобожденная энергия так быстро разбегается вокруг.

Не столько энергичное, сколько мощное явление

Во втором определении взрыва есть неточность. Слова «процесс освобождения большого количества энергии в ограниченном объеме» не совсем корректны. Взрывчатые вещества не являются особо энергичными. Удельная энергия, освобождающаяся при взрыве тротила, – около $4,2 \cdot 10^6$ джоулей, что соответствует энергии горения дров (самых плохих – осиновых) или энергии, получаемой организмом при усвоении 500 граммов белого хлеба. Энергия сгорания керосина или бензина (или энергия при усвоении организмом хорошего сала) в 10 раз больше.

У взрывчатых веществ большая не удельная энергия, а выделяющаяся удельная мощность – из-за малого времени превращения энергии. Для одного килограмма тротила это время порядка нескольких миллисекунд, тем самым, мощность взрыва составляет примерно 10^9 ватт, или 1 гигаватт. А это – мощность крупной электростанции.

Итак, взрыв – явление не столько энергичное, сколько мощное. Это есть следствие внезапности взрыва – самой существенной стороны взрывных процессов. Откуда же берется эта большая мощность или внезапность, почему превращение энергии совершается столь быстро? Ответов на этот вопрос столько же, сколько существует разновидностей взрывных процессов. Только перечислить их потребуется не одна страница текста. Конечно, их можно как-то сгруппировать, выделить существенные черты каждой группы. Я оставляю в стороне сложные для краткого популярного объяснения случаи микровзрывов внутри структуры твердых тел и макровзрывы космического масштаба.

Основные виды исходной энергии взрывов

1) *Химическая энергия твердых или жидких взрывчатых веществ, взрывоопасных газовых или пылевоздушных смесей.* Это самые распространенные случаи взрывов. Сущность превращения энергии при этом – это переход части электрической энергии связи электронов молекулярных орбиталей в кинетическую энергию отталкивания продуктов реакции, энергия связи в молекулах которых больше по величине, чем у исходного вещества. При этом «работают», т.е. дают кинетическую энергию и, следовательно, более высокую температуру, электрические силы отталкивания наружных электронных орбиталей продуктов.

Точно таков же механизм реакции и при горении. Обычное пламя передается от одного участка газа к другому за счет процессов теплопроводности и диффузии. Важную роль при этом играет диффузионный перенос активных центров реакции – молекул, у которых векторная сумма собственных вращательных характеристик (спинов) наружных электронов не равна нулю. О таких молекулах говорят, как о частицах с ненасыщенным спином Они очень активны химически, поскольку ненасыщенный спин жаждет найти себе частицу с противоположно направленным спином. За их химическую активность эти частицы называют радикалами (в политике радикал – активный политик, действующий не по стандарту). Свободные радикалы начинают и поддерживают химическую реакцию. Быстрый перенос активных центров создает цепной (лавинный) процесс вовлечения новых частиц в реакцию и, следовательно, повышения температуры.

Процесс горения в определенных условиях может перейти во взрыв. Объяснить этот переход только явлениями переноса уже невозможно, поскольку химическое превращение при взрыве, которое называют детонацией, требует понимания законов газовой динамики. И, в частности, знания особого типа движения вещества – ударной волны.

2) *Ядерная энергия.* Основное ее отличие от химической – в величине удельной энергии. Один килограмм ядерного превращения урана при КПД 50% дает в 10^7 раз больше энергии, чем килограмм химического вещества, а килограмм дейтерида лития при термоядерном взрыве («водородная бомба») – в 10^8 раз больше. Такая концентрация энергии делает ядерные взрывы привлекательными не только для военных целей, но и в мирном строительстве плотин или при добыче полезных ископаемых. Распространенное предубеждение против опасных радиоактивных последствий «мирных» подземных ядерных взрывов основано на незнании вопроса. При взрыве в толще массива радиоактивные продукты остаются надежно захороненными в очаге взрыва в виде остеклованного вещества, практически нерастворимого в воде. Именно такова схема современной утилизации отходов ядерной энергетики – спекание до остекловывания и подземное захоронение.

Природа энергетических превращений в ядерных взрывах также заключается в превращении части потенциальной энергии связи нуклонов в атомных ядрах в кинетическую энергию продуктов реакции. В случае уранового или плутониевого взрыва «работают» электрические силы отталкивания между положительно заряженными ядрами – продуктами деления исходного ядра на две части. Начальные расстояния действия этих сил имеют ядерный масштаб, а он в 10^5 раз меньше расстояний атомного (молекулярного) масштаба. Да и к тому же доля превращения потенциальной энергии в кинетическую при делении ядра значительно больше, чем при разрушении молекулярного комплекса. Что же касается сильных короткодействующих взаимодействий, которые собственно и называются ядерными силами, то они, являясь силами притяжения, только мешают процессу деления в его начальной стадии и делают процесс самопроизвольного деления крайне маловероятным. Процесс деления начинается, когда ядро урана-235 или плутония захватывает нейтрон и становится сильно неустойчивым. В капельной модели ядра оно меняет форму – вместо шара становится вытянутым эллипсоидом, в котором сильно уменьшается роль ядерных сил притяжения, поскольку размер эллипсоида превышает критический порог действия ядерных сил ($2 \cdot 10^{-15}$ м). Вот тут-то и срабатывают электрические силы отталкивания протонов, разрывающие ядро на две части. Быстрота ядерного превращения урана в бомбе также имеет своей причиной разветвленную цепную реакцию, где роль активных центров играют нейтроны, «размножающиеся» в каждом акте деления. Кинетика этого процесса описывается таким же уравнением, что и кинетика цепных химических реакций. Процесс также может развиваться стационарно (ядерные реакторы) или экспоненциально (ядерная бомба).

Механизм превращения энергии при термоядерном («водородном») взрыве другой. Суть ядерных реакций при этом – образование гелия при слиянии ядер водорода (точнее, его изотопов – дейтерия и трития). Кинетическая энергия образовавшегося гелия и нейтронов высока за счет работы, совершаемой при слиянии (синтезе) силами притяжения. А это могут быть лишь ядерные силы – ведь электрические силы отталкивания только мешают водородным ядрам соединяться. Для преодоления отталкивания обязательно нужен начальный запас кинетической энергии, т.е. вещество должно быть очень сильно разогрето – до десятков и сотен миллионов градусов. При слиянии ядер включаются ядерные силы, притягивающее действие которых значительно сильнее электрического отталкивания. И израсходованный запас необходимой начальной кинетической энергии восстанавливается с лихвой – температура возрастает до миллиардов градусов. Это и происходит внутри нашего родного Солнца (как и всех других звезд).

В действующих конструкциях водородных бомб (вернее, к счастью – бездействующих) предусматривается несколько реакций синтеза, дающих общую выделяющуюся энергию на порядок большую, чем в реакциях ядерного деления. К сожалению, пока процесс ядерного синтеза умеют осуществлять только в лавинном, экспоненциальном, взрывном варианте. Осуществление стационарного ядерного процесса – мечта, но все же, по-видимому, осуществимая.

Отмечу, что мощность ядерных (а тем более – термоядерных) взрывов составляет фантастические для человеческого воображения величины. Так взрыв хиросимской бомбы имел мощность 10^{22} ватт. Для сравнения – мощность всех электростанций Земли не превышает 10^{14} ватт.

При ядерных взрывах, кроме обычных поражающих факторов (разрушение всего вблизи, действие ударной волны вдали), есть и добавочные факторы – воздействие сильного теплового, рентгеновского и гамма-излучения, а также радиоактивность продуктов взрыва и ставшей радиоактивной почвы, распространяющейся с пылевым облаком («грибом») на большие расстояния от взрыва.

3) *Электрическая энергия*. Это самые древние известные людям взрывы – грозовые явления. Молния очень быстра. За доли секунды образуется длинный изломанный канал, представляющий собой плазму, имеющую высокие температуру и давление. Эта плазма, расширяясь, образует в окружающем воздухе ударную волну, которая, распространяясь и ослабевая, превращается в сильную акустическую волну. Мы воспринимаем ее как гром.

Вблизи молнии можно ощутить, кроме ее теплового излучения, действие ударной волны. Взрыв молнии напоминает взрыв длинного шнура из взрывчатого вещества (так называемый детонационный шнур для инициирования взрывных зарядов с большого расстояния).

Помимо взрывного воздействия, разряд молнии может нанести и поражение электрическим током. В лабораторных условиях электрический взрыв осуществляется пропусканием сильного тока по тонкой металлической проволоке.

4) *Кинетическая энергия быстро двигающихся тел*. Эта энергия после ряда превращений выделяется в виде кинетической энергии препятствия или воздуха. Такова природа взрывов, происходящих при падении метеоритов. При малых углах наклона к горизонту взрыв может произойти в воздухе с образованием сильной ударной волны. Так случилось, например, при падении в 1907 году Тунгусского метеорита, когда выделилась энергия, эквивалентная энергии взрыва 10 мегатонн тротила. При больших углах наклона путь метеорита в атмосфере значительно короче, и кинетическая энергия превращается в тепловую уже в толще земли. Это – аналог подземного взрыва с образованием взрывной воронки (метеоритного кратера). Такое бывало на Земле – геологи насчитывают несколько огромных кратеров, сейчас уже заполненных осадочными породами. На Луне, где атмосферы нет, каждый метеорит образует воронку взрыва – лунный лик испещрен метеоритными кратерами.

5) *Потенциальная энергия упругих деформаций в земной коре*. Огромный массив породы может быть сжат окружающей средой и иметь сильные упругие деформации (сжатия или сдвига). Иногда достаточно небольшой подвижки пород, чтобы энергия упругой деформации перешла в кинетическую энергию среды (по аналогии с разжимающейся пружиной). Это и есть внутренний механизм землетрясений, которые представляют собой волновое последствие первоначальной разгрузки деформации, носившей внезапный, взрывной характер.

6) *Внутренняя энергия сжатых газов*. Если стенки сосуда, содержащего сжатый газ, внезапно разрушаются, то внутренняя энергия, согласно первому началу термодинамики, будет «работать» над окружающей средой, прежде всего расширяя ее и образуя ударную волну. Это – взрывы баллонов со сжатым газом (часто сопровождающиеся воспламенением газа, если он горючий), взрывы паровых котлов при нарушении правил их эксплуатации. В природе это – вулканические взрывы. Например, взрыв острова Санторин в XV веке до н.э. – возможный прообраз гибели Атлантиды. В 1883 году при грандиозном взрыве вулкана Кракатау по всей атмосфере распространилось облако поднятой взрывом вулканической пыли. Классическое объяснение такого взрыва устами своего героя инженера Сайруса Смита сделал Жюль Верн в романе «Таинственный остров».

Что же общего имеют все шесть рассмотренных случаев взрывного превращения? Прежде всего, это внезапный переход запасенной потенциальной энергии (или даже кинетической – для метеоритов) в главный взрывной эффект – кинетическую энергию движения продуктов взрыва и окружающей среды, что сопровождается разлетом осколков взрывного устройства и окружающих предметов и образованием взрывной ударной волны (об этом будет рассказано позже).

В заключение этой статьи я остановлюсь на применении мощных (с большой энергией) взрывов в мирных целях.

Крупные взрывы в нашей стране

Наша страна (Россия, СССР) всегда была передовой и по объему использования крупных взрывов (в том числе и ядерных), и по научному обоснованию этого использования. Так сложилось развитие науки, что еще в довоенные годы появился раздел технической физики – «физика взрыва». В этой научно-технической области сформировались такие ученые, как будущие академики Ю.Б.Харитон, Я.Б.Зельдович, К.И.Щелкин, М.А.Садовский, будущие генералы Г.И.Покровский, Б.А.Олисов. Неслучайно почти все они впоследствии возглавили работы по атомному проекту СССР, которые были связаны непосредственно с взрывными ядерными устройствами и с действием взрыва. И.В.Курчатов – мозг и сердце атомного проекта, не будучи сам специалистом в этой области, доверял им.

Я здесь не упоминаю многих других ученых, вложивших в этот проект неоценимый вклад, в частности – создателя и душу журнала «Квант» академика И.К.Кикоина, занимавшегося в атомном проекте задачей разделения изотопов.

В использовании мощных взрывов в мирных целях особенно велика роль академика М.А.Садовского, возглавлявшего в 1960–1992 годы спецсектор, а потом и весь Институт физики Земли АН СССР, генерала Г.И.Покровского и директора треста «Союзвзрывпром» М.М.Докучаева.

В 1936 году на Урале на Коркинском угольном месторождении было одновременно взорвано 1808 тонн взрывчатого вещества – образовалась большая траншея для добычи угля открытым способом. В послевоенные годы усилилось внимание к применению мощных взрывов в строительном деле – для создания плотин, в горнодобывающей промышленности – для создания подземных полостей и вскрытия месторождений полезных ископаемых.

В 1966–67 годах с помощью серии направленных взрывов взрывчатого вещества общей массой 5300 тонн была создана плотина на реке Малая Алмаатинка в урочище Медео под Алма-Атой. Плотина надежно защитила тогдашнюю столицу Казахстана от опасности селевых потоков.

В 1968 году несколько взрывов с общей массой взрывчатки 2000 тонн обрушили берега реки Вахш в Таджикистане. Была создана плотина высотой 40 метров. Воды искусственного водохранилища с тех пор направляются по туннелям на орошение и промышленные нужды долинной местности. При обосновании этой работы и разработке проекта взрыва был учтен отрицательный опыт США, где в 1929 году аналогичная идея закончилась провалом – надежную плотину создать не удалось.

Успешность крупных взрывов в СССР была основана на создании теории действия взрыва на горные породы, который должен приводить к их направленному выбросу. Эта теория была создана после серии экспериментов, проведенных в Институте химической физики АН СССР в 1955–1960 годы под общим руководством академика М.А.Садовского. Эксперименты проводились в лаборатории с зарядами порядка одного грамма, на полигонах – от одного до тысячи килограммов. В 1957 году под Ташкентом в одних и тех же грунтовых условиях была проведена серия взрывов на выброс с массой заряда от одной до тысячи тонн. Пожалуй, при современном отношении к фундаментальным научным исследованиям на такую работу денег никто бы не выделил (в современных ценах эта работа стоила бы свыше ста миллионов рублей).

В начале статьи я рассказал о заключительном, тысячетонном взрыве этой серии экспериментов. Кратер взрыва (взрывная воронка) существует и сейчас. Он представляет собой единственное в этой безводной местности озеро диаметром 200 метров и успешно используется для сельскохозяйственных нужд. Но взрыв проводился, конечно, не для этого, а с целью получения экспериментальных данных о разлете грунта при таких мощных взрывах. Соответствующая теория, учитывающая влияние силы тяготения на движение вещества при подземном взрыве, в то время еще только создавалась, и этот мощный взрыв позволил получить надежные расчетные формулы и осуществить успешное проектирование крупных подземных взрывов, некоторые из которых я охарактеризовал.

Автор статьи принимал участие в этом эксперименте в качестве начальника отряда кинематографических наблюдений. Было задействовано несколько десятков аппаратов для киносъемок с частотой от одного до тысячи кадров в секунду. В статье приводится серия фотографий этого взрыва в различных стадиях его развития.

Для того чтобы узнать, где окажутся породы, непосредственно прилегающие к заряду, в заряд были введены «меченые атомы» – быстро распадающиеся изотопы. Они оказались надежно погребенными глубоко под дном нынешнего озера. Ведь если бы заряд был ядерным, эти породы были бы опасно радиоактивными. «Меченые атомы» показали возможность использования для подобных целей и ядерных взрывов – куски радиоактивной породы при этом не разлетаются, а остаются погребенными.

В заключение упомяну, что в мирных целях широко использовались и ядерные взрывы (и не только в нашей стране) – вплоть до запрещения в 1996 году проводить любые ядерные взрывы, в том числе и подземные. Обычно это не афишировалось, поскольку было связано и с оборонными задачами – испытанием новых конструкций бомб. Но поскольку скрыть эти взрывы все равно было невозможно из-за их сейсмического действия, сегодня в открытой печати можно найти все сведения о времени, месте и цели их проведения. За период с 1965 по 1988 год в нашей стране (СССР) было осуществлено 116 подземных ядерных взрывов в мирных целях. Их них 39 было проведено в научных целях – для исследования земных недр с помощью возникающих при взрыве мощных сейсмических волн.

Готовя к печати эту статью, я был рад возможности еще раз вспомнить моих друзей – начальника экспедиции В.Н.Родионова, начальника отряда сейсмических наблюдений А.Н.Ромашова и многих других. И еще раз ощутить благодарность всем моим учителям, и прежде всего – «главному взрывнику» страны академику М.А.Садовскому, нашему незабвенному «Михалу», как его с любовью называли и мы, его ученики, и все ученые, занимавшиеся изучением взрыва.

(Продолжение следет)

Полуправильные многоугольники на решетках

В.ВАВИЛОВ, А.УСТИНОВ

Одним из важных объектов, который возникает в различных задачах алгебры, теории чисел и анализа, является ортогональная *целочисленная решетка* $\mathbb{Z}^2$. Она состоит из всех точек плоскости Oxy, у которых обе координаты – целые числа. Точки решетки можно рассматривать как узлы клетчатой бумаги, размер клеточки которой равен единице.

Если все вершины многоугольника лежат в узлах решетки $\mathbb{Z}^2$, то говорят, что он *расположен* на этой решетке.

О том, что ни один правильный многоугольник, за исключением квадрата, нельзя расположить на клетчатой бумаге так, что все его вершины являются ее узлами (т.е. имеют целые координаты), уже рассказывалось в журнале «Квант» [1] (см. также задачу 3 из Упражнений).

В данной статье изучается аналогичный вопрос о так называемых *полуправильных* многоугольниках – равноугольных и равносторонних. *Равноугольным* (*равносторонним*) многоугольником называется многоугольник, у которого внутренние углы (все стороны) равны, но стороны (внутренние углы) могут и отличаться друг от друга; пересечение этих множеств составляет множество правильных многоугольников. Подчеркнем, что в этих определениях ничего не говорится о выпуклости многоугольников. Примерами равноугольных многоугольников, расположенных на решетке, служат квадрат и восьмиугольник (рис. 1). Частными случаями равносторонних являются многоугольники, ограниченные замкнутыми ломаными с единичными длинами звеньев и прямыми углами между звеньями.

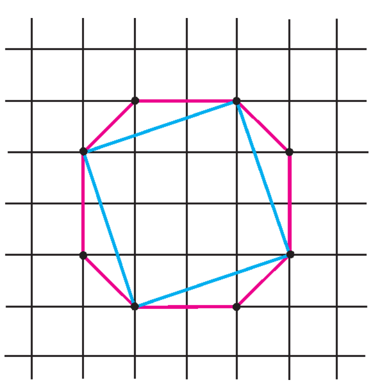


Рис. 1

[1] *Егоров А. «Решетки и правильные многоугольники» («Квант» №12 за 1974 г.).*

Правильный треугольник

Прежде чем решать задачу о полуправильных многоугольниках на решетке, рассмотрим более простой вопрос: можно ли расположить на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^2$ правильный треугольник?

Отрицательный ответ на этот вопрос, по-видимому, впервые был дан Е. Лукасом в 1878 году. Мы приведем два доказательства этого важного результата. В основе первого (принадлежащего Лукасу) лежат элементарные сведения из теории делимости чисел. Второе доказательство будет основано на иррациональности чисел вида $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{n}$.

Теорема 1. *Правильный треугольник нельзя расположить на целочисленной решетке* $\mathbb{Z}^2$.

Доказательство I. Предположим, что существуют правильные треугольники, которые можно расположить на решетке $\mathbb{Z}^2$.

Будем считать, что среди таких треугольников мы выбрали наименьший и что начало координат находится в одной из его вершин, а две другие вершины имеют координаты (a, b) и (c, d). Тогда четыре целых числа a, b, c, d не имеют общих делителей, отличных от ± 1 (взаимно просты). В противном случае можно перейти к треугольнику меньшего размера $(0,\ 0)$, $(a/k,\ b/k)$, $(c/k,\ d/k)$, где k – общий делитель всех четырех чисел (рис.2).

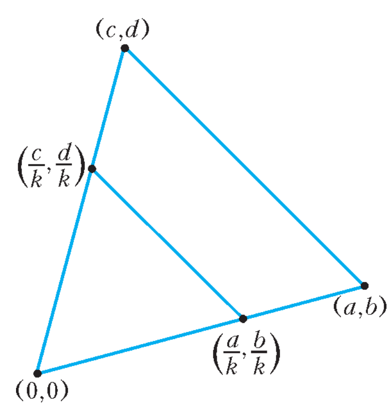


Рис. 2

Запишем равенство сторон треугольника в координатах:

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2 .$$

Отсюда заключаем, что

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 2(ac + bd) .$$

Следовательно,

$$a^2+b^2+c^2+d^2=4(ac+bd),$$

т.е. сумма квадратов четырех чисел делится на 4.

Квадраты целых чисел при делении на 4 дают остатки только 0 или 1. Поэтому или все четыре числа a, b, c, d четные, или все – нечетные. Первое невозможно потому, что эти числа, по нашему выбору, взаимно просты. Второе же невозможно потому, что тогда не выполняется соотношение

$$a^2+b^2=(a-c)^2+(b-d)^2,$$

ибо его левая часть не делится на 4, а правая – делится.

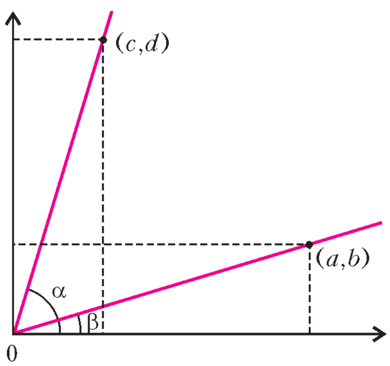


Рис. 3

Полученное противоречие и доказывает теорему.

Доказательство II. Отметим, что если два луча с началами в начале координат проходят через узлы $(a,\ b)$ и $(c,\ d)$ решетки $\mathbb{Z}^2$ (рис.3), то тангенс угла θ между этими лучами является числом рациональным или не определен, так как

$$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{\dfrac{d}{c}-\dfrac{b}{a}}{1+\dfrac{bd}{ac}}=\frac{ad-bc}{ac+bd}.$$

Значит, если предположить, что существует равносторонний треугольник с вершинами в узлах решетки $\mathbb{Z}^2$, то два луча с началами в одной из его вершин и содержащие стороны треугольника, образуют угол в $60°$. Но $\operatorname{tg}60°=\sqrt{3}$ – иррациональное число, и, следовательно, расположить на решетке $\mathbb{Z}^2$ равносторонний треугольник нельзя.

Равносторонние многоугольники

Теорема 2. (Д.Болл.) *а) На целочисленной решетке $\mathbb{Z}^2$ нельзя расположить ни одного равностороннего многоугольника с нечетным числом сторон.*

б) На решетке $\mathbb{Z}^2$ можно расположить равносторонний многоугольник с любым четным числом сторон.

Доказательство. а) Предположим противное, т.е. что равносторонний многоугольник с нечетным числом сторон n можно расположить на решетке $\mathbb{Z}^2$. Будем считать, что этот многоугольник имеет наименьшую возможную длины стороны. Пусть $\vec{v}_k=x_k\vec{i}+y_k\vec{j}$ ($k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$) – векторы, направленные вдоль сторон многоугольника. Их сумма равна нулю и они имеют равные длины, значит,

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=0,$$

$$y_1+y_2+\ldots+y_n=0,$$

$$x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2=\ldots=x_n^2+y_n^2=a^2,$$

где через a обозначена длина стороны многоугольника.

Возводя каждое из первых двух равенств в квадрат, а затем складывая полученные результаты (с учетом последующих n равенств), получаем соотношение

$$na^2=-2\sum_{i\neq j}\left(x_ix_j+y_iy_j\right).$$

Так как a^2 – натуральное число (почему?) и n нечетно, то a^2 – четно.

Если a^2 делится на 4, то тогда все x_i и y_i являются четными числами, поскольку попарная сумма их квадратов делится на 4. Но этого быть не может, так как из векторов $\vec{v}_i/2$, которые в этом случае также имеют целочисленные координаты, можно составить равносторонний n-угольник (почему?). Он имеет сторону вдвое меньшую, чем исходный, а это невозможно.

Пусть теперь a^2 делится на 2, но не делится на 4. Но тогда все x_i и y_i – нечетные числа, так как все они удовлетворяют уравнению $x_i^2+y_i^2=a^2$. Таким образом, сумма

$$\sum_{i\neq j}\left(x_ix_j+y_iy_j\right)$$

является четным числом, и поэтому a^2 делится на 4, что, как мы уже знаем, невозможно.

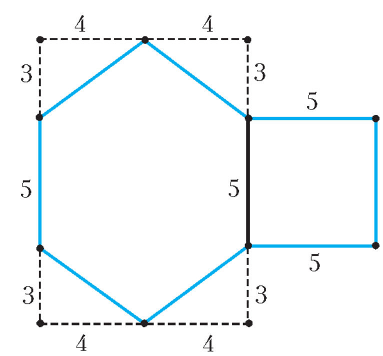


Рис. 4

б) Пристраивая к равностороннему шестиугольнику квадраты и шестиугольники (один шаг этого процесса показан на рисунке 4), убеждаемся, что вторая часть теоремы 2 действительно имеет место. Правда, при этом получаются невыпуклые равносторонние многоугольники с четным числом сторон. Однако предъявить выпуклый многоугольник также возможно (см. задачу 2 из Упражнений).

Равноугольные многоугольники

Для изучения класса равноугольных многоугольников нам понадобится следующее утверждение:

Числа $\operatorname{tg}(2\pi/n)$ при натуральных значениях n всегда являются иррациональными, за исключением случаев $n=1,\ 2,\ 4,\ 8$.

Для его доказательства мы применим формулу

$$\operatorname{tg}n\alpha=\frac{C_n^1\operatorname{tg}\alpha-C_n^3\operatorname{tg}^3\alpha+C_n^5\operatorname{tg}^5\alpha-\ldots+(-1)^{(n-1)/2}\operatorname{tg}^n\alpha}{1-C_n^2\operatorname{tg}^2\alpha+C_n^4\operatorname{tg}^4\alpha-\ldots+(-1)^{(n-1)/2}\operatorname{tg}^{n-1}\alpha},\quad(1)$$

где C_n^k – коэффициенты из формулы бинома Ньютона

$$(a+b)^n=C_n^0a^nb^0+C_n^1a^{n-1}b^1+\ldots+C_n^na^0b^n.$$

Доказательство формулы (1) легко получить методом математической индукции, и мы предлагаем сделать это читателю самостоятельно.

Будем считать, что $n \geq 5$ и $n \neq 8$, так как случаи $n = 1, 2, 3, 4, 8$ ясны. Пусть $\alpha = 2\pi/n$. Тогда $\operatorname{tg} n\alpha = 0$ и по формуле (1) число $x = \operatorname{tg}(2\pi/n)$ является корнем уравнения с целыми коэффициентами

$$n - C_n^3 x^2 + C_n^5 x^4 - \ldots + (-1)^{(n-1)/2}\, x^{n-1} = 0\,. \quad (2)$$

В этом уравнении старший коэффициент равен ± 1, следовательно, в множестве рациональных чисел оно может иметь только целые корни.[2] Поэтому если x – рациональное число, то оно может быть только целым.

Рассмотрим два случая: а) $n = mp$, где p – нечетное простое число; б) $n = 2^k$ и $k \geq 4$. Этими случаями исчерпываются все возможности.

а) Если $m = 1$, т.е. $n = p$, то из равенства (2) вытекает, что x^2 делит p и, следовательно, $x = \operatorname{tg}(2\pi/n) = \pm 1$. Но это невозможно для нечетного простого n.

Пусть теперь $n = mp$, где $m > 1$. Если число $\operatorname{tg}(2\pi/n)$ рационально, то, как видно из формулы (1), число $\operatorname{tg}(2\pi m/n) = \operatorname{tg}(2\pi/p)$ также было бы рационально, а этого, по доказанному выше, быть не может.

б) Пусть теперь $n = 2^k$ и $k \geq 4$. Так как $\operatorname{tg}(2\pi/16) = \sqrt{2} - 1$ – число иррациональное, то по формуле (1) все числа вида $\operatorname{tg}\left(2\pi/2^k\right)$ ($k \geq 4$) также иррациональны.

Утверждение доказано.

Теорема 3. (Д. Болл.) *Из всех возможных равноугольных многоугольников на решетке $\mathbb{Z}^2$ можно расположить только прямоугольник и восьмиугольник.*

Доказательство. Будем считать, что $n \geq 4$, так как случай правильного треугольника уже рассматривался ранее. Тот факт, что квадрат и равноугольный восьмиугольник можно расположить на решетке, виден из рисунка 1. Пусть теперь $n > 4$ и равноугольный n-угольник можно разместить на решетке $\mathbb{Z}^2$. Тогда векторы, которые формируют его стороны, имеют целочисленные координаты (рис.5) и угол между любыми двумя соседними векторами равен $2\pi/n$.

Будем считать точку O началом координат; тогда угол между лучами $[OP)$ и $[QO)$ равен $2\pi/n$, и $\operatorname{tg}(2\pi/n)$, как мы видели выше (указанные лучи проходят через узлы решетки), должен быть при $n > 4$ рациональным числом. А это, как установлено ранее, возможно только в том случае, когда $n = 8$.

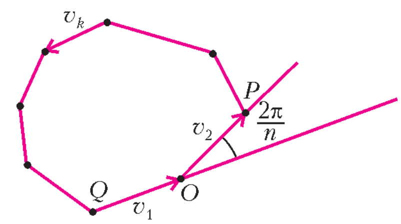


Рис. 5

Упражнения

1. На клетчатой бумаге проведена замкнутая ломаная с вершинами в узлах сетки, все звенья которой равны. Докажите, что число звеньев такой ломаной четно.

2. Докажите, что на решетке $\mathbb{Z}^2$ можно расположить выпуклый равносторонний многоугольник с любым четным числом сторон.

3. Докажите, что единственным правильным многоугольником на плоскости, все вершины которого имеют рациональные координаты, является квадрат.

4. Докажите равенство (1) с помощью формулы Муавра $\cos n\alpha + i \sin n\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$.

5. а) Докажите, что если p и q – взаимно простые натуральные числа и $\cos(p\pi/q)$ – рациональное число, то число $\cos(\pi/q)$ также рационально.

б) Докажите, что число $\cos(p\pi/q)$ при взаимно простых p и q, $q > 3$, рационально тогда и только тогда, когда рационально число $\cos(\pi/q)$.

в) Пусть p и q взаимно просты, $q \geq 3$. Докажите, что числа $\sin(p\pi/q)$ иррациональны при $q \neq 6$.

Указание. Используйте то, что $2\cos n\alpha$ можно записать в виде $f_n(2\cos\alpha)$, где $f_n(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом, равным 1.

6. Докажите, что на каждой из правильных плоских мозаик, т.е. покрытии плоскости при помощи правильных многоугольников (но, быть может, разных типов), можно расположить только такие правильные многоугольники, которые «видны невооруженным глазом». Мы здесь ограничиваемся только такой качественной характеристикой.

Примечание. Заметим, что различных таких мозаик (паркетов) ровно 11 и в таких покрытиях плоскости встречаются правильные треугольники, квадраты, шестиугольники, восьмиугольники и двенадцатиугольники.[3]

---

[2] *Напомним, что если уравнение с целыми коэффициентами имеет рациональный корень p/q, то знаменатель q обязан делить старший коэффициент этого уравнения, а числитель p – свободный коэффициент.*

[3] *Колмогоров А. «Паркеты из правильных многоугольников» («Квант» №8 за 1986 г.).*

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

Не деньги

А.ВАСИЛЬЕВ

В ПЕРВОМ НОМЕРЕ «КВАНТА» ОТ 1998 ГОДА БЫЛА заявлена новая рубрика «Физики на монетах мира», где было обещано в увлекательной форме рассказывать о выдающихся ученых всех времен и народов, появившихся на платежных средствах различных государств. Не обсуждая здесь «увлекательность формы», о которой судить может только читатель, отметим, что за прошедшие годы на страницах журнала появилось несколько десятков статей, иллюстрированных портретами физиков и математиков на красочных банкнотах и монетах многих стран. В этом плане неожиданным может показаться заголовок данной статьи, посвященной ученым на «не деньгах».

Собственно, не деньги, или по-немецки нотгельды (Notgeld), – это суррогатные платежные знаки, выпущенные в оборот различными банками и муниципалитетами, а также неправительственными организациями Германии и Австрии в период с 1914 по 1924 год. В ходе первой мировой войны и по ее завершении в этих странах проявилась острая нехватка наличных денег и, в первую очередь, разменной монеты. Серебро, а вслед за ним медь и никель, быстро исчезли из оборота. Чтобы как-то справиться с этой проблемой, банки позволили городам вместо общей разменной монеты выпускать свои суррогаты. Со временем нотгельды стали выпускаться не только в бумажном виде, но и из алюминия, цинка, кожи, ткани, дерева и других материалов, и не только муниципалитетами, но и различными фирмами, в том числе ресторанами и магазинами.

Инфляция, поразившая Германию в 1923 году, породила новый вид нотгельдов с номиналами в миллионы и миллиарды марок. Однако выпуск мелких номиналов не прекратился, но теперь это были выпуски, предназначенные исключительно для коллекционеров.

Во многих городах нотгельды иллюстрировали местные достопримечательности и представляли именитых сограждан. Так, на них появились знаменитые физики, математики и ученые других специальностей. О некоторых ученых, кому посвящены и «настоящие» монеты (Эрнст Аббе, Отто фон Герике), мы уже рассказывали, другие выдающиеся ученые – такие как Атанасиус Кирхер, Христиан Вольф, Иоганн Шретер, Адольф Андерсен – появились только на нотгельдах.

Атанасиус Кирхер (1602–1680) многими сравнивался с Леонардо да Винчи, а некоторые называли его последним представителем эпохи Возрождения. Он обладал поистине энциклопедическими познаниями и внес вклад практически во все области современного ему естествознания. Кирхер был одним из первых исследователей египетских иероглифов, он наблюдал колонии микробов в микроскопе и предложил эффективные методы борьбы с распространением эпидемий, изучал такие формы взаимного притяжения, как любовь, гравитация и магнетизм. Современными исследователями многие достижения Атанасиуса Кирхера поставлены под сомнение, они отмечают его эклектику и непрофессионализм, однако ясно, что уже одно присутствие в европейской науке универсального гения Кирхера способствовало ее быстрому прогрессу во всех областях.

Христиан Вольф (1679–1754) был ведущим представителем немецкой философской школы в период от Лейбница до Канта. Так же, как и Атанасиус Кирхер, он интересовался большинством направлений современного ему естествознания. В своем подходе он опирался прежде всего на математику, став основателем таких научных дисциплин, как экономика и деловое администрирование. Собственно, философию Вольф определял как науку возможного и подразделял ее на теоретическую и практическую части. Основой обеих являлась логика, иногда называемая рациональной философией. Теоретическая философия у Вольфа подразделялась, в свою очередь, на космологию и рациональную психологию. Обе известны в основном благодаря «Критике чистого разума» Иммануила Канта. Наконец, практическая философия подразделялась у Вольфа на этику, экономику и политику. Моральным принципом его философии стала мысль о необходимости стремления человека и общества к совершенству. В этом, в частности, особенно проявлялся его математический склад ума.

Иоганн Шретер (1745–1816), юрист по образованию, достиг высокого положения при королевском дворе в Ганновере, однако променял свою политическую карьеру на наблюдательную астрономию. После открытия Уильямом Гершелем планеты Уран (1781 г.) Шретер приобрел у него подзорную трубу с фокусным расстоянием 122 см и апертурой 12 см. С этим инструментом он быстро завоевал хорошую репутацию в астрономической среде за счет систематических наблюдений Луны, Солнца и Венеры. Тремя годами позже у того же Гершеля за свою полугодовую зарплату он купил подзорную трубу с фокусным расстоянием 214 см и апертурой 16,5 см. С этой передовой по тому времени аппаратурой он достиг увеличения изображения удаленных объектов в 1200 раз. После этого Шретер занялся систематическими наблюдениями Марса, Юпитера и Сатурна. Им были выполнены важные исследования по топографии Луны и Марса, его име-

(Продолжение см. на с. 23)

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 марта 2008 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №6–2007» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2066» или «Ф2073». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2066–М2070, Ф2073–2077

М2066. Квадрат со стороной 1 разрезан на 100 прямоугольников одинакового периметра p. Найдите наибольшее значение p.

А.Шаповалов, С.Берлов

М2067. Докажите, что если число $\underbrace{111\ldots11}_{n\text{ единиц}}$ делится на n, то n делится на 3.

