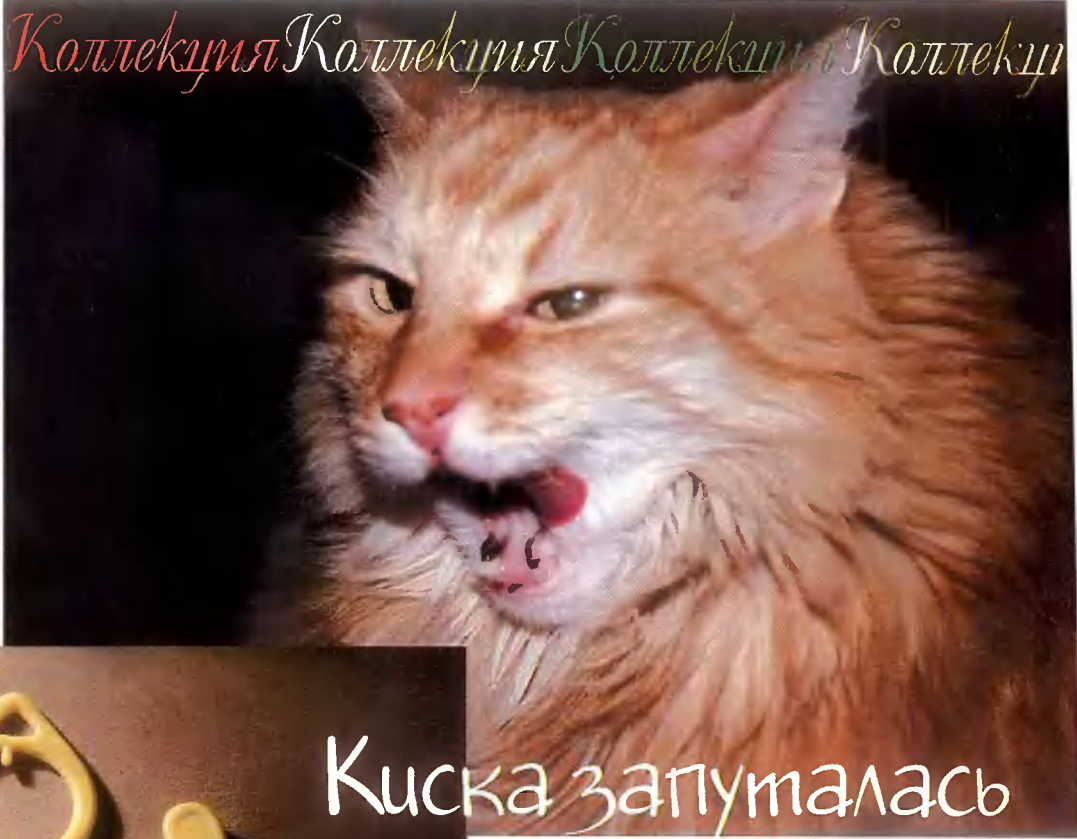


ЯВАРЬ/ФЕВРАЛЬ

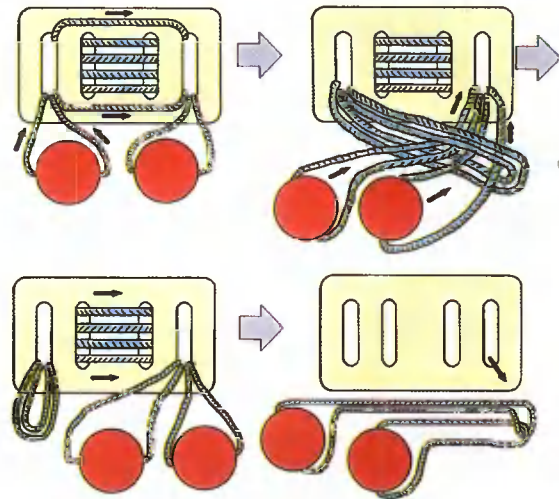
КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ





Киска запуталась



Эта головоломка, безусловно, будет полезно тем, кому нужно тренировать свое терпение и внимательность. Задача состоит в том, чтобы отцепить шнурки с шариками от фигурки котенка. На первый взгляд это может показаться невозможным, так как шарики слишком велики, чтобы пройти через отверстия в корпусе игрушки. Но отделив друг от друга туго натянутые шнурки и поняв, как они переплетены между собой, головоломку можно решить за несколько минут. В результате у вас в руках окажется фигурка котенка и две зацепленные друг за друга петли с шариками.

И возникнет новая головоломка, даже более трудная, чем та, с которой вы только что справились. Теперь нужно снова зацепить шнурки за корпус. Ту же проблему придется решать, когда вы захотите сделать игрушку своими руками. Собрать головоломку вы сможете по приведенным здесь рисункам, показывающим ее решение. Только действовать следует в обратном порядке.

Как вы, наверное, догадались, «Киска запуталась» переделана из детской погремушки. Вы можете поступить точно так же или взять любую дощечку с четырьмя отверстиями. Кроме того, вам понадобятся два отрезка шнурка и пара шариков.

КВАНТ ЯНВАРЬ 2004 №1 ФЕВРАЛЬ 2004 №1

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Квант
П

Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
Ю.А.Осипьян

ПЕРВЫЕ ЗАМЕСТИТЕЛИ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С.С.Кротов, С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,
А.Н.Виленин, С.А.Гордюнин,
Н.П.Долбилин, В.Н.Дубровский, А.А.Егоров,
А.Р.Зильберман, В.В.Козлов,
С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,
В.В.Можаев, В.В.Произволов, Н.Х.Розов,
Ю.П.Соловьев, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров
(заместитель главного редактора),
В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,
А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора),
И.Ф.Шарыгин

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,
Ю.А.Данилов, Н.Н.Константинов,
Г.Л.Коткин, Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,
М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский,
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро  Квантум

©2004, Президиум РАН,
Фонд Осипьяна, «Квант»

- 2 Израиль Моисеевич Гельфанд. *В.Тихомиров*
4 Гельфанд и школа. *Е.Глаголева*
8 Как быстрее спуститься на лифте в час пик. *К.Богданов*

НОВОСТИ НАУКИ

- 7 Нобелевская премия по физике

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 13 Задачи М1891–М1900, Ф1898–Ф1907
15 Решения задач М1871–М1875, Ф1883–Ф1892

К М Ш

- 21 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»
22 Задачи
23 Почувствуй себя Эйлером. *И.Акулич*

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 25 Как попасть на Таинственный остров. *А.Стасенко*
27 Новая галактика и все ее поля. *А.Стасенко*
29 В цепи переменного тока. *С.Серохвостов*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 30 Описанная и вписанные сферы тетраэдра. *А.Заславский*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Электричество и теплота

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 35 Упругие силы, деформации и закон Гука. *В.Плис*
39 О модуле квадратного трехчлена. *В.Голубев*

ВАРИАНТЫ

- 43 Материалы вступительных экзаменов 2003 года
52 Ответы, указания, решения
Памяти Ю.А.Данилова (42)
Вниманию наших читателей (51)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «Как попасть на Таинственный остров»*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Физики и математики на монетах мира*



В 2004 году 6000 экземпляров журнала «Квант» издаются за счет грантов Фонда некоммерческих программ «Династия» и Фонда «Евразия».

Израиль Моисеевич Гельфанд

В. ТИХОМИРОВ

2 СЕНТЯБРЯ 2003 ГОДА ИСПОЛНИЛОСЬ 90 ЛЕТ ОДНОМУ из крупнейших математиков современности – Израилю Моисеевичу Гельфанду.

Жизнь и творчество И.М.Гельфанда во многих отношениях беспрецедентны. Я хотел бы выделить основные черты этой экстраординарности.

Подавляющее большинство тех, кому суждено было внести большой вклад в науку, закончили школы, учились в престижных университетах, при этом детство и юность у них были вполне благополучными – обеспеченные родители, интеллектуальный круг общения, домашняя библиотека... Жизнь Гельфанда начиналась по-иному.

Я бы посоветовал каждому прочитать замечательное «Интервью с академиком И.М.Гельфандом», опубликованное в первом номере журнала «Квант» за 1989 год. Там Израиль Моисеевич вспоминает свое детство. Он говорит: «Жил я в маленьком городишке с единственной школой. Моим преподавателем математики был очень добрый, хотя с виду и суровый человек по фамилии Титаренко... Лучшего учителя я не встречал, хотя я знал больше него, и он это понимал. Он очень любил и всячески ободрял меня. Ободрять – самое главное для учителя, не так ли?»

Кончить школу Гельфанду не довелось. В своем интервью Гельфанд рассказывает о трех «счастливых» обстоятельствах своей жизни. Первое из них состояло в том, что он не учился в университете (да и вообще ни в каком высшем учебном заведении). Второе – что он оказался в Москве без родителей, безработным, в шестнадцать с половиной лет. А о третьем счастливом обстоятельстве своей жизни Израиль Моисеевич рассказывает так: «Я видел в объявлениях, что есть книги по высшей математике, и представлял высшую математику как нечто очень интересное. Родители мои не могли выписать эти книги – не было денег. Но тут мне опять повезло. В 15 лет меня повезли в Одессу оперировать аппендицит. Я заявил родителям, что не лягу в больницу, пока мне не купят книгу по высшей математике. Родители согласились и купили курс высшей математики Беляева для вузов на украинском языке... Это была очень элементарная книга. Об уровне книги Беляева можно судить по введению к ней. В нем, в частности, говорилось, что функции бывают трех видов: аналитические, заданные формулами; эмпирические, заданные таблицами; корреляционные. Что такое корреляционные функции – я узнал много лет спустя у студента, занимавшегося теорией вероятности». Эта книга радикально

изменила представления пятнадцатилетнего юноши о математике. Перед тем он думал, что существуют две различные математики: алгебра и геометрия. А когда он увидел формулу разложения синуса в степенной ряд, он осознал, что между этими науками нет пропасти: «Когда я обнаружил, что синус можно записать алгебраически в виде ряда, барьер обрушился, математика стала единой. И по сей день я воспринимаю различные разделы математики вместе с математической физикой как единое целое».

Природа дала юноше мощный творческий импульс. Без учителей, без дома, без средств, вдали от родителей, без всякой поддержки он выучил математику настолько, что сумел поступить в аспирантуру Московского университета. Его руководителем стал Андрей Николаевич Колмогоров. В 1935 году Гельфанд защищает свою кандидатскую диссертацию, содержащую результаты, которые рассматриваются ныне как классика функционального анализа.

С той поры началась его блистательная творческая жизнь. Примечательной особенностью научной биографии И.М.Гельфанда является то, что он почти никогда не работал в одиночестве, а чаще всего со своими студентами, сотрудниками и коллегами.

В течение многих лет ярким явлением в жизни математиков Москвы (и не только Москвы) был знаменитый научный семинар И.М.Гельфанда, собиравшийся каждый понедельник по вечерам на мехмате МГУ. На этом семинаре обсуждались наиболее выдающиеся события современной математики. Докладчиками выступали крупные советские и зарубежные ученые, а участниками были как математические светила, так и аспиранты и студенты старших курсов. Для многих из них участие в семинаре послужило стартовой площадкой для самостоятельных исследований и открытий.

Попробуем выделить творческие периоды Гельфанда. Вначале появились работы в области классического функционального анализа, они были написаны без соавторов. Первым соавтором Гельфанда стал не кто иной, как его научный руководитель в аспирантуре А.Н.Колмогоров. По сути дела, их статья была первой работой по нормированным кольцам (или, по нынешнему, банаховым алгебрам). Этот цикл завершился знаменитой монографией трех авторов – Гельфанда, Райкова и Шилова – под названием «Нормированные кольца», которая совершила переворот во всем функциональном анализе. В военные годы Израиль Моисеевич обратился к теории представлений.

Это направление занимает одно из основных мест во всей научной биографии Гельфанда. В пятидесятые годы сфера деятельности Израиля Моисеевича резко расширяется. Это и обобщенные функции, и обратные задачи, и численные методы, и математическая физика, и случайные процессы... В эти годы начинается работа над монографической серией «Обобщенные функции». Она сыграла выдающуюся роль в развитии математики двадцатого столетия. Далее шла интегральная геометрия, бесконечномерные алгебры Ли, интегрируемые системы. Затем — комбинаторика, теория гипергеометрических функций. И все это в одной лишь математике. Кроме того, начиная с шестидесятых годов, Гельфанд концентрирует титанические усилия на проблемах биологии (математическая диагностика, теория движения, биология клетки).

Но вернемся к математике. Вот названия секций Международных математических конгрессов: 1) математическая логика и основания математики; 2) теория чисел; 3) геометрия; 4) топология; 5) алгебра; 6) комплексный анализ; 7) группы Ли и теория представлений; 8) вещественный и функциональный анализ; 9) теория вероятностей и математическая статистика; 10) обыкновенные дифференциальные уравнения и динамические системы; 11) математическая физика; 12) численные методы и теория вычислений; 13) дискретная математика и комбинаторика; 14) математические аспекты информатики; 15) приложения математики к нефизическим наукам; 16) история математики; 17) математическое образование. Нелегко назвать ту из перечисленных отраслей математики (за исключением первой), в которую Гельфанд не внес бы фундаментального вклада. При этом он является всемирно признанным мировым лидером в функциональном анализе, теории групп Ли и теории представлений. Невозможно не отметить его вклад в алгебру, геометрию, топологию, алгебраическую геометрию, теорию дифференциальных уравнений, математическую физику, численный анализ, приложения к нефизическим наукам. Такая широта почти не имеет примеров в науке последних веков.

Необычайность творчества Гельфанда — его поразительная разносторонность, соединенная с тем, что он сотрудничал и сотрудничает (занимая позицию лидера) с представителями многих поколений, старший из которых родился в 1907 году, а младшие — в шестиде-

сятые годы, т.е. диапазон в шестьдесят лет! Подобных примеров нет.

И еще одна несравненная особенность гельфандовской жизни в науке — это его невероятное долголетие: в этом году исполняется семьдесят лет его научного творчества на уровне высших достижений.

Как правило, творческий потенциал ученого подходит к концу, когда ему исполняется 60 лет, а интенсивная творческая деятельность длится два, три, ред-

ко четыре десятилетия. Проследим эволюцию числа работ Гельфанда от десятилетия к десятилетию. Когда ему исполнилось пятьдесят лет, он имел 132 работы, и это не вызывает особого удивления — это, можно сказать, нормально для математиков большого ранга. Когда ему исполнилось шестьдесят, число работ почти удвоилось и стало равно 246, а к его семидесятилетию оно выросло до 401 (более чем утроилось в сравнении с пятидесятилетием). У меня нет современных данных, но можно полагать, что число работ стало ныне около восьмисот. Причем это в подавляющем большинстве творческие работы, находящиеся на передовом рубеже современной науки.

С 31 августа по 4 сентября 2003 года в США, в здании Научного центра Гарвардского университета проходила Международная конференция

под названием «Единство математики», посвященная 90-летию И.М.Гельфанда. На этой конференции выступили с докладами двадцать пять выдающихся ученых. Сделал доклад и юбиляр. Его доклад назывался «Математика как адекватный язык». В нем Израиль Моисеевич коснулся тем, которыми он активно занимался в последние годы. В начале лекции им были произнесены такие слова: «Я не ощущаю себя пророком. Я ученик. Всю жизнь я учился у великих математиков, таких, как Эйлер и Галуа, у моих старших и младших коллег, у моих друзей и сотрудников, но больше всего — у моих учеников. В этом мой путь продолжения творчества».

Творческая жизнь Израиля Моисеевича Гельфанда продолжается.

Пожелаем ему здоровья, счастья и осуществления задуманного.



Гельфанд и школа

Е. ГЛАГОЛЕВА

В НАУЧНОМ МИРЕ ИЗРАИЛЬ МОИСЕЕВИЧ Гельфанд известен прежде всего как математик. Знают его также биологи (курьезно, что, когда появились работы Гельфанда по биологии, некоторые специалисты интересовались, имеет ли этот биолог какое-либо отношение к знаменитому математику Гельфанду). И почти совсем неизвестен Гельфанд-педагог.

Это естественно, так как у него нет теоретических работ по педагогике, он не разрабатывал программы, не писал школьные учебники. Его чрезвычайно интересные и, можно сказать, мудрые педагогические взгляды реализованы не в «бумажных трудах», а в обширной многолетней деятельности. И, конечно, в его учениках.

Не слишком преувеличивая, можно сказать, что учениками Гельфанда становились все, кому довелось с ним общаться. Будь то дело, сопровождающееся более-менее длительным общением, или единственный разговор, или даже простое присутствие при какой-то беседе — люди непременно в той или иной степени испытывали на себе его влияние.

В чем секрет такого воздействия на людей? Один человек, попавший в «сферу влияния» Гельфанда, сказал так: «Когда Гельфанд с тобой разговаривает, то чувствуешь, что в данный момент ты являешься для него самым интересным и важным человеком во всем мире». Такой интерес присущ Гельфанду всегда, и он сам неоднократно отмечал это несколько в другой форме, подчеркивая, что главная его сила — в умении всегда у всех учиться, в том числе учиться у своих учеников. А чтобы чему-либо научиться, нужно этим интересоваться.

И круг интересов Гельфанда воистину безграничен, и это тоже он считает очень важным, говоря, что ограниченность, замыкание только в узких рамках специальности для ученого — если не смерть, то хроническая болезнь, ведущая к преждевременному старению.

Эту точку зрения он высказывал прямо и проявлял в поступках. Так, однажды родители привели к нему маленькую девочку, третьеклассницу, которая решала трудные задачи по программе старших классов. Родители просили совета, как развить ее способности. Гельфанд посоветовал... отдать девочку в балетную школу. У родителей хватило ума, а может быть, и чувства юмора, последовать этому совету (правда, балетной школе они предпочли фигурное катание). Эта девочка потом успешно окончила физико-математическую школу и поступила на мехмат МГУ.

Другой пример: когда в знаменитой московской второй школе Израилю Моисеевичу предложили взяться за работу в двух 9-х классах, он прежде всего поинтересовался, какие учителя будут преподавать в этих классах литературу. Там работали два интереснейших учителя литературы (Ф.А.Раскольников и И.С.Збарский), совершенно разные по стилю преподавания, во многом даже антиподы. Гельфанд много разговаривал с этими учителями об учениках и уроках, участвовал в их горячих спорах. Как-то даже он организовал такой эксперимент: при изучении какой-то из тем учителя поменялись классами и потом все — и учителя, и ученики — обменивались впечатлениями, сравнивали, спорили.

Когда Гельфанд начал работать во второй школе, произошло очень важное событие: возникла идея организации заочной математической школы. Он писал об этом так: «Иван Георгиевич (Петровский, тогда ректор МГУ. — Е.Г.) просил меня присоединиться к Андрею Николаевичу Колмогорову по работе в школе-интернате при МГУ. После размышления я от этого отказался, так как считал, что в руководстве школой-интернатом мы берем на себя ответственность не только за математическую подготовку школьников, но и за их воспитание в сложных условиях — детей, вырванных из привычного круга семьи и собранных вместе. Взамен я предложил Ивану Георгиевичу организовать при его помощи заочную математическую школу, чтобы дать возможность ребятам с разных концов нашей страны, живущим в местах, где нет квалифицированных людей, подняться на высокий уровень. Эта идея мне особенно близка, так как я сам те годы, когда я сложился как математик, провел в глухой провинции, где кроме двух-трех книг и доброго отношения учителей не имел другой поддержки. Я понимаю, как трудно работать в таких условиях и сколько мы теряем из-за этого по-настоящему талантливых людей».

Роль Гельфанда в организации ЗМШ (заочной математической школы) охарактеризовать очень просто: он ее создал. Он развернул общую идею в конкретный план, нашел и «заразил» идеей людей, которые работали тоже не за страх, а за совесть. Сам Израиль Моисеевич сказал, что он не начнет дела, пока не найдется человек, который будет в полном его распоряжении и сможет ему помогать.

Вот тут-то мне и повезло: я оказалась в нужное время в нужном месте и в нужном состоянии. В то время я преподавала во втузе и только что после длительной болезни перешла на полставки, чтобы

немного окрепнуть и заняться семьей. И вместо этого, как в холодную воду головой, кинулась в работу с Гельфандом.

Было очень трудно, иногда до слез. Умела я тогда немного, а понимала еще меньше. Но я до сих пор с ужасом думаю: а что если бы я поддавалась уговорам и отказалась? Сколько бы я потеряла в жизни! Вероятно, все искупалось моим желанием работать с Гельфандом (хотя боялась я его до смерти) и, главное, меня захватила сама идея заочной школы.

Почти сразу я спросила: что, заочная школа будет «хронической олимпиадой» или действительно школой? Я получила твердый и быстрый ответ: это должно быть школа, где учатся, а не соревнуются. Я поняла один из важных принципов Гельфанда: «Все ученики разные. Некоторых надо подгонять, некоторых надо сдерживать, а некоторых надо оставлять в покое, чтобы они сами могли все продумать».

Именно такую атмосферу я встретила еще до открытия ЗМШ во второй школе. Занятия состояли из лекций – читал сам Гельфанд сразу для двух классов – и так называемых семинаров, которые по классам проводили «бригады» студентов мехмата МГУ: 5–6 человек с разных курсов на каждый класс. Их работой руководили сотрудники Израйля Моисеевича. На этих занятиях не было опроса, домашних обязательных заданий – просто давалось много разных интересных задач, трудных и не очень. При этом никакие оценки за эту работу не ставились, учеников никто не ругал, если они задач не решали. Эта обстановка добровольности, «необязательности» занятий имела целью показать ученикам, что можно заниматься математикой не для оценки и даже не для того, чтобы сдать экзамены в вуз, а просто для удовольствия. И конечно, по великому принципу Тома Сойера, именно этим занятиям школьники уделяли больше всего внимания.

В начале года было необязательным и посещение лекций самого Гельфанда. Правда, ходили почти все поголовно – да и как не пойдешь, если преподаватель литературы, он же классный руководитель, объявляя о том, что лекции необязательные, добавлял, что, конечно, вряд ли найдутся дураки, которые не пойдут слушать Гельфанда.

Считая, что главное – заинтересовать школьников математикой, но нужно в то же время следить, чтобы они не приучались к верхоглядству, Гельфанд говорил: «Есть опасность, что если рассказать ученикам слишком много трудного сразу, то с некоторого момента они сядут тебе на шею и перестанут понимать простейшие вещи». А спрашивать с них нужно еще меньше – но уж спрашивать дотошно, как сле-

дует. Поэтому постепенно характер занятий изменился. Но большинство школьников уже было «на крючке».

Например, одну из серий занятий (язык не поворачивается назвать их «лекциями») Израиль Моисеевич начал с вопроса: «Скажите, пожалуйста, что такое число?» А закончилась первая лекция задачей: «Докажите, что ноль только один».

На этих занятиях Израиль Моисеевич последовательно демонстрировал свой принцип: лучше понять немного, но до конца. Дойдя до какого-нибудь трудного места, он, зная, что оно не может быть понято сходу всеми, задавал попутный вопрос. Обычно все молчали, что выглядело как «Конечно, понятно». Тогда он поднимал с места кого-либо из не очень сильных (точнее, не из самых бойких) учеников, и начинался подробный разбор: «Я сказал то-то и то-то, понятно?» – Кивок. – «Прекрасно. Повтори». – Оказывается, не может. – «Пойдем к началу. А вот это –

понятно?» – Оказывалось, что не совсем. – «Так. А что именно непонятно?» – допытывался Гельфанд до тех пор, пока ученик не сформулировал конкретный вопрос. И тут Израиль Моисеевич обращался к «асам» – и оказывалось, что они просто не обратили внимание на это.

Теперь и задачи на лекциях и на семинарах надо было решать и «сдавать» руководителям семинаров. Но и опрос и зачеты Гельфанд облекал в какую-нибудь необычную форму. Например, после разбора первой группы аксиом про числа он дал задание написать «учебник» алгебры для VI класса; для тренировки с кванторами надо было написать все возможные варианты фразы «Ученики должны показывать тетради учителям», записать эти фразы словами, найти эквивалентные и т.д.

При этом важно, что не было каких-то жестких сроков решения задач, никто не «ловил» ученика на том, что он сегодня не выучил урока. Просто, например, один из студентов радостно говорил мне: «Елена Георгиевна, отметьте: Маша Петрова «отфибоначчилась». (Это значило, что Маша сдала ему решение задачи про последовательности Фибоначчи.)

Была серия «задач-жемчужин», среди них, в частности, задача о жадном дачевладельце (по сути дела о построении канторова множества), задача о том, как замостить треугольник отрезками, и другие. Опять каждый выбирал задачу, которую хотел решать, и возился с ней.

Конечно, можно было узнать решение у товарищей. И возможно, что кто-то это делал. Но молчал – потому что это было стыдно. Считалось неприличным не то, что ты не можешь решить задачу, а то, что ты



спрашиваешь, как решать. Спросить можно было о том, что непонятно в условии, можно было советоваться с товарищами и с преподавателями, обсуждать возникающие идеи.

Постепенно школьники начинали понимать, что одна задача, которая сначала не получается, а потом наконец решается, ценнее и, главное, интереснее, чем десять «отщелканных» стандартных примеров.

Занятия во второй школе (а позже и в ЗМШ) основывались на убеждении, что успешное обучение возможно только при активном желании ученика («Насильно можно научить только зайца спички зажигать»). Как же возникает такое желание?

Кто-то в моем присутствии спросил у Гельфанда, как надо пробуждать и развивать интерес к математике у школьников. Он ответил, почти не задумываясь: надо давать им хорошие задачи. Я со свойственным мне занудством спросила: «А какие это – хорошие задачи?» Гельфанд подумал секунд пять и сказал: «Хорошие задачи – это интересные и легкие».

Тут стоит упомянуть любимый Израилем Моисеевичем рассказ Чехова о котенке, которого насильственно учили ловить мышей. Котенок, став солидным котом, при виде мыши впадал в панику и удирал. Таким, увы, часто бывает и результат обучения математике. И не только математике: мне встречались люди, окончившие музыкальную школу и после этого ни разу не подходившие к роялю.

И речь идет не о подготовке будущих математиков. Гельфанд не раз говорил, что математика является таким же важным компонентом культуры, как, например, и музыка. Человек, умеющий слушать музыку, получает от этого удовольствие, хотя вовсе не обязан быть музыкантом. Если же музыка для него не существует – огромная часть культуры для этого человека потеряна, и духовный мир его обеднен. В этом смысле математика нужна каждому человеку, пусть она и не понадобится ему в своей прикладной ипостаси.

В первые годы работы ЗМШ в ней почти с точностью повторилась структура работы во второй школе: вместо лекций – пособия, написанными Гельфандом и другими, «семинары» по решению задач проходили заочно по заданиям, составленным сотрудниками ЗМШ, а непосредственно «работали» со школьниками, проверяя их работы, разбирая ошибки и давая указания по их исправлению, опять-таки студенты мехмата.

Среди начальных лекций во второй школе были две любимые темы Гельфанда: «Четырехмерный кубик» и «Волшебная сберкасса». Материал одной из них вошел в первое пособие ЗМШ «Метод координат», составив, как говорил Израиль Моисеевич, «второй план» этой книги. Вторая тема входит в пока не изданную вторую часть книги «Функции и графики».

Одно из важных положений «педагогике по Гельфанду» сам Гельфанд сформулировал так: «В математике новому надо учить на простых вещах, знакомых ученикам».

В связи с этим он часто рассказывал такую историю: «В пятидесятые годы были вечерние школы для взрос-

лых. Можно представить себе, как трудно было учиться этим людям, далеко не школьного возраста, имеющим, как правило, только начальное образование. Но и учить их было делом не простым. Вот в такую школу устроился преподавать математику мой знакомый, а со мной стал заниматься наукой. Однажды он пришел ко мне очень усталый и огорченный и стал жаловаться, что его ученики ничего не понимают. – А что вы сейчас проходите? – Дроби, сравнение дробей. – Так. И чего же они не понимают? – Да ничего! Что больше: $2/3$ или $3/4$, определить не могут, хотя я им все растолковал. – А что больше – половина или четверть, они могут сказать? – Это да, могут. – А что больше – половина или треть? – Думаю, что тоже могут. – Ну, – говорю, – тогда на следующем занятии дай им такую задачу: что лучше – 2 пол-литра на троих или 3 пол-литра на четверых? В следующий раз спрашиваю: – Ну как, сообразили? – Мгновенно!»

По сути дела, прием такого рода был повторен Гельфандом во второй школе, когда он, готовясь ввести ϵ - δ -определение предела, стал учить ребят употреблению кванторов. Он пришел на лекцию и сказал: «Я ввожу правило: ученики должны показывать свои тетради учителям. Понятно?» Никто не возразил. Тогда Гельфанд показал, что в таком виде эта фраза не имеет точного смысла: ученик и учитель могут истолковать ее по-разному. Такой перебор всех сочетаний кванторов применяли и раньше в некоторых математических школах. Но там смыслу фраз учились сразу на последовательностях и ϵ - δ , т.е. на вещах, которые школьники еще не усвоили.

В первом пособии ЗМШ «Метод координат», которое Гельфанд написал со своими учениками и коллегами, он включил задание на уравнения с модулями: первое было $|x + 1| + |x - 1| = 3$, в следующих двух менялась правая часть, а в следующих трех вместо плюса стоял минус. Перепечатывая текст, я, гордясь своей педагогической «просвещенностью», «поправила» Гельфанда, заменив единицы на разнообразные числа, чтобы, как мне казалось, не приучать детей к стандартному мышлению. Израиль Моисеевич меня страшно разругал, сказав, что его возмущают школьные задачи, в которых вместо того чтобы понять суть дела, ученикам приходится тратить время на сложные вычисления и преобразования. «В результате, – сказал он, – сам учитель не сразу поймет, в чем именно ученик сделал ошибку».

Это вовсе не означает, что Гельфанд не понимал важности приучения школьников к тщательному и ответственному выполнению рутинной работы. Напротив, он постоянно говорил, что для математика «грязная» работа недопустима, что если человек не в состоянии написать аккуратно страницу, если в тетради не поймешь, где начало и где конец примера, если, решив трудную задачу, вдруг получают неверный ответ, потому что $7 \times 8 = 59$, и т.д., то из занятий математикой, скорее всего, ничего не выйдет. «Может быть, и есть такие науки, в которых грязь нужна – говорят, от грязи микробы дохнут... Но в математике грязь противопоказана.» Он приносил и

показывал ребятам свои рабочие записи: всегда в тетради, неверные или ненужные места зачеркнуты, но аккуратно. Он говорил: «Я всегда, не бывая на уроке, могу сказать, будут ли у этого учителя ученики знать математику или нет: надо просто посмотреть их тетради».

Эта сторона обучения очень сильно работает в ЗМШ. Ведь там учащиеся ежегодно должны выполнить 7–8

заданий по специально написанным пособиям. Каждое задание состоит из двух (а то и трех) десятков задач, решить которые можно, изучив соответствующий текст пособия и разобрав примеры. А потом свои решения нужно записать с полным обоснованием. «В конце концов, — писал Гельфанд, — большинство учащихся заочной школы научаются не «отбалтываться», а по-настоящему работать».

НОВОСТИ НАУКИ

Нобелевская премия по физике

7 ОКТЯБРЯ 2003 ГОДА КОРОЛЕВСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК Швеции присудила Нобелевскую премию по физике 2003 года «За пионерский вклад в теорию сверхпроводников и сверхтекучих жидкостей».

Лауреатами премии стали:

А.А.Абрикосов, академик Российской академии наук, работающий в настоящее время в Аргоннской национальной лаборатории в штате Иллинойс, США:

В.Л.Гинзбург, академик Российской академии наук, работающий в Физическом институте им. П.Н.Лебедева РАН, Москва, Россия;

Э.Дж.Леггет, профессор из Университета Иллинойс, США, иностранный член Российской академии наук.

Физика низких температур — одна из самых важных и интересных областей современной теоретической и экспериментальной физики. Сверхпроводимость в металлах была открыта еще в 1911 году, сверхтекучесть гелия-4 — в 1938, гелия-3 — в 1972 году. Все эти открытия были результатами экспериментальных работ. Создание теории этих уникальных явлений потребовало довольно много времени и сил.

Виталий Лазаревич Гинзбург — один из крупнейших физиков России, выдающийся специалист во многих областях теоретической физики и астрофизики. Еще в 1950 году он написал вместе с Л.Д.Ландау работу, в которой было сформулировано знаменитое уравнение (Гинзбурга — Ландау). Теория Гинзбурга — Ландау стала основой для феноменологической теории сверх-

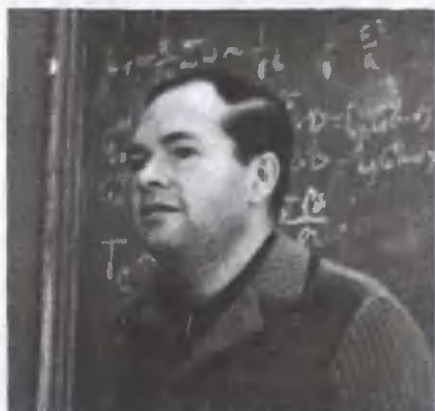
проводимости, а затем была распространена на другие области физики — в частности, космологию и теорию нейтронных и кварковых звезд.

Именно на этой основе оказалось возможным развить теоретические представления о большом классе сверхпроводников, в которых сосуществует сверхпроводимость и сильное магнитное поле. Такие сверхпроводники называются сверхпроводниками второго рода, и они отличаются от сверхпроводников первого рода, из которых магнитное поле «выталкивается».

Теория сверхпроводников второго рода была построена Алексеем Алексеевичем Абрикосовым и сыграла определяющую роль в изучении важнейшего класса природных сверхпроводящих материалов. Сейчас эти теоретические представления получили дальнейшее развитие и широко используются, например, в теории высокотемпературной сверхпроводимости.

Энтони Леггет — один из создателей теории сверхтекучести в жидком гелии-3. Это квантовое явление было открыто П.Л.Капицей в жидком гелии-4 и объяснено Л.Д.Ландау и Р.Фейнманом. Открытие сверхтекучести в гелии-3 и объяснение этого явления — очень важный этап низкотемпературных исследований. Теория сверхтекучести в гелии-3 оказалась намного сложнее соответствующей теории для гелия-4.

Все лауреаты премии 2003 года много сделали и в других областях физики. Все они — выдающиеся физики, продолжающие активно работать. Редакционная коллегия и редакция журнала «Квант» присоединяются к многочисленным поздравлениям лауреатам.



А.А.Абрикосов



В.Л.Гинзбург



Э.Дж.Леггет

Как быстрее спуститься на лифте в час пик

К. БОГДАНОВ

МЫ ВСЕГДА КУДА-ТО ТОРОПИМСЯ, СПЕШКА уже стала признаком деловитости. И поэтому не удивительно, что наше стремление не опоздать часто сталкивается с аналогичным желанием других людей. Как правило, это происходит утром, когда мы все идем на работу или учебу. Многих из нас, кто живет в многоэтажных домах, спешка охватывает уже на лестничной площадке, когда мы вызываем лифт, чтобы спуститься на первый этаж и выйти из дома. Мы смотрим на часы, понимая, что опять опаздываем, и если подъезд обслуживают два лифта, то, чтобы лифт пришел быстрее, нажимаем обе кнопки.

Итак, казалось бы, мы сделали все, чтобы как можно быстрее спуститься на первый этаж. Но так ли это?

Забегая вперед, успокою всех тех, кто нажимает обе кнопки днем или поздно вечером. Действительно, вызывая сразу оба лифта не в часы пик, вы ускоряете свой спуск вниз. Однако одновременный вызов всеми двух лифтов в часы пик не только не дает выигрыша, но может даже удлинить ожидание на лестничной площадке. Думаю, что у большинства читателей такое предостережение «нажимающим две кнопки» вызвало улыбку. По их мнению, этого просто не может быть!

Что общего между рыбалкой и вызовом лифта?

А вот и простой довод в защиту «нажимающих две кнопки» – нажимая обе кнопки, мы увеличиваем в два раза вероятность того, что хотя бы один лифт появится в течение, скажем, одной минуты после нажатия кнопок. Другими словами, рыбак с двумя удочками скорее поймает свою первую рыбку, чем рыбак, у которого только одна удочка. Но верно ли такое сравнение? Если и есть аналогия между вызовом обоих лифтов и рыбной ловлей, то она довольно необычная. Во-первых, рыбок (лифтов) в пруду должно быть только две, а во-вторых, каждый поймавший рыбку должен отпустить ее обратно в пруд, затратив на это какое-то время (открывание и закрытие дверей). А что если все рыбаки закинут по две удочки (нажмут две кнопки)? Быстрее ли они поймут такую «золотую» рыбку, плывущую вдоль берега пруда туда и обратно?

Наверное, я уже достаточно запутал читателя, и пришло время обратиться за помощью к компьютеру. Очевидно, что вопрос «о двух кнопках» не единственный, на который мог бы ответить компьютер. А как, например, зависит время ожидания лифта (ВОЛ) от этажности дома и от того, с какого этажа сделан вызов? Как изменяется ВОЛ при постановке одного из лифтов



на плановый ремонт? Когда ВОЛ начинает зависеть от грузоподъемности лифта?..

Устроим все так...

Чтобы ответить на некоторые из этих вопросов, попробуем смоделировать события, происходящие при эксплуатации лифта в течение часа (с 8 до 9 утра, например), когда на каждую из 16 лестничных площадок подъезда 17-этажного дома выходят 8 человек и вызывают лифт (один или оба), чтобы спуститься на первый этаж. Будем считать, что если в момент очередного вызова лифт уже двигался (выполняя один из предыдущих вызовов), то новый вызов заносится в память лифтового компьютера, который составляет очередь заказов для последующего выполнения. Каждый из двух лифтов обладает информацией только об очередности своих будущих заказов и ничего не знает о том, где находится и какие заказы выполняет другой лифт. Поэтому один из лифтов может прибыть на этаж по вызову спустя, например, одну секунду после того, как всех людей оттуда забрал другой лифт. Другими словами, наши лифты лишены какого-либо интеллекта.

Рассмотрим две ситуации, в первой из которых вероятность появления человека у лифта будет постоянна, т.е. не будет зависеть от времени в течение данного часа (см. «равномерное» распределение на рисунке 1,а), а во второй она будет максимальна в середине часа, т.е. в 8 ч 30 мин (см. «нормальное» распределение на рисунке 1,б). Зададим также следующие параметры лифта: скорость $v = 0,5$ этаж/с; время на открывание и закрывание дверей $T = 10$ с; грузоподъемность – 4 человека. Для простоты допустим, что в 8:00 оба лифта находятся на первом этаже и ждут вызова.

Теперь попросим компьютер выдать «случайную» последовательность появления людей в лифтовых холлах на всех этажах подъезда, а первого из них – нажать на кнопки вызова лифта. Не принуждая к выбору того или иного лифта, мы лишь будем «следить», одну или обе кнопки нажал «человек», и вычислять время ожидания им лифта, а также остальные параметры его эксплуатации. При этом мы сможем управлять средней величиной отношения случаев, когда были нажаты обе кнопки, к общему числу вызовов лифтов.

Итак, эксплуатация лифтов началась. Для простоты будем считать, что первый этаж имеет номер 0, второй – номер 1 и т.д. (Кстати, такая нумерация принята в некоторых странах Европы и Северной Америки, где первый этаж в нашем понимании называют «земляным».) Тогда очевидно, что ВОЛ человеком, который самым первым вышел из своей квартиры в подъезде, равно отношению номера этажа F , где расположена его квартира, к скорости движения лифта v . Если за время ожидания лифта на лестничную площадку выйдет еще кто-нибудь, то ему (или ей) повезет, так как соответствующее ВОЛ будет меньше, чем у человека, уже вызвавшего лифт. На посадку уходит T секунд, после чего лифт начинает движение вниз. Приближаясь к каждому этажу, компьютер лифта проверяет, есть или

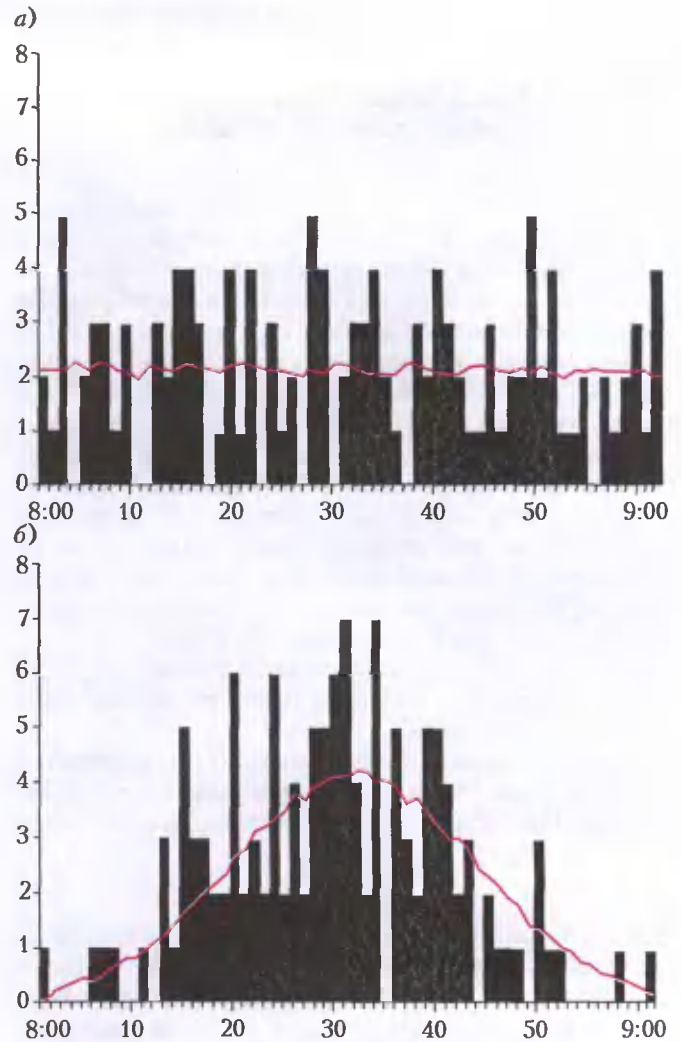


Рис.1. Зависимость количества жильцов (вертикальная ось), выходящих на лифтовые площадки 17-этажного дома каждую минуту, от времени между 8:00 и 9:00 утра (горизонтальная ось, в минутах). Черные столбцы – пример для одного из 365 дней года; красная кривая – усредненное по 365 дням значение. Время выхода жильцов на лифтовые площадки задавалось генератором случайных чисел компьютера, предполагая их равномерное распределение (а) или нормальное распределение (б). С каждого этажа в течение этого часа лифт вызывают 8 человек

нет вызова с данного этажа, и если есть, то останавливается, открывает и закрывает двери, после чего продолжает движение. Достигнув уровня нулевого этажа, все пассажиры лифта выходят, а наш компьютер заносит в память, сколько он проехал этажей, какое потратил время и какова была загрузка во время данного рейса. Кроме этого, для каждого из исполненных вызовов программа вычисляет ВОЛ, хранит в памяти информацию о том, одна или обе кнопки были нажаты, а также с какого этажа был сделан вызов. После этого лифт готов подняться по очередному вызову, и так происходит, пока все вызовы, поступившие в течение часа, не будут исполнены.

Для того чтобы сделать результаты такого моделирования более достоверными, попросим компьютер проследить за этим часом работы двух лифтов в течение 365 дней, каждый раз случайным образом задавая

последовательность выхода людей из своих квартир, а полученные данные усреднить.

Жмем только одну кнопку и рассуждаем об очереди

Сначала посмотрим, сколько времени (в среднем) люди ждут прихода лифта. Как показало моделирование, если жильцы 17-этажного дома вызывают только один из двух лифтов и их выбор равновероятен, то средняя величина ВОЛ составляет 59 и 180 секунд для распределений, изображенных на рисунках 1,а и 1,б соответственно. Очевидно, что трехкратное увеличение ВОЛ при «нормальном» распределении моментов выхода людей к лифту вызвано более чем двукратным увеличением числа людей, вызывающих лифт в минуты, близкие к середине часа, по сравнению с «равномерным» распределением. Отметим, что даже при «равномерном» распределении, когда каждую минуту в среднем 2,1 человека вызывают лифт, почти всегда существует очередь, состоящая из нескольких вызовов. Заметим, что здесь речь идет об очереди вызовов лифта, хранящейся в его компьютере, а не о группах людей, ожидающих вместе на одной лестничной площадке прихода лифта.

Если бы очереди не существовало, а количество этажей в доме было N , то, как легко подсчитать, среднее ВОЛ достигло бы своего минимума и составило

$$\min(\text{ВОЛ}) = \frac{N}{2v}. \quad (1)$$

Для 17-этажного дома $\min(\text{ВОЛ}) = 17$ с (а не 59 с, как на самом деле). Возникновение очереди связано с тем, что среднее время обслуживания одного пассажира, равное $2 \min(\text{ВОЛ}) + 2T = 54$ с, почти в два раза превышает среднее время между вызовами лифта (28 с). Существование двух лифтов не спасает положения, так как, нажимая на кнопку, мы не знаем, свободен лифт или нет. Очевидно, что с ростом этажности дома увеличивается и очередь ожидающих вызовов, а вместе с ней — и среднее ВОЛ, если количество жильцов на этаже и характеристики лифта остаются прежними.

