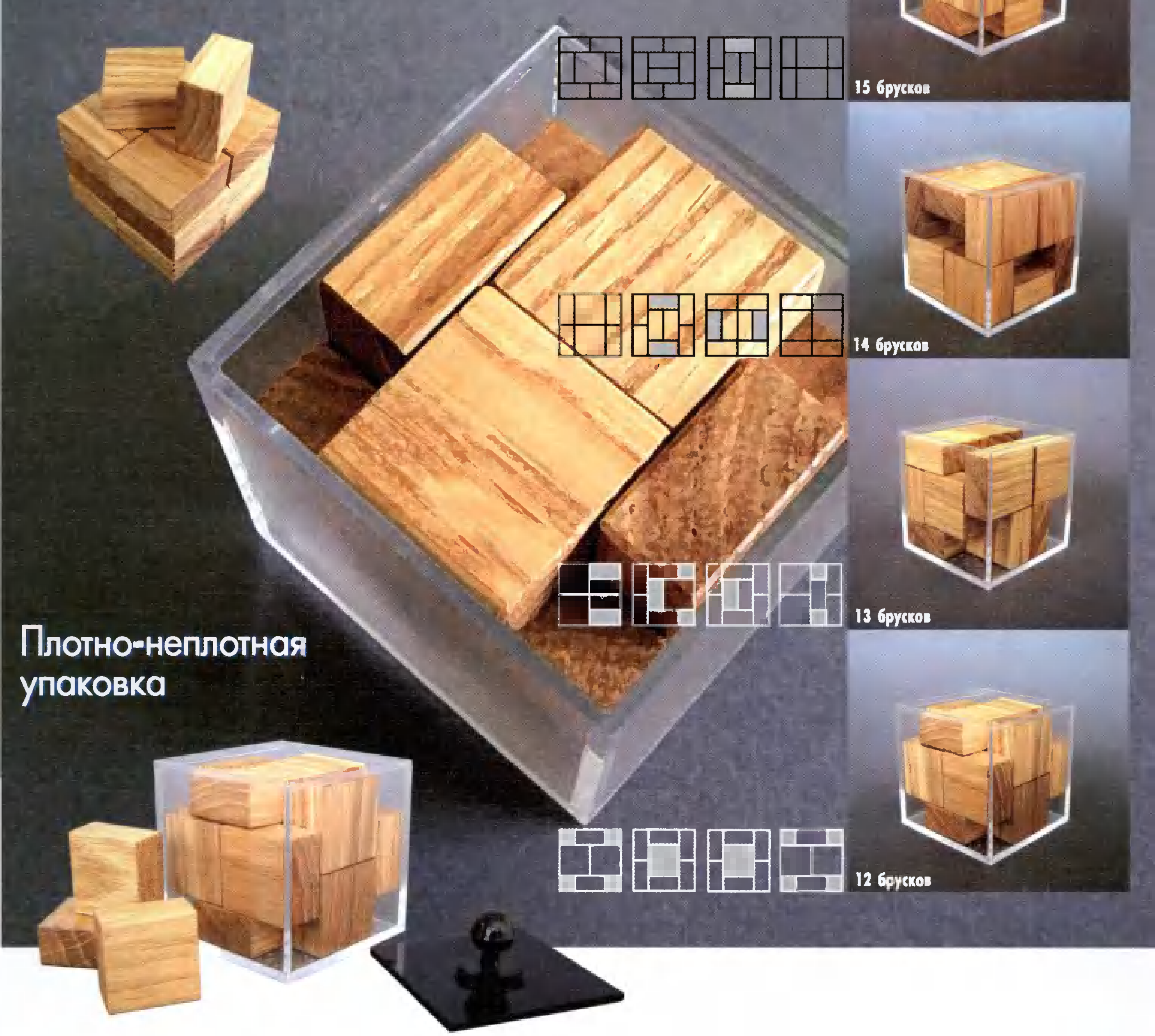
ISSN 0130–2221
2004 · №6
НОЯБРЬ/ДЕКАБРЬ

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

Плотно-неплотная упаковка



В головоломке голландского изобретателя Уильяма Страйбоса ставится не одна, а целых четыре задачи, причем последовательно возрастающей трудности. Внешний вид головоломки очень скромен. Имеется коробочка в форме куба 4x4x4 и пятнадцать одинаковых брусков размером 2x2x1. Очевидно, что в коробочку можно уложить 16 брусков, но в головоломке их на один меньше. Задача состоит в том, чтобы уложить 15 брусков плотно – так, чтобы они не болтались внутри.

Справившись с этой задачей, выньте пятнадцатый брусок и плотно уложите оставшиеся 14 брусков. После этого попробуйте упаковать 13 и, наконец, 12 брусков! Меньшее количество уложить плотно не удается. Но и тот результат, которого вы достигли, достаточно удивителен. Ведь теперь четвертая часть коробочки пуста, и, тем не менее, ни один брусок нельзя сдвинуть с места, не вынимая его.

Чтобы облегчить задачу, на рисунке показан внешний вид головоломки при решении всех четырех вариантов. Однако интереснее сделать игрушку самому. Возьмите какой-нибудь листовой материал толщиной 5–20 мм: пенопласт, фанеру, доску, оргалит, древесноволокнистую плиту и разметьте на ее поверхности 15 одинаковых квадратов, стороны которых должны быть равны удвоенной толщине пластины. Разрежьте по линиям разметки, и все необходимое для решения головоломки уже готово. Затем из этого же материала можно изготовить и коробочку.

Разумеется, у вас есть возможность придумать собственные головоломки подобного типа.

А.Калинин

КВАНТ НОЯБРЬ ДЕКАБРЬ 2004 №6

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Квант

Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
Ю.А.Осипьян

ПЕРВЫЕ ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА
С.С.Кротов, С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов, А.Н.Виленкин, С.А.Гордюнин, Н.П.Долбилин, В.Н.Дубровский, А.А.Егоров, А.Р.Зильберман, В.В.Козлов, С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, В.В.Можаев, В.В.Произволов, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров (*заместитель главного редактора*), **В.А.Тихомирова, В.М.Уроев, А.И.Черноуцан** (*заместитель главного редактора*)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ
А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков, В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА
А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский, А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков, Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский, Я.А.Смородинский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро Квантум

© 2004, Президиум РАН, Фонд Осипьяна, «Квант»

Финансовая математика

В.МАЛЫХИН

Финансовые инструменты и их характеристики

1. Общие сведения о финансовых инструментах. Финансовый инструмент – это любой документ, который может участвовать в финансовых операциях: облигации, акции, депозитные сертификаты, векселя и т.д. и т.п. Финансовые инструменты делятся на основные и производные. К основным относятся банковский счет, облигации и акции. Все остальные инструменты называются производными. Среди них: депозитные сертификаты, векселя, форвардные и фьючерсные контракты, опционы и всевозможные их комбинации. Важнейшими характеристиками финансовых инструментов являются цена (или курс для облигаций) и доходность.

Как и на обычном рынке, цена финансового инструмента определяется спросом на него и предложением.

Финансовой называется операция, начало и конец которой имеют денежную оценку – Н и К соответственно и цель проведения которой заключается в максимизации разности К – Н или другого подобного показателя. Доходностью операции называется величина $d = (\text{К} - \text{Н})/\text{Н} = \text{К}/\text{Н} - 1$. Примеры определения доходности финансовых инструментов приведены далее. Доход от владения ценными бумагами может быть текущий и полный.

Тот, кто выпускает (эмитирует) ценные бумаги, называется *эмитент*. Продажа ценных бумаг самим эмитентом называется первичным рынком. Многие ценные бумаги могут покупаться и продаваться их владельцами, не эмитентами – и это уже вторичный рынок.

Опишем важнейшие финансовые инструменты: банковский счет, облигации и акции.

Банковский счет – это запись (электронная или бумажная) о денежной сумме, положенной в банк на каких-то условиях, оговариваемых в договоре. Операции с банковским счетом, в общем, производятся по правилам операций с процентами – обычно сложными, но иногда и простыми – и были описаны выше. Процентные деньги формируют и текущий доход от банковского счета.

Облигации – это ценные бумаги, обычно на предъявителя. Облигации имеют номинальную стоимость или номинал N, который присваивают облигации в момент ее эмиссии. С течением времени цена облигации может меняться, но обычно говорят не о цене облигации P, а об отношении цены к номиналу, и это отношение, выраженное в процентах, называют курсом облигации K. Итак, курс облигации $K = P/N$, или $P = KN$, а если в процентах, то $K = 100P/N$, $P = NK/100$.

Продолжение. Начало см. в «Кванте» №5.

Облигации называются по имени их эмитента: государственные, если их выпустило государство, муниципальные, корпоративные и т.п.

Часто облигации имеют установленный период действия, после чего они могут быть погашены, т.е. владелец получает номинальную стоимость облигации.

Часто облигации имеют купон. Купон характеризуется купонной ставкой q, что дает владельцу купонный доход, равный доле q от номинала. Например, если $q = 10\%$, а $N = 1000$ д.е., то разовый купонный доход равен 100 д.е. Купонный доход выплачивается периодически или только один раз, например при погашении облигации. Купонный доход есть текущий доход от облигации.

Благодаря фиксированному текущему доходу облигации – весьма популярные ценные бумаги, по своей стоимости они превосходят остальные ценные бумаги.

Акция – это ценная бумага, часто ее владелец занесен в особый список (реестр) акционеров, что дает ему некоторые права, например право участвовать в собраниях акционеров, на которых могут приниматься важные решения. Акция дает ее владельцу право на получение дивидендов – раз в квартал или с другой периодичностью. Дивиденды формируют текущий доход владельца акции. Часто акции продаются и покупаются, тогда они имеют цену. Цена акции определяется многими факторами, некоторые из которых носят случайный характер. Часто акции имеют номинальную стоимость, но обычно она не играет никакой роли.

Акции делятся на две большие группы: обыкновенные и привилегированные. Выплаты дивидендов сначала производятся по привилегированным акциям, и только после этого – по обыкновенным. Недостаток привилегированных акций в том, что, если компания успешно ведет дела, дивиденды на обычные акции растут, а на привилегированные нет.

2. Курс и доходность облигации без погашения с периодической выплатой купонных процентов. Доход от такой облигации получают только в виде купонных процентов. Пусть ставка купона q, ставка процента i, номинал облигации N. Тогда купонные выплаты qN образуют вечную ренту (см. выше). Дисконтируя все эти выплаты по ставке процента i, получим современную величину этой ренты, что и есть теоретическая цена облигации P. Итак,

$$P = qN/(1+i) + qN/(1+i)^2 + \ldots = qN/i\,.$$

Следовательно, курс облигации есть $K = 100\ q/i$. Если выплата купонных денег происходит p раз в году величиной qN/p, так что за год получается опять же qN, то эти купонные выплаты qN/p надо дисконтиро-

Иллюстрация П.Чернуского

вать по ставке $(1+i)^{1/p}$, следовательно, получаем формулу $K = (100q/p)\Big/\left((1+i)^{1/p}-1\right)$.

Пусть теперь курс облигации K известен. Найдем текущую доходность облигации указанного типа. Если купонные выплаты производятся раз в год, то за год облигация приносит доход qN, а так как в нее вложено P, то ее доходность равна $j = qN/P$, или $qN/(KN) = q/K$, если курс считать долей, а если в процентах, то $j = 100q/K$.

Можно предложить и другой способ определения доходности облигаций указанного типа. Пусть доходность облигации равна j, тогда купонные выплаты наращивают стоимость облигации по этой годовой ставке. Значит, если дисконтировать этот поток купонных выплат по ставке j, то получим современную величину этого потока, а это и есть известная уже цена облигации. Купонные выплаты представляют собой «вечную» ренту, ее современная величина равна qN/j. Итак, имеем уравнение $qN/j = KN/100$, откуда $j = 100q/K$.

3. Курс и доходность облигации с периодической выплатой процентов и погашением. Это самый общий тип облигаций. Суммарный доход от облигаций данного типа складывается из регулярных купонных выплат, роста курса, что дает доход при продаже или от погашения облигации.

Пусть q, i – ставки купона и процента. Если облигация куплена за m лет до погашения, то будущие купонные доходы qN есть годовая рента и ее современная величина есть $qN\,a(m,i)$, где $a(m,i)$ – коэффициент приведения этой ренты, т.е. $\left(1-(1+i)^{-m}\right)i$. Добавив сюда еще современную величину номинала погашения $N(1+i)^{-m}$, получим теоретическую цену облигации P. Итак, $P = N(1+i)^{-m} + qN\left(1-(1+i)^{-m}\right)\Big/i$, следовательно, курс облигации есть $K = 100\Big((1+i)^{-m} + q\left(1-(1+i)^{-m}\right)\Big/i\Big)$.

Теперь определим доходность облигации рассматриваемого типа. Дисконтируя номинал облигации при погашении и купонные платежи по (пока неизвестной) ставке доходности j, мы должны получить цену облигации P. Следовательно, имеем уравнение $N(1+j) + qNa(m,j) = P$, откуда и можно найти j. Это уравнение несложно приближенно решить на компьютере.

4. Цена «вечной» акции (доход – только дивиденды). Доход от такой акции получают только в виде дивидендов, т.е. ее продажа не предусмотрена. Поэтому теоретическую или расчетную цену акции P определяют как дисконтированную к современному моменту «вечную» ренту будущих дивидендов по действующей ставке i. Если предположить, что дивиденды постоянны, равны d и выплачиваются раз в году, то d/i есть современная величина этой ренты, что и является ценой акции P.

5. Банковские депозитные сертификаты. Такие сертификаты выдаются банками в обмен на средства, размещаемые у них. Они отличаются от обычных банковских депозитов тем, что сертификаты могут обращаться на вторичном рынке. Там они оцениваются, исходя из текущей стоимости будущих денежных поступлений. Расчет их текущей стоимости интересен тем, что за время действия сертификата может произойти изменение текущей процентной ставки.

Пример 14. Пусть депозитный сертификат был выпущен на сумму 1000 руб. под 12% годовых. Следовательно, при его гашении через год его владелец получит 1120 руб. Предположим, что через полгода ставка уменьшилась до 6%. Какова будет цена этого сертификата в этот момент?

Эта цена P, наращенная по ставке 6% годовых, через полгода должна нарасти до 1120. Имеем уравнение $P(1+0{,}06)^{1/2} = 1120$, отсюда получаем P = 1087 руб.

6. Арбитраж и характеристики финансовых инструментов. Если на одном рынке товар стоит дешевле, чем на другом, то можно купить товар на первом рынке, продать его на втором и получить некоторую прибыль. Иногда это называется спекуляцией. Конечно, такое положение может быть лишь временным. Найдется много желающих проводить такие операции – они называются арбитражными. Это приведет к повышению цены на первом рынке и к ее падению на втором. Разница цен может остаться (арбузы в Узбекистане всегда будут дешевле, чем в Москве), но она не сможет компенсировать транспортных и других издержек по этой операции. Финансовый рынок принципиально немногим отличается от обычных товарных рынков. Пожалуй, он более развит. Арбитражные операции проводятся и на нем. Отметим, что часто арбитражные операции покупки и продажи осуществляются одновременно.

Рассмотрим ценообразование *фьючерсных* и *форвардных* контрактов с учетом возможности арбитражных сделок.

Форвардные и фьючерсные контракты – это контракты на покупку или продажу определенного количества какого-либо товара на определенную дату в будущем, но по цене, установленной в момент заключения контракта. Фьючерсные контракты отличаются от форвардных лишь тем, что они обезличены, являются фактически стандартными и торговля ими ведется лишь на специализированных биржах, в то время как форвардные контракты могут быть весьма индивидуальны (например, между банком и его клиентом). В силу этого термин «фьючерс» будет употребляться также и по отношению к форвардным контрактам.

Рассмотрим ценообразование фьючерсов на покупку какого-то актива (так в финансовой математике вообще называется какой-то товар) ровно через год. Пусть нынешняя цена актива равна \$10000. Пусть банковская процентная ставка 10%. Предположим, что этот актив приносит чистого дохода тоже 10% в год. Тогда справедливая цена такого актива через год – 110% от нынешних \$10000, т.е. \$11000 (надо понимать, что доход, который принесет актив за год, добавляется к активу и за оба вместе и платят \$11000). Столько и должен стоить фьючерс на покупку такого актива. В самом деле, предположим, что этот фьючерс сейчас продается за меньшую сумму: например, за $10000. Тогда арбитражер купит фьючерс, продаст сейчас имеющийся у него актив за $10000, положит вырученные деньги в банк, через год они нарастут до $10000 + + $1000, по имеющемуся у него фьючерсу арбитражер купит точно такой же актив, какой продал год назад, за $10000 и получит в итоге прибыль $1000.

Если же фьючерс будет переоценен, т.е. он дает право продать через год актив по большей цене, скажем за $12000, то арбитражер приобретает фьючерс, покупает актив сейчас за $10000, воспользовавшись банковским кредитом под 10% годовых. Через год этот актив он продаст по фьючерсу за $12000 и в итоге получит прибыль $1000.

Торговля фьючерсами на биржах организована клиринговой палатой. Допустим, что сегодня $2000 есть фьючерсная цена поставки актива через 3 дня, в момент $t = 3$. Если завтра фьючерсная цена поставки актива в момент t станет $1900, то клиринговая палата перечислит на счет поставщика $100. Эти $100 будут сняты со счета покупателя, и ему будет предложено пополнить свой счет. Если вдруг (под влиянием каких-нибудь событий, слухов и т.п.) послезавтра фьючерсная цена поставки актива в момент $t = 3$ поднимется до $2200, то палата перечислит на счет покупателя $300, сняв их со счета поставщика. Так клиринговая палата обеспечивает исполнение контракта ровно по цене $2000.

Замечание. Для ориентировки приведем сведения о доходности некоторых конкретных ценных бумагах в странах со стабильной развитой экономикой (США, Германия, Великобритания и т.д.).

Годовые процентные ставки (%), декабрь 1995 год

Банковский депозит с недельным сроком извещения о снятии средств	4,5
Трехмесячный банковский депозитный сертификат	6,38
Трехмесячный коммерческий вексель	6,45
Трехмесячный казначейский вексель (Великобритания)	6,45
Шестимесячный межбанковский кредит	6,34
Государственная облигация со сроком погашения 5 лет (Великобритания)	7,0
Государственная облигация со сроком погашения 10 лет (Великобритания)	7,4
Государственная облигация со сроком погашения 10 лет (Германия)	5,88
Корпоративная облигация со сроком погашения 5 лет, обеспеченная активами корпорации (Великобритания)	8,1
Корпоративная облигация со сроком погашения 5 лет, не обеспеченная активами корпорации (Великобритания)	9,2

Опционы и ценообразование опционов

Опционы являются ценными бумагами. Это производный финансовый инструмент. Появились опционы не так давно, а организованная торговля ими началась только в 1973 году. В данном разделе рассматривается использование опционов для уменьшения риска, а также определение цены на них.

1. Опционы. Опцион на покупку (call-option) дает право его владельцу (держателю опциона) купить актив по установленной в этом документе цене до наступления определенной даты (американский опцион) или на момент такой даты (европейский опцион). Цена эта называется ценой исполнения. Владелец опциона может отказаться от указанной покупки актива без всяких штрафов.

Аналогично, опцион на продажу (put-option) дает право его владельцу продать актив по установленной в этом документе цене до наступления определенной даты (американский опцион) или на момент такой даты (европейский опцион).

Далее рассматриваются только европейские опционы.

Нужно отметить, что тот, кто выписал опцион, т.е. его продавец, несет определенное обязательство во все время действия опциона. В частности, если он выписал опцион на покупку, то несет обязательство обеспечить поставку актива по цене исполнения в момент исполнения опциона, а если он выписал опцион на продажу, то должен купить актив по цене исполнения в момент исполнения опциона.

Наоборот, держатель опциона никаких обязательств не несет, но он покупает опцион и платит выписавшему опцион некоторую сумму, называемую премией или просто стоимостью опциона.

Рассмотрим более подробно европейский опцион на покупку. Когда наступает дата исполнения опциона, то держатель опциона сравнивает рыночную цену на актив S и цену исполнения R, т.е. указанную в опционе. Если $S > R$, то он реализует свое право покупки актива по цене S и покупает актив по этой цене (он может немедленно же его продать и получить прибыль $S - R$). Но как фактически реализуется его право купить актив по более низкой цене, чем рыночная? В общем, это право ему обеспечивает продавец опциона, поставляя физический актив или доплачивая разницу $S - R$ держателю опциона (эти обязательства обеспечиваются специальным биржевым механизмом – клиринговой палатой, наподобие того, как обеспечивается торговля фьючерсами). Держатель опциона оказывается в выигрыше, и тем большем, чем больше разница $S - R$. Но если рыночная цена не превышает цену исполнения, то держателю опциона незачем покупать актив. В этом случае он в проигрыше – ведь премию-то за опцион он заплатил и она пропала зря.

Следовательно, опцион на покупку покупают тогда и те, кто надеется на повышение рыночной цены актива к дате исполнения опциона.

Аналогично обстоит дело и с опционами на продажу.

Торговля опционами – дело довольно сложное и проходит на биржах. Сегодня опционов ежедневно продают и покупают миллионы штук. Дело, однако, редко доходит до поставки физических активов. Обычно проигравшая сторона оплачивает свой проигрыш деньгами.

Как уже упоминалось, американский опцион можно предъявить к исполнению в любой момент до определенной даты. Поэтому держатель такого опциона все время в напряжении: а вдруг сейчас и есть этот самый выгодный момент и дальше может быть только хуже? Из-за этой возможности выбора наивыгоднейшего момента американский опцион должен быть дороже; и теория и практика это подтверждают.

2. Определение стоимости опциона на момент исполнения. При организованной торговле опционами они обезличены и становятся совершенно обычными ценными бумагами на предъявителя. Опцион может быть куплен или продан в любой момент до даты его исполнения. Определим его цену непосредственно перед исполнением (всякого рода издержками на оформление сделки и т.п. пренебрежем).

Итак, пусть рыночная цена актива S, цена исполнения R, а C – цена опциона на покупку, тогда $C = S - R$, если $S > R$, и $C = 0$, если $S \le R$. Это можно записать так: $C = \max\{0, S - R\}$. Аналогично, в случае опциона на продажу его цена $C = \max\{0, R - S\}$. Теперь можно отметить еще одно различие в позициях продавца и покупателя опциона. Купивший опцион сразу же несет убытки в размере цены опциона, который он купил. Но на этом все его убытки кончились. В будущем он может только получить доход, причем теоретически неограниченный – ведь его возможный доход есть разница между рыночной ценой актива в момент исполнения опциона и ценой исполнения. Наоборот, продавший опцион сразу же получил доход в размере стоимости опциона, который он продал. Но на этом все его доходы кончились. Впереди его ждут только возможные убытки, причем теоретически неограниченные – эти возможные убытки есть разница между рыночной ценой актива в момент исполнения опциона и ценой исполнения.

3. Цена опционов в простейшем случае. Идея оценки опциона состоит в создании безрискового портфеля путем покупки актива и продажи (выписки) нескольких опционов на покупку этого же актива. Последующий анализ этого портфеля позволяет определить стоимость опциона.

Итак, пусть цена актива S равна 60 д.е., такова же и цена исполнения опциона на покупку. Срок действия опциона европейского типа один месяц. Предположим, что к концу месяца с вероятностью $1/2$ цена актива либо поднимется на 15 д.е., либо опустится на столько же, причем оба варианта равновозможны (говорят, что поведение цены актива в этой ситуации описывается биномиальной однопериодной моделью). В первом случае опцион непосредственно перед исполнением будет стоить 15 д.е., во втором случае не будет стоить ничего. Поэтому в первом случае продавец опциона должен заплатить держателю опциона 15 д.е., во втором случае он не должен ничего платить. Так как размах колебаний цен актива равен 30 д.е. и ровно в два раза превосходит колебания стоимости опциона перед исполнением, то для создания безрискового портфеля продавец опционов должен выписать 2 опциона на покупку. Проверим, что портфель из актива и этих двух опционов действительно безрисковый. В самом деле, в рамках рассматриваемой модели к концу месяца цена актива будет либо 75 д.е., либо 45 д.е. В первом случае владелец портфеля вынужден будет доплатить держателям опционов 30 д.е., во втором случае – ничего. В обоих случаях к концу месяца портфель будет стоить 45 д.е. независимо от колебаний цены актива. Это и означает его безрисковость.

Теперь перейдем непосредственно к определению цены опциона. Пусть безрисковая ставка равна 10% (такой ставкой можно считать, например, банковскую ставку в Сбербанке на срочный вклад на рассматриваемый период). Так как портфель безрисковый, то его современную стоимость найдем, дисконтируя его стоимость в конце месяца по безрисковой ставке. Итак, его современная стоимость равна $45/(1+0{,}1) = 41$ д.е. Но сейчас актив стоит 60 д.е., и поэтому два опциона вместе стоят $60 - 41 = 19$ д.е. Следовательно, один опцион стоит 9,5 д.е. За такую цену каждый опцион и должен быть продан.

Интересно детально проследить за состоянием продавца опционов. Сначала у него был только актив стоимостью 60 д.е. Потом он выписал и продал два опциона, каждый по 9,5 д.е. Теперь у него денег 19 д.е. за проданные опционы, актив стоимостью 60 д.е. и обязательства по обеспечению двух опционов, цена этих обязательств 19 д.е., и они образуют его пассив. Актив и этот пассив вместе образуют безрисковый портфель стоимостью 41 д.е. К концу месяца 19 д.е. возрастут по безрисковой ставке до $19(1+0{,}1) = 21$ д.е., стоимость безрискового портфеля возрастет по безрисковой ставке до $41 \cdot (1+0{,}1) = 45$ д.е., всего у него будет $21 + 45 = 66$ д.е. – в точности как если бы его актив был безрисковым и его стоимость возросла бы по безрисковой ставке до $60 \cdot (1+0{,}1) = 66$ д.е.! Умелое хеджирование полностью оградило от риска (хеджированием называется комплекс способов уменьшения риска путем покупки чего-то дополнительного – от английского «to hedge» – ограждать).

Финансовый рынок. Оптимальный портфель

1. Финансовый рынок и его составляющие. Кроме ценных бумаг – облигаций, акций, векселей и т.п., к финансовому рынку относятся также операции с ценными металлами – золотом, платиной и т.п., а также рынок обмена валют FOREX (его суточный мировой оборот составляет около 1,3 трлн долларов!).

Самый интригующий вопрос о финансовом рынке, конечно, следующий:

Возможно ли предугадать поведение цен на таком рынке?

Ведь если бы какой-то участник рынка сумел бы систематически предугадывать поведение цен, то он покупал бы те ценные бумаги, которые в ближайшем будущем должна были бы подорожать, и продавал бы их, когда это подорожание в самом деле произошло бы, т.е. «зарабатывал» бы деньги, ничего не делая.

Однако еще в начале XX века ученые пришли к выводу, что цены на финансовом рынке меняются совершенно случайно, примерно так же, как случайно броуновское движение молекул газа. Пояснить это можно следующим образом. Предположим, что в движении цен есть некоторая закономерность. В силу важности финансового рынка, эта закономерность, несомненно, была бы вскоре открыта (наверное, большим количеством участников этого рынка, причем независимо друг от друга). Что произошло бы далее? Допустим, по этой закономерности акции компании «Звезда» вскоре должны подорожать. Тогда знающие участники начали бы их массовую скупку, но это вызвало бы немедленное повышение цен на эти акции, и операция по их скупке (с целью последующей продажи при подорожании) перестала бы быть выгодной.

2. Оптимальный портфель ценных бумаг. Теперь остановимся на упомянутых во введении замечательных работах Марковитца и Тобина по оптимальному портфелю.

Работа финансового рынка, как правило, проходит в условиях неопределенности из-за большого числа разнообразных случайных факторов. В силу этого почти всегда финансовые операции являются рискованными: они могут принести меньше прибыли, чем рассчитывал участник рынка, а то и вообще оказаться убыточными. Дефолт в России 1998 года и аналогичные дефолты в других странах показали, что даже государства могут отказаться платить по своим долгам. Поэтому можно констатировать, что покупка ценных бумаг является рискованной операцией и, вообще, обладание ценными бумагами несет определенный риск. Финансовая математика умеет количественно оценивать риск финансовой операции со случайным результатом. Для этого используется теория вероятностей.

Рассмотрим операцию, которая может принести как прибыль 100 рублей, так и убыток в 20 рублей, причем оба случая равновозможны. Обозначая этот случайный результат Y, запишем эту операцию так:

$$Y : \frac{-20 \quad 100}{1/2 \quad 1/2}$$

В теории вероятностей такая таблица называется рядом распределения – в верхней строке стоят возможные значения случайной величины (с.в.), а в нижней – вероятности, с которыми она эти свои значения принимает. Теперь можно найти *математическое ожидание* с.в. Y. По определению, математическое ожидание равно сумме произведений возможных значений с.в. на их вероятности. В нашем примере $M[Y] = (-20)\cdot 1/2 + {}+ 100 \cdot 1/2 = 40$. Смысл математического ожидания в следующем:

Если получить много значений с.в., то их среднее арифметическое будет примерно равно математическому ожиданию.

Именно поэтому математическое ожидание с.в. называется еще ее *средним значением.*

После нахождения математического ожидания можно найти дисперсию. Она находится по формуле $D[Y] = M\left[Y^2\right] - (m_Y)^2$ (заметим, что m_Y – другое обозначение математического ожидания). В нашем примере

$$D[Y] = \left((-20)^2 \cdot 1/2 + (100)^2 \cdot 1/2\right) - 40^2 =$$

$$= (200 + 5000) - 1600 = 3600\,.$$

Дисперсия является мерой разброса значений с.в. около ее математического ожидания.

Так вот, в финансовой математике за риск финансовой операции принимают квадратный корень из дисперсии, который называют в теории вероятностей средним квадратическим отклонением и обозначают $R(Y)$. В нашем примере $R(Y) = 60$.

На финансовом рынке действует, по сути единственный, фундаментальный закон:

Чем более доходна операция, тем более она рискованна.

Так что когда просматриваем проценты, которые обещают различные банки, надо об этом твердо помнить.

По отношению к ценным бумага этот принцип гласит:

Чем более доходна ценная бумага, тем более она рискованна.

Набор ценных бумаг, находящихся у участника рынка, называется его портфелем. Стоимость портфеля – это суммарная стоимость всех составляющих его бумаг. Если сегодня его стоимость есть P, а через год она окажется равной P', то $(P' - P)/P$ естественно назвать доходностью портфеля в процентах годовых. Иными словами, доходность портфеля – это доходность на единицу его стоимости.

Рассмотрим общую задачу распределения капитала, который участник рынка хочет потратить на покупку ценных бумаг, по различным видам ценных бумаг. Предваряя точные математические постановки, констатируем очевидную общую цель инвестора – вложить деньги так, чтобы сохранить свой капитал, а при возможности и нарастить его.

Пусть x_i – доля капитала, потраченная на закупку ценных бумаг i-го вида. Рассуждения о долях эквивалентны тому, что весь выделенный капитал принимается за единицу. С математической точки зрения, портфель может быть отождествлен с набором долей x_i. Обозначим этот набор X.

Пусть d_i – доходность в процентах годовых ценных бумаг i-го вида (т.е. в расчете на одну денежную единицу).

Найдем доходность всего портфеля d. С одной стороны, через год капитал портфеля будет равен $1 + d$, с другой стороны, стоимость бумаг i-го вида увеличится с x_i до $x_i + d_i x_i$, так что суммарная стоимость портфеля будет $\sum_i (x_i + d_i x_i)$. Приравнивая оба выражения для стоимости портфеля, получаем

$$d = \sum_i d_i x_i\,.$$

Итак, доходность портфеля выражена через доходности составляющих его ценных бумаг и доли, которые они составляют в портфеле. Как правило, доходность ценных бумаг колеблется во времени, является с.в. Математическое ожидание доходности ценной бумаги, другими словами – среднее значение ее доходности, называется еще эффективностью ценной бумаги и обозначается e_i. Таким образом, доходность портфеля тоже будет с.в., ее математическое ожидание называется эффективностью портфеля. Эффективность портфеля в конечном итоге выражается через эффективности ценных бумаг и их доли, которые они составляют в портфеле, а так как для данного исследуемого рынка эффективности ценных бумаг считаются известными и неизменными, то эффективность портфеля получается функцией только долей и обозначается $E(X)=E(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. По свойствам математического ожидания, известным из теории вероятностей, имеем

$$E(X)=M[d]=M\left[\sum_i d_i x_i\right]=$$

$$=\sum_i M[d_i x_i]=\sum_i x_i M[d_i]=\sum_i x_i e_i .$$

Пример 15. Портфель наполовину (по стоимости) состоит из бумаг первого вида со средней доходностью 14% годовых и из бумаг второго вида со средней доходностью 8% годовых. Какова эффективность портфеля?

Оба термина – доходность и эффективность – специально упомянуты вместе. *Ответ*: $0{,}5\cdot14+0{,}5\cdot8=11\%$ годовых.

Риск портфеля можно также выразить через риск составляющих его ценных бумаг и доли, которые они составляют в портфеле, но тут придется еще учитывать взаимосвязь и взаимовлияние ценных бумаг друг на друга. Все эти характеристики для исследуемого рынка считаются известными и неизменными, так что в конечном итоге риск портфеля, как и его эффективность, получается функцией только долей ценных бумаг в портфеле: $R(X)=R(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Конкретная формула, выражающая риск портфеля через эти доли, довольно сложна и сейчас не столь важна.

Каждый владелец портфеля ценных бумаг сталкивается с дилеммой: хочется иметь эффективность портфеля из них побольше, а риск поменьше. Однако поскольку «нельзя поймать двух зайцев сразу», необходимо сделать определенный выбор между эффективностью и риском.

Постановка Марковитца задачи об оптимальном портфеле такова:

Из всех портфелей, имеющих заданную эффективность, найти портфель минимального риска.

В математической формулировке эта постановка выглядит так:

Найти $x_1,x_2,\ldots,x_n$ *такие, что*

$$R(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to\min,$$

$$\sum_i x_i=1,$$

$$\sum_i x_i e_i=e_X .$$

Здесь e_X и есть эффективность портфеля, которую инвестор желал бы иметь.

Сам Марковитц не только поставил эту задачу в математической форме, но и решил ее. Правда, решение при этом получается непростое.

После этой работы Марковитца другой американский экономист Тобин предположил, что на рынке есть безрисковая ценная бумага, и в этом предположении вывел довольно простую формулу, дающую решение задачи Марковитца об оптимальном портфеле. Отметим, что безрисковая ценная бумага имеет наинизшую доходность (см. фундаментальный принцип работы финансового рынка).

Формула Тобина дает значения долей рисковых ценных бумаг, остальная часть портфеля – это безрисковые ценные бумаги. Если большой рынок ценных бумаг (например, фондовый рынок США) находится в состоянии равновесия, то его рисковые бумаги имеют структуру рисковой части оптимального портфеля Тобина, откуда и проистекает практический совет по составлению оптимального портфеля, указанный во введении: его рисковая часть должна повторять структуру рисковой части большого рынка! Инвестор может лишь варьировать долей безрисковых ценных бумаг в своем портфеле (больше таких бумаг – меньше доход и меньше риск, и наоборот).

После указанных работ Марковитца и Тобина появились тысячи научных статей, книг, других публикаций, продолжающих и развивающих идеи Марковитца и Тобина. К сожалению, однако, эти идеи имеют в основном теоретическое значение. На практике редко какой инвестор озабочен формированием оптимального портфеля в смысле Марковитца – Тобина, обычно каждый инвестор составляет и поддерживает какой-нибудь специализированный портфель, например портфель акций нефтяных компаний.

В заключение отметим, что современные разделы финансовой математики используют весьма сложный математический аппарат.

«Квант» улыбается

* * *

8, 8, 50,
9, 9, 60,
18, 19,
40, 40, 50.

7, 14, 1,
25, 31,
48, 48,
251.

Глядя на этот чудесный хорей Германа Лукомникова, поневоле вспомнишь Иосифа Бродского: «В цифрах есть нечто, чего в словах, даже крикнув их, нет».

Открытий и удивлений!

Публикацию подготовил С.Федин

Ионные кристаллы, модуль Юнга и массы планет

Ю.БРУК, А.СТАСЕНКО

Жил да был Маленький принц. Он жил на планете, которая была чуть побольше его самого... Маленький принц подробно мне все описал, и я нарисовал эту планету.

Антуан де Сент-Экзюпери. Маленький принц

Из каких атомов построены планеты?

Задумывались ли вы когда-нибудь о том, чем отличаются друг от друга разные планеты ? Конечно, массами и размерами, – скажете вы. Это правильно, массы и радиусы планет во многом определяют и другие их характеристики. Ну, а из атомов каких химических элементов построены планеты? Астрофизики утверждают, что из разных. Но в Солнечной системе, да и вообще во Вселенной, атомы разных элементов присутствуют далеко не в равных количествах. Известно, например, что относительное содержание (по массе) водорода, гелия и всех прочих элементов определяется отношениями 0,73:0,25:0,02.

Планеты нашей Солнечной системы построены тоже по-разному. Самые большие из них – Юпитер и Сатурн (их массы, соответственно, в 318 и 95 раз больше массы

Иллюстрация Л.Тишкова

Земли $M_З$) – в основном состоят из водорода и гелия. Правда, и водород, и гелий в этих планетах находятся не в газообразном, а в твердом или жидком состоянии, а средние плотности этих планет намного превосходят плотность планетных атмосфер или, например, газов, с которыми мы обычно экспериментируем, изучая в физическом практикуме газовые законы. Планеты Уран и Нептун имеют массы, соответственно, в 15 и 17 раз бóльшие, чем у Земли, а состоят они главным образом из льда, твердого метана (CH_4) и аммиака (NH_3) в металлической фазе. Заметьте, что при уменьшении массы планет (если «перемещаться» по шкале масс от планет- гигантов) возрастают средние массовые числа атомов, из которых эти планеты построены. Случайно ли это? Похоже, что нет – это же утверждение оказывается справедливым и при дальнейшем «движении» вдоль шкалы масс. Планеты земной группы (Меркурий, Венера, Марс) не превосходят по массе Землю, а характерным элементом для них (и для Земли) является железо. Кроме того, они содержат много силикатов (например, двуокись кремния SiO_2). Тенденция совершенно отчетливая – чем больше масса планеты, тем меньше средние массовые числа атомов, из которых она состоит. Возникает довольно естественный вопрос – нельзя ли сказать, что между массами планет и массами атомов, из которых они построены, существует какая-то связь?

Конечно, было бы неправильно утверждать, что массы атомных ядер зависят от массы планеты. Атомы каждого химического элемента устроены совершенно одинаково не только на разных планетах, но и вообще в любых местах во Вселенной. Но связь между массами тех атомов, из которых планеты «построены» на самом деле, и массами самих планет действительно существует.[1] И именно об этом пойдет речь дальше.

Мы будем обсуждать очень простую модель. Но «очень часто упрощенная модель проливает больше света на то, как в действительности устроена природа явления, чем любое число вычислений ab initio[2] для различных конкретных случаев, которые, если даже они правильны, часто содержат так много деталей, что скорее скрывают, чем проясняют истину». Эти слова принадлежат лауреату Нобелевской премии по физике, одному из крупнейших физиков-теоретиков нашего времени Ф.Андерсону.

Удивительно, что планеты нашей Солнечной системы, как оказывается, вовсе не так уж далеки от обсуждаемой ниже модели. И все же мы должны уже здесь предостеречь читателей от слишком формального применения тех простейших формул, которые мы выпишем дальше, к *реальным* планетам. Все оценки, которые мы сделаем, справедливы лишь по порядку величины. Мы будем пользоваться для оценок качественными соображениями и методом размерностей и не будем заботиться о тех численных коэффициентах, которые возникают при более аккуратных вычислениях. Такой подход оправдан, если численные коэффициенты в формулах оказываются порядка единицы. Но именно такая ситуация возникает в физике и астрофизике довольно часто (хотя, конечно, и не всегда). Есть для этого и более серьезные основания, но мы здесь не будем их обсуждать, а просто примем без доказательства, что безразмерные коэффициенты не испортят (по крайней мере качественно) наши выводы.[3]

На пути к нашей основной цели – установлению связи между массами планет и их химическим составом – мы совершим небольшую экскурсию в физику твердого тела и вычислим энергию ионного кристалла и его модуль Юнга. В конечном счете эти вычисления помогут нам разобраться и с планетами.

Ионные кристаллы и модуль Юнга

Рассмотрим сначала модель ионного кристалла, похожего на кристалл поваренной соли NaCl, но отличающегося от последнего тем, что атомы имеют примерно одинаковые массы. Это отличие от кристалла NaCl не очень существенно для дальнейших рассуждений, но несколько облегчит нам вычисления. Массой электронов по сравнению с массой атомных ядер мы можем пренебречь.