Р.Ковалев

М2068. В футбольном турнире участвуют mn команд $(m, n \geq 2)$. Командам присвоены номера 1, 2, …, mn в соответствии с местом, занятым на предварительном этапе. Организаторы турнира собираются разбить команды на m групп по n команд так, чтобы для любых двух команд A и B выполнялось условие: если номер A меньше номера B, то сумма номеров соперников по группе для команды A больше, чем для команды B. При каких m и n желание организаторов можно осуществить?

И.Акулич

М2069. Обозначим через $\|y\|$ расстояние от действительного числа y до ближайшего целого числа. Пусть для иррационального числа x бесконечная последовательность натуральных чисел $q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots$ определена следующим образом: $q_1 = 1$, q_{k+1} – наименьшее натуральное q, для которого $\|xq\| < \|xq_k\|$. Докажите, что $q_{k+2} \geq q_k + q_{k+1}$ для всех k = 1, 2, …

В.Быковский

М2070*. Докажите, что главные диагонали шестиугольника, лежащего в пересечении треугольников $P_1P_3P_5$ и $P_2P_4P_6$ (рис.1), пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\frac{S_1 \cdot S_3 \cdot S_5}{S_{135}} = \frac{S_2 \cdot S_4 \cdot S_6}{S_{246}},$$

где S_i – площадь маленького треугольника с вершиной P_i, примыкающего к шестиугольнику, а S_{135} и S_{246} – площади треугольников $P_1P_3P_5$ и $P_2P_4P_6$ соответственно.

С.Дориченко

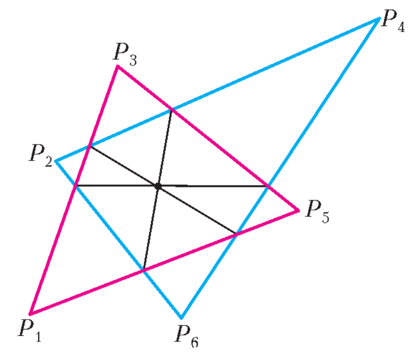


Рис. 1

Ф2073. Тело движется вдоль координатной оси X, его скорость v пропорциональна корню квадратному из координаты x. В точке с координатой $x_1 = 100$ м скорость тела составляет $v_1 = 10$ м/с. Найдите ускорения в точках с координатами $x_2 = 20$ м и $x_3 = 300$ м.

А.Простов

Ф2074. На наклонной плоскости с углом α при основании удерживают клин массой M (рис.2). Угол при основании клина также равен α, а расположен клин «вверх ногами», так что его верхняя поверхность параллельна плоскости земли. На этой поверхности находится очень легкая тележка с четырьмя массивными колесами – масса каждого колеса m. Трение между поверхностью клина и колесами достаточно велико, поэтому колеса не проскальзывают. Клин отпускают. Найдите его ускорение при движении (пока тележка еще находится на клине). Масса каждого колеса сосредоточена в его ободе.

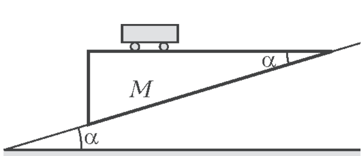


Рис. 2

Т.Ележкин

Ф2075. В компьютерной модели рассматривается кубический сосуд объемом 1 м^3, заполненный «газом» – в сосуде находятся 1000 частиц диаметром 1 мм каждая и 2 частицы диаметром 1 см. В начальный момент маленькие частицы неподвижны, большие имеют скорости по 100 м/с. Оцените число ударов больших частиц о стенки сосуда за большое время – за 10 лет. Оцените также число столкновений больших частиц с маленькими за то же время. Считайте, что частицы «сделаны» из одного и того же материала. Внешние силы в модели не предусмотрены, удары считаются упругими.

А.Старов

Ф2076. В схеме неуравновешенного «мостика» (рис.3) два резистора имеют сопротивления по 10 Ом, два – по 30 Ом. В диагональ мостика включен амперметр, имеющий пренебрежимо малое сопротивление. Батарейка напряжением 3 В подключена к другой диагонали мостика. Вместо одного из резисторов подключают еще одну такую же батарейку. Найдите максимальное и минимальное возможные значения тока через амперметр в получившейся схеме.

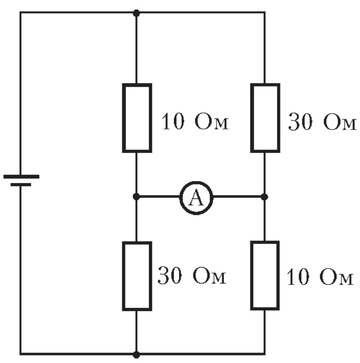


Рис. 3

З.Рафаилов

Ф2077. На тороидальный сердечник, сделанный из сплава с очень большой магнитной проницаемостью, намотаны три одинаковые катушки индуктивностью L = = 1 Гн каждая (рис.4). К выводам одной из катушек подключен резистор сопротивлением R = 100 Ом, две другие катушки соединены последовательно (начало одной – к концу другой). К свободным выводам получившейся «двойной» катушки подключают батарейку напряжением U = 3 В. Через время $\tau = 0{,}5$ с батарейку отключают. Какой ток течет через батарейку через время $0{,}5\tau$ после включения? Какое количество теплоты выделится в резисторе за время τ после включения и после отключения батарейки?

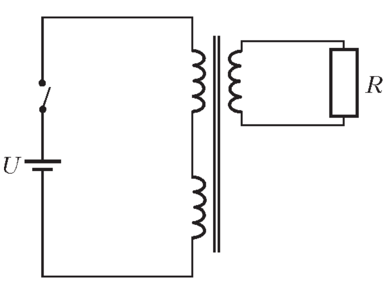


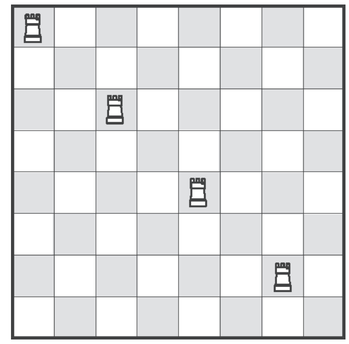
Рис. 4

А.Зильберман

Решения задач М2041 – М2050, Ф2058 – Ф2062

М2041. *Какое наименьшее число ладей нужно поставить на шахматной доске 8×8, чтобы все белые клетки оказались под боем этих ладей?*

Ответ: 4.



Каждая ладья бьет не более 8 белых клеток (4 клетки – на одной горизонтали и 4 клетки – на одной вертикали), поэтому все 32 белые клетки побить менее чем четырьмя ладьями не удастся. Пример, когда четыре ладьи бьют все белые клетки, показан на рисунке.

Р.Женодаров

М2042. *Докажите, что при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ выполнено неравенство*

$$(\operatorname{tg} x)^{\sin x} + (\operatorname{ctg} x)^{\cos x} \geq 2.$$

Пусть $a \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, $b \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ и $a + b = \dfrac{\pi}{2}$. Тогда $(\operatorname{tg} b)^{\sin b} = (\operatorname{ctg} a)^{\cos a}$, $(\operatorname{ctg} b)^{\cos b} = (\operatorname{tg} a)^{\sin a}$. Таким образом, если требуемое неравенство выполняется для $x = a$, то оно выполняется и для $x = b$; поэтому достаточно доказать неравенство для $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Если $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, то $\operatorname{ctg} x \geq 1$, $\cos x \geq \sin x$, поэтому

$$(\operatorname{tg} x)^{\sin x} + (\operatorname{ctg} x)^{\cos x} \geq (\operatorname{tg} x)^{\sin x} + (\operatorname{ctg} x)^{\sin x} =$$

$$= (\operatorname{tg} x)^{\sin x} + \frac{1}{(\operatorname{tg} x)^{\sin x}} = A + \frac{1}{A}$$

для положительного A. Но

$$A + \frac{1}{A} = \left(\sqrt{A} - \frac{1}{\sqrt{A}}\right)^2 + 2 \geq 2.$$

Н.Агаханов, И.Богданов

М2043. *Можно ли сконструировать такой набор «Юный паркетчик» из четырех одинаковых многоугольников и квадратика, чтобы из всех пяти деталей можно было сложить квадрат, а из трех одинаковых деталей – равносторонний треугольник?*

Ответ: можно.

Опустив перпендикуляры из центра на стороны, разобьем правильный треугольник на три дельтоида (см.

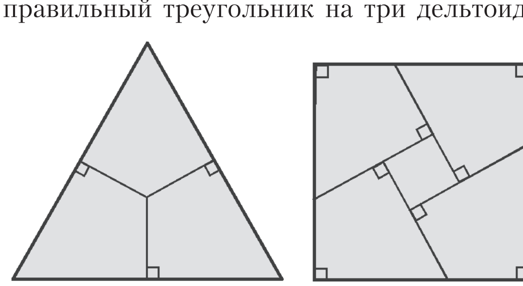


рисунок). Из четырех таких дельтоидов можно составить квадрат, в котором недостает центрального квадратика.

О.Нечаева

M2044. *Пусть $f(x)$ – некоторый многочлен ненулевой степени. Может ли оказаться, что уравнение $f(x)=a$ при любом значении a имеет четное число решений?*

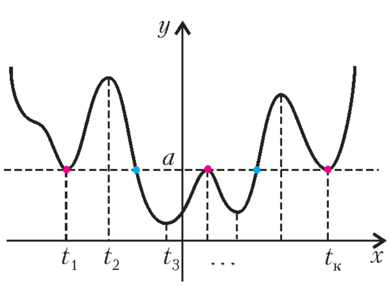
Ответ: не может.

Покажем, что в любом случае найдется такое a, что уравнение $f(x)=a$ имеет нечетное число решений.

Пусть $t_1,t_2,\ldots,t_k$ – точки, в которых меняется знак производной $f'(x)$ (таких точек конечное количество, так как все они – корни $f'(x)$). Таким образом, на каждом из интервалов $(-\infty,t_1),(t_1,t_2),\ldots,(t_k,+\infty)$ функция $f(x)$ монотонна, и в точках $t_1,t_2,\ldots,t_k$ происходит смена интервала возрастания на интервал убывания или наоборот.

Пусть степень многочлена $f(x)$ нечетна. Учитывая, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ – бесконечности разных знаков, получаем, что при любом a уравнение $f(x)-a=0$ имеет нечетное количество корней, в которых функция $f(x)-a$ меняет знак. Достаточно выбрать a, отличное от $f(t_1),f(t_2),\ldots,f(t_k)$, тогда уравнение $f(x)-a=0$ не имеет других корней (т.е. корней, в которых $f(x)-a$ сохраняет знак). Случай нечетной степени многочлена $f(x)$ можно разобрать и по-другому, заметив, что при достаточно большом a уравнение $f(x)=a$ имеет ровно одно решение.

Пусть степень многочлена $f(x)$ четна. Учитывая, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ – бесконечности одного знака, получаем, что при любом a уравнение $f(x)-a=0$ имеет четное количество корней, в которых функция $f(x)-a$ меняет знак. Поскольку $f'(x)$ – многочлен нечетной степени, то $f'(x)$ меняет знак в нечетном числе точек, т.е. k нечетно. Отсюда следует, что найдется такое a, что в наборе $f(t_1),f(t_2),\ldots,f(t_k)$ нечетное количество чисел, равных a. Для найденного значения a уравнение $f(x)=a$ имеет нечетное число решений – четное количество, в которых функция $f(x)-a$ меняет знак, и нечетное количество, в которых функция $f(x)-a$ не меняет знак (см. рисунок).



П.Кожевников

M2045. *На доске записано число $\underbrace{111\ldots11}_{99\text{ единиц}}$. Двое играют в следующую игру. Игроки ходят по очереди, причем за ход разрешается либо записать ноль вместо одной из единиц, кроме первой и последней, либо стереть один из нулей. Проигрывает тот, после хода которого число будет делиться на 11. Кто выигрывает при правильной игре?*

Ответ: первый.

Покажем, что первый игрок не проиграет, так как каждым своим ходом он может получать число вида 1011…11, которое не делится на 11 в силу того, что разность сумм цифр, стоящих на четных и на нечетных местах, равна 1 или 2. Действительно, первым ходом первый игрок заменяет вторую слева единицу на ноль, а далее либо стирает ноль, появившийся после хода второго игрока, либо, если тот стер единственный ноль, опять заменяет вторую слева единицу на ноль (что он всегда сможет сделать, иначе число на доске равно 11, и второй игрок уже проиграл).

М.Мурашкин

M2046. *Муха села в полдень на секундную стрелку часов и решила ездить, придерживаясь следующего правила: если одна стрелка обгоняет другую и муха сидит на одной из этих стрелок, то она пересаживается на другую. Сколько оборотов сделает муха к полуночи?*

Ответ: 245.

Посадим в полдень мух A, B, C на каждую из стрелок – секундную, минутную, часовую. Когда стрелки встречаются, пусть мухи, сидящие на этих стрелках, меняются местами. В результате в любой момент времени A впереди B (по суммарному пройденному расстоянию), а B впереди C, но A обгоняет C не более чем на круг. Всего три мухи с полудня до полуночи сделали $1+12+$ $+\ 60\cdot12\ =733$ оборота (суммарное число оборотов, которые делают часовая, минутная и секундная стрелки). Так как $733=244\cdot3\ +1$, то мухи B и C сделали по 244 оборота, а муха A – на один оборот больше.

Из приведенных рассуждений можно дополнительно сделать вывод от том, что за миг до полуночи муха A сидела на часовой стрелке, муха B – на минутной, а муха C – на секундной.

И.Богданов

M2047. *Из точки T, лежащей внутри треугольника ABC, стороны AB, BC, CA видны под углом 120° каждая. Докажите, что прямые, симметричные прямым AT, BT, CT относительно прямых BC, CA, AB соответственно, пересекаются в одной точке.*

Пусть T_a,T_b,T_c – точки, симметричные T относительно прямых BC, CA, AB соответственно; T' – центр описанной окружности треугольника $T_aT_bT_c$ (рис.1). Так как $CT_a=CT=CT_b$, то прямая CT' является серединным перпендикуляром к отрезку T_aT_b и биссектрисой угла T_aCT_b. Следовательно, прямые CT и CT' симметричны относительно биссектрисы угла ACB. Аналогично, прямые BT и BT', AT и AT' симметричны относительно соответствующих биссектрис треугольника ABC. (Доказанное означает, что точки T и T' *изогонально сопряжены* относительно треугольника ABC.)

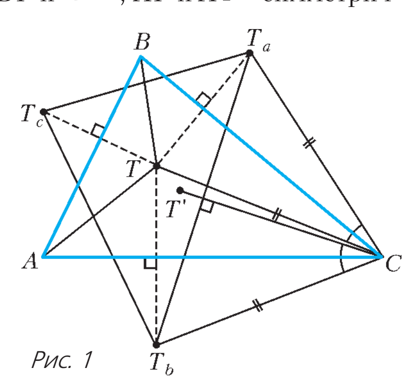


Рис. 1

Пусть теперь точки T'_a,T'_b,T'_c – точки, симметричные T' от-

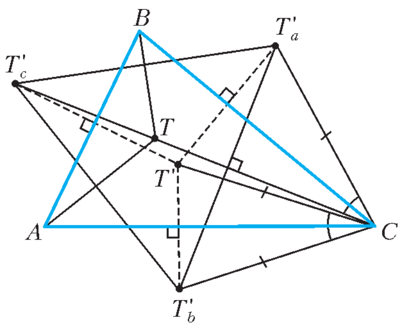


Рис. 2

носительно BC, CA, AB соответственно (рис.2). Рассуждая как и выше, получим, что T – центр описанной окружности треугольника ABC, а прямые AT, BT, CT являются серединными перпендикулярами к его сторонам. Поскольку углы между отрезками AT, BT, CT равны по 120°, углы треугольника $T'_aT'_bT'_c$ равны по 60°, т.е. треугольник $T'_aT'_bT'_c$ правильный. Отсюда следует, что точки T'_a, T'_b, T'_c лежат на прямых AT, BT, CT соответственно, значит, прямые, симметричные прямым AT, BT, CT относительно прямых BC, CA, AB соответственно, проходят через точку T'.

Комментарии

1. Точки T и T' называются, соответственно, *первой точкой Торричелли* и *первой точкой Аполлония* треугольника ABC. (О свойствах этих точек можно прочитать, например, в книге А.В.Акопяна и А.А.Заславского «Геометрические свойства кривых второго порядка» – М.: МЦНМО, 2007.)

2. Из решения вытекает, что если из точки T выпустить с равными скоростями три бильярдных шарика в направлениях, противоположных направлениям к соответствующим вершинами треугольника ABC, то, отразившись от сторон треугольника ABC, шарики одновременно придут в точку T', пройдя расстояние, равное радиусу описанной окружности треугольника $T'_aT'_bT'_c$.

А.Заславский

М2048. *Найдите такое наибольшее натуральное k, что найдется натуральное n > 1, для которого каждое из чисел $n, n^2, \ldots, n^k$ представимо в виде x^2+y^2+1, где x, y – целые числа.*

Ответ: $k = 5$.

Лемма. Всякое отличное от нуля число вида a^2+b^2 (a, b – целые) представимо в виде $4^t(8u+v)$, где $t \ge 0$, $u \ge 0$, v = 1, 2 либо 5.

Доказательство. Пусть $a = 2^r c$, $b = 2^s d$, где c и d нечетны, и для определенности $r \le s$. Тогда $a^2+b^2 = 4^r\left(c^2+\left(2^{s-r}d\right)^2\right)$. Получаем, что c^2 дает при делении на 8 остаток 1, а $\left(2^{s-r}d\right)^2$ – остаток 0, 1 или 4, откуда и следует утверждение леммы.

Для доказательства неравенства $k < 6$ достаточно установить, что при $n > 1$ система

$$\begin{cases} n^2-1 = x^2+y^2, \\ n^6-1 = z^2+t^2 \end{cases}$$

не имеет решений.

Предположим противное. Из первого равенства системы следует, что n нечетно (так как x^2+y^2 не может давать остаток 3 при делении на 4). Следовательно, в равенстве

$$\left(x^2+y^2\right)\left(n^4+n^2+1\right) = z^2+t^2$$

второй сомножитель левой части дает остаток 3 при делении на 8.

С помощью леммы получаем

$$(8u_1+v_1)(8l+3) = 8u_2+v_2,$$

где каждое из чисел v_1, v_2 принимает одно из значений 1, 2, 5. Ясно, что такое равенство невозможно.

Для завершения решения остается заметить, что

$$3 = 1^2+1^2+1,\ 3^2 = 2^2+2^2+1,\ 3^3 = 5^2+1^2+1,$$

$$3^4 = 8^2+4^2+1,\ 3^5 = 11^2+11^2+1.$$

Замечания

1. Результаты, приведенные в статье В.Сендерова и А.Спивака «Суммы квадратов и целые гауссовы числа» («Квант» № 3 за 1999 г.), позволяют из равенства $\left(x^2+y^2\right)A = z^2+t^2$, где $z^2+t^2 \ne 0$, вывести, что $A = x_1^2+y_1^2$. Но A дает остаток 3 при делении на 4 – противоречие.

2. Нетрудно доказать существование бесконечного количества таких чисел n, что каждое из чисел $n, \ldots, n^4$ представимо в виде x^2+y^2+1.

3. Что мы знаем о таких n, что представимы все числа $n, \ldots, n^5$? Нетрудно показать, что при $4 \le n \le 98$ таких чисел нет. (Для этого полезно заметить, что любое $n > 1$, для которого n, n^2, n^3 представимы, принадлежит одной из прогрессий $72s + 35$, $48s + 3$, где $s \ge 0$. Подумайте также, как можно почти без вычислений рассмотреть случай $n = 35$.) При $n = 99$ все числа n, n^2, n^3, n^4, n^5 представимы. Как явствует из статьи «Суммы квадратов и целые гауссовы числа», достаточно непосредственно убедиться, что $99^4+99^3+99^2+$ $+ 99 + 1 = 97039801$ и $99^2+99+1 = 9901$ – простые числа.

В.Сендеров

М2049. *От правильного октаэдра с ребром 1 отрезали 6 углов – пирамидок с квадратным основанием и ребром 1/3. Получился многогранник, грани которого – квадраты и правильные шестиугольники. Можно ли копиями такого многогранника замостить пространство?*

Ответ: можно.

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество точек $M = (k, l, m)$, где k, l, m – целые числа одной четности. Для каждой точки $M \in \mathcal{M}$ пусть $V(M)$ – множество точек X пространства, для которых M – ближайшая точка множества $\mathcal{M}$, т.е. $V(M)$ – пересечение полупространств $P(M, M')$, задаваемых неравенствами $XM \le XM'$ для всех точек $M' \in \mathcal{M}$, отличных от M. (Множества $V(M)$ называются *областями Вороного* для множества точек $\mathcal{M}$.) Для двух различных точек $M, M' \in \mathcal{M}$ множества $V(M)$ и $V(M')$ совмещаются сдвигом на вектор $\overrightarrow{MM'}$, так как множество $\mathcal{M}$ переходит в себя при сдвиге на этот вектор; ясно, что множества $V(M)$

($M \in \mathcal{M}$) покрывают все пространство, причем множества $V(M)$ и $V(M')$ ($M \neq M'$) могут пересекаться только по части плоскости – серединного перпендикуляра к отрезку MM'. Докажем, что $V(O)$ (O – начало координат) – усеченный октаэдр, подобный данному в условии. Отсюда будет вытекать, что пространство замощено многогранниками, равными $V(O)$.

Для шести точек $M = (\pm 2, 0, 0)$, $(0, \pm 2, 0)$, $(0, 0, \pm 2)$ полупространства $P(O, M)$ дают в пересечении куб K, задаваемый системой неравенств $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$, $-1 \le z \le 1$. Пусть какое-то из полупространств $P(O, M)$ ($M \in \mathcal{M}$) не содержит куб K целиком; тогда это полупространство не содержит одну из вершин этого куба $X = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. В таком случае $MX < OX = \sqrt{3}$; единственная точка M множества $\mathcal{M}$, удовлетворяющая этому неравенству, – точка X. Итак, $V(O)$ – это пересечение куба K и восьми полупространств $P(O, X)$, где X – вершины куба. Полупространства $P(O, X)$ задаются неравенствами $\pm x \pm y \pm z \le \frac{3}{2}$ и дают в пересечении правильный октаэдр T с вершинами $\left(\pm\frac{3}{2}, 0, 0\right)$, $\left(0, \pm\frac{3}{2}, 0\right)$, $\left(0, 0, \pm\frac{3}{2}\right)$. Легко видеть, что грани куба K делят ребра октаэдра T на три равные части, т.е. в пересечении $K \cap T$ образуется усеченный октаэдр, подобный многограннику из условия задачи.

А.Канель

М2050. *В однокруговом турнире по волейболу (без ничьих) участвовало 2^n команд, причем команда «Чемпион» заняла первое место. Назовем команду плохой, если она выиграла у «Чемпиона». Оргкомитет планирует провести турнир по олимпийской системе и предполагает, что все встречи закончатся так же, как в предыдущем турнире. Докажите, что можно так составить расписание, что «Чемпион» опять победит, причем все плохие команды проиграют (и прекратят участие) уже в первых двух турах.*

Пусть «Чемпион», в дальнейшем – Ч, одержал k побед в круговом турнире. Так как среднее число побед у команды равно $\frac{2^n - 1}{2}$, то $k \ge 2^{n-1}$.

Назовем k команд, у которых Ч выиграл, *хорошими*, а остальные команды – *плохими*. Рассмотрим произвольный набор из d плохих команд. В матчах друг с другом и с Ч они одержали суммарно $\frac{d(d-1)}{2} + d = \frac{d(d+1)}{2}$ побед. Так как каждая из них одержала не больше k побед, то в матчах с хорошими командами они одержали не более $kd - \frac{d(d+1)}{2}$ побед, т.е. хотя бы одна из них одержала не больше $k - \frac{d+1}{2}$ побед, и, значит, она потерпела не менее $\frac{d+1}{2}$ поражений.

Пусть $B_1, \ldots, B_{2^n-k-1}$ – все плохие команды, а b_i – количество хороших команд, которым B_i проиграла. Можно считать, что $b_1 \le \ldots \le b_{2^n-k-1}$. По доказанному выше, $b_d \ge \frac{d+1}{2}$, т.е. $b_1 \ge 1$, $b_2, b_3 \ge 2$, $b_4, b_5 \ge 3, \ldots$

Опишем распределение команд по парам в первом туре турнира на выбывание. Назовем G_1 хорошую команду, выигравшую у B_1 (такая есть, ибо $b_1 \ge 1$), G_2 – отличную от нее хорошую команду, выигравшую у B_3 (такая есть, ибо $b_3 \ge 2$), G_3 – отличную от них хорошую команду, выигравшую у B_5 (такая есть, ибо $b_5 \ge 3$), и т.д. В первом туре поставим в пары G_i с B_{2i-1}; тогда все B_{2i-1} выбывают в первом туре. Далее, если найдутся еще нераспределенные плохая команда B и хорошая G такие, что G выигрывает у B, то поставим их в пару. Будем проводить такое распределение до тех пор, пока таких пар не останется.

Теперь все нераспределенные плохие команды выигрывают у всех нераспределенных хороших; поставим в пару каждой плохой какую-нибудь хорошую. Далее, Ч поставим в пару еще нераспределенную хорошую команду (такая найдется, ибо $k \ge 2^{n-1}$), а остальные хорошие разобьем на пары. Расписание первого тура построено.

Заметим, что для каждой плохой команды B_{2i}, прошедшей во второй тур, все $b_{2i} \ge i + 1$ выигрывающих у нее хороших команд также прошли во второй тур. Пользуясь изложенным выше способом, поставим во втором туре в пару каждой оставшейся плохой команде хорошую, выигрывающую у нее. Тогда после второго тура плохих команд не останется.

И.Богданов

Ф2058. *В системе на рисунке 1 все грузы одинаковы. Вначале грузы удерживают, затем отпускают, и система приходит в движение без рывков. Найдите ускорения подвижных блоков.*

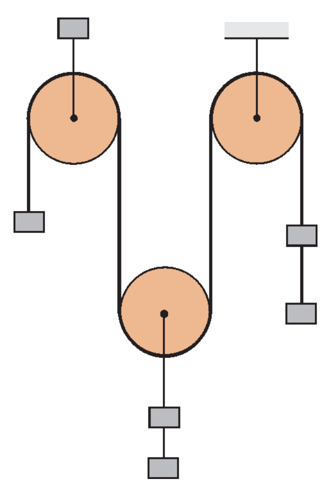


Рис. 1

Введем обозначения (рис.2): T – сила натяжения длинного куска нити; a – ускорение верхнего блока и привязанного к нему самого верхнего груза массой m; b – ускорение нижнего блока и привязанного к нему груза массой $2m$. (Пары грузов массами m заменены грузами массой $2m$.)

Нарисуем для удобства два узелка на длинной нити – A и $Б$ и займемся кинематикой. Впрочем, сначала чуть-чуть динамики. Ускорение самого левого груза равно b, оно равно ускорению нижнего груза – там силы вдвое больше ($2T$ и $2mg$), но и масса вдвое больше.

Если направить стрелки ускорений в одну сторону, то ускорение каждого блока равно полусумме ускорений участков нити по обе стороны от него. Тогда ускорение узелка A равно $(2a - b)$, а узелка $Б$ – $(3b - 2a)$.

Теперь запишем уравнения динамики для самого верх-

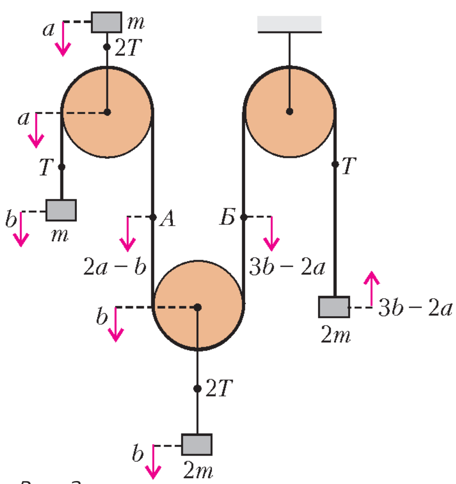


Рис. 2

него груза:

$$mg + 2T = ma,$$

для груза слева:

$$mg - T = mb,$$

для груза справа:

$$T - 2mg = 2m(3b - 2a).$$

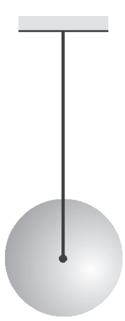
Решая систему, получим

$$a = \frac{23}{15}g,\ \ b = \frac{11}{15}g,\ \ T = \frac{4}{15}mg.$$

Значение T полезно посчитать – чтобы убедиться, что $T > 0$. В противном случае наше решение окажется неверным – оно основано на том, что нити в процессе движения натянуты.

А.Блоков

Ф2059. *Новые настенные часы с маятником идут очень точно. Маятник представляет собой очень легкий длинный стержень, подвешенный за один из концов, к другому концу стержня прикреплен массивный диск, радиус которого в 10 раз меньше длины стержня (см. рисунок). Диск может свободно вращаться вокруг своей оси. Со временем, из-за трения в оси диска, он перестал поворачиваться вокруг этой оси. Будут ли часы спешить или они теперь начнут отставать? Оцените неточность хода часов за сутки.*



Если диск может свободно вращаться вокруг своей оси, то он вращаться и не будет – его движение поступательное. Тогда он ведет себя как материальная точка массой M на расстоянии l (длина стержня) от точки подвеса. Обозначив начальную высоту подъема этой точки при запуске маятника h, а угловую скорость в нижней точке ω_1, запишем

$$Mgh = \frac{1}{2}Ml^2\omega_1^2.$$

Если диск закреплен, его угловая скорость ω_2 равна угловой скорости стержня, уравнение для энергии будет теперь таким:

$$Mgh = \frac{1}{2}Ml^2\omega_2^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\omega_2^2$$

(мы использовали выражение для полной энергии диска радиусом R – кинетическая энергия центра масс плюс энергия вращения).

Отсюда получим

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{1 + \frac{R^2}{2l^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{200}} \approx 1 + \frac{1}{400}.$$

За $24 \cdot 60$ мин $= 1440$ мин маятниковые часы отстанут на $\frac{1440 \text{ мин}}{400} = 3{,}6$ мин.

З.Рафаилов

Ф2060. *Моль гелия медленно расширяется от объема 10 л до объема 10,1 л, при этом давление газа плавно уменьшается от 1 атм до 0,985 атм. Найдите теплоемкость гелия в этом процессе.*

На малом участке кривой зависимости давления от объема (а в условии задачи участок совсем мал) можно считать среднее давление равным

$$p_{\text{ср}} = \frac{1}{2}\left(p_{\text{нач}} + p_{\text{кон}}\right) = \frac{1}{2}(1 + 0{,}985)\cdot 10^5 \text{ Па} = 99250 \text{ Па}.$$

Тогда работа газа на этом участке равна

$$A = p_{\text{ср}}\Delta V = 9{,}925 \text{ Дж}$$

(конечно же, точность нашей оценки не соответствует числу выписанных цифр, но мы не забудем округлить в конце решения...).

Посчитаем приращение внутренней энергии на данном участке:

$$\Delta U = U_{\text{кон}} - U_{\text{нач}} = \frac{3}{2}RT_{\text{кон}} - \frac{3}{2}RT_{\text{нач}} =$$

$$= \frac{3}{2}\left(p_{\text{кон}}V_{\text{кон}} - p_{\text{нач}}V_{\text{нач}}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\left(0{,}985\cdot 10^5 \cdot 10{,}1\cdot 10^{-3} - 1\cdot 10^5 \cdot 10\cdot 10^{-3}\right) \text{ Дж} =$$

$$= -7{,}725 \text{ Дж}.$$

Итак, энергия нашего газа *уменьшилась* на 7,725 Дж. Полученное газом количество теплоты равно

$$Q = A + \Delta U = 9{,}925 \text{ Дж} - 7{,}725 \text{ Дж} = 2{,}2 \text{ Дж}.$$

Теплоемкость моля гелия при этом равна

$$C = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{Q}{\Delta U/(1{,}5R)} = -3{,}55 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}.$$

Теплоемкость получилась отрицательной – бывает...

А.Простов

Ф2061. *Тонкостенную непроводящую сферу радиусом R зарядили равномерно по поверхности полным зарядом Q, а затем разрезали пополам – по «экватору». Одну половину сферы убрали, а вторую оставили – для изучения. Найдите потенциал электрического поля, создаваемого зарядами полусферы в точке «экваториальной» плоскости, находящейся на расстоянии $R/2$ от центра сферы.*

Дополним нашу полусферу другой такой же – до полной сферы, равномерно заряженной по поверхности. Теперь поле в любой точке внутри получается нулевым. Рассмотрим произвольную точку «экваториальной» плоскости – поле в ней нулевое из-за компенсации полей полусфер.

В общем случае поле заряженной полусферы в упомянутой точке может состоять из двух составляющих – одна из них перпендикулярна экваториальной плоскости, другая лежит в этой плоскости и направлена радиально. Но если для перпендикулярной составляющей компенсация очевидна, то для радиальной она невозможна – в силу очевидной симметрии, поля полусфер должны «складываться». Отсюда вывод – в любой точке «экваториальной» плоскости получается один и тот же потенциал, так как вектор напряженности электрического поля во всех этих точках перпендикулярен «экваториальной» плоскости. Значит, можно посчитать потенциал *в любой* точке этой плоскости. Разумеется, мы выберем центр сферы:

$$\varphi = k\frac{Q/2}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2R}.$$

Б.Сложнов

Ф2062. *На тороидальный ферромагнитный сердечник, сделанный из материала с большой магнитной проницаемостью, намотана катушка, содержащая большое число витков. Катушку подключили к сети 220 В, ток через катушку при этом составил 10 мА (действующее значение). Вольтметр, имеющий сопротивление 10 кОм, подключают между одним из концов катушки и отводом, сделанным от середины катушки (половина витков). Какое напряжение покажет вольтметр? Какой ток теперь течет через источник?*

До подключения вольтметра по катушке протекал ток $I_1 = 10$ мА, создававший соответствующий магнитный поток, при этом действующее значение ЭДС индукции составляло $U_1 = 220$ В. Этот ток был сдвинут по фазе на 90° относительно напряжения сети (катушка!). После подключения вольтметра (резистор сопротивлением $R = 10$ кОм) полный магнитный поток через катушку измениться не должен. ЭДС индукции «половинок» катушки совершенно одинаковы и в сумме дают $U = 220$ В, следовательно, напряжение, приложенное к вольтметру, равно

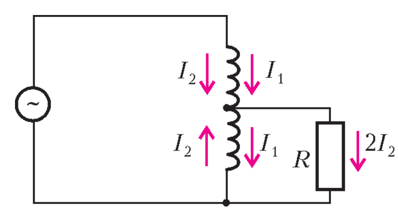
$$U_R = \frac{U}{2} = 110 \text{ В},$$

и через него течет ток

$$I_R = \frac{U_R}{R} = \frac{110 \text{ В}}{10 \text{ кОм}} = 11 \text{ мА}.$$

Этот ток совпадает по фазе с напряжением сети (резистор!). Строго говоря, вольтметр это не резистор, но когда он перестает «размахивать стрелкой» после подключения к цепи и прекращает работать электрогенератором (стрелка прибора связана с катушкой, которая движется в магнитном поле), его можно считать резистором.

Если магнитный поток через катушку не изменился, то к токам I_1 добавились одинаковые по величине и противоположно направленные токи I_2 (см. рисунок). Но при этом ток через резистор равен $I_R = 2I_2$, откуда $I_2 = 5{,}5$ мА. Этот ток совпадает по фазе с напряжением U, поэтому через источник теперь течет ток



$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2} \approx 11{,}4 \text{ мА}.$$

А.Зильберман

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

Не деньги

(Начало см. на с. 16)

нем назван эффект несоответствия между наблюдаемой и предсказанной фазами Венеры.

Профессор математики в прусской провинции *Адольф Андерсен* (1818–1879) прославился не своими научными достижениями, а игрой в шахматы. Во второй половине XIX века многие считали его неофициальным чемпионом мира. Хотя он проиграл исторические матчи Морфи (1858 г.) и Стейницу (1866 г.), Андерсен выиграл три крупнейших международных турнира своего времени в Лондоне (1851, 1862 г.) и Баден-Бадене (1870 г.). Арпад Эло, создатель современной системы рейтинга шахматистов, рассчитал показатели ведущих игроков в шахматы прошлого и показал, что Андерсен был первым шахматистом в мире с рейтингом более 2600. Математический подход Андерсена к игре в шахматы заключался в том, что он систематически и последовательно усиливал свои позиции в нападении, не забывая о защите. Интересно отметить, что на одном из нотгельдов, посвященных Андерсену, изображен Омар Хайям, по-видимому, также ценивший шахматы.

