КВАНТ СЕНТЯБРЬ ОКТЯБРЬ 2003 №5

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

В 2003 году 6000 экземпляров журнала «Квант» издаются за счет грантов Фонда некоммерческих программ «Династия» и Фонда «Евразия».

Нефтяная компания «Sakhalin Energy Investment Company Ltd.» выписывает сто экземпляров журнала «Квант» для школ Сахалина.

Бюро Квантум

Физика автомобильных пробок

К.БОГДАНОВ

HOMO SAPIENS – ЧЕЛОВЕК *РАЗУМНЫЙ*. ТАК мы себя называем без тени ложной скромности по отношению к остальным представителям животного мира. Да и конечно, человеческому разуму есть чем гордиться.

Наши предки на протяжении многих тысячелетий пытались сделать жизнь людей более удобной. Когда стало ясно, что удобнее жить и работать вместе, возникли города, потом появились дороги между ними, и наконец – средства передвижения по ним, т.е. автомобили. Ну а когда в городах стало очень много людей, а на улицах очень много машин, начали возникать автомобильные пробки, в которых люди попусту теряли время. Поэтому автомобильные пробки можно считать побочным продуктом цивилизации.

Однако, в отличие, скажем, от экологических последствий цивилизации, причина автомобильных пробок кроется в психологии людей и вполне может быть устранена, если люди будут вести себя действительно РАЗУМНО.

Эта статья адресована тем homo sapiens, кто хочет понять, как образуются автомобильные пробки и как можно их предотвратить.

Наши планы

1) Попробуем математически описать поведение «среднего» водителя за рулем, а именно то, как он изменяет скорость своей машины в зависимости от расстояния до впереди идущей машины и от ее скорости.

2) Напишем программу для компьютера, с помощью которой «рассадим» несколько тысяч «средних» водителей по одинаковым машинам и запустим гонять их друг за другом по однополосной кольцевой дороге длиной 100 км (что, как известно, соответствует длине Московской кольцевой автодороги). Однако, в отличие от реальных условий, «средним» водителям будет запрещено обгонять друг друга.

3) Когда положение на нашей модельной кольцевой дороге – МКД – стабилизируется, постараемся выяснить, как зависит средняя скорость на МКД от количества машин на ней.

4) Для создания автомобильной пробки на МКД сделаем так, что у некоторой машины, например под номером 500, временно (на одну минуту) заглохнет мотор и возникнет автомобильная пробка, которая потом в течение долгого времени будет влиять на движение по МКД.

5) Выясним, как характеристики автомобильной пробки зависят от количества машин на дороге и от поведения водителей.

Кинематический портрет «среднего» водителя

Человек садится за руль для того, чтобы быстрее преодолеть путь из точки A в точку $Б$. Поэтому, когда перед ним на дороге нет никаких препятствий, водитель ускоряет свое авто до той скорости v_0, которую считает разумной в данных условиях. Очевидно, что v_0 для городских улиц (60–80 км/ч) должна быть меньше, чем для скоростных автомагистралей (100–120 км/ч).

Но алгоритм поведения водителя сразу меняется, когда впереди себя он видит машину, следующую в том же направлении. Теперь водитель должен не только использовать скоростные качества своей машины, но и держаться от впереди идущей на некотором безопасном расстоянии, не меньшем чем s_0. Конечно, если спросить любого водителя, как можно математически записать закон, по которому он ускоряется или тормозит, то вероятность точного ответа относительно мала. Однако предположим, что читателям повезло и они наткнулись на водителя, знакомого с азами кинематики. Вот что он им ответит.

Сначала о разгоне до v_0, когда впереди не видно никаких машин. Допустим, что максимальное ускорение «среднего» водителя, которое еще не вдавливает его в кресло, составляет $a \approx 2$ м/с^2. Тогда формулу разгона можно записать, например, так:

$$\frac{dv}{dt} = a\left(1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^4\right), \qquad (1)$$

где v – скорость автомобиля в момент времени t. Видно, что эта формула обеспечивает достижение желанной скорости v_0 и ее поддержание в дальнейшем. Как нетрудно догадаться, показатель степени отношения v/v_0 определяет скорость реакции системы машина – водитель и может быть очень высоким у агрессивных водителей, разъезжающих на мощных автомобилях. Четвертая степень в выражении (1) выбрана просто для примера. Да и вообще, формула разгона могла бы иметь совсем иной вид – содержать, например, экспоненту или какие-нибудь другие функции. И все же, формулу (1), наверное, можно, считать самой простой, что очень важно для эко-

Иллюстрация П.Чернуского

номии времени последующих вычислений на компьютере.

Из соображений безопасности интуитивно ясно, что водитель должен держаться от впереди идущей машины на некотором расстоянии, превышающем s_0, и что s_0 должно увеличиваться с увеличением скорости v. Об этом даже говорится в правилах дорожного движения некоторых стран. Например, в США от водителя требуют увеличивать s_0 на длину автомобиля при увеличении скорости на 5 м/с (т.е. 18 км/ч). Ну а так как длина среднего автомобиля 5 м, то зависимость s_0 от v в этом случае можно записать в следующем виде:

$$s_0 = tv + s_{\min}, \qquad (2)$$

где t – постоянная времени, равная 1 с, а $s_{\min}$ – минимальное расстояние между машинами, когда они стоят в автомобильной пробке. Для того чтобы машины не царапали друг другу бамперы, положим $s_{\min} = 2$ м.

Формулу (2) можно прочесть и по-другому. Так как тормозной путь увеличивается пропорционально начальной скорости, то и дистанция между машинами должна быть больше соответствующего тормозного пути. При таком взгляде на формулу (2) константа t – это допустимое время торможения при обычной езде.

Однако формула (2) справедлива только для того случая, когда впереди идущая машина имеет такую же скорость, т.е. v. Представим себе, что на впереди идущей машине зажегся красный сигнал тормоза и она уменьшила свою скорость на Δv. Очевидно, что «средний» водитель сразу же тоже нажмет на тормоз, чтобы снизить свою скорость на столько же. Пусть наш водитель не будет очень резко нажимать на тормоз, и отрицательное ускорение машины составит не более $b = 2$ м/с^2. Таким образом, на процесс равнозамедленного торможения будет затрачено $\Delta v/b$ секунд, которые мы должны прибавить к t в формуле (2), чтобы сделать безопасным движение даже в том случае, когда впереди идущая машина затормозила. Ясно также, что в случае внезапного ускорения впереди идущей машины все будет наоборот и время t в формуле (2) можно будет уменьшить на $\Delta v/a$, где a – величина комфортного ускорения (2 м/с^2). Таким образом, улучшенная формула для s_0, справедливая в случаях ускоренного или замедленного движений впереди идущей машины, будет иметь вид

$$s_0 = tv + s_{\min} + v\frac{\Delta v}{a\,|\,b}, \qquad (3)$$

где $a|b$ – означает, что в случае ускорения или торможения берут величины a или b соответственно.

Теперь опишем математически алгоритм поведения «среднего» водителя, когда оказывается, что расстояние s между ним и впереди идущей машиной отличается от s_0. Очевидно, что если $s > s_0$, то водитель будет ускоряться, стараясь приблизиться к впереди идущей машине, и наоборот. Формулу, описывающую стратегию регуляции s, можно записать в виде

$$\frac{dv}{dt} = (a\,|\,b)\left(1 - \left(\frac{s_0}{s}\right)^2\right). \qquad (4)$$

Здесь $a|b$ имеет такой же смысл, как и в формуле (3), а выбор второй степени был сделан, руководствуясь теми же соображениями, что и выбор четвертой степени в формуле (1), т.е. довольно произвольно.

Поскольку даже «средний» водитель, соблюдая дистанцию, все-таки хочет ехать как можно быстрее, то его стратегия, очевидно, описывается комбинацией правых частей формул (1) и (4). Так что вполне возможной стратегией «среднего» водителя может быть среднеарифметическая стратегия, описываемая полусуммой правых частей соответствующих формул:

$$\frac{dv}{dt} = (a\,|\,b)\left(1 - \left(\frac{s_0}{s}\right)^2\right)\cdot\frac{1}{2} + a\left(1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^4\right)\cdot\frac{1}{2}. \qquad (5)$$

Можно считать, что формулы (3) и (5) являются кинематическим портретом «среднего» водителя, глядя на который можно предсказать, как он себя будет вести (нажимать на педаль тормоза или газа) в самых разных ситуациях на дороге.

По машинам!

После того как мы узнали, что́ можно ожидать от «средних» водителей, напишем программу для компьютера, которая имитировала бы взаимодействие трех тысяч таких водителей, едущих по кольцевой дороге длиной 100 км друг за другом не обгоняя. Пусть до начала движения все 3000 машин неподвижны и почти равномерно распределены по длине дороги, а в момент времени $t = 0$ все водители одновременно начинают двигаться в соответствии с формулами (3) и (5), где $v_0 = 120$ км/ч. Машины перенумерованы так, что в начале движения на отметке «0 км» стоит

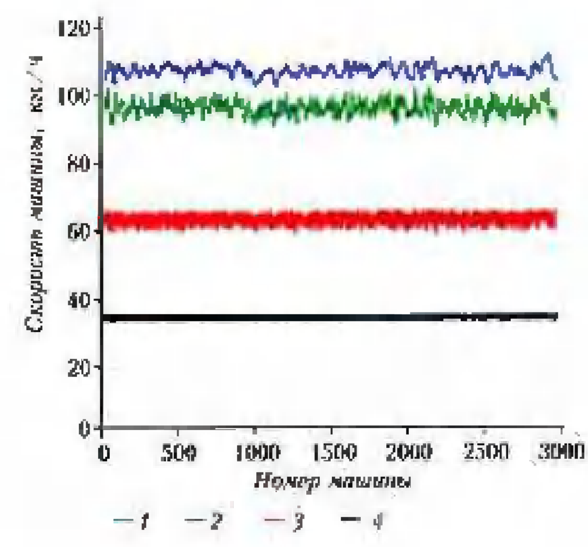


Рис.1. Скорости машин в зависимости от их порядкового номера через 5 (кривая 1), 10 (кривая 2), 20 (кривая 3) и 40 (кривая 4) секунд после начала разгона

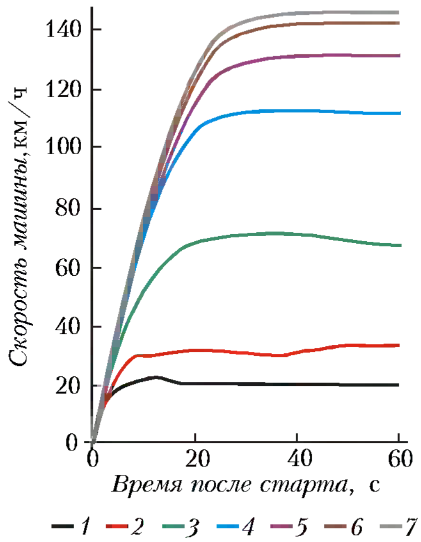


Рис.2. Скорость машины номер «300» в зависимости от времени, прошедшего от начала движения, для МКД с разным количеством машин N = 500, 1000, 2000, 3000, 5000, 8000, 10000 (для кривых 1, 2, ..., 7 соответственно)

машина с номером «1» и ее водитель через ветровое стекло видит перед собой машину «2», а тот, в свою очередь, видит машину «3» и т.д. Если N – это число машин на дороге, то около отметки «100 км» стоит

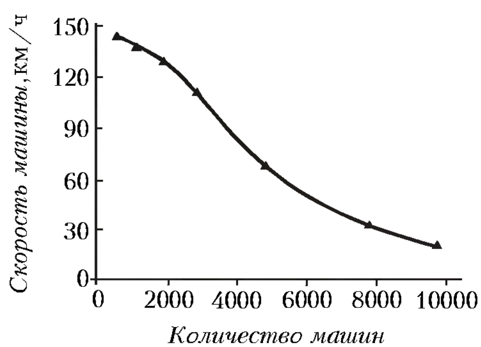


Рис.3. Средняя скорость машин в зависимости от их количества на МКД

машина с номером «N», перед которой уже стоит машина с номером «1», и МКД замыкается. Ну а дальше посмотрим, как «живет» наша МКД.

На рисунках 1 и 2 приведены данные моделирования на компьютере – видно, как машины ускоряются и приблизительно через 30 секунд достигают своей оптимальной скорости. Эта скорость, как и следовало ожидать, очень сильно зависит от того, сколько машин на МКД (рисунок 3). На рисунке 1 обращает на себя внимание очень маленький разброс (около 5%) в значениях скорости, достигнутой через 40 секунд. Это говорит о том, что система поддержания скорости на МКД, охваченная многими обратными связями, довольно стабильна. Ну а рисунки 2 и 3 демонстрируют всем известную истину – чем меньше машин на дороге, тем до большей скорости можно на ней разогнаться.

Одноминутная «авария»

После того как машины на МКД разогнались и достигли своей оптимальной скорости, спровоцируем возникновение автомобильной пробки на дороге. Для этого остановим машину под номером «500» на одну минуту, «сломав» ее мотор, а потом попросим ее водителя начать движение и догнать уехавшие вперед машины.