Вот как выглядит зависимость времени ожидания лифта от этажности дома при вызове одного из двух лифтов (моменты выхода в лифтовый холл имеют равномерное распределение):

Количество этажей	8	13	17	21
Среднее время ожидания, с	13	29	59	197

Как и следовало ожидать, ВОЛ растет от 13 с для 8-этажного дома до 197 с в 21-этажном доме.

В отсутствие очереди ВОЛ должно линейно зависеть от номера этажа F , с которого делается вызов, так как лифт всегда приходит с этажа «0» и затрачивает на это F/v секунд. Однако реальная зависимость ВОЛ от номера этажа далека от линейной. На рисунке 2 приведены данные компьютерного моделирования, показывающие, что для всех этажей реальная кривая лежит гораздо выше той, которая соответствует отсутствию очереди. Бросается в глаза непропорциональное увели-

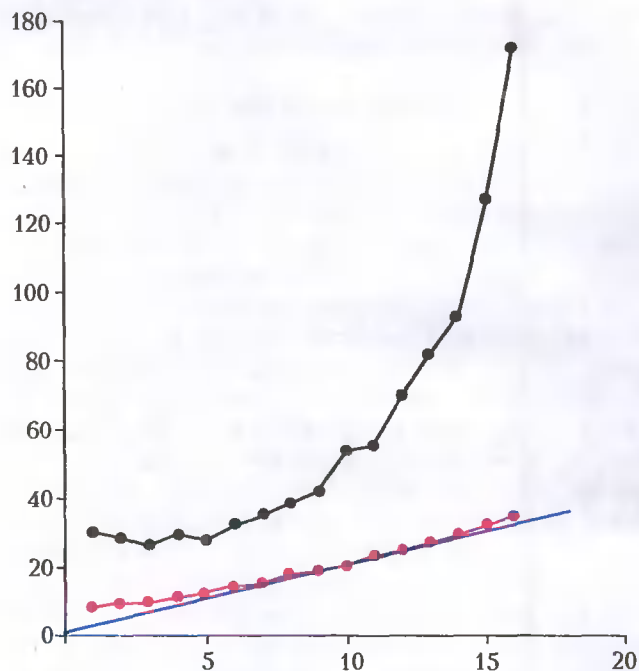


Рис.2. Зависимость среднего времени ожидания лифта (вертикальная ось, в секундах) от номера этажа (горизонтальная ось), с которого был сделан вызов. Данные получены с помощью компьютерного моделирования и усреднения по 365 дням для 17-этажного дома, предполагая равномерное распределение моментов появления жильцов на лифтовых площадках и вызов ими одного из двух лифтов. Черная кривая соответствует случаю, когда количество жильцов, вызывающих лифт с каждого этажа, равно 8; красная — то же, но когда количество жильцов, вызывающих лифт с каждого этажа, уменьшается с 8 до 2 человек. Синяя прямая — минимально возможное время ожидания лифта, соответствующее отсутствию очереди

чение ВОЛ для верхних этажей дома — оно достигает почти трех минут для этажа «16». Все это говорит о том, что от очереди лифтовых вызовов страдают жильцы всех этажей, но особенно те, кто живет наверху.

Посмотрим, как будет зависеть ВОЛ от номера этажа в дождливый воскресный день, когда большинство жильцов предпочтут остаться дома и только 25% выйдут из дома. Очевидно, что в этом случае очередь из вызовов должна значительно укоротиться, а зависимость ВОЛ от номера этажа — приблизиться к линейной. Как показало компьютерное моделирование, «воскресная» зависимость (красная кривая на рисунке 2) действительно очень близка к зависимости минимального ВОЛ от номера этажа, проходя выше лишь на несколько секунд. Таким образом, даже если в течение часа один из двух лифтов вызывают только 32 человека, их вызовы, тем не менее, могут накладываться друг на друга, образуя очередь, и в результате среднее (за 365 «воскресений») ВОЛ становится слегка выше его минимального значения.

Почему наверху лифт приходится ждать дольше

Как иллюстрирует черная кривая на рисунке 2, жители верхних этажей нашего дома могут раз в пять дольше ждать лифта, чем жители первых 8–10 этажей. И дело здесь конечно не в том, что лифт дольше идет

до верхних этажей, чем до нижних, — эта «кинематическая» разница составляет не более 30 секунд. Откуда же берутся еще 110 секунд задержки в обслуживании жильцов верхних этажей? Ответ тот же — очередь. Оказывается, очередь для вызовов, поступивших с верхних этажей, всегда длиннее. И вот почему.

Очевидно, что для «равномерного» распределения вероятность того, что нажавший кнопку вызова через время F/v увидит перед собой открывающиеся дверцы лифта, не зависит от номера этажа F , а равна отношению времени, которое лифт проводит на этаже «0» в ожидании вызовов, к суммарному времени его работы, т.е. к 3600 секундам. Однако сесть в лифт можно не только в тот, который сам вызвал, но и в опускающийся сверху и проходящий мимо твоего этажа. Здесь-то и становится заметным преимущество тех, кто живет в нижних этажах, — они садятся в лифты, соответствующие более ранним заказам, но сделанным жильцами более высоких этажей. Возможность сесть в проходящий лифт укорачивает очередь лифтового компьютера, но «усиливает» несправедливость для жителей верхних этажей — их вызовы продолжают накапливаться в его памяти. Это и является причиной непропорционально большого роста ВОЛ для тех, кто живет близко к крыше, объясняя зависимость, полученную при моделировании (см. черную кривую на рисунке 2).

Попробуем вызывать сразу оба лифта

Ну, а теперь попросим всех жильцов нажимать обе кнопки вызова лифта. Как я и предупреждал, компьютерное моделирование показывает, что вызов одновременно двух лифтов не ускорит приход на работу или учебу жильцов нашего 17-этажного дома, а среднее ВОЛ при этом увеличится с 59 до 70 секунд. «Ну и что? А вдруг это ошибка программы?» — скажет читатель. Действительно, трудно поверить, что, вызывая оба лифта, мы делаем себе хуже. Но отмечу, что выигрыш от нажатия обеих кнопок исчезает только в том случае, когда ВСЕ нажимают обе кнопки.

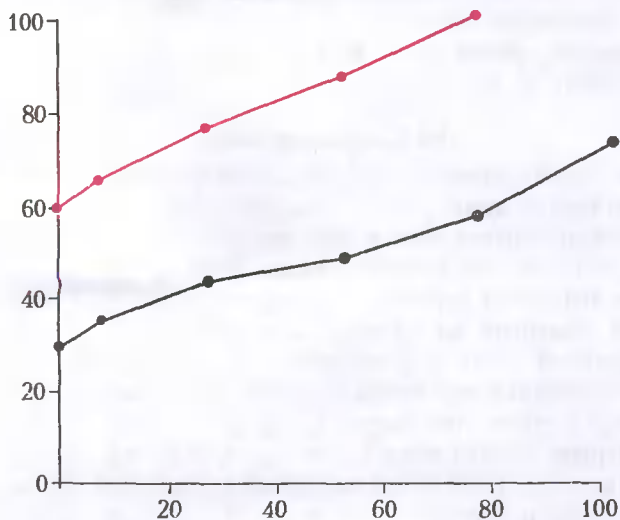


Рис.3. Зависимость времени ожидания лифта (вертикальная ось, в секундах) от доли жильцов (горизонтальная ось, в процентах), вызывающих сразу оба лифта. Красная кривая — для тех, кто вызывает только один лифт; черная — для вызывающих оба лифта

Когда же процент жильцов, вызывающих сразу оба лифта, невысок (от 1 до 5%), то эти жильцы почти в два раза меньше, чем остальные, ждут прихода лифта — см. черную кривую на рисунке 3. Посмотрите теперь на красную кривую на рисунке 3 — она показывает, как страдают от того, что кто-то вызывает сразу два лифта, те, кто по-прежнему нажимают только одну кнопку. Видно, что выигрыш тех немногих, кто нажимает обе кнопки, происходит за счет замедления обслуживания остальных жильцов.

Из рисунка 3 видно, что когда 80% жильцов жмут на обе кнопки, они уже ничего не выигрывают по сравнению с тем случаем, когда все вызывают только один какой-нибудь лифт. Почему же с ростом числа людей, вызывающих оба лифта, их обслуживание может замедлиться? Ответ очень прост. Нажимая обе кнопки, мы искусственно увеличиваем длину очереди для жильцов, выходящих к лифтовым холлам позже нас. А если кто-то нажал обе кнопки на другом этаже до того, как это сделали мы, то длина очереди увеличивается и для нас.

Однако такая несправедливость при нажатии обеих кнопок — когда одни лезут без очереди, а вторые страдают от этого — исчезает, когда очереди на обслуживание нет, т.е. при относительно редком появлении жильцов на лестничных площадках. Например, если, спускаясь вниз поздно вечером, все подписчики вечерних газет (25% всех жильцов) будут нажимать на обе кнопки, то они в среднем будут ждать лифта только 13 секунд, по сравнению с 19 секундами в случае вызова одного лифта. По той же причине в выигрыше от одновременного нажатия двух кнопок будут и жители малоэтажных домов. Моделирование показало, что наибольший выигрыш от нажатия двух кнопок в этих случаях получают жители верхних этажей. Рисунок 4 демонстрирует, что для вызовов с этажа «16» нажатие двух кнопок позволяет сократить ВОЛ с 35 до 24 секунд. В то же время, одновременный вызов двух

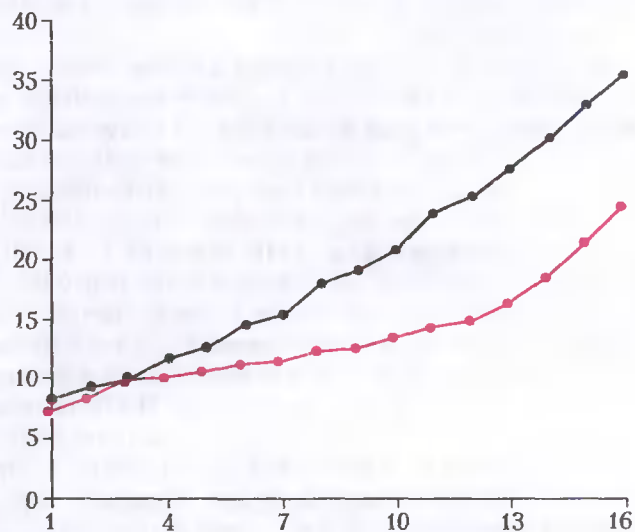


Рис.4. Зависимость времени ожидания лифта (вертикальная ось, в секундах) от номера этажа (горизонтальная ось), с которого сделан вызов, для «подписчиков вечерних газет», когда количество вызовов в час с каждого этажа сокращается с 8 до 2. Черная кривая — при вызове одного из двух лифтов; красная — при одновременном вызове обоих лифтов

лифтов с первых 4 этажей практически не дает никакого выигрыша по сравнению с вызовом одного из них. Более того, среднее значение ВОЛ для этажа «16» становится на 8 секунд меньше, казалось бы, минимальной величины ВОЛ, равной $F/v = 32$ с. Неужели компьютерная программа нас водит за нос? Нет! Просто формула для минимального значения ВОЛ была нами выведена для вызова одного лифта, а для вызова обоих она несправедлива. И вот почему.

При нажатии каждым только одной кнопки лифт на последний этаж может прийти только с этажа «0». Если все нажимают по две кнопки, то где-то ниже этажа «16» обязательно возникнет ситуация, когда пустой лифт придет по вызову, а пассажира, сделавшего вызов, уже не будет, так как он уехал на прибывшем ранее другом лифте. В этом случае лифт останется на данном этаже ждать следующего вызова, и если он будет с этажа «16», то ВОЛ будет ниже $16/v$, так как лифту потребуется меньше времени, чтобы добраться до этажа «16». Поэтому по воскресеньям нажатие двух кнопок и дает больше преимуществ жильцам верхних этажей.

Но за воскресеньем всегда приходят будни, а с ними – и очереди лифтовых вызовов. Вот как выглядит зависимость ВОЛ при нажатии обеих кнопок от этажности дома:

Количество этажей	8	13	17	21
Среднее время ожидания при вызове обоих лифтов, с	7	22	70	336
Среднее время ожидания при вызове одного из двух лифтов, с	13	29	59	197

Если верить результатам компьютерного моделирования, приведенным в этой таблице, то жильцам многоэтажных домов с количеством этажей 17 и выше не выгодно вызывать два лифта сразу, так как среднее ВОЛ при этом возрастает по сравнению со случаем нажатия только одной кнопки.

Этот результат уже не кажется удивительным, так как несколько раньше мы с читателем пришли к заключению, что вызов обоих лифтов ускоряет обслуживание только тогда, когда средний интервал между выходами жильцов из своих квартир (СИВ) превышает среднее время их обслуживания лифтом (СВО). Для восьмизэтажного дома СИВ равен 64 с, а СВО можно вычислить прибавив к двум минимальным ВОЛ удвоенное время открывания-закрывания дверей, что дает 36 с. Значительное превышение СИВ над СВО не дает возникнуть очереди в 8-этажном доме и делает выгодным нажатие сразу двух кнопок. В 17-этажном доме СИВ равен 28 с, составляя только половину соответствующей величины СВО (54 с), что и служит причиной возникновения длинных очередей, делая одновременный вызов обоих лифтов невыгодным.

Жильцам верхних этажей опять не везет

Мы уже знаем, что жильцы верхних этажей вынуждены простаивать в ожидании лифта гораздо дольше,

даже если все в подъезде вызывают только один из двух лифтов. Не везет им и в том случае, когда все жмут две кнопки. Как зависит ВОЛ от номера этажа в 17-этажном доме, показано на рисунке 5. Видно, что одновременный вызов двух лифтов позволяет жильцам нижних этажей (вплоть до «11») уменьшить ВОЛ, однако начиная с этажа «13» то же приводит к противоположному результату, а для жильцов этажа «16» нажатие двух кнопок приводит к увеличению ВОЛ почти в два раза.

Причиной такой несправедливости по отношению к жителям верхних этажей является то же, что делало несправедливым наше «лифтовое» общество, когда все вызывали только один из двух лифтов, т.е. очередь. Для многих вызовов с нижних этажей она отсутствует

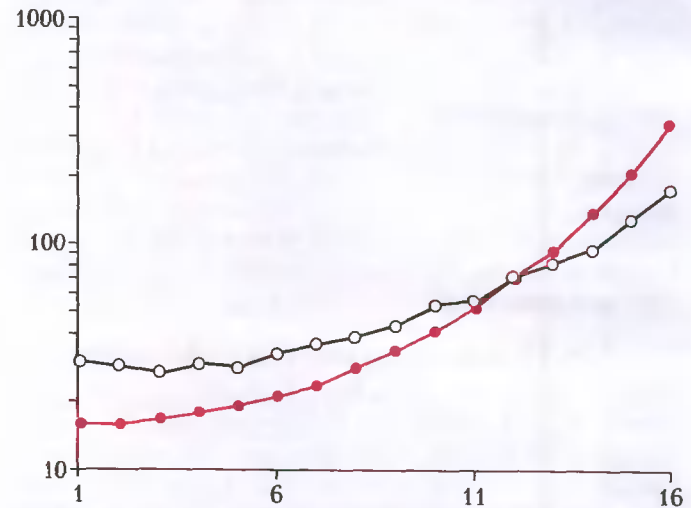


Рис.5. Зависимость времени ожидания лифта (вертикальная ось, в секундах) от номера этажа (горизонтальная ось), с которого он вызван. Черная кривая – все жильцы вызывают один из двух лифтов; красная – все вызывают оба лифта

или очень невелика, так как можно «пройти без очереди», воспользовавшись проходящим мимо лифтом. Жильцы верхних этажей пройти без очереди не могут и вынуждены отстоять ее всю. Поэтому, когда все начинают давить сразу на обе кнопки, больше всего страдают те, кто сверху.

Подведем итоги

Компьютерное моделирование эксплуатации лифта в 17-этажном доме, где на каждом этаже 8 человек, чтобы спуститься вниз, вызывают лифт в течение часа, убедило нас, что вызывать сразу два лифта выгодно, если это делает небольшая группа людей (1–5%). При этом выигрыш во времени ожидания лифта у этой маленькой группы достигается за счет замедления обслуживания остальных жильцов. Когда число вызывающих сразу два лифта вырастает до 50%, то их выигрыш уменьшается вдвое. Ну а если обе кнопки нажимают все, то время ожидания лифта даже увеличивается, и особенно для жителей верхних этажей. Таким образом, стратегия, приносящая выигрыш, перестает быть таковой, когда она охватывает все общество.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 2004 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1-2004» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1891» или «Ф1898». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1891–М1900, Ф1898–Ф1907

М1891. Среди n рыцарей каждые двое – либо друзья, либо враги. У каждого из рыцарей ровно три врага, причем враги его друзей являются его врагами. При каких n такое возможно?

Е. Барabanов, И. Воронович

М1892. В треугольнике ABC угол C равен 45° . Докажите, что

$$AB^4 = (BC^2 - AB^2)^2 + (CA^2 - AB^2)^2.$$

А. Румянцева (ученица 10 кл.)

М1893. В круге проведены 100 хорд так, что середина любой из них принадлежит какой-либо другой из этих хорд. Докажите, что среди них найдутся два диаметра.

В. Произволов

М1894. Пусть m, n – натуральные числа, $n > 1$. Известно, что число

$$m^2 n^2 - 4m + 4n$$

является точным квадратом. Докажите, что $m = n$.

Н. Осипов

М1895. В квадрат $ABCD$ вписан треугольник MAN такой, что $\angle MAN = 45^\circ$ (рис. 1). Докажите, что диагональ квадрата BD делит треугольник на две части равной площади.

В. Произволов

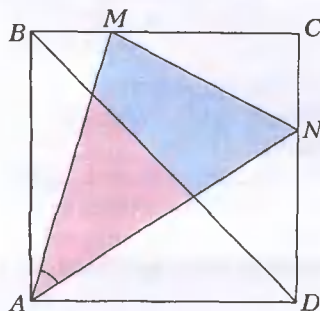


Рис.1

М1896. На квадратном холсте со стороной $2n + 1$ (n – натуральное число) художник нарисовал картину черной краской. При этом оказалось, что в каждом квадрате 2×2 , стороны которого параллельны сторонам холста, покрашено в черный цвет а) не менее $3/4$ его площади; б) не более $3/4$ его площади. Какую наименьшую площадь в случае а) и какую наибольшую площадь в случае б) мог закрасить художник на холсте черной краской?

А. Малеев

М1897. На числовой прямой отмечены точки с координатами $1, 2, 3, \dots, 2n$. Блоха за $2n$ прыжков побывала во всех отмеченных точках и вернулась в исходную точку. При этом любые два последовательных прыжка были противоположно направлены. Известно, что сумма длин всех прыжков блохи за исключением последнего равна $4n - 3$. Докажите, что длина последнего прыжка равна $2n - 1$.

В. Произволов

М1898. $ABCD$ – прямоугольник. Сторона AD точками A_1, A_2, \dots, A_{n-1} разделена на n отрезков. На стороне BC отмечены точки B_1, B_2, \dots, B_n , некоторые из которых или даже все могут совпадать. Проведем в прямоугольнике зигзагообразную – ломаную $A_0 B_1 A_1 B_2 \dots A_{k-1} B_k A_k B_{k+1} \dots A_{n-1} B_n$, возможно, самопересекающуюся, где A_0 – это A , A_n – это D . Как следует выбрать точки A_k, B_k , чтобы сумма длин радиусов r_k окружностей, вписанных во все n треугольников $A_k B_{k+1} A_{k+1}$, была наибольшей?

С. Дворянинов

M1899. Обозначим

$$f(n) = \sin n\alpha + \sin n\beta + \sin n\gamma.$$

Пусть α, β, γ – углы остроугольного треугольника.

- а) Докажите неравенство $f(n) < f(1)$ при $n = 3, 4$.
 б) Докажите неравенство $f(n) \leq f(1)$ при $n = 2, 8$.
 в) Докажите, что для любого натурального $n > 4$, $n \neq 7, 8$ существует такой остроугольный треугольник Δ_n с углами $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$, что $f(n) > f(1)$.

С.Маркелов, В.Сендеров

M1900. Можно ли расположить в пространстве 5 одинаковых кубов так, чтобы любые два из них имели общую диагональ, а никакие три нет?

А.Заславский

Ф1898. Два футболиста бегут навстречу друг другу по одной прямой, скорости их все время одинаковы и равны 5 м/с. Судья в любой момент времени благоразумно держится поодаль (опыт есть) – на расстоянии ровно 30 м от футболиста в красной форме и на расстоянии 40 м от футболиста в синей форме. Найдите ускорение судьи в тот момент когда расстояние между футболистами составляет 50 м.

З.Рафаилов

Ф1899. Через блок *A* переброшена легкая нерастяжимая нить, к одному концу которой прикреплен груз, к другому – ось блока *B*, через который тоже переброшена нить. К концам этой нити прикреплены еще два груза. Один из трех грузов имеет массу *M*, два других – по $2M$. Блок *A* двигают по вертикали с некоторым ускорением. При какой величине этого ускорения два груза из трех могут оставаться неподвижными некоторое время (пока не кончатся нити)? Может быть, вы найдете несколько вариантов решения? Грузы движутся вертикально.

А.Простов

Ф1900. По шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, с высоты *H* скатывается однородный сплошной диск. Какое максимальное количество теплоты при этом может выделиться? Точки диска все время находятся в одной вертикальной плоскости.

А.Круглов

Ф1901. На *pV*-диаграмме изображены процессы изотермического и адиабатического расширения одного моля гелия. Кривые пересекаются в точке с координатами 1 атм и 22,4 л. Один сантиметр по оси давлений соответствует 0,1 атм, 1 см по оси объемов – 1 л. Найдите угол, который составляют между собой кривые в точке пересечения графиков.

Р.Александров

Ф1902. В откачанном до глубокого вакуума помещении на столе стоит вертикальный цилиндрический сосуд. В сосуде под массивным поршнем находится порция азота. Поршень может двигаться по вертикали без трения. Когда в сосуде установилось равновесие, поршень толкнули вниз, придав ему мгновенную скорость v_0 . После длительных колебаний в сосуде вновь установилось равновесие. На какое расстояние

сместился поршень по отношению к начальному положению? Поршень и сосуд имеют пренебрежимо малые теплоемкости, сосуд теплоизолирован.

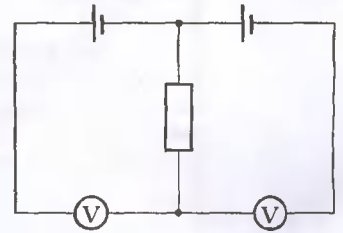
З.Повторов

Ф1903. Тонкий непроводящий стержень длиной *L* заряжен равномерно по всей длине. Его издали подносят к закрепленному точечному заряду так, что расстояние от заряда до ближнего конца стержня составляет *L*. При этом совершается работа *A*. Какую работу нужно дополнительно совершить, передвигая стержень поближе, чтобы расстояние от ближнего конца стержня до заряда уменьшилось в 3 раза? Стержень после каждого перемещения ориентирован вдоль прямой, проходящей через точку закрепления заряда.

А.Сложнов

Ф1904. Батарейки с напряжениями 3 В и 6 В соединены последовательно. К их выводам подключили два одинаковых вольтметра, также соединенных последовательно. После подключения резистора между точкой соединения батарей и точкой соединения вольтметров (рис.2) показание одного из вольтметров увеличилось до 5 В. Что будет показывать этот вольтметр, если второй вольтметр отключить?

М.Учителев Рис.2



Ф1905. Двадцать одинаковых конденсаторов емкостью *C* каждый соединили последовательно и подключили к источнику напряжением *U*. Подождав немного, пока конденсаторы зарядятся, источник отключили, один из конденсаторов переключили «наоборот» – поменяли местами его выводы – и вместо источника к батарее конденсаторов подключили резистор сопротивлением *R*. Какой заряд протечет по резистору и сколько тепла в нем выделится?

З.Повторов

Ф1906. К батарейке подключен странный «резистор», сопротивление которого все время изменяется: в течение 0,01 с сопротивление составляет 100 Ом, следующие 0,02 с сопротивление равно 200 Ом, и так периодически повторяется. Конечно, при этом изменяется и сила тока в цепи. Для уменьшения изменения тока последовательно с «резистором» включают катушку индуктивности. При какой индуктивности катушки относительное изменение тока в цепи не будет превышать 1%? Элементы цепи считать идеальными.

З.Рафаилов

Ф1907. Маленький источник света движется с постоянной скоростью *v* вдоль прямой, составляющей угол 10° с главной оптической осью собирающей линзы. При этом изображение источника также движется вдоль прямой, которая составляет с главной оптической осью линзы угол 20° . Найдите минимальное значение скорости изображения относительно источника. Каково в этот момент увеличение линзы?

А.Зильберман

**Решения задач M1871–M1875,
Ф1883—Ф1892**

M1871. За круглым столом 35 гостей уселись пить чай. Им выдали 10 литровых и 25 пол-литровых кружек. Каждому принесли пол-литровый чайник с чаем. Гость может вылить содержимое чайника себе или одному из своих соседей. Гости согласны пить только из полной кружки. Какое наибольшее число гостей может напиться чаю?

Ответ: 30 гостей.

Гостям выдано $10 + 25 = 35$ пол-литров чая, а суммарный объем кружек равен $10 \cdot 2 + 25 = 45$ пол-литрам. Чтобы наполнить наибольшее количество полных кружек, нужно оставить пустыми минимальное число. Но так как гостям не хватает 10 пол-литров, а в каждую кружку влезает не более двух пол-литров, то по крайней мере $10 : 2 = 5$ кружек останутся пустыми. Следовательно, полных кружек может быть не более 30.

Объясним, как напоить чаем 30 гостей – 25 с пол-литровыми кружками и 5 с литровыми. Пронумеруем по кругу всех гостей с литровыми кружками, начиная с некоторого (1, 2, ..., 10). Разобьем весь круг на куски от 1-го до 2-го, от 3-го до 4-го и т.д. от 9-го до 10-го. В каждом таком куске гости передают чай по часовой стрелке следующему, кроме последнего (с литровой кружкой) в этом куске, который доликает себе свои пол-литра.

Все остальные люди с пол-литровыми кружками, не входящие в такие куски, выливают чай в свои кружки. Таким образом, ровно 5 человек остались с пустыми литровыми кружками, и, следовательно, 30 человек напьются чаем.

Р. Женодаров

M1872. Большой прямоугольник разрезан на прямоугольники, у каждого из которых имеется сторона, принадлежащая границе большого прямоугольника. Докажите, что найдутся два прямоугольника с общей стороной.

Незамысловатый пример (рис.1) показывает, что при разрезании большого прямоугольника уже на 5 меньших можно получить картинку, на которой никакие два из пяти прямоугольников не имеют общей стороны. Но такая пара прямоугольников непременно появится (с общей стороной), если все прямоугольники разрезания прилегают к границе большого прямоугольника. Это и надо доказать.

Если большой прямоугольник разрезан на два прямоугольника, то линия разрезания будет их общей стороной. Будем считать, что большой прямоугольник $ABCD$

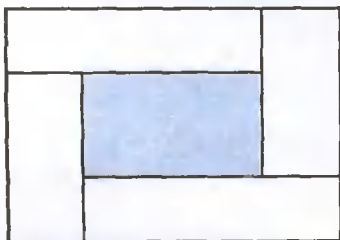


Рис.1

разрезан на $n \geq 3$ прямоугольников меньших и при этом сторона его AD является той из сторон, к которой прилегает более чем один прямоугольник разрезания. Обратим свое внимание на тот прямоугольник $MNKL$ из прилегающих

к основанию AD , который имеет наименьшую высоту. Он может занимать либо серединное, либо угловое положение. В случае серединного положения (рис.2) левый и правый его соседи выше его (иначе общая сторона между ним и его

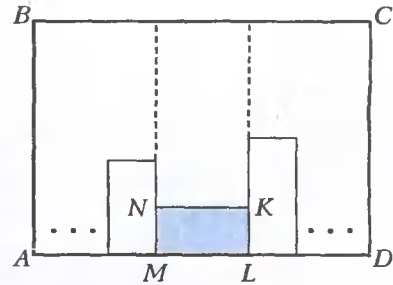


Рис.2

соседом обнаруживается сразу). Тогда всякий прямоугольник, нижнее основание которого принадлежит NK , верхнее свое основание имеет на BC . И если он единственный, то NK является общей стороной двух прямоугольников, если же их несколько, то два из них имеют общую сторону.

Перейдем к случаю, когда $MNKL$ занимает угловое положение (например, точка L совпадает с точкой D ; рис.3). Можно считать, что левый сосед прямоугольника $MNKL$ выше его. Тогда верхнее

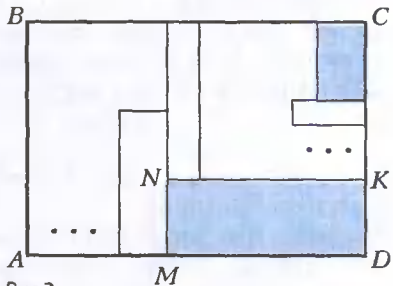


Рис.3

основание прямоугольника с вершиной N принадлежит BC (иначе NK сразу будет общей стороной двух прямоугольников). Обратим свое внимание на тот прямоугольник из имеющих основание на CD , высота которого (горизонтальная сторона) наименьшая. Можно считать, ввиду ранее разобранного, что он займет не серединное, а угловое положение, т.е. точка C будет его вершиной. Тогда одна из его сторон будет общей с другим прямоугольником разрезания (подумайте, почему!).

Можно сказать, что мы загнали задачу из одного угла в другой угол и тем самым разобрались с ней до конца.

В. Произволов

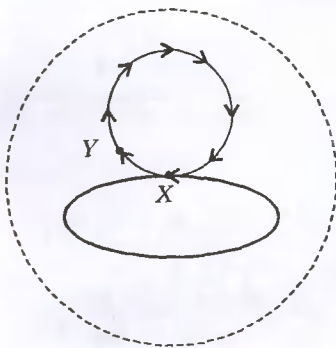
M1873. В стране несколько городов, соединенных дорогами с односторонним и двусторонним движением. Известно, что из каждого города в любой другой можно проехать ровно одним путем, не проходящим два раза через один и тот же город. Докажите, что страну можно разделить на три губернии так, чтобы ни одна дорога не соединяла два города из одной губернии.

Пусть внутри страны, пока еще не поделенной на губернии, возникла автономная область, состоящая из одного города. Эту область, во-первых, можно разделить на три губернии (две пустые), и, во-вторых, она удовлетворяет условию как самостоятельная страна, т.е. при удалении всех остальных городов.

Будем добавлять города к автономной области с сохранением этих двух условий.

Предположим, что область содержит не все города. Тогда найдется дорога, ведущая из города области (обозначим его через X) в город, еще не принадлежа-

щий автономной области (назовем его Y). Рассмотрим несамопересекающийся путь (последовательность дорог), ведущий из Y в X (см. рисунок). Докажем, что на этом пути не встретятся города области, кроме разве что последнего города X . Предположим обратное: на



этом пути есть город Z , лежащий в автономной области. Тогда из X можно добраться до Z двумя несамопересекающимися путями: один путь идет через Y , а второй идет только по городам области (такой путь существует, потому что для области выполнено условие задачи, как и для всей страны). Но по условию такое невозможно. Следовательно, путь из Y в X не содержит других городов из области, кроме X .

Теперь присоединим все города на этом пути (включая Y) к автономной области и отнесем их поочередно в те две губернии, в которые X не входит. Все дороги, соединяющие два присоединенных города, — это дороги на пути $Y \rightarrow X$, иначе между ними было бы два пути. Аналогично, все дороги, соединяющие присоединенный город с городом, уже имевшимся в области, — это дорога их X в Y и последняя дорога на пути $Y \rightarrow X$. Следовательно, область будет правильно разделена на губернии.

Докажем, что для новой области условие задачи также выполнено. Два несамопересекающихся пути от одного города к другому невозможны, иначе бы вся страна не удовлетворяла условию. От каждого города области можно доехать (по области) до X , а от X — до всех остальных, поэтому по крайней мере один путь от одного города области до другого всегда существует. Значит, новая область тоже удовлетворяет условию. На каждом описанном шаге область увеличивается хотя бы на один город (Y). Следовательно, рано или поздно все города будут присоединены. В этот момент область совпадет со всей страной и при этом будет разделена на губернии.

Таким образом, утверждение задачи доказано.

А. Спивак, И. Межиров

M1874. Найдите все решения уравнения

$$x^y - y^x = 1$$

в натуральных числах x и y .

Ответ: $x = 2, y = 1$ и $x = 3, y = 2$.

Пусть $x = 2$. Тогда $2^y = y^2 + 1$. Поскольку $y^2 + 1$ не делится на 4, то решений, кроме $(2, 1)$, нет.

При $y = 1$ имеем $x = 2$.

Пусть $y = 2$. Тогда $(x + 1)(x - 1) = 2^x$, откуда $x - 1 = 2$, $x = 3$.

Пусть $x \geq 3, y \geq 3$. Рассмотрим функцию

$$f(t) = a^t - t^a = \left(\frac{t}{a^a} - t \right) \left(\left(\frac{t}{a^a} \right)^{a-1} + \dots + t^{a-1} \right),$$

где $a \geq 3$ — целое число, $t \geq a$. Имеем $f(a) = 0$;

поскольку $\varphi(t) = \frac{t}{a^a} - t$ — возрастающая неотрицательная функция, то и $f(t)$ возрастает.

Получили: при $t \geq a + 1$

$$f(t) \geq f(a + 1) = a^{a+1} - (a + 1)^a \geq 1.$$

Последнее неравенство строгое: при $a^{a+1} - (a + 1)^a = 1$ было бы $ta = 2$, где $m \in \mathbf{Z}$.

Окончательно: $x^y - y^x \neq 1$.

Рассуждая несколько по-иному, нежели выше, можно сразу получить числовую оценку выражения $a^t - t^a$. Именно, пусть $a \geq 3, z \in \mathbf{N}$. Тогда, используя легко доказываемые неравенства $(1 + t)^{1/t} < e < 2,8$, получаем

$$\begin{aligned} a^{a+z} - (a+z)^a &= a^a \left(a^z - \left(\left(1 + \frac{z}{a} \right)^{\frac{a}{z}} \right)^z \right) > \\ &> a^a (a^z - e^z) \geq a^a (a - e) > 3^3 \cdot 0,2 > 1. \end{aligned}$$

Вот и все.

В. Произволов, В. Сендеров

M1875. У выпуклого многогранника внутренний двугранный угол при каждом ребре острый. Сколько может быть граней у многогранника?

Первое решение. Сначала докажем, что в каждой вершине многогранника сходятся три грани. Рассмотрим произвольный трехгранный угол. Двойственным к нему называется трехгранный угол, ребра которого перпендикулярны граням данного. Очевидно, что сумма любого двугранного угла данного трехгранного угла с соответствующим плоским углом двойственного равна π . Так как сумма плоских углов двойственного угла меньше 2π , сумма двугранных углов данного больше π . Поскольку n -гранный угол можно разрезать на $n - 2$ трехгранных, то сумма его двугранных углов больше, чем $\pi(n - 2)$, т.е. хотя бы

один из них больше $\pi \left(1 - \frac{2}{n} \right)$. Так как при $n > 3$ выполнено неравенство $1 - \frac{2}{n} \geq \frac{1}{2}$, в вершине данного

многогранника не может сходить больше трех ребер.

Докажем теперь, что если двугранные углы трехгранного угла острые, то плоские тоже острые. Перейдя к двойственному углу, получим равносильное утверждение: если все плоские углы тупые, то двугранные тоже тупые. Предположим, что для трехгранного угла $OABC$ это не так, и угол при ребре OC не тупой. Поскольку углы AOC и BOC тупые, то основания перпендикуляров, опущенных из A и B на прямую OC , лежат вне луча OC . Возьмем точки A и B так, чтобы эти перпендикуляры имели общее основание D . Тогда $\angle ADB \leq \pi/2$, $AD < AO$, $BD < BO$.

Следовательно, $AB^2 \leq AD^2 + BD^2 < AO^2 + BO^2$, и угол AOB острый — противоречие.

Итак, в данном многограннике плоские углы всех граней острые, значит, все грани — треугольники.

Кроме того, в каждой вершине сходятся три грани. Рассмотрим произвольную грань KLM . К каждой ее стороне примыкает треугольная грань, и любые две из этих граней имеют общее ребро. Следовательно, третьи вершины этих граней совпадают, и многогранник является тетраэдром.

Второе решение. Для каждой из граней рассмотрим вектор внешней нормали, т.е. вектор, перпендикулярный этой грани и направленный вне многогранника.

1) Докажем, что угол между любыми двумя внешними нормальными тупой или развернутый. Пусть это не так – нашлись две грани Γ_1 и Γ_2 , внешние нормали к которым образуют угол не больше $\pi/2$. Тогда грани Γ_1 и Γ_2 принадлежат полуплоскостям Π_1 и Π_2 , которые образуют двугранный угол величиной не меньше $\pi/2$.

Возьмем точку P на грани Γ_2 . Пусть P' – проекция точки P на плоскость грани Γ_1 . Точка P' лежит вне многоугольника Γ_1 , следовательно, найдется прямая, содержащая некоторое ребро r грани Γ_1 и отделяющая P' от Γ_1 . Многогранник лежит внутри острого двугранного угла, соответствующего ребру r , но P лежит вне этого двугранного угла. Противоречие.

2) Остается показать, что в пространстве не существует более четырех векторов, попарные углы между которыми тупые или развернутые.

Пусть это не так и $\vec{u}_0, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ – пять векторов, попарные углы между которыми тупые или развернутые. Введем прямоугольную систему координат так, чтобы ось Oz была сонаправлена с \vec{u}_0 . Обозначим через $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ проекции векторов $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ на плоскость Oxy . Один из углов между $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$, скажем угол между \vec{v}_1 и \vec{v}_2 , не превосходит $\pi/2$. Это означает, что скалярное произведение (\vec{v}_1, \vec{v}_2) неотрицательно. Пусть $\vec{u}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{u}_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Поскольку угол между \vec{u}_1 и \vec{u}_0 тупой, $z_1 < 0$; аналогично, $z_2 < 0$; следовательно, $z_1 z_2 > 0$. Имеем:

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) + z_1 z_2 > 0.$$

Получаем, что угол между \vec{u}_1 и \vec{u}_2 острый – противоречие.

О.Подлитский, А.Заславский

Ф1883. Космический корабль стартовал в вертикальном направлении с поверхности невращающегося сферически симметричного небесного тела, лишённого атмосферы. После выключения двигателя зависимость скорости корабля от времени имеет вид, показанный на рисунке 1. На каком расстоянии от центра небесного тела был выключен двигатель?

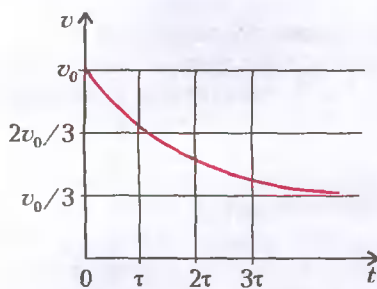


Рис.1

Найдем при помощи данного графика (см. рис.1) ускорение корабля в момент времени сразу после

выключения двигателя. Для этого проведем касательную к графику в точке $t = 0$ (рис.2). По определению, величина ускорения равна модулю углового коэффициента этой касательной:

$$a_0 = \left| \frac{\Delta v}{\Delta t} \right| = \frac{v_0}{3\tau}.$$

Поскольку после выключения двигателя на корабль действует только гравитационная сила со стороны небесного тела, то

$$ma_0 = \frac{GmM}{R_0^2},$$

где G – гравитационная постоянная, m – масса корабля, M – масса небесного тела, R_0 – искомое расстояние.

После удаления корабля на очень большое расстояние от небесного тела скорость корабля уменьшается до величины $v_1 = v_0/3$ и становится постоянной.

Применяя закон сохранения механической энергии для корабля в гравитационном поле планеты, запишем

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{GmM}{R_0}.$$

Из полученных равенств найдем

$$R_0 = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2a_0} = \frac{3\tau}{2v_0} (v_0^2 - v_1^2) = \frac{3\tau}{2v_0} \left(v_0^2 - \frac{v_0^2}{9} \right) = \frac{4}{3} \tau v_0.$$

Итак, двигатель был выключен на расстоянии $R_0 = \frac{4}{3} \tau v_0$ от центра небесного тела.

О.Шведов

Ф1884. В системе на рисунке 1 все блоки невесомые, нити легкие и нерастяжимые. Масса одного из крайних грузов равна $3M$, остальные имеют массу M . Вначале все тела удерживают, затем отпускают, и они начинают двигаться – при этом нити остаются все время натянутыми и рывков нет. Найдите ускорение тяжелого груза.

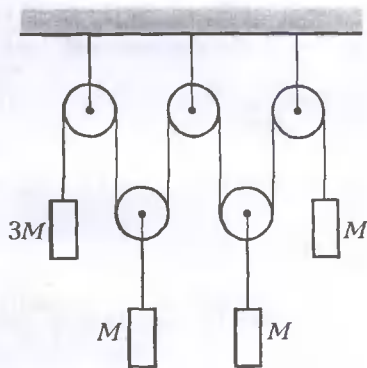


Рис.1

Пронумеруем грузы и обозначим их ускорения и силы натяжения нитей так, как показано на рисунке 2 (ясно, что ускорения грузов 2 и 3 одинаковы). Легко увидеть связь между ускорениями грузов: при смещении грузов 2 и 3 на x см вверх освободится $4x$ см нити, при смещении груза 4 на y см вверх дополнительно освободится еще y см нити, тогда смещение груза 1 вниз

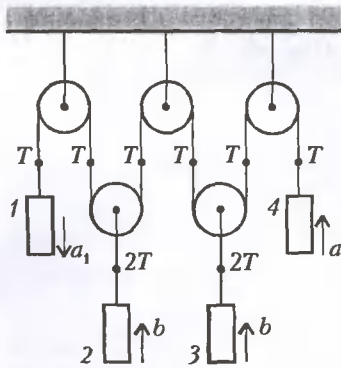


Рис.2

составит $4x + y$ см, и сразу становится понятно, что

$$a_1 = 2b + 2b + a = 4b + a.$$

Теперь запишем уравнения второго закона Ньютона для грузов 1, 2 и 4:

$$3Mg - T = 3M(4b + a),$$

$$2T - Mg = Mb,$$

$$T - Mg = Ma.$$

Отсюда находим

$$b = \frac{2}{7}g, \quad a = -\frac{5}{14}g$$

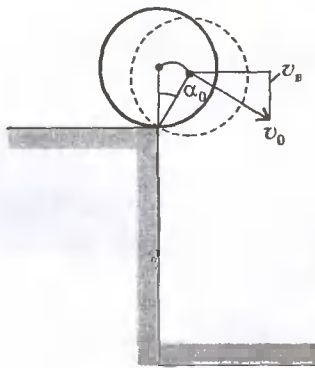
и

$$a_1 = 4b + a = \frac{11}{14}g.$$

З.Рафаилов

Ф1885. На гладком горизонтальном круглом столе находится массивный шар радиусом R . От малого толчка шар начинает двигаться вдоль радиуса по направлению к краю стола. На каком расстоянии от края стола шар ударится о пол? Высота поверхности стола над полом равна H .

Стол гладкий, трения нет – шар при движении не будет вращаться вокруг своего центра. Тогда движение шара



можно заменить движением материальной точки – его центра.

Приблизившись к краю стола, до окончательного отрыва от стола эта точка движется по окружности радиусом R (см. рисунок). Угол отрыва α_0 и начальную скорость v_0 можно найти обычным способом (такая задача широко известна – отрыв маленького тела, скользящего по поверхности гладкой сферы), записав выражения закона сохранения энергии и второго закона Ньютона:

$$mgR(1 - \cos \alpha_0) = \frac{mv_0^2}{2}, \quad \frac{mv_0^2}{R} = mg \cos \alpha_0.$$

Отсюда получаем

$$\cos \alpha_0 = \frac{2}{3}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{2gR}{3}}, \quad v_b = v_0 \sin \alpha_0.$$

Теперь найдем время падения шара τ :

$$H + R \cos \alpha_0 - R = \frac{g\tau^2}{2} + v_b \tau,$$

или

$$\tau^2 + \frac{2}{g} \sqrt{\frac{2gR}{3}} \frac{\sqrt{5}}{3} \tau - \frac{2(H - R/3)}{g} = 0,$$

откуда

$$\tau = -\sqrt{\frac{10R}{27g}} + \sqrt{\frac{2H}{g} - \frac{8R}{27g}}.$$

(Кстати, если $H < R/3$, то шар ударится о стол еще до отрыва.) Зная время падения, легко найти горизонтальное смещение центра шара относительно края стола:

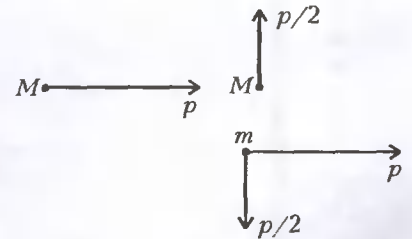
$$l = R \sin \alpha_0 + v_0 \cos \alpha_0 \cdot \tau =$$

$$= R \frac{\sqrt{5}}{3} + \sqrt{\frac{2gR}{3}} \frac{2}{3} \left(\sqrt{\frac{2H}{g} - \frac{8R}{27g}} - \sqrt{\frac{10R}{27g}} \right) =$$

$$= \frac{R}{3} \left(\sqrt{5} + \sqrt{\frac{16}{3} \left(\frac{H}{R} - \frac{4}{27} \right)} - \frac{\sqrt{80}}{9} \right).$$

А.Старов

Ф1886. По гладкому горизонтальному столу движется шайба. Она налетает на другую шайбу, которая до удара покоилась. При каком отношении масс налетающей шайбы может двигаться после удара перпендикулярно начальному направлению, уменьшив скорость по модулю вдвое?