Для меня, как для автора многих статей о физиках и математиках на монетах и банкнотах мира, нотгельды стали в какой-то мере непознанным континентом. Мой интерес к этим денежным знакам привлек Томас Яре, учитель математики из немецкого города Кемниц, на интернет-сайте которого (www.schulmodell.de) я впервые увидел некоторые из упомянутых здесь нотгельдов.

Задачи

1. Известно, что ($a - b + 2007$), ($b - c + 2007$), ($c - a + 2007$) – последовательные целые числа. Какие?

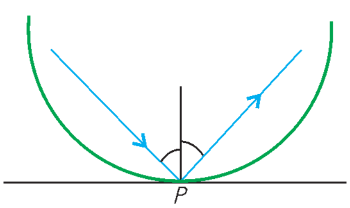
Д.Калинин

2. Сумма двух натуральных чисел равна 2007. Какое наибольшее значение может иметь остаток от деления большего числа на меньшее?

Тот же вопрос, если сумма равна 2008.

И.Акулич

3. Бильярдный шарик, двигаясь без трения на круглом бильярдном столе без луз, отражается от точки P борта и через 5 секунд отражается второй раз в той же самой точке P (возможно, в другом направлении, чем в первый раз). Отражение шарика от борта происходит по закону: «угол падения равен углу отражения», который иллюстрирует рисунок



Докажите, что движение шарика периодично с периодом 5 секунд.

Г.Гальперин

4. Белые шахматные фигуры (полный комплект: 8 пешек, две ладьи и т.д.) перессорились и решили друг друга побить. Может ли шахматист расставить их (только их) на шахматной доске так, чтобы никакая фигура никакую не била?

А.Хачатурян

5. Математик C предложил математикам A и B такую загадку.

– Я задумал три попарно различных натуральных числа, произведение которых не превосходит 50. Сейчас я по секрету сообщу A это произведение, а B – сумму задуманных чисел. Попробуйте отгадать эти числа.

Узнав произведение и сумму, соответственно, A и B вступили в диалог.

A: Я не знаю этих чисел.
B: Если бы мое число было произведением, я бы знал загаданные числа.
A: Но я все равно не знаю этих чисел.
B: Да и я не знаю.
A: А я уже знаю их.
B: Да и я знаю.
Что это за числа?

В.Лецко

Иллюстрация Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

11. Числа x, y, z, a, b, c таковы, что

$$a = x + y - z,$$

$$b = -x + y + z,$$

$$c = x - y + z$$

и

$$\frac{(a+b+c)^5 - a^5 - b^5 - c^5}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{(x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Докажите, что $x = y = z = a = b = c$.

В.Сендеров

12. Имеется пять уравнений:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = 0,$$

$$a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + a_0x^4 = 0,$$

$$a_2 + a_3x + a_4x^2 + a_0x^3 + a_1x^4 = 0,$$

$$a_3 + a_4x + a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 = 0,$$

$$a_4 + a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 = 0,$$

где a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 – заданные ненулевые числа.

Оказалось, что какие-то три их этих уравнений имеют общий корень. Докажите, что все уравнения имеют общий корень.

В.Каскевич

13. Середина отрезка, соединяющего середины двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника, лежит на диагонали четырехугольника. Докажите, что эта диагональ проходит через середину другой диагонали.

В.Произволов

14. Пифагорейцы считали совершенными прямоугольники размером 3×6 и 4×4, потому что длины сторон каждого такого прямоугольника выражаются целыми числами, а площадь прямоугольника численно равна его периметру. Существуют ли совершенные (т.е. обладающие такими же свойствами):

а) прямоугольные треугольники;

б) равнобедренные треугольники?

Найдите все такие треугольники, если они существуют.

И. Акулич

15. Профессор Мумбум-Плюмбум написал программу, которая умеет вычислять придуманную им функцию $mumb(x)$. Профессор утверждает, что если на экране калькулятора ввести произвольное число x и нажать клавишу «Ввод», то на его месте всегда появляется значение функции $mumb(x)$, причем, если повторно нажать клавишу «Ввод», то в результате этих двух нажатий появится значение выражения $3|x| - 4$.

Не ошибается ли профессор?

Что покажет калькулятор, если ввести число $x = 0{,}8$ и один раз нажать клавишу «Ввод»?

Д. Левин, П.Самовол

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

Красивые опечатки

Теорема Ви**С**та

Как дровосек **ТОРОМ** деревья срубает

Зная от**Л**о**Ж**ение молярных масс...

Искомое расстояние есть абсолютная величина (мод**Е**ль) вектора

Знание законов из**У**чения абсолютно черного тела...

К концу пружины жест**О**костью *k* ...

Перемещение и путь были род**НИ**ковыми...

Источник тепла локализован в дн**И** с**У**да

Очень ст**Е**нная картина...

То**С**ка Кюри

Введем понятие максимальной р**ЕВ**ности

БЕСнования равнобедренного треугольника

Звание международного м**И**стера

Ко**Н**и уравнения

Квадрат средней цифры ра**Н**ен

Масса прили**ЧНЫ**х молекул

Что не из**Л**учается в школьном курсе физики

Электрические колебания в нестандартных кон**У**рах

СКАЗКА О РЫБАКЕ И ЕГО СЛЮДЯНОЙ ЧУДО-ЛЕСТНИЦЕ

С.ДВОРЯНИНОВ, А.ЖУКОВ

Сижу, старик, у тихих вод
И тихо так пою,
И солнце каждый день клюет
На удочку мою.

В. Ходасевич. Рыбак

«Жили-были Старик со Старухой у самого синего моря, Старик ловил неводом рыбу, Старуха…»

Да, пряла, как все знают, свою пряжу. Но не только. Дело-то было на берегу Байкала-моря, рыбы-омуля там много, так что Старуха рыбу и сушила, и вялила, и солила. А потом проезжим купцам продавала. Тем они и жили.

Избушка их была аккурат в том месте, где сейчас город Слюдянка стоит. Богатые залежи удивительной слюды в тех горах имелись. Особенно прославился край во времена императрицы Анны Иоанновны. Задумала императрица весь мир удивить и построить для своих балов и званных вечеров необычный дворец. Дворец-то ледяным был – был там лед, зимой на Неве нарубленный. Но только кроме льда много для его постройки привезли и слюды с берега Байкала. И летом на телегах, и зимой санным путем по царскому указу тянулись в Петербург обозы со слюдой. Применяли при строительстве слюдяные плиты тайно от иностранцев. Ледяной дом и ледяной – так всем говорили. Только этот дом и летом стоял, не таял. Уже тогда по Европе пошла молва о русском льде, которому и жаркое солнце нипочем! Уж больно прозрачной да чистой была та слюда, ото льда не отличишь. Настоящее восьмое чудо света было сотворено.

После смерти императрицы дворец пришел в запустение, потом его разобрали, слюдяные плиты и кирпичи распилили на части, купцы их распродали, и много тогда появилось на Руси слюдяных окошек.

Но вернемся к Старику и его Старухе. С годами все труднее становилось Старику уходить на своей лодке от берегов. Не хватало уже былой силы тянуть полный рыбы невод из байкальских глубин. И главное – все труднее становилось ему переносить холод, идущий от студеной байкальской воды. Делать нечего, пришлось Старику устроиться с удочкой не берегу. Хорошо ему сидеть на нагретом солнцем гранитном бережку!

Только Старуха браниться начала: меньше стал Старик домой рыбы приносить. Понятно, конечно, почему. Рыба ищет где глубже… А Старуха не унимается: подавай ей, Старик, рыбы столько же, сколько раньше лавливал!

Поохал Старик, повздыхал, да делать нечего. Надо Старухину волю исполнять. Теперь уже и по воскресеньям приходилось Старику отправляться на берег. А старая все бранится да бранится. Все ей мало рыбы.

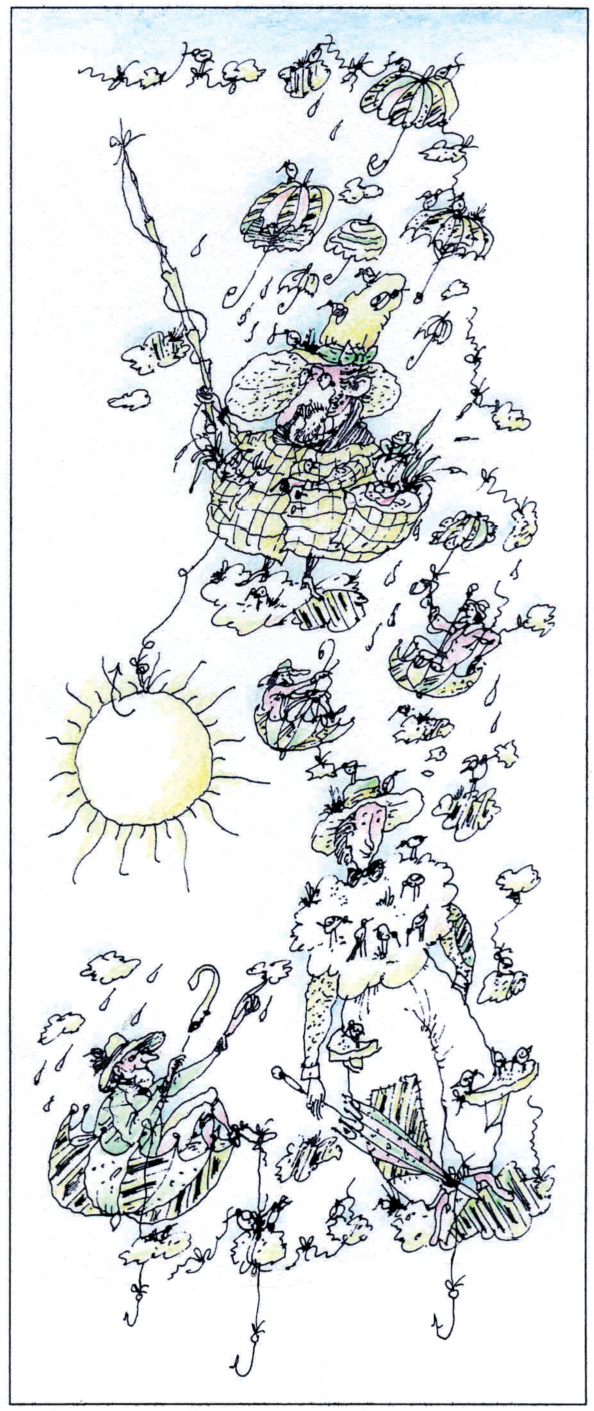


Иллюстрация В.Иванюка

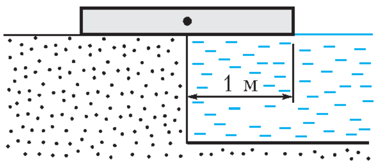


Рис. 1

Думал Старик, думал и придумал. На другой день взял он слюдяную плиту, которых много со времен строительства царского ледяного дворца осталось, и пристроил одну ее половинку на берегу, а другую в море направил (рис.1).

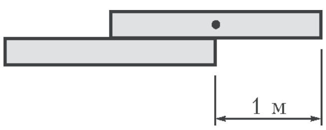


Рис. 2

Чтобы удобно было считать, полагаем все плиты одинаковыми, имеющими длину 2 м. Значит, край плиты удалился от берега на 1 м. Неплохо!

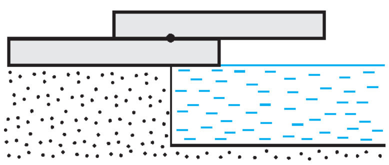


Рис. 3

– А что, если я на берегу положу вторую плиту поверх первой так, чтобы центр тяжести верхней плиты совпал с краем нижней плиты (рис.2), а затем стопку из двух плит сдвину, добиваясь, чтобы центр тяжести всей конструкции оказался у кромки берега (рис.3)? – подумал Старик. – Тогда выступ верхней плиты будет еще дальше от берега! Так-так... Но ведь можно подложить под низ таким же образом и третью плиту, и четвертую... Как далеко от берега выдвинется край всего этого сооружения, если плит взять достаточно много?

Ну-ка, подсчитаем. Если на очередную n-ю плиту ($n = 2, 3, \ldots$) водружается сверху стопка из $n - 1$ плит так, что центр тяжести стопки приходится на край нижней плиты, то центр тяжести вновь образованной стопки из n плит будет находиться на удалении $\frac{1}{n}$ от края нижней плиты. Действительно, если это расстояние обозначить через x, то справедлива пропорция $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{n-1}$, откуда $x = \frac{1}{n}$. Значит, стопку из n плит можно сдвинуть на $\frac{1}{n}$ метров к краю берега. После очередного сдвига постепенно нарастающей стопки из 1, 2, 3, ..., n плит крайняя точка верхней плиты удалится от берега на расстояние

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Много это или мало? Вроде бы – немного, ведь с увеличением n к сумме прибавляются все меньшие и меньшие дроби. Но это не так.

В самом деле,

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots >$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$$

– в последнем выражении может быть сколь угодно много половинок, значит, величина S_n с увеличением n может стать сколь угодно большой .

А что это означает для слюдяной конструкции на берегу Байкала? А то, что, подкладывая все больше и больше плит, можно удаляться от берега все дальше и дальше. (Разумеется, не надо забывать, что равновесие плит неустойчивое; да и вообще, такая картина имела бы место только в том случае, если бы Земля была плоской.)

– Стоп!... Эхэ-хэ-хэ, что же я про себя-то забыл? – очнулся Старик. – А ведь мне, горемычному, предстоит испытать это несусветное нагромождение плит в деле, примостившись на самом-самом верху да на самом-самом краю чудной конструкции. Окажется ли она сколь угодно длинной, если кроме силы тяжести самой лестницы в крайней ее точке будет приложена некоторая дополнительная сила F, включающая мой вес и вес всей выловленной мною рыбы?

Упражнение 1*. Постарайтесь ответить на этот вопрос.

На минутку оставим Старика и рассмотрим модель лестницы без учета силы F. Для больших значений n величину S_n удобно рассчитывать по приближенной формуле

$$S_n \approx \ln n + C,$$

которая становится тем точнее, чем большим становится n (точность этой формулы при больших значениях n не превышает $\frac{1}{n}$). Здесь функция $\ln n$ – так называемый натуральный логарифм от числа n, ее при умеренных значения аргумента умеют вычислять все приличные компьютеры и калькуляторы; C = 0,5772156649.... – постоянное число, получившее название *константы Эйлера*.

Упражнение 2

а) Предположим, толщина слюдяной плиты равна 1 мм, и лестница, сконструированная без учета веса Старика, поднялась до высоты величайшей вершины мира – горы Эверест (8848 м). Как далеко выдвинется при этом край лестницы?

б) Тот же вопрос, если высота лестницы достигла границ видимой части Вселенной ($5 \cdot 10^{26}$ м).

Отправляясь теперь на рыбную ловлю, Старик должен был каждый раз взбираться по своей лестнице вверх. На первых порах особенно удивлялись этому птицы. Да и с земли всякому новому человеку чудно было видеть Старика, словно парящего в воздухе, да еще с удочкой в руках. Слюдяная лестница была почти невидима.

...Все в этом мире когда-нибудь кончается. Давно нет на берегу хижины, в которой жили Старик и его Старуха. Где сейчас эта невидимая лестница – точно не сказать. Бывает, что задуют в тех краях южные ветры и принесут они песок и пыль с монгольских степей. Осядет тот желтый песок на лестнице, и станет она зримой – золотом засияет в лучах солнца над Байкалом-морем. Но вот уже дожди смыли тот песок, свежий ветер-баргузин сдул его, и снова лестница невидима. А еще бывает, лучи солнца так озарят лестницу, так преломятся на гранях слюдяных плит, что лестница засветится подобно радуге...

Экспериментальные задачи по физике

М.ЖУЖА, Е.ЖУЖА, Н.ЧЕРНАЯ

Как известно, некоторые простые опыты можно выполнять и в домашних условиях. Ниже приводятся несколько таких экспериментальных задач (с возможными решениями), которые были составлены для учащихся Центра дополнительного образования детей города Краснодара.

Задача 1. Карандаш

Оцените механическую работу, которую необходимо совершить для того, чтобы равномерно поднять плавающий в сосуде карандаш до уровня касания нижним его торцом поверхности воды. Считайте положение карандаша вертикальным. Плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3.

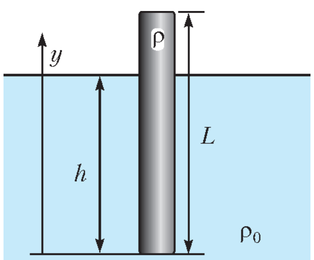


Рис. 1

Оборудование: круглый карандаш, почти полная бутылка с водой, линейка.

Решение. Опускаем карандаш в бутылку – он будет плавать, как поплавок (рис.1). Пусть L – длина всего карандаша, V – его объем, h – длина погруженной в воду части карандаша, V_1 – ее объем, S – площадь сечения и d – диаметр карандаша. Найдем среднюю плотность карандаша ρ из условия плавания тела:

$$\rho_0 gSh = \rho gSL, \text{ откуда } \rho = \rho_0 \frac{h}{L}.$$

Предположим, что мы с постоянной скоростью вытаскиваем карандаш из воды, используя динамометр. Когда карандаш свободно плавает, динамометр показывает ноль. Если же карандаш полностью вытащить из воды, то динамометр покажет силу, равную весу P карандаша:

$$F = P = mg = \rho gV = \rho_0 \frac{h}{L} gSL = \rho_0 hg\frac{\pi d^2}{4}.$$

Получается, что показания динамометра при вытаскивании карандаша из воды изменяются от 0 до P по линейному закону (рис.2). При этом механическая работа A будет равна площади выделенного треугольника:

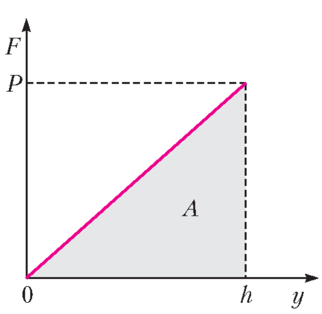


Рис. 2

$$A = \frac{1}{2}Ph = \frac{\rho_0 h^2 g\pi d^2}{8}.$$

Например, при $h = 13{,}4$ см и $d = 7{,}5$ мм работа составляет около 0,004 Дж.

Задача 2. Сплав

Определите процентное содержание (по массе) олова в оловянно-свинцовом припое. Предположите, что объемы свинца и олова в сплаве сохраняются. Плотность свинца $\rho_с = 11350$ кг/м^3, олова $\rho_о = 7300$ кг/м^3.

Оборудование: линейка, груз (гайка), цилиндрический кусок припоя, штангенциркуль или микрометр.

Решение. Эта задача аналогична задаче Архимеда по определению доли золота в царской короне. Однако для опытов оловянно-свинцовый припой достать проще, чем корону.

Измерив диаметр куска припоя D и его длину L, найдем объем цилиндрического куска припоя:

$$V = \frac{\pi D^2 L}{4}.$$

Массу припоя определим, изготовив рычажные весы. Для этого уравновесим линейку на краю стола (на карандаше, на стержне от шариковой ручки и т.п.). Затем, используя гайку известной массы, уравновесим кусок припоя на линейке и с помощью равенства моментов сил найдем массу припоя m. Запишем очевидные равенства для масс, объемов и плотностей свинца и олова:

$$m = m_с + m_о = \rho_с V_с + \rho_о V_о, \quad V = V_с + V_о.$$

Решая эти уравнения совместно, найдем объем олова, его массу и долю в общей массе:

$$V_о = \frac{\rho_с V - m}{\rho_с - \rho_о}, \quad m_о = \rho_о V_о, \quad \frac{m_о}{m} = \frac{\rho_о V_о}{m}.$$

Задача 3. Поверхностное натяжение

Определите коэффициент поверхностного натяжения воды.

Оборудование: тарелка, вода, ложка, линейка, кусок ровной алюминиевой проволоки длиной 15–20 см и плотностью 2700 кг/м^3, микрометр, спирт, вата.

Решение. Нальем почти полную тарелку воды. Положим на край тарелки проволоку так, чтобы один конец ее касался воды, а другой был за пределами тарелки. Проволока выполняет две функции: она является рычажными весами и аналогом проволочной рамки, которую обычно вытаскивают из воды для измерения поверхностного натяжения. В зависимости от уровня воды могут наблюдаться различные положения проволоки. Наиболее удобно для расчетов и измерений горизонтальное расположение проволоки при уровне воды на 1–1,5 мм ниже края тарелки (рис.3). С помощью ложки можно регулировать уровень, доливая или отливая воду. Проволоку следует выдвигать из тарелки до тех пор, пока пленка воды под проволокой не начнет разрываться. В этом крайнем положении пленка имеет высоту 1,5–2 мм, и можно сказать, что силы поверхностного натяжения, приложенные к проволоке, направлены практически вертикально вниз.

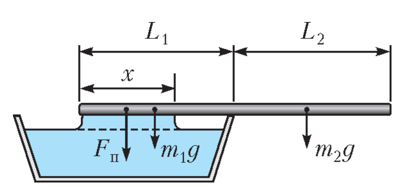


Рис. 3

Пусть m – масса проволоки, $L = L_1 + L_2$ – длина проволоки, m/L – масса единицы длины проволоки. Запишем условие равновесия проволоки относительно края тарелки, т.е. равенство моментов сил:

$$F_п\left(L_1 - \frac{x}{2}\right) + m_1 g\frac{L_1}{2} = m_2 g\frac{L_2}{2}.$$

Подставим сюда силу поверхностного натяжения $F_п = 2x\sigma$, массы: $m_1 = \frac{L_1 m}{L}$, $m_2 = \frac{L_2 m}{L}$, $m = \rho V = \frac{\rho\pi d^2 L}{4}$ и выразим коэффициент поверхностного натяжения σ. Измерения и вычисления упростятся, если вода будет смачивать всю длину L_1. Окончательно получим

$$\sigma = \frac{\rho\pi d^2 g}{8}\left(\left(\frac{L}{L_1}-1\right)^2-1\right).$$

Величины L и L_1 измеряются линейкой, а диаметр проволоки d – микрометром.

Например, при L = 15 см, $L_1 = 5{,}4$ см, d = 1,77 мм получаем $\sigma = 0{,}0703$ Н/м, что близко к табличному значению 0,0728 Н/м.

Задача 4. Влажность воздуха

Определите относительную влажность воздуха в комнате.

Оборудование: стеклянный комнатный термометр, бытовой холодильник, таблица давлений насыщенных паров воды при различных температурах.

Решение. При обычном методе измерения влажности объект охлаждают ниже точки росы и он «запотевает». Сделаем наоборот. Температура в холодильнике (около +5 °С) намного ниже точки росы для комнатного воздуха. Поэтому, если вытащить охлажденный стеклянный термометр из холодильника, то он сразу «запотеет» – стеклянный корпус станет непрозрачным от влаги. Затем термометр начнет нагреваться, и в какой-то момент сконденсировавшаяся влага на нем испарится – стекло станет прозрачны. Это и есть температура точки росы, по которой с помощью таблицы можно рассчитать относительную влажность.

Задача 5. Испарение

Налейте почти полный стакан воды и поставьте его в комнате в теплое место – для того чтобы вода быстрее испарялась. Измерьте линейкой начальный уровень воды и запишите время начала опыта. Через несколько дней уровень воды понизится за счет испарения. Измерьте новый уровень воды и запишите время окончания опыта. Определите массу испарившейся воды. Сколько в среднем молекул вылетало с поверхности воды за 1 секунду? Сколько приблизительно молекул находится на поверхности воды в стакане? Сравните эти два числа. Диаметр молекулы воды примите равным $d_0 = 0{,}3$ нм. Зная удельную теплоту парообразования, определите скорость передачи тепла (Дж/с) воде от окружающей среды.

Решение. Пусть d – внутренний диаметр стакана, ρ – плотность воды, M – молярная масса воды, r – удельная теплота парообразования, Δh – понижение уровня воды за время t. Тогда масса испарившейся воды равна

$$m = \rho V = \rho\Delta h S = \frac{\rho\Delta h\pi d^2}{4}.$$

В этой массе содержится $N = mN_{\text{A}}/\text{M}$ молекул, где N_{A} – постоянная Авогадро. Число испарившихся за 1 секунду молекул равно

$$N_1 = \frac{N}{t} = \frac{mN_{\text{A}}}{\text{M}t}.$$

Если $S = \pi d^2/4$ – площадь поверхности воды в стакане, а $S_0 = \pi d_0^2/4$ – площадь сечения одной молекулы, то на поверхности воды в стакане находится приблизительно

$$N_2 = \frac{S}{S_0} = \left(\frac{d}{d_0}\right)^2 \text{ молекул.}$$

Вода для испарения получает в единицу времени количество теплоты

$$\frac{Q}{t} = \frac{rm}{t}.$$

Если производить какие-либо расчеты, связанные с молекулами, то всегда получаются интересные результаты. Например, пусть за время t = 5 суток в стакане диаметром d = = 65 мм уровень воды понизился на $\Delta h = 1$ см. Тогда получим, что в пар превратилось 33 г воды, за 1 с испарилось $N_1 = 2{,}56\cdot 10^{18}$ молекул, на поверхности воды в стакане находилось $N_2 = 4{,}69\cdot 10^{16}$ молекул, а из окружающей среды поступило 0,19 Вт тепла. Интересным является отношение $N_1/N_2 \approx 54$, из которого видно, что за 1 с испарялось столько молекул, сколько помещалось в стакане в 54 слоях воды.

Задача 6. Растворение

Высыпая соль или сахар в кипящую воду, можно заметить, что кипение ненадолго прекращается за счет снижения температуры воды. Определите количество теплоты, необходимое для растворения 1 кг пищевой соды в воде комнатной температуры.

Оборудование: самодельный калориметр, термометр, вода, сода, мерный цилиндр (стакан), груз известной массы (гайка массой 10 г), пластиковая ложка.

Решение. В задачу входит дополнительное конструкторское задание по изготовлению простого самодельного калориметра. Для внутреннего сосуда калориметра следует взять обычную алюминиевую банку объемом 0,33 л. У банки удаляется верхняя крышка так, чтобы получился алюминиевый стакан (массой всего 12 г) с жестким верхним ободком. Внутри верхнего ободка делается прорезь для того, чтобы вода полностью выливалась из банки. Внешняя пластмассовая оболочка изготавливается на основе пластиковой бутылки объемом 1,5 л. Бутылка разрезается на три части, верхняя часть удаляется, а средняя и нижняя части с некоторым усилием вставляются друг в друга и плотно фиксируют внутреннюю алюминиевую банку в вертикальном положении. (Если нет калориметра, то опыты можно проводить и в одноразовом пластиковом стаканчике, массой и теплопередачей которого можно пренебречь.)

Предварительно следует сделать два измерения: 1) определить, сколько соды помещается в ложку (для этого надо заглянуть в кулинарный справочник или «вычерпать» этой ложкой пакет соды известной массы); 2) определиться с количеством воды – в малом количестве воды раствор сразу же станет насыщенным и часть соды не растворится, в большом количестве воды температура изменится на доли градуса, что затруднит измерения.

Очевидно, что количество теплоты, необходимое для растворения вещества, пропорционально массе этого вещества: $Q \sim m$. Для записи равенства следует ввести коэффициент пропорциональности, например z, который можно назвать «удельной теплотой растворения». Тогда

$$Q = zm.$$

Растворение соды осуществляется за счет энергии, выделяющейся при охлаждении сосуда с водой. Величина z находится из следующего уравнения теплового баланса:

$$m_{\text{в}}c_{\text{в}}(t_2 - t_1) + m_{\text{а}}c_{\text{а}}(t_2 - t_1) = zm,$$

где $m_{\text{в}}$ – масса воды в калориметре, $m_{\text{а}}$ – масса внутреннего алюминиевого стакана калориметра, m – масса растворенной соды, $(t_2 - t_1)$ – понижение температуры в калориметре. Массу внутреннего сосуда калориметра можно легко найти, используя правило моментов сил, уравновесив сосуд и груз известной массы при помощи линейки и ниток.

Измерения и расчеты показывают, что при m = 6 г и $m_{\text{в}} = 100$ г вода остывает на $2-2{,}5$ °С, а величина z оказывается равной 144–180 кДж/кг.

Электрические колебания в нестандартных контурах

В.МУРАВЬЕВ

В школе обычно рассматриваются колебания идеального контура (рис.1). При этом не учитывается активное сопротивление катушки индуктивности и считается, что конденсатор представляет собой две пластины, разделенные диэлектриком, не проводящим электрический ток.

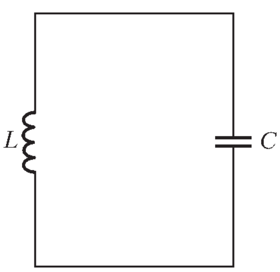


Рис. 1

Уравнение собственных колебаний такого контура имеет вид

$$q'' + \frac{1}{LC}q = 0,$$

где q – заряд конденсатора, L и C – индуктивность катушки и емкость конденсатора соответственно. Решением этого уравнения является функция

$$q = q_m \cos(\omega t + \varphi),$$

где $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – циклическая частота, φ – начальная фаза, q_m – амплитуда колебаний заряда на конденсаторе.

Однако иногда роль конденсатора и катушки играют другие системы проводящих тел, а у реальных конденсаторов среда между обкладками обладает конечным сопротивлением. К рассмотрению колебаний в контурах с такими катушками и конденсаторами мы и переходим.

Задача 1. *Колебательный контур содержит конденсатор с «утечкой». Это значит, что небольшая часть заряда, поступающего на одну из обкладок конденсатора, проходит через диэлектрик на другую обкладку. Емкость конденсатора C, сопротивление среды между пластинами конденсатора R, индуктивность катушки L. Пренебрегая сопротивлением катушки и соединительных проводов, выведите уравнение свободных колебаний контура. Найдите период этих колебаний.*

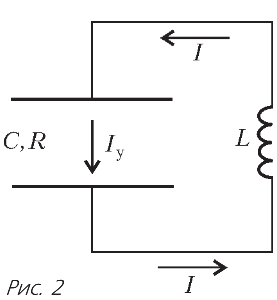


Рис. 2

На рисунке 2 изображен рассматриваемый в задаче нестандартный контур, где I – ток, текущий через катушку, $I_у$ – ток утечки конденсатора. Приравнивая напряжение на конденсаторе к ЭДС самоиндукции катушки, получаем

$$U = -L\frac{dI}{dt} = -LI'.$$

Заряд конденсатора связан с напряжением на нем известным соотношением

$$Q = CU.$$

Согласно закону сохранения заряда,

$$Q' = I - I_у.$$

По закону Ома,

$$U = I_у R.$$

Из полученных соотношений находим уравнение свободных колебаний:

$$Q'' + \frac{1}{RC}Q' + \frac{1}{LC}Q = 0.$$

Из этого уравнения видно, что при больших R получается рассмотренное выше уравнение гармонических колебаний идеального контура с частотой $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. В остальных случаях наше уравнение описывает затухающие колебания. Решением этого уравнения является функция

$$Q = Q_m e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi),$$

где

$$\delta = \frac{1}{2RC}, \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2.$$

В этом можно убедиться методом подстановки.

Итак, в рассматриваемом контуре происходят свободные колебания с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}},$$

несколько большем, чем период собственных колебаний в идеальном контуре. Такие затухающие колебания имеют место при условии, что $\omega_0^2 > \delta^2$, т.е. $R > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$. А вот при $R \gg \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$ проводимостью конденсатора можно пренебречь и считать колебательный контур идеальным.

Задача 2. *Проводящий шар радиусом r через катушку индуктивностью L соединен с землей (рис.3). Из бесконечности на него налетает пучок электронов. Определите максимальный заряд шара и нарисуйте график зависимости силы тока, текущего через катушку, от времени. Изначально шар заряжен не был, концентрация электронов в налетающем пучке n, а их скорость $v \ll c$, где c – скорость света.*

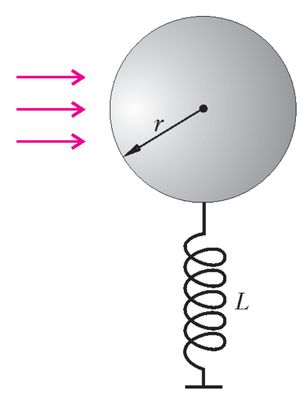


Рис. 3

Пусть Q – заряд шара в некоторый момент времени, I – ток, стекающий с шара. Тогда можно записать уравнение

$$L\frac{dI}{dt} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Приращение заряда шара равно $dQ = dQ_п + dQ_L$, где $dQ_п = ne\pi r^2 v dt$ – приращение за счет налетающего электронного пучка, $dQ_L = -Idt$ – заряд, стекающий через катушку. Таким образом,

$$dQ = ne\pi r^2 v dt - Idt.$$

Дифференцируя это выражение по времени, с учетом первого уравнения получим

$$Q'' = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 rL} Q .$$

Это уравнение описывает гармонические колебания с частотой $\omega = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 rL}}$. В начальный момент (при $t = 0$) $Q = 0$ и $\frac{dQ}{dt} = ne\pi r^2 v$, откуда

$$Q = Q_{\max} \sin \omega t ,$$

где максимальный заряд шара есть

$$Q_{\max} = ne\pi r^2 v\sqrt{4\pi\varepsilon_0 rL} .$$

Дифференцируя полученную функцию $Q(t)$ по времени, найдем ток, текущий через катушку:

$$I = ne\pi r^2 v(1 - \cos \omega t) .$$

График этой функции изображен на рисунке 4, где

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{4\pi\varepsilon_0 rL} \quad \text{и} \quad I_m = ne\pi r^2 v .$$

В рассмотренном контуре конденсатор представляет собой проводящий шар. Емкость этого конденсатора равна

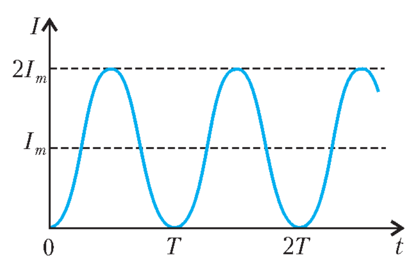


Рис. 4

$C = 4\pi\varepsilon_0 r$, поэтому полученную формулу для периода колебаний можно представить в обычном виде:

$$T = 2\pi\sqrt{4\pi\varepsilon_0 rL} = 2\pi\sqrt{LC} .$$

Заметим, что в идеальном колебательном контуре конденсатор заряжается и разряжается через катушку индуктивности, а здесь конденсатор разряжается через катушку, а заряжается посредством потока электронов.

Задача 3. *С одной пластины изначально незаряженного конденсатора, соединенного с катушкой индуктивности, мгновенно отделяется заряд q, локализованный в тонком слое вещества, и затем движется поступательно как единое целое с постоянной скоростью v по направлению к противоположной пластине. Найдите зависимость тока в цепи от времени, пока слой движется внутри конденсатора. Расстояние между пластинами конденсатора d, площадь пластин S, индуктивностью катушки L.*

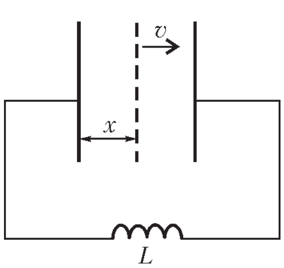


Рис. 5

Пусть расстояние от левой обкладки конденсатора до отделившегося слоя в некоторый момент времени равно x (рис.5), а заряды левой и правой обкладок составляют q_1 и q_2 соответственно. Из закона сохранения заряда следует, что

$$-q = q_1 + q_2 .$$

Напряжение на конденсаторе равно

$$U = E_1 x + E_2 (d - x) ,$$

где

$$E_1 = \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q}{2\varepsilon_0 S}$$

– напряженность электрического поля между заряженным слоем и левой обкладкой, а

$$E_2 = \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q}{2\varepsilon_0 S}$$

– напряженность поля между слоем и правой обкладкой. Таким образом, получаем

$$U = \frac{q + 2q_1}{2\varepsilon_0 S} d + \frac{q}{2\varepsilon_0 S}(d - 2x) .$$

Приравняем напряжение на конденсаторе к ЭДС самоиндукции катушки:

$$-L\frac{dI}{dt} = \frac{q + 2q_1}{2\varepsilon_0 S} d + \frac{q}{2\varepsilon_0 S}(d - 2x) ,$$

где I – ток текущий через катушку. Продифференцируем это уравнение по времени и, учитывая, что $v = x'$ и $I = q_1'$, найдем

$$LI'' = -\frac{Id}{\varepsilon_0 S} + \frac{qv}{\varepsilon_0 S} ,$$

или

$$I'' = -\frac{d}{\varepsilon_0 SL}\left(I - \frac{qv}{d}\right) .$$

Обозначим $y = I - \frac{qv}{d}$, тогда получим

$$y'' = -\frac{d}{\varepsilon_0 SL} y .$$

Это знакомое нам уже уравнение гармонического осциллятора. Решением его является функция

$$I - \frac{qv}{d} = I_m \cos(\omega t + \varphi) , \text{ где } \omega^2 = \frac{d}{\varepsilon_0 SL} .$$

Учитывая, что в начальный момент $(t = 0)$ $I = 0$ и $L\frac{dI}{dt} = 0$, получаем, что $I_m = -\frac{qv}{d}$ и $\varphi = 0$. Таким образом, при $t \le \frac{d}{v}$ ток в цепи изменяется по закону

$$I(t) = \frac{qv}{d}(1 - \cos \omega t) , \text{ где } \omega = \sqrt{\frac{d}{\varepsilon_0 SL}} .$$

Заметим, что изменения тока со временем можно считать колебаниями, если $\frac{d}{v} > 2\pi\sqrt{\frac{\varepsilon_0 SL}{d}}$. В рассматриваемом нестандартном контуре движение заряженного слоя с постоянной скоростью не влияет на период возникших колебаний, однако это движение вызывает эти колебания и определяет их амплитуду.