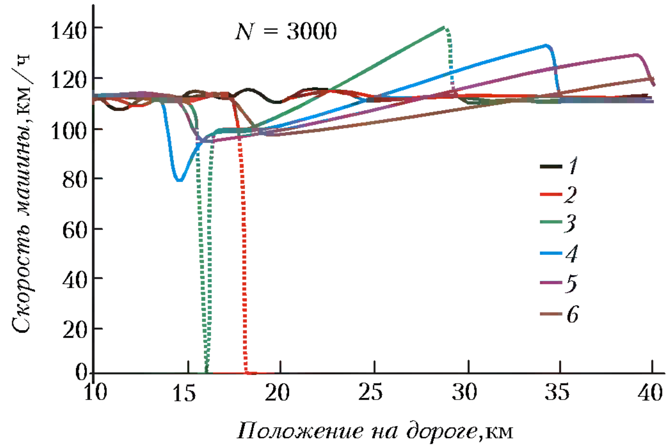


Рис.4. Скорости машин в зависимости от их положения на участке дороги между 10-м и 40-м километрами в различные моменты времени, когда на дороге находятся 3000 машин: 1 – до остановки, 2 – в конце одноминутной остановки, 3 – через 5 минут после восстановления движения, 4 – через 9 минут, 5 – через 13 минут, 6 – через 20 минут

Рисунок 4 иллюстрирует, как возникает и живет автомобильная пробка, когда на МКД находятся 3000 машин, т.е. в среднем 30 машин на одном километре. Результаты моделирования показали, что в конце одноминутной остановки машины номер «500» около 50 машин, следовавших за ней, тоже остановились, и таким образом пробка продвинулась почти на полкилометра в сторону, противоположную движению. Поэтому даже после того как машина с номером «500» (первичная причина автомобильной пробки) продолжила свое движение, догоняя ушедший вперед транспорт, остановившиеся за ней бампер к бамперу машины, став вторичным источником пробки, продолжали задерживать возобновление нормального движения. Как следствие этого, автомобильная пробка продолжала перемещаться по МКД в сторону, противоположную движению транспорта. Так, через 5 минут после «починки» мотора, когда машина с номером «500» уже проехала около 12 км и догнала уехавшие вперед машины, созданная ею пробка продвинулась почти на 2,5 км от места «аварии». Такое «встречное» движение автомобильной пробки сохранилось даже тогда, когда пробка начала рассасываться и все машины на дороге начали двигаться. Как показало моделирование, скорость встречного движения пробки составляет около 500 м/мин. Через 2–3 минуты после возобновления движения пробка меняет направление своего перемещения на попутное движению транспорта.

Если считать временем жизни автомобильной проб-

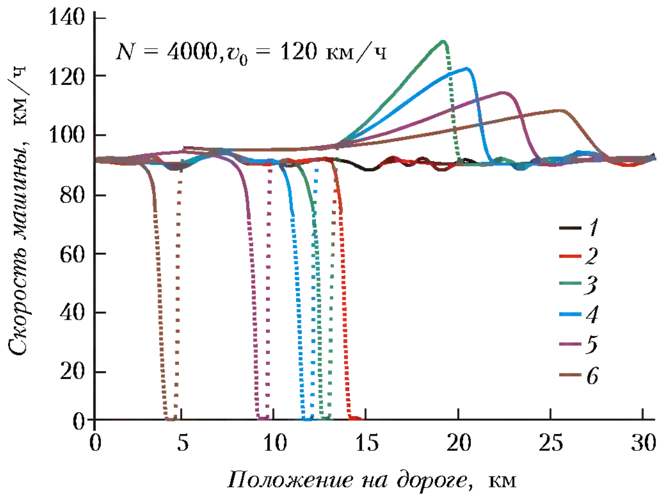


Рис.5. Скорости машин в зависимости от их положения на участке дороги между нулевым и 30-м километрами в различные моменты времени, когда на дороге находятся 4000 машин, а желаемая скорость составляет 120 км/ч: 1 – до остановки, 2 – в конце одноминутной остановки, 3 – через 3 минуты после восстановления движения, 4 – через 5 минут, 5 – через 10 минут, 6 – через 20 минут

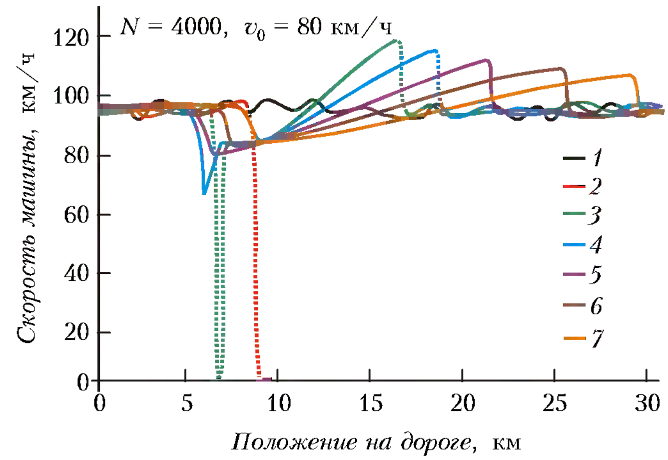


Рис.6. Скорости машин в зависимости от их положения на участке дороги между 5-м и 35-м километрами в различные моменты времени, когда желаемая скорость уменьшается до 80 км/ч: 1 – до остановки, 2 – в конце одноминутной остановки, 3 – через 5 минут после восстановления движения, 4 – через 7 минут, 5 – через 10 минут, 6 – через 15 минут, 7 – через 20 минут

ки интервал, когда минимальная скорость на МКД снижена на 30%, то пробка, проиллюстрированная рисунком 4, длилась не больше 10 минут. Известно, что последствия аварий на дороге становятся гораздо более серьезными, если они происходят в часы пик, когда плотность машин на дороге увеличена. Продемонстрируем это на нашей модели, увеличив плотность машин на МКД.

Рисунок 5 показывает, какие последствия может иметь одноминутная «авария» в часы пик, когда плотность машин возрастает до 40 на километр. Очевидно, что теперь «авария» приведет к остановке большего числа автомобилей, следующих за неисправным. Через одну минуту их будет уже более 60, и все они станут вторичными источниками возникшей пробки, когда машина с номером «500» будет догонять оторвавшийся вперед транспорт. В результате пробка начинает двигаться навстречу движению транспорта с той же скоростью около 500 м/мин, но, в отличие от предыдущего случая, в часы пик пробка может не рассосаться в течение очень долгого времени или даже может стать постоянной. Причиной «вечной» пробки служит динамическое равновесие между количеством машин, останавливаемых этой пробкой, и числом счастливчиков, вырывающихся из ее плена.

Возможным «лекарством» от автомобильных пробок в часы пик может быть уменьшение плотности стоящих в пробке автомобилей. К сожалению, как только впереди идущий автомобиль останавливается, мы стараемся приблизиться к нему как можно плотнее, считая, что этим мы приближаем для себя момент выхода из пробки. Очевидно, что такая стратегия ошибочна. Приближаясь чересчур близко к бамперу впереди стоящего автомобиля, мы ограничиваем величину ускорения будущего разгона (см. формулу (5)), а значит, и количество машин, освобождающихся из плена в единицу времени, что может сделать пробку «вечной».

Для того чтобы не создавать «вечных» автомобильных пробок, достаточно снизить свою «желаемую» скорость v_0 (см. формулу (1)) до той величины, которая оптимальна для данной плотности машин на МКД (см. рисунок 3). Например, для МКД с 4000 машин v_0 могла бы быть порядка 80 км/ч. Какой была бы ситуация на МКД в таком случае при одноминутной «аварии», показано на рисунке 6. Видно, что образование и рассасывание пробки в этом случае очень похоже на то, что происходит при 3000 машинах на МКД и «желаемой» скорости 120 км/ч. Отметим, что продолжительность такой пробки, состоящей из действительно РАЗУМНЫХ водителей, составляет всего 8 минут.

Итак, повторяем: «Не приближайтесь к бамперу впереди идущей машины!»

Доказательства из КНИГИ

Е.БРОНШТЕЙН

Недавно я испытал эмоциональное потрясение: в библиотеке университета Карлсруэ (Германия) мне попала в руки книга немецких математиков Мартина Айгнера и Гюнтера Циглера со странным названием: «Доказательства из КНИГИ». Я открыл эту книгу и ... не мог оторваться. Вся она проникнута духом замечательного венгерского математика Пауля Эрдеша (1913–1995), который прожил чрезвычайно интересную творческую жизнь. Эрдеш часто публиковал задачи, за решение которых назначал денежные призы. Математику, первым приславшему решение, высылался чек на соответствующую сумму. Говорят, что эти чеки не предъявлялись к оплате (по крайней мере, в доксероксную эпоху), а хранились в числе самых престижных наград. Известно также, что у многих математиков есть «индекс по Эрдешу» – длина минимальной цепочки соавторов, связывающих его с Эрдешем.

Так вот, Пауль Эрдеш говорил, что у Бога есть КНИГА, в которой приводятся простые доказательства всех математических теорем. Цель каждого математика – расшифровывать КНИГУ. Эрдеш считал, что математик может не верить в Бога, но в существование КНИГИ верить обязан.

В середине 90-х Айгнер и Циглер предложили Эрдешу к его 85-летию попытаться в каком-то приближении воссоздать эту КНИГУ на земле. Эрдеш с увлечением включился в эту работу, но, к сожалению, скончался до ее завершения. Авторы посвятили свой труд светлой памяти Пауля Эрдеша.

Что хотелось бы сказать о книге в целом? Как следует из самой идеи, здесь главенствует, так сказать, эстетическая составляющая математики. Замечательно, что красивое всегда является полезным (обратное, увы, неверно). Разумеется, большинство сюжетов так или иначе связаны с результатами самого Пауля Эрдеша: многое из КНИГИ удалось ему разгадать! Наконец, замечательно, что почти все доступно школьникам! Книга прекрасно оформлена. Открывается она фотографией Пауля Эрдеша и рисунком КНИГИ (фотографию, видимо, сделать не удалось). В конце – рисунок, на котором Эрдеш держит КНИГУ.

Всего в книге 32 главы. Первая глава, посвященная простым числам, начинается со знаменитого принадлежащего Евклиду доказательства бесконечности множества простых чисел. Последняя глава называется «Вероятности иногда упрощают вычисления». В одной из глав приводятся применения одного из традиционных инструментов олимпиадной математики – принципа Дирихле.

Приведем, с некоторыми изменениями и дополнениями, главу, которая называется «Три знаменитые теоремы о конечных множествах».

Иллюстрация П.Чернуского

Антицепные семейства множеств

Рассмотрим множество $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Семейство F подмножеств множества N называется *антицепным*, если ни одно из множеств, входящих в F, не является подмножеством какого-либо другого. Происхождение этого названия выяснится дальше.

В 1928 году Эммануил Шпернер решил на следующую задачу:

Какое максимальное число элементов может содержать антицепное семейство подмножеств множества N?

Напомним сначала определение и некоторые свойства числа сочетаний C_n^k. По определению, число сочетаний C_n^k есть число k-элементных подмножеств множества N. Формула для вычисления C_n^k имеет вид $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Числа сочетаний обладают свойством $C_n^k = C_n^{n-k}$. Далее, так как $\dfrac{C_n^k}{C_n^{k+1}} = \dfrac{k+1}{n-k}$, то видно, что с ростом k величины C_n^k возрастают вплоть до $k = [n/2]$, а при дальнейшем росте k величины C_n^k убывают. Здесь, как обычно, $[n/2]$ – целая часть числа $n/2$.

Вернемся к поставленной задаче. Простой пример антицепного множества – семейство F_k всех k-элементных подмножеств N. Поскольку в F_k число элементов равно C_n^k, то в силу отмеченных свойств существует антицепное множество, состоящее из $C_n^{[n/2]}$ элементов. Существует ли антицепное семейство множеств из N, содержащее больше чем $C_n^{[n/2]}$ элементов? Шпернер доказал: не существует! Можно было ожидать, что доказательство этого факта индуктивное, но в КНИГЕ оно совсем иное.

Назовем *цепью* последовательность $A_0, A_1, \ldots, A_n$ подмножеств N такую, что $A_0 = \varnothing$, $A_n = N$, $A_k \subset A_{k+1}$, причем число элементов в A_{k+1} ровно на единицу больше, чем в A_k. Очевидно, что антицепное множество содержит не более одного множества из каждой цепи. Вот откуда термин! Теперь заметим, что всякая цепь может быть получена так. Берем какой-нибудь элемент a_1 множества N. Пусть $A_1 = \{a_1\}$. Затем берем $a_2 \neq a_1$. Пусть $A_2 = \{a_1, a_2\}$. Тогда $A_1 \subset A_2$. Далее берем элемент $a_3 \neq a_2$, $a_3 \neq a_1$ и полагаем $A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$, и т.д. Наконец, $A_n = N = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Заметим, что $a_1, a_2, \ldots a_n$ – это перестановка элементов множества N. Итак, каждой перестановке N соответствует цепь. Очевидно, верно и обратное – каждой цепи соответствует единственная перестановка. А так как всего перестановок $n!$, то всего существует $n!$ цепей. Подсчитаем теперь, во сколько цепей входит некоторое множество A, содержащее k элементов. Любую такую цепь можно сформировать в два этапа: переставить элементы множества A ($k!$ способов), затем переставить элементы дополнительного множества $N \setminus A$ (таких способов будет $(n-k)!$). Таким образом, всего существует $k!(n-k)!$ цепей, содержащих множество A.