Обозначим импульс налетающей шайбы p и запишем закон сохранения кинетической энергии (см. рисунок, который выполнен с учетом закона сохранения импульса):

$$\frac{p^2}{2M} = \frac{(p/2)^2}{2M} + \frac{p^2 + (p/2)^2}{2m}.$$

Отсюда сразу получаем

$$\frac{m}{M} = \frac{5}{3}.$$

Иными словами, масса налетающей шайбы меньше и составляет 0,6 от массы второй, первоначально покоившейся шайбы.

А.Ударов

Ф1887. Изучая некоторое вещество, экспериментатор Глюк обнаружил, что для небольшого изменения объема ΔV требуется увеличить давление на малую величину Δp_1 , если это делать изотермически, и на малую величину Δp_2 , если сжатие производит адиабатически. Кроме того, Глюк измерил удельные теплоемкости c_V при постоянном объеме и c_p при постоянном давлении. К сожалению, результат последнего измерения (c_p) был утрачен. Помогите Глюку по результатам первых трех измерений восстановить значение c_p . Рассмотрите два случая: 1) исследуемое вещество было идеальным газом; 2) исследовалось вещество с неизвестным уравнением состояния.

1) Для идеального газа известны уравнения изотермы: $pV = \text{const}$ и адиабаты: $pV^\gamma = \text{const}$, где $\gamma = C_p/C_V = c_p/c_V$, а C_p и C_V – молярные теплоемкости

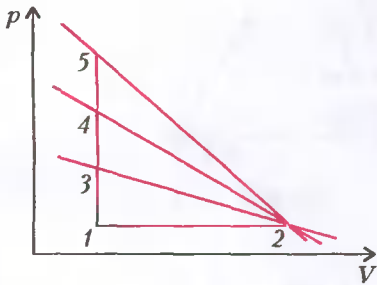
при постоянном давлении и при постоянном объеме соответственно. Из этих уравнений дифференцированием легко получить, что в точке пересечения изотермы и адиабаты наклон адиабаты в γ раз больше:

$$\left(\frac{\Delta p}{\Delta V}\right)_{ад} = \frac{C_p}{C_v} \left(\frac{\Delta p}{\Delta V}\right)_{изотер}$$

откуда

$$\frac{\Delta p_2}{\Delta V} = \frac{C_p}{C_v} \frac{\Delta p_1}{\Delta V}, \text{ и } C_p = C_v \frac{\Delta p_2}{\Delta p_1}.$$

2) Покажем, что все эти соотношения справедливы и для произвольного вещества с неизвестным уравнением состояния.



Рассмотрим бесконечно малый участок pV -диаграммы (см. рисунок). Проведем из одной точки 2 изотерму 2-3, адиабату 2-5 и «изоэргу» 2-4, т.е. процесс, в котором внутренняя энергия остается постоянной. Бесконечно

малые участки этих кривых можно считать прямолинейными. Нужно доказать, что

$$\frac{p_5 - p_1}{p_3 - p_1} = \frac{C_p}{C_v}.$$

Зависимость внутренней энергии U от давления p при постоянном объеме V (вдоль изохоры 1-5) для произвольного вещества имеет некоторый сложный вид, но на бесконечно малом участке 1-5 ее можно считать линейной:

$$\frac{U_5 - U_1}{p_5 - p_1} = \frac{U_3 - U_1}{p_3 - p_1},$$

откуда получим

$$\frac{U_5 - U_1}{U_3 - U_1} = \frac{C_p}{C_v}.$$

Введем обозначение $\Delta T = T_2 - T_1 = T_3 - T_1$. По определению C_v имеем $C_v \Delta T = U_3 - U_1$. Для процесса 1-2 первое начало термодинамики дает

$$C_p \Delta T = (U_2 - U_1) + A_{12}.$$

В силу бесконечной малости ΔV работы A_{12} , A_{32} , A_{42} и A_{52} можно считать равными, поэтому, учитывая, что $U_2 = U_4$ (точки 2 и 4 лежат на «изоэрге»), предыдущую формулу можно переписать в виде

$$C_p \Delta T = (U_4 - U_1) + A_{52}.$$

Первое начало термодинамики для адиабатического процесса 5-2 дает $A_{52} = U_5 - U_2 = U_5 - U_4$. Тогда

$$C_p \Delta T = U_5 - U_1,$$

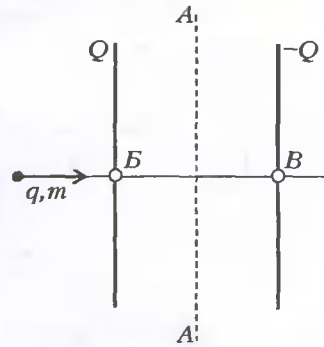
и

$$\frac{C_p}{C_v} = \frac{U_5 - U_1}{U_3 - U_1}.$$

Д.Александров

Ф1888. Плоский «конденсатор», состоящий из двух больших круглых тонких непроводящих пластин площадью S каждая, закрепленных неподвижно на малом расстоянии d друг от друга, заряжен зарядами Q и $-Q$, размазанными равномерно по поверхностям. В центрах пластин проделаны небольшие отверстия. Вдоль прямой, проходящей через эти отверстия, издали в направлении к конденсатору движется очень маленький шарик массой m , заряженный зарядом q , одноименным с зарядом ближней пластины. Какую минимальную скорость должен иметь шарик на большом расстоянии от пластин, чтобы проскочить через конденсатор? Какую скорость будет иметь шарик на выходе из конденсатора, если его скорость вдали вдвое больше этой минимальной скорости?

Пластины нашего «конденсатора» непроводящие, и это существенно упрощает решение задачи — подлетающий заряд не вызывает перераспределения зарядов пластин. Важно также, что пластины тонкие — поля этих пластин легко посчитать. Потенциал «серединной» плоскости AA' (см. рисунок) в поле пластин равен нулю, тогда потенциал в отверстии B составит



$$\varphi_B = -E \frac{d}{2} = -\frac{Q}{\epsilon_0 S} \frac{d}{2}.$$

Для того чтобы шарик пролетел через отверстие B , ему нужно на бесконечности иметь кинетическую энергию

$$W \geq |q\varphi_B| = \frac{qQd}{2\epsilon_0 S},$$

или минимальную скорость

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{qQd}{\epsilon_0 m S}}.$$

Ясно, что если шарик пролетит через отверстие B , то он пролетит и через отверстие B .

Если скорость шарика вдали от «конденсатора» равна $2v_{\min}$, то на выходе (в точке B) его энергия увеличится на $q\varphi_B$ и составит

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{m(2v_{\min})^2}{2} + \frac{qQd}{2\epsilon_0 S} = \frac{5qQd}{2\epsilon_0 S}.$$

Отсюда находим скорость шарика на выходе из «конденсатора» в этом случае:

$$u = \sqrt{\frac{5qQd}{\epsilon_0 m S}}.$$

А.Повторов

Ф1889. В схеме на рисунке 1 батарейка идеальная. Между точками A и B подключают последовательно соединенные конденсатор емкостью C и резистор сопротивлением R . Какой

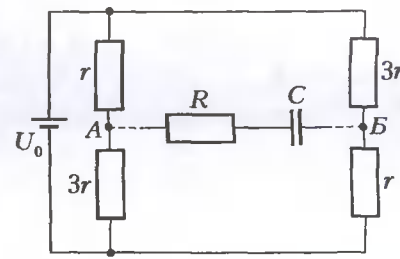


Рис 1

заряд протечет через этот резистор после подключения? Какое количество теплоты на нем выделится?

Решение этой задачи можно сильно упростить, если заранее преобразовать исходную схему так, как показано на рисунке 2. «Переделанную» часть цепи мы за-

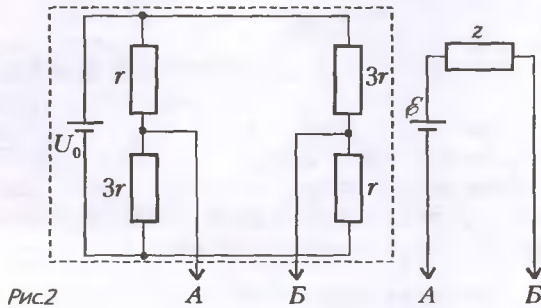


Рис.2

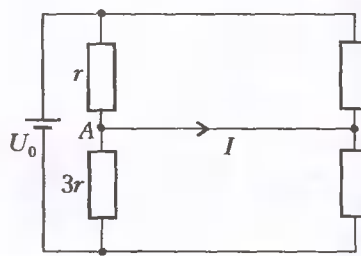


Рис.3

менили эквивалентным источником с ЭДС ξ и внутренним сопротивлением z . Если ничего не подключать к точкам А и В, то напряжение между этими точками в исходной схеме равно $U_{AB} = U_0/2$, тогда $\xi = U_0/2$. Найдем

теперь z . Замкнем точки А и В в исходной схеме и найдем ток через замыкающую перемычку (рис.3):

$$I = \frac{U_0/2}{r} - \frac{U_0/2}{3r} = \frac{U_0}{3r} = \frac{U_0/2}{1,5r},$$

откуда получаем

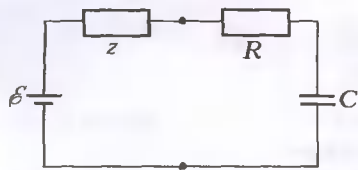


Рис.4

$$z = 1,5r.$$

Теперь совсем легко найти заряд, протекающий через резистор R (рис.4):

$$q = \xi C = \frac{CU_0}{2}$$

и выделившееся в нем количество теплоты:

$$Q_R = \frac{R}{R+z} \frac{C\xi^2}{2} = \frac{R}{R+1,5r} \frac{CU_0^2}{8}.$$

З.Рафаилов

Ф1890. В неоднородном магнитном поле с индукцией $B = ax$ ($x \geq 0$) стартует частица (рис.1) массой m и зарядом q с начальной скоростью v , направленной вдоль оси Ox . Определите максимальное смещение частицы вдоль оси Ox .

Единственная действующая на частицу сила – сила Лоренца \vec{F}_L – направлена перпендикулярно скорости частицы, поэтому она работы не совершает. Следовательно, энергия частицы и ее скорость сохраняются. Отсюда получаем

$$v_x^2 + v_y^2 = v^2.$$

Уравнение второго закона Ньютона для частицы в

проекции на ось Oy в произвольный момент времени имеет вид (рис.2)

$$m \frac{dv_y}{dt} = F_L \cos \alpha.$$

Сила Лоренца равна $F_L = Bqv$. Тогда

$$m \frac{dv_y}{dt} = Bqv \cos \alpha = Bqv_x = axqv_x.$$

Умножим на dt : $mdv_y = aqx dx$ и после интегрирования получим

$$m(v_y - v_{0y}) = aq \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} \right).$$

Начальная скорость по оси Oy равна 0, начальная координата x_0 тоже равно 0, следовательно

$$mv_y = \frac{aqx^2}{2}.$$

Когда удаление частицы

вдоль оси Ox максимально, проекция скорости частицы на ось Ox равна 0. Поскольку величина полной скорости частицы постоянна, при максимальном удалении $|v_y| = v$. Если заряд частицы положителен, то $v_y = v$, а если отрицателен, то $v_y = -v$. Таким образом,

$$mv = \frac{a|q|x_{\max}^2}{2}, \text{ и } x_{\max} = \sqrt{\frac{2mv}{a|q|}}.$$

В.Муравьев

Ф1891. На длинном ферромагнитном стержне намотаны (проводом с очень малым сопротивлением, симметрично относительно середины стержня) две одинаковые катушки, каждая индуктивностью L . При соединив к выводам одной из катушек генератор звуковой частоты с амплитудой напряжения 1 В, измерили напряжение между выводами второй катушки при помощи вольтметра, имеющего очень высокое сопротивление, – оно оказалось равным 0,2 В (амплитудное значение). Как изменится индуктивность одной из катушек, если соединить между собой выводы второй катушки?

В первом случае поле создает только подключенная к источнику катушка (вторая катушка разомкнута). Поток через вторую катушку в 5 раз меньше, чем через первую, – только 20% линий магнитной индукции поля первой катушки пронизывают вторую (то же будет и с полем второй катушки, когда через нее потечет ток). Во втором случае полный поток второй катушки тоже действительно равен нулю (она замкнута накоротко, ЭДС индукции равна нулю). Если ток первой катушки I_1 , то ток второй (для компенсации магнитного потока через нее) $I_2 = 0,2I_1$. Тогда магнитный поток первой катушки равен

$$\Phi_1 = LI_1 - 0,2LI_2 = LI_1 - 0,04LI_1 = 0,96LI_1 = L^*I_1.$$

Следовательно, индуктивность первой катушки будет $L^* = 0,96L$.

А.Зильберман

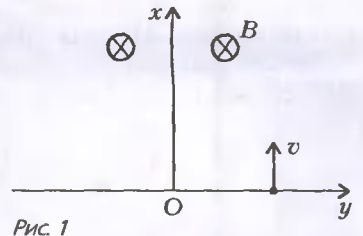


Рис.1

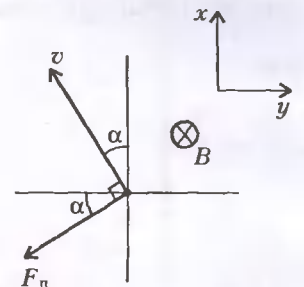


Рис.2

Ф1892. Колебательный контур состоит из разнесенных в пространстве катушки индуктивностью L с малым сопротивлением и плоского конденсатора емкостью C , расстояние между пластинами которого равно d . Пластины конденсатора не заряжены, и ток в контуре не течет. За время $\tau \ll \sqrt{LC}$ в области пространства, где находится конденсатор, создали однородное электрическое поле \vec{E} , направленное перпендикулярно пластинам. Катушка при этом осталась вне электрического поля. Каким будет в дальнейшем максимальный ток в контуре?

За время, намного меньшее периода колебаний в контуре, суммарные заряды на каждой из пластин не могут измениться, и поэтому сразу после создания внешнего поля напряженность электрического поля внутри и снаружи конденсатора будет одинакова и равна E , а разность потенциалов между пластинами станет $U_{C0} = Ed$. Возникшие в контуре после включения внешнего поля колебания спустя большое время $T \gg \sqrt{LC}$ затухнут, и пластины конденсатора, соединенные через катушку индуктивности, будут иметь одинаковые потенциалы. Таким образом, колебания разности потенциалов между пластинами конденсатора будут происходить вокруг значения $U_C = 0$ и с

начальной амплитудой $U_{C0} = Ed$, постепенно затухая со временем. Поскольку суммарный заряд пластин равен нулю, вне конденсатора электрическое поле не меняется и остается равным E .

В начале колебательного процесса энергия электрического поля внутри конденсатора равна

$$W = \frac{CU_{C0}^2}{2} = \frac{CE^2d^2}{2},$$

а ток через катушку индуктивности равен нулю. Через $1/4$ периода колебаний поле внутри конденсатора станет равным нулю, а ток через катушку будет максимальным. Иными словами, вся энергия электрического поля перейдет в энергию магнитного поля (при этом мы считаем затухание колебаний малым, т.е. пренебрегаем уменьшением энергии за период колебаний):

$$\frac{CE^2d^2}{2} = \frac{LI^2}{2}.$$

Отсюда находим максимальный ток I в контуре:

$$I = Ed\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

С. Варламов

Конкурс имени А. П. Савина «Математика 6–8»

Мы завершаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64–А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

16. Профессор Мумбум-Плюмбум пытается из 1 единицы, 2 двоек, 3 троек, ..., 9 девяток составить число так, чтобы между каждыми двумя ближайшими девятками стояла 1 цифра; между каждыми двумя ближайшими восьмерками стояли 2 цифры; между каждыми двумя ближайшими семерками стояли 3 цифры; ...; между каждыми двумя ближайшими тройками стояли 7 цифр; между двумя двойками стояли 8 цифр. Удастся ли ему это сделать?

А. Жуков

17. На плоскости даны три точки A , B и C . Разрешается выбрать любые две из них и повернуть отрезок, их соединяющий, на любой угол относительно своей середины. В результате обе точки передвинутся на другие места.

После того как такую операцию проделали несколько раз, точка A совпала с исходным положением точки B , а точка B не совпала с исходным положением точки

C . Докажите, что точка C также не совпала с исходным положением точки A .

Е. Барабанов, И. Воронович

18. Докажите, что всякий квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) можно представить в виде суммы двух квадратных трехчленов, не имеющих корней.

Е. Барабанов, И. Воронович

19. Существует ли 99-значное число a такое, что \overline{aa} делится на $a \cdot a$?

В. Сендеров

20. В каждую клетку таблицы 5×5 записали неотрицательное число. После этого в каждом прямоугольнике, состоящем из трех клеток, подсчитали сумму чисел. Оказалось, что все суммы попарно различны. Какое наименьшее количество положительных чисел может быть в таблице?

А. Малеев

Задачи

1. В стране Гдетотамии на пост президента претендуют два кандидата: Любимчик Джо и Зазнайка Билл. Каждый гражданин Гдетотамии может проголосовать за любого из них либо против всех. Побеждает тот из кандидатов, кто набирает больше голосов. В день выборов избирательная комиссия проверила 60% бюллетеней проголосовавших граждан. Убедившись, что 80% голосов в этих бюллетенях отданы за

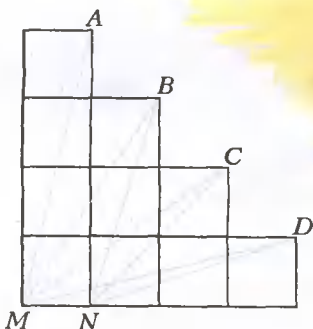


Любимчика Джо, а 10% — за Зазнайку Билла, комиссия отказалась от дальнейшего подсчета голосов и объявила президентом Гдетотамии Любимчика Джо. Не поторопилась ли она со своим выводом?

А.Жуков

2. На клетчатой бумаге нарисованы углы MAN , MBN , MCN и MDN . Докажите, что их сумма равна 45° .

В.Произволов



Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.



3. Для какого наибольшего числа n можно расставить на шахматной доске коней так, чтобы каждый конь бил ровно n других?

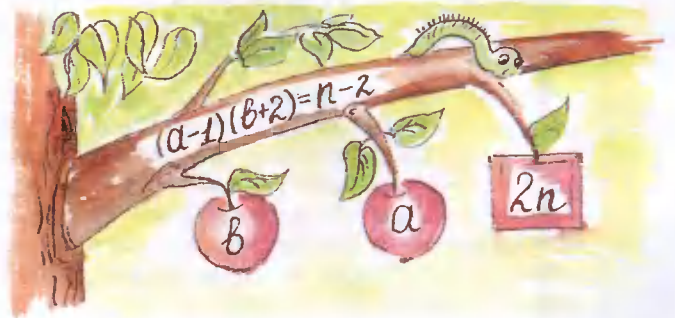
А.Шаповалов

4. У натурального числа n есть два таких различных натуральных делителя a и b , что

$$(a-1)(b+2) = n-2.$$

Докажите, что $2n$ — квадрат натурального числа.

С.Берлов



5. В коллективе n сотрудников. Каждые двое из них либо друзья, либо враги, причем у каждого сотрудника ровно 3 врага. Известно, что каждый сотрудник может правдиво заявить: «Враги моих друзей — мои враги». При каких n такое возможно?

Е.Барабанов, И.Воронович



Почувствуй себя Эйлером

И.АКУЛИЧ

РАЗНООБРАЗИЕ ПРОБЛЕМ, КОТОРЫЕ СТАВИЛ ПЕРЕД СОБОЙ и затем успешно решал великий Леонард Эйлер, поражает воображение. Трудно перечислить все области математики, где он оставил свой след. Ряды и комплексные числа, непрерывные дроби и комбинаторика... А в 1782 году, незадолго до своей кончины, Эйлер заинтересовался задачей о так называемых греко-латинских квадратах. Вкратце суть ее такова. Возьмем n различных греческих букв и столько же различных латинских букв. Ясно, что из них можно составить ровно n^2 различных пар, содержащих одну греческую и одну латинскую букву. Требуется расставить эти n^2 пар в клетки квадрата $n \times n$ таким образом, чтобы в каждой строке и каждом столбце каждая буква (и греческая, и латинская) встречалась ровно по одному разу. Спрашивается: при каких n такое возможно?

Эйлер сумел доказать, что требуемая расстановка существует при нечетных n , а также при n , делящихся на 4 (такие числа в его времена было принято называть «четно-четными»). В качестве иллюстрации на рисунке 1 изображены греко-латинские квадраты для $n = 4$ и $n = 5$.

α - a	β - b	γ - c	δ - d
β - c	α - d	δ - a	γ - b
γ - d	δ - c	α - b	β - a
δ - b	γ - a	β - d	α - c

α - a	β - b	γ - c	δ - d	ϵ - e
β - c	γ - d	δ - e	ϵ - a	α - b
γ - e	δ - a	ϵ - b	α - c	β - d
δ - b	ϵ - c	α - d	β - e	γ - a
ϵ - d	α - e	β - a	γ - b	δ - c

Рис. 1

Что же касается четных n , не делящихся на 4 (т.е. «четно-нечетных»), то здесь результаты оказались куда как скромнее. Правда, для $n = 2$ чрезвычайно легко доказать, что требуемой расстановки не существует (читатель может убедиться в этом сам на досуге). Случай $n = 6$ уже требует весьма обширного перебора вариантов, произвести который до конца Эйлер не сумел. Тем не менее, проанализировав множество комбинаций, он с огромной долей уверенности мог утверждать, что и здесь греко-латинская расстановка

невозможна. Понятно, что еще большие значения n (т.е. 10, 14, 18...) стали совершенно неподъемными.

Итак, сведем в таблицу результаты, которых удалось достичь Леонарду Эйлеру:

n	Существует ли...
нечетное	да
четно-четное	да
2	нет
6	скорее всего, нет
10, 14, 18 и т.д.	ничего не известно

Эйлер выдвинул гипотезу, что требуемая расстановка невозможна ни для каких четно-нечетных n (т.е. в двух нижних клетках правого столбца также должно стоять слово «нет»), а доказывать свое утверждение предоставил потомкам.

Ясность в этом вопросе появилась очень нескоро. Подтверждения гипотезы для $n = 6$ пришлось ждать почти 120 лет – до 1901 года, когда французский математик Г.Тарри сумел выполнить исчерпывающий перебор и убедиться в правоте Эйлера. А для всех остальных n гипотеза была... опровергнута! В 1959 году американцы Э.Паркер, Р.Боус и С.Шрикхенд разработали общие правила построения греко-латинских квадратов для всех четно-нечетных n , начиная с 10 (кстати сказать, первый построенный ими квадрат имел размеры 22×22). Позже, с развитием компьютерной техники, выяснилось, что таких квадратов, оказывается, очень и очень много. Так что здесь величайший математик ошибся (что, конечно, никак нельзя поставить ему в упрек).

А теперь рассмотрим такую задачу (она предлагалась на заключительном этапе конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8», состоявшемся в 2003 году под Костромой):

На некоторых клетках шахматной доски сидело по лягушке. В некоторый момент все они одновременно перепрыгнули на соседние клетки (соседними считаются клетки, имеющие общую сторону или вершину). При этом на каждой клетке вновь оказалось не более одной лягушки, но все бывшие соседи перестали быть соседями. Какое наибольшее число лягушек могло сидеть на доске?

На олимпиаде время было жестко ограничено. Но сейчас у нас такой проблемы нет, поэтому давайте рассмотрим задачу для доски произвольных размеров — не 8×8 , а $n \times n$, где n — произвольное натуральное число. Сделаем оценку сверху возможного числа лягушек, а именно — докажем, что оно не может превышать половины от общего количества клеток доски (равного, очевидно, n^2). Действительно, предположим противное: что лягушки на доске занимают *строго больше* половины ее полей. Это значит, что число пустых полей *строго меньше* количества лягушек. Следовательно (принцип Дирихле), найдется лягушка, которая прыгнула на клетку, где перед прыжком сидела другая лягушка (поскольку, согласно условию, каждая лягушка после прыжка также оказалась на отдельной клетке).

Итак, пусть на соседних клетках сидели лягушки A и B , причем лягушка A прыгнула на клетку, где до прыжка сидела лягушка B . Лягушка B также прыгнула на одну из соседних клеток, но в результате лягушки остались соседями! Противоречие. Поэтому предположение о том, что лягушек было больше половины от общего числа полей доски, неверно.

Вывод: число лягушек не превышает $\left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$. Здесь квадратные скобки означают целую часть числа, т.е. наибольшее целое число, не превышающее выражения в этих скобках. Можно, конечно, избавиться от знака целой части, но тогда формула будет по-разному выглядеть для четных и нечетных n , что не очень желательно (красота теряется).

Тогда естественным образом возникает следующий вопрос: а существует ли требуемое расположение на доске $\left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$ лягушек (естественно, вместе с необходимой схемой их прыжков)? Сразу чувствуется, что поиск возможности такого расположения должен быть чуть легче для *нечетных* n (ибо для них величина $\left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$ все же *строго меньше* половины количества клеток доски, в отличие от четных n , для которых они равны). Действительно, так оно и есть. Не надо быть семи пядей во лбу, чтобы предложить возможный способ первоначальной расстановки и схемы прыжков для любого нечетного n . А именно: выделим на доске отдельно центральную клетку, а остальную часть доски разобьем на вложенные друг в друга «квадратные кольца» толщиной в одну клетку (легко видеть, что в каждом кольце четное число клеток). Теперь расположим в кольцах лягушек так, чтобы каждые две ближайшие лягушки одного кольца были разделены ровно одной пустой клеткой. Схема прыжков тоже проста: все лягушки прыгают, не выходя за пределы «своего» кольца. При этом если пронумеровать кольца по порядку от центра доски, то лягушки, сидящие в кольцах с нечетными номерами, прыгают по часовой стрелке, а в кольцах с четными номерами — против

часовой стрелки (на рисунке 2 показан пример для доски 11×11 ; здесь лягушки обозначены ромбиками, а направления прыжков — стрелками). Убедитесь — полный ажур!

Перейдем к четным n . Сразу видно, что для

наименьшего четного $n=2$ рассадить $\left\lfloor \frac{2^2}{2} \right\rfloor = 2$

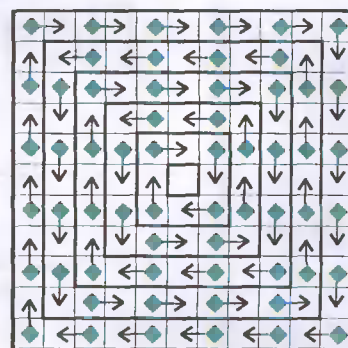


Рис. 2

лягушек невозможно. В самом деле: в квадрате 2×2 любые две клетки — соседние, поэтому и две лягушки, как бы они ни прыгали, останутся соседями. А вот для $n=4$ расположить 8 лягушек удалось (рис.3). Немного поразмыслив, можно заметить, что конфигурацию, изображенную на рисунке 3, можно использовать вообще для любого n , делящегося на 4. Достаточно всего лишь «растиражировать» ее нужное число раз по вертикали и горизонтали. Скажем, для обычной шахматной доски 8×8 (как это было на конкурсе в Костроме) следует соединить 4 таких квадрата — и требуемая расстановка 32 лягушек готова.

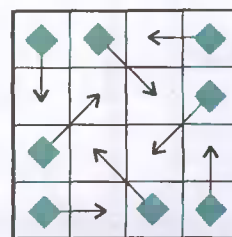


Рис. 3

Итак, мы решили задачу и для четно-четных n . Что осталось? Четно-нечетные. Для наименьшего из них $n=2$ задача легко решается, но ответ здесь отрицательный (см. выше). Следующее значение n это 6. С ним пришлось помучиться очень и очень много, и результат, *скорее всего*, тоже отрицательный. Точнее говоря, перебор оказался чрезвычайно сложным, и автору не удалось довести его до конца. Тем не менее, шансы расположить 18 лягушек на доске 6×6 , по-видимому, весьма малы. Ну, а доски еще больших размеров (10×10 , 14×14 и т.д.) — далеко за пределом мечтаний.

Теперь сведем полученные результаты в таблицу. Не будем приводить ее здесь, ибо читатель легко убедится, что эта таблица полностью идентична таблице результатов, полученных Эйлером. И это тем более поразительно, что «греко-латинская» и «лягушачья» задачи не имеют ничего общего (кроме разве что основы — квадрата $n \times n$).

Но если так оказалось, что полученный нами ответ в задаче, предназначенной для школьников 6–8 классов, чудесным образом совпал с ответом, полученным гениальным Эйлером при решении им совсем другой (и несравненно более сложной) задачи, то каждый школьник 6–8 класса может на какое-то время почувствовать себя самим... Леонардом Эйлером!

Физика 9–11

Публикуемая ниже заметка «Как попасть на Таинственный остров» предназначена девятиклассникам, «Новая галактика и все ее поля» – десятиклассникам и «В цепи переменного тока» – одиннадцатиклассникам.

Как попасть на Таинственный остров

А. СТАСЕНКО

ДРАМАТИЧЕСКИЕ СОБЫТИЯ РАЗВЕРНУЛИСЬ «НАД ПУСТЫННОЙ ШИРЬЮ Тихого океана... 23 марта 1865 года.

...Пассажиры воздушного шара вновь заметили, что они медленно, но непрерывно спускаются... Аэронавты оказались в ужасном положении.

...Выбросив из гондолы все, что там находилось, воздухоплатателям удалось продержаться в воздухе несколько лишних часов.

...К двум часам дня аэростат оказался уже на расстоянии четырехсот футов от поверхности океана.

...Цепляйтесь все за сетку. А гондолу в воду!

...И лишь только гондола оторвалась, аэростат поднялся на высоту в две тысячи футов.

...Но, продержавшись одно мгновение вверху, аэростат опять стал спускаться. Газ утекал сквозь дыру в оболочке, и повреждение невозможно было исправить.

...Надежда была только на чудо. В четыре часа дня шар оказался всего лишь на высоте пятьсот футов от поверхности океана.

– Земля! Земля! –

Но земля находилась на расстоянии тридцати миль. Достигнуть ее аэростат мог по меньшей мере через час, да и то при условии, что ветер не переменится.

...Однако... стало совершенно очевидно, что шар больше держаться в воздухе не может. Он летел, касаясь поверхности воды.

Полчаса спустя до берега оставалось не больше мили.

...Оболочку выгнуло горбом, и ветер, надув ее, помчал по воде, словно парусную лодку.

...Он был уже в двух кабельтовых от берега, как вдруг у четырех путников вырвался крик ужаса. Взметнулся грозный вал, и шар, как будто уже лишившийся подъемной силы, неожиданно взлетел вверх. Слово избавившись от какой-то части своего груза < Смит и его собаки Топа >, он поднялся на тысячу пятьсот футов.

...В гондоле аэростата было пятеро путников и собака, но на берег выбросило только четырех человек.

Шар, освободившись от отягчающего бремени,.. взмыл вверх и исчез в небесном просторе».

Узнали? Правильно, это «Таинственный остров» Жюль Верна. Мы подробно выписали эту последовательность событий, чтобы представить зависимость от времени массы и высоты полета в виде рисунка 1. Конечно, это только качественный рисунок, сделанный на основании показаний Ж. Верна: тогда еще не было «черных ящиков» с точной записью параметров. Но и этих сведений достаточно, чтобы попытаться сделать некоторые количественные оценки.

Прежде всего, «очевидец» трижды описывает взлет шара вверх после освобождения от очередной порции груза как быстрый процесс: «лишь только...» (AB); «неожиданно взлетел» (DE); «взмыл вверх» (FK). Эти участки траектории отмечены на рисунке крутыми подъемами. А спуск аэростата, следующий за каждым его подъемом, происходил достаточно медленно. Таким образом, тут указаны два сильно отличающихся масштаба времени: $\tau_1 \ll \tau_2$. Аналогичная ситуация встречается при исследовании многих проблем физики и математики; при этом появляется плодотворная возможность провести так называемое *расслоение по физическим процессам*. Это означает, что в масштабе «малого времени» можно не рассматривать процессы, которые существенны на «большом времени», и наоборот. В результате исследование упрощается. Например, в нашем случае на

участке быстрого подъема AB, согласно описанию Ж. Верна, можно не учитывать изменение массы шара из-за утечки газа, а на участке спуска BC она будет играть определяющую роль.

Но пора сделать и численные оценки, ибо, как говорит древнерусская пословица, физика без оценок – что щи без соли.

Автор сообщил нам, что «объем шара равнялся пятидесяти тысячам кубических футов». Конечно, имеется в виду начальный объем, когда аэростат еще можно было назвать шаром. Стало быть,

$$V_0 = 50 \cdot 10^3 \text{ Ф}^3 = 50 \cdot 10^3 \cdot (0,3)^3 \text{ м}^3 = 1,4 \cdot 10^3 \text{ м}^3.$$

Отсюда легко найти радиус этого шара:

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{V_0}{4/3\pi}} = 7 \text{ м}.$$

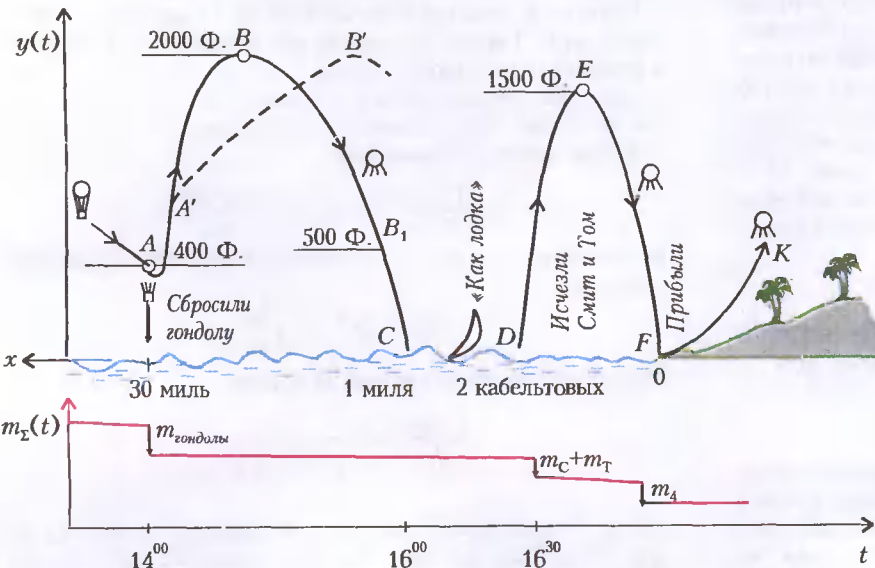


Рис. 1

Далее, более или менее определенная информация начинается с точки А – после сброса гондолы. При этом в пределах указанных значений высоты (наибольшая высота равна 2000 Ф. ≈ 600 м) можно пренебречь изменением плотности атмосферы и считать ее равной $\rho = 1,225 \text{ кг/м}^3$.

А что это за газ, которым был наполнен шар? Конечно, это не мог быть гелий – его открыли тремя годами позднее, да и то в короне Солнца, а на Земле получили (в малых количествах) лишь через тридцать лет после описанной Жюлем Верном драмы. Может, это был теплый воздух, как у современных аэростатов? Но у этих невольных аэронавтов не было ни горелки, ни топлива. Значит, водород? Ну конечно, водород – уже лет семьдесят назад его научились добывать в промышленных масштабах, а использовать для наполнения аэростатов предложил сам Шарль, известный теперь каждому здравомыслящему школьнику. Вспомним, что молекулярные массы водорода и воздуха относятся как 2 : 29. При указанном объеме масса газа (водорода) в шаре равна

$$m_T = V_0 \rho_T = 1,4 \cdot 10^3 \text{ м}^3 \cdot \frac{2}{29} \cdot 1,225 \text{ кг/м}^3 = 120 \text{ кг},$$

а подъемная сила (сила Архимеда) шара составляет

$$F_n = V_0 \rho g = 1,4 \cdot 10^3 \text{ м}^3 \cdot 1,225 \text{ кг/м}^3 \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 = 1,68 \cdot 10^4 \text{ Н},$$

что соответствует возможной поднимаемой массе чуть больше полутора тонн.

А что известно о пассажирах аэростата? Сайрес Смит – «сухопарый, подтянутый»; Гедеон Спилет – «высокого роста и еще не стар – лет сорока не больше, .. энергичный, подвижный»; негр Нат – «сильный, проворный, ловкий»; моряк Пенкроф – «рослый, крепкий»; юный Герберт Браун – «смелый мальчик»; Топ – «вышколенная англо-нормандская гончая». Судя по этому описанию, пассажиры не были рыхлыми толстяками, поэтому разумно принять массу четырех счастливых, выброшенных на берег, равной $m_A = 300 \text{ кг}$, а массу двух упавших в океан (Смита и Тоба) считать равной $m_C + m_T = 100 \text{ кг}$ (для круглого счета).

Итак, пока что мы насчитали суммарную массу порядка полутонны:

$$m_A + m_C + m_T + m_T = 520 \text{ кг}.$$

В начальный момент шар мог поднять массу порядка одной тонны, в которую, конечно, входит масса оболочки шара $m_{ш}$ (неизбежная, хотя и нежелательная) и масса какого-то еще полезного груза (помимо уже учтенной массы путешественников). Мы уже никогда не узнаем общую начальную массу запаса патронов, оружия, провианта и десятки тысяч золотых франков («тяжелый мешок»), выброшенных еще до точки А (см. рис. 1). Но известно, что, как только сбросили весь груз и гондолу, шар поднялся до высоты 2000 Ф. (точка В). В этой точке реализовалось равенство силы Архимеда и силы тяжести всех пассажиров, оболочки шара и водорода (газа):

$$m_A + m_C + m_T + m_{ш} = V_B \rho \left(1 - \frac{\rho_T}{\rho}\right).$$

Приблизительно через два с половиной часа (в точке Е) аналогичное равенство (но уже без Смита и Тоба) дает

$$m_A + m_{ш} = V_E \rho \left(1 - \frac{\rho_T}{\rho}\right).$$

В последних двух равенствах учтено, что изменились объем шара V и масса оставшегося газа m_T . Строго говоря, в точках В и Е обращается в ноль вертикальная составляющая скорости, а не ускорения, или равнодействующей всех сил. Но начиная с этих точек происходит уже очень медленный

спуск, при котором все силы почти уравновешены на «большом времени».

Но что же происходило на «малом времени», когда аэростат «взмывал» вверх после очередного сброса массы? Запишем изменение его кинетической энергии под действием подъемной силы, силы тяжести и силы сопротивления воздуха при изменении высоты на Δy :

$$(m + m') \frac{\Delta v^2}{2} = \left(V \rho g - mg - \frac{1}{2} \rho S \frac{v^2}{2} \right) \Delta y.$$

Здесь m – суммарная масса путешественников, оболочки шара и газа внутри шара. А m' – это очень важная величина, которую никак нельзя забывать при ускоренных движениях аэростатов, дирижаблей, парашютов и пузырьков газа в жидкостях. Она называется *присоединенной массой*. Ее возникновение можно пояснить при помощи рисунка 2. Если шар переместится в воздухе на Δy , то воздух должен заполнить пустоту позади него (что условно показано стрелками). Таким образом, ускоренное движение шара вызовет, в принципе, и ускоренное движение всей окружающей атмосферной – к шару как бы «прилипает» некоторая присоединенная масса m' . В теоретической гидромеханике показано, что она равна половине массы объема воздуха, вытесненного шаром:

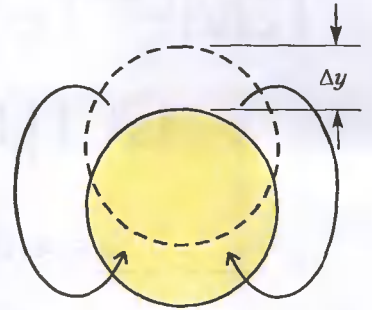


Рис. 2

$$m' = \frac{1}{2} V \rho \leq \frac{1}{2} V_0 \rho = 850 \text{ кг}.$$

Видно, что она больше суммы масс водорода в шаре и всех пассажиров.

Два первых слагаемых в скобках в правой части уравнения, описывающего изменение кинетической энергии аэростата, не требуют пояснений. Последнее слагаемое – это сила аэродинамического сопротивления. Как видно, она пропорциональна плотности воздуха, площади поперечного сечения движущегося тела и квадрату его скорости. А безразмерный множитель – это коэффициент сопротивления, в нашем уравнении выписано его значение для шара.

Конечно, в процессе подъема аэростата изменяется и масса водорода m_T (за счет вытекания через отверстие), и объем V , и площадь поперечного сечения S , но мы ведь договорились о расслоении по физическим процессам: на «малом времени» эти величины можно считать неизменными.

Теперь введем обозначения:

$$v_*^2 = \frac{V \rho - m}{\rho S} \cdot 4g \text{ и } y_* = \frac{V \rho / 2 + m}{\rho S} \cdot 2$$

и перепишем уравнение изменения кинетической энергии аэростата:

$$\Delta v^2 = (v_*^2 - v^2) \frac{\Delta y}{y_*}.$$

Тогда решение этого уравнения примет вид

$$\frac{y - y_0}{y_*} = \ln \frac{1}{1 - \left(\frac{v - v_0}{v_*} \right)^2},$$

где y_0 – начальная высота, v_0 – скорость опускания до сброса гондолы (в точке А) или до «потери» Смита с Топом (в точке D), а y_* и v_* – постоянные величины, смысл

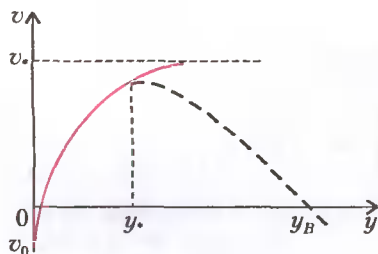


Рис. 3

которых ясен из рисунка 3: как говорят физики умными словами, скорость асимптотически стремится к постоянному значению v_* на характерном расстоянии y_* .

Выходит, что в наших предположениях аэростат должен вечно подниматься вверх с постоянной скоростью v_* ?

(Кстати, ее легко найти из нашего исходного уравнения, не решая его, а просто приравняв левую часть нулю, что и будет означать установившийся режим.) И тут пора вспомнить о медленном опускании на «большом времени». Мы не знаем, как быстро вытекал водород через отверстие в оболочке шара. Но мы можем оценить среднюю скорость опускания на участке BB_1 : согласно рисунку 1, в течение приблизительно двух часов шар снизился на $1500 \text{ Ф.} = 500 \text{ м}$; значит, средняя скорость опускания была

$$\langle v_{\downarrow} \rangle = \frac{500 \text{ м}}{2 \cdot 3600 \text{ с}} = 7 \text{ см/с}.$$

Заметим, что при такой скорости сила сопротивления воздуха пренебрежимо мала.

Обсудим подробнее характерное расстояние, или *длину релаксации*

$$y_* = \frac{m + m'}{\rho S/2}.$$

Ясно, что полная масса аэростата m должна быть не больше, чем масса воздуха в объеме шара. Поэтому

$$m + m' \leq V_0 \rho + \frac{1}{2} V_0 \rho = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r_0^3 \rho = 2\pi r_0^3 \rho.$$

Отсюда

$$y_* \leq \frac{2\pi r_0^3 \rho}{\rho \pi r_0^2 / 2} = 4r_0.$$

Таким образом, установление скорости происходит на расстоянии, равном приблизительно двум диаметрам шара, т.е. «взмывание» заканчивается на полсотне метров (~150 футов). Получается, что траектория движения аэростата выглядит скорее как $AA'B'$, а сила сопротивления воздуха уравнивает убывающую подъемную силу. Конечно, к этому моменту аэростат перестал быть шаром. Если при этом вообразить его, например, цилиндром длиной πr_0 (его меридиан считаем нерастяжимым), то объем его будет равен $V = \pi r_0 S$.

Собирая всю накопленную информацию, желающий да проведет «разбор полета»: рассчитает, как изменялись его параметры вдоль всей траектории аэростата от A до F . Но при этом надо помнить, что, во-первых, решение *обратных задач* (восстановления событий по их следам) – дело непростое даже при объективных данных, а во-вторых, сама объективность показаний Жюль Верна может вызывать сомнения: не летел же он рядом с аэронавтами на вертолете (иначе сам бы и помог, как благородный человек). Поэтому, например, его показания о быстром взлете и медленном спуске шара ($\tau_{\uparrow} \ll \tau_{\downarrow}$) могут оказаться неправдоподобными, так что вдруг на самом деле эти времена одного порядка ($\tau_{\uparrow} \sim \tau_{\downarrow}$). Мы же ограничимся предоставленной возможностью поговорить о физике на основе этой забавной выдумки инженера и талантливого писателя теперь уже позапрошлого века.

Приложение для желающих вычислять

1) Плотность стандартной атмосферы на разных высотах:

y , км	0	1	2	3
ρ , кг/м ³	1,225	1,117	1,0066	0,9094;

2) 1 морская миля = 1852 м;

3) 1 кабельтов = 183 м;

4) 1 фут = 1 Ф. = 0,305 м.