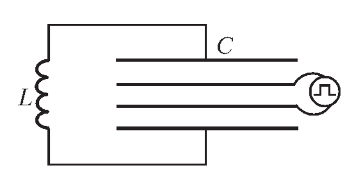


Рис. 6

Задача 4. *В плоский конденсатор емкостью C, последовательно соединенный с катушкой индуктивностью L, параллельно пластинам вставляется конденсатор таких же поперечных размеров, но с меньшим расстоянием между обкладками (рис.6), подключенный к генератору импульсного напряжения, гра-*

(Продолжение см. на с. 34)

«Невозможные» фигуры

В 1934 ГОДУ ИЗ-ПОД КИСТИ ШВЕДСКОГО ХУДОЖНИКА Оскара Реутерсварда (Oscar Reutersvard) вышло полотно, положившее начало новому направлению современного искусства с названием imp-art (от английских слов **imp**ossible – невозможный и **art** – искусство). В центре его внимания стало тонкое обыгрывание геометрических мотивов. Копия картины Реутерсварда изображена на рисунке 1. Присмотритесь внимательно: возможно ли такое расположение девяти кубов в пространстве?

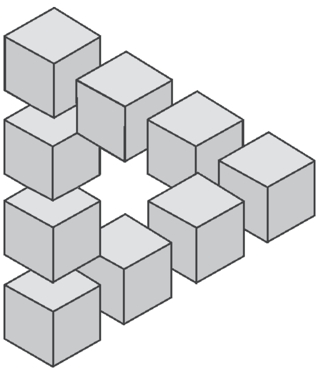


Рис. 1

Впоследствии Реутерсвард придумал около 2500 подобных сюжетов, изображающих необычное, парадоксальное, иллюзорное отображение трехмерного мира на двумерный холст картины. В частности, в одном из своих сюжетов число кубов он довел до минимально возможного количества: трех (рис.2).

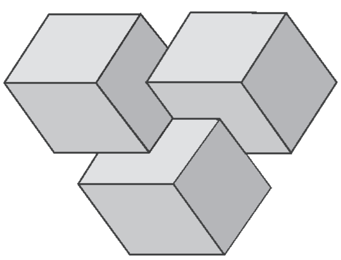


Рис. 2

В 1954 году независимо от Реутерсварда английский математик и физик Роджер Пенроуз придумал объект, названный им «Невозможный треугольник» (рис.3). Если Реутерсвард все свои фигуры рисовал в изометрической проекции, которую он называл «японской», то в исходном треугольнике Пенроуза присутствовал некий эффект перспективы (ребра по каждой из трех сторон не были параллельны друг другу). Это еще более усиливает ощущение невозможности.

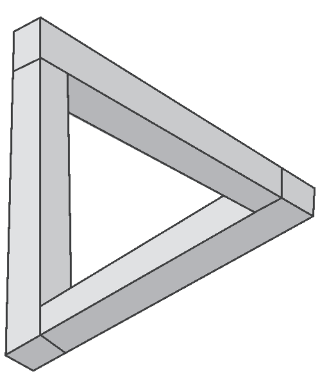


Рис. 3

Дальнейшие модификации «треугольника» Пенроуза в сторону увеличения количества «сторон» показаны на рисунке 4.

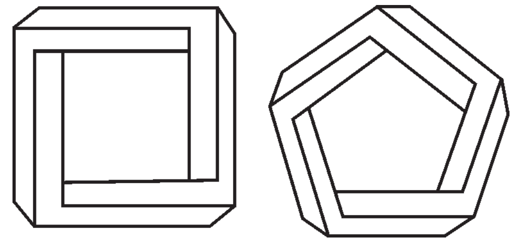


Рис. 4

Значительный вклад в искусство парадоксальных эффектов внесли художники Мауриц К. Эшер, Жос де Мей, Сандро дель Пре, Иштван Орос, Висенте Мевилла Сегуи и другие. Их работы вызывают интерес не только у ценителей искусства, но и у математиков и психологов.

Вот еще несколько ярких образцов из обширной и постоянно пополняющейся коллекции «невозможных» фигур (рис. 5–7).

Оскар Реутерсвард:

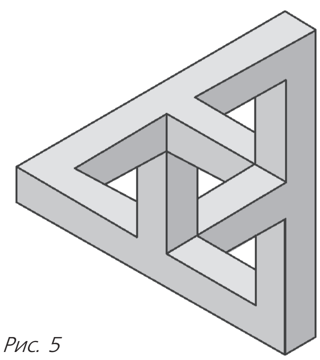


Рис. 5

Влад Алексеев:

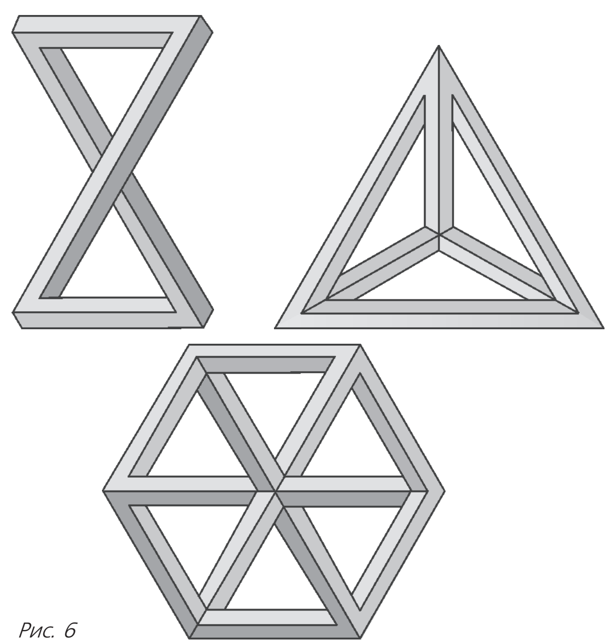


Рис. 6

Кокичи Сугихара:

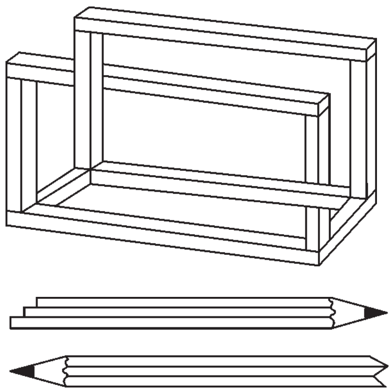


Рис. 7

В словосочетании «невозможные» фигуры первое слово взято в кавычки. Почему? Оказывается, «невозможные» объекты в нашем трехмерном мире вполне возможны, только выглядят они совсем не так, как нам диктуют наши стереотипы восприятия чертежей. Реальный объект – прототип иллюзии – может иметь разрывы, деформации, но с некоторой точки зрения это легко не заметить – и вот вам чудо во всей красе!

Трюк с разрывом использовали художник Брайан МакКей и архитектор Ахмад Абас, создавая архитектурную достопримечательность города Перта (Австралия). Алюминиевая конструкция с ребристой структурой высотой 13,5 метров (рис. 8) с определенной

Рис. 8

точки зрения выглядит как «невозможный треугольник» Пенроуза (рис. 9). Эти фотографии специально для журнала «Квант» сделала Анна Звонкова (Австралия).

Впрочем, не обязательно ехать в Австралию. Профессор математики из Токийского университета Кокичи Сугихара, автор оригинальных расчетных методик инженерной графики (www.simplex.t.u-tokyo.ac.jp/~sugihara), предлагает воплотить эту идею в бумаге. Для этого он рассчитал «выкройки» трех бумажных брусков, из которых склеивается удиви-

Рис. 9

тельная конструкция. Сосканируйте или сделайте ксерокопию приведенных на рисунке 10 чертежей, увеличьте их с помощью подходящего редактора

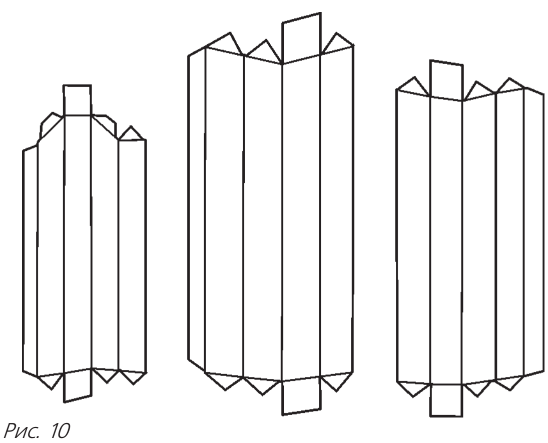


Рис. 10

изображений (для этих целей, например, хорошо подходит программа Photoshop), распечатайте, а дальше призовите на помощь ножницы и клей. На склеенную модель рекомендуется смотреть одним глазом с расстояния, в 20 раз превышающего характерные размеры модели.

При подготовке этой статьи были использованы материалы сайта http://im-possible.info, а также книги Кокичи Сугихары «Восхищение невозможными объектами».

В. Алексеев, А. Жуков

(Начало см. на с. 30)

фик которого показан на рисунке 7. Определите минимальные значения t_1 и t_2, при которых в контуре будут происходить установившиеся колебания с неизменной амплитудой. Нарисуйте график зависимости напряжения на конденсаторе от времени.

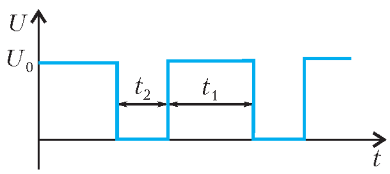


Рис. 7

При подаче импульса напряжения на внутренний конденсатор резко изменяется на ту же величину напряжение на внешних обкладках, и в контуре начинаются свободные электрические колебания с амплитудой U_0. Для того чтобы амплитуда колебаний оставалась неизменной и после снятия импульса, необходимо, чтобы ток в цепи до снятия импульса равнялся току в свободно колеблющемся контуре при напряжении на конденсаторе $U(t) - U_0$, где $U(t)$ – напряжение в контуре при снятии импульса. Аналогичное условие можно выдвинуть и для подачи импульса напряжения. Единственное напряжение $U(t)$, для которого эти условия выполняются, есть $U(t) = \pm\dfrac{U_0}{2}$.

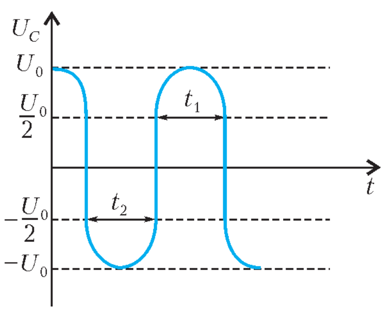


Рис. 8

Нарисуем теперь зависимость напряжения на конденсаторе от времени на графике (рис.8). Ясно, что

$$t_1 = t_2 = 2\frac{1}{\omega}\arccos\frac{1}{2}, \text{ где } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

или

$$t_1 = t_2 = \frac{T}{3}, \text{ где } T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Задача 5. *Из катушки индуктивностью L, намотанной на сердечник с большой магнитной проницаемостями, и двух конденсаторов емкостью C_1 и C_2 собрана схема, изображенная на рисунке 9. Один из конденсаторов подключен к половине катушки. В начальный момент времени ток через катушку отсутствует, напряжение на конденсаторе емкостью C_1 равно U_0, а конденсатор емкостью C_2 не заряжен. Нарисуйте график зависимости напряжения на верхнем конденсаторе от времени после замыкания ключа K. Считать, что $C_1 = C_2 = C$.*

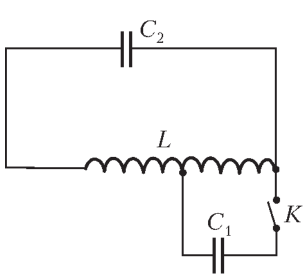


Рис. 9

Магнитный поток через любой виток катушки один и тот же (нет рассеяния магнитного потока), поэтому напряжение U_2 на конденсаторе емкостью C_2 всегда в два раза больше напряжения U_1 на конденсаторе емкостью C_1:

$$U_2 = 2U_1.$$

В начальный момент, т.е. сразу после замыкания ключа, заряды на конденсаторах перераспределяются так, чтобы удовлетворить закону сохранения заряда и записанному соотношению между напряжениями. Таким образом, если U_0^* – новое напряжение на первом конденсаторе, а U_0^{**} – на втором, то

$$CU_0 = CU_0^* + CU_0^{**} = CU_0^* + 2CU_0^* = 3CU_0^*.$$

Отсюда

$$U_0^* = \frac{1}{3}U_0, \quad U_0^{**} = \frac{2}{3}U_0.$$

Поскольку

$$I_{C_2} = \frac{dq_2}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dU_2}{dt} \text{ и } I_{C_1} = \frac{1}{C}\frac{dU_1}{dt},$$

то (рис.10)

$$I_{C_2} = I = 2I_{C_1} = 2I_C.$$

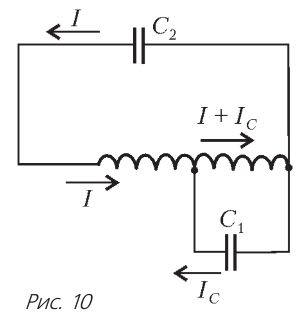


Рис. 10

Суммарный магнитный поток Φ через все витки равен сумме потоков Φ_1 и Φ_2 через витки левой и правой частей катушки соответственно:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{L}{2}I + \frac{L}{2}(I + I_C) =$$

$$= \frac{L}{2}(2I + I_C) = \frac{5}{4}LI.$$

Учитывая, что

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{q_2}{C_2} = -U_2,$$

получаем

$$\frac{d_2U_2}{dt^2} = -\frac{4}{5LC}U_2.$$

Это уравнение описывает гармонические колебания с частотой $\omega_0 = \dfrac{2}{\sqrt{5LC}}$. В начальный момент $(t = 0)$ $U_2 = \dfrac{2}{3}U_0$, поэтому окончательно напряжение на верхнем конденсаторе изменяется со временем по закону

$$U_2 = \frac{2}{3}U_0\cos\omega_0 t.$$

Период этих колебаний равен

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi\sqrt{5LC}.$$

График функции $U_2(t)$ представлен на рисунке 11.

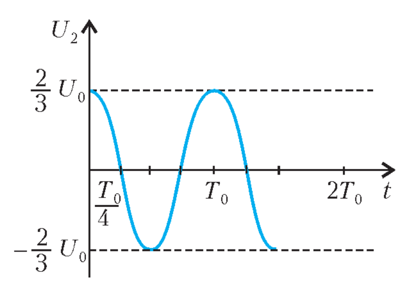


Рис. 11

Таким образом, рассматриваемая система эквивалентна стандартному колебательному контуру с той же индуктивностью L, но с емкостью, равной $\dfrac{5}{4}C$. Напряжение на катушке эквивалентного контура в начальный момент равно $\dfrac{2}{3}U_0$.

Упражнения

1. Конденсаторы, емкости которых C и $2C$, заряжены каждый до напряжения U_0 и соединены последовательно «минусом» к «плюсу». К ним одновременно подключают две катушки: катушку индуктивностью L к конденсатору большей емкости и катушку индуктивностью

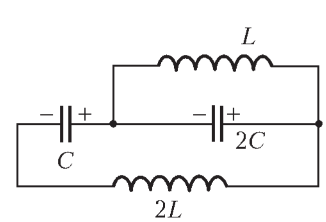


Рис. 12

$2L$ к разноименным концам батареи конденсаторов (рис.12). Найдите максимальный ток каждой из катушек. Через какое время после включения ток первой катушки станет максимальным?

2. Перемычка массой m лежит на горизонтально расположенных рельсах перпендикулярно им (рис.13). Вертикальная составляющая магнитного поля равна B. Катушка индуктивностью L подключена к рельсам. Расстояние между рельсами d. Начальная скорость перемычки равна v_0 и направлена к катушке. Пренебрегая сопротивлением проводников и считая, что перемычка движется поступательно, определите зависимость ее скорости от времени.

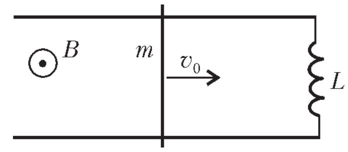


Рис. 13

Об одном случае расположения сферы и пирамиды

В.МИРОШИН

Среди множества различных случаев расположения сферы и пирамиды мы рассмотрим только один – тот, когда сфера касается боковых граней пирамиды в точках, лежащих на ребрах основания. Задача, послужившая прототипом множества подобных задач, более трудоемких, но не более трудных, появилась в 1995 году на вступительном экзамене по математике на механико-математическом факультете МГУ.

Обычно рассматриваются случаи касания сферы отдельно с плоскостями граней, отдельно с ребрами пирамиды, а тут – все вместе, что как раз и представляется интересным.

Задача 1 (мехмат МГУ, 1995 г.). *Высота пирамиды равна 5, а основанием служит треугольник со сторонами 7, 8, 9. Некоторая сфера касается плоскостей всех боковых граней пирамиды в точках, лежащих на сторонах основания. Найдите радиус сферы.*

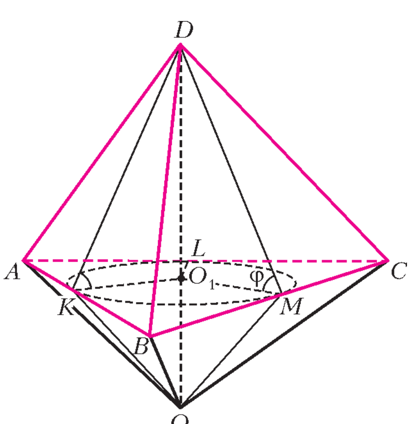


Рис. 1

Решение. Обозначим центр сферы O и рассмотрим пирамиду $OABC$, «пристроенную» к исходной пирамиде $ABCD$ (рис.1).

Стороны треугольника ABC касаются сферы, следовательно, сечение сферы плоскостью (ABC) есть окружность, вписанная в треугольник основания.

Радиусы сферы OK, OL, OM, проведенные в точки касания, играют в пирамиде $OABC$ роль апофем. Так как они равны, то грани пирамиды $OABC$ одинаково наклонены к плоскости основания, и, таким образом, высота пирамиды $OABC$, совпадающая с отрезком перпендикуляра, проведенного из центра сферы на секущую плоскость, попадает в центр окружности O_1, вписанной в треугольник ABC.

Сфера касается не только сторон основания, но и боковых граней пирамиды $DABC$ в тех же точках. Поэтому по признаку перпендикулярности плоскостей получим, что грани двух рассматриваемых пирамид, имеющие общее ребро, попарно перпендикулярны:

$$(OAB)\perp(DAB),\ (OAC)\perp(DAC),\ (OBC)\perp(DBC).$$

Но тогда (и именно в этом состоит вся изюминка данного способа касания сферы и пирамиды) боковые грани пирамиды $DABC$ также одинаково наклонены к плоскости основания. Поэтому и высота пирамиды $DABC$ также попадет в центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Кроме того, основания апофем боковых граней пирамиды $DABC$ совпадут с точками касания сферы с соответствующими ребрами основания пирамиды.

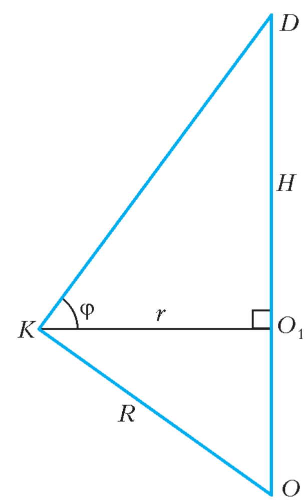


Рис. 2

Таким образом, при указанном расположении сферы и пирамиды центр сферы O, вершина пирамиды D и центр окружности O_1, вписанной в основание, лежат на одном перпендикуляре, проведенном к плоскости основания пирамиды. Этот перпендикуляр DO, радиус сферы OK и апофема DK боковой грани пирамиды – стороны прямоугольного треугольника, в котором высотой, проведенной к гипотенузе, служит радиус окружности, вписанной в основание (рис. 2). На этом рисунке показаны также угол наклона боковых граней пирамиды $DABC$ к плоскости основания φ, высота пирамиды H, искомый радиус сферы R и радиус вписанной в основание окружности r.

Теперь можно перейти к вычислениям. По формуле Герона площадь основания пирамиды равна $S=\sqrt{12\cdot5\cdot4\cdot3}=12\sqrt5$. Величину r найдем, используя формулу $r=\frac{S}{p}$, где p – полупериметр основания: $r=\sqrt5$. Отсюда $\operatorname{tg}\varphi=\frac{H}{r}=\sqrt5$, $\sin\varphi=\sqrt{\frac56}$, $R=\frac{r}{\sin\varphi}=\sqrt6$.

Ответ: $\sqrt6$.

Минимум вычислений при максимуме идей!

Задача, видимо, так понравилась, что уже через три года она была повторена, однако в гораздо более сложном варианте.

Задача 2 (мехмат МГУ, 1998 г.). *Дана пирамида ABCD. Сфера касается граней DAB, DAC, DBC в точках K, L, M соответственно. При этом точка K находится на стороне AB, точка L – на стороне AC, точка M – на стороне BC. Известно, что радиус сферы равен 3,* $\angle ADB = 90°$, $\angle BDC = 105°$, $\angle ADC = 75°$. *Найдите объем пирамиды.*

Решение. Как мы видим, условие в основной части, относящейся к расположению пирамиды и сферы, повторяет условие предыдущей задачи. Поэтому расположение вершины пирамиды, центра вписанной окружности и центра сферы такое же, как и в предыдущей задаче (рис. 3). Аналогично

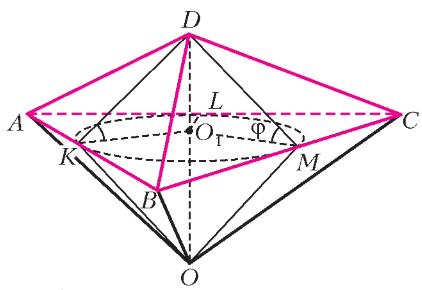


Рис. 3

получаем, что грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания пирамиды. И в данной задаче именно этот факт играет определяющую роль.

Двугранные углы пирамиды являются элементами трехгранных ее углов с вершинами в вершинах основания. Изучение тригонометрии трехгранного угла не входит в курс общеобразовательной школы, однако знакомство с ней повысит математическую эрудицию абитуриентов и существенно облегчит решение некоторых стереометрических задач.

Приведем основные определения и теоремы, связанные с тригонометрией трехгранного угла.

Трехгранным углом называется фигура, образованная тремя лучами SA, SB, SC, исходящими из точки S (рис. 4). Точка S называется вершиной трехгранного угла, лучи SA, SB, SC – его ребрами, плоские углы ASB, ASC, BSC – его гранями.

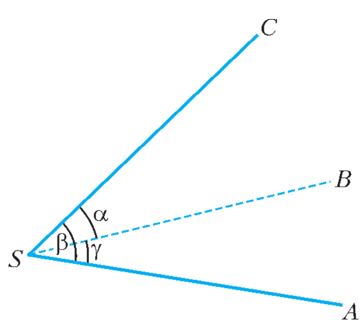


Рис. 4

Основными элементами трехгранного угла являются плоские углы $\angle BSC = \alpha$, $\angle ASC = \beta$, $\angle ASB = \gamma$, а также противолежащие им двугранные углы A, B, C, ребрами которых являются лучи SA, SB, SC соответственно.

В тригонометрии трехгранных углов используются в основном три теоремы: теорема синусов и две теоремы косинусов.

Теорема синусов. *Синусы плоских углов трехгранного угла пропорциональны синусам противолежащих им двугранных углов трехгранного угла:*

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}.$$

Следствие. *Если двугранные углы трехгранного угла равны, то противолежащие им плоские углы трехгранного угла либо равны, либо дополняют друг друга до* $180°$.

Первая теорема косинусов. *Косинус плоского угла трехгранного угла равен произведению косинусов двух других плоских углов, сложенному с произведением синусов этих углов на косинус двугранного угла, противолежащего искомому плоскому:*

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A.$$

Вторая теорема косинусов. *Косинус двугранного угла трехгранного угла равен произведению косинусов двух других двугранных углов, взятому с противоположным знаком, плюс произведение синусов этих углов на косинус плоского угла, противолежащего данному двугранному:*

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos\alpha.$$

Вернемся к решению задачи. Из ее условия и следствия из теоремы синусов для трехгранного угла вытекает, что $\angle DAB = \angle DAC$, так как оба эти угла острые, а противолежащие им двугранные углы при ребрах AB и AC равны. Аналогично, $\angle DCA = \angle DCB$, $\angle DBC = \angle DBA$.

Обозначим $\angle DAB = \angle DAC = \alpha$, $\angle DCA = \angle DCB = \gamma$, $\angle DBC = \angle DBA = \beta$. Рассматривая сумму углов всех боковых граней пирамиды, получаем, что $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 3\pi - \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$, откуда $\alpha + \beta + \gamma = \frac{3\pi}{4}$. Теперь можно определить каждый из углов:

$$\alpha = \frac{\pi}{3},\quad \beta = \frac{\pi}{6},\quad \gamma = \frac{\pi}{4}.$$

Обозначим апофему боковой грани пирамиды h, а угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости ее основания φ. Далее проведем простые выкладки:

$$h = R\operatorname{tg}\varphi,\quad H = h\sin\varphi = R\operatorname{tg}\varphi\sin\varphi,$$

$$p = h(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma) = R\operatorname{tg}\varphi(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma),$$

$$S_{\text{бок}} = ph = R^2\operatorname{tg}^2\varphi(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma),$$

$$S_{\text{осн}} = S_{\text{бок}}\cos\varphi = R^2\operatorname{tg}^2\varphi\cos\varphi(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma),$$

$$V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}H = \frac{1}{3}R^3\operatorname{tg}^3\varphi\cos\varphi\sin\varphi(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma) =$$

$$= \frac{1}{3}R^3\operatorname{tg}^2\varphi\sin^2\varphi(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma) =$$

$$= \frac{1}{3}R^3\left(\frac{1-\cos^2\varphi}{\cos\varphi}\right)^2(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma).$$

Таким образом, все сводится к нахождению косинуса угла наклона боковой грани к основанию пирамиды.

Сначала найдем косинус какого-нибудь угла треугольника ABC, например угла ACB (обозначим его $\angle C$). Имеем:

$$AB = h(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) = h\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right),$$

$$BC = h(\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma) = h\left(\sqrt{3} + 1\right),$$

$$AC = h(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma) = h\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right).$$

Воспользовавшись теоремой косинусов

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC\cdot BC\cdot\cos\angle C,$$

получим

$$\frac{16}{3} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{3}+1\right)^2 + \left(\sqrt{3}+1\right)^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}+1\right)^2\cos\angle C,$$

откуда

$$\cos\angle C = 4 - 2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}-1\right)^2.$$

Теперь, наконец, можно определить косинус двугранного угла при основании пирамиды. Воспользуемся первой теоремой косинусов для трехгранного угла. Имеем:

$$\cos\gamma = \cos\gamma\cos\angle C + \sin\gamma\sin\angle C\cos\varphi .$$

А так как $\gamma = \frac{\pi}{4}$, то

$$\cos\varphi = \frac{1-\cos\angle C}{\sin\angle C} = \operatorname{tg}\frac{\angle C}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\angle C}{1+\cos\angle C}} = \sqrt{\frac{4\sqrt{3}-3}{13}} .$$

Осталось сделать подстановку найденных величин в формулу для объема пирамиды. После очевидных арифметических выкладок получаем ответ.

Ответ: $V = 48$.

И, наконец, задача, сравнительно недавно предлагавшаяся на вступительном экзамене в МФТИ.

Задача 3 (МФТИ, 2005 г.). *Сфера касается боковых граней четырехугольной пирамиды SABCD в точках, лежащих на ребрах AB, BC, CD, DA (рис 5). Известно, что высота пирамиды равна* $2\sqrt{5}$, $AB = 6$, $SA = 5$, $SB = 7$, $SC = 2\sqrt{10}$. *Найдите длины ребер BC и CD, радиус сферы и двугранный угол при ребре SD.*

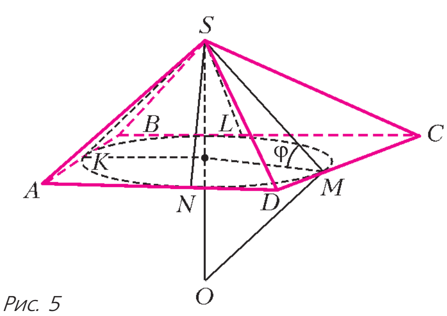


Рис. 5

Решение. Используем результаты предыдущих задач. Поскольку в основание пирамиды можно вписать окружность, то четырехугольник $ABCD$ – описанный около окружности. Так как все апофемы равны, то боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания пирамиды. Центр сферы, центр вписанной окружности и вершина пирамиды расположены на одном перпендикуляре к плоскости основания.

Найдем радиус сферы. Так как в треугольнике ASB известны длины всех сторон: 5, 6, 7, то по формуле Герона площадь треугольника равна $\sqrt{9\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 6\sqrt{6}$. Значит, длина апофемы $h = 2\sqrt{6}$. Радиус окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$, равен $r = \sqrt{h^2 - H^2} = \sqrt{24-20} = 2$. Находим синус угла наклона боковой грани к плоскости основания пирамиды: $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$. Отсюда $R = \frac{r}{\sin\varphi} = 2\sqrt{\frac{6}{5}}$.

Определяя радиус сферы, мы попутно нашли апофему и радиус вписанной окружности. Применяя теперь последовательно теорему Пифагора и свойства касательных, проведенных из одной точки к окружности, получим

$$AK = AN = \sqrt{SA^2 - h^2} = \sqrt{25-24} = 1 ,$$

$$BK = BL = 5 ,$$

$$CL = CM = 4 .$$

Таким образом, длина ребра $BC = 9$.

Найдем величину тригонометрических функций угла D четырехугольника $ABCD$. Во-первых, используя радиус вписанной окружности и отрезки касательных, получим $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 2$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{2}{5}$, $\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\frac{A}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$, откуда $\frac{B}{2} + \frac{D}{2} = \frac{\pi}{2}$. Таким образом,

$$\operatorname{tg}\frac{D}{2} = \frac{5}{2},\quad \cos D = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{D}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{D}{2}} = -\frac{21}{29},\quad \sin D = \frac{20}{29} .$$

Для нахождения длины ребра CD достаточно найти длину отрезка MD. Но $\frac{r}{MD} = \operatorname{tg}\frac{D}{2} = \frac{5}{2}$, откуда

$$MD = \frac{4}{5} \text{ и } CD = 4{,}8 .$$

Рассмотрим $\angle SDA$ и $\angle SDC$. Так как противолежащие им двугранные углы равны и проекция ребра SD есть биссектриса угла D, то указанные углы также равны. Обозначая эти углы α, по первой теореме косинусов трехгранного угла имеем

$$\cos\alpha = \cos\alpha\cos D + \sin\alpha\sin D\cos\varphi \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{1-\cos D}{\sin D\cos\varphi} .$$

Подставляя известные значения, получим, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{2}\sqrt{6}$. Двугранный угол ψ при ребре SD противолежит плоскому углу D, поэтому по первой теореме косинусов получим

$$\cos D = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos\psi = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cos\psi ,$$

или

$$-\frac{21}{29} = \frac{4}{34} + \frac{30}{34}\cos\psi \Rightarrow \cos\psi = -\frac{67}{87} ,$$

и

$$\psi = \arccos\left(-\frac{67}{87}\right) = \pi - \arccos\frac{67}{87} .$$

Ответ: $R = 2\sqrt{\frac{6}{5}}$; $BC = 9$; $CD = 4{,}8$; $\psi = \pi - \arccos\frac{67}{87}$.

Упражнения

1 (мехмат МГУ, 1995 г.). Некоторая сфера радиуса $\sqrt{3}$ касается плоскостей всех боковых граней пирамиды в точках, лежащих на сторонах основания. Основанием служит треугольник со сторонами 5, 6, 9. Найдите высоту пирамиды.

2 (мехмат МГУ, 1998 г.). Дана пирамида $ABCD$. Сфера касается граней ABC, ACD, ADB в точках K, L, M соответственно. При этом точка K находится на стороне BC, точка L – на стороне CD, точка M – на стороне DB. Известно, что радиус сферы равен $\sqrt{3}$, $\angle BAC = 90°$, $\angle CAD = 75°$, $\angle DAB = 75°$. Найдите объем пирамиды.

3 (МФТИ, 2005 г.). Сфера касается боковых граней четырехугольной пирамиды $SABCD$ в точках, лежащих на ребрах AB, BC, CD, DA. Известно, что высота пирамиды равна $\sqrt{6}$, $AB = 8$, $SA = 4$, $SB = 8$, $SC = 4\sqrt{6}$. Найдите длины ребер BC и CD, радиус сферы и двугранный угол при ребре SD.

Материалы вступительных экзаменов 2007 года

Московский физико-технический институт (государственный университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\log_{13-x^2}\left(3\cdot 4^{x+2}-18+4^{-x}\right)=\log_{x+1}\left(3\cdot 4^{x+2}-18+4^{-x}\right).$$

2. Решите уравнение

$$2\cos 2x = 2\cos^3 x + \sin 2x \sin|x|.$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{1-2x}{3+2x}}+\frac{\sqrt{3+2x}}{2\sqrt{1-2x}-\sqrt{2}}\ge 0.$$

4. Окружности ω_1 и ω_2 лежат внутри треугольника ABC, в котором $AB=BC=l$, $AC=6$, а радиус ω_1 в четыре раза больше радиуса ω_2. Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом, причем ω_1 касается сторон AB и AC, а ω_2 – сторон BC и AC треугольника ABC. Найдите радиус окружности ω_2, если $l=15$. Найдите все значения l, при которых существуют указанные окружности.

5. Найдите все значения параметра a, при которых наименьшее значение величины $y-\dfrac{x^2}{4}$ на множестве пар действительных чисел $(x;y)$, удовлетворяющих одновременно двум неравенствам $y+\sqrt{16-x^2}\ge 0$ и $y+4\ge|4x-a|$, будет минимально возможным. Найдите это минимально возможное значение.

6. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ четыре числа – длины ребер и диагонали AC_1 – образуют арифметическую прогрессию с положительной разностью d, причем $AA_1<AD<AB$. Две внешне касающиеся друг друга сферы одинакового неизвестного радиуса R расположены так, что их центры лежат внутри параллелепипеда, причем первая сфера касается граней ABB_1A_1, ADD_1A_1, $ABCD$, а вторая – граней BCC_1B_1, CDD_1C_1, $A_1B_1C_1D_1$. Найдите: а) длины ребер параллелепипеда; б) угол между прямыми CD_1 и AC_1; в) радиус R.