Пусть теперь F – антицепное множество и m_k – число подмножеств из F, содержащих k элементов. Если каждому множеству из F сопоставить все цепи, его содержащие, то, по предыдущему, должно выполняться неравенство $\sum\limits_{k=0}^{n} m_k k!(n-k)! \leq n!$. Разделив на $n!$, получаем неравенство $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{m_k}{C_n^k} \leq 1$. Но из свойств чисел сочетаний $\dfrac{1}{C_n^{[n/2]}} \sum\limits_{k=0}^{n} m_k \leq \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{m_k}{C_n^k}$, откуда и следует нужное неравенство $\sum\limits_{k=0}^{n} m_k \leq C_n^{[n/2]}$.

Из приведенного рассуждения видно, что число элементов в антицепном семействе множеств может быть максимальным только тогда, когда $m_k = 0$ при $C_n^k < C_n^{[n/2]}$. Последнее означает, что, когда n четное, число элементов в антицепном множестве может быть максимальным только в том случае, когда в него входят все подмножества N, содержащие $n/2$ элементов. При n нечетном в такое семейство могут входить множества, содержащие $(n+1)/2$ или $(n-1)/2$ элементов. Проверим, что в действительности максимальных антицепных множеств при n нечетном в точности два: либо оно состоит из всех подмножеств, содержащих $(n+1)/2$ элементов, либо из всех подмножеств, содержащих $(n-1)/2$ элементов.

Пусть, напротив, существует антицепное множество, в которое входят p подмножеств, состоящих из $(n+1)/2$ элементов, и $C_n^{[n/2]} - p = s - p$ подмножеств, состоящих из $(n-1)/2$ элементов, где $0 < p < s$. Представим все подмножества N, состоящие из $(n+1)/2$ и $(n-1)/2$ элементов, в виде вершин графа. Вершины соединим ребром, если одно из множеств является подмножеством другого. Пусть A, B – семейства вершин графа, отображающих, соответственно, множества, содержащие $(n+1)/2$ и $(n-1)/2$ элементов, A_1, B_1 – части A и B, отвечающие множествам, вошедшим в рассматриваемое антицепное множество, $A_2 = A \setminus A_1$, $B_2 = B \setminus B_1$. Опишем некоторые свойства построенного графа.

1°. Никакие вершины множества A не смежные, и то же верно для множества B (такой граф называется двудольным).

2°. Очевидно, что из каждой вершины исходят $(n+1)/2$ ребер.

3°. Вершины множеств A_1, B_1 не смежные. Тем самым, вершины из A_1 смежны только с вершинами из B_2.

4°. Поскольку в множествах A_1 и B_2 вершин поровну и степени (число исходящих ребер) всех вершин равны, то вершины из B_2 и A_2 также не смежные. Отсюда следует, что в графе не существует пути из вершины, входящей в A_1, в какую-либо вершину из A_2. Но любые две вершины из A можно соединить путем, последовательно добавляя и исключая элементы множества N. Противоречие завершает рассуждение.

Пересекающиеся семейства

Назовем семейство подмножеств множества N *пересекающимся*, если любые два подмножества этого семейства имеют непустое пересечение. Рассмотрим для такого семейства задачу, аналогичную предыдущей. Максимальное число множеств в таком семействе находится очень легко. Как известно, число всех подмножеств множества N равно 2^n. Из любой пары множеств A, $N\setminus A$ в пересекающееся семейство может войти не более одного. Отсюда следует, что в любом пересекающемся семействе не более $2^n/2 = 2^{n-1}$ множеств. С другой стороны, если взять все подмножества N, содержащие элемент n (а их число равно числу подмножеств множества $\{1,2,\ldots,n-1\}$, т.е. 2^{n-1}), то получим пересекающееся семейство.

Задача становится намного сложнее, если рассматривать только k-подмножества, т.е. подмножества множества N, каждое из которых содержит k элементов. Разумеется, задача имеет смысл при $k \le n/2$. В противном случае любая совокупность k-подмножеств пересекающаяся (максимальное число равно C_n^k). Ответ на вопрос о максимальном числе таких множеств дали в 1938 году Эрдеш, Ро и Радо. (Интересно, что соответствующая статья была опубликована только в 1962 году.)

Простая оценка снизу основана на тех же идеях, что и раньше: рассмотрим все подмножества N, содержащие элемент 1. Полученное семейство подмножеств пересекающееся, число его элементов равно числу $(k-1)$-подмножеств множества $\{2,\ldots,n\}$, т.е. C_{n-1}^{k-1}. Эрдеш, Ро и Радо доказали, что любое пересекающееся семейство k-подмножеств множества N содержит не более C_{n-1}^{k-1} элементов.

В основе рассуждения – простой факт, который на первый взгляд не связан с решаемой задачей.

Предположим, что окружность разбита n точками на n дуг. Назовем k-дугой множество из $k+1$ последовательно расположенных точек и k дуг между ними.

Предложение. *Пусть $n \ge 2k$ и выделены t попарно различных k-дуг, любые две из которых имеют хотя бы одну общую дугу. Тогда $t \le k$.*

Доказательство. Прежде всего, ни одна точка окружности не является концом каких-либо двух выделенных k-дуг. Действительно, если бы это было не так, то, поскольку k-дуги различные, они располагались бы по разные стороны от общего конца, а тогда в силу неравенства $n \ge 2k$ они не имели бы общей дуги.

Теперь все совсем просто. Рассмотрим одну из выделенных k-дуг. Поскольку любая другая из выделенных k-дуг имеет с ней общую дугу, то один из ее концов является внутренней точкой первой дуги, а всего таких точек $(k-1)$, что и завершает доказательство.

Вернемся к основной задаче. Пусть в множестве N выделено какое-нибудь пересекающееся семейство k-подмножеств F. Рассмотрим всевозможные перестановки элементов множества N, у которых на первом месте расположен элемент 1. Всего таких перестановок $(n-1)!$. Каждой из таких перестановок сопоставим разбиение окружности n точками на n дуг, в котором дугам, проходимым по часовой стрелке, начиная с некоторой, соответствуют последовательные элементы перестановки. При этом любому возможному способу нумерации дуг соответствует некоторая перестановка элементов множества N описанного вида. На каждой из полученных $(n-1)!$ окружностей выделим множества из семейства F, если соответствующие k дуг расположены подряд. Тогда на каждой из окружностей k-дуги, соответствующие множествам из семейства F, пересекаются (в смысле Предложения). По Предложению, на каждой окружности число выделенных k-дуг не превосходит k, т.е. всего k-дуг выделено не более $k(n-1)!$.

Выясним теперь, на сколько из $(n-1)!$ окружностей отобразится произвольное k-элементное множество A из F. Для этого возьмем окружность, разделенную на n дуг, выделим и зафиксируем на ней k-дугу. Элементы множества A можно расставить на k дугах выделенной k-дуги $k!$ способами. Элементы же множества $N\setminus A$, т.е. дополнения множества A, можно расставить на оставшихся $n-k$ дугах $(n-k)!$ способами. Поэтому общее количество способов равно $k!(n-k)!$. Заметим, что при каждой такой расстановке какую-то дугу на окружности занимает единица. Следовательно, этой окружности однозначно соответствует одна из описанных ранее окружностей с фиксированной единицей. Пусть $|F|$ – количество элементов во множестве F. По доказанному, на $(n-1)!$ окружностях общее число k-дуг, соответствующих семейству F, будет равно $|F|k!(n-k)!$. Отсюда, вспоминая ранее полученную оценку, приходим к неравенству $|F|k!(n-k)! \le k(n-1)!$, т.е.

$$|F| \le \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = C_{n-1}^{k-1},$$

что и требовалось доказать.

Выясним, когда пересекающееся семейство k-подмножеств множества N является максимальным. Один вариант уже рассматривался: если все k-подмножества содержат некоторый элемент множества N. Единственный ли это вариант? Ответ зависит от того, справедливо ли равенство $n = 2k$. Если это так, то множества из максимального семейства могут и не иметь общего элемента. Действительно, разобьем все подмножества N, содержащие k элементов, на пары A, $N\setminus A$ и из каждой пары выберем одно из подмножеств. Полученное семейство является пересекающимся (единственное множество с k элементами, не пересекающееся с множеством A, вошедшим в семейство, исключено), причем содержит

$$\frac{1}{2}C_{2k}^k = \frac{1}{2}\frac{(2k)!}{k!k!} = \frac{(2k-1)!}{(k-1)!k!} = C_{2k-1}^{k-1} = C_{n-1}^{k-1}$$

элементов. Это семейство не содержит общего элемента (например, при $n = 4$, $k = 2$ такое семейство может состоять из множеств $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{1,3\}$).

А вот при $n > 2k$ максимальное семейство k-подмножеств непременно содержит общий элемент.

Докажем это утверждение. Из проведенных оценок следует, что на каждой из окружностей отмечено ровно k множеств. Объединение соответствующих k-дуг образует $(2k-1)$-дугу. Центральная из этих $2k-1$ дуг соответствует общему элементу всех множеств, отмеченных на окружности. Пусть для определенности перестановка имеет вид $1, 2, \ldots, n$, а k-множества, отображенные на соответствующей окружности, имеют вид $2, 3, \ldots, k+1$; $3, 4, \ldots, k+2$; $4, 5, \ldots, k+3$; … …; $k+1, k+2, \ldots, 2k$. Общим элементом является $k+1$.

Прежде всего, проверим, что любое k-подмножество S множества 2, 3, …, $2k$, содержащее элемент $k+1$, входит в семейство. Для этого рассмотрим перестановку множества 2, 3, …, $2k$ такую, что элемент $k+1$ располагается в центре, левее $k+1$ расположены элементы 2, 3, …, k (соответственно, правее расположены $k+2$, …, $2k$), причем элементы множества S располагаются подряд. По предыдущему, на окружности, соответствующей этой перестановке, $(2k-1)$-дуга содержит те же элементы, что и раньше, а тогда любая содержащаяся в ней k-дуга, в которую входит центральный элемент $k+1$, соответствует некоторому множеству семейства, в том числе и множеству S.

Рассмотрим теперь иную перестановку: 1, 2, …, $2k-1$, $2k+1$, $2k$, $2k+2$,…, n. При этом k-множествам из исходного семейства отвечают, по предыдущему, k-дуги соответствующей окружности 2, 3,…, $k+1$; 3, 4, …, $k+2$; …; k, $k+1$,… …,$2k-1$. Еще одна дуга, соответствующая k-множеству семейства, это либо 1, 2, 3, …, k, либо $k+1$, $k+2$, …, $2k-1$, $2k+1$. Но первое из этих множеств не выделено на начальной окружности. Отсюда, одним из k-множеств системы является $\{k+1, k+2, \ldots, 2k-1, 2k+1\}$. Ему также принадлежит элемент $k+1$.

Комбинируя эти два приема, устанавливаем, что все множества из семейства содержат элемент $k+1$, что и требовалось. Вторая конструкция явно опиралась на условие $n > 2k$.

Если применить изложенные конструкции, то легко описать все максимальные пересекающиеся семейства и для случая $n = 2k$: либо существует элемент множества N, который входит во все множества семейства, либо существует элемент множества N, который НЕ входит ни в одно из множеств семейства.

Задача о свадьбах

В 1935 году Филипп Холл рассмотрел следующую задачу, которая оказалось чрезвычайно важной. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – подмножества некоторого множества X (не обязательно различные). Последовательность $x_1, \ldots, x_n$ различных элементов множества X называется *системой различных представителей семейства* $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, если $x_i \in A_i$ при $i = 1, 2, \ldots, n$. Разумеется, система различных представителей (далее сокращенно СРП) существует не всегда. Например, ее нет, если все множества совпадают и число элементов в каждом из них меньше числа множеств.

Эта задача носит фольклорное название «Задача о свадьбах». Пусть есть множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ невест и множество X женихов. Обозначим через A_i множество женихов, подходящих i-й невесте. Существование СРП в данном случае означает возможность подобрать жениха каждой невесте.

Критерий существования СРП дает теорема Холла.

Теорема Холла. *Для того чтобы семейство конечных множеств $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ имело СРП, необходимо и достаточно, чтобы объединение любых m множеств семейства содержало не менее m элементов при $m = 1, 2, \ldots, n$.*

Необходимость данного условия очевидна: если объединение каких-нибудь m множеств семейства содержит меньше m элементов, то СРП, естественно, не существует. Достаточность этого условия выглядит неожиданно. Оригинальное доказательство Холла было очень сложным, доказательство из КНИГИ было открыто Эстерфилдом в 1946 году и переоткрыто Халмошем и Вагханом в 1950 году.

Доказательство достаточности проводится индукцией по числу множеств n. Если множество только одно, то оно непустое, и все ясно. Пусть утверждение справедливо для семейств из 1, 2,…, $n-1$ множеств и $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ – семейство из n множеств, удовлетворяющее условию теоремы. Подсемейство из m $(1 \le m < n)$ множеств называется *критическим*, если их объединение состоит ровно из m элементов. Для женихов и невест это означает, что нескольким невестам вместе подходит ровно столько женихов, сколько взято невест.