Новая галактика и все ее поля

А. СТАСЕНКО

СКОЛЬКО МОДЕЛЕЙ ВСЕЛЕННОЙ СОЗДАНО НА СЕГОДНЯШНИЙ ДЕНЬ! Вселенная Эйнштейна и вселенная Фридмана, вселенная Леметра и вселенная Эддингтона – целый набор вселенных! Все эти модели отражали определенный уровень физических представлений, достигнутый к моменту их построения.

Попробуем и мы «создать» если не вселенную, то хотя бы галактику. И пусть эта Новая галактика состоит из звезд

одинаковой массы, несущих одинаковый электрический заряд. И, как всякая приличная галактика, пусть она вращается – конечно, вокруг оси и, конечно, с постоянной угловой скоростью. А вот отличается она от всех других галактик тем, что представляет собою бесконечно длинный цилиндр, вращающийся вокруг своей оси. Можно приписать ей и другие свойства. Например, пусть концентрация звезд (т.е. их количество в единице объема) постоянна.

Как видим, «создать» галактику не так уж сложно. Но чтобы разобраться в том, что в ней происходит, придется подумать.

Прежде всего, ясно, что каждая звезда будет находиться в поле тяготения других звезд. «Напряженность» этого поля тяготения (или силу, действующую на единицу массы, или локальное ускорение тяготения) обозначим по привычке буквой \vec{g} . Тогда гравитационная сила, действующая на выделенную звезду массой m , равна $m\vec{g}$. Кроме того, обладая электрическим зарядом q , каждая звезда испытывает на себе действие электрической силы $q\vec{E}$, где \vec{E} – напряженность электрического поля, созданного всеми другими звездами, кроме нее самой. Далее, находясь во вращающейся системе, каждая звезда обладает центростремительным ускорением, равным $\omega^2 \vec{r}$, где \vec{r} – радиус-вектор данной звезды, начало которого находится на оси, а ω – угловая скорость

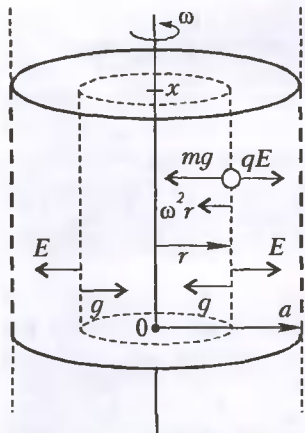


Рис 1

вращения. Все эти силы и ускорения изображены на рисунке 1. Но почему там поля \vec{g} и \vec{E} строго перпендикулярны оси вращения? Это потому, что «по построению» наша Новая галактика бесконечна в осевом направлении; значит, в любом ее поперечном сечении осевые компоненты полей взаимно уничтожаются: сколько звезд находится «над» этим сечением, столько же имеется и «под» ним.

Итак, электрическое поле, созданное всеми заряженными звездами внутри цилиндра радиусом r , «торчит», наружу во все стороны. Но говорить о поле, что оно «торчит», как-то неблагозвучно, поэтому физики придумали другие слова: поток поля через поверхность цилиндра радиусом r и длиной x (и, значит, площадью $2\pi r x$) равен $2\pi r x E$. Оказывается, этот поток создается всеми зарядами внутри этого цилиндра, т.е. в объеме $\pi r^2 x$. И если концентрация звезд n , а заряд каждой из них q , то суммарный электрический заряд внутри этого цилиндра равен $\pi r^2 x n q$. Так вот, поток электрического поля через поверхность цилиндра равен суммарному заряду внутри, деленному на электрическую постоянную ϵ_0 :

$$2\pi r x E = \frac{\pi r^2 x n q}{\epsilon_0}$$

(Этот факт можно проверить на примере точечного заряда q , окружив его сферой радиусом r : $4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0}$, откуда следует известное выражение для напряженности поля, непосредственно вытекающее из закон Кулона: $E = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$.) Значит, величина напряженности электрического поля на расстоянии r от оси равна

$$E = \frac{nqr}{2\epsilon_0}$$

а вектор напряженности направлен наружу вдоль радиус-вектора \vec{r} .

Точно так же поток напряженности \vec{g} гравитационного поля через поверхность цилиндра *внутри* его связан с суммарной массой внутри цилиндра $\pi r^2 x n m$ аналогичным законом:

$$2\pi r x g = -\pi r^2 x n m \cdot 4\pi G,$$

где G – постоянная тяготения. (Отсюда для точечной массы m_0 можно получить закон Ньютона: $m_0 g = -G \frac{m_0 m}{r^2}$). Значит, напряженность поля тяготения на расстоянии r от оси цилиндра равна

$$g = -2G n m \pi r.$$

А теперь запишем уравнение движения звезды массой m , находящейся на расстоянии r от оси вращения Новой галактики (см. рис. 1):

$$m\vec{g} + q\vec{E} = m\omega^2 \vec{r},$$

или в проекции на направление вдоль радиуса:

$$-2mG n m \pi r + \frac{qnqr}{2\epsilon_0} = -m\omega^2 r.$$

Отсюда найдем угловую скорость вращения:

$$\omega = \sqrt{\frac{mn}{2} \left(4\pi G - \left(\frac{q}{m} \right)^2 \frac{1}{\epsilon_0} \right)}.$$

Так как мы предположили, что звезды равномерно распределены в пространстве, т.е. n постоянно внутри нашей цилиндрической галактики, то угловая скорость тоже одинакова во всех ее точках. Следовательно, наша галактика вращается как твердый стержень.

Далее, линейная (окружная) скорость звезд равна ωr . Но поскольку каждая звезда несет электрический заряд, ее перемещение создает электрический ток, плотность которого равна

$$j = qn\omega r.$$

Видно, что в наших предположениях плотность тока линейно растет от центра к периферии галактики: $j \sim r$. И так как все заряды движутся по окружностям, то и токи будут кольцевыми.

Выделим внутри нашей галактики колечко, содержащее большое количество звезд, но достаточно малого поперечного сечения – так называемое *элементарное* колечко. На рисунке 2,а показано направление движения звезд, т.е. направление элемента тока $I\Delta l$ внутри этого колечка, а также структура магнитного поля, порожденного элементарным током.

Возьмем теперь целый набор таких токов, имеющих одинаковый радиус r . И пусть их много, так что длина этого набора вдоль оси вращения галактики много больше радиуса, т.е. $x \gg r$. Очевидно, мы получим нечто похожее на соленоид (рис. 2,б). Как известно, магнитное поле \vec{B} внутри соленоида постоянно, а снаружи равно нулю. Это не значит, что снаружи его вовсе нет. Просто, поскольку все линии поля \vec{B} замкнуты, т.е. нигде не начинаются и нигде не кончатся, то весь пучок линий \vec{B} , прошедших через поперечное сечение соленоида πr^2 , должен пройти и через бесконечную площадь поперечного сечения вне соленоида. А так как напряженность любого поля пропорциональна, в частности, числу его линий, пронизывающих единичную площадку (или плотности потока поля), то эта напряженность и стремится к нулю всюду вне соленоида при условии $x/r \rightarrow \infty$.

Рассмотрим еще один кольцевой слой токов, радиусом $r + \Delta r$. Можно представить, что внутренний соленоид окружили внешним соленоидом (рис. 2,в). Тогда магнитные поля обоих соленоидов сложатся внутри внутреннего соленоида, а вне внешнего соленоида поле по-прежнему останется равным нулю.

Из этих рассуждений ясно, что в нашей галактике магнитное поле будет наибольшим на оси и нулевым снаружи. Но как найти зависимость напряженности поля от радиуса?

Обратимся снова к рисунку 2,в. Поскольку наше осевое магнитное поле порождается коль-

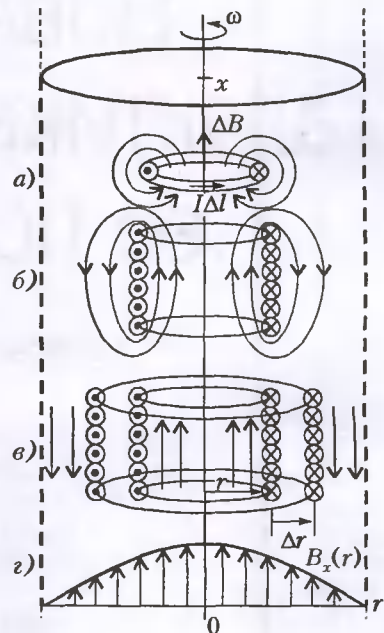


Рис 2

цевыми токами, то очевидно, что его приращение связано с приращением тока при перемещении по радиусу: $\Delta B_{r+\Delta r} \sim j\Delta r$. Подставив сюда выражение для плотности тока, получим $\Delta B \sim qn\omega r \Delta r$. Мы опустили здесь индекс $r + \Delta r$, потому что и без него теперь понятно, что речь идет о приращении поля с изменением радиуса. Далее, поскольку в нашей галактике, по предположению, $qn\omega$ есть постоянная величина, полученную пропорциональную зависимость можно записать в виде

$$\Delta B \sim r\Delta r.$$

Теперь нужно сложить все элементарные поля, порожденные элементарными соленоидами, т.е. проинтегрировать последнее выражение. Но кто же не знает, что при интегрировании линейной функции получается квадратичная. Поскольку, как мы уже выяснили, магнитное поле должно быть наибольшим на оси и нулевым на окраине галактики (при $r = a$), эта квадратичная зависимость должна выглядеть так:

$$B \sim \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right).$$

Графиком этой функции является парабола (рис. 2,з). А вот

точный результат:

$$B = \mu_0 \frac{qn\omega a^2}{2} \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right),$$

где μ_0 — магнитная постоянная.

Итак, мы нашли все поля в Новой галактике, вращающейся с постоянной угловой скоростью и состоящей из электрически заряженных звезд. И чтобы еще раз напомнить, как направлены векторные линии этих полей, введем индексы, соответствующие координатам цилиндрической системы: x — осевая, r — радиальная координаты. Тогда полученные напряженности полей лучше обозначить так: B_x , E_r , g_r .

Все это хорошо, поскольку на примере нашей Новой галактики мы смогли еще раз показать, как «работают» законы электромагнитостатики. Но как насчет устойчивости такой галактики? Ведь стоит где-то образоваться сгустку или разрежению звезд, как вся система начнет разваливаться. Случайно ли, что такие «галактики» не обнаружены?

Однако, это уже другой вопрос, тоже тонкий и не менее интересный.

В цепи переменного тока

С. СЕРОХВОСТОВ

Во многих учебниках физики формулы для амплитуды тока и сдвига фаз между током и напряжением в цепи переменного тока, состоящей из катушек индуктивности, резисторов и конденсаторов, даются без вывода. Однако вдумчивым школьникам всегда хочется, чтобы «все было по-честному», чтобы было понятно, почему формулы имеют именно такой вид. Покажем, как можно получить эти формулы, используя только школьные знания по физике.

Рассмотрим самый простой вариант схемы: пусть к источнику переменного напряжения U подключена электрическая цепь из соединенных последовательно резистора сопротивлением R , конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L (рис. 1).

Если характерный размер контура x и круговая частота переменного напряжения источника ω таковы, что $x \ll \ll 2\pi c/\omega$, где c — скорость света в вакууме, а $2\pi c/\omega$ — длина электромагнитной волны, соответствующая данной частоте, то сила тока в каждой точке нашей цепи в один и тот же момент времени будет иметь практически одну и ту же фазу (естественно, эта фаза будет меняться со временем, но меняться она будет во

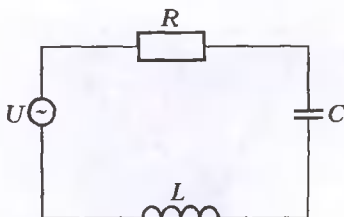


Рис. 1

всех точках одинаково). Это предположение дает нам возможность считать, что в цепи течет так называемый квазистационарный переменный ток, и применить для анализа цепи правила Кирхгофа.

Согласно первому правилу Кирхгофа, сумма токов, втекающих в любую точку разветвления цепи, равна сумме токов, вытекающих из этой точки. Второе правило Кирхгофа гласит, что алгебраическая сумма падений напряжений на элементах простого замкнутого контура равна алгебраической сумме всех ЭДС в этом контуре. В нашей схеме напряжение падает на конденсаторе $\left(\frac{q}{C}\right)$ и на резисторе (IR), а в качестве ЭДС выступают источник напряжения (U) и катушка, в которой возникает ЭДС индукции $\left(-L \frac{dI}{dt}\right)$. Поэтому запишем

$$U - L \frac{dI}{dt} = \frac{q}{C} + IR. \quad (1)$$

Здесь мы обозначили заряд на конденсаторе буквой q , а силу тока в цепи — буквой I .

Так как напряжение источника изменяется по синусоидальному закону, то логично считать, что сила тока в цепи, заряд и напряжение на конденсаторе будут изменяться со временем также синусоидально и с той же частотой. Пусть, для определенности, $q = q_0 \sin \omega t$. Тогда

$$I = q' = q_0 \omega \cos \omega t.$$

На практике удобнее измерять именно силу тока, а не заряд на конденсаторе, поэтому положим $q_0 = I_0/\omega$ и получим

$$q = \frac{I_0}{\omega} \sin \omega t, \quad I = I_0 \cos \omega t.$$

Теперь уравнение (1) можно записать следующим образом:

$$U = -LI_0 \omega \sin \omega t + RI_0 \cos \omega t + \frac{I_0}{\omega C} \sin \omega t.$$

Очевидно, что фаза напряжения источника отличается от фазы силы тока в цепи на некоторый угол φ . Пусть

$$U = U_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

В этом случае формула (1) будет иметь вид

$$U_0 \cos(\omega t + \varphi) = -LI_0 \omega \sin \omega t + RI_0 \cos \omega t + \frac{I_0}{\omega C} \sin \omega t.$$

Преобразуем выражение в левой части при помощи формулы для косинуса разности углов:

$$U_0 (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) = \\ = -LI_0 \omega \sin \omega t + RI_0 \cos \omega t + \frac{I_0}{\omega C} \sin \omega t.$$

Сгруппируем теперь отдельно члены уравнения с $\cos \omega t$ и члены с $\sin \omega t$:

$$\left(-U_0 \sin \varphi + LI_0 \omega - \frac{I_0}{\omega C} \right) \sin \omega t = (-U_0 \cos \varphi + RI_0) \cos \omega t.$$

Эта формула должна быть верна для любого значения t . Такое возможно, только если множители при синусе и косинусе будут оба равны нулю, т.е. если

$$U_0 \sin \varphi = LI_0 \omega - \frac{I_0}{\omega C} \quad (2)$$

и

$$U_0 \cos \varphi = RI_0. \quad (3)$$

Возведем выражения (2) и (3) в квадрат и сложим. В результате получим

$$U_0^2 = I_0^2 \left(R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right).$$

Отсюда нетрудно получить выражение для I_0 :

$$I_0 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \quad (4)$$

Эта формула очень похожа на закон Ома для участка цепи,

если за сопротивление принять величину

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}.$$

Поэтому Z часто называют комплексным сопротивлением, или импедансом цепи.

Если мы знаем I_0 , то мы знаем силу тока в любой момент времени, так как $I = I_0 \cos \omega t$. Однако для полного решения задачи нам следует ответить еще на один вопрос: а чему равен сдвиг фаз φ ? Для этого разделим друг на друга уравнения (2) и (3) и получим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (5)$$

Взяв арктангенс от правой части этого равенства, получим искомый угол, после чего задача будет полностью решена.

Как видим, формулы (4) и (5) получить действительно достаточно просто. Ну а теперь, когда вы уже почувствовали веру в собственные силы и знания, найдите самостоятельно силу тока I через источник и сдвиг фаз между U и I для схемы, изображенной на рисунке 2, а также силу тока, протекающего через каждый элемент цепи, изображенной на рисунке 3 (в этом случае вам понадобятся оба закона Кирхгофа).

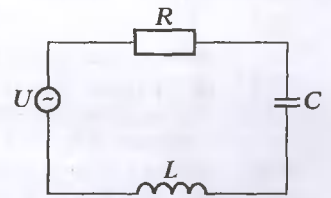


Рис. 2

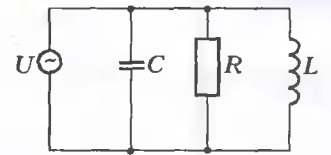


Рис. 3

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Описанная и вписанные сферы тетраэдра

А.ЗАСЛАВСКИЙ

ИЗ ПЛАНИМЕТРИИ ИЗВЕСТНЫ СЛЕДУЮЩИЕ СВОЙСТВА ТРЕУГОЛЬНИКА.

1. Вокруг любого треугольника можно описать окружность, центром которой будет точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

2. В любой треугольник можно вписать окружность, центром которой является точка пересечения его биссектрис. Для любого треугольника существуют также три

внеписанные окружности, каждая из которых касается одной из его сторон и продолжений двух других.

В этой статье речь пойдет об аналогичных свойствах тетраэдра.

Описанная сфера тетраэдра

Ситуация с описанной сферой достаточно проста. Следующая теорема полностью аналогична свойству 1 треугольника.

Теорема 1. Вокруг любого тетраэдра можно описать сферу. Ее центр — точка пересечения перпендикуляров к граням тетраэдра, проходящих через центры описанных около них окружностей.

Доказательство. Прежде всего отметим следующий факт.

Лемма 1. Пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой, O — центр окружности, описанной около треугольника ABC , l — прямая, проходящая через O и перпендикулярная плоскости ABC (рис. 1). Тогда любая точка X прямой l равноудалена от A, B и C .

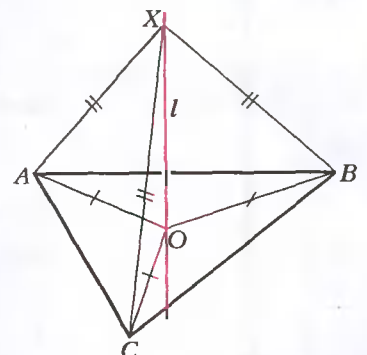


Рис. 1

Для доказательства достаточно заметить, что треугольники AOX , BOX и COX равны. Верно и обратное утверждение: любая точка, равноудаленная от A , B и C , лежит на прямой l . Это следует из того, что геометрическим местом точек пространства, равноудаленных от двух данных точек, является плоскость, перпендикулярная отрезку с концами в этих точках и проходящая через его середину. Пересечением двух таких плоскостей как раз и будет прямая l .

Рассмотрим теперь тетраэдр $ABCD$. Найдем центры описанных окружностей треугольников ABC и ABD и проведем через них перпендикуляры к плоскостям этих треугольников. Эти перпендикуляры не могут скрещиваться, так как лежат в плоскости, перпендикулярной отрезку AB и проходящей через его середину. Не могут они и быть параллельными, так как не параллельны перпендикулярные им плоскости ABC и ABD . Следовательно, существует точка O их пересечения, которая, очевидно, и является центром искомой сферы. Приведенное рассуждение доказывает также, что описанная сфера единственна.

Вписанная и невписанные сферы тетраэдра

Вопрос о вписанных в тетраэдр сферах исследовать сложнее. Для начала сформулируем теорему, аналогичную соответствующему плоскому факту.

Теорема 2. *В любой тетраэдр можно вписать сферу. Ее центром будет точка пересечения биссекторных плоскостей его двугранных углов.*

Доказательство. Как и в случае с описанной сферой, начнем с леммы.

Лемма 2. *Пусть дан трехгранный угол $OABC$ (рис. 2). Геометрическим местом точек, лежащих внутри угла и равноудаленных от его граней, является луч, проходящий через вершину угла.* (Будем называть этот луч *биссектрисой* трехгранного угла.)

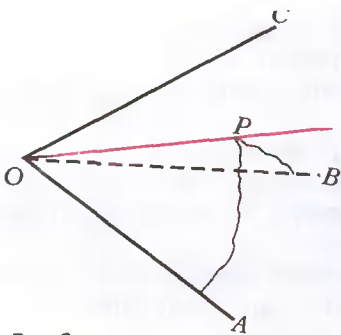


Рис. 2

Для доказательства леммы достаточно заметить, что геометрическим местом точек, равноудаленных от граней OAB и OAC , будет биссекторная плоскость двугранного угла при ребре OA , а геометрическим местом точек, равноудаленных от граней OAB и OBC , — биссекторная плоскость двугранного угла при ребре OB . Эти плоскости не параллельны, так как сумма углов, которые они образуют с плоскостью OAB , меньше π . Следовательно, внутри трехгранного угла они пересекаются по некоторому лучу OP , который и будет искомым геометрическим местом точек.

Пусть теперь дан тетраэдр $ABCD$ (рис. 3). Биссектрисы его трехгранных углов при вершинах A и B лежат в биссекторной плоскости двугранного угла при ребре AB и, значит, не могут скрещиваться. Не могут они быть и параллельными, так как биссекторная плоскость пересекает тетраэдр по треугольнику ABX , внутри которого про-

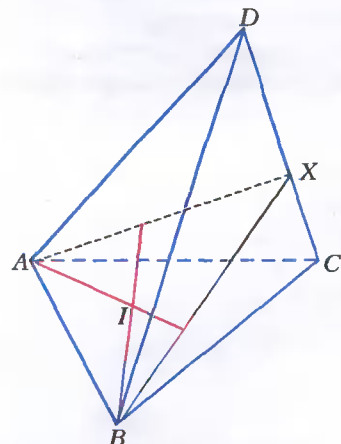


Рис. 3

ходят обе прямые. Следовательно, они пересекаются, и точка I их пересечения является центром искомой сферы.

Выясним теперь, сколько существует сфер, касающихся плоскостей всех граней тетраэдра. Прежде всего отметим, что их не может быть больше 8. Действительно, поскольку центр такой сферы равноудален от плоскостей ABC и ABD , он лежит в биссекторной плоскости одного из двух смежных двугранных углов между этими плоскостями. Аналогичны условия равноудаленности от плоскостей ABC и ACD , ABC и BCD . Так как каждую плоскость можно выбрать двумя способами, для трех плоскостей имеем 8 возможностей. В каждом из этих 8 случаев плоскости имеют не более одной общей точки (в противном случае, например, биссекторная плоскость угла при ребре AB проходила бы через точку C , что невозможно), которая однозначно определяет сферу.

Осталось выяснить, действительно ли эти 8 сфер существуют. Для этого посмотрим, на какие части разбивают пространство плоскости граней тетраэдра. Из рисунка 4 видно, что этих частей 15: а) внутренность тетраэдра, б) 4 трехгранных угла с вершинами в вершинах тетраэдра, в) 4 части, примыкающие к граням тетраэдра, г) 6 «корытцев», примыкающих к ребрам тетраэдра.

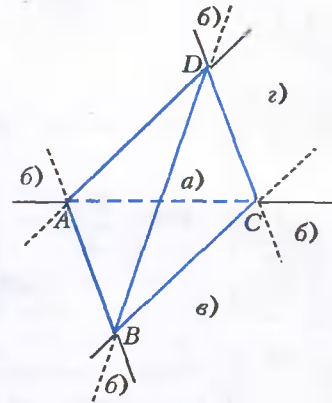


Рис. 4

Очевидно, что в части типа б) сфера вписана быть не может, так как каждая из таких частей не пересекается плоскостью четвертой грани. Докажем, что для части типа в) сфера — такая сфера называется *невписанной сферой тетраэдра* — существует всегда. Для этого построим вписанную в тетраэдр сферу и проведем к ней касательную плоскость, например параллельную плоскости ABC . Она отсекает от тетраэдра гомотетичный (с центром гомотетии D) тетраэдр $A'B'C'D$. Соответствующая гомотетия переводит вписанную сферу в искомую невписанную.

Наконец, исследуем части типа г). Пусть в такую часть, прилежащую к ребру CD , можно поместить сферу, касающуюся плоскостей всех граней, с центром K и радиусом r . Рассмотрим тетраэдры $ABCK$, $ABDK$, $ACDK$ и $BCDK$. Тогда объем V тетраэдра $ABCD$ можно записать так:

$$V = V_{ABCK} + V_{ABDK} - V_{ACDK} - V_{BCDK} = \frac{r}{3}(S_{ABC} + S_{ABD} - S_{ACD} - S_{BCD}).$$

Отсюда следует, что необходимым условием существования искомой сферы будет неравенство $S_{ABC} + S_{ABD} > S_{ACD} + S_{BCD}$. Для доказательства его достаточности заметим, что для любой точки рассматриваемого «корытца» ее расстояния a, b, c, d до плоскостей BCD, CDA, DAB, ABC удовлетворяют соотношению

$$dS_{ABC} + cS_{ABD} - bS_{ACD} - aS_{BCD} = 3V.$$

Поэтому для точки K , для которой $a = b = c = r = \frac{3V}{S_{ABC} + S_{ABD} - S_{ACD} - S_{BCD}}$, расстояние d также равно r .

Таким образом, если $S_{ABC} + S_{ABD} = S_{ACD} + S_{BCD}$, то ни в одно из «корытцев», прилегающих к ребрам AB и CD , вписать сферу нельзя, а если $S_{ABC} + S_{ABD} \neq S_{ACD} + S_{BCD}$, то сферу

(Окончание см. на с. 34)

Когда тонкая железная... проволока,... сообщенная с одним полюсом огромной батареи, будет... поднесена к углю, сообщенному с другим полюсом батареи, то между ними является также больше или меньше яркое пламя, от которого... конец проволоки почти во мгновение ока краснеет, скоро расплавляется и начинает гореть...

Восилий Петров

...проводящая способность металлов меняется с изменением температуры и уменьшается в том же отношении, в каком растет температура.

Гемфри Дэви

Прекрасные опыты Зеебека и Пельтье показывают взаимную превращаемость теплоты и электричества...

Майкл Фарадей

А так ли хорошо знакома вам взаимосвязь электричества и теплоты?

Конечно же, пересечение этих разделов физики уже происходило на страницах «Калейдоскопа». Легко догадаться, что тогда речь шла о законе Джоуля—Ленца: его изучение имеет большое значение и ему уделено немало внимания в школе. Он даже как бы заслонил собой другие весьма важные взаимоотношения двух поначалу стоящих порознь областей физики. Однако у них оказалось немало общего, и первые попытки нащупать связи между электрическими и тепловыми явлениями осуществлялись задолго до установления закона Джоуля—Ленца. Работы Петрова, Дэви, Зеебека и Пельтье были сделаны еще в первой трети XIX века, тогда же были заложены и опытные основы термоэлектричества. В научный и практический обиход вошли такие термины, как термопара, электрокалорический эффект, термоэлектронная эмиссия.

Сегодня понимание глубинных процессов, объединяющих теплоту и электричество, определяет прогресс и в исследовании сверхпроводимости, и в электронике, и в создании новых электротехнических приборов и источников энергии, отличающихся малыми габаритами, экономичностью и экологической безопасностью.

Поэтому давайте хотя бы «притронемся» к этой интересной и важной теме.

Вопросы и задачи

1. Иногда перегоревшую лампочку удается заставить снова светиться, встряхивая ее. Почему «ожившая» лампочка светит ярче?
2. Отчего концы перегоревшего волоска электрического предохранителя обычно оканчиваются шариками?
3. В момент включения лампочки сила тока в цепи отличается от той, которая имеет место, когда лампочка начинает светиться. Как изменяется ток в цепи с лампочкой, имеющей металлическую нить накала, и в цепи с лампочкой с угольной нитью?
4. Две лампочки одинаковой мощности, расчи-

танные на одно и то же напряжение, включены последовательно в сеть с этим напряжением. Одна из лампочек имеет металлическую нить накала, другая — угольную. Какая из них накалена сильнее?

5. Почему при расчете увеличения сопротивления металлического проводника с ростом температуры не учитывают удлинение проводника?

6. Лампу, рассчитанную на напряжение 220 В, включили в сеть с напряжением 127 В. Считая, что мощность пропорциональна квадрату напряжения, можно сделать вывод, что она будет втрое меньше номинальной. Так ли это?

7. Когда величина тока в цепи будет больше: если вся никелиновая спираль, включенная в электрическую цепь, находится в воде или если часть ее вынута из воды?

8. По классической электронной теории, сопротивление металлов прямо пропорционально их абсолютной температуре. Какое явление противоречит этому выводу?

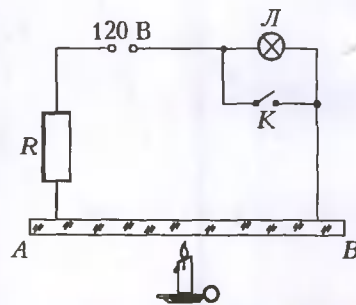
9. Почему при дуговом разряде сильно разогревается именно катод, хотя заряженные частицы бомбардируют оба электрода?

10. Что произойдет с горячей электрической дугой, если сильно охладить отрицательный электрод? А положительный?

11. Электрическая дуга низкого напряжения создана между угольным электродом и большой металлической плитой и питается от трансформатора. Каким будет ток в цепи: переменным или выпрямленным?

12. Можно ли получить электронный луч в трубке, из которой полностью удален газ?

13. Пока стеклянная палочка *AB*, включенная в изображенную на рисунке цепь, остывает холодной, ток



в цепи ничтожно мал и лампочка L не горит. При нагревании палочки нить лампочки начинает светиться. Если теперь закоротить лампочку и убрать горелку, палочка «сама» раскаляется до яркого свечения. Как это объяснить?

14. Для постепенного увеличения силы тока в электродвигателе при его пуске вместо реостата со скользящим контактом в цепь последовательно с двигателем включают кусок полупроводника. В чем физический смысл такой замены?

15. Как изменяется сопротивление примесных полупроводников в зависимости от температуры?

16. При нагревании одного из концов полупроводникового стержня, изготовленного из германия с примесью индия, возникает разность потенциалов между нагретым и холодным концами. Почему? Потенциал какого конца стержня выше?

Микроопыт

Соберите электрическую схему, состоящую из батарейки на 4,5 В, лампочки для карманного фонарика и двух полосок жести, разделенных воздушным промежутком в 1–3 мм. Если в этот промежуток ввести несколько капель некрепкого раствора соли, замыкающего цепь, лампочка станет еле заметно гореть. Однако при нагревании раствора, например горящей спичкой, накал лампочки существенно увеличится. С чем это связано?

Любопытно, что...

...сам Томас Зеебек – немецкий физик, случайно открывший термоэлектричество, ошибочно считал, что разность температур в местах соприкосновения разнородных металлов «освобождает» магнетизм, и назвал новое явление термомагнетизмом. Это, однако, не помешало ему построить термопару и использовать ее для измерения температуры.

...многие физики с сомнением отнеслись к опытам француза Жана Пельтье, обнаружившего в месте контакта двух разнородных проводников выделение или поглощение тепла в зависимости от направления электрического тока. Возможно, недоверие было связано с тем, что до тридцати лет Пельтье был часовщиком и лишь потом посвятил себя науке.

...использование явления Пельтье в полупроводниковых термоэлементах позволило создать (уже в XX веке) холодильные машины, не уступающие по эффективности некоторым моделям домашних холодильников.

...экспериментальное подтверждение обратимости эффектов Зеебека и Пельтье получил в 1838 году русский ученый Эмилий Христианович Ленц. Поместив каплю воды на одном из спаев термоэлемента, он заморозил ее, пропуская ток по проводникам от внешнего источника, в то время как второй спай при этом нагревался.

...великий английский физик Уильям Томсон (лорд Кельвин), сумевший объяснить термоэлектрические явления на основе термодинамики, в 1856 году открыл так называемый третий термоэлектрический

эффект: когда по проводнику проходит электрический ток и вдоль него имеется перепад температур, то помимо джоулева тепла в нем выделяется или поглощается (в зависимости от направления тока) еще некоторое количество теплоты.

...обнаруженная в 1821 году английским ученым Гемфри Дэви зависимость проводимости металлов от температуры очень слабо проявляется в сплавах. Например, сопротивление константана, состоящего из меди, никеля и марганца, практически не меняется при нагревании или охлаждении, что очень важно при конструировании особо точных электротехнических устройств.

...за выдающимся американским изобретателем Томасом Эдисоном числится и одно физическое открытие – в 1883 году он впервые наблюдал термоэлектронную эмиссию. Но не найдя этому эффекту (названному потом его именем) практического применения, Эдисон забывает об открытии. Несколько позже английский физик Джон Флеминг находит объяснение явлению и уже в 1904 году патентует вакуумный диод – первую радиолампу, работа которой связана с эффектом Эдисона.

...топливные элементы, непосредственно превращающие химическую энергию в электрическую без промежуточного образования тепла, пробовали создать более полутора столетий назад. Однако лишь сравнительно недавно эти элементы достигли стадии практического воплощения, и то в довольно экзотических случаях, как например в экспедиции «Аполлона» на Луну.

...еще одна возможность преобразования тепла в электричество осуществлена в конце XX века – это термофотоэлектричество. Энергия сжигаемого топлива переводится в инфракрасное излучение, улавливаемое полупроводниками, вырабатывающими электрический ток. Уже выпускаются действующие на этом принципе генераторы для рыболовных судов, впереди – разработка элемента питания для военных целей и автомобильной промышленности.

Что читать в «Кванте» о взаимосвязи электричества и теплоты

(публикации последних лет)

- 1 «Эффект Эдисона» – 1996, Приложение № 6, с. 66;
- 2 «О термоэлектричестве, анизотропных термоэлементах и... английской королеве» – 1997, № 1, с. 13;
- 3 «И Эдисон похвалил бы вас...» – 1997, № 2, с. 14;
- 4 «Просто физика» – 1998, № 4, с. 10;
- 5 «Страсти по сверхпроводимости в конце тысячелетия» – 2000, № 1, с. 2;
- 6 «Домашний термоэлектрогенератор» – 2001, № 4, с. 44; 2002, Приложение №4, с.125;
- 7 Калейдоскоп «Кванта» – 2002, № 5, с. 32.

Материал подготовил
А.Леонович

(Начало см. на с.30)

можно вписать ровно в одно из этих двух «корытца». Соответственно, в зависимости от того, сколько из равенств $S_{ABC} + S_{ABD} = S_{ACD} + S_{BCD}$, $S_{ABC} + S_{ACD} = S_{ABD} + S_{BCD}$, $S_{ABC} + S_{BCD} = S_{ACD} + S_{ABD}$ выполняются, количество сфер, вписанных в части типа г), может быть не более трех.

Итак, всего сфер, касающихся плоскостей всех граней тетраэдра, — от 5 до 8.

Упражнение 1. Постройте примеры тетраэдров, реализующих указанные возможности.

Краснодарский школьник И.Шнурников нашел другое условие для определения числа сфер, вписанных в «корытца». Оно основано на следующем факте.

Лемма 3. Пусть дан четырехгранный угол $OABCD$ и сфера, касающаяся изнутри его граней OAB , OBC и OCD . Тогда

если $\angle AOB + \angle COD = \angle BOC + \angle AOD$, то плоскость OAD также касается сферы;

если $\angle AOB + \angle COD > \angle BOC + \angle AOD$, то плоскость OAD не пересекает сферы;

если $\angle AOB + \angle COD < \angle BOC + \angle AOD$, то плоскость OAD пересекает сферу.

Доказательство леммы 3 полностью повторяет доказательство аналогичного утверждения об описанном четырехугольнике.

Найдем теперь необходимое и достаточное условие существования сферы, вписанной в «корытце», прилегающее к ребру CD тетраэдра. Пусть лучи DP и DQ противоположны DA и DB соответственно, а лучи DR и DS параллельны лучам BC и AC (рис.5).

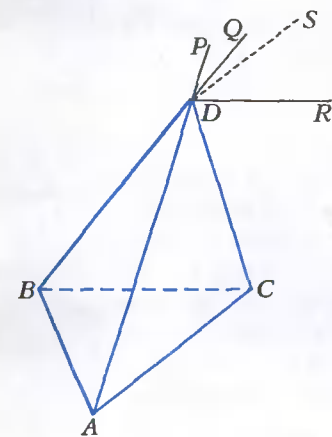


Рис. 5

Рассмотрим любую сферу, касающуюся всех граней угла $DPQRS$, кроме, возможно, DRS . Если плоскость DRS пересекает сферу, то, меняя ее радиус, можно добиться искомого касания с плоскостью ABC , а если нет — то нельзя. По лемме 3 соответствующее условие имеет вид

$$\angle ADB + \angle ACB > \angle CAD + \angle CBD.$$

Аналогично, для ребра AB необходимым и достаточным

условием будет противоположное неравенство. Следовательно, верна такая теорема.

Теорема 3. Если $\angle ADB + \angle ACB = \angle CAD + \angle CBD$, то ни в одно из «корытца», прилегающих к ребрам AB и CD , нельзя вписать сферу, а если $\angle ADB + \angle ACB \neq \angle CAD + \angle CBD$, то сферу можно вписать ровно в одно из этих двух «корытца».

Упражнение 2. Докажите равносильность условий $\angle ADB + \angle ACB > \angle CAD + \angle CBD$ и $S_{ABC} + S_{ABD} > S_{ACD} + S_{BCD}$ непосредственно. Указание. Рассмотрите четырехугольник $ABCD$ с фиксированными сторонами и меняющимися углами и покажите, что его площадь есть функция от $\cos(A+C)$.

В заключение этой части статьи отметим следующий красивый факт. Пусть I — центр вписанной в тетраэдр сферы радиуса r ; X, Y — его проекции на ребра AC, BC ; D' — точка касания сферы с гранью ABC (рис.6). Тогда по теореме о трех перпендикулярах

$$D'X = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \quad D'Y = r \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2},$$

где α и β — величины двугранных углов при ребрах AC и BC . Таким образом, расстояния от точки касания до сторон основания относятся как котангенсы половин двугранных углов при соответствующих ребрах. Аналогично, если рассмотреть вневписанную сферу, касающуюся грани ABC и продолжений остальных граней, то расстояния от точки D'' ее касания с ABC до ребер основания относятся как тангенсы тех же углов. Отсюда следует, что

$$\angle D'CA = \angle D''CB, \quad \angle D'AC = \angle D''AB, \quad \angle D'BC = \angle D''BA.$$

Точки, удовлетворяющие этим условиям, называются *изогонально сопряженными* относительно треугольника ABC . Итак, доказан следующий факт.

Теорема 4. Точки касания вписанной и вневписанной сфер изогонально сопряжены относительно соответствующей грани.

Сфера, касающаяся всех ребер тетраэдра

Может возникнуть вопрос, почему в качестве аналога вписанной окружности треугольника мы решили взять сферу, касающуюся всех граней тетраэдра, а не всех его ребер. Дело в том, что последняя сфера существует не всегда. Действительно, пусть сфера касается ребер тетраэдра в точках X, Y, Z, U, V, W (рис.7). Тогда $AX = AU = AW = a$ как касательные, проведенные к сфере из одной точки.

Аналогично, $BY = BU = BV = b$, $CZ = CV = CW = c$, $DX = DY = DZ = d$. Следовательно, $AB + CD = AC + BD = AD + BC = a + b + c + d$, т.е. необходимым условием существования искомой сферы является равенство сумм противоположных ребер тетраэдра. Докажем, что это условие будет и достаточным.

Рассмотрим окружности, вписанные в треугольники ABC и ABD . Первая из них касается ребра AB в точке U , такой, что $AU = (AB + AC - BC)/2$. Так как $AC - BC = AD - BD$, точка U будет точкой касания с AB и второй окружности. Поэтому перпендикуляры к плоскостям ABC и ABD , восстановленные из центров этих окружностей, лежат в плоскости, перпендикулярной AB и проходящей через U , а значит, пересекаются в некоторой точке J . Поскольку это верно для перпендикуляров, проведенных к любым двум граням, все четыре перпендикуляра проходят через J . Тогда J равноудалена от точек всех четырех вписанных в грани тетраэдра окружностей, т.е. является центром искомой сферы.

Тетраэдры, для которых существует сфера, касающаяся всех его ребер, называются *каркасными*.

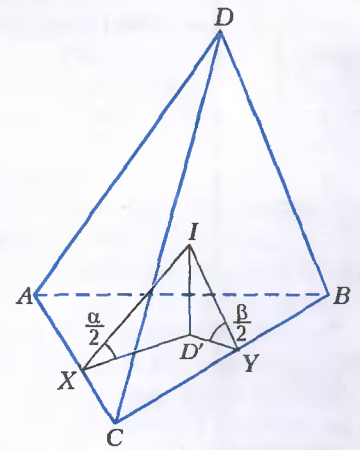


Рис. 6

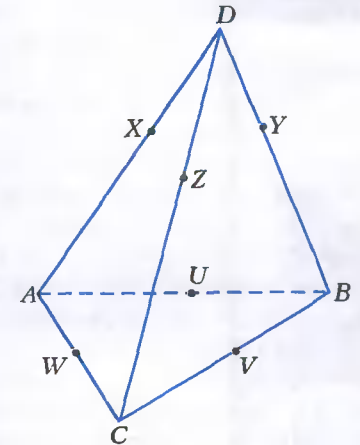


Рис. 7

Упругие силы, деформации и закон Гука

В. ПЛИС

Под воздействием внешних сил тела в той или иной степени деформируются, т.е. изменяют свою форму и объем. При деформации молекулы тела смещаются, и тело выводится из состояния равновесия, в котором оно находилось первоначально. При этом, вследствие взаимодействия молекул, в теле возникают силы, стремящиеся вернуть его в состояние равновесия. Эти силы действуют на каждый элемент поверхности произвольного объема, выделенного в теле, со стороны окружающих его частей.

Ограничимся рассмотрением деформаций однородных изотропных твердых тел. Если деформации исчезают после прекращения действия внешних сил, такие деформации называются упругими. О них и пойдет речь в статье.

Простейшим видом деформации является растяжение (или сжатие) тонкого горизонтального стержня, один из концов которого закреплен, а к другому приложена сила \vec{F} , стремящаяся растянуть стержень. Изменением площади S поперечного сечения стержня мы будем пренебрегать. На рисунке 1 изображены внешние силы \vec{F} и \vec{T} , действующие на весь стержень (\vec{T} — это сила реакции со стороны закрепления), и сила \vec{N} , действующая со стороны правой части стержня на левую. Отношение $\sigma(x) = \frac{N(x)}{S}$ называется механическим напряжением в сечении x и измеряется в паскалях (в СИ).

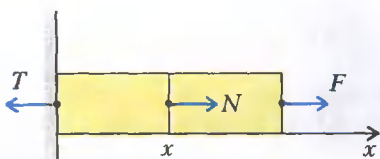


Рис. 1

При деформации стержня изменяются расстояния между его частями. Если до деформации малый элемент стержня лежал между координатами x и $x + \Delta x$ и, следовательно, имел длину Δx , то в деформированном состоянии его длина станет $\Delta x + \delta(\Delta x)$. Отношение $\frac{\delta(\Delta x)}{\Delta x}$ характеризует относительное удлинение элемента длиной Δx . Упругие деформации обычно невелики: величина относительного удлинения очень мала.

Для малых деформаций относительное удлинение пропорционально напряжению:

$$\frac{\delta(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{1}{E} \sigma(x),$$

где постоянный коэффициент E называется модулем Юнга (или модулем упругости) и определяется только свойствами материала стержня. Приведенный закон является основным законом теории упругости и известен под названием

закона Гука. Современник Ньютона, Роберт Гук сформулировал этот закон в 1676 году.

Величина деформации всего стержня характеризуется его полным удлинением $\Delta l = l - l_0$ (здесь l_0 и l — длины стержня до и после деформации) и относительным удлинением $\frac{\Delta l}{l_0}$. Найдем связь величины F растягивающей стержень силы с удлинением Δl стержня. Для того чтобы найти полное удлинение стержня, следует просуммировать элементарные удлинения $\delta(\Delta x)$ всех его элементов. В равновесии величины F , T и N сил одинаковы. Из этого следует, что напряжение $\sigma = \frac{N}{S} = \frac{F}{S}$ однородно по длине стержня, поэтому полное удлинение стержня равно

$$\Delta l = \sum \delta(\Delta x) = \frac{\sigma}{E} \sum \Delta x = \frac{\sigma}{E} l_0.$$

Полученное соотношение можно переписать в виде

$$F = \sigma S = \frac{ES}{l_0} \Delta l = k \Delta l,$$

где $k = \frac{ES}{l_0}$ — жесткость стержня.

При упругих деформациях относительные удлинения, как правило, не превосходят 0,001. Это означает, что при межатомных расстояниях порядка 2 \AA ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$) положения равновесия атомов смещаются не более чем на $0,002 \text{ \AA}$. При больших смещениях тело уже не возвращается к исходному виду при снятии внешних нагрузок, и в нем возникают заметные остаточные деформации. В таком случае закон Гука не выполняется.

Рассмотрим теперь некоторые конкретные задачи, иллюстрирующие технику вычисления упругих сил и деформаций.

Задача 1. Одна из опор линии электропередачи в горах на высоте другой (рис.2). Длина однородного провода между опорами L , его масса M . На сколько натяжение провода вблизи одной опоры больше, чем вблизи другой? Ускорение свободного падения g .