Пусть плотность кристалла ρ, а массовые числа атомов, его составляющих, $A_1 \approx A_2 \approx A$. Массы нуклонов – протонов и нейтронов, из которых состоят ядра, отличаются очень незначительно, мы здесь не будем учитывать различия между ними. При этих допущениях можно считать, что масса каждого атома примерно равна массе атомного ядра

$$m_я \approx Am_p ,$$

где m_p – масса нуклона. Если в единице объема содержится всего n атомов, то их суммарная масса равна плотности:

$$nm_я = \rho .$$

Эту простую формулу нам удобно переписать еще и по-другому. Для оценок, которые мы собираемся сделать, мы можем считать наш модельный кристалл кубическим. Это значит, что атомы «сидят» в углах элементарного кубика – ячейки кристаллической решетки. Обозначим длину ребра этого кубика буквой a. По самому своему смыслу, величина n непосредственно связана с a: $na^3 = 1$, поэтому

$$\rho = \frac{m_я}{a^3} .$$

Эта формула любопытна тем, что в правую часть ее входят $m_я$ и a – величины «микроскопические», слева же стоит вполне «макроскопическая» величина – плотность кристалла.

Кристаллическая решетка построена у нас из чередующихся положительных и отрицательных ионов.

---

[1] *Разумеется, мы вовсе не утверждаем, что, скажем, в Земле нет атомов водорода или урана. Эти элементы на Земле (и в Земле) есть, но относительная доля их (по массе) невелика.*

[2] *ab initio – латинское «сначала», здесь – «из начальных (основных) принципов».*

[3] *О методе размерностей и оценках по порядку величины можно прочитать, например, в нашей статье в «Кванте» № 6 за 1981 год (все материалы старых номеров журнала «Квант» можно найти в Интернете на сайте: kvant.mccme.ru).*

Заряд каждого иона будем считать для простоты равным заряду электрона с соответствующим знаком, т.е. $\pm e$. Силами, действующими на каждый ион, являются обычные кулоновские силы. Если бы у нас было только два иона и они находились бы на расстоянии a друг от друга, то потенциальная энергия их взаимодействия была бы величиной $\sim \frac{e^2}{\varepsilon_0 a}$, где ε_0 – электрическая постоянная, а значок «$\sim$» означает, что мы написали оценку по порядку величины. Энергия взаимодействия пары ионов – очень важная и полезная для оценок характеристика. Но частиц в кристалле, конечно, намного больше двух. Если принять, что среднее расстояние между частицами равно $2 \cdot 10^{-10}$ м, то легко вычислить, что в 1 $см^3$ будет порядка 10^{23} частиц.

Часто говорят о плотности электростатической энергии системы ионов, образующих кристалл. Слово «плотность» употребляется здесь потому, что имеется в виду энергия, относящаяся к единице объема. Другими словами, эта величина есть сумма потенциальных энергий взаимодействия всех пар ионов в единичном объеме. Но точно вычислить такую сумму трудно, мы этого сделать здесь не сможем, потому что для этого нужно было бы учитывать взаимодействие большого числа частиц, находящихся на разных расстояниях друг от друга. Можно, однако, действовать по аналогии с формулой для плотности кристалла.

Заметим сначала, что интересующая нас плотность энергии w имеет размерность Дж/$м^3$, а размерность потенциальной энергии пары ионов есть $\left[\frac{e^2}{\varepsilon_0 a}\right] =$ Дж. Символ [...] – обозначает размерность величины, стоящей в скобках. Разделим теперь «микроскопическую» величину $\frac{e^2}{\varepsilon_0 a}$ на другую, тоже «микроскопическую», – a^3, при этом получится величина, имеющая размерность плотности энергии. Можно думать, что это как раз и есть оценка для w.

Эти рассуждения, конечно, не являются строгим доказательством того, что плотность электростатической энергии системы ионов, образующих кристалл, равна $\frac{e^2}{\varepsilon_0 a^4}$. Однако точный расчет для ионного кристалла приводит к формуле

$$w = \alpha n \frac{e^2}{\varepsilon_0 a} = \alpha \frac{e^2}{\varepsilon_0 a^4},$$

которая отличается от получающейся у нас оценки только числовым множителем $\alpha \sim 1$.

Упругие свойства вещества определяются, конечно, межатомными взаимодействиями. Важнейшей характеристикой таких свойств является, как мы знаем, модуль Юнга E. Мы привыкли определять его из закона Гука как такое напряжение, при котором относительная линейная деформация тела $\frac{\Delta l}{l}$ равна единице, или, другими словами, соответствующая длина меняется вдвое. Но величина E вовсе не зависит от того, знаем ли мы закон Гука и выполняется ли он на самом деле. Обратим внимание на размерность модуля упругости: $\frac{Н}{м^2} = \frac{Дж}{м^3}$. Можно поэтому интерпретировать E и как некоторую характерную плотность энергии.

Чтобы это стало более понятным, приведем два других примера. Первый относится к обычному плоскому конденсатору. Если поместить на его пластины заряды $\pm q$, то внутри конденсатора будет существовать электростатическое поле, а сами пластины будут притягиваться друг к другу. Пусть площадь каждой пластины S, а расстояние между ними d. Можно вычислить силу притяжения пластин и, разделив ее на S, найти «характерное давление». А можно вычислить энергию, заключенную в конденсаторе, и, поделив ее на объем Sd, найти плотность энергии. В обоих случаях получится величина $\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$, где $\sigma = \frac{q}{S}$ – поверхностная плотность зарядов на пластинах. «Характерное давление» и плотность энергии оказываются в этом случае совпадающими не только по размерностям, но и численно.

Второй пример – это определение коэффициента поверхностного натяжения жидкости. Этот коэффициент можно определять как силу, отнесенную к единице длины (например, для растягиваемой мыльной пленки), а можно считать его плотностью поверхностной энергии. И в этом случае на «силовом» и «энергетическом» языках определяется одна и та же величина.

Вернемся, однако, к ионному кристаллу. Характерная для ионного кристалла энергия есть энергия электростатическая, упругие свойства кристалла определяются электрическими взаимодействиями составляющих его частиц. Поэтому можно считать, что $w \sim E$. Здесь мы снова принимаем без доказательства, что коэффициент пропорциональности для этих величин порядка единицы. Таким образом, мы научились *оценивать* величину модуля Юнга для ионного кристалла:

$$E \sim w \sim \frac{e^2}{\varepsilon_0 a^4} \approx \frac{\rho}{m_я} \frac{e^2}{\varepsilon_0 (m_я/\rho)^{1/3}} = e^2 m_я^{-4/3} \rho^{4/3} \varepsilon_0^{-1}.$$

Из этой формулы сразу же следует, что w – величина, ограниченная сверху. Пока существует *ионная* решетка, расстояние между ионами во всяком случае не может быть меньше размеров атомов (ионов). Если бы это было не так, электронные оболочки соседних ионов перекрылись бы, электроны обобществились, а вместо ионного кристалла у нас получился бы уже металл.

С другой стороны, для ионного кристалла величина w ограничена и снизу. Понять это можно на таком примере. Представим себе, что к кристаллическому стержню приложена деформирующая его сила. При достаточно большой величине этой силы стержень разрушится. Напряжение, возникающее при разрушении, равно «разрушающей» силе, деленной на площадь сечения стержня, перпендикулярного этой силе. Это напряжение, обозначим его $p_{пр}$, называется пределом прочности, и оно всегда меньше модуля Юнга. Последнее утверждение во всяком случае правдоподобно. Как мы уже говорили, напряжение, равное модулю Юнга, формально приводит к изменению длины изучаемого образца вдвое. (Надо бы, правда, сказать еще, что законом Гука пользоваться при достаточно больших деформациях, вообще говоря, нельзя, но интересующие нас качественные выводы все равно сохраняются и без закона Гука.) Из опыта же мы знаем, что растянуть или сжать какой-либо кристалл вдвое практически нельзя – он сломается задолго до этого. Пусть теперь p – характерное давление, обусловленное внешним воздействием на кристалл. Можно сказать, что одним из условий существования кристаллической структуры является выполнение неравенств

$$w > p_{\text{пр}} > p\,.$$

Другое очевидное условие заключается в требовании, чтобы температура кристалла была меньше температуры плавления кристаллической решетки.

Здесь возникает еще такой вопрос. Если модуль Юнга определять как напряжение, меняющее вдвое длину стержня, то как быть с кристаллом, имеющим форму шара или куба и деформируемом одновременно со всех сторон? В этом случае разумнее говорить об относительном изменении уже не какой-то длины, а *объема* кристалла $\Delta V/V$, а закон Гука при малых деформациях записывать в виде

$$\frac{p}{K} = \frac{\Delta V}{V}\,.$$

Эта формула очень похожа на ту, которую мы пишем для случая растяжения (или сжатия) стержня: $\frac{p}{E} = \frac{\Delta l}{l}$, но модуль Юнга E заменяется теперь на *модуль всестороннего сжатия* K. Модуль K тоже можно интерпретировать как характерную плотность энергии.

Можно считать, что по порядку величины E, K и w равны. Для наших целей в этой статье этого вполне достаточно.

Ионно-кристаллическая планета

Перейдем теперь к нашей основной задаче. Рассмотрим гипотетическую планету, построенную из почти одинаковых атомов, образующих кристаллическую решетку. Чтобы планета была *целиком* кристаллической, в любом случае нужно, чтобы давление в центре планеты (оно там, конечно, максимально!) не превосходило величину w.

Давление в центре планеты с массой M и радиусом R можно оценить по формуле

$$p \sim G\frac{M^2}{R^4}\,,$$

где G – гравитационная постоянная. Эту формулу можно получить из соображений размерности. Напомним, как это делается.

Предположим, что давление в центре планеты p может зависеть от массы планеты M, ее радиуса R и гравитационной постоянной G, и запишем формулу

$$p \sim G^x M^y R^z\,.$$

Числа x, y, z пока не известны. Выпишем размерности входящих в эту формулу параметров: $[p] = \text{кг}\cdot\text{м}^{-1}\cdot\text{с}^{-2}$, $[G] = \text{м}^3\cdot\text{кг}^{-1}\cdot\text{с}^{-2}$, $[M] = \text{кг}$, $[R] = \text{м}$. Сравнивая размерности левой и правой частей формулы, получим

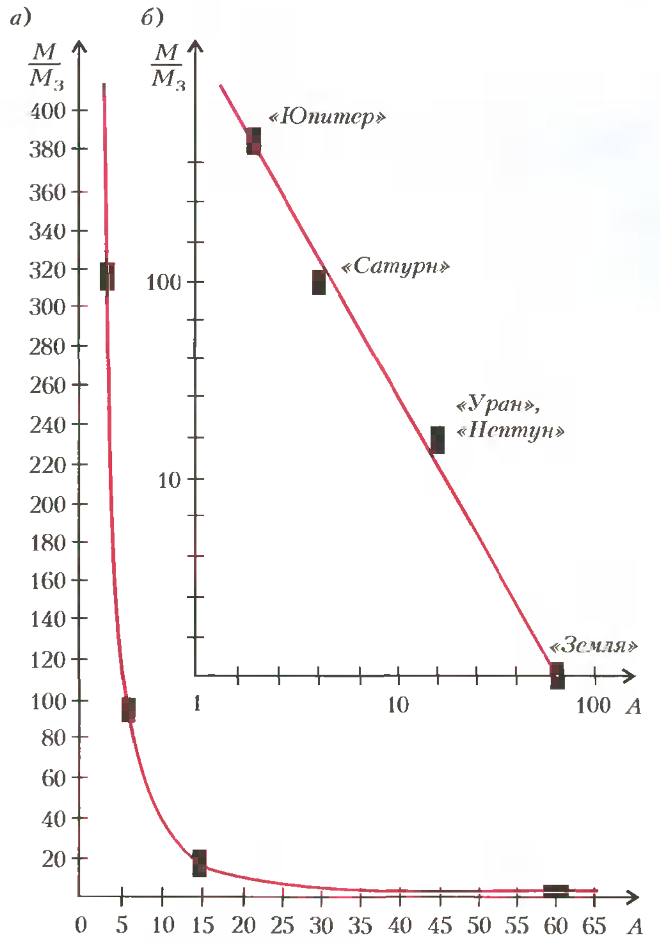
$$\text{кг}\cdot\text{м}^{-1}\cdot\text{с}^{-2} = \text{м}^{3x}\cdot\text{кг}^{-x}\cdot\text{с}^{-2x}\cdot\text{кг}^{y}\cdot\text{м}^{z}\,.$$

Для того чтобы равенство было справедливым, нужно, чтобы числа x, y, z удовлетворяли следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} 1 = -x + y, \\ -1 = 3x + z, \\ -2 = -2x. \end{cases}$$

Отсюда $x = 1$, $y = 2$, $z = -4$, и мы получаем нашу формулу для давления.

С другой стороны, эту формулу можно понять и так. Гравитационная энергия шара с массой M и радиусом R должна быть порядка $\frac{GM^2}{R}$, плотность же гравитационной энергии мы получим, если разделим энергию



а) Зависимость относительной массы гипотетической планеты от массового числа атомов; б) то же, но в логарифмическом масштабе на объем шара $V \sim R^3$. Подобно тому как упругие модули можно интерпретировать как плотность электростатической энергии, плотность гравитационной энергии можно считать величиной того же порядка, что и давление в центре гравитирующего шара.

Еще раз подчеркнем, что речь идет не о тождественности давления и плотности энергии (это было бы просто неправильное утверждение !), а о равенстве их по порядку величины.

Условие существования ионного кристалла в центре нашей гипотетической планеты таково:

$$G\frac{M^2}{R^4} < w \sim e^2 m_я^{-4/3} \rho^{4/3} \varepsilon_0^{-1} .$$

И, конечно, полностью кристаллическая планета существует только в том случае, если она относительно холодная, другими словами – температура в центре планеты не должна быть очень близкой к температуре плавления. В противном случае у планеты появилось бы жидкое ядро – кристалл расплавился бы. Учтем снова, что $\rho \sim M/R^3$ и $m_я \approx A m_p$, тогда наше неравенство можно переписать так:

$$A < \left(\frac{e^2}{\varepsilon_0 G m_p M}\right)^{3/4} \left(\frac{M}{m_p}\right)^{1/4} .$$

Отсюда уже явно видно, что предположения о том, что планета *целиком* кристаллическая, а плотность ее в центре порядка средней плотности, приводят нас к ограничениям на массы атомов, из которых *такие* планеты можно построить.

Предположение о том, что средняя плотность планеты совпадает по порядку величины с плотностью в центре ее, совершенно естественно и вполне разумно в тех случаях, когда вещество в центре планеты сжато «не слишком сильно». Но если бы сжатие было очень велико, ионный кристалл все равно бы уже не существовал. Если ионно-кристаллическая планета имеет радиус и массу такие же, как у Земли, то плотности вещества в центре и вблизи поверхности отличаются не так уж сильно – всего раза в три. Поэтому по порядку величины средняя плотность действительно такая же, как и плотность вблизи центра планеты. Это же справедливо для не очень точных оценок и для других планет, и для звезд.

Ограничения на максимальные массы атомов, из которых могут быть построены целиком кристаллические планеты, определяются, таким образом, параметрами самих планет. Для простейшей модели сплошной ионно-кристаллической планеты мы получили

$$A_{\text{макс}} \simeq \text{const} \cdot M^{-1/2} .$$

Нарисуем теперь график функции $M(A_{\text{макс}})$ (см. рисунок). Этот график, строго говоря, относится только к нашей гипотетической ситуации, когда планеты построены из ионных кристаллов и не имеют сколько-нибудь значительных жидких сердцевин. Вспомним начало статьи, где речь шла о том, какие элементы или соединения являются характерными для реальных планет. Предположим, что планеты «Солнечной системы» (кавычки отличают гипотетические планеты от реальных с приблизительно теми же массами!) – ионно-кристаллические. Если принять, что значение среднего массового числа для «планет земной группы» около 60, для «Урана» и «Нептуна» около 16, а для «Юпитера» и «Сатурна» 2–4, то соответствующие «точки» совсем неплохо «ложатся» на наш график. По горизонтальной оси на нем мы отложили среднее для «планет» значение A, а по вертикальной – массы ионно-кристаллических планет в единицах массы Земли.

Но это, конечно, вовсе не значит, что *реальные* планеты не имеют жидких ядер, – такие ядра, вероятно, существуют. Однако существуют в планетах и кристаллические структуры. И то, что реальные планеты, по крайней мере качественно, похожи на планеты модельные, позволяет утверждать, что мы и в самом деле «поймали» и поняли закономерность существования связи между массами планет и массами атомов основной части составляющего планеты вещества.

Добавим в заключение, что рассуждения, подобные приведенным в этой статье, можно провести и для тех случаев, когда планеты не ионно-кристаллические, а металлические. Металличность означает, что в кристалле (или в жидкости) существуют ионы и «свободные» электроны, оторванные при большом давлении от «своих» атомов. В этом случае говорят, что гравитационному сжатию «противодействует» давление электронного газа, баланс соответствующих сил (давлений) обеспечивает возможность существования устойчивых планет. Принцип расчета, ведущего к установлению связи между массами планет и характеристиками составляющих их атомов, остается прежним, сами же вычисления усложняются, и мы не будем их здесь приводить.[4] Для тех, кто пожелает такие вычисления проделать самостоятельно, сообщим, что давление электронного газа в металлах по порядку величины равно $\frac{\hbar^2}{m_e} n_e^{5/3}$, где $\hbar \approx 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка, $m_e \simeq 10^{-30}$ кг – масса электрона, а n_e – число электронов в единице объема.

[4] *См. статью Ю.Брука и Б.Геллера «Белые карлики – кристаллические звезды» («Квант» №6 за 1987 год.)*

Вихри Титана

В.СУРДИН

Можно ли, никогда не видя планету, «вычислить» ее внешний вид? Вспоминая затейливые контуры материков на глобусе Земли, вы скажете, что это невозможно. Путешественникам и картографам понадобились сотни лет напряженного труда, чтобы нанести контуры материков на карту, и при этом ни один математик не смог заранее рассчитать, как будут выглядеть Америка или Австралия.

Согласен: предсказать географические детали неизвестной планеты действительно невозможно. Однако речь идет не о глобусе или карте, а о внешнем виде реальной планеты, о том, как она выглядит со стороны. Если посмотреть на Землю из космоса, то мы с трудом различим знакомые черты глобуса: атмосфера делает планету неузнаваемой (фото 1). Белые спирали циклонов и полосы атмосферных фронтов превращают знакомую нам карту в загадочную картинку.

Вот если бы у Земли не было атмосферы (а значит, и не было бы океанов), то легко догадаться, на что она была бы похожа. Конечно, на Луну! Именно так и выглядит большинство планет, лишенных атмосферы. Например, Меркурий почти неотличим от Луны: всю его поверхность покрывают метеоритные кратеры, которые прекрасно сохраняются многие миллионы лет при отсутствии дождей и ветра. Да и Марс с его весьма разреженной атмосферой изрядно напоминает Луну. Зато как не похожи друг на друга планеты с плотной атмосферой – Венера, Земля, Юпитер ... На фотографиях мы легко узнаем их «в лицо», и лицо это – их атмосфера.

Фото 1

Но какие процессы определяют внешний вид планеты с атмосферой? Можно ли прогнозировать внешность планеты? Вопрос этот не праздный – еще не все планеты открыты. Даже в Солнечной системе есть «неизведанные миры» (об одном из них – чуть позже). А уж за ее пределами ... В окрестности соседних звезд астрономы уже обнаружили более 120 «внесолнечных» планет. И это только начало.

Как же выглядит планета, которую мы еще не можем детально рассмотреть, но о которой кое-что знаем? Например, знаем ее массу и расстояние от центрального светила. Кстати, именно эти данные о планете получают астрономы, измеряя движение звезды, вокруг которой обращается планета: ее притяжение и годичное обращение по орбите вызывают подобное – но с меньшей амплитудой – движение звезды. Его-то и измеряют астрономы по доплеровскому смещению линий в спектре светила. В принципе, этих данных достаточно, чтобы решить, обладает ли планета атмосферой.

Зная массу планеты M, мы можем оценить ее радиус R, поскольку средние плотности у твердых тел – а планеты из их числа – различаются не сильно, а некоторые особенности газо-жидких планет-гигантов типа Юпитера мы здесь обсуждать не будем. По массе и радиусу планеты мы легко вычислим ускорение силы тяжести на ее поверхности: $g = GM/R^2$ и вторую космическую скорость: $v_{II} = \sqrt{2GM/R}$, превысив которую, любое тело навсегда покидает планету. Именно эта величина определяет, способна ли планета сохранить свою атмосферу. Если скорости движения молекул газа в атмосфере превышают вторую космическую или хотя бы приближаются к ней, то атмосфера улетучится в космос.

Средняя тепловая скорость молекул газа (средняя квадратичная скорость поступательного движения молекул) v определяется его температурой T и молекулярной массой (массой одной молекулы) m_0: $v = \sqrt{3kT/m_0}$ (здесь k – постоянная Больцмана). Но некоторые молекулы движутся в несколько раз быстрее, они-то в первую очередь и улетучиваются из атмосферы в космическое пространство. Точный расчет показывает, что газ практически не покидает планету при $v < 0,2 v_{II}$.

Итак, наличие у планеты атмосферы и ее состав главным образом определяются молекулярной массой атмосферного газа и температурой у поверхности планеты: чем меньше масса молекулы и чем выше температура атмосферы, тем больше средняя скорость движения молекул и тем быстрее этот газ покинет планету. И наоборот, тяжелые газы (с большой молекулярной массой) при низких температурах надолго остаются в атмосфере. Можно сказать, что наличие или отсутствие атмосферы у планеты есть результат борьбы гравитации с температурой.

Например, в атмосферах Земли и Венеры не способен удержаться водород – он быстро улетучивается в космос; зато кислород, азот и углекислый газ, чьи молекулы движутся значительно медленнее, практически не покидают эти планеты. А вот планеты-гиганты, например Юпитер или Сатурн, почти целиком состоят из самых легких газов – водорода и гелия.

Влияние температуры планеты также проявляется весьма отчетливо. Близкий к Солнцу Меркурий нагрет так сильно (днем около 420 °C), что все газы с него давно улетучились. А очень похожий на него Титан – крупнейший спутник Сатурна, расположенный вдали от Солнца и поэтому холодный (−180 °C), смог удержать вокруг себя «знатную» атмосферу, в основном состоящую из азота (кстати, как и атмосфера Земли). Вообще, Титан – замечательный спутник, который с полным правом можно считать десятой планетой Солнечной системы. Мы к нему еще вернемся.

У границ Солнечной системы планеты настолько холодные, что практически лишены атмосферы по причине ее замерзания. Так, на Плутоне при температуре −240 °C большинство летучих веществ лежит на поверхности в виде жидкости или снега; лишь изредка, «летом», атмосфера ненадолго оттаивает. Если же у планеты есть атмосфера, то в ней непременно плавают облака: всегда найдется вещество, температура конденсации которого близка к температуре атмосферы. На Земле облака состоят из капелек (реже – из кристаллов) воды. На Марсе – из воды и двуокиси углерода. На Венере – страшно сказать – из капелек серной кислоты. А у планет-гигантов облака состоят из метана и аммиака. Именно облачные структуры создают «рисунок» атмосферы, делая видимым движение ее потоков. Характерный размер облачных структур, определяющий внешность планеты, прямо связан с характерным размером ячеек атмосферной циркуляции. Вот о ней и поговорим.

У планет типа Земли атмосфера тонким слоем покрывает твердую поверхность. Поэтому вертикальные движения воздуха способны создать лишь неоднородность мелкого масштаба (порядка 1–10 км), не заметную издалека, а более крупные структуры возникают при горизонтальном движении воздуха. Солнечные лучи, нагревая экваториальные области Земли, вызывают движение воздуха от экватора к полюсам и обратно. Но работе этой тепловой машины мешает вращение Земли, которое в системе отсчета, связанной с планетой, обусловливает возникновение силы Кориолиса (силы инерции), «сбивающей с пути» широтную циркуляцию воздуха. Движущаяся частица во вращающейся системе отсчета приобретает кориолисово ускорение, равное $a_К = 2\omega v \sin\varphi$, где ω – угловая скорость вращения планеты, v – составляющая скорости частицы, направленная вдоль меридиана, φ – географическая широта места. Если под действием силы Кориолиса поток воздуха образует вихрь, то его радиус r можно оценить, приравняв кориолисово ускорение центростремительному $a_ц = v^2/r$:

$$a_К = a_ц, \text{ или } 2\omega v \sin\varphi = \frac{v^2}{r}.$$

Найдя отсюда r и поделив его на радиус планеты, мы можем получить «параметр внешности планеты» $\beta = r/R$, который характеризует относительный размер атмосферных вихрей: при $\beta < 0{,}1$ это мелкие, едва заметные «оспинки», а при $\beta \geq 1$ это структуры планетарного масштаба, определяющие внешность планеты.

Пренебрегая влиянием широты места φ и выразив угловую скорость через период вращения $T = 2\pi/\omega$, получим простую формулу для параметра внешности:

$$\beta = \frac{vT}{4\pi R}.$$

Анализ этой формулы начнем с величины v. В отличие от знакомых нам порывов ветра у поверхности Земли, на высоте верхних слоев облачности скорость ветра довольно постоянна и близка к 80 м/с, т.е. около 1/5 скорости звука. Любопытно, что и в атмосферах других изученных планет эта пропорция сохраняется. Более того, как мы уже знаем, в атмосфере горячей Венеры сохранились лишь тяжелые газы (в основном CO_2), а в атмосферах холодных планет преобладают более легкие, чем на Земле. Поэтому уменьшение температуры атмосферы с удалением от Солнца в среднем компенсируется уменьшением массы молекул, так что скорость ветра в атмосферах всех планет лежит в довольно узких пределах от 50 до 100 м/с. Таким образом, значение v почти одинаково у всех планет. Следовательно, внешний вид планеты с атмосферой определяется ее размером и периодом вращения. (Гибкий русский язык помог мне в этом предложении слукавить – я не уточняю пока, о каком именно вращении идет речь.)

Если подставить в последнюю формулу параметры Земли или Марса, то получим $\beta = 0{,}1$. Действительно, лик Земли обычно покрыт крупными пятнами цикло-

Фото 2

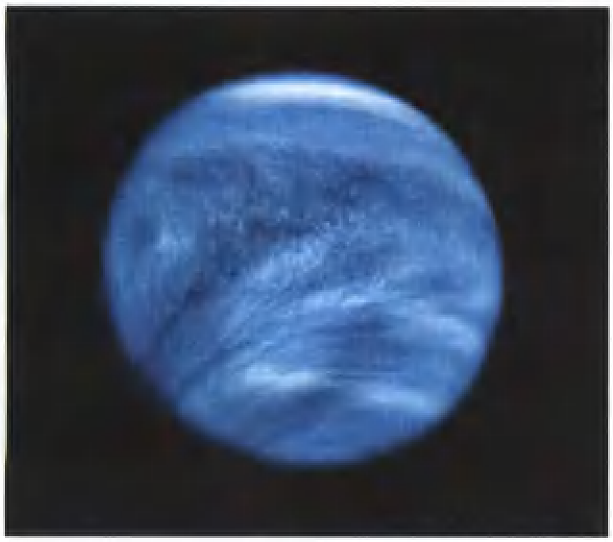


Фото 3

нов с характерным размером порядка 1000 км (фото 2). У Марса атмосфера очень разреженная, циклоны в ней видны редко, но и их размер соответствует нашему прогнозу. Для планет-гигантов формула дает $\beta = 0{,}01$. На фоне планеты эти мелкие пятнышки почти не выделяются, поэтому внешний вид планет, подобных Юпитеру, определяется другими процессами.

Особый случай – Венера. Эта планета вращается вокруг оси очень медленно, однако ее атмосфера (по не до конца пока понятной причине) вращается независимо от твердой поверхности планеты с периодом около 4 земных суток. (Вот что я имел в виду, говоря о гибкости русского языка.) Подставив этот период в формулу, мы получим $\beta = 0{,}5$. На диске Венеры могут разместиться только два кориолисовых вихря. И это действительно так! От экватора Венеры к ее полюсам оттекают два симметричных потока, закручиваясь вокруг полюсов в спирали и придавая Венере ее характерный вид (фото 3). У полюсов газ охлаждается и, опустившись ниже слоя облаков, возвращается к экватору.

Наконец, мы подошли к цели статьи: сделать прогноз внешности новой планеты. Ее роль играет Титан. В ближайшее время космический аппарат «Кассини» передаст на Землю первые качественные изображения Титана. А мы попробуем заранее «рассчитать его вид». Диаметр Титана 5150 км, а период суточного вращения 16 земных суток (он, как и наша Луна, всегда повернут к Сатурну одной стороной). С этими данными наша формула дает $\beta \approx 2$. Среди известных планет ближе других к этому значению «параметр внешности» Венеры. Можно ожидать, что Титан окажется похож на Венеру и тоже продемонстрирует нам два полярных вихря, вероятно, не очень туго закрученных.

Ожидаем посланий от «Кассини»!

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

Восточная мудрость

А.ВАСИЛЬЕВ

ВЕЛИКИЙ ЭНЦИКЛОПЕДИСТ ВОСТОКА АБУ Рейхан Мухаммед ибн Ахмед **аль-Бируни** (973 – около 1050) полагал, что «всеведение Аллаха не оправдывает нашего невежества», и всю жизнь посвятил накоплению знаний. Его интересовали астрономия и география, математика и физика, геология и минералогия, химия и ботаника, история и этнография, философия и филология, и в каждую из этих наук он внес заметный вклад. Как ни удивительно, период великих исторических потрясений на Среднем Востоке совпал с расцветом науки и культуры, так что в одно время с Бируни творили многие выдающиеся ученые, включая аль-Хорезми и Авиценну.

Родился Бируни в южном Хорезме на землях нынешнего Каракалпакистана (страны Черного Колпака) в городе Кят, который в настоящее время носит его имя. Как и многие образованные люди того времени, он писал на арабском языке (что напоминает ситуацию с использованием латыни в средневековой Европе). При дворе местного шаха Мамуна Бируни возглавлял Академию, а после завоевания Хорезма султаном Махмудом перебрался в Газни – на территорию нынешнего Афганистана. Переезд ученого к новому месту жительства не был вполне добровольным, ибо султан рассматривал его в качестве некоего трофея. Вместе с тем, правитель создал для Бируни вполне приемлемые условия для работы, а также брал его в свои военные походы. Результатом таких походов в Индию стал фундаментальный труд Бируни «Разъяснение принадлежащих индийцам учений, приемлемых разумом или отвергаемых». Эта монография сыграла важнейшую роль в сближении различных культур средневековья, причем Бируни не только знакомил фарсидов и арабов с индийскими достижениями, но и переводил на

Продолжение. Начало см. в предыдущем номере журнала.

санскрит труды древних греков. Основываясь на изучении летоисчисления разных народов, Бируни предложил общие принципы составления календарей, заложив тем самым основы новой науки – хронологии.

После смерти султана Махмуда в 1030 году трон занял его сын Масуд, щедро одаривший философа своими милостями. В 1036–1037 годах Бируни написал свой главный труд – «Канон Масуда». Эта работа посвящена астрономии и математике, ибо именно эти науки определяли успех в поливном земледелии и торговых путешествиях. В указанных дисциплинах достижения Бируни оставались непревзойденными в течение нескольких веков. Он внес вклад в расширение понятия числа, теорию кубических уравнений, сферическую тригонометрию, составил тригонометрические таблицы. Им был изготовлен самый крупный стенной квадрант, позволявший измерять положение Солнца с точностью до 2′, дано точное определение наклона эклиптики к экватору и векового изменения этой величины. По степени понижения горизонта при наблюдениях с горы им был предложен новый метод определения радиуса Земли и была практически точно определена эта величина (~ 6400 км). Явление утренней и вечерней зари Бируни объяснял как следствие свечения пылинок в лучах скрытого за горизонтом Солнца. Бируни допускал, что Земля вращается вокруг своей оси. Понимая различие между «огненными телами» – Солнцем и звездами и темными телами – Луной и планетами, Бируни высказывал сомнения в справедливости геоцентрической системы мира Птолемея.

Абу Али аль-Хуссейн ибн Абдалла ибн Сина, или же в латинской транскрипции **Авиценна** (около 980–1037), прожил жизнь в обстановке исключительной политической нестабильности в государствах Центральной Азии.

Родился Авиценна в предместье Бухары, где его отец был одним из многочисленных наместников султана Мансура. Уже к шестнадцати годам Авиценна настолько преуспел в науках, в частности в медицине, что был призван ко двору Мансура. Здесь он излечил султана от какой-то неизвестной болезни и получил доступ к его уникальной библиотеке.

Близость к сильным мира сего, может быть, и оказала бы Авиценне неоценимую поддержку в научных изысканиях, если бы не изменения в политической ситуации. В 999 году Бухара пала под натиском турков, а Авиценна лишился своего могущественного покровителя. В последующие годы странствий Авиценна то возносился к вершинам власти, то оказывался в крайней немилости у очередного правителя. Бурная жизнь Авиценны завершилась в одном из военных походов, где все навыки в медицине не помогли ему справиться с желудочными коликами. Как и много позже в случае с великим датским астрономом Тихо Браге, существовало мнение, что философа просто отравили. Жизнь Авиценны прервалась в Хамадане, но через восемь месяцев после смерти он был перезахоронен в Исфагане.

Несмотря на столь хаотический образ жизни, Авиценна оставил обширное научное наследие из множества трактатов самого высокого уровня. Его наиболее важными трудами являются «Медицинский канон» и «Наука врачевания». Если пятитомный «Канон» действительно касается лишь сугубо медицинских проблем, то один из четырех томов «Науки врачевания» представляет собой энциклопедический свод познаний в арифметике, геометрии, астрономии и музыке. Каждое из этих направлений подразделяется, в свою очередь, на специальные дисциплины. Так, геометрия подразделяется на геодезию, статику, кинематику, гидростатику и оптику; астрономия делится на календарь, астрономические и географические таблицы; арифметика состоит из алгебры и индийского искусства сложения и вычитания; наконец, музыка подразделяется по музыкальным инструментам.

Что касается собственно геометрической части книги, то она, в основном, опирается на «Элементы» Евклида и рассматривает свойства линий, углов, плоскостей, а также регулярных многогранников и многоугольников. Здесь обсуждаются также свойства круга и сферы, однако без упоминания об иррациональных числах. Как и многие другие арабские математики, Авиценна пытается дать обоснование пятому постулату Евклида, но его геометрия мало похожа на систему доказательств, вытекающих из заранее постулированных положений.

В каждый из более или менее стабильных периодов своей жизни Авиценна проводил астрономические наблюдения. В частности, он наблюдал Венеру как пятнышко на поверхности Солнца и заключил, что она ближе расположена к Земле, чем Солнце. Следующий шаг в этом направлении был сделан лишь в XVIII веке М.В.Ломоносовым, который, выполняя такое же наблюдение, обнаружил еще и существование на Венере атмосферы. Для определения координат звезд Авиценна изобрел инструмент, напоминающий современный верньер. Одна из его направляющих вращалась в горизонтальной плоскости, задавая азимут, а другая настраивалась в вертикальной плоскости, задавая высоту наблюдаемого объекта.

В своих физических изысканиях Авиценна затрагивал наиболее фундаментальные свойства окружающего мира. Он изучал различные формы энергии, в том числе тепло и свет; использовал такие концептуальные понятия, как вакуум и бесконечность. Исходя из того, что свет представляет собой поток частиц от излучателя, он полагал, что скорость света конечна. Более того, в трудах Авиценны рассматриваются вопросы о взаимосвязи времени и движения и обсуждается проблема гравитации.

Важное значение Авиценна придавал классификации наук. Философия, согласно Авиценне, представляет собой общую форму научного знания, включающую спекулятивную и практическую философию. Спекулятивная философия подразделяется на физику (низшая форма), математику (средняя форма) и метафизику или теологию (высшая форма). В свою очередь, практическая философия делится у Авиценны на этику, экономику и политику. В целом философская система Авиценны не была оригинальной – скорее, он выказывал себя верным последователем Аристотеля с некоторыми заимствованиями из толкований аль-Фараби. Наиболее полно жизненная философия Авиценны характеризуется его собственным изречением: «Пусть река моей жизни будет скорее коротка и широка, нежели длинна и узка».

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 февраля 2005 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №6– 2004» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1931» или «Ф1938». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1931 – М1933 предлагались на заключительном этапе XXX Всероссийской математической олимпиады.

Задачи М1931–М1935, Ф1938–Ф1942

М1931. Каждая целочисленная точка плоскости окрашена в один из трех цветов, причем все три цвета присутствуют. Докажите, что найдется прямоугольный треугольник с вершинами трех разных цветов.

С.Берлов

М1932. Последовательность неотрицательных рациональных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ удовлетворяет соотношению $a_m + a_n = a_{mn}$ при любых натуральных m, n. Докажите, что не все ее члены различны.

А.Протопопов

М1933. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями, принадлежащими k авиакомпаниям. Известно, что любые две линии одной авиакомпании имеют общий конец. Докажите, что все города можно разбить на $k+2$ группы так, что никакие два города из одной группы не соединены авиалинией.

В.Дольников

М1934. Даны четыре последовательных натуральных члена арифметической прогрессии с ненулевой разностью. Не все они квадраты, однако произведение их – квадрат. Докажите, что это произведение делится на $(2520)^2$.

В.Сендеров

М1935. Все грани тетраэдра – подобные треугольники. Докажите, что они равны.

В.Произволов

Ф1938. Автомобиль едет вверх по наклонной плоскости. Каким может быть максимальный угол наклона, если коэффициент трения между колесами и поверхностью $\mu = 0{,}6$? С каким максимальным ускорением может начать движение этот автомобиль на горизонтальном участке поверхности? У автомобиля четыре колеса, задние колеса – ведущие. Расстояние между передними и задними осями колес $L = 2$ м, центр масс автомобиля находится на высоте $h = 0{,}5$ м на равных расстояниях от осей колес.

А.Повторов

Ф1939. Моль гелия в сосуде под поршнем получает тепло извне и расширяется. Теплоемкость этой порции газа в данном процессе постоянна и составляет $C = 20$ Дж/К. Какую работу совершит газ при увеличении его объема вдвое? Начальная температура $T = 200$ К, начальное давление $p = 0{,}5$ атм.

З.Рафаилов

Ф1940. На расстоянии 1 м друг от друга закреплены точечные заряды 1 мкКл и −2 мкКл (заряд противоположного знака). В пространстве возникает электростатическое поле. Найдите максимальную разность потенциалов между точками, в которых напряженность этого поля не превышает по величине значения 1 В/м.

Р.Александров

Ф1941. Конденсатор емкостью 1 мкФ и три одинаковые катушки индуктивностью 1 Гн каждая соединены параллельно и подключены к внешней цепи. Сопротивления проводов оказались немного разными, в результате установившиеся токи через катушки составили 1А, 2А и 4А. Внешнюю цепь отключают, и токи катушек начинают изменяться. Найдите максимальные значения каждого из токов. Найдите также максимальное значение заряда конденсатора. Элементы цепи считать идеальными. Сопротивление проводов очень мало.

А.Старов

Ф1942. На главной оптической оси тонкой собирающей линзы диаметром 1 см с фокусным расстоянием 10 см находится точечный источник света. На какой максимальный угол линза может отклонить падающий на нее луч?

А.Зильберман

Решения задач М1906–М1915, Ф1923–Ф1927

М1906. *На полосу положили квадрат, сторона которого равна ширине полосы, притом так, что его граница пересекла границу полосы в четырех точках (рис.1). Докажите, что две прямые, проходящие накрест через эти точки, пересекаются на диагонали квадрата.*

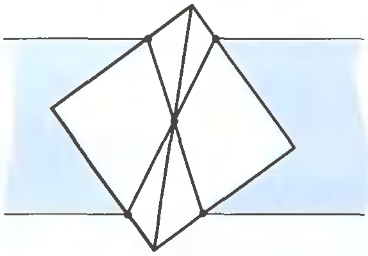


Рис. 1

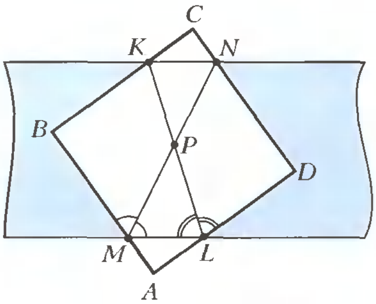


Рис. 2

Докажем, что точка P лежит на диагонали AC квадрата $ABCD$ (рис.2). Точка N одинаково удалена от прямых MB и ML. Значит, MN – биссектриса угла BML. Аналогично, точка K одинаково удалена от прямых LD и LM. Значит, KL – биссектриса угла DLM. Точка P, принадлежа обеим биссектрисам, одинаково удалена от сторон AB и AD квадрата $ABCD$, т.е. точка P лежит на диагонали AC.

В качестве дополнительного задания читатель может доказать, что угол MPL непременно равен 45°.

В.Произволов

М1907. *а) Число $9^{2004}-1$ представили в виде суммы некоторого количества степеней тройки с целыми неотрицательными показателями. Каково наименьшее возможное количество слагаемых в этой сумме?*
б) Число $2004!-1$ представили в виде суммы некоторого количества факториалов. Каково наименьшее возможное количество слагаемых в этой сумме?

а) **Ответ**: 8016.

Имеем

$$3^n-1=(3-1)\left(1+\ldots+3^{n-1}\right)=$$
$$=2+2\cdot 3+2\cdot 3^2+\ldots+2\cdot 3^{n-1}. \quad (*)$$

Мы получили представление $(*)$ числа задачи, в котором $2n$ слагаемых.

