ISSN 0130-2221
СЕНТЯБРЬ/ОКТЯБРЬ
2004 · №5

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

НЕРАЗЛУЧНЫЕ ГВОЗДИ

Головоломки из сцепленных гвоздей – один из самых популярных видов головоломок. Они соединяют в себе два привлекательных свойства: обманчивую простоту и предчувствие, что задача неразрешима.

Существует два способа разъединить согнутые гвозди, и оба приводят к успеху. Первый способ – практический: если долго крутить «неразлучные» гвозди в руках, то в конце концов они расцепятся.

Второй способ – логический. Пусть каждый гвоздь согнут так, что его стержень образует петлю. Выход из петли только один – через зазор между стержнями. Величина зазора меньше толщины гвоздя, поэтому невозможно просунуть второй гвоздь через зазор. Однако ничто не мешает расположить две петли так, чтобы их зазоры были друг против друга. Тогда зазор одной петли можно провести через зазор другой – и гвозди оказываются свободными.

Так решаются головоломки, в которых острие гвоздя согнуто на 90° по отношению к концу со шляпкой. Задача усложняется, если этот угол равен 180°. Здесь необходимо сводить вместе зазоры между шляпками и стержнями гвоздей.

Когда будете гнуть гвозди, учтите, что зазор в месте пересечения петли должен быть равен 0,75 диаметра гвоздя. Для головоломок с изгибом в 180° зазор между шляпкой и стержнем должен быть чуть больше толщины шляпки. Толщина гвоздей должна быть не менее 5 мм, и лучше если гвозди будут длинными (легче гнуть).

А.Калинин

КВАНТ СЕНТЯБРЬ ОКТЯБРЬ 2004 № 5

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Финансовая математика

В.МАЛЫХИН

Введение

Финансовая математика – что это за наука? Что в ней есть, кроме элементарных подсчетов процентов – простых и сложных? После замечательных работ американских экономистов Марковитца (H.M.Markowitz, 1952 г.) и Тобина (D.Tobin, 1958 г.), за которые их авторы позже получили Нобелевские премии, можно с уверенностью сказать, что такая наука есть.

Чем интересна любая наука? Идеями, в ней содержащимися, прежде всего. В финансовой математике такие идеи есть. Идеи Марковитца и Тобина о строении оптимального портфеля ценных бумаг доступны даже домохозяйкам. Идея их оптимального портфеля очень проста.

Предположим, что Вы имеете 1000000000 долларов (вот почему, кроме всего прочего, «Вы» написано с большой буквы!). Вы хотите купить на всю эту сумму ценных бумаг: облигаций, акций и т.п. Конечно, Вы хотите, чтобы они приносили Вам некоторый доход, но Вы не хотите излишне рисковать. Теория Марковитца и Тобина диктует изящный вывод: Вы должны повторить среди рисковых ценных бумаг Вашего портфеля структуру большого рынка этих бумаг (скажем, фондового рынка США). Например, если на большом рынке 1% всех бумаг по стоимости составляют акции и облигации «General Motors», то и в Вашем портфеле среди рисковых бумаг бумаги этой компании должны составить такую же долю! Инвестор вправе лишь варьировать долю безрисковых ценных бумаг в своем портфеле (больше таких бумаг – меньше доход и меньше риск, и наоборот).

Безусловно, достойны внимания великолепные конструкции опционов, начисто уничтожающие риск. Наверное, как и выводы теории Марковитца и Тобина, эти конструкции должен знать как можно более широкий круг людей – и не только финансистов.

Конечно, нужно трезво сознавать, что все эти финансовые инструменты придуманы для того, чтобы извле-

кать прибыль на финансовом рынке, т.е. из остальных участников этого рынка. Давний вывод о том, что на финансовом рынке выигрывают лишь «акулы», лишь те, кто имеет больше денег, кто имеет больше информации, остается верным и по сегодняшний день.

Понятно, что финансы являются лишь частью (очень важной, но всего лишь частью) всей экономики. Настоящие лидеры экономики – это производители материальных ценностей и услуг: автомобилей, магнитофонов, компьютеров и т.п. Только там, в реальном секторе экономики, делаются «настоящие» деньги, а финансовая сфера, какие бы цели она ни преследовала сама по себе, вынуждена заниматься обслуживанием этого сектора.

Основные темы финансовой математики разбиваются на две части:

I. Финансовые расчеты в условиях определенности: наращение простых процентов и сложных процентов; потоки платежей, ренты; кредитные расчеты; анализ инвестиционных процессов; общее понятие доходности финансовых операций; различные виды доходности операций; финансовые инструменты и их характеристики.

II. Основы стохастической математики: изменение расчетных схем в условиях неопределенности; классическая схема оценки финансовых операций в условиях неопределенности; характеристики вероятностных финансовых операций; общие методы уменьшения рисков; модели ценообразования активов; опционы и ценообразование опционов; оптимальный портфель ценных бумаг; финансовый рынок и его модели.

Далее описаны четыре темы из части I и две темы из части II. Автор старался обойтись только школьной математикой.

Наращение простых и сложных процентов

Это самая простая тема в финансовой математике и, вероятно, самая востребованная. В ней изучается изменение денежных сумм во времени. Люди берут кредиты (ссуды) и сами ссужают деньги (например, кладут их в банк) в надежде улучшить в будущем свое материальное положение (или для каких-либо других целей). При этом они имеют в виду какие-нибудь конкретные действия, например, намереваются купить магазин и за счет прибыли от работы выплатить взятые взаймы деньги, или накопить на машину и совершать приятные путешествия. Для того чтобы заинтересовать других людей ссудить необходимые деньги, им обязуются вернуть в будущем бóльшую сумму. Это и есть основание теории процента.

1. Наращение простых процентов. Основные термины здесь – единичный промежуток начисления и ставка процента. Ставку процента обозначаем i. Фиксируем какую-нибудь сумму P. При наращении простых процентов по ставке i каждая следующая сумма больше предыдущей на долю i от начальной суммы P, т.е. на iP. Таким образом, к концу единичного промежутка начисления сумма P возрастет на iP и станет $P_1 = P + iP = P(1+i)$, к концу 2-го промежутка начисления эта сумма возрастет еще на iP и станет $P_2 = P_1 + iP = P(1+i) + iP = P(1+2i)$ и т.д. К концу n-го промежутка начисления наращенная сумма станет $P_n = P(1+ni)$. Итак, последовательность наращенных сумм $P, P_1, \ldots, P_n$ есть арифметическая прогрессия с начальным членом P и разностью iP.

Пример 1. Пусть $P = 1000$, $i = 10\%$, т.е. как доля $i = 0{,}1$. Следовательно, наращенные по простым процентам суммы таковы:

$$1000,\ 1000 + 0{,}1\cdot 1000 = 1000 + 100 = 1100,$$

$$1100 + 100 = 1200,\ 1200 + 100 = 1300 \text{ и т.д.}$$

Пример 2. Годовая ставка простых процентов равна 12,5%. Через сколько лет начальная сумма удвоится?

Надо решить уравнение $(1 + 0{,}125\,n) = 2$, т.е. $0{,}125n = 1$. Получаем $n = 1/0{,}125$. *Ответ*: через 8 лет.

Разность наращенной суммы и начальной называется *процентными деньгами*. При наращении простых процентов процентные деньги растут по арифметической прогрессии.

2. Наращение сложных процентов. При наращении сложных процентов по ставке i каждая следующая сумма возрастает на долю i от предыдущей. Таким образом, к концу единичного промежутка начисления сумма P возрастет на долю i и станет $P_1 = P + iP = P(1+i)$, к концу 2-го промежутка начисления эта сумма возрастет еще на долю i, но от P_1, и станет $P_2 = P_1 + iP_1 = P(1+i) + iP(1+i) = P(1+i)^2$ и т.д. К концу n-го промежутка начисления наращенная сумма станет $P_n = P(1+i)^n$. Итак, последовательность наращенных сумм $P, P_1, \ldots, P_n$ есть геометрическая прогрессия с начальным членом P и знаменателем прогрессии $(1 + i)$.

Пример 3. Пусть $P = 1000$, $i = 10\%$, т.е. как доля $i = 0{,}1$. Следовательно, наращенные по сложным процентам суммы таковы:

$$1000,\ 1000 + 0{,}1\cdot 1000 = 1000 + 100 = 1100,$$

$$1100 + 0{,}1\cdot 1100 = 1210,\ 1210 + 0{,}1\cdot 1210 = 1331$$

и т.д.

Пример 4. Годовая ставка сложных процентов равна 8%. Через сколько лет начальная сумма удвоится?

Надо решить уравнение $(1+0{,}08)^n = 2$. Логарифмируем по основанию натуральных логарифмов и получаем $n = \ln(2)/\ln(1{,}08)$. *Ответ*: через 9 лет.

Из этого примера видно, что вычисления со сложными процентами более сложные, чем с простыми. И вообще, для занятий по финансовой математике необходимо иметь хороший калькулятор (нужно, чтобы можно было возводить любое положительное число в любую степень).

Формулы наращения простых процентов $P_n = P(1+ni)$ и сложных процентов $P_n = P(1+i)^n$, выведенные для целых положительных n, вполне могут применяться и для нецелых t.

Сумма P_t, наращенная по ставке i простых процентов, через t промежутков начисления станет $P_t = P(1+ti)$. Сумма P_t есть линейная функция t.

Иллюстрация Е.Силиной

Сумма P_t, наращенная по ставке i сложных процентов, через t промежутков начисления станет $P_t = P(1+i)^t$. Сумма P_t есть показательная функция t.

Пример 5. 12 января в банк положили сумму 1000 до востребования под ставку 12% годовых сложных процентов. Какую сумму снимет вкладчик 1 сентября?

Воспользуемся формулой наращения сложных процентов $P_t = P(1+i)^t$. Но как вычислить t? Надо признать, что однозначного ответа в этой ситуации нет. Изберем самый простой вариант: будем считать, что в году 360 дней, в квартале – 90, в одном месяце – 30 и т.д. (учтем, что в году есть несколько праздничных дней и т.п.). Тогда $t = (30 \cdot 7 + 17)/360$, и искомая сумма есть 1074.

При работе со сложными процентами при небольших ставках иногда для приближенного оценивания полезно так называемое

Правило 72. Если процентная ставка есть a%, то удвоение денежной суммы по такой ставке происходит примерно за $72/a$ лет.

Например, согласно этому правилу при ставке 3% удвоение происходит за 24 года.

3. Мультиплицирующие множители. Для облегчения расчетов со сложными процентами составлены таблицы мультиплицирующих множителей.

Мультиплицирующий множитель $M(n,i)$ есть $(1+i)^n$. Он показывает, во сколько раз возрастет за n лет сумма, положенная в банк под i процентов годовых. Величина $M(n,i)$ есть будущая стоимость одной денежной единицы – через n лет при ставке процента i. Так, $M(5,8)$ есть 1,469. Таблицы таких множителей имели большое значение для финансовых расчетов ранее – когда не было электронных калькуляторов. Но и сейчас во многих ситуациях такие таблицы весьма удобны. Ниже приведен фрагмент таблицы мультиплицирующих множителей $M(n,i)$.

Мультиплицирующие множители

$n \backslash i$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	1,093	1,125	1,158	1,191	1,225	1,260	1,295	1,331	1,368
4	1,126	1,170	1,216	1,262	1,311	1,360	1,412	1,464	1,518
5	1,159	1,217	1,276	1,338	1,403	1,469	1,539	1,611	1,685
6	1,194	1,265	1,340	1,419	1,501	1,587	1,677	1,772	1,870
7	1.230	1.316	1,407	1.504	1,606	1,714	1,828	1,949	2,076
8	1,267	1,369	1,477	1,594	1,718	1,851	1,993	2,144	2,305
9	1,305	1,423	1,551	1,689	1,838	1,999	2,172	2,358	2,558
10	1,344	1,480	1,629	1,791	1,967	2,159	2,367	2,594	2,839

4.Эквивалентность во времени денежных сумм. Денежные суммы $S(T)$ в момент времени T и $s(t)$ в момент t называются эквивалентными по ставке сравнения i, если $S(T) = s(t)(1+i)^{T-t}$. При $T > t$ это означает, что сумма $s(t)$, наращенная по ставке i сложных процентов, превратится в момент T в сумму $S(T)$; однако можно считать, что T может быть и меньше t, тогда это означает, что сумма $S(T)$, наращенная по ставке i сложных процентов, превратится в момент t в сумму $s(t)$. Вышеуказанная формула автоматически учитывает оба эти случая. Вместе с тем, можно говорить и по-другому: при $T > t$ эквивалентность сумм $S(T)$ и $s(t)$ означает, что сумма $S(T)$, уменьшающаяся при движении в прошлое за каждый единичный промежуток в $1/(1+i)$ раз, к моменту t превратится в точности в сумму $s(t) = S(T)/(1+i)^{T-t}$. Такой пересчет будущей суммы к настоящему моменту называется ее *дисконтированием*, или приведением, или нахождением ее современной величины.

Пример 6. Какая сумма предпочтительнее при ставке 6%: \$1000 сегодня или \$2000 через 8 лет?

Найдем современную величину \$2000 через 8 лет при ставке 6%: $A = 2000/(1+0,06)^8$. Используем таблицу мультиплицирующих множителей и находим $M(8,6) =$ $= 1,594$. Итак, $A = 2000/1,594 = 1254 > 1000$. Следовательно, надо предпочесть сумму \$2000 через 8 лет.

5. Влияние инфляции на ставку процента. Говорят, что инфляция (или темп инфляции) составляет долю α в год, если один и тот же набор товаров стоит в конце года в $(1+\alpha)$ раз больше, чем в начале этого года. Можно также сказать, что в $(1+\alpha)$ раз уменьшилась покупательная способность одной денежной единицы. Последнее означает, что если в начале года на 25 рублей можно было купить, например, 1 кг сахара, то в конце года – только, скажем, 900 г. Ясно, что инфляция уменьшает реальную ставку процента, т.е. ставку процента с учетом инфляции. Действительно, одна денежная единица возрастает за год в $(1 + i)$ раз из-за наращения процентов, но ее покупательная способность уменьшается в $(1+\alpha)$ раз из-за инфляции. Таким образом, ее реальная ценность – покупательная способность – станет $(1+i)/(1+\alpha)$, и годовая реальная ставка процента есть $(1+i)/(1+\alpha)-1=(i-\alpha)/(1+\alpha)$. Видно, что при малой инфляции (когда α мало) реальная процентная ставка меньше номинальной (т.е. указанной в договоре с банком) приблизительно на величину инфляции. Для того чтобы номинальная ставка i обеспечивала наращение реальной ценности денежных сумм на долю j в год при годовой инфляции α, она должна удовлетворять уравнению $(i - \alpha)/(1 + \alpha) = j$, откуда $i = \alpha + j(1+\alpha)$.

Потоки платежей. Ренты

Потоки платежей весьма часто встречаются на практике. Зарплата выплачивается, как правило, в виде потока платежей 2 раза в месяц, примерно через 15 дней. Плата за квартиру – поток, как правило, ежемесячных платежей. Семья откладывает на покупку автомобиля, внося ежегодно на счет в банк некоторую сумму. И т.д. Поэтому изучение потоков платежей очень важно.

1. Потоки платежей. Поток платежей – это последовательность величин самих платежей (со знаками) и моментов времени, когда они осуществлены.

Платеж со знаком «+» (знак может быть опущен) – это поступление, платежи со знаком «–» представляют собой выплаты.

Поток называется конечным или бесконечным, смотря по количеству платежей в нем.

Пусть $R = (r_k, t_k)$ – поток платежей, в нем r_k – платежи, t_k – соответствующие моменты времени. Кроме того, предполагается знание ставки процента i, обычно неизменной в течение всего потока.

Величиной потока R в момент T называется сумма платежей потока, дисконтированных к этому моменту: $R(T) = \sum_k r_k \ (1+i)^{t_k - T}$.

Достаточно найти величину потока в какой-то момент T, тогда в любой другой момент t величина потока равна $R(t) = R(T)/(1+i)^{t-T}$.

Величина $R(0)$ называется *современной величиной потока*; если есть последний платеж, то величина потока в момент этого платежа называется *конечной величиной потока*.

Пример 7. Пусть поток есть $R = (-2000,1); (1000,2); (2000,3)$:

0	1	2	3
	−2000	1000	2000

Найдем характеристики этого потока при ставке процента i = 10%.

Сначала найдем современную величину потока:

$$R(0) = -2000/(1+0{,}1)^1 +$$
$$+\ 1000/(1+0{,}1)^2 + 2000/(1+0{,}1)^3 =$$
$$= -\ 1818{,}2 + 826{,}4 + 1502{,}6 = 511.$$

Теперь можно найти и конечную величину потока:

$$R(3) = R(0)(1+0{,}1)^3 = 680.$$

Поток положительных платежей с постоянными промежутками между ними называется *рентой*. Часто сами платежи также являются одинаковыми. В дальнейшем рассматриваются только ренты с одинаковыми платежами.

2. Конечная годовая рента. Это самая простая рента: в ней только один платеж r в год, длительность ее n лет, годовая процентная ставка i.

На рентные платежи начисляются сложные проценты.

Если платежи поступают в конце очередного промежутка, то рента называется *постнумерандо*, в начале – *пренумерандо*.

Пример 8. Рассмотрим 5-летнюю ренту с годовым платежом 1000 руб., процентная ставка i = 10%:

года	0	1	2	3	4	5
годовые платежи		1000	1000	1000	1000	1000
всего на счете			2100	3310	4641	6105,1

Рассматриваемая рента постнумерандо.

Поясним движение денежных сумм. В конце 1-го года в банк вносится 1000 руб. В конце 2-го эта сумма возрастает за счет начисленных 10-ти процентов до 1100 руб. Вместе с очередным внесенным платежом в 1000 руб. на счете уже 2100. В конце 3-го года эта сумма возрастает за счет начисленных 10-ти процентов до 2310 руб. Вместе с очередным внесенным платежом на счете уже 3310. И т.д. Наращенная сумма ренты равна 6105,1 руб. Современную величину ренты найдем, дисконтируя к моменту 0 наращенную сумму 6105,5. Получаем $6105{,}5/(1{,}1)^5 = 5550$.

Изучим подробно конечную годовую ренту (r,n,i) в общем виде:

года	0	1	2	3	...	n
платежи		r	r	r	...	r

Главное – найти современную величину этой ренты. Имеем

$$A = r/(1+i)^1 + r/(1+i)^2 + \ldots + r/(1+i)^n =$$
$$= r\left((1+i)^{-1} + \ldots + (1+i)^{-n}\right).$$

Как видно, в скобках стоит сумма n членов геометрической прогрессии с 1-м членом $(1+i)^{-1}$ и знаменателем $(1+i)^{-1}$. Как известно, сумма n членов геометрической прогрессии с 1-м членом b_1 и знаменателем q равна $b_1\left(q^n - 1\right)\ (q-1)$, или $(b_n q - b_1)/(q-1)$. Следовательно, сумма в скобках есть $\left(1-(1+i)^{-n}\right)/i$, и потому современная величина ренты есть $A = r\left(1-(1+i)^{-n}\right)/i$.

Величина $\left(1-(1+i)^{-n}\right)/i$ обозначается $a(n,i)$ и называется *коэффициентом приведения ренты*. С учетом этого обозначения имеем $A = ra(n,i)$.

Зная современную величину ренты, можно легко найти конечную ее величину S, которая называется еще наращенной величиной ренты: $S = A(1+i)^n$, или $S = ra(n,i)(1+i)^n = r\left((1+i)^n - 1\right)/i$

Величина $\left((1+i)^n - 1\right)/i$ обозначается $s(n,i)$ и называется *коэффициентом наращения ренты*. С учетом этого обозначения имеем $S = rs(n,i)$.

Величины $a(n,i)$ и $s(n,i)$ связаны очевидным соотношением: $s(n,i) = a(n,i)(1+i)^n$, или $s(n,i) = a(n,i)\ M(n_i,i)$ ($M(n_i,i)$ – это мультиплицирующий множитель).

Коэффициент наращения $s(n,i)$ показывает, во сколько раз наращенная величина ренты больше ее годового платежа. Аналогичный смысл имеет и коэффициент приведения ренты: он показывает, во сколько раз современная величина ренты больше ее годового платежа. Отметим также следующий смысл понятия «современная величина ренты»: если в момент 0 положить в банк современную величину ренты под i процентов годовых, то к концу n-го года она вырастет до наращенной величины ренты S.

Ниже приведены фрагменты таблиц коэффициентов приведения и наращения годовой ренты.

Коэффициенты приведения годовой ренты

$$a(n,i) = \left(1-(1+i)^{-n}\right)/i$$

$n \backslash i$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	2,829	2,775	2,723	2,673	2,624	2,577	2,531	2,487	2,444
4	3,717	3,630	3,546	3,465	3,387	3,312	3,240	3,170	3,102
5	4,580	4,452	4,329	4,212	4,100	3,993	3,890	3,791	3,696
6	5,417	5,242	5,076	4,917	4,767	4,623	4,486	4,355	4,231
7	6,230	6,002	5,786	5,582	5,389	5,206	5,033	4,868	4,712
8	7,020	6,733	6,483	6,210	5,971	5,747	5,535	5,335	5,146
9	7,786	7,435	7,108	6,802	6,515	6,247	5,995	5,759	5,537
10	8,530	8,110	7,722	7,360	7,024	6,710	6,418	6,145	5,889

Коэффициенты наращения годовой ренты

$$s(n,i) = \left((1+i)^n - 1\right)/i$$

$n \backslash i$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3,091	3,122	3,153	3,184	3,215	3,246	3,278	3,310	3,342
4	4,184	4,246	4,310	4,375	4,440	4,506	4,573	4,641	4,710
5	5,309	5,416	5,526	5,637	5,751	5,867	5,985	6,105	6,228
6	6,468	6,633	6,802	6,975	7,153	7,336	7,523	7,716	7,913
7	7,662	7,898	8,142	8,394	8,654	8,923	9,200	9,487	9,783
8	8,892	9,214	9,549	9,897	10,26	10,63	11,02	11,43	11,85
9	10,15	10,58	11,02	11,49	11,97	12,48	13,02	13,57	14,16
10	11,46	12,00	12,57	13,18	13,81	14,48	15,19	15,93	16,72

Применение коэффициентов приведения и наращения покажем на примере.

Пример 9. Найти современную и наращенную величины годовой ренты с $r = 1000$, $n = 8$, $i = 8\%$.

Находим по таблицам $a(8,8) = 5{,}747$, $s(8,8) = 10{,}637$. Значит, современная величина ренты равна 5747, наращенная составляет 10637. Для контроля посмотрев в таблицу мультиплицирующих множителей, находим $M(8,8)$=1,851. Проверка: $5747 \cdot 1{,}851 = 10638$.

3. Вечная годовая рента. Под такой рентой понимается рента, последовательность платежей которой неограничена – предполагается, что рента будет выплачиваться неограниченно долго. Наращенная величина такой ренты бесконечна, но современная величина равна $A = r/i$. Докажем это.

Современная величина такой ренты есть бесконечный ряд дисконтированных к современному моменту платежей, т.е.

$$A = r/(1+i) + r/(1+i)^2 + \ldots + r/(1+i)^n + \ldots = r/i$$

(надо использовать сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии).

Пример 10. Бизнесмен арендовал у барона виллу за \$10000 в год. Какова выкупная цена аренды при годовой ставке процента 5%?

Эта выкупная цена есть современная величина всех будущих арендных платежей и равна $A = r/i$ =200000 долларов. Между прочим, \$10000 – это в точности годовые процентные деньги, которые стал бы получать барон с \$200 000, помещенных в банк под упомянутую процентную ставку.

Кредитные расчеты

Займ, кредит, ссуда – древнейшие финансовые операции. По латыни «creditum» означает «ссуда»; в слове «кредит» здесь ударение на 2-м слоге, если же сделать ударение на первом слоге, то такой «кредит» – это правая часть бухгалтерских проводок. Итак, все три слова «займ», «кредит», «ссуда» означают одно и то же – предоставление денег или товаров в долг на условиях возвратности и, как правило, с уплатой процентов. Тот, кто выдает деньги или товары в кредит, называется кредитор (с ударением на последнем слоге), кто берет – заемщик (или дебитор – с ударением также на последнем слоге). Условия погашения кредитов (займов, ссуд) весьма разнообразны и имеют существенное значение. Рассмотрим несколько способов погашения кредитов.

1. Погашение займа одним платежом в конце. Пусть займ d выдан на n лет под i сложных годовых процентов. К концу n-го года наращенная его величина станет $d(1+i)^n$. Если предполагается отдать займ одним платежом, то это и есть размер этого платежа.

Пример 11. Займ величиной 20000 рублей был выдан на 8 лет под 10% годовых. Если отдать этот займ одним платежом, каков размер этого платежа?

По таблице мультиплицирующих множителей находим $M(8,10) = 2{,}144$. Значит, искомый платеж равен $20000 \cdot 2{,}144 = 42880$ рублей.

2. Погашение основного долга одним платежом в конце. Сам займ называется основным долгом, а наращиваемый добавок – процентными деньгами. Пусть займ d выдан на n лет под i сложных годовых процентов. За 1-й год процентные деньги составят id. Если их выплатить, то останется снова только основной долг в размере d. И так и будем выплачивать в конце каждого года наращенные за этот год процентные деньги id. В конце n-го, последнего года выплаты составят величину $id + d$ – процентные деньги за последний год и основной долг.

3. Погашение основного долга равными годовыми выплатами. Пусть займ d выдан на n лет под i сложных годовых процентов. При рассматриваемом способе погашения в конце каждого года выплачивается n-я доля основного долга, т.е. величина d/n. В конце 1-го года, кроме того, платятся проценты с суммы d, которой пользовались в течение этого года, т.е. еще id. Весь платеж в конце 1-го года равен $r_1 = d/n + id$. В конце 2-го года выплата составит $r_2 = d/n + i(d - d/n)$ – n-я доля основного долга плюс процентные деньги с суммы $(d - d/n)$, которой пользовались в течение 2-го года, и т.д., так что в конце $(k+1)$-го года платеж $r_{k+1} = d/n + i(d - kd/n)$. Легко видеть, что платежи $r_1, r_2, \ldots$ образуют убывающую арифметическую прогрессию с разностью id/n, первым членом $r_1 = d/n + id$ и последним $r_n = d/n + id/n$.

(Продолжение см на с. 18)

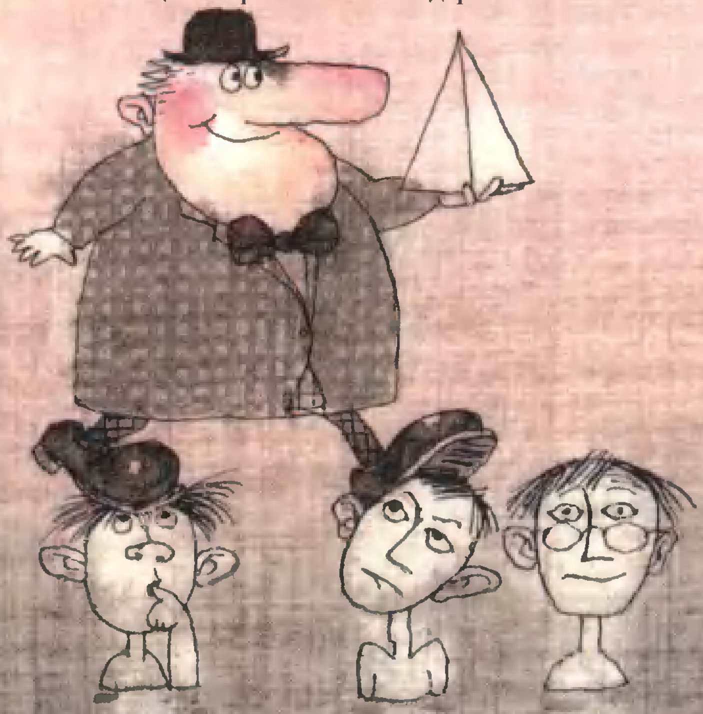
Кинетика социального неравенства

К.БОГДАНОВ

Общество можно представить как пирамиду, на вершине которой находится его элита, состоящая из людей, обладающих властью и большими материальными ценностями, а нижние этажи отведены, как принято говорить, простым людям. Зависть многочисленных жителей нижних этажей к богатству тех немногих, кто оказался на самом верху, часто бывает трудно отличить от любви к справедливости. Так как элита общества расставаться со своими богатствами не собирается, то законное стремление простых людей жить лучше всегда наталкивается на сопротивление жителей верхних этажей этой пирамиды. Таким образом, пирамида нашего общества – вечный повод для революционной борьбы бедных с богатыми, а история человечества – история борьбы за социальное равенство.

Социологи, многим из которых чувство зависти тоже не было чуждо, не раз давали советы, как построить общество, где все были бы равны. Если искать геометрические аналогии, то «общество равных» можно было бы представить себе в виде диска очень большого диаметра с высокой башней в центре, из окон которой выглядывают несколько представителей из «равных», ответственных за поддержание равенства.

К сожалению, история показала, что теория построения «общества равных» не выдерживает испытание практикой хотя бы из-за того, что некоторые люди не хотят быть «равными» другим и таким своим поведением отвлекают непомерно большие материальные средства общества на поддержание равенства.



Не вдаваясь в дальнейшую полемику о том, каким должно быть современное общество, чтобы каждому в нем жилось хорошо, попытаемся лишь ответить на вопрос, почему торговые отношения между членами общества приводят к тому, что в руках меньшей части общества оказывается бóльшая часть его богатств. Но сначала посмотрим, какие существуют оценки социального неравенства.

Парето пересчитывает чужие богатства

Первым, кто описал математической формулой социальное неравенство, был итальянский экономист Вильфредо Парето. В 1896 году он публикует «Курс политической экономии», где собраны статистические данные о распределении доходов в различных странах. Анализируя их, Парето приходит к заключению, что во все времена (с XVI по XIX в.в.) и во всех странах распределение доходов можно описать следующей формулой, которая с тех пор носит его имя:

$$\log N = \log a - b \log x \,,$$

где N – число людей, имеющих доход больше x, а a и b – постоянные, характерные для данной страны и данного времени, при этом b составляет около 1,5.

Однако в 30-е годы прошлого века выяснилось, что Парето изучал статистику доходов только богатых и очень богатых людей того времени, в то время как статистика людей с малыми и средними доходами была просто никому не известна. Когда же стали анализировать распределение доходов «простых» людей, то оказалось, что эта зависимость очень близка к экспоненциальной, а соответствующая формула Парето принимает вид

$$N(x) = \frac{1}{M} e^{-\frac{x}{M}} dx \,,$$

где $N(x)$ – относительная доля людей, обладающих состоянием (в денежном выражении) больше x, но меньше $x + dx$, а M – средний доход «простых» людей.

Только в конце 90-х годов прошлого века физики обратили внимание на то, что формула, описывающая распределение доходов в обществе, очень похожа на распределение Больцмана–Гиббса–Максвелла, которое позволяет оценить относительную долю f молекул газа, имеющего температуру T, чья механическая энер-

Иллюстрация П.Чернуского

гия находится в пределах $E \pm dE/2$:

$$f = \frac{e^{-\frac{E}{kT}}}{kT} dE, \qquad (1)$$

где k – постоянная Больцмана.

Что же общего между распределением механической энергии среди молекул газа и распределением доходов в обществе? Оказалось, что между этими, казалось бы, далекими друг от друга процессами действительно много общего. А именно, в обоих случаях соблюдаются законы сохранения. При столкновении двух молекул газа их общая механическая энергия не изменяется, а может лишь переходить от одной молекулы к другой. Аналогичный закон действует и при «столкновении» продавца и покупателя товаров или услуг. После совершения сделки состояние одного из них (покупателя или продавца) становится больше, а другого – на столько же меньше, хотя они могут и не догадываться об этом, так как точную цену товара или услуги определить невозможно. Закон сохранения суммарного богатства действует также при обмане или грабеже – богатство лишь переходит от одного человека к другому.

Объясняем компьютеру, как торговать

Уверен, что многим такая аналогия между обществом и газом все же кажется недостаточной. Для того чтобы объяснить экспоненциальный характер распределения богатства в обществе, смоделируем, как торговля между членами общества (честная и нечестная) перераспределяет богатство внутри него.

Пусть наша модель общества состоит из 10000 граждан. Конечно, чем больше граждан в обществе, тем *лучше* для модели, но увеличение размеров общества, например, до 100000 увеличило бы время вычислений одной задачи на компьютере автора до 2 часов и сделало бы написание статьи весьма проблематичным. С другой стороны, если бы результаты моделирования зависели от размеров общества в диапазоне от 10000 до 100000, то эту зависимость можно было бы увидеть при увеличении численности от 1000 до 10000, но такой зависимости обнаружено не было. Таким образом, 10000 человек выглядят вполне разумной и удобной величиной для моделирования.

Чтобы начать торговаться (продавать и покупать), члены общества должны иметь какой-то стартовый капитал и общие правила торговли. Поэтому раздадим всем гражданам по состоянию, эквивалентному 100 рублям, и введем следующие правила торговли:

А) раз в день каждого гражданина оповещают о том, с кем ему сегодня встречаться для торговли; этот список генерируется компьютером и является случайным;

Б) когда происходит запланированная встреча продавца и покупателя, компьютер случайным образом определяет того, кто получает выгоду от торговли, и ее размер; соответственно, богатство неудачника уменьшается на ту же величину;

В) выгода от торговли может быть

• В1 – постоянной величиной, как, например, в некоторых видах лотереи или случайных сбоях компьютера кассового аппарата,

• В2 – случайно определяемой долей богатства неудачника,

• В3 – случайно определяемой долей суммарного богатства участников сделки;

Г) в тех случаях, когда государство собирает налог со всех, кто получил выгоду во время торговли, оно распределяет его поровну среди всех членов общества.

Владеющим навыками программирования будет несложно написать программу, которая бы «следила» за обществом, описанным выше, и тем, как меняется благосостояние отдельных его граждан. Главное – это выбрать язык программирования, предназначенный для работы с большими массивами переменных. Иначе вы будете тратить часы для получения лишь одного распределения, и можете потерять интерес к данной проблеме. Все приведенные в статье данные были получены, используя программирование на языке IDL (версия 5.5), разработанном компанией Research Systems (www.ResearchSystems.com).

Рассмотрим сначала такой вид торговли (В1), когда каждый день продавец и покупатель случайно обманывают друг друга, ничего не подозревая об этом. Это может происходить, например, из-за неисправного кассового аппарата, который, печатая чек, случайно уменьшает или увеличивает цену на 1 рубль. Назовем такое общество «В1», всем его членам дадим по 100 рублей и включим компьютер.

Следим за движением денег в обществе «В1»

На рисунке 1 показано распределение богатств среди 10000 членов общества «В1» на следующий день после начала торговли; здесь по оси ординат отложено количество членов общества, обладающих богатством, обозначенным по оси абсцисс в рублях. Видно, что несколько тысяч членов общества увеличили или уменьшили свое состояние на один, два или даже три рубля. Приблизительно треть всех членов общества, похоже, вообще не участвовала в торговле, так как в случайной выборке компьютера их номеров не оказалось, а другим пришлось поторговаться с соседями по обществу 2 или даже три раза. Однако следующие случайные выборки, очевидно, скомпенсируют этот «недочет», и, скажем, за год все члены общества сходят на импровизированный рынок по 364–365 раз.

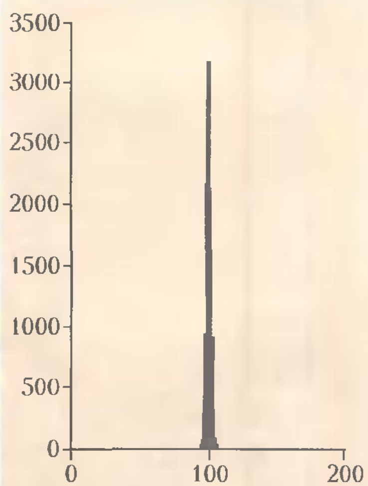


Рис.1. Распределение денег в обществе «В1» на следующий день после начала торговли с использованием сломанного кассового аппарата

На рисунке 2 показано, как изменилось распределение богат-

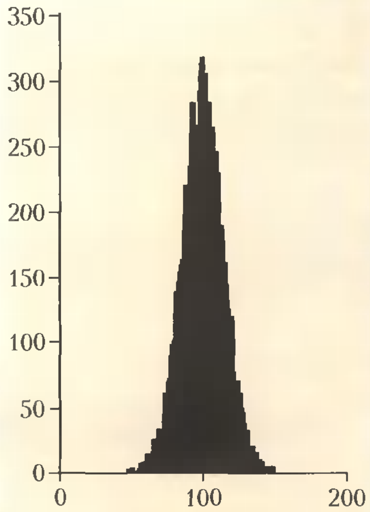


Рис.2. Распределение денег в обществе «В1» через 100 дней после начала торговли с использованием сломанного кассового аппарата

ства через 100 дней (или приблизительно через 3 месяца) пользования испорченными кассовыми аппаратами. Общество «В1» слегка расслоилось, и богатство нескольких самых удачливых его членов (150 рублей) уже в три раза превышает состояние его самых бедных граждан (50 рублей). Заметим, однако, что пик графика (гистограммы), как и на рисунке 1, находится на отметке 100 рублей, график по-прежнему остался симметричным и лишь расползся по ширине и, соответственно, уменьшился по высоте. Иными словами, 100 рублей и через 3 месяца остались наиболее вероятной величиной состояния в обществе, а количество обедневших (площадь гистограммы слева от 100 рублей) по-прежнему равно количеству обогатившихся (площадь гистограммы справа от 100 рублей).

В обществе «В1» появляются нищие

Гистограмма, иллюстрирующая распределение состояний в обществе «В1» через 3 года торговли (1000 дней) с неисправным кассовым аппаратом, показана на рисунке 3. Как видно, за это время расслоение в обществе стало еще более заметным, и в нем даже появились граждане (их около 15), не имеющие никаких средств. Однако они могут принимать участие в актах торговли, надеясь на ошибку кассового аппарата и зачисление на их счет 1 рубля. Но по-прежнему наиболее вероятным состоянием члена общества «В1» остается богатство в 100 рублей и соответствующий график выглядит таким же симметричным.

Со временем количество полностью разоренных продолжает увеличиваться, и через 2000 дней (или через 5,5 лет) после начала жизни общества «В1» оно уже составляет более 40 человек (рис.4). Однако гистограмма все еще имеет различимый пик на отметке 100 рублей.

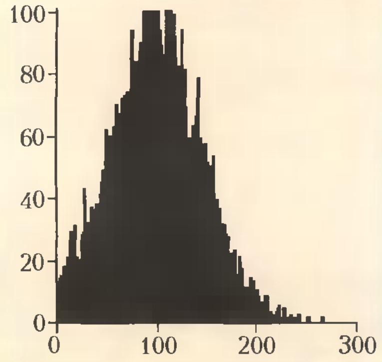


Рис.3. Распределение денег в обществе «В1» через 1000 дней

Через 3000 дней, как показывает гистограмма на рисунке 5, количество полностью разоренных членов общества «В1» уже близко к 60, а распределение не имеет отчетливого максимума. Кроме того, гистограмма уже не выглядит симметричной и представляет собой монотонно убывающую функцию.

Прошло 55 лет

Ну, а теперь попросим компьютер построить распределение богатств в обществе «В1» через 20000 дней (или 55 лет) после начала торговли с использованием сломанных кассовых аппаратов (рис.6). Отметим сначала, что это распределение практически не отличается от распределений, полученных после 5000 или 10000 дней. Поэтому можно утверждать, что распределения, соответствующее 100000 дням или даже одному миллиону дней, тоже не будут отличаться от показанной на рисунке 6 гистограммы.

Таким образом, торговые отношения в обществе, где кассовые аппараты барахлят, приводят к такому перераспределению богатств в нем, что гистограмма становится похожей на экспоненту (см. сплошную кривую на рисунке 6). Заметим, что стремление общества к экспоненциальному распределению доходов не зависит от начальных условий. Автор моделировал жизнь

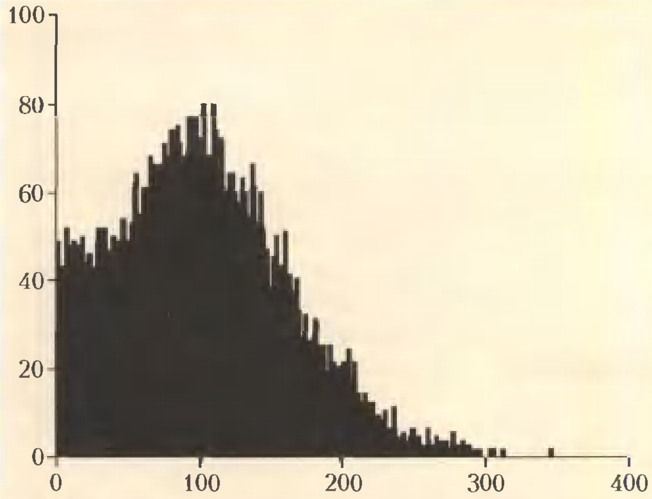


Рис.4. Распределение денег в обществе «В1» через 2000 дней

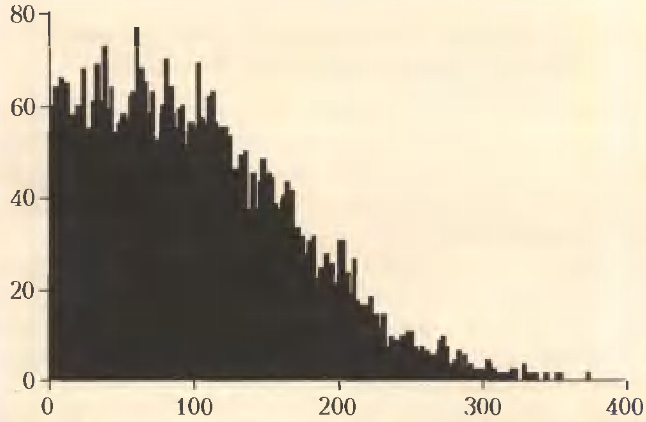


Рис.5. Распределение денег в обществе «В1» через 3000 дней

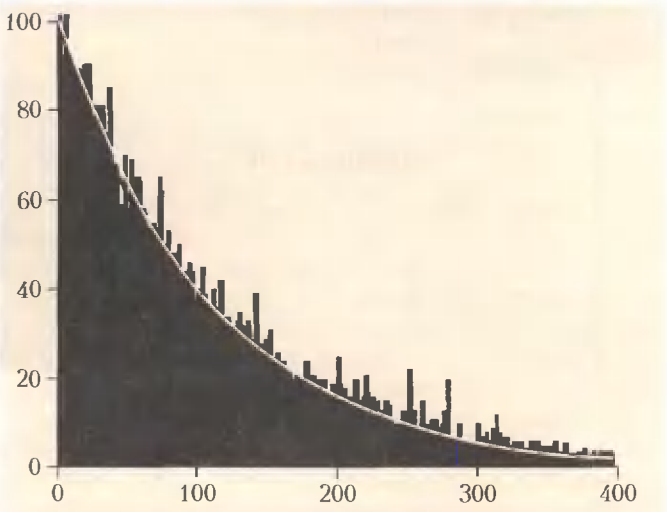


Рис.6. Распределение денег в обществе «B1» через 20000 дней после начала торговли с использованием сломанного кассового аппарата. Цветная линия соответствует экспоненциальной кривой

таких торговых обществ при самых разных начальных ситуациях и правилах торговли, а именно:

- при равномерном распределении богатств перед началом торговли, т.е. когда доля людей, имеющих богатство x, не зависит от его величины;
- при искусственном делении всего общества перед началом торговли на несколько подобществ, внутри которых доходы одинаковы;
- при ситуации B2, когда выигрыш может составлять случайную долю состояний граждан;
- при вмешательстве государства, когда оно облагает налогом все торговые прибыли.