Рассмотрим два случая.

1. *Критического подсемейства нет.*

Выберем любой элемент $x \in A_n$ и рассмотрим множества $A_i' = A_i \setminus \{x\}$ при $i = 1, \ldots, n-1$. Поскольку критического подсемейства не существует, то объединение любого подсемейства множеств $\{A_1', \ldots, A_{n-1}'\}$ содержит не меньше элементов, чем число множеств в подсемействе. А тогда, по предположению индукции, существует СРП для семейства $\{A_1', \ldots, A_{n-1}'\}$. С учетом элемента $x \in A_n$ получаем СРП для исходного семейства $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.

2. *Критическое подсемейство существует.*

Перенумеровав при необходимости множества, можно считать, что критическим является подсемейство $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$. Тем самым, $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \widetilde{X}$, где $\left|\widetilde{X}\right| = m$. По предположению индукции, для подсемейства $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ существует СРП, т.е. различные элементы $x_i \in A_i$ при $i = 1, \ldots, m$.

Рассмотрим оставшиеся множества $\{A_{m+1}, \ldots, A_n\}$ и выберем какие-нибудь k из них. Поскольку объединение множеств $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ вместе с выбранными k множествами содержит не менее $m+k$ элементов, то объединение выбранных k множеств содержит не менее k элементов, не входящих в $\widetilde{X}$. Иначе говоря, семейство множеств $\{A_{m+1} \setminus \widetilde{X}, \ldots, A_n \setminus \widetilde{X}\}$ удовлетворяет условию теоремы, т.е., по предположению индукции, для $\{A_{m+1} \setminus \widetilde{X}, \ldots, A_n \setminus \widetilde{X}\}$ существует СРП.

Вместе с построенной СРП для $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ получаем нужный результат. Теорема доказана.

Приведем одно из многочисленных усилений теоремы Холла:

Пусть в каждом из множеств $A_1, A_2, \ldots A_n$ ровно $k \ge 1$ элементов и ни один элемент не содержится более чем в k множествах. Тогда существует k СРП, которые попарно не пересекаются и таким образом вместе образуют каждое из множеств A_i.

Теорема Холла дала старт обширному кругу исследований. Системы различных представителей широко применяются в теории расписаний, в задачах распределения ресурсов и в других разделах прикладной математики.

Цепи и антицепи

А.СПИВАК

Я РАССКАЖУ ОБ ИНТЕРЕСНОЙ И НЕЗАСЛУЖЕННО мало известной школьникам области – теории частично упорядоченных множеств. Прежде чем начнем доказывать теоремы и даже прежде чем сформулируем определения, познакомимся с несколькими интересными задачами.

Монотонные подпоследовательности

Задача 1. *Из любых ли пяти различных чисел, выписанных в ряд, можно выбрать три, стоящие в этом ряду в порядке убывания или в порядке возрастания?*

Решение. Пусть эти числа, слева направо, суть x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_1 < x_2$. (Иначе можно в дальнейшем рассуждении заменить везде знаки «<» на знаки «>» и наоборот.) Если при этом еще и $x_2 < x_3$, то первые три числа расположены в порядке возрастания. Значит, надо разобрать случай $x_1 < x_2 > x_3$. Если $x_3 > x_4$, то годится тройка $x_2 > x_3 > x_4$. Поэтому можно считать, что $x_1 < x_2 > x_3 < x_4$. Далее, если $x_4 < x_5$, то годится тройка $x_3 < x_4 < x_5$. Таким образом, надо разобрать случай

$$x_1 < x_2 > x_3 < x_4 > x_5 .$$

Сравним числа x_2 и x_4. Если $x_2 < x_4$, то годится тройка $x_1 < x_2 < x_4$. Если же $x_2 > x_4$, то годится $x_2 > x_4 > x_5$. Существование трехэлементной монотонной подпоследовательности доказано.

Есть и более короткий способ решения. Пусть a и b – наибольшее и наименьшее из выписанных чисел. Если между ними есть какое-то число, то утверждение верно. Если же они стоят рядом, то либо слева, либо справа от них есть еще хотя бы два числа. Они и образуют нужную тройку либо с числом a, либо с числом b.

Задача 2. *Из любых ли девяти различных чисел, выписаных в ряд, можно выбрать четыре, стоящие в этом ряду в порядке убывания или в порядке возрастания?*

Иллюстрация В.Акатьевой

Решение. Из девяти чисел монотонную четырехчленную последовательность можно выбрать не всегда. Пример – последовательность 3, 2, 1, 6, 5, 4, 9, 8, 7.

Упражнение 1. Выпишите числа от 1 до 24 в строку таким образом, чтобы самая длинная возрастающая подпоследовательность состояла из 4 чисел, а самая длинная убывающая – из 6.

Задача 3. *Докажите, что из любых десяти различных чисел, выписанных в ряд, можно выбрать четыре, стоящие в этом ряду в порядке убывания или в порядке возрастания.*

Самое простое решение этой задачи основано на утверждении задачи М1774 «Задачника «Кванта».

Обеденные столы

Напомню условие задачи М1774.

Король сказочной страны пригласил на пир всех людоедов своей страны. Среди них есть людоеды, которые хотят съесть других людоедов. Известно, что наидлиннейшая цепочка, в которой первый людоед хочет съесть второго, второй – третьего и так далее, состоит из шести людоедов. Докажите, что король может так рассадить людоедов за шесть столов, что ни за каким столом никто не будет хотеть съесть никого из сидящих за тем же столом.

Вы удивлены? Не понимаете, как связана эта задача с предыдущими задачами о возрастающих и убывающих последовательностях чисел? Да самым непосредственным образом! Будем говорить, что число b хочет съесть число a, если $a < b$ и в рассматриваемом ряду a расположено левее, чем b (на рисунке 1 это нарисовано для последовательности 3, 1, 6, 2, 4, 7, 5; желание съесть показано стрелочкой). Тогда цепочка чисел, в которой каждое следующее хочет съесть предыдущее, – это возрастающая подпоследовательность. А сидящие за одним столом числа, ни одно из которых не хочет съесть никакое другое, – это убывающая подпоследовательность.

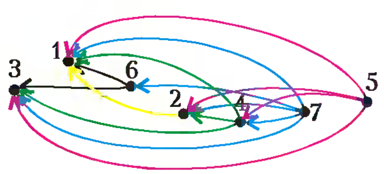


Рис. 1

Разумеется, число «шесть» в условии задачи М1774 надо не забыть заменить на число «три». И если нет убывающей подпоследовательности длины 4, другими словами, если самая длинная цепочка, в которой каждое число хочет съесть следующее за ним, состоит не более чем из 3 чисел, то мы сможем в силу задачи М1774 рассадить 10 имеющихся чисел за тремя столами так, что ни за каким столом никто никого не будет хотеть скушать. Поскольку $\frac{10}{3} > 3$, то хотя бы за одним столом окажутся не менее чем 4 числа. Они образуют искомую возрастающую последовательность.

Пора приступить к решению задачи М1774.

Первый способ. Обозначим людоедов точками и проведем стрелки, обозначающие, кто кого хочет съесть (на рисунке 2,*а* изображена одна из возможных ситуаций). Если бы существовал цикл, то можно было бы, двигаясь вдоль стрелок, прийти из некоторой точки в нее саму, и длина цепочки, о которой сказано в условии, не была бы ограничена сверху: «крутясь по циклу», мы смогли бы построить сколь угодно длинную такую цепочку.

Значит, циклов нет. Теперь для каждого людоеда посмотрим, какие цепочки начинаются с него. (Быть может, его тоже кого-то хочет съесть, но мы на это не обращаем внимания и начинаем цепочку именно с него. Если же людоед – вегетарианец, то цепочка состоит только из него самого.) Количество людоедов самой длинной из таких цепочек – это и есть номер стола, за который мы посадим этого людоеда. (Вы поняли, почему посаженные нами за один стол людоеды не хотят съесть один другого? Если нет, перечитайте этот абзац!)

Возможно, однако, кому-то по душе больше придется другой, более формальный способ изложения (по сути того же самого) решения.

Второй способ. Всех людоедов-вегетарианцев, никого не желающих скушать (они отмечены на рисунке 2,*а* светлыми кружочками), посадим за первый стол

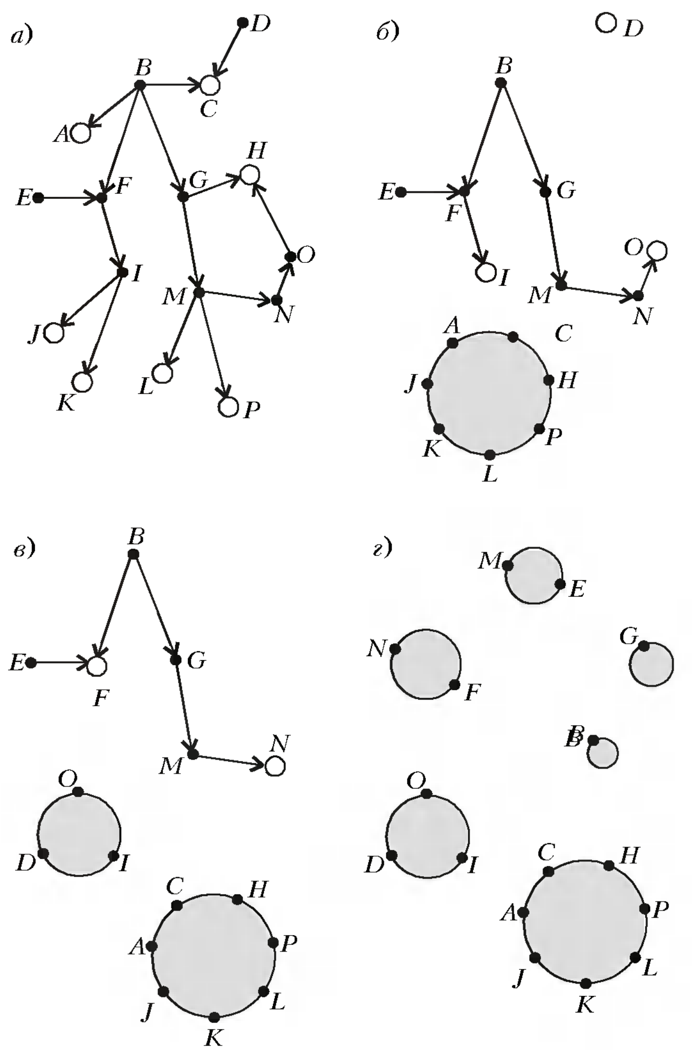


Рис.2

(рис.2,*б*). Исключим их из рассмотрения. Среди оставшихся людоедов обнаружатся свои вегетарианцы, которых мы посадим за второй стол (рис.2,*в*). Исключив из рассмотрения и этих людоедов, обнаружим новых вегетарианцев и посадим их за третий стол, и так далее. В конце концов все окажутся рассажены за 6 столов (рис.2,*г*). Задача решена.

«Самый левый из правых»

Теперь для разнообразия – задачи об отрезках прямой.

Задача 4. *Можно ли разместить на прямой а) 6; б) 7 отрезков так, чтобы из любых трех отрезков нашлись два пересекающихся и никакая точка прямой не принадлежала четырем или более отрезкам?*

Решение. а) Можно. Например, это отрезки [0;1], [0;2], [0;3], [2;5], [3;5] и [4;5].

б) Нельзя. Сначала расскажу решение, не использующее утверждение задачи М1774. Рассуждаем «от противного». Пусть удалось расположить 7 отрезков так, что из любых трех отрезков некоторые два пересекаются и никакая точка не принадлежит четырем отрезкам сразу. Обозначим буквой B самый левый из правых (да-да, именно так!) концов рассматриваемых семи отрезков. Пусть AB – один из этих отрезков. Поскольку точка B принадлежит не более чем трем из семи отрезков, то отрезок AB пересекается не более чем с двумя другими отрезками. (Подумайте, почему это так! Суть в том, что никакой отрезок не лежит целиком левее точки B.)

Значит, существуют четыре отрезка, целиком расположенные правее точки B. Каждые два из них пересекаются. (Иначе вместе с отрезком AB два непересекающихся отрезка образовывали бы тройку отрезков, никакие два из которых не пересекаются.) Но если каждые два из четырех отрезков пересекаются, то все эти четыре отрезка имеют общую точку – таковой точкой является, например, самый левый из их правых концов.

Задача 4 решена. Правда, довольно сложным и трудным для запоминания способом. Основанное на утверждении задачи М1774 удивительно короткое и прозрачное решение я расскажу в следующем разделе статьи, а пока обсудим последнее использованное в решении задачи 4 соображение (математик сказал бы, что это – одномерный случай теоремы Хелли). Оно заслуживает выделения в качестве отдельной леммы.

Лемма. *Если любые два из нескольких отрезков пересекаются, то существует точка, принадлежащая всем этим отрезкам.*

Доказательство вы уже знаете: такой точкой является, например, самый левый из правых концов этих отрезков. (Или самый правый из левых.)

Примерно так же, как задачу о семи отрезках, можно решить и следующую задачу. (Она содержится под номером 160 в книге Н.Б.Васильева и А.А.Егорова «Задачи всесоюзных математических олимпиад».)