Вариант 2

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy+2x-3y+2=0,\\ 2x^2y-3xy^2-12x+18y=16.\end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\log_{(2-x)^4}(1+x)^2+\log_{(x-2)^2}(4-x)\le 1.$$

3. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi\sin^2 x+\pi}{4\sin^6 x+1}-\frac{\pi}{3}\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4\sin^6 x+1}\right)=0.$$

4. Окружность касается стороны AD четырехугольника $ABCD$ в точке D, а стороны BC – в ее середине M. Диагональ AC пересекает окружность в точках K и L ($AK<AL$). Известно, что $AK=8$, $KL=6$, $LC=1$. Лучи AD и BC пересекаются в точке S, причем $\angle ASB=2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите радиус окружности и площадь $ABCD$.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left(\cos^4 x\right)^{1/5}+\frac{1}{4}\left(\sin^4 x\right)^{1/5}=a$$

имеет единственное решение на отрезке $\left[-\pi;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

6. В пирамиде $ABCD$ грани ABC и ADC являются равнобедренными треугольниками с общим основанием AC. Сфера радиуса R с центром в точке O, лежащей на грани ABC, касается всех ребер пирамиды $ABCD$. Найдите длины отрезков, на которые точки касания сферы делят ребра пирамиды, и объем пирамиды $ABCD$, если угол OCD равен β. Найдите значение угла OCD, при котором объем пирамиды $ABCD$ будет наименьшим. Найдите это наименьшее значение объема пирамиды $ABCD$.

Вариант 3

1. Решите уравнение

$$\sqrt{25+\left|16x^2-25\right|}=4+4|1-x|.$$

2. Решите уравнение

$$11+\cos 10x=-10\frac{\sin 5x}{\cos 6x}-12\operatorname{tg}^2 6x.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{9}{\log_{\sqrt[3]{1-x}}(1+x)+6}\ge\log_{\sqrt{1-x}}\frac{\sqrt{1-x}}{1+x}.$$

4. В треугольнике ABC площади 200 и периметра 80 сторона AC равна 36. Внутри треугольника ABC взята точка D, удаленная на расстояние 3 от прямой AB и на расстояние 4 от прямой BC. Найдите угол ABC и расстояние от D до центра вписанной окружности треугольника ABC.

5. Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 2x^2-xy-y^2=8,\\ x^2+y^2+4x-2y+4=0.\end{cases}$$

6. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ ребро основания $ABCD$ равно 4, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен $\operatorname{arctg}2$. На ребре SD выбрана точка K так, что $SK=\dfrac{1}{4}SD$. Сфера ω с центром на отрезке BK проходит через точки S и A. Найдите, в каком отношении центр сферы ω делит отрезок BK, радиус сферы ω и длину отрезка, который ω отсекает от прямой AB.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Два груза висят на нитях в воздухе (рис.1). Сила натяжения верхней нити в два раза больше силы натяжения нижней нити. Когда оба груза полностью погрузили в воду, то их взаимное положение не изменилось, сила натяжения верхней нити уменьшилась на 20%, а нижней – на 30%. Найдите плотности нижнего и верхнего грузов. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.

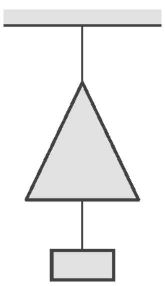


Рис. 1

2. Однородный канат длиной l и массой m с прикрепленным к одному концу грузом массой $m/3$ находится на гладкой горизонтальной поверхности стола и вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через другой конец каната. Размер груза мал по сравнению с длиной каната. 1) Найдите силу, действующую на груз со стороны каната. 2) Найдите силу натяжения каната на расстоянии $l/3$ от оси вращения.

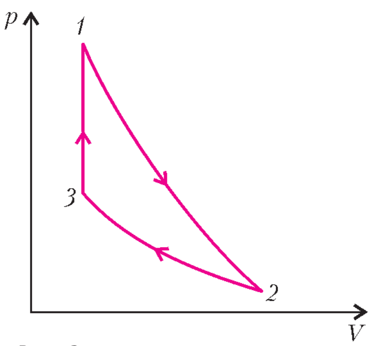


Рис. 2

3. Тепловая машина работает по замкнутому циклу, состоящему из процесса адиабатического расширения *1–2*, изотермического процесса *2–3* и изохорического процесса *3–1* (рис.2). Рабочее вещество машины – ν молей идеального одноатомного газа. В процессе, где тепло к газу подводится, давление газа увеличивается в 3 раза. В процессе сжатия от газа отводится количество теплоты Q ($Q > 0$). Во всем цикле *1–2–3–1* машина совершает работу A. Найдите максимальную температуру газа в цикле.

4. В схеме изображенной на рисунке 3, периодически (с периодом 3τ) повторяют следующий процесс: ключ замыкают на время τ и размыкают на время 2τ, причем время τ достаточно мало и напряжение на конденсаторе за это время изменяется незначительно. Через достаточно большое число повторений напряжение на конденсаторе становится практически постоянным, совершая лишь незначительные колебания около своего среднего значения. 1) Найдите это среднее значение. 2) Найдите среднюю тепловую мощность, выделяющуюся в резисторе сопротивлением $2R$ в установившемся режиме. Все элементы можно считать идеальными, их параметры указаны на рисунке.

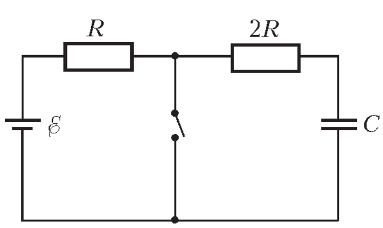


Рис. 3

5. С помощью тонкой линзы на экране получено увеличенное изображение предмета, расположенного перпендикулярно главной оптической оси линзы. Расстояние между предметом и экраном в 4,5 раза больше фокусного расстояния линзы. С каким увеличением изображается предмет?

Вариант 2

1. Массивная плита поднимается с постоянной скоростью вертикально вверх (рис.4). По направлению к плите движется шарик, имеющий непосредственно перед ударом скорость v_0, направленную под углом α ($\sin\alpha = 2/3$) к вертикали. После абсолютно упругого удара о гладкую горизонтальную поверхность плиты шарик отскакивает со скоростью, составляющей угол γ ($\sin\gamma = 1/3$) с вертикалью. 1) Найдите скорость отскочившего шарика. 2) Найдите скорость плиты. Ответ достаточно выразить через корни из целых чисел.

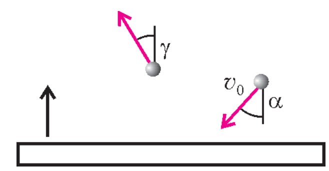


Рис. 4

2. Тепловая машина работает по циклу Карно, состоящему из двух изотерм *1–2* и *3–4* и двух адиабат *2–3* и *4–1* (рис.5). Работа сжатия в изотермическом процессе *3–4* равна A_{34} ($A_{34} > 0$), а работа сжатия в адиабатическом процессе *4–1* равна A_{41} ($A_{41} > 0$). Найдите работу, совершенную машиной в процессе изотермического расширения *1–2*, если температура в нем равна T. Рабочее вещество машины – ν молей идеального одноатомного газа.

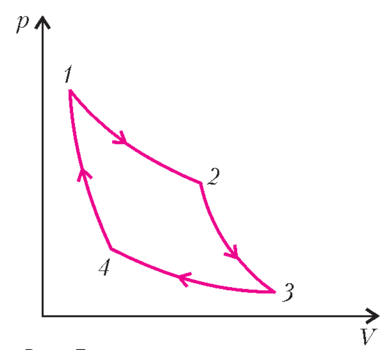


Рис. 5

3. В центре закрепленного кольца радиусом R с равномерно распределенным по кольцу положительным зарядом Q удерживают небольшой по размерам шарик массой m с зарядом $2Q$. Шарик отпускают, и он движется вдоль оси кольца. Найдите скорость шарика на расстоянии $4R/3$ от центра кольца.

4. В схеме, показанной на рисунке 6, все элементы можно считать идеальными. Параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа K ток в цепи отсутствовал. Ключ замыкают на некоторое время τ, а затем размыкают. Оказалось, что за все время опыта (т.е. за время, пока ключ был замкнут, и за время, пока ключ был разомкнут) в схеме выделилось количество теплоты Q. Найдите время τ.

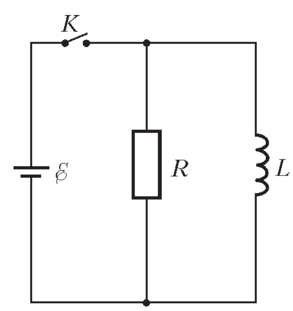


Рис. 6

5. С помощью тонкой линзы на экране получено изображение предмета с двукратным увеличением. Предмет расположен перпендикулярно главной оптической оси линзы. 1) Во сколько раз расстояние между линзой и экраном больше фокусного расстояния линзы? Затем линзу и предмет передвинули вдоль оптической оси так, чтобы, не меняя положения экрана, получить на нем изображение с пятикратным увеличением. 2) На сколько передвинули предмет, если линзу переместили на $b = 30$ см?

Вариант 3

1. Два мальчика бегут к неподвижной тележке, находящейся на горизонтальной поверхности. Мальчик массой m запрыгивает на тележку. Второй мальчик массой $1{,}2m$ нагоняет уже движущуюся тележку и тоже запрыгивает на нее. Скорость тележки увеличивается на 80%. Найдите массу тележки. Горизонтальные составляющие скоростей мальчиков относительно поверхности земли перед попаданием на тележку одинаковы. Сопротивлением движению тележки пренебречь. Направления всех движений находятся в одной вертикальной плоскости.

2. Тонкий подвижный теплопроводящий поршень делит герметичный цилиндр на две части. С одной стороны от поршня находится m = 1 г воды, с другой стороны – воздух под давлением p = 0,28 атм. Начальная температура в цилиндре $t_1 = 7\ ^\circ\text{C}$. При медленном нагревании поршень в некоторый момент начинает двигаться, при температуре $t_2 = 100\ ^\circ\text{C}$ останавливается и при дальнейшем нагревании остается неподвижным. 1) Какая масса воды в начальный момент находится в газообразном состоянии? 2) Найдите объем цилиндра. Объемом жидкости можно пренебречь по сравнению с объемом цилиндра. Давление насыщенных паров воды при температуре $20\ ^\circ\text{C}$ равно $p_{\text{н}} = 0{,}023$ атм. Силу тяжести и трение поршня о цилиндр не учитывать.

3. В электрической цепи (рис.7), собранной из резисторов, батарей и первоначально незаряженных конденсаторов, все возникшие после соединения процессы перезарядки закончились. Все элементы можно считать идеальными, их параметры указаны на рисунке. 1) Найдите разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ в установившемся режиме при разомкнутом ключе K. 2) Найдите ток (с указанием направления) через резистор сопротивлением R сразу после замыкания ключа.

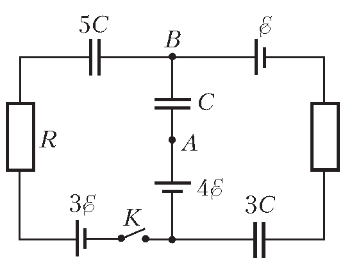


Рис. 7

4. По длинным вертикальным проводящим штангам, находящимся на расстоянии l друг от друга, может без трения скользить, не теряя электрического контакта и оставаясь перпендикулярной рельсам, проводящая перемычка. Штанги соединены через резистор сопротивлением r и идеальную батарею с ЭДС $\mathscr{E}$ (рис.8). Сопротивлением остальных участков цепи можно пренебречь. Система находится в горизонтальном постоянном однородном магнитном поле с индукцией B, перпендикулярном плоскости рисунка. 1) Найдите массу перемычки m, если после подвешивания к ней на нити груза такой же массы m перемычка оказалась неподвижной. После обрыва нити через некоторое время устанавливается равномерное движение перемычки. 2) Найдите величину и направление скорости этого движения. Считайте заданными $\mathscr{E}$, r, B, l, g.

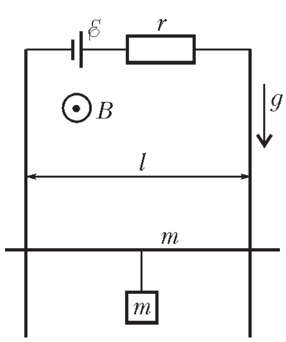


Рис. 8

5. В круглое отверстие листа фанеры вставлена собирающая линза с фокусным расстоянием F = 20 см и диаметром D = 69 мм. Точечный источник света находится на главной оптической оси линзы на расстоянии d = 40 см от линзы. На экране, расположенном перпендикулярно главной оптической оси линзы, получено резкое изображение этого источника. Линзу при неподвижных источнике и экране передвигают на x = 20 см вдоль главной оптической оси в сторону экрана. 1) На каком расстоянии от экрана получилось новое изображение источника? 2) Найдите диаметр светлого пятна на экране.

Публикацию подготовили Д.Александров, Р.Константинов, М.Шабунин

Московский государственный институт электроники и математики (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты электроники, информатики и телекоммуникаций, автоматики и вычислительной техники)

1. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(3-2x) > -3 .$$

2. Решите неравенство

$$\frac{3^x}{9} > 27^{-x^2} .$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3y + xy^3 = 30, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

4. Решите уравнение

$$2\sin x + 3\cos x = \frac{2}{\sin x}.$$

5. Найдите область определения и множество значений функции

$$y = \log_3\left(5 + 4x - x^2\right).$$

6. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\frac{ax-5}{x-1} = x - 4$$

имеет единственное решение.

7. Найдите площадь области, заданной на координатной плоскости xOy системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 8x - 7, \\ y + x \ge 1. \end{cases}$$

8. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольника ABC, в котором $AB = AC = 6\sqrt{10}$, BC = 12. Высота пирамиды проходит через вершину B. Радиус сферы, описанный вокруг пирамиды, равен 26. Найдите объем пирамиды.

9. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\sqrt{3 + 8\sin x} = \frac{4}{3}\sin x + a$$

имеет решение.

Вариант 2

(факультеты прикладной математики и экономико-математический)

1. Решите неравенство

$$\sqrt{3x + 4 - x^2} > \sqrt{3x - 5} .$$

2. Решите уравнение

$$27^{x^2}\cdot 3^{x-3}=\frac{1}{3}.$$

3. Найдите область определения функции

$$y=\log_2\left(\sqrt{x+2}-x\right).$$

4. Решите неравенство

$$\log_3(1+2x)\ge\log_{27}(1+14x).$$

5. Решите уравнение

$$8\cdot 2^{|x|}+7\cdot 2^x=30.$$

6. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{tg}x}{4}+1}+\cos x=0.$$

7. Изобразите на координатной плоскости множество точек $(x;y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$6y^2-xy-2x^2=0.$$

Принадлежит ли хотя бы одна точка этого множества кругу радиуса 2 с центром в точке $(2;4)$?

8. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 8. Высота пирамиды равна $8\sqrt{6}$. Точка K – середина ребра SA. Точка L лежит на ребре SD, причем $SL:LD=3:1$. Через точки K и L проведена плоскость, параллельная прямой CD. Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

9. Верно ли, что при $a=9$ неравенство

$$\sqrt{a}\cos x-\sin x\le 5-\sqrt[4]{a+8}$$

выполняется для всех x? Найдите все значения a, при которых это неравенство выполняется для всех x.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Тело брошено вертикально вниз с высоты $H = 12$ м со скоростью $v_0=3{,}0$ м/с. Найдите, на какой высоте скорость тела увеличится вдвое.

2. Две гири массами $m_1=5{,}0$ кг и $m_2=10$ кг висят на концах нерастяжимой нити, которая перекинута через блок. Найдите натяжение нити при движении грузов.

3. При изобарном процессе газ совершил работу $A=20$ кДж. Как изменилась при этом его внутренняя энергия?

4. Два положительных заряда, один из которых вдвое больше другого, закреплены в вершинах острых углов равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом a. Они создают в третьей вершине поле напряженностью E. Найдите потенциал, создаваемый зарядами в точке, лежащей на середине гипотенузы.

5. Два проводника, сопротивления которых отличаются в два раза, соединены параллельно и подключены к источнику тока с электродвижущей силой $\mathscr{E}=3{,}0$ В и внутренним сопротивлением $r=1{,}0$ Ом. Найдите мощность, выделяемую на каждом сопротивлении, если известно, что КПД источника $\eta=70\%$.

Вариант 2

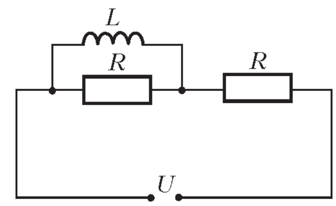
1. Автомобиль, двигаясь равномерно со скоростью $v_1=45$ км/ч, в течение времени $t_1=1$ мин прошел такой же путь, какой автобус, двигавшийся равномерно в том же направлении, прошел за время $t_2=90$ с. Определите скорость автомобиля относительно автобуса.

2. Тело массой $m=1{,}6$ кг движется по гладкой горизонтальной поверхности и сталкивается с таким же покоящимся телом. В результате абсолютно неупругого удара выделилось $Q=40$ Дж тепла. Определите скорость первого тела до удара.

3. Сколько молекул кислорода находится в сосуде объемом $V=1{,}0$ л, если температура кислорода $t=150\,^\circ\mathrm{C}$, а давление $p=0{,}13$ кПа? Постоянная Больцмана $k=1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К.

4. Определите длину математического маятника, если за время $t=3$ мин он совершил $N=130$ колебаний.

5. Электрическая цепь (см. рисунок), состоящая из двух резисторов сопротивлением $R=12$ Ом каждый и соленоида индуктивностью $L=40$ мГн, подключена к источнику напряжением $U=6{,}0$ В. Определите количество теплоты, выделившееся в цепи при отключении источника.



Публикацию подготовили Ю.Колмаков, Ю.Сезонов

Московский педагогический государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Найдите 40% числа

$$\frac{2{,}8888^2-17{,}8888^2}{17{,}8888+2{,}8888}.$$

2. Найдите $f'(0)$, если

$$f(x)=4e^x-4e^{-x}-4e^{-1}.$$

3. Что больше: $\mathrm{tg}\,\frac{15\pi}{8}$ или $-\frac{1}{\sqrt{3}}$?

4. Решите неравенство

$$\log_4|x|\log_{16}|x|\log_{64}|x|\log_{256}|x|>\log_{16}64^{9/4}.$$

5. Решите уравнение

$$25^{\cos x}+130\cdot 0{,}2^{2\cos x}=31.$$

6. При каких значениях параметра p наибольшее значение функции

$$f(x)=\log_p\left(\sqrt{x+2}-1\right)$$

на отрезке [2; 34] равно 1?

7. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$7x^2+3\le 7\sqrt{7x^3}-5\sqrt{7x}.$$

8. В правильной четырехугольной пирамиде плоскость, проходящая через сторону основания, делит одно из боковых ребер пирамиды пополам и образует с плоскостью основания угол 30°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если объем пирамиды равен 12.

Вариант 2

(физики и факультет информационных технологий)

1. Вычислите $3\sqrt[3]{108}\cdot\sqrt[3]{128}$.

2. Найдите $\left|1-81^{\log_9 x}\right|$, если $2x=\log_5 625$.
3. Найдите область определения функции

$$f(x)=\sqrt{\frac{(x+0,5)(x-2)}{1-x}}.$$

4. Решите уравнение

$$\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7.$$

5. Найдите производную функции

$$f(x)=2x^2-8x^{-8}+15\ln 15.$$

6. Решите уравнение

$$2\sin x-3\sin(3\pi-x)=\cos 5\pi.$$

7. Решите неравенство

$$5^{7x-1}\ge\frac{1}{\sqrt{5^{-2x+6}}}.$$

8. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 12, 10 и 10. Все двугранные углы при основании пирамиды равны $60°$. Найдите объем пирамиды.

Вариант 3

(химический факультет)

1. Сравните числа $\sin\frac{79\pi}{40}$ и $\cos\frac{11\pi}{5}$.
2. Решите неравенство

$$2^{\log_2^2 x}+x^{\log_2 x}\le 4.$$

3. Решите уравнение

$$\left(3x-x^2+10\right)\sqrt{x-5}=0.$$

4. Найдите область определения функции

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\frac{16-x}{2x+10}-1}}.$$

5. Найдите $f'(-1)$, если

$$f(x)=3x^{-4}-4x^5+\sin 2.$$

6. При каком α числа $5^{2\alpha}$ и $\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$ совпадают?
7. Решите уравнение $3\sin 2x=10\cos x$.
8. Наибольший угол между образующими конуса равен $120°$, а площадь основания конуса равна 12π. Найдите высоту конуса.

Вариант 4

(факультет технологии и предпринимательства)

1. Вычислите $\left(\sqrt{11}\right)^{\log_{11}25}+18^{\log_{\sqrt{18}}11}$.
2. Сравните числа $\sin 397°$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Решите уравнение $\frac{\sin 3x}{\sin 5x}-1=0$.
4. Найдите область определения функции

$$f(x)=\log_x\left((0,5)^{\frac{6x+1}{x-2}}-\frac{1}{32}\right).$$

5. Найдите производную функции

$$f(x)=2e^x+2e^{-x}+2e^2.$$

6. Решите неравенство $x(x-1)^2>12x-12$.
7. Решите уравнение $x^2+|x|=2$.
8. В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен $60°$, а расстояние от центра основания до боковой грани равно 3. Найдите объем пирамиды.

Задачи устного экзамена

(математический факультет)

1. Решите уравнение $ex^{2\ln x}=x^3$.
2. Решите неравенство $\sqrt{x+5}\pi^{2x}\le\sqrt{x+5}e^{2x}$.
3. Решите уравнение

$$(x+2)\sqrt{16x+33}=8x^2+x-30.$$

4. Укажите промежутки монотонности функции

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2+3x-1}{\sqrt{x^2-2x+1}}.$$

5. Найдите точки максимума и минимума функции

$$f(x)=0,2^{x^5-15x^3}.$$

6. Расположите в порядке возрастания числа: $\sin 15$, $\cos 16$, $\cos 17$.
7. Решите уравнение

$$\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x-2\right)\sqrt{4\pi^2-x^2}=0.$$

8. Постройте график функции

$$f(x)=x^2-\operatorname{ctg}x\operatorname{tg}x.$$

9. В трехзначном числе цифры образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Найдите это число, учитывая, что оно не делится на 4.
10. Найдите площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой перпендикулярны, зная, что длина ее средней линии равна 12.

ФИЗИКА

Факультет физики и информационных технологий и факультет технологии и предпринимательства

Письменный экзамен

Экзаменационная работа состоит из двадцати заданий и разделена на две части. Первая часть содержит пятнадцать заданий с выбором ответа, вторая – пять заданий, требующих развернутого решения.

Вариант 1

Часть 1. Выберите правильный ответ

1. За какое время автомобиль, двигаясь с постоянным ускорением 2 м/с^2, увеличит свою скорость с 5 м/с до 15 м/с:
1) 20 с; 2) 10 с; 3) 5 с?
2. Укажите, что является телом отсчета, когда говорят, что поезд едет со скоростью 80 км/ч:
1) пассажир; 2) поезд; 3) платформа.
3. Автомобиль движется по закруглению дороги радиусом 100 м со скоростью 20 м/с. Центростремительное ускорение при этом равно:
1) 5 м/с^2; 2) 4 м/с^2; 3) 0,2 м/с^2.
4. Сплошное тело плотностью 1,1 кг/дм^3, погруженное в воду:
1) всплывает; 2) тонет; 3) не движется.
5. Чему равна площадь поршня, если сила, с которой газ при давлении $2\cdot10^5$ Па действует на поршень, составляет 100 Н:
1) $2\cdot10^7$ м^2; 2) $2\cdot10^3$ м^2; 3) $0,5\cdot10^{-3}$ м^2?
6. Первый закон термодинамики имеет вид:
1) $\Delta U=Q+A$; 2) $\Delta U=cm(t_2-t_1)$; 3) $\Delta U=3\nu R\Delta T/2$.

7. Газ нагрели при постоянном давлении от $27\ °C$ до $87\ °C$. Чему равно отношение конечного объема газа к начальному:

1) 3,2; 2) 1,2; 3) 0,8?

8. Для расчета количества теплоты, необходимого для кипения жидкости, используется формула:

1) $Q = cm(t_2 - t_1)$; 2) $Q = Lm$; 3) $Q = qm$.

9. Рабочее тело тепловой машины совершает работу 200 Дж при сообщении ему от нагревателя количества теплоты 800 Дж. КПД этой машины равен:

1) 25%; 2) 20%; 3) 33%.

10. В электролитической ванне изделие покрывают слоем серебра определенной толщины при силе тока 1 А. При силе тока 2 А время получения такого же слоя серебра:

1) увеличится в 2 раза; 2) уменьшится в 2 раза; 3) уменьшится в 4 раза.

11. Как изменится напряженность электрического поля между пластинами воздушного конденсатора, соединенного с источником тока, при уменьшении расстояния между пластинами в 2 раза:

1) увеличится в 2 раза; 2) уменьшится в 2 раза; 3) не изменится?

12. Как называется физическая величина, единица которой 1 Дж/Кл:

1) электроемкость; 2) потенциал; 3) напряженность поля?

13. Точечный источник света расположен между оптическим центром и фокусом собирающей линзы. После преломления лучи образуют:

1) расходящийся пучок; 2) параллельный пучок; 3) сходящийся пучок.

14. Колебательный контур генератора радиопередатчика имеет индуктивность 0,5 Гн и емкость 50 пФ. Период колебаний тока в передающей антенне равен:

1) 31 мкс; 2) 0,05 мкс; 3) 630 мкс.

15. Сколько электронов содержит атом свинца $^{207}_{82}\mathrm{Pb}$:

1) 207; 2) 82; 3) 125?

Часть 2. Решите задачи

16. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить скорость тела массой 2 кг от нуля до 10 м/с?

17. Последовательно с электрической лампой включен реостат. К этому участку цепи подведено напряжение 36 В. Сила тока в цепи составляет 80 мА. Вольтметр, подключенный к лампе, показывает 24 В. Чему равно сопротивление реостата?

18. Грузовик, масса которого с полной нагрузкой равна 15 т, трогается с места с ускорением $0{,}7\ \text{м/с}^2$. Найдите силу тяги, если коэффициент сопротивления движения равен 0,03.

19. Рассчитайте количество теплоты, которое необходимо, чтобы расплавить 2 кг льда, взятого при $0\ °C$, и нагреть воду до $30\ °C$. Удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг, удельная теплоемкость воды $4{,}2\ \text{кДж/(кг}\cdot\text{К)}$.

20. Какова максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов при облучении железа светом с длиной волны 200 нм? Красная граница фотоэффекта для железа 288 нм. Ответ выразите в электронвольтах: $1\ \text{эВ} = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Дж.

Вариант 2

Часть 1. Выберите правильный ответ

1. Автомобиль, двигавшийся со скоростью 20 м/с, при совершении обгона разгоняется с ускорением $5\ \text{м/с}^2$. Движение автомобиля подчиняется уравнению:

1) $s = 20t + 2{,}5t^2$; 2) $s = 20t + 5t^2$; 3) $s = 20 + 5t$.

2. Какая из перечисленных величин является скалярной:

1) путь; 2) ускорение; 3) перемещение?

3. Центростремительное ускорение космическому кораблю на околоземной орбите сообщает:

1) сила тяготения; 2) сила тяги; 3) равнодействующая силы тяготения и силы тяги.

4. На какую высоту нужно поднять молот весом 10 Н, чтобы его потенциальная энергия увеличилась на 40 Дж:

1) 400 м; 2) 4 м; 3) 0,25 м?

5. Тело массой 2 кг падает с ускорением $7\ \text{м/с}^2$. Сила сопротивления воздуха при этом составляет:

1) 14 Н; 2) 70 Н; 3) 6 Н.

6. Площади поршней гидравлической машины отличаются в 10 раз. Сила, действующая на малый поршень, равна 3 кН. Сила, действующая на большой поршень, равна:

1) 30 кН; 2) 0,3 кН; 3) 0,03 кН.

7. 10 л газа охлаждают на $200\ °C$ до $27\ °C$ при постоянном давлении. После охлаждения газ занял объем:

1) 2 л; 2) 4 л; 3) 6 л.

8. При уменьшении внешнего давления температура кипения жидкости:

1) увеличивается; 2) уменьшается; 3) не изменяется.

9. Температура льда при его плавлении:

1) повышается; 2) понижается; 3) не изменяется.

10. С увеличением температуры сопротивление полупроводников:

1) увеличивается; 2) уменьшается; 3) не изменяется.

11. Как изменится сила электрического взаимодействия между двумя зарядами при увеличении расстояния между ними от 5 км до 10 км:

1) уменьшится в 2 раза; 2) уменьшится в 4 раза; 3) не изменится?

12. Чему равен заряд, проходящий через паяльник за 2 мин при силе тока 0,5 А:

1) 60 Кл; 2) 240 Кл; 3) 2000 Кл?

13. При удалении предмета от плоского зеркала размер его изображения:

1) увеличивается; 2) уменьшается; 3) не изменяется.

14. Работа выхода электронов для вольфрама 4,4 эВ, а для калия 2,2 эВ. Отношение минимальных частот света, вызывающего фотоэффект, для вольфрама и калия равно:

1) 0,5; 2) 2; 3) 4.

15. Не отклоняются в магнитном поле:

1) альфа-лучи; 2) бета-лучи; 3) гамма-лучи.

Часть 2. Решите задачи

16. Каково минимальное ускорение подъема груза массой 500 кг, при котором разорвется трос, если максимальная сила натяжения, которую выдерживает трос, 15 кН?

17. Снаряд массой 20 кг, летевший горизонтально со скоростью 50 м/с, попадает в покоящуюся платформу с песком общей массой 10 т и застревает. С какой скоростью начнет двигаться платформа?

18. В проводнике сопротивлением 2 Ом, подключенном к элементу с ЭДС 1,1 В, сила тока равна 0,5 А. Какова сила тока при коротком замыкании элемента?

19. На каком расстоянии от линзы с фокусным расстоянием 12 см надо поместить предмет, чтобы его действительное изображение было втрое больше самого предмета?

20. С какой наименьшей скоростью должна лететь свинцовая дробинка, чтобы при ударе о препятствие она расплавилась? Считать, что 80% кинетической энергии превратилось во внутреннюю энергию дробинки, а температура дробинки до удара была $127\ °C$. Температура плавления свинца $327\ °C$, удельная теплоемкость свинца $130\ \text{Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, удельная теплота плавления свинца 23 кДж/кг.

Публикацию подготовили Е.Деза, С.Жданов, Б.Кукушкин, Л.Прояненкова

Очередной набор в ОЛ ВЗМШ

Открытый лицей «Всероссийская заочная многопредметная школа» (ОЛ ВЗМШ) Российской академии образования, работающий при Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова, в сорок четвертый раз проводит набор учащихся.

ОЛ ВЗМШ – государственное учреждение дополнительного образования, причем не только для школьников. «ОТКРЫТЫЙ» – значит доступный для всех желающих пополнить свои знания в одной или нескольких из следующих областей науки: математика, биология, филология, физика, экономика, химия, правоведение, история, информатика (перечисление – в хронологическом порядке открытия отделений).

Сейчас ОЛ ВЗМШ совместно с другими научно-педагогическими учреждениями ведет исследовательские работы по разработке новых интерактивных технологий в образовании и переводу части своих учебно-методических комплексов на язык современных телекоммуникаций, в частности – по организации Интернет-отделения ОЛ ВЗМШ.

За время существования ВЗМШ удостоверения о ее окончании получили несколько сотен тысяч школьников и тысячи кружков – групп «Коллективный ученик ВЗМШ».

Обучение в школе ЗАОЧНОЕ, т.е. начиная с сентября-октября 2008 года все поступившие будут систематически получать специально разработанные для заочного обучения материалы, содержащие изложение теоретических вопросов, методов рассуждений, разнообразные задачи для самостоятельной работы, образцы решений задач, деловые игры, контрольные и практические задания.

Контрольные работы учащихся будут тщательно проверяться и рецензироваться преподавателями ВЗМШ – студентами, аспирантами, преподавателями и научными сотрудниками МГУ, а также других вузов и учреждений, где имеются филиалы школы. Многие из преподавателей в свое время сами закончили ВЗМШ и поэтому особенно хорошо понимают, как важно указать, помимо конкретных недочетов, пути ликвидации имеющихся пробелов в знаниях, порекомендовать дополнительную литературу, поругать за невнимательность и похвалить за заметный (а иногда – и за самый маленький) прогресс и трудолюбие.

Поступившие в ОЛ ВЗМШ смогут узнать об увлекательных вещах, часто остающихся за страницами школьного учебника, познакомиться с интересными нестандартными задачами и попробовать свои силы в их решении. Для многих станет откровением, что задачи бывают не только в математике, физике и химии, но и в биологии, филологии, экономике и других науках. Решение задач поможет прояснить, сделать интересными многие разделы, казавшиеся непонятными и скучными.

Одна из особенностей учебных программ и пособий ВЗМШ – в том, что они созданы действующими на переднем крае науки талантливыми учеными и опытными незаурядными педагогами (часто эти два качества совмещаются в одном и том же человеке). Недаром на X Всемирном конгрессе по математическому образованию, который прошел летом 2004 года в Дании, рассказ о 40-летней работе математического отделения ОЛ ВЗМШ вызвал неподдельный интерес и одобрение участников.

Чтобы успешно заниматься в заочной школе, вам придется научиться самостоятельно и продуктивно работать с книгой, грамотно, четко, коротко и ясно излагать свои мысли на бумаге и других носителях информации, а это, как известно, умеют далеко не все. Возможно, наша заочная школа поможет вам выбрать профессию, найти свое место в окружающем мире.

Все выполнившие программу ОЛ ВЗМШ получают соответствующие дипломы. Хотя формальных преимуществ они не дают, приемные комиссии многих вузов учитывают, что обладатели этих удостоверений в течение продолжительного времени самоотверженно трудились над приобретением знаний, научились самостоятельно творчески работать, а это значит, что из них получатся хорошие студенты и, в дальнейшем, грамотные, вдумчивые, широко образованные специалисты.

Если у вас имеется такая возможность, вы будете частично общаться с нашей школой с помощью Интернета – чем дальше, тем больше.

Для поступления в ОЛ ВЗМШ надо успешно выполнить вступительную контрольную работу. Приемную комиссию интересует, в первую очередь, ваше умение рассуждать, попытки (пусть поначалу не совсем удачные) самостоятельно мыслить и делать выводы. Преимуществом при поступлении пользуются проживающие в сельской местности, поселках и небольших городах, где нет крупных научных центров и учебных заведений и где получить дополнительное образование можно лишь заочно.

Решения задач вступительной работы надо написать на русском языке в обычной ученической тетради в клетку (на некоторые отделения – на открытке или на двойном тетрадном листе; см. ниже). Желающие поступить сразу на несколько отделений каждую работу присылают *в отдельной тетради*. На обложке тетради укажите: *фамилию, имя, отчество, год рождения, базовое образ*ование (сколько классов средней школы будет закончено *к сентябрю 2008 года*), *полный почтовый адрес* (с индексом), *откуда узнали об ОЛ ВЗМШ* (из «Кванта», от друзей, из афиш заочной школы и т.п.), *на какое отделение хотите поступить.*

Вступительные работы обратно не высылаются.

Без вступительной работы, только по заявлению, принимаются на индивидуальное обучение победители областных (краевых, республиканских) туров всероссийских олимпиад по соответствующим предметам, а также участники финальных туров этих олимпиад (не обязательно в последних).

Учащиеся ОЛ ВЗМШ частично возмещают расходы на свое обучение. Плата невелика, на каждом отделении своя. По просьбе тех, кто не в состоянии внести эту плату, ОЛ ВЗМШ готов обратиться по любому адресу – в школу, в орган народного образования, к другому спонсору – с ходатайством об оплате этим благотворителем соответствующих расходов.

Помимо индивидуального обучения, на всех отделениях ВЗМШ, кроме экономического, биологического и отделения информатики, имеется еще одна форма – «Коллективный ученик». Это группа учащихся, работающая под руководством преподавателя (школьного учителя, преподавателя вуза, студента или другого энтузиаста), как правило, по тем же пособиям и программам, что и индивидуально. *Прием в эти группы проводится до 15 октября 2008 года.* Для зачисления группы требуется заявление ее руководителя (с описанием его профессии и должности, со списком учащихся и четким указанием, в каком классе они будут учиться с сентября 2008 года); заявление должно быть подписано руководителем группы, заверено и подписано руководителем учреждения, при котором будет работать группа. Работа групп «Коллективный ученик» может оплачиваться школами как факультативные занятия.

На Северо-Западе России работает Заочная школа Ленинградского областного Министерства образования, созданная при Санкт-Петербургском университете и имеющая отделения математики, биологии и химии.

Проживающие на Северо-Западе России (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми республиках), желающие поступить на отделение математики, высылают вступительные работы по адресу: 197755 Санкт-Петербург, Лисий Нос, Ново-Центральная ул., д. 21/7, Северо-Западная ЗМШ (на прием).

Проживающие в остальных регионах России, дальнем и ближнем зарубежье высылают свои работы в адрес ОЛ ВЗМШ или (по математике) соответствующего филиала.