Перед тем как пытаться объяснить это стремление к экспоненте, посмотрим еще раз на рисунки 1–6. Видно, что в течение первой тысячи дней случайный обмен рублями между гражданами приводит к расплыванию (размыванию) первоначального пика распределения, но его максимум остается на прежнем месте. Однако уже после 2000 дней распределение богатств своим левым (нищим) краем наталкивается на вертикальную ось, к которой начинают «прилипать» точки. В результате количество людей с малым состоянием начинает непропорционально расти, и распределение становится экспоненциальным. Попробуем доказать этот факт теоретически.

Для тех, кому хочется вывести «общественную» формулу распределения Больцмана

Через t дней жизни общества разобьем всех граждан на группы в соответствии с количеством денег, которыми они обладают. Группу «0» составят неудачники, которые в данный момент игры оказались разоренными и вообще не имеют никаких денег. В группу «1» отнесем всех тех, у кого есть только по одному рублю, в группу «2» – тех, кто обладает только двумя рублями, и т.д. Обозначим $P(m,t)$ количество граждан, принадлежащих после t дней к группе m, т.е. обладающих m рублями.

Попробуем описать, как должна измениться величина $P(m,t)$ за один прошедший день, а потом найдем уравнение для предельной функции – функции, к которой стремится $P(m,t)$ при увеличении числа дней t. Разделив $P(m,t)$ на общее количество граждан N, получим относительную долю этих граждан, или вероятность $p(m,t)$ найти среди граждан тех, кто имеет ровно m рублей через t дней торговли. После следующего, $(t+1)$-го, дня $p(m,t)$ может измениться, так как некоторые граждане группы «m» могут:

- одарить других граждан одним рублем и соответственно перейти в группу «$m-1$» (1);
- получить в подарок от других один рубль и соответственно перейти в группу «$m+1$» (2).

Кроме того, члены соседних групп через один день могут стать членами группы «m», если:

- члены группы «$m-1$» увеличат свое состояние на 1 рубль(3);
- члены группы «$m+1$» уменьшат его на столько же (4).

Очевидно, что в случаях (1) и (2) численность группы «m» уменьшается, а в случаях (3) и (4) – увеличивается. Легко догадаться, что механизмы (1) и (3) перестают действовать для тех, кто окончательно разорен (группа «0»). Это и служит причиной «прилипания» точек к вертикальной оси, на что мы обратили внимание, рассматривая результаты моделирования, полученные с помощью ЭВМ.

Из теории вероятностей следует, что для граждан группы «m» вероятность получить один рубль в подарок от граждан группы «k» $(k>0)$ равна произведению вероятностей $p(m,t)$ и $p(k,t)$. Поэтому изменение $p(m,t)$, происходящее в силу причины (2), можно записать в виде

$$d_2p(m,t)=-p(m,t)\sum_1^\infty p(k,t).$$

Те же соображения позволяют записать изменение $p(m,t)$, происходящее в силу причины (1), как

$$d_1p(m,t)=-p(m,t)\sum_0^\infty p(k,t).$$

Отметим, что $d_2p(m,t)$ отличается только одним слагаемым от $d_1p(m,t)$, так как рубль в подарок нельзя получить от членов группы «0».

Аналогичные допущения дают возможность вычислить $d_3p(m,t)$ и $d_4p(m,t)$:

$$d_3p(m,t)=p(m-1,t)\sum_1^\infty p(k,t),$$

$$d_4p(m,t)=p(m+1,t)\sum_0^\infty p(k,t).$$

Суммируя все четыре изменения вероятности $p(m,t)$, а также учитывая, что

$$\sum_0^\infty p(k,t)=1 \text{ и } \sum_1^\infty p(k,t)=1-p(0,t),$$

получаем следующее выражение:

$$p(m,t+1)-p(m,t)=$$
$$=\big(p(m+1,t)-p(m,t)\big)-\big(p(m,t)-p(m-1,t)\big)+$$
$$+\ p(0,t)\big(p(m,t)-p(m-1,t)\big).$$

Моделирование на ЭВМ показывает, что со временем распределение $p(m,t)$ стремится к своей предельной функции $p(m,\infty)$. Эта функция не зависит от начальных условий, а зависит только от количества граждан и суммы розданных им денег. Когда $p(m,t)$ будет приближаться к своему пределу, она будет очень мало изменяться со временем, поэтому левую часть последнего равенства можно приравнять к нулю, что дает следующее уравнение для нахождения $p(m,\infty)$:

$$\big(p(m+1,\infty)-p(m,\infty)\big)-\big(p(m,\infty)-p(m-1,\infty)\big)+$$
$$+\ p(0,\infty)\big(p(m,\infty)-p(m-1,\infty)\big)=0\,.$$

Это уравнение имеет такое решение:

$$p(m,\infty)=\frac{1}{M}e^{-\frac{m}{M}}\,, \qquad (2)$$

где M – средняя величина состояния в обществе.

«Температуры» обществ до и после их слияния

Итак, мы показали, что в обществе, где торговые сделки между гражданами сопровождаются случайным выигрышем в 1 рубль для одного и таким же проигрышем для другого, распределение граждан по их состоянию всегда стремится к экспоненциальному и не зависит от того, каким оно было вначале. Другими словами, одни обязательно теряют деньги во время таких торговых операций, ну а другие, соответственно, богатеют. Сравнение распределения Больцмана (1) с формулой (2) показывает, что роль «температуры» в распределении состояний в обществе играет средняя величина состояния M. Поэтому чем выше будет средний достаток в обществе, тем большая часть людей в нем будет иметь состояние, больше чем m.

А теперь допустим, что два общества «B1», в каждом из которых доходы распределены в соответствии с формулой (2), объединились (как это произошло, например, с Западной и Восточной Германиями в 1990 году или как это происходит со странами Европейского Союза в настоящее время). Очевидно, что через некоторое время сломанные кассовые аппараты сделают свое «черное» дело, в новом обществе установится равновесие, и распределение состояний его граждан опять станет экспоненциальным. Нетрудно догадаться, что величина M, равная среднему состоянию граждан нового общества, или его «температуре», будет равна

$$M=\frac{M_1N_1+M_2N_2}{N_1+N_2}\,,$$

где M_1, M_2 и N_1, N_2 – средний достаток и число граждан в первом и втором обществах соответственно до их объединения. Видно, что величина M лежит где-то между M_1 и M_2, а близость ее к последней зависит от отношения N_1/N_2.

Посмотрим теперь на последнюю формулу с позиций термодинамики, где граждане общества эквивалентны сталкивающимся молекулам газа. Тогда M можно заменить на kT, а N в термодинамическом варианте будет соответствовать плотности «молекул-граждан», и новая формула примет вид

$$(N_1+N_2)kT=N_1kT_1+N_2kT_2\,.$$

Так как NkT численно равно давлению идеального газа, то правая часть этой формулы – это сумма «парциальных давлений» обществ 1 и 2 до их объединения, а левая – это «давление» суммарного общества после того, как процесс объединения завершился. Отметим, что, поскольку суммарное богатство (в термодинамике – энергия) общества сохраняется, то процесс объединения двух «газовых» обществ следует считать адиабатическим. Таким образом, процесс слияния двух обществ с различными средними достатками аналогичен, с термодинамической точки зрения, адиабатическому процессу слияния двух газов, имеющих разные температуры.

Равновероятность обогащения и разорения. Стабильность общества

Известно, что шары при упругом столкновении обмениваются энергиями, хотя их суммарная энергия и импульс остаются постоянными. При этом, вообще говоря, нет каких-либо ограничений на величину энергии, передаваемой при столкновении. Например, теоретически при столкновении с покоящимся шаром вся энергия переходит к нему, а ранее двигавшийся шар останавливается. В остальных случаях доля суммарной энергии, меняющая хозяина, может составлять от 0 до 100% и очень сложным образом зависит от геометрических характеристик столкновения и принятых допущений. Так или иначе, мы вправе считать, что и при столкновении молекул газа между собой нет никаких ограничений на величину энергии, случайно переходящей от одной молекулы к другой. Другими словами, процесс обмена энергиями между молекулами можно считать симметричным – уменьшение энергии при столкновении так же вероятно, как и ее увеличение. Именно равновероятность получить и потерять энергию при столкновении приводит к тому, что энергия среди молекул газа распределяется по закону Больцмана.

То же самое относится и к обществу, где граждане, «сталкиваясь» друг с другом, теряют часть своего или приобретают случайную долю чужого состояния.

Хотели, как лучше...

Очевидно, что практически невозможно поставить эксперимент над газом, ограничивая обмен энергиями между его молекулами. С людьми проще – достаточно издать закон. Ну, скажем, попросим всех соблюдать закон «для защиты от недобросовестных торговцев», сокращенно ЗНТ. В соответствии с этим законом, выгода от торговой сделки между двумя людьми не должна превышать минимального состояния двух торгующих до сделки (см. общество «B2»). Иными словами, если встречаются торговцы с состояниями 50 и 150 рублей, то выигрышем одного и проигрышем другого может быть сумма, не превышающая 50 рублей. Казалось бы, закон ЗНТ – вполне разумный закон, защи-

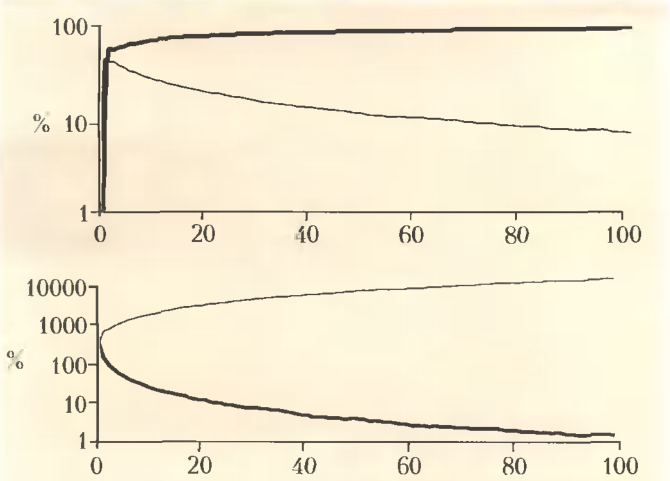


Рис.7. Расслоение общества «В2» со временем. Жирная кривая относится к беднеющим гражданам, а тонкая – к богатеющим

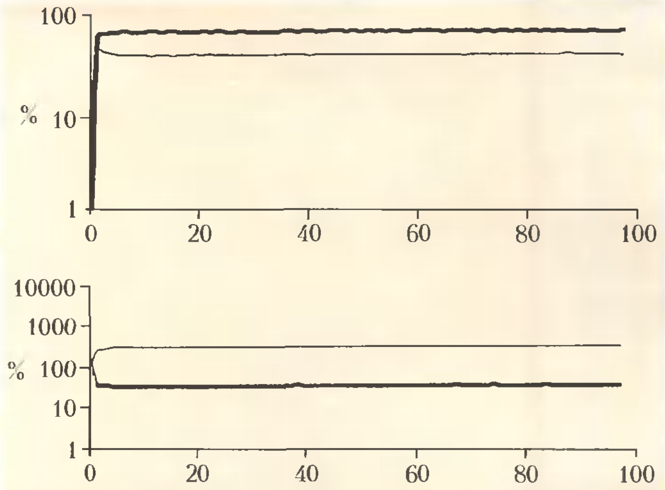


Рис.8. Расслоение общества «В3» со временем. Обозначения те же, что и на рисунке 7

щающий бедняка от полного разорения. К сожалению, это не так. И вот почему.

Закон ЗНТ нарушает симметрию вероятностного обогащения, и если кто-нибудь случайно лишился большой части своего состояния, то ему уже очень тяжело будет выбраться, так как закон ограничивает его возможный выигрыш величиной его же состояния. А если ты полностью разорен, то в соответствии с этим же законом тебе уже не на что рассчитывать. Одним словом, закон ЗНТ приводит к прогрессирующему расслоению общества.

На рисунке 7 показано, как происходит расслоение общества «В2» со временем, отложенным по оси абсцисс в днях, после начала действия закона ЗНТ. Жирная кривая на верхнем рисунке показывает, как постепенно увеличивается количество граждан (в процентах к общему их числу), у которых состояние уменьшилось по сравнению с первоначальным. Тонкая кривая на том же рисунке иллюстрирует, как падает со временем относительное число разбогатевших граждан общества «В2». Нижний рисунок показывает, что со временем среднее состояние разорившихся граждан общества «В2» уменьшается (жирная кривая), а разбогатевших – растет (тонкая кривая).

Видно, что уже через 10 дней после действия закона ЗНТ 73 % граждан (а их всего 10000) уменьшили свое состояние по сравнению с первоначальным (в среднем на 85%), и все вместе они обладают лишь 11 % богатства общества. В то же время остальные 27 % граждан разбогатели так, что их суммарное состояние составляет 89 % богатства общества. Через 100 дней действия закона расслоение становится еще более заметным, и разоренными оказываются уже 93 % граждан, которые все вместе обладают менее чем 2% общенародного достояния, в то время как 7 % богачей обладают остальными 98 % всех богатств. Таким образом, закон ЗНТ приводит к прогрессивному росту числа полностью разоренных граждан и образованию нескольких олигархов, у которых находятся все богатства общества.

Очевидно, что общество, возникшее в результате действия закона ЗНТ, оказалось нежизнеспособным. Кроме того, как это иллюстрирует рисунок 7, равновесное состояние в таком обществе никогда не наступает, поскольку количество неимущих членов общества постоянно растет, а уменьшающееся число имущих становится недостаточным для статистического равновесия. Отметим, что в отсутствие закона ЗНТ, как показало моделирование общества «В1», граждане, принадлежащие группе «0», уже через 1000 дней могут оказаться в группе «100», т.е. обладать средним состоянием этого общества.

На рисунке 8 показано, как изменяется относительная доля бедных в том случае, когда выигрыш (и проигрыш) от торговой сделки не ограничен законом ЗНТ и действуют правила общества «В3». Иными словами, два участника торговой сделки кладут все свои деньги «на бочку», а компьютер случайным образом определяет, какую долю с «бочки» берет каждый при условии, что денег на ней не остается.

Видно, что в обществе «В3», состоящем из 10000 человек, очень быстро наступает состояние, при котором доля проигравших в результате произошедших торговых сделок и их среднее состояние уже перестают меняться со временем, достигая стабильных величин. И хотя 63% людей оказываются проигравшими, их суммарное состояние все-таки составляет 27% богатств общества и остается стабильным, в отличие от того случая, когда действует закон ЗНТ.

Пусть знает каждый, что...

...Общество, где граждане вступают друг с другом в экономические отношения, всегда расслаивается так, что бедных в нем оказывается больше, чем богатых. При этом распределение доходов в обществе равных возможностей, где не действуют законы, аналогичные закону ЗНТ, остается неизменным, что и делает такое общество стабильным.

Школа научного творчества

В.ВАВИЛОВ, А.ЕГОРОВ, А.РУСАКОВ

В ЭТОМ ГОДУ ИСПОЛНИЛОСЬ 40 ЛЕТ С ТОГО МОмента, когда в разных концах Советского Союза были созданы замечательные школы. При четырех университетах – Московском, Ленинградском, Новосибирском и Киевском – открылись физико-математические интернаты. Еще М.В.Ломоносов говорил, что при университете должна быть гимназия, без которой университет как пашня без семян; и вот четыре университета начали выращивать для себя «рассаду».

Немного истории

В конце 50-х – начале 60-х годов XX века точные науки – математика, физика, химия и другие – были чрезвычайно популярны у советской молодежи. Это было связано с успехами в освоении космоса, развитием ядерных исследований, другими крупными научными достижениями, с созданием новых научных центров и с тем, что широкой публике стало об этом известно куда больше, чем раньше. Хрущевская «оттепель» привела к снятию многих цензурных и иных барьеров; в открытой печати появились статьи не только о «старых», но и о «новых» науках – о генетике, кибернетике и других научных направлениях, ранее запрещенных по идеологическим мотивам. Даже в газетах стали часто появляться научно-популярные статьи. Зазвучали имена ранее «засекреченных» выдающихся ученых – И.В.Курчатова, М.В.Келдыша, С.П.Королева и других.

На волне всеобщего интереса к точным наукам во многих школах Москвы, Ленинграда и других городов, где были ученые и учителя-энтузиасты, появлялись математические и физические кружки и физико-математические классы, а иногда и «профильные» школы.

Резко возрос интерес к олимпиадам по математике и физике. В 1960 году на традиционную XXIII Московскую математическую олимпиаду, кроме москвичей, были приглашены команды из союзных республик и некоторых областей Российской Федерации. Опыт оказался настолько удачным, что уже в следующем году в Москве состоялась первая Всероссийская математическая олимпиада школьников с участием команд всех союзных республик и областей РСФСР. (По существу, это была первая всесоюзная олимпиада, однако так она не называлась по причине вполне бюрократической – в стране не было Министерства просвещения СССР. Лишь в 1967 году, когда министерство появилось, прошла первая Всесоюзная математическая олимпиада.)

К 1963 году ученики физико-математических школ и классов, существовавших на «птичьих правах» в Москве и многих других городах, показали замечательные успехи на олимпиадах различного уровня и вступительных экзаменах в вузы. Стало ясно, что углубленное изучение точных наук в школе не только многим по силам, но и приносит большую пользу – и детям, и стране.

Многие выдающиеся ученые пришли в школы для непосредственного руководства подготовкой будущей научной смены.

Летом 1963 года по инициативе всемирно известных ученых – академиков П.С.Александрова, А.Н.Колмогорова, И.К.Кикоина, М.А.Лаврентьева, И.Г.Петровского – было издано постановление Совета Министров СССР об образовании школ-интернатов при МГУ, ЛГУ, НГУ и КГУ.

На самом деле специализированный интернат при НГУ существовал еще до постановления. Его в 1962 году организовал академик М.А.Лаврентьев – президент Сибирского отделения АН СССР (этому, конечно, способствовала и удаленность Новосибирска от московской бюрократии).

Весной 1963 года началась подготовка к созданию школы-интерната при МГУ. Победители заключительного тура Всероссийской математической олимпиады

школьников были приглашены в летнюю школу, проходившую в августе на базе дома отдыха МГУ в подмосковном Красновидове. Всего пригласили 46 ребят. Работу школы возглавил великий ученый и просветитель А.Н.Колмогоров, столетие со дня рождения которого было в прошлом году отмечено научным сообществом всего мира. Андрей Николаевич все три недели находился в Красновидове, сам вел занятия, читал лекции, устраивал походы по окрестностям. Ему помогали студенты и аспиранты, сами со временем ставшие известными математиками и педагогами.

Осенью того же года по 49 областям России и Белоруссии для проведения вступительных экзаменов в школу-интернат по математике и физике разъехались экзаменационные комиссии, состоявшие из преподавателей и аспирантов МГУ и МФТИ. Экзаменаторы получили инструкции проверять не знания и навыки, а сообразительность и смекалку, умение решать простые, но нестандартные задачи.

Интересная деталь. Собирали школьников для экзаменов сотрудники областных отделов народного образования. В письме Министерства просвещения РСФСР им было предложено приглашать на экзамен победителей областных олимпиад, а также школьников, рекомендованных учителями. На каждую область полагалась определенная квота. Скажем, не больше 30 человек. Однако приехавшие из Москвы комиссии обнаруживали по 100–150 школьников, стремившихся поступить в интернат. Что делать – приходилось комиссии из трех – четырех человек за 2–3 дня экзаменовать всех без исключения.

А экзамены были такие. Сначала – письменный экзамен по математике и физике (3 задачи по математике и 2 по физике). Успешно справившиеся с письменной работой допускались до устного экзамена. После окончания экзаменов комиссия выносила свой вердикт (оценки не ставились): «принять», «принять при наличии мест», «не принимать».

Окончательное решение о зачислении кандидатов в школу выносила приемная комиссия под председательством ректора МГУ академика И.Г. Петровского, заседавшая в его университетском кабинете (присутствовал и А.Н.Колмогоров). Каждая из выездных комиссий сообщала свой вердикт, после обсуждения решали: принять или не принять. В результате оказалось, что в интернат поступило несколько большее количество учеников, чем предполагалось, так что в первый учебный год было тесновато. Всем принятым были разосланы извещения.

И, наконец, 2 декабря 1963 года в аудиториях школы- интерната №18 физико-математического профиля при МГУ им. М.В.Ломоносова (так до 1988 года называлась наша школа) собрались первые ученики.

Как учат в интернате

Поскольку авторы этой статьи – математики, в дальнейшем речь пойдет, в основном, об обучении математике. Однако многое из сказанного будет относиться и к другим предметам.

В первые годы работы интерната многие выпускники, став студентами-математиками, приходили в интернат, вели кружки и, достигнув 2–3 курсов, становились преподавателями. Это было время, когда разница в возрасте некоторых преподавателей и учеников составляла 5–6 лет, так что часто отношения учитель–ученик через несколько лет перерастали в настоящую дружбу, а прежний школьник, став студентом, получал научного руководителя в лице своего учителя, окончившего к тому времени аспирантуру.

За 40 лет, конечно, многое изменилось. Однако основные традиции, творческий дух школы, энтузиазм преподавателей сохранились (и сегодня директор школы А.А.Часовских не только в своем кабинете, но и с мелом у доски на уроке, и в спортзале – играет в команде преподавателей против команды учащихся).

Важное изменение произошло в 1988 году, когда на базе школы-интерната был создан Специализированный учебно-научный центр МГУ им. М.В.Ломоносова (СУНЦ МГУ). Появилось звание «учащийся Московского университета», а не просто школьник. А сама школа-интернат стала школой имени А.Н.Колмогорова. Организованы кафедры, преподавание ведется так же, как в вузах: лекции, семинары, зачеты, экзамены. Работают специальные семинары, читаются спецкурсы. Увеличилось количество специализаций.

В идеале, выпускник нашей школы, поступив в вуз, может включиться в настоящую научную работу, начиная уже с младших курсов. Именно этого хотел добиться А.Н.Колмогоров. Иногда так и получается, чаще – нет, но ведь идеал, как известно, недостижим...

Школа небольшая – около 350 учеников, в ней есть только десятые и одиннадцатые классы (поступать можно и в десятый – на двухгодичный цикл обучения, и в одиннадцатый – на одногодичный). Классы разделены по профилям, их в настоящее время пять – физико-математический, компьютерно-информационный, химический, биологический и биофизический (для одногодичного обучения – только физико-математический). Во всех классах много времени отводится информатике и практической работе на компьютерах. На каждом уроке по профилирующим предметам, как правило, с учениками работают два преподавателя – это позволяет больше внимания уделять каждому школьнику и значительно повысить эффективность обучения. Говоря о *школе научного творчества*, мы имеем в виду не только профилирующие дисциплины. Выступая однажды на заседании педагогического совета школы, А.Н.Колмогоров специально подчеркнул, что соприкосновение школьников с творческой мыслью должно происходить при изучении любого предмета, главным же методом познания должна стать имитация научного исследования: «...шаг за шагом находить, вычислять нечто, а не давать готовенькое...»

Каждый год в школе начинается с приема новых учеников. Для этого весной в местах проживания абитуриентов проводятся вступительные экзамены (письменные и устные). Затем школьники, успешно выдержавшие экзамены, приглашаются в небольшую летнюю школу, по итогам которой и происходит окончательный отбор учащихся. В первую очередь мы стремимся выбрать среди наших абитуриентов тех, кто не только обладает определенной суммой знаний, но и проявляет стойкий интерес к учебе, умеет нестандартно мыслить, восприимчив к новому материалу.

Летняя физико-математическая школа (ЛФМШ) работает с 1963 года. Идея ее создания возникла одновременно с идеей об организации самой ФМШ при МГУ. Программа обучения в ней строится так, чтобы помочь нашим будущим учащимся подготовиться к восприятию основной программы в школе-интернате. В первые годы летние школы проходили в Красновидове, затем – в Пущине на базе филиала МГУ; в последнее время они проводятся на базе нашей школы в Москве. В 60-е – 70-е годы в работе летних школ активно участвовал А.Н.Колмогоров.

В ЛФМШ – пятидневная рабочая неделя. Система занятий, как правило, лекционно-семинарская. Лекций немного: 1–2 часа по каждому предмету в неделю. Учащиеся занимаются 6 часов: 4 часа до обеда и 2 – спустя полтора-два часа после обеда. Программа обучения всегда отбирается так, чтобы разница в уровне подготовки учащихся как можно меньше сказывалась на результатах их работы в ЛФМШ. Традиционно проводятся различные олимпиады, конкурсы и тестирования. Дополнительно к обязательным занятиям для особо интересующихся школьников работают два-три кружка. В каждой группе работают 2–3 преподавателя математики, которые одновременно присутствуют на занятиях, так что во время работы на уроке преподаватель беседует с каждым школьником не менее двух-трех раз. Тесное общение между преподавателями и школьниками, конечно, не ограничивается только уроками – школьники в любое время могут получить нужную консультацию. Занятия в ЛФМШ проходят в атмосфере дружбы, взаимопонимания и увлеченности.

Математика в школе имени Колмогорова

В школе три математические дисциплины: алгебра, геометрия и математический анализ (9 часов в неделю, по три на каждый предмет, и из них один час – лекционный). В массовой школе курсы алгебры и математического анализа объединены в один. Мы же придерживаемся той точки зрения, что они должны изучаться раздельно. Стабильных математических программ, в строгом понимании, в школе не существует даже в рамках одной специализации (физико-математические классы разделены на два потока), не говоря уже о всех специализациях вместе взятых. Программы индивидуальны и отражают вкусы и опыт работы (не только школьный) лектора, а также опыт и традиции, сложившиеся в нашей школе. Конечно, эта индивидуальность программ сказывается только на 20–25 % от всего отводимого на учебную дисциплину учебного времени, а в остальном – это сложившаяся и довольно традиционная тематика. Школа стремится к тому, чтобы все занятия (по всем предметам!) не только увеличивали сумму знаний учащихся, но и систематически воспитывали те качества, которые необходимы любому человеку: уважение к коллективу, ответственное отношение к делу, привычка к систематическому труду, стремление к качественному выполнению работы, поиску нового и самостоятельности мышления, упорству в достижении цели.

Курс *алгебры* двухгодичного потока (физико-математического отделения) включает в себя довольно обычный для нас набор основных тем: математическая индукция, комбинаторика, алгоритм Евклида и основная теорема арифметики, арифметика остатков, рацио-

нальные и иррациональные числа, многочлены, комплексные числа и отображения комплексной плоскости, алгебраические неравенства, уравнения, системы.

Школьная алгебра сейчас довольно далека от современной алгебры как науки, что вполне естественно, так как на самом деле в этом школьном курсе сильно переплетаются элементы трех математических дисциплин («трех великих А», по выражению Ф.Клейна, – Арифметика, Алгебра, Анализ). Наш алгебраический курс, в основном, ориентирован не на теории и аксиоматику, а на конкретные ситуации, примеры и задачи (в рамках первых двух «великих А»). Конечно, на лекциях (да и на семинарских занятиях тоже) доказываются теоремы, закладываются основы теорий, но все-таки лицо курса определяют задачи, которые обсуждаются на семинарах. Немало внимания уделяется и истории математики – это способствует расширению кругозора учеников и повышению их математической культуры.

Общие цели изучения *геометрии* в нашей школе мало чем отличаются от основных целей, которых пытаются достичь в обычной средней (да и высшей) школе. Коротко – это изучение свойств геометрических фигур на плоскости и в пространстве, формирование пространственных представлений в широком понимании этого слова, развитие логического мышления.

А.Н.Колмогоров дважды читал интереснейший курс геометрии для вновь поступивших в интернат (тогда – девятиклассников). Колмогоровский цикл лекций знакомил школьников с глубокими математическими идеями и (как, видимо, никакой другой курс) эффективно приобщал слушателей к самостоятельным исследованиям и к научной работе. Этот курс в течение многих лет служил основой нашего курса геометрии.

Курс *математического анализа* довольно стабилен по содержанию. В то же время, при его реализации возникают наибольшие дискуссии и хлопоты. Здесь две главные проблемы. Первая – это строгость и уровень изложения. А.Н.Колмогоров всегда считал, что изложение анализа должно быть доступным и наглядным; этого мы придерживаемся и сейчас. Он писал: «Опыт наглядного преподавания начал анализа говорит, что эти начала могут быть изложены в форме, в которой они совсем не воспринимаются как что-либо более трудное, чем обычный, чисто алгебраический материал». Другая проблема связана с неизбежным дублированием университетских программ, а из-за этого у выпускников, поступивших в университет, возникает иллюзия, что они и так все уже знают, что приводит к неприятностям на первом же экзамене.

При обучении математическому анализу мы стремимся к тому, чтобы важные математические понятия сначала были сформированы, и только потом появлялись их строгие определения.

Целенаправленная и интенсивная подготовка к вступительным экзаменам в вузы самого высокого уровня (МГУ, МФТИ и др.) проходит, как правило, вне основного учебного времени. Все наши выпускники (за крайне редким исключением) становятся студентами, школа и кафедра тщательно анализирует итоги их поступления в вузы, а также и пробелы в самой предэкзаменационной подготовке.

Наши преподаватели и наши выпускники

Говоря о нашей школе, нельзя не вспомнить тех, кто преподавал и сейчас преподает в ней. В первые годы существования интерната состав учителей был поистине «звездным». Лекции по математике читали А.Н.Колмогоров и его ученики, известные математики, – профессора В.И.Арнольд, В.М.Алексеев, Б.М.Гуревич, Д.Б.Фукс, А.Б.Сосинский. Много лет отдали преподаванию и авторы этой статьи. Вели занятия студенты, аспиранты и сотрудники мехмата МГУ, а также замечательные педагоги А.А.Шершевский, И.К.Сурин. Лекции по физике читали академик И.К.Кикоин, профессор Я.А.Смородинский, известные физики Г.И.Косоуров и Б.Б.Буховцев и многие другие. Занятия вели Е.Л.Сурков, А.Р.Зильберман – авторы многих книг и популярных статей для школьников, а также студенты и аспиранты физического факультета МГУ. Преподаватели литературы, истории и иностранных языков делали все возможное для духовного и интеллектуального развития школьников. Среди них нельзя не назвать директора школы с 1964 по 1973 год – учителя истории Р.А.Острую, литераторов Н.И.Герасимова, Г.И.Белоцкую. В течение трех лет литературу и историю преподавал Ю.Ч.Ким – известный поэт, писатель, автор многих широко известных песен.

Нынешние преподаватели – профессора, доценты, аспиранты и студенты – следуют заложенным «отцами-основателями» традициям. Неоценимую поддержку интернату оказывает руководство Московского университета во главе с выдающимся организатором науки и образования ректором МГУ В.А.Садовничим.

Среди выпускников нашей школы тоже немало замечательных людей. Скажем только, что среди них есть один академик и три члена-корреспондента РАН, более ста докторов наук и более пятисот кандидатов. И поскольку школа продолжает свое дело «выращивания научной рассады», нет сомнений, что будет еще немало достойных всходов.

Восточная мудрость

А.ВАСИЛЬЕВ

Из великого множества восточных мыслителей и ученых средних веков на монеты и банкноты мира попали лишь аль-Фараби, Альгазен, Бируни и Авиценна. Каждый из них внес заметный вклад в развитие цивилизации, подхватив эстафету знаний от древних к современным ученым.

Абу Наср Мухаммад **аль-Фараби** (870–950), или Альфарабиус, был знаменит в свое время как выдающийся врач, музыкант, математик и глубокий последователь учения Аристотеля. Мир, в представлении Фараби, состоял из шести тел, среди которых были тела небесные, тела человеческие, тела животных, растения, минералы и простейшие тела. Классификация природных объектов на этом, однако, не заканчивалась, ибо они, в свою очередь, состояли из первоэлементов. В качестве таковых, как и повсюду в древности, выступали огонь, воздух, вода, земля и другие вещи того же рода. Различные сочетания первоэлементов, согласно Фараби, образуют вселенную: «...Действия элементов друг на друга объединяются с действиями на них небесных тел и образуются в результате бесчисленных комбинаций и сочетаний, которые, в свою очередь, производят в каждом виде многочисленные и чрезвычайно разнообразные явления. Таковы причины существования природных вещей, пребывающих под небесными сферами». Эта концепция мало чем отличается от современных воззрений, где материя представлена в основном полями различного происхождения и элементарными частицами.

Ученые эпохи аль-Фараби обладали, как правило, универсальными познаниями, да и он сам с честью проявил себя во многих дисциплинах. Придя к выводу, что подлинные знания дают лишь астрономия и математика, он выделил из них арифметику и теорию чисел, геометрию, оптику, науку о звездах – астрономию и астрологию, науку о тяжестях (статику) и науку о механизмах (механику). Каждую из этих наук Фараби подразделял на практическую и теоретическую: «Практическая изучает числа постольку, поскольку речь идет о числах считаемых, нуждающихся в определении их числа. Эту науку применяют в рыночных и гражданских делах. Теоретическая наука изучает числа в абсолютном смысле, отвлеченные разумом от тел и всего, что поддается в них счету. Арифметика проникает во все науки». То же самое касается и геометрии. «Теоретик, – писал он, – представляет себе линии в общем, отвлекаясь разумом от того, каково это тело. Он представляет себе геометрическое тело не как дерево, кирпич или железо, а вообще как геометрическое тело». Задолго до Декарта Фараби полагал алгебру наукой общей как для чисел, так и для геометрии и писал, что она представляет собой разнообразные методы нахождения чисел или решений. Подразделение математических наук на практические и теоретические является, по сути, развитием идей Аристотеля о том, что математические понятия получаются путем абстракции из понятий реального мира.

К настоящему времени сохранились около семидесяти научных работ аль-Фараби. В «Книге приложений» он изложил основные понятия о тригонометрических линиях и принципы составления тригонометрических таблиц. Наиболее интересным здесь является введение тангенса и котангенса в тригонометрическом круге, которые он определил как отрезки касательных к окружности. В этом сочинении он впервые сформулировал плоскую теорему синусов для произвольного треугольника. В «Книге духовных искусных приемов и природных тайн о тонкостях геометрических фигур» Фараби изложил теорию геометрических построений. Особо интересными из них являются задачи на построение геометрических фигур с помощью циркуля и линейки, на преобразование многоугольника, а также задачи на построение геометрических фигур на сфере, или, как говорят теперь, в сферических координатах. Арифметика, геометрия и тригонометрии используются многократно в трудах по теории музыки.

В «Трактате о звездах» Фараби дал классификацию более или менее вероятных событий, в частности ввел понятие «случайных событий», природа которых неизвестна. Эта классификация событий такова: невозможное, редко возможное, равновероятное, возможное в большинстве случаев, необходимое (достоверное). Идеи Фараби сыграли свою роль в формировании основных концепций теории вероятностей.

Наряду с точными науками аль-Фараби интересовался творческой деятельностью человека, проблемами политики и морали, теорией государства. Интересные мысли он высказывал о проблеме пророчества. Для того чтобы стать пророком, считал Фараби, человек должен достичь определенного научного уровня. В этом плане пророчество по Фараби ничем не отличается от научного предвидения в современном понимании.

Как и многие ученые своего времени, аль-Фараби много путешествовал по миру. Родился он в небольшом поселении Фараб на Аму-Дарье, а умер в Сирии. Именем Фараби назван Казахский государственный университет, а его портрет украшает ряд монет и банкнот суверенного Казахстана.

Ибн аль-Хайсам (965–1039), или в латинской транскрипции **Альгазен**, занимает видное место в ряду арабских философов, физиков и математиков, среди которых аль-Хорезми, Омар Хайям и другие. Имя

Альгазена символизирует колоссальный вклад арабских ученых в развитие точных наук. Написанная им семитомная монография по оптике оказала существенное влияние на развитие европейской науки и, в частности, на Роджера Бэкона, Леонардо да Винчи, Иоганна Кеплера и даже на Исаака Ньютона.

Альгазен родился в Басре, а умер в Каире. В Египет он перебрался еще при верховном правителе аль-Хакиме, который поручил ему регулирование водного стока Нила. Эта затея закончилась неудачей, хотя много позже именно в выбранном им Асуане были построены плотины, избавившие египтян от разрушительных наводнений. Невыполнение указаний халифа, который объявил себя к тому же земным воплощением бога, могло дорого обойтись выдающемуся ученому, так что последний предпочел объявить себя сумасшедшим. Этот прием (небесполезный и для современных естествоиспытателей) позволил Альгазену сконцентрироваться на научных исследованиях, благо незадолго до этого в Каире была воздвигнута мечеть аль-Азхар – по сути, первый университет мусульманского мира.

Из написанных Альгазеном 92 книг до нашего времени сохранились 55, которые показывают его ученым-энциклопедистом, автором основополагающих трудов по теории света, астрономии и математике. Ему, в частности, принадлежит формулировка знаменитой задачи (проблема Альгазена): «При заданном источнике света найти точку на сферическом зеркале, откуда свет отражается в глаз наблюдателю».

Оптическая монография Альгазена была переведена на латынь в 1270 году и получила название «Оптический тезаурус Альгазена» (Opticae thesaurus Alhazeni). Эта работа явилась важнейшим вкладом в оптику после знаменитого «Альмагеста» Птолемея. Уже в первой книге своего капитального труда Альгазен отмечал единую природу света, приводя в качестве его источников Солнце, огонь или отражения в зеркалах. В отличие от своих предшественников, он полагал, что свет излучается не из глаз наблюдателя, а непосредственно от объекта. Может быть, сегодня сама постановка такого вопроса представляется наивной, однако понимание этого в то время знаменовало колоссальный прогресс. Экспериментальные исследования Альгазена привели его к использованию камеры-обскуры (черного ящика с небольшим отверстием), заложив тем самым основы современной фотографии.

(Продолжение следует)

Финансовая математика

(Начало см. на с.2)

Пример 12. Пусть $d = 5000$, $n = 5$, $i = 10\%$. Заполним таблицу, в которой верхняя строка – номера лет, 2-я строка сверху –остатки кредита, 3-я строка сверху – 5-я доля основного долга, 2-я строка снизу – процентные деньги за пользование остатком кредита, нижняя строка – суммарные выплаты в конце года:

0	1	2	3	4	5
5000	4000	3000	2000	1000	0
	1000	1000	1000	1000	1000
	500	400	300	200	100
всего	1500	1400	1300	1200	1100

4. Погашение займа равными годовыми выплатами. Пусть займ d выдан на n лет под i сложных годовых процентов. При рассматриваемом способе его погашения в конце каждого года выплачивается одинаковая сумма r. Найти ее просто: ведь эти выплаты можно рассматривать как годовую ренту длительности n лет и годовым платежом r. Приравняем современную величину этой ренты величине займа r. Получим уравнение $d = ra(n,i)$ Значит, $r = d/a(n,i)$.

Пример 13. Пусть $d = 5000$, $n = 5$, $i = 10\%$. Из таблицы коэффициентов приведения ренты находим $a(5,10) = 3,791$. Значит, $r = 5000/3,791 = 1319$.

5. Потребительский кредит и его погашение. При выдаче потребительского кредита сразу на всю сумму кредита начисляются простые проценты, они прибавляются к величине самого кредита, и сумма всех погашающих выплат должна быть равна этой величине. Существует несколько схем погашения потребительского кредита.

А. Равными выплатами. Пусть кредит размером d взят на n лет, годовая ставка простых процентов i; следовательно, всего надо набрать выплат на сумму $d(1 + ni)$. Если в год предусмотрено (договором о кредите) m выплат, то каждая выплата будет равна $d(1 + ni)/(nm)$.

Б. Правило 78. При этом способе основной долг d выплачивается равными долями, а процентные деньги в размере nid – выплатами, уменьшающимися по арифметической прогрессии, последняя выплата равна разности этой прогрессии. Если в год предусмотрено m выплат (например, 12 – при ежемесячных выплатах), то самая последняя выплата равна δ – неизвестной пока разности прогрессии, а первая $mn\delta$. Но сумма всех этих выплат $\delta + 2\delta + \ldots + mn\delta = (1 + mn)mn\delta/2$ должна быть равна процентным деньгам, т.е. $(1 + mn)mn\delta/2 = nid$, откуда можно найти δ и все выплаты процентных денег.

Практически делают так: считают сумму номеров всех выплат $N = (1 + 2 + \ldots + mn) = (1 + mn)mn/2$ и делят процентные деньги на N частей; далее, 1-й платеж равен mn таких частей, 2-й платеж будет на одну часть меньше и т.д., последний платеж равен ровно одной части. Сумма номеров месяцев в году $1 + 2 + \ldots + 12$ равна 78, отсюда и название этого правила.

(Продолжение следует)

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 2005 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5–2004» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1921» или «Ф1928». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1922, М1929 и М1930 предлагались на LXVII Московской математической олимпиаде, а задачи М1923–М1925 – на окружном этапе XXX Всероссийской олимпиады по математике.

Задачи Ф1928, Ф1931, Ф1933, Ф1935 и Ф1937 предлагались на на окружном этапе XXXVIII Всероссийской олимпиады по физике.

Задачи М1921–М1930, Ф1928–Ф1937

М1921. На наибольшей стороне AB треугольника ABC взяли точки M и N такие, что $BC = BM$ и $CA = AN$, а на сторонах CA и BC – точки P и Q такие, что PM параллелен BC и QN параллелен CA (рис.1). Докажите, что $QC = CP$.

В.Произволов

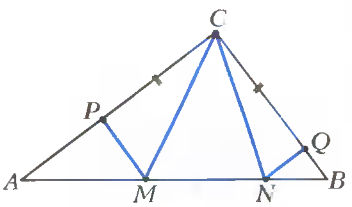


Рис. 1

М1922. Бильярдный стол имеет форму многоугольника (не обязательно выпуклого), у которого соседние стороны перпендикулярны друг другу. Вершины этого многоугольника – лузы, при попадании в которые шар там и остается. Из вершины с (внутренним) углом 90° выпущен шар, который отражается от бортов (сторон многоугольника) по закону «угол падения равен углу отражения». Докажите, что шар в эту вершину никогда не вернется.

А.Канель-Белов

М1923. На плоскости отмечено N различных точек. Известно, что среди попарных расстояний между отмеченными точками встречаются не более n различных расстояний. Докажите, что $N \le (n+1)^2$.

В.Дольников

М1924. Три натуральных числа таковы, что произведение любых двух из них делится на сумму этих двух чисел. Докажите, что данные три числа имеют общий делитель, больший единицы.

С.Берлов

М1925. Мишень «бегущий кабан» находится в одном из n окошек, расположенных в ряд. Окошки закрыты занавесками так, что для стрелка мишень все время остается невидимой. Чтобы поразить мишень, достаточно выстрелить в окошко, в котором она в момент выстрела находится. Если мишень находится не в самом правом окошке, то сразу после выстрела она перемещается на одно окошко вправо; из самого правого окошка мишень никуда не перемещается. Какое наименьшее число выстрелов нужно сделать, чтобы наверняка поразить мишень?

С.Токарев

М1926. Найдите все простые числа p, q, r, s такие, что все числа $p^s + s^q$, $q^s + s^r$, $r^s + s^p$ – простые.

Б.Френкин, В.Сендеров

М1927. Пусть ABC – неравносторонний треугольник; O и I – центры описанного и вписанного кругов, H – точка пересечения высот треугольника. Могут ли точки O, I и H быть вершинами равнобедренного треугольника?