Задача 5. *На прямой даны 50 отрезков. Докажите, что если среди них нельзя найти 8 отрезков, каждые два из которых имеют общую точку, то среди данных 50 отрезков можно найти 8 отрезков, никакие два из которых не имеют общей точки.*

Решение. Пусть $[a_1;b_1]$ – отрезок с наименьшим (т.е. самым левым) правым концом. Если количество отрезков, которым принадлежит точка b_1, больше семи, то задача решена. Если их не больше семи, то существуют по крайней мере 43 отрезка, которые целиком лежат правее $[a_1;b_1]$. Выберем из них отрезок $[a_2;b_2]$с наименьшим правым концом. Тогда либо b_2 принадлежит восьми отрезкам, либо имеется 36 отрезков, лежащих правее b_2. Продолжая это рассуждение, мы либо найдем точку, принадлежащую восьми отрезкам, либо получим такие семь попарно не пересекающихся отрезков $[a_1;b_1]$, $[a_2;b_2]$,..., $[a_7;b_7]$, что правее$[a_k;b_k]$, где $k = 1, 2,..., 7$, лежит не меньше $50 - 7k$ отрезков, в частности, правее $[a_7;b_7]$ лежит еще по крайней мере один отрезок $[a_8;b_8]$, что и требовалось.

Упражнения

2. Из любых $mn + 1$ отрезков прямой можно выбрать $m + 1$ попарно не пересекающихся отрезков или $n + 1$ отрезков, имеющих общую точку. Докажите это.

3. Пусть на прямой задана произвольная система отрезков. Обозначим через M наименьшее количество точек на прямой таких, что каждый из отрезков системы содержит хотя бы одну из этих точек; через m – наибольшее количество попарно не пересекающихся отрезков, которые можно выбрать из данной системы. Тогда $M = m$. Докажите это.

ЧУМы

Тренировка закончена. Пора дать определение. *Частично упорядоченное* множество (ЧУМ) M – это множество, для любых двух элементов a, b которого известно, находятся они в некотором отношении $\prec$ или нет.[1] При этом должны быть выполнены следующие аксиомы:

- *если $a \prec b$ и $b \prec c$, то $a \prec c$;*
- *если $a \prec b$, то $a \neq b$;*
- *неравенства $a \prec b$ и $b \prec a$ не могут быть выполнены одновременно.*

(Впрочем, третья аксиома, очевидно, следует из первых двух.) Множество, любые два элемента которого сравнимы, т.е. множество, для любых элементов a и b которого выполнено одно из соотношений $a \prec b$, $a = b$ и $b \prec a$, называют *линейно упорядоченным* или, коротко, *цепью*. Элемент a называют *максимальным* (соответственно, *минимальным*), если неравенство $a \prec b$ (соответственно, $b \prec a$) не выполнено ни для какого другого элемента b.

Приведу несколько примеров частично упорядоченных множеств: множество всех вещественных чисел (оно не только частично, но и даже линейно упорядочено, т.е. любые два числа можно сравнить); множество всех отрезков прямой, где один отрезок считается больше другого, если все точки первого лежат правее точек второго; множество всех натуральных чисел, упорядоченное по делимости (т.е. одно число больше или равно другому, если первое число делится

[1] *Знак «$\prec$» использован потому, что в его роли часто, но вовсе не всегда, выступает знак «<» сравнения «обычных» чисел.*

на второе без остатка); множество всех подмножеств данного множества, упорядоченное по включению (т.е. одно множество больше или равно другому, если все элементы второго множества являются и элементами первого множества).

Обобщением доказанных выше утверждений о числах и отрезках является следующая теорема:

В частично упорядоченном множестве из $mn + 1$ элементов есть либо цепь из идущих в порядке возрастания $m + 1$ элементов, либо $n + 1$ попарно несравнимых элементов (так называемая антицепь).

Чтобы применить эту теорему, например, к задаче об отрезках, можно считать, что один отрезок «больше» другого (в терминах М1774: один отрезок хочет съесть другой), если он целиком лежит правее; тогда любая система «попарно несравнимых» отрезков обязательно имеет общую точку (ею служит самый левый из их правых концов).

Доказывать теорему я не буду: вы легко выведете ее из задачи о людоедах. После этого, подумав о задаче М1774 еще немного, вы выведете из нее следующее утверждение:

Обозначим через d наибольшее количество элементов цепи данного конечного частично упорядоченного множества M. Тогда M можно разбить на d антицепей.

Теорема Дилуорса

Если поменять в последнем утверждении слова «цепь» и «антицепь» местами, то мы получим гораздо более трудно доказываемую теорему.

Теорема Дилуорса. *Обозначим через n наибольшее количество элементов антицепи данного конечного частично упорядоченного множества M. Тогда M можно разбить на n цепей.*

Другими словами, *если N – наименьшее количество цепей, на которые можно разбить данное конечное частично упорядоченное множество M, а n – наибольшее количество его попарно несравнимых элементов (т.е. наибольшая мощность антицепи), то $n = N$.*

Прежде чем доказать теорему Дилуорса, разберем один ее частный случай.

Задача 5. *Дано несколько различных натуральных чисел. Известно, что среди любых трех из них можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое. Докажите, что числа можно покрасить в два цвета так, чтобы для любых двух чисел одного цвета одно делилось на другое.*

Решение. Расположим числа по возрастанию. Возьмем наименьшее и окрасим его в первый цвет. Дальше будем рассматривать числа по порядку. До тех пор, пока каждое очередное число будет делиться на предыдущее рассмотренное число, будем использовать только первый цвет. Если так будет продолжаться до конца, то второй цвет вообще не понадобится. Если же очередное число не окажется кратным предыдущего, то придется использовать второй цвет. (Заметьте: после этого максимальные числа двух цветов не делятся друг на друга.)

Рассмотрим следующее число. Оно делится хотя бы на одно из двух максимальных окрашенных чисел (разных цветов). Если только на одно, то, покрасив его в тот же цвет, получим предыдущую ситуацию. Если же оно делится на оба максимальных, то временно окрасим его в третий цвет. Если следующее число делится на максимальное число третьего цвета, то и его красим в третий цвет, и так делаем, пока не встретим число, не делящееся на максимальное число третьего цвета. Это число должно делиться хотя бы на одно из максимальных чисел первых двух цветов. Покрасим его в соответствующий цвет, а все числа третьего цвета – в другой цвет; опять получим ситуацию, когда максимальные числа (разных цветов) не делятся друг на друга. Повторяя эти действия, мы получим искомую раскраску.

Доказательство теоремы Дилуорса. Неравенство $n \le N$ очевидно: никакие два элемента одной антицепи не могут войти в одну цепь.

Докажем неравенство $n \ge N$ индукцией по числу элементов множества M. База очевидна. Выполним индукционный переход. Пусть неравенство верно для всех частично упорядоченных множеств, содержащих менее m элементов. Рассмотрим частично упорядоченное множество M, состоящее из m элементов. Предположим, в нем есть антицепь P, не содержащая ни некоторого минимального элемента $a \in M$, ни некоторого максимального элемента $b \in M$. Обозначим

$$M_+ = \{s \in M \mid \exists p \in P \,(p \preceq s)\}$$

и

$$M_- = \{s \in M \mid \exists p \in P \,(s \preceq p)\}.$$

Эти две формулы означают, что M_+ – множество элементов $s \in M$, для которых [2] существует [3] $p \in P$ такой, что $p \prec s$ или $p = s$; аналогично M_- – это множество элементов $s \in M$, для которых существует $p \in P$ такой, что $s \prec p$ или $p = s$. Учитывая предположение об антицепи P, имеем

$$M_+ \ne M, \quad M_- \ne M, \quad M = M_- \cup M_+.$$

По предположению индукции, каждое из множеств M_+ и M_- можно разложить на n цепей; «склеивая» эти цепи в точках, принадлежащих P, получаем разложение множества P на n цепей. Половина дела сделана.

Предположим теперь, что каждая антицепь содержит либо все максимальные элементы, либо все минимальные элементы множества M. Поскольку содержащая все минимальные (или все максимальные) элементы антицепь не может содержать ни одного другого элемента, то множество M имеет не более двух антицепей (и если их две, то одна антицепь состоит из всех минимальных, а другая – из всех максимальных элементов множества M). Пусть a и b – минимальный и максимальный элементы множества M, причем $a \preceq b$. По индуктивному предположению, множество $M \setminus \{a,b\}$ можно разложить не более чем на $n-1$ цепь. Добавляя цепь $a \preceq b$, получаем разложение множества M не более чем на n цепей.

Упражнение 4. Даны несколько различных натуральных чисел. Если среди любых n из них можно выбрать два так, что одно делится на другое, то все числа можно покрасить в $(n-1)$ цвет так, чтобы из любых двух чисел одного цвета одно делилось на другое. Докажите это.

---

[2] *В формуле слова «для которых» обозначены вертикальной чертой.*

[3] *Слово «существует» принято обозначать так называемым квантором $\exists$ (это перевернутая первая буква слова* Exist *– существовать).*

Иоганн Кеплер

А.ВАСИЛЬЕВ

Наблюдательная астрономия, как часть натуральной философии, сыграла ключевую роль в становлении современного естествознания, и значение деятельности Иоганна Кеплера в этом трудно переоценить.

Иоганн Кеплер родился 27 декабря 1571 года в доме своего деда – бургомистра провинциального немецкого города Вейля. Он рос болезненным ребенком, к тому же страдал врожденным недостатком зрения – сильной близорукостью и множественностью зрения (состояние глаза, при котором одиночный объект наблюдения кажется множественным). Два ярких воспоминания, имевших, кстати, отношение к будущей профессии Кеплера, остались у него с самого детства: в 6 лет он впервые увидел комету, в 9 лет наблюдал затмение Луны. В семилетнем возрасте родители отдали его в начальную немецкую школу, а затем перевели в латинскую школу, где обучали будущих служителей церкви и государственных учреждений. Дальнейшее образование Кеплер продолжил в семинарии, а в 1589 году поступил в Тюбингенский университет. Образование в тогдашних университетах начиналось на факультете искусств, где читались лекции по математике и астрономии, греческому и древнееврейскому языкам. Профессор математики и астрономии Тюбингенского университета М. Местлин вскоре заметил необычайные способности Кеплера, который, в частности, выводил математические теоремы, убеждаясь лишь задним числом в том, что они уже хорошо известны. Местлин ввел молодого Кеплера в круг немногих своих воспитанников, среди которых он пропагандировал гелиоцентрическую систему Николая Коперника.

Окончив факультет искусств, Кеплер продолжил обучение на теологическом факультете, готовясь к духовной карьере. Однако незадолго до выпуска постановлением сената Тюбингенского университета он был направлен преподавателем математики в Грац, главный город австрийской провинции Штирия. Будучи в Граце, Кеплер продолжал интересоваться астрономией. В числе первых проблем, которые он пытался разрешить, был вопрос о существовании именно шести видимых невооруженным глазом планет (в то время Уран, Нептун и Плутон еще не были открыты), а не двадцати или, скажем, ста. Этот вопрос предстояло решить вместе с объяснением относительной величины расстояний между траекториями движения планет. С попытки ответить на эти вопросы начались многолетние исследования, которые в конце концов и привели к открытию законов движения планет.

В поисках гармонии в структуре Солнечной системы Кеплер предположил, что между параметрами планетарных орбит должны быть простые соотношения, выражающиеся целыми числами. Потерпев неудачу с этой гипотезой, он предположил существование дополнительных, еще не открытых малых планет, одну из которых он поместил между Меркурием и Венерой, а другую – между Марсом и Юпитером. Этот прием, однако, также не привел его к желаемым результатам.

В 1595 году Кеплер, решая с учениками какую-то геометрическую задачу, начертил равносторонний треугольник с вписанной в него и описанной вокруг него окружностями. Внезапно его озарила мысль, являющаяся, по его мнению, ключом к разгадке тайны Вселенной. Прикинув отношение между радиусами окружностей, он заметил, что оно близко к отношению радиусов круговых орбит Сатурна и Юпитера, как они были вычислены Коперником. Далее Кеплер попытался вписать в следующий интервал между Юпитером и Марсом квадрат, между Марсом и Землей – пятиугольник, между Землей и Венерой – шестиугольник. Но дело не ладилось. Тогда Кеплер решил использовать для подгонки орбит в пространстве правильные трехмерные многогранники. Как известно, число многогранников, все грани которых являются правильными и равными между собой многоугольниками и все двугранные углы которых равны между собой, ограничено пятью: тетраэдр (4 грани), гексаэдр (6 граней), октаэдр (8 граней), додекаэдр (12 граней) и икосаэдр (20 граней). Важным свойством правильных многогранников является существование для каждого из них вписанного и описанного шаров, центры которых совпадают между собой и с центром многогранника. Кеплер решил, что мудрость творца заключена в совпадении числа промежутков между планетами с числом правильных многогранников. Тем самым, решался вопрос и об относительных расстояниях между орбитами планет: в сферу, на которой расположена орбита Сатурна, вписан куб, в него вписана следующая сфера – с орбитой Юпитера, далее последовательно вписаны тетраэдр, сфера Марса, додекаэдр, сфера Земли, икосаэдр, сфера Венеры, октаэдр, сфера Меркурия, а в центре всей системы находится Солнце. Казалось, тайна Вселенной раскрыта.