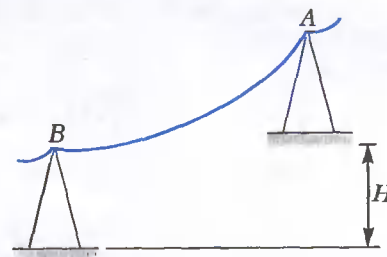


Рис. 2

Рассмотрим произвольный элементарный участок провода длиной Δl и массой $\Delta m = M \Delta l / L$. К нему приложены силы натяжения $\vec{T}(y)$ и $\vec{T}(y + \Delta y)$ и сила тяжести $\Delta m \vec{g}$ (рис.3). Под действием этих сил выделенный участок покоится, следовательно,

$$\vec{T}(y) + \vec{T}(y + \Delta y) + \Delta m \vec{g} = 0.$$

Перейдем к проекциям сил на касательное к проводу направление:

$$-T(y) + T(y + \Delta y) - \Delta m g \sin \alpha = 0,$$

откуда с учетом явного выражения для Δm по-

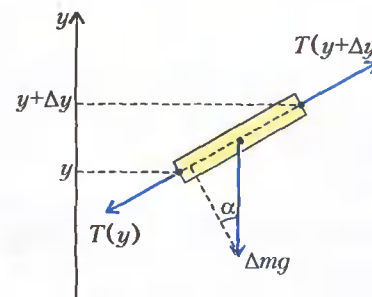


Рис. 3

лучаем

$$\Delta T = T(y + \Delta y) - T(y) = \frac{M}{L} g \Delta l \sin \alpha.$$

Из геометрии следует

$$\Delta l \sin \alpha = \Delta y,$$

поэтому

$$\Delta T = \frac{M}{L} g \Delta y,$$

т.е. приращение величины силы натяжения провода на любом его элементарном участке пропорционально проекции длины этого участка на вертикальную ось. Суммируя подобные соотношения вдоль всей длины провода между опорами, приходим к ответу на вопрос задачи:

$$T_A - T_B = \frac{M}{L} g H.$$

Заметим, что для случая, когда опоры находятся вблизи одной вертикали, результат может быть получен без рассмотрения задачи «в малом». Действительно, в этом случае разность сил натяжения провода на уровнях A и B уравновешивает силу тяжести участка провода, находящегося выше горизонтали, проходящей через точку B .

Задача 2. Кабина лифта массой $m = 1000$ кг равномерно опускается со скоростью $v_0 = 1,0$ м/с с помощью троса, перекинутого через барабан. Когда кабина опустилась на $l = 10$ м, барабан заклинило. Найдите максимальную силу упругости T_{\max} , действующую на трос вследствие внезапной остановки лифта. Длина троса в момент остановки равна $l = 10$ м, площадь поперечного сечения троса $S = 20$ см², модуль Юнга материала троса $E = 2,0 \cdot 10^{11}$ Па. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

При равномерном движении кабины действующие на нее силы упругости троса и тяжести кабины уравновешивают друг друга:

$$\frac{ES}{l} \Delta l_{\text{ст}} = mg,$$

откуда найдем статическое удлинение троса:

$$\Delta l_{\text{ст}} = \frac{mgl}{ES}.$$

После внезапной остановки барабана кабина будет двигаться по гармоническому закону (покажите это самостоятельно)

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t,$$

где $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{ES}{ml}}$ – частота гармонических колебаний, а амплитуда колебаний смещения в ω раз меньше амплитуды v_0 колебаний скорости. Максимальное удлинение троса будет равно сумме статического удлинения и амплитуды гармонических колебаний смещения:

$$\Delta l_{\max} = \Delta l_{\text{ст}} + \frac{v_0}{\omega} = \frac{mgl}{ES} + v_0 \sqrt{\frac{ml}{ES}}.$$

В этот момент упругая сила достигнет своего наибольшего значения:

$$T_{\max} = k \Delta l_{\max} = mg + v_0 \sqrt{\frac{mES}{l}} = 2,1 \cdot 10^5 \text{ Н}.$$

Задача 3. Динамометр, находящийся на гладкой горизонтальной поверхности, тянут с силой $F = 5$ Н. Что покажет динамометр, если масса его корпуса $M = 0,2$ кг, масса пружины $m = 0,05$ кг? Градуировка динамометра проводилась при закрепленном корпусе.

Показание T динамометра, движущегося ускоренно, будет пропорционально удлинению Δl пружины:

$$T = k \Delta l,$$

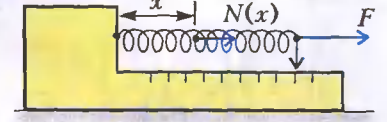


Рис 4

где k – жесткость пружины. Для определения удлинения заметим, что масса пружины не является пренебрежимо малой (по сравнению с массой корпуса), следовательно, упругая сила в любом ее сечении зависит от координаты этого сечения, отсчитанной, например, от точки закрепления пружины. Тогда из второго закона Ньютона для корпуса динамометра и части пружины длиной x (рис.4):

$$\left(M + \frac{x}{L}m\right)a = N(x)$$

и для оставшейся части пружины:

$$\left(m - \frac{x}{L}m\right)a = F - N(x)$$

находим упругую силу $N(x)$, а с ней и зависимость механического напряжения σ от координаты x :

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{S} = \frac{F}{S(M+m)} \left(M + \frac{x}{L}m\right),$$

где L – длина пружины. Удлинение $\delta(\Delta x)$ произвольного первоначально недеформированного элемента длиной Δx найдем по закону Гука

$$\frac{\delta(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{1}{E} \sigma(x).$$

Полное удлинение пружины получим суммированием элементарных удлинений:

$$\Delta l = \sum \delta(\Delta x) = \frac{F}{SE(M+m)} \int_0^L \left(M + \frac{x}{L}m\right) dx = \frac{FL}{2SE} \frac{2M+m}{M+m}.$$

По условию, градуировка проводилась при закрепленном корпусе, следовательно, $k = ES/L$. Тогда показание динамометра будет таким:

$$T = k \Delta l = \frac{2M+m}{2(M+m)} F = 4,5 \text{ Н}.$$

Задача 4. Мальчик стреляет из рогатки. Он медленно растягивает резиновый жгут так, что его длина L увеличивается вдвое, доводя усилие до $F = 10$ Н. Определите начальную скорость v_0 камешка массой $m = 10$ г, если длина растянутого резинового жгута $2L = 20$ см, масса жгута $M = 30$ г.

При растяжении резинового жгута упругая сила растет пропорционально удлинению жгута и изменяется от нуля до F . Работа этой силы на перемещении L оказывается запасенной в виде потенциальной энергии пружины

$$W_{\text{п}} = \frac{FL}{2}.$$

При выстреле эта энергия переходит в кинетическую энергию камешка

$$W_{\text{к1}} = \frac{mv_0^2}{2}$$

и кинетическую энергию резинового жгута $W_{\text{к2}}$ (его масса не является пренебрежимо малой, а, наоборот, превышает массу камешка). Для определения кинетической энергии жгута заметим, что смещения сечений жгута, как и силы упругости, тоже распределены по линейному закону, следовательно, по этому же закону будут распределены и скоро-

сти $v(x)$ элементарных масс жгута:

$$v(x) = \frac{x}{L} v_0$$

(здесь координата x отсчитывается от рогатки). Тогда кинетическая энергия двух одинаковых участков жгута, имеющих координаты от x до $x + dx$, равна

$$\Delta W_{k2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{M dx}{2L} \left(\frac{x}{L} v_0 \right)^2$$

Суммируя эти величины по всей длине жгута, получаем

$$W_{k2} = \int_0^L \frac{M}{2L} \left(\frac{x}{L} v_0 \right)^2 dx = \frac{M v_0^2}{6}$$

По закону сохранения энергии,

$$W_{п} = W_{k1} + W_{k2},$$

или

$$\frac{FL}{2} = \frac{m v_0^2}{2} + \frac{M v_0^2}{6}$$

Отсюда находим начальную скорость камешка:

$$v_0 = \sqrt{\frac{FL}{m + M/3}} \approx 7 \text{ м/с.}$$

Задача 5. Однородный тонкий упругий стержень вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через один из его концов, с постоянной угловой скоростью. В некоторый момент времени стержень срывается с оси. Во сколько раз изменится при этом его относительное удлинение?

Найдем распределение упругих напряжений $\sigma(r) = T(r)/S$ в равномерно вращающемся с угловой скоростью ω стержне длиной L (рис. 5). Под действием упругой силы $T(r)$ центр масс C части бруска массой $m = \rho S(L-r)$, где ρ — плотность материала стержня, равномерно движется по окружности радиусом $R_C = r + (L-r)/2 = (r+L)/2$. Ускорение центра масс направлено к оси вращения и равно по величине $a_C = \omega^2 R_C$. По теореме о движении центра масс,

$$m \bar{a}_C = \bar{T}(r).$$

Переходя к проекциям силы и ускорения на радиальное направление и учитывая явные выражения для m и R_C , получаем

$$T(r) = \rho S \omega^2 \frac{L^2 - r^2}{2}.$$

Элементарное удлинение $\delta(\Delta r)$ произвольного первоначально недеформированного элемента длиной Δr найдем по закону Гука

$$\frac{\delta(\Delta r)}{\Delta r} = \frac{1}{E} \sigma(r) = \frac{T(r)}{ES}.$$

Полное удлинение получим суммированием элементарных удлинений:

$$\Delta l = \sum \delta(\Delta r) = \frac{\rho}{2E} \omega^2 \int_0^L (L^2 - r^2) dr = \frac{\rho \omega^2 L^3}{3E}.$$

Относительное удлинение будет пропорционально квадрату угловой скорости и квадрату длины стержня:

$$\frac{\Delta l}{L} = \frac{\rho \omega^2 L^2}{3E}.$$

После отрыва стержня от оси его центр масс будет двигаться равномерно и прямолинейно со скоростью $v_{пер} = \omega L/2$, а в системе центра масс стержень будет равномерно вращаться с угловой скоростью Ω . Для нахождения этой скорости обратимся к закону сложения скоростей: в лабораторной системе отсчета скорость v_0 точки O стержня в момент отрыва равна нулю, а в системе центра масс ее скорость равна $u_0 = \Omega L/2$. По закону сложения скоростей,

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{пер} + \vec{u}_0 = 0,$$

откуда

$$\Omega \frac{L}{2} = \omega \frac{L}{2}, \text{ или } \Omega = \omega.$$

После отрыва оба конца стержня становятся свободными, растяжение стержня происходит относительно серединного сечения. В этом случае относительное удлинение каждой половины стержня, а следовательно, и всего стержня, уменьшится в четыре раза, так как в формуле для относительного удлинения следует сделать замену $L \rightarrow L/2$, а угловая скорость остается неизменной.

Задача 6*. Осесимметричный стержень подвешен вертикально за один из концов. В нижнем сечении радиусом r_0 стержень нагружен растягивающей силой F , равномерно распределенной по сечению. При какой зависимости радиуса r стержня от расстояния x до нижнего сечения напряжения во всех горизонтальных сечениях будут одинаковы? Плотность материала стержня ρ . Ускорение свободного падения g .

По условию, напряжения в горизонтальных сечениях одинаковы и равны напряжению в нижнем сечении:

$$\sigma(x) = \frac{T(x)}{\pi r^2(x)} = \sigma_0 = \frac{F}{\pi r_0^2}.$$

На любой элементарный горизонтальный слой толщиной Δx действует сила тяжести $\Delta mg = \rho \pi r^2 \Delta x g$ и упругие силы $T(x) = \sigma_0 \pi r^2(x)$ и $T(x + \Delta x) = \sigma_0 \pi r^2(x + \Delta x)$ в нижнем сечении и в верхнем сечении соответственно (рис. 6). Под действием приложенных сил выделенный слой покоится, следовательно, по второму закону Ньютона,

$$T(x + \Delta x) - T(x) = \rho \pi r^2 \Delta x g.$$

Введем $\Delta r = r(x + \Delta x) - r(x)$, тогда полученное уравнение примет вид

$$\sigma_0 \pi \cdot 2r \Delta r = \rho \pi r^2 \Delta x g,$$

или

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\rho g}{2\sigma_0} \Delta x.$$

Суммируя такие равенства от $x = 0$ до любого x в пределах стержня и переходя от логарифмов к основаниям, получаем искомую зависимость радиуса сечения стержня от координаты:

$$r(x) = r_0 \cdot \exp\left(\frac{\rho g \pi r_0^2}{2F} x\right).$$

Задача 7. На астероиде Веста (радиус $R = 280$ км, ускорение свободного падения на поверхности $g_0 = 0,24 \text{ м/с}^2$) решено установить межпланетную ретранс-

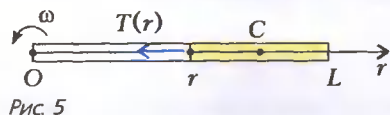


Рис. 5

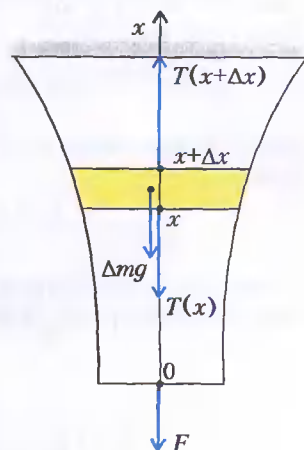


Рис. 6

ляционную станцию. Основой конструкции станции должна служить цилиндрическая труба, высота которой равняется радиусу планеты. На Весту завезли ровно 280 км титановых труб. На сколько ниже проектной окажется высота конструкции, когда она будет собрана в вертикальном положении? Считайте астероид однородным невращающимся шаром. Плотность титана $\rho = 4500 \text{ кг/м}^3$, модуль Юнга $E = 1,12 \cdot 10^{11} \text{ Па}$.

Ускорение свободного падения над поверхностью планеты изменяется по закону $g(r) = g_0 R^2 / r^2$ (координата r отсчитывается от центра планеты) и на высоте станции уменьшается в четыре раза. Следовательно, напряжения в конструкции и соответствующие им деформации не будут однородными.

Найдем зависимость упругой силы T от координаты r . Для этого рассмотрим находящийся в равновесии произвольный элементарный горизонтальный слой трубы толщиной Δr (рис. 7).

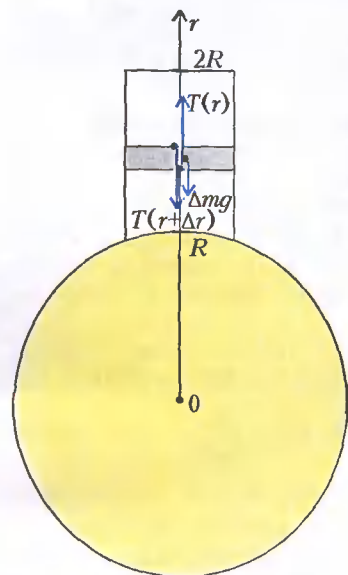


Рис. 7

Пусть площадь поперечного сечения стенки трубы равна S . На этот слой действует сила тяжести $\Delta mg = \rho S \Delta r g(r)$ и упругие силы $T(r)$ в нижнем сечении и $T(r + \Delta r)$ в верхнем сечении. По второму закону Ньютона,

$$T(r) - T(r + \Delta r) = \rho S \Delta r g(r),$$

или

$$\Delta T = -\frac{\rho S g_0 R^2}{r^2} \Delta r.$$

Суммируя такие равенства от $r = 2R$, где $T(2R) = 0$, до любого $r \leq R$ в пределах стержня и учитывая

равенство $\Delta(1/r) = -\Delta r / r^2$, получаем зависимость упругой силы от координаты:

$$T(r) = \rho S g_0 R \left(\frac{R}{r} - \frac{1}{2} \right).$$

Элементарные уменьшения длины $\delta(\Delta r)$ найдем по закону Гука

$$\frac{\delta(\Delta r)}{\Delta r} = \frac{1}{E} \frac{T(r)}{S}.$$

Полное уменьшение длины конструкции получим суммированием элементарных уменьшений:

$$\Delta l = \sum \delta(\Delta r) = \frac{\rho g_0 R}{E} \int_R^{2R} \left(\frac{R}{r} - \frac{1}{2} \right) dr = \frac{\rho g_0 R^2}{E} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) = 144 \text{ м}.$$

Задача 8. Груз массой m подвешен на трех тросах (рис. 8). Считая деформации малыми, найдите величину силы натяжения каждого троса, если они сделаны из одного материала и площади их поперечных сечений одинаковы. Ускорение свободного падения g .

Эта задача статически неопределима, так как для нахождения трех неизвестных усилий T_1, T_2, T_3 в тросах нам известны из статики лишь два уравнения. Это равенство

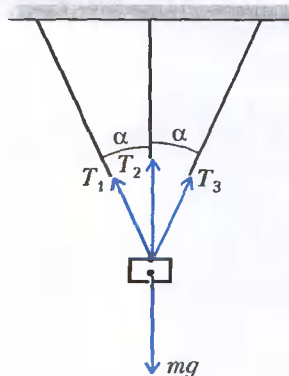


Рис. 8

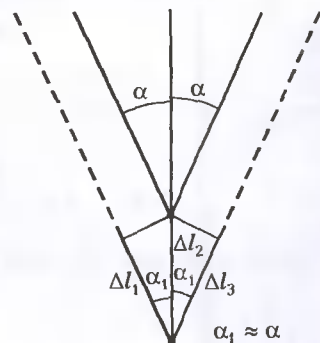


Рис. 9

нулю суммы проекций сил на вертикальное направление:

$$T_1 \cos \alpha + T_2 + T_3 \cos \alpha - mg = 0$$

и на горизонтальное направление:

$$T_1 \sin \alpha - T_3 \sin \alpha = 0.$$

Чтобы найти недостающее третье уравнение, учтем упругие свойства материала, из которого сделаны тросы, и кинематическую связь. Так, малые деформации боковых тросов и центрального связаны соотношением (рис. 9)

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 = \Delta l_2 \cos \alpha.$$

В свою очередь, для длин тросов справедливо равенство

$$l_2 = l_1 \cos \alpha.$$

Кроме того, считая деформации тросов упругими, по закону Гука находим

$$T_1 = \frac{ES}{l_1} \Delta l_1, \quad T_2 = \frac{ES}{l_2} \Delta l_2.$$

Подстановка полученных соотношений в первые два равенства приводит к следующим результатам:

$$T_1 = T_3 = mg \frac{\cos^2 \alpha}{2 \cos^3 \alpha + 1}, \quad T_2 = mg \frac{1}{2 \cos^3 \alpha + 1}.$$

Упражнения

1. На гладком блоке радиусом R висит однородный гибкий канат массой m и длиной l . Найдите величину максимальной силы натяжения каната F_{\max} . Ускорение свободного падения g .

2. Груз массой $m = 5000 \text{ кг}$ равномерно опускается с некоторой скоростью с помощью троса и лебедки. Когда груз опустился на $l = 2 \text{ м}$, лебедку заклинило, и трос оборвался. При какой скорости груза v произойдет обрыв троса, если для него предел прочности на растяжение $\sigma_p = 3,1 \cdot 10^3 \text{ Па}$? Длина троса в момент остановки лебедки $l = 2 \text{ м}$. Площадь поперечного сечения троса $S = 5 \text{ см}^2$, модуль Юнга материала троса $E = 2,0 \cdot 10^{11} \text{ Па}$. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

3. Однородный стержень длиной l подвешен за один конец. Плотность материала стержня ρ , модуль Юнга E , ускорение свободного падения g . Найдите удлинение Δl стержня. Как изменится ответ, если этот стержень будет размещен горизонтально и приведен в движение с горизонтальным ускорением \bar{a} , сонаправленным со стержнем?

4. Определите период колебаний T груза массой m , подвешенного на пружине жесткостью k и массой M .

5. На верхний торец стоящей вертикально на жесткой опоре осесимметричной колонны высотой h действует сила F_0 , однородно распределенная по горизонтальному сечению площадью

S_0 . При какой зависимости площади S поперечного сечения колонны от расстояния x до опоры напряжения во всех горизонтальных сечениях будут одинаковы? Найдите относительное уменьшение высоты колонны. Плотность материала колонны ρ , модуль Юнга E . Ускорение свободного падения g .

6. В центре астероида Паллада (радиус $R = 290$ км, ускорение свободного падения на поверхности $g_0 = 0,17$ м/с²) обнаружены залежи ценных ископаемых. Бурильщики затребовали ровно 290 км труб из вольфрамового сплава. Считая, что после завершения работ вся система труб свободно висит в канале, не касаясь его стенок, определите, какая часть труб будет сэкономлена вследствие растяжения конструкции под действием силы тяжести. Считайте астероид однородным невращающимся ша-

ром. Плотность вольфрама $\rho = 19,3 \cdot 10^3$ кг/м³, модуль Юнга $E = 4,0 \cdot 10^{11}$ Па.

7. Неоднородная балка массой m подвешена к потолку на трех одинаковых легких резиновых жгутах так, что жгуты вертикальны и лежат в одной плоскости (рис. 10). Расстояния между жгутами одинаковы. Считая деформации малыми, найдите упругие силы в жгутах. Ускорение свободного падения g .

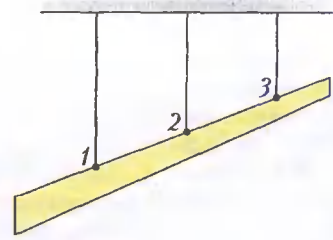


Рис. 10

О модуле квадратного трехчлена

В. ГОЛУБЕВ

ЗДЕСЬ МЫ ОБСУДИМ ДВЕ ЗНАМЕНИТЫЕ ЗАДАЧИ, КОТОРЫЕ В СВОЕ ВРЕМЯ «ПОТЯСАЛИ» АБИТУРИЕНТОВ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА.

Формулировка задач

Задача 1 (факультет вычислительной математики и кибернетики, 1986 г.). Найдите значения c и d , при которых наибольшее значение функции

$$y(x) = \left| 4 \frac{3^x + 3^{-x} - 2}{3^x + 3^{-x} + 2} + 2(c + 2d) \frac{3^x - 1}{3^x + 1} + 2c + d \right|$$

на отрезке $[-1; 1]$ является наименьшим.

(Ответ: $c = -\frac{1}{3}$, $d = \frac{1}{6}$.)

Задача 2 (механико-математический факультет, 1991 г.). Найдите все пары чисел p и q , при которых неравенство

$$|x^2 + px + q| > 2$$

не имеет решений на отрезке $[1; 5]$.

(Ответ: $p = -6$, $q = 7$.)

Первая естественная реакция абитуриента, впервые столкнувшегося с первой задачей, — ввести переменную $u = 3^x$ и взглянуть на функцию $y(u)$.

Посмотрим и мы:

$$\begin{aligned} y(u) &= \left| 4 \frac{u + \frac{1}{u} - 2}{u + \frac{1}{u} + 2} + 2(c + 2d) \frac{u - 1}{u + 1} + 2c + d \right| = \\ &= \left| 4 \frac{u^2 - 2u + 1}{u^2 + 2u + 1} + 2(c + 2d) \frac{u - 1}{u + 1} + 2c + d \right| = \end{aligned}$$

$$= \left| 4 \frac{(u - 1)^2}{(u + 1)^2} + 2(c + 2d) \frac{(u - 1)}{(u + 1)} + 2c + d \right|.$$

Дойдя до этого места, абитуриент обнаруживает, что эффективнее было бы сразу же ввести переменную $t = 2 \frac{3^x - 1}{3^x + 1}$.

Тогда выражение для рассматриваемой функции принимает вид

$$y(t) = |t^2 + (c + 2d)t + 2c + d|.$$

Теперь выясним, в каких пределах изменяется переменная t как функция от x на отрезке $[-1; 1]$. Поскольку

$$t(x) = 2 \frac{3^x - 1}{3^x + 1} = 2 \frac{(3^x + 1) - 2}{3^x + 1} = 2 \left(1 - \frac{2}{3^x + 1} \right),$$

видно, что функция $t(x)$ монотонно возрастает, и, следовательно, при $x \in [-1; 1]$ значения переменной t принадлежат отрезку $[t(-1); t(1)]$, т.е. отрезку $[-1; 1]$.

Таким образом, получаем задачу, которую в общем виде можно сформулировать так.

Задача 3. Найдите значения p и q , при которых наибольшее значение функции

$$y(t) = |t^2 + pt + q|$$

на отрезке $[m; n]$ является наименьшим.

(Ответ: $p = -(m + n)$, $q = \frac{1}{8}(m^2 + 6mn + n^2)$.)

Оказывается, что к задаче 3 сводится и задача 2, если ее переформулировать следующим образом.

Задача 2' (равносильная задаче 2). Найдите все пары чисел p и q , при которых неравенство

$$|x^2 + px + q| \leq 2$$

выполняется для всех значений x из отрезка $[1; 5]$.

(Ответ: $p = -6$, $q = 7$.)

Существует несколько различных способов решения сформулированных задач. Рассмотрим первый способ, который основан на исследовании поведения квадратного трехчлена на отрезке.

Область значений квадратного трехчлена на отрезке

Сначала напомним некоторые хорошо известные свойства квадратичной функции.

Утверждение 1. Все графики квадратичных функций $y = t^2 + pt + q$ как геометрические фигуры равны между

собой и получают друг из друга параллельным переносом (т.е. вид графика от параметров p и q не зависит).

Утверждение 2. Множество значений квадратичной функции $y = t^2 + pt + q$ на отрезке $[m; n]$ есть отрезок, длина которого не зависит от q (так как вычисляется как разность значений функции в некоторых двух точках).

Утверждение 3. Минимальная длина отрезка, являющегося множеством значений квадратичной функции, достигается тогда и только тогда, когда ось графика этой функции (т.е. ось параболы) проходит через середину отрезка $[m; n]$.

Первое утверждение непосредственно доказывается в школьном курсе алгебры при изучении квадратичной функции с помощью выделения полного квадрата, т.е. использования тождества

$$t^2 + pt + q = \left(t + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = (t - t_b)^2 - \frac{p^2}{4} + q.$$

Из этого равенства следует, что максимальное значение квадратного трехчлена на отрезке равно значению в той точке отрезка, которая наиболее удалена от вершины параболы с абсциссой $t_b = -\frac{p}{2}$ (это один из концов отрезка). Аналогично, минимальное значение равно значению в ближайшей к вершине точке отрезка (в зависимости от того, вне или внутри отрезка расположена вершина, это либо конец отрезка, либо сама вершина параболы). А так как длина отрезка множества значений квадратичной функции $y = t^2 + pt + q$ на отрезке $[m; n]$ – будем в дальнейшем эту длину обозначать $L_y(m; n)$ – есть не что иное, как разность между максимальным и минимальным значениями этой функции, то получаем следующий вариант утверждения 2.

Утверждение 2'. Если $-\frac{p}{2} \leq m$, то

$$L_y(m; n) = y(n) - y(m) = (n - m)(n + m + p) = l(m + n + p),$$

где $l = n - m$ есть длина отрезка $[m; n]$;

если $m \leq -\frac{p}{2} \leq \frac{m+n}{2}$, то

$$L_y(m; n) = y(n) - y\left(-\frac{p}{2}\right) = \left(n + \frac{p}{2}\right)^2;$$

если $\frac{m+n}{2} \leq -\frac{p}{2} \leq n$, то

$$L_y(m; n) = y(m) - y\left(-\frac{p}{2}\right) = \left(m + \frac{p}{2}\right)^2;$$

если $n \leq -\frac{p}{2}$, то

$$L_y(m; n) = y(m) - y(n) = -(n - m)(m + n + p) = -l(m + n + p).$$

Величину $L_y(m; n)$ принято называть *колебанием функции на отрезке*. Утверждение 2' фактически определяет колебание квадратичной функции $y = t^2 + pt + q$ на отрезке $[m; n]$ в зависимости от параметра p :

$$L_y(m; n) = \varphi(p) = \begin{cases} -l(m + n + p), & \text{если } p \leq -2n, \\ \left(m + \frac{p}{2}\right)^2, & \text{если } -2n \leq p \leq -m - n, \\ \left(n + \frac{p}{2}\right)^2, & \text{если } -m - n \leq p \leq -2m, \\ l(m + n + p), & \text{если } -2m \leq p. \end{cases}$$

Поскольку $t_b = -\frac{p}{2}$, т.е. $p = -2t_b$, то удобно взглянуть на

колебание квадратичной функции в зависимости от t_b :

$$L_y(m; n) = \varphi(t_b) = \begin{cases} 2l\left(\frac{m+n}{2} - t_b\right), & \text{если } t_b \leq m, \\ (n - t_b)^2, & \text{если } m \leq t_b \leq \frac{m+n}{2}, \\ (m - t_b)^2, & \text{если } \frac{m+n}{2} \leq t_b \leq n, \\ 2l\left(t_b - \frac{m+n}{2}\right), & \text{если } n \leq t_b. \end{cases}$$

Отсюда следует, что колебание квадратичной функции монотонно убывает при приближении абсциссы вершины параболы к середине отрезка и достигает своего наименьшего значения (равного квадрату половины длины отрезка) в самой середине. Итак,

$$\min_y L_y(m; n) = \left(\frac{n-m}{2}\right)^2.$$

Тем самым, утверждение 3 доказано.

Последнее равенство можно представить и в таком виде:

$$\min_{p,q} L_{t^2+pt+q}(m; n) = \frac{l^2}{4}, \quad (1)$$

где l – длина отрезка $[m; n]$. А тогда справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. Когда аргумент квадратного трехчлена $t^2 + pt + q$ пробегает отрезок длины l , значения квадратного трехчлена пробегает отрезок длины не меньше $l^2/4$.

Решение задачи 3

Пусть M – наибольшее значение функции $y(t) = |t^2 + pt + q|$ на отрезке $[m; n]$. Тогда для любого значения t из отрезка $[m; n]$ выполняется двойное неравенство

$$-M \leq t^2 + pt + q \leq M,$$

из которого следует, что значение квадратного трехчлена $t^2 + pt + q$ пробегает отрезок длиной не больше $2M$. Поэтому в силу утверждения 4 получаем оценку

$$2M \geq \frac{l^2}{4} = \frac{(n-m)^2}{4},$$

т.е.

$$M \geq \frac{l^2}{8}.$$

Мы уже знаем, что равенство в последнем выражении достигается, если абсцисса вершины параболы совпадает с серединой отрезка, а значения квадратного трехчлена на концах отрезка равны M (и противоположны значению квадратного трехчлена в середине отрезка).¹ Таким образом, искомые в задаче 3 значения параметров находятся из условий

$$\begin{cases} -\frac{p}{2} = \frac{m+n}{2}, \\ y\left(\frac{m+n}{2}\right) = -\frac{(n-m)^2}{8}. \end{cases}$$

¹ Это и есть три точки (концы отрезка и его середина), которые лежат в основе метода трех точек, описанного выше.

Отсюда

$$\begin{cases} p = -(m+n), \\ \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 + p\left(\frac{m+n}{2}\right) + q = -\frac{(n-m)^2}{8} \Leftrightarrow \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -(m+n), \\ q = \frac{m^2 + 6mn + n^2}{8}, \end{cases}$$

что и дает ответ задачи 3.

Для получения ответа задачи 1 осталось решить систему

$$\begin{cases} c + 2d = -(m+n), \\ 2c + d = \frac{m^2 + 6mn + n^2}{8}, \end{cases}$$

где $m = -1, n = 1$.

Внимательный читатель должен заметить, что мы доказали следующее свойство модуля квадратного трехчлена.

Утверждение 5. Когда аргумент квадратного трехчлена $t^2 + pt + q$ пробегает отрезок длины l , значение модуля квадратного трехчлена пробегает отрезок длины не меньше $l^2/8$, т.е.

$$\min_{p,q} L_{|t^2+pt+q|}(m;n) = \frac{l^2}{8}. \quad (2)$$

Ситуации, когда реализуются равенства (1) и (2), прекрасно видны на рисунках 1 и 2 соответственно.

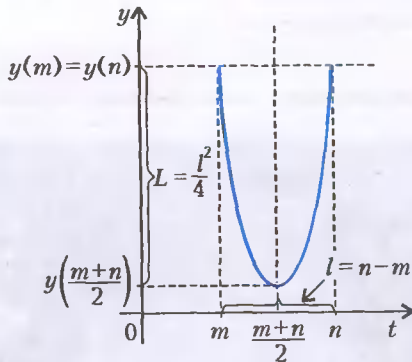


Рис. 1

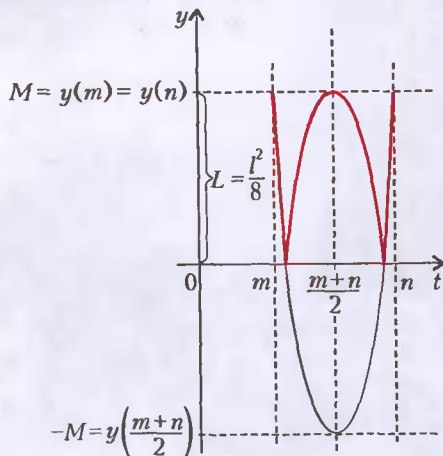


Рис. 2

Упражнения

1. Найдите все значения параметра a , при которых для всех x из промежутка $m \leq x \leq n$ выполняется условие $|ax^2 + bx + c| \leq M$ хотя бы для одной пары чисел b и c .

2 (Институт стран Азии и Африки МГУ, 2003 г.). Функция $y(x) = x^2 + 2(c-d)x + 3c - d$ такова, что $y(1)y(-1) \leq 0$ и $|c-d| \geq 1$. Найдите значения c и d , при которых множество значений функции $f(x) = |y(x)|$ на отрезке $[-1; 1]$ будет наименьшим; укажите это множество.

3. Найдите значения параметров a и b , при которых максимальное значение выражения $||x+a|+b|$ на промежутке $m \leq x \leq n$ будет наименьшим.

4. Докажите следующие свойства произвольного квадратного трехчлена:

a) $\min_{b,c} \left(\max_{m \leq t \leq n} (at^2 + bt + c) - \min_{m \leq t \leq n} (at^2 + bt + c) \right) = |a| \frac{(n-m)^2}{4}$,

т.е.

$$\min_{b,c} L_{at^2+bt+c}(m;n) = |a| \frac{l^2}{4};$$

b) $\min_{b,c} L_{|at^2+bt+c|}(m;n) = |a| \frac{l^2}{8}$.

Метод трех точек

Перейдем теперь к рассмотрению другого способа решения задач подобного рода. Решим задачу 2' методом трех точек.

Поскольку исходное неравенство справедливо на всем отрезке $[1; 5]$, то, в частности, оно верно на его концах и в середине. Поэтому

$$\begin{cases} |1^2 + p \cdot 1 + q| \leq 2, \\ |3^2 + p \cdot 3 + q| \leq 2, \\ |5^2 + p \cdot 5 + q| \leq 2. \end{cases}$$

Решаем полученную систему относительно переменной q (в этом вся «соль» при анализе подобных линейных систем):

$$\begin{cases} (-p-1) - 2 \leq q \leq (-p-1) + 2, \\ (-3p-9) - 2 \leq q \leq (-3p-9) + 2, \\ (-5p-25) - 2 \leq q \leq (-5p-25) + 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -p-3 \leq q \leq -p+1, \\ -3p-11 \leq q \leq -3p-7, \\ -5p-27 \leq q \leq -5p-23. \end{cases} \Leftrightarrow$$

Для искомым пар чисел p и q последняя система должна иметь хотя бы одно решение относительно q . Каждая строчка этой системы задает отрезок на числовой прямой переменной q . И так как три отрезка имеют общую точку тогда и только тогда, когда любой левый конец отрезков находится не правее любого правого конца отрезков, то разрешимость нашей системы относительно q равносильна разрешимости относительно p следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} -p-3 \leq -3p-7, \\ -p-3 \leq -5p-23, \\ -3p-11 \leq -p+1, \\ -3p-11 \leq -5p-23, \\ -5p-27 \leq -p+1, \\ -5p-27 \leq -3p-7. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим единственное значение $p = -6$. Подставляя $p = -6$ в предыдущую систему, найдем, что $q = 7$.

Таким образом, три точки отрезка (два конца и его середина) выдвинули кандидатом в ответ единственную

пару чисел p и q . Очевидно, что при $p = -6$ и $q = 7$ неравенство $|x^2 + px + q| \leq 2$ выполняется при всех x на отрезке $[1; 5]$.

Замечание 1. У читателя может возникнуть вопрос, почему данные три точки (концы отрезка и его середина) были выбраны для отбора в кандидаты пары чисел p и q . Ответ следует из решения задачи 3, в котором было показано, что при минимальном колебании квадратного трехчлена на отрезке своих наибольшего и наименьшего значений он достигает как раз на концах отрезка и в его середине (при этом либо $\max y = y(m) = y(n)$ и $\min y = y\left(\frac{m+n}{2}\right)$, либо $\min y = y(m) = y(n)$ и $\max y = y\left(\frac{m+n}{2}\right)$, где $y = at^2 + bt + c$, $a \neq 0$).

Замечание 2. Нельзя не обратить внимание читателя на некоторое утверждение, использованное при решении задачи 2'. Сформулируем его в виде следующей теоремы.

Теорема о пересекающихся отрезках. Любые k отрезков имеют хотя бы одну общую точку тогда и только тогда, когда любые два из них имеют общую точку.

Предоставляем читателю самостоятельно найти доказательство этой теоремы.

24 октября 2003 года скончался Юлий Александрович Данилов, член редакционного совета журнала «Квант», сотрудник Научного центра «Курчатовский институт», выдающийся ученый, педагог и популяризатор науки.

Научные интересы Ю.А.Данилова лежали в области математической физики, но помимо физики и математики его всегда интересовали философия и литература, языкознание и история. Энциклопедичность знаний Юлия Александровича, неизменная доброжелательность и талант педагога не могли не вызывать самого глубокого уважения.

Одним из главных дел в его жизни была работа по переводу на русский язык научных, научно-популярных и занимательных книг по математике и физике, программированию и биологии. Всего им было переведено около ста книг более чем с десяти языков. В предисловии к одной из переведенных книг Юлий Александрович написал такие слова: «Современники Иоганна Себастьяна Баха восхищались его искусством органиста. Он же, не видя ничего особенного в своем исполнении, считал, что главное — вовремя нажимать нужную клавишу, и всякий, кто будет прилежен, сумеет достичь такой же беглости и выразительности».

Искусством «вовремя нажимать нужную клавишу» Ю.А.Данилов владел в совершенстве. Он сам всю жизнь восхищался красотой науки и учил нас радоваться этому. Постараемся быть достойными и благодарными ему учениками.

*Редакционная коллегия, редакционный совет,
редакция журнала «Квант»*

Упражнения

5 (ЛГУ, 1973 г.). Выберите число b так, чтобы наибольшее значение функции $y(x) = |-2x^2 + x + b|$ на промежутке $0 \leq x \leq 1$ было наименьшим.

6 (МИЭМ, 1984 г.). Докажите, что при $a = -12$ и $b = 17$ наибольшее значение выражения $|2x^2 + ax + b|$ на отрезке $2 \leq x \leq 4$ равно 1. Верно ли обратное утверждение?

7 (факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, 1989 г.). Докажите, что для любых p и q сумма длин отрезков, на которых выполняется неравенство $|x^2 + px + q| \leq 2$, не превышает 4.

8 (ЗФТШ при МФТИ, вступительное задание на 1991/92 уч. г.). Какое наибольшее значение может принимать параметр a , если известно, что $|ax^2 - ax + 1| \leq 1$ при $0 \leq x \leq 1$?

9. Какое максимальное значение может принимать сумма длин отрезков, на которых для любых p и q выполняется условие $|x^2 + px + q| \leq M$?

10. Найдите все значения параметра p , при которых существует хотя бы одно значение параметра q такое, что все значения квадратного трехчлена $x^2 + px + q$ на отрезке $m \leq x \leq n$ принадлежат отрезку $[M_1; M_2]$.



Юлий Александрович Данилов (1936 – 2003)

Материалы вступительных экзаменов 2003 года

Московский государственный университет
им. М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет,
олимпиада «Абитуриент-2003», март)

1. Найдите первый член целочисленной арифметической прогрессии, у которой сумма первых шести членов отличается от суммы следующих шести членов менее чем на 450, а сумма первых пяти членов превышает более чем на 5 сумму любого другого набора различных членов этой прогрессии.
2. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{4x^7 - 10x^3}{4x - x^3 - 3}} \leq x^3.$$

3. На продолжении биссектрисы AL треугольника ABC за точку A взята такая точка D , что $AD = 10$ и $\angle BDC = \angle BAL = 60^\circ$. Найдите площадь треугольника ABC . Какова наименьшая площадь треугольника BCD при данных условиях?

4. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} |y + \log_2 x| + |y + 1 - 2^{x-1}| = |2y - 2^{x-1} + 1 + \log_2 x|, \\ |x| + |y + 1| + |y - 1| = x + 2. \end{cases}$$

5. Точка O расположена в сечении $AA'C'C$ прямоугольного параллелепипеда $ABCA'D'B'C'D'$ размером $2 \times 6 \times 9$ так, что

$$\angle OAB + \angle OAD + \angle OAA' = 180^\circ.$$

Сфера с центром в точке O касается плоскостей $A'B'C'$, $AA'B$ и не имеет общих точек с плоскостью $AA'D$. Найдите расстояние от точки O до этой плоскости.

6. Найдите все значения α , при каждом из которых расстояние между любыми двумя соседними корнями уравнения

$$\cos \alpha \cos 3x - \sin 3\alpha \cos x + 2 \sin 2\alpha \cos 2x = 3 \sin \alpha - \cos 3x$$

не превосходит $\pi/3$.

Вариант 2

(механико-математический факультет)

1. Решите неравенство

$$5\sqrt{\frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x+3}}} + 4\sqrt{\frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+3}}} \leq 9\sqrt{x+4}.$$

2. Решите уравнение

$$|5^{\log_x 122} - x^{\log_5 x} + 614| = 636 - 5^{\log_x 122} - x^{\log_5 x}.$$

3. Первый член конечной геометрической прогрессии с целочисленным знаменателем меньше последнего, но не более чем на 17, а сумма ее членов со второго по последний не меньше 26. Найдите знаменатель прогрессии.

4. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, касающаяся прямой BC , а через вершины B и C — другая окружность, касающаяся прямой AB . Продолжение общей хорды BD этих окружностей пересекает отрезок AC в точке E , а продолжение хорды AD одной окружности пересекает другую окружность в точке F . Найдите отношение $AE:EC$, если $AB = 5$ и $BC = 9$. Сравните площади треугольников ABC и ABF .

5. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sin \arccos(5x) = a + \arcsin \sin(7x - 3)$$

имеет единственное решение.

6. Высота AH тетраэдра $ABCD$ пересекается с его высотой BE , но не лежит в одной плоскости ни с одной из других его высот. На отрезке $HE = 4$ взята точка O , равноудаленная от граней тетраэдра, образующих двугранный угол в 30° при ребре $CD = 5$. Найдите площадь сечения тетраэдра, проходящего через точку O и являющегося прямоугольником.

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики,
олимпиада «Абитуриент-2003», апрель)

1. Сумма первых тридцати членов геометрической прогрессии с ненулевым первым членом и ненулевым знаменателем равна удвоенной сумме ее первых десяти членов. Найдите знаменатель этой прогрессии.

2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) отношение расстояний от центра вписанной в этот треугольник окружности до вершин углов B и C соответственно равно k . Найдите углы треугольника ABC . Каковы возможные значения k ?

3. Найдите все решения системы неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{-\sin x} \leq \sqrt{\cos^3 x + \sin^2 x}, \\ \frac{\pi}{4} < \left| x + \frac{\pi}{2} \right| \leq 2\pi. \end{cases}$$

4. В прямоугольном параллелепипеде $KL MNK_1L_1M_1N_1$ среди всех сечений, проходящих через точки L , N_1 и произвольную точку A , лежащую на ребре L_1K_1 , выбирается сечение наименьшей площади. Найдите диагонали этого сечения, если известно, что $KK_1 = a$, $K_1N_1 = b$ и $LK_1 = d$.

5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2^{3x^2+2y^2+8x-4y+8} + 2^{x^2+4y+5} \leq \\ \leq 33 \cdot 2^{2x^2+y^2+4x+4}, \\ x^2 + y^2 - 8x + 8y = a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, но среди этих решений нет удовлетворяющих условию $x + y = 0$.

6. Решите неравенство

$$\arcsin \sin x + 3 \arccos \geq 3x - 18.$$

Вариант 4

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите неравенство

$$\log_{\left(\frac{3-x}{2}\right)} \left(\frac{6}{x+1}\right) \geq -1.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{\sin x \sin 3x} = \cos x.$$

3. Найдите множество значений функции

$$y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} - x.$$

4. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ вписана сфера радиуса $2\sqrt{6}$. Через точку касания этой сферы с боковой гранью SAB параллельно прямой AB проведена секущая плоскость, проходящая через ближайшую к вершине S точку сферы. Известно, что $AB = 12\sqrt{2}$. Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

5. Найдите все значения параметра α , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 4^x - 2^{x+y} \leq \frac{108\alpha - 161}{2\alpha - 3}, \\ 5 \cdot 2^{x+y} - 9 \cdot 4^y \geq 54 \end{cases}$$

имеет решение.

6. Дан параллелограмм $ABCD$, у которого $AB = 3$, $AD = \sqrt{3} + 1$ и $\angle BAD = 60^\circ$. На стороне AB взята такая точка K , что $AK : KB = 2 : 1$. Через точку K параллельно AD проведена прямая. На этой прямой внутри параллелограмма выбрана точка L , а на стороне AD выбрана точка M так, что $AM = KL$. Прямые BM и CL пересекаются в точке N . Найдите величину угла BKN .

Вариант 5

(физический факультет,
олимпиада «Абитуриент-2003», март)

1. Решите уравнение

$$\cos 3x - 2 \sin 2x - \cos x - \sin x - 1 = 0.$$

2. Решите неравенство

$$7 \log_3 (2+x)^8 < 8 \log_2 (-x+1)^7 \cdot \log_3 2.$$

3. Решите неравенство

$$(4^x - 2 \cdot 2^x - 3) \log_2 x - 3 \geq 4^{\frac{x+1}{2}} - 4^x.$$

4. В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 4\sqrt{3}$, радиус вписанной окружности равен 3. Прямая AE пересекает высоту BD в точке E , а вписанную окружность – в точках M и N (M лежит между A и E), $ED = 2$. Найдите EN .