Р.Будылин, А.Куликов, В.Сендеров

М1928. Положительные числа $x_1, \ldots, x_n$, где $n \ge 2$, лежат на некотором отрезке Δ длины 2. Докажите, что

$$x_1 + \ldots + x_n \le \sqrt{x_1x_2 + 1} + \ldots + \sqrt{x_nx_1 + 1} <$$
$$< x_1 + \ldots + x_n + n.$$

В каких случаях имеет место равенство?

Н.Агаханов

М1929. Докажите, что для любого натурального числа d существует делящееся на него натуральное число n, в десятичной записи которого можно вычеркнуть некоторую ненулевую цифру так, что получившееся число тоже будет делиться на d.

А.Галочкин

М1930. Верно ли, что для любых четырех попарно скрещивающихся прямых можно так выбрать по одной точке на каждой из них, чтобы эти точки были вершинами а) трапеции, б) параллелограмма?

П.Бородин

Ф1928. Проволока изогнута в форме окружности и зафиксирована (рис.2). Вдоль нее может двигаться маленькая бусинка, на которую действуют силы только со стороны проволоки. Вдоль прямой проволоки бусинка движется равномерно, а при движении по криволинейному участку возникает сила трения скольжения с коэффициентом $\mu = 0{,}05$. В начальный момент бусинка находилась в точке A и имела скорость $v_0 = 1$ м/с. Найдите, какой будет скорость бусинки, когда она в первый раз снова окажется в исходной точке A.

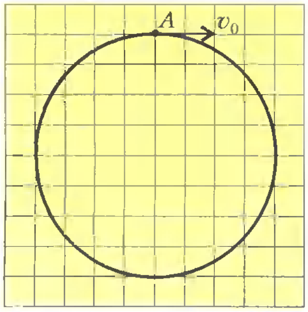


Рис. 2

Пусть теперь проволока имеет форму плоской замкнутой кривой (рис.3). Найдите в этом случае скорость бусинки, когда она в первый раз снова окажется в исходной точке B.

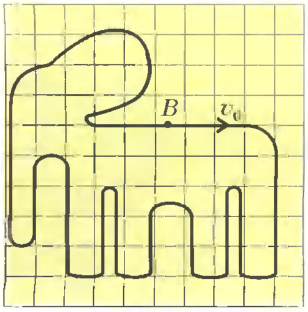


Рис. 3

А.Чудновский

Ф1929. На горизонтально расположенный отрезок практически нерастяжимой нити длиной L нанизаны N одинаковых бусинок, которые могут скользить по нему без трения, упруго ударяясь друг о друга и о места закрепления концов нити. Полная кинетическая энергия бусинок равна E. Найдите силу натяжения нити. Концы нити прикреплены к двум упругим массивным телам, взаимодействие этих тел друг с другом и с другими телами пренебрежимо мало. Сила тяжести отсутствует.

З.Рафаилов

Ф1930. Вырезанный из листа фанеры прямоугольный треугольник с меньшим острым углом α расположен на горизонтальной поверхности (рис.4). Чтобы повернуть треугольник относительно закрепленной вертикальной оси, проходящей через вершину A, к треугольнику необходимо приложить минимальную горизонтальную силу F_A, а чтобы повернуть его относительно закрепленной вертикальной оси, проходящей через вершину B, потребуется минимальная горизонтальная сила F_B. Какую минимальную горизонтальную силу необходимо приложить к треугольнику, чтобы повернуть его относительно закрепленной вертикальной оси, проходящей через вершину прямого угла C? Считайте, что треугольник прижимается к горизонтальной поверхности равномерно по всей площади.

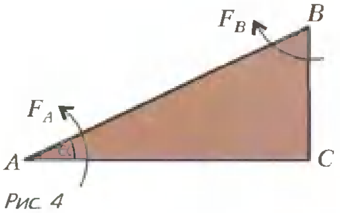


Рис. 4

С.Муравьев

Ф1931. Атомы сорта A летят вдоль оси CC цилиндрического канала радиусом R и сталкиваются с практически неподвижными атомами сорта B. Кинетическая энергия атомов A равна пороговой, так что при центральном ударе образуется молекула AB, которая далее движется со скоростью v. При нецентральном ударе реакция не идет, т.е. атомы сталкиваются упруго. За какое минимальное время после столкновения атомы сорта B смогут от оси цилиндра попасть на стенку канала?

В.Слободянин

Ф1932. Термодинамический цикл, состоящий из двух изобар и двух изохор, проводят с порцией гелия. Каким может быть максимальное значение КПД этого цикла, если максимальная температура в цикле составляет $2T_0$, а минимальная равна T_0?

А.Циклов

Ф1933. Дирижабль завис над гористой местностью. Из-за естественной ионизации у воздуха имеется некоторая проводимость. В результате электрический заряд дирижабля уменьшается в два раза за каждые $\tau = 10$ мин. Найдите удельное сопротивление воздуха.

А.Чудновский

Ф1934. В схеме на рисунке 5 емкости конденсаторов равны $C = 10$ мкФ и $3C$, сопротивления резисторов равны $R = 1$ кОм и $3R$. Напряжение источника U равномерно увеличивается от нуля до $U_0 = 100$ В за время $\tau = 1$ ч. Найдите количество теплоты, выделившееся за это время в каждом из резисторов.

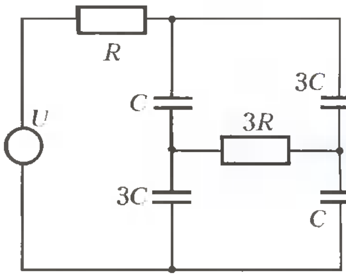


Рис. 5

Р.Александров

Ф1935. Из одного куска нихромовой проволоки спаяли прямоугольный треугольник с катетами $3a$ и $4a$. К трем сторонам этого треугольника подсоединили небольшие по размерам вольтметры так, что соединительные провода и стороны треугольни-

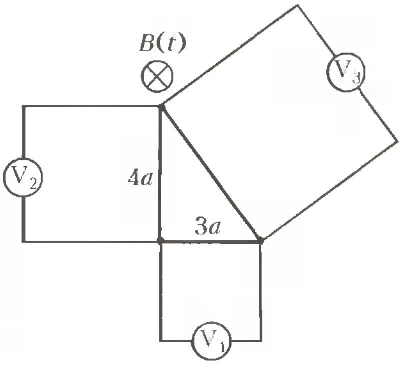


Рис. 6

ка образуют квадраты (рис.6). Вся конструкция находится в одной плоскости, перпендикулярно которой направлено однородное магнитное поле. Индукция поля изменятся со скоростью $\Delta B/\Delta t = k > 0$. Сопротивления вольтметров намного больше сопротивлений сторон треугольника. Найдите показания вольтметров.

В.Чивилёв

Ф1936. В цепи на рисунке 7 катушки индуктивности одинаковы, и их можно считать идеальными. Сопротивления вольтметров одинаковы, и их можно считать чисто активными («омическими»). Амплитуда гармонического напряжения источника составляет U_0, а частоту этого напряжения можно менять в широких пределах. Какими могут быть максимальные показания каждого из вольтметров? Что при этом будет показывать другой вольтметр?

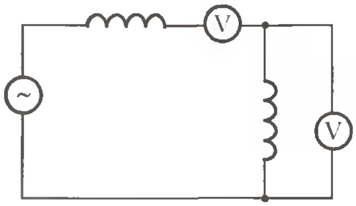


Рис. 7

А.Зильберман

Ф1937. Оптическая система, состоящая из двух тонких двояковыпуклых линз с одинаковыми радиусами кривизны поверхностей, изменяет диаметр падающего на систему пучка параллельных лучей в γ раз, оставляя пучок параллельным после прохождения системы. Если переместить линзы из воздуха в глицерин, то обе линзы останутся собирающими, но их фокусные расстояния увеличатся в α и β раз. Каждая из линз составлена из двух одинаковых плосковыпуклых линз. Их разняли и половинки разных линз соединили вместе (рис.8). Во сколько раз увеличится фокусное расстояние такой композитной линзы, если ее переместить из воздуха в глицерин?


Рис. 8

А.Чудновский

Решения задач М1901–М1905, Ф1913–Ф1922

М1901. *В криволинейный треугольник, ограниченный дугами равных касающихся окружностей и их общей касательной, помещены синий и красный квадраты, как показано на рисунке 1. Докажите, что сторона синего квадрата вдвое больше стороны красного.*

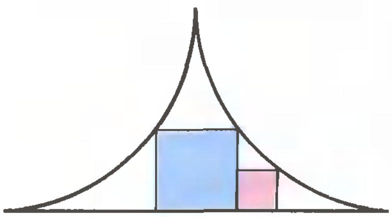


Рис. 1

Задачу можно отнести к жанру «пожалуйста, не вычисляйте!», поскольку ее можно решить, опираясь на наблюдения симметрии, не производя при этом никаких специальных вычислений.

Геометр обязан быть наблюдателем. Замечаем, что криволинейный треугольник имеет вертикальную ось симметрии, которая разрезает синий квадрат на два равных прямоугольника. Правая половина криволинейного треугольника имеет наклонную ось симметрии (наклон 45°), из чего можно усмотреть справедливость утверждения задачи (рис.2).

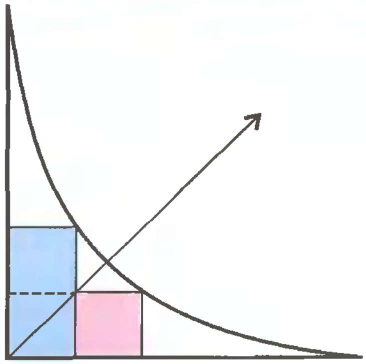


Рис. 2

В.Произволов

М1902. *На встречу выпускников пришли 45 человек. Оказалось, что любые двое из них, имеющие одинаковое число знакомых среди пришедших, не знакомы друг с другом. Каково наибольшее число знакомств среди участников встречи?*

Ответ: 870.

Приведем пример. Поскольку 45 = 1 + 2 + 3 + … + 9, можно разбить 45 человек на группы по 1, по 2, …, по 9 человек. Пусть люди, принадлежащие одной группе, не знакомы между собой, а люди, принадлежащие разным группам, знакомы. Тогда каждый человек из k-й группы имеет $45 - k$ знакомых. При этом, очевидно, условие задачи выполнено, и общее количество пар знакомых людей равно

$$\frac{45\cdot 44}{2} - \left(\frac{2\cdot 1}{2} + \frac{3\cdot 2}{2} + \ldots + \frac{9\cdot 8}{2}\right) = 870.$$

Докажем, что большего числа знакомств быть не могло. Зафиксируем некоторое k, $0 \le k \le 44$. Пусть имеется некоторый выпускник, который знаком ровно с k людьми. По условию любой его знакомый не может иметь ровно k знакомых, поэтому количество выпускников, знакомых ровно с k людьми, не превосходит $45 - k$.

Обозначим через $A_0, A_1, \ldots, A_{44}$ количество выпускников, имеющих 0, 1, …, 44 знакомых соответственно. Как показано выше, $A_k \le 45 - k$; кроме того, $A_0 + A_1 + \ldots + A_{44} = 45$. Оценим общее число знакомств:

$$S = \frac{1}{2}\left(0\cdot A_0 + 1\cdot A_1 + \ldots + 44\cdot A_{44}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(A_{44} + \left(A_{44} + A_{43}\right) + \ldots + \left(A_{44} + A_{43} + \ldots + A_{36}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(A_{44} + A_{43} + \ldots + A_0\right)\Big) \le \frac{1}{2}\Big(1 + (1+2) + \ldots$$

$$\ldots + (1 + 2 + \ldots + 9) + 45 + 45 + \ldots + 45\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(45\cdot 44 - \big((9 + 8 + \ldots + 2) + (9 + 8 + \ldots + 3) + \ldots + 9\big)\Big) =$$

$$= 870,$$

что и было объявлено вначале.

С.Берлов

М1903. *На плоскости дан отрезок AB. На сторонах AX и BX треугольника ABX как на диаметрах внешним образом построены полуокружности ω_1 и ω_2 соответственно. Найдите множество точек X та-*

ких, что существует окружность Ω, касающаяся полуокружностей ω_1 и ω_2 в их серединах.

Ответ: это объединение окружности, построенной на отрезке AB как на диаметре, и серединного перпендикуляра к отрезку AB, за вычетом концов и середины отрезка AB.

А решение такое.

Лемма. Если $a > 0$, $b > 0$ и $a+\sqrt{1-a^2} = b+\sqrt{1-b^2}$, то $a = b$ или $a^2+b^2 = 1$.

Доказательство. Обозначим $A=\sqrt{1-a^2}$ и $B=\sqrt{1-b^2}$. Если $a \neq b$, то

$$a-b = B-A = \frac{B^2-A^2}{B+A} = \frac{a^2-b^2}{B+A},$$

следовательно,

$$\begin{cases} a+b = A+B, \\ a-b = B-A, \end{cases}$$

откуда $a = B$, что и требовалось доказать.

Пусть углы A и B треугольника ABX острые. Центр окружности Ω совпадает с центром O описанной окружности треугольника ABX. Расстояние от точки O до точки касания ω_1 и Ω равно $\sqrt{R^2-a^2}$, где $a = AX/2$ и R – радиус описанной окружности треугольника ABX, т.е. $a+\sqrt{R^2-a^2} = b+\sqrt{R^2-b^2}$. В силу леммы, $a = b$ или $a^2+b^2=R^2$. Таким образом, осталось доказать следующее утверждение. Пусть в окружность радиуса R вписан треугольник ABX, причем $AX = 2a$, $BX = 2b$, углы XAB и XBA острые и $a^2+b^2=R^2$. Тогда угол AXB прямой. Это очень легко увидеть (сделайте рисунок).

Пусть теперь $\angle BAX \geq 90°$. Тогда центр окружности Ω лежит внутри полукруга, ограниченного дугой ω_2 и отрезком BX. (В противном случае окружность Ω лежала бы строго по одну сторону от прямой XB, а окружность ω_1 вследствие остроты угла AXB лежала бы по другую сторону от прямой XB.)

В прежних обозначениях имеем: $a < b$ и $b - B = a + A$. Отсюда, рассуждая как в лемме, получаем: $a = -B$. Противоречие.

В.Сендеров

М1904. *Натуральные числа a, b и c удовлетворяют равенству $a\left(b^2+c^2\right) = 2b^2c$. Докажите неравенство $2b \leq a\sqrt{a}+c$.*

Обозначим $t = c/b$. Подставив $c = bt$ в равенство задачи и разделив обе части на b^3, получим

$$\frac{a}{b}\left(1+t^2\right) = 2t,$$

следовательно,

$$a = \frac{2bt}{1+t^2}, \qquad (*)$$

и

$$c = bt = \frac{a\left(1+t^2\right)}{2}. \qquad (**)$$

Представим число t в виде несократимой дроби:

$$t = m/n,$$

где m, n – натуральные взаимно простые числа. Подставив это значение в формулы $(*)$ и $(**)$, получим следующие равенства:

$$a\left(m^2+n^2\right) = 2bmn, \quad a\left(m^2+n^2\right) = 2cn^2.$$

Поскольку число m^2+n^2 взаимно просто как с числом m, так и с числом n, то a делится на mn^2, т.е. $a = kmn^2$, где k – натуральное число. Имеем:

$$2b = kn\left(m^2+n^2\right), \quad 2c = km\left(m^2+n^2\right),$$

следовательно,

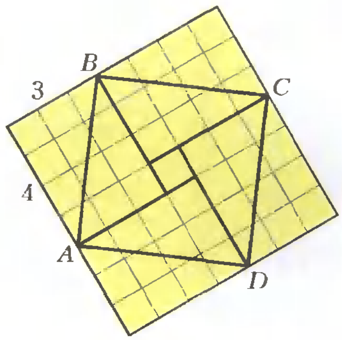
$$2b = km\cdot mn + kn^3 \leq km\cdot\frac{m^2+n^2}{2} + k^{3/2}m^{3/2}n^3 = c + a^{3/2},$$

что и требовалось доказать.

Н.Осипов

М1905. *Квадратными салфетками в количестве 50 штук размером 1×1 каждая нужно покрыть в два слоя квадратный стол размером 5×5 так, чтобы никакой участок края любой из салфеток не принадлежал краю стола. Как это сделать? (Салфетки разрешается перегибать.)*

Достаточно показать, что квадратный стол $ABCD$ размером 5×5 можно покрыть в два слоя скатертью размером 7×7 и салфеткой размером 1×1. Сначала накроем скатертью стол так, как показано на рисунке; после этого уголки скатерти с катетами 3 и 4 перегибаем и укладываем на поверхность стола. Затем остается покрыть центр стола салфеткой 1×1 – и двухслойное покрытие получено. Очевидно, это покрытие удовлетворяет требованиям условия задачи.



В.Произволов

Ф1913. *На плоскости в вершинах правильного треугольника со стороной L находятся три маленькие черепахи. По сигналу они начинают двигаться с постоянными по величине скоростями v_0, причем каждая черепаха в данный момент движется точно на свою соседку по часовой стрелке. Найдите ускорение черепахи в зависимости от времени.*

Скорости черепах по модулю неизменны, касательная составляющая ускорения при этом равна нулю, и нужно найти только нормальную составляющую. Ясно, что черепахи все время остаются в вершинах правильного треугольника, только длина его стороны со временем сокращается. Пусть в данный момент она составляет d, тогда за малый интервал времени Δt вектор скорости повернется на малый угол

$$\Delta\varphi = \frac{v_0\Delta t\sin 60°}{d},$$

изменение вектора скорости составит

$$\Delta v = v_0 \Delta\varphi$$

и ускорение будет равно

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_0^2 \sin 60^\circ}{d}.$$

Но длина стороны треугольника уменьшается «с двух сторон» со скоростью $v_0 + v_0 \cos 60^\circ = 1{,}5v_0$, поэтому можно записать $d = L - 1{,}5v_0 t$.
Тогда окончательно для ускорения получим

$$a = \frac{v_0^2 \sin 60^\circ}{L - 1{,}5v_0 t} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{v_0^2}{L - 1{,}5v_0 t}.$$

З.Повторов

Ф1914. *Очень легкая катушка ниток с внешним радиусом R = 4 см и внутренним r = 3 см (радиус намотки нити) находится на горизонтальной шероховатой поверхности с коэффициентом трения μ = 0,6. На оси катушки закреплен тонкий тяжелый стержень массой M = 0,2 кг. Катушку тянут за горизонтальный кусок намотанной на нее нити силой F = 1 Н. Найдите ускорение оси катушки.*

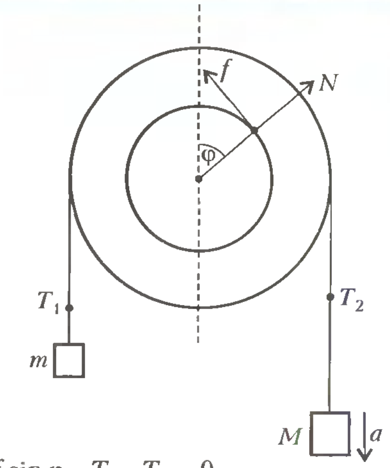
Максимальное значение силы трения в точке контакта с поверхностью составляет $\mu Mg = 1{,}2$ Н (если тянуть катушку в горизонтальном направлении). Легко видеть, что при силе $F = 1$ Н проскальзывания в нижней точке не будет, но при этом сила трения будет направлена вперед, по ходу движения. В самом деле, если бы трения не было, то ускорение оси катушки (центр масс) было бы направлено вправо и помимо поступательного движения катушка стремительно вращалась бы по часовой стрелке – момент инерции катушки очень мал. В нашем случае проскальзывание точки контакта с поверхностью даст силу трения, также направленную вправо. И значение силы трения получится таким, что вращающие моменты относительно оси катушки будут скомпенсированы: $f_{тр} = Fr/R = 0{,}75$ Н, что не превышает максимального значения силы трения. Теперь можно найти ускорение оси катушки:

$$a = \frac{F + f_{тр}}{M} = \frac{1{,}75\ \text{Н}}{0{,}2\ \text{кг}} = 8{,}75\ \text{м/с}^2.$$

Р.Александров

Ф1915. *Блок представляет собой легкий однородный диск радиусом R, в котором по центру сделана круглая дырка радиусом r и через эту дырку проходит горизонтальная закрепленная ось чуть меньшего радиуса. Коэффициент трения между осью и диском μ. Через блок переброшена легкая нерастяжимая нить, к концам которой подвешены грузы с массами M и m. Найдите ускорение груза массой M и натяжение нити в точке подвеса этого груза.*

Ясно, что точка контакта оси с дыркой смещена от вертикали в сторону груза с большей массой. Пусть это будет груз с массой M, а радиус, проведенный в точку касания, с вертикалью составляет угол φ (см. рисунок).



Если проскальзывания блока относительно оси нет, то все просто – сила натяжения нити равна $T = Mg$, а ускорение грузов нулевое (мы считаем, что нить по блоку не проскальзывает!).
Если проскальзывание есть, то можно записать следующие уравнения:

$$f = \mu N,$$
$$N \cos\varphi + f \sin\varphi - T_1 - T_2 = 0,$$
$$N \sin\varphi - f \cos\varphi = 0,$$
$$Mg - T_2 = Ma,$$
$$T_1 - mg = ma,$$
$$fr = (T_2 - T_1)R$$

(последнее уравнение – это равенство моментов сил, действующих на невесомый блок). После простых преобразований получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \mu,\quad N = \frac{T_1 + T_2}{\sqrt{1+\mu^2}},\quad \frac{T_2 - T_1}{T_2 + T_1} = \frac{\mu r/R}{\sqrt{1+\mu^2}} = \gamma.$$

Тогда окончательно

$$a = g\frac{M - m\dfrac{1+\gamma}{1-\gamma}}{M + m\dfrac{1+\gamma}{1-\gamma}},\quad T_2 = \frac{2mMg}{m + M\dfrac{1-\gamma}{1+\gamma}}.$$

Условие для проскальзывания можно получить из очевидного неравенства $a \ge 0$:

$$\frac{1+\gamma}{1-\gamma} \le \frac{M}{m}.$$

А.Блоков

Ф1916. *В сосуде объемом 1 л находится гелий при температуре 300 К. Плотность газа такова, что длина свободного пробега в нем составляет 0,5 мкм. Понаблюдаем за одной из частиц, которая только что ударилась об одну из стенок сосуда. Каковы ее шансы удариться о противоположную стенку сосуда раньше чем через 0,5 с после этого?*

Оценим среднюю квадратичную скорость частиц при заданной температуре:

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{\text{M}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}3 \cdot 300}{0{,}004}}\ \text{м/с} = 1400\ \text{м/с}.$$

Время между последовательными соударениями равно

$$\tau = \frac{\lambda}{v} = \frac{5 \cdot 10^{-7}\ \text{м}}{1{,}4 \cdot 10^3\ \text{м/с}} = 3{,}5 \cdot 10^{-10}\ \text{с}.$$

За указанный в условии задачи промежуток времени $T = 0{,}5$ с произойдет примерно $T/\tau = 1{,}4 \cdot 10^9$ ударов. Каждый раз в промежутках между ударами частица смещается в среднем на длину свободного пробега λ и «в длину» проходит очень большое расстояние $L = vT = 700$ м, но складывать длины неправильно – соседние перемещения не «вытянуты» в одну прямую, а составляют друг с другом произвольные углы. Для оценки смещения частицы примем «среднее» значение такого угла равным 90°, при этом будут складываться квадраты смещений (теорема Пифагора), поэтому получим $d^2 = \lambda^2 T/\tau$, и смещение частицы составит

$$d = \lambda\sqrt{\frac{T}{\tau}} = 5\cdot 10^{-7}\ \text{м}\cdot\sqrt{1{,}4\cdot 10^9} = 0{,}02\ \text{м}.$$

Это в несколько раз меньше размера сосуда (при объеме 1 л этот размер порядка 0,1 м). Поэтому можно сказать, что у частицы нет шансов долететь за указанное время до противоположной стенки (если в сосуде нет потоков газа, наличие которых может очень сильно изменить положение частицы). Конечно, это все выводы статистические, но при таком большом числе соударений статистика вещь надежная.

З.Броуновский

Ф1917. *В очень большом теплоизолированном сосуде находится порция азота. Газ сжали до объема 1 л, при этом его давление составило 0,5 атм. Найдите совершенную при сжатии работу.*

Газ в сосуде сжали во много раз (сосуд был очень большой, а в конце объем газа составил всего 1 л), при отсутствии теплообмена с окружающей средой температура газа возросла многократно, и его внутренняя энергия теперь во много раз больше начальной. Пренебрегая начальной энергией газа, будем считать необходимую для сжатия работу равной внутренней энергии газа в конце сжатия.

Газ двухатомный, его внутренняя энергия равна

$$U = \nu\cdot\frac{5}{2}RT = \frac{5}{2}pV = 2{,}5\cdot 0{,}5\cdot 10^5\ \text{Па}\cdot 10^{-3}\ \text{м}^3 = 125\ \text{Дж}.$$

А.Диабатов

Ф1918. *Две концентрические проводящие сферы не заряжены, а в пространстве между ними, на расстоянии L от центра, закреплен точечный заряд Q. Найдите разность потенциалов между сферами. Какой заряд протечет по тонкому проводнику, если соединить этим проводником сферы?*

Потенциал внутренней сферы найти совсем просто – внутри сферы поле нулевое, тогда ее потенциал равен потенциалу центра сфер. Обе сферы вначале не заряжены, поэтому

$$\varphi_1 = \varphi_{\text{ц}} = k\frac{Q}{L}.$$

По внешней сфере под действием внутренних зарядов должны перераспределиться заряды – на ее внешней и внутренней поверхностях теперь появятся заряды (в сумме равные нулю). На внешней поверхности большой сферы заряд распределится равномерно, и поле снаружи будет таким, как если бы полный внутренний заряд системы был расположен в центре сфер. Тогда потенциал наружной сферы радиусом R найдем по формуле для потенциала поля точечного заряда:

$$\varphi_2 = k\frac{Q}{R}.$$

Разность потенциалов между сферами составит

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = kQ\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{R}\right).$$

После соединения сфер проводником по нему будут перетекать заряды, пока потенциалы сфер не станут равными. Пусть наружу перетечет полный заряд q, тогда заряд внутренней сферы станет равным $-q$, а внешняя сфера приобретет заряд q. Потенциал наружной сферы при этом не изменится (полный заряд системы при перетекании зарядов от одной сферы к другой не меняется), а потенциал внутренней сферы радиусом r теперь станет

$$\varphi = k\frac{-q}{r} + k\frac{Q}{L} + k\frac{q}{R} = \varphi_2 = k\frac{Q}{R}.$$

Отсюда найдем перетекший по проводнику заряд:

$$q = Q\frac{1/L - 1/R}{1/r - 1/R}.$$

З.Повторов

Ф1919. *Медная монета диаметром D и толщиной h скользит плашмя по горизонтальному столу с постоянной скоростью v. Магнитное поле имеет индукцию B и направлено горизонтально под углом φ к направлению вектора скорости. Найдите заряды, которые возникают на плоских поверхностях монеты (монету считать очень тонкой).*

Под действием магнитного поля (силы Лоренца) в движущемся проводнике заряды начнут перераспределяться – речь идет о свободных электронах, так как поведение остальных зарядов определяется движением всего тела, с которым они накрепко связаны. По мере перераспределения свободных зарядов в проводнике возникнет электрическое поле, и при установившемся движении сумма сил, действующих на свободный заряд, должна оказаться нулевой (заряды должны теперь двигаться равномерно вместе с монетой). Тогда мы можем найти напряженность этого равновесного электрического поля – магнитные силы направлены вертикально, поэтому электрическое поле тоже вертикально и равно по модулю

$$E = \frac{F_{\text{Л}}}{e} = \frac{evB\sin\varphi}{e} = vB\sin\varphi.$$

Поле это очень похоже на поле в плоском конденсаторе, и заряды на поверхности монеты мы найдем по известной формуле:

$$Q = C\Delta\varphi = CEh = \frac{\varepsilon_0 S}{h}Eh = \varepsilon_0\frac{\pi D^2}{4}vB\sin\varphi.$$

Интересно, что от толщины монеты результат не зависит – лишь бы монета была тонкой.

А.Простов

Ф1920. *Две одинаковые катушки индуктивностью L каждая соединены последовательно и подключены концами к источнику переменного напряжения часто-*

ты ω. Параллельно одной из катушек подключают конденсатор. При какой емкости этого конденсатора напряжения катушек окажутся одинаковыми по величине?

Для того чтобы напряжения катушек оказались одинаковыми, через них должны течь одинаковые по величине токи. Если конденсатор имеет исчезающее малую емкость, ток через него окажется близким к нулю, а токи катушек останутся одинаковыми (это тривиальное решение, но все же решение!).

Но возможен и другой вариант – ток останется прежним по величине, но его направление изменится. В нашем случае ток может поменять фазу только на 180°, т.е. стать противоположным. Но для этого ток через конденсатор должен быть ровно вдвое больше тока параллельной ему катушки. Это возможно в том случае, когда емкостное сопротивление на данной частоте вдвое меньше индуктивного:

$$\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{2}\omega L, \text{ откуда } C=\frac{2}{\omega^2 L}.$$

А.Катушкин

Ф1921. *При помощи собирающей линзы получают действительное изображение источника света, который представляет собой короткий прямолинейный отрезок, расположенный на главной оптической оси линзы перпендикулярно этой оси. При этом увеличение составляет $\Gamma = 0{,}1$. Каким станет увеличение, если повернуть отрезок так, чтобы он составил угол $\alpha = 45°$ с осью линзы?*

Можно сделать чертеж, проведя луч, падающий на линзу под углом 45°. Разумеется, он пройдет мимо «настоящей» линзы, но мы можем строить лучи, как при обычном преломлении. Эта модель полностью соответствует формуле линзы – она, линза, дает изображение там же, где «бумажная» линза, но работает с малыми углами падения φ и узкими пучками лучей. Очевидно, что для короткого отрезка-источника изображение просто уменьшится в $\sqrt{2}$ раз, и увеличение составит

$$\Gamma_1=\frac{\Gamma}{\sqrt{2}}\approx\frac{1}{14}.$$

З.Рафаилов

Ф1922. *Плоская волна длиной $\lambda = 0{,}5$ мм падает перпендикулярно на непрозрачный экран, в котором прорезаны четыре параллельные щели шириной $d = 0{,}2$ мм каждая, а расстояние между соседними щелями $D = 5$ мм. Вначале стандартный вопрос – найдите угол между нормалью к экрану и направлением на первый минимум излучения. Затем закроем одну из щелей (конечно же, не крайнюю). В каком направлении теперь наблюдается первый минимум? Во сколько раз отличаются интенсивности излучения в главном максимуме и в этом минимуме? («Интенсивность» – это мощность.)*

Для стандартного случая первый минимум наблюдается при условии

$$D\sin\alpha=\frac{\lambda}{4}, \text{ откуда } \sin\alpha=\frac{\lambda}{4D}=\frac{1}{40}, \quad \alpha\approx 1{,}5°$$

Пусть закрыта щель номер 3 (рис.1). Будем считать каждую незакрытую щель точечным источником. При наблюдении издали амплитуды волн получаются одинаковыми, допустим – единичными (все равно нам нужно найти отношение освещенностей в двух случаях). Предположим, волна от щели 2 запаздывает на угол φ, тогда запаздывание волны от щели 4 составит

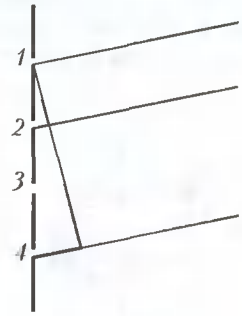


Рис. 1

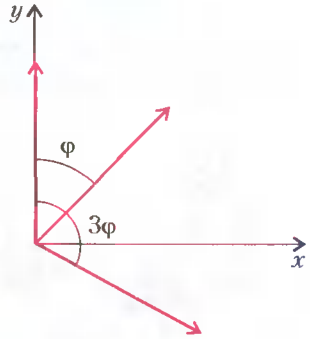


Рис. 2

3φ. Итак, нам нужно сложить изображенные на рисунке 2 векторы и выразить амплитуду суммы. Сделаем это по проекциям на оси x и y: $\sin\varphi+\sin 3\varphi$ и $1+\cos\varphi+\cos 3\varphi$. Для квадрата амплитуды получим

$$(1+\cos\varphi+\cos 3\varphi)^2+(\sin\varphi+\sin 3\varphi)^2=$$

$$=1+\cos^2\varphi+\cos^2 3\varphi+2\cos\varphi+2\cos 3\varphi+$$

$$+2\cos\varphi\cos 3\varphi+\sin^2\varphi+\sin^2 3\varphi+2\sin\varphi\sin 3\varphi=$$

$$=3+2(\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cos 3\varphi).$$

Исследуем выражение в скобках – нас интересует его минимум. Можно построить график, а можно посчитать производную по φ и приравнять ее к нулю:

$$(\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cos 3\varphi)'=-\sin\varphi-2\sin 2\varphi-3\sin 3\varphi=0.$$

Если $\sin\varphi\neq 0$, то получим уравнение $6\cos^2\varphi+2\cos\varphi-1=0$, откуда

$$\cos\varphi=\frac{-1\pm\sqrt{7}}{6},$$

$$\cos\varphi_1=-0{,}6 \text{ и } \varphi_1=2{,}22 \text{ рад},$$

$$\cos\varphi_2=-0{,}275 \text{ и } \varphi_2=1{,}29 \text{ рад}.$$

Второй корень дает более глубокий минимум, да он и ближе к «нулевому» направлению, поэтому имеет полное право именоваться «первым» минимумом.

Квадрат амплитуды для этого угла составляет 0,37.

Квадрат амплитуды в главном максимуме равен $3^2=9$.

Итак, отношение освещенностей равно

$$\frac{E_{max}}{E_{min}}=\frac{9}{0{,}37}\approx 25.$$

А.Зильберман

Задачи

1. Больному прописали таблетки двух сортов *А* и *Б*, не отличающиеся по внешнему виду. Через определенну промежутки времени он должен одновременно принимать одну таблетку сорта *А* и одну таблетку сорта *Б*, в любых других сочетаниях лекарств для больного

наступают нежелательные последствия. Когда до окончания курса лечения ему осталось принять 4 таблетки (2 таблетки сорта *А* и 2 таблетки сорта *Б*), он их случайно перемешал. Присутствовавший при этом математик его успокоил, сказав, что можно благополучно завершить лечение, не подвергнув здоровье риску. Что для этого нужно сделать?

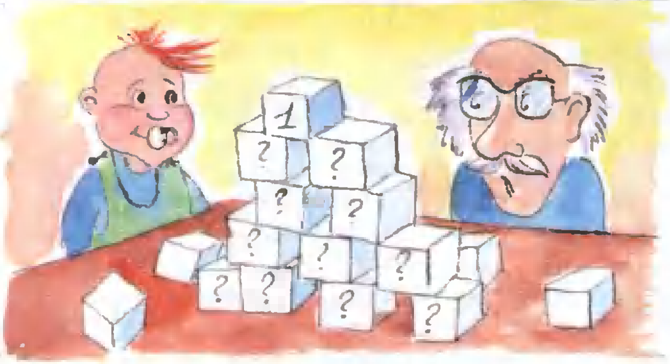
Фольклор

2. В ряд выложили дукаты и цукаты, не отличающиеся по внешнему виду. Каждый дукат весит 7 граммов, а каждый цукат – 8 граммов. Как с помощью только двух взвешиваний на чашечных весах без гирь отде-

лить дукаты от цукатов, если известно, что любой цукат лежит правее каждого дуката, а всего в ряд выложили 10 предметов?

Из израильских олимпиад

3. Последовательность натуральных чисел строится таким образом. Первое число равно 1. Каждое следующее число получается из предыдущего умножением на 2 и прибавлением к результату 1. Сколько среди

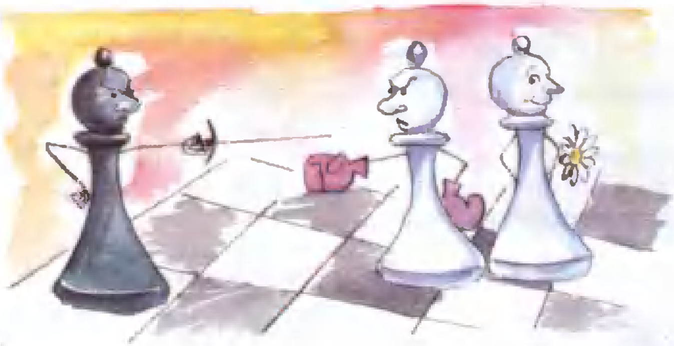


первых 2004 членов этой последовательности чисел, делящихся на 5?

В. Брагин, ученик 6 класса

4. На шахматной доске расставлены белые и черные ферзи – поровну каждого цвета. При этом оказалось, что ферзи одного цвета не угрожают друг другу. Каково наибольшее возможное число ферзей?

И.Акулич



5. В окружность вписали квадрат, а затем четыре дуги окружности симметрично отразили относительно стягивающих их хорд. Малыш утверждает, что в результате получится фигура, показанная на рисунке первой (дуги пересекаются только в вершинах квадрата). Карлсон же убежден, что получится фигура, показанная на рисунке второй (дуги пересекаются также и в других точках).
Я в недоумении – кто из них прав?

Фрекен Б.

Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6—8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

6. Три числа x, y, z удовлетворяют равенствам $\sqrt{x}+y=1$, $\sqrt{y}+z=5$, $\sqrt{z}+x=2$. Найдите все такие числа.

С.Дворянинов

7. В волейбольном турнире (в один круг) участвовали k команд. Оказалось, что если для каких-то двух команд A и B команда A победила команду B, то найдется такая команда C, что команда B победила команду C, а команда C — команду A. При каких k возможен такой турнир? (*Примечание.* В волейболе ничьих не бывает.)

И.Акулич

8. Существует такое 2004-значное натуральное число N, что сумма цифр числа N совпадает с суммой цифр числа kN, где натуральное число k принимает все значения от 1 до N. Докажите это.

Г.Гальперин

9. На плоскости дан квадрат со стороной 1. Разрешается выбрать любые две его вершины и перенести одну из них на любое расстояние в произвольном направлении (в пределах плоскости), а другую — на такое же расстояние в противоположном направлении.

После нескольких таких операций получился квадрат, равный исходному, но не совпадающий с ним. Докажите, что площадь общей части обоих квадратов больше 0,8.

И.Акулич

10. Пусть для некоторых натуральных чисел a, b, c и d верно равенство

$$2^a+2^b=2^c+2^d.$$

Докажите, что $a+b=c+d$.

В.Сендеров, А.Спивак

Легенда о задаче Виета

С.ДВОРЯНИНОВ

В НАЧАЛЕ СЕНТЯБРЯ 1550 ГОДА ДЕСЯТИЛЕТНИЙ ФРАНСУА Виет возвращался из школы домой, погруженный в свои мысли. Он шел по набережной и не замечал ласкового, почти летнего солнца, не слышал ни шума воды в реке, ни стука колес проезжавших мимо экипажей, ни криков городских торговцев.

А причиной раздумий Франсуа было вот что. После летних каникул учитель математики решил проверить, как его ученики-третьеклассники помнят то, чему он их учил в прошлом году. И начал учитель с арифметики. Он написал на доске три числа 1, 2, 3 и попросил вычислить сумму, содержащую эти три числа, все возможные произведения двух из этих чисел и, наконец, произведение всех трех чисел. В то время в одной классной комнате занимались ученики разных классов. Заняв третьеклассников, учитель стал заниматься с первоклассниками.

На черной грифельной доске[1] каждого ученика (точнее, тех из них, кто понял условие задачи) появилась такая запись:

$$1+2+3+1\cdot2+1\cdot3+2\cdot3+1\cdot2\cdot3.$$

---

[1] *Грифельная доска — маленькая доска черного цвета, на которой писали специальными мелками (грифелями), а когда написанное становилось ненужным, его стирали. Эти доски заменяли в школе тетради, так как бумага стоила дорого.*

Значение этой суммы, а именно число 23, нашли почти все.

Однако учитель остался нарочито недовольным.

– Медленно, – так оценил он работу своих учеников. – Вы считаете слишком медленно! Видно, летний отдых был слишком долгим. Вы потеряли те навыки счета, которые у вас были весной. Будем тренироваться! Теперь решите эту же задачу, но не для трех, а для четырех чисел 1, 2, 3 и 4.

Головы учеников склонились над партами, ребята терпеливо складывали числа, мел застучал по грифельным доскам... Слагаемые выстраивались одно за другим:

$$1+2+3+4+$$
$$+1\cdot 2+1\cdot 3+1\cdot 4+2\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 4+$$
$$+1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 2\cdot 4+1\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3\cdot 4+$$
$$+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,.$$

Школяры, сбиваясь, стирая написанное и снова складывая, трудились над вычислением этой суммы.

Франсуа же решил немного сэкономить и нашел сумму лишь тех слагаемых, которых не было в первой задаче. Каждое из этих новых слагаемых содержит четверку, и потому сумма новых слагаемых такова:

$$4+$$
$$+1\cdot 4+2\cdot 4+3\cdot 4+$$
$$+1\cdot 2\cdot 4+1\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3\cdot 4+$$
$$+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,.$$

Она оказалась равной 96. Сложив затем 23 и 96, юный француз написал на своей доске число 119 и показал результат учителю. Тот, заглянув в свою тетрадь и сверив ответ своего ученика со своими записями, одобрительно кивнул головой. Надо сказать, что старый учитель не сомневался в том, что маленький Франсуа получит верный результат. Виет был его лучшим учеником.

Теперь ждать всех остальных учеников и учителю, и Виету пришлось долго. И не мудрено! Сумма-то содержит пятнадцать слагаемых, из которых одиннадцать представляют произведения. Во время этой паузы каждый из двоих думал о своем. Учитель прикидывал, успеют ли его питомцы за оставшееся от урока время решить аналогичную задачу для пяти чисел – от 1 до 5. Виет тоже размышлял о сумме, порожденной пятью числами 1, 2, 3, 4, 5. Интересно, сколько при этом получится слагаемых? Хватит ли места, чтобы все их записать на грифельной доске? Если не хватит, то придется две грифельные доски соединить вместе, и тогда два ученика за одной партой будут решать задачу вместе. Такое уже случалось в нескольких геометрических задачах, предложенных их замечательным учителем. А если снова сэкономить и вычислять лишь сумму новых слагаемых, содержащих пятерку? Одной грифельной доски для этого хватит?

Наконец, число 119 появилось на всех досках. Конечно, не все нашли его самостоятельно. Кое-кто его просто... списал у соседа! Разумеется, для учителя это не было тайной. Но что поделаешь? Математика слишком сложный предмет, не каждому дается. У многих его учеников другие таланты...

Для решения новой задачи времени уже не остается. И задача о сумме для пяти чисел от 1 до 5 задается на дом.

— Подумайте, а нет ли здесь какого-нибудь изящного способа решения, — напутствует учитель своих учеников и при этом по-особому смотрит на маленького Франсуа. Его слова, обращенные ко всем, относятся в первую очередь к Виету.

Для Виета слова учителя — не просто очередное задание. Очень часто они вдохновляли его на настоящие открытия. Конечно, таковыми эти открытия были только для самого Франсуа. Сколько веков развивается математика, начиная с египетских и греческих математиков! Наука прошла большой путь. Чтобы выйти на ее современный уровень, надо многое узнать. Иногда при этом удается что-то уже давно известное повторить. Вот это Виет называл открытием для себя. И тогда он испытывал ни с чем несравнимые чувства первооткрывателя и первопроходца. И чем чаще это случалось, тем сильнее было стремление повторить это вновь и вновь. Учитель знал, что происходит при этом в сердце его талантливого ученика, и старался находить для него подходящие задачи. Как-то получится с этой задачей?