Свои размышления Кеплер изложил в монографии «Космографическая тайна», вышедшей в 1596 году. Если отбросить неправильную «рабочую гипотезу», мистические и теологические наслоения, в этой книге можно найти множество ценных мыслей, предвосхитивших будущие открытия Кеплера. Уже во введении автор проявил себя убежденным сторонником гелиоцентрической системы Коперника. Свою книгу Кеплер послал многим ученым, в том числе знаменитому датскому астроному Тихо Браге и молодому, но уже признанному авторитету в механике Галилео Галилею. Галилей приветствовал появление нового сторонника гелиоцентрической системы, а Браге, хотя и выразил отрицательное отношение к теории, опережающей наблюдения, пригласил Кеплера в свою обсерваторию в Вандбеке. Их встреча состоялась в 1600 году в Праге и открыла новую главу в жизни Иоганна Кеплера.

Выдающийся астроном Тихо Браге построил на острове Вен лучшую в мире обсерваторию и посвятил 35 лет жизни астрономическим наблюдениям. Обработка и изучение этих материалов дали возможность впоследствии раскрыть многие тайны строения Солнечной системы. К сожалению, использовать в полной мере накопленные богатства Браге не смог, и в значительной мере потому, что не воспринял систему Коперника. Браге принял Кеплера в свою группу и поручил ему наблюдение за Марсом. Постепенно Браге оценил трудолюбие и талант Кеплера, однако их сотрудничество прервалось в 1601 году из-за смерти Браге. Кеплеру была поручена забота об инструментах и рукописях Браге, ему присвоили звание имперского математика. Наступил наиболее благоприятный в жизни Иоганна Кеплера период (с 1601 года по 1612 год), в течение которого он выполнил важнейшие исследования по астрономии и оптике.

Именно тогда Кеплером была опубликована «Новая астрономия» – выдающееся сочинение по теоретической астрономии. Значение этой книги состоит прежде всего в том, что в ней дан вывод двух из трех знаменитых законов движения планет, названных впоследствии именем Кеплера. В современной формулировке эти законы звучат так:

Все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых (общем для всех планет) находится Солнце.

Площади, описываемые радиусами-векторами планет, пропорциональны времени.

Третий закон был опубликован Кеплером позже (в 1619 году) в книге «Гармония мира»:

Квадраты периодов обращений планет относятся как кубы их средних расстояний от Солнца.

Для открытия законов движения планет большой удачей оказалось то, что Браге поручил Кеплеру наблюдать именно за перемещениями Марса. Как выяснилось позже, его орбита более других отличается от круговой, и в то же время Марс чрезвычайно удобен для наблюдений.

Кеплер начал свое исследование составлением на основании наблюдений Браге полного списка моментов, долгот и широт всех противостояний Марса с 1580 года. Для достижения успеха в своих исследованиях Кеплеру необходимо было отрешиться от некоторых догм, следование которым было причиной неудач многих его предшественников. Еще Коперник, следуя Птолемею, считал центр земной орбиты истинным центром орбит всех планет. Браге также определял противостояние планеты как положение, противоположное этой точке – так называемому «среднему Солнцу». Кеплер уже в «Космографической тайне» указал, что Солнце само является естественным центром планетарной системы, и считал, что противостояние следует брать по отношению к реальному, а не «среднему» Солнцу. Это было первым существенным нововведением в методы исследования.

Второе нововведение Кеплера заключалось в следующем. Орбиты всех планет лежат не совсем в одной плоскости – их плоскости образуют одна с другой небольшие углы. Естественно, плоскости всех планетных орбит проходят через центр Солнца – этот факт сейчас очевиден, но не был известен в докеплеровой астрономии.

Третье нововведение Кеплера более радикальное. Ранее астрономы были уверены в том, что планеты совершают свои круговые движения с постоянной скоростью. Кеплер же, сохраняя на первых порах движение круговым, отбрасывает аксиому равномерного движения, основываясь на физических соображениях: если Солнце – источник движения, то его действие на планету более интенсивно, когда она находится ближе к источнику, и менее интенсивно, когда планета от него удалится. Следовательно, планета будет двигаться с большей или меньшей скоростью в зависимости от ее расстояния до Солнца.

Кеплер начал решение задачи о движении Марса с вычисления некоторых параметров его орбиты (радиуса, центра, направления оси, соединяющей Марс с Солнцем), полагая ее круговой. Об огромном объеме проделанной им работы говорят сохранившиеся черновики расчетов, занявшие 900 листов мелким почерком. Однако полученные параметры, хорошо согласующиеся с наблюдениями противостояний Марса, при вычислении промежуточных его положений обнаруживали существенное расхождение с данными наблюдений. Это привело Кеплера к выводу, что орбита Марса не является круговой.

Теперь предстояло дать математическое описание той кривой, по которой движется планета, и эта задача оказалась самой сложной и трудоемкой. Кеплер проверял одну гипотезу за другой, проводя при этом колоссальную вычислительную работу. И наконец, его озарила истина: орбита Марса – все-таки эллипс, но Солнце располагается не в его центре, а в одном из фокусов. Так, говоря словами Кеплера, не переставая ощупывать все в окружающем мраке, он вышел на яркий свет истины.

Проверка гипотезы эллипса быстро привела его к успешному завершению работы, ознаменовавшемуся выводом первого закона: Марс движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. Кеплер не сомневался, что этому же закону повинуются движения и остальных планет, и вскоре подтвердил это.

Отданная всецело науке жизнь Кеплера не была легка в житейском плане, он вынужден был часто переезжать с места на место, испытывал материальные трудности. Его мать была обвинена в колдовстве, и Кеплеру пришлось бороться за ее жизнь. В 1630 году Кеплер тяжело заболел и 15 ноября скончался на 59-м году жизни. Он похоронен на кладбище Регенсбурга. Друзья поставили ему скромный памятник с надписью:

Я небеса измерял; ныне тени Земли измеряю.
Дух на небе мой жил; здесь же тень тела лежит.

В ходе сражений Тридцатилетней войны окрестности Регенсбурга три раза становились ареной ожесточенных боев. Городское кладбище было полностью разрушено, а от могилы Кеплера не осталось и следа. И все же Кеплер оставил и после себя большое богатство – свои рукописи и многотомное собрание наблюдений Тихо Браге. Судьба этих рукописей была не более благополучной, чем судьба Кеплера: они переходили из рук в руки, пока при содействии Эйлера не были приобретены Екатериной II и переданы Российской академии наук. Сейчас в нашей стране хранятся 18 из 22 томов этого собрания рукописей (4 тома попали в Венскую государственную библиотеку).

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 2004 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5–2003» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1876» или «Ф1883». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

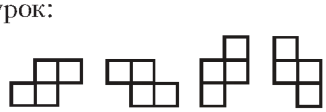
В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1880 – М1882 предлагались на XXIX Всероссийской математической олимпиаде.

Задачи Ф1883 и Ф1892 предлагались на Московской физической олимпиаде этого года, а задачи Ф1887 и Ф1890 – на XXXVII Всероссийской физической олимпиаде.

Задачи М1876–М1885, Ф1883–Ф1892

М1876. а) Во всех клетках квадрата $n \times n$ стоят минусы. За один ход можно поменять знаки в одной из четырех фигурок:



При каких n можно получить плюсы во всех клетках квадрата?

б) Докажите, что если в каком-то квадрате поменяли таким образом все знаки, то при этом фигурки каждого из четырех видов использовались одинаковое по четности число раз.

Д.Пермяков (ученик 10 кл.)

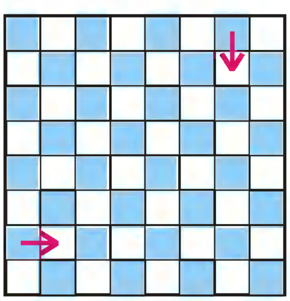


Рис.1

М1877. За 64 хода король обошел все поля шахматной доски и вернулся на прежнее место. Среди прочих он сделал ходы a2-b2 и g8-g7 (рис.1). Докажите, что король сделал не меньше двух диагональных ходов.

В.Произволов

М1878. На высоте CH треугольника ABC построена, как на диаметре, окружность. Докажите, что касательные к этой окружности, проведенные в точках ее пересечения со сторонами AC и BC, пересекаются на медиане CM треугольника.

А.Заславский

М1879. На левую и правую чашки весов положили по 100 гирек из набора 1г, 2г, 3г, ..., 200г. Значимостью гирьки с какой-либо чашки назовем число тех гирек с другой чашки, которые легче ее. Докажите, что весы покажут равновесие тогда и только тогда, когда суммарная значимость гирек левой чашки равна суммарной значимости гирек правой чашки.

В.Произволов

М1880. На прямой даны $2k - 1$ белых и $2k - 1$ черных отрезков. Известно, что любой белый отрезок пересекается хотя бы с k черными, а любой черный – хотя бы с k белыми. Докажите, что найдутся черный отрезок, пересекающийся со всеми белыми отрезками, и белый отрезок, пересекающийся со всеми черными.

В.Дольников

М1881. Пусть a, b, c – положительные числа, сумма которых равна 1. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c} \ge \frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}.$$

С.Берлов

М1882*. Изначально у Ани и Бори было по длинной полосе бумаги. На одной из них была написана буква *А*, на другой *Б*. Каждую минуту один из них (не обязательно по очереди) приписывает к слову на своей бумажке слово с бумажки другого. Докажите, что через сутки слово с Аниной полоски можно будет разрезать на 2 части и переставить их местами так, что получится то же слово задом наперед.

Е.Черепанов

М1883. Решите в целых числах уравнения:
а) $x^4 - 2y^2 = 1$; б) $x^2 - 2y^4 = 1$;
в) $x^4 - 8y^2 = 1$; г) $x^2 - 8y^4 = 1$.

В.Сендеров

М1884. а) Квадрат разрезан на квадраты, один из которых красный, а остальные синие. Периметр каждого синего квадрата является целым числом. Докажите, что периметр красного квадрата – целое число.
б) Равносторонний треугольник разрезан на равносторонние треугольники, один из которых красный, а остальные синие. Периметр каждого синего треугольника является целым числом. Докажите, что периметр красного треугольника – целое число.

В.Произволов

М1885. Автомобильная стоянка представляет собой ряд из n мест, занумерованных слева направо числами от 1 до n, а въезд на стоянку находится справа. У въезда скопились n машин, и теперь они по очереди заезжают на стоянку. Каждый водитель сначала подъезжает к своему любимому месту. Если оно свободно, ставит туда машину, а если занято, то едет вперед до ближайшего свободного места (назад поворачивать нельзя). Обозначим a_i, где $1 \le i \le n$, номер любимого места водителя i-й в очереди машины. Будем говорить, что последовательность $a_1, \ldots, a_n$ бесконфликтна, если удается поставить машины на стоянку, соблюдая указанные выше правила. Например, при $n = 2$ последовательности (1, 2), (2, 1) и (2, 2) бесконфликтны, а последовательность (1, 1) конфликтна.
а) Докажите, что последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ бесконфликтна тогда и только тогда, когда ни один ее член не превосходит n и когда для любого натурального k, где $k < n$, количество членов последовательности, не превосходящих k, не превосходит k.
Найдите количество б*) бесконфликтных последовательностей длины n; в*) бесконфликтных неубывающих последовательностей длины n.

Ю.Бурман

Ф1883. Космический корабль стартовал в вертикальном направлении с поверхности невращающегося сферически симметричного небесного тела, лишенного атмосферы. После выключения двигателя зависимость скорости корабля от времени имеет вид, показанный на рисунке 2. На каком расстоянии от центра небесного тела был выключен двигатель?

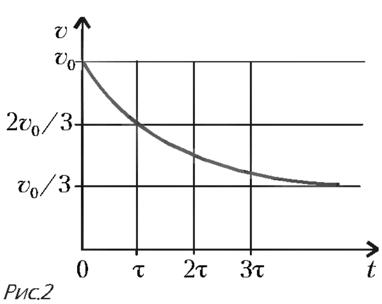


Рис.2

О.Шведов

Ф1884. В системе на рисунке 3 все блоки невесомые, нити легкие и нерастяжимые. Масса одного из крайних грузов равна $3M$, остальные имеют массу M. Вначале все тела удерживают, затем отпускают, и они начинают двигаться – при этом нити остаются все время натянутыми и рывков нет. Найдите ускорение тяжелого груза.

З.Рафаилов

Ф1885. На гладком горизонтальном круглом столе находится массивный шар радиусом R. От малого толчка шар начинает двигаться вдоль радиуса по направлению к краю стола. На каком расстоянии от края стола шар ударится о пол? Высота поверхности стола над полом равна H.

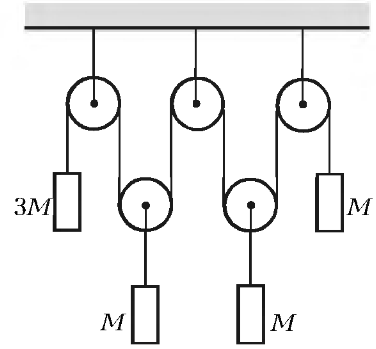


Рис. 3

А.Старов

Ф1886. По гладкому горизонтальному столу движется шайба. Она налетает на другую шайбу, которая до удара покоилась. При каком отношении масс налетавшая шайба может двигаться после удара перпендикулярно начальному направлению, уменьшив скорость по модулю вдвое?