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{17}{2x^2 + 3y} + \frac{12}{3x^2 - 2y} = 3, \\ \frac{6}{3x^2 - 2y} + \frac{34}{2x^2 + 3y} = 3 \end{cases}$$

и изобразите на координатной плоскости Oxy ее решения.

6. Площадь треугольника равна $6\sqrt{6}$, периметр его равен 18, расстояние от центра вписанной окружности до одной из вершин равно $2\sqrt{42}/3$. Найдите наименьшую сторону треугольника.

7. Для каждого допустимого значения a в уравнении

$$\sqrt{x} + \sqrt{\sqrt{a} - x} = a$$

1) найдите число различных решений уравнения;

2) найдите эти решения.

8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$), объем которой равен 4, проведено сечение плоскостью AC_1B . В пирамиду $C_1AA_1B_1V$ вписан шар. Найдите:

1) площадь сечения AC_1B ;

2) радиус сферы, описанной около данной призмы.

Вариант 6

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\text{tg}^2 x - 6 \cos 2x = 6.$$

2. Решите неравенство

$$|x^2 + 3x| + x^2 - 2 \geq 0.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{25} (5^x - 1) \cdot \log_5 (5^{x+2} - 25) < 4.$$

4. В трапеции $KLMN$ ($LM \parallel KN$) LA – биссектриса $\angle KLM$, точка A – середина отрезка MN , средняя линия равна $\sqrt{5}$, $KA = 4$. Найдите LA .

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x-y} = 9 - |x+2y|, \\ x(x+4y-2) + y(4y+2) = 41. \end{cases}$$

6. В $\triangle KLM$ радиус описанной окружности равен R , $\angle K = \alpha$, точка O – центр окружности, вписанной в этот треугольник. Прямая KO пересекает окружность, описанную около $\triangle KLM$, в точке N . Найдите ON .

7. Для каждого значения a решите неравенство

$$\frac{x^2 \cdot 2^{2a-1} - 2x + 1}{x^2 - (a-2)x - 2a} > 0.$$

8. В пирамиде $SLMN$ даны ребра: $LM = 5$, $MN = 9$, $NL = 10$. Сфера радиуса $\frac{5}{4\sqrt{14}}$ касается плоскости основания LMN и боковых ребер пирамиды. Точки касания делят эти ребра в равных отношениях, считая от вершины S . Найдите объем пирамиды.

Вариант 7

(химический факультет и факультет наук о материалах)

1. Найдите все значения параметра a , при которых множество решений неравенства

$$\frac{a}{x-a} > 0$$

содержит точку $x = 1$.

2. Решите уравнение

$$\cos^2 8x + \sin^2 x = 2 \sin^2 x \cos^2 8x.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}(2-|x-1|) > \log_{\sqrt{10}}(2x-x^2).$$

4. Решите уравнение

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) (\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) = 8.$$

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известно, что $AC \perp BD$. Найдите длину BC , если расстояние от центра окружности до стороны AD равно 2.

6. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (x + \sqrt{2}z)^2 + (y + \sqrt{2}t)^2 = 25 + 2a\sqrt{25 - a^2}, \\ x^2 + y^2 = a^2, \\ z^2 + t^2 = \frac{25 - a^2}{2} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Вариант 8

(биологический факультет)

1. Решите уравнение

$$2 \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 3 \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -3.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2 - 2}}{4 - 2x} \geq -1.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{\log_x \sqrt{2x}} \cdot \log_4 x = -1.$$

4. Три мотоциклиста A , B и C участвовали в показательном заезде, двигаясь по трассе от старта до финиша с постоянными скоростями. Мотоциклисты A и C стартовали одновременно, а мотоциклист B — спустя некоторое время. Первым к финишу пришел мотоциклист A . Мотоциклист B через 1 час после своего старта догнал мотоциклиста C на трассе и прибыл на финиш через 4 часа после старта мотоциклистов A и C и за 2 часа до финиша мотоциклиста C . Найдите отношение скорости мотоциклиста A к скорости мотоциклиста C , если известно, что мотоциклист A двигался в $8/5$ раза медленнее мотоциклиста B .

5. В ромбе $ABCD$ через точки A , B , C проведена окружность с центром в точке O_1 , а через точки A , B , D проведена окружность с центром в точке O_2 . Известно, что отношение длины отрезка O_1O_2 к длине отрезка AO_2 равно 4. Найдите величину $\angle DAO_2$.

6. Решите неравенство

$$(3-x) \log_2(1+\sqrt{7})^{x^2+3x+2} > \sqrt{2-x} \log_3(8+2\sqrt{7})^{(x+1)\sqrt{x+1}}$$

Вариант 9

(факультет почвоведения)

1. Решите уравнение

$$\cos^2 4x - 2 \cos 4x - 3 = 0.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \log_7(x-y) + 7^{xy} = 1, \\ 7^{xy} + \log_7(x-y) = 1. \end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$\frac{3}{2}x^2 - |x| \geq 0.$$

4. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{3x^2 + 5} - \sqrt{3x^2}$$

на отрезке $[0; 3]$.

5. В окружность радиуса 2 вписан угол QPR так, что PR — диаметр окружности. В угол QPR вписана еще одна окружность радиуса $3/4$ так, что она касается большей окружности внутренним образом. Найдите величину угла QPR .

6. Найдите все значения параметра b , при каждом из которых отрезок $[-3; -1]$ целиком содержится среди решений неравенства $\frac{x-3b}{b-2x} < 0$.

Вариант 10

(геологический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{x-2}{|x+2|} + \frac{2x+5}{x+2} \leq 0.$$

2. Решите уравнение

$$4^{x+\frac{1}{2}} - 7^{x-\frac{1}{2}} = 7^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x+1}.$$

3. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B и, встретившись через 50 мин, без остановки продолжили движение каждый в своем направлении. За какое время проходит путь между A и B каждый из пешеходов, если известно, что первый пришел в B на 4 ч раньше, чем второй пришел в A ?

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + 3 = 0, \\ 6y^3 - 18y - 13x^3 - 3x = 0. \end{cases}$$

5. Прямоугольный треугольник ABC вписан в окружность. Из вершины C прямого угла проведена хорда CM , пересекающая гипотенузу в точке K . Найдите площадь треугольника ABM , если $AK : AB = 1 : 4$, $BC = \sqrt{2}$, $AC = 2$.

6. Решите уравнение

$$\sqrt{\cos 3x} \cdot \log_4 \left(\operatorname{tg} \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = 0.$$

7. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых существует нечетное число n , удовлетворяющее равенству

$$3^a n^2 - 3^a + 3^{4-a} n^2 = 96n + 3^{4-a}.$$

8. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S отношение высоты SO к длине стороны основания равно $\sqrt{5}$. Через точку M , лежащую на стороне основания BC , и боковое ребро SA проведена плоскость; при этом точка M выбрана так, что площадь сечения пирамиды этой плоскостью является наименьшей. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

Вариант 11

(географический факультет)

1. Разность девятого и третьего членов знаменитой геометрической прогрессии равна ее шестому члену,

умноженному на $24/5$. Найдите отношение десятого члена прогрессии к пятому.

2. Решите неравенство

$$\frac{6}{|x|} \geq 7 + x.$$

3. Непустое множество X состоит из конечного числа N натуральных чисел. Четных чисел в X меньше двух третей от N , а нечетных не более 36% от N . Какое минимальное значение может принимать число N ?

4. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, перпендикулярны, $AC = 4$, $\angle CAB + \angle DBA = 75^\circ$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$ и сравните ее с числом $2\sqrt{15}$.

5. При каких значениях параметра a уравнение

$$(\sin x - \log_4 a)(\sin x - 2 + 2a) = 0$$

имеет ровно два корня на отрезке $[\pi/2; 5\pi/2]$?

Вариант 12

(филологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\cos 4x = \cos^4 x - \sin^4 x.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos y \cdot 3^{x^3+8} = 27^{x^2+2x} \cdot |\cos y|, \\ 2\sin y = \log_2 x. \end{cases}$$

3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) медианы AM и CN пересекаются в точке D под прямым углом. Найдите все углы треугольника ABC и площадь четырехугольника $NBMD$, если основание $AC = 1$.

4. В двух группах учится одинаковое количество студентов. Каждый студент изучает по крайней мере один язык: английский или французский. Известно, что 5 человек в первой группе и 5 во второй изучают оба языка. Количество изучающих французский в первой группе в 3 раза меньше, чем во второй. Количество изучающих английский во второй группе в 4 раза меньше, чем в первой. Каково минимально возможное количество студентов в одной группе?

5. Найдите все значения параметра b , при каждом из которых для любого a неравенство

$$(x - a - 2b)^2 + (y - 3a - b)^2 < \frac{1}{2}$$

имеет хотя бы одно целочисленное решение $(x; y)$.

Вариант 13

(экономический факультет, отделение экономики)

1. Решите неравенство

$$\sqrt{5 - 4x - x^2} \geq -2x - 1.$$

2. Про числа a и b известно, что $a + b = -12$, $ab = 2$.

Вычислите значение выражения $\frac{1}{a^3} - \frac{|b|}{b^4}$.

3. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 4 \cdot 49^x - 4 \cdot 7^{x+y \log_3 3} + 9^y = 9, \\ 49^x + 12 \cdot 3^{x \log_3 7+y} - 4 \cdot 9^y = 9. \end{cases}$$

4. На первом складе сахара была на 16 тонн больше, чем соли. За день с первого склада вывезли $\frac{1}{m}$ часть сахара и $\frac{1}{3}$ часть соли, причем сахара вывезли на 2 тонны больше,

чем соли. На втором складе соли было на 4 тонны больше, чем сахара. За день со второго склада вывезли также $\frac{1}{m}$ часть сахара и $\frac{1}{5}$ часть соли, причем сахара вывезли на 3 тонны больше, чем соли. Сколько соли было на первом и втором складах, если известно, что m — целое число? При каких m задача имеет решение?

5. Площадь четырехугольника $PQRS$ равна 48. Известно, что $PQ = QR = 6$, $RS = SP$ и ровно три вершины P , Q и R лежат на окружности радиуса 5. Найдите стороны RS и SP .

6. Найдите все значения b , при которых уравнение

$$3\sqrt[5]{x+2} - 16b^2\sqrt[5]{32x+32} = \sqrt[10]{x^2+3x+2}$$

имеет единственное решение.

7. Найдите максимальный объем многогранника с пятью вершинами, который можно поместить в шар радиуса $2\sqrt{3}$.

Вариант 14

(экономический факультет, отделение менеджмента)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{5 - 4x - x^2} = -2x - 1.$$

2. Про числа x и y известно, что $x + y = 12$, $xy = 6$.

Вычислите значения выражения $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$.

3. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3 \cdot 4^x + 2^{x+1} \cdot 3^y - 9^y = 0, \\ 2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x \cdot 3^y + 9^y = -8. \end{cases}$$

4. На складе сахара было на 10 тонн больше, чем соли. За день со склада вывезли $\frac{1}{m}$ часть сахара и $\frac{1}{3}$ часть соли, причем сахара вывезли на 2 тонны больше, чем соли. Сколько соли было на складе, если известно, что m — целое число? При каких m задача имеет решение?

5. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $AB = BC = 8$, $AD = DC = 6$ и ровно три вершины A , B и C лежат на окружности радиуса 5.

6. Найдите все значения b , при которых уравнение

$$3\sqrt[5]{x+4} - 7b^2\sqrt[5]{32x+96} = \sqrt[10]{x^2+7x+12}$$

имеет единственное решение.

Вариант 15

(Высшая школа бизнеса)

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{(x+5)(x-3)}}{x+5} \leq 0.$$

2. В банке общая сумма кредитов, выданных населению, составляет 25% от суммы кредитов, выданных предприятиям. Какой процент от общего объема кредитов в этом банке приходится на долю предприятий?

3. Решите уравнение

$$2\operatorname{ctg} x |\sin x| + 1 = 0.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5 \log_{32}(x+y) + \log_1(3y-8) = 0, \\ x^2 + 2x + y^2 + y = 12. \end{cases}$$

5. Найдите стороны параллелограмма $ABCD$, если известны координаты двух его противоположных вершин

$A(-3; -6)$, $C(5; 12)$ и точки $M(1; 9)$, являющейся серединой стороны BC .

6. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$2x^2 = 2y^2 + 3xy + 7.$$

7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) угол при вершине B равен 80° , а точка M внутри треугольника расположена так, что $\angle MAC = 30^\circ$, а $\angle MCA = 10^\circ$. Найдите величину угла BMC .

8. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$25x^5 + 25(a-1)x^3 - 4(a-7)x = 0$$

имеет ровно 5 различных решений, а сами решения, упорядоченные по возрастанию, образуют арифметическую прогрессию.

Вариант 16

(факультет психологии)

1. Решите уравнение

$$\log_{3x+3} 5 = 2.$$

2. Решите уравнение

$$\sin 3x \sin x = -\frac{1}{8}.$$

3. Решите неравенство

$$|3x + 1| + \sqrt{3x + 4} \leq 3.$$

4. В окружность радиуса $\sqrt{7}$ вписана трапеция с меньшим основанием 4. Через точку на этой окружности, касательная в которой параллельна одной из боковых сторон трапеции, проведена параллельная основаниям трапеции хорда окружности длины 5. Найдите длину диагонали трапеции и площадь трапеции.

5. При каких значениях параметра a уравнение

$$2|x - 9a| - 2a^2 + 35 + x = 0$$

не имеет решений? При каких значениях параметра a все решения этого уравнения принадлежат отрезку $[-30; 63]$?

Вариант 17

(социологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x - 2} = \sqrt{3x + 7}.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{2} \log_{0,1} (6 + x) \leq \log_{0,1} x.$$

3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Радиус окружности равен 2, сторона AB равна 3. Диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны. Найдите CD .

4. В городе N на должность мэра на выборах баллотировались 3 кандидата: Акулов, Баранов и Воробьев. В начале предвыборной кампании предпочтения избирателей распределялись как 1:2:1. По окончании предвыборной гонки 40% избирателей города N отказались участвовать в выборах, у остальных же предпочтения не изменились. Сколько процентов сторонников каждого кандидата отказались от голосования, если по окончании предвыборной гонки соотношение голосов стало 3:3:3,6?

5. Двое рабочих изготовили 316 деталей, причем вторым сделано на 4 детали меньше первого. Известно, что первый рабочий работал на 3 дня дольше второго, при этом в день изготовлял на 2 детали меньше. Сколько деталей в день делал каждый рабочий?

6. Определите все значения параметра a , при каждом из которых три различных корня уравнения

$$x^3 + (a^2 - 9a)x^2 + 8ax - 64 = 0$$

образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти корни.

Вариант 18

(Институт стран Азии и Африки)

1. Числа x, y изменяются в пределах $3 \leq x \leq 4$ и $1 \leq y \leq 2$. Найдите, в каких пределах изменяется величина выражения

$$A = 4^{x-2y-1} - 4y + 4x - 4.$$

2. Решите уравнение

$$(|x| - 5)^2 - |5 - x| = 30.$$

3. В правильный треугольник ABC со стороной a вписана окружность. Эта окружность касается внешним образом трех других окружностей того же радиуса в точках касания сторон треугольника. Точки O_1, O_2, O_3 - центры соответствующих внешних окружностей. Найдите площадь шестиугольника, получающегося при пересечении треугольников ABC и $O_1O_2O_3$.

4. Найдите корни уравнения

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2(\sqrt{2} + 1) \operatorname{ctg} x,$$

принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

5. Решите неравенство

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{\log_{4x^2}(2x^2) \cdot \log_{8x^4}(4x^4)} - 1}\right) \times \sqrt{(x^2 + 8x + 15)(256x^2 - 24x - 1)} \geq 0.$$

6. Функция

$$y(x) = x^2 + 2(c - d)x + 3c - d$$

такова, что $y(1)y(-1) \leq 0$ и $|c - d| \geq 1$. Найдите величины c и d , при которых длина промежутка, представляющего собой множество значений функции $f(x) = |y(x)|$ на отрезке $[-1; 1]$, наименьшая; укажите это множество значений.

Вариант 19

(факультет государственного управления)

1. Автозаправочные станции E и F расположены на расстоянии 3 км одна от другой. Где наиболее выгодно разместить бензосклад, если на АЗС E ежедневно поставляется 8 тонн бензина, а на АЗС F - 4 тонны?

2. Решите неравенство

$$|2x + 8| \leq 8 - |1 - x|.$$

3. Три предприятия A, B и C на паритетных (равных) началах прокладывают необходимую им шоссейную дорогу длиной 16 км. Предприятие A взяло на себя прокладку 10 км дороги, предприятие B - остальных 6 км, а предприятие C внесло всю свою долю деньгами, уплатив 16 милли-

онов условных денежных единиц. Как эти деньги должны быть распределены между предприятиями A и B ?

4. В прямоугольном треугольнике KLM проведен отрезок MD , соединяющий вершину прямого угла с точкой D на гипотенузе KL , так, что длины отрезков DL , DM и DK различны и образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию со знаменателем $\sqrt{2}$, причем $DL = 1$. Найдите величину угла KMD .

5. Для каждой пары чисел a и b найдите все решения неравенства

$$bx^2 + a \leq 0.$$

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2xy - z^2 = 4. \end{cases}$$

7. Для того чтобы успеть на последний электропоезд, семье из четырех человек нужно перейти по пешеходному мосту быстрее чем за 32 минуты. Одновременно по мосту могут идти не более двух человек, причем ввиду темного времени непременно с фонариком. Если мост проходят двое, то со скоростью того, кто идет медленнее. Успеют ли на последний поезд все члены семьи, если известно, что в одиночку Анна может перейти мост за 2 минуты, Василий – за 4 минуты, Игорек – за 10 минут, Марья Ивановна – за 16 минут, а фонарик только один?

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Четыре одинаковых жестких стержня длиной L каждый, концы которых шарнирно соединены, образуют ромб, диагональ которого BD больше диагонали AC (рис. 1). Ромб лежит на столе. В некоторый момент вершины A и C начинают двигать по столу в противоположные стороны вдоль прямой AC с одинаковыми по величине скоростями v .

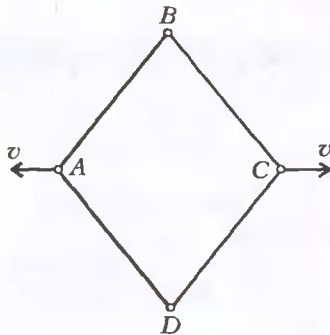


Рис. 1

Найдите ускорение вершины B относительно стола в тот момент, когда ромб превращается в квадрат.

2. На гладком горизонтальном столе стоит брусок (рис. 2). На бруске закреплен блок, через который перекинута гладкая идеальная нить. Один конец нити привязан к неподвижной относительно стола стойке так, что верхняя часть нити горизонтальна, а к другому ее концу прикреплен маленький тяжелый шарик. Удерживая брусок, шарик отклоняют так, чтобы нижний отрезок нити образовал с вертикалью угол α и расположился с ее верхним отрезком в одной вертикальной плоскости, проходящей через центр масс бруска с блоком. В течение некоторого промежутка времени после одновременного отпускания шарика и бруска угол наклона нижнего участка нити остается постоян-

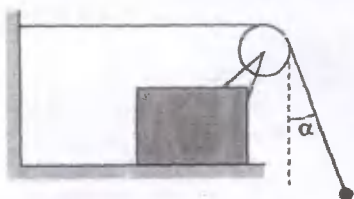


Рис. 2

ным. Найдите величину ускорения шарика в этот промежуток времени.

3. На край стола поставили вертикально невесомый стержень длиной L , на концах которого закреплены маленькие тяжелые одинаковые шарики A и B , а затем его отпустили без начальной скорости. Стержень стал падать в направлении, указанном изогнутой стрелкой на рисунке 3, оставаясь в вертикальной плоскости, перпендикулярной краю стола. С какой угловой скоростью будет вращаться стержень после отрыва от стола, если до этого шарик B не скользил по столу?

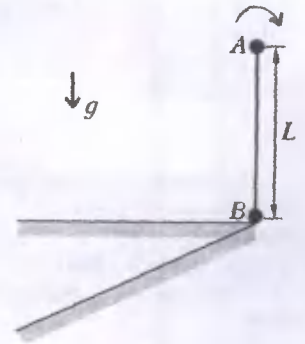


Рис. 3

4. Изогнутая под прямым углом гладкая трубка закреплена так, что один из ее концов направлен вертикально вниз (рис. 4). Внутри трубки находится однородная гибкая веревка длиной L , диаметр которой чуть меньше диаметра трубки. Верхний конец веревки через невесомую нить AB соединен с легкой пружиной, другой конец которой закреплен так, что ее ось горизонтальна и совпадает с нитью. К нижнему концу веревки, не оттягивая его, прикрепили груз массой M . После отпускания груза без начальной скорости он движется

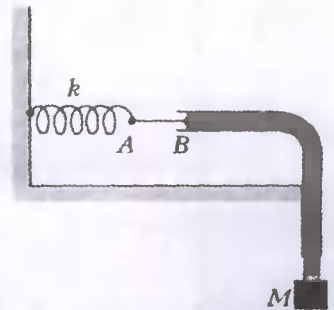


Рис. 4

некоторое время с постоянным ускорением a . Найдите жесткость пружины k .

5. Первоначально пустой теплоизолирующий сосуд с маленькой дыркой на длительное время помещают в большой термостат, заполненный неоном. Температура содержимого сосуда поддерживается равной T_1 , а содержимого термостата – равной T_2 . Давление неона в термостате установилось равным p_2 , причем столь малым, что влетающие и вылетающие из сосуда атомы не сталкиваются между собой в дырке. Найдите давление p_1 в сосуде.

6. В теплоизолированном цилиндре при температуре $t = 0^\circ\text{C}$ под поршнем находятся насыщенный пар воды и лед. Масса льда $m = 0,1$ г. Поршень начинают медленно перемещать, при этом лед плавится, а температура содержимого цилиндра остается постоянной. На сколько нужно изменить объем под поршнем, чтобы расплавился весь лед? Давление насыщенных паров воды при 0°C считать равным $p_n = 0,6$ кПа, удельная теплота плавления льда $\tau = 0,33$ кДж/г, а парообразования воды $\lambda = 2,5$ кДж/г.

7. Сферический конденсатор, радиус внутренней обкладки которого ρ , а внешней R , подключен к батарее ЭДС которой \mathcal{E} , а внутреннее сопротивление r . Первоначально внешняя обкладка конденсатора была заземлена с по-

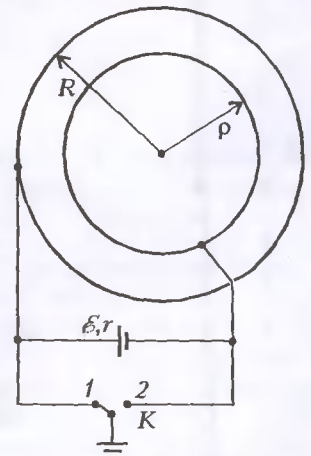


Рис. 5

мощью ключа K , как показано на рисунке 5. Найдите количество теплоты, которое может выделиться на внутреннем сопротивлении батареи после переключения ключа в положение 2. Считать, что конденсатор находится достаточно далеко от других предметов, а соединительные провода очень тонкие.

8. Напряжение между клеммами B и C в схеме, показанной на рисунке 6, а, изменяется с периодом T от $-u_0$ до u_0 по закону, изображенному на рисунке 6, б. Найдите эффективное значение тока через амперметр A . Сопротивления всех резисторов одинаковы и равны R . Внутренним сопро-

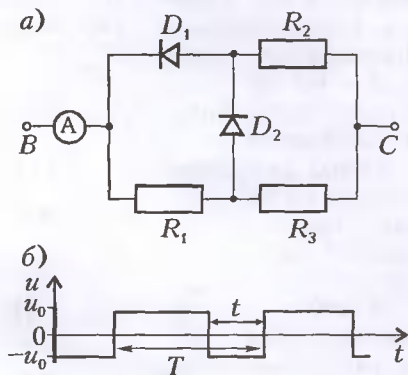


Рис 6

тивлением амперметра пренебречь. Диоды считать идеальными.

9. Из изолированной тонкой проволоки изготовлена замкнутая плоская петля, состоящая из двух окружностей (рис. 7). Радиус большой окружности R_1 , малой R_2 . Петля находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном ее плоскости. Индукция поля возрастает с постоянной скоростью. Во сколько раз изменится разность потенциалов между точками, расположенными одна над другой в месте скрещивания проводов, если меньшую окружность повернуть вокруг оси OO на 180° ?

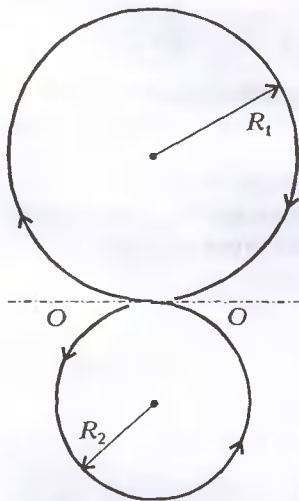


Рис. 7

10. Человеку, идущему по горизонтальному участку дороги в пасмурный безветренный день, небольшая лужа, видневшаяся вдалеке на дороге, показалась синего цвета. На каком расстоянии s от этой лужи она будет казаться человеку зеленой? Считать, что глаза человека находятся все

время на высоте $h = 1,85$ м от дороги. Показатель преломления очень тонкой пленки бесцветного масла на поверхности лужи $n = 1,5$, а воды $n_в = 1,33$. Длина волны света синего цвета $\lambda_с = 0,43$ мкм, а зеленого $\lambda_з = 0,53$ мкм.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Хоккеист бросает шайбу из точки, находящейся на расстоянии $d = 35$ м от ворот и на одинаковых расстояниях $L = 15$ м от бортов хоккейной площадки. Какую скорость v_0 хоккеист должен сообщить шайбе, чтобы она остановилась в центре линии ворот после одного отражения от борта? Считать, что при отражении величина составляющей скорости, параллельной борту, не изменяется, а величина

составляющей скорости, перпендикулярной борту, изменяется в $k = 3/4$ раза. Коэффициент трения между шайбой и льдом $\mu = 0,05$. Считать, что на всем пути шайба не отрывается от поверхности льда. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

2. Дождевальная установка разбрызгивает воду, направляя водяные капли во все стороны с одинаковой скоростью. Какова площадь S орошаемого ею участка, если максимальная высота подъема капель $h = 1$ м? Считать, что капли воды начинают движение непосредственно от поверхности земли. Сопротивление воздуха не учитывать.

3. Скорость снаряда при вылете из ствола пушки равна $v_0 = 500$ м/с. На какой максимальной высоте h снаряд может поразить цель, если расстояние от пушки до цели по горизонтали составляет $l = 1$ км? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Сопротивление воздуха не учитывать. При решении задачи в общем виде считать, что $v_0 > \sqrt{gl}$.

4. Космический корабль, имеющий форму кругового цилиндра, совершает межпланетный перелет с постоянной скоростью. Он приведен во вращение вокруг продольной оси для создания на борту искусственной тяжести, при этом «полом» для космонавтов является внутренняя поверхность корпуса корабля (рис. 8). Космонавт, стоящий на полу, выпускает из рук небольшой предмет. На каком расстоянии l от ног космонавта, измеренном вдоль пола, этот предмет упадет на пол? Радиус корпуса корабля R , высота, с которой падает предмет, h . Влиянием всех небесных тел и силой притяжения предмета к кораблю пренебречь. Сопротивление воздуха не учитывать. Угловая скорость вращения корабля постоянна.

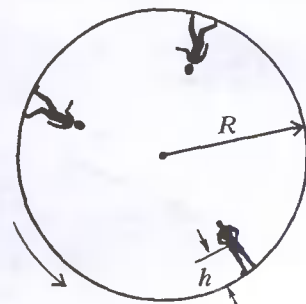


Рис 8

5. Равносторонний треугольник ABC (рис. 9) скользит по горизонтальному столу. Известно, что в некоторый момент времени точка A имеет скорость $v_1 = \sqrt{6}$ м/с $\approx 2,45$ м/с, точка B имеет скорость $v_2 = 1,5$ м/с, а скорость центра треугольника направлена параллельно стороне CB . Какова величина скорости v_0 центра треугольника в этот момент времени?

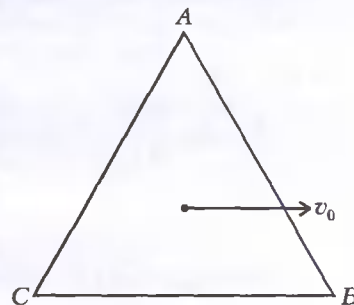


Рис. 9

6. Второй космической скоростью $v_{2к}$ называется минимальная скорость, которую нужно сообщить в вертикальном направлении телу для того, чтобы оно неограниченно удалилось от поверхности планеты, причем скорость тела на бесконечно большом расстоянии от планеты принимается равной нулю. Известно, что для Земли $v_{2к} = 11,2$ км/с. Какова будет скорость v_∞ тела на бесконечно большом расстоянии от Земли, если на поверхности Земли сообщить ему вертикальную скорость $u = 12,2$ км/с? Влиянием вращения Земли вокруг оси и притяжением других небесных тел пренебречь.

7. Брусок массой $M = 100$ г подвешен на невесомой пружине жесткостью $k = 1$ Н/м (рис. 10). Снизу в него



Рис. 10

падает пластилиновый шарик массой $m = 1$ г, летящий вертикально вверх со скоростью $v_0 = 2,5$ м/с, и прилипает к бруску. Найдите амплитуду A возникающих при этом гармонических колебаний. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

8. Начиная движение из состояния покоя, кабина лифта поднимается на высоту $H = 30$ м и останавливается. Найдите, какая работа A была совершена при этом двигателе лифта, если максимальная мощность, развиваемая им при подъеме, составила $N = 2$ кВт. Полное время подъема кабины $\tau = 8$ с, разгон и замедление кабины происходили в течение одинакового времени $\tau_1 = 2$ с с постоянным по величине ускорением, остальное время кабина двигалась равномерно. Коэффициент полезного действия двигателя считать равным 100%, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

9. Два шарика, соединенные невесомым жестким стержнем, подвешены на невесомых нитях одной и той же длины, закрепленных в одной и той же точке (рис.11). Найдите отношение масс шариков $k = m_1/m_2$, если известно, что нить, на которой висит первый шарик, отклонена от вертикали на угол $\alpha = 30^\circ$, а нить, на которой висит второй шарик, отклонена на угол $\beta = 45^\circ$.

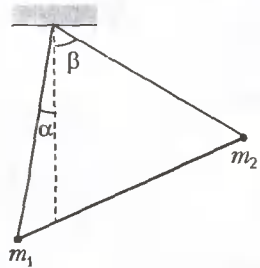


Рис. 11

10. Цилиндрическое ведро массой $m = 1$ кг имеет объем $V_0 = 10$ л и высоту $H = 40$ см. Его погружают вверх дном в воду в вертикальном положении до тех пор, пока дно ведра не окажется вровень с поверхностью воды. Какую силу F нужно приложить к ведру, чтобы удерживать его в этом положении? Температуру воздуха внутри ведра считать неизменной. Плотность воды $\rho = 1$ г/см³, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с², атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Толщиной стенок ведра пренебречь.

11. В цилиндре под подвижным поршнем находится идеальный газ, поддерживаемый при постоянной температуре. Когда на поршень положили груз массой M_1 , объем газа уменьшился в n раз. Груз какой массы M_2 нужно положить на поршень дополнительно, чтобы объем газа уменьшился еще в k раз?

12. С одноатомным идеальным газом совершается циклический процесс, изображенный на рисунке 12. Отношение максимальной температуры газа к минимальной в этом цикле равно $n = 4$, температуры в точках 2 и 4 совпадают. Найдите коэффициент полезного действия цикла η .

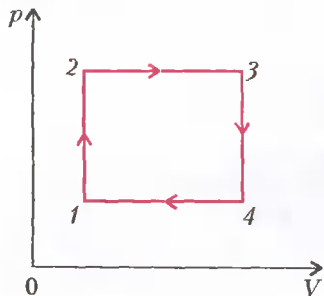


Рис. 12

13. В вертикальном цилиндре, наполовину заполненном водой, под подвижным поршнем заключен воздух (рис.13). Поршень находится в равновесии, когда давление внутри цилиндра равно утроенному атмосферному давлению. При

температуре $t_1 = 6^\circ\text{C}$ расстояние между поршнем и поверхностью воды $h = 10$ см. На каком расстоянии H от поверхно-

сти воды окажется поршень, если цилиндр нагреть до температуры $t_2 = 100^\circ\text{C}$? Атмосферное давление считать нормальным. Давлением водяных паров при температуре t_1 и изменением объема воды за счет испарения пренебречь.

14. Плоский конденсатор присоединен к источнику с напряжением $U = 2000$ В. Пластины раздвинули так, что расстояние между ними увеличилось в $k = 3$ раза. Какая работа A была совершена при этом? Первоначальная емкость конденсатора $C = 400$ пФ.

15. Найдите количество теплоты Q , которое выделится в резисторе сопротивлением $R = 10$ Ом после переключения ключа из положения 1 в положение 2 (рис.14). ЭДС источников $\mathcal{E}_1 = 5$ В, $\mathcal{E}_2 = 6$ В, их внутренние сопротивления одинаковы и равны $r = 1$ Ом. Емкость конденсатора $C = 200$ мкФ.

16. Горизонтально расположенный стержень равномерно вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов, с угловой скоростью ω . На другом конце стержня закреплен маленький шарик массой m , несущий заряд q . Вся система находится в постоянном однородном магнитном поле, индукция которого \vec{B} направлена горизонтально. Найдите максимальное значение F_{\max} силы, с которой стержень действует на шарик в процессе движения, если известно, что минимальное значение этой силы равно F_{\min} . Силу тяжести не учитывать, размером шарика по сравнению с длиной стержня пренебречь.

17. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} . В точке A он имеет скорость \vec{v} , направление которой составляет с вектором магнитной индукции угол α (рис.15). При какой величине магнитной индукции B электрон попадет при своем движении в точку C , находящуюся на одной магнитной линии с точкой A ? Расстояние $AC = L$, величина заряда электрона e , его масса m .

18. На верхнюю грань стеклянного клина с углом $\alpha = 15^\circ$ падает узкий пучок света перпендикулярно этой грани на расстоянии $d = 2$ см от ребра клина (рис.16). Нижняя грань клина посеребрена. На каком расстоянии d_1 от ребра отраженный пучок выходит из клина?

19. На плоскую поверхность плоско-вогнутой линзы, вогнутая поверхность которой имеет радиус R и посеребрена, параллельно главной оптической оси на расстоянии d от нее падает узкий пучок света. Пучок выходит через плоскую поверхность линзы после отражения от сферической поверхности. Най-

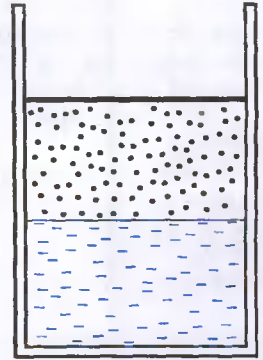


Рис. 13

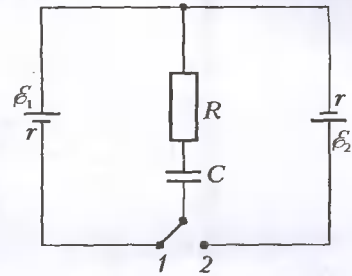


Рис. 14

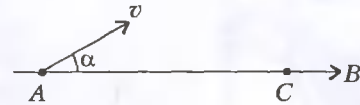


Рис. 15

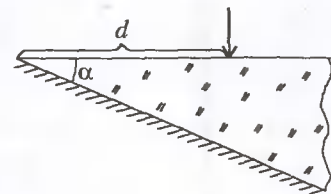


Рис. 16

дите, на каком расстоянии d_1 от оси выходит пучок из линзы, если толщина линзы на оси пренебрежимо мала.

20. Тонкая собирающая линза дает на экране изображение предмета, увеличенное в $n = 3$ раза. Когда линзу переместили в сторону экрана на $l = 32$ см, на экране возникло изображение предмета, уменьшенное во столько же раз. Найдите фокусное расстояние линзы F .

Химический факультет

1. Закрепленная наклонная плоскость образует с горизонтом угол $\alpha = 60^\circ$. С высоты h на наклонную плоскость падает небольшой шарик (без начальной скорости). При ударе о плоскость изменение импульса шарика составило $\Delta p = 0,08$ кг·м/с. Считая удар абсолютно упругим, найдите высоту h , с которой упал шарик. Масса шарика $m = 20$ г. Принять $g = 10$ м/с².

2. Цилиндр массой $m = 20$ кг и радиусом $R = 0,5$ м лежит на горизонтальном полу, касаясь ступеньки высотой $h = 0,1$ м (рис.17). Какую минимальную силу необходимо приложить к центру цилиндра, чтобы он перестал давить на пол? Трение пренебrecь. Принять $g = 10$ м/с².

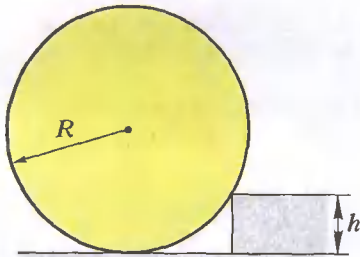


Рис. 17

3. Горизонтальная платформа совершает гармонические колебания в вертикальном направлении вместе с лежащим на ней грузом. Силы, с которыми груз давит на платформу в крайних нижнем и верхнем положениях, отличаются в $n = 2$ раза. Найдите частоту колебаний, если их амплитуда составляет $A = 6,8$ см. Принять $g = 10$ м/с².

4. В модификации опыта Торричелли в пространстве над ртутью остался воздух. При длине трубки, выступающей над ртутью в сосуде $L = 0,6$ м, высота столбика ртути $h = 0,3$ м. На сколько сантиметров надо дополнительно погрузить трубку, чтобы уровень ртути в ней стал таким же, как в сосуде? Атмосферное давление $p_a = 760$ мм рт.ст. Температура постоянная.

5. Два сосуда с объемами $V_1 = 3$ л и $V_2 = 2$ л соответственно соединены небольшой трубкой с перекрытым краем. В первом сосуде находится аргон под давлением $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па, а во втором – неон под давлением $p_2 = 1 \cdot 10^5$ Па. Считая сосуды теплоизолированными, определите внутреннюю энергию смеси газов, образовавшейся после открытия кранов.

6. Два одинаковых воздушных конденсатора подсоединены к источнику тока через резистор R , как показано на рисунке 18. Емкость каждого конденсатора $C = 6 \cdot 10^{-10}$ Ф, ЭДС источника $U = 20$ В. Какой заряд протечет через резистор, если пространство между обкладками одного из конденсаторов заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 5$?

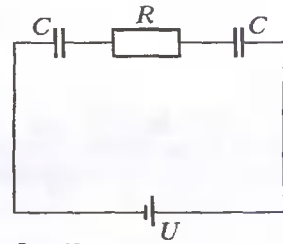


Рис. 18

7. Два источника постоянного тока соединены последовательно и замкнуты на некоторое внешнее сопротивление. Если полярность одной из батарей поменять на противоположную, то количество теплоты, выделяющееся на внешнем сопротивлении за одну секунду, уменьшится в $n = 4$ раза. ЭДС одного из источников равна $\mathcal{E}_1 = 12$ В. Найдите ЭДС другого источника \mathcal{E}_2 , если известно, что она меньше \mathcal{E}_1 .

8. Электрон, прошедший ускоряющую разность потенциалов $\Delta\phi = 40$ В, влетает в «плоский слой» однородного магнитного поля «толщиной» $h = 10$ см. Скорость электрона перпендикулярна как линиям магнитной индукции поля \vec{B} , так и плоской границе слоя. При каком минимальном значении индукции B электрон не пролетит сквозь «слой»? Отношение заряда электрона к его массе $\gamma = 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

9. Источник света, испускающий тонкий луч, движется вдоль поверхности воды в бассейне, приближаясь по нормали к его стенке со скоростью $v_1 = 0,5$ м/с (рис. 19). Луч направлен в воду так, что его угол падения равен $\alpha = 30^\circ$. С какой скоростью v_2 движется под водой по вертикальной стенке бассейна световое пятно от луча? Показатель преломления воды $n = 1,33$.

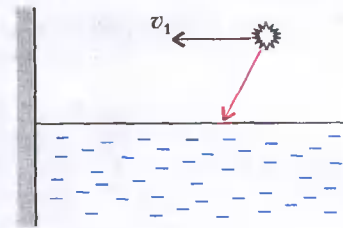


Рис. 19

10. На экран, расположенный на расстоянии $l = 3$ м от объектива проектора с оптической силой $D = 8$ дптр, проецируется кадр диафильма с размерами $a = 24$ мм и $b = 36$ мм. Найдите площадь изображения кадра на экране.

*Публикацию подготовили
В.Бенинг, П.Бородин, В.Воронин, В.Галкин, Е.Григорьев,
Д.Денисов, И.Иновенков, И.Ломов, Г.Медведев,
В.Пацферов, В.Погожев, М.Потапов, А.Разгулин,
И.Сергеев, А.Склянкин, В.Ушаков, М.Федотов,
С.Чесноков, Е.Шикин, Б.Щедрин*

ВНИМАНИЮ НАШИХ ЧИТАТЕЛЕЙ

Авторам – на заметку

Еще раз обращаем ваше внимание на то, что журнал «Квант» НЕ РАССМАТРИВАЕТ и НЕ РЕЦЕНЗИРУЕТ материалы, посвященные «доказательству» великой теоремы Ферма.

То же относится и к «решению» задач о трисекции угла, квадратуре круга и т.п.

Поправка

В статье «Новый прием в школы-интернаты при университетах» («Квант» №6 за 2003 г.) была допущена опечатка. В задаче 1 вступительного задания заочного тура по математике для поступающих в 11 класс второе уравнение системы следует читать так: $x - y = 2y^2$.

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №4 за 2003 г.)

1. Первым взвешиванием сравниваем суммарный вес 2-й и 4-й монет с суммарным весом 6-й и 8-й монет. Если вес оказался одинаковым (обозначим результат взвешивания так:

(2, 4) = (6, 8)), то в обоих наборах имеется по одной фальшивой монете. Значит, монеты 4, 5, 6 одновременно являются либо настоящими, либо фальшивыми. То же справедливо и для монет 1, 2, 8. Вторым взвешиванием сравним веса 6-й и 7-й монет. Если они равны (обозначим результат взвешивания (6) = (7)), то фальшивые 8, 1 и 2 монеты. Если (6) ≠ (7), то фальшивые 4, 5, 6 монеты. В этом случае хватило двух взвешиваний. Если (2, 4) ≠ (6, 8), то это возможно лишь тогда, когда в одной из кучек оказалось либо две фальшивые монеты, либо одна, а в другой кучке – настоящие монеты. Во втором взвешивании сравним вес 4-й и 6-й монет с весом 2-й и 8-й монет. Если (4, 6) = (2, 8), то во взвешивании участвовали две фальшивые монеты. Следовательно, фальшивые монеты либо 2, 3 и 4, либо 6, 7 и 8. Осталось понять, какие именно. Для этого сравним вес 4-й и 5-й монет. Если (4) = (5), то фальшивые 6, 7 и 8 монеты; если же (4) ≠ (5), то фальшивые 2, 3 и 4. Если (4, 6) ≠ (2, 8), то в первом взвешивании участвовала всего одна фальшивая монета. Пусть в первом взвешивании (2, 4) > (6, 8), а во втором (4, 6) > (2, 8). В этом случае на подозрении оказывается 4 – как более тяжелая и 8 – как более легкая. В третьем взвешивании сравним вес 4-й и 2-й монет. Если (4) = (2), то фальшивые 1, 7 и 8 монеты, если же (4) ≠ (2), то фальшивые 3, 4 и 5. Для других случаев рассуждения аналогичны. Пусть (2, 4) > (6, 8), (2, 8) > (4, 6). Третьим взвешиванием сравниваем вес 2-й и 8-й монет. Если (2) > (8), то фальшивые 1, 2, 3. Если (2) = (8), то фальшивые 5, 6, 7. Пусть (6, 8) > (2, 4); (4, 6) > (2, 8). Если (6) > (8), то фальшивые 5, 6, 7. Если (6) = (8), то фальшивые 1, 2, 3. Пусть (6, 8) > (2, 4), (2, 8) > (4, 6). Если (8) > (2), то фальшивые 1, 7, 8. Если (8) = (2), то фальшивые 4, 5, 6. Итак, все фальшивые монеты можно определить за 3 взвешивания.

2. Разложив левую часть равенства

$$x^4yz + y^4zx + z^4xy - x^3y^3 - y^3z^3 - z^3x^3 = 0$$

на множители, получаем

$$(x^2 - yz)(y^2 - zx)(z^2 - xy) = 0.$$

Поскольку одна из скобок произведения равна нулю, отсюда непосредственно следует утверждение задачи.

3. Точный квадрат не получится.

а) Поскольку число 5^{2n+1} оканчивается на 125, то, приписав к нему 2^{2m+1} , получим число вида $1000a + 125$. Это число может быть квадратом лишь такого числа, которое оканчивается на цифру 5, т.е. числа вида $10b + 5$. Но число $(10b + 5)^2 = 100b(b + 1) + 25$ имеет четное число сотен $b(b + 1)$, а число $1000a + 125 = 100(10a + 1) + 25$ – нечетное число сотен $10a + 1$.