Адрес ОЛ ВЗМШ: 119234 Москва, Воробьевы горы, МГУ, ОЛ ВЗМШ, на прием (с указанием отделения)

Телефон: (495) 939-39-30

Филиалы математического отделения ОЛ ВЗМШ имеются:

- при университетах – в городах Донецк (Украина), Екатеринбург, Иваново, Майкоп, Ульяновск, Челябинск, Ярославль;
- при педагогическом институте в городе Кирове;
- при Брянском центре технического творчества молодежи.

Ниже вы найдете краткие сведения о каждом отделении ОЛ ВЗМШ и условия вступительных контрольных заданий.

Отделение математики

Из этого отделения, открывшегося в 1964 году, выросла вся заочная школа (вначале она так и называлась – математическая).

За время обучения вы более глубоко, чем в обычной школе, сможете осознать основные идеи, на которых базируется курс элементарной математики, познакомиться (по желанию) с некоторыми дополнительными, не входящими сейчас в школьную программу разделами, а также поучиться решать олимпиадные задачи. На последнем курсе большое внимание уделяется подготовке к сдаче школьных выпускных экзаменов и вступительных экзаменов в вузы.

На отделении созданы учебно-методические комплексы, приспособленные для заочного обучения. Часть из них издана массовым тиражом. Осуществляется перевод уже апробированных и вновь создаваемых материалов на электронный язык в интерактивном режиме, отделение готовится к работе в Интернете. Практически каждый год издаются и «проходят обкатку» новые пособия, расширяющие и дополняющие программу обучения.

Окончившие отделение математики получат, в зависимости от желания и способностей, либо подготовку, необходимую для выбора математики как профессии, либо математическую базу для успешного усвоения вузовского курса математики, лежащего в основе профессиональной подготовки по другим специальностям: ведь сейчас математика служит мощным инструментом исследований во многих отраслях человеческой деятельности. Поступившие в этом году на первый курс смогут выбирать новые пособия, разработанные для будущих физиков и биологов, химиков и историков...

Обучение длится 5 лет. Можно поступить на любой курс. Для этого к сентябрю 2008 года надо иметь следующую базу: на 1-й курс – 6 классов средней школы, на 2-й курс – 7 классов, на 3-й – 8, на 4-й – 9, на 5-й – 10 классов. При этом поступившим на 2-й, 3-й и 4-й курсы будет предложена часть заданий за предыдущие курсы. Для поступивших на 5-й курс обучение проводится по специальной интенсивной программе с упором на подготовку в вуз.

Для поступления надо решить хотя бы часть задач помещенной ниже вступительной работы (около номера каждой задачи в скобках указано, учащимся каких классов она предназначена; впрочем, можно, конечно, решать и задачи для более старших классов). На обложке тетради напишите, на какой курс вы хотите поступить и в каком классе будет учиться с 1 сентября 2008 года.

Срок отправки вступительной работы – до 15 апреля 2008 года.

Группы «Коллективный ученик» (на все курсы по любой программе) принимаются без вступительной работы.

Задачи

1 (6 – 10). Найдите правильную дробь, которая увеличится в 3 раза, если ее числитель возвести в куб и одновременно к знаменателю прибавить число 3.

2 (7 – 10). Могут ли две биссектрисы треугольника быть взаимно перпендикулярными?

3 (8 – 10). Первая, вторая и третья цистерны одинакового объема начинают одновременно наполняться нефтью со скоростями 100, 60 и 80 литров в минуту соответственно. Сначала первая цистерна пуста, а вторая и третья – частично заполнены. Известно, что все три цистерны будут заполнены полностью одновременно. Во сколько раз первоначальное количество нефти во второй цистерне больше, чем в третьей?

4 (8 – 10). Найдите радиус окружности, вписанной в четверть единичного круга (окружность должна касаться и дуги круга, и ограничивающих четверть круга радиусов).

5 (6 – 10). Простое или составное число $5^{14} - 2^6 \cdot 5^7 + 2^{10}$? (Простым называется натуральное число, которое делится только само на себя и на единицу.)

6 (7 – 10). Найдите углы треугольника, если две его стороны видны из центра описанного около него круга под углами $20°$ и $30°$ соответственно.

7 (6 – 10). Найдите трехзначное число, если известно, что три последние цифры его квадрата образуют само это число.

8 (8 – 10). Через точку K, взятую внутри окружности, проведены хорды AB и CD, причем $AK = 2$, $CK = 7$. Радиус окружности, вписанной в треугольник ADK, равен 1. Каков радиус окружности, вписанной в треугольник CBK?

9 (8 – 10). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}, \\ x = yz, \end{cases}$$

если y и z – простые числа (см. условие задачи 4).

10 (8 – 10). На катете прямоугольного треугольника как на диаметре построена окружность. Оказалось, что она делит его гипотенузу в отношении $1:3$. Найдите углы треугольника.

11 (6 – 10). Решите уравнение

$$\frac{a+b-x}{c} + \frac{a+c-x}{b} + \frac{b+c-x}{a} + \frac{4x}{a+b+c} = 1,$$

если a, b и c – положительные числа.

12 (6 – 10). Имеется набор одинаковых правильных картонных треугольников, вершины которых занумеровали цифрами 1, 2, 3 так, что в каждом треугольнике все вершины имеют разные номера. Затем треугольники аккуратно сложили в стопку, совместив их вершины, и подсчитали сумму номеров вершин в каждом углу стопки. Могут ли все три суммы равняться: а) 55; б) 50?

13 (8 – 10). Упростите выражение

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Отделение биологии

Набор объявляется в 35-й раз. Зачисление проводится на конкурсной основе по результатам вступительной работы. В конкурсе могут принять участие школьники, которые в этом учебном году занимаются в 8 или 9 классе, независимо от места проживания. Обучение для восьмиклассников длится 3 года, для девятиклассников – 2 года.

Учащимся восьмых классов необходимо решить задачи 1–3 и одну из задач 4, 5 помещенной ниже вступительной работы, девятиклассникам – задачи 2, 3 и две из задач 4–6.

В ответах можно использовать и факты, найденные в литературе, и собственные идеи. Просим для сведений, почерпнутых из книг, приводить ссылки на источники.

Вместе с работой пришлите конверт с маркой и заполненным адресом (для отправки решения приемной комиссии).

Срок отправки вступительной работы – до 31 мая 2008 года.

Задачи

1. Несмотря на разнообразие зверей и птиц (биологи насчитывают тысячи видов тех и других), лишь немногие из них были одомашнены человеком. Что же препятствовало одомашниванию других видов? Постарайтесь указать как можно больше причин.

2. В ряде случаев, выращивая (в больших масштабах или на личных участках) какое-то растение, вместе с ним на ту же территорию высаживают небольшое количество растений другого вида. Для каких целей это делается? Предложите как можно больше объяснений.

3. Обычно инкубационный период заболевания – время между попаданием возбудителя в организм и появлением симптомов болезни, сопровождающихся явным ухудшением самочувствия, – составляет несколько дней. Эта ситуация представляется вполне естественной – попав в благоприятные условия, возбудитель начинает быстро размножаться и вскоре достигает такой численности, когда его воздействие на физиологические процессы в организме-хозяине становится существенным. Однако существуют и инфекционные болезни людей, для которых инкубационный период может оказаться значительно более продолжительным. Каким из известных вам болезней это свойственно? С какими причинами может быть связана такая задержка для данных болезней?

4. В спортивные секции и спортшколы берут далеко не всех претендентов – многих желающих тренеры «отбраковывают» сразу или после нескольких занятий. Какими соображениями тренеры при этом руководствуются? Конечно, ответ на этот вопрос будет зависеть от вида спорта. Поэтому рассмотрите несколько спортивных секций и дайте ответ для каждой из них.

5. В вашем распоряжении имеются медико-статистические данные за несколько последних лет о частоте и причинах смертности, а также различных заболеваний среди жителей определенного региона. Как на основании этих сведений определить места проживания, наиболее опасные для здоровья? Ясно, что нельзя просто остановить свой выбор на местности с максимальной смертностью – такой выбор в некоторых случаях окажется ошибочным. (А кстати, почему?) Какие районы в вашем городе или области (крае, республике) наиболее опасны для здоровья их жителей? Почему вы так считаете?

6. По мнению Кифы Мокиевича, существование витаминов убедительно подтверждает правоту ламарковской, а не дарвиновской теории эволюции. Ламарк без затруднений объяснил бы возникновение витаминов – стремление живых существ к прогрессу приводит к появлению у живых организмов новых, более эффективных биохимических процессов, которые, однако, не могут реализоваться из-за отсутствия какого-то нужного вещества (витамина). Впоследствии же, если повезет, животное расширит свой пищевой рацион (тоже стремясь к прогрессу), и тогда с участием витаминов произойдет «включение» уже существующего биохимического процесса. Дарвинистам же, полагает Кифа Мокиевич, придется изрядно попотеть, чтобы объяснить возникновение явно неприспособительного признака: организм почему-то переходит от самодостаточного обмена веществ к зависимости от поступления или непоступления витаминов извне. В чем, на ваш взгляд, состоит ошибка Кифы Мокиевича?

Отделение физики

Отделение работает 16 лет. Обучение одно-, двух- и трехгодичное. На трехгодичный поток (курс Ф3) принимаются оканчивающие в 2008 году 8 классов средней школы, на двухгодичный (курс Ф2) – оканчивающие 9 классов и на одногодичный (курс Ф1) – 10 классов. Учащиеся, оканчивающие 10 класс, могут пройти ускоренно всю программу за один год (курс Ф0). Для поступления на курс Ф3 нужно решить задачи 1–5 приведенной ниже вступительной работы, на курс Ф2 – задачи 4–9, на курс Ф1 – задачи 5–10, на курс Ф0 – задачи 4–10. На обложке тетради следует указать фамилию, имя и отчество, код курса (Ф0, Ф1, Ф2 или Ф3), сколько классов будет закончено к 1 сентября 2008 года, полный почтовый адрес (с индексом), e-mail (если есть), телефон.

Срок отправки вступительной работы – до 1 июня 2008 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются на курсы Ф1, Ф2, Ф3 без вступительной работы.

Адрес отделения в Интернете: http://phys.problems.ru

Задачи

1. Экспресс, двигаясь с постоянной скоростью, проезжает мимо светофора за время $t_0 = 8$ с, а затем последовательно обгоняет две электрички одинаковой длины, затрачивая на это время $t_1 = 20$ с и $t_2 = 15$ с. Сколько времени первая электричка будет обгонять вторую, если ее скорость в полтора раза больше, чем у второй?

2. Кусок тающего льда с вмерзшей в него свинцовой дробинкой опускают в воду. После того как растаял лед массой $m_1 = 100$ г, объем погруженной части куска сократился вдвое. Когда масса льда уменьшилась еще на $m_2 = 50$ г, кусок начал тонуть. Найдите массу дробинки, если плотность льда $\rho_л = 0{,}9$ г/см^3, воды $\rho_в = 1{,}0$ г/см^3, свинца $\rho_с = 11{,}3$ г/см^3.

3. В мостиковой схеме, изображенной на рисунке 1, ток через гальванометр не течет. Известно, что при увеличении сопротивления резистора *1* на $R = 1$ Ом мостик останется в равновесии, если изменить сопротивление резисторов *2* или *4* на $3R$ или изменить сопротивление резистора *3* на $2R$. Найдите величины сопротивлений резисторов, входящих в мостик.

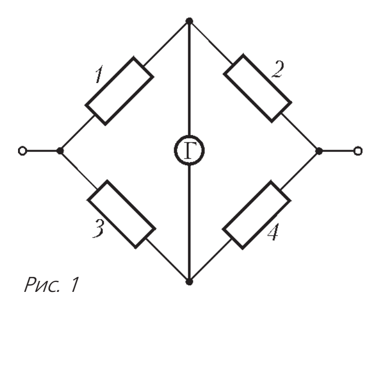


Рис. 1

4. Куб, нижняя половина которого сделана из одного материала, а верхняя – из другого, стоит на наклонной плоскости с углом α при основании. При медленном увеличении α до значения $\alpha_1 = 30°$ куб переворачивается через ребро. При каком минимальном значении α_2 угла наклонной плоскости куб будет переворачиваться из нового положения? Считайте, что вдоль плоскости куб не проскальзывает.

5. В стеклянном аквариуме, наполовину заполненном водой, вертикально стоит цилиндрическая палочка на расстоянии $L = 30$ см от стенки. Снаружи с расстояния $s = 20$ см от стенки на палочку смотрит наблюдатель в направлении, перпендикулярном стенке. Во сколько раз отличаются радиусы частей палочки, которые он видит ниже и выше уровня воды в аквариуме? Показатель преломления воды $n = 1{,}33$, радиус палочки намного меньше расстояния между ней и наблюдателем.

6. Мячик отпускают без начальной скорости с высоты $H = 2$ м над наклонной плоскостью, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Найдите минимальное значение скорости мячика в промежутке между первым и вторым ударами о плоскость, если удары считать абсолютно упругими.

7. Два тела, связанные нерастяжимой нитью длиной L, лежат на краю гладкой ступеньки высотой $H = 4L/5$. Одно из тел падает со ступеньки вертикально вниз, увлекая за собой другое (рис.2). Достигнув пола, первое тело прочно прилипает к нему. Найдите время, в течение которого второе тело будет свободно падать.

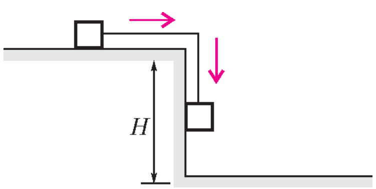


Рис. 2

8. На край тележки длиной L, которая может ездить по столу, помещают небольшой брусок массой m и толчком сообщают ему некоторую скорость (рис.3). Упруго ударившись об упор, установленный на другом конце тележки, брусок возвращается и падает с нее, переместившись относительно земли на расстояние $L/3$. Найдите массу M тележки. Трением между бруском и тележкой пренебречь.

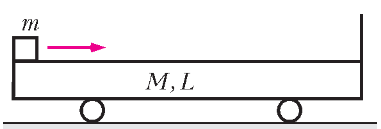


Рис. 3

9. К нижнему концу нерастянутой пружины жесткостью $k = 20$ Н/м, подвешенной вертикально, прикрепляют груз массой $m_1 = 200$ г и отпускают. Груз начинает совершать колебания. При прохождении нижней точки к нему подвешивают дополнительный груз массой $m_2 = 150$ г. Найдите амплитуду и период колебаний системы. Массой пружины пренебречь.

10. В сосуде с теплопроводящими стенками под поршнем находятся ν молей азота при температуре T_0. Сначала газ остывает до температуры $T_1 = 0{,}8T_0$. После этого объем медленно увеличивают в полтора раза, а затем газ быстро сжимают до начального объема, совершая работу A, и закрепляют поршень. Найдите количество теплоты, отданное газом при дальнейшем остывании до температуры T_0. Постройте график зависимости давления газа от его объема, считая, что начальный объем газа равен V_0.

Отделение химии

На отделение принимаются учащиеся, имеющие базовое образование в объеме 8, 9 и 10 классов средней школы.

Полная программа обучения на отделении – три года.

Программа включает следующие одногодичные курсы:
- общая химия (с элементами неорганической химии);
- неорганическая химия;
- органическая химия;
- химия окружающей среды (полгода).

Если вы хотите научиться решать задачи, вам будет полезен курс «Методы решения задач по химии». Его можно совмещать с другими курсами.

Более подробные сведения о программе и порядке обучения высылаются вместе с извещением о решении Приемной комиссии.

Задачи вступительной работы, помещенные ниже, – общие для всех поступающих, независимо от базового образования.

Срок отправки вступительной работы – до 15 июня 2008 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы.

Наш сайт: www.chem-dist.ru

Задачи

1. Неизвестный газ имеет плотность по фтору 1,16. Что это за газ? Постарайтесь найти все возможные решения этой задачи.

2. Укажите значения валентности и степени окисления атомов в CF_4, C_3Cl_8, C_2H_4, NH_4^+, H_3O^+, SnH_4.

3. Предложите не менее 5 способов получения селенида рубидия. Напишите уравнения реакций. (Однотипные реакции считаются одним способом.)

4. Смесь водорода с хлором объемом 22,4 л (н.у.) взорвали. Продукты взрыва после пропускания через 5,0 мл воды и приведения к н.у. имеют объем 1,12 л. Определите возможное содержание хлора (в % по объему) в исходной смеси. Приведите расчеты и уравнение реакции.

5. Напишите структурные формулы всех продуктов, которые могут образоваться при нагревании смеси бутанола-2 и пропанола-1 с концентрированной серной кислотой.

Отделение филологии

Отделение существует с 1989 года. За это время подготовлено и издано большое количество уникальных учебных пособий по русскому языку, общему языкознанию, истории и теории литературы.

Принимаются все желающие, имеющие базовую подготовку в объеме 7 классов.

Отделение предлагает на выбор 15 учебных программ. Подробно о них рассказано на нашем сайте. Сведения о программах и порядке обучения высылаются вместе с извещением о решении Приемной комиссии. При оценке вступительной работы учитывается, в каком классе вы учитесь.

Вы хотите исправить грамотность? Познакомиться с любопытными проблемами теории и практики русского языка? Освоить приемы лингвистического или литературоведческого анализа? Узнать кое-что о журналистике и оценить свои творческие способности? Приобрести навыки, необходимые для успешной сдачи экзаменов в вуз? Тогда выполните и пришлите нам вступительное задание.

Внимание! На первой странице укажите следующие данные: Ф.И.О., какой класс заканчиваете, полный (с индексом!) почтовый адрес, телефон. Вместе с выполненным заданием пришлите, пожалуйста, стандартный конверт с маркой и заполненным вашим адресом (с индексом) для ответа Приемной комиссии.

Срок отправки вступительной работы – до 1 июня 2008 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы.

Если вопросы, предложенные нами, для кого-то пока сложны, но вы хотите у нас учиться, пришлите информацию о себе, и мы постараемся помочь.

Наш e-mail: filologiyvzmsh@mail.ru
Наш сайт: www.philologist.ru

Вопросы

1. Приведите примеры из русской или зарубежной литературы, когда автор «влезает в шкуру» животного. Какого художественного эффекта достигает писатель или поэт, ведя повествование от лица собаки, кошки, рыбки, птички?

2. И после того как А.С.Пушкин посетовал: «Четырехстопный ямб мне надоел», этот размер остается самым популярным. Докажите это, вспомнив шедевры русских поэтов разных эпох.

3. Есть люди, которые не понимают смысла некоторых пословиц и поговорок и для них требуется специальное «научное пояснение». Исходя из этих пояснений восстановите пословицы и поговорки:

А) Проблема транспортировки жидкости в сосуде переменной плотности.

Б) Удвоение личностной ценности субъекта после получения им травматического шока.

В) Отрицательное отношение домашней птицы с нежвачным парнокопытным.

4. Вставьте пропущенные буквы, расставьте недостающие знаки препинания:

А между тем давно (не)чита(н, нн)ые долгое время (н...)кем (не)востребова(н, нн)ые сейчас видимо соверше(н, нн)о (не)нужные книги стояли впереме(ж, ш)ку с клее(е, я)(н, нн)ыми-перекле(е, я)(н, нн)ыми (по)всякому реставрирова(н, нн)ыми книгами, которые были написа(н, нн)ы несомне(н, нн)о подл...(н, нн)ыми мастерами слова или как говорит библиотекарь к(о, а)рифеями.

Отделение экономики

Отделение основано в 1993 году. Обучение проводится по двум основным программам: «Прикладная экономика» и «Экономика и география». Программа «Прикладная экономика» включает изучение основ экономической теории, а также знакомство с практикой бизнеса в деловой игре по переписке. Учащиеся программы «Экономика и география», помимо изучения основ экономической теории, знакомятся с физической и экономической географией, участвуют заочно в увлекательных путешествиях по странам мира.

Окончившим одну из основных программ предлагается специализация по выбору: «Основы предпринимательства и менеджмента», «Бухгалтерский учет и финансовый анализ», «Мировая экономика», «Экономика России: прошлое, настоящее и будущее».

На отделение принимаются все желающие с образованием не ниже 7 классов средней школы. Обучение проводится либо индивидуально, либо в небольших группах (2 – 4 человека). Формы обучения «Коллективный ученик» на экономическом отделении нет.

Учащимся 10–11 классов, желающим подготовиться одновременно к вступительным экзаменам на экономический факультет МГУ и к сдаче ЕГЭ для успешного поступления в другие экономические вузы, предлагается специальная программа «Экономика ПЛЮС», включающая, наряду с экономическими дисциплинами, углубленное изучение нескольких дополнительных предметов: математики, обществознания, русского языка и литературы. Для школьников, интересующихся географической наукой и собирающихся поступать на географический факультет МГУ или другого вуза, существует программа «География ПЛЮС», созданная преподавателями ОЛ ВЗМШ и географического факультета МГУ на основе опыта подготовительных курсов по географии Московского университета.

Вступительная работа для учащихся дается в форме теста. Решения присылайте *только* на открытках с указанием полного почтового адреса и индекса, фамилии, имени и отчества (все – *печатными буквами*); обязательно укажите источник информации об ОЛ ВЗМШ и напишите «Экономика, вступительный тест-2008». На открытке достаточно записать в строчку номера вопросов и под каждым написать букву, соответствующую ответу, который вы считаете правильным.

В 2008 году в Китае пройдут XXIX летние олимпийские игры, а в 2014 году столицей зимней олимпиады станет город Сочи. Этим событиям и посвящен наш тест. Правильно ответившие на все вопросы получат из букв своих ответов зашифрованное слово (фразу).

Срок отправки вступительной работы — до 15 мая 2008 года.

Тест

1. Родиной олимпийских игр является:
П) Вавилон;
Ч) Древний Египет;
О) Античная Греция;
В) Античный Рим.

2. Первая олимпиада современности состоялась в:
Л) 1896 году;
С) 1914 году;
Е) 1956 году;
И) 1988 году.

3. Укажите ошибку среди официальных олимпийских девизов:
М) быстрее;
К) выше;
Е) сильнее;
И) артистичнее.

4. Какой известный философ являлся шестикратным чемпионом олимпийских игр:
М) Пифагор;
П) Цицерон;
И) Декарт;
Ч) Диоген?

5. На скольких континентах проводились олимпийские игры:
Н) двух;
П) трех;
Е) четырех;
И) пяти?

6. В какой стране город Олимпия является административным центром одного из регионов:
С) Греция;
2) Крит;
О) Македония;
И) США?

7. Всероссийская олимпиада школьников, проводимая совместно МГУ и газетой «Московский Комсомолец», это:
0) «Очаруй Московский университет»;
А) «Покори Воробьевы горы»;
Н) «Возьми последний рубеж»;
Т) «Превзойди Михайло Ломоносова».

8. Предположим, что Центральный банк Китая осуществил ревальвацию юаня по отношению к доллару США. Следствием указанного события, при прочих равных условиях, может стать снижение:
0) объема импорта банковских услуг Китаем из США;
А) объема экспорта информационных технологий США в Китай;

Д) туристических поездок американцев в Китай;

В) туристических поездок китайцев в США.

9. В студенческой олимпиаде приняли участие 500 спортсменов. По ее итогам 190 спортсменов получили золотые медали, 350 — серебряные, 270 — бронзовые; 65 студентов были награждены и золотыми и бронзовыми медалями, 130 — золотыми и серебряными медалями, 140 — серебряными и бронзовыми. Сколько студентов смогли одновременно завоевать медали всех трех категорий:

А) 25;

О) 50;

Т) 75;

8) 100?

Отделение «Нравственность, право, закон» (право и граждановедение)

Это – двенадцатый набор на отделение.

Школьникам 8 – 11 классов и группам «Коллективный ученик» предлагаются два курса.

1) Годовой курс «Беседы о правах человека, нравственности, праве, законе и государстве». В курсе даются современные представления об основных понятиях, связанных с правом, законом и государством, рассказывается об основах российского законодательства, о правах человека. Разбираются примеры судебных процессов, приводятся общекультурные примеры, связанные с направленностью курса.

2) Полуторагодовой курс «Беседы об основах демократии».

Мы предлагаем проходить курсы именно в таком порядке. И только старшеклассники, если они не успевают пройти два курса подряд, но хотят освоить именно второй курс, могут начинать прямо с него.

Желающие поступить должны сообщить свой полный почтовый адрес (адрес электронной почты, если есть), фамилию, имя и отчество, сколько классов закончено. При оценке вступительной работы мы учитываем возраст (базовое образование) поступающего. В письмо обязательно *вложите обычный конверт с маркой и вашим адресом* (чтобы мы могли вам ответить) и ответы на приведенные ниже вопросы.

Срок отправки вступительной работы – до 1 июня 2008 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы.

Вопросы

1. Назовите трех-четырех известных российских дореволюционных юристов.

2. Кто автор следующих слов: «Мы все глядим в Наполеоны, двуногих тварей миллионы для нас орудие одно...»?

3. Вы – руководитель небольшого предприятия, работаете строго в соответствии с законом. Но неожиданно в одной из газет появилось сообщение, порочащее деятельность вашего предприятия. Естественно, вы хотите подать иск в суд. Какие из перечисленных ниже требований вы можете предъявить:

а) поместить опровержение;

б) закрыть данную газету;

в) возместить материальный ущерб, нанесенный предприятию опубликованием неверных сведений о нем;

г) снять с работы главного редактора;

д) возместить предприятию моральный вред?

Отделение истории

Отделение открылось в 1998 году. Обучение на отделении позволит всем, в том числе жителям самых отдаленных городов и деревень, расширить свой кругозор, подготовиться к поступлению в вуз. Успешно прошедшие курс обучения получают диплом.

А зачем нужно изучать историю? Во-первых, это просто интересно. Любопытно знать, как жили когда-то люди, во что одевались, чем питались, что читали, как женились и выходили замуж, за что боролись и «на что напарывались». Во-вторых, это полезно. Только зная прошлое, можно понять настоящее и спрогнозировать будущее. Мы поможем вам в этом разобраться.

Специально для вас опытные преподаватели пишут книжки. Последние новости из мира истории вы узнаете одними из первых! Мы будем поддерживать с вами постоянную связь. По нашим книжкам вы будете выполнять особые задания и сообщать нам, что вы раскопали. Ведь, в сущности, труд историка и состоит из этих раскопок. Историк-археолог, копая землю и песок, отыскивает крупицы ушедших времен; историк-архивариус копается в груде бумаг и достает из архивов и даже из частной переписки все, что может позволить ему понять образ времени; историк-теоретик как увлекательный роман читает археологические таблицы, сухие сводки, статистику и восстанавливает по ним живую ткань ушедшей жизни. У историка особая профессия: он в одном лице следователь, прокурор и адвокат времени.

Вступительное задание на отделение выполняется на двойном листе бумаги.

Срок отправки вступительной работы – до 1 июня 2008 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы.

Задание

1. Отгадайте, кто это:

- Русский промышленник, ситцевый магнат, меценат.
- Его жена и друг, Вера Николаевна, – урожденная Мамонтова.
- Молодой купец с гидом и картой объехал все европейские музеи и сделался тонким знатоком живописи.
- В 24 года основал в своем родовом доме частную галерею русской живописи.
- В 60 лет передал свою галерею в дар Москве.
- Из всех современных ему художников предпочитал передвижников.
- Мечтал найти иконы Рублева, но удача улыбнулась другому коллекционеру.
- Стал первым директором основанного им музея, тратил на него все свои сбережения, но из скромности никогда не являлся на собственные юбилеи.
- Совершенно бескорыстен. Его бумажник всегда был открыт для нуждающихся.
- С художниками никогда не торговался. Заказывая картины, платил сполна.
- Его именем назван национальный музей и станция метро в Москве.
- Его портрет работы Репина украшает залы созданного им музея.
- Его последние слова родственникам: «Берегите галерею».

2. Опишите, не более чем в 7 предложениях, политический портрет второго президента России.

Внимание!

Отделение истории проводит набор на курс «Обществознание». Курс включает следующие дисциплины: философия, социология, политология, теория государства, государственное устройство России, право, экономика.

Слушателям будут направляться оригинальные учебные пособия, созданные на основе многолетнего опыта работы авторов курса. Проверка знаний будет осуществляться с помощью общепринятой системы тестирования.

Программа курса рассчитана на 1 год. Обучение носит заочный характер и имеет целью дать выпускникам школ – как крупных городов, так и небольших сел – глубокие знания по общественным дисциплинам, подготовить их к успешной сдаче ЕГЭ и поступлению в гуманитарные вузы.

Для записи на курс необходимо отправить заявление *до 1 июня 2008 года (с пометкой: курс «Обществознание»).* В заявлении укажите: фамилию, имя, отчество, свой полный домашний адрес (с индексом!), класс, в котором вы будете учиться с 1 сентября 2008 года.

Отделение информатики

Отделение открылось в 2006 году. Прием ведется на курс «Программирование для начинающих».

На отделение принимаются все желающие с образованием не ниже 7 классов средней школы. Для успешного выполнения практических заданий должна быть возможность работы на компьютере. За год обучения учащиеся освоят основные конструкции языка Паскаль, изучат простейшие алгоритмы и в качестве итоговой работы напишут игровую программу.

Для зачисления необходимо прислать анкету с ответами на приведенные ниже вопросы.

Внимание! Ответы на вопросы анкеты присылайте на двойном тетрадном листе, указав на первой странице важные для нас данные: Ф.И.О., класс, который вы заканчиваете, полный (с индексом!) почтовый адрес, e-mail (если есть). Пишите развернутые ответы на вопросы.

Срок отправки анкеты – до 15 мая 2008 года.

Вопросы

1. Изучаете ли вы в школе информатику? Какие темы вы изучили?

2. Что такое информатика? Что изучается в разделе «Программирование»?

3. Изучали ли вы какие-нибудь языки программирования? Какие?

4. Какие операционные системы вы знаете?

5. Какие программы установлены на компьютере, за которым вы работаете?

6. Есть ли у вас возможность выхода в Интернет?

7. Знаете ли вы, что такое: а) циклы; б) массивы; в) функции; г) условия?

8. Что такое рекурсия, индукция? В чем различия между ними?

9. По кругу выложены 15 камушков в порядке увеличения веса. Внешне все камушки отличаются друг от друга: состоят из разных пород, имеют различную окраску, форму, вес, объем и т.д. Как при помощи чашечных весов без стрелок и гирек найти самый тяжелый камень, сделав при этом как можно меньше взвешиваний?

Федеральная заочная физико-техническая школа при МФТИ

Федеральная заочная физико-техническая школа (ФЗФТШ) при Московском физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий и т. п.), расположенных на территории Российской Федерации, на 2008/09 учебный год.

ФЗФТШ при МФТИ как государственное образовательное учреждение профильного дополнительного образования детей работает с 1966 года. За прошедшие годы школу окончили более 80 тысяч учащихся; практически все ее выпускники поступают в ведущие вузы страны, а каждый второй студент МФТИ – ее выпускник. Финансирует школу Федеральное агентство по образованию. Обучение для учащихся, проживающих в Российской Федерации, в рамках утвержденного плана приема – бесплатное.

Научно-методическое руководство школой осуществляет Московский физико-технический институт (государственный университет), который готовит высококвалифицированных специалистов по современным направлениям науки и техники. В их подготовке принимают участие ведущие отраслевые и академические научно-исследовательские институты и научно-производственные объединения страны (базовые организации МФТИ). Преподавание в МФТИ ведут известные педагоги и ученые, среди которых около 100 членов Российской академии наук. Физтеховское образование позволяет не только успешно работать в науке, но и хорошо ориентироваться в жизни.

Цель нашей школы – помочь учащимся, интересующимся физикой и математикой, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам, а также способствовать профессиональному самоопределению учащихся.

Набор в 8, 9, 10 и 11 классы на 2008/09 учебный год проводится на заочное, очно-заочное и очное отделения.

Заочное отделение *(индивидуальное обучение)*

Тел./факс: (495) 408-51-45

Прием на заочное отделение проводится на конкурсной основе по результатам выполнения вступительного задания по физике и математике, приведенного ниже. Полная программа обучения рассчитана на 4 года, т.е. на 8 – 11 классы, но поступать можно в любой из этих классов.

В течение учебного года, в соответствии с программой ФЗФТШ, ученик будет получать задания по физике и математике по каждой теме (4 задания по каждому предмету для 8 класса, 6 – 7 заданий по каждому предмету для 9, 10 и 11 классов), а затем – рекомендуемые авторские решения этих заданий вместе с проверенной работой. Задания содержат теоретический материал, разбор характерных примеров и задач по соответствующей теме и 8 – 12 контрольных вопросов и задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Задания составляют опытные преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ. Работы учащихся-заочников проверяют студенты, аспиранты и выпускники МФТИ (из них 80% – бывшие выпускники нашей школы).

Срок отправления решения вступительного задания – *не позднее 1 марта 2008 года.* Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 2008 года.

Вне конкурса в ФЗФТШ принимаются *победители* областных, краевых, республиканских, окружных и всероссийских олимпиад по физике и математике 2007/08 учебного года. Им необходимо до 15 мая 2008 года выслать в ФЗФТШ выполненную вступительную работу по физике и математике вместе с копиями дипломов, подтверждающих участие в перечисленных выше олимпиадах.

Тетрадь с выполненными заданиями (по физике и математике) высылайте по адресу:

141700 г. Долгопрудный Московской области, Институтский пер., 9, ФЗФТШ при МФТИ.

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет на русском языке самостоятельно в одной школьной тетради, сохраняя тот же порядок задач, что и в задании. Тетрадь нужно выслать в конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку).

На *внутреннюю* сторону обложки тетради наклейте справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса.

На *лицевую* сторону обложки наклейте лист бумаги, четко заполненный по следующему образцу:

Л. №								
№ задачи	1	2	3	…	15	16	17	Σ
М.								
Ф.								

1. Республика, край, область	*Кемеровская область*
2. Фамилия, имя, отчество	*Чистова Галина Сергеевна*
3. Класс, в котором учитесь	*восьмой*
4. Номер школы	*35*
5. Вид школы (обычная, лицей, гимназия, с углубленным изучением предмета)	*лицей*
6. Подробный домашний адрес (с указанием индекса), телефон, e-mail	*654041 г. Новокузнецк, ул.Волжская, д.74,кв.3, e-mail:dio@rdsc.ru*
7. Место работы и должность родителей:	
отец	*доцент*
мать	*врач*
8. Адрес школы, телефон, факс, e-mail	*654041 г. Новокузнецк, ул.Циолковского, д.65*
9. Фамилия, имя, отчество преподавателей:	
по физике	*Григорьева Алена Михайловна*
по математике	*Горшенина Нина Анатольевна*
10. Каким образом к вам попало это объявление?	

На конкурс ежегодно приходит более 4 тысяч вступительных работ. Пожалуйста, обратите внимание на правильность заполнения анкеты! Пишите аккуратно, лучше печатными буквами.

Для получения ответа на вступительное задание и для отправки вам первых заданий *обязательно* вложите в тетрадь *два одинаковых* бандерольных конверта размером 160 × 230 мм. На конвертах четко напишите свой домашний адрес.

Очно-заочное отделение (*обучение в факультативных группах*)

Тел./факс: (495) 409-93-51

Факультативные группы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении *двумя преподавателями* – физики и математики, в отдельных случаях разрешается обучение по одному предмету. Руководители факультатива принимают в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ФЗФТШ.

Группа (не менее 8 человек) принимается в школу, если директор общеобразовательного учреждения сообщит в ФЗФТШ фамилии, имена, отчества ее руководителей и поименный алфавитный список обучающихся (Ф.И.О. полностью, с указанием класса *текущего учебного года и итоговых оценок* за вступительное задание по физике и математике, домашний адрес учащихся, с указанием индекса, телефон и e-mail), телефон, факс и e-mail общеобразовательного учреждения. Все эти материалы и конверт для ответа о приеме в ФЗФТШ с обратным адресом одного из руководителей следует выслать до *25 июня 2008 года* по адресу: 141700 г. Долгопрудный Московской области, Институтский пер., 9, ФЗФТШ при МФТИ (с пометкой «Факультатив»). *Тетради с работами учащихся не высылаются.*

Работа руководителей факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением как руководство профильными факультативными занятиями по предоставлении ФЗФТШ при МФТИ соответствующих сведений.

Руководители, работающие с учащимися, будут получать в течение учебного года учебно-методические материалы (программы по физике и математике, задания по темам программ, решения заданий с краткими рекомендациями по оценке работ учащихся), приглашаться на курсы повышения квалификации учителей физики и математики, проводимые на базе МФТИ. Работы учащихся проверяют и оценивают руководители факультативных групп, а в ФЗФТШ ими *высылаются ведомости с итоговыми оценками по каждому заданию и итоговая ведомость за год.*

Очное отделение (*обучение в вечерних консультационных пунктах*)

Тел.: (495) 409-95-83

Для учащихся Москвы и Московской области по программе ФЗФТШ работают вечерние консультационные пункты, набор в них проводится по результатам вступительных экзаменов по физике и математике и собеседованиq, которые проходят во второй половине сентября.