Пусть

$$9^n-1=\sum_{i=0}^{\infty} a_i 3^i, \qquad (**)$$

где конечное количество a_i – положительные числа, а остальные – нули, есть некоторое представление числа задачи. Вследствие минимальности числа слагаемых имеем $a_i \le 2$ при всех i (поскольку $3\cdot 3^i=3^{i+1}$). Значит, любые 2 представления $(**)$ совпадают: предположив противное и рассмотрев наименьшее i такое, что $a_i \ne a_i'$, получим, что 3^i делится на более высокую, чем i, степень 3.

б) **Ответ**: $\frac{1}{2}\cdot 2003\cdot 2004=2007006$.

Пусть $n\ge 2$. Просуммировав очевидные равенства

$$f(i+1)-f(i)=(i+1)!-i!=i\cdot(i!)$$

по i от 1 до $n-1$, получим равенство

$$f(n)=n!-1=\sum_{i=1}^{n-1} i\cdot(i!).$$

Мы получили представление числа задачи, в котором $1+\ldots+(n-1)=\frac{1}{2}(n-1)n$ слагаемых. Как и в пункте а), доказывается, что любые два таких представления совпадают.

Б.Френкин, В.Сендеров

М1908. *Каждая пара (a,b) натуральных чисел порождает пару $((x_n),(y_n))$ последовательностей по формулам $x_1=a$, $y_1=b$, $x_{n+1}=x_n y_n$, $y_{n+1}=x_n+y_n$. Докажите, что при любой паре (a,b) найдется такое n, что $x_n>y_n$. Обозначим наименьшее из таких чисел через $f(a,b)$. При какой паре (a,b) число $f(a,b)$ максимально?*

Ответ: (1, 1).

Пусть $c\ge 2$, $d\ge 2$. Тогда, очевидно, $(c-1)(d-1)\ge 1$, или $cd\ge c+d$, причем равенство имеет место в точности при $c=d=2$. При $(x_1,y_1)\ne(1,1)$ имеем $x_2\ge 2$, $y_2\ge 3$. Значит, по доказанному, $x_3>y_3$, т.е. $f(x_1,y_1)\le 3$. С другой стороны, $f(1,1)=4$.

А.Саранцев

М1909. *Девять горизонтальных и девять вертикальных прямых разрезали прямоугольник на 100 прямоугольников, 91 из которых синие, а остальные – красные. Периметр каждого синего прямоугольника является целым числом. Докажите, что периметр каждого красного прямоугольника – целое число.*

Нам удобно будет доказывать утверждение задачи в общем виде в такой формулировке.

Большой прямоугольник P посредством $n-1$ горизонтальных и $n-1$ вертикальных прямых разрезали на n^2 малых прямоугольников. Из них не менее n^2-n+1 – синие, а стальные (не более $n-1$) – красные. Периметр каждого синего прямоугольника – целое число. Утверждается, что периметр каждого красного прямоугольника тоже целое число.

Назовем *спецнабором* n малых прямоугольников таких, что каждая горизонтальная или вертикальная прямая, пересекающая P, пересекает и хотя бы один из них. Приведем три вспомогательных утверждения, касающихся спецнаборов.

1. Сумма периметров n прямоугольников любого спецнабора равна периметру большого прямоугольника P. Это свойство непосредственно следует из определения спецнабора.

2. Существует спецнабор, все прямоугольники которого синие.

Чтобы убедиться в этом, все n^2 малых прямоугольников занумеруем, сообразуясь с таблицей номеров

$$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, \ldots, n-1, & n \\ 2, 3, 4, \ldots\ n, & 1 \\ 3, 4, 5, \ldots\ 1, & 2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ n, 1, 2, \quad n-2, & n-1 \end{pmatrix}.$$

При этом под любым номером i будет значится сразу n малых прямоугольников, которые образуют спецнабор, $1 \le i \le n$. Среди этих n спецнаборов найдется спецнабор, состоящий только из синих прямоугольников, ввиду того, что красных прямоугольников вообще не более $n-1$.

Из свойств 1 и 2 непосредственно следует: *периметр большого прямоугольника P является целым числом.*

3. Для всякого красного прямоугольника найдутся такие $n-1$ синих прямоугольников, что все вместе они образуют спецнабор из n прямоугольников.

Это доказывается методом математической индукции. Для основного ее шага закрываем «строку» и «столбец», в которых расположен наш красный прямоугольник, и от P, разрезанного на n^2 прямоугольников, переходим к Q, разрезанному на $(n-1)^2$ прямоугольников, из которых можно выбрать спецнабор, состоящий из $n-1$ синих прямоугольников.

Для доказательства утверждения задачи осталось сказать заключительные слова. Периметр каждого красного прямоугольника – целое число, поскольку его можно включить в спецнабор, остальные прямоугольники которого синие. По свойству 2, сумма их периметров – целое число, а периметр каждого синего – тоже целое число, т.е. периметр красного – целое число.

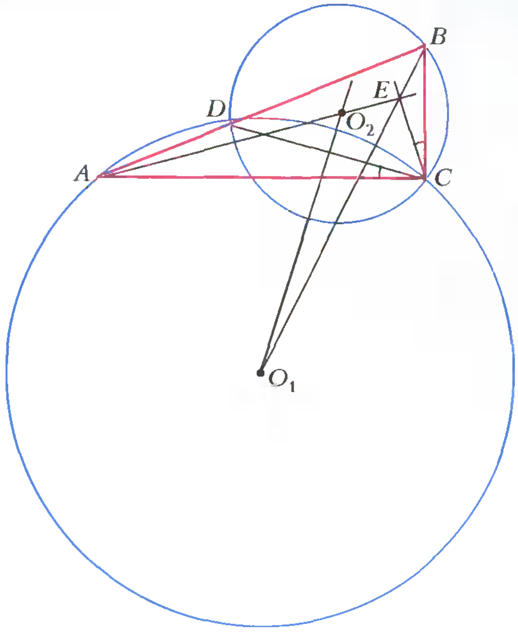
В.Произволов

М1910. *На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята внутренняя точка D; точки O_1 и O_2 – центры описанных окружностей треугольников ACD и BCD соответственно. Пусть E – точка пересечения прямых BO_1 и AO_2. Докажите, что $\angle BCE = \angle ACD$.*

Для доказательства нам понадобится

Теорема Чевы. Пусть P, Q, R – внутренние точки сторон BC, CA, AB треугольника ABC соответственно. Прямые AP, BQ и CR пересекаются в одной точке в точности тогда, когда

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1 .$$



(Доказательство этой теоремы см., например, в статье А.Егорова «Теоремы Менелая и Чевы» в «Кванте» №3 за 2004 г.)

С помощью формул площади треугольника это равенство легко переписать в виде

$$\frac{\sin\angle PAC \cdot \sin\angle QBA \cdot \sin\angle RCB}{\sin\angle PAB \cdot \sin\angle QBC \cdot \sin\angle RCA} = 1 ,$$

который и понадобится нам ниже.

Приступим теперь непосредственно к решению задачи. Заметим, что луч $[BO_1)$ расположен внутри острого угла ABC, а луч $[AO_2)$ – внутри острого угла BAC. Значит, прямые BO_1 и AO_2 действительно пересекаются, причем, очевидно, точка E лежит строго внутри треугольника ABC. По теореме Чевы,

$$\frac{\sin\angle BCE \cdot \sin\angle CAO_2 \cdot \sin\angle ABO_1}{\sin\angle ECA \cdot \sin\angle O_2AB \cdot \sin\angle O_1BC} = 1 . \quad (*)$$

Пусть F – середина отрезка BD, R_1 и R_2 – радиусы описанных окружностей треугольников ACD и BCD соответственно. Имеем $\dfrac{\sin\angle CAO_2}{\sin\angle O_2AB} = \dfrac{\frac{BC}{2}}{O_2F}$, $BC = 2R_2 \sin\angle BDC$, $O_2F = R_2\cos\angle BO_2F$, $\angle BO_2F = \angle BCD$. Следовательно, $\dfrac{\sin\angle CAO_2}{\sin\angle O_2AB} = \dfrac{\sin\angle BDC}{\cos\angle BCD}$. Аналогично, $\dfrac{\sin\angle ABO_1}{\sin\angle O_1BC} = \dfrac{\cos\angle ACD}{\sin\angle ADC}$. Подставляя последние два равенства в $(*)$, получаем

$$\frac{\sin\angle ECA}{\sin\angle BCE} = \frac{\cos\angle ACD}{\cos\angle BCD}.$$

Отсюда $\operatorname{tg}\angle ECA = \operatorname{tg}\angle BCD$, а значит, $\angle ECA = \angle BCD$. Утверждение задачи доказано.

А.Васильев, В.Сендеров

М1911. *Числа a, b, c, d удовлетворяют системе*

$$\begin{cases} a^n + b^n = c^n + d^n, \\ a^m + b^m = c^m + d^m, \end{cases}$$

где m и n – натуральные числа, $n > m$;

$$\mathrm{M} = \{|a|, |b|, |c|, |d|\}.$$

Докажите следующие утверждения.
а) Если m и n – числа одной четности, то среди элементов множества М найдутся совпадающие.
б) Если n четно, m нечетно, то справедливо заключение пункта а).
в) Если m четно, n нечетно, то существуют такие числа a, b, c, d, что элементы множества М попарно различны.

Для решения задачи нам понадобятся следующие неравенства:

$$\left(a^n + b^n\right)^{\frac{1}{n}} < \left(a^m + b^m\right)^{\frac{1}{m}}, \qquad (1)$$

$$\left(a^n + b^n + c^n\right)^{\frac{1}{n}} < \left(a^m + b^m + c^m\right)^{\frac{1}{m}}, \qquad (2)$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $n > m$.
Докажем (1). Пусть для определенности $a \ge b$. Полагая $x = \frac{b}{a}$, перепишем (1) в виде $\left(1 + x^m\right)^n > \left(1 + x^n\right)^m$. Поскольку $0 < x \le 1$, а $n > m$, последнее неравенство справедливо.
Докажем (2). Обозначим $A = \left(a^n + b^n\right)^{\frac{1}{n}}$, $B = \left(a^m + b^m\right)^{\frac{1}{m}}$; как уже доказано, $A < B$. Далее,

$$\left(a^n + b^n + c^n\right)^{\frac{1}{n}} = \left(A^n + c^n\right)^{\frac{1}{n}} <$$

$$< \left(A^m + c^m\right)^{\frac{1}{m}} < \left(B^m + c^m\right)^{\frac{1}{m}} = \left(a^m + b^m + c^m\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Неравенства (1) и (2) доказаны.
Пусть $a = 0$. С помощью (1) легко показать, что и среди чисел b, c, d хотя бы одно равно нулю.
Пусть $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.
Лемма. *Пусть $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$,*

$$\begin{cases} a^\alpha + b^\alpha = c^\alpha + d^\alpha, \\ a^\beta + b^\beta = c^\beta + d^\beta, \end{cases}$$

где $\alpha \ne 0$, $\beta \ne 0$, $\alpha \ne \beta$. Тогда либо $a = c$ и $b = d$, либо $a = d$ и $b = c$.
Доказательство. Без ограничения общности будем считать $\beta = 1$. Имеем

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^\alpha + \left(\frac{b}{a+b}\right)^\alpha = \left(\frac{c}{c+d}\right)^\alpha + \left(\frac{d}{c+d}\right)^\alpha.$$

Обозначая

$$x = \left(\frac{a}{a+b}\right)^\alpha, \quad y = \left(\frac{c}{c+d}\right)^\alpha,$$

получаем

$$x + \left(1 - x^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha = y + \left(1 - y^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha. \qquad (3)$$

Рассмотрим функцию $f(z) = z + \left(1 - z^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha$. При любом параметре α значение, отвечающее нулю производной, т.е. точке $z = \frac{1}{2^\alpha}$, эта функция принимает один раз, а любое другое свое значение – дважды. С другой стороны, равенство (3) означает, что некоторое свое значение $f(z)$ принимает во всех точках множества

$$\mathrm{M}_1 = \left\{x, y, \left(1 - x^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha, \left(1 - y^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha\right\}.$$

Если $x = y$, то $a = c$, и лемма доказана. Пусть $x \ne y$. Тогда либо $\left(1 - x^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha = x$, либо $\left(1 - x^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha = y$. В первом случае x – нуль производной, откуда $x = y$ – противоречие. Во втором случае $\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} = 1$, откуда $c = b$. Лемма доказана.
Таким образом, достаточно рассмотреть два случая: $a > 0$, $e = -b > 0$, $c > 0$, $d > 0$ и $a > 0$, $e = -b > 0$, $c > 0$, $g = -d > 0$.
Рассмотрим второй случай. Если m и n – числа одной четности, мы оказываемся в условиях леммы. Пусть числа m и n разной четности:

$$\begin{cases} a^k + e^k = c^k + g^k, \\ a^l - e^l = c^l - g^l, \end{cases}$$

где k и l – натуральные числа. Если $a > c$, то из второго равенства следует, что $e > g$ – в противоречии с первым равенством.
Ниже мы без ограничения общности будем рассматривать лишь случай $a > 0$, $e = -b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.
а) Пусть m и n четны. Из леммы следует, что среди чисел a^2, e^2, c^2, d^2 найдутся совпадающие. Отсюда сразу вытекает утверждение задачи.
Пусть m и n нечетны. Тогда

$$\begin{cases} a^n = c^n + d^n + e^n, \\ a^m = c^m + d^m + e^m \end{cases}$$

– в противоречии с неравенством (2).
б) Имеем $c^n + d^n = a^n + e^n > a^n$, $a^m = c^m + d^m + e^m > c^m + d^m$. Таким образом, $\left(c^n + d^n\right)^{\frac{1}{n}} > \left(c^m + d^m\right)^{\frac{1}{m}}$ – в противоречии с неравенством (1).
в) Заметим вначале, что если положительные числа a, c, d, e удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a^n = c^n + d^n + e^n, \\ a^m + e^m = c^m + d^m \end{cases} \qquad (4)$$

и $c \ne d$, то числа a, c, d, e попарно различны.

Действительно, из первого равенства $a > c$, $a > d$, $a > e$. Поэтому из второго равенства $e \neq c$, $e \neq d$.

Для завершения решения достаточно теперь показать, что для любых $c > 0$, $d > 0$ существуют $a > 0$ и $e > 0$ такие, что выполняются равенства (4).

Рассмотрим уравнение $f(x) = c^m + d^m$, где $f(x) = \left(c^n + d^n + x^n\right)^{\frac{m}{n}} + x^m$. Вследствие (1) имеем $f(0) < c^m + d^m$. В то же время, очевидно, $f(c) > c^m + d^m$. Следовательно, существует число $x > 0$ такое, что $f(x) = c^m + d^m$. Осталось положить $e = x$, $a = \left(c^n + d^n + e^n\right)^{\frac{1}{n}}$.

В.Сендеров

М1912. *Гирьки 1 г, 2 г, 3 г, …, 200 г разложили по 100 штук на каждую чашку весов так, что весы показали равновесие. При этом никакие две гирьки левой чашки весов не дают в сумме 201 г. Пусть $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{100}$ – массы гирек левой чашки весов, а $b_1 < b_2 < b_3 < \ldots < b_{100}$ – массы гирек правой чашки. Докажите равенство*

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + 100a_{100} = b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \ldots + 100b_{100}.$$

Поскольку никакие две гирьки левой чашки весов не дают в сумме 201 г, то это же можно сказать и про правую чашку: никакие две гирьки правой чашки весов не дают в сумме 201 г. Иначе говоря, любые две гирьки набора, которые дают в сумме 201 г, лежат на разных чашках весов.

Отсюда следует справедливость равенств $b_1 = 201 - a_{100}$, $b_2 = 201 - a_{99}$, …, $b_{100} = 201 - a_1$. Далее можно записать

$$b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \ldots + 100b_{100} = 201 \cdot 100 - a_{100} - 2a_{99} - \ldots - 100a_1.$$

Теперь с учетом равенства

$$\left(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + 100a_{100}\right) + \left(a_{100} + 2a_{99} + 3a_{98} + \ldots + 100a_1\right) = 101\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}\right) = 101 \cdot 201 \cdot 50$$

непосредственно получаем утверждение задачи.

В.Произволов

М1913. *Пусть $0 \le x, y \le 1$. Докажите неравенство*

$$2\sqrt{\left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right)} \le 2(x-1)(y-1) + 1.$$

Имеем

$$2\sqrt{\left(1 - x^2\right)\left(1 - y^2\right)} \le \left(1 - x^2\right) + \left(1 - y^2\right) \le 2(x-1)(y-1) + 1.$$

Второе неравенство цепочки эквивалентно очевидному $(x+y)^2 - 2(x+y) + 1 \ge 0$.

Есть и другие естественные решения. Можно, например, рассмотреть числа u и v такие, что $0 \le u$, $v \le \frac{\pi}{2}$ и $x = \cos u$, $y = \cos v$, и переписать неравенство:

$$2\sin u \sin v \le 2(\cos u - 1)(\cos v - 1) + 1,$$

или

$$\sin\frac{u}{2}\sin\frac{v}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{u}{2} - \frac{v}{2}\right) \le \frac{1}{8}.$$

Таким образом, неравенство задачи эквивалентно важному и хорошо известному неравенству:

$$\sin\frac{u}{2}\sin\frac{v}{2}\sin\frac{t}{2} \le \frac{1}{8},$$

если $u + v + t = \pi$ и $u, v, t \ge 0$.

В.Дольников, В.Сендеров

М1914. *Заданная на прямой R функция f такова, что*

1) $f(2+x) = f(2-x)$ для всех x;

2) $f(7+x) = f(7-x)$ для всех x;

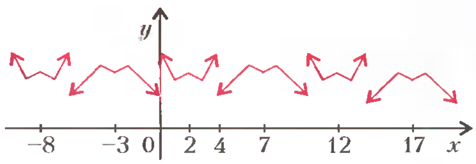
3) $f(0) = 0$.

а) Может ли функция f принимать ровно два значения? А бесконечное число значений?

б) Найдите все возможные значения наибольшего корня уравнения $f(x) = 0$ на отрезке [0; 1000].

а) Ответ на оба вопроса положителен.

Будем строить функцию f. Из условий 1) и 3) следует, что должно быть $f(4) = 0$. Доопределим функцию в остальных точках отрезка [2; 7] произвольным образом, а затем продолжим ее на всю ось так, как показано на рисунке.



Легко видеть, что полученная функция удовлетворяет условиям 1)–3).

(Легко видеть, что верно и обратное: любая функция, удовлетворяющая условиям 1)–3), определяется своими значениями на отрезке [2; 7] так, как это показано на рисунке.)

б) **Ответ**: 1000.

Хорошо известно, что композиция симметрий s_a и s_b прямой – сдвиг этой прямой на вектор длины $2|a-b|$. Из этого сразу следует, что функция f периодична и один из ее периодов равен 10. Следовательно, $f(1000) = 0$. (Равенство $f(x) = f(x \pm 10)$ для всех x очевидно и из рисунка.)

П.Самовол, В.Сендеров

М1915. *В тетраэдре ABCD имеют место равенства AB = BC = CD = a, BD = DA = AC = b. Найдите расстояние между прямыми AD и BC.*

Опишем вокруг тетраэдра параллелепипед так, чтобы ребра тетраэдра были диагоналями его граней. Так как $AB = CD$ и $BD = AC$, две грани параллелепипеда будут прямоугольниками, а их общее ребро z равно искомому расстоянию. Пусть два других ребра параллелепипеда равны x и y, а угол между ними φ. Тогда

$$a^2 = x^2 + z^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\varphi\,,$$

$$b^2 = y^2 + z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\varphi\,,$$

и, следовательно,

$$z^2 = \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{a^2 + b^2}{4}\,.$$

А.Заславский

Ф1923. *Найдите ускорение оси блока O в системе, состоящей из невесомых блоков, легких нерастяжимых нитей и грузов, массы которых указаны на рисунке 1. Трением пренебречь. Ускорение свободного падения равно g. Участки нитей, не лежащие на блоках, вертикальны.*

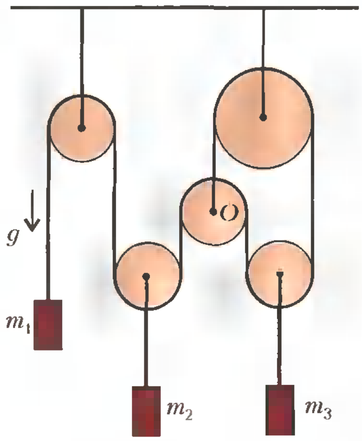


Рис. 1

Поскольку нити и блоки невесомы и трения нет, сила натяжения нити T должна быть одинакова вдоль всей длины нити (рис.2). В проекции на вертикальную ось x уравнение движения невесомого блока O имеет вид

$$2T - T = 0\cdot a_O = 0\,,$$

где a_O – искомое ускорение оси этого блока. Отсюда следует, что сила натяжения нити равна нулю и каждый из грузов падает под действием только силы тяжести с ускорением g:

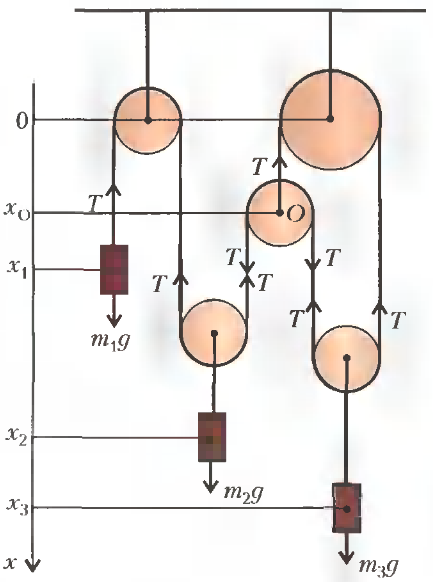


Рис. 2

$$T = 0,\ a_1 = a_2 = a_3 = g\,.$$

Из условия нерастяжимости нитей можно получить уравнение кинематической связи ускорений грузов a_1, a_2, a_3 и ускорения оси интересующего нас блока a_O. Для этого выразим постоянную длину нити l через координаты грузов и оси блока:

$$l = x_1 + x_2 + (x_2 - x_O) + (x_3 - x_O) +$$

$$+\ x_3 + x_O + \text{const} = x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_O + \text{const}$$

(здесь const включает в себя длины участков нитей, лежащих на блоках и соединяющих блоки с грузами). Дифференцируя это соотношение два раза по времени, получаем связь ускорений:

$$a_1 + 2a_2 + 2a_3 - a_O = 0\,,$$

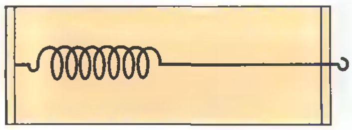
откуда

$$a_O = a_1 + 2a_2 + 2a_3 = g + 2g + 2g = 5g\,.$$

Итак, ось блока O движется вертикально вниз с ускорением $a_O = 5g$.

Д.Ягнятинский

Ф1924. *Динамометр «гимназический» представляет собой подставку массой M = 0,5 кг, к которой прикреплена пружинка массой m = 0,1 кг, содержащая много одинаковых витков (см. рисунок). Динамометр тянут за один из крючков силой F = 1 Н, направленной вдоль оси пружинки. Что показывает динамометр? Трения между подставкой и столом, а также между пружинкой и подставкой нет.*



Разберемся для начала с пружиной – динамометр «показывает» именно *растяжение пружины.*
Если один конец пружины закрепить, а за другой конец тянуть с силой F, то растяжение составит $x = F/k$, где k – жесткость пружины. При этом на пружину действуют *две* силы, направленные в противоположные стороны, а сама пружина неподвижна.
Рассмотрим более сложный случай: силы F_1 и F_2 «тянут» пружину за ее концы в разные стороны – теперь пружина движется с ускорением

$$a = \frac{F_1 - F_2}{m}$$

(после того как движение установится и витки пружины перестанут менять свои деформации, можно считать ее твердым телом). Теперь натяжение вдоль пружины уже не постоянно, оно меняется от F_1 до F_2 линейно по числу витков. Легко доказать, что в этом случае можно использовать «среднее» натяжение $F_{\text{ср}} = (F_1 + F_2)/2$, и растяжение будет равно

$$x = \frac{F_{\text{ср}}}{k} = \frac{F_1 + F_2}{2k}\,.$$

Если силу F приложить к корпусу динамометра, то на прикрепленный к нему конец пружины будет действовать сила

$$f_1 = ma = \frac{Fm}{M+m} = \frac{1}{6}\ \text{Н}\,.$$

Свободный конец пружины не дает «добавки», т.е. $f_2 = 0$. Тогда растяжение пружины динамометра соответствует силе

$$f = \frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{1}{12}\ \text{Н}.$$

Столько он и покажет.

Если же силой $F = 1$ Н действовать на свободный конец пружины, то со стороны подставки на второй конец пружины подействует сила, равная

$$F\frac{M}{M+m} = \frac{5}{6}\ \text{Н},$$

и средняя сила натяжения пружины будет

$$f_{\text{ср}} = \frac{1 + 5/6}{2}\ \text{Н} = \frac{11}{12}\ \text{Н}.$$

Столько и покажет динамометр в этом случае.

А.Крючков

Ф1925. *Стоящий вертикально закрытый цилиндрический сосуд разделен на две части тяжелым поршнем. Поршень изготовлен из материала, который не пропускает воздух, но медленно пропускает гелий. В начальный момент в нижней части сосуда находится воздух, а в верхней – в 5 раз меньшее количество молей гелия. При этом объемы верхней и нижней частей сосуда одинаковы и равны V, а поршень находится в равновесии. Найдите, на какое расстояние сместится поршень спустя достаточно большое время. Площадь поршня S, температура системы все время поддерживается постоянной, трения нет.*

В начальном состоянии сила тяжести поршня уравновешивается силами давления воздуха снизу и гелия сверху. Согласно уравнению Менделеева–Клапейрона, давление внизу равно $\frac{5\nu RT}{V}$, а наверху – $\frac{\nu RT}{V}$, где ν – количество молей гелия, а T – температура системы.

В конечном состоянии парциальные давления гелия по обе стороны от поршня будут равны, так что для его равновесия давление 5ν молей воздуха снизу должно уменьшиться до значения $\frac{5\nu RT}{V} - \frac{\nu RT}{V} = \frac{4\nu RT}{V}$. Это возможно, если при той же температуре объем воздуха внизу увеличится до $V' = \frac{5}{4}V$.

Следовательно, изменение объема нижней части сосуда к моменту установления равновесия составит $\Delta V = V' - V = \frac{V}{4}$, а искомое смещение поршня будет равно

$$h = \frac{\Delta V}{S} = \frac{V}{4S}.$$

А.Якута

Ф1926. *Внутри «черного ящика» между клеммами включена схема, состоящая из нескольких одинаковых резисторов. Снаружи к клеммам 1 и 2 подключена батарейка с ЭДС $\mathcal{E}$ и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, а к клеммам 3 и 4 подключен идеальный вольтметр с нулевым делением посередине шкалы (рис.1). Если включить такой же резистор, как те, что находятся внутри ящика, между клеммами 1 и 3 или 2 и 4, то вольтметр покажет напряжение +U, а если включить этот резистор между клеммами 1 и 4 или 2 и 3, то вольтметр покажет −U. Если резистор не включать вовсе, вольтметр показывает нулевое напряжение. Нарисуйте схему возможных соединений внутри ящика, содержащую минимальное число резисторов, и определите величину U.*

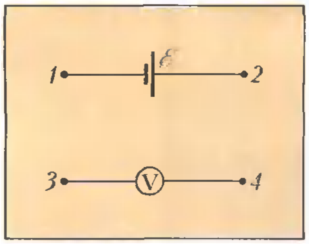


Рис. 1

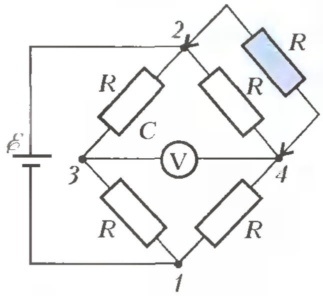


Рис. 2

Путем простого перебора вариантов легко установить, что минимально возможное число резисторов внутри «черного ящика» – четыре и возможны две схемы их соединения.

1. Мостовая схема (рис.2). Рассмотрим, например, случай, когда дополнительный резистор включен между клеммами *2* и *4*. При этом между точками *3* и *1* падение напряжения равно $\mathcal{E}/2$, а между точками *4* и *1*, очевидно, – $2\mathcal{E}/3$. Поэтому между клеммами *4* и *3* напряжение равно

$$U = \frac{2\mathcal{E}}{3} - \frac{\mathcal{E}}{2} = \frac{\mathcal{E}}{6}.$$

Остальные случаи подключения дополнительного резистора рассматриваются аналогично.

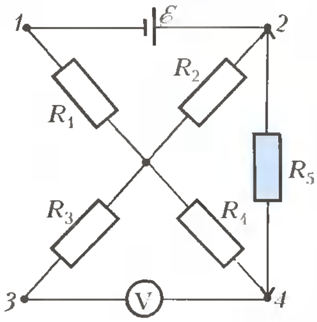


Рис. 3

2. Схема с общей точкой посередине (рис.3). Включим дополнительный резистор сопротивлением $R_5 = R$ между точками *2* и *4*, как и на первой схеме. В данном случае через резистор R_3 и идеальный вольтметр, обладающий бесконечно большим сопротивлением, ток не течет. Поэтому общее сопротивление цепи, состоящей из резистора R_2 сопротивлением R и подключенной к нему последовательно разветвленной части цепи, состоящей из резистора R_2 сопротивлением R и соединенного с ним параллельно сопротивления $R_4 + R_5 = 2R$, равно

$$R_x = R + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}\right)^{-1} = R + \frac{2R}{3} = \frac{5R}{3}.$$

Поэтому ток, текущей через резистор R_1, будет равен

$$\frac{\mathscr{E}}{R_x}=\frac{\mathscr{E}}{5R/3}=\frac{3\mathscr{E}}{5R},$$

а ток, текущий через резисторы R_4 и R_5, будет втрое меньше:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{3\mathscr{E}}{5R}\right)=\frac{\mathscr{E}}{5R}.$$

Вольтметр показывает падение напряжения на резисторе R_4 сопротивлением R, равное

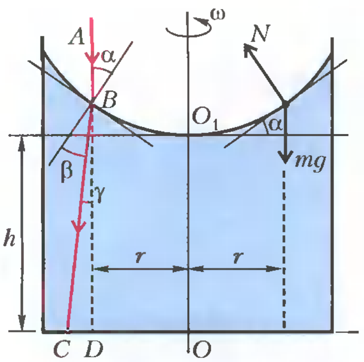
$$U=\frac{\mathscr{E}}{5R}R=\frac{\mathscr{E}}{5}.$$

Остальные случаи подключения дополнительного резистора рассматриваются аналогично.

М.Семенов

Ф1927. *В вертикальный цилиндрический стакан налита вязкая жидкость с коэффициентом преломления $n = 1{,}5$. Сверху в стакан вертикально падает параллельный пучок света постоянной интенсивности. Стакан с жидкостью раскрутили вокруг его оси до угловой скорости $\omega = 1\ с^{-1}$, при этом высота столба жидкости на оси стакана стала равной $h = 30$ см. На сколько процентов изменилась после раскручивания интенсивность света, падающего вблизи центра дна стакана? Ускорение свободного падения $g = 10\ м/с^2$, поглощением света в жидкости и отражением его внутри стакана пренебречь.*

При вращении жидкости вместе со стаканом ее поверхность искривляется (см. рисунок), вследствие чего параллельный пучок света после преломления становится расходящимся. Рассмотрим небольшой элемент жидкости, находящийся на ее поверхности на расстоянии r от оси вращения O_1O. На него действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и суммарная сила давления $\vec{N}$ со стороны остальной жидкости. Эти силы обеспечивают равномерное вращение рассматриваемого элемента по окружности с угловой скоростью ω, сообщая ему центростремительное ускорение. Уравнения движения этого элемента в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси имеют вид



$$m\omega^2 r = N\sin\alpha,\quad mg = N\cos\alpha,$$

где α – угол наклона к горизонту поверхности жидкости в данной точке. Отсюда находим

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\omega^2 r}{g}.$$

Луч света, идущий вдоль оси вращения O_1O, не преломляется. Рассмотрим ход луча ABC, преломляющегося в точке B на небольшом расстоянии r от оси вращения. В соответствии с законом преломления света,

$$\sin\alpha = n\sin\beta.$$

Углы α, β и $\gamma=\alpha-\beta$ можно считать малыми, так что $\alpha\approx\sin\alpha\approx\operatorname{tg}\alpha$, $\beta\approx\sin\beta$, $\gamma\approx\operatorname{tg}\gamma$. Тогда

$$\alpha\approx\frac{\omega^2 r}{g},\quad \gamma=\alpha-\beta\approx\alpha-\frac{\alpha}{n}=\frac{\omega^2 r}{g}\frac{n-1}{n}.$$

Далее найдем расстояние OC от оси вращения до точки падения преломленного луча на дно стакана:

$$OC=OD+DC\approx r+\gamma h=r\left(1+\frac{\omega^2 h}{g}\frac{n-1}{n}\right).$$

Пока жидкость была не раскручена, все лучи, идущие на расстоянии меньше r от оси O_1O, не преломлялись и попадали в круг радиусом r на дне, т.е. энергия этого пучка распределялась по площади

$$S_0=\pi r^2.$$

После раскручивания жидкости эти же лучи попадут в круг на дне радиусом OC, т.е. энергия пучка распределится по площади

$$S_1=\pi\cdot OC^2=\pi r^2\left(1+\frac{\omega^2 h}{g}\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

Поэтому интенсивность света, падающего вблизи центра дна стакана, изменится в

$$k=\frac{S_0}{S_1}=\left(1+\frac{\omega^2 h}{g}\frac{n-1}{n}\right)^{-2}=\left(1+\frac{1^2\cdot 0{,}3}{10}\frac{1{,}5-1}{1{,}5}\right)^{-2}=$$

$$=(1+0{,}01)^{-2}\approx\frac{1}{1{,}02}\approx 0{,}98\ \text{раз},$$

т.е. уменьшится на

$$\delta\approx\frac{2\omega^2 h}{g}\frac{n-1}{n}=2\%.$$

К.Дмитриев

Вниманию наших читателей!

Если вы интересуетесь математикой и физикой, любите решать задачи, хотите углубить ваши знания или расширить их, то вашим другом и помощником может стать журнал «Квант».

Наш журнал распространяется только по подписке. Раз в два месяца выходит очередной номер журнала. Подписаться на журнал можно с любого номера в любом отделении связи.

Подписные индексы журнала «Квант» в каталоге «Роспечать»:
70465 – на полугодие, **71514** – на год;
в каталоге «Пресса России»:
26040 – на полугодие, **26041** – на год.

Объявлена также подписка на книги серии «Библиотечка «Квант».
Подписные индексы серии «Библиотечка «Квант» в каталоге «Роспечать»:
84498 – на полугодие, **84499** – на год;
в каталоге «Пресса России»:
26042 – на полугодие, **26043** – на год.

Задачи

1. В редакцию журнала «Квант» пришло электронное письмо в странной кодировке:

«ъДТБЧУФЧХКФЕ!
рПУЩМБА ЪБДБЮХ ДМС МЕФОЕЗП ФХТОЙТБ 6–8».

Помогите его расшифровать.

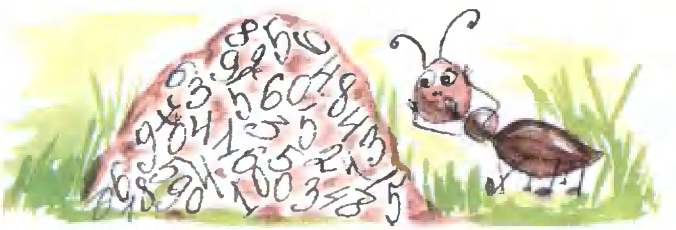
Я.Камыш

2. Могут ли 6 футболистов расположиться на футбольном поле так, чтобы каждый из них мог дать пас по земле ровно четырем другим?

Г.Гальперин, В.Сендеров

3. Найдите наименьшее составное число, которое не делится ни на одно из натуральных чисел от 2 до 100.

Г.Гальперин



4. Три ненулевых числа x, y и z таковы, что $x^2 - y^2 = yz$ и $y^2 - z^2 = xz$. Докажите, что $x^2 - z^2 = xy$.

А.Миротин

5. С крыши дома на землю спущена лестница. На каждой ее ступеньке укреплен указатель-стрелка, направленный либо вверх, либо вниз. В начальный момент на одной из ступенек лестницы стоит человек. Далее он передвигается на соседнюю ступеньку в соответствии с указателем, после чего этот указатель меняет направление на противоположное. Со следующей ступеньки человек опять переступает на соседнюю в соответствии с ее указателем, после чего этот указатель также меняет положение на противоположное. Далее он снова и снова переходит со ступеньки на ступеньку по таким же правилам.

Докажите, что при любых начальных направлениях стрелок и любом исходном положении человек рано или поздно сойдет с лестницы либо на крышу, либо на землю.

И.Акулич

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

Иллюстрации Д.Гришуковой

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

11. Существуют ли положительные числа x, y, z, одновременно удовлетворяющие равенствам

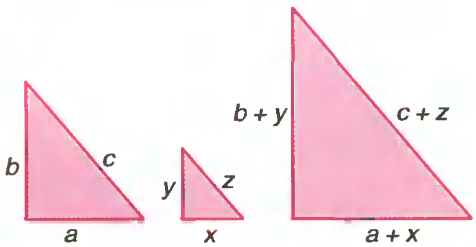
$$z + y + z = 1,$$
$$(1-x)(1-y)(1-z) = xyz\ ?$$

В.Сендеров

12. Докажите, что существует сколь угодно много натуральных чисел n, обладающих следующим свойством: если к числу 2^n приписать слева число 2^{n+1}, то получится число, делящееся на 7.

А.Зайчик

13. Даны 3 прямоугольных треугольника, размеры которых показаны на рисунке.



Докажите, что они подобны друг другу.

В.Сендеров

14. Имеется шахматная доска и несколько одинаковых кубиков (грань кубика по размерам совпадает с клеткой доски). У каждого кубика две противоположные грани белые, а все остальные – черные. Кубики поставили на некоторые клетки доски и прокатили по ней (перекатывая через ребро) так, что на каждой клетке хотя бы раз побывал какой-либо кубик, причем цвет клетки всегда совпадал с цветом соприкасающейся с ней грани.

Можно ли это сделать, пользуясь
а) одним;
б) двумя кубиками?

И.Акулич

15. Квадратное поле со стороной 180 м засеяли рожью. Оказалось, что на любом участке $40\ \text{м} \times 100\ \text{м}$, стороны которого параллельны сторонам поля, засеяно не меньше 91% его площади. Какое наименьшее число процентов площади поля могли засеять рожью?

А.Малеев

Сумма кубов равна квадрату суммы

Л.ШИБАСОВ

Еще в античные времена было известно замечательное тождество

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2, \qquad (1)$$

которое легко может быть доказано методом математической индукции. Как оно выводилось древнегреческими учеными, рассказывалось на страницах журнала.[1] Попытаемся его обобщить.

Первое, что приходит на ум, это обратиться к арифметической прогрессии и выяснить, при каких натуральных значениях a и d выполняется равенство

$$a^3 + (a+d)^3 + \ldots + (a+(n-1)d)^3 =$$
$$= (a + a + d \ldots + a + (n-1)d)^2 .$$

Рассмотрим его как уравнение относительно неизвестного a. Выполним преобразования, раскрыв скобки и воспользовавшись формулами (1) и $1^2 + 2^2 + \ldots$ $\ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (последняя также выводится

[1] См. статью «Как найти сумму?» в «Кванте» №3 за 2002 год.

методом математической индукции). В результате получим

$$4a^3+2\big(3d(n-1)-2n\big)a^2+$$
$$+\ 2d(n-1)\big(d(2n-1)-2n\big)a+n(n-1)^2d^2(d-1)=0\,. \qquad (2)$$

При $d>1$ каждая скобка левой части (2) положительна, а поэтому уравнение не имеет натуральных решений. Легко проверить, что в случае $d=1$ у него лишь одно натуральное решение $a=1$. Приходим к выводу, что, кроме последовательности 1, 2, ..., n, других арифметических прогрессий, составленных из различных натуральных чисел и удовлетворяющих (1), не существует. Заметим, что при $d=0$ из (2) получаем $a=n$ или $a=0$. В частности, $2^3+2^3=(2+2)^2$; $3^3+3^3+3^3=(3+3+3)^2$; $4^3+4^3+4^3+4^3=(4+4+4+4)^2$. Случай $a=0$ неинтересен.

Если не ограничивать себя множеством натуральных чисел и разрешить членам прогрессии принимать еще целые отрицательные значения и ноль, то решения уравнения (2) существуют. Например, можно взять прогрессию такую, что сумма ее членов равна нулю, тогда $a=d(1-n)/2$, и тождество (1) принимает вид $\big(d(1-n)/2\big)^3+\big(d(3-n)/2\big)^3+\ldots+\big(d(n-1)/2\big)^3=0$.

Еще одно естественное обобщение тождества (1) напрашивается само собой. Записав (1) для разных n и k и перемножив их, получаем

$$\left(1^3+2^3+\ldots+n^3\right)\left(1^3+2^3+\ldots+k^3\right)=$$
$$=(1+2+\ldots+n)^2(1+2+\ldots+k)^2\,.$$

Из этого равенства при $n=k=2$ находим $1^3+2^3+2^3+4^3=(1+2+2+4)^2$, а при $n=2$, $k=3$ имеем $1^3+2^3+2^3+3^3+4^3+6^3=(1+2+2+3+4+6)^2$. Конечно, вместо двух сомножителей вида (1) можно взять любое их число.