б) Каждое из чисел 2^{2m} и 5^{2n} при делении на 3 дает остаток

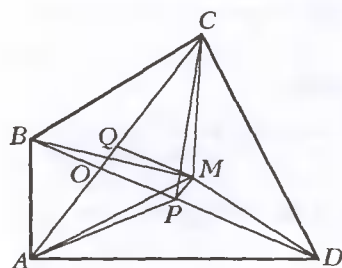


Рис. 1

1. Следовательно, сумма цифр числа, образованного приписыванием к числу 2^{2m} справа числа 5^{2n} , при делении на 3 дает остаток 2.

Однако не существует такого натурального числа, квадрат которого при делении на 3 дает остаток 2.

4. Пусть O – точка пересечения диагоналей, P – сере-

дина диагонали BD, Q – середина диагонали AC; $MP \parallel AC$, $MQ \parallel BD$, S – площадь четырехугольника ABCD (рис.1). Поскольку $MP \parallel AC$, то площади S_{ABCM} и S_{ABCP} четырехугольников ABCM и ABPC равны, и

$$S_{ABCM} = S_{ABCP} = \frac{1}{2}S.$$

Аналогично, $S_{ABMD} = S_{ABQD} = \frac{1}{2}S$.

Обозначим $S_{ABM} = a$, $S_{BMC} = b$, $S_{CMD} = c$, $S_{AMD} = d$. Тогда имеем

$$a + b = \frac{1}{2}S, \quad a + d = \frac{1}{2}S.$$

Вычитая эти равенства, находим

$$b - d = 0, \text{ или } b = d.$$

Складывая, получаем $2a + b + d = S$. Но $a + b + c + d = S$. Отсюда находим

$$a - c = 0, \text{ или } a = c.$$

Итак, $S_{ABM} = S_{CMD}$, $S_{BMC} = S_{AMD}$, что и требовалось доказать.

Замечание. Равенство $a + b + c + d = S$ основано на том факте, что точка M лежит внутри четырехугольника ABCD. Обозначим его.

Пусть точка M лежит в той же полуплоскости относительно прямой BD, что и точка C, и в той же полуплоскости относительно прямой AC, что и точка D (рис.2), тогда $CQ > OQ$, $DP > PO$.

Пусть $PP_1 = PO$, $QQ_1 = QO$. Параллелограмм OQMP полностью принадлежит треугольнику OQ_1P_1 , который, в свою очередь, полностью принадлежит треугольнику OCD.

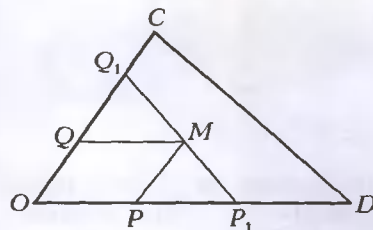


Рис. 2

Остальные случаи расположения точки M относительно диагоналей четырехугольника ABCD рассматриваются аналогично.

5. *Ответ:* можно изготовить решетки для $n = 2$, а также для $n = 6k - 3$ и $n = 6k - 1$, где k – любое натуральное число. А теперь это докажем.

Для удобства в дальнейшем используемые П-образные заготовки будем называть просто *скобами*.

Нетрудно убедиться, что общее число единичных стержней решетки $n \times n$ равно $2n(n + 1)$. Так как каждая скоба состоит из трех стержней, то общее число стержней решетки должно делиться на 3, что возможно только для $n = 3m - 1$ и $n = 3m$ (m – натуральное). Легко видеть, что две решетки наименьших допустимых размеров (2×2 и 3×3) изготовить можно (рис.3; здесь скобы слегка искривлены, чтобы было видно, как они взаимно расположены между собой).

Теперь докажем следующий факт: *если для $n > 2$ решетку можно изготовить, то n – нечетное число.*

Допустим обратное – что при некотором четном $n > 2$ (а следовательно, $n \geq 4$) решетку изготовить все-таки можно. Рассмотрим произвольный угол этой решетки (для определенности – левый нижний). Ясно, что скоба, содержащая этот угол, может быть расположена двумя способами, но поскольку решетка квадратная, то эти способы в сущности одинаковы (с точностью до симметрии относительно диагонали решетки). Поэтому пусть для определенности скоба расположена так, как показано на рисунке 4,а. Тогда становится очевидным, что скоба, расположенная справа от нее, может быть сориентирована единственным способом – как на рисунке 4,б. В

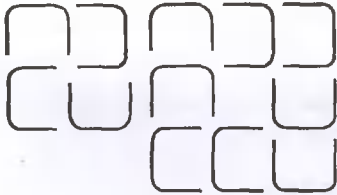


Рис. 3

свою очередь, скоба, расположенная еще правее, тоже может быть сориентирована единственным способом, а также и все следующие вплоть до правого нижнего угла (рис.4,в). Но тогда единственно возможной оказывается ориентация скобы, расположенной над правой нижней скобой, а также всех скоб, что находятся еще выше, — вплоть до правого верхнего угла (рис.4,г). Продвигаясь так и далее, мы, наконец, замкнем «цепочку» скоб вдоль всего периметра решетки (рис.4,д).

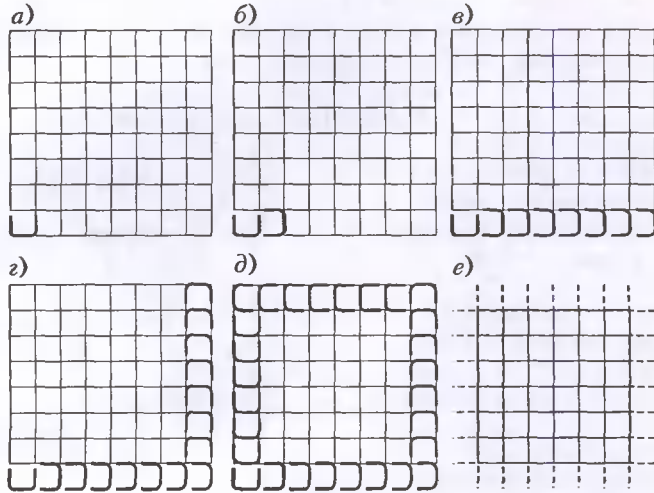


Рис. 4

Пойдем дальше. Отбросим эти «наружные» скобы и посмотрим, что осталось. Остался, как видно, своеобразный «бахромистый» квадрат, а «бахромой» с каждой его стороны являются $(n - 3)$ параллельных единичных отрезков (рис.4,е). Ясно, что покрыть эти отрезки скобами можно только парно — сразу по два соседних отрезка. Поэтому, если $(n - 3)$ — нечетное число, то изготовить решетку невозможно.

Итак, $(n - 3)$ должно быть четным числом, а, значит, n должно быть нечетным. Как уже говорилось, $n = 3m - 1$ или $n = 3m$. Первое из этих чисел будет нечетным только при четном m (т.е. $m = 2k$), а второе — при нечетном m (т.е. $m = 2k - 1$). Подставив эти значения, получим допустимые множества значений n : $n = 6k - 1$ и $n = 6k - 3$, где k — любое натуральное число.

Убедимся, что этого и достаточно. Для этого сначала убедимся, что можно изготовить наименьшие по размерам решетки для каждой из двух указанных «серий» размеров (соответствующие $k = 1$), т.е. 5×5 и 3×3 . Для решетки 3×3 это уже известно (см. рис.3), а для решетки 5×5 пример приведен на рисунке 5.

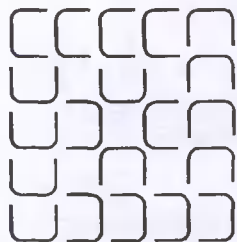


Рис. 5

Теперь докажем следующую теорему: если можно изготовить квадратную решетку с нечетной длиной стороны, то можно изготовить квадратную решетку, длина стороны которой на 6 больше.

Очевидно, из справедливости этой теоремы следует наше утверждение: в самом деле, решетки со стороной $n = 6k - 1$ и $n = 6k - 3$ при $k = 1$ изготовить можно, и, увеличив сторону

решетки нужное число раз на 6 (в соответствии с теоремой), можно получить решетку указанных размеров для любого натурального k .

Приступим к доказательству теоремы. Пусть удалось изготовить квадратную решетку с нечетной длиной стороны, равной $2p - 1$ (p — натуральное) — см. рисунок 6,а.

Приложим к каждой стороне по p скоб с равными интервалами, как на рисунке 6,б. Затем присоединим к каждой стороне еще по $(p + 1)$ скоб «ногами наружу» — см. рисунок 6,в. Получился такой же «бахромистый» квадрат, как мы рассматривали выше. Осталось «обложить» его со всех сторон одним слоем скоб, и получится именно то, что требовалось, — квадратная решетка, стороны которой на 6 больше исходной (рис.6,г). Все!

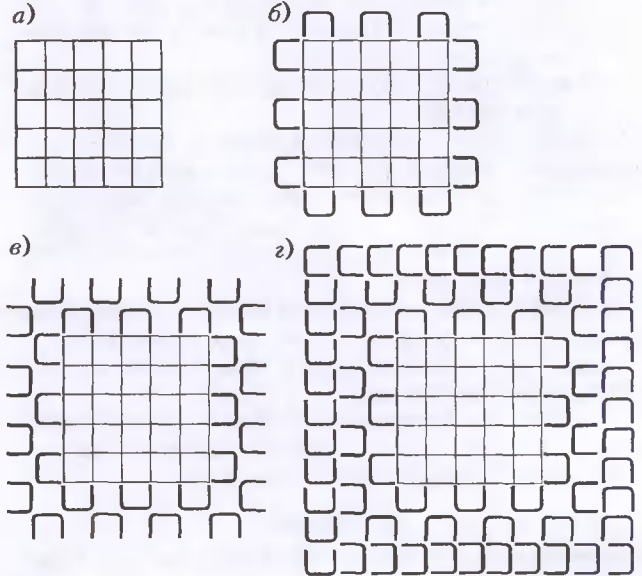


Рис. 6

Вообще-то эта задача была задумана давно, но в общем виде: для прямоугольных решеток, а не только для квадратных. На протяжении нескольких лет предпринимались попытки ее решить, но решить не удалось, тогда как для частного случая квадратных решеток, как видно, решение есть, и вполне посылное для школьников. Так что эта задача выходит в свет от отчаянья и с некоторой надеждой: вдруг кто-то одолеет общий случай!

Добавим, что наш интенсивный поиск не дал ни одной решетки, отличной от квадратной, поэтому есть подозрение, что такие решетки изготовить невозможно, и все действительно исчерпывается квадратными решетками.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Длина спирали лампочки уменьшается, падает сопротивление и при том же напряжении растет потребляемая мощность.
2. При перегорании волосок плавится. Пока он не застынет, действуют силы поверхностного натяжения, которые и образуют на концах волоска шарики.
3. В первом случае ток уменьшается по мере накаливания нити, так как сопротивление металлов растет с повышением температуры. В случае угольной лампочки происходит обратное.
4. Угольная лампочка накалена сильнее.
5. Численное значение термического коэффициента сопротивления металла порядка 10^{-3} , а коэффициента линейного расширения порядка 10^{-5} . Так что на практике вторым эффек-

том можно пренебречь по сравнению с первым.

6. Нет, не так. При меньшем напряжении металлическая нить накала лампы будет иметь меньшую температуру и, следовательно, меньшее сопротивление. Поэтому мощность лампы уменьшится менее чем в три раза.

7. Ток будет больше в первом случае, поскольку от охлаждения спирали ее сопротивление падает.

8. Явление сверхпроводимости, объяснимое только в рамках квантовой теории.

9. Катод бомбардируют положительные ионы, масса которых в тысячи раз больше массы электронов, бомбардирующих анод.

10. Охлаждение катода прекратит дуговой разряд; охлаждение же анода на характер разряда практически не повлияет.

11. В цепи пойдет отчасти выпрямленный ток: электроны, испускаемые раскаленным угольным стержнем, в течение одного полупериода идут от угля к металлу.

12. Можно. Например, с помощью термоэлектронной или фотозлектронной эмиссии.

13. Холодное стекло – практически изолятор. При нагреве сопротивление стекла уменьшается, сила тока растет и лампочка загорается. При закорачивании лампочки сопротивление цепи еще уменьшается, и сила тока возрастает до такой величины, что он эффективно нагревает стеклянную палочку даже в отсутствие горелки.

14. При нагревании полупроводника током его сопротивление уменьшается без совершения механических перемещений.

15. При небольших температурах их сопротивление при нагревании возрастает, при высоких – уменьшается.

16. Возникшая при нагревании диффузия свободных носителей заряда (в данном случае – дырок) в сторону холодного конца приводит к повышению его потенциала.

Микроопыт

Сопротивление электролита (раствора соли) при нагревании уменьшается.

Упругие силы, деформации и закон Гука

- $F_{\max} = mg \left(\frac{1}{2} + \frac{R}{l} \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) \right)$.
- $v > \left(\sigma_p - \frac{mg}{S} \right) \sqrt{\frac{Sl}{mE}} = 3 \text{ м/с}$.
- $\Delta l = \frac{\rho g l^2}{2E}$; удлинение изменится в a/g раз.
- $T = 2\pi \sqrt{\frac{m + M/3}{k}}$.
- $S(x) = S_0 \cdot \exp\left(\frac{\rho g S_0}{F_0}(h-x)\right)$; $\frac{\Delta h}{h} = \frac{F_0}{ES_0}$.
- $\Delta l = \frac{\rho g_0 R^2}{3E} \approx 230 \text{ м}$. 7. $T_1 = \frac{7}{12} mg$, $T_2 = \frac{1}{3} mg$, $T_3 = \frac{1}{12} mg$.

О модуле квадратного трехчлена

- $-\frac{8M}{(n-m)^2} \leq a \leq \frac{8M}{(n-m)^2}$. 2. $\{(-1; -2), (0; 1)\}$, $[0; 2]$.
- $a = -\frac{1}{2}(m+n)$, $b = \frac{1}{4}(m-n)$.
- 7/16. 6. Да. 8. 8. 9. $2\sqrt{2M}$.
- Если $(m-n)^2 \leq M_2 - M_1$, то $p \in \left[-(m+n) - \frac{M_2 - M_1}{n-m}; -(m+n) + \frac{M_2 - M_1}{n-m} \right]$; если $M_2 - M_1 < (m-n)^2 \leq 4(M_2 - M_1)$, то $p \in \left[-2(m + \sqrt{M_2 - M_1}); 2(\sqrt{M_2 - M_1} - n) \right]$;

если $4(M_2 - M_1) < (m-n)^2$, то искомым значений параметра не существует.

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 54. 2. $\{0\} \cup \left[\sqrt{\frac{5}{2}}; \sqrt[3]{2} \right]$.

3. $25\sqrt{3}$; $75\sqrt{3}$. *Указание.* Докажите подобие треугольников ABD и ADC.

4. 2. *Указание.* Заменой $a = y + \log_2 x$, $b = y + 1 - 2^{x-1}$ первое уравнение приводится к виду $|a + b| = |a| + |b|$, что эквивалентно неравенству $ab \geq 0$. Аналогично, положив $c = x$, $d = y + 1$, $e = 1 - y$, из второго уравнения получим систему неравенств $c \geq 0$, $d \geq 0$, $e \geq 0$. Решения полученной системы неравенств показаны

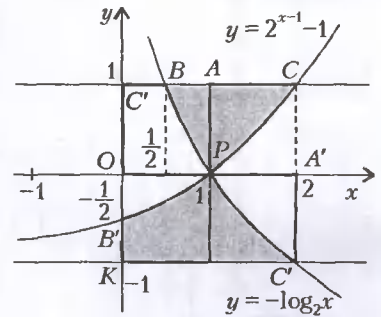


Рис. 7

цветом на рисунке 7. Осталось заметить равенство криволинейных треугольников PAB и POB', а также PAC и PA'C', вытекающее из того, что график функции $y = 2^{x-1} - 1$ получается из графика функции $y = -\log_2 x$ поворотом на 90° против часовой стрелки вокруг начала координат и сдвигом на вектор (1; -1). Таким образом, закрашенная площадь равна площади прямоугольника KOA'C'.

5. 3. *Указание.* Введем в пространстве декартову систему координат, как показано на рисунке 8. Пусть $\angle OAD = \alpha$, $\angle OAB = \beta$, $\angle OAA' = \gamma$, $O = (x; y; z)$. Тогда $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. Из равенства $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ следует равенство $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2(\alpha + \beta) = 1$, из которого получаем после преобразований равенство $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 0$, означающее, что точка O лежит в одной из координатных плоскостей.

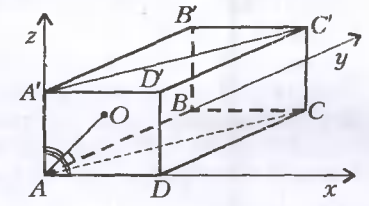


Рис. 8

Прямоугольник AA'C'C', в котором точка O лежит по условию, пересекает координатные плоскости по отрезкам AA' и AC. Если точка O лежит на отрезке AA', то сфера с центром в O имеет общие точки с плоскостью AA'D, что противоречит условию. Если же точка $O = (x; y; 0)$ лежит на отрезке AC, то радиус сферы равен $AA' = x < y$, поэтому

$$AA' < AD < AB \Rightarrow AA' = 2, AD = 6, AB = 9 \Rightarrow y = x \cdot \frac{AB}{AD} = AA' \cdot \frac{AB}{AD} = 2 \cdot \frac{9}{6} = 3.$$

6. πn , $n \in \mathbb{Z}$. *Указание.* Исходное уравнение заменой $t = \cos x$ приводится к кубическому уравнению

$$4(\cos \alpha + 1)t^3 + 4 \sin 2\alpha \cdot t^2 - (\sin 3\alpha + 3 \cos \alpha + 3)t - 3 \sin \alpha = 0,$$

имеющему не более трех корней, которым соответствуют не более 6 точек на единичной окружности, расположенных симметрично относительно оси абсцисс и делящих окружность не

более чем на 6 дуг по $\frac{\pi}{3}$ каждая. Этими точками могут быть только точки вида $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, где $k = 0, 1, \dots, 5$.

Вариант 2

1. $\{-3\}$. *Указание.* Избавьтесь от иррациональности в знаменателях подкоренных выражений.

2. $\frac{1}{25}$. *Указание.* Пусть $u = 5^{\log_5 x^{122}}$, $v = x^{\log_5 x}$. Тогда $|u - v + 614| = 636 - u - v$

$$\text{либо } \begin{cases} u = 11, \\ v \leq 625, \end{cases} \quad \text{либо } \begin{cases} v = 625, \\ u \leq 11. \end{cases}$$

Осталось решить полученные системы.

3. 2. *Указание.* Пусть $u_k = u_1 q^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$, — данная прогрессия. Из неравенств $0 < u_n - u_1 \leq 17$ и $u_2 + \dots + u_n \geq 26$

следует, что $0 < u_1(q^{n-1} - 1) \leq 17$ и $\frac{q}{q-1} u_1(q^{n-1} - 1) \geq 26$, откуда $\frac{q}{q-1} > 0$ и $\frac{17q}{q-1} \leq 26$.

4. 25/81; одинаковы. *Указание.* Докажите, что треугольники ADB и CDB подобны, а DE — биссектриса угла ADC .

5. $\pi - \frac{22}{5} \leq a < \pi - \frac{8}{5}$; $a = \pi - 3 + \frac{\sqrt{74}}{5}$. *Указание.* При

$-\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{1}{5}$ для $u = 7x - 3$ получаем оценку $-\frac{22}{5} \leq u \leq -\frac{8}{5}$,

и, тем самым, $-\frac{3\pi}{2} < u < -\frac{\pi}{2}$. Но для таких значений u имеем $\arcsin \sin u = -\pi - u$, так что уравнение приводится к виду

$$\sqrt{1 - 25x^2} = a - \pi - 7x + 3.$$

После замены $t = 5x$, $b = a + 3 - \pi$ это уравнение переписывается так:

$$\sqrt{1 - t^2} = b - \frac{7}{5}t.$$

Осталось нарисовать график функции $y = \sqrt{1 - t^2}$ (полуокружность радиуса 1) и выяснить, при каких значениях b прямая $y = b - \frac{7}{5}t$ пересекает его в единственной точке.

6. $10(2 - \sqrt{3})$. *Указание.* Докажите, что, во-первых, ребра AB и CD перпендикулярны и, во-вторых, остальные пары противоположных ребер не перпендикулярны, так что сечение, являющееся прямоугольником, непременно параллельно ребрам AB и CD . Последнее следует из того, что если сечение тетраэдра плоскостью — параллелограмм, то его стороны соответственно параллельны паре скрещивающихся ребер.

Вариант 3

1. $-1, \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

2. $\angle A = \angle C = \alpha$, $\angle B = \pi - 2\alpha$, где $\alpha = 2 \arcsin \frac{\sqrt{8k^2 + 1} - 1}{4k}$; $k > 0$.

3. $\left\{-\frac{5\pi}{2}\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{2}\right\} \cup \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right] \cup \left[-\frac{9\pi}{4} + \arcsin \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}; -2\pi\right]$. *Ука-*

зание. Первое неравенство равносильно системе

$$0 \leq -\sin x \leq \cos^3 x + \sin^2 x,$$

откуда

$$\begin{cases} \sin x \leq 0, \\ \cos^3 x + \sin^2 x + \sin x \geq 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \sin x \leq 0, \\ (\sin x + 1)(\cos x + \sin x - \cos x \sin x) \geq 0. \end{cases}$$

Значит, либо $\sin x = -1$, либо $\cos x + \sin x - \sin x \cos x \geq 0$.

Для решения последнего неравенства удобно выполнить замену $t = \sin x + \cos x$, после чего остается отобрать из найденных решений решения, удовлетворяющие второму неравенству.

$$4. \sqrt{b^2 + d^2}, \sqrt{a^2 + b^2 + \frac{(d^2 - a^2)(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2}}.$$

Указание. Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$, совместив точку N с ее началом O и направив оси Ox , Oy и Oz по ребрам параллелепипеда NK , NM и NN_1 соответственно (рис. 9). Согласно условию, $NK = b$, $NN_1 = a$. Пусть $NM = c$, тогда $c^2 = d^2 - a^2$.

Сечение, проходящее через точки L , N_1 и $A \in K_1L_1$, — параллелограмм AN_1BL . Его площадь равна $|\overline{N_1A}| \cdot |\overline{N_1B}| \sin \varphi$, где φ — угол между $\overline{N_1A}$ и $\overline{N_1B}$, который можно найти из равенства

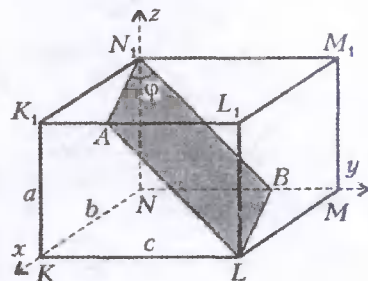


Рис. 9

$$\cos \varphi = \frac{|\overline{N_1A}| \cdot |\overline{N_1B}|}{|\overline{N_1A}| \cdot |\overline{N_1B}|}.$$

Заметив, что из равенства прямоугольных треугольников N_1K_1A и LMB следует $AK_1 = BM$, положение точек A и B можно задать с помощью переменной величины t следующим образом:

$A\left(b; \frac{c}{2} - t; a\right)$, $B\left(0; \frac{c}{2} + t; 0\right)$, где $|t| \leq \frac{1}{2}c$. Координаты других интересующих нас точек и векторов таковы:

$$N_1(0; 0; a), \quad \overline{AB} = (-b; 2t; -a), \quad \vec{u} = \overline{N_1A} = \left(b; \frac{c}{2} - t; 0\right),$$

$$\vec{v} = \overline{N_1B} = \left(0; \frac{c}{2} + t; -a\right).$$

Пусть $S_{AN_1BL} = S(t)$. Вычисления дают

$$S^2(t) = (a^2 + b^2)t^2 - c(a^2 - b^2)t + a^2b^2 + \frac{c^2}{4}(a^2 + b^2).$$

Минимум квадратичной функции $S^2(t)$ достигается при

$t_0 = \frac{c(a^2 - b^2)}{2(a^2 + b^2)}$, это значение t_0 и определяет положение точек A и B .

5. $(44 - 24\sqrt{2}; 44 + 24\sqrt{2})$. *Указание.* После замены

$u = 2^{x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4}$ получаем неравенство

$$u^2 - 33u + 32 \leq 0, \text{ т.е. } 1 \leq u \leq 32,$$

но тогда

$$4 \leq (x+2)^2 + (y-2)^2 \leq 9. \quad (1)$$

Уравнение исходной системы приводится к виду

$$(x-4)^2 + (y+4)^2 = a + 32. \quad (2)$$

На координатной плоскости Oxy неравенство (1) задает кольцо с центром в точке $C(-2; 2)$, внутренний и внешний радиусы которого равны 2 и 3 соответственно. Уравнению (2) при $a + 32 \geq 0$ удовлетворяют координаты $(x; y)$ точек окружности с центром $A(4; -4)$ и радиусом $\sqrt{a + 32}$.

Прямая $x + y = 0$ проходит через точки A и C , причем $AC = 6\sqrt{2}$. Поэтому решения данной системы с условием $x + y \neq 0$ существуют, если и только если окружность пересекает кольцо, но не пересекает прямую $x + y = 0$ внутри или на границе кольца.

6. $\left(-\infty; \frac{4\pi+18}{5}\right] \cup [8\pi-18; 18-3\pi]$. *Указание.* Заметим, что $\arcsin \sin x$ и $\arccos \cos x$ – определенные на всей числовой прямой 2π -периодические кусочно-линейные функции. Их графики изображены на рисунке 10. График же $y = f(x)$

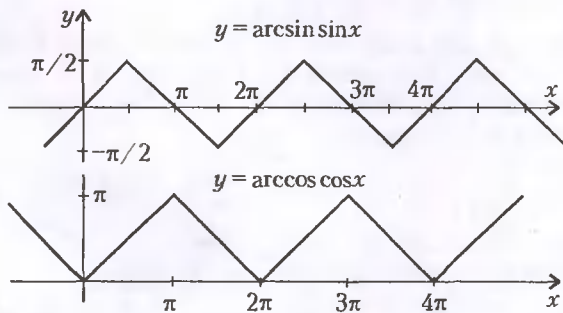


Рис. 10

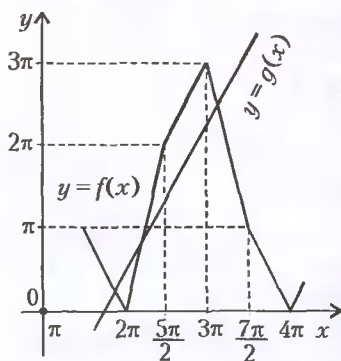


Рис. 11

левой части неравенства на периоде $[2\pi; 4\pi]$ показан на рисунке 11. Его легко построить, например, определив значения в «точках излома» графиков на рисунке 10 и соединив полученные точки на отрезке $[2\pi; 4\pi]$, а затем воспользоваться 2π -периодичностью функции f . Построив на том же чертеже график функции $y = g(x) = 3x - 18$, легко найдем точки пересечения графиков и решения неравенства.

Вариант 4

1. $(-1; 1) \cup [2; 3)$. 2. $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.
3. $\left[-2; -\frac{3}{2}\right) \cup [-1; +\infty)$. *Указание.* Множество значений функции $y = f(x)$ совпадает со множеством тех значений y , при которых уравнение $f(x) = y$ имеет решения, т.е. тех y , при которых система

$$\begin{cases} x + y \geq 0, \\ x^2 - 3x + 2 = (x + y)^2 \end{cases}$$

имеет решения относительно x .

4. $27\sqrt{3}$. *Указание.* Пусть Q – точка касания вписанной в пирамиду сферы с гранью SAB , SH – высота пирамиды, P – ближайшая к вершине S точка сферы, O – центр сферы. Так как пирамида правильная, P лежит на SH , PH – диаметр сферы.

Пусть секущая плоскость, проходящая через точки Q и P параллельно AB , пересекает ребра SA, SB, SC и SD в точках K, L, M и N соответственно. Сечение $KLMN$ является равнобокой трапецией ($KL \parallel MN$). Пусть E и F – середины ребер AB и CD соответственно. Точка H – середина EF , Q – середина KL и лежит на апофеме SE . Докажите, что треугольник SEF правильный, а точки F, O и Q лежат на одной прямой.

5. $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. *Указание.* После замены $u = 2^x, v = 2^y$ исходная система принимает вид

$$\begin{cases} u^2 - uv \leq \frac{108\alpha - 161}{2\alpha - 3}, \\ 5uv - 9v^2 \geq 54. \end{cases}$$

Вычитая из первого неравенства второе, приходим к неравенству $(u - 3v)^2 \leq \frac{1}{2\alpha - 3}$, откуда вытекает $\alpha > \frac{3}{2}$. Таким образом, необходимым условием существования решения системы является неравенство $\alpha > \frac{3}{2}$. Покажем его достаточность. Возьмем $u = 3v$ и подставим в систему:

$$\begin{cases} 6v^2 \leq \frac{108\alpha - 161}{2\alpha - 3}, \\ 6v^2 \geq 54. \end{cases}$$

Так как при $\alpha > \frac{3}{2}$ выполнено неравенство $\frac{108\alpha - 161}{2\alpha - 3} \geq 54$, у системы существует решение $(u; v)$, где $u = 3v$. А поскольку это решение можно выбрать так, чтобы условия $u > 0, v > 0$ были выполнены, то существует и решение $(x; y)$ исходной системы неравенств.

6. $\pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right) = \frac{7\pi}{12}$. *Указание.* Из условия задачи

следует, что $ML \parallel AB$. Пусть P – точка пересечения прямых ML и BC . Докажем, что точка N , в которой по условию пересекаются прямые BM и CL , принадлежит также и прямой KD . В силу теоремы Менелая для треугольника BMP и секущей CN справедливо равенство

$$\frac{BN}{NM} \cdot \frac{ML}{LP} \cdot \frac{PC}{BC} = 1.$$

Отсюда с учетом очевидных соотношений $BC = AD, LM = AK, LP = KB, PC = MD$ следует

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BN}{NM} \cdot \frac{MD}{AD} = 1.$$

Поскольку точки K, N и D лежат, соответственно, на сторонах AB, BM и на продолжении стороны AM треугольника ABM , из последнего соотношения согласно обратной теореме Менелая следует, что указанные три точки лежат на одной прямой.

Рассмотрим теперь треугольник AKD . Из условия задачи получаем $AK = 2$. По теореме косинусов находим, что

$$KD = \sqrt{6}, \text{ а } \cos \angle AKD = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \text{ следовательно,}$$

$$\angle AKD = \arccos\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right) = \frac{5\pi}{12}.$$

Вариант 5

1. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$.
2. $(-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{1}{2}\right)$.
3. $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup [\log_2 3; +\infty)$. 4. $(1 + \sqrt{33})/2$. 5. $(-2; 3), (2; 3)$.
6. 5. 7. $x = 0$ при $a = 0$; нет решений при $0 < a < 1$; два решения $x_{1,2} = \left(\frac{a \pm \sqrt{2\sqrt{a} - a^2}}{2}\right)^2$ при $1 \leq a < 2^{\frac{2}{3}}$; $x = 2^{\frac{2}{3}}$ при $a = 2^{\frac{2}{3}}$; нет решений при $a > 2^{\frac{2}{3}}$. *Указание.* Пусть $y = \sqrt{x}$. Тогда $2y^2 - 2ay + a^2 - \sqrt{a} = 0, 0 \leq y \leq a$. Поскольку корни квадратного уравнения расположены симметрично относительно точки $y_0 = \frac{a}{2}$, все они должны содержаться в отрезке $0 \leq y \leq a$. Для этого необходимо и достаточно выполнение условий $D \geq 0, f(0) = f(a) \geq 0$.
8. 1) $(5\sqrt{3})/3$; 2) $(2\sqrt{3})/6$. *Указание.* Пусть $A_1C_1 = a, \angle D_1C_1D = \alpha$ (рис. 12). Центр шара, вписанного в пирамиду

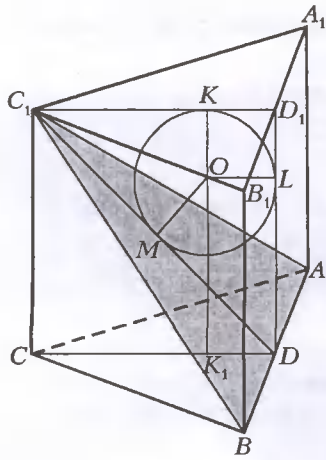


Рис. 12

Пусть K, L и M – точки касания. Тогда

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{OK}{KC_1} = \frac{KD_1}{KC_1} = \frac{1}{2}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}, D_1D = C_1D_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2} \times$$

$$\frac{4}{3} = a \frac{2\sqrt{3}}{3}, V = S_{ABC} \cdot DD_1 = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a \frac{2\sqrt{3}}{3} = 4. \text{ Итак,}$$

$$a^3 = 8.$$

Вариант 6

- $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
- $(-\infty; -\frac{2}{3}] \cup [\frac{1}{2}; +\infty)$.
- $(\log_5 626 - 4; \log_5 26)$.
- 2 .
- $(5; 1), (\frac{1}{3}; -\frac{11}{3})$.

6. $2R \sin \frac{\alpha}{2}$.

7. $(-\infty; -2) \cup (\frac{1}{2}; 1) \cup (1; +\infty)$ при $a = \frac{1}{2}$; $(-\infty; a) \cup (-2; +\infty)$ при $a \leq -2$; $(-\infty; -2) \cup (a; +\infty)$ при $-2 < a < \frac{1}{2}$ и $a > \frac{1}{2}$.

Указание. Дискриминант трехчлена, стоящего в числителе,

при $a \neq \frac{1}{2}$ отрицателен, а при $a = \frac{1}{2}$ равен нулю.

Знаменатель же равен $(x+2)(x-a)$. Осталось применить метод интервалов, учитывая взаимное расположение точек a и -2 .

8. $\frac{1125}{224}$. Указание. Пусть O – центр сферы, E и G – две точки касания с боковыми ребрами (рис. 13),

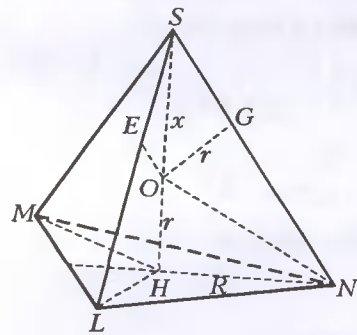


Рис. 13

$SE = SG$ (отрезки касательных). Так как по условию $SE : EL = SG : GN$, то $EL = GN$ и $SL = SN$. Аналогично, $SL = SM$.

Отсюда следует, что основание H высоты пирамиды – центр окружности, описанной около $\triangle LMN$, а SH – прямая, точки которой одинаково удалены от боковых ребер, т.е. O – центр сферы, касающейся боковых ребер и плоскости основания, лежит на высоте SH и ON – биссектриса $\angle SNH$. Пусть $OG = OH = r, NH = R, SO = x$. Из подобия треугольников SOG

и SNH следует, что $\frac{x+r}{R} = \frac{\sqrt{x^2-r^2}}{r}$, откуда $x = r \frac{R^2+r^2}{R^2-r^2}$.

Дальнейшее ясно.

Вариант 7

- $0 < a < 1$.
- $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Указание. Уравнение преобразуется к виду

$$\cos^2 8x \cos^2 x + \sin^2 x \sin^2 8x = 0,$$

откуда

$$\begin{cases} \cos 8x \cos x = 0, \\ \sin 8x \sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 9x = 0, \\ \cos 7x = 0. \end{cases}$$

- $(0; 2)$. Указание. Поскольку по условию $2x - x^2 = 1 - (x-1)^2 > 0$, то $|x-1| < 1$ и, следовательно, правая часть неравенства при $0 < x < 2$ больше нуля, а левая – меньше.
- 0 . Указание. Примените неравенство $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ при $a \geq 0, b \geq 0$ для оценки левой части уравнения.
4. Указание. Пусть C' – точка на дуге BCD такая, что $BC = DC'$. Докажите, что $\angle C'DA$ – прямой, т.е. AC' – диаметр и потому $DC' = 4$.
- $[-5; 5]$. Указание. Точка $A_1(x; y)$ лежит на окружности с центром в начале координат O и радиусом $R_1 = |a|$. Точка $A_2 = (z\sqrt{2}; t\sqrt{2})$ лежит в той же плоскости на окружности с центром O и радиусом $R_2 = \sqrt{25 - a^2}$, а точка $A_3 = (x + z\sqrt{2}; y + t\sqrt{2})$ – на окружности радиуса $R_3 = |a + \sqrt{25 - a^2}|$ с тем же центром. При этом $\overline{OA_3} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2}$. Следовательно, при всяком допустимом a выполняется одно из трех равенств $R_1 + R_2 = R_3, R_1 + R_3 = R_2, R_2 + R_3 = R_1$. Осталось убедиться в том, что одно из выписанных равенств выполняется для каждого допустимого a , т.е. при $-5 \leq a \leq 5$ для точек пересечения окружностей с любым из лучей, выходящих из точки O .

Вариант 8

- $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
- $(-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; 2) \cup [\frac{8+\sqrt{10}}{3}; +\infty)$.
- $2^{\frac{-1-\sqrt{33}}{2}}$. Указание. Выполните замену $t = \log_2 x$.
- $15 : 8$. Указание. Примем скорость C за 1. Пусть x – скорость B , а время, через которое он стартовал, обозначим через t . Тогда

$$\begin{cases} t+1 = x, \\ 6 = (4-t)x. \end{cases}$$

Отсюда либо $x = 3$, либо $x = 2$, но последнее значение противоречит условию.

- $\arcsin \frac{\sqrt{6}-2}{2}$. Указание. Прямая O_1O_2 – серединный перпендикуляр к AB . Пусть M – середина $AB, AO_2 = x, O_1O_2 = 4x, \angle DAO_2 = \varphi$. Тогда $x \cos \varphi = AM = BM = (4x + x \sin \varphi) \operatorname{tg} \varphi$, т.е. $\cos^2 \varphi = 4 \sin \varphi + \sin^2 \varphi$.

- $(-1; 2]$. Указание. После преобразований в области $-1 < x \leq 2$ неравенство приводится к виду

$$(3-x)(x+2) > \sqrt{(2-x)(x+1)} \log_3 4;$$

выполнив замену $y = \sqrt{(2-x)(x+1)}$, получим неравенство

$$y^2 + 4 > y \log_3 4,$$

справедливое при всех y .

Вариант 9

- $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}$.
- $(0; -1), (1; 0)$.

- $(-\infty; -\frac{2}{3}] \cup \{0\} \cup [\frac{2}{3}; +\infty)$.

4. $4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$. Указание. Функция

$$\sqrt{3x^2 + 5} - \sqrt{3x^2} = \frac{5}{\sqrt{3x^2 + 5} + \sqrt{3x^2}}$$

убывает при $x \in [0; 3]$.

5. $2\arctg \frac{1}{4}$. 6. $(-\infty; -6) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Вариант 10

1. $[-7; -2) \cup (-2; -1]$. 2. $\frac{1}{2}$.

3. Первый пешеход прошел путь за 1 час, второй – за 5 часов.

4. $(0; \sqrt{3}), (0; -\sqrt{3}), \left(\sqrt{\frac{3}{119}}; 9\sqrt{\frac{3}{119}}\right), \left(-\sqrt{\frac{3}{119}}; -9\sqrt{\frac{3}{119}}\right)$.

Указание. Преобразовав исходную систему к виду

$$\begin{cases} y^2 - 3 = 2x^2, \\ 6y(y^2 - 3) - x(13x^2 + 3) = 0, \end{cases}$$

получаем

$$12x^2y - x(13x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ 12xy = 13x^2 + 3. \end{cases}$$

5. $\frac{9}{19}\sqrt{2}$. Указание. Пусть $AM = x$, $BM = y$. Тогда

$x^2 + y^2 = 6$. Из подобия треугольников AMK и BKC имеем

$\frac{AM}{BC} = \frac{AK}{KC}$, а из подобия треугольников AKC и BKM получаем $\frac{BM}{AC} = \frac{BK}{KC}$. Поделив одну из пропорций на другую,

приходим к равенству $\frac{2x}{y\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$.

6. $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k$, $k, n \in \mathbf{Z}$. Указание. Данное уравнение сводится к совокупности двух систем

$$\begin{cases} \cos 3x = 0, \\ \operatorname{tg}\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{tg}\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1, \\ \cos 3x \geq 0. \end{cases}$$

7. $\log_3(18 \pm 9\sqrt{3}); \log_3(10 \pm \sqrt{19})$. Указание. Совершив замену $x = 3^a$, $x > 0$, получим уравнение

$$(n^2 - 1)x^2 - 96nx + 81(n^2 - 1) = 0.$$

Поскольку значения $n = \pm 1$ не удовлетворяют этому равенству, то $n^2 - 1 > 0$. А из $x > 0$ следует, что $n > 0$, т.е. $n = 3, 5, \dots$ Выписав дискриминант, видим, что для n возможны лишь два значения: $n = 3$, $n = 5$.

8. $V_{SABM} : V_{SAMCD} = 1 : 41$. Указание. Так как площадь сечения – треугольника AMS – равна $\frac{1}{2}AS \cdot MX$, где MX – высота этого треугольника, то площадь является наименьшей, если MX имеет наименьшую возможную длину. Отсюда следует, что MX – общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AS и BC , если точки M и X лежат на соответствующих ребрах. Так как прямая BC параллельна плоскости SAD , длина MX равна расстоянию от прямой BC до этой плоскости. Это расстояние, в свою очередь, равно высоте, опущенной на боковую сторону треугольника, получающегося как сечение пирамиды, проходящее через ее высоту и середину ребра BC . Проекция BC на плоскость ASD проходит через основание этой высоты и параллельна прямой AD . Точка X ее пересечения с AS и соответствующая ей при проекции точка M на BC являются концами общего перпендикуляра AS и BC .

Осталось найти отношение $\frac{AX}{XC}$, затем $\frac{BM}{MC}$, после чего вы-

числить отношение площадей треугольника ABM и четырехугольника $AMCD$.

Вариант 11

1. $-5^{\frac{5}{3}}$. 2. $(-\infty; -6] \cup [-1; 0) \cup \left[0; \frac{\sqrt{73} - 7}{2}\right]$.

3. 14. Указание. Пусть m – количество нечетных чисел в множестве X . Тогда $\frac{N}{3} < m \leq \frac{9}{25}N$, т.е. $N + 1 \leq \frac{27}{25}N$, или $N \geq 13$. Значение $N = 13$ не годится. А при $N = 14$ и $m = 5$ все условия выполняются.

4. $2\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$; меньше. Указание. Докажите, что четырехугольник с вершинами в серединах сторон данного четырехугольника – параллелограмм, а в условиях нашей задачи – ромб.

5. $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \{1\} \cup \left(\frac{3}{2}; 4\right]$. Указание. Поскольку функция $y = \sin x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ каждое значение $y \neq -1$ принимает в двух точках, а $y = -1$ лишь при $x = \frac{3\pi}{2}$, то исходное уравнение имеет 2 корня в следующих случаях:

$-1 < \log_4 a = 2 - 2a \leq 1$, т.е. при $a = 1$;
 $-1 < \log_4 a \leq 1, |2 - 2a| > 1$;
 $-1 < 2 - 2a \leq 1, |\log_4 a| > 1$.

Вариант 12

1. $\frac{\pi}{3}n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2. $(1; 2\pi k)$, $\left(\frac{1}{4}; -\frac{\pi}{2} + 2\pi m\right)$, $\left(4; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $k, m, n \in \mathbf{Z}$.

3. $\angle A = \angle C = \arctg 3$, $\angle B = \pi - 2\arctg 3$; $\frac{1}{4}$. 4. 28.

5. $b \neq \frac{k}{5}$, $k \in \mathbf{Z}$. Указание. Неравенство задает внутренность круга с центром в точке $(a + 2b; 3a + b)$ и радиусом $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Такой круг не содержит внутри себя ни одной целой точки только в том случае, когда его центр имеет координаты $\left(m + \frac{1}{2}; n + \frac{1}{2}\right)$, т.е. запрещены a и b , для которых

$$\begin{cases} a + 2b = n + \frac{1}{2}, \\ 3a + b = m + \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{где } m, n \in \mathbf{Z}.$$

Итак, запрещены значения $b = \frac{3n + 1 - m}{5}$, $a = \frac{4m - 2n + 1}{10}$, а поскольку $k = 3n + 1 - m$ может принимать любые целые значения, то $b \neq \frac{k}{5}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Вариант 13

1. $[-2; 1]$.

2. -207 . Указание. Числа a и b – корни уравнения $x^2 + 12x + 2 = 0$. Оба числа отрицательны, поэтому нужно вычислить $\frac{a^3 + b^3}{(ab)^3} = \frac{(a + b)^3 - 3ab(a + b)}{(ab)^3}$.

3. $(\log_7 3; 2)$, $\left(\log_7 \frac{5}{3}; -1\right)$.