Программы ФЗФТШ при МФТИ являются профильными дополнительными образовательными программами и едины для всех отделений. Кроме того, ученикам всех отделений будет предложено участвовать в физико-математической олимпиаде «ФИЗТЕХ-2008», которая будет проводиться на базе МФТИ и в ряде городов России в конце марта и в середине мая, в других очных и заочных олимпиадах МФТИ и его факультетов, а также в конкурсах, турнирах и конференциях. Для учащихся 9 – 11 классов на базе МФТИ работает субботний лекторий по физике и математике по программе ФЗФТШ. Лекции читают преподаватели института, как правило авторы заданий. Подробнее об этих мероприятиях можно прочитать на сайте ФЗФТШ:

http://www.school.mipt.ru

По окончании учебного года учащиеся, успешно выполнившие программу ФЗФТШ, переводятся в следующий класс, а выпускники (одиннадцатиклассники) получают свидетельство об окончании школы с итоговыми оценками по физике и математике, которое учитывается на собеседовании при поступлении в МФТИ.

Ученикам, зачисленным в ФЗФТШ в рамках утвержденного плана приема, будет предложено оплатить безвозмездный целевой взнос для обеспечения учебного процесса в соответствии с уставными целями школы. Сумма взноса будет составлять ориентировочно для учащихся заочного отделения 900 – 1800 руб. в год, для очного 1000 – 2000 руб. в год, для очно-заочного 1800 – 3000 руб. (с каждой факультативной группы за год).

Для учащихся Украины работает Киевский филиал ФЗФТШ при МФТИ (обучение платное). Желающим в него поступить следует высылать вступительные работы по адресу: 03680 Украина, г. Киев, б-р. Вернадского, д. 36, ГСП, Киевский филиал ФЗФТШ при МФТИ. Телефон в Киеве: 424-30-25.

Для учащихся из зарубежных стран возможно только платное обучение на заочном и очно-заочном отделениях. Условия обучения для прошедших конкурсный отбор будут сообщены дополнительно.

Ниже приводятся вступительные задания по математике и физике. Номера задач, обязательных для выполнения (заочное и очно-заочное отделения), приводятся в таблице (номера классов соответствуют текущему 2007/08 учебному году):

	7 класс	8 класс	9 класс	10 класс
Математика	1 – 5	3 – 8	6 – 12	7, 10 – 15
Физика	1 – 5	5 – 10	9 – 14	11 – 17

Вступительное задание по математике

После порядкового номера задачи в скобках указано количество очков за задачу.

1(3). Студент купил две книги и уплатил за них 390 рублей. Если бы первая книга стоила 65% от своей цены, а вторая книга – на 30% больше своей цены, то их цены были бы одинаковыми. Сколько денег заплатил студент за каждую книгу?

2(3). Расстояние между пунктами A и B составляет 15 км. Путешественник отправился из пункта A в пункт B в 9 ч 30 мин и двигался со скоростью 3 км/ч. На следующий день он отправился из B в пункт A в 11 часов утра и двигался со скоростью 12 км/ч. При этом он заметил, что в промежуточном пункте C он оказывался в одно и то же время. Сколько времени он затратил на путь от B до C?

3(4). В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) известно, что $BC = 27$, $\angle ABC = 30^\circ$. Через середину M гипотенузы проведена прямая, перпендикулярная гипотенузе, которая пересекает катет BC в точке P. Найдите PM.

4(4). Найдите наименьшее число, запись которого состоит лишь из нулей и единиц, делящееся без остатка на 225.

5(4). Из молока, жирность которого составляет 5,8%, изготовляют творог жирностью 19,33%, при этом остается сыворотка жирностью 0,63%. Сколько творога получится из 170 кг молока?

6(5). Три бригады, работая вместе, должны выполнить некоторую работу. Первая и вторая бригады вместе могут выполнить ее на 36 мин быстрее, чем одна третья. За то время, за которое могут выполнить эту работу первая и третья бригады, вторая может выполнить половину работы. За то время, что работу выполнят вторая и третья бригады, первая выполнит 2/7 работы. За какое время все три бригады вместе выполнят эту работу?

7(6). Центр вписанной окружности треугольника симметричен центру его описанной окружности относительно одной из сторон треугольника. Найдите углы треугольника.

8(5). Решите уравнение

$$(x-3)(x-6)(x+1)(x+4) = 1080.$$

9(3+2). а) Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$\begin{cases} x - 2y \geq 2, \\ 4y \leq x + 2, \\ 5y + 8 \geq 2x. \end{cases}$$

б) Найдите площадь полученной фигуры.

10(4). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{2y}{x} = \dfrac{7}{3}, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$$

11(7). Медиана AM остроугольного треугольника ABC равна 8. Из точки M опущены перпендикуляры MP и MQ на отрезки AB и AC соответственно. Найдите сторону BC если $AP = 6$, $AQ = 5\sqrt{2}$.

12(5). Три числа x, y, z образуют возрастающую арифметическую прогрессию, а их квадраты x^2, y^2, z^2 составляют геометрическую прогрессию. Найдите эти числа, если их сумма равна 15.

13(5). Решите уравнение

$$1 + 2\sin 2x = 2(\sin x + \cos x).$$

14(5). Решите уравнение

$$\sqrt{10-3x} - \sqrt{-3x-14} = \sqrt{-2x-1} - \sqrt{-2x-17}.$$

15(5). Решите неравенство

$$|3x+1| + 2 + \frac{3}{|3x+1| - 2} \leq \frac{1}{|3x+1| + 2}.$$

Вступительное задание по физике

1. Латунь – это сплав меди и цинка. Для латунной детали массой $M = 120$ г и объемом $V = 14$ см^3 определите, какая доля массы детали приходится на цинк. Считайте, что объем детали равен сумме объемов меди и цинка. Плотности меди и цинка известны.

2. Автобус и мотоцикл находятся друг от друга на расстоянии $L = 20$ км. Если они будут двигаться с постоянными различными скоростями в одном направлении, то мотоцикл догонит автобус через время $t_1 = 1$ ч. Если они будут двигаться навстречу друг другу с теми же скоростями, то встретятся через $t_2 = 10$ мин. Каковы скорости мотоцикла и автобуса?

3. Из пункта C, расположенного точно посередине между пунктами A и B, стартуют два мотоциклиста и велосипедист. Первый мотоциклист поехал со скоростью $v = 90$ км/ч в сторону пункта A, второй с такой же скоростью поехал в сторону пункта B, а велосипедист – в сторону пункта A со скоростью $u = 30$ км/ч. Первый и второй мотоциклисты, доехав до пунктов A и B соответственно, сразу поворачивают и продолжают движение в обратном направлении. Определите время и место встречи велосипедиста с каждым из мотоциклистов, а также мотоциклистов друг с другом. Расстояние между пунктами A и B равно $L = 24$ км.

4. В резервуар, имеющий форму параллелепипеда с вертикальными стенками, закачивается нефть. Дно резервуара представляет собой прямоугольник со сторонами $a = 2{,}5$ м и $b = 2$ м. Каждую секунду в резервуар поступает 20 кг нефти. С какой скоростью повышается уровень нефти в резервуаре?

5. Имеется высокая U-образная вертикально расположенная трубка. Площадь поперечного сечения трубки постоянна по всей ее высоте и равна $S = 0{,}8$ см^2. Верхний конец ее левого колена расположен на $h = 4$ см ниже верхнего конца правого колена (рис. 1,*а*). Трубка заполнена водой так, что она доходит до края левого колена. Затем в

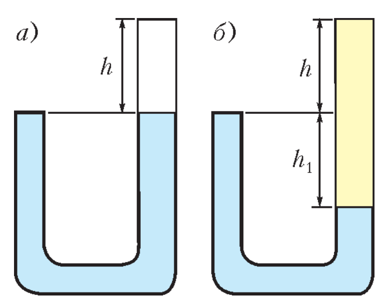


Рис. 1

правое колено трубки наливают масло так, что его верхний уровень совпадает с верхним уровнем трубки (рис.1,*б*). Какую массу масла налили? Какой объем воды вылился из трубки? Плотность воды $\rho_в = 1\ г/см^3$, плотность масла $\rho_м = 0,8\ г/см^3$.

6. В дне сосуда с водой имеется круглое отверстие, на которое положен цилиндрический брусок радиусом $R = 5$ см и толщиной d (рис.2). Оси бруска и отверстия совпадают. Из сосуда медленно сливают воду. Когда уровень воды оказался выше верхней грани бруска на высоту d, брусок начал всплывать. Чему равен радиус отверстия r? Плотность материала бруска $\rho = 600\ кг/м^3$, плотность воды $\rho_в = 1000\ кг/м^3$.

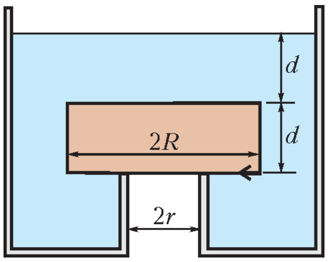


Рис. 2

7. Муравей находится на середине соломинки длиной l (рис.3). Соломинка лежит на двух опорах. Левая опора находится на расстоянии $l_1 = 5l/12$ от левого конца соломинки, а правая – на расстоянии $l_2 = 13l/28$ от ее правого конца. На какие максимальные расстояния от середины соломинки влево и вправо может отползти муравей, чтобы соломинка при этом не перевернулась? Масса муравья в 6 раз меньше массы соломинки, а его размеры много меньше длины соломинки. Соломинку считать однородным стержнем.

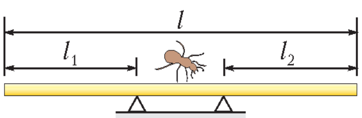


Рис. 3

8. Для нагревания смеси медных и стальных опилок общей массой $m = 200$ г от температуры $t_1 = 20\ ^\circ C$ до температуры $t_2 = 220\ ^\circ C$ потребовалось подвести количество теплоты $Q = 17,6$ кДж. Какова масса медных опилок в этой смеси?

9. В сосуде с тонкими вертикальными стенками и площадью дна $S = 100\ см^2$ находятся вода и лед при температуре $t_1 = 0\ ^\circ C$, причем масса льда в 10 раз меньше массы воды. В сосуд целиком погружают нагретую до температуры $t_2 = 80\ ^\circ C$ стальную деталь. При этом уровень воды сразу после погружения детали повышается на $h = 3$ см. Какова начальная масса воды в сосуде, если известно, что после установления теплового равновесия температура в нем оказалась равной $t = 5\ ^\circ C$? Теплоемкостью сосуда и потерями тепла пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c_в = 4200$ Дж/(кг · К), льда $c_л = 2100$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 330 \cdot 10^3$ Дж/кг.

10. Три резистора включены в электрическую цепь, показанную на рисунке 4. Если между точками A_1 и B_1 подать напряжение 30 В, то напряжение на резисторе R_3 окажется равным 15 В. Если же напряжение 60 В подать только между точками A_2 и B_2, то напряжение на резисторе R_1 окажется равным 30 В. Определите сопротивления резисторов R_1, R_2 и R_3, если известно, что общее сопротивление между точками A_1 и B_1 составляет 2 Ом.

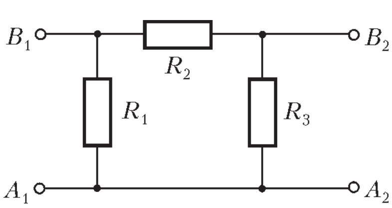


Рис. 4

11. Из одной точки над поверхностью земли дважды бросают камень: первый раз со скоростью v_0 вертикально вверх, а второй раз – с такой же скоростью вертикально вниз. Время полета камня до поверхности земли в первом случае оказалось в два раза больше времени полета камня во втором случае. На какой высоте над землей находилась точка, из которой были произведены броски? Сопротивлением воздуха пренебречь.

12. Тело брошено под углом к горизонту. В момент, когда оно оказалось на максимальной высоте $h = 10$ м, его скорость уменьшилась в два раза по сравнению с начальной. Определите начальную скорость тела и угол к горизонту, под которым оно было брошено. Сопротивлением воздуха пренебречь.

13. Горизонтальная платформа и находящийся на ней маленький шарик массой m совместно вращаются с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси симметрии платформы. Нить, прикрепленная к шарику и к этой оси, имеет длину l и составляет с осью угол α. Найдите силу натяжения нити и силу давления шарика на платформу. Трением между платформой и шариком пренебречь.

14. Доска массой M покоится на горизонтальной поверхности стола, на шероховатой поверхности доски лежит небольшой брусок массой m (рис.5). На брусок в течение времени τ действует постоянная горизонтальная сила $\vec{F}$ и брусок скользит по доске. К моменту окончания действия силы брусок движется со скоростью v_0 относительно стола. Определите скорость доски в этот момент. Трением между доской и поверхностью стола пренебречь.

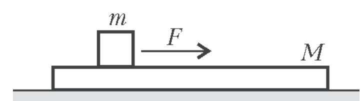


Рис. 5

15. Тонкостенный легкий цилиндрический стакан высотой h и площадью дна S ставят вверх дном на поверхность воды и притапливают, оставляя все время вертикальным. Какую вертикальную силу нужно прикладывать к дну стакана, чтобы его удерживать полностью под водой? Дно стакана приэтом остается вблизи поверхности воды. Атмосферное давление равно p_0. Температура воздуха внутри стакана остается неизменной.

16. На сколько изменятся температура и внутренняя энергия гелия массой $m = 6$ г в процессе изобарического расширения, если ему сообщили количество теплоты $Q = 3$ кДж? Чему равна работа, совершенная при этом гелием? Молярная теплоемкость гелия в изобарном процессе равна $C_p = 5R/2$.

17. Маленький незаряженный шарик массой m висит на легкой непроводящей пружине. Под ним закреплен точно такой же шарик. Расстояние между шариками l. После сообщения шарикам зарядов q и $-q$ и установления равновесия расстояние между шариками уменьшилось, а сила упругости пружины увеличилась в β раз. Определите дополнительное удлинение пружины, считая, что ее сила упругости подчиняется закону Гука.

Редакция журнала «Квант» выражает глубокое соболезнование учащимся и преподавателям Федеральной заочной физико-технической школы при МФТИ в связи с кончиной ее бессменного директора Тамары Алексеевны Чугуновой.

Новый прием в школы-интернаты при университетах

Специализированный учебно-научный центр (СУНЦ) МГУ (школа имени академика А.Н. Колмогорова), а также СУНЦ НГУ, СУНЦ УрГУ и Академическая гимназия при СПбГУ объявляют набор учащихся в 10 классы (двухгодичное обучение) на физико-математическое и химико-биологическое отделения и в 11 классы (одногодичное обучение) на физико-математическое отделение. В рамках двухгодичного физико-математического отделения кроме основного профиля выделяется компьютерно-информационный класс (СУНЦ МГУ). Химико-биологическое отделение представлено специализациями по химии и биологии.

Зачисление в школу проводится на конкурсной основе. Первый тур экзаменов – заочный письменный экзамен по математике и физике или химии. Успешно выдержавшие заочный экзамен в апреле-мае приглашаются в областные центры Российской Федерации на устные экзамены. Однако допускается участие в очном туре школьников, не участвовавших в заочном туре.

Ниже приводятся условия задач *заочного* вступительного экзамена. Работа должна быть выполнена в обычной ученической тетради, на обложке которой указываются фамилия, имя, отчество (полностью), желаемый профиль обучения, подробный домашний адрес с индексом, электронный адрес (если имеется), адрес и номер школы, класс.

Работу нужно отправить простой бандеролью на имя Приемной комиссии по одному из следующих адресов (обязательно вложите конверт с маркой, заполненный на ваш домашний адрес с индексом):

121357 Москва, Кременчугская ул., 11, СУНЦ МГУ (внимание: жители Москвы принимаются в школу без предоставления общежития), телефон Приемной комиссии: (495)445-11-08, сайт: www.pms.ru, e-mail: priem@pms.ru;

199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/96, Академическая гимназия;

620137 Екатеринбург, ул. Голощекина, 30, СУНЦ УрГУ;

630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, СУНЦ НГУ (Олимпиадный комитет).

Срок отправки работ – *не позднее 1 марта 2008 года* (по почтовому штемпелю). Работы, высланные позже этого срока, рассматриваться не будут.

Если вы не сможете решить все задачи – не отчаивайтесь, Приемная комиссия рассмотрит работы с любым числом решенных задач.

Вступительные экзамены второго, *очного* тура будут проводиться с 20 марта по 20 мая 2008 года по регионам.

Вступительное задание заочного тура

Математика

Для поступающих в 10 класс

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 + x\sqrt[3]{x}} + \sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}} = 2 .$$

2. Определите вид треугольника, если его высоты равны 12, 15, 20.

3. Найдите наибольшее значение отношения $\frac{x}{y}$, если $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 1$.

4. На стороне AB ромба $ABCD$ во внешнюю сторону построен правильный треугольник ABM. Найдите угол CMD.

5. Десятичные записи чисел N и $3N$ выписаны подряд. Можно ли утверждать, что среди выписанных цифр заведомо найдется хотя бы одна из цифр 1, 2, 9?

Для поступающих в 11 класс

1. Какое из двух чисел больше:

$$3\sqrt{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4}} \quad \text{или} \quad \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{25} \ ?$$

2. Определите вид треугольника, если его медианы равны 5, $\sqrt{52}$, $\sqrt{73}$.

3. Найдите наибольшее значение $x^2 + y^2$, если $x^2 + xy + y^2 = x + y$.

4. Через точку внутри треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ провели 3 отрезка, параллельных сторонам треугольника. Оказалось, что все три отрезка имеют одинаковую длину x. Найдите x.

5. На конгрессе собрались ученые, среди которых есть друзья. Оказалось, что никакие двое ученых, имеющих на конгрессе равное число друзей, а не имеют общих друзей. Найдется ли среди них ученый, у которого ровно один друг?

Физика

(физико-математическое отделение)

Поступающие в 10 класс решают задачи 1–7. Поступающие в 11 класс решают все предложенные задачи.

1 «Ахиллес и черепаха». Ахиллес догоняет черепаху на прямой дороге. В начальный момент расстояние между ними 1 км. Начальные скорости Ахиллеса и черепахи равны 10 м/с и 10 см/с соответственно. Через каждую секунду их скорости скачком изменяются. Скорость Ахиллеса убывает на 1% от своего текущего значения, а скорость черепахи возрастает на 1% от своего текущего значения. На какое минимальное расстояние сможет приблизиться к черепахе Ахиллес? Сколько к этому моменту пройдет времени от начала погони?

2 «Путешественник Вася». Путешественник Вася «завел» свой снегоход, выбрал направление на Солнце, которое находилась у горизонта, и проехал в этом направлении с постоянной скоростью расстояние 10 км. Затем он выбрал направление на восток и поехал с той же по величине скоростью. Через 1 час после начала путешествия он оказался в точке старта. Какова скорость его снегохода? В какие из дней года могло состояться это путешествие? В каком месте на Земле?

3 «Черная дыра и Земля». Около Земли появилась черная дыра с массой, равной массе Земли. В некоторый момент расстояние между центрами дыры и Земли равно 7000 км, а их относительная скорость в этот момент равна нулю. Через какое время дыра упадет на Землю? Считайте, что Земля твердая и не меняет своей формы (шар радиусом 6400 км).

4 «Футбольный мяч». Футбольный мяч массой 0,4 кг и радиусом 12 см выронили из вертолета, который летел над стадионом на высоте 1 км. Оцените время падения мяча и скорость, с которой он ударится о футбольное поле. Плотность воздуха 1,3 кг/м^3.

5 «Тележки 2007-8». На гладкой горизонтальной поверхности находятся две тележки, масса верхней $m = 1$ кг, масса нижней $M = 2$ кг (рис.1). В начальный момент $t_0 = 0$ нижняя тележка покоится, а верхняя движется вправо со скоростью $v = 3$ м/с. Удары тележек друг о друга абсолютно упругие. Расстояние «свободного» относительно-

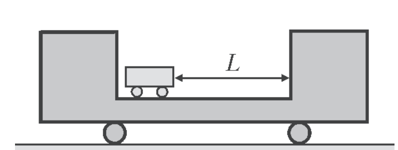


Рис. 1

го смещения тележек $L = 3$ м. На какое расстояние сместится нижняя тележка к моменту времени $t_1 = 2007,8$ с?

6 «Ассистент Петя». Школьник Вася проводит дома физический эксперимент, а его младший брат Петя пытается ему помогать. Вася, предварительно оценив время, за которое электрический кипятильник еще не нагреет воду от комнатной температуры $20\ ^\circ\mathrm{C}$ до $100\ ^\circ\mathrm{C}$, налил в литровую банку 1 литр воды, поместил в воду кипятильник мощностью 1 кВт, включил его и вышел в соседнюю комнату поговорить по телефону с одноклассником. Вернувшись через 5 мин, он измерил температуру воды в банке, и оказалось, что она равна только $60\ ^\circ\mathrm{C}$. Выяснилось, что пока Вася разговаривал по телефону, Петя на некоторое время отключал кипятильник. Сколько времени длилась Петина «помощь»?

7 «Электрическая схема». В электрической схеме на рисунке 2 все батарейки одинаковые, идеальные и имеют ЭДС $\mathscr{E} = 1$ В. Все резисторы тоже одинаковые и имеют сопротивление $R = 10$ Ом каждый. Найдите токи, текущие через каждую батарейку и через каждый резистор. (Нумерацию элементов введите сами.)

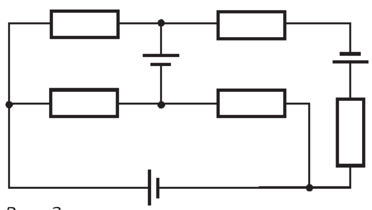


Рис. 2

8 «Два сосуда». В двух сосудах с жесткими стенками объемами 1 л и 2 л поддерживается постоянная температура $0\ ^\circ\mathrm{C}$. В литровом сосуде находится воздух с влажностью 80%. Давление в этом сосуде равно 2 атм. В двухлитровом сосуде находится воздух с влажностью 40 % под давлением 5 атм. Сосуды соединены короткой трубкой с малым поперечным сечением, которая первоначально пережата зажимом. Зажим ослабляют, и давления в сосудах быстро выравниваются. Какой будет максимальная влажность воздуха в литровом сосуде? Какой будет минимальная влажность воздуха в двухлитровом сосуде? Какой будет установившаяся через большое время влажность воздуха в обоих сосудах?

9 «Газовый процесс». С газообразным гелием провели процесс, который в координатах «давление – объем» изображен на рисунке 3. Линия, вдоль которой шел процесс, при выбранных масштабах по осям представляет собой $1/4$ окружности, центр которой находится в точке с координатами $2p$ и V. Дуга начинается в точке с координатами p и V и заканчивается в точке с координатами $2p$ и $2V$. Какую работу совершил газ в этом процессе? Какое количество теплоты было подведено к газу в этом процессе?

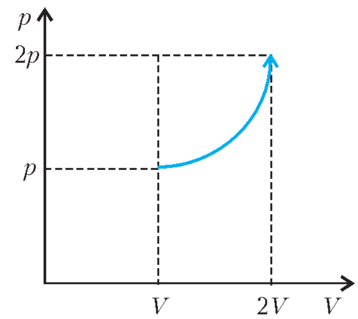


Рис. 3

10 «Столкновение». Протон и ядро гелия-4 летят навстречу друг другу, на большом расстоянии их кинетические энергии E одинаковы. Чтобы произошло столкновение и, возможно, произошла ядерная реакция, частицы должны сблизиться на расстояние примерно 10^{-15} м. Чему должна быть равна минимальная величина E, чтобы это случилось? Информацию о массах и зарядах частиц отыщите самостоятельно.

Химия

(химико-биологическое отделение)

1. Какое вещество X и при каких условиях могло быть использовано в реакции, выражаемой следующей схемой (указаны все исходные вещества и продукты без коэффициентов):

$$X + H_2SO_4 \rightarrow CuSO_4 + SO_2 + H_2O\ ?$$

Приведите возможные уравнения реакций (с коэффициентами).

2. Навеска белого порошка X массой 1,04 г реагирует с избытком 20%-й соляной кислоты с выделением газа. Масса реакционной смеси уменьшается при этом на 0,64 г, выделяющийся газ обесцвечивает бромную воду. 1) Предложите не менее двух вариантов состава порошка X. 2) Напишите уравнения реакций.

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

Мышеловка Владимира Красноухова

(Начало см. на 2-й с. обложки)

Интересно, что первые головоломки Владимир Иванович Красноухов придумывал и делал вместе с сыном Денисом еще в 80-е годы прошлого века. В 1982 году, победив в конкурсе «Малый Интеркосмос», их головоломка побывала в космосе во время полета станции «Салют-7».

Предлагаемая вниманию читателей новая головоломка В.Красноухова называется «Сыр в мышеловке» (см. рисунок на 2-й с. обложки). Пластинки в коробочке действительно напоминают кусочки сыра.

«А где же мышеловка?» – спросите вы.

Чтобы это узнать, необходимо изготовить головоломку. Для простоты и быстроты пять пластинок можно вырезать из картона, а вместо коробочки нарисовать ее контуры на клетчатой бумаге. Сделать это нужно аккуратно и точно, иначе у вас получится или очень простая головоломка, или головоломка, не имеющая решения.

Приступив к делу, вы быстро поймете, что перед вами стоит нелегкая задача. Как ни переставляй между собой пластинки, уложить фишку в круглые вырезы никак не удается! Вот это и означает, что вы попали в мышеловку. Вырезы сделаны специально для того, чтобы отвлечь вас от правильного пути к решению.

Обратите внимание – три четырехугольные пластинки имеют по два прямых угла. Это значит, что каждую из них можно положить в любой угол коробочки двумя способами. Из оставшихся двух треугольников можно собрать еще один четырехугольник с таким же свойством. Остается уложить все пластинки в коробочку максимально плотно, чтобы оставить свободное пространство для фишки. И это пространство не обязано иметь закругленные края.

Желаем удачи!

А.Калинин

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» № 5)

1. Верно. Предположим, что это не так. Тогда в каждой из трех партий найдутся коротышки, которые принадлежат только этим партиям; назовем их верными. Выберем по одному верному коротышке из каждой партии. По условию, среди этих трех найдутся двое, которые принадлежат одной партии. Противоречие.

2. $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2+b^2 \geq 2ab \Rightarrow 3\left(a^2+b^2\right) \geq 2ab \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3a^2b^2\left(a^2+b^2\right) \geq 2a^3b^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6 \geq a^6+2a^3b^3+b^6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a^2+b^2\right)^3 \geq \left(a^3+b^3\right)^2 .$$

3. Площади синих фигур равны. Отношение площади вписанного в круг квадрата к площади круга, в который он вписан, не зависит от размера этих фигур. Пусть это отношение равно a. Точно так же отношение площади вписанного в квадрат круга к площади квадрата, в который он вписан, не зависит от размера этих фигур и пусть оно равно b (на самом деле, $a = \frac{2}{\pi}$, $b = \frac{\pi}{4}$, но нам для решения эти значения не понадобятся).

Площадь синего круга: $a \cdot b \cdot 1$, площадь синего квадрата: $b \cdot a \cdot 1$, т.е. эти площади равны.

4. а) *Указание*. Любой солдат, стоящий в последней шеренге, может сделать не более 4 поворотов, поскольку в одном из положений перед его лицом не окажется никого. Если солдат стоит в предпоследней шеренге, то он может сделать не более 8 поворотов. В общем случае стоящий в n-й с конца шеренге (n = 1, 2, …) может сделать не более $4n$ поворотов.

б) Ответ: не обязательно. Возможна ситуация, когда повороты будут продолжаться бесконечно долго. Вот пример. Возьмем любого солдата C, стоящего не на краю строя, и пусть первоначально (после команды «смирно») все четверо солдат, стоящие по соседству с ним (спереди, сзади, справа и слева), обращены лицом к нему. Далее солдат C все время оказывается лицом к лицу с одним из своих соседей и поворачивается направо, а его соседи неподвижны.

В то же время можно специальным образом организовать повороты остальных солдат, чтобы они за конечное время прекратились. Для этого двух солдат, оказавшихся лицом к лицу, назовем противостоящими, а условную точку между ними – точкой противостояния.

Если два противостоящих солдата находятся в одной шеренге, то пусть поворот направо сделает тот, кто стоит правее. После этого он окажется стоящим лицом к задней шеренге. В результате либо противостояние пропадет, либо точка противостояния сместится немного в сторону и (главное!) назад. Если же два противостоящих солдата находятся в соседних шеренгах (т.е. в одной колонне), то пусть поворот направо сделает тот, кто стоит в задней шеренге. После этого он окажется стоящим лицом к своему соседу справа в той же шеренге. В результате либо противостояние пропадет, либо точка противостояния сместится немного в сторону и тоже назад.

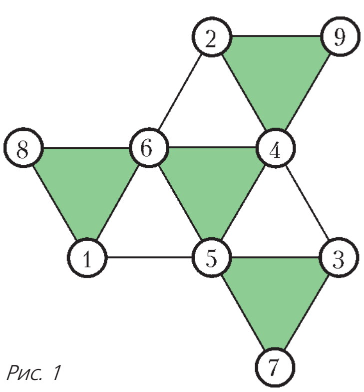


Рис. 1

Действуя так по отношению ко всем противостояниям, мы либо их ликвидируем, либо постепенно «выдавим» в самую заднюю шеренгу. Ну а когда все противостояния окажутся в последней шеренге, то после поворота направо того из противостоящих солдат, который стоит правее, противостояние исчезнет, поскольку этот солдат не окажется лицом к лицу ни с кем (шеренга-то последняя!).

5. См. рис. 1.

ЗАДАЧИ

(см. с.24)

1. *Ответ:* 2006, 2007, 2008.

Пусть $n - 1$, n, $n + 1$ – искомые последовательные числа. Тогда, с одной стороны, их сумма равна $3n$, с другой, $(a-b+2007)+(b-c+2007)+(c-a+2007) = 3 \cdot 2007$. Значит, $n = 2007$, т.е. это числа 2006, 2007, 2008.

2. Сначала решим задачу для суммы 2008. Ответ здесь таков: наибольший возможный остаток равен 668.

Докажем сначала, что он не может быть больше, чем 668. Используем рассуждения «от противного». Допустим, при некоторых делимом и делителе остаток оказался не меньше 669. Так как остаток всегда строго меньше делителя, то делитель не меньше 670, а делимое, конечно же, не меньше суммы делителя и остатка, т.е. 670 + 669 = 1339. Но тогда сумма делимого и делителя не меньше 1339 + 670 = 2009, тогда как по условию эта сумма равна 2008. Противоречие.

С другой стороны, можно добиться остатка, равного как раз 668, если взять делимое и делитель равными 1338 и 670.

Интересно, что если сумма чисел равна не 2008, а лишь 2006, то наибольший возможный остаток также равен 668 (доказательство аналогично, а в качестве примера можно взять числа 1337 и 669).

Казалось бы, если сумма чисел принимает промежуточное значение 2007, то и здесь наибольший остаток должен быть такой же. Но не тут-то было! Оказывается, остаток 668 все-таки недостижим.

Сначала точно таким же способом, как и выше, убеждаемся, что остаток не может быть больше, чем 668. А теперь разберемся, может ли он равняться 668. Итак, пусть делимое равно m, делитель равен n (причем, по условию, $m > n$), частное от деления m на n равно c, остаток равен 668. Тогда можно записать два равенства:

$$m + n = 2007,$$

$$m = cn + 668.$$

Вычитая из первого второе, получаем

$$(c+1)n = 1339 .$$

Таким образом, n является делителем числа 1339. Так как $1339 = 13 \cdot 103$, а 13 и 103 – простые числа, то n может принимать всего-то 4 значения: 1, 13, 103 и 1339. Легко проверить, что ни одно из этих четырех чисел не подходит. Итак, остаток 668 все же недостижим.

А вот остатка 667 добиться можно. Для этого достаточно взять исходные числа 1337 и 670. Так что ответ на первый вопрос: 667.

3. Траектория шарика представляет собой ломаную линию, состоящую из равных хорд окружности. Очевидно, что если хорда является диаметром, то движение шарика по этому диаметру периодично с периодом 5 секунд. Если хорда-звено меньше диаметра, то рассмотрим концентрическую столу окружность C, которой касаются все такие звенья. Если шарик прилетел по звену a, отразился от борта в точке P и, отраженный, полетел вдоль звена b, то оба звена a и b касаются окружности C. Оба они определяются точкой P и окружностью C однозначно: это следует из того, что из точки вне окружности можно провести к этой окружности ровно две касательные. Поэтому в следующий раз шарик может попасть в точку P только по одному из звеньев a или b. По звену b он попасть не может, так как в противном случае он должен где-то на траектории развернуться – начать движение в противоположную сторону. В рассматриваемом случае это невозможно. Снова попав в точку P вдоль звена a, шарик в дальнейшем станет периодически повторять свое движение с периодом 5 секунд.

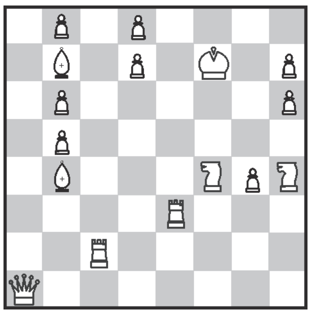


Рис. 2

4. Один из возможных способов расположения шахматных фигур показан на рисунке 2.

5. Ответ: 1, 6, 8.

Выпишем все числа, не превосходящие 50 и допускающие более одного представления в виде произведения трех попарно различных натуральных чисел; в квадратных скобках после каждого числа перечислим возможные суммы и отметим знаком «+» те из них, для которых проходит первая реплика B:

12 [9, 8+]
18 [12, 10+]
20 [13, 10+]
24 [15+, 12, 11, 9]
28 [17, 12]
30 [18, 14+, 12, 10+]
32 [19, 13]
36 [21+, 16+, 14+, 11]
40 [23, 15+, 14+, 11]
42 [24, 18, 14+, 12]
44 [25, 16+]
45 [19, 15+]
48 [27+, 20, 17, 15+, 13, 12]
50 [28, 16+]

Вторая реплика A возможна лишь для тех произведений, для которых не менее двух сумм помечено плюсом (если плюсом помечена всего одна сумма, то A уже знал бы загаданные числа, а если сумм, помеченных плюсом нет вовсе, то такое число не могло быть загаданным произведением). Перепишем оставшиеся варианты:

30 [14, 10]
36 [21, 16, 14]
40 [15, 14]
48 [27, 15]

На основании второй реплики B удалим те суммы, которые уникальны в оставшихся вариантах. Имеем:

30 [14]
36 [14]
40 [15, 14]
48 [15]

Если бы произведение загаданных чисел равнялось 40, A не смог бы определить загаданные числа после второй реплики B. Раз A смог определить их, значит остались такие варианты:

30 [14]
36 [14]
48 [15]

Если бы B знал число 14, то он не смог бы определить загаданные числа и после третьей реплики A. Но он определил их. Значит, произведение загаданных чисел равно 48, а сумма 15. Ну а сами числа это 1, 6 и 8.

ПОЛУПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ НА РЕШЕТКАХ

1. Если каждое наклонное звено ломаной заменить на два, идущих по линиям сетки (горизонтальное и вертикальное), то длина ломаной сохранит свою четность.

2. Индукцией по n можно проверить, что уравнение $x^2 + y^2 = 5^{n-1}$ имеет ровно $4n$ целочисленных решений, т.е. на окружности радиуса $5^{(n-1)/2}$ с центром в начале координат лежит ровно $4n$ точек целочисленной решетки. Если из векторов, которые соединяют начало координат с этими точками, выбрать такие $2n$ вектора, которые в сумме дают 0 (достаточно каждый раз вместе с вектором брать и обратный к нему), то, последовательно приставив их друг к другу, получим нужный многоугольник.

3. Если вершины многоугольника имеют рациональные координаты, то можно найти подобный ему многоугольник, вершины которого имеют целые координаты.

4. Приравняв в формуле Муавра действительные и мнимые части, можно найти формулы для $\cos n\alpha$ и $\sin n\alpha$. Их частное выражает $\operatorname{tg} n\alpha$ как рациональную функцию от $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Нужная формула получается, если числитель и знаменатель этой дроби поделить на $\cos^n\alpha$.