А.Ударов

Ф1887. Изучая некоторое вещество, экспериментатор Глюк обнаружил, что для небольшого изменения объема ΔV требуется увеличить давление на малую величину Δp_1, если это делать изотермически, и на малую величину Δp_2, если сжатие производить адиабатически. Кроме того, Глюк измерил удельные теплоемкости c_V при постоянном объеме и c_P при постоянном давлении. К сожалению, результат последнего измерения (c_P) был утрачен. Помогите Глюку по результатам первых трех измерений восстановить значение c_P. Рассмотрите два случая: 1) исследуемое вещество было идеальным газом; 2) исследовалось вещество с неизвестным уравнением состояния.

Д.Александров

Ф1888. Плоский «конденсатор», состоящий из двух больших круглых тонких непроводящих пластин площадью S каждая, закрепленных неподвижно на малом расстоянии d друг от друга, заряжен зарядами Q и $-Q$, размазанными равномерно по поверхностям. В центрах пластин проделаны небольшие отверстия. Вдоль прямой, проходящей через эти отверстия, издали в направлении к конденсатору движется очень маленький шарик массой m, заряженный зарядом q, одноименным с зарядом ближней пластины. Какую минимальную скорость должен иметь шарик на большом расстоянии от пластин, чтобы проскочить через конденсатор? Какую скорость будет иметь шарик на выходе из конденсатора, если его скорость вдали вдвое больше указанной минимальной скорости?

А.Повторов

Ф1889. В схеме на рисунке 4 батарейка идеальная. Между точками A и $Б$ подключают последовательно соединенные конденсатор емкостью C и резистор сопротивлением R. Какой заряд про-

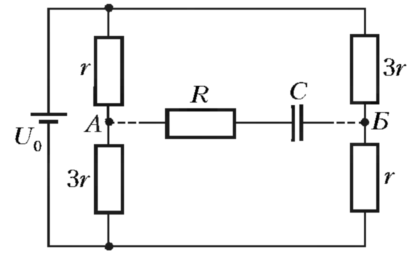


Рис.4

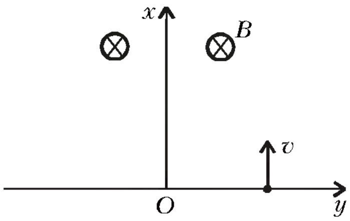


Рис.5

течет через этот резистор после подключения? Какое количество теплоты на нем выделится?

З.Рафаилов

Ф1890. В неоднородном магнитном поле с индукцией $B = ax$ ($x \geq 0$) стартует частица (рис. 5) массой m и зарядом q с начальной скоростью v, направленной вдоль оси Ox. Определите максимальное смещение частицы вдоль оси Ox.

В.Муравьев

Ф1891. На длинном ферромагнитном стержне намотаны (проводом с очень малым сопротивлением, симметрично относительно середины стержня) две одинаковые катушки, каждая индуктивностью L. Присоединив к выводам одной из катушек генератор звуковой частоты с амплитудой напряжения 1 В, измерили напряжение между выводами второй катушки при помощи вольтметра, имеющего очень высокое сопротивление, – оно оказалось равным 0,2 В (амплитудное значение). Как изменится индуктивность одной из катушек, если соединить между собой выводы второй катушки?

А.Зильберман

Ф1892. Колебательный контур состоит из разнесенных в пространстве катушки индуктивностью L с малым сопротивлением и плоского конденсатора емкостью C, расстояние между пластинами которого равно d. Пластины конденсатора не заряжены, и ток в контуре не течет. За время $\tau \ll \sqrt{LC}$ в области пространства, где находится конденсатор, создали однородное электрическое поле $\vec{E}$, направленное перпендикулярно пластинам. Катушка при этом осталась вне электрического поля. Каким будет в дальнейшем максимальный ток в контуре?

С.Варламов

Решения задач М1856—М1860, Ф1868—Ф1877

М1856. *Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается его основания AC в точке E, а боковых сторон – в точках M и K (рис.1). Прямая MK пересекает продолжение основания в точке P. Докажите, что прямая PO перпендикулярна BE.*

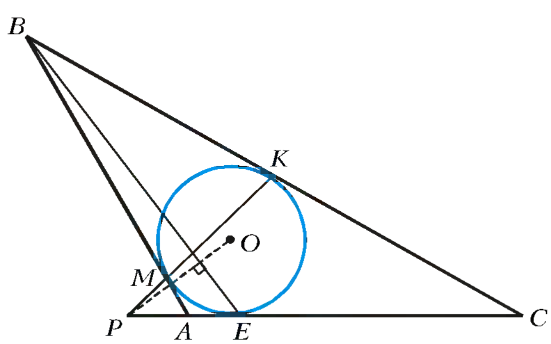


Рис.1

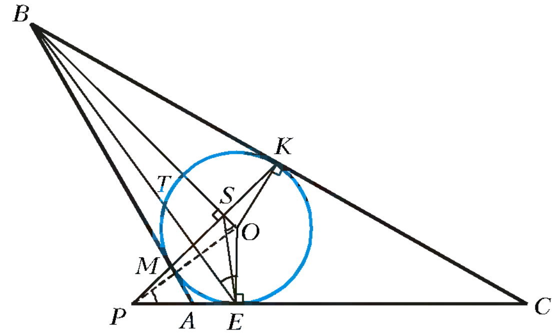


Рис.2

Пусть точка S – пересечение MK и OB (рис.2). Ясно, что $\angle BSK$ прямой. Из рассмотрения треугольника BOK следует, что $OK^2 = OS \cdot OB$. Значит, $OE^2 = OS \cdot OB$. Отсюда следует, что треугольник OSE подобен треугольнику BOE. Значит, $\angle BEO = \angle ESO = \angle EPO$. Последнее равенство следует из того, что четырехугольник $OEPS$ вписанный.

Равенство углов BEO и EPO означает, что BE является высотой в прямоугольном треугольнике EPO, т.е. BE перпендикулярна PO.

Пытливый читатель убедится самостоятельно, что из результата задачи следует дополнительно, что PT является касательной к данной окружности.

М.Волчкевич

М1857. *На окружности находится множество K, состоящее из k точек, делящих окружность на k равных дуг. В K взяты два подмножества M и N, содержащие m и n точек соответственно. У подмножеств M и N ровно r общих точек. Более того, на какой бы угол, кратный* $\frac{2\pi}{k}$, *мы ни повернули подмножество N, оно по-прежнему будет иметь ровно r общих точек с подмножеством M. Докажите, что* $r = \frac{mn}{k}$.

Для наглядности представим себе конструкцию из двух дисков, насаженных на одну ось. Нижний (неподвижный) диск разделим на K равных секторов, на краю каждого из которых записана либо цифра 0, либо цифра 1. При этом расположение единиц соответствует в точности расположению точек множества M и их ровно m штук.

Верхний (подвижный) диск тоже разделим на K равных секторов. При этом на краях n из этих секторов сделаем n круглых окошек, соответствующих своим расположением n точкам множества N.

Имеется K положений верхнего диска при его поворотах на угол, кратный $\frac{2\pi}{k}$. В каждом положении через r окошек видно r единиц, а через остальные $n - r$ окошек видны нули. Количество единиц, которые мелькнут в окошках при всех K положениях верхнего диска, равно Kr. Но каждая из m единиц при этом мелькнет в каждом из n окошек по разу, т.е. число таких мельканий единиц равно mn. Значит, $Kr = mn$.

В.Произволов

М1858. *Даны такие натуральные числа a и b, что 2a + 1 и 2b + 1 взаимно просты. Каким может быть* *наибольший общий делитель чисел* $2^{2a+1}+2^{a+1}+1$ *и* $2^{2b+1}+2^{b+1}+1$?

Как известно, $\text{НОД}\left(2^k-1,2^n-1\right)=2^{(k,n)}-1$, где (k,n) – наибольший общий делитель k и n (для доказательства можно воспользоваться алгоритмом Евклида). Заметим, что

$$\left(2^{2a+1}+2^{a+1}+1\right)\left(2^{2a+1}-2^{a+1}+1\right)=$$
$$=\left(2^{2a+1}+1\right)^2-\left(2^{a+1}\right)^2=2^{4a+2}+1.$$

Следовательно, наибольший общий делитель чисел $2^{2a+1}+2^{a+1}+1$ и $2^{2b+1}+2^{b+1}+1$ делит наибольший общий делитель чисел $2^{4a+2}+1$ и $2^{4b+2}+1$, а значит, и чисел $2^{8a+4}-1$ и $2^{8b+4}-1$. По вышеприведенному,

$$\text{НОД}\left(2^{8a+4}-1,2^{8b+4}-1\right)=2^{(8a+4,8b+4)}-1=2^4-1=15.$$

Стало быть, наибольший общий делитель чисел $2^{2a+1}+2^{a+1}+1$ и $2^{2b+1}+2^{b+1}+1$ является делителем 15. Можно заметить, что

$$2^{2a+1}+2^{a+1}+1\equiv 2^{a+1}\not\equiv 0 \pmod 3,$$

а поскольку искомый наибольший общий делитель d не делится на 3, то либо $d=1$, либо $d=5$. Убедимся в том, что возможны оба случая. Рассматривая остатки степеней двойки от деления на 5, легко увидеть, что $2^{2a+1}+2^{a+1}+1$ делится на 5, если a делится на 4, и $2^{2a+1}+2^{a+1}+1$ не делится на 5 в противном случае.

Д.Ростовский, А.Храбров

М1859. *Квадратный стол площади 2 можно в два слоя покрыть четырьмя квадратными салфетками, площадь каждой из которых равна 1. Более того, это можно сделать 100 различными способами. Найдите эти способы. (Салфетки можно перегибать, но нельзя разрывать.)*

Сначала укажем на два самых простых способа. В первом случае перегнем каждую салфетку по диагонали – получим четыре равнобедренных прямоугольных треугольника, которыми легко покрывается квадратный стол (рис.1). Во втором случае у каждой салфетки загнем четыре уголка – получим четыре одинаковых двухслойных квадрата, которыми тоже легко покрывается квадратный стол (рис.2).

Откуда возьмутся еще 98 способов? Вот откуда. Четыре квадратные салфетки располагаем на плоскости стола $ABCD$ так, как показано на рисунке 3. Затем загибаем 8 уголков, выступающих за пределы стола, – получаем двухслойное покрытие. При этом длине AM мы вправе придавать 98 различных значений в пределах от 0 до 1 – это и будут еще 98 способов покрытия.

Вдумчивый читатель уже понял, что на самом деле способов покрытия не 100, а гораздо больше

В.Произволов

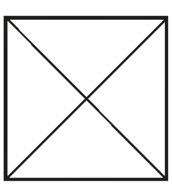


Рис.1

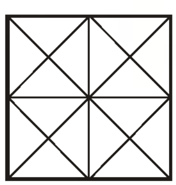


Рис.2

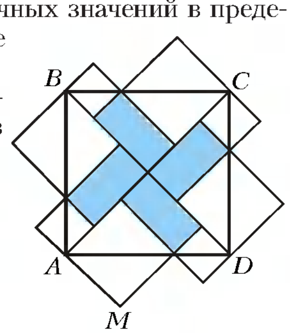


Рис.3

М1860. *Точка F является одним из фокусов эллипса, вписанного в выпуклый четырехугольник $ABCD$ (рис.1). Докажите, что $\angle AFB+\angle CFD=180^o$.*

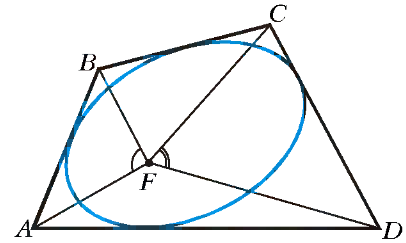


Рис.1

Напомним вначале простейшие свойства эллипса. Как известно, эллипсом с фокусами F_1 и F_2 называется множество всех таких точек K на плоскости, что $F_1K+F_2K=\text{const}$. Если точка находится вне эллипса, то сумма расстояний от нее до фокусов больше, чем на эллипсе, если внутри – то меньше. Действительно, возьмем точку S вне эллипса. Тогда отрезок SF_2 пересекает эллипс в некоторой точке E. Из неравенства треугольника следует, что $SF_1+SF_2>EF_1+EF_2=\text{const}$ (рис.2).

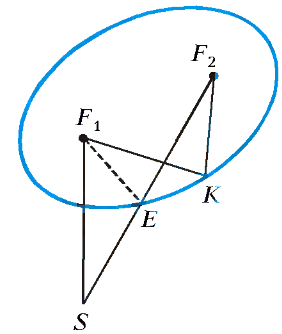


Рис.2

Прямая касается эллипса, если имеет с ним только одну общую точку. Очевидно, эта точка на прямой обладает наименьшей суммой расстояний до фокусов, поскольку все ее остальные точки лежат вне эллипса. Отразим один из его фокусов относительно касательной (рис.3). Тогда точка касания должна лежать на отрезке $F_1F_2^*$. Действительно, для любой другой точки S на прямой

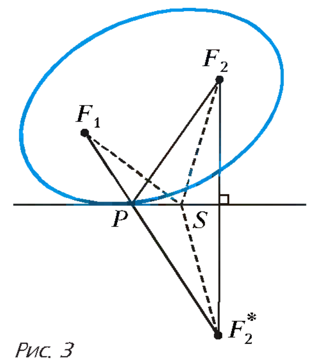


Рис. 3

$$F_1S+F_2S=F_1S+F_2^*S>F_1F_2^*=F_1P+F_2P.$$

Отсюда следует известное оптическое свойство эллипса: любой луч света, выходя из одного фокуса, после отражения от эллипса попадает в другой его фокус.