4. 24 и 80 тонн; $m = 4$. Указание. Пусть x и y – количества соли на первом и втором складах. Из условия получаем

$$\begin{cases} \frac{x + 16}{m} - \frac{x}{3} = 2, \\ \frac{y - 4}{m} - \frac{y}{5} = 3, \end{cases} \quad \text{откуда } x = \frac{6(8 - m)}{m - 3}, \quad y = \frac{5(3m + 4)}{5 - m}.$$

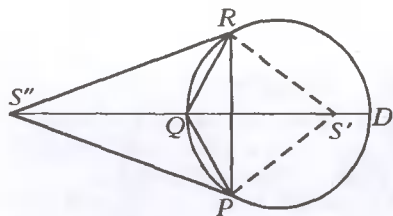


Рис. 14

Этот же перпендикуляр содержит и диаметр окружности, которой принадлежат P, Q и R (рис. 14).

Возможны два случая расположения точки S относительно точки Q – справа (S') или слева (S''). Докажите, что первый из двух случаев невозможен.

6. $\left(-\infty; -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right] \cup \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2\sqrt{2}}; +\infty\right)$. *Указание.* На множестве допустимых значений переменной $x \in (-\infty; -2] \cup [-1; +\infty)$ имеем

$$3\sqrt[5]{x+2} - 32b^2\sqrt[5]{x+1} = 10\sqrt{(x+2)(x+1)}.$$

Заметив, что $x = -1$ не является корнем этого уравнения, введем новую переменную

$$t = 10\sqrt{\frac{x+2}{x+1}} = 10\sqrt{1 + \frac{1}{x+1}}.$$

При $x > -1$ получим уравнение

$$3t^2 - t - 32b^2 = 0, \quad t > 1,$$

а при $x \leq -2$ – уравнение

$$3t^2 + t - 32b^2 = 0, \quad 0 \leq t < 1.$$

Осталось выяснить, при каких b каждое из выписанных уравнений имеет корень в соответствующем промежутке.

7. 36. *Указание.* Многогранник с указанным свойством естественно искать среди тех, все пять вершин A, B, C, D и E которых лежат на сфере радиуса $R = 2\sqrt{3}$. Возможны два случая расположения этих точек.

1) Никакие четыре вершины многогранника $ABCDE$ не лежат в одной плоскости. В этом случае многогранник составлен из двух треугольных пирамид $ABCD$ и $ABCE$ с общим основанием ABC (рис. 15, а).

2) Четыре вершины B, C, D и E многогранника $ABCDE$ лежат в одной плоскости. В этом случае многогранник представляет собой четырехугольную пирамиду с основанием $BCDE$ и вершиной A (рис. 15, б). Тогда плоскость, проходящая через вершины A, B и C , разбивает ее на две треугольные пирамиды с общим основанием.

Таким образом, искомый многогранник $ABCDE$ всегда можно считать составленным из двух треугольных пирамид $ABCD$ и $ABCE$ с общим основанием ABC . Его объем равен трети произведения площади треугольника ABC на сумму высот пирамид $ABCD$ и $ABCE$. Эта сумма принимает наибольшее значение в случае, когда вершины D и E лежат на концах диаметра, перпендикулярного плоскости треугольника ABC . Что касается самого треугольника ABC , то его площадь максималь-

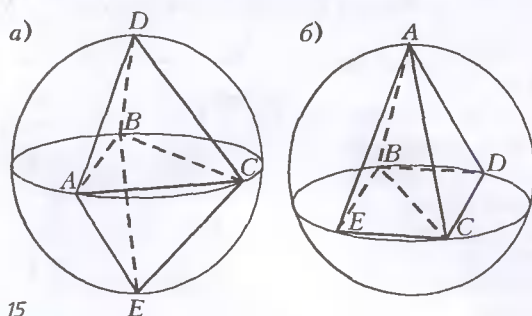


Рис. 15

А так как $x > 0$, $y > 0$ и m – целое, то $m = 4$.

5. $4\sqrt{13}$. *Указание.*

Так как $PQ = QR$ и $RS = SP$, точки Q и S находятся на серединном перпендикуляре к отрезку PR .

на в случае, если он вписан в большую окружность сферы и является правильным.

Следовательно, в этом классе многогранников максимальный объем имеет многогранник, составленный из двух одинаковых правильных треугольных пирамид с высотами, равными R , и площадью общего основания $R^2 \frac{3\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$.

Вариант 14

1. – 2. 2. 7. 3. $\left(\frac{1}{2}; \log_3 3\sqrt{2}\right)$. 4. 6 тонн; $m = 4$. 5. $\frac{336}{25}$.
6. $\left(-\infty; -\sqrt{\frac{2}{7}}\right] \cup \left[-\sqrt{\frac{1}{7}}; \sqrt{\frac{1}{7}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{2}{7}}; +\infty\right)$.

Вариант 15

1. $(-\infty; -5) \cup \{3\}$. 2. 80%. 3. $\frac{2\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. 4. $(-2; 3)$.
5. $AB = 12, BC = 10$. 6. $(3; 1), (-3; -1)$. *Указание.*

$$2x^2 - 3xy - 2y^2 = 7 \Leftrightarrow (x - 2y)(2x + y) = 7.$$

7. 70° . *Указание.* Пусть x – искомый угол, $a = AB = BC$ – боковая сторона. Тогда $\angle AMC = 140^\circ, \angle AMB = 220^\circ - x, \angle MAB = 20^\circ, \angle MCB = 40^\circ$.

По теореме синусов в треугольниках CMB и AMB получите уравнение

$$\frac{\sin(x - 40^\circ)}{\sin x} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ}.$$

8. – 2. *Указание.* Один из корней данного уравнения очевиден: $x = 0$, а остальные находятся из биквадратного уравнения

$$25x^4 + 25(a - 1)x^2 - 4(a - 7) = 0.$$

Это уравнение имеет 4 различных решения тогда и только тогда, когда полученное из него заменой $t = x^2$ квадратное уравнение

$$25t^2 + 25(a - 1)t - 4(a - 7) = 0$$

имеет два различных положительных корня. Пусть $0 < t_1 < t_2$ – эти корни. Из условия следует равенство $\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = \sqrt{t_1}$, т.е. $t_2 = 4t_1$. По теореме Виета $t_1 + t_2 = a - 1$,

$$t_1 t_2 = \frac{4}{25}(7 - a). \text{ Осталось решить полученную систему.}$$

Вариант 16

1. $\frac{\sqrt{5} - 3}{3}$. 2. $\pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 - \sqrt{11}}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3. $\left\{-\frac{4}{3}\right\} \cup [-1; 0)$.

4. 5; $\frac{975\sqrt{3}}{196}$. *Указание.* Докажите, что хорда из условия задачи и диагональ трапеции стягивают равные дуги и, следовательно, равны. Осталось вычислить площадь равнобокой трапеции по диагонали, меньшему из оснований и радиусу описанной окружности. Для этого с помощью теоремы косинусов составьте уравнение относительно $\cos \varphi$, где φ – угол между диагональю и основанием трапеции.

5. $\left(-\frac{5}{2}; 7\right); \left[\frac{9 - \sqrt{211}}{2}; -\frac{5}{2}\right] \cup \{7\}$. *Указание.* Воспользуйтесь

тем, что левая часть уравнения принимает наименьшее значение при $x = 9a$.

Вариант 17

1. 3. 2. $(0; 3]$. 3. $\sqrt{7}$. *Указание.* Отложите на дуге BCD окружности дугу BC' , равную дуге CD , и докажите, что AC' – диаметр окружности, а $\angle ABC'$ – прямой.

4. 25%, 62,5%, 10%. **Указание.** Пусть количество сторонников кандидатов до выборов было x , $2x$ и x , а после выборов $3y$,

$3y$ и $3,6y$, причем $3y + 3y + 3,6y = 0,6(x + 2x + x)$, т.е.

$y = \frac{x}{4}$. Таким образом, за кандидатов голосовали, соответ-

ственно, $\frac{3x}{4}$, $\frac{3x}{4}$, $0,9x$ избирателей.

5. 10, 12.

6. $a = 7$; $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 8$. **Указание.** Если x_1 , x_2 , x_3 — корни уравнения третьей степени, то по теореме Виета $x_1 x_2 x_3 = 64$, а так как $x_2^2 = x_1 x_3$, то $x_2^3 = 64$.

Вариант 18

1. $\left[\frac{1}{16}; 12\right]$. 2. 11, $\frac{-11 - \sqrt{161}}{2}$. 3. $\frac{\sqrt{3}}{6} a^2$.

4. $\frac{\pi}{2}$, $\pi + \arctg \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$. **Указание.** Заметив, что серия

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, удовлетворяет уравнению, выполните за-

мену $t = \tg x$ при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$.

5. $(-\infty; -5] \cup \left[-3; -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right] \cup \left\{-\frac{1}{32}\right\} \cup \left\{\frac{1}{8}\right\} \cup \left[\frac{1}{\sqrt[3]{4}}; +\infty\right)$.

Указание. Пусть u — подкоренное выражение в показателе степени, а v — во втором множителе. Рассмотрите случаи

$$\begin{cases} v \geq 0, & \{2^v - 1 \geq 0, \\ u = 0, & \{u > 0. \end{cases}$$

6. $[0; 2]$ при $c = 0$, $d = 1$ и при $c = -1$, $d = -2$. **Указание.** Пусть $p = 2(c - d)$, $q = 3c - d$. Поскольку $|c - d| \geq 1$, вершина параболы $y(x) = x^2 + px + q$ лежит вне интервала $(-1; 1)$, а один из корней принадлежит отрезку $[-1; 1]$ (так как $y(1)y(-1) \leq 0$). Наименьшее значение на отрезке $[-1; 1]$ функции $f(x) = |y(x)|$ равно нулю, а наибольшее достигается либо при $x = -1$, либо при $x = 1$, т.е. равно

$$A = \max(|p + q + 1|, |-p + q + 1|) = |q + 1| + |p|.$$

Так как $|p| \geq 2$, то $A \geq 2$, причем $A = 2$ лишь при $q = -1$, $|p| = 2$.

Вариант 19

1. В пункте E. 2. $(-\infty; -5] \cup [-1; +\infty)$.

3. 14 млн у.е. для A и 2 млн у.е. для B.

4. $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$. **Указание.** Пусть $\angle KMD = \alpha$, $\angle MKL = \beta$. По теореме синусов из треугольника DML получаем, что $\sin \beta = \sqrt{2} \cos \alpha$. Кроме того, $KM = KL \sin \beta$. Применив теорему косинусов для треугольника DKM , получаем уравнение относительно $\cos \alpha$.

5. Нет решений при $a > 0$, $b \geq 0$; $(-\infty; +\infty)$ при $a \leq 0$,

$b \leq 0$; $\left(-\infty; -\sqrt{\frac{a}{b}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{a}{b}}; +\infty\right)$ при $a > 0$, $b < 0$;

$\left[-\sqrt{\frac{a}{b}}; \sqrt{\frac{a}{b}}\right]$ при $a \leq 0$, $b > 0$.

6. (2; 2; -2).

7. Успеют. **Указание.** Достаточно предложить какую-либо последовательность переходов.

Пусть, например, сначала Анна и Василий переходят мост за 4 минуты, Василий возвращается назад с фонариком за 4 минуты. Затем Игорек и Марья Ивановна переходят мост за 16 минут, Анна возвращается с фонариком за 2 минуты. Наконец, Анна и Василий переходят мост за 4 минуты. Всего на переход затрачено 30 минут.

ФИЗИКА

Физический факультет

1. Относительно вершины A вершина C движется с постоянной скоростью $2v$, направленной вдоль прямой AC. Поскольку стержни, образующие ромб, жесткие, величины составляющих скоростей всех точек каждого стержня вдоль направления стержня должны быть одинаковыми. Следовательно, проекции скоростей точек B и C на ось стержня BC должны быть равны $u = 2v \cos \alpha$, где α — угол между вектором скорости точки C и осью указанного стержня (рис. 16). В тот момент времени, когда ромб превращается в квадрат, угол α становится равным 45° .

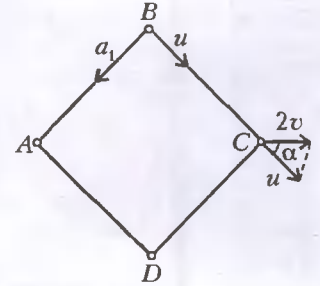


Рис. 16

Учитывая это и то, что стержень AB является жестким, можно утверждать, что вершина B в интересующий момент времени движется по дуге окружности радиусом L со скоростью $u = \sqrt{2}v$. Поэтому в указанный момент времени величина составляющей ускорения точки B, направленной вдоль AB к точке A, равна $a_1 = 2v^2/L$.

Учитывая, что относительно точки C вершина A движется со скоростью $2v$, и повторяя приведенные выше рассуждения, можно доказать, что величина составляющей ускорения точки B, направленной вдоль оси стержня BC, образующей с осью стержня AB прямой угол, равна a_1 .

Поскольку вершина B движется в плоскости стола, ее ускорение относительно стола не может иметь составляющей, перпендикулярной плоскости стола. Следовательно, ускорение вершины B относительно стола в заданный момент времени равно

$$a = \sqrt{2}a_1 = \frac{2\sqrt{2}v^2}{L}$$

и направлено от точки B к точке D.

2. При решении задачи будем, как это обычно и делается (если в условии нет специальных указаний), пренебрегать влиянием воздуха и считать лабораторную систему отсчета, относительно которой стол покоится, инерциальной.

Поскольку нить располагается в вертикальной плоскости, проходящей через центр масс бруска с блоком, и брусок может двигаться только по горизонтальной плоскости, после одновременного отпускания бруска и шарика брусок будет двигаться поступательно. При этом блок, через который перекинута нить, также будет двигаться поступательно, так как нить гладкая и поэтому между блоком и нитью не могут действовать силы трения, которые могли бы вызвать его вращение. Будем решать задачу, используя систему координат, неподвижную относительно стола, ось X которой параллельна верхней горизонтальной части нити, а ось Y направлена вертикально вниз и лежит в вертикальной плоскости, проходящей через центр масс бруска с блоком, как показано на рисунке 17.

Поскольку по условию задачи нить является нерастяжимой и в течение некоторого промежутка времени после начала движения угол наклона нижнего участка нити остается постоянным, мож-

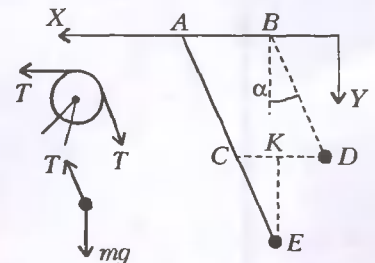


Рис. 17

но утверждать, что при смещении бруска на расстояние $\Delta x_6 = AB = CE = CD$ шарик сместится вдоль оси OX на расстояние $\Delta x_{ш} = KD = \Delta x_6 (1 - \sin \alpha)$, а вдоль оси Y — на расстояние $\Delta y_{ш} = KE = \Delta x_6 \cos \alpha$. Из двух последних формул следует, что проекции ускорения шарика $\vec{a}_{ш}$ на оси выбранной системы координат и проекция ускорения \vec{a}_6 бруска на ось X связаны между собой соотношениями

$$a_{xш} = a_{x6} (1 - \sin \alpha), \quad a_{yш} = a_{x6} \cos \alpha.$$

После отпущения на шарик будут действовать только сила натяжения нити \vec{T} и сила тяжести $m\vec{g}$, где m — масса шарика, а \vec{g} — ускорение свободного падения. Следовательно, согласно второму закону Ньютона уравнение движения шарика в проекциях на оси координат для интересующего промежутка времени можно представить в виде

$$ma_{xш} = T \sin \alpha, \quad ma_{yш} = mg - T \cos \alpha.$$

Обозначив массу бруска с блоком M и учитывая, что эти тела движутся поступательно по горизонтальной плоскости, их уравнение движения в проекции на ось X можно записать так:

$$Ma_{x6} = T - T \sin \alpha.$$

Здесь было учтено, что величина T силы натяжения нити во всех ее точках одинакова, так как нить невесома и на нее не действуют силы трения.

Из полученных уравнений следует, что угол α может оставаться неизменным только при условии, что массы шарика и бруска с блоком удовлетворяют соотношению

$$\frac{M}{m} = \frac{(1 - \sin \alpha)^2}{\sin \alpha},$$

при этом отношение ускорения бруска к ускорению свободного падения равно

$$\frac{a_{x6}}{g} = \frac{(ma_{x6} + T) \sin \alpha}{(ma_{x6} + T) \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Таким образом, искомая величина ускорения шарика должна быть равна

$$a_{ш} = \sqrt{a_{xш}^2 + a_{yш}^2} = g \sqrt{2(1 - \sin \alpha)} \operatorname{tg} \alpha.$$

3. Будем считать, что лабораторная система отсчета, связанная со столом, является инерциальной и что можно пренебречь влиянием воздуха на движущиеся шарик и стержень.

В момент отрыва шарика B действующая на него со стороны стола сила реакции обращается в ноль и остаются сила \vec{T}_B со стороны стержня и сила тяжести $m\vec{g}$, где m — масса шарика, а \vec{g} — ускорение свободного падения (рис. 18). Следовательно, в момент отрыва

$$T_B = mg \cos \alpha,$$

где α — угол между осью стержня и вертикалью в этот момент времени.

Рис. 18

По третьему закону Ньютона сила \vec{T}_B должна быть равна по величине силе, действующей на стержень со стороны шарика B . Поскольку на стержень может еще действовать только шарик A , то можно утверждать, что со стороны стержня на шарик A действует сила $\vec{T}_A = -\vec{T}_B$. В момент отрыва шарика B шарик A будет двигаться по дуге окружности радиусом L . Поэтому, пренебрегая размерами шарика A , согласно второму закону Ньютона запишем

$$\frac{mv_0^2}{L} = mg \cos \alpha + T_A,$$

где v_0 — скорость шарика A в указанный момент времени. Для нахождения скорости воспользуемся законом сохранения

механической энергии системы, состоящей из шариков, стержня и Земли (эту систему по условию задачи и в силу сделанных предположений можно считать изолированной и консервативной). Учитывая малые размеры шариков, будем считать, что кинетическая энергия шарика B с момента начала движения стержня до момента его отрыва (включая и этот момент времени) остается равной нулю, а кинетическая энергия шарика A в момент отрыва равна $mv_0^2/2$. Хотя приращение импульсов Земли и шарика A должны быть равны по модулю (согласно закону сохранения импульса), приращением кинетической энергии Земли следует пренебречь, так как ее масса несравнимо больше массы шарика, а потому ее можно считать неподвижной относительно выбранной инерциальной системы отсчета. Убыль же потенциальной энергии указанной системы тел при падении стержня в течение указанного промежутка времени можно считать обусловленной лишь изменением расположения шарика A относительно Земли. Поэтому запишем

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgL(1 - \cos \alpha).$$

Из полученных уравнений следует, что в момент отрыва шарика B ось стержня должна образовывать с вертикалью такой угол α , что его косинус равен $1/2$, а скорость движения шарика A равна $v_0 = \sqrt{gL}$. Поскольку в интересующий момент шарик A движется по дуге окружности радиусом L , искомая угловая скорость вращения стержня будет равна

$$\omega = \frac{v_0}{L} = \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

4. Поскольку трубка гладкая, на горизонтальный участок веревки со стороны трубки могут действовать только силы, компенсирующие действие сил тяжести на этот участок веревки. Пусть масса веревки равна m , а в горизонтальной части трубки в начальном состоянии находится n -я часть веревки. Тогда, пренебрегая массой участка веревки, находящегося в изогнутой части трубки, и действием сил тяжести на невесомую нить и легкую пружину, на основании закона Гука можно записать

$$m(1 - n)g = kx_n,$$

где g — ускорение свободного падения, а x_n — деформация пружины в начальный момент. Сказанное, конечно, верно в предположении, что деформации пружины достаточно малы. По условию задачи груз после отпущения некоторое время движется с постоянным ускорением. Ясно, что это ускорение может быть направлено только вертикально вниз. Поскольку иное в условии задачи специально не оговорено, будем считать веревку и нить нерастяжимыми. Тогда можно утверждать, что при смещении груза на расстояние x от начального положения деформация пружины должна стать равной $x_n + x$, а величина тангенциальной составляющей ускорения всех точек нити, веревки и груза в течение заданного промежутка времени должна быть равна a . Поэтому на основании второго закона Ньютона получаем

$$(m + M)a = Mg + mg \left(1 - n + \frac{x}{L}\right) - k(x_n + x),$$

или

$$(m + M)a = Mg + \frac{mgx}{L} - kx.$$

Последнее уравнение будет тождеством только в том случае, когда выполняются соотношения

$$(m + M)a = Mg \quad \text{и} \quad mg = kL.$$

Следовательно, задача будет иметь решение, если $a < g$, так как масса веревки m не может быть отрицательной, а искомая

жесткость пружины будет равна

$$k = \frac{mg}{L} = \frac{M(g-a)g}{aL}.$$

5. По условию задачи, температуры содержимого сосуда и термостата длительное время поддерживаются постоянными, поэтому можно считать, что и в термостате, и в сосуде к интересующему моменту времени устанавливается состояние термодинамического равновесия. Следовательно, относительно инерциальной системы отсчета, в которой центры масс термостата и сосуда с их содержимым покоятся, движение частиц газа является полностью хаотичным, а потому в этой системе отсчета все направления являются равновероятными. Поскольку влетающие и вылетающие из сосуда атомы не сталкиваются между собой в дырке, можно утверждать, что число N_1 вылетающих из сосуда атомов и число N_2 влетающих в него за время τ определяются средними скоростями движения атомов и их концентрациями в сосуде и термостате соответственно. Если средние величины скоростей движения атомов неона в сосуде и в термостате вдоль оси X , перпендикулярной плоскости дырки, обозначить v_{1x} и v_{2x} соответственно, то

$$N_1 = \frac{1}{2} v_{1x} s n_1 \tau \quad \text{и} \quad N_2 = \frac{1}{2} v_{2x} s n_2 \tau,$$

где s – площадь дырки, а n_1 и n_2 – концентрации атомов в сосуде и термостате соответственно.

Будем считать, что неон подчиняется уравнению состояния идеального газа. Тогда концентрации неона и его температуры должны удовлетворять соотношениям

$$p_1 = n_1 k T_1 \quad \text{и} \quad p_2 = n_2 k T_2,$$

где k – постоянная Больцмана, а T_i – абсолютные температуры неона.

Учитывая, что абсолютная температура T и средняя квадратичная скорость v_{cp} хаотического движения частиц массой m связаны между собой соотношением $3kT = mv_{cp}^2$, а v_{cp1} и v_{1x} пропорциональны друг другу, получим, что

$$n_1 \sqrt{T_1} = n_2 \sqrt{T_2}.$$

Следовательно, в сосуде должно установиться давление

$$p_1 = p_2 \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}.$$

6. По условию задачи, теплообменом содержимого цилиндра с окружающими телами (в том числе и с цилиндром, и с поршнем) следует пренебречь. Поэтому следует пренебречь и теплом, которое выделяется за счет работы сил трения поршня о цилиндр при движении поршня. Значит, необходимое для плавления льда количество теплоты $Q_1 = m\tau$ должно быть равно количеству теплоты $Q_2 = \lambda M$, выделяющемуся за счет конденсации насыщенного пара, где M – масса сконденсировавшегося пара. Если считать, что насыщенный пар подчиняется уравнению Клапейрона–Менделеева, то объем сконденсировавшегося пара должен быть равен

$$V = \frac{MRT}{p_n M},$$

где $R = 8,3$ Дж/(моль · К) – универсальная газовая постоянная, T – температура пара по шкале Кельвина, а $M = 18$ г/моль – молярная масса воды. Разумеется, следует пренебречь объемом воды, образовавшейся за счет конденсации ее пара, и считать что требуемое изменение объема под поршнем равно объему сконденсировавшегося пара. Окончательно, искомое уменьшение объема смеси, находящейся под поршнем, будет равно

$$\Delta V = V = \frac{m r R T}{\lambda M p_n} = 2,8 \text{ л.}$$

7. В первоначальном состоянии потенциал внешней обкладки конденсатора был равен потенциалу Земли, т.е. нулю, а потому до переключения ключа электростатическое поле существовало только между обкладками конденсатора. После переключения ключа в положение 2 заземленной оказывается внутренняя обкладка конденсатора, а потенциал внешней его обкладки относительно Земли через достаточно большой промежуток времени должен стать равным ЭДС батареи \mathcal{E} .

Так как разность потенциалов между обкладками конденсатора после переключения ключа должна установиться равной \mathcal{E} , энергия электростатического поля конденсатора должна быть равна энергии этого поля до переключения ключа, а вне конденсатора электростатическое поле можно считать подобным полю равномерно заряженной уединенной сферы радиусом R .

Так как емкость уединенной проводящей сферы равна $C_R = 4\pi\epsilon_0 R$, где ϵ_0 – электрическая постоянная, получаем, что после переключения ключа в положение 2 заряд внешней обкладки по прошествии достаточно большого промежутка времени должен увеличиться на $q = C_R \mathcal{E}$, а энергия электростатического поля должна возрасти на

$$\Delta W = \frac{1}{2} \mathcal{E}^2 C_R.$$

При протекании через батарею заряда q сторонние силы совершают работу

$$A = \mathcal{E} q,$$

поэтому на основании закона сохранения энергии можно утверждать, что после переключения ключа должна выделяться энергия

$$W = A - \Delta W.$$

Частично эта энергия выделяется на активных сопротивлениях схемы в виде тепла. Оставшаяся ее часть может выделяться только в виде энергии электромагнитного излучения, сопровождающего неравномерное движение зарядов. Как известно, интенсивность электромагнитного излучения пропорциональна квадрату ускорения носителей заряда. Если пренебречь сопротивлением проводников и контактов ключа по сравнению с внутренним сопротивлением батареи и полагать, что внутреннее сопротивление батареи достаточно велико, а потому процесс перезарядки внешней обкладки конденсатора протекает достаточно медленно, то можно считать, что вся энергия W выделяется лишь в виде тепловой энергии на внутреннем сопротивлении источника.

Таким образом, в общем случае можно утверждать, что искомое количество теплоты

$$Q \leq W = A - \Delta W = 2\pi\epsilon_0 R \mathcal{E}^2.$$

8. Если пренебречь индуктивностью элементов схемы и емкостями между ними, то изменение силы тока, текущего через амперметр, должно происходить скачкообразно в моменты, соответствующие моментам изменения полярности напряжения между клеммами B и C . Напомним, что идеальным называют такой диод, сопротивление которого равно нулю, если потенциал анода (основания треугольника, с помощью которого изображается диод) выше потенциала катода, а при обратной полярности приложенного к нему напряжения равно нулю проводимость диода. Следовательно, если потенциал клеммы B меньше потенциала клеммы C , то диоды D_1 и D_2 будут находиться в проводящем состоянии и сопротивление между указанными клеммами будет равно сопротивлению параллельно включенных резисторов с сопротивлениями R_2 и R_3 . Поэтому согласно закону Ома для участка цепи, не содержащего ЭДС, во время отрицательной полуволны напряжения длительностью τ через амперметр должен протекать

ток

$$I_- = u_0 \frac{R_2 + R_3}{R_2 R_3} = \frac{2u_0}{R}$$

Во время другой части периода длительностью $T - \tau$ потенциал клеммы B превышает потенциал клеммы C . Поэтому в это время диод D_1 должен быть заперт, а диод D_2 открыт. Следовательно, текущий через амперметр ток во время указанной части периода должен быть равен

$$I_+ = \frac{u_0 (R_2 + R_3)}{R_1 (R_2 + R_3) + R_2 R_3} = \frac{2u_0}{3R}$$

Эффективным, или действующим значением периодически изменяющегося тока называют величину такого постоянного тока, при протекании которого по некоторому резистору за время, равное периоду переменного тока, на нем выделяется такое же количество теплоты, как и при протекании заданного переменного тока за то же время. Следовательно, искомое эффективное значение тока при выполнении сделанных предположений равно

$$I = \sqrt{\frac{I_-^2 \tau + I_+^2 (T - \tau)}{T}} = \frac{2u_0}{3R} \sqrt{1 + \frac{8\tau}{T}}$$

9. При решении задачи будем пренебрегать магнитным потоком, пронизывающим материал проволоки, поскольку по условию задачи проволока тонкая. В силу этой же причины площадь, ограниченную каждой из окружностей, образующих петлю, будем считать равной πR_i^2 , где R_i — радиус i -й окружности. Тогда, учитывая, что скорость нарастания индукции внешнего магнитного поля $\Delta B/\Delta t$ постоянна, и считая источник магнитного поля и петлю покоящимися относительно некоторой инерциальной системы отсчета, на основании закона электромагнитной индукции можно утверждать, что величины ЭДС в первой и второй частях петли равны

$$\mathcal{E}_i = \pi R_i^2 \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

Если за положительное принять направление тока, который существовал бы в петле в отсутствие ЭДС во второй ее части, то действующую в первой части петли ЭДС следует считать положительной. Сторонние электрические силы, действующие в кольцах петли до поворота меньшей окружности, направлены в противоположные стороны, так как направления обхода колец взаимно противоположны (см. рис.7 в статье). Поэтому согласно закону Ома для замкнутой цепи установившийся ток в петле до поворота малой окружности должен быть равен

$$I_n = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2},$$

где r_1 и r_2 — сопротивления большой и малой окружностей соответственно. Отсюда на основании закона Ома для участка цепи, содержащего ЭДС, следует, что в рассматриваемом случае разность потенциалов между заданными точками равна

$$\Delta\varphi_n = \mathcal{E}_1 - I_n r_1.$$

После поворота на 180° малой окружности действующая в ней ЭДС изменяет направление на противоположное. Поэтому установившийся ток в петле станет равным

$$I_k = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2},$$

а интересующую разность потенциалов можно будет найти по формуле

$$\Delta\varphi_k = \mathcal{E}_1 - I_k r_1.$$

Поскольку сопротивления первой и второй окружностей прямо пропорциональны их радиусам, то из приведенных выше соотношений для искомого отношения разностей потенциалов

между заданными точками петли получим

$$\frac{\Delta\varphi_k}{\Delta\varphi_n} = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 - \mathcal{E}_2 r_1}{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1} = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}.$$

10. Рассматриваемые события происходят в пасмурный безветренный день, поэтому можно считать, что границы воздух-масло и масло-вода совпадают с горизонтальными плоскостями, а лужа освещается рассеянным белым светом. Изменение же цвета лужи обусловлено интерференцией света, отражающегося от указанных границ. Учитывая малый размер зрачка глаза человека по сравнению даже с минимально возможным расстоянием от глаза до поверхности лужи, попадающие в глаз человека световые лучи следует считать параллельными. Согласно рисунку 19,а, эти лучи образуют с горизонтом угол α , определяемый соотношением $\text{tg } \alpha = h/s$.

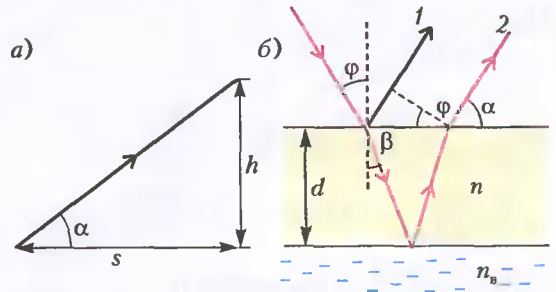


Рис. 19

На рисунке 19,б показаны два из регистрируемых человеком лучей. Первый луч возникает при отражении от верхней, а второй — от нижней поверхностей масляной пленки. Поскольку показатель преломления масла больше показателя преломления воздуха ($n_{\text{воз}} = 1$), а показатель преломления воды меньше показателя преломления масла, то разность фаз падающего и отраженного от верхней границы света должна быть равна π , а от нижней границы — нулю. Другими словами, при отражении от оптически более плотной среды происходит «потеря половины длины волны» падающего света. Поэтому величину разности хода между лучами 1 и 2, возникающими при отражении луча, падающего на пленку масла под углом $\varphi = \pi/2 - \alpha$ к вертикали, можно вычислить по формуле

$$\Delta = \frac{2nd}{\cos \beta} - 2d \text{tg } \beta \sin \varphi + \frac{\lambda}{2},$$

где d — толщина масляной пленки, а угол β согласно закону преломления определяется из соотношения $\sin \varphi = n \sin \beta$. С учетом этого соотношения формулу для вычисления разности хода можно представить в виде

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha} + \frac{\lambda}{2}.$$

Из условия образования максимумов в интерференционной картине получаем, что цвет лужи, когда человек находится от нее на расстоянии s , должен соответствовать такой длине волны света $\lambda(s)$, что $\Delta(s) = \lambda(s)$. Следовательно, когда человек первоначально заметил лужу, т.е. при $s \rightarrow \infty$, или $\alpha \rightarrow 0$, должно было выполняться соотношение

$$4d\sqrt{n^2 - 1} = \lambda_c,$$

а в тот момент, когда кажущийся человеку цвет лужи стал зеленым, попадающие в глаз человека лучи должны были образовывать с горизонтом такой угол α_3 , что

$$\cos^2 \alpha_3 = n^2 - (n^2 - 1) \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_c} \right)^2 \approx 0,35.$$

Следовательно, человек должен был увидеть лужу зеленой, когда он подошел к ней на расстояние

$$s = h \text{ctg } \alpha_3 = \frac{h}{\sqrt{1/\cos^2 \alpha_3 - 1}} \approx 1,36 \text{ м}.$$

Факультет вычислительной математики
и кибернетики

$$1. v_0 = \sqrt{2\mu gL \left(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{k\sqrt{k^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \right)} = 7,3 \text{ м/с, где}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{kd}{(k+1)L} = 1.$$

$$2. S = 4\pi h^2 \approx 12,6 \text{ м}^2. \quad 3. h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gl^2}{2v_0^2} = 12,48 \text{ км.}$$

$$4. l = R(\operatorname{tg} \alpha - \alpha), \text{ где } \alpha = \arccos \frac{R-h}{R}.$$

$$5. v_0 = \frac{v_1 \pm \sqrt{(4v_2^2 - v_1^2)/3}}{2} = \frac{\sqrt{6} \pm 1}{2} \text{ м/с; } v_{01} \approx 1,72 \text{ м/с,}$$

$$v_{02} \approx 0,72 \text{ м/с.}$$

$$6. v_{\infty} = \sqrt{u^2 - v_{2x}^2} \approx 4,84 \text{ км/с.}$$

$$7. A = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{k}{M+m} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2} \approx 1,3 \text{ см.}$$

$$8. A = \frac{gN\tau_1(\tau - \tau_1)^2}{g\tau_1(\tau - \tau_1) + H} = 9,6 \text{ кДж.} \quad 9. k = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \sqrt{2}.$$

$$10. F = \frac{p_0 V_0}{2H} \left(\sqrt{1 + \frac{4\rho g H}{p_0}} - 1 \right) - mg \approx 86,3 \text{ Н.}$$

$$11. M_2 = M_1 \frac{n(k-1)}{n-1}.$$

$$12. \eta = \frac{2(n - 2\sqrt{n} + 1)}{5n - 2\sqrt{n} - 3} = \frac{2}{13} \approx 15,4\%.$$

$$13. H = \frac{3h t_2 + 273 \text{ }^\circ\text{C}}{2 t_1 + 273 \text{ }^\circ\text{C}} = 20 \text{ см.}$$

$$14. A = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{k} \right) CU^2 \approx 5,33 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

$$15. Q = \frac{RC}{2(R+r)} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ Дж.}$$

$$16. F_{\max} = F_{\min} \sqrt{1 + \left(\frac{qB}{m\omega} \right)^2}.$$

$$17. B = 2\pi k \frac{mv \cos \alpha}{2eL}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$18. d_1 = \frac{d}{\cos 2\alpha} = \frac{2d}{\sqrt{3}} \approx 2,31 \text{ см.}$$

$$19. d_1 = \frac{dR \left(2\sqrt{R^2 - d^2} - R \right)}{R^2 - 2d^2}, \quad 20. F = \frac{\ln}{n^2 - 1} = 12 \text{ см.}$$

Химический факультет

$$1. h = \frac{(\Delta p)^2}{8gm^2 \cos^2 \alpha} = 0,8 \text{ м.}$$

$$2. F_{\min} = \frac{mg}{R} \sqrt{2Rh - h^2} = 120 \text{ Н.}$$

$$3. \omega = \sqrt{\frac{n-1}{n+1} \frac{g}{A}} \approx 7 \text{ с}^{-1}, \text{ или } f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 1,1 \text{ Гц.}$$

$$4. x = \frac{h(L + h_0 - h)}{h_0} \approx 42 \text{ см, где } h_0 = \frac{p_a}{\rho_{\text{рт}} g} = 760 \text{ мм} = 0,76 \text{ м.}$$

$$5. U = \frac{3}{2} (p_1 V_1 + p_2 V_2) = 1200 \text{ Дж.}$$

$$6. \Delta q = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{CU}{2} = 4 \cdot 10^{-9} \text{ Кл.}$$

$$7. \varepsilon_2 = \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}} \varepsilon_1 = 4 \text{ В.}$$

$$8. B_{\min} = \sqrt{\frac{2\Delta\varphi}{\gamma h^2}} \approx 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ Тл.}$$

$$9. v_2 = v_1 \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} \approx 1,2 \text{ м/с.}$$

$$10. S = (Dl - 1)^2 ab = 0,46 \text{ м}^2.$$

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Московский центр непрерывного математического образования
kvant.mccme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru

Курьер образования
www.courier.com.ru

Vivos Voco!
vivovoco.nns.ru
(раздел «Из номера»)

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов,
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия,
П.И.Чернуцкий**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.

Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»,
тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховском полиграфическом комбинате
Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ № 3663.

СЕАНС ОДНОВРЕМЕННОЙ ИГРЫ-II

Сильные шахматисты имеют хорошую память и часто помнят не только свои турнирные партии, но и сеансовые. Вот один уникальный случай...

Однажды гроссмейстер Мигель Найдорф сделал в турнире ничью с Алексиным. «Поздравлю вас, молодой человек, — протянул ему руку Алексин, — теперь вы можете гордиться почетной ничьей с чемпионом мира». — «Извините, но счет наших встреч 1,5:0,5 в мою пользу», — улыбнулся Мигель. «Что за шутки?» — удивился шахматный король. — «Да, да, в 20-е годы вы проиграли мне в сеансе одновременной игры в Варшаве». — «Этого не может быть, вы ошиблись, — твердо сказал Алексин, — я помню в лицо всех шахматистов, которые когда-либо выигрывали у меня, в том числе и в сеансах одновременной игры». — «Разрешите напомнить вам обстоятельства, при которых это произошло, — сказал Найдорф. — В сеансе было запланировано 25 досок, но вас попросили допустить еще двух подростков, жаждущих сразиться с такой знаменитостью. Однако число 25 было оговорено заранее, и вы сначала отказались. Когда вас упрекнули, что вы испугались мальчишек, вы возмутились и сказали, что готовы играть с ними вслепую! И ребят посадили в сторонке, вдали от столиков, так, что вы не могли их видеть. Сеанс закончился со счетом 24:1 в вашу пользу, а единственную победу над вами одержал один из мальчишков, с которым вы играли вслепую. Хотите верить, хотите нет, но этим мальчиком был я!» — «Так это вы пожертвовали мне ладью на h2?! — воскликнул Алексин, который сразу вспомнил тот давний сеанс. — А я уже двадцать лет мучаюсь, что так и не увидел соперника, столь искусно обыгравшего меня тогда в Варшаве!»

Алексин охотно проводил сеансы одновременной игры, в том числе и вслепую. В прежние времена призы в турнирах были скромными, и сеансы одновременной игры являлись одним из главных средств существования гроссмейстеров. Но для Алексина всегда была важна эстетическая сторона, и многие комбинации, осуществленные им в сеансах, отличались особой красотой и даже вошли в различные сборники его партий. Вот несколько популярных примеров.

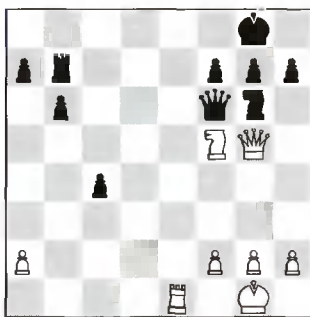
Алексин — Фримэн
Нью-Йорк, 1924

Центральный гамбит

1. e4 e5 2. d4 ed 3. c3 d5 4. ed ♖:d5 5. cd ♜b4+ 6. ♛c3 ♛c6 7. ♛f3 ♛f6 8. ♛e2 0-0 9. 0-0 ♛:c3. Любительский ход: кто же добровольно укрепляет центр противника? Правильно было 9... ♗a5.

10. bc b6 11. c4 ♗d8 12. d5 ♛e7 13. ♛d4 ♜b7 14. ♜b2 c6 15. ♛f3 cd 16. ♜fe1 ♜fe8 17. ♗d2 ♜ab8 18. ♗g5. С угрозой 19. ♛c6!

18... ♛g6 19. ♛f5 ♜:e1+ 20. ♜:e1 dc 21. ♜:b7 ♜:b7 22. ♜:f6 ♗:f6. Матом завершилось дело и в случае 22...gf 23. ♗h6 ♗f8 24. ♜e8!



23. ♜e8+ ♛f8 24. ♛h6+! ♗:h6 25. ♜:f8+! ♗:f8 26. ♗d8×.

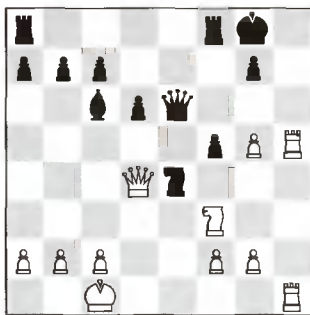
Алексин — Миндено
Голландия, 1933

Испанская партия

1. e4 e5 2. ♛f3 ♛c6 3. ♜b5 d6 4. d4 ed 5. ♗:d4 ♜d7 6. ♜:c6 ♜:c6 7. ♛c3 ♛f6 8. ♜g5 ♛e7 9. 0-0-0 0-0 10. h4 h6 11. ♛d5 hg? После 11... ♛:d5 12. ed ♜d7 черные получали крепкую позицию, теперь же они не выдерживают натиска противника по крайней линии.

12. ♛:e7+ ♗:e7 13. hg ♛:e4 14. ♜h5 ♗e6. Или 14...f5 15. g6 ♗e6 16. ♛e5! ♛f6 17. ♜h8+ ♗:h8 18. ♗h4+ ♗g8 19. ♜h1.

15. ♜dh1 f5.



16. ♛e5!! Жертвуя слона, Алексин предусмотрел этот элегантный маневр конем, цель которого — вынудить черную пешку «d» поменять вертикаль, предотвращая d6-d5.

16...de 17. g6! ♗:g6 18. ♗c4+ с матом ладьей в углу доски.

Алексин — Брук
Плимут, 1938

Защита Каро-Канн

1. e4 c6 2. ♛c3 d5 3. ♛f3 de 4. ♛:e4 ♜f5 5. ♛g3 ♜g6? Если бы белые сыграли 3. d4 вместо 3. ♛f3, то сейчас на доске возникла бы популярная система Капабланки. Но они успели развить коня, и теперь неприятельскому слону несдобровать. Необходимо было перевести его на g4.

6. h4 h6 7. ♛e5 ♜h7 8. ♗h5 g6 9. ♜c4! e6 10. ♗e2 ♛f6? Проигрывает в один ход. Продолжая 10... ♗e7, черные могли уйти в глухую защиту.

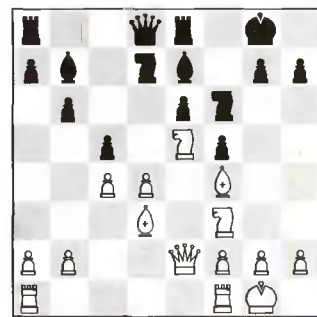
11. ♛:f7! ♗:f7 12. ♗:e6+. Черные сдались.

И наконец, самый знаменитый эпизод из сеанса вслепую.

Алексин — Фельдт
Тарнополь, 1916

Французская защита

1. e4 e6 2. d4 d5 3. ♛c3 ♛f6 4. ed ♛:d5 5. ♛e4 f5? 6. ♛g5! ♜e7 7. ♛5f3 c6 8. ♛e5 0-0 9. ♛gf3 b6 10. ♜d3 ♜b7 11. 0-0 ♜e8? 12. c4 ♛f6 13. ♛f4 ♛bd7 14. ♗e2 c5?! В случае 14... ♛f8 или 14... ♜f8 шахматный мир не досчитался бы одной изумительной комбинации.



15. ♛f7!! ♗:f7. При 15...♗c8 16. ♗:e6 черным трудно избежать конструкции «спертый мат»: 17. ♛h6++ ♗h8 18. ♗g8+ и 19. ♛f7×.

16. ♗:e6+! ♗g6. Или 16... ♗:e6 17. ♛g6×!

17. g4! ♜e4 18. ♛h4×

Е.Гук

Индекс 70465

Физики и математики на монетах мира



Формулировка трех знаменитых законов движения планет Солнечной системы укладывается в несколько строчек, но для вывода их из астрономических наблюдений ИОГАННУ КЕПЛЕРУ (1571–1630) понадобилось восемнадцать лет напряженной работы.

В 1971 году в ознаменование 400-летия со дня его рождения Германская Демократическая Республика выпустила юбилейную монету достоинством в 5 марок, на реверсе которой представлен фрагмент вычислений великого астронома. В 2002 году Австрийская Республика выпустила серебряную монету достоинством в 10 евро, на которой Кеплер изображен со своими астрономическими инструментами. Солнечная система показана на румынской банкноте достоинством в 2000 лей, выпущенной в обращение к 11 августа 1999 года в ознаменование солнечного затмения на территории Румынии.

(Подробнее о Кеплере и о его научной деятельности – в «Кванте» №5 за 2003 г.)