Да, кроме того, друзья по классу, прощаясь возле школы, подзадорили Франсуа:

— Послушай, а вдруг завтра учитель поставит эту же задачу для чисел от одного до... СТА?! Что будем делать? А если не для ста, а вообще для n чисел? Что тогда? Выручай, вся надежда только на тебя, Пифагор ты наш!

Франсуа совсем не обижался, когда одноклассники называли его Пифагором. Наоборот, в душе ему было даже приятно слышать это в свой адрес. Но сейчас это великое имя надо было оправдывать. А как? Конечно же, этот вопрос Франсуа относил к решению задачи о сумме...

Учитель начал цикл своих задач с числа 3. А как звучит эта задача в более простой ситуации, а именно при $n = 2$? Здесь надо найти сумму трех слагаемых $1 + 2 + 1\cdot 2$. Три числа — это 1, 2, $1\cdot 2$. Три числа, три числа, три числа... Откуда, как и где еще они могут возникнуть? А ведь такая ситуация, кажется, была! Франсуа шел по улицам, но в это время его мысли были далеко. Да, он вспомнил! Совсем недавно он вычислял произведение двух линейных множителей $(x+1)(x+2)$. Получился квадратный трехчлен $x^2+(1+2)x+1\cdot 2$. Коэффициенты [2] этого трехчлена (кроме первого) — это как раз три числа из суммы. А что же будет для суммы, порожденной числами 1, 2, 3?

Естественно рассмотреть произведение трех линейных множителей $(x+1)(x+2)(x+3)$. Быть может, коэффициенты этого многочлена помогут вычислить требуемую сумму? Франсуа решил раскрыть здесь скобки. Тут ему пришлось остановиться. Конечно, он мог бы поднять с обочины дороги прутик и на придорожном песке написать все, что требовалось. При этом написать своим, особым способом. Учитель рассказывал, что сейчас многие современные математики — среди них Бомбелли из Болоньи и великий итальянец Кардано — увлечены переходом от словесной (или риторической) алгебры к алгебре символической. Это осуществляется путем сокращения (или синкопирования) слов, а затем введением символов. У Франсуа тоже есть некоторый набор своих алгебраических символов. Его собственное исчисление представлялось маленькому Виету как «искусство, позволяющее хорошо делать математические открытия» [3].

Но Франсуа совсем необязательно все писать на песке. Он видел все необходимые выкладки своим внутренним зрением. Действительно, имеются три скобки. После их раскрытия получится несколько слагаемых, многочлен. А каждое слагаемое — это произведение трех сомножителей по одному из каждой скобки. Сначала один раз получается x^3. А как получается коэффициент при x^2? Здесь множитель x берется из двух скобок, из третьей оставшейся скобки берется числовой множитель. Стало быть, после приведения подобных коэффициент при x^2 равен как раз сумме $1+2+3$, т.е. сумме чисел, взятых по одному из каждой скобки.

Если же группировать слагаемые, содержащие x в первой степени, то коэффициентами при этом должны быть произведения двух чисел из разных скобок. Сумма всех этих числовых множителей как раз равняется $1\cdot 2+1\cdot 3+2\cdot 3$.

Наконец, взяв из каждой из трех скобок только лишь числовые множители, получим число $1\cdot 2\cdot 3$.

Франсуа ясно представил себе, что

$$(x+1)(x+2)(x+3) = x^3 + x^2(1+2+3) + \\ + x(1\cdot 2+1\cdot 3+2\cdot 3)+1\cdot 2\cdot 3.$$

Теперь легко получить ту сумму, о которой говорил учитель. Если в последнем тождестве положить $x = 1$, то получим равенство

$$2\cdot 3\cdot 4 = 1+(1+2+3)+(1\cdot 2+1\cdot 3+2\cdot 3)+1\cdot 2\cdot 3.$$

Справа в этом равенстве имеем ту сумму, которую учитель просил вычислить в начале урока, и лишнюю единицу. Обозначив эту сумму S_3, получим

$$S_3 = 2\cdot 3\cdot 4-1.$$

Теперь Виет абсолютно не сомневался, что для чисел от 1 до 5 соответствующая сумма S_5 равна $2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6-1$. Действительно, здесь следует рассмотреть многочлен $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$.

---

[2] Термин «коэффициент» был предложен Ф.Виетом (см. книгу А.Даан-Дальмедико, Ж.Пейффер «Пути и лабиринты. Очерки по истории математики» — М.: Мир, 1986, с. 153). Термин составлен из латинских слов со (con, cum) — «с», «вместе» и efficiens — «производящий»; буквальное значение — «содействующий» (см. Н.В.Александрова, «Математические термины» — М.: Высшая школа, 1978, с.63).

[3] Именно так характеризовал свое исчисление Ф.Виет (см. К.А.Рыбников, «История математики» — М.: МГУ, 1974, с.121).

[4] Произведение всех натуральных чисел от 1 до n имеет специальное обозначение n! и читается «n-факториал». Название происходит от слова factor — «множитель». Это обозначение впервые встречается у Крампа (1808 год). В XIX веке употреблялись и многочисленные другие обозначения, чаще всего $\Pi(n)$ или Π_n. Между прочим, в 1916 году Совет Лондонского математического общества рекомендовал читать знак n! «n-восхищение».

Друзья говорили о сумме, порожденной числами от 1 до 100? Конечно, об этой сумме учитель не спросит, уж очень она большая получается:

$$S_{100} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 101 - 1.$$

Ну что ж, завтра юному Пифагору будет что рассказать своим друзьям об этих интересных суммах. Виету понятно, что для любого натурального числа n получается красивый ответ $S_n = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n+1) - 1$.

Все! Задача решена в общем виде. Юный Франсуа рад: он снова сделал открытие для себя!

«Ай да Виет, ай да молодец!» — Виет ускорил шаг. «Красивая формула!» — восхищался юный математик. Только длинно записывается. А если придумать для произведения всех натуральных чисел от 2 до n какое-нибудь новое обозначение? Какое? Пусть будет n с восклицательным знаком![4] И тогда

$$S_n = (n+1)! - 1.$$

Виет улыбнулся и посмотрел вокруг. Мимо него спешили люди, негромко звучала шарманка, солнце отражалось в водах реки, на башне били часы и доносился издалека колокольный звон... Какой славный день! Мальчуган был счастлив.

Упражнения

1. Пусть даны n нечетных натуральных чисел 1, 3, 5,..., $2n - 1$. Найдите сумму, содержащую все эти числа, все возможные произведения двух из этих чисел, все возможные произведения любых трех из этих чисел и так далее — последнее слагаемое в сумме равно произведению всех данных чисел.

Ответ: $S = (2n)!! - 1$ (решив задачу методом Виета, попробуйте догадаться, что обозначает $(2n)!!$ — читается «*2n-двойной факториал*»).

2. Пусть даны n четных натуральных чисел 2, 4, 6,..., $2n$. Найдите сумму, содержащую все эти числа, все возможные произведения двух из этих чисел, все возможные произведения любых трех из этих чисел и так далее — последнее слагаемое в сумме равно произведению всех данных чисел.

Ответ: $S = (2n + !)!! - 1$ (решив задачу методом Виета, попробуйте догадаться, что обозначает $(2n + 1)!!$ — читается «$(2n + 1)$-*двойной факториал*»).

Победители конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8» 2003/04 учебного года

Лучших результатов в конкурсе добились следующие школьники:

Бабичев Дмитрий — Набережные Челны, гимназия 26, 7 кл.,
Кадец Людмила — Харьков, СОУВК 45, 8 кл.,
Дудкин Александр — Харьков, ФМЛ 27, 5 кл.,
Красовицкий Евгений — Харьков, СОУВК 45, 8 кл.,
Жернов Антон — Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,
Соболев Дмитрий — Харьков, гимназия 47, 6 кл.,
Скорик Максим — Харьков, гимназия 47, 8 кл.,
Вайсбурд Антон — Харьков, СОУВК 45, 8 кл.,
Палазник Николай — Москва, школы 789, 6 кл.,
Соболев Евгений — Харьков, гимназия 47, 6 кл.,
Бичурин Игорь — Харьков, УВК 55, 6 кл.,
Козырев Владимир — Железногорск, гимназия 91, 8 кл.,
Саженкова Ольга — Барнаул, школа-гимназия 42, 8 кл.,
Михайлов Алексей — Стерлитамак, муниципальная гимназия 2, 7 кл.

и кружки:

Математического клуба при Университете им.Бен-Гуриона в Негеве, г.Беер-Шева, Израиль, руководители *П.Самовол, Й.Хейфец,*
гимназии 127, Снежинск, руководитель *А.А.Малеев,*
«Эврика» ФМЛ 27, Харьков, руководители *Е.Л.Аринкина, А.Л.Берштейн, В.Я.Крупчицкий,*
при Курганском университете, руководитель *О.И.Южаков,*
муниципального лицея, Краснодар, руководитель *З.А.Дегтярева,*
«Эрудит», Донецк, руководители *Л.Л.Потемкина, В.Л.Потемкин,*
гимназии 1, Самара, руководитель *А.А.Гусев,*
ФМШ 9, Пермь, руководитель *Г.А.Одинцова,*
школы «Успех», Магнитогорск, руководители *А.В.Христева, К.С.Ощепков,*
центра «Олимп», Ярославль, руководитель *И.М.Игнатович,*
«Эрудит» ФМШ 32, Астрахань, руководитель *Т.М.Сергеева,*
школы индивидуального образования одаренных детей, Магнитогорск, руководители *Н.С.Никифорова, А.В.Устинов.*

Жюри конкурса отмечает также хорошие работы следующих учеников:

Макарца Александра — Харьков, ФМЛ 27, 7 кл,
Коржова Игоря — Харьков, УВК 55, 6 кл,
Карайко Алины — Харьков, школа 1, 7 кл,
Андрианова Евгения — Волгоград, школа 110, 8 кл,
Дятлова Дмитрия — Магнитогорск, школа «Успех», 7 кл.

и кружков:

«Лига юных математиков», Винница, руководители *Т.С.Збожинская, И.М.Кривошея,*
Чувашского национального лицея-интерната им. Г.С.Лебедева, Чебоксары, руководитель *С.А.Иванов,*
МОУ СОШ 10, Ангарск, руководитель *Н.В.Чепелева,*
школы 130, Новосибирск, руководитель *Л.Н.Чусовитина,*
Медико-технического лицея, Самара, руководитель *С.Ю.Попов.*

Явление природы или биологическая диверсия?

В.ВЫШИНСКИЙ

И Господь навел на сию землю восточный ветер, продолжавшийся весь тот день и всю ночь. Настало утро, и восточный ветер нанес саранчу.

Исход. X, 13

ОНИ ЛЕТЕЛИ НИЗКО НАД МОРЕМ, НА ВЫСОТЕ 1–2 метров. Долетев до берега, садились на песок, на скалы, на выброшенные морем водоросли. Подсохнув и отдохнув, улетали дальше, в зелень берега. Тогда они были в диковинку – маленькие, полосатые, очень красивые жучки. Это потом мы узнали, что колорадский жук является злейшим врагом картофеля и не имеет в этих краях естественных врагов. Уже на следующее лето дети давили их камушками прямо на скалах, на песке, в пене прибоя. А они все летели и летели, то ли с кораблей, стоящих на рейде, то ли из-за моря. Поговаривали, что это локальная диверсия – не могут же такие крошки перелететь море...

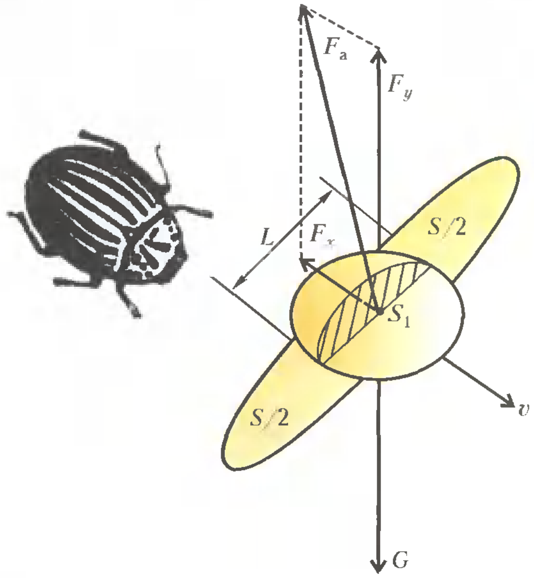
Чтобы выяснить этот вопрос, проведем простые оценки.

Прежде всего, не будем учитывать ветер, тем более что жуки летят очень низко. А вообще-то вечерний бриз (дующий с берега) облегчает старт, а утренний (дующий к берегу) спасает многих обессилевших насекомых, помогая достичь противоположного берега. Будем считать также, что в полете жуки не питаются. Пусть масса их «топлива» равна 30% полной массы, а выделенная энергия поровну (по 10%) тратится на поддержание жизнедеятельности, создание подъемной силы и преодоление сопротивления воздуха. (Известно, например, что свекловичные цикадки перед перелетом запасают жира до 40% от общей массы.)

Примем следующие параметры жука. Пусть его масса $m = 0{,}5\ \text{г} = 5\cdot10^{-4}\ \text{кг}$, характерный размер L = 10 мм = = 0,01 м, форма тела – полусфера. Для оценки калорийности топлива воспользуемся данными для авиационного топлива: 40 МДж/кг. Тогда на работу против сил сопротивления жук может выделить $0{,}1\cdot5\cdot10^{-4}\ \text{кг}\cdot40\cdot10^{6}\ \text{Дж/кг} = 2000\ \text{Дж}$.

Далее, рассмотрим силы, действующие на тело, движущееся относительно воздуха с постоянной скоростью v (см. рисунок). Ясно, что вес тела $G = mg$ должен компенсироваться подъемной силой F_y (которая при горизонтальном полете направлена вертикально вверх). Но при движении в воздухе, увы, возникает и сила сопротивления F_x, которую, очевидно, нужно преодолевать при помощи силы тяги, равной ей по величине и противоположно направленной. Заметим, что результирующая сил $\vec{F}_y$ и $\vec{F}_x$ называется аэродинамической силой $\vec{F}_a$.

Расчет аэродинамических сил даже для тел фиксированной формы (например, снаряда, ракеты, самолета или футбольного мяча) – очень сложная задача. Поэтому инженеры прибегают к такой хитрости. Они составляют так называемую формулу размерностей, в которую входят все физические величины, влияющие, по предположению, на исследуемую величину, но при этом перед формулой ставят



безразмерный множитель, который нужно определить другим способом – например, экспериментально. Для этого во всем мире и построены сотни аэродинамических труб. Конечно, если движущееся тело еще и изменяет свою геометрию (как в случае машущего полета), то проблема становится еще сложнее. Поэтому в наших оценках будем исходить из некоторых определенных (характерных) значений упомянутых безразмерных коэффициентов.

Итак, из соображений размерности найдем зависимость подъемной силы F_y от плотности воздуха ρ (ее размерность кг/м^3), скорости v(м/с) и площади крыльев $S\left(\text{м}^2\right)$:

$$F_y = C_y\frac{\rho v^2}{2}S.$$

Теория машущего полета дает значение безразмерного коэффициента подъемной силы крыла C_y от 2 до 5. Будем считать, что перелет совершается при $C_y = 2$ и площадь крыла равна удвоенной площади основания жука (который, по предположению, имеет форму полусферы). Тогда $S = \frac{2\pi L^2}{4} = 1{,}57\cdot10^{-4}\ \text{м}^2$. Приравняв подъемную силу F_y весу G, находим скорость полета:

$$v = \sqrt{\frac{2G}{C_y\rho S}} = \sqrt{\frac{2\cdot10\cdot5\cdot10^{-4}}{2\cdot1{,}3\cdot1{,}57\cdot10^{-4}}}\ \text{м/с} \approx 5\ \text{м/с}.$$

Здесь плотность воздуха равна $\rho \approx 1{,}3\ \text{кг/м}^3$. При $C_y = 5$ скорость полета была бы ниже: $v \approx 3{,}1\ \text{м/с}$.

Оценим теперь силу сопротивления, мешающую жуку двигаться в воздухе. Как всякая сила, она должна измеряться в ньютонах, следовательно, формула размерностей для нее будет та же, что и для подъемной силы. Но здесь существенно еще одно физическое явление – трение, связанное с вязкостью воздуха. Оно тем более важно, чем меньше движущееся тело и чем медленнее это тело движется.

Для оценки роли вязкости в аэродинамике вводится так называемое число Рейнольдса Re. Оно равно отношению

(Продолжение см. на с. 34)

Тяжести, уравновешивающиеся на равных длинах, будут тоже равны.

Архимед

Мы ощущаем груз на наших плечах, когда стараемся мешать его падению.

Галилео Галилей

...под весом, который указан Галилеем, следует понимать вес самого нижнего воздуха, в котором живут люди и животные...

Эванджелиста Торричелли

Этот новый механический прибор позволяет понять, почему жидкости имеют вес, соответствующий высоте их стояния.

Блез Паскаль

Сначала я рассмотрю задачу в предположении, что медные стержни невесомы...

Генри Кавендиш

...веса тел на всякой планете при одинаковых расстояниях от ее центра пропорциональны массам этих планет.

Исаак Ньютон

Книга легко держалась в руках, так как не имела веса; страницы топорщились, и их нужно было придерживать пружинкой или просто пальцами...

Константин Циолковский

Сколько весит тело — это одно, а насколько трудно его разогнать — совсем другое.

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакомы вам вес и невесомость?

Эти понятия, интуитивно близкие человеку с незапамятных времен – достаточно вспомнить перетаскивание тяжестей или прыжок с высоты, – постепенно обрели статус строго определяемых физических величин. Потребности практики побуждали к изобретению весов и для гигантских грузов, и для крохотных тел; фундаментальные же идеи о неразличимости инертной (весомой) и гравитационной масс легли в основу общей теории относительности.

Великие умы, как видно, размышляли и фантазировали о проявлениях веса и невесомости в условиях, порой весьма далеких от земных. Непосредственно проверить хотя бы часть этих предположений удалось не столь давно. Запуск спутников в околоземное пространство повлек за собой множество исследований, связанных с поведением в космосе различных материалов и конструкций. А высадка астронавтов на Луну, постройка орбитальных станций и возможный пилотируемый полет на Марс форсировали изучение влияния на живые организмы невесомости, искусственной тяжести и тяготения других небесных тел.

Вот почему эта тема, изобилующая открытиями и парадоксами, постоянно притягивает внимание ученых и инженеров, конструкторов и медиков. Надеемся, что она окажется в кругу и ваших интересов, а может быть, и внесет *весомый* вклад в копилку ваших знаний.

Вопросы и задачи

1. На одной чашке уравновешенных рычажных весов лежит брусок мыла, на другой – $3/4$ такого же бруска и еще гиря массой $3/4$ кг. Какова масса целого бруска мыла?

2. Два одинаковых ведра наполнены водой до краев, в одном из них при этом плавает кусок дерева. Какое из ведер перетянет, если их разместить на рычажных весах?

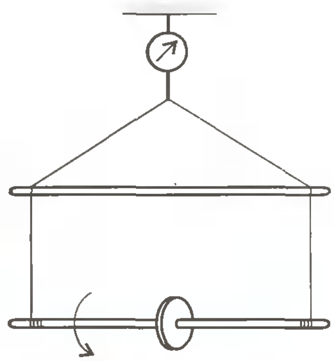
3. В сосуд, подвешенный к динамометру и доверху наполненный водой, погружают, не касаясь дна, стальную гирю, висящую на нити. Изменится ли показание динамометра?

4. Почему в задачах о движении тел, связанных нитью, как правило, оговаривается, что нить невесома?

5. Можно ли правильно взвесить груз на неверных весах?

6. Одно и то же тело взвешивают на пружинных и рычажных весах сначала на Земле, затем – на Луне. Одинаковы ли показания весов между собой?

7. На внутренней стенке закрытой банки, уравновешенной на чувствительных рычажных весах, сидит муха. Что произойдет с весами, если муха станет летать внутри банки?

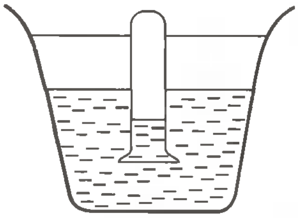


8. Изображенный на рисунке маятник Максвелла подвешен к динамометру. Как будут меняться показания прибора при движении маятника?

9. В лифте находится ведро с водой, в котором плавает мяч. Как изменится глубина погружения мяча, если лифт будет двигаться с ускорением, направленным: а) вверх; б) вниз?

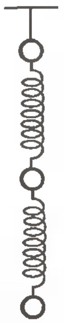
10. В лифте установлены пружинные весы, на которых подвешено тело массой 1 кг. Что покажут весы, если лифт движется вверх с ускорением, равным $a = g/2$ и направленным вниз?

11. Песочные часы уравновешены на рычажных весах. Нарушится ли равновесие во время падения песчинок?



12. Опрокинутая пробирка укреплена над сосудом с водой. Изменится ли уровень воды в пробирке, если вся система начнет свободно падать?

13. Три одинаковых шара, связанных двумя одинаковыми пружинами, подвешены на нити. Какими будут ускорения шаров сразу после пережигания нити?



14. Каким барометром – ртутным или анероидом – следует пользоваться внутри искусственного спутника, движущегося по орбите вокруг Земли?

15. На все тела на Земле действует сила притяжения Солнца. Ночью эта сила складывается с силой притяжения Земли, днем – из нее вычитается. Следует ли из этого, что ночью все тела должны быть тяжелее, чем днем?

16. Как отразится невесомость на процессе кипячения воды?

17. Как создать искусственную тяжесть на космическом корабле?

Микроопыт

Приведите в горизонтальное положение игрушку Ваньку-Встаньку, держа ее в руках, а затем отпустите с небольшой высоты (предварительно подстелив на стол что-либо мягкое). Будет ли игрушка поднимать голову во время падения? Почему?

Любопытно, что...

...весы, как считают историки науки, – наиболее древний измерительный прибор. Они были изобретены более чем за три тысячи лет до новой эры. Позднее их конструкцию совершенствовали такие ученые, как, например, Аристотель, создавший теорию неравноплечих весов с передвижной гирей, или Архимед, добившийся небывало высокой для своего времени точности взвешивания.

...книга с описанием рычажных весов, появившаяся в 1211 году, называлась «Весы мудрости».

...задачу под номером одиннадцать без малого 400 лет назад фактически сформулировал Галилей, сконструировавший тогда же гидростатические весы для определения плотности твердых тел. Предварительно он поставил эксперимент, в котором роль песка играла вода.

...хотя знаменитый опыт Кавендиша называют «взвешиванием Земли», в нем ученый только измерил постоянную всемирного тяготения, с помощью которой, действительно, можно вычислить массу нашей планеты.

...издавна для получения дроби капали расплавленный свинец с большой высоты в бак с водой. Оказавшиеся во время падения практически в невесомости дробинки принимали естественную – шарообразную – форму.

...путем взвешивания определяется масса тел в очень широком диапазоне – от 10^{-9} до 10^5 килограмма. При сравнении эталонов массы достигается точность в одну миллиардную.

...нарушения невесомости из-за неоднородности поля тяготения приводят во время свободного полета тел, например космических кораблей, к их растяжению вдоль радиуса орбиты.

...разреженная атмосфера Земли и давление Солнца, действующие на околоземные спутники, сильно «портят» невесомость и сносят аппараты с расчитанных по ньютоновским законам траекторий, заставляя постоянно корректировать их.

...даже если бы герои фантастического романа Жюля Верна «Из пушки на Луну» с смогли построить орудие с длиной ствола 300 метров, то при разгоне в нем они испытали бы чудовищные перегрузки – снаряд должен был бы двигаться с ускорением, в несколько тысяч раз превышающим ускорение свободного падения.

...древняя мечта о левитации – свободном парении тел в гравитационном поле Земли – была успешно реализована в XX веке благодаря разного рода неконтактным подвесам с помощью электрического и магнитного полей. Так, пятитонную антенну для приема гравитационных волн удалось «подвесить» без опор, используя сверхпроводники, в так называемом криогенном подвесе.

...испытательный полет межпланетного парусника «Cosmos-1», разгоняемого давлением солнечного излучения, постоянно откладывался. Одна из причин – риск, связанный с непредсказуемым поведением сверхтонкого материала паруса большой площади, которое невозможно проверить на Земле.

Что читать в «Кванте» о весе и невесомости

(публикации последних лет)

1. Калейдоскоп «Кванта» – 2000, №1, с.32;
2. «Маятник Максвелла» – 2000, Приложение №3, с.13;
3. «Под сенью яблони в цвету» – 2001, №3, с.21;
4. «Рычажные весы» – 2003, №1, с.34;
5. «Чаша весов колеблется...» – 2003, №3, с.31;
6. «Упругие силы, деформации и закон Гука» – 2004, №1, с. 35.

Материал подготовил А.Леонович

(Начало см. на с. 31)

аэродинамической силы к силе поверхностного трения, определяемого коэффициентом вязкости η. В нашем случае

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v L}{\eta} = \frac{1{,}3 \cdot 5 \cdot 0{,}01}{1{,}7 \cdot 10^{-5}} \approx 3800 ,$$

где вязкость воздуха равна $\eta = 1{,}7 \cdot 10^{-5}$ кг/(м · с). При $v \approx 3{,}1$ м/с $\mathrm{Re} \approx 2300$. При таких числах Рейнольдса коэффициент лобового сопротивления сферы составляет $C_x \approx 1$. Используем его для оценки силы сопротивления жука:

$$F_x = C_x \frac{\rho v^2}{2} S_1 .$$

Найдем площадь поперечного сечения: $S_1 = \frac{\pi L^2}{8} = 4 \cdot 10^{-5}$ м^2. Тогда $F_x = 6{,}2 \cdot 10^{-4}$ Н. При v = 3,1 м/с сопротивление ниже: $F_x = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ Н.

Работа, совершаемая против сил сопротивления, при перелете на расстояние D = 1000 км равна

$$A = F_x D = (2{,}5 - 6{,}2) \cdot 10^{-4}\ \text{Н} \cdot 10^6\ \text{м} = (250 - 620)\ \text{Дж} ,$$

что вполне соответствует энергетическим запасам жука. Время, затраченное на перелет, равно

$$T = \frac{D}{v} = \frac{1000 \cdot 10^3\ \text{м}}{(3{,}1 - 5)\ \text{м/с}} = (2 - 3{,}2) \cdot 10^5\ \text{с} \approx 50 - 90\ \text{ч} .$$

Можно и потерпеть, когда впереди биологическая ниша!

Любознательный читатель может сделать свои оценки, исходя из других предположений и численных значений. Для тех, кто захочет оценить способность более мелких насекомых к дальним перелетам, приведем таблицу зависимости коэффициента лобового сопротивления сферы от числа Рейнольда Re:

Re	C_x	Re	C_x	Re	C_x
0,05	480	1	27	20	2,6
0,1	235	2	15	50	1,6
0,4	64	5	7	100	1,1
0,8	34	10	4	$10^3 - 10^5$	≈1

Ковчег завета и электрическая машина

А.СТАСЕНКО

...И поставили ковчег Божий на новую колесницу... и повезли ее с ковчегом Божиим... И когда дошли до гумна Нахонова, Оза простер руку свою к ковчегу Божию и взялся за него; ибо волы наклонили его. Но Господь прогневался на Озу; и поразил его Бог там же за дерзновение, и умер он там у ковчега Божия.

2-я книга Царств, 6:3–7

Тут явно речь идет о нарушении техники безопасности. Причем не только один Оза Аминадавович (который был для ковчега «своим» человеком) пострадал вследствие неосторожности: когда нехорошие филистимляне захватили этот ковчег и доставили его в город Вефсамис, «...поразил Он жителей Вефсамиса за то, что они заглядывали в ковчег Господа, и убил из народа пятьдесят тысяч семьдесят человек».

Неслучайно в Ветхом завете даны четкие рекомендации по обращению с ковчегом, по устройству двора скинии – шатра над ковчегом, по ограничению числа «посвященных», имеющих право входить в скинию: «...Все столбы вокруг двора должны быть соединены связями из серебра; крючки у них из серебра, а подножия к ним из меди... Вина и крепких напитков не пейте... когда входите в скинию собрания, чтобы не умереть». Причем на посвященном должны быть «только льняные одежды, одежды священные»; запрещено носить одежды из разных веществ, например шерсти и льна.

Все это очень напоминает инструкции по технике безопасности для современных электромонтеров, а внезапная кончина Озы очень похожа на поражение электрическим разрядом. Действительно, серебряные провода и «подножия к ним из меди», напоминают заземление, а запрет на одежды разного сорта обусловлен тем, что трение различных материалов друг о друга приводит к электризации.

Известен так называемый трибоэлектрический ряд веществ (ряд Фарадея), в котором предыдущее тело электризуется положительно, а последующее – отрицательно: (+) мех, фланель, слоновая кость, перья, горный хрусталь, флинтглас, бумажная ткань, шелк, дерево, металлы, сера (–). А вот современный ряд (по Лемике), учитывающий и вещества, которые были неизвестны Фарадею: *положительный* конец ряда – стекло, человеческий волос, нейлон, шерсть, шелк, вискоза, хлопок, бумага, лубяное волокно, сталь, эбонит, ацетатный шелк, синтетическая резина, дакрон, орлон, саран, полиэтилен – *отрицательный* конец ряда. Вообще, при трении двух диэлектриков положительно заряжается диэлектрик с большей диэлектрической проницаемостью ε.

С электризацией трением человек встречается в повседневном быту. Если провести по волосам пластмассовой расческой, то она зарядится отрицательно, а волосы – положительно (в том, что расческа заряжена, легко убедиться, поднеся ее к струйке воды, текущей из крана). Если потереть резиновой палочкой о кошачью шерсть (да не обидится кошка), то палочка зарядится отрицательно. Если в темноте быстро стащить с себя или с приятеля современную синтетическую одежду, можно наблюдать сполохи микромолний.

Уверенно и контролируемо можно разделять заряды при помощи так называемых электростатических генераторов.

Вот как описана электрическая машина в учебнике физики столетней давности (рис.1). Главная часть этой машины – вращающийся стеклянный круг *1*. В лаборатории он приводится в движение при помощи специальной ручки, а в качестве элемента колеса телеги – силой тяги волов, вот почему электрическая машина изображена на рисунке в упряжке. К стеклянному кругу прижимаются деревянные дощечки (подушки) *2*, покрытые амальгамированной кожей. Вследствие трения круга о подушки, стекло электризуется

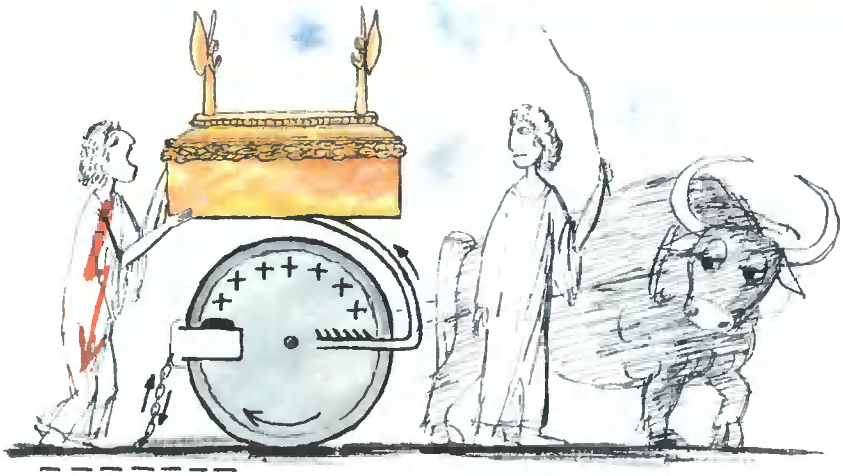


Рис. 1

положительно, а кожа – отрицательно. Положительный заряд круга, перемещаясь при вращении к гребенкам (раздвоенный металлический стержень с остриями, направленными к кругу) *3*, индуцирует в них отрицательный заряд, стекающий на стекло и нейтрализующий его. В результате металлизированное тело («ковчег») *4*, соединенное проводником с гребенками, все более и более заряжается положительно, а электроны с подушек стекают в землю по металлической цепочке *5*, влачащейся за колесом. На рисунке стрелками показаны направления тока I (или v_+) и скорости v_- перемещения электронов (они противоположны друг другу). Через некоторое время после начала работы машины будет достигнута наибольшая разность потенциалов между ковчегом и землей, и накопление заряда уравновесится его потерями в атмосферу. Теперь, если замкнуть ковчег и землю каким-либо проводником (например, телом Озы), через него пройдет электрический разряд.

Чтобы провести численные оценки, выпишем прежде всего некоторые данные о ковчеге: «Сделай ковчег из дерева ситтим; длина ему два локтя с половиною, и ширина ему полтора локтя... И обложи его чистым золотом; изнутри и снаружи покрой его ...Сделай также крышку из чистого золота... И положи крышку на ковчег сверху».

Итак, это был ящик с хорошо проводящими стенками, и в нем «...ничего не было, кроме двух каменных скрижалей, которые положил туда Моисей...» (3-я книга Царств, 8:9). Для простоты заменим ящик телом, у которого только один характерный размер – радиус R, т.е. шаром. Оценим этот радиус из условия одинаковости объемов:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 = 5{,}6 \text{ кубических локтей}$$

(вообразите себе «кубический локоть»!), откуда $R \approx \approx 1{,}1$ локтя $\approx 0{,}5$ м.

Далее, если заряд этого шара равен q, то напряженность электрического поля на его поверхности равна $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$. Она не должна превосходить предельной величины для сухого воздуха $E_* = 3 \cdot 10^6$ В/м, откуда для предельного заряда шара получаем

$$q_* = 4\pi\varepsilon_0 R^2 E_* \approx \frac{0{,}25}{9 \cdot 10^9} \cdot 3 \cdot 10^6 \text{ Кл} \approx 8 \cdot 10^{-5} \text{ Кл},$$

а для его поверхностной плотности –

$$\sigma^* = \varepsilon_0 E_* \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ Кл/м}^2 .$$

Конечно, у ящика-параллелепипеда есть грани и углы, где радиусы кривизны меньше, чем принятое нами значение R, и где, следовательно, напряженность поля будет больше, что приведет к локальной утечке заряда в воздух и уменьшению значения электрического заряда на ковчеге. Однако, Писание не сообщает деталей конструкции ковчега. Во всяком случае, видно, что при высоте ковчега над поверхностью земли порядка 1–2 м разность потенциалов между ним и землей может достигать не одну тысячу вольт, что гораздо больше напряжения, необходимого для работы различных электробытовых приборов.

К настоящему времени созданы более совершенные устройства для разделения зарядов путем трения. Так, во многих физических кабинетах школ и институтов имеются электрофорные машины. Нечто подобное можно сделать и самостоятельно. Например, на рисунке 2 изображен самодельный электростатический генератор с граммофонной пластинкой, приводимой во вращение ручкой (очевидно, что можно взять любую круглую пластинку из диэлектрика). Только здесь возникающую разность потенциалов предлагается подавать на внутреннюю и внешнюю обкладки стеклянной банки (простейший конденсатор). И вместо трагедии Озы можно будет наблюдать искру в воздухе.

Для серьезных научных исследований (например, для ускорения элементарных частиц) используются электростатические генераторы Ван-де-Граафа, в которых заряды переносятся к шару-накопителю движущейся замкнутой лентой (см., например, рис.13 на с. 51). Подобные электростатические генераторы позволили достичь напряжений до 20 мегавольт при скорости перемещения зарядов $v \sim 10$ м/с. А поверхностная плотность зарядов ограничена величиной

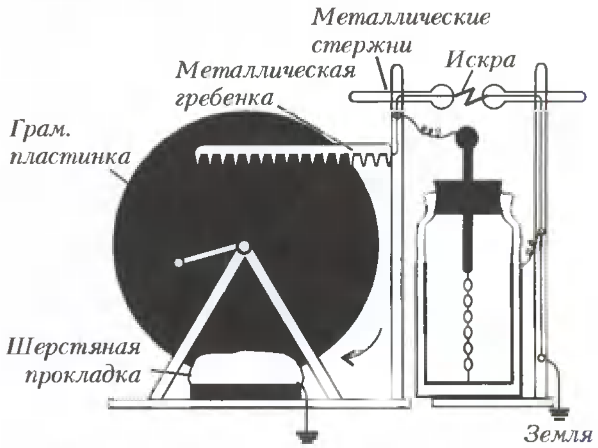


Рис. 2

$\sigma \approx (3-4) \cdot 10^{-5}$ Кл/м^2, как мы и получили выше. Значит, возникающий ток равен (при ширине ленты $b \sim 1$ м)

$$I = \sigma b v \approx (3-4) \cdot 10^{-5} \text{ Кл/м}^2 \cdot 1 \text{ м} \cdot 10 \text{ м/с} \lesssim 10^{-3} \text{ А}.$$

В заключение, в порядке покаяния за вольное (может быть, кощунственное) обращение к древним свидетельствам, приведем слова одного философа: «Наука похожа на детективный рассказ. Все факты подтверждают определенную гипотезу, но правильной оказывается, в конце концов, совершенно другая гипотеза».

Магнитный тормоз и формула Эйнштейна

Ю.МАНОШКИН, А.СТАСЕНКО

...Может железо к себе притягивать камень, который
Греки «магнитом» зовут по названью месторожденья...
Многое твердо должно здесь быть установлено прежде,
Нежели сможешь постичь ты правильно сущность предмета...
Надо к нему подходить и окольной и длинной дорогой;
А потому, я прошу, напряги ты и слух и вниманье.

Лукреций. О природе вещей

Жил некогда на Луне мудрый Хет-Зиф, который понимал кое-что в электромагнетизме. И вот однажды предложил он использовать этот самый электромагнетизм для торможения грузов, опускаемых в шахту при помощи вóрота (рис.1).

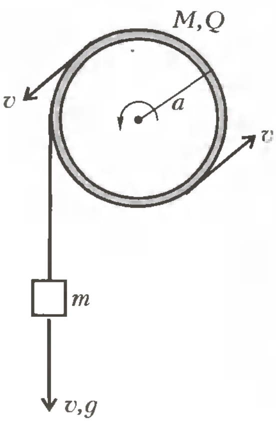


Рис. 1

А рассуждал он так. Если цилиндр ворота (а надо сказать, что цилиндр был стеклянный) потереть шерстью, то на нем образуется электрический заряд. При опускании груза вращение этого заряда (вместе с цилиндром) создает кольцевой ток. Этот ток порождает магнитное поле, которое внутри цилиндра почти однородно (как и во всяком приличном длинном соленоиде). Но ведь при ускоренном движении груза цилиндр будет вращаться все быстрее. Значит, будет расти ток, а с ним и индукция магнитного поля, а с нею – и поток магнитного поля через сечение цилиндра. Следовательно, возникнет электродвижущая сила и соответствующая ей напряженность кольцевого электрического поля, стремящаяся затормозить движение зарядов. (Это проявление одной из многочисленных обратных связей, обеспечивающих устойчивость Природы.) Вот на это-то тормозящее поле и надеялся Хет-Зиф.

Но, как издавна говорили на Руси, физическая идея без численных оценок – что щи без соли. Итак, начнем.

Если цилиндр имеет массу M, распределенную по его поверхности, то уравнение движения системы и его решение в отсутствие заряда выглядят очень просто:

$$(M+m)\frac{\Delta v}{\Delta t} = mg\,, \qquad (1)$$

$$v = \frac{m}{M+m}gt\,.$$

Здесь v – окружность (линейная) скорость цилиндра и одновременно скорость опускания груза (нить нерастяжима).

Пусть теперь цилиндр несет на себе заряд Q, равномерно распределенный по его поверхности. Тогда вне цилиндра у самой его поверхности напряженность электрического поля будет равна

$$E_a = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot 2\pi a l}\,, \qquad (2)$$

где σ – поверхностная плотность заряда, a и l – радиус и длина цилиндра. А внутри цилиндра электрического поля нет. Радиальная зависимость поля $E_r(r)$ качественно показана на рисунке 2. Заметим, что объемная плотность энергии электрического поля у поверхности цилиндра ($r = a$) будет равна

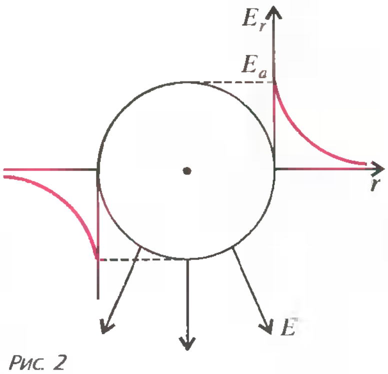


Рис. 2

$$w_a = \frac{\varepsilon_0 E_a^2}{2}\,.$$

В этих формулах ε_0 – электрическая постоянная, называемая также электрической проницаемостью вакуума.

Вращение цилиндра создает ток силой

$$I = \frac{Q}{T} = \frac{Q}{2\pi a/v(t)} = \frac{Q}{2\pi a}v(t)\,,$$

где T – период, т.е. время одного оборота при окружной (линейной) скорости $v(t)$, зависящей от текущего времени t. Но, как сказано выше, этот ток создаст внутри цилиндра однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. Как ее найти?

Вспомним случай бесконечного прямого провода, по которому течет ток силой I_1 (рис.3,*а*). (Действительно, поле прямого тока неоднократно обсуждалось на страницах «Кванта».) Линии магнитного поля в этом случае представляют собою окружности, причем с удалением от провода модуль индукции поля B уменьшается, но так, что произведение B на длину окружности остается постоянным и, естественно, пропорциональным току I_1. Запишем этот факт:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_1\,, \qquad (3)$$

где μ_0 – коэффициент пропорциональности. Он называется магнитной постоянной или магнитной проницаемостью вакуума (нечто «похожее» на ε_0).

Теперь согнем провод с током I_1 в кольцо (рис.3,*б*). При этом линии магнитного поля останутся «сцепленными» с кольцом, но, поскольку они непрерывные (нигде не начинаются и не заканчиваются), то их «густота» внутри кольца (при пересечении площади πa^2) будет больше, чем вне кольца (где площадь бесконечно велика).

Возьмем теперь много колец, которые составят соленоид (рис.3,*в*). Если он «достаточно длинный» (в смысле $l \gg a$), то магнитные линии внутри будут почти параллельны оси, а их «густота», конечно, будет пропорциональна длине соленоида (числу витков). Снаружи эта «густота» будет равна нулю по той же причине, что и выше, – поскольку бесконечно велика площадь сечения вне кольца. Поэтому ту же самую идею, которая выражена равенством (3), теперь запишем в виде

$$B \cdot l + 0 \cdot l = \mu_0 I_1 N = \mu_0 I\,,$$

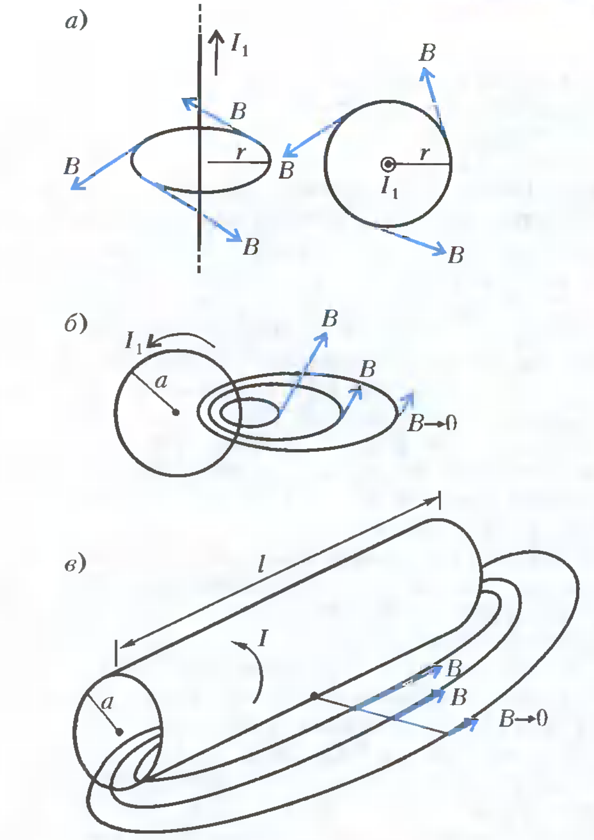


Рис. 3

где N – число «колец» (количество витков соленоида), а $I = I_1N$ – полный ток во всех кольцах.