Вероятно, так и рассуждал известный французский математик XIX века Ж.Лиувилль, когда указал интересный способ отыскания натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (возможно и совпадающих), для которых выполняется равенство, аналогичное (1):

$$a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3=(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2\,. \qquad (3)$$

Способ Лиувилля заключается в следующем. Пусть N – произвольное натуральное число. Найдем все его делители $m_1, m_2, \ldots, m_n$. У каждого из них, в свою очередь, также имеются делители. Обозначим через a_i количество делителей m_i. Оказывается, числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ удовлетворяют равенству (3). Рассмотрим два примера.

1. Число 10 делится на 1, 2, 5, 10; у числа 1 всего один делитель, 2 и 5 имеют по два делителя, а 10 – четыре. И на самом деле, $1^3+2^3+2^3+4^3=(1+2+2+4)^2$ – только что найденное нами равенство.

2. Делителями 12 являются числа 1, 2, 3, 4, 6, 12; они имеют 1, 2, 2, 3, 4, 6 делителей соответственно. И в этом случае $1^3+2^3+2^3+3^3+4^3+6^3=(1+2+2+3+4+6)^2$.

Примеры подсказывают, что метод Лиувилля связан с произведением равенств вида (1). Попытаемся обнаружить эту связь.

Начнем с простейшего случая, когда N – степень простого числа p: $N=p^{n-1}$. Делителями N являются числа 1, p, p^2, ..., p^{n-1}, которые имеют 1, 2, 3, ..., n делителей соответственно. Этот набор удовлетворяет тождеству (1). Если N – произведение степеней двух простых чисел $p^{n-1}q^{m-1}$, то его делителями являются 1, p, ..., p^{n-1}, q, qp, ..., qp^{n-1}, q^2, q^2p, ..., q^2p^{n-1}, ..., $q^{m-1}p^{n-1}$, количество делителей которых равно 1, 2, ..., n, 2, 4, ..., $2n$, 3, 6, ..., $3n$, ..., mn соответственно. Этот набор удовлетворяет равенству (3), поскольку его сумма равна произведению $(1+2+\ldots+n)(1+2+\ldots+m)$, к каждому из сомножителей которого применимо тождество (1). Пусть теперь N – произвольное натуральное число. Разложим его на простые множители: $N=p^{n-1}q^{m-1}\ldots r^{k-1}$. Делители числа N выписывать не будем, укажем только сумму количеств их делителей: $(1+2+\ldots+n)(1+2+\ldots+m)\ldots(1+2+\ldots+k)$. Учитывая равенство (1), получаем $\left(1^3+\ldots+n^3\right)\left(1^3+\ldots+m^3\right)\ldots\left(1^3+\ldots+k^3\right)=(1+\ldots+n)^2(1+\ldots+m)^2\ldots(1+\ldots+k)^2$. Раскрывая скобки, приходим к равенству (3). Теперь способ Лиувилля становится ясным.

Во всех встретившихся нам примерах одно из слагаемых равно 1 (исключение составляет случай равенства всех слагаемых). Может показаться, что это всегда так. Но это обманчивое впечатление. Нетрудно привести примеры, когда тождество (3) выполняется для слагаемых, не все из которых равны между собой и ни одно из них не равно 1. Достаточно умножить любое из полученных нами тождеств вида (3) на четвертую степень произвольного натурального числа. Например, если умножить обе части равенства $1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$ на 2^4, то получим $2\left(2^3+4^3+6^3\right)=2^2(2+4+6)^2$, или $2^3+2^3+4^3+4^3+6^3+6^3=(2+2+4+4+6+6)^2$. Умножим теперь это же равенство на 3^4: $3\left(3^3+6^3+9^3\right)=3^2(3+6+9)^2$, откуда $3^3+3^3+3^3+6^3+6^3+6^3+9^3+9^3+9^3=(3+3+3+6+6+6+9+9+9)^2$.

Читатели, заинтересовавшиеся этой задачей, могут попытаться найти еще какие-либо обобщения тождества (1).

Микромир без микроскопа

М.БОРОДИНА, П.ГРИГАЛ

Ярок и разнообразен по цвету и форме живой мир, окружающий нас. Особенно поражает воображение пестрота и многообразие насекомых. Вы наверняка не раз задавались вопросом, почему крайне редко удается подобраться близко к яркой бабочке или стрекозе, привлекшей ваше внимание. Во многом такой чуткости насекомые обязаны своему зрению. Их огромные глаза содержат множество специфических структурных элементов – омматидиев (фасеток), длинных конусов, состоящих из многочисленных зрительных (светочувствительных), пигментных, светопреломляющих и т.п. клеток.

Каждый омматидий представляет собой как бы самостоятельный глаз, который индивидуально воспринимает световое или цветовое пятно, а все вместе омматидии глаза дают мозаичную картинку с не очень большим разрешением. Так, у самых крупных хищных стрекоз число омматидиев в глазу достигает 50000, а у монитора компьютера при разрешении 800 на 600 соответствующих элементов почти в десять раз больше, причем монитор занимает лишь небольшую часть нашего поля зрения, а для стрекозы 50000 «пикселов» – это все, что она видит.

Характерно, что цветовое восприятие насекомых существенно отличается от человеческого. Например, стрекозы и муравьи видят в ультрафиолете. О стрекозах стоит сказать особо: у них одна часть глаза видит в ультрафиолете, а другая – в желто-красной видимой области спектра. Связано это с тем, что верхней частью глаза стрекоза следит за небом, наблюдая за хищными птицами, а нижней – сама выслеживает добычу.

Схема строения фасеточного глаза насекомого изображена на рисунке 1. Заметим также, что фасеточным зрением обладают не только насекомые, но и некоторые другие членистоногие, например – ракообразные. Все омматидии сложного фасеточного глаза оканчиваются крошечными шестиугольными фокусирующими элементами. Эти шестиугольники настолько малы, что их с трудом можно различить невооруженным глазом. Но, оказывается, возможно даже в домашних условиях определить их линейные размеры. И все – благодаря физической природе света. Хорошо известно и широко применяется такое явление, как интерференция света. Поясним его на механической модели.

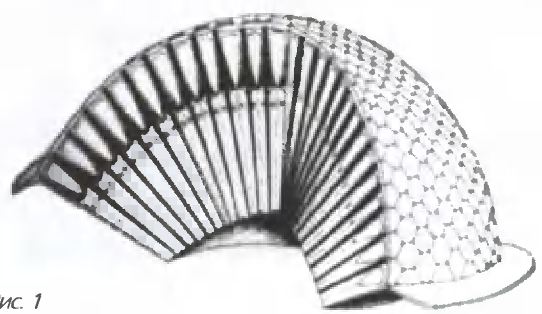


Рис. 1

Опустим в воду два стержня и начнем колебать их с одинаковой частотой и постоянным сдвигом фаз – такие источники волн называют когерентными. Известно, что у волны есть максимум (гребень) и минимум (впадина) отклонения от положения равновесия. При наложении двух волн есть места, где встречаются гребень с гребнем, тогда их суммарная интенсивность увеличивается, получается максимум отклонения от положения равновесия и максимум энергии колебаний. Там же, где гребень одной волны встречается с впадиной другой, волны «гасят» друг друга и получается минимум энергии. Такая картина распределения интенсивности энергии и называется интерференционной.

Световые волны тоже дают интерференционную картину. Правда получить два различных когерентных источника света очень сложно, но можно сделать по-другому. Так, Томас Юнг, один из создателей волновой теории света, предложил использовать две малые щели. Он пропустил пучок света через узкое отверстие, затем с помощью двух щелей разделил этот пучок на два и наблюдал на экране интерференционную картину.

Для получения накладывающихся когерентных колебаний световых волн часто используют дифракционную решетку. Простейшая дифракционная решетка представляет собой пластинку, на которой чередуются узкие прозрачные и непрозрачные полосы, параллельные между собой. Сумму ширины прозрачной и непрозрачной полоски принято называть периодом решетки и обозначать буквой d. Если на решетку направить узкий параллельный пучок света (рис.2), то на краях отверстий, вследствие дифракции, свет отклонится от своего первоначального направления, и образуется множество точечных когерентных источников. Они создают на экране интерференционную картину, состоящую из максимумов освещенности: нулевого S_0, первого S_1 и S_1' и т.д. и разделяющих их минимумов освещенности. Интенсивность светового излучения в данной точке экрана зависит от разности хода волн, сходящихся в ней, т.е. от разности расстояний от источников этих волн до данной точки. Если разность хода равна четному числу полуволн, то будет максимум интенсивности, если нечетному – минимум.

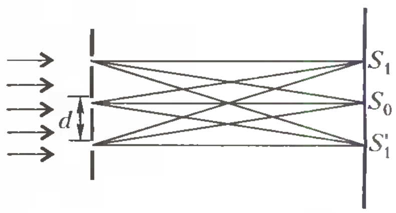


Рис. 2

Рассмотрим две щели дифракционной решетки (рис.3). Разность хода двух показанных на рисунке волн равна $AB = d \sin\alpha$. Поскольку расстояние до экрана (приблизительно 5–7 метров) обычно намного больше периода решетки (например, 0,04 мм), угол α мал и

$$\sin\alpha \approx \alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{L},$$

где L – расстояние от решетки до экрана, а x – расстояние от центрального максимума (самого яркого) до данной точки на экране. Центральный (нулевой) максимум получается

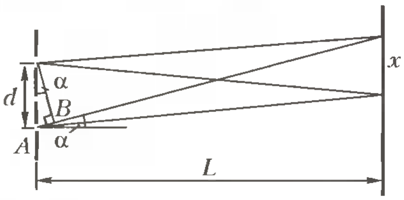


Рис. 3

там, где разность хода двух волн равна нулю (т.е. это просто неотклонившийся пучок), а боковые максимумы получаются там, где на отрезке AB укладывается целое число длин волн:

$$d\alpha = m\lambda\,,\ \text{или}\ \frac{dx}{L} = m\lambda\,,$$

где m – номер соответствующего максимума. Отсюда для постоянной решетки получаем

$$d = \frac{m\lambda L}{x}.$$

Если внимательно посмотреть под небольшим увеличением на поверхность сложного фасеточного глаза, например стрекозы, то можно заметить, что фасеточная пленка, покрывающая поверхность глаза (как раз та, которая состоит из шестиугольников), образует регулярную структуру, которую можно представить как суперпозицию трех простейших решеток (рис.4). Значит, определив период этой решетки, можно непосредственно найти и линейные размеры фасеток. Для этого можно использовать очень простую схему эксперимента. Лазер и препарат неподвижно размещаются на штативах так, чтобы луч лазера как можно точнее проходил через фасеточную пленку (или другой исследуемый объект). На расстоянии 5–7 метров от препарата укрепляется экран (можно использовать обычный лист ватмана).

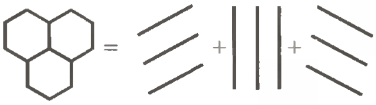


Рис. 4

Важно отметить, что дифракционную картину дают не только фасеточные пленки насекомых, но и огромное количество других биологических объектов: фасеточные пленки креветок, срезы растительных тканей, трубчатки некоторых грибов и многие другие сколько-нибудь периодичные структуры, которые можно просветить лучом лазера. (В некоторых, правда очень редких, случаях есть возможность получить дифракционную картину и в отраженном свете.)

В окружающем мире очень много неидеальных периодических структур – «дифракционных решеток», созданных самой природой. Форма получаемых интерференционных картин напрямую зависит от формы периодической структуры. Это видно, в частности, из рисунка 5. Здесь слева представлены микрофотографии фасеточной пленки глаза стрекозы, фасеточной пленки глаза креветки и среза тканей лука, а справа приведены соответствующие этим препаратам интерференционные картины.

Препарат для описываемого эксперимента можно приготовить в домашних условиях. Материалом могут служить любые насекомые с достаточно крупными фасеточными глазами (стрекозы, мухи, осы), срезы тканей домашних растений и любые другие объекты, имеющие периодическую структуру. Достаточно просто изготовить тонкий срез ткани или аккуратно очистить фасеточную пленку глаза насекомого, после чего сделать препарат, разместить его на предметном стекле и накрыть покровным стеклом.

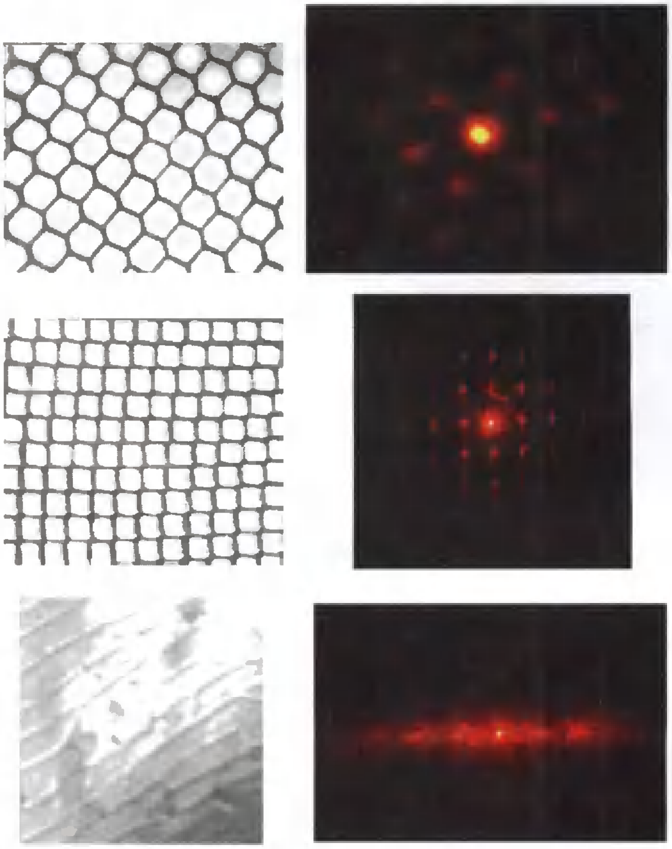


Рис. 5

Для приготовления препарата на *постоянной* основе обычно используется канадский бальзам. Если под исследуемой пленкой или около нее образовались пузырьки воздуха, следует удалить их из препарата, осторожно (чтобы не раздавить) надавливая на покровное стеклышко, тем самым выгоняя пузырьки наружу или хотя бы удаляя от просвечиваемого объекта. В противном случае они способны сильно испортить интерференционную картину, которая получится на экране.

Временный препарат готовится на водной или спиртовой основе. Такой препарат будет «работать» несколько часов до полного испарения жидкости, после чего исследуемая пленка может свернуться. Препарат можно восстановить, капнув рядом с покровным стеклом чуть-чуть воды (или спирта). Далее жидкость сама затянется между стекол под действием сил поверхностного натяжения.

Рис. 6

Все это вы можете сделать почти в любых условиях. Нужно лишь иметь пару игл (лучше – препаровальных), лезвие (или скальпель), лупу с небольшим увеличением, предметные и покровные стекла. Так, под лупой, дающей двукратное увеличение (рис.6), уже можно работать с крупными глазами насекомых (стрекозы, слепни).

Качество получаемых картин зависит от качества препарата, условий эксперимента и от самой периодичной структуры. Поскольку получаемая периодическая решетка не идеальна, дифракционная картина на некотором максимуме начинает смазываться.

В таблице приведены характерные результаты, которые были получены нами в ходе работы на физическом отделении Летней экологической школы (ФИЗЛЭШ: http://fizlesh.msk.ru). Измерения проводились при расстоянии от препарата до экрана примерно 5 метров (для большинства препаратов). Для стрекозы «Коромысло синее» приведены два результата, соответствующие разным частям глаза.

Описанный эксперимент достаточно просто воспроизвести и дома. Вам всего лишь следует летним погожим днем (ближе к вечеру) выйти в лес или к водоему, захватив с собой сачок, а потом обработать «добычу», как было описано выше.

Только не надо ловить для этой цели редких и красивых бабочек, тем более занесенных в Красную книгу!

Наименование препарата	Количество максимумов	Расстояние между крайними максимумами, см	Период решетки, мм
Шмель земляной (bombus hupnorum)	2	32±1	17,7±0,9
Коромысло синее (aeschna cyanea)	6 8	45±1 54±1	37±1 41,1±1,6
Шершень (vespa crabo)	6	55±1	31±1
Королевская креветка	22	79±1	54±3
Алоэ (aloe)	4	19±1	40±4

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Площадь сечения тетраэдра

Б.КАНЕВСКИЙ, Э.ЛИНДЕНШТРАУС

Хорошо известна следующая задача:
Доказать, что длина любого отрезка MN, лежащего в треугольнике ABC, не превосходит длины наибольшей стороны треугольника.

Действительно, если точки M, N не лежат на границе треугольника, продлим отрезок MN до пересечения со сторонами треугольника в точках M' и N' (рис.1). Очевидно, $M'N' \geq MN$. Далее, если ни одна из точек M', N' не является вершиной треугольника, то, проведя через одну из вершин, например A, прямую, параллельную $M'N'$, получим отрезок, лежащий внутри треугольника и превосходящий по длине $M'N'$, – на рисунке 1 это отрезок AX. Наконец, если точка X лежит на стороне BC и H – основание опущенной на BC высоты, то при условии, что X находится между H и B, имеем $AX \leq AB$, а при X между H и C – $AX \leq AC$.

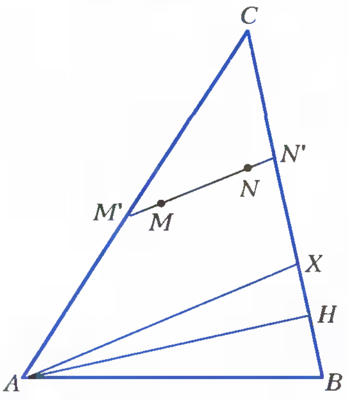


Рис. 1

Попытка сформулировать аналогичное стереометрическое утверждение приводит к такой задаче:

Верно ли, что площадь любого сечения тетраэдра плоскостью не превосходит площади хотя бы одной его грани?

Любопытна история этой задачи. Если сечение является треугольником, то показать, что ответ на вопрос задачи положителен, несложно. Поэтому задачу однажды решили дать на вступительном экзамене в МГУ. Однако при подготовке экзаменационных материалов слово «треугольное» в формулировке задачи было пропущено. В результате задача не была решена ни абитуриентами, ни экзаменаторами, и лишь через некоторое время ее решение было найдено. Мы приведем два решения: одно из них было получено в 1979 году Д.Бернштейном, другое в 1980 году М.Концевичем и в 1988 году независимо Э.Линденштраусом. Но начнем с треугольного сечения.

Утверждение 1. *Площадь треугольного сечения тетраэдра не больше площади хотя бы одной его грани.*

Доказательство опирается на следующую лемму.

Лемма. *Пусть даны две скрещивающиеся прямые p и t. Из точек A, B, C, лежащих на p, опустим перпендикуляры AA', BB', CC' на t. Тогда, если B лежит между A и C, то $BB' < AA'$ или $BB' < CC'$.*

Действительно, проведем через t плоскость, параллельную p, и опустим на нее перпендикуляры AA'', BB'', CC'' (рис.2). По теореме о трех перпендикулярах отрезки $A''A'$, $B''B'$, $C''C'$ перпенди-

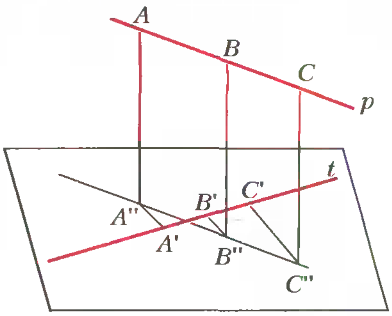


Рис. 2

(Продолжение см. на с. 34)

Теорема Пифагора

Геометрия владеет двумя сокровищами: одно из них — это теорема Пифагора...

Иоганн Кеплер

Теорема Пифагора! Без преувеличения можно сказать, что это самая известная теорема геометрии, ибо о ней знает подавляющее большинство населения планеты, хотя доказать ее способна лишь очень незначительная его часть. Сейчас известно около 500 различных доказательств теоремы — геометрических, алгебраических, механических и прочих.

В чем же причина такой популярности «пифагоровых штанов»? Знатоки утверждают, что причин здесь три: а) простота, б) красота, в) широчайшая применимость.

Из дошедших до нас жизнеописаний Пифагора (примерно 580 – 500 до н.э.) мы знаем, что он около 20 лет провел в Египте, где имел возможность познакомиться с математикой египтян. В Египте уже с XXIII века до н.э. был известен прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4, 5, вошедший в геометрию под названием «египетского». При этом древние египтяне знали и использовали в своей практической деятельности (строительство, землемерие) только одно свойство этого самого прекрасного, по мнению Плутарха, из всех треугольников — наличие прямого угла, неизменно образуемого, если соотношение длин сторон в нем составляет 3:4:5. Другое его свойство — равенство квадрата гипотенузы сумме квадратов катетов (теорема Пифагора), а также существование других прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами, например 5, 12, 13; 15, 8, 17; 7, 24, 25 и т.д., остались неизвестными древним египтянам.

В Древнем Вавилоне, где Пифагор якобы тоже был несколько лет, это второе свойство не только треугольника со сторонами 3, 4, 5, но и вообще всех прямоугольных треугольников было хорошо известно. Так, в одном из самых ранних вавилонских математических текстов, относящемся к XIX – XVIII векам до н.э., содержится следующая изящная задача: «Палка длиной $\frac{1}{2}$ прислонена к стене. Ее верхний конец опустили на $\frac{1}{10}$. Как далеко отодвинется ее нижний конец?» В задаче, как видим, по данным гипотенузе $c = \frac{1}{2}$ и одному из катетов $b = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$ необходимо найти второй катет. Его, как и положено, вавилонянин определяет «по Пифагору»:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{4}{25}} = \frac{3}{10}.$$

Однако, несмотря на более высокий, по сравнению с достижениями египтян, уровень математических знаний в Древнем Вавилоне, особенно в алгебре и вычислительном искусстве, в вавилонской математике нет ни малейших признаков того, что называется доказательством. Это в полной мере относится и к тому хорошо освоенному вавилонянами геометрическому правилу, которое носит название теоремы Пифагора.

Как свидетельствуют летописи, в Древнем Китае уже около 2200 года до н.э. для треугольника со сторонами 3, 4, 5 было найдено правило «гоу-гу», с помощью которого можно было по известным гипотенузе и одному из катетов находить другой неизвестный катет, а также гипотенузу, если известны оба катета. В трактате «Математика в девяти книгах», созданном во II веке до н.э. по более древним источникам, кроме 24 задач, требующих для своего решения применения правила «гоу-гу», содержится также чертеж, позволяющий доказать теорему Пифагора геометрически, как это представлено на рисунке 1. Возможно, что данный

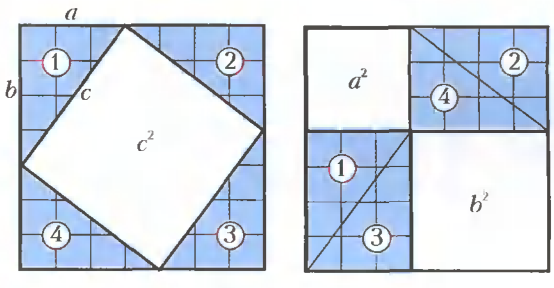


Рис. 1

чертеж — свидетельство единственного «допифагорова» доказательства теоремы.

В самом древнем индийском геометрическом сборнике «Сульвасутра» («Правила веревки», 600 год до н.э.), представляющем собой своеобразную инструкцию по сооружению алтарей в храмах, даются правила построения прямых углов при помощи веревки с узлами, расстояния между которыми равны 15, 36 и 39 падас (мера длины).

Таким образом, теорема Пифагора в виде простейших угломерных приспособлений, частных и общих математических задач и чертежей обнаружена в памятниках культуры древних египтян, вавилонян, китайцев и индийцев задолго до Пифагора. Но среди этих памятников нет ни одного, за исключением китайского математического трактата, в котором имелись бы хотя бы указания на доказательство теоремы.

Как утверждают все античные авторы, Пифагор первым дал полноценное доказательство теоремы, носящей его имя. К сожалению, мы не знаем, в чем оно состояло, потому что древние математики и писатели об этом умалчивают, а от самого Пифагора и ранних пифагорейцев до нас не дошло ни одного письменного документа.

Бóльшая часть доказательств теоремы Пифагора выполнена геометрическими методами, среди которых значительное место занимает метод разложения. Сущность метода разложения заключается в том, что квадрат, построенный на гипотенузе, с одной стороны, и квадраты, построенные на катетах, с другой, складываются из равных частей. Простейший пример применения этого метода имеем при доказательстве теоремы Пифагора для равнобедренного прямоугольного треугольника (рис.2). Из этого рисунка все так понятно, что комментировать его не требуется. Как писал в подобных случаях индийский математик XII века Бхаскара, «Смотри!»

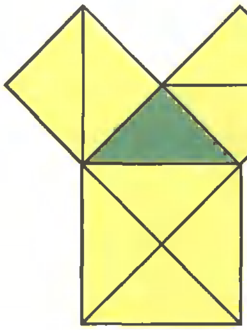


Рис. 2

Среди многочисленных доказательств теоремы Пифагора методом разложения есть и два таких, что их с полным правом можно назвать шедеврами, настолько они красивы и просты до гениальности. Первое (рис.3) принадлежит иранскому математику ан-Найризи (конец IX – начало X века), комментатору Евклида, а второе (рис.4) – лондонскому биржевому маклеру и астроному-любителю Генри Перигэлу, опубликовавшему его в 1873 году. На рисунках 3 и 4 тоже все настолько ясно, что указание Бхаскары и здесь остается в силе.

Два замечательных обобщения теоремы Пифагора принадлежат Евклиду и приведены соответственно в 6-й и 2-й книгах его знаменитых «Начал». Суть первого обобщения заключается в том, что если на катетах a, b и гипотенузе c прямоугольного треугольника построить какие угодно подобные фигуры (треугольники, четырехугольники, многоугольники и даже криволинейные фигуры) с площадями F_a, F_b, F_c так, что

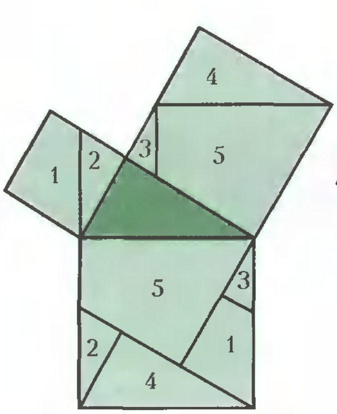


Рис. 3

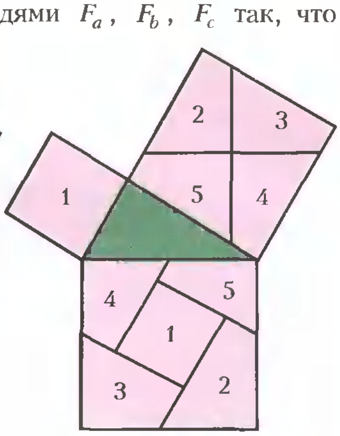


Рис. 4

катеты и гипотенуза являются сходственными отрезками этих фигур, то имеет место равенство $F_a + F_b = F_c$. При построении на сторонах исходного прямоугольного треугольника квадратов теорема Пифагора, таким образом, представляет собой частный случай этой теоремы Евклида.

Во 2-й книге «Начал» Евклид обобщил теорему Пифагора для непрямоугольных треугольников, рассмотрев отдельно случаи острого и тупого углов. Он доказал свою теорему, которая сейчас называется теоремой косинусов, не употребляя при этом понятия «косинус», а оперируя проекциями одной стороны на другую: $c^2 = a^2 + b^2 \mp 2a_b b$, где a, b, c – стороны треугольника, a_b – проекция стороны a на b. Если угол между a и b прямой, то $a_b = 0$, и тогда мы имеем теорему Пифагора в «чистом виде».

Занимаясь поисками прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами, удовлетворяющих, если перейти на привычные нам обозначения, уравнению $x^2 + y^2 = z^2$, Пифагор, исходя из геометрических соображений, нашел формулы, которые являются решением этого уравнения:

$$x = 2m + 1\,,\ \ y = 2m^2 + 2m\,,\ \ z = 2m^2 + 2m + 1\,,$$

где m - произвольное натуральное число. Как видим, эти формулы позволяют находить не все прямоугольные треугольники с целочисленными сторонами, а только те из них, в которых разность гипотенузы и большего (четного) катета равна 1.

Полное решение уравнения $x^2 + y^2 = z^2$, дающее возможность находить все так называемые основные «пифагоровы тройки» (x, y, z), впервые встречается у Евклида. В современной символике оно имеет вид

$$x = p^2 - q^2\,,\ \ y = 2pq\,,\ \ z = p^2 + q^2\,,$$

где p и q – взаимно простые натуральные числа разной четности, причем $p > q$.

Удивительно, но математики Древнего Вавилона, оказывается, тоже владели общим методом нахождения «пифагоровых троек», о чем свидетельствует выполненная клинописью на глине таблица из 15 строк целых чисел, удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 = z^2$. Историк математики Отто Нейгебауэр показал, как вавилоняне могли получить эти тройки, среди которых есть такие, как (4961, 6480, 8161) и даже (12709, 13500, 18541).

Пифагорово уравнение $x^2 + y^2 = z^2$ является частным случаем уравнения $x^n + y^n = z^n$, по поводу которого знаменитый математик Пьер Ферма около 1635 года небрежно заметил, что оно не имеет решений в натуральных числах x, y, z, n, если $n > 2$. Это утверждение вошло в математику под названием Великой теоремы Ферма.

Теорема и уравнение Пифагора на протяжении тысячелетий привлекают внимание математиков, являясь источником плодотворных идей и открытий. Можно надеяться, что глубины этого источника хватит и для будущих поколений математиков.

Р.Сарбаш

(Начало см. на с. 31)

кулярны t, и поскольку $B''B'$ короче по крайней мере одного из отрезков $A''A'$ и $C''C'$, а $AA'' = BB'' = CC''$, имеем $BB' < AA'$ или $BB' < CC'$.

Пусть теперь MNK – сечение тетраэдра $ABCD$ (рис.3). Если точка K не является вершиной тетраэдра, то по лемме перпендикуляр, опущенный из K на MN, короче одного из перпендикуляров, опущенных на MN из точек A и C, т.е. $S_{MNK} < S_{AMN}$ или $S_{MNK} < S_{CMN}$. В первом случае $S_{MNK} < S_{ABD}$, во втором, повторяя рассуждение, получаем, что либо $S_{MNC} < S_{AMC} < S_{ABC}$, либо $S_{MNC} < S_{DMC}$. Но $S_{DMC} < S_{ADC}$ или $S_{DMC} < S_{BDC}$, и утверждение 1 доказано.

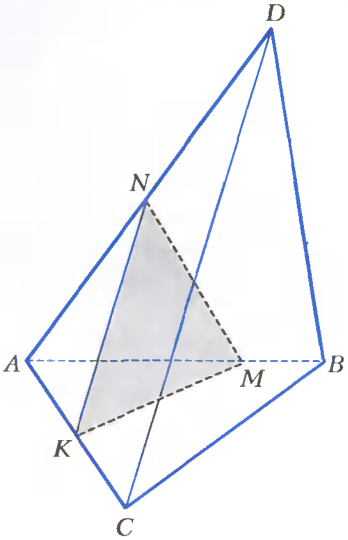


Рис. 3

Прежде чем привести решение Концевича–Линденштрауса для четырехугольного сечения, вспомним одну старую задачу (по существу, это задача М189 из «Задачника «Кванта»).

Задача. *Пусть отрезки AB, CD, EF проходят через точку O, точка E лежит на отрезке AC, F – на отрезке BD. Тогда $EF < AB$ или $EF < CD$.*

Решение. Проведем через E и F прямые, перпендикулярные EF (рис.4). Пусть (для определенности) точка C лежит вне полосы между этими прямыми. Если точка D также

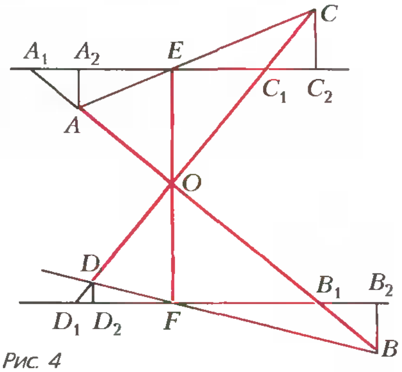


Рис. 4

лежит вне полосы, то $CD > EF$, поэтому будем считать, что вне полосы лежит точка B. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 – точки пересечения проведенных прямых с прямыми AB и CD, а точки A_2, B_2, C_2, D_2 – основания перпендикуляров, опущенных на проведенные прямые из A, B, C, D. Тогда

$$\frac{AA_2}{CC_2} = \frac{A_2E}{EC_2} \le \frac{A_1E}{EC_1} = \frac{B_1F}{FD_1} \le \frac{B_2F}{FD_2} = \frac{BB_2}{DD_2}.$$

Следовательно, либо $AA_2 \le BB_2$ и $AB > EF$, либо $CC_2 \ge DD_2$ и $CD > EF$.

Теперь мы можем доказать следующий факт.

Утверждение 2. *Площадь четырехугольного сечения тетраэдра не больше площади хотя бы одной его грани.*

Доказательство. Путь $KLMN$ – сечение тетраэдра $ABCD$, $A'B'C'D'$ – проекция тетраэдра на плоскость, перпендикулярную KM. Тогда (по только что доказанному) $N'L' \le \max(A'C', B'D')$, где L', N' – проекции точек L, N. Поскольку высоты треугольников KLM и KMN, опущенные на KM, сохраняют при рассмотренном проектировании свою длину, получаем (рис.5)

$$S_{KLMN} = KM(K'L' + K'N')/2 = KM \cdot L'N'/2 \le$$
$$\le KM \cdot \max(A'C', B'D')/2 = \max(S_{AKC}, S_{BMD}),$$

и утверждение 2 следует из утверждения 1.

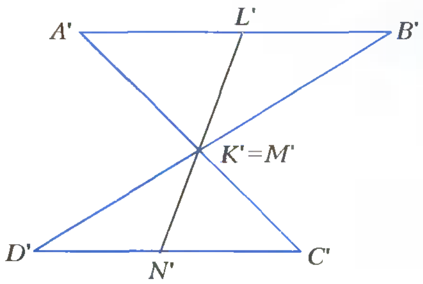


Рис. 5

На самом деле справедливо более сильное утверждение.

Утверждение 3. *Площадь четырехугольного сечения тетраэдра не больше площади проекции хотя бы одной грани на плоскость сечения.*

Доказательство. Это утверждение легко доказывается от противного. Действительно, пусть при проекции тетраэдра на плоскость сечения $KLMN$ получается четырехугольник $ABCD$, на сторонах которого лежат точки K, L, M, N (рис.6); это не единственный случай, но остальные рассматриваются аналогично. Предположим, что $S_{KLMN} > S_{\max}$, где

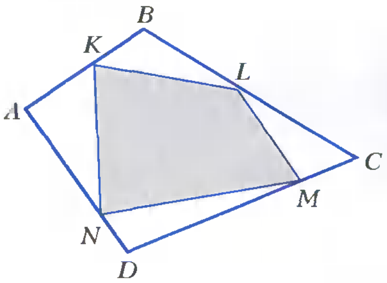


Рис. 6

$S_{\max} = \max(S_{ABC}, S_{ABD}, S_{ACD}, S_{BCD})$. Тогда можно поднять над плоскостью проекции точки A и C и опустить точки B и D так, чтобы прямые AB, BC, CD и DA по-прежнему проходили через точки K, L, M и N, а площади треугольников ABC, ABD, ACD и BCD увеличились незначительно, оставшись меньше площади четырехугольника $KLMN$. В результате получим пирамиду, площади всех граней которой меньше площади сечения $KLMN$, что противоречит утверждению 2.

Приведем, тем не менее, самое первое доказательство утверждения 3, найденное Д.Бернштейном и позволяющее попутно установить ряд любопытных фактов.

Напомним сначала одну теорему планиметрии.

Теорема Менелая. *Пусть точки A', B', C' лежат на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC или их продолжениях. Тогда A', B', C' лежат на одной прямой если и только если* $\frac{AC'}{C'B}\frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A} = 1$.

(О теореме Менелая см. статью А.Егорова «Теоремы Менелая и Чевы» в «Кванте» №3 за 2004 г.)

Из теоремы Менелая легко вывести ее пространственный аналог.

Теорема. *Если EFGH – сечение тетраэдра ABCD, то*

$$\frac{DE}{EA}\frac{CF}{FD}\frac{BG}{GC}\frac{AH}{HB}=1 .$$

Доказательство. Пусть прямые EF, GH и AC пересекаются в точке K. Применив теорему Менелая к треугольнику ADC и точкам E, F, K, а также к треугольнику ABC и точкам G, H, K и перемножив соответствующие равенства, получим требуемое соотношение. (Если прямые EF, GH и AC параллельны, полагаем $AK/KC = 1$.)

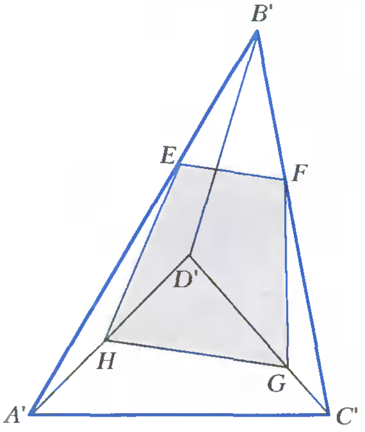


Рис. 7

Рассмотрим теперь проекцию тетраэдра на плоскость его сечения $EFGH$. Возможны следующие случаи:

1. Проекция является треугольником (рис.7). Тогда этот треугольник является проекцией одной из граней тетраэдра, и утверждение очевидно.

2. Проекция – четырехугольник и две вершины сечения лежат на его диагоналях (рис.8). Тогда, зафиксировав эти

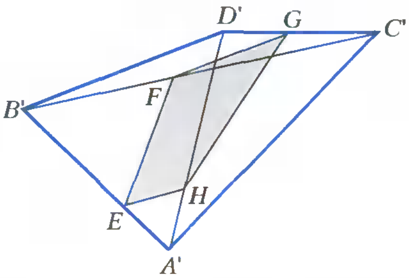


Рис. 8

вершины, будем двигать две другие по соответствующим сторонам, увеличивая площадь внутреннего четырехугольника (подумайте, почему это возможно), пока они не совпадут с вершинами внешнего. При этом получившийся четырехугольник будет целиком лежать внутри одного из треугольников, которые являются проекциями граней тетраэдра.

3. Проекция – четырехугольник и вершины сечения лежат на его сторонах (рис.9). Введем числа $\alpha = (DE - AE)/AD$,

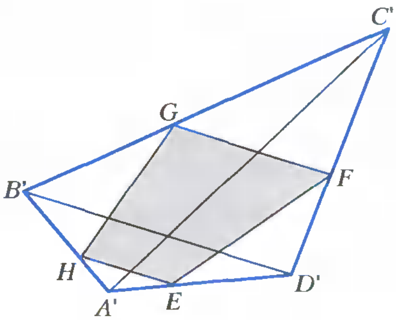


Рис. 9

$\beta = (CF - DF)/CD, \gamma = (BG - CG)/BC, \delta = (AH - BH)/AB$. Тогда $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$, $|\gamma| < 1$, $|\delta| < 1$ и $DE/AE = (1+\alpha)/(1-\alpha)$, $CF/DF = (1+\beta)/(1-\beta)$, $BG/CG = (1+\gamma)/(1-\gamma)$, $AH/BH = (1+\delta)/(1-\delta)$. Отсюда по теореме Менелая получаем после преобразований

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=0 .$$

Следовательно, $(\alpha+\gamma)(1+\beta\delta)+(\beta+\delta)(1+\alpha\gamma)=0$ и, так как $(1+\alpha\gamma)>0$ и $1+\beta\delta>0$, имеем $(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)<0$.

Пусть $S_1 = S_{ADC}$, $S_2 = S_{BDC}$, $S_3 = S_{ABC}$, $S_4 = S_{ADB}$, $S_1' = S_{DEF}$, $S_2' = S_{FGC}$, $S_3' = S_{BGH}$, $S_4' = S_{AHE}$. Тогда

$$t_1=\frac{S_1'}{S_1}=\frac{(1+\alpha)(1-\beta)}{4},\quad t_2=\frac{S_2'}{S_2}=\frac{(1+\beta)(1-\gamma)}{4},$$

$$t_3=\frac{S_3'}{S_3}=\frac{(1+\gamma)(1-\delta)}{4},\quad t_4=\frac{S_4'}{S_4}=\frac{(1+\delta)(1-\alpha)}{4},$$

и

$$t_1+t_2+t_3+t_4=1-(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)/4>1 .$$

Отсюда

$$S_1'+S_2'+S_3'+S_4'=t_1S_1+t_2S_2+t_3S_3+t_4S_4\geq$$
$$\geq(t_1+t_2+t_3+t_4)S_{\min}>S_{\min},$$

где $S_{\min}=\min(S_1,S_2,S_3,S_4)$, и

$$S_{EFGH}=S_{ABCD}-S_1'-S_2'-S_3'-S_4'<S_{ABCD}-S_{\min}=S_{\max},$$

где $S_{\max}$ – максимальная площадь проекций граней тетраэдра.