5. а) Для взаимно простых p и q можно найти число n, для которого $np = 1 (\operatorname{mod} q)$. Тогда $\cos(np\pi/q) = \pm\cos(\pi/q)$. Поэтому $2\cos(\pi/q) = \pm f_n(2\cos(p\pi/q))$, и из рациональности числа $\cos(p\pi/q)$ следует рациональность $\cos(\pi/q)$.

б) Так как $2\cos(n\alpha) = f_n(2\cos\alpha)$, где $f_n(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом, равным 1, то число $2\cos(\pi/q)$ является корнем уравнения $f_q(x) = \pm 2$. Предположим, что число $\cos(\pi/q)$ рационально. Корнем полученного уравнения могут быть только целые числа. Следовательно, если $2\cos(\pi/q) \ne 0$, ± 1, ± 2, то $\cos(\pi/q)$ – иррациональное число.

в) *Указание*: $\sin\alpha = \cos(\pi/q - \alpha)$.

6. Для каждого паркета можно указать свободное от квадратов натуральное D такое, что узлы этого паркета содержатся в множестве $K(D)$, состоящем из точек $z = \alpha + i\beta$, где α, β – числа вида $x + y\sqrt{D}$ с рациональными x и y. Поэтому решение задачи можно свести к доказательству теоремы о правильных многоугольниках на $K(D)$ (ее доказательство есть, например, в книге В.В.Вавилова и А.В. Устинова «Многоугольники на решетках» – М.: МЦНМО, 2006).

Теорема. Имеют место следующие возможности:

а) При любом D квадрат можно расположить на $K(D)$.

б) На $K(2)$ можно расположить только квадрат и правильный восьмиугольник.

в) На $K(3)$ можно расположить только квадрат и правильные треугольник, шестиугольник и двенадцатиугольник.

г) Если $D \ne 2, 3$, то никакой правильный многоугольник, за исключением квадрата, на $K(D)$ расположить нельзя.

СКАЗКА О РЫБАКЕ И ЕГО СЛЮДЯНОЙ ЧУДО-ЛЕСТНИЦЕ

1. Сначала определим, на каком расстоянии от края плиты находится центр тяжести системы «плита–Старик с рыбой». Обозначив массу плиты через m, а искомое расстояние через x, из пропорции $\frac{mg}{F} = \frac{x}{1-x}$ находим $x = \frac{mg}{F+mg}$ (здесь g – ускорение свободного падения).

Далее, размещая центр тяжести первой плиты вместе со Стариком на краю второй плиты, будем предполагать, что к весу его улова добавился вес первой плиты. При этом предыдущее рассуждение остается в силе, если заменить F на $F + mg$. Центр тяжести двух плит со Стариком будет отстоять от края нижней плиты на величину $\frac{mg}{F+2mg}$. Аналогично, центр тяжести n плит со Стариком будет отстоять от края нижней плиты на величину $\frac{mg}{F+nmg}$.

Последовательно сдвигая плиты на эти расстояния при $n = 1, 2, 3, \ldots$, получим удаление от берега крайней точки стопки из плит:

$$Q_n = mg\left(\frac{1}{\mu+1}+\frac{1}{\mu+2}+\frac{1}{\mu+3}+\ldots+\frac{1}{\mu+n}\right), \text{ где } \mu = \frac{F}{mg}.$$

Эта величина с ростом n может принимать сколь угодно большие значения. Действительно,

$$\frac{1}{\mu+1}+\frac{1}{\mu+2}+\left(\frac{1}{\mu+3}+\frac{1}{\mu+4}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{\mu+5}+\frac{1}{\mu+6}+\frac{1}{\mu+7}+\frac{1}{\mu+8}\right)+\ldots>$$
$$>\frac{1}{\mu+1}+\frac{1}{\mu+2}+\left(\frac{1}{\mu+4}+\frac{1}{\mu+4}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{\mu+8}+\frac{1}{\mu+8}+\frac{1}{\mu+8}+\frac{1}{\mu+8}\right)+\ldots>$$
$$>\frac{1}{\mu+1}+\frac{1}{\mu+2}+\left(\frac{1}{4\mu+4}+\frac{1}{4\mu+4}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{8\mu+8}+\frac{1}{8\mu+8}+\frac{1}{8\mu+8}+\frac{1}{8\mu+8}\right)+\ldots=$$
$$=\frac{1}{\mu+1}+\frac{1}{\mu+2}+\frac{1}{2}\frac{1}{\mu+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{\mu+1}+\ldots$$

В последней сумме может быть сколь угодно много положительных слагаемых $\frac{1}{2}\frac{1}{\mu+1}$. Поэтому с ростом n она может превысить сколь угодно большую величину.

2. а) Около 16,6 м. б) Около 70 м.

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В НЕСТАНДАРТНЫХ КОНТУРАХ

1. $I_L = I_{2L} = U_0\sqrt{\frac{C}{L}}$; $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{LC}$.

2. $v(t) = v_0\cos\omega t$, где $\omega^2 = \frac{B^2d^2}{mL}$.

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ СФЕРЫ И ПИРАМИДЫ

1. 2. **2.** 12. 3. $BC = 16$; $CD = \frac{72}{7}$; $R = 3\sqrt{\frac{5}{2}}$; $\psi = \pi - \arccos\frac{127}{145}$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $-\log_4 3$, 3. *Указание.* Рассмотрите отдельно случаи $3\cdot 4^{x+2} - 18 + 4^{-x} = 1$ и $3\cdot 4^{x+2} - 18 + 4^{-x} \ne 1$.

2. $2\pi n$, $\frac{2\pi}{3}+2\pi s$, $-\frac{2\pi}{3}+2\pi m$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$, $s\ge 0$, $m\ge 1$, $k\le -1$.

3. $\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{4}\right)$.

4. $R = \frac{12}{5\sqrt6+8}$; $l \ge \frac{75}{7}$.

Пусть O_1 и O_2 – центры ω_1 и ω_2 соответственно, R – радиус окружности ω_2, точки X и Y – проекции O_1 и O_2 на AC, точка E – проекция O_2 на O_1X, $\angle BAC = \angle ACB = 2\varphi$, $l = 15$. Имеем $\cos 2\varphi = \frac{AC}{2AB} = \frac{1}{5}$, $\cos\varphi = \sqrt{\frac{3}{5}}$, $\operatorname{ctg}\varphi = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Тогда $AX = O_1X\operatorname{ctg}\varphi = 4R\sqrt{\frac{3}{2}}$, $CY = O_2Y\operatorname{ctg}\varphi = R\sqrt{\frac{3}{2}}$. В прямоугольном треугольнике O_1O_2E гипотенуза $O_1O_2 = 5R$, катет $O_1E = 3R$. Следовательно, по теореме Пифагора, $O_2E = 4R = XY$. Таким образом, $AC = 6 = AX + XY + YC = 5R\sqrt{\frac{3}{2}} + 4R = R\left(\frac{5\sqrt6+8}{2}\right)$, т.е. $R = \frac{12}{5\sqrt6+8}$.

Наименьшее значение $l_{\min}$, при котором существуют окружности ω_1 и ω_2, реализуется в случае, когда окружность большего радиуса ω_1 является вписанной в ΔABC. В этом случае X является серединой отрезка AC, а прямая O_1O_2 – биссектрисой угла ACB и $\angle O_1O_2E = \varphi$. Тогда $\sin\varphi = \frac{O_1E}{O_1O_2} = \frac{3R}{5R} = \frac{3}{5}$. Следовательно, $\cos 2\varphi = \frac{7}{25}$ и $AB = \frac{AX}{\cos 2\varphi} = \frac{75}{7} = l_{\min}$. Таким образом, при $l \ge l_{\min}$ окружности ω_1 и ω_2 существуют.

5. $8\sqrt3 - 2 \le |a| \le 8\sqrt3 + 2$; $\min = -5$.

На множестве пар $(x; y)$, удовлетворяющих только одному неравенству $y + \sqrt{16-x^2} \ge 0$, величина $y - \frac{x^2}{4}$ принимает наименьшее значение c^* в случае, когда парабола $y = c^* + \frac{x^2}{4}$ касается полуокружности $y = -\sqrt{16-x^2}$ в двух точках $(\pm x^*; y^*)$, где $0 < x^* < 4$. Условия касания запишутся следующим образом: $c^* + \frac{(x^*)^2}{4} = -\sqrt{16-(x^*)^2} = y^*$ и $\frac{x^*}{2} = \frac{x^*}{\sqrt{16-(x^*)^2}}$. Отсюда $x^* = 2\sqrt3$, $y^* = -2$, $c^* = -2 - \frac{12}{4} = -5$. На множестве $M(a)$ пар $(x; y)$, удовлетворяющих одновременно двум неравенствам $y + \sqrt{16-x^2} \ge 0$ и $y + 4 \ge |4x - a|$, величина $y - \frac{x^2}{4}$ не может принять значение меньше c^*. Следовательно, когда одна из точек $(\pm x^*; y^*)$ принадлежит $M(a)$, наименьшее значение величины $y - \frac{x^2}{4}$ на $M(a)$ равно c^* и будет минимально возможным. Выясним, при каких значениях параметра a имеет место включение одной из точек $(\pm x^*; y^*)$ в $M(a)$. Для этого решим неравенства $2 \ge \left|\pm 8\sqrt3 - a\right|$. Получаем, что при $a \in \left[8\sqrt3 - 2; 8\sqrt3 + 2\right]$ точка $(2\sqrt3; -2)$ принадлежит $M(a)$, а при $a \in \left[-8\sqrt3 - 2; -8\sqrt3 + 2\right]$ точка $(-2\sqrt3; -2)$ принадлежит $M(a)$.

6. а) $AA_1 = d\sqrt2$, $AD = d\left(\sqrt2+1\right)$, $AB = d\left(\sqrt2+2\right)$;

б) $\arccos\frac{2+2\sqrt2}{\sqrt{34+23\sqrt2}}$; в) $R = d\left(\frac{3+3\sqrt2-\sqrt{5+6\sqrt2}}{4}\right)$.

а) Пусть $AA_1 = x$, тогда $AD = x + d$, $AB = x + 2d$, $AC_1 = x + 3d$. По теореме Пифагора $AA_1^2 + AD^2 + AB^2 = AC_1^2$, или $x^2 + (x+d)^2 + (x+2d)^2 = (x+3d)^2$. Откуда $x^2 = 2d^2$, или $x = d\sqrt{2}$.

б) Рассмотрим точку M на прямой AB такую, что $AM = AB = d\sqrt{2} + 2d$ и A лежит между точками M и B. Тогда $MD_1 \parallel AC_1$, т.е. угол между прямыми CD_1 и AC_1 равен углу между прямыми CD_1 и MD_1. Рассмотрим треугольник MD_1C. В нем

$$MC^2 = MB^2 + BC^2 = 4d^2\left(\sqrt{2}+2\right)^2 + d^2\left(\sqrt{2}+1\right)^2 = \left(27 + 18\sqrt{2}\right)d^2,$$

$$MD_1^2 = AC_1^2 = d^2\left(\sqrt{2}+3\right)^2 = d^2\left(11 + 6\sqrt{2}\right),$$

$$CD_1^2 = CD^2 + DD_1^2 = d^2\left(\sqrt{2}+2\right)^2 + 2d^2 = d^2\left(8 + 4\sqrt{2}\right).$$

Тогда по теореме косинусов

$$MC^2 = MD_1^2 + CD_1^2 - 2\cdot MD_1 \cdot D_1C \cdot \cos\angle MD_1C,$$

или

$$27 + 18\sqrt{2} = 11 + 6\sqrt{2} + 8 + 4\sqrt{2} - 2\cdot\sqrt{11+6\sqrt{2}}\cdot\sqrt{8+4\sqrt{2}}\cdot\cos\angle MD_1C.$$

Откуда $\cos\angle MD_1C = -\dfrac{2+2\sqrt{2}}{\sqrt{34+23\sqrt{2}}}$. Это означает, что угол между прямыми CD_1 и AC_1 равен $\arccos\dfrac{2+2\sqrt{2}}{\sqrt{34+23\sqrt{2}}}$.

в) Рассмотрим базис $\{\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AA_1}\}$. В этом базисе точка A будет иметь координаты $(0;\, 0;\, 0)$, а точка C_1 – координаты $\left(d\sqrt{2}+2d;\, d\sqrt{2}+d;\, d\sqrt{2}\right)$. Если радиусы сфер R, то координаты центра первой сферы $(R;\, R;\, R)$, второй – $\left(d\sqrt{2}+2d-R;\, d\sqrt{2}+d-R;\, d\sqrt{2}-R\right)$. Сферы касаются, если расстояние между их центрами равно $2R$. Запишем это условие: $\left(d\sqrt{2}+2d-2R\right)^2 + \left(d\sqrt{2}+d-2R\right)^2 + \left(d\sqrt{2}-2R\right)^2 = (2R)^2$. Обозначим диаметр сферы $2R = t$ и получим уравнение $2t^2 - d\left(6\sqrt{2}+6\right)t + \left(11+6\sqrt{2}\right)d^2 = 0$, откуда находим $R = \dfrac{t}{2} = \dfrac{\left(3+3\sqrt{2}\right)d \pm d\sqrt{5+6\sqrt{2}}}{4}$. При этом центры сфер лежат внутри параллелепипеда, если $R \le d\sqrt{2}$, т.е. только при

$$R = \frac{\left(3+3\sqrt{2}\right)d - d\sqrt{5+6\sqrt{2}}}{4}.$$

Вариант 2

1. $(1;\, 2)$, $\left(-3;\, -\dfrac{2}{3}\right)$. *Указание.* Сделайте замену $u = 2x - 3y$, $v = xy - 6$.

2. $(-\infty;\, -1)\cup(-1;\, 0]\cup(1;\, 2)\cup(2;\, 3)\cup\left[\dfrac{7}{2};\, 4\right)$.

3. $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi m}{2}$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

4. $R = \dfrac{5\sqrt{35} - 3\sqrt{21}}{4}$, $S_{ABCD} = 30\sqrt{5} - 10\sqrt{3}$.

Так как AD – касательная, то $AD^2 = AK\cdot AL = 112$, $AD = 4\sqrt{7}$; аналогично, $CM^2 = CL\cdot CK = 7$, $BC = 2CM = 2\sqrt{7}$. Опустим из точек A и C перпендикуляры AA_1 и CC_1 на MD. Отрезки AD и CM образуют углы по $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ с DM. Поэтому $MC_1 = MC\cos\alpha = \sqrt{3}$, $DA_1 = DA\cos\alpha = 4\sqrt{3}$, $CC_1 = MC\sin\alpha = 2$, $AA_1 = DA\sin\alpha = 8$. Далее, по теореме Пифагора, $AC^2 = \left(AA_1 + CC_1\right)^2 + A_1C_1^2$, откуда $A_1C_1^2 = AC^2 - \left(AA_1 + CC_1\right)^2 = 15^2 - 10^2 = 125$, поэтому $A_1C_1 = 5\sqrt{5}$, $DM = A_1C_1 + MC_1 - DA_1 = 5\sqrt{5} - 3\sqrt{3}$. Так как угол между касательными в точках D и M равен $\pi - 2\alpha$, то DM стягивает дугу в 2α, поэтому радиус окружности равен

$$R = \frac{DM}{2\sin\alpha} = \frac{5\sqrt{35} - 3\sqrt{21}}{4}.$$

Далее,

$$DS = MS = \frac{DM}{2\cos\alpha} = \frac{5\sqrt{35} - 3\sqrt{21}}{2\sqrt{3}},$$

откуда

$$CS = MS - MC = \frac{5\sqrt{35} - 5\sqrt{21}}{2\sqrt{3}},$$

$$BS = MS + MB = MS + MC = \frac{5\sqrt{35} - \sqrt{21}}{2\sqrt{3}},$$

$$AS = AD + DS = \frac{5\sqrt{35} + 5\sqrt{21}}{2\sqrt{3}}.$$

Тогда

$$S_{ABCD} = S_{ABS} - S_{CDS} = \frac{1}{2}\left(AS\cdot BS - CS\cdot DS\right)\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30\sqrt{5} - 10\sqrt{3}.$$

5. $a \in \left[\dfrac{1}{4};\, 1\right)$ и $a = \dfrac{1}{4}\left(1 + 4^{5/3}\right)^{3/5}$.

Пусть $u = \dfrac{\sin^2 x}{32}$, $v = \cos^2 x$. Наличие единственного решения у рассматриваемого уравнения на отрезке $\left[-\pi;\, -\dfrac{\pi}{2}\right]$ равносильно наличию единственной точки пересечения у отрезка

$$\gamma_1 = \left\{(u;\, v) \mid 32u + v = 1,\ u \ge 0,\ v \ge 0\right\}$$

и кривой

$$\gamma_2 = \left\{(u;\, v) \,\middle|\, u^{2/5} + v^{2/5} = a,\ u \ge 0,\ v \ge 0\right\}.$$

При $a < 0$ множество γ_2 пусто. Изобразив отрезок γ_1 и кривую γ_2 при $a \ge 0$ на координатной плоскости, видим, что при $a \in \left[0;\, \dfrac{1}{4}\right)$ пересечение $\gamma_1 \cap \gamma_2$ пусто, а при $a \in \left[\dfrac{1}{4};\, 1\right)$ пересечение $\gamma_1 \cap \gamma_2$ одноточечно. При $a \ge 1$ пересечение $\gamma_1 \cap \gamma_2$ одноточечно в случае касания γ_1 и γ_2. Графики функций $v_1(u) = 1 - 32u$ и $v_2(u) = \left(a - u^{2/5}\right)^{5/2}$ касаются в точке $(u;\, v)$ при $v_1(u) = v_2(u) = v$ и $v_1'(u) = v_2'(u) = -32$, т.е. $u^{-3/5} - 32v^{-3/5} = 0$. Следовательно, $v = 2^{25/3}u$, $\left(32 + 2^{25/3}\right)u = 1$ и

$$a = u^{2/5}\left(1 + 2^{10/3}\right) = \frac{1 + 2^{10/2}}{\left(32 + 2^{25/3}\right)^{2/5}} = \frac{1}{4}\left(1 + 4^{5/3}\right)^{3/5} > 1.$$

6. $a = R\operatorname{tg}2\beta$, $b = R\operatorname{ctg}\beta$, $c = \dfrac{R\sin 2\beta}{2 - \cos 2\beta}$,

$$V = \frac{2R^3}{3}\frac{\left(1+\cos 2\beta\right)^2}{\left(2 - \cos 2\beta\right)\cos 2\beta};\ \left(\angle OCD\right)_{\min} = \frac{\pi}{6};\ V_{\min} = 2R^3.$$

Пусть сфера касается ребер AB, BC, AC, AD, DC, DB в точках M, N, E, K, L, F соответственно; $a = MB = NB = FB$, $b = CL = CN = CE = AK = AM = AE$, $c = DK = DL = DF$ – искомые отрезки; $h = DT$ – высота пирамиды. Имеем $\angle EBC = \angle EBA = \angle EBD = \dfrac{\pi}{2} - 2\beta$, $\angle ACB = \angle CAB = 2\beta$, $\angle OCN = \angle OCE = \angle OCL = \beta$. Из ΔBON получаем

$a = R\operatorname{tg}2\beta$. Из ΔCON определяем $b = R\operatorname{ctg}\beta = \dfrac{R\sin 2\beta}{1-\cos 2\beta}$. Из ΔCTB по теореме косинусов находим $CT^2 = BT^2 + (a+b)^2 - 2(a+b)BT\sin 2\beta$. По теореме Пифагора из ΔCTD и ΔBTD получаем $CT^2 + h^2 = (b+c)^2$, $BT^2 + h^2 = (a+c)^2$. Из ΔBTD имеем также $BT = (a+c)\sin 2\beta$. Отсюда находим

$$(b+c)^2 = (a+c)^2 + (a+b)^2 - 2(a+b)(a+c)\sin^2 2\beta .$$

Следовательно, $c = \dfrac{a(a+b)\cos^2 2\beta}{b-a+(a+b)\sin^2 2\beta}$. Так как $a+b = \dfrac{R\sin 2\beta}{(1-\cos 2\beta)\cos\beta}$, $b-a = \dfrac{R(2\cos 2\beta - 1)\sin 2\beta}{(1-\cos 2\beta)\cos 2\beta}$, то $c = \dfrac{R\sin 2\beta}{2-\cos 2\beta}$. Из ΔBTD определяем $h = (a+c)\cos 2\beta = \dfrac{2R\sin 2\beta}{2-\cos 2\beta}$. Площадь грани ABC равна $S = b(a+b)\sin 2\beta = \dfrac{R^2\sin^3 2\beta}{(1-\cos 2\beta)^2\cos 2\beta}$. Следовательно, объем пирамиды равен $V = \dfrac{Sh}{3} = \dfrac{2R^3}{3}\dfrac{(1+\cos 2\beta)^2}{(2-\cos 2\beta)\cos 2\beta}$. Далее, обозначив $t = \cos 2\beta$, ищем минимум функции $f(t) = \dfrac{(1+t)^2}{(2-t)t}$ на интервале $t \in (0;1)$. Уравнение $f'(t) = 0$ имеет единственное решение $t^* = \dfrac{1}{2}$. Так как $3 = f(t^*) < 4 = f(1-0) < +\infty = f(+0)$, то t^* доставляет минимум f на $(0;1)$. Соответствующее значение $\beta^* = \dfrac{\pi}{6}$. Минимальный объем пирамиды

$$V^* = \frac{2}{3}R^3 f(t^*) = 2R^3 .$$

Вариант 3

1. $x = \dfrac{1}{4}$, $x \ge \dfrac{5}{4}$. **2.** $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right) \cup \left[\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}; 1\right)$. **4.** $2\operatorname{arctg}\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{13\sqrt{41}}{40}$.

5. $(-2;0)$, $(-2;2)$. **6.** 2, $\dfrac{\sqrt{211}}{3\sqrt{2}}$, $\dfrac{19}{3}$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Обозначим 1 – нижний груз, 2 – верхний. Запишем условия равновесия грузов в воздухе и в воде:

$$T = \rho_1 V_1 g,$$
$$2T = T + \rho_2 V_2 g,$$
$$0{,}7T = (\rho_1 - \rho)V_1 g,$$
$$0{,}8\cdot 2T = 0{,}7T + (\rho_2 - \rho)V_2 g.$$

Отсюда найдем искомые плотности грузов:

$$\rho_1 = \frac{10}{3}\rho = 3{,}3\ \text{г/см}^3,\quad \rho_2 = 10\rho = 10\ \text{г/см}^3 .$$

2. 1) $F = \dfrac{1}{3}m\omega^2 l$. 2) Центр масс движущейся по окружности под действием искомой силы массы $\dfrac{2}{3}m + \dfrac{m}{3} = m$ находится на расстоянии

$$x = \frac{\frac{2}{3}m\cdot\frac{2}{3}l + \frac{m}{3}\cdot l}{\frac{2}{3}m + \frac{m}{3}} = \frac{7}{9}l$$

от оси вращения. По теореме о движении центра масс находим силу натяжения каната:

$$F = m\omega^2 x = \frac{7}{9}m\omega^2 l .$$

3. Пусть $T_2 = T_3 = T$, тогда

$$T_1 = T\frac{p_1}{p_3} = 3T .$$

Работа, совершаемая машиной во всем цикле, равна

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{31},\ \text{где}\ A_{12} = -\Delta U = \nu c_V (T_1 - T_2) = 3\nu RT,$$
$$A_{23} = -Q,\quad A_{31} = 0,$$

или

$$A = 3\nu RT - Q .$$

Отсюда находим искомую температуру:

$$T_{\max} = T_1 = 3T = \frac{A+Q}{\nu R} .$$

4. 1) Пусть в установившемся режиме напряжение на конденсаторе равно U – это его среднее значение. Тогда при разомкнутом ключе конденсатор заряжается током $I_1 = \dfrac{\mathcal{E} - U}{3R}$, а при замкнутом ключе разряжается током $I_2 = \dfrac{U}{2R}$. В стационарном состоянии приходящий заряд равен уходящему:

$$\frac{\mathcal{E}-U}{3R}\cdot 2\tau = \frac{U}{2R}\cdot\tau,\ \text{откуда}\ U = \frac{4}{7}\mathcal{E} .$$

2) Через резистор сопротивлением $2R$ в течение времени 2τ идет ток $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}-U}{3R} = \dfrac{\mathcal{E}}{7R}$, а в течение времени τ идет ток $I_2 = \dfrac{U}{2R} = \dfrac{2\mathcal{E}}{7R}$. Средняя тепловая мощность равна

$$P = \frac{I_1^2\cdot 2R\cdot 2\tau + I_2^2\cdot 2R\cdot\tau}{3\tau} = \frac{4}{49}\frac{\mathcal{E}^2}{R} .$$

5. Изображение действительное, поэтому $f > 0$. Из системы уравнений

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},\quad f = \Gamma d,\quad d + f = 4{,}5F$$

получаем

$$\Gamma^2 - 2{,}5\Gamma + 1 = 0,\ \text{откуда}\ \Gamma_1 = 2\ \text{и}\ \Gamma_2 = \frac{1}{2} .$$

По условию изображение увеличенное, значит, окончательно

$$\Gamma = 2 .$$

Вариант 2

1. 1) Проекция скорости шарика на плиту не изменяется:

$$v_0\sin\alpha = v\sin\gamma .$$

Отсюда находим скорость отскочившего шарика:

$$v = v_0\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = 2v_0 .$$

2) В системе отсчета, связанной с плитой, модуль скорости шарика при ударе не изменяется и угол падения равен углу отражения (рис.3). В неподвижной системе отсчета в проекции на нормаль к плоскости имеем

$$v\cos\gamma = 2u + v_0\cos\alpha ,$$

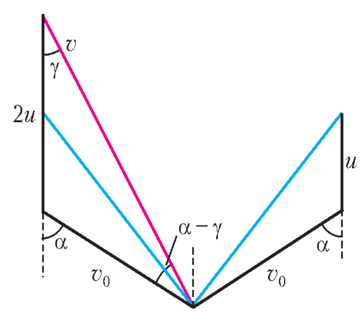


Рис. 3

откуда для искомой скорости плиты получаем

$$u = \frac{1}{2}(v\cos\gamma - v_0\cos\alpha) = \frac{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{6}v_0 .$$

Можно также записать теорему синусов:

$$\frac{2u}{\sin(\alpha-\gamma)} = \frac{v_0}{\sin\gamma},$$

откуда после раскрытия синуса суммы получим тот же ответ.

2. Для машины Карно коэффициент полезного действия равен

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{34}|}{Q_{12}} = 1 - \frac{T_3}{T_1}, \text{ откуда } \frac{|Q_{34}|}{T_3} = \frac{Q_{12}}{T_1}.$$

Кроме того,

$$A_{12} = Q_{12},\ A_{34} = |Q_{34}| \text{ и } A_{41} = \nu c_V \Delta T .$$

Объединяя все это, получаем

$$A_{12} = A_{34}\frac{T}{T-\Delta T} = A_{34}\frac{T}{T - \frac{A_{41}}{\nu c_V}} = \frac{3\nu RT}{3\nu RT - 2A_{41}}A_{34} .$$

3. Потенциальная энергия взаимодействия кольца и шарика равна

$$W = k\frac{Q\cdot 2Q}{l}, \text{ где } l = \sqrt{R^2+x^2} .$$

В начале наблюдения $x = 0$ и $l = R$, в конце $x = \frac{4}{3}R$ и $l = \sqrt{R^2 + \left(\frac{4}{3}R\right)^2} = \frac{5}{3}R$. Из закона сохранения энергии

$$k\frac{2Q^2}{R} = \frac{mv^2}{2} + k\frac{2Q^2}{\frac{5}{3}R}$$

находим искомую скорость шарика:

$$v = \sqrt{\frac{8kQ^2}{5mR}} = \sqrt{\frac{2Q^2}{5\pi\varepsilon_0 mR}} .$$

4. После замыкания ключа через резистор будет течь постоянный ток $I_R = \frac{\mathcal{E}}{R}$, а ток в катушке будет линейно нарастать со временем по закону $I_L(t) = \frac{\mathcal{E}}{L}t$. К моменту размыкания ключа в резисторе выделится количество теплоты $I_R^2 R\tau$, а в катушке будет запасена энергия $\frac{LI_L^2(\tau)}{2}$, которая полностью перейдет в тепло после размыкания ключа. По условию,

$$Q = \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)^2 R\tau + \frac{L}{2}\left(\frac{\mathcal{E}}{L}\tau\right)^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\tau + \frac{\mathcal{E}^2}{2L}\tau^2 .$$

Решая квадратное уравнение, находим искомое время:

$$\tau = \sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 + \frac{2LQ}{\mathcal{E}^2}} - \frac{L}{R}$$

(второй корень отрицательный).

5. Изображение получено на экране, поэтому оно действительное и линза собирающая. Решая систему

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},\ \frac{f}{d} = \Gamma,$$

при $\Gamma_1 = 2$ получаем

$$d_1 = 1{,}5F,\ f_1 = 3F,\ l_1 = d_1 + f_1 = 4{,}5F, \text{ или } \frac{l_1}{F} = 4{,}5;$$

при $\Gamma_2 = 5$:

$$d_2 = 1{,}2F,\ f_2 = 6F,\ l_2 = 7{,}2F .$$

Линзу передвинули на расстояние $b = f_2 - f_1 = 6F - 3F = 3F$, предмет – на $x = l_2 - l_1 = 7{,}2F - 4{,}5F = 2{,}7F$. Таким образом,

$$x = \frac{27}{30}b = 27 \text{ см} .$$

Вариант 3

1. $M = 4{,}4m$.
2. 1) Масса пара равна нулю. 2) $V \approx 2{,}75$ л.
3. 1) $\varphi_A - \varphi_B = \frac{9}{4}\mathcal{E}$. 2) Ток направлен вверх и равен $I = \frac{5\mathcal{E}}{4R}$.
4. 1) $m = \frac{B\mathcal{E}l}{2gr}$. 2) Скорость направлена вверх и равна $v = \frac{\mathcal{E}}{2Bl}$.
5. 1) Изображение находится за экраном на расстоянии 10 см от него. 2) Диаметр пятна равен 23 мм.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОНИКИ И МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\left(-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$. **2.** $(-\infty;-1)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$.

3. $(1;3), (3;1), (-1;-3), (-3;-1)$.

4. $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

5. $D = (-1;5)$, $E = (-\infty;2]$. **6.** -11; 1; 5.

7. $\frac{18+27\pi}{4}$. **8.** 1728. **9.** $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Вариант 2

1. $\left[\frac{5}{3};3\right)$. **2.** -1; $\frac{2}{3}$. **3.** $[-2;2)$.

4. $\left(-\frac{1}{14};0\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **5.** $\log_2\frac{2}{7}$; 1.

6. $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

7. Объединение прямых $y = -\frac{1}{2}x$, $y = \frac{2}{3}x$; нет.
8. 35.
9. Нет; $a\in[0;8]$. *Указание*. Преобразуем: $\sqrt{a}\cos x - \sin x = \sqrt{a+1}\cos(x+\varphi) \le \sqrt{a+1}$. Левая часть неравенства $\sqrt{a+1}+\sqrt[4]{a+8}\le 5$ – возрастающая функция. Подбором убеждаемся, что при $a = 8$ это неравенство обращается в равенство.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $h = H - \frac{3v_0^2}{2g} = 10{,}65$ м. **2.** $T = \frac{2m_1m_2g}{m_1+m_2} = 66$ Н.

3. $\Delta U = \frac{3}{2}A = 30$ кДж. **4.** $\varphi = \frac{6Ea}{\sqrt{10}}$.

5. $P_1 = 2P_2 = \frac{2\mathcal{E}^2\eta(1-\eta)}{3r} = 1{,}26$ Вт.

Вариант 2

1. $v_{\text{отн}} = v_1\frac{t_2-t_1}{t_2} = 15$ км/ч. **2.** $v = 2\sqrt{\frac{Q}{m}} = 10$ м/с.

3. $N = \frac{pV}{kT} = 2{,}2\cdot10^{19}$. **4.** $l = \frac{gt^2}{4\pi^2N^2} = 0{,}48$ м $= 48$ см.

5. $Q = \frac{LU^2}{2R^2} = 5\cdot10^{-3}$ Дж $= 5$ мДж.

МОСКОВСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. −6. **2.** 8.

3. $\operatorname{tg}\frac{15\pi}{8}$. *Указание*. Представьте данные числа в виде $-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$ и $-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$.

4. $(-\infty;-64)\cup\left(-\frac{1}{64};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{64}\right)\cup(64;+\infty)$. *Указание*. Перейдите к логарифмам по основанию 2.

5. $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. *Указание*. Обозначьте $25^{\cos x}=y$.

6. 5. *Указание*. Рассмотрите два случая: $p>1$ и $0<p<1$ и заметьте, что в каждом из них $f(x)$ строго монотонна.

7. 2. *Указание.* Обозначьте $x\sqrt{7}=t$.

8. 36. *Указание*. Рассмотрите сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и перпендикулярной стороне основания, указанной в условии.

Вариант 2

1. 72. **2.** 3. **3.** $(-\infty;-0{,}5]\cup(1;2]$.

4. 16. *Указание*. Перейдите к логарифмам по основанию 2.

5. $4x+64x^{-9}$. **6.** $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. **7.** $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$.

8. $48\sqrt{3}$. *Указание*. Если все двугранные углы при основании пирамиды равны, то основанием высоты пирамиды является центр окружности, вписанной в основание (а в случае многоугольной пирамиды это означает еще, что в основание можно вписать окружность).

Вариант 3

1. $\sin\frac{79\pi}{40}<\cos\frac{11\pi}{5}$. *Указание*. Сравните данные числа с нулем.

2. $\left[\frac{1}{2};2\right]$. *Указание*. Проверьте, что $x^{\log_2 x}=2^{\log_2^2 x}$.

3. 5. **4.** $(-5;2)$. **5.** −8. **6.** $-\frac{1}{3}$. **7.** $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

8. 2. *Указание*. Рассмотрите осевое сечение конуса.

Вариант 4

1. 126.

2. $\sin 397°<\frac{\sqrt{2}}{2}$. *Указание*. Приведите данные числа к виду $\sin 37°$ и $\sin 45°$.

3. $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ n\in\boldsymbol{Z}$. **4.** $(0;1)\cup(1;2)$.

5. $2\left(e^x-e^{-x}\right)$. **6.** $(-3;1)\cup(4;+\infty)$.

7. ±1. **8.** $72\sqrt{3}$.

Задачи устного экзамена

1. $\sqrt{e}$; e. *Указание.* Прологарифмируйте уравнение.

2. [−5; 0].

3. −2; 3. *Указание*. Разложите правую часть уравнения на множители.

4. $f(x)$ возрастает на $(-\infty;1)$ и на $(1;+\infty)$. *Указание.* $\sqrt{z^2}=|z|$.

5. $x_1=3$ − точка максимума, $x_2=-3$ − точка минимума.

6. $\cos16<\cos17<\sin15$. *Указание*. Отметьте числа 15,16,17 на тригонометрической окружности.

7. $-\frac{7}{6}\pi;\ \frac{5}{6}\pi;\ \pm2\pi$. *Указание*. Заметьте, что $\sin x-\sqrt{3}\cos x-2=2\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1\right)$.

8. График − парабола $y=x^2-1$, из которой выколоты точки с абсциссами $\frac{\pi n}{2},\ n\in\boldsymbol{Z}$.

9. 139; 469.

10. 144. *Указание*. В трапеции $ABCD$ проведите $CE\parallel BD$ и проверьте, что средняя линия треугольника ACE равна 12.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. 3). **2.** 3). **3.** 2). **4.** 2). **5.** 3). **6.** 1). **7.** 3). **8.** 2). **9.** 1). **10.** 2). **11.** 1). **12.** 2). **13.** 1) **14.** 1). **15.** 2). **16.** $A=100$ Дж. **17.** $R=150$ Ом. **18.** $F=15$ кН. **19.** $Q=9{,}1\cdot10^5$ Дж. **20.** $W=1{,}9$ эВ.

Вариант 2

1. 1). **2.** 1) **3.** 1). **4.** 2). **5.** 3). **6.** 1). **7.** 3). **8.** 2). **9.** 3). **10.** 2). **11.** 2). **12.** 1). **13.** 3). **14.** 2). **15.** 3). **16.** $a=20$ м/с^2. **17.** $v=0{,}1$ м/с. **18.** $I=5{,}5$ А. **19.** $d=16$ см. **20.** $v=350$ м/с.

НАПЕЧАТАНО В 2007 ГОДУ

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»
kvant.info

Московский центр непрерывного математического образования
kvant.mccme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru

Костромской центр дополнительного образования «Эврика»
ceemat.ru

журнал Квант ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия, В.М.Хлебникова

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: 930-56-48
E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области,
Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru
Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00
Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59