Итак, внутри вращающегося цилиндра Хет-Зифа индукция магнитного поля равна

$$B = \mu_0 \frac{I}{l} .$$

Но тогда легко найти и поток магнитного поля через площадь сечения соленоида:

$$\Phi = B \cdot \pi a^2 .$$

А так как этот поток изменяется со временем (ибо изменяется ток), то, согласно закону Фарадея, возникнет электродвижущая сила индукции

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

и появится кольцевое электрическое поле с напряженностью

$$E_i = \frac{\mathcal{E}_i}{2\pi a} ,$$

которое подействует на заряд Q с силой

$$F = E_i Q = -\frac{\mu_0 Q^2}{4\pi l}\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

(тут мы учли многие предыдущие соотношения).

Значит, подумал Хет-Зиф, в правую часть уравнения динамики (1) нужно добавить эту тормозящую силу:

$$(M+m)\frac{\Delta v}{\Delta t} = mg - \frac{\mu_0 Q^2}{4\pi l}\frac{\Delta v}{\Delta t} .$$

Но почему бы, снова подумал Хет-Зиф, не перенести ее в левую часть и не вынести за скобки ускорение:

$$(M+m+m_B)\frac{\Delta v}{\Delta t} = mg .$$

Как легко догадаться, тут введено обозначение

$$m_B = \frac{\mu_0 Q^2}{4\pi l} .$$

Ясно также, что эта величина имеет размерность массы. Но на сколько же «потяжелел» (точнее, «помассовел») цилиндр вследствие вращения заряда Q? Выразим заряд через напряженность электрического поля согласно равенству (2). Тогда получим

$$\frac{m_B}{\varepsilon_0\mu_0} = 2\frac{\varepsilon_0 E_a^2}{2}\pi a^2 l = 2w_a V .$$

Мы специально сгруппировали символы так, что теперь справа присутствует произведение объемной плотности электрической энергии w_a на объем цилиндра $V = \pi a^2 l$. Ясно, что по порядку величины это есть электростатическая энергия заряженного цилиндра.

И тут Хет-Зиф почувствовал себя на пороге открытия: ведь mc^2 тоже равно энергии (здесь c – скорость света в вакууме). Значит, можно смело предположить, что

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} . \qquad (4)$$

Итак, дело за численной оценкой. Пусть стеклянный цилиндр удалось натереть до того, что у его поверхности возникло максимально возможное поле. Будь все это в сухом воздухе, можно было бы взять из справочника значение $E_{max} \sim 30$ кВ/см $= 3\cdot 10^6$ В/м. Но на Луне, в вакууме, оно заведомо больше. Например, поле протона на расстоянии $r_e = 0{,}5\cdot 10^{-10}$ м $= 0{,}5$ Å (первая боровская орбита) равно

$$E_p = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r_e^2} = \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 9\cdot 10^9}{0{,}25\cdot 10^{-20}}\ \text{В/м} \approx 5{,}8\cdot 10^{11}\ \text{В/м} .$$

Естественно, если бы атом водорода попал в такое поле, он был бы на грани разрушения. Примем для оценки более скромное значение: $E_{max} \sim 10^{10}$ В/м. А размеры ворота возьмем такими: $l = 1$ м, $a = 0{,}1$ м. Тогда найдем

$$m_B = \frac{\varepsilon_0 E_{max}^2}{c^2}\pi a^2 l =$$

$$= \frac{\pi}{4\pi\cdot 9\cdot 10^9}\frac{\left(10^{10}\right)^2\cdot 0{,}1^2\cdot 1}{\left(3\cdot 10^8\right)^2}\ \text{кг} \sim 3\cdot 10^{-10}\ \text{кг} .$$

Так не зря ли трудился Хет-Зиф? Конечно, нет. По крайней мере, из выражения (4) он нашел значение магнитной проницаемости вакуума:

$$\mu_0 = \frac{1}{c^2\varepsilon_0} = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \text{Гн/м} .$$

И уж, конечно, поупражнялся в электромагнетизме.

Можно учесть еще и то обстоятельство, что небезразлично, каков знак заряда ворота. Действительно, при натирании шерстью стекло приобретает положительный заряд, следовательно, для его нейтрализации нужны электроны. А есть ли они на Луне? Так что предельное значение напряженности электрического поля может быть и больше принятого выше значения. Его можно было бы оценить, например, из соображений механической прочности стекла.

Но это вы сможете сделать уже после того, как поступите в Московский физико-технический институт (Физ-Тех).

Волновые свойства света

В.МОЖАЕВ

НАИБОЛЕЕ РАСПРОСТРАНЕННЫМИ ТИПАМИ ВОЛН ЯВляются плоские и сферические волны.

Рассмотрим параллельный монохроматический пучок света. Сразу оговоримся, что строго параллельных и строго монохроматических пучков света в природе не существует. Это наша идеализация: мы заменяем реальный слаборасходящийся пучок с малой степенью немонохроматичности плоским монохроматическим пучком. (Критерием справедливости такой замены служит степень совпадения расчета и эксперимента.) Такой идеализированный пучок света мы и рассматриваем как плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся, например, в направлении оси z.

Пусть вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ в этой волне направлен вдоль оси x, тогда зависимость проекции E_x от координаты z и времени t будет иметь вид

$$E_x(z,t) = E_{x0}\cos\left(2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda}z\right),$$

где E_{x0} – амплитуда электрического поля в волне, ν – частота света, а λ – длина волны. Посмотрим, что из себя представляет поверхность постоянной фазы, т.е. волновой фронт, в данной волне.

Условие постоянства фазы волны в произвольный момент времени t запишется в виде

$$2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda}z = A, \qquad (*)$$

где A – константа. Поскольку ν, λ, t имеют фиксированные значения, то геометрическое место точек постоянной фазы описывается уравнением

$$z = \lambda\nu t - \frac{\lambda A}{2\pi} = \text{const}.$$

Таким образом, волновым фронтом плоской волны, распространяющейся вдоль некоторой оси, является плоскость, перпендикулярная этой оси.

Если за время Δt волновой фронт смещается на величину Δz, то из уравнения $(*)$ следует, что

$$2\pi\nu\Delta t - \frac{2\pi}{\lambda}\Delta z = 0.$$

Это означает, что скорость перемещения волнового фронта, т.е. фазовая скорость волны, равна

$$v_ф = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \nu\lambda.$$

Фазовая скорость волны всегда направлена перпендикулярно волновому фронту. Если монохроматическая световая волна распространяется в среде с показателем преломления n (для данной частоты света), то фазовая скорость этой волны связана со скоростью света в вакууме c соотношением

$$v_ф = \frac{c}{n}.$$

Для изотропных и однородных сред со слабой зависимостью показателя преломления n от частоты (со слабой дисперсией) скорость распространения энергии, т.е. лучевая скорость, реальной немонохроматической волны практически совпадает с ее фазовой скоростью как по величине, так и по направлению. В этом случае можно не разделять фазовую и групповую скорости, а говорить просто о скорости света.

Равномерное по всем направлениям излучение света точечным источником можно рассматривать как сферическую волну с волновым фронтом в виде сферической поверхности. Если мы представим такой источник света как совокупность атомов, которые излучают фотоны с одинаковой частотой ν, и с помощью, например, собирающей линзы мы получим параллельный пучок таких фотонов, то этот пучок можно рассматривать как плоскую монохроматическую волну с частотой ν. Такая волна в однородной среде (в случае малой дисперсии) с показателем преломления n распространяется прямолинейно со скоростью $v = c/n$.

Преломляясь и отражаясь на границе раздела двух сред или дифрагируя на неоднородностях, волна может изменить свой волновой фронт, но во всех случаях остается неизменной частота света. В новой среде (с другим показателем преломления n) волна будет распространяться с новой скоростью, у нее будет другая длина волны, но частота сохранится.

Рассмотрим несколько конкретных задач, в которых проявляются волновые свойства света.

Задача 1. *Параллельный монохроматический пучок света падает нормально на одну из поверхностей прозрачного клина с углом скоса α (рис.1). Определите угол отклонения светового пучка после прохождения клина, если показатель преломления материала клина равен n.*

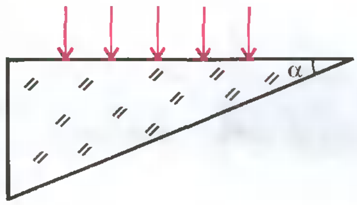


Рис. 1

Решение этой задачи с позиции геометрической оптики, т.е. с использованием законов преломления света, не представляет большой сложности. Но мы разберем данный пример с точки зрения распространения плоской волны с использованием принципа Гюйгенса.

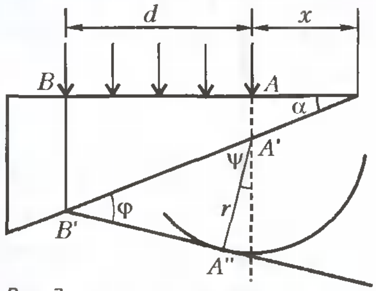


Рис. 2

Пусть плоская монохроматическая волна падает нормально на поверхность клина (рис.2). Обозначим поперечный размер пучка через d (причем $d \gg \lambda$, где λ – длина волны света) и будем считать, что граница пучка находится на расстоянии x от ребра клина. Пройдя верхнюю границу клина AB, волна будет распространяться в том же направлении со скоростью $v = c/n$, где c – скорость света в вакууме. За время

$$t_1 = \frac{AA'}{v} = \frac{n \cdot AA'}{c}$$

фронт волны достигнет точки A', и по принципу Гюйгенса мы можем рассматривать точку A' как точечный источник вторичный сферической волны, распространяющейся дальше со скоростью c. Через время

$$t_2 = \frac{n \cdot BB'}{c}$$

волновой фронт плоской волны достигнет точки B'. Найдем положение нового волнового фронта (после прохождения клина), полагая, что он плоский.

В тот момент, когда плоский волновой фронт достигнет точки B', сферическая волна из точки A' распространится на расстояние

$$r = c\left(t_2 - t_1\right) = n\left(BB' - AA'\right) =$$
$$= n\left((x+d)\operatorname{tg}\alpha - x\operatorname{tg}\alpha\right) = nd\operatorname{tg}\alpha .$$

Положение волнового фронта определяется касательной $B'A''$ к окружности радиусом r. Из треугольника $A'B'A''$ найдем

$$\sin\varphi = \frac{r}{A'B'} = \frac{nd\operatorname{tg}\alpha}{d/\cos\alpha} = n\sin\alpha .$$

Очевидно, что угол поворота волнового фронта равен

$$\psi = \varphi - \alpha = \arcsin\left(n\sin\alpha\right) - \alpha .$$

Как видно из полученного выражения, величина угла ψ не зависит ни от x, ни от d. Это свидетельствует о том, что плоский волновой фронт после прохождения через клин действительно остается плоским. При малом угле α угол поворота равен приблизительно

$$\psi \approx (n-1)\alpha .$$

Задача 2. *Прозрачный сосуд прямоугольной формы заполнен солевым раствором с переменной по высоте z плотностью (рис.3). На боковую поверхность сосуда падает нормально к ней параллельный пучок монохроматического света. Зависимость показателя преломления раствора для данного света от высоты z имеет вид $n_z = n_0 - \frac{n_0 - n_1}{H}z$, где n_0, n_1 и H – константы. Ширина сосуда L. Определите угол отклонения выходящего пучка.*

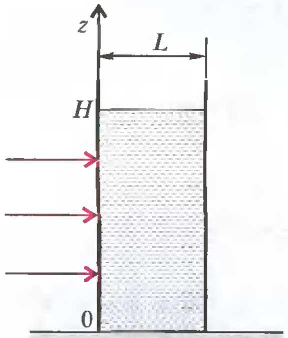


Рис. 3

На первый взгляд, согласно лучевой теории света выходящий пучок не должен испытывать отклонения от своего первоначального направления распространения. Однако это не так. Попробуем разобраться, почему.

Если в задаче 1 мы могли бы заменить световой пучок одним лучом и применить закон преломления луча на границе раздела двух однородных сред, то теперь мы имеем дело с неоднородной средой, и такая замена невозможна. Но мы можем разбить наш пучок на тонкие пучки толщиной dz и считать, что каждый такой пучок распространяется в однородной среде со своим показателем преломления n_z. Тогда каждый пучок за свое время достигнет задней поверхности сосуда и возбудит вторичную сферическую волну, а огибающая всех этих вторичных волн и будет волновым фронтом прошедшей волны.

Полагая, что волновой фронт останется плоским, рассмотрим два пучка с координатами $z = a$ и $z = a + d$, где d – ширина пучка по вертикали (рис.4). Время прохождения пучком с координатой $z = a$ среды толщиной L равно

$$t_1 = \frac{n_a L}{c} = \left(n_0 - \frac{n_0 - n_1}{H}a\right)\frac{L}{c} ,$$

где c – скорость света в вакууме. Аналогично определяется время прохода пучка с координатой $z = d + a$:

$$t_2 = \frac{n_{d+a}L}{c} =$$
$$= \left(n_0 - \frac{n_0 - n_1}{H}(d+a)\right)\frac{L}{c} .$$

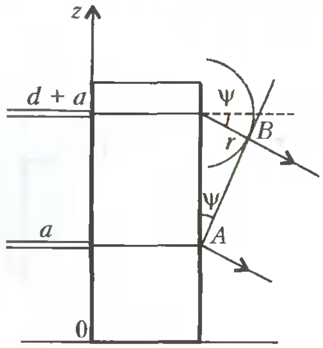


Рис. 4

Очевидно, что $t_1 > t_2$, поэтому вторичная сферическая волна за промежуток времени $t_1 - t_2$ распространится на расстояние r, равное

$$r = c\left(t_1 - t_2\right) = \frac{n_0 - n_1}{H} dL .$$

Угол ψ поворота волнового фронта AB найдем из соотношения

$$\sin\psi = \frac{r}{d} = \frac{n_0 - n_1}{H} L ,$$

откуда

$$\psi = \arcsin\left(\frac{n_0 - n_1}{H} L\right).$$

Как видно из полученного выражения, угол поворота волнового фронта не зависит ни от координаты a, ни от толщины входного пучка d. Следовательно, наше предположение о плоском волновом фронте выходящего пучка верно.

Задача 3. *Из собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 50$ см вырезана центральная часть шириной $a = 0{,}6$ мм в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка 5, и обе половинки линзы сдвинуты до соприкосновения. По одну сторону линзы на расстоянии F от нее помещен точечный источник монохроматического света S с длиной волны $\lambda = 6000$ Å, а с противоположной стороны линзы расположен экран, на котором наблюдаются интерференционные полосы (рис.6). Определите расстояние между соседними светлыми полосами, т.е. ширину интерференционных полос, на экране.*

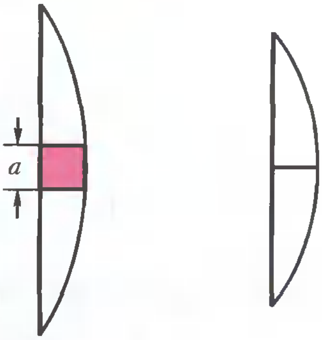


Рис. 5

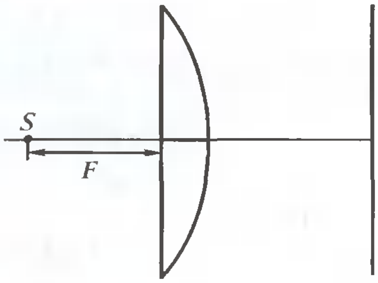


Рис. 6

Сферическая волна от точечного источника S после прохождения двух половинок линзы трансформируется в две плоские когерентные волны, каждая из которых распространяется под углом $\alpha \approx \frac{a/2}{F}$ к горизонтали (рис.7). При этом волновой фронт волны на выходе из верхней половинки линзы повернут по часовой стрелке, а на выходе из нижней половинки линзы – против часовой стрелки. Оптический центр каждой половинки линзы смещен относительно горизонтальной оси симметрии на $a/2$ – на рисунке 7 пунктирные линии проходят через оптические центры половинок линзы. Таким образом, на экран падают

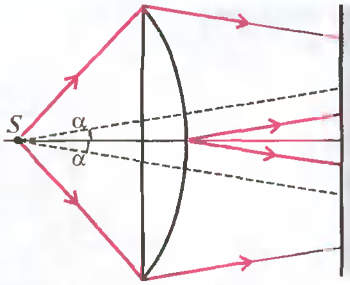


Рис. 7

две когерентные монохроматические плоские волны, сходящиеся под углом 2α друг к другу. В области перекрытия AB этих волн будет наблюдаться интерференционная картина.

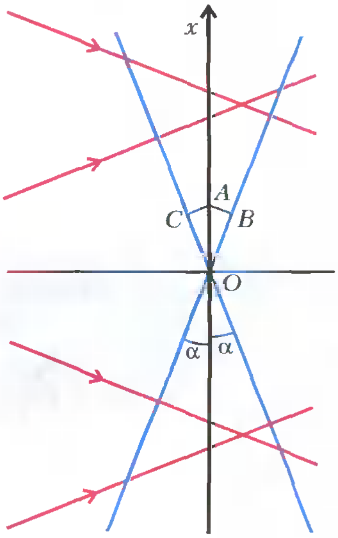


Рис. 8

На рисунке 8 в увеличенном масштабе изображены (синими линиями) волновые фронты интерферирующих волн. Точка O пересечения волновых фронтов расположена в центре экрана, вдоль которого направлена ось x. Рассмотрим на экране произвольную точку A с координатой x. Положим начальную фазу обеих волн равной нулю в центре экрана ($x = 0$). Тогда фаза волны, падающей сверху, в точке A равна

$$\psi_{A1} = \frac{2\pi \cdot AB}{\lambda} = \frac{2\pi x \sin\alpha}{\lambda},$$

а фаза волны, падающей снизу, в той же точке составляет

$$\psi_{A2} = -\frac{2\pi \cdot CA}{\lambda} = -\frac{2\pi x \sin\alpha}{\lambda}.$$

Сдвиг по фазе между двумя колебаниями в точке A будет равен

$$\Delta\psi = \psi_{A1} - \psi_{A2} = \frac{4\pi x \sin\alpha}{\lambda}.$$

Условие того, что в точке A будет наблюдаться максимум интенсивности света (светлая полоса), запишется в виде

$$\frac{4\pi x \sin\alpha}{\lambda} = 2\pi m, \text{ где } m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Аналогично будет выглядеть условие для соседней светлой полосы:

$$\frac{4\pi(x \pm \Delta x)\sin\alpha}{\lambda} = 2\pi(m \pm 1).$$

Из последних двух равенств следует, что ширина интерференционных полос будет равна

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\sin\alpha} \approx \frac{\lambda}{2\alpha} \approx \frac{\lambda F}{a} = 5 \cdot 10^{-4}\ \text{м} = 0{,}5\ \text{мм}.$$

Задача 4. *Интерференционная схема состоит из плоского зеркала З, экрана Э, фотоприемника A и точечного монохроматического источника света S, который движется со скоростью $v = 2$ см/с перпендикулярно оси OA (рис.9). Определите частоту колебаний фототока приемника, когда источник света движется вблизи оси OA, если длина волны света $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м, расстояние $L = 1$ м, а расстояние $d = 0{,}5$ см. Фототок приемника пропорционален освещенности в точке A. Указание: при малых x справедливо приближенное равенство $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$.*

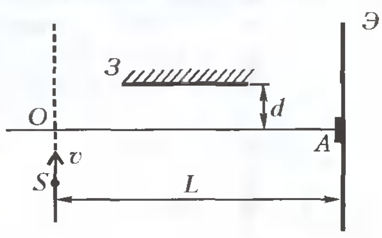


Рис. 9

Рассмотрим произвольный момент, когда источник света находится на небольшом расстоянии x от оси OA (рис.10). В этот момент экран освещается двумя сферическими волнами: одна волна идет непосредственно от источника, а другая – после отражения от зеркала. Вторую волну можно рассматривать как сферическую волну, излучаемую мнимым точечным источником S', который является зеркальным изображением источника S и расположен на расстоянии $d + x$ от зеркала.

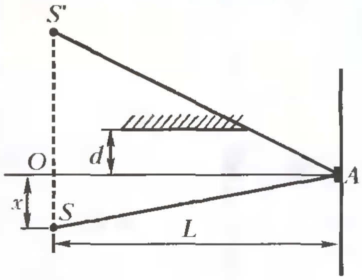


Рис. 10

Оптический путь SA равен

$$SA = \sqrt{L^2 + x^2} \approx L + \frac{x^2}{2L},$$

а оптический путь $S'A$ равен

$$S'A = \sqrt{L^2 + (2d + x)^2} \approx L + \frac{(2d + x)^2}{2L}.$$

Разность оптических путей $S'A$ и SA составляет

$$\Delta = S'A - SA = \frac{2d^2}{L} + \frac{2dx}{L}.$$

Пусть в рассматриваемый момент в точке A мы имеем максимум интенсивности света. Это означает, что разность оптических путей Δ равна целому числу длин волн:

$$\frac{2d^2}{L} + \frac{2dx}{L} = m\lambda, \text{ где } m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Найдем время Δt, через которое разность хода Δ уменьшится на одну длину волны и в точке A снова будет наблюдаться максимум интенсивности света. За это время расстояние x изменится на $\Delta x = v\Delta t$, а m изменится на единицу, поэтому можно записать такое равенство:

$$\frac{2dv}{L}\Delta t = \lambda.$$

Но время Δt равно периоду T колебаний интенсивности света в точке A, а частота колебаний фототока приемника будет равна

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{2dv}{\lambda L} = 400\ \text{Гц}.$$

Упражнения

1. Стеклянный трапецеидальный сосуд с малым углом $\alpha = 6°$ заполнен водой с показателем преломления $n = 1{,}33$ (рис.11). На сосуд падает параллельный пучок света. За сосудом находится собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 50$ см. На экране, расположенном в фокальной плоскости линзы, наблюдается светящаяся точка. На сколько сместится эта точка на

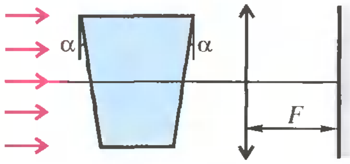


Рис. 11

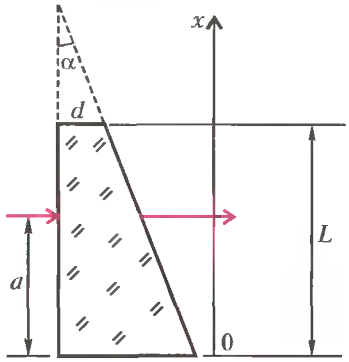


Рис. 12

экране, если убрать сосуд? *Указание:* для малых углов α справедливо приближенное равенство $\sin\alpha \approx \alpha$.

2. На усеченную призму, выполненную из прозрачного материала, ширина верхнего основания которой $d = 0{,}2$ см, на расстоянии $a = 5$ см от нижнего основания падает узкий пучок монохроматического света (рис.12). Выходящий из призмы пучок света не изменяет своего направления. Высота призмы $L = 10$ см. Считая, что показатель преломления материала призмы зависит от высоты x как $n_x = 1{,}2\left(1 + x/(6L)\right)$, определите угол α при вершине призмы. *Указание:* для малых углов α можно считать, что $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$.

3. Интерференционная схема, изображенная на рисунке 13, состоит из точечного монохроматического источника S, который движется со скоростью $v = 4$ см/с к оси OA, и двух экранов. В экране $Э_1$ сделаны два маленьких отверстия, отстоящие друг от друга на $d = 0{,}5$ см. На экране $Э_2$ наблюдается интерференционная картина. В центре экрана $Э_2$ расположен фотоприемник

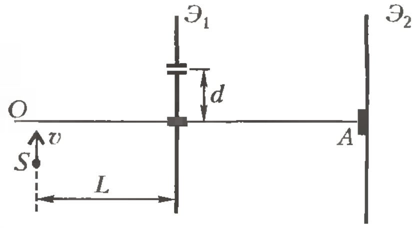


Рис. 13

А. Определите частоту колебаний фототока приемника, когда источник света будет находиться вблизи оси OA, если $L = 1$ м, а длина волны света $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м. Фототок приемника пропорционален освещенности в точке A. *Указание:* при малых x справедливо приближенное равенство $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$.

Четвертый признак равенства треугольников

А.ЕГОРОВ

Какой такой «четвертый признак»? Их всего три – это любому школьнику известно, начиная с 7 класса! Так скажет почти любой наш читатель, и будет прав. Никакого четвертого признака в природе нет. Однако…

Начнем с задачи.

Задача 1. *Равны ли два треугольника ABC и $A'B'C'$, если известно, что $\angle A = \angle A'$, $AB = A'B'$ и $BC = B'C'$ (рис. 1)?*

Решение. *Первый способ.* Попробуем наложить треугольник $A'B'C'$ на треугольник ABC. Для этого совместим

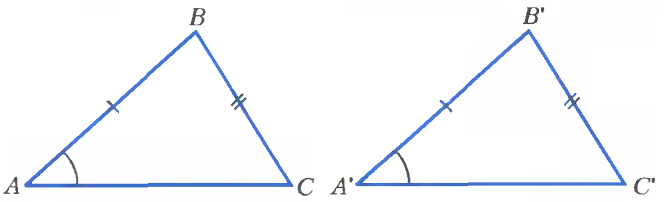


Рис. 1

стороны AB и $A'B'$ так, чтобы лучи AC и $A'C'$ совпали (рис.2). Куда при этом попадет вершина C'? Легко понять (из равенства $BC = B'C'$), что на прямой AC имеются, вообще говоря, две точки C и $\tilde{C}$ такие, что $BC = B\tilde{C} = B'C'$.

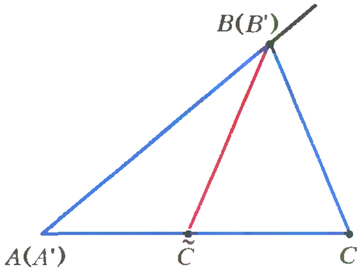


Рис. 2

Второй способ. Пусть $\angle A = \angle A' = \alpha$, $AB = A'B' = a$. По теореме синусов радиус R окружности, описанной около треугольника ABC, равен $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$. Аналогично, радиус R' окружности, описанной около треугольника $A'B'C'$, равен $R' = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$. Следовательно, $R = R'$. Отсюда получается, что $AB = 2R\sin\angle C$, $A'B' = 2R\sin\angle C'$. Поэтому $\sin\angle C = \sin\angle C'$. Но тогда есть две возможности: 1) $\angle C = \angle C'$, т.е. треугольники ABC и $A'B'C'$ равны; 2) $\angle C + \angle C' = 180°$.

Итак, *при выполнении условий задачи 1 треугольники ABC и $A'B'C'$ либо равны, либо не равны и тогда $\angle C + \angle C' = 180°$.*

Это утверждение мы и будем называть, допуская некоторую вольность речи, четвертым признаком равенства треугольников. Иногда, если есть дополнительная информация о сторонах и углах, это действительно может служить признаком равенства треугольников.

Упражнение 1. Докажите, что а) если $\angle A = \angle A' \geq 90°$; б) если $BC = BB' > AB$, то треугольники из задачи 1 равны.

Теперь посмотрим, как наш четвертый признак помогает решать задачи.

Задача 2. *В неравнобедренном треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке I. Найдите угол C, если $A_1I = B_1I$.*

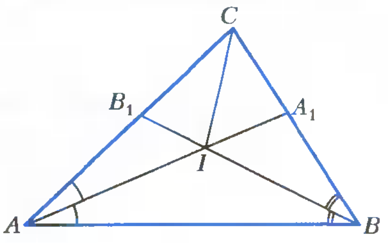


Рис. 3

Решение. Рассмотрим треугольники B_1IC и A_1IC (рис.3). В них $\angle B_1CI = \angle A_1CI$, сторона CI общая, а $IB_1 = IA_1$. По доказанному ранее, есть две возможности: 1) треугольники равны, 2) треугольники не равны, но $\angle CB_1I + \angle CA_1I = 180°$.

Обозначим, как обычно, $\angle A$ через α, $\angle B$ – через β, $\angle C$ – через γ.

В первом случае $\angle CB_1I = \angle CA_1I$. Но $\angle CB_1I$ как внешний по отношению к треугольнику ABB_1 равен $\alpha + \frac{\beta}{2}$; аналогично, $\angle CA_1I = \beta + \frac{\alpha}{2}$. Получаем $\alpha + \frac{\beta}{2} = \beta + \frac{\alpha}{2}$, или $\alpha = \beta$, т.е. треугольник ABC – равнобедренный, что противоречит условию.

Следовательно, имеет место второй случай. Для него

$$\angle CB_1I + \angle CA_1I = 180°.$$

Но тогда и $\gamma + \angle B_1IA_1 = 180°$. Попутно, хотя сейчас это и не понадобится, заметим, что около четырехугольника A_1CB_1I можно описать окружность (рис.4).

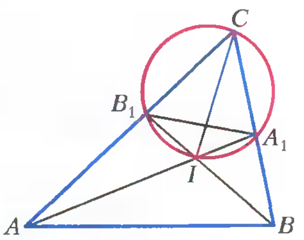


Рис. 4

Сделаем еще одно очень полезное замечание:

$$\angle B_1IA_1 = \frac{180° + \gamma}{2}.$$

В самом деле,

$$\angle A_1IB_1 = \angle AIB = 180° - \frac{\alpha + \beta}{2} = 180° - \frac{180° - \gamma}{2} = \frac{180° + \gamma}{2}.$$

Рекомендуем запомнить последнюю формулу, справедливую во всех случаях.

Таким образом,

$$180° - \gamma = \frac{180° + \gamma}{2},$$

т.е. $\angle C = \gamma = 60°$.

Задача 3. *Пусть в обозначениях предыдущей задачи $\angle C = 60°$. Докажите, что $A_1I = B_1I$, и найдите угол IA_1B_1.*

Решение. Если $\gamma = 60°$, то $\angle B_1IA_1 = \frac{180° + \gamma}{2} = 120°$ и четырехугольник A_1CB_1I вписанный (см. рис.4). Но тогда хорды A_1I и B_1I равны, так как $\angle B_1CI = \angle A_1CI$, а $\angle IA_1B_1 = \angle ICB_1 = 30°$.

Задача 4. *Биссектрисы внешних углов при вершинах A и B треугольника ABC пересекаются в точке O, причем AO = BO (это центр вневписанной окружности, касающейся продолжений сторон CA и CB и стороны AB; рис.5). Найдите AC, если $\angle ABC = \beta$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен R.*

Решение. В треугольниках CAO и CBO равны стороны AO и BO, а CO – общая. Поэтому либо $\angle CAO = \angle CBO$, но тогда $AC = BC$ и треугольник ABC равнобедренный, либо сумма этих углов, а значит и углов ACB и AOB, равна $180°$. Последнее невозможно, так как по условию

$$\angle OAB = \frac{180° - \alpha}{2}, \quad \angle OBA = \frac{180° - \beta}{2},$$

а потому

$$\angle AOB = 180° - (\angle OAB + \angle ABO) = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{180° - \gamma}{2}$$

и

$$\frac{180° - \gamma}{2} + \gamma = \frac{180° + \gamma}{2} < 180°.$$

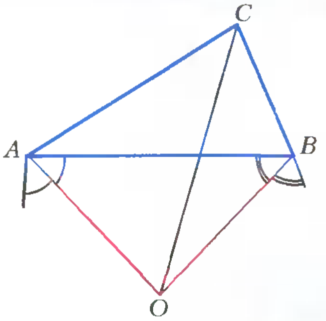


Рис. 5

Итак, треугольник ABC равнобедренный ($AC = BC$), и по теореме синусов сторона AC равна

$$AC = 2R\sin\beta.$$

Упражнения

2. Пусть I – центр вписанной в треугольник ABC окружности, а O – центр вневписанной окружности. Докажите, что описанная окружность пересекает отрезок IO в его середине.

3. Что можно сказать о треугольнике ABC, если биссектрисы его углов A и B образуют равные углы со сторонами BC и AC соответственно?

Задача 5 (экономический факультет МГУ, 1985 г.). *В треугольнике ABC заданы длины двух сторон: BC = 4, AB = $2\sqrt{19}$. Кроме того, известно, что центр окружности, проведенной через середины сторон треугольника, лежит на биссектрисе угла C. Найдите AC.*

Решение. Пусть O – центр окружности, проходящей через точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон треугольника ABC (рис.6). Применим к треугольникам OCB_1 и OCA_1 четвертый признак равенства.

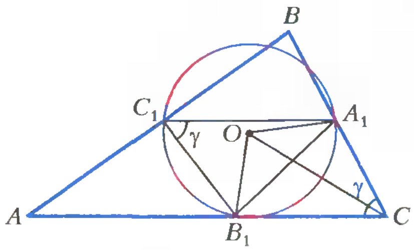


Рис. 6

Если эти треугольники равны, то $A_1C = CB_1$ и $AC = BC = 4$. Но тогда $BC + AC = 8 < 2\sqrt{19} = AB$, что противоречит неравенству треугольника. Этот случай, тем самым, невозможен. Поэтому $\angle B_1OA_1 + \gamma = 180°$, т.е.

$$\angle B_1OA_1 = 180° - \gamma.$$

Четырехугольник $B_1C_1A_1C$ – параллелограмм, так что $\angle B_1C_1A_1 = \angle C = \gamma$. Угол B_1OA_1 – центральный, соответствующий вписанному углу $B_1C_1A_1$. Поэтому

$$2\gamma = 180° - \gamma,$$

т.е. $\gamma = 60°$. Итак, $\angle C = 60°$.

Теперь запишем теорему косинусов для треугольника ABC и из квадратного уравнения относительно $AC = b$ найдем его положительный корень:

$$b = 10.$$

Задача 6 (экономический факультет МГУ, 1985). *В треугольнике ABC заданы длины двух сторон: AB = 6, BC = 16. Кроме того, известно, что центр окружности, проведен-*

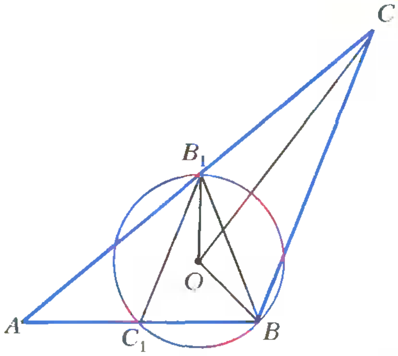


Рис. 7

ной через вершину B и середины сторон AB и AC, лежит на биссектрисе угла C. Найдите AC.

Решение. Пусть B_1 и C_1 – середины сторон AC и AB соответственно, O – центр окружности, описанной около треугольника B_1BC_1 (рис.7). По-прежнему, для треугольников COB_1 и COB есть две возможности – они либо равны, либо точки C, B, O и B_1 лежат на одной окружности. Если треугольники COB_1 и COB равны, то $AC = 2B_1C = 2BC = 32$. Однако $32 > 16 + 6$, т.е. этот случай невозможен. Поэтому

$$\angle B_1OB = 180° - \gamma.$$

Угол B_1C_1B вписанный и, следовательно, равен половине соответствующего центрального угла, т.е. угла B_1OB. Так как $B_1C_1 \parallel BC$, угол B_1C_1B равен $180° - \beta$.

Итак, $180° - \beta = \dfrac{180° - \gamma}{2}$, т.е.

$$\gamma = 2\beta - 180°.$$

(Отсюда, в частности, следует, что угол B тупой.)

Далее, выражаем угол A через B:

$$\alpha = \angle A = 180° - (2\beta - 180°) - \beta = 360° - 3\beta.$$

По теореме синусов,

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\gamma}.$$

Отсюда получается уравнение относительно β:

$$\frac{16}{\sin(360° - 3\beta)} = \frac{6}{\sin(2\beta - 180°)},$$

или

$$16\sin 2\beta = 6\sin 3\beta.$$

После преобразований этого уравнения с использованием формул синуса двойного и тройного углов получаем уравнение относительно $\cos\beta$:

$$12\cos^2\beta - 16\cos\beta - 3 = 0,$$

откуда

$$\cos\beta = -\frac{1}{6}$$

(второй корень больше 1).

Осталось применить теорему косинусов и найти, что $AC = 10$.

Упражнения

4. В треугольнике ABC длина стороны BC равна 9, а длина стороны AB равна 21. Известно, что центр окружности, проведенной через середины сторон треугольника, лежит на биссектрисе угла C. Найдите AC.

5. В треугольнике ABC длина стороны BC равна 3, а длина стороны AB равна 2. Известно также, что центр окружности, проходящей через вершину B и середины сторон AB и AC, лежит на биссектрисе угла C. Найдите AC.

Задача 7. *В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1. Найдите угол A, если известно, что $\angle C_1B_1B = 30°$, а $\angle C \neq 120°$.*

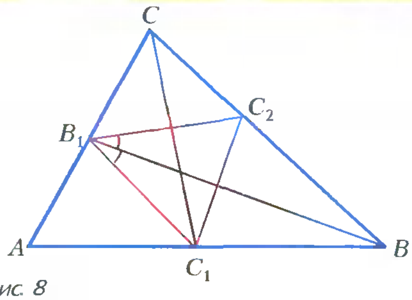


Рис. 8

Решение. Пусть $\angle C = \gamma$. Точка C_2, симметричная точке C_1 относительно BB_1, лежит на луче BC. Более того, она лежит на стороне BC (рис.8). Это следует из того, что отрезок $BC_2 = BC_1$ меньше BC. В самом деле, $\angle CC_1B > \angle ACC_1$ (это внешний угол треугольника ACC_1), а $\angle ACC_1 = \angle C_1CB$, но во всяком треугольнике против большего угла лежит большая сторона.

Треугольник $B_1C_1C_2$ правильный. Поэтому $B_1C_1 = C_1C_2$. Применим четвертый признак к треугольникам B_1CC_1 и C_1CC_2. Эти треугольники равны, так как сумма углов γ и $\angle BC_1C_2 = 60°$ не равна $180°$ (вот зачем понадобилось условие $\gamma \neq 120°$). Следовательно, $B_1C = CC_2$.

Теперь займемся подсчетом углов:

$$\angle CC_2B_1 = \frac{180° - \gamma}{2},$$

$$\angle CC_2C_1 = \frac{180° - \gamma}{2} + 60° = 150° - \frac{\gamma}{2},\ \angle C_1C_2B = 30° + \frac{\gamma}{2},$$

$$\angle B = 180° - 2\angle C_1C_2B = 120° - \gamma.$$

Но тогда $\angle C + \angle B = 120°$ и

$$\angle A = 60°.$$

Заметим, что обратное утверждение, т.е. что если $\angle A = 60°$, то $\angle BB_1C_1 = 30°$, было доказано ранее.

А что будет, если в условиях предыдущей задачи $\gamma = 120°$?

Задача 8. *В треугольнике ABC угол C равен 120°. Найдите $\angle BB_1C_1$.*

Решение. Заметим (рис. 9), что внешний угол треугольника ABC при вершине C равен $60°$. Так как CC_1 – биссектриса, $\angle ACC_1$ тоже равен $60°$, и AC – биссектриса внешнего угла треугольника C_1CB.

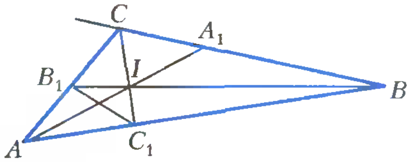


Рис. 9

Но BB_1 – биссектриса внутреннего угла этого треугольника. Следовательно, B_1C_1 – биссектриса внешнего угла ACC_1 треугольника CBC_1, т.е. биссектриса внутреннего угла треугольника ACC_1, а точка I – основание биссектрисы угла A этого треугольника.

Однако, $\angle ACC_1 = 60°$, поэтому, как мы уже видели,

$$\angle C_1B_1B = 30°.$$

В заключение предлагаем вам еще две интересные задачи.

Упражнения

6. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 – биссектрисы углов треугольника ABC. Через вершину C проведем прямую l, параллельную AB. Пусть прямые A_1C_1 и B_1C_1 пересекают прямую l в точках D и E соответственно. Докажите, что $CD = CE$.

7. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 – биссектрисы углов треугольника ABC. Найдите угол C, если известно, что угол $A_1C_1B_1$ прямой.

XXX Всероссийская олимпиада школьников по математике

В дни школьных весенних каникул с 26 по 30 марта в Астрахани, Белгороде, Новгороде Великом, Владивостоке, Йошкар-Оле и Томске состоялся IV (окружной) этап XXX Всероссийской олимпиады школьников по математике, участниками которого были победители региональных (областных, краевых и республиканских) олимпиад. Окружной этап проводился в два тура, в каждом из которых школьникам предлагалось решить 4 задачи за четыре часа.

Заключительный этап олимпиады прошел в Чебоксарах, столице Чувашской Республики, с 19 по 25 апреля. В олимпиаде приняли участие 211 российских школьников, а также гости из Болгарии, Китая и Украины. Хочется поблагодарить хозяев юбилейной олимпиады за четкую организацию и радушный прием.

Ниже приводятся задачи окружного и заключительного этапов и список призеров олимпиады.

ОКРУЖНОЙ ЭТАП

8 класс

1. По двум пересекающимся дорогам с равными постоянными скоростями движутся автомобили «Ауди» и «БМВ». Оказалось, что как в 17.00, так и в 18.00 «БМВ» находился в два раза дальше от перекрестка, чем «Ауди». В какое время «Ауди» мог проехать перекресток?

Н.Агаханов

2. Имеется набор гирь со следующими свойствами:

1) в нем есть 5 гирь, попарно различных по весу;

2) для любых двух гирь найдутся две другие гири того же суммарного веса.

Какое наименьшее число гирь может быть в этом наборе?

И.Рубанов

3. В остроугольном треугольнике расстояние от середины любой стороны до противоположной вершины равно сумме расстояний от нее до сторон треугольника. Докажите, что этот треугольник – равносторонний.

Н.Агаханов

4. В ячейки куба $10 \times 10 \times 10$ поставлены по одному числа 1, 2, ..., 1000. Из одного углового кубика в противоположный угловой отправляются два червяка. Каждый из них может проползать в соседний по грани кубик, при этом первый может проползать, если число в соседнем кубике отличается на 8, второй – если отличается на 9. Существует ли такая расстановка чисел, что оба червяка смогут добраться до противоположного углового кубика?

О.Подлипский

5. Может ли в наборе из шести чисел $\{a;b;c;a^2/b;b^2/c;c^2/a\}$, где a, b, c – положительные числа, оказаться ровно три различных числа?

В.Сендеров

6. Пусть $ABCD$ – четырехугольник с параллельными сторонами AD и BC, точки M и N – середины его сторон AB и CD соответственно. Прямая MN делит пополам отрезок, соединяющий центры окружностей, описанных около треугольников ABC и ADC. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

Н.Агаханов

7. Набор пятизначных чисел $(N_1, \ldots, N_k)$ таков, что любое пятизначное число, все цифры которого идут в возрастающем порядке, совпадает хотя бы в одном разряде хотя бы с одним их чисел $N_1, \ldots, N_k$. Найдите наименьшее возможное значение k.