Отметим, что попутно мы доказали два любопытных свойства четырехугольников:

1) Пусть точки K, L, M, N лежат на сторонах AB, BC, CD, DA выпуклого четырехугольника $ABCD$. Тогда равносильны следующие условия:

а) прямые KL, MN и AC пересекаются в одной точке;

б) прямые KN, LM и BD пересекаются в одной точке;

в) $\dfrac{AK}{KB}\dfrac{BL}{LC}\dfrac{CM}{MD}\dfrac{DN}{NA}=1$.

2) Пусть точки K, L, M, N лежат на сторонах AB, BC, CD, DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ и прямые KL, MN и AC пересекаются в одной точке. Тогда

$$S_{KLMN}\leq\max(S_{ABC},S_{ABD},S_{ACD},S_{BCD}) .$$

В заключение вернемся к задаче, с которой мы начали. Очевидно, что если заменить треугольник произвольным выпуклым многоугольником, утверждение задачи перестанет быть верным. Однако оно останется справедливым, если рассматривать не только стороны, но и диагонали многоугольника.

Аналогичное утверждение для многогранников может быть сформулировано так: сечение выпуклого многогранника максимальной площади содержит по крайней мере три его вершины. Доказательство нам неизвестно. Может быть, читателям удастся его найти?

Информацию о журнале "Квант" и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала "Квант"
kvant.info

Московский центр непрерывного математического образования
kvant. mccme.ru

Московский детский клуб "Компьютер"
math.child.ru

Костромской центр дополнительного образования "Эврика"
ceemat.ru

Решение задач с распределенной силой

Л.ЖОРИНА, А.ЧЕРНОУЦАН

При решении задач из различных разделов физики приходится встречаться с ситуациями, когда силы непрерывно распределены вдоль какой-нибудь линии или поверхности. Обычно требуется найти или равнодействующую этих сил, или возникающие в объекте их приложения (линейном или плоском) натяжения и деформации. При решении таких задач удобно использовать один из двух подходов. В первом подходе – назовем его *дифференциальным* – анализируют силы, действующие на маленький элемент линии или поверхности, при этом размер этого элемента в окончательный ответ не входит. Во втором – *интегральном* – подходе производят суммирование по всем элементам, опираясь при этом на симметрию системы и стараясь избежать прямого интегрирования. Впрочем, как мы увидим, эти подходы тесно друг с другом связаны.

Начнем с рассмотрения линейных объектов.

Задача 1. *Точечный заряд q находится в центре кольца радиусом R, по которому равномерно распределен одноименный заряд Q. Найдите силу натяжения кольца. Взаимодействие зарядов кольца друг с другом не учитывать.*

Разберем два способа решения этой задачи.

Способ 1. Запишем условие равновесия элемента кольца, видного из центра под маленьким углом $\Delta\alpha$ (рис.1). Заряд этого элемента равен $\Delta Q = Q\dfrac{\Delta\alpha}{2\pi}$, на него действует сила отталкивания $\Delta\vec{F}$ от заряда q и две одинаковые по модулю

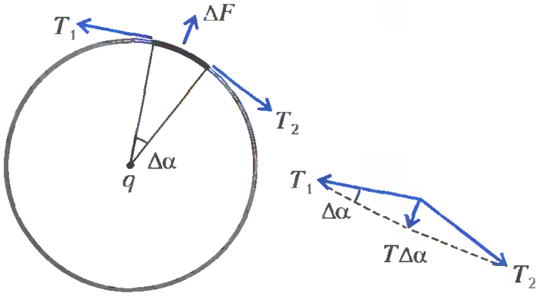


Рис. 1

силы натяжения $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ $(T_1 = T_2 = T)$, угол между которыми равен $\pi - \Delta\alpha$. Равнодействующая сил натяжения (с учетом малости $\Delta\alpha$) составляет $T\Delta\alpha$, и условие равновесия этого элемента принимает вид

$$T\Delta\alpha = \Delta F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\Delta Q}{R^2}, \text{ или } T = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{2\pi R^2}.$$

Способ 2. Рассмотрим силы, приложенные к полукольцу (рис.2). На него действуют две параллельные силы натяжения. Их сумма, равная $2T$, уравновешивается равнодействующей всех электростатических сил, приложенных к различным элементам полукольца. Из симметрии системы очевидно, что равнодействующая электростатических сил направ-

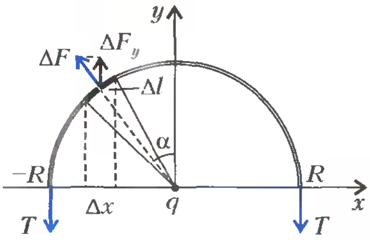


Рис. 2

лена по оси y. Получаем

$$2T = F = \sum\Delta F_y = \sum\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\Delta Q}{R^2}\cos\alpha =$$

$$= \sum\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\frac{Q\Delta l}{2\pi R}\cos\alpha = \sum\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\frac{Q\Delta x}{2\pi R} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\frac{Q2R}{2\pi R} = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{2\pi R^2}.$$

Смысл приведенного расчета состоит в следующем: вместо того чтобы брать проекцию силы, приложенной к элементу кольца, на ось y, мы заменили этот элемент его проекцией на ось x: $\Delta l\cos\alpha = \Delta x$. Мы как бы «выпрямили» полуокружность, после чего все силы стали параллельны друг другу.

Отметим, что, в соответствии с третьим законом Ньютона, мы одновременно вычислили силу, действующую на точечный заряд q со стороны полукольца, т.е. нашли напряженность поля, создаваемую полукольцом с зарядом $Q_1 = Q\ 2$ в своем центре:

$$E = \frac{F}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q_1}{\pi R^2} = \frac{Q_1}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}.$$

На первый взгляд, второй способ решения выглядит более громоздким и искусственным. Однако в некоторых случаях, особенно при вычислении равнодействующей силы, он имеет определенные преимущества.

Задача 2. *Плоский контур расположен в однородном магнитном поле с индукцией B перпендикулярно линиям индукции. По контуру течет ток силой I. Найдите натяжение провода контура в двух случаях: а) контур имеет форму окружности радиусом R; б) контур имеет форму эллипса с полуосями a и b. Во втором случае следует найти натяжение в точках пересечения эллипса с осями. Силой магнитного взаимодействия частей контура пренебречь.*

Первый случай очень похож на задачу 1, и его можно решать любым из двух способов. При решении первым способом получаем уравнение, связывающее силу натяжения провода с магнитной силой (силой Ампера), действующей на контур со стороны магнитного поля:

$$IB(R\Delta\alpha) = T\Delta\alpha,$$

откуда

$$T = IBR.$$

Однако ясно, что такое решение не применимо к контуру в форме эллипса. Что же касается второго подхода, то он применим как в первом, так и во втором случаях.

Чтобы найти натяжение провода в точках A и C эллипса (рис.3), надо вычислить магнитную силу $\vec{F}$, действующую на примыкающую к этим точкам половину эллипса. Проекции этой силы на оси x и y равны, соответственно,

$$F_x = \sum \Delta F_x = \sum IB\Delta l \sin\alpha = \sum IB\Delta y = 0$$

и

$$F_y = \sum \Delta F_y = \sum IB\Delta l \cos\alpha = \sum IB\Delta x = IB \cdot 2a .$$

Поскольку магнитная сила равна двум силам натяжения, получаем

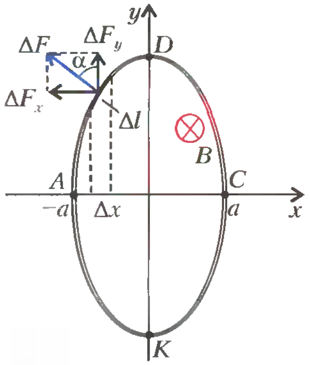


Рис. 3

$$T_A = T_C = IBa .$$

Аналогично найдем натяжение провода в точках D и K:

$$T_D = T_K = IBb .$$

Можно заметить, что такой же расчет применим к участку контура любой формы. Сформулируем *утверждение*: сила, действующая со стороны однородного магнитного поля на участок контура с током любой формы, соединяющий какие-то две точки, равна силе, действующей на соединяющий эти точки прямой провод с таким же током. Физический смысл этого утверждения состоит в том, что полная сила, действующая на замкнутый контур с током со стороны однородного магнитного поля, должна быть равна нулю (иначе бы нарушался закон сохранения энергии).

Задача 3. *Тонкое кольцо массой m и радиусом R вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Найдите натяжение кольца.*

Запишем второй закон Ньютона для малого элемента кольца. Равнодействующая двух сил натяжения сообщает этому элементу центростремительное ускорение:

$$T\Delta\alpha = m\frac{\Delta\alpha}{2\pi}\omega^2 R ,$$

откуда

$$T = \frac{m\omega^2 R}{2\pi} .$$

Это решение аналогично первому, т.е. дифференциальному, подходу в статических задачах. А применим ли в этом случае интегральный подход? Если мы запишем второй закон Ньютона для половины кольца, то в формулу для центростремительного ускорения центра масс полукольца войдет расстояние $r_ц$ от центра масс до оси:

$$2T = \frac{m}{2}\omega^2 r_ц .$$

Если бы мы знали $r_ц$, то нашли бы натяжение T вторым способом. Однако можно использовать это уравнение именно для вычисления $r_ц$: подставив сюда T, вычисленное первым способом, получим

$$r_ц = \frac{2R}{\pi} .$$

Задача 4. *Тонкое алюминиевое кольцо радиусом $R = 10$ см вращается вокруг своей оси. При какой угловой скорости кольцо разорвется, если разрыв происходит при механическом напряжении $\sigma_{кр} \approx 2 \cdot 10^7$ Н/м^2. Плотность алюминия $\rho = 2700$ кг/м^3.*

Условие разрыва кольца запишем в виде

$$\frac{T}{S} = \sigma_{кр} ,$$

где T – натяжение кольца, S – площадь сечения. Подставим T из решения предыдущей задачи и учтем, что $m = \rho S \cdot 2\pi R$. Получим

$$\omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{\sigma_{кр}}{\rho}} \approx 10^3 \text{ с}^{-1} .$$

Интересно, что ответ не зависит от толщины кольца.

Перейдем теперь к рассмотрению не линейных, а плоских объектов. Обычно в этих задачах удобнее применять второй (интегральный) подход. Однако попробуйте самостоятельно решить их и с помощью дифференциального метода.

Задача 5. *Внутри тонкой сферы радиусом R создано избыточное давление p. Какой должна быть толщина сферы, чтобы она не разорвалась, если разрыв происходит при напряжении $\sigma_{кр}$?*

Из условия равновесия полусферы следует, что сила упругости в диаметральном сечении равна равнодействующей сил давления:

$$\sigma \cdot 2\pi R d = F_д .$$

Для вычисления равнодействующей сил давления отметим, что она направлена вдоль оси симметрии полусферы (рис.4):

$$F_д = \sum p\Delta S \cos\alpha = \sum p\Delta S' = p\pi R^2 .$$

Как и в задачах 1 и 2, мы, вместо того чтобы проецировать силу на ось симметрии, взяли проекцию площади площадки ΔS на плоскость, на которую опирается полусфера (т.е. как бы «выпрямили» полусферу). Подставив в предыдущую формулу, получим

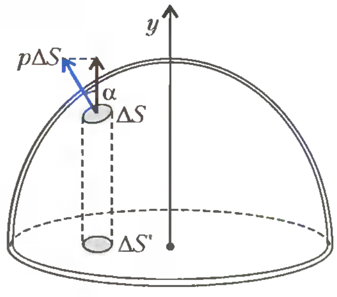


Рис. 4

$$\sigma = \frac{pR}{2d} .$$

Из условия $\sigma < \sigma_{кр}$ найдем

$$d > \frac{pR}{2\sigma_{кр}} .$$

Обратите внимание на близкую аналогию этой задачи с задачей вычисления избыточного давления под искривленной поверхностью жидкости, возникающего вследствие поверхностного натяжения (так называемое *лапласово давление*). В этом случае условие равновесия поверхностной пленки имеет вид

$$\sigma \cdot 2\pi R = p\pi R^2 ,$$

где σ в данном случае – коэффициент поверхностного натяжения жидкости. Отсюда получаем

$$p = \frac{2\sigma}{R} .$$

Аналогично случаю линейных объектов (см. задачу 2), расчет равнодействующей сил давления можно обобщить на поверхность любой формы. Обобщение выглядит так: если давление постоянно, то равнодействующая сил давления, действующих на произвольную поверхность, опирающуюся на плоский участок, равна силе давления, приложенной к этому участку. Физический смысл этого утверждения состоит в том, что полная сила давления на замкнутую поверхность равна нулю (если давление постоянно).

Умение увидеть физический смысл рассчитываемой величины позволяет иногда заметно упростить задачу, которая изначально выглядит сложной.

Задача 6. *Тонкий полусферический колокол радиусом R стоит на горизонтальной поверхности. Через маленькое* *отверстие в верхней точке колокол заполняют водой. Чему равна масса колокола, если в тот момент, когда вода полностью заполнила колокол, она начала из-под него вытекать?*

Условие отрыва колокола от горизонтальной поверхности сводится к тому, что равнодействующая сил давления, действующих на него со стороны воды, равна его силе тяжести:

$$F_д = mg \,.$$

Прямое вычисление равнодействующей сил давления сложнее, чем в предыдущей задаче. Поскольку давления в разных точках колокола разные, избежать интегрирования в прямом расчете не удается. Однако если заметить, что искомая сила давления приложена не только к колоколу, но и к воде, то ее можно найти из условия равновесия объема воды:

$$m_в g + F_д = p\pi R^2 \,,$$

где $m_в = \rho_в \cdot \frac{2}{3}\pi R^3$ – масса воды, $p = \rho_в g R$ – давление воды на горизонтальную поверхность. Окончательно получаем

$$F_д = \frac{1}{3}\rho_в \pi R^3 g \,,$$

или

$$m = \frac{1}{3}\rho_в \pi R^3 \,.$$

Задача 7. *Вычислите напряженность электрического поля в центре полусферы радиусом R, по поверхности которой равномерно распределен заряд Q.*

Как отмечалось в задаче 1, такая задача идентична задаче о силе, действующей на заряженную полусферу со стороны точечного заряда, помещенного в ее центр. Однако в данном случае мы проведем расчет непосредственно для напряженности.

Поскольку напряженность направлена вдоль оси симметрии полусферы, то возьмем проекцию на это направление от напряженности, создаваемой маленьким участком полусферы площадью ΔS:

$$E = \sum \Delta E_y = \sum \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{Q}{2\pi R^2}\Delta S\cos\alpha \,,$$

где $\left(Q/\left(2\pi R^2\right)\right)\Delta S$ – заряд этого участка. Так как $\sum \Delta S\cos\alpha = \sum \Delta S' = \pi R^2$, получаем

$$E = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2} \,.$$

Задача 8. *Проводящая сфера радиусом R заряжена зарядом Q. С какой силой отталкиваются друг от друга две половинки сферы?*

Вычислим силу, действующую на маленький участок поверхности площадью ΔS. Эта сила равна

$$\Delta F = \Delta q E_{внеш} = Q\frac{\Delta S}{4\pi R^2}E_{внеш} \,,$$

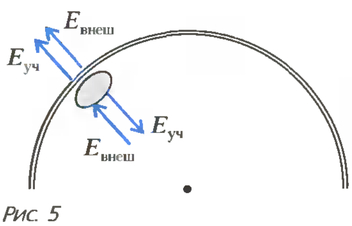


Рис. 5

где $E_{внеш}$ – напряженность поля, создаваемого внешними (по отношению к данному участку) зарядами сферы. Чтобы найти $E_{внеш}$, заметим, что полная напряженность среды вблизи поверхности равна (рис.5)

$$\vec{E}_{ср} = \vec{E}_{внеш} + \vec{E}_{уч} \,,$$

где $\vec{E}_{уч}$ – напряженность собственного поля участка сферы. По разные стороны выделенного участка векторы $\vec{E}_{уч}$ направлены в противоположные стороны (вблизи центра участка напряженность совпадает с напряженностью поля равномерно заряженной плоскости), а векторы $\vec{E}_{внеш}$ направлены одинаково. Поскольку внутри сферы напряженность равна нулю, то

$$E_{внеш} - E_{уч} = 0 \,,$$

$$E_{внеш} + E_{уч} = 2E_{внеш} = E_{сф} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2} \,.$$

Тогда получаем

$$\Delta F = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}\Delta S.$$

Следовательно, внутри заряженной сферы как бы существует давление

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4} \,.$$

Как было показано в задаче 5, сила, действующая на полусферу, равна

$$F = p\pi R^2 = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 R^2} \,.$$

Заметим, что формула для давления может быть получена и из энергетических соображений. Мысленно уменьшая радиус сферы на ΔR, мы совершим работу против силы давления, равную $\sum pS\Delta R = p \cdot 4\pi R^2 \Delta R$, которая равна изменению электростатической энергии $w\Delta V = w \cdot 4\pi R^2 \Delta R$, где w – объемная плотность энергии. Видно, что электростатическое давление на металлическую поверхность отрицательно (направлено в сторону поля) и равно объемной плотности энергии поля:

$$p = w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \,.$$

Упражнения

1. Резиновое кольцо массой m и радиусом R_0 раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω. Найдите новый радиус кольца, если жесткость резины k.

2. Петлю из резинового шнура длиной l_0 положили на пленку жидкости. Пленку прокололи внутри петли, в результате чего она растянулась в окружность длиной l. Считая известной жесткость резины k, определите коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

3. По длинному соленоиду радиусом R течет ток силой I. При этом индукция магнитного поля соленоида равна B. Найдите силу натяжения провода соленоида. *Указание*: учтите отличие внешнего поля от поля самого соленоида (см. задачу 8).

4. Тонкостенный цилиндр длиной l и радиусом R заполнили газом под давлением p. Найдите силу взаимодействия двух половинок цилиндра, если его мысленно разрезать плоскостью: а) перпендикулярной оси цилиндра; б) проходящей через ось цилиндра.

Материалы вступительных экзаменов 2004 года

Московский физико-технический институт (государственный университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найдите все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} y^7 + y^6 - 6x^2 = 0, \\ y^5 + \dfrac{x^3}{y^3} = x^2 + xy^2. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\cos 3x + \cos 2x = 3|\cos x| - \cos 4x .$$

3. Решите неравенство

$$\frac{\log_{x^2} 4}{\sqrt{\frac{1}{6} + \log_{x^6}(1-x)} - \sqrt{\frac{1}{2}}} \ge \frac{\sqrt{6}}{\log_2(1-x) - \log_4 x^4} .$$

4. В параллелограмме $ABCD$ прямые l_1 и l_2 являются биссектрисами углов A и C соответственно, а прямые m_1 и m_2 – биссектрисами углов B и D соответственно. Расстояние между l_1 и l_2 в $\sqrt{3}$ раз больше расстояния между m_1 и m_2. Найдите угол BAD и радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, если $AC = 4$, $BD = \sqrt{22}$.

5. Найдите все пары целых чисел, при которых является верным равенство

$$-3xy - 10x + 13y + 35 = 0 .$$

6. В пирамиде $ABCD$ длина отрезка BD равна $8/3$, точка E – середина AB, а F – точка пересечения медиан грани BCD, причем $EF = 6$. Сфера радиуса 5 касается плоскостей ABD и BCD в точках E и F соответственно. Найдите двугранный угол между гранями ABD и BCD, площадь грани BCD и объем пирамиды $ABCD$.

Вариант 2

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x-4)(x+1) = y(y+5), \\ \log_{x-2}(2+y) = \dfrac{x-2}{y^2}. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\cos x\sqrt{1 + \sin x - 2\cos x} = \cos x - \sin x .$$

3. Какая наименьшая площадь может быть у прямоугольного треугольника ABC, в котором окружность радиуса R с центром на катете AB касается гипотенузы AC и проходит через точку B?

4. Решите неравенство

$$\frac{1}{x-2} + \frac{5}{6 - 3\sqrt{4 + 3x - x^2}} > \frac{1}{1 + |x-2|} .$$

5. Найдите все значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 - x + a \le 0, \\ x^2 + 2x - 6a \le 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

6. Вписанные окружности граней SBC, SAC и SAB треугольной пирамиды $SABC$ попарно пересекаются и имеют радиусы $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ и $\sqrt{7}$ соответственно. Точка K является точкой касания окружностей со стороной SA, причем $SK = 3$. Найдите длину отрезка AK, периметр и радиус вписанной окружности треугольника ABC.

Вариант 3

1. Решите неравенство

$$\log_5 \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2 - 4|x|}{|x| - 7} \le 0 .$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 6x}{|\sin 4x|} = \frac{\cos 3x}{\cos x} .$$

3. Четырехугольник, один из углов которого равен $\arcsin(4/5)$, вписан в окружность радиуса $\sqrt{15}$ и описан около окружности радиуса 2. Найдите площадь четырехугольника и угол между его диагоналями.

4. Задан куб с ребром длины 1. Найдите: а) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину C, середину ребра A_1B_1 и параллельной прямой BD; б) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину C и параллельной прямой BD, у которой площадь проекции сечения на плоскость BDB_1 максимальна.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\log_5\left(25^x - \log_5 a\right) = x$$

имеет единственное решение.

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (3y - x)^2 = 2 + z^2, \\ (3y + z)^2 = 3 + x^2, \\ (z - x)^2 = 4 + 9y^2. \end{cases}$$

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. По горизонтальной поверхности стола протягивают с постоянной скоростью v тонкую ленту шириной d (рис.1). На ленту въезжает скользящая по столу монета, имея скорость $4v/3$, направленную перпендику-

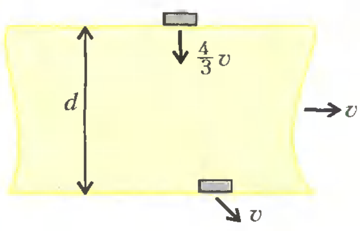


Рис. 1

лярно краю ленты. Монета скользит по ленте и покидает ее со скоростью v под неравным нулю углом к краю ленты. 1) Найдите скорость монеты относительно ленты в начале движения по ленте. 2) Найдите коэффициент трения скольжения между монетой и лентой.

2. В вертикально расположенной открытой с одного конца в атмосферу трубке легкий подвижный теплонепроницаемый поршень отделяет газообразный гелий (He) от жидкости, налитой поверх поршня (рис.2). Какое количество теплоты необходимо подвести к гелию, чтобы при движении поршня вверх вся жидкость вылилась из трубки? Объемы, занятые в трубке гелием, жидкостью и атмосферным воздухом, равны $V_0 = 0,5$ л, $V_0/2$ и $V_0/2$ соответственно. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Давление столба жидкости, первоначально налитой в трубку, равно $p_0/8$.

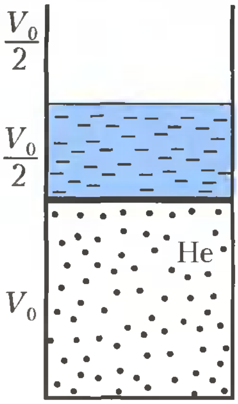


Рис. 2

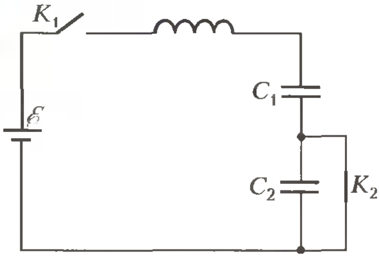


Рис. 3

3. В схеме, изображенной на рисунке 3, в начальный момент ключ K_1 разомкнут, ключ K_2 замкнут, а конденсаторы емкостями C_1 и C_2 не заряжены. Сначала замыкают ключ K_1, а в тот момент, когда заряд на конденсаторе емкостью C_1 достигает максимального значения, размыкают ключ K_2. Найдите максимальный заряд на конденсаторе емкостью C_2 после размыкания ключа K_2. Внутренним сопротивлением батареи с ЭДС $\mathcal{E}$ пренебречь.

4. На гладкой горизонтальной поверхности стола расположена проволочная прямоугольная рамка массой m со сторонами a и b (рис.4). Рамка находится в магнитном поле, составляющая вектора индукции которого вдоль оси z зависит только от координаты x и изменяется по закону $B_z = B_0(1 - \alpha x)$, где B_0 и α – заданные константы. Рамке сообщают вдоль оси x скорость v_0. Пренебрегая самоиндукцией рамки, определите расстояние, пройденное рамкой до полной остановки. Омическое сопротивление рамки равно R.

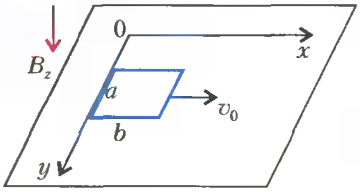


Рис. 4

5. Параллельный пучок света падает на систему двух собирающих линз, главные оптические оси которых параллельны ($OO \parallel O_1O_1$) и находятся на расстоянии $a = 0,1$ см друг от друга, под малым углом $\alpha = 0,1$ рад к ним (рис.5) и, пройдя через линзы, отклоняется на малый угол $\beta = 0,2$ рад от оптических осей линз. Определите фокусные расстояния линз, если расстояние между линзами $L = 10$ см.

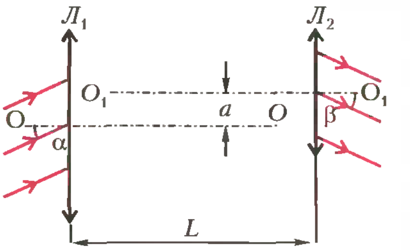


Рис. 5

Вариант 2

1. Бруски массами m и $2m$ связаны легкой нитью, перекинутой через блок, и находятся на наклонной и горизонтальной поверхностях призмы (рис.6). Угол наклона к горизонту одной из поверхностей призмы равен α ($\sin\alpha = 3/5$). Коэффициент трения скольжения бруска о горизонтальную поверхность равен $\mu = 1/6$, а о наклонную поверхность – 2μ. При перемещении призмы с некоторым минимальным горизонтальным ускорением a брусок массой $2m$ при натянутой нити начинает скользить по призме влево. Найдите отношение a/g, где g – ускорение свободного падения. Трением в оси блока пренебречь.

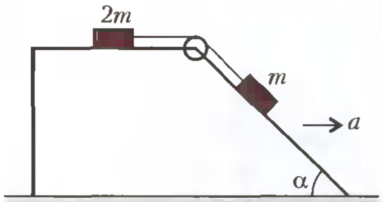


Рис. 6

2. Внутренняя энергия U некоторой массы неидеального газа зависит от температуры T и объема V по формуле $U = cT - a/V$, где c и a – известные константы. Такой газ из начального состояния с давлением p_1 и объемом V_1 сначала расширяется в изобарическом процессе, а затем в изохорическом процессе переводится в конечное состояние, в котором его объем в K раз ($K > 1$) больше начального. В результате всего процесса температура газа уменьшилась на ΔT ($\Delta T > 0$), а его внутрення энергия не изменилась. 1) Найдите ΔT. 2) Какое количество теплоты подвели к газу во всем процессе?

3. В цилиндрическое ведро с водой опустили обрезок доски так, что он стал плавать, а уровень воды в ведре изменился на $\Delta h = 1$ см. Затем на доску сверху положили пластину из льда. В результате доска погрузилась в воду полностью, а пластина льда – на $\alpha = 7/10$ своего объема. На сколько изменится объем воды в ведре, когда лед полностью растает? Плотность воды $\rho_в = 1$ г/см^3, льда $\rho_л = 0,9$ г/см^3, дерева $\rho = 0,6$ г/см^3. Площадь внутреннего сечения ведра $S = 300$ см^2.

4. В схеме, изображенной на рисунке 7, в начальный момент все пространство между обкладками верхнего плоского конденсатора полностью заполнено пластиной с диэлектрической проницаемостью ε. Емкость такого конденсатора C_1. Пластину начинают медленно с постоянной скоростью выдвигать из конденсатора. Через некоторое время через батарею с ЭДС $\mathcal{E}_1$ устанавливается постоянный ток, направленный против ЭДС этой батареи и равный I. Для этого установившегося режима определите: 1) напряжение на конденсаторе емкостью C_2; 2) скорость перемещения пластины. Размер обкладок конденсатора с начальной емкостью C_1 в направлении перемещения пластины равен L. Внутренними сопротивлениями батарей пренебречь. Величины $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, C_1 и R считать известными.

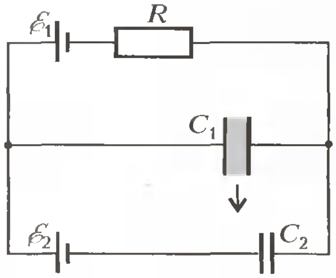


Рис. 7

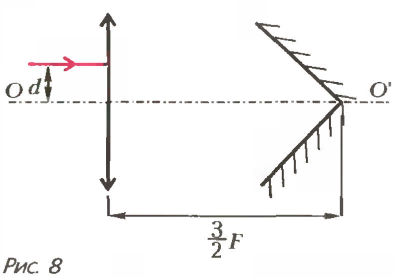


Рис. 8

5. Тонкий луч света падает на оптическую систему параллельно ее оптической оси OO' (рис.8). Оптическая система включает в себя собирающую линзу с фокусным расстоянием F и уголковый отражатель, состоящий из двух плоских взаимно перпендикулярных зеркал. Отражатель расположен симметрично относительно оптической оси. Луч, отраженный от двух зеркал уголка, выходит из линзы под малым углом β к оптической оси. Найдите этот угол, если падающий луч света проходит на небольшом расстоянии d ($d \ll F$) от оптической оси, а расстояние от линзы до уголкового отражателя $L = 3F/2$. *Указание*: для малых углов α считать $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$.

Публикацию подготовили Р.Константинов, В.Можаев, Ю.Чешев, М.Шабунин

Московский государственный институт электроники и математики (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты электроники, информатики и телекоммуникаций, автоматики и вычислительной техники)

1. Решите неравенство
$$\frac{2}{x-3} \geq \frac{3}{x+1}.$$

2. Решите уравнение
$$\log_3(x+4) + \log_3(x+2) = 1.$$

3. Найдите $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{8}{17}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

4. Решите неравенство
$$\sqrt{9x-2} > 2x-1.$$

5. Основание равнобедренного треугольника равно 16, а медиана, проведенная к боковой стороне, равна 15. Найдите площадь треугольника.

6. Найдите все решения уравнения
$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos 2x,$$
удовлетворяющие неравенству $\sin x > \frac{1}{4}$.

7. Найдите область определения и множество значений функции
$$y = \log_{16}\left(\frac{5-12x}{\sqrt{x^2+1}} - 5\right).$$

8. Точка O_1 – центр грани $A_1B_1C_1D_1$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$; точка M – середина ребра BB_1. Найдите, в каком отношении плоскость C_1D_1M делит объем четырехугольной пирамиды O_1ABCD.

9. Найдите все значения a, при которых система уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x^2-2ax+y^2+a^2} + \sqrt{x^2+y^2+2y+1} = \sqrt{a^2+1}, \\ x^2+y^2 = \dfrac{a^2}{4} \end{cases}$$
имеет единственное решение.

Вариант 2

(факультеты прикладной математики, экономико-математический)

1. Решите неравенство
$$\frac{\log_{\frac{1}{3}}(x+3)}{x+1} < 0.$$

2. Решите уравнение
$$\sqrt{2x-11} = x-7.$$

3. Решите уравнение
$$4^{x^2+x+2} - 4^{1-x^2-x} = 12.$$

4. Решите неравенство
$$\log_9(x-3) \leq \log_3(x-1) - 1.$$

5. Найдите площадь трапеции с боковыми сторонами 17 и 10 и основаниями 3 и 24.

6. Найдите площадь области, заданной на плоскости xOy системой неравенств
$$\begin{cases} \sqrt{-x^2-4x} \geq y-1, \\ y \geq 2x+1, \\ 2y \geq -x-2. \end{cases}$$

7. Решите уравнение
$$6\sqrt{3}\cos x - 4\sqrt{3}\sin x\cos x - 2\sin x = 13.$$

8. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 4; $SA = SC = \sqrt{13}$; $SB = \sqrt{21}$. Найдите расстояние между прямыми SC и AB.

9. Найдите все значения a, при которых множество решений неравенства
$$\log_a(x-2) > \log_a(10a-x) + 1$$
содержит только одно целое число.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Гармонические колебания. Амплитуда, частота и период колебаний. Математический маятник. Период колебаний математического маятника.

2. Определите силу тока через резистор сопротивлением $R = 2{,}5$ кОм, если разность потенциалов на резисторе $\Delta\varphi = 50$ В.

3. С какой максимальной скоростью вылетают электроны из цинка при облучении его ультрафиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 320$ нм? Работа выхода электрона из цинка $A = 3{,}74$ эВ. Заряд электрона $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, масса электрона $m = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, постоянная Планка $h = 6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с, скорость света $c = 3\cdot10^8$ м/с.

4. До какого потенциала можно зарядить уединенный металлический шарик радиусом $r = 5{,}0$ мм? Какой заряд он при этом будет нести? Напряженность поля, при которой наступает пробой воздуха, $E = 3{,}0$ МВ/м. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-11}$ Ф/м.

5. Жесткий стержень удерживается силой, приложенной к его концу, под углом

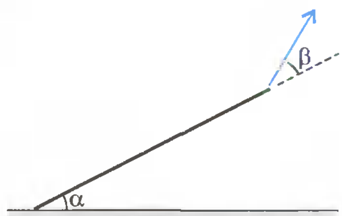


Рис. 1

$\alpha = 30°$ к горизонтальной плоскости (рис.1). Под каким углом β к стержню надо приложить силу, чтобы сдвинуть его, не меняя наклона? Коэффициент трения между стержнем и плоскостью $\mu = 0{,}10$.

Вариант 2

1. Постоянный электрический ток. Сила тока. Условия возникновения электрического тока. Электродвижущая сила.

2. Определите среднюю квадратичную скорость поступательного движения молекул кислорода, если при давлении $p = 1$ атм плотность кислорода равна $\rho = 1{,}2$ кг/м^3 .

3. Определите длину волны света в среде с абсолютным показателем преломления $n = 1{,}33$, если энергия фотонов $E = 1{,}5$ эВ. Постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с .

4. Конденсаторы емкостями $C_1 = 3{,}0$ мкФ , $C_2 = 6{,}0$ мкФ и $C_3 = 1{,}0$ мкФ включены в цепь с напряжением $U = 5{,}0$ кВ, как показано на рисунке 2. Определите энергию конденсатора емкостью C_1 .

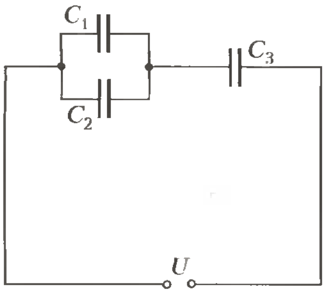


Рис. 2

5. Два шарика соединены жестким стержнем. Стержень поставили вертикально на горизонтальную плоскость и отпустили. Стержень начал падать без скольжения. Определите, под каким углом к горизонту был наклонен стержень, когда сила трения между нижним шариком и плоскостью оказалась равной нулю. Массой стержня и размерами шариков пренебречь.

Публикацию подготовили Ю.Колмаков, Ю.Сезонов

Московский педагогический государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Решите уравнение

$$2 - \cos^2 x = \frac{\sqrt{3 + \cos 4x} - \sqrt{1 - \cos 4x}}{\sqrt{3 + \cos 4x} + \sqrt{1 - \cos 4x}} .$$

2. Решите неравенство

$$\log_{x+2}\left(x^2 - 8x + 7\right) \geq \log_{\frac{x-5}{x-6}} 1 .$$

3. Мастер и ученик должны были изготовить по 20 деталей каждый. Мастер приступил к работе на 48 минут позже ученика, по $3/5$ задания они выполнили к одному времени, а для того чтобы закончить работу одновременно, мастер сделал за ученика 2 детали. Сколько деталей в час изготовлял мастер?

4. Найдите точки экстремума функции

$$f(x) = 5\frac{e^{4x-23}}{4x - 23} + \sqrt{5} .$$

5. В правильном тетраэдре $ABCD$ через высоты DL и BK граней BCD и ABC проведены параллельные плоскости. Найдите отношение объемов тетраэдров, отсекаемых этими плоскостями от тетраэдра $ABCD$.

Вариант 2

(математический факультет)

1. Решите уравнение

$$2 - \frac{\sqrt{5 + \sin^2 x} - \sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sqrt{5 + \sin^2 x} + \sqrt{1 - \sin^2 x}} = \cos 4x .$$

2. Решите неравенство

$$\log_{x+3}\left(x^2 - 6x + 8\right) - \log_{\frac{x-4}{x-6}} 1 < 0 .$$

3. В отборочных соревнованиях участвуют два велосипедиста, которым для выполнения норматива необходимо проехать 48 километров за определенное время. Из-за поломки второй велосипедист стартовал на 6 минут позже первого и догнал его на отметке $5/16$ дистанции. К контрольному времени второй велосипедист проехал на 3 километра больше, а первый – на три километра меньше норматива. Найдите скорость второго велосипедиста.

4. Найдите точки экстремума функции

$$f(x) = \sqrt{7} - 7\frac{e^{3x-11}}{3x - 11} .$$

5. В правильном тетраэдре $ABCS$ через медианы BK и AM граней ABC и ACS проведены параллельные плоскости, разбивающие его на три части. Как относятся друг к другу объемы получившихся частей?

Вариант 3

(физический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{x - 2}{\left|9 - x^2\right|} \geq 0 .$$

2. Решите неравенство

$$\frac{10}{\lg 100x} - \frac{8}{\lg 10x} \leq \frac{1}{5}\log_{0{,}25} 1 .$$

3. Решите уравнение

$$\frac{\operatorname{ctg} 4x}{\operatorname{tg} 4x} = \sin\frac{97\pi}{2} .$$

4. Найдите точки экстремума и промежутки монотонности функции

$$f(x) = -6x\sqrt{8 - 9x^2} .$$

5. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC, точка K – центр грани ABB_1A_1 , точка M – середина ребра CC_1 . Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точку M перпендикулярно прямой CK, если $AC = BC = 1$, $CC_1 = \sqrt{2}$.

Вариант 4

(химический факультет)

1. Основанием прямоугольного параллелепипеда является квадрат $ABCD$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через центр основания $ABCD$ перпендикулярно прямой B_1D , если $AB = 1$, $BB_1 = \sqrt{2}$.

2. Решите уравнение

$$\frac{(\cos x \cos 3x + \sin 3x \sin x)\sin 112°}{2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = 0 .$$

3. Решите неравенство

$$\lg^2 x + \log_2 64 > 5\lg x .$$

4. Решите неравенство
$$\sqrt{(x-1)^2} \le x+2 .$$

5. Найдите точки экстремума функции
$$f(x) = \frac{2x^2}{x+1} - \sqrt{5} .$$

Вариант 5

(факультет технологии и предпринимательства)

1. Решите уравнение
$$\cos^2 x \sin x + 4\cos^2 x - 0{,}75 \sin x = 3 .$$

2. Решите неравенство
$$\frac{3x - 8 - x^2}{\log_{\frac{1}{6}}(x-5) + 2} \le 0 .$$

3. Решите неравенство
$$|x-5| + 2 < |9-x| .$$

4. Найдите точки экстремума и промежутки монотонности функции
$$f(x) = -12x^5 - 45x^4 + 200x^3 + 40 .$$

5. Основанием пирамиды $SABC$ является прямоугольный треугольник ABC, а ее боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания. Найдите площадь сечения, проходящего через середину ребра AB перпендикулярно ребру SA, если $AC = BC = SC = 2\sqrt{2}$.

Задачи устного экзамена

(математический факультет)

1. Решите уравнение $\sqrt{3}\sin x = \sqrt{2\sin^2 x - \sin 2x + 3\cos^2 x}$.

2. Решите уравнение $\operatorname{ctg}^4 2x = \cos^2 4x + 1$.

3. Найдите значение выражения $\left(5 - 5^{2x}\right)^2 5^{-x} + \left(5 - 5^{-2x}\right)^2 5^x$, если известно, что $5^x + 5^{-x} = 5$.

4. Решите уравнение
$$\left(\frac{27}{8}\right)^x \left(\frac{4}{9}\right)^{x+1} = \frac{\lg 27}{\lg 9} .$$

5. Сравните с нулем разность $f\left(1 + \sqrt[6]{6}\right) - f\left(\sqrt[3]{7}\right)$, где $f(x) = -\frac{x^4}{5} + 4x - 1{,}7$.

6. Функция f определена и строго убывает на всей числовой оси. Найдите количество целых чисел x, для которых
$$f\left(\frac{\log_2^2(x-2)}{11x - x^2 - 28}\right) \le f(0) .$$

7. Найдите наименьшее значение параметра a, при котором неравенство $x^4 + 2x^3 + ax^2 < \log_{2004} 1$ не имеет решений.

8. Найдите все значения параметра a, при которых функция
$$f(x) = x^3 - ax^2 + 3ax + 1$$
возрастает на всей числовой оси.

9. Сколько корней имеет уравнение
$$(1 - 2\cos \pi x)\log_{0,2}\left(x - x^2\right) = 0 ?$$

10. Вычислите площадь фигуры, заданной неравенством
$$|1-x| + |3-y| - 2 \le 0 .$$

11. Решите неравенство
$$\log_{\sqrt{2}}\left((2x+4)^2 \sqrt{1-2x}\right) \le \log_{\sqrt{2}} (2x+4)^2 .$$

12. Напишите уравнение касательной к графику функции
$$f(x) = 9x + \sin 2x$$
в точке пересечения графика с осью абсцисс.

13. Постройте график функции
$$f(x) = \sqrt{(x + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x))^2} .$$

14. Точка M на стороне BC параллелограмма $ABCD$ делит сторону BC в отношении 5:2, считая от вершины B. Найдите отношение площадей треугольника BMP и параллелограмма $ABCD$, где P – точка пересечения AM и BD.

15. Осевое сечение конуса – треугольник, две стороны которого равны 12 и 26. Найдите длину линии касания боковой поверхности конуса и вписанного в него шара.

ФИЗИКА

Физический факультет

Письменный экзамен

Вариант 1

Часть 1. Выберите правильный ответ

1. Как называют изменение положения тела относительно других тел: 1) пройденный путь; 2) траектория; 3) механическое движение?

2. Какой путь пройдет тело за 5 с, если его ускорение 2 м/с^2 , а начальная скорость равна нулю: 1) 10 м; 2) 25 м; 3) 6,25 м?

3. Сила, под действием которой тело массой 500 г движется с ускорением 2 м с^2 , равна: 1) 1 Н; 2) 250 Н; 3) 1000 Н.

4. С каким ускорением a нужно поднимать гирю, чтобы ее вес увеличился в 2 раза: 1) $a = 2g$; 2) $a = g$; 3) $a = 0{,}5g$?

5. Какую работу совершает сила тяжести, действующая на дождевую каплю массой 20 мг при ее падении с высоты 2 км: 1) 40 Дж; 2) 4 Дж; 3) 0,4 Дж?

6. Как изменится давление идеального газа, если при неизменной концентрации средняя кинетическая энергия молекул увеличится в 3 раза: 1) увеличится в 9 раз; 2) увеличится в 3 раза; 3) уменьшится в 3 раза?

7. Газ изобарически нагрели от 27 °С до 87 °С. Найдите отношение конечного объема к начальному: 1) 3,2; 2) 1,2; 3) 0,8.

8. Какую работу совершает газ при изобарическом расширении от объема 2 л до объема 5 л под давлением $2 \cdot 10^5$ Па : 1) 600 Дж; 2) 600 кДж; 3) 600 МДж?

9. Какую работу совершает электрическое поле при перемещении заряда 5 нКл из точки с потенциалом 300 В в точку с потенциалом 100 В: 1) 25 пкДж; 2) 10 мДж; 3) 1 мкДж?

10. Как изменится напряжение между пластинами конденсатора, соединенного с источником тока, при увеличении емкости конденсатора в 2 раза: 1) уменьшится в 2 раза; 2) увеличится в 2 раза; 3) не изменится?

11. Ток в паяльнике равен 500 мА. Какой заряд пройдет через паяльник за 2 мин: 1) 60 Кл; 2) 240 Кл; 3) 1000 Кл?

12. На проводник длиной 10 см, расположенный перпендикулярно линиям индукции магнитного поля, действует сила 5 Н. Сила тока в проводнике 25 А. Найдите индукцию магнитного поля: 1) 2 Тл; 2) 50 Тл; 3) 1250 Тл.

13. Человек стоит на расстоянии 3 м от вертикально расположенного плоского зеркала. На сколько увеличится расстояние от человека до его изображения, если зеркало отодвинуть от человека на 1 м: 1) 3 м; 2) 2 м; 3) 1 м?

14. Как изменится частота электромагнитных колебаний колебательного контура, если индуктивность катушки уменьшить в 4 раза: 1) уменьшится в 4 раза; 2) уменьшится в 2 раза; 3) увеличится в 2 раза?

15. Период полураспада радиоактивного изотопа равен 4 ч. Какая часть атомов останется через 12 ч: 1) 1/8; 2) 1/3; 3) 1/2?

Часть 2. Решите задачи

16. Через какое время после вспышки человек услышит звук взрыва, произведенного на расстоянии $s = 483$ м, если ветер направлен в сторону взрыва? Скорость ветра $v_0 = 8$ м/с, скорость звука $v = 330$ м/с.

17. Тележка массой $m = 200$ кг движется по горизонтальному пути с ускорением $a = 1$ м/с^2 под действием горизонтальной силы $F = 400$ Н. Определите коэффициент трения.

18. Какое количество теплоты необходимо для нагревания $m = 0{,}1$ кг воды от температуры $T = 273$ К до кипения и ее последующего испарения? Температура кипения $T_к = 373$ К, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования $r = 2{,}1 \cdot 10^6$ Дж/кг.

19. Напряженность поля плоского конденсатора $E = 4 \cdot 10^4$ В/м. Расстояние между обкладками $d = 0{,}005$м, заряд $q = 0{,}03$ Кл. Определите емкость конденсатора. Ответ выразите в микрофарадах: 1 мкФ $= 10^{-6}$ Ф.

20. Предмет находится на расстоянии $d = 0{,}5$ м от оптического центра собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 0{,}3$ м. Определите увеличение линзы.

Вариант 2

Часть 1. Выберите правильный ответ

1. Укажите, что является телом отсчета, когда говорят, что поезд едет со скоростью 80 км/ч: 1) пассажир; 2) поезд; 3) платформа.

2. За какое время автомобиль, двигаясь с ускорением 0,5 м/с^2, увеличит свою скорость с 5 м/с до 15 м/с: 1) 20 с; 2) 10 с; 3) 5 с?

3. Мяч массой 0,5 кг после удара, длящегося 0,01 с, приобретает скорость 5 м/с. Средняя сила удара равна: 1) 250 Н; 2) 10 Н; 3) 0,025 Н.

4. Масса планеты равна двум массам Земли, а ее радиус в два раза больше земного. Найдите отношение ускорения свободного падения на поверхности планеты к ускорению свободного падения на поверхности Земли: 1) 4; 2) 1; 3) 0,5.

5. С какой скоростью равномерно катится тележка массой 5 кг, если ее импульс 25 кг·м/с: 1) 125 м/с; 2) 5 м/с; 3) 0,2 м/с?

6. Найдите массу 5 молей водорода (относительная молекулярная масса равна 2): 1) 10 г; 2) 2,5 г; 3) 0,4 г.

7. Газ изохорически нагрели от 47 °С до 207 °С. Найдите отношение конечного давления к начальному: 1) 4,4; 2) 1,5; 3) 2/3.

8. Какое количество теплоты нужно сообщить серебряной монете массой 5 г, чтобы нагреть ее на 10 °С, если удельная теплоемкость серебра 0,2 кДж/(кг·К): 1) 250 Дж; 2) 10 Дж; 3) 0,4 Дж?

9. Частица массой 2 мг с зарядом 20 нКл движется с ускорением 5 м/с^2 под действием внешнего электрического поля. Найдите величину напряженности этого поля: 1) 500 В/м; 2) 200 В/м; 3) 100 В/м.

10. Как изменится заряд конденсатора, соединенного с источником тока, при увеличении емкости конденсатора в 2 раза: 1) уменьшится в 2 раза; 2) увеличится в 2 раза; 3) не изменится?

11. Второй провод длиннее первого в 6 раз и имеет в 3 раза большую площадь сечения. Найдите отношение сопротивления второго провода к сопротивлению первого: 1) 18; 2) 2; 3) 0,5.

12. Заряд 0,002 Кл движется со скоростью 50 м/с перпендикулярно однородному магнитному полю с индукцией 40 Тл. Найдите силу, действующую на заряд: 1) 0,0016 Н; 2) 0,0025 Н; 3) 4 Н.

13. Как изменится длина волны зеленого излучения при переходе света из воздуха в воду: 1) уменьшится; 2) увеличится; 3) не изменится?

14. Найдите длину звуковой волны при частоте 200 Гц, если скорость распространения волны 340 м/с: 1) 68 км; 2) 1,7 м; 3) 0,59 м.

15. В ядерной реакции ${}^4_2He + {}^9_4Be = {}^{12}_6C + X$ неизвестный элемент X имеет зарядовое число, равное: 1) 2; 2) 1; 3) 0.

Часть 2. Решите задачи

16. Автомобиль, первоначально двигавшийся с постоянной скоростью, затем идет с ускорением $a = 0{,}8$ м/с^2 в течение промежутка времени $t = 10$ с. Если за эти 10 с автомобиль прошел путь $s = 130$ м, то какова была его скорость в момент возникновения ускорения?

17. Определите полный импульс системы двух материальных точек массой $m = 2$ кг каждая, движущихся по взаимно перпендикулярным направлениям со скоростями $v_1 = 3$ м/с и $v_2 = 4$ м/с соответственно.

18. Какое количество теплоты необходимо для нагревания $m = 0{,}7$ кг воды от температуры $T_1 = 300$ К до $T_2 = 320$ К в алюминиевой кастрюле массой $m_а = 0{,}15$ кг? Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·К), алюминия $c_а = 880$ Дж/(кг·К).

19. Две электрические лампы сопротивлениями $R_1 = 400$ Ом и $R_2 = 100$ Ом соединены параллельно. Через первую лампу проходит ток $I_1 = 0{,}25$ А. Определите ток через вторую лампу.

20. Сколько колебаний совершает математический маятник длиной $l = 1{,}6$ м за время $t = 48$ с? Считать $\pi = 3$.

Публикацию подготовили Е.Деза, С.Жданов, Б.Кукушкин, А.Чигирёв

Игра Ландау

(Продолжение. Начало см. в «Кванте» №4, с. 11)

На сегодняшний день найдено несколько общих способов решения задачи Ландау. Обсудим один из них.

Возьмем любой номер *ab-cd*, где *a*, *b*, *c*, *d* – некоторые десятичные цифры. Рассмотрим три случая.

1) Пусть среди заданных цифр нет нулей. Покажем, что

$$\sin((ab)!)^\circ = \sin((cd)!)^\circ = 0,$$

где *ab* и *cd* представляют позиционную запись двузначных

(Продолжение см. на с. 55)

Юбилейный набор в ОЛ ВЗМШ

Открытый лицей «Всероссийская заочная многопредметная школа» (ОЛ ВЗМШ) Российской академии образования, работающий при Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова, в сороковой раз проводит набор учащихся.

ОЛ ВЗМШ – государственное учреждение дополнительного образования, причем не только для школьников. «ОТКРЫТЫЙ» – значит доступный для всех желающих пополнить свои знания в одной или нескольких из следующих областей науки: математика, биология, филология, физика, экономика, химия, правоведение, история (перечисление – в хронологическом порядке открытия отделений).

Сейчас ОЛ ВЗМШ совместно с другими научно-педагогическими учреждениями ведет исследовательские работы по разработке новых интерактивных технологий в образовании и переводу части своих учебно-методических комплексов на язык современных телекоммуникаций, в частности – по организации Интернет-отделения ОЛ ВЗМШ.

За время существования ВЗМШ удостоверения о ее окончании получили несколько сотен тысяч школьников и тысячи кружков – групп «Коллективный ученик ВЗМШ».

Обучение в школе ЗАОЧНОЕ, т.е. начиная с сентября-октября 2005 года все поступившие будут систематически (примерно раз в месяц) получать специально разработанные для заочного обучения материалы, содержащие изложение теоретических вопросов, методов рассуждений, разнообразные задачи для самостоятельной работы, образцы решений задач, деловые игры, контрольные и практические задания.

Контрольные работы учащихся будут тщательно проверяться и рецензироваться преподавателями ВЗМШ – студентами, аспирантами, преподавателями и научными сотрудниками МГУ, а также других вузов и учреждений, где имеются филиалы школы. Многие из преподавателей в свое время сами закончили ВЗМШ и поэтому особенно хорошо понимают, как важно указать, помимо конкретных недочетов, пути ликвидации имеющихся пробелов в знаниях, порекомендовать дополнительную литературу, поругать за невнимательность и похвалить за заметный (а иногда – и за самый маленький) прогресс и трудолюбие.

Поступившие в ОЛ ВЗМШ смогут узнать об увлекательных вещах, часто остающихся за страницами школьного учебника, познакомиться с интересными нестандартными задачами и попробовать свои силы в их решении. Для многих станет откровением, что задачи бывают не только в математике, физике и химии, но и в биологии, и в филологии, и в экономике, и в других науках. Решение задач поможет прояснить, сделать интересными многие разделы, казавшиеся непонятными и скучными.

Одна из особенностей учебных программ и пособий ВЗМШ – в том, что они созданы действующими на переднем крае науки талантливыми учеными и опытными незаурядными педагогами (часто эти два качества совмещаются в одном и том же человеке). Недаром на X Всемирном конгрессе по математическому образованию (который проходил летом этого года в столице Дании Копенгагене) рассказ о 40-летней работе математического отделения ОЛ ВЗМШ вызвал неподдельный интерес и одобрение участников.

Чтобы успешно заниматься в заочной школе, вам придется научиться самостоятельно и продуктивно работать с книгой, грамотно, четко, коротко и ясно излагать свои мысли на бумаге и других носителях информации, а это, как известно, умеют далеко не все. Возможно, наша заочная школа поможет вам выбрать профессию, найти свое место в окружающем мире.

Все выполнившие программу ОЛ ВЗМШ получают соответствующие дипломы. Хотя формальных преимуществ они не дают, приемные комиссии многих вузов учитывают, что обладатели этих удостоверений в течение продолжительного времени самоотверженно трудились над приобретением знаний, научились самостоятельно творчески работать, а это значит, что из них получатся хорошие студенты и, в дальнейшем, грамотные, вдумчивые, широко образованные специалисты.

Если у вас имеется такая возможность, вы будете частично общаться с нашей школой с помощью Интернета – чем дальше, тем больше.

Для поступления в ОЛ ВЗМШ надо успешно выполнить вступительную контрольную работу. Приемную комиссию интересует, в первую очередь, ваше умение рассуждать, попытки (пусть поначалу не совсем удачные) самостоятельно мыслить и делать выводы. Преимуществом при поступлении пользуются проживающие в сельской местности, поселках и небольших городах, где нет крупных научных центров и учебных заведений и где получить дополнительное образование можно лишь заочно.

Решения задач вступительной работы надо написать на русском языке в обычной ученической тетради в клетку (на отделения экономики и права – на открытке). Желающие поступить сразу на несколько отделений каждую работу присылают в *отдельной тетради*. На обложке тетради укажите: *фамилию, имя, отчество, год рождения, базовое образ*ование (сколько классов средней школы будет закончено *к сентябрю 2005 года*), *полный почтовый адрес* (с индексом), *откуда узнали об ОЛ ВЗМШ* (из «Кванта», от друзей, из афиш заочной школы и т.п.), *на какое отделение хотите поступить.*

Вступительные работы обратно не высылаются.

Без вступительной работы, только по заявлению, принимаются на индивидуальное обучение победители областных (краевых, республиканских) туров всероссийских олимпиад по соответствующим предметам, а также участники финальных туров этих олимпиад (не обязательно участие в самых последних олимпиадах).

Учащиеся ОЛ ВЗМШ частично возмещают расходы на свое обучение. Плата невелика, на каждом отделении своя. По просьбе тех, кто не в состоянии внести эту плату, ОЛ ВЗМШ готов обратиться по любому адресу – в школу, в орган народного образования, к другому спонсору – с ходатайством об оплате этим благотворителем соответствующих расходов.

Помимо индивидуального обучения, на всех отделениях ВЗМШ, кроме экономического и биологического, имеется еще одна форма – «Коллективный ученик». Это группа учащихся, работающая под руководством преподавателя (школьного учителя, преподавателя вуза, студента или другого энтузиаста), как правило, по тем же пособиям и программам, что и индивидуально. *Прием в эти группы проводится до 15 октября 2005 года.* Для зачисления группы требуется заявление ее руководителя (с описанием его профессии и должности, со списком учащихся и четким указанием, в каком классе они будут учиться с сентября 2005 года); заявление должно быть подписано руководителем группы, заверено и подписано руководителем учреждения, при котором будет работать группа. Работа групп «Коллективный ученик» может оплачиваться школами как факультативные занятия.

На Северо-Западе России работает Заочная школа Ленинградского областного Министерства образования, созданная при Санкт-Петербургском университете, где имеются отделения математики, биологии и химии.

Проживающие на Северо-Западе России (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми республиках), желающие поступить на отделение математики, высылают вступительные работы по адресу: 198097 Санкт-Петербург, ул. Трефолева, д. 32, Северо-Западная ЗМШ (на прием).

Проживающие в остальных регионах России, дальнем и ближнем зарубежье высылают свои работы в адрес ОЛ ВЗМШ или (по математике) соответствующего филиала.

Адрес ОЛ ВЗМШ: 119234 Москва, Воробьевы горы, МГУ, ОЛ ВЗМШ, на прием (с указанием отделения). Телефон: (095) 939-39-30.

Филиалы математического отделения ОЛ ВЗМШ имеются:

• при университетах – в городах Воронеж, Донецк (Украина), Екатеринбург, Иваново, Майкоп, Ульяновск, Челябинск;

• при педагогических институтах – в городе Кирове;

• при Брянском центре технического творчества молодежи.

Ниже вы найдете краткие сведения о каждом отделении ОЛ ВЗМШ и условия вступительных контрольных заданий.

Отделение математики

Из этого отделения, открывшегося в 1964 году, выросла вся заочная школа (вначале она так и называлась – математическая).

За время обучения вы более глубоко, чем в обычной школе, сможете осознать основные идеи, на которых базируется курс элементарной математики, познакомиться (по желанию) с некоторыми дополнительными, не входящими сейчас в школьную программу разделами, а также поучиться решать олимпиадные задачи. На последнем курсе большое внимание уделяется подготовке к сдаче школьных выпускных экзаменов и вступительных экзаменов в вузы.

На отделении созданы учебно-методические комплексы, приспособленные для заочного обучения. Часть из них издана массовым тиражом. Осуществляется перевод уже апробированных и вновь создаваемых материалов на электронный язык в интерактивном режиме, отделение готовится к работе в Интернете. Практически каждый год издаются и «проходят обкатку» новые пособия, расширяющие и дополняющие программу обучения.

Окончившие отделение математики получат, в зависимости от желания и способностей, либо подготовку, необходимую для выбора математики как профессии, либо математическую базу для успешного усвоения вузовского курса математики, лежащего в основе профессиональной подготовки по другим специальностям: ведь сейчас математика служит мощным инструментом исследований во многих отраслях человеческой деятельности. Поступившие в этом году на первый курс наверняка застанут новые пособия, которые смогут выбирать ученики, собирающиеся освоить в будущем разные специальности (будущие физики и биологи, химики и историки и т.д.).

Обучение длится 5 лет. Можно поступить на любой курс. Для этого к сентябрю 2005 года надо иметь следующую базу: на 1-й курс – 6 классов средней школы, на 2-й курс – 7 классов, на 3-й – 8, на 4-й – 9, на 5-й – 10 классов. При этом поступившим на 2-й, 3-й и 4-й курсы будет предложена часть заданий за предыдущие курсы. Обучение поступивших на 5-й курс проводится по специальной интенсивной программе с упором на подготовку в вуз.

Для поступления надо решить хотя бы часть задач помещенной ниже вступительной работы (около номера каждой задачи в скобках указано, учащимся каких классов она предназначена; впрочем, можно, конечно, решать и задачи для более старших классов). На обложке тетради напишите, на какой курс вы хотите поступить.

Срок отправки работы – до 15 апреля 2005 года.

Группы «Коллективный ученик» (на все курсы по любой программе) принимаются без вступительной работы.

Задачи

(звездочкой отмечены более трудные, с точки зрения составителей работы, задачи)

1(6–10). Стенные часы спешат на 2 минуты в час, а будильник отстает на 1 минуту в час. Вчера Петя поставил правильно и стенные часы, и будильник. Когда он проснулся, стенные часы показывали 7 ч 30 мин, а будильник – 7 ч. Сколько времени было на самом деле, когда Петя проснулся?

2(6–10). Сколько клеток пересекает диагональ клетчатого прямоугольника размером 199×991 (каждая сторона клетки равна 1)?

3(6–10). На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 2004, 2005. За один ход надо стереть с доски два любых числа и вместо них написать модуль (абсолютную величину) разности стертых чисел. В конце концов на доске останется одно число. Может ли оно равняться нулю?

4(6–10). Среди 2005 монет имеется 1002 фальшивые, масса каждой из которых отличается на 1 г от массы каждой настоящей. В нашем распоряжении имеются двухчашечные весы со стрелкой, показывающей разность веса грузов на чашках. Можно ли, взяв произвольную из имеющихся монет, за одно взвешивание на весах определить, фальшивая она или нет?

5(6–10). Сколькими способами можно поставить на обычной шахматной доске (размером 8×8 клеток) белого и черного королей, чтобы они не били друг друга? (По шахматным правилам король бьет все клетки, имеющие с той, в которой он стоит, общую сторону или вершину.)

6(6–10). Пусть a и b – натуральные (т.е. целые положительные) числа, причем известно, что $74a = 85b$. Верно ли, что их сумма, $a + b$, есть составное число (т.е. делится на натуральное число, отличное от 1 и самого числа $a + b$)?

7(6–10). Известно, что 10 школьников решили на олимпиаде 41 задачу, причем среди них есть хотя бы один, решивший ровно 1 задачу, хотя бы по одному, решившему ровно 2, ровно 3 и ровно 4 задачи. Верно ли, что среди них есть хотя бы один, решивший не менее 6 задач?

8(7–10). Из вершины C треугольника ABC на биссектрисы (или их продолжения) углов A и B опущены перпендикуляры CP и CQ соответственно. Найдите PQ если $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.

9*(10). Найдите наибольшее и наименьшее значения дроби $\dfrac{4xy - 5x^2}{x^2 + y^2}$.

10*(9,10). Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-8)^2 + (y-5)^2} = 5, \\ 3xy - 10x = 3. \end{cases}$$

11*(8–10). Решите уравнение $\sqrt{5 - x} = x^2 - 5$.

12(9,10). Точки K и M – соответственно середины диагонали BD и стороны EF правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной a. Найдите площадь треугольника AKM.

13*(9,10). Внутри отрезка AB взяли точку P, вне этого отрезка на прямой AB – точку Q так, что $AP : PB = AQ : BQ$. На отрезке BQ как на диаметре построили окружность и на ней взяли произвольную точку M. Докажите, что $MA : MB = AP : PB = AQ : BQ$.

14*(7–10). Являются ли числа: а) $2^{10} + 5^{12}$; б) 16016003 простыми?

15(8–10). Может ли десятичная запись числа 2^n при каком-нибудь n заканчиваться: а) двумя; б)* тремя; в) четырьмя одинаковыми цифрами?

Отделение биологии

Набор объявляется в 32-й раз. Зачисление проводится на конкурсной основе по результатам вступительной работы. В конкурсе могут принять участие школьники, которые в этом учебном году занимаются в 8 или 9 классе, независимо от места проживания. Обучение в первом случае длится 3 года, во втором – 2 года.

Во вступительном задании использованы материалы Биологической олимпиады школьников МГУ.

Учащимся восьмых классов необходимо решить задачи 1–5, учащимся девятых – задачи 3–7.

В ответах можно использовать и факты, найденные в литературе, и собственные идеи. Просим для сведений, почерпнутых из книг, приводить ссылки на источники. Вместе с работой пришлите конверт с маркой и заполненным адресом (для отправки вам решения Приемной комиссии).

Срок отправки работы – до 30 апреля 2005 года.

Задачи

1. Перед вами список организмов – персонажей сказки о Винни-Пухе: Пчела, Чертополох, Медведь, Тигр, Кенгуру, Осел, Дуб, Сова, Свинья, Кролик, Человек. Предложите как можно больше признаков, по которым их можно разделить на две группы. Для каждого критерия укажите, какие организмы в какую группу попадут.

2. Князь Буркачев решил вырастить в своем поместье уникальные заморские растения, но ему не хочется, чтобы эти растения расселились по землям соседей. Как ему выбрать растения, чтобы уменьшить вероятность их расселения?

3. Вам поручено выбрать организм, который можно было бы использовать для биотестирования водоемов, оценивая общую токсичность среды обитания. Какими критериями вы станете руководствоваться, выбирая этот организм?

4. В сельском хозяйстве применяется множество пестицидов – химических средств защиты растений от вредителей или конкурентов-сорняков. Некоторые из пестицидов достаточно использовать один раз в год, тогда как для других рекомендуется повторять обработку несколько раз. Как вы думаете, с чем может быть связано это отличие? Постарайтесь предложить несколько возможных объяснений.

5. Приведите как можно больше разных примеров конвергенции – независимого возникновения в ходе эволюции одних и тех же признаков у представителей разных систематических групп. (Обычно авторы учебников, рассматривая явление конвергенции, приводят один и тот же небольшой набор примеров. Поэтому не увлекайтесь подробным переписыванием текстов из учебников. Постарайтесь проанализировать все, что вы знаете о различных растениях и животных, и составить как можно более подробный перечень примеров, не расписывая их детально.)

6. Какую опасность для человека представляет: а) стабильно повышенное кровяное давление; б) стабильно пониженное кровяное давление?

7. Чтобы пища в пищеварительном тракте человека переваривалась эффективно, необходимо регулировать скорость перемещения пищевого комка, а также интенсивность выделения различных пищеварительных ферментов. Как вы полагаете, какие параметры (свойства) содержимого пищеварительного тракта контролируются на разных его участках? Какие процессы в пищеварительной системе ускоряются или замедляются в зависимости от величин этих параметров? Обоснуйте целесообразность описанной вами регуляции.

Отделение физики

Отделение работает 13 лет. Обучение одно и двухгодичное. На двухгодичный поток принимаются оканчивающие в 2005 году 9 классов средней школы, на одногодичный – 10 классов. Для поступления на двухгодичный поток нужно решить задачи 1–5 приведенной ниже вступительной работы, на одногодичный поток – задачи 4–8. На базе 10 классов можно пройти программу двухгодичного потока за один год, тогда нужно написать «10+11» на обложке тетради и постараться решить все предлагаемые ниже задачи.

Срок отправки работы – до 15 мая 2005 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются в 10 и 11 классы без вступительной работы, только по заявлению руководителя.

Задачи

1. На плоскости расположен квадрат $ABCD$. Два жука ползают с одинаковой скоростью: один по треугольнику ABC, а другой – по треугольнику ADC. Постройте траекторию первого жука в системе отсчета, связанной со вторым жуком. В начальный момент оба жука находятся в точке A.

2. На гладком горизонтальном столе лежит брусок массой $M = 2$ кг, на бруске покоится тело массой $m = 1$ кг. К бруску прикладывают горизонтально направленную силу $F = 3$ Н. Найдите путь, пройденный телом относительно бруска за $t = 1$ с после начала действия силы. Коэффициент трения скольжения между бруском и телом $\mu = 0{,}2$.

3. Маленькое тело массой $m = 50$ г подвешено на идеальной нити длиной $L = 30$ см, причем точка подвеса нити расположена на высоте $h = 1$ м от пола. Тело отводят в сторону так, что нить становится горизонтальной, и отпускают. В тот момент, когда нить составляет угол $\alpha = 30°$ с вертикалью, происходит обрыв нити. Найдите, какую максимальную силу натяжения выдерживала нить и на каком расстоянии от точки, находящейся на полу под точкой подвеса, упадет тело.

4. Два вольтметра и резистор соединены треугольником (рис.1). Если подключить батарейку параллельно резистору, то вольтметры покажут $U_1 = 3{,}6$ В и $U_2 = 2{,}4$ В. Если эту же батарейку подключить параллельно первому вольтметру, то показание второго вольтметра будет $U_2^* = 4$ В. Что покажет первый вольтметр, если эту батарейку подключить параллельно второму вольтметру? Внутренним сопротивлением батарейки пренебречь.

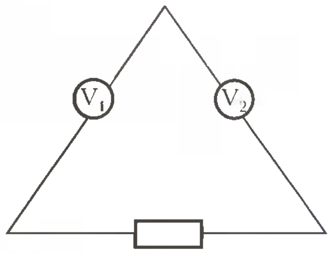


Рис. 1

5. Солнечные лучи падают перпендикулярно на линзу круглой формы радиусом $R = 4$ см. Линза составлена из двух половинок тонких собирающих линз с оптическими силами

$D_1 = 5$ дптр и $D_2 = 5/3$ дптр. Верхняя половинка принадлежит линзе с большей оптической силой, а нижняя – с меньшей. Какое изображение получится на экране, установленном параллельно линзе на расстоянии: а) $s_1 = 40$ см; б) $s_2 = 60$ см от нее?

6. К гладкой ступеньке высотой $h = 10$ см прислоняют палочку, опирающуюся нижним концом на горизонтальную шероховатую поверхность (рис. 2,*а*)). Известно, что палочка начинает скользить при угле наклона $\alpha > 60°$. Если отломить часть этой палочки и прислонить ее к ступеньке, как показано на рисунке 2,*б*), то она также соскальзывает при угле наклона $\beta > 60°$. Найдите длину целой палочки.

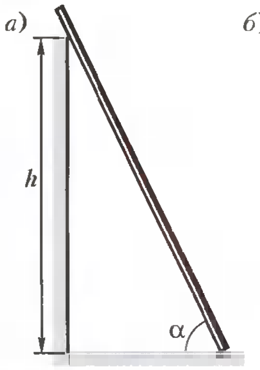


Рис. 2

7. В сосуд объемом $V = 10$ л, в котором находится сухой воздух при атмосферном давлении, добавляют $m = 0{,}5$ г воды и закрывают его. Сосуд медленно нагревают, сообщая постоянное количество теплоты в единицу времени. Найдите количество теплоты, необходимое для нагревания содержимого сосуда: а) от температуры $t_1 = 30$ °С до $t_2 = 35$ °С; б) от $t_3 = 40$ °С до $t_4 = 45$ °С. Удельную теплоемкость воды $c_в$, водяного пара $c_п$ и сухого воздуха $c_{возд}$ примите равной 4,1, 1,4 и 0,72 кДж/(кг · К) соответственно. Удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}4$ кДж/кг. Потерями тепла через стенки сосуда пренебречь.

8. Магнитное поле занимает область, ограниченную полуплоскостями α и β, которые пересекаются под прямым углом (рис.3). Полуплоскости и индукция поля $\vec{B}$ перпендикулярны плоскости рисунка. Электрон влетает в поле в точке A со скоростью $\vec{v}$ и при последующем движении пролетает через точку C, причем известно, что $AO = OC$. Найдите путь, пройденный электроном в области, занятой магнитным полем. Масса электрона m_e, заряд e; скорость $\vec{v}$ лежит в плоскости рисунка.

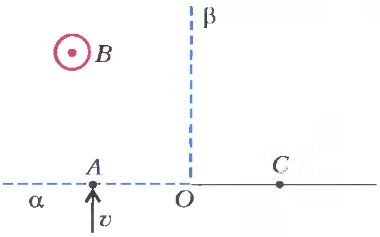


Рис. 3

Отделение химии

На отделение принимаются учащиеся, имеющие базовое образование в объеме 8, 9 и 10 классов средней школы.

Полная программа обучения на отделении – три года.

Программа включает следующие одногодичные курсы:
– общая химия (с элементами неорганической химии);
– неорганическая химия;
– органическая химия;
– химия окружающей среды (полгода).

Если вы хотите научится решать задачи, вам будет полезен курс «Методы решений задач». Его можно совмещать с другими курсами.

Более подробные сведения о программе и порядке обучения высылаются вместе с извещением о решении Приемной комиссии.

Задачи вступительной работы, помещенные ниже, – общие для всех поступающих, независимо от базового образования.

Срок отправки работы – до 15 июня 2005 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы, по заявлению руководителя.

Задачи

1. Газообразное соединение азота и водорода содержит 12,5% водорода по массе, а плотность его паров по водороду равна 16. Найдите простейшую и молекулярную формулы этого соединения. Какова валентность и степень окисления азота в этом соединении?

2. Кислород (полученный разложением перманганата калия) при нормальном давлении и температуре 28 °С занимает объем 370 мл. Достаточно ли этого количества кислорода для окисления 3 г серы? Сколько г перманганата калия необходимо разложить для получения этого количества кислорода?

3. Напишите уравнения трех различных реакций, в которых сульфат хрома (III) — исходное вещество, и уравнения трех реакций, в которых сульфат хрома (III) — продукт. Среди приведенных реакций должны быть две окислительно-восстановительные.

4. Какую среду может иметь раствор кислой соли? Обоснуйте свой ответ. Как изменится среда раствора этой соли при прибавлении к нему раствора: а) кислоты; б) основания? Покажите на выбранном примере.

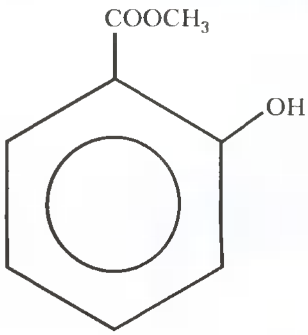


Рис. 4

5. Рассчитайте массовые доли веществ в растворе, полученном при сливании 60 мл 15%-го раствора Na_2CO_3 ($\rho = 1{,}16$ г/мл) и 50 мл 3М раствора уксусной кислоты ($\rho = 1{,}038$ г/мл).

6. Гаультерово масло (рис.4) — метиловый эфир салициловой кислоты — широко используется в парфюмерной промышленности. Какие продукты получатся при реакции этого вещества: а) с бромом; б) с водным раствором серной кислоты; в) с водным раствором NaOH? Укажите условия.

Отделение филологии

Отделение существует с 1989 года. За это время подготовлено и издано большое количество уникальных учебных пособий по русскому языку, общему языкознанию, истории и теории литературы.

Принимаются все желающие, имеющие базовую подготовку в объеме 8 классов.

Отделение предлагает на выбор 14 учебных программ.

Вы хотите исправить грамотность? Познакомиться с любопытными проблемами теории и практики русского языка? Освоить приемы лингвистического или литературоведческого анализа? Научиться говорить по-английски и понимать английскую речь? Узнать кое-что о журналистике и оценить свои творческие способности? Приобрести навыки, необходимые для успешной сдачи экзаменов в вуз? Тогда пришлите нам вступительную работу – ответы на вопросы помещенного ниже теста.

Внимание! Отвечайте на вопросы теста на двойном тетрадном листе, указав на первой странице важные для нас данные: Ф.И.О., какой класс заканчиваете, полный (с индексом!) почтовый адрес, телефон (если есть). Затем *полностью перепишите условия теста* и *выполните задания 1 – 5* (впишите, подчеркните нужное, проставьте цифры).

Тест

1. Впишите нужное

К 1 сентября 2005 года я закончу ______ класс.

Моя средняя оценка:

по русскому языку _______;

по литературе _______.

2. Подчеркните нужное

Моя грамотность:

а) абсолютная;

б) вполне приличная;

в) так себе;

г) низкая.

3. Расставьте цифры от 1 до 6 в соответствии с тем, насколько для вас важны следующие задачи (1 – самое важное; 6 – наименее важное):

____узнать как можно больше об устройстве русского языка;

____узнать как можно больше о русской литературе;

____научиться хорошо и логично выражать свои мысли в сочинении;

____писать грамотнее;

____узнать больше об устройстве языков мира;

____узнать больше о том, что за наука – литературоведение.

4. Подчеркните нужное

Надеюсь, что учеба на филологическом отделении ОЛ ВЗМШ даст мне возможность:

а) удовлетворить свое природное любопытство;

б) заняться в свободное время тем, что мне интересно;

в) исправить школьные оценки по русскому языку и литературе;

г) приобрести знания и навыки, необходимые для успешной сдачи экзаменов в вуз.

5. Подчеркните нужное

Скорее всего, я буду поступать в вуз:

а) на филологическую специальность, где пишут сочинение и сдают русский устно;

б) на гуманитарную специальность, где пишут сочинение;

в) в негуманитарный вуз и писать сочинение;

г) в негуманитарный вуз и писать диктант;

д) мне важно школу закончить!

Срок отправки вступительной работы – до 1 июня 2005 года.

Вместе с анкетой и заявлением пришлите, пожалуйста, стандартный конверт с маркой и заполненным вашим адресом (с индексом) для ответа Приемной комиссии.

Группам «Коллективный ученик» предлагаются курсы по русскому языку и литературе.

Отделение экономики

Экономическое отделение ОЛ ВЗМШ существует уже 11 лет. Его сотрудниками являются студенты, аспиранты и преподаватели экономического, географического и других факультетов МГУ. Большинство из них в свое время сами приехали учиться в Москву из других городов.

Обучение проводится по двум основным программам: *«Прикладная экономика»* и *«Экономика и география»*. Программа «Прикладная экономика» включает в себя изучение основ экономической теории, а также знакомство с практикой ведения бизнеса в увлекательной деловой игре по переписке. Учащиеся программы «Экономика и география», наряду с изучением основ экономической теории, знакомятся с особенностями экономико-географического положения и природы стран современного мира, заочно участвуют в увлекательных путешествиях по странам и регионам мира. Окончившим основную программу предлагается специализация по выбору: «Бухгалтерский учет и финансовый анализ», «Мировая экономика», «Основы предпринимательства и менеджмента», «Экономика России: прошлое, настоящее и будущее».

Учащимся 10–11 классов, желающим одновременно подготовиться к поступлению на экономический факультет МГУ и в другие вузы экономического профиля, предлагается специальная программа «*Экономика ПЛЮС*», которая, помимо изучения базового курса «Прикладная экономика», включает в себя подготовку по предметам программы вступительных экзаменов (математика, русский язык и литература, обществознание). Для школьников, интересующихся географией и собирающихся поступать на географический факультет МГУ или другого вуза, существует программа «*География ПЛЮС*», составленная на основе опыта подготовительных курсов по географии Московского университета.

Принимаются все желающие, имеющие образование не ниже 7 классов. Обучение ведется либо индивидуально, либо в небольших группах (2–4 человек). Формы обучения «Коллективный ученик» на экономическом отделении нет.

Для поступления необходимо выполнить вступительную работу в форме теста, который включает вопросы по экономике, математике, истории, литературе. Верно ответившие на вопросы теста получат осмысленную фразу, связанную со знаменательным событием в жизни России – юбилеем Московского университета.

Решения присылайте *только на открытках*, с указанием полного почтового адреса и индекса, фамилии, имени и отчества (все – *печатными* буквами); обязательно укажите источник информации об ОЛ ВЗМШ и напишите «Экономика, вступительный тест 2005 г.». На открытке достаточно записать в строчку номера вопросов и под каждым написать букву или цифру, соответствующую ответу, который вы считаете правильным.

Срок отправки работы – до 15 мая 2005 года.

Тест

1. Термин «экономика» изначально трактовался как:

Ю) умение выгодно продать товар;

Л) крупное полисное хозяйство;

М) законы управления домашним хозяйством;

У) государственная казна;

2) торговые отношения.

2. С каким известным экономистом Михаил Ломоносов теоретически мог пить чай и приятельски болтать:

Н) Антуаном де Монкретьеном;

Г) Адамом Смитом;

О) Полом Самуэльсоном;

Б) Джоном Кейнсом;

Ж) Биллом Гейтсом?

3. Начиная с 2001 года, число учащихся одной из программ экономического отделения ежегодно увеличивалось на один и тот же процент по отношению к предыдущему году. В 2002 году эту программу изучали 1200 школьников, в 2003 году – 1500 школьников, а в 2004 году – уже 1875 человек. Сколько учащихся обучалось на ней в 2001 году:

М) 840;
И) 900;
У) 960;
Е) 1000;
5) 980?

4. Какой русский поэт считал, что «М. Ломоносов сам был нашим первым университетом»:
2) Александр Пушкин;
О) Михаил Лермонтов;
В) Кондратий Рылеев;
Л) Петр Чаадаев;
З) Гаврила Державин?

5. Какой русский экономист был удостоен в XX веке Нобелевской премии по экономике:
Н) Егор Гайдар;
5) Василий Леонтьев;
Е) Николай Кондратьев;
0) Михаил Горбачев;
Г) Анатолий Чубайс?

6. В какой из стран в 1990-е годы сформировалась наиболее многочисленная русскоязычная диаспора в результате иммиграции из стран бывшего СССР:
0) Германия;
Й) Израиль;
О) Монако;
5) США;
Р) Франция?

7. По мнению Михаила Ломоносова, «математику уже затем учить следует...»:
С) «поскольку в люди выбиться помогает»;
Л) «что она ум в порядок приводит»;
2) «поскольку экономику зело удачно дополняет»;
З) «что она не дозволяет лениться»;
М) «поскольку в каждой науке столько истины, сколько в ней математики».

8. В какой из валют предпочтет перевезти деньги через границу подпольный миллионер Корейко, желая минимизировать занимаемый ими объем:
О) доллары США;
5) российские рубли;
0) швейцарские франки;
Г) монгольские тугрики;
Е) евро?

9. Московский университет им. М.В.Ломоносова был основан по указу:
Т) императрицы Елизаветы Петровны;
В) императора Петра I;
0) императрицы Екатерины Второй;
У) императора Петра III;
5) императрицы Екатерины Первой.

Отделение «Нравственность, право, закон»

Это – девятый набор на отделение.

Школьникам 8 – 11 классов и группам «Коллективный ученик» предлагается годичный курс (первый год обучения) «Беседы о правах человека, нравственности, праве, законе и государстве». В курсе даются современные представления об основных понятиях, связанных с правом, законом и государством, рассказывается об основах российского законодательства, правах человека. Разбираются примеры судебных процессов, приводятся общекультурные примеры, связанные с направленностью курса.