С.Токарев

8. Можно ли в целочисленных точках плоскости записать натуральные числа так, чтобы три целочисленные точки лежали на одной прямой тогда и только тогда, когда записанные в них числа имели общий делитель, больший единицы?

А.Храбров

9 класс

1. См. задачу 2 для 8 класса.

2. В треугольнике ABC медианы AA', BB', CC' продлили до пересечения с описанной окружностью в точках A_0, B_0, C_0 соответственно. Известно, что точка M пересечения медиан треугольника ABC делит отрезок AA_0 пополам. Докажите, что треугольник $A_0B_0C_0$ – равнобедренный.

Л.Емельянов

3. См. задачу 4 для 8 класса.

4. См. задачу М1924 «Задачника «Кванта».

5. В клетки таблицы 100×100 записаны ненулевые цифры. Оказалось, что все 100 стозначных чисел, записанных по горизонтали, делятся на 11. Могло ли так оказаться, что ровно 99 стозначных чисел, записанных по вертикали, также делятся на 11?

О.Подлипский

6. Положительные числа x, y, z таковы, что модуль разности любых двух из них меньше 2. Докажите, что

$$\sqrt{xy+1} + \sqrt{yz+1} + \sqrt{zx+1} > x + y + z .$$

Н.Агаханов

7. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка M, а внутри треугольника AMD – точка N таким образом, что $\angle MNA + \angle MCB = \angle MND + \angle MBC = 180°$. Докажите, что прямые MN и AB параллельны.

С.Берлов

8. См. задачу М1925 «Задачника «Кванта».

10 класс

1. Сумма положительных чисел a, b, c равна $\pi/2$. Докажите, что

$$\cos a + \cos b + \cos c > \sin a + \sin b + \sin c .$$

В.Сендеров

2. См. задачу 2 для 9 класса.

3. См. задачу М1924 «Задачника «Кванта».

4. См. задачу М1923 «Задачника «Кванта».

5. Уравнение

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

с целыми ненулевыми коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеет n корней. Докажите, что если любые два корня взаимно просты, то и числа a_{n-1} и a_n взаимно просты.

Н.Агаханов

6. Набор пятизначных чисел $(N_1, \ldots, N_k)$ таков, что любое пятизначное число, все цифры которого идут в неубывающем порядке, совпадает хотя бы в одном разряде холя бы с одним их чисел $N_1, \ldots, N_k$. Найдите наименьшее возможное значение k.

С.Токарев

7. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. В точке A к ω_1 и ω_2 проведены касательные l_1 и l_2 соответственно. Точки T_1 и T_2 выбраны на окружностях ω_1 и ω_2 соответственно так, что дуги T_1A и AT_2 равны (величина дуги окружности считается по часовой стрелке). Касательная t_1 в точке T_1 к окружности ω_1 пересекает l_2 в точке M_1. Аналогично, касательная t_2 в точке T_2 к окружности ω_2 пересекает l_1 в точке M_2. Докажите, что середины отрезков M_1M_2 находятся на одной прямой, не зависящей от положения точек T_1, T_2.

Л.Емельянов

8. Даны натуральные числа $p < k < n$. На бесконечной клетчатой плоскости отмечены некоторые клетки так, что в любом прямоугольнике $(k+1) \times n$ (n клеток по горизонтали, $k + 1$ по вертикали) отмечено ровно p клеток. Докажите, что существует прямоугольник $k \times (n+1)$ ($n + 1$ клетка по горизонтали, k по вертикали), в котором отмечено не менее $p + 1$ клетки.

С.Берлов

11 класс

1. В языке жителей Банановой Республики количество слов превышает количество букв в их алфавите. Докажите, что найдется такое натуральное k, для которого можно выбрать k различных слов, в записи которых используется ровно k различных букв.

С.Волчёнков

2. Три окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ радиуса r проходят через точку S и касаются внутренним образом окружности ω радиуса R ($R > r$) в точках T_1, T_2, T_3 соответственно. Докажите, что прямая T_1T_2 проходит через вторую (отличную от S) точку пересечения окружностей ω_1 и ω_2.

Т.Емельянова

3. Пусть многочлен

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

имеет хотя бы один вещественный корень и $a_0 \neq 0$. Докажите, что последовательно вычеркивая в некотором порядке одночлены в записи $P(x)$, можно получить из него число a_0 так, чтобы каждый промежуточный многочлен также имел хотя бы один вещественный корень.

Д.Хромцов

4. В некотором государстве 2004 города, соединенных дорогами так, что из любого города можно было добраться до любого другого. Известно, что, запретив проезд по любой из дорог, по-прежнему из любого города можно было добраться до любого другого. Министр транспорта и министр внутренних дел играют в следующую игру. Они по очереди вводят на дорогах, пока есть возможность, одностороннее движение (на одной дороге за ход), причем министр, после хода которого из какого-либо города стало невозможно добраться до какого-либо другого, немедленно уходит в отставку. Первым ходит министр транспорта. Может ли кто-либо из министров добиться отставки другого независимо от его игры?

А.Пастор

5. См. Задачу 5 для 9 класса.

6. Расстоянием между числами $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ и $\overline{b_1b_2b_3b_4b_5}$ назовем максимальное i, для которого $a_i \neq b_i$. Все пятизначные числа выписаны друг за другом в некотором порядке. Какова при этом минимально возможная сумма расстояний между соседними числами?

Р.Карасёв

7. При каких натуральных n для любых чисел α, β, γ, являющихся величинами углов остроугольного треугольника, справедливо неравенство

$$\sin n\alpha + \sin n\beta + \sin n\gamma < 0\ ?$$

В.Сендеров

8. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Сфера S_1, проходящая через точки A, B, C, пересекает ребра AD, BD, CD в точках K, L, M соответственно; сфера S_2, проходящая через точки A, B, D, пересекает ребра AC, BC, DC в точках P, Q, M соответственно. Оказалось, что $KL \parallel PQ$. Докажите, что биссектрисы плоских углов KMQ и LMP совпадают.

С.Берлов

Заключительный этап

9 класс

1. Каждая целочисленная точка плоскости окрашена в один из трех цветов, причем все три цвета присутствуют. Докажите, что найдется прямоугольный треугольник с вершинами трех разных цветов.

С.Берлов

2. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности. Биссектрисы внешних углов A и B пересекаются в точке K, внешних углов B и C – в точке L, внешних углов C и D – в точке M, внешних углов D и A – в точке N. Пусть K_1, L_1, M_1, N_1 – точки пересечения высот треугольников ABK, BCL, CDM, DAN соответственно. Докажите, что четырехугольник $K_1L_1M_1N_1$ – параллелограмм.

Л.Емельянов

3. На столе стоят 2004 коробочки, в каждой из которых лежит по одному шарику. Известно, что некоторые из шариков белые, и их количество четно. Разрешается указать на любые две коробочки и спросить, есть ли в них хотя бы один белый шарик. За какое наименьшее количество вопросов можно гарантированно определить какие-нибудь две коробочки, в которых лежат белые шарики?

Жюри

4. Даны натуральное число $n > 3$ и положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, произведение которых равно 1. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1 + x_1 + x_1x_2} + \frac{1}{1 + x_2 + x_2x_3} + \ldots + \frac{1}{1 + x_n + x_nx_1} > 1\,.$$

С.Берлов

5. Существуют ли такие попарно различные натуральные числа m, n, p, q, что $m + n = p + q$ и $\sqrt{m} + \sqrt[3]{n} = \sqrt{p} + \sqrt[3]{q} > 2004$?

И.Богданов

6. В кабинете президента стоят 2004 телефона, любые два из которых соединены проводом одного из четырех цветов. Известно, что провода всех четырех цветов присутствуют. Всегда ли можно выбрать несколько телефонов так, чтобы среди соединяющих их проводов встречались провода ровно трех цветов?

О.Подлипский

7. Натуральные числа от 1 до 100 расставлены по кругу в таком порядке, что каждое число либо больше обоих соседей, либо меньше обоих соседей. Пара соседних чисел называется хорошей, если при выкидывании этой пары вышеописанное свойство сохраняется. Какое минимальное количество хороших пар может быть?

С.Берлов

8. Пусть O – центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, T – центр описанной окружности треугольника AOC, M – середина AC. На сторонах AB и BC выбраны точки D и E соответственно так, что $\angle BDM = \angle BEM = \angle ABC$. Докажите, что $BT \perp DE$.

А.Смирнов

10 класс

1. См. задачу 1 для 9 класса.

2. На столе стоят 2004 коробочки, в каждой из которых лежит по одному шарику. Известно, что некоторые из шариков белые, и их количество четно. Разрешается указать на любые две коробочки и спросить, есть ли в них хотя бы один белый шарик. За какое наименьшее количество вопросов можно гарантированно определить какую-нибудь коробочку, в которой лежит белый шарик?

Жюри

3. Четырехугольник $ABCD$ является одновременно вписанным и описанным, причем вписанная в $ABCD$ окружность касается его сторон AB, BC, CD и AD в точках K, L, M и N соответственно. Биссектрисы внешних углов A и B четырехугольника пересекаются в точке K', внешних углов B и C – в точке L', внешних углов C и D – в точке M', внешних углов D и A – в точке N'. Докажите, что прямые KK', LL', MM' и NN' проходят через одну точку.

С.Берлов, Л.Емельянов, А.Смирнов

4. См. задачу 4 для 9 класса.

5. Последовательность неотрицательных рациональных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ удовлетворяет соотношению $a_m + a_n = a_{mn}$ при любых натуральных m, n. Докажите, что не все ее члены различны.

А.Протопопов

6. В стране 1001 город, любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Из каждого города выходит ровно 500 дорог, в каждый город входит ровно 500 дорог. От страны отделилась независимая республика, в которую вошли 668 городов. Докажите, что из любого города этой республики можно доехать до любого другого ее города, не выезжая за пределы республики.

Д.Карпов, А.Смирнов

7. Треугольник T содержится внутри центрально-симметричного многоугольника M. Треугольник T' получается при отражении треугольника T относительно некоторой точки P, лежащей внутри треугольника T. Докажите, что хотя бы одна из вершин треугольника T' лежит внутри или на границе многоугольника M.

В.Дольников

8. Существует ли такое натуральное число $n > 10^{1000}$, не делящееся на 10, что в его десятичной записи можно переставить две различные ненулевые цифры так, чтобы множество его простых делителей не изменилось?

Е.Чернышов, И.Богданов

11 класс

1. См. задачу 1 для 9 класса.

2. Пусть I_A и I_B – центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC и CA треугольника ABC соответственно, а P – точка на окружности Ω, описанной около этого треугольника. Докажите, что середина отрезка, соединяющего центры описанных окружностей треугольников I_ACP и I_BCP, совпадает с центром окружности Ω.

А.Акопян, Л.Емельянов

3. Даны многочлены $P(x)$, $Q(x)$. Известно, что для некоторого многочлена $R(x,y)$ выполняется равенство $P(x) - P(y) = R(x,y)(Q(x) - Q(y))$. Докажите, что существует многочлен $S(x)$ такой, что $P(x) = S(Q(x))$.

А.Быстриков

4. В прямоугольной таблице 9 строк и 2004 столбца. В ее клетках расставлены числа от 1 до 2004, каждое – по 9 раз. При этом в любом столбце числа различаются не более чем на 3. Найдите минимальную возможную сумму чисел в первой строке.

И.Богданов, Г.Челноков

5. Пусть $M = \{x_1, \ldots, x_{30}\}$ – множество, состоящее из 30 различных положительных чисел; A_n ($1 \le n \le 30$) – сумма всевозможных произведений различных n элементов множества M. Докажите, что если $A_{15} > A_{10}$, то $A_1 > 1$.

В.Сендеров

6. Докажите, что не существует конечного множества, содержащего более $2N$ ($N > 3$) попарно неколлинеарных векторов на плоскости, обладающего следующими двумя свойствами:

1) для любых N векторов этого множества найдется еще такой $N - 1$ вектор из этого множества, что сумма всех $2N - 1$ векторов равна нулю;

2) для любых N векторов этого множества найдутся еще такие N векторов из этого множества, что сумма всех $2N$ векторов равна нулю.

О.Подлипский

7. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями, принадлежащими k авиакомпаниям. Известно, что любые две линии одной авиакомпании имеют общий конец. Докажите, что все города можно разбить на $k + 2$ группы так, что никакие два города из одной группы не соединены авиалинией.

В.Дольников

8. В прямоугольном параллелепипеде проведено сечение, являющееся шестиугольником. Известно, что этот шестиугольник можно поместить в некоторый прямоугольник П. Докажите, что в прямоугольник П можно поместить одну из граней параллелепипеда.

С.Волчёнков

ПРИЗЕРЫ ОЛИМПИАДЫ

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Пикалов Павел – Екатеринбург, гимназия 9,
Ситников Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Матвеев Константин – Омск, лицей 66, 8 кл.,
Глазман Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Катышев Алексей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239;

по 10 классам –

Астахов Василий – Саратов, ФТЛ 1;

по 11 классам –

Петухова Надежда – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Чжу Цин-Сань – Китай, Гуандун.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Христофоров Михаил – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Киселев Павел – Раменское, Раменская гимназия, 8 кл.,
Климовский Арсений – Ульяновск, Гуманитарный лицей,
Затицкий Павел – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Баранов Дмитрий – Жуковский, гимназия 1,
Образцов Тимофей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Логунов Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239, 8 кл.,
Шмаров Владимир – Саров, лицей 15, 8 кл.;

по 10 классам –

Ефимов Александр – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Шевяков Вадим – Сухиничи, школа 1,
Калинин Никита – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Ананьевский Алексей – Санкт-Петербург, Аничков лицей,
Трегубов Алексей – Киров, ФМЛ,
Гаврилюк Андрей – Долгопрудный, ФМШ 5,
Белоусов Кирилл – Челябинск, ФМЛ 31,
Гимадеев Ренат – Казань, ФМЛ 131,
Перепечко Александр – Новосибирск, многопрофильный лицей 130 им. академика М.А. Лаврентьева,
Булиткин Даниил – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Тропик Николай – Магнитогорск, школа 65;

по 11 классам –

Хуан Чжи-И – Китай, Гуандун,
Дубашинский Михаил – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Шнурников Игорь – Краснодар, гимназия 36,
Пермяков Дмитрий – Снежинск, гимназия 127,
Бадзян Андрей – Челябинск, ФМЛ 31,
Исаев Михаил – Барнаул, гимназия 42,
Ятченко Артем – Украина, Харьков, ФМЛ 27,
Никитин Сергей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Девятов Ростислав – Москва, лицей «Вторая школа», 9 кл.,
Галкин Василий – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Банкевич Антон – Санкт-Петербург, лицей 533,
Тихонов Иннокентий – Якутск, Республиканский колледж,
Цимбалюк Александр – Украина, Харьков, ФМЛ 27,
Березняк Тарас – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Иванов Лозан – Болгария, София,
Мурашкин Михаил – Протвино, лицей,
Козлов Павел – Ростов, гимназия им. А.П.Кекина, 10 кл.,
Ло Хай-Фэн – Китай, Гуандун,
Коврижных Николай – Киров, ФМЛ,
Лишков Александр – Болгария, София,
Магазинов Александр – Ярославль, средняя школа 33 им. К.Маркса, 9 кл.,
Мешин Юрий – Киров, ФМЛ.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Митрофанов Иван – Коломна, гимназия 2 «Квантор», 8 кл.,
Бородулин Игорь – Екатеринбург, гимназия 9,
Бяков Леонид – Нижний Тагил, политехническая гимназия 82,
Столяров Дмитрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Козлов Иван – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Печенкин Николай – Москва, лицей «Вторая школа»,
Есин Алексей –ст. Старонижестеблиевская Краснодарского кр., школа 55, 8 кл.,
Козачок Марина – Долгопрудный, ФМШ 5,
Дремов Виктор – Волгодонск, школа 24,
Красильников Александр – Ульяновск, гимназия 79,
Щичко Антон – Челябинск, ФМЛ 31,
Белов Борис – Раменское, Раменская гимназия 2;

по 10 классам –

Вдовин Валерий – Нижний Новгород, лицей 36,
Шмаков Кирилл – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Петров Андрей – Москва, гимназия 1543,
Родионов Игорь – Фрязино, школа 1,
Мартынов Павел – Нижний Новгород, Нижегородская городская педагогическая гимназия,
Блинов Вениамин – Саров, лицей 3,
Фильченков Андрей – Санкт-Петербург, ФМГ 261,
Осиненко Антон – Москва, лицей «Вторая школа»,
Семейко Александр – Москва, гимназия 1543,
Разумовский Роман – Иваново, лицей «Гармония»,
Нетай Игорь – Ростов-на-Дону, школа 103,
Ярухин Евгений – Ижевск, экономико-математический лицей 29,
Маринин Евгений – Ярославль, школа 33 им. К.Маркса с углубленным изучением математики;

по 11 классам –

Данилова Юлия – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Трущин Дмитрий – Саров, гимназия 2,
Акулов Ярослав – Саров, лицей 3,
Лугинин Иван – с.Высокораменское Кировской обл., Высокораменская школа,
Батузов Кирилл – Саратов, Лицей прикладных наук,
Калинин Максим – Пермь, школа 146,
Кислицын Евгений – Киров, ФМЛ.
Родин Александр – Москва, СУНЦ МГУ,
Тимофеев Алексей – Москва, СУНЦ МГУ,
Филимонов Владислав – Екатеринбург, гимназия 9,
Айзенберг Антон – Ростов-на-Дону, ФМЛ 33,
Дильман Глеб – Челябинск, ФМЛ 31,
Киркорян Артур – Болгария, София,
Кирьянов Александр – Краснодар, гимназия 88,
Лазарев Алексей – Киров, ФМЛ,
Помелов Артем – Киров, ФМЛ,
Бурангулов Павел – Уфа, школа 42,
Подхалюзин Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239, 10 кл.

Особо хочется отметить успех Надежды Петуховой – единственной участницы олимпиады, решившей все 8 задач, а также восьмиклассника Константина Матвеева, получившего диплом I степени по 9 классам.

Жюри определило состав национальной команды России на Международную математическую олимпиаду (ММО) 2004 года. В команду вошли Петухова Надежда, Дубашинский Михаил, Шнурников Игорь, Пермяков Дмитрий, Бадзян Андрей, Исаев Михаил. Запасной участник – Мешин Юрий (Киров, ФМЛ).

В рамках подготовки к ММО 2005 года призеры олимпиады приняли участие в Болгарской математической олимпиаде школьников (близкой по стилю и проводимой по схеме ММО). По результатам олимпиады Магазинов Александр занял 1 место, Ефимов Александр – 3 место, Подхалюзин Александр – 4 место, Гаврилюк Андрей – 9 место, Козлов Павел – 11 место, Астахов Василий – 23 место среди 63 участников (всем школьникам предлагаются единые задания).

Публикацию подготовили Н.Агаханов, Д.Терёшин

XXXVIII Всероссийская олимпиада школьников по физике

Заключительный этап очередной Всероссийской физической олимпиады школьников прошел в апреле 2004 года в Ярославле. В олимпиаде приняли участие 187 школьников 9, 10 и 11 классов из 60 регионов России.

Ниже приводятся условия избранных теоретических задач окружного этапа (предшествовавшего заключительному), все задачи теоретического и экспериментального туров заключительного этапа и список призеров олимпиады.

ОКРУЖНОЙ ЭТАП

Теоретический тур

9 класс

Задача 1. Встреча посередине

С противоположных концов однородного изначально неподвижного бруска длиной l, лежащего на гладкой горизонтальной поверхности, навстречу друг другу пустили две маленькие шайбы. Массы шайб $m_1 = m$ и $m_2 = 2m$, их начальные скорости $v_1 = v_0$ и $v_2 = 2v_0$; коэффициенты трения скольжения между бруском и шайбами одинаковы. Шайбы столкнулись на середине бруска через время $\tau = 0,4L/v_0$, имея при этом ненулевые скорости относительно бруска. Найдите массу бруска M и коэффициент трения скольжения шайб по бруску μ. Ускорение свободного падения равно g. Будет ли задача иметь решение, если $\tau = 0,2L/v_0$; $\tau = L/v_0$? Ответ обоснуйте.

А.Варгин

Задача 2. Коническая пробка

В дне сосуда имеется сужающееся отверстие, плотно закрытое конической пробкой (рис.1). Площадь основания пробки S, высота L. Уровень дна сосуда пересекает конус на половине его высоты. Плотности пробки и жидкости составляют ρ_0 и ρ соответственно. Какой должна быть высота уровня жидкости $H > 0$ над основанием конуса, чтобы пробка не всплывала? Какую минимальную внешнюю силу F, направленную вверх, надо в этом случае приложить к пробке, чтобы ее вытащить? *Примечание.* Объем конуса равен $V = LS/3$.

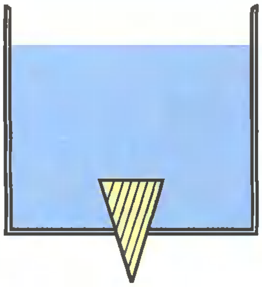


Рис. 1

А.Варгин

Задача 3. Беспокойный шарик

В одном калориметре находится смесь воды и льда, в другом – вода при температуре 100 °C. Горячую воду начинают охлаждать следующим образом: маленький металлический шарик на нити опускают в холодную воду, затем переносят в горячую, затем опять в холодную и т.д. При этом каждый раз успевает установиться тепловое равновесие, а весь цикл занимает одно и то же время. График зависимости массы льда в «холодном» калориметре от времени изображен на рисунке 2. До какой температуры охладилась горячая вода, когда весь лед растаял? Теплообменом с атмосферой можно пренебречь.

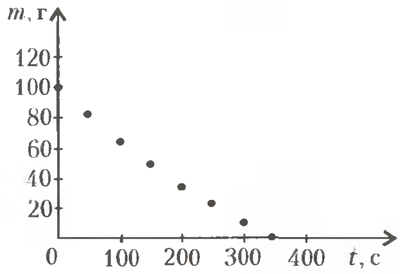


Рис. 2

О.Шведов

Задача 4. Новый элемент

Исследуя неизвестный элемент X, экспериментатор Глюк определил его ВАХ (вольт-амперную характеристику) (рис.3). Он решил сконструировать из элемента X и двух резисторов новый элемент Y с ВАХ, у которой сила тока прямо пропорциональна напряжению при $0 \le U \le 3U_0$. В точке $(3U_0, 2I_0)$ происходит излом ВАХ, и зависимость I от U становится более сложной линейной функцией. Изобразите все принципиально различные схемы элемента Y, определите сопротивления резисторов в этих схемах и нарисуйте соответствующие ВАХ элемента Y.

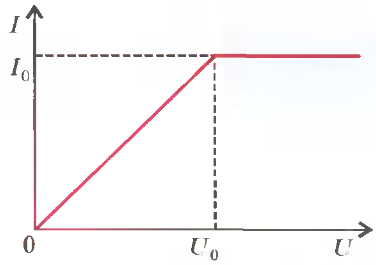


Рис. 3

О.Шведов

10 класс

Задача 1. Поршень на пружине

Отверстие в дне сосуда закрыто поршнем, состоящим из цилиндра длиной L и радиусом R и полусферы того же радиуса (рис.4). Поршень может перемещаться вертикально без трения. Пружиной жесткостью k поршень прикреплен к неподвижному основанию. В сосуд наливают жидкость плотностью ρ, после чего верх-

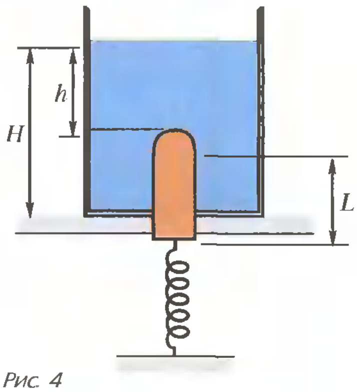


Рис. 4

няя точка поршня оказывается на глубине h под поверхностью воды, а толщина слоя воды в сосуде H. На какое расстояние x переместится поршень по сравнению с его положением в пустом сосуде? *Примечание.* Объем шара равен $V = 4\pi R^3/3$.

А.Варгин

Задача 2. Шарики в поле

Два маленьких шарика диаметром d, массой m и зарядами $+Q$ и $-Q$ движутся в пространстве, взаимодействуя только между собой. В некоторый момент они оказались на расстоянии L_0 друг от друга, причем первый из них был неподвижен, а скорость второго была равна v_0 и направлена в сторону первого. Найдите максимальное расстояние L разлета шариков после абсолютно упругого удара (общая кинетическая энергия шариков непосредственно перед и сразу после удара одна и та же). За время удара заряды шариков изменились и стали равными $+q$ и $-q$. Считайте, что в каждый момент времени заряд шарика распределен по его объему равномерно.

А.Варгин

Задача 3. Посеребренная линза

Сферическую поверхность плоско-выпуклой линзы с фокусным расстоянием F_1 посеребрили. Если на выпуклую сторону такой системы направить пучок лучей, параллельных главной оптической оси, то отраженные лучи будут распространяться так, как будто они были испущены из точки F'', находящейся на расстоянии F_2 от линзы (рис.5).

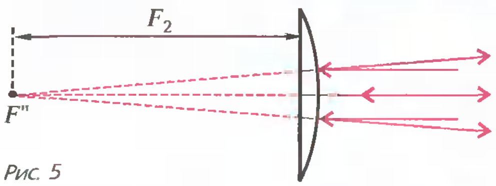


Рис. 5

Найдите построением точку F_0 (фокус системы), в которой сойдется пучок лучей, параллельных главной оптической оси и падающих на плоскую поверхность линзы. Выразите фокусное расстояние F_0 системы через F_1 и F_2. Фокусное расстояние линзы много больше ее диаметра, а посеребренная поверхность полностью отражает свет.

О.Шведов

11 класс

Задача 1. Неидеальный газ

Экспериментатор Глюк исследовал неизвестный газ и обнаружил, что он подчиняется уравнению Клапейрона–Менделеева лишь приближенно. Зависимость его давления p от температуры T, объема V и количества молей ν можно описать формулой

$$p = \frac{\nu RT}{V} + \frac{\nu^2}{V^2}(bT - a),$$

где a и b – малые параметры. Глюк предположил, что выражение для внутренней энергии U также немного отличается от формулы в случае идеального газа и имеет вид

$$U = \frac{3}{2}\nu RT - \frac{c\nu^2}{V}.$$

Размышляя над различными способами измерения коэффициента c, Глюк вспомнил, что КПД цикла Карно зависит только от температур нагревателя и холодильника. Используя это утверждение, он определил значение коэффициента c без проведения измерений. Найдите c, считая известными a и b.

О.Шведов

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

Теоретический тур

9 класс

Задача 1. Катапульта

При осаде древней крепости осажденные вели стрельбу по наступавшему противнику с помощью катапульт из-за крепостной стены высотой $h = 20{,}4$ м. Начальная скорость снарядов была $v_0 = 25$ м/с. На каком максимальном расстоянии s_{max} от стены находились цели, которых могли достигать снаряды катапульт? Сравните это расстояние с максимальной дальностью L_{max} снаряда катапульты. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Е.Бутиков

Задача 2. Санки с цилиндром

Тонкостенный цилиндр массой m насажен с помощью легких спиц на горизонтальную ось O, закрепленную на санках (рис.6), и может вращаться вокруг нее без трения. Масса цилиндра вместе с санками равна M. Мальчик тянет санки в горизонтальном направлении с постоянной силой F за легкий трос, намотанный на цилиндр. В результате за некоторое время санки из состояния покоя переместились по гладкой горизонтальной дороге на расстояние s. 1) Какой скорости v_1 достигли бы санки, пройдя путь s, если бы цилиндр был заторможен в оси и не мог вращаться? 2) Какой скорости v_2 достигли санки, пройдя путь s, при незаторможенном цилиндре? 3) Какую работу совершил мальчик в случае незаторможенного цилиндра?

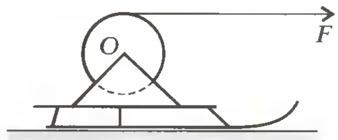


Рис. 6

В.Чивилёв

Задача 3. Модель турбины

Любознательный ученик 9 класса соорудил на даче модель водяной турбины (рис.7). Вода из широкой бочки вытекала через небольшое отверстие площадью $S = 1$ см^2 у дна и попадала на лопасти турбины. С помощью нити, намотанной на тонкий вал турбины и перекинутой через блок, устройство могло поднимать вверх груз массой $m = 100$ г с некоторой скоростью. 1) Определите коэффициент полезного действия модели водяной турбины, принимая высоту столба воды в бочке $H = 0{,}2$ м и скорость груза $v_1 = 2$ см/с. 2) Выполнив первый эксперимент, ученик перекрыл кран K и герметичной пробкой закрыл отверстие A в крышке бочки. Когда он через некоторое время вернулся, бочка сильно нагрелась на солнце. Открыв кран K (при закрытом отверстии A), ученик с удивлением обнаружил, что его механизм работает более активно, и теперь тот же груз поднимается со скоростью $v_2 = 5$ см/с. Предполагая, что КПД устройства остался неизменным, а уровень воды в бочке по-прежнему равен $H = 0{,}2$ м, определите, на сколько изменилось давление газа в бочке. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

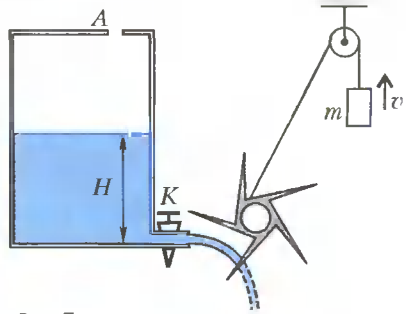


Рис. 7

С.Козел

Задача 4. Двухпроводная линия

В некоторой точке двухпроводной телефонной линии неизвестной длины L произошло повреждение, в результате которого между проводами появилось сопротивление утечки R_x (рис.8). К обоим концам линии прибыли операторы, имеющие в своем распоряжении приборы для измерения сопротивлений (омметры). Они замерили сопротивления линии при разомкнутых (R_1 и R_2) и закороченных (r_1 и r_2) противоположных концах линии и получили следующие значения: $R_1 = 4{,}0$ Ом, $R_2 = 8{,}0$ Ом, $r_1 = 3{,}5$ Ом, $r_2 = ?$ Из-за нарушения мобильной связи оператор на правом конце не успел передать оператору на левом конце линии, который должен был выполнить необходимые расчеты, значение сопротивления r_2. Помогите оператору на левом конце линии определить сопротивление утечки R_x, расстояние l до места повреждения, общую длину линии L, а также восстановить утраченное из-за плохой связи между операторами значение сопротивления r_2. Погонное сопротивление, т.е. сопротивление единицы длины каждого проводника линии, равно $\rho = 5{,}0 \cdot 10^{-4}$ Ом/м.

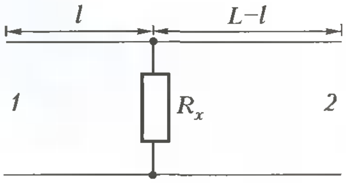


Рис. 8

С.Козел

10 класс

Задача 1. Паровоз

Ведущие колеса паровоза соединены реечной передачей, одно звено которой представляет собой плоскую горизонтальную штангу, шарнирно прикрепленную к спицам соседних колес на расстоянии от оси, равном половине радиуса R колеса (рис.9). При осмотре паровоза механик поставил на эту штангу ящик с инструментами и по рассеянности забыл его там. Паровоз трогается с места и начинает медленно набирать скорость. При какой скорости v_1 паровоза ящик начнет проскальзывать относительно штанги? При какой скорости v_2 паровоза ящик начнет подпрыгивать? Коэффициент трения между ящиком и штангой равен μ. Числовой расчет проведите для значений $R = 1$ м и $\mu = 0{,}5$.

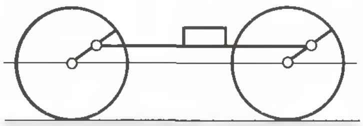


Рис. 9

Е.Бутиков

Задача 2. Жидкий гелий

Для хранения жидкого гелия применяется двойной дьюар, состоящий из внешнего дьюара, заполненного жидким азотом при температуре $T_a = 77$ К, и внутреннего дьюара, заполненного жидким гелием. Передача тепла от азота к гелию через вакуумный промежуток приводит к испарению гелия. Для поддержания постоянной температуры гелия производится непрерывная откачка его насыщенных паров из внутреннего сосуда. При некоторой скорости откачки в стационарном режиме температура гелия равна $T_0 = 4{,}0$ К. Скорость откачки увеличивают в полтора раза (по объему). Определите установившуюся температуру T гелия. Зависимость давления насыщенных паров гелия от температуры приведена на рисунке 10. *Примечание.* Дьюаром называют сосуд с двойными стенками, из пространства между которыми откачан воздух для уменьшения теплопередачи.

В.Муравьев

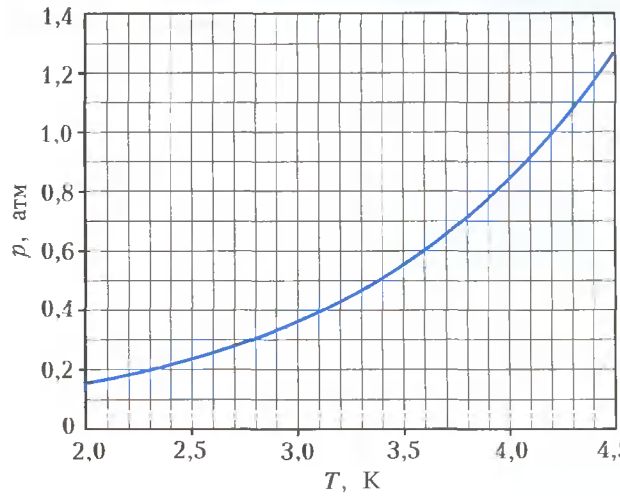


Рис. 10

Задача 3. Повреждение линии связи

В некоторой точке двухпроводной телефонной линии неизвестной длины L произошло повреждение, в результате которого между проводниками появилось сопротивление утечки R_x (рис.11). К обоим концам линии прибыли операторы, причем оператор на левом конце имел в своем распоряжении только источник постоянного тока с ЭДС $\mathcal{E} = 12$ В и амперметр, а оператор на правом – только вольтметр. Для связи операторы использовали мобильные телефоны. Погонное сопротивление линии, т.е. сопротивления единицы длины каждого проводника линии, равно $\rho = 5{,}0 \cdot 10^{-4}$ Ом/м. Используя возможные схемы подключений к концам линии, операторы получили два значения тока: $I_1 = 6$ А и $I_2 = 9$ А и одно значение напряжения: $U = 9$ В. Помогите оператору на левом конце линии по этим данным определить сопротивление утечки R_x, расстояние l до места повреждения и общую длину линии L. Нарисуйте схемы измерений, которые использовали операторы. Измерительные приборы и источник постоянного тока, которые были в распоряжении операторов, можно считать идеальными.

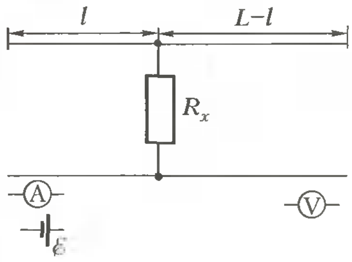


Рис. 11

С.Козел

Задача 4. Теплоемкость газа

С одним молем идеального одноатомного газа проводят процесс, изображенный на рисунке 12. Найдите теплоемкость газа в точке A. В какой точке процесса теплоемкость газа максимальна?

Д.Александров

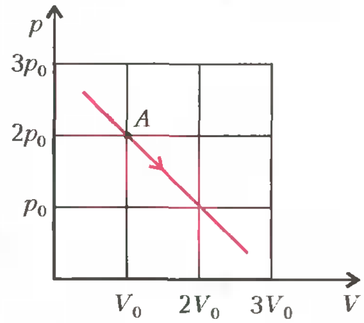


Рис. 12

Задача 5. Высоковольтный генератор

Для ускорения «тяжелых» заряженных частиц (протоны, ионы) используют высоковольтный электростатический генератор Ван-де-Граафа (рис.13). Заряды переносятся диэлектрической лентой и заряжают высоковольтный сферический электрод. Поверх-

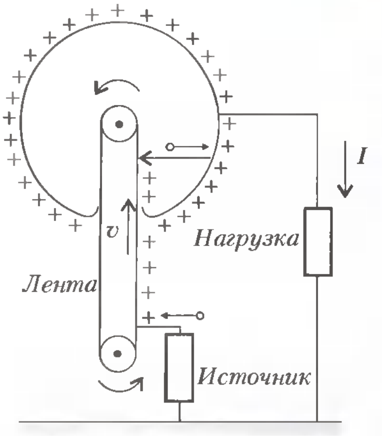


Рис. 13

ностные заряды передаются ленте от источника вблизи нижнего шкива. Заряды стекают со сферического электрода через камеру, в которой ускоряются заряженные частицы (на рисунке она условно изображена в виде некоторого нагрузочного сопротивления). Предположим, что радиус высоковольтного электрода $R = 1$ м, скорость движения ленты $v = 10$ м/с, а ширина ленты $l = 60$ см. Все устройство находится в воздухе, в котором электрический пробой наступает при напряженности электрического поля $E_{пр} = 30$ кВ/см. Найдите: 1) максимальный ток, который может протекать через нагрузку; 2) максимальный потенциал высоковольтного электрода; 3) минимальную (без учета трения) мощность электродвигателя, вращающего шкив ленты, при которой могут быть достигнуты максимальные значения тока и потенциала. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

С.Козел

11 класс

Задача 1. Футбол в сильный ветер

Футболист бьет по мячу массой m, сообщая ему начальную скорость, равную v_1 и направленную под углом α к горизонту навстречу ветру, дующему вдоль поверхности земли. Описав некоторую траекторию, мяч вернулся в исходную точку со скоростью v_2. Под каким углом β мяч упал на землю? Чему равна скорость u ветра? Какое время τ мяч находился в полете? Силу сопротивления воздуха принять пропорциональной скорости мяча относительно воздуха: $\vec{F}_c = -k\vec{v}_{отн}$, где коэффициент пропорциональности k – известная величина.

Д.Подлесный

Задача 2. Остывающая планета

Космонавты, высадившиеся на далекой планете, в ходе исследований обнаружили следующее: планета так далека от всех звезд, что единственным источником энергии на ней являются протекающие в недрах планеты реакции радиоактивного распада; планета однородна, имеет форму шара, а радиоактивные элементы равномерно распределены по всему ее объему; период полураспада радиоактивных элементов равен 1 млн лет (ход этого процесса не зависит от температуры); температура на поверхности планеты $t_1 = 0$ °C, а в ее центре $t_2 = 100$ °C; атмосфера отсутствует, и планета непрерывно теряет энергию из-за теплового излучения. Считая, что энергия, излучаемая в единицу времени с единицы площади поверхности планеты, пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры поверхности, а тепловой поток внутри планеты пропорционален перепаду температур на единицу расстояния $\Delta T/\Delta r$, определите:

1) температуру на расстоянии $r = R/2$ от центра планеты в момент исследований (R – радиус планеты);
2) температуру на поверхности планеты через 4 млн лет;
3) температуру в центре планеты через 4 млн лет.

И.Иоголевич

Задача 3. Летающая катушка

Вблизи северного полюса вертикально расположенного намагниченного стержня (постоянного магнита) находится тонкая кольцевая катушка массой $m = 10$ г (рис.14). Катушка может свободно перемещаться вдоль вертикальной оси z. Если катушку заставить колебаться по гармоническому закону около этого положения с амплитудой $A = 5$ мм и частотой $\nu = 50$ Гц, то на ее разомкнутых концах появится переменное напряжение с амплитудой $U_0 = 1$ В. Какой постоянный ток (по величине и направлению) нужно пропустить через катушку, чтобы она зависла в исходном положении?

Рис. 14

В.Можаев

Задача 4. Частицы в магнитном поле

Две частицы с одинаковыми массами m и зарядами q и $-q$ начинают с нулевыми начальными скоростями двигаться в однородном магнитном поле $\vec{B}$, перпендикулярном соединяющему их отрезку длиной R (рис.15). 1) Найдите минимальное значение индукции магнитного поля B_0 (критическое поле), при котором частицы не столкнутся друг с другом. 2) На каком расстоянии r друг от друга они окажутся при наибольшем сближении, если $B > B_0$? 3) Найдите скорости частиц и расстояние между ними в момент наибольшего сближения при критическом значении магнитного поля. Как в этом случае будут двигаться частицы после их наибольшего сближения? Нарисуйте качественный график траектории частиц.

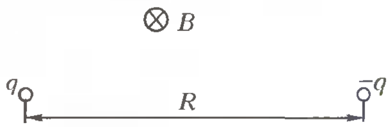


Рис. 15

И.Воробьев, М.Егоров

Задача 5. Масс-спектрограф

Устройство для определения изотопного состава атомов состоит из двух основных частей: селектора скоростей C и масс-спектрографа M (рис.16). В селектор скоростей через систему диафрагм D с отверстиями влетают ионизированные атомы некоторого элемента, обладающие различными скоростями. Они движутся в селекторе в скрещенных однородных электрическом $\vec{E}_0$ и магнитном $\vec{B}_0$ полях и далее влетают через малое отверстие в масс-спектрограф, в котором создано однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. Попадая на фотопластинку Φ, ионы оставляют на ней свой след на некотором расстоянии x от точки влета в масс-спектрограф. Предположим, что эксперимент был выполнен при следую-

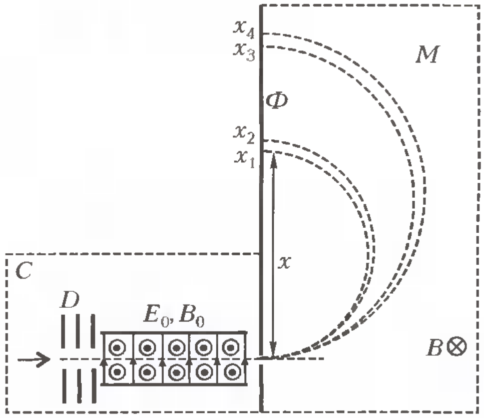


Рис. 16

щих значениях полей: $E_0 = 360$ В/см, $B_0 = 0,26$ Тл, $B = 0,24$ Тл. На фотопластинке были зарегистрированы следы ионов при $x_1 = 23,2$ см, $x_2 = 24,4$ см, $x_3 = 46,4$ см, $x_4 = 48,8$ см. Используя таблицу изотопов химических элементов, определите, ионы какого элемента оставили свои следы на фотопластинке. Запишите химические формулы ионов, соответствующих различным значениям x. Элементарный заряд $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл, атомная единица массы 1 а.е.м. $= 1,660 \cdot 10^{-27}$ кг. *Примечание.* Изотопами называются атомы одного и того же элемента, ядра которых обладают одинаковыми зарядовыми числами Z, но разными массовыми числами A.

С.Козел

Экспериментальный тур

Задачи экспериментального тура подготовили В.Алексеев, В.Бойденко, М.Кириков, А.Яковлев.

9 класс

Задача 1. Измерение плотности

Определите плотность одного плавающего и двух тонущих в воде тел (плотность воды $\rho_в = 10^3$ кг/м^3).

Оборудование: три тела неизвестной плотности (кусок керамики, резиновая пробка и деревянный брусок), рычаг на штативе, линейка, стакан с водой, нити.

Задача 2. Удельное сопротивление

Определите удельное сопротивление проводника.