Желающие поступить должны сообщить свой полный почтовый адрес, фамилию, имя и отчество, сколько классов закончено. В письмо обязательно *вложите обычный конверт с маркой и вашим адресом* (чтобы мы могли вам ответить) и ответы на приведенные ниже вопросы теста.

Срок отправки работы – до 1 июня 2005 года.

Тест

Вот шесть вопросов к вам. Каждый вопрос имеет набор стандартных ответов, из которых вы выбираете нужный. В отличие от обычных тестов, вы можете выбрать один или два ответа, либо привести собственное решение проблемы.

1. Как вы знаете, во всех демократических странах существуют политические партии. Зачем и кому это нужно:
а) так лидерам партий легче прийти к власти;
б) партии объединяют людей с более или менее похожими взглядами и отстаивают их интересы;
в) при помощи партийной системы финансовым и промышленным группам легче протаскивать выгодные для них законы;
г) для обмана избирателей;
д) другое (что именно, коротко)?

2. Вы, вероятно, помните, что «народовольцы» устроили целую серию покушений на Александра II, известного своими либеральными реформами (в частности, отменой крепостного права). Почему:
а) они были истинными революционерами и считали перемены недостаточными;
б) «Народная воля» была реакционной террористической организацией и не хотела перемен;
в) «народовольцы» не хотели, чтобы Россия шла по пути либеральных реформ, ибо в этом случае они не смогли бы реализовать свои честолюбивые амбиции;
г) другое (что именно)?

3. Были ли трудные периоды в истории США:
а) США всегда была благополучной страной;
б) может быть, очень давно, во времена борьбы за независимость или войны Севера и Юга;
в) серьезных проблем не было, только временные неприятности, даже во время Второй мировой войны;
г) другое (что именно)?

4. Говорят, что демократия – власть народа. Но чтобы осуществить эту власть, народ должен разбираться в политических вопросах (как говорят, «быть компетентным»). Что под этим понимают:
а) умение разбираться в людях, хотя бы чувствовать, врут они или говорят правду;
б) умение разбираться в системе выборов, чтобы не дать манипулировать собой;
в) понимание основных задач правительства;
г) знание истории своей страны;
д) другое (что именно)?

5. Чем отличается суд присяжных от суда, где все решает единолично судья (либо с участием народных заседателей):
а) количеством участников процесса;
б) только названием;
в) суд присяжных считается обязательным в цивилизованных странах;
г) присяжные руководствуются нравственностью, а судья – только законом;
д) чем-то еще (чем именно)?

6. Вы – Правитель небольшого государства. В миниатюре у вас есть те же проблемы, что и в России. Что вы сделаете, чтобы чиновники и граждане не разворовали вашу страну:
а) уволите всех чиновников;
б) прогоните всех граждан, чтобы некому было воровать;
в) введете строгие законы (вплоть до отсекания руки за воровство);

г) попытаетесь воспитать в гражданах честность;
д) сделаете что-то еще (что именно)?

Отделение истории

Отделение истории объявляет набор на курс дистантного обучения.

Отделение истории – самое молодое, оно открылось в 1998 году. Ученикам исторического отделения регулярно направляются оригинальные учебные пособия и задания, подготовленные преподавателями специально для заочного образования. Обучение на историческом отделении позволит всем, в том числе жителям самых отдаленных городов и деревень, расширить свой кругозор и подготовиться к поступлению в вуз. Успешно прошедшие годовой курс обучения получают диплом Открытого лицея ВЗМШ при МГУ. Образование в лицее можно продолжить, занимаясь на спецкурсах.

А зачем нужно изучать историю? Во-первых, это просто интересно. Любопытно знать, как жили когда-то люди, во что одевались, чем питались, о чем думали, что читали, как женились и выходили замуж, за что боролись и на что «напарывались». Во-вторых, это полезно. Только зная прошлое, можно понять настоящее и прогнозировать будущее. Мы поможем вам в этом разобраться. Специально для вас опытные преподаватели пишут книжки. Последние новости из мира истории вы узнаете первыми!

Историческое образование в конверте – современная форма дополнительного образования. По нашим книжкам вы будете выполнять особые задания и регулярно сообщать нам, что вы раскопали. Мы же подскажем вам, как действовать дальше. Ведь, в сущности, профессия историка и состоит из этих раскопок: историк-археолог копает землю и песок, отыскивая крупицы ушедших времен; историк-архивариус копается в груде бумаг и достает из архивов и даже из частной переписки все, что может позволить ему понять образ времени; историк-теоретик как увлекательный роман читает археологические таблицы, сухие сводки, статистику, документы и превращает их в живую ткань ушедшей жизни. У историка особая профессия: он в одном лице следователь, прокурор и адвокат времени.

Как к нам поступить? Мы берем тех, кто выполнит вступительное задание.

Срок отправки вступительной работы – до 15 мая 2005 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются только по заявлению руководителя.

Задание

1. Отгадайте, кто это:

- С легкой руки Фридриха II в Европе его прозвали «русский Гамлет».
- О нем сплетничали, что он внебрачный сын.
- Его отец – внук Петра I по матери и внучатый племянник Карла XII по отцу.
- Его мать приехала в Россию 15-летней девочкой, пришла к власти в 33 года, свергнув мужа, и правила 34 года, не имея на трон законных прав.
- Главная черта его правления – мелочный деспотизм.
- Указом о трехдневной барщине он снискал себе ореол крестьянского царя.
- Во время военных смотров мог, осерчав, отправить в Сибирь прямо с плаца за нечеткий шаг, оторвавшуюся пуговицу или плохо напудренные букли.
- Отправил 22 тысячи казаков завоевывать Индию, чтобы ослабить Англию, и только его смерть вернула солдат с дороги.
- Боясь заговора, этот император построил себе замок и в нем был убит.
- Его старший сын мечтал о конституции для России, а дал ее Польше.

2. Опишите, не более чем в 7 предложениях, исторический портрет Главнокомандующего русской армией в Полтавской битве.

Заочная физико-техническая школа при МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) Министерства образования и науки Российской Федерации при Московском физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий и т. п.), расположенных на территории России, на 2005/06 учебный год.

ЗФТШ при МФТИ как государственное учреждение профильного дополнительного образования детей работает с 1966 года. За прошедшие 38 лет школу окончили более 70 тысяч учащихся; практически все ее выпускники поступают в ведущие вузы страны, а каждый второй студент МФТИ – выпускник ЗФТШ. Финансирует ЗФТШ Федеральное агентство по образованию Российской Федерации. Обучение в ЗФТШ для граждан, проживающих в России (в рамках утвержденного плана приема), бесплатное.

Научно-методическое руководство школой осуществляет Московский физико-технический институт (государственный университет), который готовит специалистов по единому направлению «Прикладные математика и физика». В их подготовке принимают участие ведущие отраслевые и академические научно-исследовательские институты и научно-производственные объединения страны (базовые организации МФТИ). Преподаватели МФТИ – крупнейшие ученые, среди которых около 100 членов Российской академии наук. Физтеховское образование позволяет не только успешно работать в науке, но и хорошо ориентироваться в жизни.

Цель ЗФТШ при МФТИ – помочь учащимся, интересующимся физикой и математикой, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам, а также способствовать профессиональному самоопределению учащихся.

Набор в 8, 9, 10 и 11 классы ЗФТШ на 2005/06 учебный год проводится на следующие отделения:

– *Заочное (индивидуальное обучение).*
Тел./факс: (095) 408-51-45.

Прием на заочное отделение проводится на конкурсной основе по результатам выполнения вступительного задания по физике и математике, приведенного ниже. Полная программа обучения рассчитана на 4 года, т.е. на 8–11 классы, но поступать можно в любой из этих классов.

В течение учебного года, в соответствии с программой ЗФТШ, ученик будет получать по каждой теме задания по физике и математике (4 задания по каждому предмету для 8 класса, 6–7 заданий по каждому предмету для 9, 10 и 11 классов), а затем – рекомендуемые ЗФТШ авторские решения этих заданий вместе с проверенной работой учащегося.

Задания содержат теоретический материал, разбор характерных примеров и задач по соответствующей теме и 8 – 12 контрольных вопросов и задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Задания ЗФТШ составляют опытные преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ. Работы учащихся-заочников проверяют студенты, аспиранты и выпускники МФТИ (до 80% – выпускники ЗФТШ).

– Очно-заочное (обучение в факультативных группах). Тел./факс: (095) 485-42-27.

Факультативные группы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении двумя преподавателями – физики и математики. Руководители факультатива принимают в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ.

Группа (не менее 8 человек) принимается в ЗФТШ, если директор общеобразовательного учреждения сообщит в ЗФТШ фамилии, имена, отчества ее руководителей и поименный алфавитный список обучающихся (Ф.И.О. полностью) с указанием *класса текущего учебного года и итоговых оценок* за вступительное задание по физике и математике, *телефон, факс и e-mail школы*. Все эти материалы и конверт для ответа о приеме в ЗФТШ с обратным адресом на имя одного из руководителей следует выслать *до 25 июня 2005 года* по адресу: 141700 г. Долгопрудный Московской области, Институтский пер., д. 9, ЗФТШ при МФТИ (с пометкой «Факультатив»). *Тетради с работами учащихся в ЗФТШ не высылаются.*

Работа руководителей факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением как руководство факультативными занятиями по предоставлению ЗФТШ при МФТИ соответствующих сведений.

Руководители, работающие с учащимися, будут получать в течение учебного года учебно-методические материалы ЗФТШ (программы по физике и математике, задания по темам программы, решения заданий с краткими рекомендациями по оценке работ учащихся), информационно-рекламные материалы (газеты МФТИ «За науку», проспекты МФТИ и его факультетов с правилами приема и т. п.). Работы учащихся проверяют и оценивают руководители факультативных групп, а в ЗФТШ ими *высылаются ведомости с итоговыми оценками по каждому заданию.*

– Очное (обучение в вечерних консультационных пунктах). Тел.: (095) 409-95-83.

Для учащихся Москвы и Московской области по программе ЗФТШ работают вечерние консультационные пункты, набор в которые проводится по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ и собеседования по физике и математике, которое проводится в первой половине сентября.

Программы ЗФТШ при МФТИ являются профильными дополнительными образовательными программами и едины для всех отделений.

Кроме занятий по этим программам, ученикам ЗФТШ (всех отделений) предлагается участвовать в физико-математической олимпиаде «ФИЗТЕХ-2005», которая проводится на базе МФТИ и в ряде городов России в мартовские школьные каникулы, в других очных и заочных олимпиадах МФТИ и его факультетов, а также в конкурсах, турнирах и конференциях.

По окончании учебного года учащиеся, успешно выполнившие программу ЗФТШ, переводятся в следующий класс, а выпускникам (одиннадцатиклассникам) выдаются свидетельства об окончании ЗФТШ с итоговыми оценками по физике и математике, которые учитываются на собеседовании при поступлении в МФТИ.

Вне конкурса в ЗФТШ принимаются *победители областных, краевых, республиканских, зональных и всероссийских олимпиад по физике и математике 2004/05 учебного года.* Им необходимо до 15 мая 2005 года выслать в ЗФТШ выполненную вступительную работу по физике и математике вместе с копиями дипломов, подтверждающих участие в вышеперечисленных олимпиадах.

Вступительное задание по математике и физике каждый ученик выполняет самостоятельно в одной школьной тетради (на русском языке). Порядок задач сохраняйте тот же, что и в задании. Тетрадь нужно выслать в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради.

На *лицевую* сторону обложки наклейте лист бумаги, четко заполненный по следующему образцу:

Л. №								
№ задач	1	2	3	…	15	16	17	Σ
Ф.								
М.								

1. Область	*Тюменская*
2. Фамилия, имя, отчество	*Каменев Виталий Петрович*
3. Класс, в котором учитесь	*восьмой*
4. Номер школы	*14*
5. Вид школы (обычная, лицей, гимназия, с углубленным изучением предметов и т.п.)	*обычная*
6. Подробный домашний адрес (с указанием индекса), телефон, e-mail	*628305 г.Нефтеюганск, мкрн 11б, д.15, кв.22, тел.: 7-63-45*
7. Место работы и должность родителей:	
отец	*СПД «НВ», машинист ДЭУ*
мать	*НРМУП УКС, сторож*
8. Адрес школы, телефон, факс, e-mail	*628305 г.Нефтеюганск, мкрн 11б, д.52*
9. Фамилия, имя, отчество преподавателей:	
по физике	*Золотухина Ельмира Кимовна*
по математике	*Михеева Раиса Ивановна*
10. Каким образом к Вам попало это объявление?	*передали друзья*

В ЗФТШ ежегодно приходит более 5 тысяч вступительных работ. Пожалуйста, обратите внимание на правильность заполнения анкеты! Пишите аккуратно, лучше печатными буквами.

Внимание! Для получения ответа на вступительное задание и для отправки вам первых заданий *обязательно* вложите в тетрадь *два одинаковых* бандерольных конверта размером 160×230 мм с наклеенными марками номиналом 7 руб. На конвертах четко напишите свой домашний адрес.

Ученикам, зачисленным в ЗФТШ в рамках утвержденного плана приема, необходимо будет перечислить целевое пожертвование на ведение уставной деятельности школы. Сумма взноса будет составлять ориентировочно для учащихся заочного и очного отделений 300–500 руб. в год, для очно-заочного – 600–1000 руб. (с каждой факультативной группы).

Срок отправки решения вступительного задания – не позднее 1 марта 2005 года. Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 2005 года.

Тетрадь с выполненными заданиями (по математике и физике) высылайте по адресу: *141700 г.Долгопрудный Московской области, Институтский пер., д. 9, ЗФТШ при МФТИ.*

Для учащихся Украины работает Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ (обучение платное). Желающим в него поступить следует высылать работы по адресу: 03680 г.Киев, б-р Вернадского, д. 36, ГСП, Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Тел.: (044) 424-30-25.

Для учащихся из зарубежных стран возможно только платное обучение на заочном и очно-заочном отделениях ЗФТШ. Условия обучения для прошедших конкурсный отбор будут сообщены дополнительно.

Ниже приводятся вступительные задания по математике и физике.

В задании *по математике* задачи 1 – 5 предназначены для учащихся седьмых классов, задачи 2 – 7 – для восьмых классов, 5 – 11 – для девятых классов, 8 – 14 – для десятых классов.

В задании *по физике* задачи 1 – 5 предназначены для учащихся седьмых классов, 2, 4 – 8 – для восьмых классов, 6 – 12 – для девятых классов, 11 – 17 – для десятых классов.

Номера классов указаны на текущий 2004/05 учебный год.

Вступительное задание по математике

1. На столе стоят три одинаковых ящика. В одном из них лежат два черных шара, в другом – два белых, в третьем – черный и белый. На ящиках сделаны надписи «два белых», «два черных», «черный и белый», причем ни одна из надписей не соответствует действительности. Как, вынув только один шар, определить, где лежат какие шары?

2. Найдите минимальное натуральное число, о котором известно, что:

1) если его умножить на 17, то результат разделится на 24;
2) если его разделить на 11, то результат разделится на 5;
3) если его разделить на 2, то получится квадрат некоторого натурального числа.

3. Докажите, что если сумма квадратов двух целых чисел делится на 11, то и каждое из них делится на 11.

4. Группу школьников нужно рассадить в столовой. За стол можно усадить три человека. Если сажать за стол по 2 девочки, то окажутся 3 стола, где сидят одни мальчики, а если сажать за стол по 2 мальчика, то будут 2 стола с одними девочками. Сколько девочек в группе?

5. В треугольнике ABC проведите прямую, пересекающую стороны AB и BC в точках M и N соответственно, так, чтобы $AM = MN = BN$. В каком случае MN будет параллельна AC?

6. В урне лежали черные и белые шары, их число не более 55. Число белых относилось к числу черных как 3 : 2. После того как из урны вынули 4 шара, оказалось, что соотношение белых и черных шаров стало 4 : 3. Сколько шаров лежало в урне?

7. При каком целом значении параметра k отношение корней уравнения

$$x^2+(2k-5)x-9k=0$$

равно 2?

8. Найдите все тройки различных целых чисел, являющихся тремя последовательными членами геометрической прогрессии, а также первым, вторым и пятым членами арифметической прогрессии.

9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy-x-y=0, \\ \sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{6x}}=\dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

10. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 14$, $AC = 15$, $BC = 13$ через основание высоты CH проводятся прямые, параллельные прямым AC и BC, которые пересекают соответственно стороны BC и AC треугольника в точках M и N Прямая MN пересекает продолжение стороны AB в точке D. Найдите длину отрезка BD.

11. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2-6x+8}-\sqrt{x^2-7x+10}<1.$$

12. Найдите все значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2-x+a\le 0, \\ x^2+2x-6a\le 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

13. Решите уравнение

$$\cos x\sqrt{1+\sin x-2\cos x}=\cos x-\sin x.$$

14. Какая наименьшая площадь может быть у прямоугольного треугольника ABC, в котором окружность радиуса R с центром на катете AB касается гипотенузы AC и проходит через точку B?

Вступительное задание по физике

1. Катер, двигаясь без остановок, поднялся вверх по реке на некоторое расстояние, а затем повернул назад и вернулся в пункт отправления. Скорость катера в стоячей воде $v_к = 3$ м/с. Определите скорость течения реки $v_р$, если известно, что средняя скорость движения катера составила 15/16 от его скорости в стоячей воде.

2. Автобус отправился из города A в город A', в который он должен прибыть через 4 часа. Первый час автобус ехал с некоторой постоянной скоростью v_1. После этого, чтобы прибыть по расписанию в город A', водителю пришлось увеличить скорость движения в $\alpha = 1{,}2$ раза. После прибытия в город A' к назначенному времени оказалось, что автобус за последний час проехал на $L = 3$ км больше, чем за первый час. Определите среднюю скорость движения автобуса на первой половине пути.

3. К динамометру подвешен стакан, заполненный водой до краев. Показание динамометра равно $F_1 = 3$ Н. На дно стакана опускают небольшой камень массой $m_к = 100$ г, который оказывается полностью погруженным в воду. Определите новое показание динамометра. Плотность камня $\rho_к = 2500$ кг/м^3.

4. Определите максимальное давление под крышкой скороварки, если диаметр отверстия предохранительного клапана скороварки $d = 5$ мм, а масса грузика, закрывающего клапан, $m = 60$ г. Атмосферное давление $p_а$ составляет 760 мм рт.ст. (101000 Па).

5. Какую наибольшую массу может иметь кусок железа, погруженного (полностью) в воду на нити, чтобы нить не оборвалась? Известно, что нить выдерживает силу натяжения $F = 200$ Н. Плотность железа $\rho = 7800$ кг/м^3. Массой нити пренебречь.

6. U-образная вертикально расположенная трубка постоянной площади поперечного сечения частично заполнена водой так, что расстояния от открытых концов трубки до уровня воды в коленах равны $h = 5$ см. Какой максимальный по толщине слой масла плотностью $\rho_м = 800$ кг/м^3 можно налить в одно из колен трубки, чтобы масло не выливалось? Масло и вода не смешиваются.

7. Имеются два цилиндрических стакана массой m каждый. На дно первого кладут медный брусок массой m_1 и стакан опускают в воду так, что он плавает, погрузившись в воду до краев. Ко дну второго стакана снизу прикрепляют медный брусок массой m_2 и тоже опускают в воду так, что стакан плавает, погрузившись в воду до краев. Найдите отношение масс медных брусков. Плотность меди $\rho_м = 8900$ кг/м^3. Толщиной стенок и дна стаканов пренебречь.

8. С помощью маленького нагревателя мощностью $P = 250$ Вт воду в ведре удалось довести до максимальной температуры 40 °С. Каков объем воды в ведре, если после отключения нагревателя температура понизилась на 1 °С за 2 минуты? Теплоемкостью нагревателя и ведра пренебречь.

9. При напряжении $U = 1{,}2$ В на концах медной проволоки постоянного круглого сечения по ней течет ток силой $I_1 = 100$ мА. Если отрезать от проволоки кусок длиной $\Delta L = 4$ м и подать на оставшуюся проволоку то же напряжение, то сила тока возрастает на 20 мА. Определите диаметр проволоки. Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

10. Камень, брошенный вертикально вверх с некоторой скоростью v_0, достигает максимальной высоты H за время t_1. Если с этой высоты камень бросить со скоростью v_0 вертикально вниз, то время падения составит t_2. Определите высоту H и скорость v_0, считая известными t_1, t_2 и g.

11. Брусок массой m из состояния покоя под действием силы F, направленной вдоль горизонтального стола, начинает двигаться по его поверхности. Через время Δt_1 действие силы F прекращается, и спустя время Δt_2 после этого брусок останавливается. Чему равна сила трения, действовавшая на брусок во время движения? На какое расстояние брусок переместился за все время движения?

12. Определите силу натяжения троса, связывающего два космических корабля, которые вращаются вокруг Земли по круговым орбитам радиусами R_1 и R_2 так, что трос всегда направлен к центру Земли. Массы кораблей одинаковы и равны m, масса Земли $M_З$. Гравитационным взаимодействием между кораблями пренебречь.

13. Сколько молекул водорода находится в объеме 1 л при температуре 27 °С и давлении 750 мм рт.ст.? Водород в данных условиях считать идеальным газом.

14. Моль гелия при постоянном объеме $V_0 = 200$ л охладили на $\Delta T = 1$ К так, что давление упало на 0,2%. На сколько уменьшилось давление газа? Какова была начальная температура газа?

15. В герметичный сосуд объемом 10 л поместили 1 моль кислорода и 1 моль водорода. Гремучую смесь подожгли. Какая максимальная масса воды может сконденсироваться в сосуде после охлаждения продуктов реакции до 100 °С?

16. С одним молем идеального газа проводят тепловой процесс, в котором газ сначала изобарически расширяется, а затем изохорически охлаждается. При этом газом совершается работа A. Отношение максимального давления к минимальному во всем процессе равно k. Определите температуру газа в начальном состоянии, если известно, что она равна температуре газа в конечном состоянии.

17. В цилиндре под поршнем находятся $\nu_1 = 0{,}5$ моль воды и $\nu_2 = 0{,}5$ моль водяного пара. Жидкость и пар медленно нагревают в изобарическом процессе так, что в конечном состоянии температура пара увеличивается на ΔT. Какое количество теплоты было подведено к системе жидкость – пар в этом процессе? Молярная теплота испарения жидкости в заданном процессе равна Λ. Внутренняя энергия ν молей пара равна $U = \nu \cdot 3RT$ (R – универсальная газовая постоянная). Пар считать идеальным газом.

Новый прием в школы-интернаты при университетах

Специализированный учебно-научный центр (сокращенно – СУНЦ) МГУ (школа имени академика А.Н. Колмогорова), а также СУНЦ НГУ, СУНЦ УрГУ и Академическая гимназия при СПбГУ объявляют набор учащихся в 10 классы (двухгодичное обучение) на физико-математическое и химико-биологическое отделения и в 11 классы (одногодичное обучение) на физико-математическое отделение. В рамках двухгодичного физико-математического отделения кроме основного профиля выделяется компьютерно-информационный класс. Химико-биологическое отделение представлено специализациями по химии и биологии.

Зачисление в школу проводится на конкурсной основе. Первый тур экзаменов – заочный письменный экзамен по математике и по физике или химии. Успешно выдержавшие заочный экзамен в апреле – мае приглашаются в областные центры Российской Федерации на устные экзамены. Однако *допускается участие в очном туре школьников, не участвовавших в заочном туре*.

Ниже приводятся условия задач *заочного* вступительного экзамена. Работа должна быть выполнена в обычной ученической тетради, на обложке которой указываются фамилия, имя, отчество (полностью), желаемый профиль обучения, подробный домашний адрес с индексом, электронный адрес (если имеется), адрес и номер школы, класс.

Работу нужно отправить простой бандеролью на имя Приемной комиссии по одному из следующих адресов (обязательно вложите конверт с маркой, заполненный на ваш домашний адрес с индексом):

121357 Москва, Кременчугская ул., д. 11, СУНЦ МГУ (внимание: жители Москвы принимаются в школу без предоставления общежития, телефон для справок: 445-11-08, сайт: http://www.pms.ru);

199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., д.7/96, Академическая гимназия;

620137 Екатеринбург, ул. Голощекина, д.30, СУНЦ УрГУ;

630090 Новосибирск, ул. Пирогова, д.11, СУНЦ НГУ (Олимпиадный комитет).

Срок отправки работ – *не позднее 10 марта 2005 года* (по почтовому штемпелю). Работы, высланные позже этого срока, рассматриваться не будут.

Если вы не сможете решить все задачи – не отчаивайтесь, Приемная комиссия рассмотрит работы с любым числом решенных задач.

Вступительные экзамены второго, *очного* тура будут проводиться с 20 марта по 20 мая по регионам.

Вступительное задание заочного тура

Математика

Для поступающих в 10 класс

1. Может ли квадрат целого числа оканчиваться цифрами

а) 123456789; б) 987654321?

2. В треугольнике ABC известны углы $\angle A = 30°$ и $\angle B = 80°$. Внутри треугольника взята точка K такая, что треугольник BCK правильный. Найдите угол KAC.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{x-1}+2\sqrt{y-4}=\frac{x+y}{2}.$$

4. В треугольнике ABC точка D – середина медианы AM. Прямая CD пересекает AB в точке N. Найдите CN, если $BD = BM$, $AN = a$.

5. Числа 1, 2, 3, ..., 50 каким-то образом разбили на 10 пятерок и в каждой пятерке взяли среднее по величине число. Какова а) наибольшая; б)наименьшая сумма этих чисел?

Для поступающих в 11 класс

1. Может ли число вида

$$\underbrace{11\ldots1}_{n}2\underbrace{11\ldots1}_{n}$$

быть простым?

2. Решите уравнение

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2}=3.$$

3. В треугольнике ABC расстояние от центра описанной окружности до стороны AB равно d, а $\angle ABC = 60°$. Точка D на стороне AC такова, что $BD=\frac{1}{2}AB$. Найдите CD.

4. См. задачу 5 для поступающих в 10 класс.

5. Найдите радиус окружности, касающейся катетов прямоугольного треугольника ABC и описанной около ABC окружности, если радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен r.

Физика

(физико-математическое отделение)

Для поступающих в 10 класс

1. Частица движется по прямой линии с постоянным ускорением. В начале и в конце некоторого участка прямой проекции скорости частицы равны υ_1 и υ_2. Найдите величину скорости частицы υ_c в середине этого участка.

2. Наклонная плоскость образует угол $\alpha = \pi/6$ с горизонтальной плоскостью. Если телу, находящемуся у основания наклонной плоскости, сообщить некоторую начальную скорость, то оно остановится через интервал времени $t_п$ и соскользнет до основания за интервал времени $t_{сп}$. Отношение $t_{сп}/t_п = 2$. Найдите коэффициент трения μ тела о плоскость.

3. Центр тяжести C шара радиусом R находится на расстоянии $b = R/\sqrt{2}$ от геометрического центра шара O. Шар поставили на шероховатую наклонную плоскость, образующую угол $\alpha = \pi/6$ с горизонтальной плоскостью. Найдите угол β, образуемый отрезком CO с вертикалью в положении равновесия.

4. Половина доски длиной L лежит на полу кузова грузовика, другая половина находится снаружи. Доску необходимо втолкнуть в кузов грузовика. Найдите наименьшую начальную скорость доски υ_0. Коэффициент трения доски о пол грузовика μ.

5. Батискаф массой m выполнен в форме цилиндра с площадью основания S и высотой d, составленного из двух половинок с площадью основания S. Батискаф находится в положении равновесия на глубине $H > d$, равной расстоянию от поверхности воды до средней плоскости поперечного сечения цилиндра. Давление в батискафе равно атмосферному давлению. Найдите величину силы реакции N, действующей на каждую половинку цилиндра.

Для поступающих в 11 класс

1. Каркас, представляющий собой стороны параллелограмма $ABCD$, закреплен над поверхностью земли. Времена падения капель из точек A, B, C до земли равны $t_a = \sqrt{5}$ с, $t_b = \sqrt{2}$ с, $t_c = 1$ с соответственно. Найдите время падения T капли из точки D.

2. Горизонтально расположенный теплоизолированный цилиндр объемом V заполнен воздухом, разделенным на две части теплоизолированным поршнем. Одной части воздуха сообщают количество теплоты Q. Найдите приращение давления Δp после установления состояния теплового равновесия.

3. Двигатель холодильника потребляет мощность $P_0 = 100$ Вт. Температура внутри холодильника $t_1 = 7\,°C$, температура в комнате $t_2 = 27\,°C$. В результате поломки дверного выключателя лампочка внутри холодильника продолжала гореть при закрытой двери, поэтому потребляемая мощность возросла до значения P = 101,45 Вт. Найдите мощность лампочки $P_л$. Холодильный коэффициент в два раза меньше, чем у машины Карно.

4. Частица массой $m = 0{,}1$ г с зарядом $q = 9{,}8$ нКл движется в однородном электрическом поле, создаваемом вертикально расположенными параллельными пластинами. Расстояние между пластинами d = 20 см, разность потенциалов между ними $\varphi(d)-\varphi(0)=U_0=10^5$ В. Вначале частица находилась на положительно заряженной пластине. Найдите величину смещения частицы h в вертикальном направлении в момент столкновения с отрицательно заряженной пластиной.

5. Резисторы, сопротивления которых R_1 = 2 Ом и R_2 = = 8 Ом, поочередно подключаемые к батарее, потребляют одну и ту же мощность P = 8 Вт. Найдите максимальное значение мощности P_m, которую может потреблять внешняя цепь.

Химия

(химико-биологическое отделение)

1. Оксид серы (IV) объемом 4,48 л (н.у.) пропустили через 100 г 3,6%-го раствора гидроксида лития. Сколько молей соли образовалось в растворе? Затем полученный раствор прокипятили. Сколько молей соли содержится в растворе после кипячения, если испарением воды можно пренебречь? Напишите уравнения реакций.

2. Приведите шесть различных реакций получения селената рубидия Rb_2SeO_4. Каждая реакция должна отличаться от остальных хотя бы одним из исходных веществ. Реакции не считаются различными, если в них участвуют однотипные вещества – например, NaCl в одной и KCl в другой реагируют с одним и тем же веществом.

(Начало см. на с. 44)

чисел. Действительно, $\sin(6!)° = \sin 720° = 0$, а любой факториал двузначного числа получается умножением 6! на последующие за шестеркой целые числа, поэтому $\sin(n!)° = 0$, если $n \geq 6$.

2) Допустим, что в какой-то одной паре цифр хотя бы одна из цифр есть ноль. Тогда этот ноль умножаем на рядом стоящую цифру, получаем ноль и приравниваем его к синусу от факториала в градусах, который применен к числу в другой части номера.

3) Положим, что в обеих частях номера имеются нули. Умножая их на соседние цифры, получаем тривиальное равенство.

Отметим, что все сказанное можно переформулировать и в терминах других тригонометрических функций.

Б.Горобец

КМШ

Задачи

(см. с.26)

1. «Здравствуйте! Посылаю задачу для летнего турнира 6–8».

2. Да, могут. Одно из возможных расположений футболистов показано на рисунке 1.

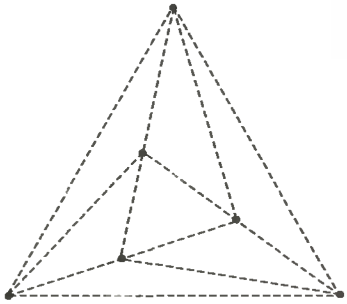


Рис. 1

3. Искомое число $101^2 = 10201$.

4. Сложим два исходных равенства. Получим $x^2 - z^2 = yz + xz$. Таким образом, осталось доказать, что $yz + xz = xy$.

Из первого равенства следует, что $z = \frac{x^2 - y^2}{y}$. Подставив это значение во второе равенство, получим

$$y^2 - \left(\frac{x^2 - y^2}{y}\right)^2 = x\frac{x^2 - y^2}{y}.$$

Если раскрыть скобки и домножить на y^2, получается

$$y^4 - x^4 + 2x^2y^2 - y^4 = x^3y - xy^3.$$

После этого можно обе части поделить на ненулевое (по условию) число x. В результате выходит

$$-x^3 + 2xy^2 = x^2y - y^3.$$

Перегруппируем слагаемые по-другому:

$$x^3 - xy^2 + x^2y - y^3 = xy^2,$$

или

$$x\left(x^2 - y^2\right) + y\left(x^2 - y^2\right) = xy^2.$$

Отсюда следует

$$xy\frac{x^2 - y^2}{y} + y^2\frac{x^2 - y^2}{y} = xy^2,$$

т.е.

$$xyz + y^2z = xy^2.$$

Поделив обе части на y, получаем $yz + xz = xy$, откуда и вытекает требуемый результат.

5. Используем метод «от противного».

Допустим, человек никогда не выйдет за пределы лестницы, даже если сделает бесконечное число шагов. Тогда на какую-то ступеньку A он наступит бесконечное число раз. Так как направление указателя при каждом попадании человека на ступеньку меняется на противоположное, то при его «наступаниях» на ступеньку A указатель бесконечное число раз будет показывать вверх и бесконечное же число раз – вниз. Поэтому, ступая в соответствии с указателем, человек бесконечное число раз наступит на каждую из двух ступенек, соседних со ступенькой A. Далее, рассуждая таким же образом, можно сделать вывод, что он бесконечное число раз наступит на все ступеньки, соседние с этими ступеньками, и так далее. В конечном счете окажется, что он бесконечное число раз наступит на каждую ступеньку лестницы, в том числе и на самую верхнюю (и самую нижнюю тоже). Но самое позднее при втором «наступании» на самую верхнюю ступеньку он с нее будет вынужден подняться вверх на крышу (указатель-то каждый раз меняет направление!). Противоречие. Следовательно, наше предположение было неверным, и человек рано или поздно сойдет с лестницы, что и требовалось доказать.

Задачи

(см. «Квант» №5)

1. Каждую из оставшихся четырех таблеток нужно разделить ровно на две одинаковые части и в два оставшихся приема принять по четыре произвольных половинки таблеток.

2. Предметы, складываемые на левую чашу весов, на рисунках будем отмечать красным цветом, а предметы, складываемые на правую чашу весов, – синим цветом. После взвешивания предметы возвращаются на свои прежние места. Цукаты будем отмечать зеленым цветом.

Первое взвешивание произведем согласно такой схеме:

Если синие предметы оказались тяжелее красных, второе взвешивание произведем по следующей схеме:

Выводы по результатам второго взвешивания:

синие тяжелее красных:

синие равновесны красным:

синие легче красных:

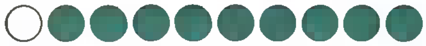
Если в результате первого взвешивания синие предметы уравновесили красные, то второе взвешивание осуществим по такой схеме:

Выводы по результатам второго взвешивания:

синие тяжелее красных:

синие равновесны красным:

синие легче красных:



Если в результате первого взвешивания синие предметы оказались легче красных, то второе взвешивание произведем по следующей схеме:

Выводы по результатам второго взвешивания:

синие тяжелее красных:

синие равновесны красным:

синие легче красных:

3. Заметим, что в последовательности чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2004}$, где $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$, n = 1, 2, ..., 2003, выполняется равенство $a_{n+1} + 1 = 2\left(a_n + 1\right)$. Поэтому, если положить $b_n = a_n + 1$, n = = 1, 2, ..., 2004, мы получим $b_1 = 2$ и $b_{n+1} = 2b_n$. Следовательно, $b_n = 2^n$, откуда находим $a_n = 2^n - 1$, n = 1, 2, ..., 2004.

Числа 2^n оканчиваются

на 6 при $n = 4k$,

на 2 при $n = 4k + 1$,

на 4 при $n = 4k + 2$,

на 8 при $n = 4k + 3$.

Следовательно, a_n делится на 5 только в том случае, если

$n = 4k$. Поскольку $2004 = 4 \cdot 501$, то в последовательности будет 501 число, кратное пяти.

4. Если бы речь шла о расстановке только белых ферзей, то ответ был бы известен: 8. Использование же ферзей двух цветов расширяет наши возможности, так как ферзи теперь могут «прятаться» за ферзей другого цвета от обстрела «соплеменников».

Ответ таков: 32 ферзя (по 16 каждого цвета).

Докажем, что более чем по 16 ферзей каждого цвета расставить невозможно. Для этого разобьем доску на 16 квадратов размером 2×2 клетки. Обратим внимание, что если в любом таком квадрате оказалось не менее двух ферзей одного цвета, то они непременно будут угрожать друг другу. Следовательно, в каждом квадрате 2×2 может находиться не больше одного белого и не больше одного черного ферзя. Таким образом, количество белых и черных ферзей не может быть больше количества таких квадратов, т.е. 16, а суммарное число ферзей – не больше $16 \times 2 = 32$.

Осталось привести пример (здесь белые ферзи обозначены буквой «Б», а черные – буквой «Ч»):

Б	Ч	Б	Ч	Б	Ч	Б	Ч
Ч	Б	Ч	Б	Ч	Б	Ч	Б
Б	Ч	Б	Ч	Б	Ч	Б	Ч
Ч	Б	Ч	Б	Ч	Б	Ч	Б

Без особого труда задача решается и для всех остальных фигур. Для королей, например, рассуждения точно такие же, и ответ такой же: 32 (и расстановка может быть такая же). Для коней и ладей максимум просто-напросто равен общему числу полей доски, т.е. 64, а расставить их можно так: все фигуры одного цвета – на белых полях, другого – на черных. Для слонов ответ таков же: 64, а расставить можно так: на горизонтали с четными номерами – белых слонов, с нечетными – черных.

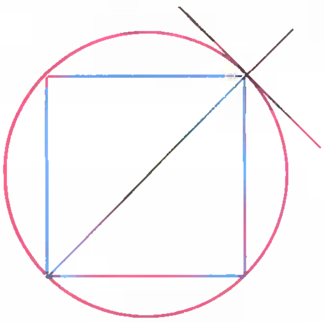


Рис. 2

5. Прав Малыш.

Рассмотрим касательную, проведенную к окружности в одной из вершины квадрата (рис.2). Поскольку углы, заключенные между этой касательной и сторонами квадрата, равны по 45°, то при симметричном отражении относительно соприкасающихся с ней сторон квадрата касательная перейдет в прямую, проходящую через центр окружности. А это означает, что соответствующие дуги окружности после отражения пересекутся только в вершинах квадрата.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СИЛОЙ

1. $R = R_0 \dfrac{4\pi^2 k}{4\pi^2 k - m\omega^2}$. **2.** $\sigma = \dfrac{2\pi k (l - l_0)}{l}$. **3.** $T = \dfrac{IBR}{2}$.

4. а) $F = p\pi R^2$; б) $F = 2pRl$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Математика

Вариант 1

1. $(125; 5)$, $\left(\pm 4\sqrt{2}; 2\right)$. *Указание.* Из второго уравнения следует, что либо $x = y^3$, либо $x^2 = y^5$.

2. $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Если $\cos x \ge 0$, то получаем после преобразований

$$-2\sin^2 x \cos x = \cos x (1 - \cos 3x),$$

т.е. либо $\cos x = 0$, либо $-2\sin^2 x = 1 - \cos 3x$, или $\cos 2x + \cos 3x = 2$, что означает $\cos 2x = 1$ и $\cos 3x = 1$. Если же $\cos x < 0$, приходим к уравнению $\cos 2x = -\cos 3x - 1$, или $4\cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0$, не имеющему решений, удовлетворяющих условию.

3. $\left(-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}; -1\right) \cup \left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right) \cup \left(0; \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

Указание. При $x < -1$ неравенство приводится к виду

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + \log_{|x|}(1-x)} + \sqrt{3} - 1}{\log_{|x|}(1-x) - 2} \ge 0,$$

а при $-1 < x < 1$ – к виду $f(x) \le 0$.

4. $\dfrac{2\pi}{3}$; $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

Пусть $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, h – расстояние между l_1 и l_2, а d – расстояние между m_1 и m_2. По условию $h = d\sqrt{3}$. Пусть угол BAD равен 2α. Прямые $l_{1,2}$ и $m_{1,2}$ ортогональны. Поэтому площадь параллелограмма $ABCD$ равна

$$a^2 \sin 2\alpha + 2ad \sin\alpha = a^2 \sin 2\alpha + 2ah \cos\alpha.$$

Отсюда $\operatorname{tg}\alpha = h/d = \sqrt{3}$, т.е. $\alpha = \pi/3$.

Далее, по теореме косинусов из треугольников ABC и ABD находим $16 = a^2 + b^2 - ab$ и $22 = a^2 + b^2 + ab$. Получаем $ab = 3$, $a^2 + b^2 = 19$. Тогда $a + b = 5$. Наконец, радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, равен

$$(ab \sin 2\alpha)/(a + b + AC) = 1/\left(2\sqrt{3}\right).$$

5. $(6, 5)$, $(4, 5)$, $(-4, -3)$. *Указание.* Преобразуйте уравнение к виду

$$(-3x + 13)(3y + 10) = 25.$$

Мы видим, что целое число $3y + 10$ должно быть делителем числа 25.

6. $\pi - \arcsin\dfrac{24}{25}$; 15; 36.