Оборудование: два экземпляра исследуемого проводника, один из которых закреплен на панели с клеммами, амперметр с известным внутренним сопротивлением ($R_А = 0,046$ Ом), реостат, источник постоянного тока, ключ, соединительные провода, линейка.

10 класс

Задача 1. Соударение

Определите время соударения шарика с твердой поверхностью (стеклянная пластинка) при падении без начальной скорости с высоты 1 м.

Оборудование: теннисный шарик, линейка длиной 1,5 м, лист белой бумаги формата А4, лист копировальной бумаги, стеклянная пластина, линейка, кирпич.

Примечание: при малых деформациях шарика можно (но не обязательно) считать справедливым закон Гука.

Задача 2. «Черный ящик»

Определите неизвестные параметры элементов схемы «черного ящика» (рис.17): $\mathcal{E}_x$, r_x, R_1, $R_{2\max}$ и R_3. ЭДС и внутреннее сопротивление эталонного источника тока заданы: $\mathcal{E}_э = 9$ В, $r_э = 100$ Ом. Известно также, что $\mathcal{E}_x < \mathcal{E}_э$.

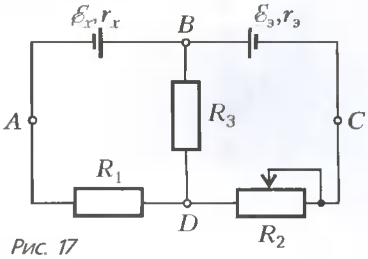


Рис. 17

Оборудование: черный ящик с выведенными на лицевую панель клеммами A, B, C, D и ручкой регулирования переменного сопротивления R_2, вольтметр с внутренним сопротивлением 1 МОм.

11 класс

Задача 1. Оптический «черный ящик»

Оптический «черный ящик» состоит из двух линз, одна из которых собирающая, а другая рассеивающая. Определите их фокусные расстояния.

Оборудование: трубка с двумя линзами (оптический «черный ящик»), лампочка, источник тока, линейка, экран с листом миллиметровой бумаги, лист миллиметровой бумаги.

Примечание: допускается использование света удаленного источника; приближать лампочку вплотную к линзам (т.е. ближе, чем позволяют стойки) не разрешается.

Задача 2. Измерение электроемкости

Определите емкость конденсатора.

Оборудование: два конденсатора: известной емкости (эталонной: $C_э = 10$ мкФ) и неизвестной емкости, источник постоянного тока (гальванический элемент), вольтметр, потенциометр, ключ, монтажная плата, соединительные провода.

ПРИЗЕРЫ ОЛИМПИАДЫ

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Зоркин Сергей – Иркутск, лицей ИрГУ,
Панкратов Степан – Бийск, лицей;

по 10 классам –

Тимофеев Олег – Новочебоксарск, гимназий 18,
Ерофеев Иван – Новосибирск, лицей 130 им. М.А.Лаврентьева,
Федотов Юрий – Тамбов, лицей 14,
Гусихин Павел – Казань, ФМЛ 131,
Ахунзянов Руслан – Набережные Челны, гимназия 57,
Гизатулин Денис – Владивосток, школа 23;

по 11 классам –

Оферкин Игорь – Новочебоксарск, гимназия 18,
Речистов Григорий – Вологда, Многопрофильный лицей.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Гатилов Степан – Новосибирск, лицей 130 им. М.А.Лаврентьева,
Зорин Павел – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Былинкин Алексей – Снежинск, гимназия 127,
Занин Андрей – Тамбов, лицей 14,
Киселев Александр – Москва, школа 1189 им. И.В.Курчатова,
Обморошев Борис – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Фетисов Антон – Озерск Челябинской обл., ФМЛ 39,
Попов Антон – Челябинск, ФМЛ 31,
Лисов Денис – Москва, лицей 1525 «Воробьевы горы»;

по 10 классам –

Клюкин Станислав – Оренбург, гимназия 1,
Гущин Иван – Ярославль, школа 33,
Демин Дмитрий – Республика Удмуртия, п.Балезино, школа,
Бочкарев Константин – Тюмень, гимназия ТюмГу,
Малащенко Иван – Бийск, лицей,
Корчагин Александр – Дубна Московской обл., лицей «Дубна»,
Петров Кирилл – Ростов-на-Дону, Классический лицей 1,
Храмцов Алексей – Дубна Московской обл., лицей «Дубна»,
Киселев Юрий – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Мотузюк Артем – Дубна Московской обл., лицей «Дубна»,

Румянцев Олег – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Смирнов Сергей – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Маловичко Иван – Москва, ФМЛ 1557;

по 11 классам –

Глазырин Семен – Снежинск, гимназия 127,
Моржаков Василий – Саратов, Лицей прикладных наук,
Богословский Никита – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Величкин Андрей – Казань, ФМЛ 131,
Дзябура Евгений – Сергиев Посад, ФМЛ,
Андреев Иван – Черноголовка Московской обл., школа 82,
Зосимов Андрей – Дубна Московской обл., лицей «Дубна»,
Юрьев Никита – Ростов-на-Дону, Классический лицей 1,
Бочкарев Дмитрий – Магнитогорск, школа 56,
Самонов Алексей – Иркутск, лицей-интернат 1,
Перунов Николай – Оренбург, гимназия 1,
Резинько Тарас – Москва, СУНЦ МГУ,
Панасенко Сергей – Екатеринбург, гимназия 9,
Пикулин Дмитрий – Саров, лицей 15.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Труханов Никита – Оренбург, гимназия 1,
Артамонов Семен – Казань, лицей 33 при КГУ,
Горобцов Олег – Москва, школа 1189 им. И.В.Курчатова,
Марковцев Вадим – Сергиев Посад, ФМЛ,
Светличный Павел – Волжский, школа 30 им. С.Р.Медведева,
Богер Евгений – Киров, ФМЛ,
Муравьев Александр – Нижний Новгород, лицей 40,
Налитов Антон – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Фаворская Елена – Красноярск, школа 48;

по 10 классам –

Кадочников Иван – Екатеринбург, СУНЦ УрГУ,
Дегтярев Илья – Екатеринбург, СУНЦ УрГУ,
Мозгунов Евгений – Сергиев Посад, ФМЛ,
Сафронов Павел – Санкт-Петербург, ФМЛ 30,
Чепарухин Александр – Москва, лицей «Вторая школа»,
Слободян Антон – Озерск Челябинской обл., ФМЛ 39,
Харичкин Александр – Волгоград, лицей 5,
Наместников Артем – Киров, ФМЛ,
Павловский Константин – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»;

по 11 классам –

Донцов Егор – Новосибирск, гимназия 6,
Лобанов Сергей – Тула, лицей 1,
Маннанов Искандер – Казань, гимназия 122,
Маняхин Дмитрий – Тамбов, лицей им. Н.А.Рябова,
Лесничий Яков – Кропоткин, лицей 3,
Макаревич Леонид – Саратов, гимназия 4
Секретенко Андрей – Красноярск, школа 41,
Беспалов Антон – Нижний Новгород, лицей 40,
Воробьев Юрий – Челябинск, ФМЛ 31,
Ларцев Арсений – Москва, ФМЛ 1557,
Белов Николай – Санкт-Петербург, гимназия 261,
Гатилов Павел – Новосибирск, СУНЦ НГУ,
Мишунин Александр – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Шувалов Павел – Рязань, школа 59,
Василевская Елизавета – Санкт-Петербург, школа 245,
Гинжук Максим – Калининград, лицей 23,
Тхоренко Максим – Москва, лицей «Вторая школа».

Публикацию подготовили С.Козел, В.Слободянин

Международный турнир «Компьютерная физика»

Турнир «Компьютерная физика» – часть программы Международного интеллект-клуба (МИК) «ГЛЮОН», проводимой с целью поиска, отбора и поддержки интеллектуально одаренных детей, проявляющих интерес к математике, физике и информатике. Уникальность этого турнира состоит в том, что все задачи предполагается решать с помощью численного моделирования на компьютере.

Для участия в турнире приглашаются команды школьников (5 человек), обладающих знанием физики и навыками работы на IBM PC. Турнир проводится в виде интеллектуального соревнования между командами в два тура – заочный и очный.

VIII ТУРНИР «КОМПЬЮТЕРНАЯ ФИЗИКА»

Заочный тур этого турнира начался в октябре 2003 года после объявления задания, которое рассылалось в лицеи, школы и гимназии по заявкам. Шесть команд были приглашены на финал турнира – очный тур соревнований, который проходил с 25 января по 1 февраля 2004 года в городе Дубне на базе санатория-профилактория «Ратмино» Объединенного института ядерных исследований (ОИЯИ) при участии ОИЯИ, Международного университета природы, общества и человека «Дубна», Межрегиональной ассоциации «Женщины в науке и образовании», при поддержке компаний «Физикон», «Кирилл и Мефодий» и журнала «Квант». Участники турнира стали и участниками конференции «Математика. Компьютер. Образование», проводимой Межрегиональной ассоциацией «Женщины в науке и образовании».

Защита задания заочного тура проходила следующим образом. Каждой команде было предложено выступить с докладом и рассказать о полученных результатах. Остальные команды исполняли роли оппонентов и рецензентов. Научная дискуссия команд докладчиков, оппонентов и рецензентов завершилась победой команды ФМЛ 1511 при Московском инженерно-физическом институте (МИФИ).

Подготовка к соревнованиям очного тура началась с лекции профессора МГУ А.М.Попова об основах физики взаимодействия лазерного излучения с веществом. Затем в течение 36 часов команды школьников пытались найти решение поставленной задачи.

На защите задания очного тура отличилась команда Самарского аэрокосмического лицея (СМАЛ), представившая наиболее глубокие результаты исследования. Она стала абсолютным победителем турнира и получила переходящий приз «Хрустальный глобус». Дипломами I степени были награждены команды СМАЛ и ФМЛ 1511 при МИФИ. Дипломы II степени получили команды Самарского медико-технического лицея (МТЛ) и ФМЛ 1580 при Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э.Баумана, а дипломы III степени – команды Классического лицея 1 при РГУ (г.Ростов-на-Дону) и Многопрофильной гимназии 4 города Норильска. Участникам соревнований было вручено множество призов от спонсоров и организаторов турнира.

В рамках турнира был проведен конкурс компьютерного творчества, включивший в себя смотр компьютерных разработок и программ, представленных Региональным центром МИК «ГЛЮОН» города Тольятти, лицеем 130 из Екатеринбурга и Центром образования 1840 из Москвы. Также были проведены компьютерные командные соревнования по интеллектуальным играм. Победителем стала команда МТЛ, отличились команды Тольятти и Екатеринбурга. Впервые в рамках турнира был реализован пилотный проект «Виртуальная физическая лаборатория», разработанный компанией «Физикон». Участниками его стали команды Тольятти и Екатеринбурга, представители команды МТЛ и сборная команды Дубны.

Заочный тур. «Молекула без электронов»

Подробно о том, может ли существовать молекула без электронов, рассказано в «Кванте» №6 за 2003 год. Здесь же мы напомним само задание и проведем его разбор.

Задание

1. Рассмотрите случай прямоугольного импульса частотой $\omega = 1,5 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$. Исследуйте динамику системы и возможность удержания ядер возле друг друга в зависимости от интенсивности излучения $P = \frac{cE_0^2}{4\pi}$ в диапазоне $10^{18} - 10^{22}$ Вт/см^2.

2. Исследуйте динамику системы и возможность удержания ядер возле друг друга при различных частотах ω в диапазоне $2 \cdot 10^{14} - 2 \cdot 10^{16}$ с$^{-1}$.

3. Рассмотрите случай плавного включения поля, когда $E_0(t)$ изменяется по закону

$$E_0(t) = \begin{cases} E_0 \sin^2 \dfrac{\pi t}{2\tau}, & t \le \tau, \\ E_0, & t \ge \tau, \end{cases}$$

где τ – длительность включения импульса. Начальное расстояние между ядрами считать равным 0,8 Å, параметр $\alpha = 1$ Å.

Разбор задания

Для качественного понимания механизма удержания рассмотрим двухчастичную систему с сильно различающимися массами: $M_1 \gg M_2$. В сильном лазерном поле частицы совершают движение по окружностям радиусами

$$R_i = \frac{eE_0}{M_i\omega^2}, \; i = 1,\ 2.$$

Таким образом, если начальное расстояние между частицами меньше R_2, легкая частица будет двигаться вокруг тяжелой, обеспечивая ее удержание. Это условие определяет порог устойчивости системы в зависимости от интенсивности и частоты излучения.

Аналогичная ситуации возникает и в том случае, если массы отличаются не очень сильно. В качестве примера на рисунке 1 представлены траектории движения протона и дейтрона (размеры указаны в см) при интенсивности излучения $P = 6 \cdot 10^{19}$ Вт/см^2 и частоте $\omega = 1,5 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$, полученные в результате численного решения уравнения Ньютона с учетом их кулоновского отталкивания и силы, действующей со стороны электрического поля волны. Как видно,

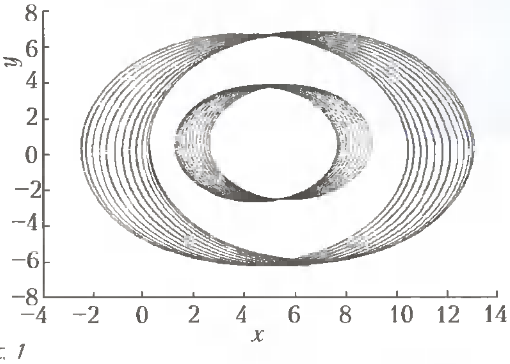


Рис. 1

протон движется по траектории, близкой к круговой, вокруг дейтрона, обеспечивая его нахождение в области вблизи его начального положения.

Режим устойчивого существования молекулы без электрона оказывается возможным лишь при достаточно быстром включении лазерного импульса, что связано с необходимостью обеспечить движение легкой частицы вокруг тяжелой при условиях расталкивания одноименных зарядов.

Представленные результаты получены командой ФМЛ 1511 при МИФИ в составе: Шабынин Антон, Безуглый Владимир, Копотев Дмитрий, Маркин Петр.

Очный тур. «Эффект перерасеяния»

Создание мощных источников лазерного излучения фемтосекундной длительности сделало возможным исследование ряда новых эффектов, возникающих при взаимодействии такого излучения с веществом. Один из них – явление двухэлектронной ионизации атома в сильном электромагнитном поле, заключающееся в практически одновременном отрыве от атома двух электронов внешним электромагнитным полем (1982 г.). Важной особенностью эффекта является его некаскадный механизм, проявляющийся в том, что вероятность одновременного отрыва двух электронов от атома существенно превосходит вероятность процесса, при котором электроны покидают атом последовательно и независимо друг от друга.

Одной из моделей, позволяющих объяснить основные закономерности эффекта, является теория перерассеяния (1993 г.). В соответствии с этой моделью, двухэлектронная ионизация атома происходит следующим образом. Сначала электромагнитным полем из атома вырывается первый электрон. Этот электрон двигается в сильном осциллирующем поле электромагнитной волны и примерно через полпериода оптического поля возвращается к родительскому иону и выбивает второй электрон. При этом, естественно, энергия возвратившегося электрона должна превышать потенциал ионизации однократно заряженного иона.

Предположим, что в некоторый момент времени t_0 произошел акт фотоионизации и вылетевший из атома электрон (с нулевой начальной скоростью) попал в поле электромагнитной волны $E = E_0 \cos \omega t$. В предположении, что поле сильное, влиянием атомного потенциала на движение фотоэлектрона можно пренебречь. В зависимости от фазы электрического поля в момент рождения электрона его движение будет происходить различным образом. В частности, при определенных значениях t_0 электрон может вернуться в точку рождения, причем кинетическая энергия в момент возврата определяется величиной напряженности E_0 и моментом рождения.

Задание

1. Найдите условия возврата электрона в точку рождения и определите максимальную кинетическую энергию электрона в момент возврата. Определите порог режима перерассеяния для двухэлектронной ионизации атома гелия (потенциал ионизации иона He^+ равен 54,4 эВ) излучением титан-сапфирового лазера ($\lambda = 800$ нм).

2. Оцените влияние потенциала, создаваемого родительским ионом, на процесс перерассеяния и на порог режима перерассеяния для излучения с $\lambda = 800$ нм. Считайте, что ион гелия создает в пространстве одномерный потенциал (потенциальную энергию)

$$U(x) = -U_0 \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + x^2}} \quad (U_0 = 54{,}4 \text{ эВ}, \ \alpha = 10^{-8} \text{ см}).$$

3. В условиях задания 2 получите зависимость порога режима перерассеяния от длины волны излучения в диапазоне $\lambda = 100 - 1000$ нм. Полученные результаты сравните с данными, полученными без учета атомного потенциала (задание 1).

Указание. Эффект двухэлектронной ионизации излучением титан-сапфирового лазера экспериментально зарегистрирован для интенсивностей излучения $P > 10^{15}$ Вт/см^2.

Разбор задания

Движение свободного электрона, рожденного в момент времени t_0, в поле волны определяется из уравнения

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -eE_0 \cos\omega(t - t_0)$$

с начальными условиями $x = 0$ и $\dfrac{dx}{dt} = 0$. Решение уравнения имеет вид

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{eE}{m\omega}\left(\sin\omega(t - t_0) - \sin\omega t_0\right),$$

$$x = \frac{eE_0}{m\omega^2}\left(1 - \cos\omega(t - t_0)\right) + \frac{eE_0(t - t_0)}{m\omega}\sin\omega(t - t_0).$$

Пример зависимостей $x(t)$ и $v(x)$, полученных из этого решения, приведен на рисунке 2 для случая $\varphi_0 = \omega t_0 = 0{,}35\pi$ при $P = 10^{15}$ Вт/см^2 и $\lambda = 800$ нм.

Существенно, что в поле волны электрон приобретает не только колебательную, но и дрейфовую скорость движения, которая равна $\dfrac{eE_0}{m\omega}\sin\omega t_0$ и определяется моментом рождения t_0 В результате в зависимости от значения t_0 в процессе своей эволюции электрон может вернуться в точку рождения $x = 0$ с различными скоростями и энергиями или не вернуться вовсе. Момент возврата электрона t^*, очевидно, определяется из условия $x(t^*) = 0$. На рисунке 3 представлены зависимости энергии, с которой электрон возвращается в точку рождения, и времени движения до этой точки от фазы. Как видно, максимальная энергия возвращающегося электрона соответствует моменту рождения $0{,}12\pi$ и составляет примерно $3U_p$ ($U_p = e^2E_0^2/(4m\omega^2)$ – энергия колебательного движения электрона в поле волны). Порог режима перерассеяния определяется из условия равенства этой энергии потенциалу ионизации однократно заряженного иона гелия $U_0 = 54{,}4$ эВ (горизонтальная линия на рисунке 3) и в нашем случае составляет $P^* \approx 6 \cdot 10^{14}$ Вт/см^2. Данные, представленные на рисунке 3, соответствуют $P = 10^{15}$ Вт/см^2 и $\lambda = 800$ нм.

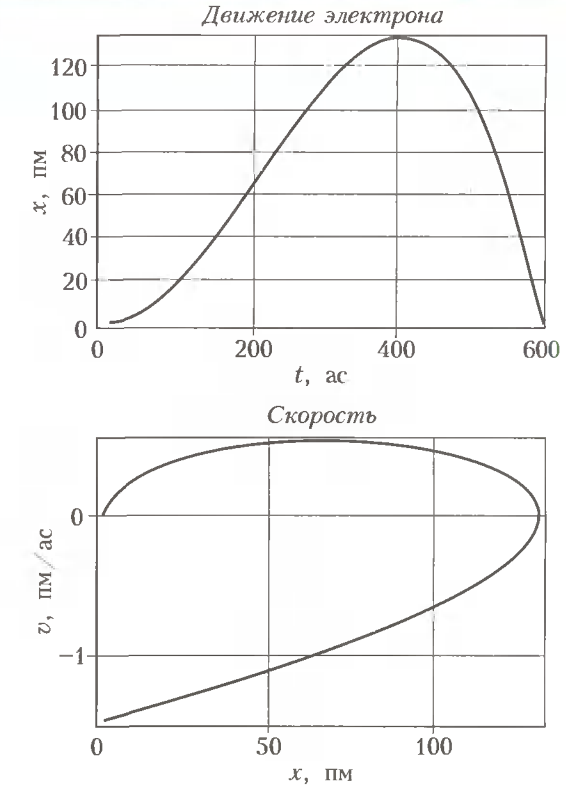


Рис. 2

Учет действия атомного потенциала в процессе эволюции электрона приводит к изменению представленных на рисунках 2 и 3 зависимостей. В качестве примера аналогичные зависимости показаны на рисунках 4 и 5 для тех же параметров лазерного воздействия. При этом начальная скорость электрона в момент рождения выбиралась из условия $v = \sqrt{2U_0/m}$. Такой выбор соответствует нулевой скорости электрона, родившегося в результате фотоионизации. Сопо-

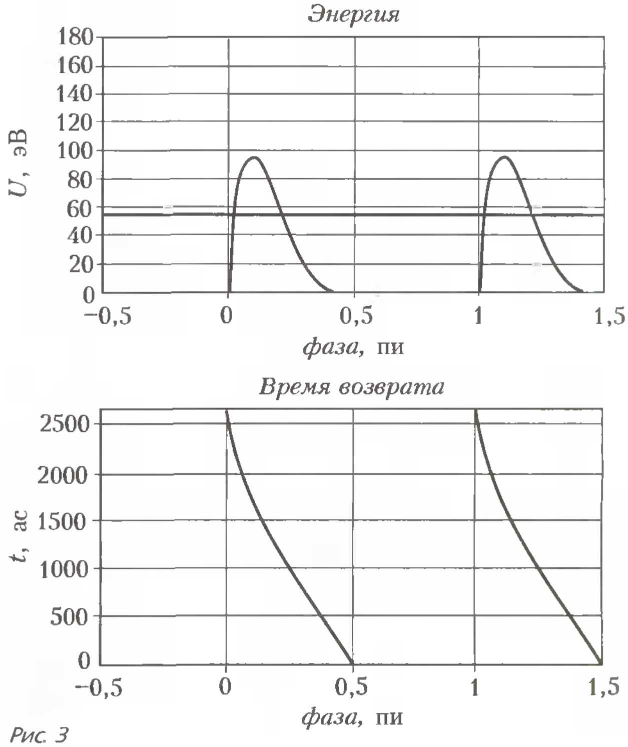


Рис. 3

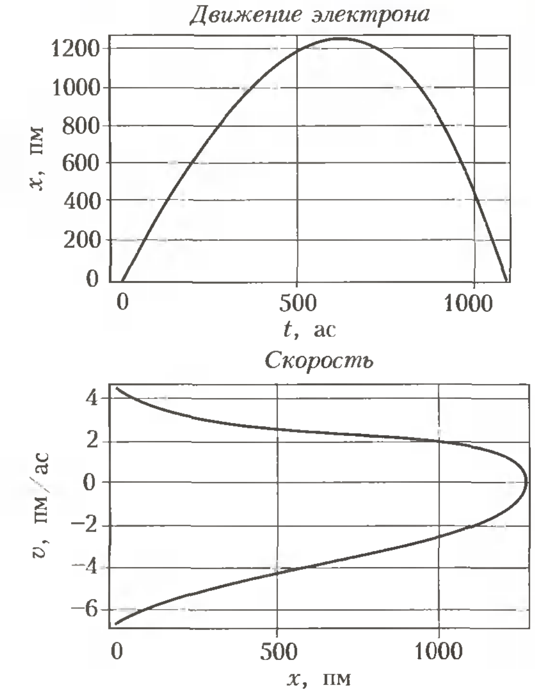


Рис. 4

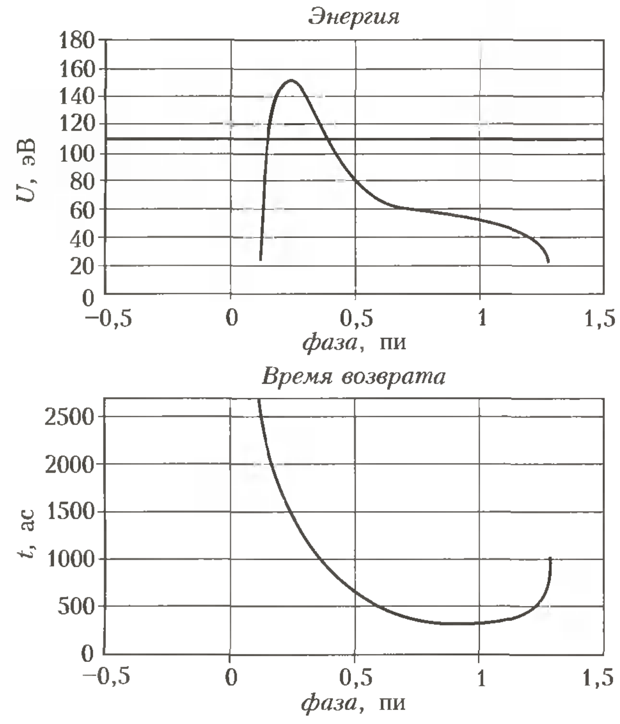


Рис. 5

ставление данных, представленных на рисунках 3 и 5, показывает, что учет атомного потенциала не изменяет существенно величину пороговой интенсивности перерассеяния.

На рисунке 6 приведена зависимость порога режима перерассеяния от длины волны лазерного излучения, полученная как с учетом, так и без учета действия атомного потенциала. Как видно, соответствующие кривые близки друг другу, причем наиболее сильное отличие возникает лишь в области малых длин волн.

Представленные результаты получены командой СМАЛ в составе: Дроздов Константин, Китаев Андрей, Дуплякин Дмитрий , Стукалов Алексей, Сизоненко Юрий.

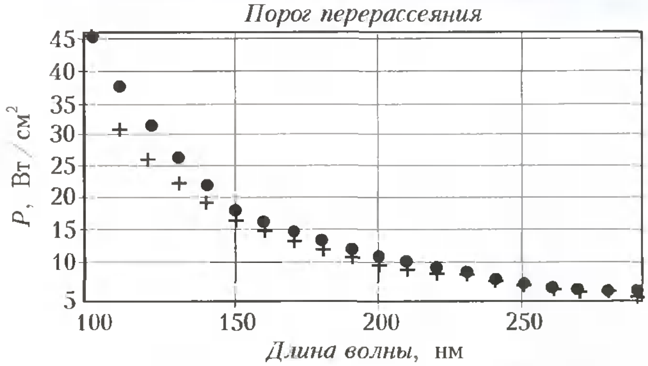


Рис. 6

IX Турнир «Компьютерная физика»

Международный интеллект-клуб «ГЛЮОН» приглашает региональные центры, гимназии и школы, работающие с одаренными детьми, принять участие в IX Турнире «Компьютерная физика», который пройдет в январе – феврале 2005 года в городе Пущино (Московская область):

Заявки на участие присылайте по адресу: 115522 Москва, Пролетарский пр., 15/2, МИК «ГЛЮОН». Тел.: (095) 324-2040, факс: (095) 396-8227, e-mail: gluon@yandex.ru (для информации см. сайт: www.informika.ru/text/goscom/gluon).

Заочный тур. «Электродинамика в микрополости»

В последние годы стало возможным экспериментальное исследование взаимодействия отдельного атома, помещенного в полость малых размеров, с электромагнитным полем, возбуждаемым в полости внешним источником. Такая задача актуальна с точки зрения экспериментальной проверки фундаментальных основ квантовой электродинамики, а также в связи с развитием спектроскопии высокого разрешения и возможностью создания одноатомных устройств в современной микроэлектронике, в частности – для генерации световых и микроволновых полей с необычными свойствами.

Произвольное состояние электромагнитного поля в полости с идеально проводящими стенками можно представить в виде совокупности стоячих электромагнитных волн, полевых мод, частоты которых определяются из условия

$$\omega_n = \frac{\pi c}{L} n,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

где L – размер полости, c – скорость света. Это условие означает, что на длине полости L укладывается целое число длин полуволн. Расстояние между соседними полевыми модами определяется формулой

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi c}{L}$$

и существенно зависит от размера полости. Уменьшение L (в настоящее время достижимы размеры порядка 1 мкм) ведет к значительному прореживанию спектра полевых мод.

Электрическое поле, соответствующее определенной полевой моде с частотой ω_n, определяется из уравнения гармонического осциллятора

$$\frac{d^2\varepsilon^{(n)}}{dt^2} + \omega_n^2\varepsilon^{(n)} = 0\,.$$

В простейшем случае атом в отсутствие внешних воздействий также описывается уравнением гармонического осциллятора

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_{\text{at}}^2 x = 0\,,$$

где ω_{at} – частота колебаний атомного электрона, x – смещение атомного электрона из положения равновесия. Таким образом, в отсутствие взаимодействия атом и электромагнитное поле в полости представляют собой совокупность невзаимодействующих гармонических осцилляторов. Наличие же взаимодействия атома с электромагнитным полем (в нерелятивистском приближении) приводит к появлению дополнительной энергии

$$U = -ex\sum_n \varepsilon^{(n)},$$

где e – заряд электрона, а сумма берется по всем полевым модам. Фактически взаимодействие приводит к связи между осцилляторами, причем атомный осциллятор связан со всеми полевыми, а каждый полевой – только с атомным.

В дальнейшем нам будет удобно пользоваться безразмерными переменными $\tilde{x} = x/x^*$ и $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/\varepsilon^*$, где x^*, ε^* – некоторые константы для получения безразмерных отношений. В этих переменных с учетом связи между осцилляторами уравнения колебаний принимают вид

$$\frac{d^2\tilde{\varepsilon}^{(n)}}{dt^2} + \omega_n^2\tilde{\varepsilon}^{(n)} = -\alpha\tilde{x},$$

$$\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} + \omega_{\text{at}}^2\tilde{x} = -\alpha\sum_n \tilde{\varepsilon}^{(n)},$$

где $\alpha = 4\pi e^2/(mLS)$ – константа связи атомного осциллятора и полевых мод, имеющая размерность квадрата частоты, m – масса электрона, S – площадь поперечного сечения микрополости. Заметим при этом, что частота атомного осциллятора может как совпадать, так и не совпадать с частотой одной из полевых мод.

Итак, система атом – электромагнитное поле в микрополости эквивалентна системе связанных осцилляторов. Особенности ее динамики определяются начальными условиями, а также спектром частот микрополости.

Задание

1. Исследуйте динамику взаимодействия атома с единственной (основной) полевой модой $n = 1$ микрополости в резонансном случае ($\omega_{\text{at}} = \omega_1 = \pi c/L$), а также в отсутствие резонанса ($\omega_{\text{at}} \neq \omega_1$). Считайте, что в начальный момент времени атом находится в возбужденном состоянии (безразмерная амплитуда колебаний атомного электрона $\tilde{x}_0 = 1$), а электромагнитное поле отсутствует ($\varepsilon = 0$). Размеры полости: $L = 1$ мкм, $S = 1$ мкм^2.

2. Пусть частота атомной системы близка или совпадает с частотой одной из полевых мод: $\omega_{\text{at}} = \omega_{n_0}$ ($n_0 = 10$). Рассмотрите динамику атомной системы для различных значений размера микрополости L. Сколько полевых мод надо учитывать при моделировании? Проведите исследование в диапазоне $L = 1$–100 мкм при $S = 1$ мкм^2.

3. Запишите уравнения, описывающие поведение двух атомов в микрополости (считайте, что атомы между собой не взаимодействуют и могут обмениваться энергией только через электромагнитное поле). В условиях задания 2 рассмотрите особенности динамики системы двух одинаковых атомов в зависимости от соотношения начальных энергий возбуждения, а при одинаковых энергиях – от соотношения начальных фаз атомных осцилляторов.

Замечание. Константы x^* и ε^* естественным образом могут быть получены только в квантовой теории и в данном задании не конкретизируются.

Публикацию подготовили
В.Альминдеров, А.Попов, О.Поповичева

XI Всероссийская заочная математическая олимпиада школьников

Всероссийская школа математики и физики «АВАНГАРД» совместно с Министерством образования и науки РФ при участии журнала «Квант» проводит очередную Всероссийскую заочную математическую олимпиаду для школьников 6–10 классов. Срок проведения олимпиады октябрь–декабрь 2004 года.

Чтобы принять участие в олимпиаде, нужно в течение недели после получения этого номера журнала решить предлагаемые ниже задачи, аккуратно оформить решения (каждую задачу – на отдельном листочке) и отослать по адресу: 115446 Москва, а/я 450, ОРГКОМИТЕТ, «М-КВАНТ» – номер класса.

В письмо вложите два пустых маркированных конверта с надписанным домашним адресом.

Заметим, что для участия в олимпиаде необязательно решить все задачи – достаточно хотя бы одной. Победители олимпиады получат призы, среди которых несколько бесплатных подписок на журнал «Квант» (Оргкомитет приложит все усилия к тому, чтобы поощрения и призы получили все, приславшие хотя бы одно правильное решение.)

Все учащиеся, приславшие свои работы в Оргкомитет олимпиады, независимо от результатов их проверки получат приглашение учиться на заочном отделении Всероссийской школы математики и физики «АВАНГАРД» в 2004/05 учебном году.

Вниманию учителей математики 6–10 классов! Пригласите к участию в олимпиаде своих учеников!

ЗАДАЧИ ОЛИПИАДЫ

6 класс

1. Простым или составным является число $3^{2004} + 1$?

2. Определите пропущенные числа и найдите сумму:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 77.$$

3. На покраску большого деревянного куба размером $3\times3\times3$ ушел 1 кг краски. Однако понадобились кубики поменьше, и большой куб распилили на кубики размером $1\times1\times1$. Сколько необходимо еще краски для докраски маленьких кубиков?

4. Имеется 12 одинаковых по виду монет, среди которых одна фальшивая (она легче настоящей). С помощью рычажных весов определите фальшивую монету за три взвешивания.

5. Докажите, что

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2004}>2+0+0+4\,.$$

7 класс

1. Определите пропущенные числа и найдите сумму:

$$3\;+\;6\;+\;9\;+\ldots+\;99.$$

2. Существует ли треугольник, у которого все стороны больше 2004 м, а площадь – меньше 0,2004 $м^2$?

3. В городе Мухоморске телефонные номера состоят из шести цифр, причем первая цифра номера не может быть восьмеркой или нулем. Сколько телефонных номеров в Мухоморске?

4. См. задачу 5 для 6 класса.

5. Имеется 12 одинаковых по виду монет, среди которых одна фальшивая. С помощью рычажных весов определите фальшивую монету за три взвешивания, если: а) фальшивая монета легче настоящей; б) фальшивая монета отличается по весу от настоящей, но неизвестно, в какую сторону.

8 класс

1. Дан треугольник со сторонами 3, 4, 5. Найдите длины высот и медиан треугольника.

2. Решите уравнение

$$2x^2+y^2+2xy+2x+1=0\,.$$

3. В городе Мухоморске телефонные номера состоят из шести цифр, причем первая цифра номера не может быть восьмеркой или нулем. Однако каждая «крутая» фирма в этом городе считает ниже своего достоинства иметь в своем телефоне меньше пяти идущих подряд одинаковых цифр. Сколько «крутых» фирм можно зарегистрировать в Мухоморске?

4. См. задачу 5 для 6 класса.

5. См. задачу 5 для 7 класса.

9 класс

1. Решите уравнение

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24\,.$$

2. Следует ли из монотонности функции $y=f\left(f\left(x\right)\right)$ монотонность функции $y=f\left(x\right)$?

3. Дан треугольник со сторонами 5, 12, 13. Найдите длины биссектрис треугольника.

4. Докажите, что $2005^{2004}-1$ нацело делится на 2004^2.

5. См. задачу 5 для 7 класса.

10 класс

1. Решите систему

$$\begin{cases}x^3+y^3=28,\\ xy\left(x+y\right)=12.\end{cases}$$

2. Простым или составным является число $4^{2004}+1$?

3. На какое максимальное число частей могут разбить плоскость 2004 прямые?

4. Изобразите на координатной плоскости 0xy множество точек, координаты x и y которых таковы, что уравнение

$$2k^2+4k\sin\frac{x+y}{2}+\sin^2 x+\sin^2 y=0$$

относительно k имеет: а) хотя бы один нулевой корень; б) два нулевых корня.

5. Найдите сумму

$$1\;+\;11\;+\;111\;+\;\ldots\;+\;11\ldots1$$

(в последнем слагаемом 2004 единицы).

КМШ

Задачи

(см. «Квант» №4)

1. Представим каждое натуральное число в виде $10a + b$, где число a выражает количество десятков, а b – цифру единиц. Заметим, что в записи всех четных чисел с нечетной суммой цифр и в записи всех нечетных чисел с четной суммой цифр количество десятков имеет нечетную сумму цифр. Для каждого натурального числа $10a + b$ с фиксированным количеством десятков $a < 1000$ существует поровну четных ($b = 0, 2, 4, 6, 8$) и нечетных $b = 1, 3, 5, 7, 9$) чисел. Если же $a = 1000$, то в рассматриваемом числовом промежутке существует лишь одно число 10000, являющееся четным и имеющее нечетную сумму цифр.

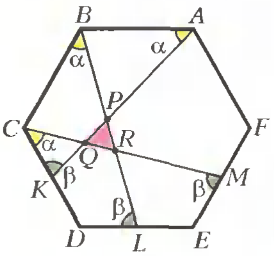


Рис. 1

Таким образом, в промежутке от 1 до 10000 четных чисел с нечетной суммой цифр на одно больше, чем нечетных чисел с четной суммой цифр.

К сожалению, в условии этой задачи была допущена опечатка.

2. Введем обозначения, показанные на рисунке 1. Четырехугольники $ABCK$, $BCDL$, $CDEM$ получаются друг из друга поворотом относительно центра шестиугольника.

Сумма углов B и L в четырехугольнике $BCDL$ равна

$$\angle B + \angle L = \alpha + \beta = 360° - (\angle C + \angle D) = 360° - 2 \cdot 120° = 120°.$$

Поэтому в треугольнике CKQ

$$\angle Q = 180° - (\alpha + \beta) = 60°.$$

В треугольнике PBA $\angle B = 120° - \alpha$, поэтому

$$\angle P = 180° - (\angle B + \angle A) = 180° - (120° - \alpha + \alpha) = 60°.$$

Итак, в ΔPQR углы P и Q равны по 60°. Следовательно, $\angle R = 60°$, и треугольник PQR является равносторонним.

3. Уверенность Хранителя Императорской чернильницы не обоснована. Пусть всего придворных 7. Пронумеруем их от 1 до 7, приписав Хранителю номер 1. Если тайные общества образуют тройки придворных (1, 2, 3); (2, 3, 4); (4, 5, 6); (4, 5, 7); (4, 6, 7), то он будет сослан на второй день.

4. Числа равны друг другу. Предположим противное: пусть среди натуральных чисел x, y, z, a, b существуют два неравные числа a и b, $b > a$.

Поскольку $a \geq \text{НОД}(x, y, a) = \text{НОК}(b, z) \geq b$, приходим к противоречию.

5. По прямолинейному участку канала сможет проплыть плот в виде полукруга единичного радиуса, однако первый и второй повороты смогут преодолеть лишь по-разному ориентированные полукруги A и B радиуса 1 (рис.2). Наложив их друг на друга (рис.3), в пересечении получим фигуру, способную беспрепятственно преодолеть все повороты.

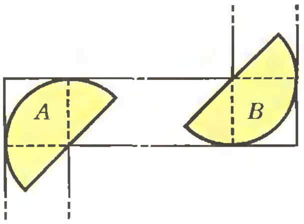


Рис. 2

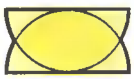


Рис. 3

Площадь этой фигуры равна $\dfrac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6} > 1$.

Замечание. Задачи о прохождении плотов через каналы представляют большой интерес, но чаще всего оказываются чрезвычайно сложными. Автору пока неизвестно, существует ли вообще плот максимальной площади, проходящий через вышеуказанный канал. Для прямолинейного канала, имеющего лишь один поворот на 90°, наибольший плот, возможно, имеет площадь $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{\pi}$. Эту оценку дал американский математик Дж.Хаммерсли, но до сих пор никому не удалось ни доказать, ни опровергнуть это предположение (более подробно об этом см. в книге Д.О.Шклярского, Н.Н.Ченцова и И.М.Яглома «Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии» – М.: Наука, 1974, с. 40–41).

Очень интересна и обратная задача: по данному плоту найти хотя бы один канал, для которого этот плот являлся бы наибольшим. Автору пока не удалось найти такие каналы даже для простейших фигур (круг, квадрат и др.).

Докажите или опровергните следующее утверждение: для канала, изображенного на рисунке 4, наибольший плот представляет собой полукруг единичного радиуса.

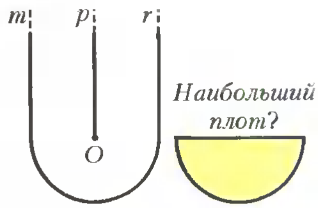


Рис. 4

Расстояние между параллельными прямыми m и p, а также между p и r равно 1. Точка O является центром окружности радиуса 1, нижняя половина которой образует нижнюю границу поворота канала.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. $m = 3$ кг.

2. Весы останутся в равновесии, поскольку плавающее тело весит ровно столько, сколько вытесненная им вода.

3. Показание динамометра не изменится. Сила, действующая со стороны гири на сосуд, равна действующей на гирю архимедовой силе, в свою очередь, равной весу вылившейся из сосуда воды.

4. Если считать нить весомой, то силы натяжения, действующие на связанные тела, станут разными и изменится ускорение системы.

5. Да. Например, так: уравновешивают груз насыпаемым на другую чашку песком. Затем вместо груза кладут на первую чашку гири, пока они не уравновесят песок. Значит, вес гирь равен весу груза.

6. У рычажных весов – одинаковы, у пружинных – больше на Земле.

7. Если ускорение мухи направлено вверх или вниз, чашка весов с банкой отклонится в противоположную сторону. Равномерный полет в любом направлении не нарушит равновесия весов.

8. При ускорением движении маятника вверх и вниз натяжение нитей ослабевает, и показания динамометра становятся меньше, чем в неподвижном состоянии.

9. При движении с ускорением вес мяча и вес вытесненной им воды изменяются в одинаковое число раз, поэтому глубина погружения мяча останется прежней.

10. Вес тела, т.е. показания весов, при таком движении должен составлять половину силы тяжести: $P = mg/2 = 4{,}9$ Н.

11. В самом начале падения песчинок часы давят на чашку весов с силой, меньшей силы тяжести, в конечный момент – с силой, большей силы тяжести. В остальное время импульс системы часы – песчинки не меняется; значит, не меняется и сила давления, и весы остаются в равновесии.

12. Да, изменится. В покое давление воздуха внутри пробирки больше атмосферного. Во время свободного падения воздух будет вытеснять не имеющую веса воду, пока его давление не сравняется с атмосферным.

13. Ускорение верхнего шара равно $3g$, ускорения нижних – нулевые.

14. Следует пользоваться анероидом.

15. Нет, не следует. Сила притяжения Солнца действует не только на тела, находящиеся на Земле, но и на саму Землю, сообщая всем им одно и то же ускорение. Поэтому тяготение Солнца не влияет на показания весов.

16. Из-за отсутствия конвекции нагреется до кипения ряд местных объемов. Пар, расширяясь, постепенно вытеснит всю воду из сосуда.

17. Например, включить двигатели, сообщающие кораблю ускорение, близкое к g, или привести корабль во вращение вокруг оси симметрии с соответствующей угловой скоростью.

Микроопыт

Нет, не будет. При падении игрушка практически находится в состоянии невесомости – все ее части движутся с одинаковыми ускорениями, не действуя друг на друга и не меняя взаимной ориентации.

ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА СВЕТА

1. $\Delta x \approx 2\alpha(n-1)F \approx 3{,}45$ см.

2. $\alpha \approx \dfrac{d}{2a} = 0{,}02$ рад. **3.** $f = \dfrac{dv}{\lambda L} = 400$ Гц.

ЧЕТВЕРТЫЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1. *Указания.* а) Из второго решения задачи 1 следует, что $\sin\angle C = \sin\angle C'$, но при тупом или прямом угле A угол C острый.

б) Если $BC > AB$, то $\angle A > \angle C$ и угол C острый.

2. *Указание.* Пусть K – середина отрезка OI. Докажите, что если, например, вневписанная окружность касается стороны BC, то $\angle BKC = 180° - \alpha$.

3. Либо $AC = BC$, либо $\angle C = 60°$. **4.** 24. **5.** 4.

6. *Указание.* Пусть $CD = u$, $EC = v$ (рис.5). Из подобия треугольников CDA_1 и A_1BC_1 и свойств биссектрисы следует, что

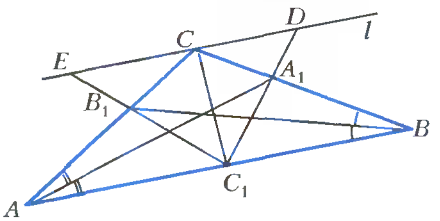


Рис. 5

$\dfrac{u}{BC_1} = \dfrac{A_1C}{A_1B} = \dfrac{b}{c}$. Аналогично, $\dfrac{v}{AC_1} = \dfrac{a}{c}$. Разделив одну пропорцию на другую, имеем

$$\frac{u}{v} = \frac{b}{a}\cdot\frac{BC_1}{AC_1} = \frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b} = 1.$$

7. $120°$.

XXX ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

Заключительный этап

9 класс

1. См. решение задачи М1931 «Задачника «Кванта» в одном из последующих номеров журнала.

2. Пусть O – центр вписанной окружности четырехугольника $ABCD$ (рис.6). Поскольку внешняя и внутренняя биссектрисы угла перпендикулярны, $OA \perp NK$, $OB \perp KL$. Высота AK_1 треугольника ABK перпендикулярна BK, поэтому $AK_1 \parallel OB$. Аналогично, $BK_1 \parallel OA$. Следовательно, $AOBK_1$ – параллелограмм, и точка K_1 получается из точки A параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{AK_1} = \overrightarrow{OB}$. Так же установим, что L_1 получается из точки C параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{OB}$. Поэтому $\overrightarrow{K_1L_1} = \overrightarrow{AC}$.

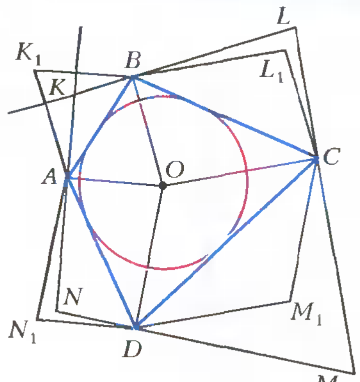


Рис. 6

Аналогично, $\overrightarrow{N_1M_1} = \overrightarrow{AC}$. Но это и значит, что $K_1L_1M_1N_1$ – параллелограмм.

3. За 4005 вопросов.

Занумеруем коробочки (и, соответственно, шарики в них) числами от 1 до 2004 и будем вопрос обозначать парой номеров коробочек. Будем называть небелые шарики черными. Покажем, что за 4005 вопросов можно найти два белых шарика. Зададим вопросы (1,2), (1,3), ..., (1,2004), (2,3), (2,4),... ..., (2, 2004). Если все ответы положительны, то первый и второй шарики белые (пусть, например, первый – черный; тогда есть еще хотя бы один черный шарик, который вместе с первым составляет черную пару). Если же хотя бы один ответ отрицателен (скажем, на вопрос, включающий первый шарик), то первый шарик черный. Тогда белыми являются ровно те шарики, про которые (в паре с черным первым) ответ был положительным, и в этом случае мы найдем даже все белые, которых хотя бы два.

Пусть существует алгоритм, позволяющий найти два белых шарика за меньшее число вопросов. Будем отвечать на все вопросы положительно. Тогда максимум после 4004 вопросов игрок сможет указать на какие-то (для определенности, первую и вторую) коробочки и заявить, что в них шарики белые. При этом какого-то из вопросов вида $(1,n)$ или $(2,n)$ (скажем, вопроса $(1,k)$) задано не будет, ибо таких вопросов всего 4005. Положим теперь в 1-ю и k-ю коробочки черные шарики, а во все остальные – белые. Тогда все наши ответы будут верны, а указанный игроком первый шарик окажется черным. Противоречие.

4. Уменьшим каждое слагаемое следующим образом:

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2} + \frac{1}{1+x_2+x_2x_3} + \ldots + \frac{1}{1+x_n+x_nx_1} >$$
$$> \frac{1}{1+x_1+x_1x_2+x_1x_2x_3+\ldots+x_1x_2\ldots x_{n-1}} +$$
$$+ \frac{1}{1+x_2+x_2x_3+\ldots+x_2x_3\ldots x_n} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{1+x_n+x_nx_1+\ldots+x_nx_1x_2\ldots x_{n-2}}.$$

Домножая числитель и знаменатель в первом слагаемом на x_n, во втором – на x_nx_1, ..., в n-м – на $x_nx_1x_2\ldots x_{n-1}$ и учитывая, что $x_1x_2\ldots x_n = 1$, получаем

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2} + \frac{1}{1+x_2+x_2x_3} + \ldots + \frac{1}{1+x_n+x_nx_1} >$$
$$> \frac{x_n}{x_n+x_nx_1+x_nx_1x_2+\ldots+x_1\ldots x_n} +$$
$$+ \frac{x_nx_1}{x_nx_1+x_nx_1x_2+\ldots+x_nx_1\ldots x_{n-1}+x_n} +$$

$$+\frac{x_nx_1x_2}{x_nx_1x_2+x_nx_1x_2x_3+\ldots+x_nx_1\ldots x_{n-1}+x_n+x_nx_1}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{x_nx_1x_2\ldots x_{n-1}}{x_nx_1\ldots x_{n-1}+x_n+x_nx_1+\ldots+x_nx_1\ldots x_{n-2}}=1\,.$$

5. Существуют.

Указание. Положите $m=a^2$, $n=b^3$, $p=c^2$, $q=d^3$, где a, b, c и d – натуральные числа, а затем зафиксируйте числа b и d так, чтобы $b=d-1>2004$. Тогда всем условиям удовлетворяет пара

$$c=\frac{d^2+bd+b^2-1}{2},\quad a=\frac{d^2+bd+b^2+1}{2}.$$

Это целые числа, так как b и d разной четности, причем $a>c>b^2>d>b>2004$.

Замечание. Можно показать, что для любой четверки чисел, удовлетворяющей условию, числа $\sqrt{m}$, $\sqrt[3]{n}$, $\sqrt{p}$, $\sqrt[3]{q}$ целые.

6. Всегда.

Построим граф, вершины которого соответствуют телефонам, а ребра – проводам. Рассмотрим наименьший набор вершин данного графа такой, что среди соединяющих эти вершины ребер присутствуют ребра всех четырех цветов. Удалим из этого набора произвольную вершину. Поскольку набор был наименьший, среди ребер, соединяющих оставшиеся вершины, присутствуют уже не все цвета. Если среди этих ребер присутствуют ребра ровно трех цветов, то искомый набор найден. В противном случае среди ребер, выходящих из удаленной вершины в другие вершины нашего набора, присутствуют как минимум два цвета, которые исчезнут после удаления этой вершины. Рассмотрим два ребра этих цветов, выходящие из удаленной вершины в другие вершины набора. Тогда ребро, соединяющее их концы, должно иметь цвет, отличный от цветов этих двух ребер. Таким образом, в графе нашелся треугольник, все ребра которого имеют попарно различные цвета. Это и означает, что требуемый набор вершин можно выбрать всегда.

7. 51 хорошая пара.

Пример: сначала расставим числа подряд, а затем поменяем местами числа 2 и 3, 4 и 5, ..., 98 и 99. В полученной расстановке 1, 3, 2, 5, 4, ..., 99, 98, 100 хорошими парами являются в точности пары (1, 3), (3, 2), (5, 4), (7, 6), ..., (97, 96), (99, 98), (98, 100).

Докажем, что хороших пар не менее 51. Заметим, что среди любых двух пересекающихся пар хотя бы одна – хорошая. Действительно, пусть a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 – такие подряд идущие числа, что пары (a_2, a_3) и (a_3, a_4) не являются хорошими. Не умаляя общности, можно считать, что $a_1>a_2<a_5>a_4<$ $<a_5$. С другой стороны, пара (a_3, a_4) не является хорошей, значит, $a_1>a_2>a_5$, пара (a_2, a_3) не является хорошей, значит, $a_5>a_4>a_1$. Тогда $a_1>a_2>a_3>a_4>a_1$, что невозможно, значит, либо пара (a_2, a_3), либо пара (a_3, a_4) – хорошая. Поэтому хороших пар уже не менее 50, причем ровно 50 их может быть, только если хорошие и нехорошие пары чередуются. Но если рассмотреть число 100, то следующая за ним пара – хорошая: $100>(a_k<a_{k+1})>a_{k+2}<a_{k+3}$. Также хорошей является и пара, предшествующая числу 100, а значит, чередование невозможно.

8. Так как D и E лежат на сторонах, то $\angle ABC$ – наибольший угол треугольника; поэтому $\angle AOC=2\angle ABC\ge 120°$ и точки O и T лежат по разные стороны от AC.

Пусть прямые ME и MD пересекают AB и BC в точках X и Y соответственно (рис.7). Из остроугольности треугольника очевидно следует, что X и Y лежат на продолжениях отрезков BA и BC за точки A и C соответственно. Заметим, что

$$\angle DXM=180°-\angle ABE-\angle BEM=180°-2\angle ABC,$$

аналогично, $\angle EYM=180°-2\angle ABC$, поэтому четырехугольник $DEYX$ вписанный и $\angle BED=\angle BXY$.

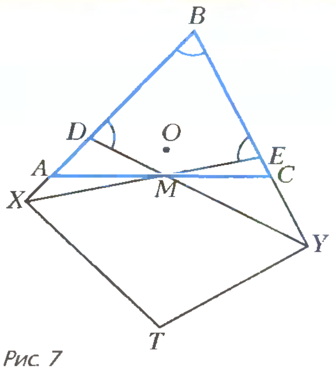


Рис. 7

Далее, $\angle ATM=2\angle ACO$ (так как точки O, M, T, очевидно, лежат на серединном перпендикуляре к AC, и T – центр описанной окружности ΔAOC). Тогда $\angle ATM=2(90°-$ $-\angle MOC)=2(90°-\angle ABC)$, так как O – центр описанной окружности ΔABC. Поэтому $\angle ATM=180°-2\angle ABC=$ $=\angle AXM$, откуда четырехугольник $AMTX$ – вписанный. Так как $\angle AMT=90°$, то $\angle AXT=90°$. Аналогично, $\angle CYT=90°$. Четырехугольник $BXTY$ также вписанный, и $\angle TBY=\angle TXY=90°-\angle BXY$. Получаем $\angle BED+\angle TBE=\angle BXY+(90°-\angle BXY)=90°$, что и требовалось.

10 класс

2. За 2003 вопроса (решение аналогично решению задачи 3 для 9 класса).

3. Если $ABCD$ – трапеция (скажем, $AB\parallel CD$), то прямые $L'L$ и $N'N$ имеют общую точку пересечения с серединным перпендикуляром к AB, на котором лежат K, K', M и M'.

Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые BC и AD – в точке F (рис.8). Заметим, что K' и M' лежат

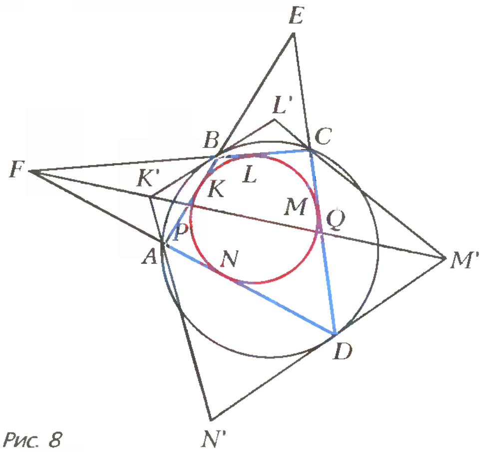


Рис. 8

на биссектрисе $\angle CFD$. Пусть она пересекает AB и CD в точках P и Q соответственно. Тогда $\angle FAP=\angle FCQ$ и $\angle PFA=\angle CFQ \Rightarrow \angle FPA=180°-\angle CFQ-\angle FCQ=\angle FQC \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle EPQ=\angle EQP$, т.е. биссектриса $\angle AED$ – высота равнобедренного треугольника EPQ; поскольку L' и N' лежат на этой биссектрисе, то $K'M'\perp L'N'$. Но биссектриса $\angle AED$ перпендикулярна KM, откуда $KM\parallel K'M'$; аналогично, $LN\parallel L'N'$. Прямая KL перпендикулярна биссектрисе $\angle ABC$, а значит, параллельна биссектрисе внешнего угла B, следовательно, $K'L'\parallel KL$; аналогично, $L'M'\parallel LM$. Тогда у треугольников KLM и $K'L'M'$ соответствующие стороны параллельны, а значит, они гомотетичны. Заметим, что при этой гомотетии K переходит в K', а M – в M', и так как параллельные прямые переходят в параллельные, то прямые KN и MN переходят в $K'N'$ и $M'N'$ соответственно, значит, N переходит в N'. Следовательно, четырехугольники $KLMN$ и $K'L'M'N'$ гомотетичны. Получаем, что KK', LL', MM', NN' проходят через центр гомотетии, т.е. через одну точку.

5. См. решение задачи М1932 «Задачника «Кванта» в одном из последующих номеров журнала.

6. Предположим, что утверждение задачи неверно; скажем, из города X нельзя добраться до Y по городам республики (X, Y – города республики). Обозначим через A множество всех городов республики, до которых можно добраться из X по городам республики (включая сам город X), а через B – множество всех остальных ее городов (оно непусто, так как содержит Y). Тогда города республики разбились на две группы так, что все дороги между городами группы A и группы B направлены от B к A.

Обозначим количество городов в группах A и B через a и b соответственно, $a + b = 668$. Пусть в A городов не меньше, чем в B, т.е. $a \ge 334 \ge b$. В B есть город Z, из которого выходит не менее $\frac{b-1}{2}$ дорог в города из B. Кроме того, из Z выходит a дорог к городам группы A. Всего дорог, выходящих из Z, получается не менее

$$a+\frac{b-1}{2}=\frac{a+(a+b)-1}{2}=\frac{a+667}{2}\ge\frac{1001}{2}>500.$$

Противоречие.

Случай, когда в B больше городов, чем в A, рассматривается аналогично.

7. Пусть O – центр симметрии многоугольника, A, B, C – вершины T, A', B', C' – соответствующие вершины T'; пусть ΔABC при симметрии относительно O переходит в $\Delta A_0B_0C_0$ (лежащий в M). Если $O = P$, утверждение очевидно. Пусть d – луч прямой OP с вершиной в P, не содержащий O. Тогда d пересекает одну из сторон ΔABC, скажем AB.

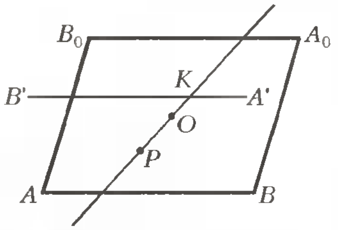


Рис. 9

Рассмотрим параллелограмм ABA_0B_0, лежащий в M (рис.9). Прямая OP высекает в нем отрезок, симметричный относительно O; тогда отрезок $A'B'$ пересекается с этой прямой во внутренней точке K параллелограмма.

Теперь, поскольку $A'B' \parallel AB \parallel A_0B_0$, то одна из точек A' и B' лежит в этом параллелограмме (или на его границе), иначе $A'B' > AB$, что неверно.

8. Существует.

Приведем пример такого числа. Пусть $N = 13\cdot 11\ldots 1 = 144\ldots 43$, количество единиц мы подберем позже. Если переставить единицу и тройку, то получится число $344\ldots 41 = 31\cdot 11\ldots 1$. При этом, если наше число из одних единиц делится на $13\cdot 31 = 403$, то простыми делителями обоих чисел будут в точности его делители. Осталось показать, что существует такое число из хотя бы 1000 единиц.

Рассмотрим числа 1, 10^{1000}, 10^{2000}, …, $10^{403\cdot 1000}$. Два из них (скажем, 10^{1000m} и 10^{1000n}, где $m < n$) имеют одинаковые остатки от деления на 403. Тогда $10^{1000n}-10^{1000m}=$ $=10^{1000m}\left(10^{1000(n-m)}-1\right)$ делится на 403, а поскольку 403 и 90 взаимно просты, то на 403 делится и $\frac{10^{1000(n-m)}-1}{9}=\underbrace{11\ldots1}_{1000(n-m)}$, что и требовалось.

11 класс

2. Пусть M – середина отрезка I_AI_B. Поскольку биссектрисы внутреннего и внешнего углов перпендикулярны, $AI_A \perp AI_B$. В прямоугольном треугольнике AI_AI_B середина M гипотенузы I_AI_B равноудалена от вершин, поэтому $MA = I_AI_B/2$. Аналогично, $MB = I_AI_B/2$. Тогда M – центр окружности, описанной около AI_BI_AB, поэтому $\angle AI_AB = \angle AMB/2$. Заметим, что $\angle AI_BB = (180° - \angle ABC)/2 - \angle BAC/2 = \angle ACB/2$, поэтому $\angle AMB = \angle ACB$, и точки A, B, C и M лежат на одной окружности Ω. Поскольку $AM = BM$, точка M является серединой дуги ACB этой окружности.

Пусть I'_A, I'_B, M' – середины отрезков CI_A, CI_B, CM соответственно (рис.10). Точки, I'_A, I'_B, M' являются проекциями соответственно точек O_A, O_B, O на прямую I_AI_B (здесь O_A, O_B, O – центры описанных окружностей треугольников I_ACP, I_BCP, ABC). Точки O_A, O_B, O лежат на серединном перпендикуляре l к отрезку CP.

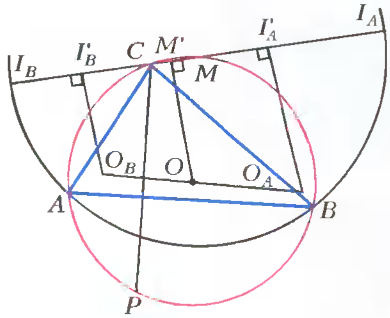


Рис. 10

Поэтому для решения задачи достаточно доказать, что M' является серединой отрезка $I'_AI'_B$. Но это верно, поскольку M – середина I_AI_B, а тройка точек I'_A, I'_B, M' получается из тройки I_A, I_B, M путем гомотетии с центром C и коэффициентом $1/2$.

3. Предположим противное. Рассмотрим многочлены $P(x)$, $Q(x)$, для которых наше утверждение неверно и степень $P(x)$ наименьшая из возможных. Обозначим степени $P(x)$ и $Q(x)$ через n и k соответственно. Заметим, что при домножении многочленов на ненулевые константы условие не меняется, поэтому будем считать $P(x)$ и $Q(x)$ приведенными. Ясно, что $n > 0$, иначе можно положить $S(x) = P(x) = 1$.

Лемма. n делится на k.

Доказательство. Старшей компонентой $\overline{T(x,y)}$ многочлена от двух переменных $T(x,y)$ будем называть сумму всех составляющих его одночленов, сумма степеней при x и y у которых максимальна (так, у многочлена $x^3+3xy^2+x-2y^2$ старшей компонентой является x^3+3xy^2). Заметим, что $\overline{T_1(x,y)T_2(x,y)}=\overline{T_1(x,y)}\cdot\overline{T_2(x,y)}$. Тогда

$$x^n-y^n=\overline{P(x)-P(y)}=\overline{R(x,y)}\cdot\overline{Q(x)-Q(y)}=$$
$$=\overline{R(x,y)}\left(x^k-y^k\right),$$

т.е. многочлен x^n-y^n делится на x^k-y^k. Если $n = qk + r$ – результат деления n на k с остатком, то

$$x^n-y^n=x^r\left(x^{qk}-y^{qk}\right)+y^{qk}\left(x^r-y^r\right)=$$
$$=x^r\left(x^k-y^k\right)\left(x^{k(q-1)}+x^{k(q-2)}y^k+\ldots+y^{k(q-1)}\right)+y^{qk}\left(x^r-y^r\right),$$

поэтому $F(x,y)=y^{qk}\left(x^r-y^r\right)$ делится на x^k-y^k. Однако его степень по x меньше, чем k, поэтому такое может быть лишь тогда, когда она равна нулю, т.е. $r = 0$. Лемма доказана.

Рассмотрим многочлены $P_1(x)=P(x)-Q(x)^{n/k}$ и $Q(x)$. Для них условие задачи выполнено:

$$P_1(x)-P_1(y)=$$
$$=\left(R(x,y)-\left(Q(x)^{n/k-1}+Q(x)^{n/k-2}Q(y)+\ldots+Q(y)^{n/k-1}\right)\right)\times$$
$$\times\left(Q(x)-Q(y)\right).$$

Кроме того, степень у $P_1(x)$ меньше, чем степень $P(x)$; поэтому $P_1(x)=S_1(Q(x))$ для некоторого многочлена $S_1(x)$. Тогда, положив $S(x)=S_1(x)+x^{n/k}$, получаем противоречие с выбором $P(x)$, так как $P(x)=P_1(x)+Q(x)^{n/k}=S(Q(x))$.

4. $\frac{2003\cdot 2002}{2}+1=2005004$.

Докажем индукцией по n, что если в таблице с n столбцами расставлены согласно условию числа от 1 до n, то сумма в первой строке не меньше чем $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$.

База для $n \le 4$ очевидна: числа в первой строчке не меньше единицы, и $n \ge \frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ при $n \le 4$.

Переход. Переставив, если нужно, столбцы, будем далее считать, что числа в первой строке стоят в неубывающем порядке. Обозначим через S_i количество чисел в первой строке, не меньших чем i, и положим $D_i = n - S_i$; при этом $S_1 = n$, $D_1 = 0$. Заметим, что сумма чисел в первой строке равна $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$. Преобразуем это выражение:

$$S = (n - D_1) + \ldots + (n - D_n) \ge n(n-3) - (D_1 + \ldots + D_{n-3})$$

(мы оценили сумму n неотрицательных чисел суммой первых $n-3$ из них). Если для любого $i \le n-3$ выполняется неравенство $D_i \le i+1$, то

$$S \ge n(n-3) - (0+3+4+\ldots+(n-2)) = \frac{n^2-3n+4}{2},$$

что и требовалось.

Пусть при некотором $k \le n-3$ выполнено неравенство $D_k \ge k+2$. Заметим, что $k \ge 2$, поэтому $k+2 \ge 4$. Тогда в первой строке есть хотя бы $k+2$ числа, меньших k, поэтому все числа в первых $k+2$ столбцах не превосходят $k+2$. Следовательно, там стоят все такие числа, и в следующих столбцах стоят числа, не меньшие чем $k+3$. Разобьем таблицу на две части: первые $k+2$ столбца $(n-1 \ge k+2 \ge 4)$ и все остальные. Сумма чисел в первой строке первой части не меньше чем $\frac{(k+1)k}{2}+1$. Если вычесть из каждого числа второй части $k+2$, то получится таблица с $n-(k+2) \ge 1$ столбцами, удовлетворяющая условию; поэтому сумма чисел в ней не меньше $(k+2)(n-k-2)+\frac{(n-k-3)(n-k-4)}{2}+1$. Суммируя, получаем

$$S \ge \frac{(k+1)k}{2}+1+(k+2)(n-k-2)+$$
$$+\frac{(n-k-3)(n-k-4)}{2}+1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}+3,$$

что даже сильнее того, что требовалось.

5. Пусть $A_1 \le 1$. Достаточно доказать, что $A_{n+1} < A_n$ при любом $1 \le n \le 29$.

Имеем: $A_1A_n = B_n + S_n$, где B_n содержит все слагаемые, входящие в A_{n+1}, а S_n – сумма всех слагаемых полученной суммы, в которых встречается квадрат одного из x_i. Итак, $A_n \ge A_1A_n > A_{n+1}$.

6. Предположим противное. Выберем прямую, не ортогональную ни одному из векторов нашего множества. Тогда проекции хотя бы N векторов на нее направлены в одну сторону; обозначим их $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_N$. Введем на этой прямой направление так, что эти векторы направлены в отрицательную сторону, и выберем N векторов $\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_N$ так, что алгебраическая проекция s их суммы максимальна (ясно, что из условия 2 имеем $s > 0$). При этом, если некоторые из этих векторов совпали с $\vec{e}_i$, то проекции всех векторов, кроме $\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_N$, направлены в отрицательную сторону; тогда мы обозначим через $\vec{e}_i$ какие-то N векторов, отличных от $\vec{f}_i$.

Для N векторов $\vec{f}_i$ найдутся векторы $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{N-1}$ такие, что $\vec{f}_1+\ldots+\vec{f}_N = -(\vec{a}_1+\ldots+\vec{a}_{N-1})$. Хотя бы один из $\vec{e}_i$ не совпадает ни с одним из $\vec{a}_j$ (пусть это $\vec{e}_1$), при этом алгебраическая проекция суммы $\vec{a}_1+\ldots+\vec{a}_{N-1}+\vec{e}_1$ отрицательна и больше s по модулю. Тогда для векторов $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{N-1},\vec{e}_1$ существуют N векторов, сумма которых равна $-(\vec{a}_1+\ldots+\vec{a}_{N-1}+\vec{e}_1)$, т.е. алгебраическая проекция суммы которых больше s, что противоречит выбору векторов $\vec{f}_i$.

7. См. решение задачи М1933 «Задачника «Кванта» в одном из последующих номеров журнала.

8. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, в котором $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$, причем $a \le b \le c$. Без ограничения общности можно считать, что шестиугольное сечение $KLMNPQ$ расположено так, как показано на рисунке 11. В шестиугольнике $KLMNPQ$ пары противоположных сторон параллельны (как прямые пересечения плоскости с парой параллельных плоскостей). Расстояние между параллельными прямыми QK и MN не меньше, чем расстояние между гранями ADD_1A_1 и BCC_1B_1, которое равно a. Аналогично, расстояние между парами параллельных сторон KL и NP, LM и PQ не меньше длины одного из ребер параллелепипеда и, следовательно, не меньше a.

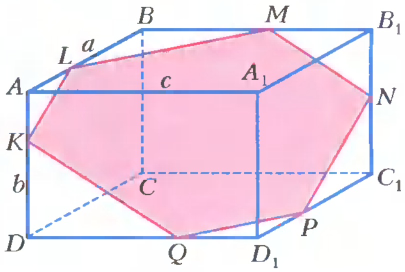


Рис. 11

Докажем, что проекция шестиугольника $KLMNPQ$ на любую прямую, лежащую в плоскости этого шестиугольника, не меньше a. Поскольку противоположные стороны шестиугольника $KLMNPQ$ параллельны, его проекция на некоторую прямую l будет совпадать с проекцией одного из отрезков KN, LP, MQ. Пусть, для определенности, проекция на l совпадает с отрезком $K'N'$, где K' и N' – проекции точек K и N соответственно. Можно предполагать, что K', N', P и Q лежат по одну сторону от KN (этого можно добиться параллельным сдвигом l). Тогда один из углов $K'KN$, $N'NK$ – не тупой; пусть, например, $\angle K'KN$ не тупой (рис.12). Тогда $K'N' = KN\sin\angle K'KN \ge$ $\ge KN\sin\angle QKN$. Но $KN\sin\angle QKN$ – это расстояние между прямыми QK и MN, поэтому $K'N' \ge KN\sin\angle QKN \ge a$.

Пусть шестиугольник $KLMNPQ$ помещен в прямоугольник П со сторонами, равными d_1, d_2. Тогда каждая из сторон d_1, d_2 не меньше, чем длина проекции $KLMNPQ$ на прямые, параллельные сторонам П. Отсюда по доказанному,

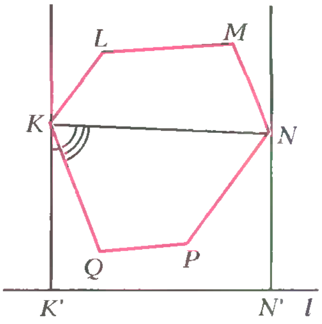


Рис. 12

$$d_1 \ge a, \quad d_2 \ge a. \qquad (1)$$

Заметим, что при проекции на плоскость ADD_1A_1 отрезок LP переходит в отрезок AD_1 (см. рис.11), поэтому $LP \ge AD_1 = \sqrt{b^2+c^2}$. С другой стороны, LP содержится в П, поэтому длина LP не превосходит длины диагонали $\sqrt{d_1^2+d_2^2}$ прямоугольника П. Получаем, что

$$d_1^2+d_2^2 \ge b^2+c^2. \qquad (2)$$

Если бы каждая из сторон d_1, d_2 была меньше b, то мы получили бы противоречие неравенству (2). Поэтому одна из сторон d_1, d_2 не меньше b, другая сторона не меньше a в силу (1). Следовательно, в П можно поместить прямоугольник со сторонами a, b, равный грани $ABCD$.

XXXVIII ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

Окружной этап

9 класс

1. $M = \dfrac{m}{2}$, $\mu = \dfrac{v_0^2}{0{,}8gL}$; в обоих случаях решения нет.

2. $H \ge \dfrac{2}{3}L\left(1 - \dfrac{2\rho_0}{\rho}\right)$; $F = \rho g S\left(\dfrac{H}{4} - \dfrac{L}{6}\right) + \rho_0 g \dfrac{LS}{3}$.

3. $t = 50$ °С.

4. См. рис.13 и 14; в случае а) $R_1 = 3U_0/I_0 = 3R_0$ и $R_2 = 2R_0$; в случае б) $R_1 = R_2 = R_0$.

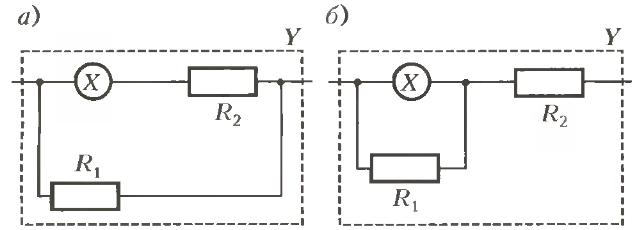


Рис. 13

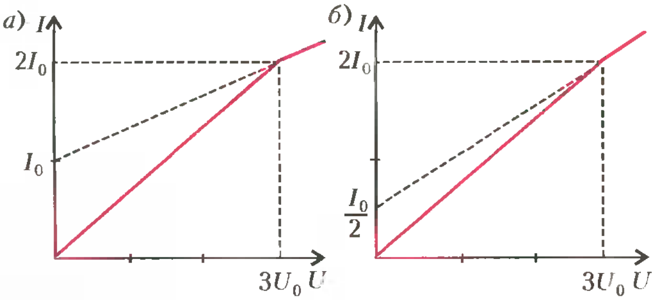


Рис. 14

10 класс

1. $x = \dfrac{\pi R^2 \rho g}{k}\left(h + \dfrac{R}{3}\right)$.

2. $L = \dfrac{L_0}{\dfrac{Q^2}{q^2} - \dfrac{L_0}{d}\left(\dfrac{Q^2}{q^2} - 1\right) - \dfrac{m v_0^2 L_0}{4kq^2}}$, где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$; если знаменатель скажется равным нулю или отрицательным, то шарики разлетятся на бесконечно большое расстояние.

3. $\dfrac{1}{F_0} = \dfrac{2}{F_1} + \dfrac{1}{F_2}$.

11 класс

1. $c = a$.

Заключительный этап

9 класс

1. $s_{\max} = \dfrac{v_0^2}{g}\sqrt{1 - \dfrac{2gh}{v_0^2}} \approx 38$ м; $L_{\max} = \dfrac{v_0^2}{g} \approx 64$ м.

2. $v_1 = v_2 = \sqrt{\dfrac{2Fs}{M}}$; $A = Fs\left(1 + \dfrac{M}{m}\right)$.

3. $\eta = \dfrac{mgv_1}{S\rho(2gH)^{3/2}/2} \cdot 100\% = 5\%$;

$\Delta p = \dfrac{1}{2}\rho\left(\dfrac{2mgv_2}{S\rho}\right)^{2/3} - \rho g H = 1600$ Па.

4. $R_x = 2{,}0$ Ом, $r_2 = 7{,}0$ Ом, $l = 2{,}0 \cdot 10^3$ м, $L = 8{,}0 \cdot 10^3$ м.

10 класс

1. $v_1 = \sqrt{\dfrac{2gR\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}} \approx 3$ м/с; $v_2 = \sqrt{2gR} = 4{,}43$ м/с.

2. $T = (3{,}25 \pm 0{,}05)$ К.

3. $R_x = 1{,}5$ Ом, $l = 0{,}5 \cdot 10^3$ м, $L = 2375$ км.

4. $C = \dfrac{7}{2}R$; теплоемкость максимальна в точке с координатами $(1{,}5p_0;\ 1{,}5V_0)$.

5. $I_{\max} = 2\varepsilon_0 E_{\text{пр}} l v \approx 0{,}32$ мА; $\varphi_{\max} = E_{\text{пр}} R = 3 \cdot 10^6$ В; $P_{\min} \approx I_{\max}\varphi_{\max} \approx 960$ Вт.

11 класс

1. $\beta = \alpha$; $u = \dfrac{mg \operatorname{ctg}\alpha}{k}$; $\tau = \dfrac{(v_1 + v_2)\sin\alpha}{g}$.

2. 1) $t = 75$ °С; 2) $t = -136{,}5$ °С; 3) $t \approx -130$ °С.

3. $I = \dfrac{2\pi\nu A mg}{U_0} = 0{,}154$ А.

4. 1) $B_0 = \sqrt{\dfrac{4m}{\pi\varepsilon_0 R^3}}$; 2) $r = \dfrac{R}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \dfrac{4m}{\pi\varepsilon_0 R^3 B^2}}\right)$; 3) $r = \dfrac{R}{2}$, при этом частицы двигаются параллельно друг другу с постоянными скоростями.

5. Возможны три варианта:

$$^{39}K^{++},\ ^{41}K^{++},\ ^{39}K^{+},\ ^{41}K^{+};$$

$$^{78}Se^{4+},\ ^{82}Se^{4+},\ ^{78}Se^{2+},\ ^{82}Se^{2+};$$

$$^{78}Kr^{4+},\ ^{82}Kr^{4+},\ ^{78}Kr^{2+},\ ^{82}Kr^{2+}.$$

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, Е.А.Силина, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»;
тел.: 930-56-48;
e-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Заказ №1740
Отпечатано на ГУ РПП, г. Ржев, ул. Урицкого, 91

При участии ЗАО «РИЦ «Техносфера», тел.: (095) 234-01-10

БесподобнаЯ ЮДИТ

В этом году замечательная венгерская шахматистка Юдит Полгар вышла в мировом рейтинг-листе на *шестое* место, пропустив вперед только Каспарова, Крамника, Ананда, Свидлера и Топалова. Ни одна женщина в истории шахмат не поднималась на такую высоту.

Трио сестер Полгар – Жужа, София и Юдит – феноменальное явление в шахматах, а Юдит – самый настоящий вундеркинд. Но рассказать надо обо всех сестрах, ведь трудно отделить младшую от старших...

Клара, мать трех супердевочек, родилась в Закарпатье и училась в Ужгородском университете. Когда она была студенткой, написала письмо в венгерскую молодежную газету: «Хочу переписываться с теми, кто тоже собирается стать педагогом». Ей ответили около 200 молодых людей. Завязалась переписка. Постепенно из всех адресатов остался один – студент из Будапешта Ласло Полгар. Они переписывались шесть лет, пока не встретились – сначала в Ужгороде, потом в Будапеште. Молодые люди поженились, и в 1969 году у них родилась первая дочка – Жужа. Затем еще две: в 1974 году – София и в 1976 – Юдит.

Жужа была очень подвижной, и родители никак не могли усадить ее хотя бы на четверть часа, пока однажды Ласло не пришла в голову удачная мысль – показать дочке шахматные фигуры, рассказать правила игры. Через неделю девочку невозможно было оторвать от доски.

В 10 лет Жужа впервые сыграла во взрослом чемпионате Венгрии. И с тех пор, уже четверть века, имена сестер Полгар не сходят со страниц мировой спортивной прессы.

По стопам старшей сестры пошли и младшие. Они тоже по особому расписанию посещали школу, тоже целыми днями – пока их сверстницы играли в куклы – просиживали за шахматной доской. Но все три девочки не росли однобокими – по утрам они бегали, регулярно ходили в бассейн, самозабвенно играли в футбол и теннис, особенно искусны были в пинг-понге.

Задумка Ласло Полгара состояла в том, что он с самого начала сделал упор на участие девочек в турнирах с противоположным полом. «Мы решили поставить в нашей семье своеобразный эксперимент: ликвидировать разницу между мужскими и женскими шахматами», – говорил отец семейства. Впоследствии этот замысел в полной мере реализовала Юдит.

Юдит, как и ее старшая сестра, всерьез занялась шахматами в 4 года.

В 11 лет Юдит одержала свою первую победу над известным гроссмейстером, разгромив его по всем правилам. В 12 ей вручили «Оскара» – как лучшей шахматистке года. Тогда же девочка-вундеркинд стала международным мастером среди мужчин, превзойдя Фишера и Каспарова, которые одолели эту вершину в 14, а в 15 лет и 5 месяцев – на месяц раньше Фишера – выполнила норму мужского гроссмейстера.

В 1995 году в финальном матче претенденток Жужа разгромила Майю Чибурданидзе – 5,5:1,5, а спустя год уверенно выиграла поединок и у чемпионки мира китаянки Се Цзюнь – 8,5:4,5. На этом шахматная карьера Жужи завершилась.

А Юдит уверенно влилась в мужскую шахматную элиту.

В 1996 году Юдит Полгар успешно сыграла в двух Гран-При по быстрым шахматам – в Москве уступила только Крамнику, а в Женеве – только Каспарову.

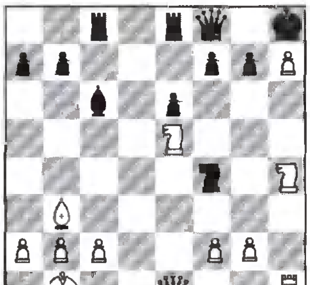
Ю.Полгар–Епишин

Москва, 1996

Защита Каро-Канн

1. e4 c6 2. d4 d5 3. ♘c3 de 4. ♘:e4 ♘d7 5. ♗c4 ♘gf6 6. ♘g5 e6 7. ♕e2 ♘b6 8. ♗b3 h6 9. ♘5f3 c5 10. ♗f4 ♗d6 11. ♗g3 ♕c7 12. dc ♕:c5 13. 0-0-0 ♗:g3? 14. hg ♗d7 15. ♖h4 ♖c8 16. ♘e5 ♗b5 17. ♕e1 0-0 18. ♘gf3 ♘bd5 19. ♔b1 ♗c6 20. ♕d2 ♖fe8 21. ♖dh1 ♕f8 22. g4 ♘e4 23. ♕e1 ♘d6 24. g5 ♘f5 25. gh ♘:h4 26. h7+ ♔h8 27. ♘:h4 ♘f4.

28. ♕b4!! g5. В случае принятия жертвы следовал мат в два хода: 28... ♕:b4 29. ♘hg6+ fg 30. ♘f7×.



29. ♕d4 ♔g7 30. ♘f5+ ef 31. h8♕+ ♕:h8 32. ♘:f7+. Черные сдались.

В конце XX века каждый год приносил Юдит все новые и новые завоевания. Оставались всего два гроссмейстера, два чемпиона мира, с которыми ей приходилось нелегко, – Гарри Ка[спаров] и Владимир Крамник. И вот [в] 2002 году в матче сборных России [и] мира Юдит Полгар, единственной д[е]вушке-участнику, удалось наконец од[о]леть Каспарова.

Ю.Полгар–Каспаров

Москва, 2002

Испанская партия

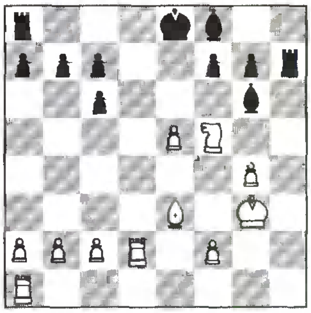
1. e4 e5 2. ♘f3 ♘c6 3. ♗b5 ♘f6 [...] 0-0 ♘:e4 5. d4 ♘d6 6. ♗:c6 dc 7. [...] ♘f5 8. ♕:d8+ ♔:d8 9. ♘c3 h6 1[0.] ♖d1+ ♔e8 11. h3 ♗e7. Крамник [в] лондонском матче с Каспаровым пре[д]почитал 11... a5.

12. ♘e2 ♘h4. Здесь встречало[сь] 12... ♗d7, 12... a5 или 12... g5. Касп[а]ров счел, что коней для достижен[ия] ничейной гавани поменять невредн[о]. Но ведь у белых, по существу, лишн[яя] пешка, и любые размены им на рук[у].

13. ♘:h4 ♗:h4 14. ♗e3 ♗f5 1[5.] ♘d4 ♗h7 16. g4 ♗e7 17. ♔g2 h5 1[8.] ♘f5 ♗f8.

Увы, забрать пешку не удаетс[я]: 18...hg 19. hg ♗:f5 20. gf ♖h5 2[1.] ♖h1! ♖:f5? 22. ♖h8+ ♗f8 23. ♗c[...]

19. ♔f3 ♗g6 20. ♖d2 hg+ 21. [...] ♖h3+ 22. ♔g2 ♖h7 23. ♔g3.



23...f6? Черным несладко, но вскр[ы]тие центра усугубляет их положени[е].

24. ♗f4 ♗:f5 25. gf fe 26. ♖[...] ♗d6 27. ♗:e5 ♔d7 28. c4 c5 2[9.] ♗:d6 cd. Есть точка зрения, что в[се] ладейные окончания ничейны, но [к] данному это не относится. Черные о[с]таются без пешки, но этим их потери [не] заканчиваются.

30. ♖e6 ♖ah8 31. ♖e:d6+ ♔c8 3[2.] ♖2d5 ♖h3+ 33. ♔g2 ♖h2+ 34. ♔[...] ♖2h3+ 35. ♔e4 b6 36. ♖c6+ ♔b8 3[7.] ♖d7 ♖h2 38. ♔e3 ♖f8 39. ♖c[...] ♖:f5 40. ♖b7+ ♔c8 41. ♖dc7+ ♔[...] 42. ♖:g7 ♔c8. Черные сдались.

Чем еще удивит нас венгерская чуд[о-]девушка?!

Е.Г[...]

Индексы по каталогу
"РОСПЕЧАТЬ":
70465 -для индивидуальных подписчиков
71514 -для организаций

ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ НА МОНЕТАХ МИРА

Весь ряд банкнот Казахстана – от 1 до 10000 тенге – украшает профиль великого мыслителя средневековья АЛЬ-ФАРАБИ (870–950). Его же портрет изображен на казахской монете достоинством в 20 тенге.

Оптик и математик АЛЬГАЗЕН (965–1039) представлен на банкноте Ирака достоинством в 10 динаров.

(Подробнее об этих ученых – внутри журнала.)