Пусть O – центр сферы; плоскость EOF перпендикулярна прямой BD и пересекает ее в точке H; $\angle EHF = 2\alpha$ является двугранным углом между гранями ABD и BCD. Прямоугольные треугольники OEH и OFH равны, так как гипотенуза OH общая, $OE = OF$ и $\angle EHO = \angle FHO = \alpha$. Получаем $\cos\alpha = (EF/2)/OE = 3/5$, $\sin\alpha = 4/5$, $\sin 2\alpha = 24/25$, $\cos 2\alpha = -7/25$, т.е. искомый угол 2α тупой и равен $\pi - \arcsin(24/25)$.

Далее, $EH = OE/\operatorname{tg}\alpha = 15/4$, и площадь грани ABD равна $S_1 = EH \cdot BD = 10$. Так как $FH \perp BD$, $FH = EH$, то площадь грани BCD равна $S_2 = (1/2)BD(3 \cdot FH) = 15$.

Объем пирамиды $ABCD$ равен $(2/3)S_1 S_2 \sin 2\alpha / BD = 36$.

Вариант 2

1. $(6, 2)$. *Указание.* Из первого уравнения системы следует, что $x = y + 4$ или $x = -y - 1$.

2. $(-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. *Указание.* После возведения в квадрат исходного уравнения, получим

$$\cos^2 x(\sin x-2\cos x)=\sin^2 x-2\sin x\cos x,$$

т.е. $(\sin x-2\cos x)(\cos^2 x-\sin x)=0$.

3. $\frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$. *Указание.* Пусть $\angle ACB=\alpha\in(0;\pi/2)$. Тогда площадь треугольника ABC равна

$$S(\alpha)=\frac{R^2}{2}\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2\operatorname{ctg}\alpha.$$

Исследуйте функцию $S(\alpha)$ с помощью производной.

4. $[-1;0)\cup\left(2;\frac{11}{5}\right)\cup(3;4]$. *Указание.* При $x>2$ исходное неравенство примет вид

$$5\Big/\left(6-3\sqrt{4+3x-x^2}\right)>-1\Big/\left(x^2-3x+2\right).$$

Решите его, сделав замену $t=\sqrt{4+3x-x^2}$.
Случай $x<2$ рассматривается аналогично.

5. $\frac{1}{4}$, 0. *Указание.* Данная система *может* иметь единственное решение лишь в трех случаях: $D_1=1+4a=0$, $\frac{D_2}{4}=1+6a=0$, уравнения $x^2-x+a=0$ и $x^2+2x-6a=0$ имеют общий корень. Осталось найти подозрительные значения a и сделать проверку.

6. 7; 32; $\frac{\sqrt{35}}{2}$.

Пусть $SA=3+a$, $SB=3+b$, $SC=3+c$. Тогда $AC=a+c$, $AB=a+b$, $BC=b+c$; получаем

$$\sqrt{5}=\sqrt{\frac{3bc}{3+b+c}},\quad \sqrt{6}=\sqrt{\frac{3ac}{3+a+c}},\quad \sqrt{7}=\sqrt{\frac{3ab}{3+a+b}}.$$

Отсюда

$$3+b+c=\frac{3bc}{5},\quad 3+a+c=\frac{ac}{2},\quad 3+a+b=\frac{3ab}{7}.$$

Следовательно, $b=(3+c)\Big/\left(\frac{3c}{5}-1\right)$ и $a=(3+c)\Big/\left(\frac{c}{2}-1\right)$. Получаем

$$3+\frac{15+5c}{3c-5}+\frac{6+2c}{c-2}=\frac{30}{7}\frac{(3+c)^2}{(3c-5)(c-2)}.$$

Отсюда $11c^2-32c-48=0$, т.е. $c=4$. Тогда $b=5$ и $a=7$. Окончательно получаем $AK=a=7$; периметр треугольника ABC равен $2(a+b+c)=32$; радиус окружности, вписанной в ΔABC, равен $\sqrt{(abc)/(a+b+c)}=\sqrt{35}/2$.

Вариант 3

1. $\left[-\frac{7}{2};-1\right]\cup\left[1;\frac{7}{2}\right]$. *Указание.* Данное неравенство равносильно системе

$$\frac{1}{2}\le\frac{|x|^2-4|x|}{|x|-7}<1.$$

2. $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. *Указание.* Исходное уравнение приводится к виду

$$\cos 3x\left(\frac{2\sin 3x}{\sin 4x}-\frac{1}{\cos x}\right)=0.$$

Рассмотрите случаи $\sin 4x>0$ и $\sin 4x<0$.

3. $\frac{98}{5}$; $\arcsin\frac{49}{50}$.

Пусть $ABCD$ – рассматриваемый четырехугольник, $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $AD=d$, $AC=x$, $BD=y$, $\angle ABC=\alpha=\operatorname{arctg}(4/3)$. Так как $ABCD$ описан вокруг окружности, то $a+c=b+d$. Так как $ABCD$ вписан в окружность, то $\angle ADC=\pi-\alpha$. По теореме косинусов из треугольников ABC и ADC получаем

$$x^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha=c^2+d^2+2cd\cos\alpha.$$

Подставляя $d=c+a-b$, находим $c^2+c(a-b)-ab\left(\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)=0$. Отсюда

$$c=\left(b-a+\sqrt{(a-b)^2+4ab\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}\right)\Big/2,$$

$$d=\left(a-b+\sqrt{(a-b)^2+4ab\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}\right)\Big/2.$$

Далее, площадь $ABCD$ равна $S=(1/2)(ab+cd)\sin\alpha=ab\operatorname{tg}(\alpha/2)$. С другой стороны, если r – радиус вписанной в $ABCD$ окружности, то

$$S=(1/2)(a+b+c+d)r=\left(a+b+\sqrt{(a-b)^2+4ab\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}\right)\Big/2.$$

Если R – радиус описанной около $ABCD$ окружности, то $x=2R\sin\alpha$. Получаем

$$\begin{cases}a^2+b^2-2ab\cos\alpha=(2R\sin\alpha)^2,\\ a+b+\sqrt{(a-b)^2+4ab\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}=2ab\operatorname{tg}(\alpha/2)/r.\end{cases}$$

Из второго уравнения находим $ab=(a+b)r\operatorname{ctg}(\alpha/2)+r^2\left(1-\operatorname{ctg}^2(\alpha/2)\right)$. Подставляя в первое уравнение системы, получаем

$$(a+b)^2-(a+b)\cdot 4r\cos^2(\alpha/2)\operatorname{ctg}(\alpha/2)=$$
$$=4r^2\cos^2(\alpha/2)\left(1-\operatorname{ctg}^2(\alpha/2)\right)+4R^2\sin^2\alpha.$$

Отсюда $a+b=2r\cos^2(\alpha/2)\operatorname{ctg}(\alpha/2)\pm\sin\alpha\cdot\sqrt{r^2+4R^2}$. В нашем случае $a+b=(16/5)r\pm(4/5)\sqrt{r^2+4R^2}=(32\pm32)/5$.

Итак, $a+b=64/5$. Далее, $ab=2r(a+b)-3r^2=196/5$. Отсюда искомая площадь $S=ab/2=98/5$.

Далее, пусть β – угол между диагоналями $ABCD$. Тогда $S=(1/2)xy\sin\beta$. Обозначим $\angle BCD=\gamma$. Тогда $\angle BAD=\pi-\gamma$, и по теореме косинусов из ΔBCD и ΔBAD находим $y^2=b^2+c^2-2bc\cos\gamma=a^2+b^2+2ad\cos\gamma$. Отсюда получаем $\left(y^2-a^2-d^2\right)/(ad)=\left(b^2+c^2-y\right)/(bc)$, т.е. $y^2=(ab+cd)(ac+bd)/(bc+ad)$. Аналогично, $x^2=(bc+ad)(ac+bd)/(ab+cd)$. Таким образом, $xy=ac+bd$. Обозначим $l=\sqrt{(a-b)^2+4ab\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}=2S/r-(a+b)$. Тогда $xy=(a/2)(b-a+l)+(b/2)(a-b+l)=(S/r)(a+b)-(a+b)^2+2ab$. Окончательно получаем $\sin\beta=2S/(xy)=2S\Big/\left((S/r)(a+b)-(a+b)^2+2ab\right)=49/50$.

4. а) $\frac{7\sqrt{17}}{24}$; б) $2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$.

а) Пусть φ – угол между плоскостью сечения и $A_1B_1C_1$, M – середина ребра A_1D_1, N – середина ребра A_1B_1. Тогда отрезок MN принадлежит плоскости сечения. Пусть $E=MN\cap A_1C_1$. Тогда $C_1E=(3/4)\sqrt{2}$ и $\operatorname{tg}\varphi=1/C_1E=(2/3)\sqrt{2}$. Так как проекцией сечения на плоскость $A_1B_1C_1$ является пятиугольник $B_1C_1D_1MN$, площадь которого равна $S_{\text{пр}}=7/8$, то площадь сечения равна $S_{\text{сеч}}=S_{\text{пр}}/\cos\varphi=(7/24)\sqrt{17}$.

б) Если площадь проекции сечения на плоскость BDB_1 максимальна, то плоскость сечения пересекает ребро A_1D_1. Пусть M – точка пересечения плоскости сечения с ребром A_1D_1, N – точка пересечения плоскости сечения с ребром A_1B_1. Тогда отрезок MN параллелен B_1D_1. Пусть $x = D_1M = B_1N \in [0; 1]$. Тогда $C_1E = (1+x)/\sqrt{2}$. Если $\varphi(x)$ – угол между плоскостью сечения и $A_1B_1C_1$, то $\operatorname{tg}\varphi(x) =$ $= 1/C_1E = \sqrt{2}/(1+x)$. Площадь сечения $S_{сеч}(x) =$ $= \left(1-(1-x)^2/2\right)/\cos\varphi(x)$. Площадь проекции сечения на плоскость BDB_1 равна $S_{пр}(x) = S_{сеч}(x)\sin\varphi(x) =$ $= \left(1+2x-x^2\right)/\left((1+x)\sqrt{2}\right)$. Таким образом, осталось найти $x \in [0; 1]$, доставляющий максимум функции $S_{пр}(x)$ на отрезке $[0; 1]$, и получить ответ.

5. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$, $[1; +\infty)$.

Обозначим $\log_5 a = q$, $5^x = t > 0$. Тогда получаем

$$t^2 - t - q = 0. \qquad (*)$$

Исходное уравнение имеет единственное решение в двух случаях. Во-первых, если $D = 1 + 4q = 0$, т.е. $q = -1/4$, $a = 1/\sqrt[4]{5}$, $t = 1/2$. Во-вторых, если $D = 1 + 4q > 0$ и уравнение $(*)$ имеет один положительный корень. При $q > -1/4$ уравнение $(*)$ имеет два различных корня, причем при $0 > q > -1/4$ оба корня положительны, так как их сумма равна 1, а произведение равно $-q > 0$. Если же $q \ge 0$, то только один корень положителен. Следовательно, $\log_5 a \ge 0$, т.е. $a \ge 1$.

6. $\left(\mp 1, \pm\dfrac{5}{18}, \pm\dfrac{7}{6}\right)$.

Преобразуем систему к виду

$$\begin{cases}(3y-x-z)(3y-x+z) = 2,\\ (3y+z-x)(3y+z+x) = 3,\\ (z-x-3y)(z-x+3y) = 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3y-x-z = 2/(z-x+3y),\\ 3y+z+x = 3/(z-x+3y),\\ z-x-3y = 4/(z-x+3y).\end{cases}$$

Сложив все уравнения последней системы, находим $z-x+3y = 9/(z-x+3y)$. Следовательно, $z-x+3y = \pm 3$. Получаем

$$\begin{cases}3y-x-z = \pm 2/3,\\ 3y+z+x = \pm 1,\\ z-x-3y = \pm 4/3.\end{cases}$$

Складывая уравнения этой системы попарно, находим ответ.

Физика

Вариант 1

1. 1) Перейдем в систему отсчета, связанную с лентой. Относительная скорость монеты в векторном виде изображена на рисунке 3. Абсолютная величина относительной скорости равна

$$v_{отн} = \sqrt{v^2 + \left(\frac{4}{3}v\right)^2} = \frac{5}{3}v.$$

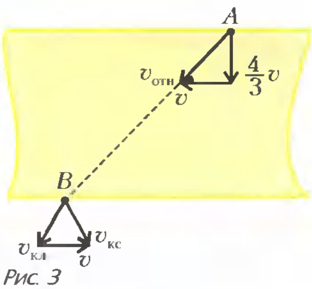


Рис. 3

2) Оставаясь в системе отсчета, связанной с лентой, монета будет двигаться прямолинейно и равнозамедленно в направлении вдоль относительной скорости. Длина пути, пройденного монетой по ленте, равна $AB = \dfrac{5}{4}d$. Абсолютную величину скорости монеты в момент, когда она покидает ленту, найдем по закону сохранения энергии. Обозначив конечную скорость монеты через $v_{кл}$, запишем

$$\frac{mv_{отн}^2}{2} = \mu mg \cdot AB + \frac{mv_{кл}^2}{2}.$$

Здесь m – масса монеты, μ – коэффициент трения скольжения, а g – ускорение свободного падения.

Теперь вернемся в систему отсчета, связанную со столом. В этой системе скорость монеты в момент соскальзывания с ленты ($\vec{v}_{кс}$) равна векторной сумме $\vec{v}_{кл}$ и скорости ленты $\vec{v}$:

$$\vec{v}_{кс} = \vec{v}_{кл} + \vec{v}.$$

Получившийся треугольник скоростей является равнобедренным, поскольку $v_{кс} = v$. Из этого треугольника следует, что $v_{кл} = \dfrac{6}{5}v$. Сравнивая это значение с полученным из закона сохранения энергии результатом для $v_{кл}$, найдем коэффициент трения скольжения:

$$\mu = \frac{602}{1125}\frac{v^2}{gd}.$$

2. Подведенное к гелию тепло пойдет на изменение внутренней энергии гелия ΔU и на работу A, которую совершит гелий при вытеснении воды из трубки. Запишем уравнения состояния для гелия в начальном и конечном состояниях:

$$\left(p_0 + \frac{p_0}{8}\right)V_0 = \nu RT_1, \quad p_0 \cdot 2V_0 = \nu RT_2,$$

где ν – число молей гелия, а T_1 и T_2 – температуры гелия в начальном и конечном состояниях. Изменение внутренней энергии гелия равно

$$\Delta U = C_V\nu(T_2 - T_1) = \frac{21}{16}p_0V_0,$$

где $C_V = 3R/2$ – молярная теплоемкость гелия при постоянном объеме. Работа, совершенная гелием, равна сумме работы A_1 против силы тяжести и работы A_2 против внешнего атмосферного давления. Найдем сначала работу A_1:

$$A_1 = mg\frac{V_0}{S} - mg\frac{V_0}{4S} = \frac{3}{4}mg\frac{V_0}{S}.$$

Здесь m – масса жидкости, S – внутренняя площадь поперечного сечения трубки, g – ускорение свободного падения. Поскольку первоначальное давление столба жидкости равно $p_0/8$, можно записать

$$\frac{p_0}{8} = \frac{mg}{S}.$$

Тогда получим

$$A_1 = \frac{3}{32}p_0V_0.$$

Работа против сил внешнего атмосферного давления равна

$$A_2 = p_0V_0.$$

Окончательно, подведенное количество теплоты будет равно

$$Q = \Delta U + A_1 + A_2 = \left(\frac{21}{16} + \frac{3}{32} + \frac{32}{32}\right)p_0V_0 = \frac{77}{32}p_0V_0 = 120 \text{ Дж}.$$

3. В тот момент, когда заряд на конденсаторе емкостью C_1 достигает максимального значения, ток в цепи равен нулю. По закону сохранения энергии, совершенная батарей работа пошла на приращение энергии зарядившегося конденсатора. Пусть максимальный заряд на конденсаторе емкостью C_1 равен $q_{1\max}$, тогда

$$\mathcal{E}q_{1\max} = \frac{q_{1\max}^2}{2C_1}.$$

Отсюда

$$q_{1\max} = 2C_1\mathscr{E} .$$

Сразу после размыкания ключа K_2 на конденсаторе емкостью C_1 находится максимальный заряд $q_{1\max}$, а на конденсаторе емкостью C_2 заряда нет. Конденсатор емкостью C_2 начнет заряжаться, и через некоторое время заряд на нем достигнет максимального значения $q_{2\max}$, а заряд на конденсаторе емкостью C_1 станет равным

$$q_1 = q_{1\max} - q_{2\max} = 2C_1\mathscr{E} - q_{2\max} .$$

Эта ситуация изображена на рисунке 4. Ток в цепи в этот момент равен нулю. Запишем энергетический баланс за время с момента размыкания ключа K_2 до момента установления максимального заряда на конденсаторе емкостью C_2. За это время часть освободившейся энергии на первом конденсаторе пошла на увеличение энергии второго конденсатора, а часть – на работу против ЭДС батареи:

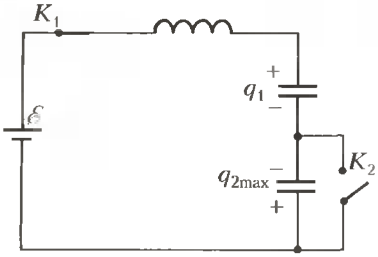


Рис 4

$$\frac{q_{1\max}^2}{2C_1} - \frac{(q_{1\max} - q_{2\max})^2}{2C_1} = \frac{q_{2\max}^2}{2C_2} + q_{2\max}\mathscr{E} .$$

После простых преобразований получим

$$\frac{(C_1 + C_2)}{2C_1C_2} q_{2\max}^2 - q_{2\max}\mathscr{E} = 0 .$$

Отсюда

$$q_{2\max} = \frac{2C_1C_2\mathscr{E}}{C_1 + C_2} .$$

4. Пусть в некоторый момент времени левый край рамки имеет координату x, а скорость рамки равна $v = \frac{dx}{dt}$ (рис.5). Две стороны рамки *12* и *34* пересекают линии магнитного поля, и в них возникают ЭДС индукции, равные

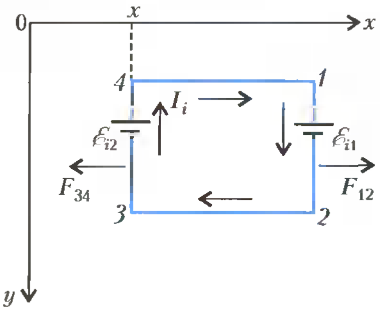


Рис. 5

$$\mathscr{E}_{i1} = avB_{x+b} \text{ и } \mathscr{E}_{i2} = avB_x ,$$

где B_x – индукция в точках с координатой x, а B_{x+b} – с координатой $x + b$. Общая ЭДС индукции в контуре рамки равна

$$\mathscr{E}_i = \mathscr{E}_{i2} - \mathscr{E}_{i1} = av(B_x - B_{x+b}) = \alpha abB_0 v .$$

Под действием этой ЭДС в рамке возникнет ток

$$I_i = \frac{\mathscr{E}_i}{R} = \frac{\alpha abB_0}{R} v .$$

На каждую сторону рамки с током будет действовать сила Ампера:

$$F_{12} = aI_iB_{x+b} = \frac{\alpha a^2bB_0}{R} vB_{x+b} ,$$

$$F_{34} = \frac{\alpha a^2bB_0}{R} vB_x .$$

Результирующая сила вдоль оси x равна

$$F_x = F_{12} - F_{34} = \frac{\alpha a^2bB_0}{R} v(B_{x+b} - B_x) = -\frac{\alpha^2a^2b^2B_0^2}{R} v .$$

Уравнение движения рамки имеет вид

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{(\alpha abB_0)^2}{R} v .$$

Поскольку $dx = vdt$, уравнение движения можно записать так:

$$\frac{mR}{(\alpha abB_0)^2} dv = -dx .$$

Обозначим путь, пройденный рамкой до остановки, через l и возьмем конечные приращения от обеих частей нашего уравнения:

$$\frac{mR}{(\alpha abB_0)^2} \int_{v_0}^{0} dv = -\int_0^l dx .$$

Отсюда получаем

$$l = \frac{mv_0R}{(\alpha abB_0)^2} .$$

5. Ход лучей в системе двух собирающих линз с фокусными расстояниями F_1 и F_2 изображен на рисунке 6. Параллельный пучок, падающий на линзу $Л_1$ под углом α, собирается в ее задней фокальной плоскости – в точке A на рисунке. Расстояние от точки A до главной оптической оси OC линзы $Л_1$ равно

$$AC = F_1 \operatorname{tg}\alpha .$$

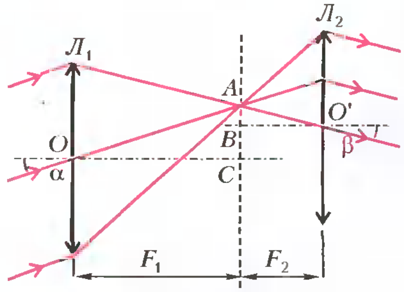


Рис. 6

А расстояние этой точки до главной оптической оси линзы $Л_2$ равно

$$AB = F_2 \operatorname{tg}\beta .$$

Поскольку главные оптические оси линз отстоят друг от друга на расстояние a, то

$$AC - AB = F_1 \operatorname{tg}\alpha - F_2 \operatorname{tg}\beta = a .$$

С другой стороны,

$$F_1 + F_2 = L .$$

Из совместного решения этих уравнений получим

$$F_1 = \frac{a + L\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = 7 \text{ см} \quad \text{и} \quad F_2 = \frac{L\operatorname{tg}\alpha - a}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = 3 \text{ см} .$$

Вариант 2

1. $\frac{a}{g} = \frac{2\mu(1 + \cos\alpha) + \sin\alpha}{2 - 2\mu\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{6}{13}$.

2. 1) $\Delta T = \frac{(K-1)a}{KcV_1}$; 2) $Q = (K-1)p_1V_1$.

3. $\Delta V_в = \frac{\rho_л(\rho_в - \rho)S\Delta h}{\rho(\rho_л - \alpha\rho_в)} = 900 \text{ см}^3$.

4. 1) $U_{C2} = \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1 - IR$; 2) $v = \frac{L\varepsilon I}{(\mathscr{E}_1 + IR)C_1(\varepsilon - 1)}$.

5. $\beta = \frac{d}{F}$.

МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОНИКИ И МАТЕМАТИКИ

Математика

Вариант 1

1. $(-\infty;-1)\cup(3;11]$. **2.** -1. **3.** $-\frac{240}{289}$. **4.** $\left[\frac{2}{9};3\right)$.

5. 144. **6.** $\frac{\pi}{12}+2\pi n$, $\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$.

7. $D=(-\infty;0)$; $E=\left(-\infty;\frac{3}{4}\right]$.

Указание. Сделайте замену $x=\operatorname{tg}t$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

8. 4:221.

Указание. Разбейте пирамиду на две плоскостью DBB_1D_1. Ребра пирамиды делятся плоскостью сечения в отношении 1:3 и 1:5. Воспользуйтесь тем, что отношение объемов пирамид, имеющих общий трехгранный угол при вершине, равно отношению произведений длин боковых ребер этих пирамид..

9. $(-\infty;-2)\cup\{-\sqrt{3}\}\cup\{\sqrt{3}\}\cup(2;+\infty)$.

Указание. Сумма расстояний от точки $(x,\ y)$ до концов отрезка $(0;\ -1)$ и $(a;\ 0)$ равна длине этого отрезка. Поэтому первое уравнение описывает точки этого отрезка.

Вариант 2

1. $(-3;-2)\cup(-1;+\infty)$. **2.** 10. **3.** -1; 0.

4. $(3;4]\cup[7;+\infty)$. **5.** 108. **6.** $\frac{10\pi+16}{5}$.

Указание. Область – объединение полукруга и треугольника.

7. $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$.

Указание. Обозначения: $\vec{u}=(3,-2\cos x,-2\sin x)$, $\vec{v}=\left(2\sqrt{3}\cos x,2\sqrt{3}\sin x,1\right)$, $|u|=|v|=\sqrt{13}$. Уравнение: $(\vec{u},\vec{v})=13$. Поэтому $u=v$.

8. 3.

Указание. Боковая грань ASC перпендикулярна основанию пирамиды.

9. $\left(\frac{1}{2};\frac{1+\sqrt{6}}{5}\right]$.

Указание. При $a>1$ длина интервала решения превышает 2, поэтому неравенство имеет более одного целочисленного решения. При $0<a<1$ интервал решения $(2;t(a))$. Потребуем, чтобы $3<t\le 4$.

Физика

Вариант 1

2. $I=\frac{\Delta\varphi}{R}=20$ мА. **3.** $v_{\max}=\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{hc}{\lambda}-A\right)}=2{,}2\cdot 10^5$ м/с.

4. $\varphi=Er=15$ кВ; $q=4\pi\varepsilon_0 Er^2=8{,}3$ нКл.

5. $\beta=\operatorname{arcctg}\frac{2\mu+\sin\alpha\cos\alpha-\mu\cos^2\alpha}{\cos\alpha(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}=\operatorname{arcctg}0{,}7=55°$.

Вариант 2

2. $v_{\text{ср}}=\sqrt{\frac{3p}{\rho}}=500$ м/с. **3.** $\lambda=\frac{hc}{En}=622$ нм.

4. $W_1=\frac{C_1C_3^2U^2}{2(C_1+C_2+C_3)^2}=375$ мДж.

5. $\alpha=\arcsin\frac{2}{3}=42°$.

МОСКОВСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. πn, $n\in \mathbf{Z}$.

Указание. Заметьте, что левая часть уравнения не меньше 1, а правая – не больше 1.

2. $(-1;4-\sqrt{10}]\cup[4+\sqrt{10};+\infty)$.

3. 10.

Указание. На втором этапе мастер и ученик работали одинаковое время, поэтому их производительности относятся как количества изготовленных деталей, т.е. как 10:6.

4. 6.

Указание. Не забудьте убедиться, что найденная критическая точка действительно является точкой экстремума.

5. 3/8.

Указание. а) Проведите $LS\parallel BK$ (рис.7); плоскость LSD отсекает первый тетраэдр $DLCS$, объем которого равен $\frac{1}{8}V$, где V – объем тетраэдра $ABCD$.

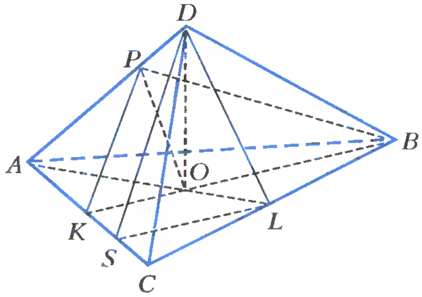


Рис 7

б) Пусть O – центр грани ABC. Проведите $OP\parallel LD$, где $P\in AD$; плоскость BKP отсекает второй тетраэдр $PABK$, объем которого равен $\frac{1}{3}V$.

Вариант 2

1. $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. **2.** $(-3;-2)\cup(3-\sqrt{2};2)$.

3. 30 км/ч. **4.** 4. **5.** 3:13:8.

Вариант 3

1. $[2;3)\cup(3;+\infty)$. **2.** $(0;0{,}01)\cup(0{,}1;1000]$.

Указание. Обозначьте $y=\lg 10x$.

3. $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{8}$, $n\in \mathbf{Z}$.

4. $x_1=-\frac{2}{3}$ – точка максимума, $x_2=\frac{2}{3}$ – точка минимума; промежутки возрастания: $\left[-2\sqrt{2}/3;-2/3\right]$, $\left[2/3;2\sqrt{2}/3\right]$; промежуток убывания: $[-2/3;2/3]$.

5. $\sqrt{2}/2$.

Указание. Рассмотрите сечение CC_1K – тогда станет ясно, что данное в условии сечение есть MAB.

Вариант 4

1. $\sqrt{2}/2$.

Указание. Рассмотрите сечение BDD_1B_1 – тогда станет ясно, что данное в условии сечение есть ACK, где K – середина DD_1.

2. $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$.

Указание. Не забудьте исключить значения x, обращающие знаменатель в ноль.

3. $(0; 100)\cup(1000; +\infty)$.

Указание. Обозначьте $y = \lg x$.

4. $(-1/2; +\infty)$.

5. $x_1 = -2$ – точка максимума, $x_2 = 0$ – точка минимума.

Вариант 5

1. $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Указание. Перенесите 3 в левую часть и разложите ее на множители.

2. (5; 41).

Указание. Заметьте, что числитель отрицателен при всех x.

3. $(-\infty; 6)$.

4. $x_1 = -5$ – точка минимума, $x_2 = 2$ – точка максимума; промежутки убывания: $(-\infty; -5]$, $[2; +\infty)$; промежуток возрастания: $[-5; 2]$.

Замечание: $x_3 = 0$ – критическая точка, не являющаяся точкой экстремума; она входит в промежуток возрастания.

5. $\sqrt{2}\ 2$.

Указание. Сравните заданное сечение с сечением PBC, где P – середина AS.

Задачи устного экзамена

1. $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $-\operatorname{arctg}3+\pi+2\pi k$, $n,k \in \boldsymbol{Z}$.

Указание. Возводя уравнение в квадрат, не забудьте добавить условие $\sin x \ge 0$.

2. $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Указание. Разложите $\operatorname{ctg}^4 2x - 1$ на множители.

3. 185.

Указание. Обозначьте $y = 5^x$ (тогда $5^{-x} = \frac{1}{y}$) и выделите в получившемся выражении $\left(y+\frac{1}{y}\right)^3$.

4. 3.

5. $f\left(1+\sqrt[6]{6}\right)-f\left(\sqrt[3]{7}\right)<0$.

Указание. Найдите промежутки монотонности функции f и воспользуйтесь неравенствам

$$\sqrt[3]{5} < \sqrt[3]{7} < 2 < 1+\sqrt[6]{6}.$$

6. 3.

Указание. Перейдите к неравенству $\frac{\log_2^2(x-2)}{11x-x^2-28} \ge 0$.

7. 1. *Указание.* 1-й способ. Заметив, что $x = 0$ не является решением неравенства, сократите его на x^2.

2-й способ. Подставив в неравенство $x = -1$, получите $a < 1$. Это значит, что при $a < 1$ всегда есть решение $x = -1$. Если же $a \ge 1$, то приведите неравенство к виду $0 \le \left(x^2+x\right)^2+(a-1)x^2 < 0$, которое не выполняется ни при каких x.

8. $a \in [0; 9]$.

Указание. Неравенство $f'(x) \ge 0$ должно выполняться при всех x.

9. 1.

Указание. Не забудьте об ОДЗ.

10. 8.

Указание. Рассмотрите случаи $y < 3$ и $y \ge 3$.

11. $[0; 1/2)$.

Указание. Не забудьте об ОДЗ.

12. $y = 11x$.

Указание. Докажите, что функция строго возрастает и поэтому пересекает ось абсцисс только в одной точке.

13. См. рис.8.

Указание. Воспользуйтесь периодичностью функции $\operatorname{tg} x$.

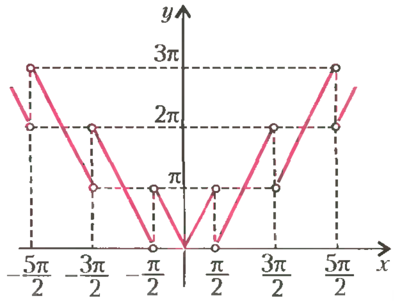


Рис. 8

14. 25/168.

Указание. Выразите S_{BMP} через S_{BMA}, а S_{BMA} – через S_{BCA}.

15. $120\pi/13$.

Указание. Так как треугольник равнобедренный, то основание не может равняться 26 – значит, оно равно 12. Далее воспользуйтесь тем, что точка касания вписанной окружности треугольника, получающегося в сечении, делит боковую сторону на отрезки длины 6 и 20.

Физика

Вариант 1

1. 3). **2.** 2). **3.** 1). **4.** 2). **5.** 3). **6.** 2). **7.** 2). **8.** 1). **9.** 3). **10.** 3). **11.** 1). **12.** 1). **13.** 2). **14.** 3). **15.** 1). **16.** $t = 1{,}5$ с. **17.** $\mu = 0{,}1$. **18.** $Q = 252$ кДж. **19.** $C = 150$ мкФ. **20.** $\Gamma = 1{,}5$.

Вариант 2

1. 3). **2.** 1). **3.** 1). **4.** 3). **5.** 2). **6.** 1). **7.** 2). **8.** 2). **9.** 1). **10.** 2). **11.** 2). **12.** 3). **13.** 1). **14.** 2). **15.** 3). **16.** $v_0 = 9$ м/с. **17.** $P = 10$ кг·м/с. **18.** $Q = 61440$ Дж. **19.** $I_2 = 1$ А. **20.** $N = 20$.

НАПЕЧАТАНО В 2004 ГОДУ

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, Л.Н.Тишков, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»; тел.: 930-56-48;
e-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Заказ № 2440

Отпечатано на ГУ РПП, г. Ржев, ул. Урицкого, 91

При участии ЗАО «РИЦ «Техносфера», тел.: (095) 234-01-10

КоролЬ -ВУНДЕРКИНД

Все чемпионы мира – гении, но не все они были вундеркиндами. И первым вундеркиндом среди шахматных королей был третий чемпион мира Хосе Рауль Капабланка.

Гений шахмат родился в кубинском городе Матансас в благополучной семье, играть научился почти в пеленках, наблюдая за тем, как передвигают фигуры взрослые. Однажды во время партии, которую играл его отец с приятелем, испанским полковником, Хосе Рауль заметил, что конь пошел неправильно – с белого поля на белое, а партнер не обратил внимания. Отец удивился, предложил сыну сесть за шахматный столик, и четырехлетний мальчик неожиданно обыграл его. Вскоре он уже проявлял недюжинное позиционное чутье и высокую скорость расчета вариантов.

Позднее Капабланка писал: «Способность человека к чему бы то ни было часто обнаруживается в раннем детстве и проявляется вследствие какого-нибудь особенного случая, который вырывает интерес ребенка из обычных границ. Со мной это произошло в 4 года, во время поединка за шахматную корону Стейниц – Чигорин (Гавана, 1892). Матч оживленно обсуждался в столице Кубы, в том числе у нас дома».

Убедившись в необыкновенных способностях маленького Хосе Рауля, отец отвел его в Гаванский шахматный клуб. Завсегдатаи клуба великодушно снимали с доски ферзя, но малыш легко выигрывал, однако после партии приходил в сильное возбуждение и долго не мог заснуть. Тогда по совету врачей отец ограничил его домашней игрой, полагая, что тем самым спасет его для шахмат.

Лишь в 8 лет, когда Капабланка поступил в реальное училище в Гаване, ему разрешили посещать шахматный клуб, и уже ни один из его членов не мог давать мальчику никакой форы.

В 12 лет Капабланка успешно сражался со многими известными кубинскими шахматистами.

В конце 1901 года, едва Капабланке исполнилось 13, он встретился в официальном матче с чемпионом Кубы Хуаном Корсо. Победителем объявлялся тот, кто первым выиграет четыре партии. Хосе Рауль начал неудачно – проиграл первые две встречи. Хотя мальчик пользовался большой симпатией публики, после такого старта она была разочарована. Складывалось мнение, что у партнеров разный класс. Но колесо фортуны вскоре повернулось, и Капабланка взял верх в четырех партиях, окончательно покорив посетителей шахматного клуба. Общий счет – с учетом ничьих – 7:6 в его пользу. Хорошее начало большого шахматного пути. Восьмую партию победитель назвал лучшей в матче.

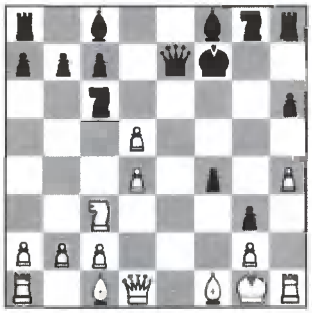
Корсо – Капабланка

Гавана, 1901

Венская партия

1. e4 e5 2. ♘c3 ♘c6 3. f4 ef 4. ♘f3 g5 5. h4 g4 6. ♘g5 h6 7. ♘:f7 ♔:f7 8. d4 d5 9. ed ♕e7+ 10. ♔f2. В шестой партии белые продолжали 10. ♗e2, и после 10...f3 11. gf gf 12. 0-0 ♕h4 13. ♗f3 ♘f6 Капабланка получил выигранную позицию, хотя и не добился цели. Но маневр королем тоже в пользу черных.

10...g3+ 11 ♔g1.



11...♘:d4! В случае 11... ♘d8 12. ♗c4 ситуация на доске была очень запутанной. **12. ♕:d4.** На 12. ♗:f4 решает 12... ♘f5.

12...♕c5 13. ♘e2 ♕b6! 14. ♕:b6. Безнадежно 14. ♗e3 fe 15. ♕:h8 ♗g7 16. ♕h7 ♕:b2 17. ♖e1 ♕f6 18. ♘:g3 ♕f2+ 19. ♔h2 ♘f6.

14...ab 15. ♘d4 ♗c5 16. c3 ♖a4 17. ♗e2 ♗:d4+ 18. cd ♖:d4 19. b3 ♘f6 20. ♗b2 ♖d2 21. ♗h5+ ♘:h5! 22. ♗:h8 f3! 23. gf. Или 23. ♗c3 f2+ 24. ♔f1 ♗f5 25. ♗d2 ♗d3×.

23... ♘f4 24. ♗e5. Вот еще один матовый вариант: 24. ♖e1 ♗h3! 25. ♗c3 ♖:g2+ 26. ♔f1 ♖f2+ 27. ♔g1 ♖f1+ 28. ♖:f1 ♘e2×.

24...♖:g2+ 25. ♔f1 ♖f2+ 26. ♔e1 ♘d3+. Белые сдались.

После матча Хосе Рауль три года почти не садился за доску – заканчивал училище. В 16 лет юноша перебрался в Нью-Йорк овладевать английским и готовиться к поступлению в Колумбийский университет. При этом он серьезно занимался математикой, историей, философией, медициной, даже играл на скрипке, был неплохим спортсменом. Было не до шахмат.

В 1905 году Капабланка начал посещать Манхеттенский шахматный клуб, и вскоре не осталось игроков, которые бы его превосходили. А в 1906 году он уже мог состязаться с лучшими шахматистами мира, особенно в блиц.

В том же году Капабланка поступил на инженерно-химическое отделение Колумбийского университета, получив на приемных экзаменах высший балл. Однако избранная специальность не особенно увлекала кубинца – его все больше поглощали шахматы. Он сыграл более десятка серьезных партий и почти во всех взял верх – например, выступая за университет, пять раз выиграл при одной ничьей.

Раубитшек – Капабланка

Нью-Йорк, 1906

Королевский гамбит

1. e4 e5 2. f4 ef 3. ♘f3 g5 4. ♗c4 ♗g7 5. h4 h6 6. d4 ♘c6 7. c3 d6 8. 0-0 ♕e7 9. ♕b3 ♘d8. Не было резона отдавать пешку g5, а вот после предварительного 9...a6 10. ♘a3 уже хорошо 10... ♘d8. **10. hg hg 11. ♕b5+ ♗d7 12. ♕:g5 ♗f6 13. ♕:f4 ♘e6 14. ♗:e6 ♗:e6 15. e5 de 16. ♘:e5.** Конь в центре не удержится, лучше 16. de ♗g7 17. ♗e3 ♘h6 18. ♕g5 – перспективы белых выше. **16...0-0-0 17. ♘a3 ♖h4 18. ♕g3.** После 18. ♕f2 все было еще не ясно, теперь перевес переходит к черным. **18... ♗:e5 19. ♕:e5 ♖d5 20. ♕g7 ♖g4 21. ♕h7 ♘f6! 22. ♕h8+ ♖d8 23. ♕:f6 ♖dg8!**

24. ♖f2. Забрать ферзя не удается: 24. ♕:e7 ♖:g2+ 25. ♔h1 ♗d5 с неизбежным матом. **24...♖g2+! 25. ♔f1 ♗c4+ 26. ♘:c4 ♖g1×.**

А вскоре началась профессиональная шахматная карьера Капабланки. В 1908 году он покинул Колумбийский университет и отправился в двухмесячную поездку по США, причем всюду имел шумный успех. В 1909 году Капабланка разгромил чемпиона Америки Маршалла, а затем покорил и шахматную Европу. Став одним из главных претендентов на мировое первенство, уже в 1911 году он послал Ласкеру вызов на матч, но тот из-за какой-то обиды отказался от встречи. И зря – вскоре началась первая мировая война, и их поединок состоялся только через десять лет, когда Ласкер заметно сдал. Перевес Капабланки в матче на первенство мира был значителен, и он выиграл без единого поражения. В 20–30-е годы прошлого века кубинец завоевал множество призов в крупнейших состязаниях, а в 1927 уступил корону Алехину. После этого Капабланка еще более десяти лет выступал весьма успешно, но сыграть матч-реванш с Алехиным так и не сумел из-за финансовых проблем.

Е.Гик

Индекс по каталогу
"РОСПЕЧАТЬ"
70465

ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ НА МОНЕТАХ МИРА

Энциклопедист АЛЬ-БИРУНИ (973–около 1050) представлен узбекской серебряной монетой достоинством в 100 сом. В той же серии монет присутствует и АВИЦЕННА (около 980–1037). Ему также посвящена таджикская банкнота номиналом в 20 сомони. Мавзолей Авиценны в городе Исфагане изображен на иранской банкноте достоинством в 200 риалов.

(Подробнее об этих ученых – внутри журнала.)