Пусть теперь F и G – фокусы эллипса, вписанного в четырехугольник $ABCD$. Отразим точку F относительно сторон четырехугольника (рис.4). Пусть $F_1,\ldots,F_4$ – ее образы, а $H_1,\ldots,H_4$ – основания перпендикуляров,

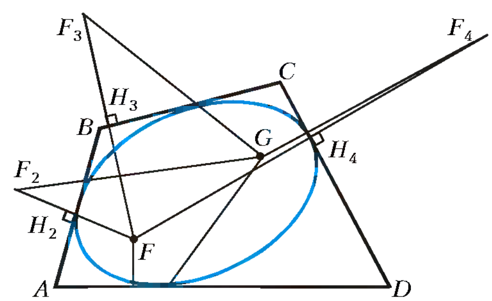


Рис.4

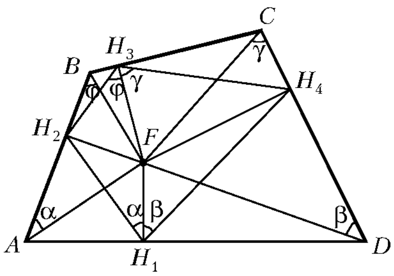


Рис.5

опущенных на его стороны. Тогда точки касания эллипса со сторонами четырехугольника, как доказано выше, лежат на отрезках $GF_1,\ldots,GF_4$. Поэтому все эти отрезки равны сумме расстояний на эллипсе и, следовательно, равны между собой. Таким образом, четырехугольник $F_1F_2F_3F_4$ вписанный. Но четырехугольник $H_1\ldots H_4$ гомотетичен ему относительно точки F. Поэтому он тоже вписывается в окружность (рис.5). Значит, $\angle H_2H_1H_4+\angle H_2H_3H_4=180^\circ$. Углы H_2H_1F и BAF равны, так как четырехугольник AH_2FH_1 вписанный. Аналогично равны остальные отмеченные на рисунке углы. Поэтому $\alpha+\beta+\gamma+\varphi=180^\circ$. Отсюда и следует утверждение задачи.

М.Волчкевич

Ф1868. *Игрушечная пушка может стрелять под любым углом к поверхности земли, скорость вылета ядра $v_0=30$ м/с. Тонкая стена имеет высоту $H=40$ м. На какое максимальное расстояние можно забросить снаряд от точки выстрела при условии, что снаряд должен перелететь через стену? Стрелять можно из любого места земной поверхности перед стеной. Принять ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.*

Вообще, самая дальняя траектория получается при броске под углом 45°. Однако при скорости $v_0=30$ м/с и этом значении угла максимальная высота составит

$$h=\frac{\left(v_0\sin 45^\circ\right)^2}{2g}=22{,}5\text{ м},$$

что меньше высоты стены. Придется бросать по более крутой траектории. Рассмотрим самую выгодную из них, когда вертикальной скорости ($v_{\text{в}}$) хватит ровно на то, чтобы подняться на высоту H. При этом

$$\frac{v_{\text{в}}^2}{2g}=H,\text{ и } v_{\text{в}}=20\sqrt{2}\text{ м/с}.$$

Тогда горизонтальная составляющая скорости составит

$$v_{\text{г}}=\sqrt{30^2-800}\text{ м/с}=10\text{ м/с}.$$

Время движения по этой траектории будет равно

$$t=2\sqrt{\frac{2H}{g}}=5{,}6\text{ с},$$

а дальность составит

$$L=v_{\text{г}}t=56\text{ м}.$$

А.Повторов

Ф1869. *Система из двух грузов массами M и $M/2$, к которым прикреплены легкие блоки, движется по гладкому горизонтальному столу под действием силы F_0 (рис.1). С каким ускорением движется точка нити, к которой приложена сила? Масса нити очень мала. Свободные куски нити считать горизонтальными, растяжением нити пренебречь.*

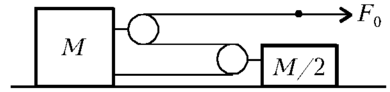


Рис.1

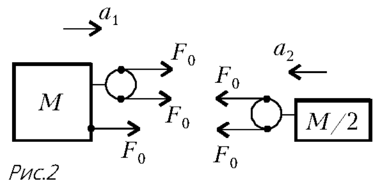


Рис.2

Натяжение нити всюду равно F_0. На тело массой M (рис. 2) действует направленная вправо сила $3F_0$, поэтому ускорение этого тела направлено вправо и равно

$$a_1=\frac{3F_0}{M}.$$

На тело массой $M/2$ действует направленная влево сила $2F_0$, и его ускорение направлено влево и равно

$$a_2=\frac{2F_0}{M/2}=\frac{4F_0}{M}.$$

При сдвиге тела массой M вправо, скажем, на 1 см «освобождается» 3 см нити, а при сдвиге влево тела массой $M/2$ на тот же 1 см «освобождается» 2 см нити. Ясно, что ускорение интересующего нас конца нити направлено вправо и равно

$$a=3a_1+2a_2=\frac{17F_0}{M}.$$

М.Учителев

Ф1870. *На гладком горизонтальном столе покоится глубокая тарелка, на дне которой лежит маленькая, но массивная монета. Тарелку резко толкают в горизонтальном направлении так, что монета сразу после удара еще не движется. В процессе дальнейшего движения монета поднимается по стенке тарелки на максимальную высоту h. Найдите максимальное и минимальное значения кинетической энергии тарелки при движении. Трения в системе нет, монета при движении не отрывается от внутренней поверхности тарелки, суммарная масса тарелки и монеты равна M. Тела все время двигаются вдоль одной прямой.*

Обозначим массу монеты m_1, массу тарелки m_2. В момент максимального подъема монеты ее скорость относительно тарелки равна нулю, и оба тела едут вместе со скоростью

$$u=\frac{m_2v_0}{m_1+m_2},$$

где v_0 – скорость тарелки сразу после толчка. Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{m_2v_0^2}{2}=m_1gh+\frac{(m_1+m_2)u^2}{2}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{m_2v_0^2}{2}=(m_1+m_2)gh=Mgh.$$

Ясно, что это максимальная кинетическая энергия тарелки. Минимальную кинетическую энергию тарелки можно найти только тогда, когда массивная монета имеет большую массу, чем тарелка. В этом случае скорость тарелки в процессе взаимодействия меняет знак (направление), и минимальное значение ее кинетической энергии равно нулю.

В общем случае для нахождения кинетической энергии тарелки нужно знать отношение масс m_1/m_2, а оно в условии не дано.

А.Зильберман

Ф1871. *Порция гелия вначале расширяется в 3 раза при постоянном давлении, потом охлаждается при постоянном объеме, затем ее сжимают без подвода тепла, пока давление и объем не вернутся к начальным значениям. Известно, что в этом цикле максимальная температура была в 6 раз больше минимальной. Найдите КПД цикла.*

Стандартная формула для цикла Карно тут явно не подходит. Посчитаем КПД «впрямую».
Газ получает тепло от нагревателя только на участке расширения при постоянном давлении:

$$Q_{\text{н}} = A + \Delta U = p(3V - V) + \frac{3}{2}\nu R(3T - T) = 5pV .$$

Работа в цикле равна сумме работ на участке расширения и на участке адиабатического сжатия (с учетом знаков). Работа на участке расширения равна

$$A_1 = p\Delta V = 2pV .$$

Работу на втором участке найдем косвенно – в таком процессе она равна изменению внутренней энергии (с противоположным знаком). Минимальная температура получается при самом малом давлении, она равна $3T/6 = T/2$ (в 6 раз меньше максимальной – по условию). Тогда температура в этой части процесса изменяется от $T/2$ до T, и работа газа равна

$$A_2 = -\frac{3}{2}\nu R\left(T - \frac{T}{2}\right) = -\frac{3}{4}pV .$$

Окончательно КПД цикла будет равен

$$\eta = \frac{A_1 + A_2}{Q_{\text{н}}} = \frac{5/4\,pV}{5pV} = \frac{1}{4} = 25\% .$$

А.Простов

Ф1872. *Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы каплю ртути массой m = 20 г «запихнуть» в стеклянный капилляр с внутренним диаметром d = 1 мм? Считайте, что плотность ртути в n = 14 раз больше, чем плотность воды, а коэффициент поверхностного натяжения ртути $\sigma = 0{,}5$ Дж/м^2. Ртуть не смачивает стекло.*

При помещении капли ртути в тонкую трубку площадь поверхности капли существенно увеличится. При полном несмачивании работу можно выразить через изменение площади поверхности ртути. Объем капли равен

$$V = \frac{m}{n\rho_{\text{воды}}} = 1{,}4\ \text{см}^3 ,$$

а площадь поверхности составляет

$$S_1 = 4\pi\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{2/3} = 6\ \text{см}^2$$

(новая площадь намного больше, и погрешность при расчете начальной площади не очень существенна). Новая площадь поверхности ртути внутри трубки будет

$$S_2 = \frac{4V}{d} = 56\ \text{см}^2$$

(это площадь боковой поверхности цилиндра того же объема V). Тогда необходимая работа будет равна

$$A = \sigma\Delta S = \sigma(S_2 - S_1) = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{Дж} .$$

Кстати, трубка должна быть очень длинной – столбик ртути имеет длину более 1,5 м!

Р.Стеклов

Ф1873. *Реклама чудо-нагревателя «Интеллигентное тепло» утверждает, что для нагревания воздуха в обычной жилой комнате объемом 50 м^3 от 20 °С до 21 °С зимой, когда температура воздуха на улице равна −10 °С, достаточно всего 10 кДж электроэнергии. Возможно ли это хотя бы в принципе? Перекачивать в комнату тепло от более нагретых тел нельзя!*

Если форточка зимой плотно закрыта, то необходимое для нагревания воздуха комнаты на 1 градус количество теплоты равно

$$Q = \nu C_V \Delta T = \nu \cdot 2{,}5R\Delta T = 2{,}5pV\frac{\Delta T}{T} =$$

$$= 2{,}5 \cdot 1 \cdot 10^5 \cdot 50\frac{1}{293}\ \text{Дж} = 40\ \text{кДж}$$

(мы при расчете учли, что воздух – это двухатомный газ). Если считать, что воздух нагревается при неизменном давлении (форточка закрыта не очень плотно), то получится примерно 60 кДж (убедитесь в этом самостоятельно), что дела не меняет – все равно больше указанных 10 кДж. Однако можно не тратить эти килоджоули прямо на нагревание газа – их можно использовать намного эффективнее.
Рассмотрим обращенную тепловую машину – «тепловой насос». При этом мы тратим 10 кДж на совершение механической работы, за счет которой тепло с улицы перекачивается в комнату. Если рассмотреть обычную тепловую машину, которая работает на разности температур между комнатой и улицей, то на каждый джоуль, отнятый у нагревателя-комнаты, можно получить примерно 1 Дж $\cdot\left(T_{\text{комн}} - T_{\text{ул}}\right)/T_{\text{комн}} = 30/293$ Дж $= 0{,}1$ Дж тепла (остальные 0,9 Дж будут отданы «холодильнику», т.е. улице). В обращенном цикле на 0,1 Дж работы можно отнять с улицы примерно 0,9 Дж и отдать в комнату 1 Дж тепла. Отсюда видно, что можно передать комнате почти 100 кДж, затратив всего 10 кДж на приведение в движение обращенной тепловой машины. Реклама, в порядке исключения, оказалась правдивой! (Хотя нагреватель «Доброе тепло», послуживший прототипом для задачи, был простым нагревателем-ковриком и никак не мог быть «в три раза эффективнее обычных нагревателей», как утверждала реклама...)

З.Рафаилов

Ф1874. *Пять резисторов соединены между собой, как показано на рисунке 1. Сопротивление одного из них (неизвестно – какого) равно 200 Ом, остальные имеют сопротивления по 100 Ом каждый. Какой из резисторов нужно удалить из схемы («вырезать»), чтобы сопротивление между выводами А и Б изменилось меньше всего?*

При удалении резистора сопротивление цепи может только увеличиться (в крайнем случае – остаться неизменным).
Если резистор сопротивлением 200 Ом находится в «диагонали» моста, то «вырезать» (удалить) надо именно его. Если он находится в любом другом месте, то нужно найти вариант, который дает минимальное

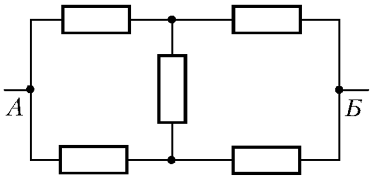


Рис.1

сопротивление цепи (после удаления любого резистора сопротивление цепи легко рассчитать).

Пусть сопротивление 200 Ом имеет нижний резистор, подключенный к точке *А*. Тогда легко найти сопротивления схем, представленных на рисунке 2:

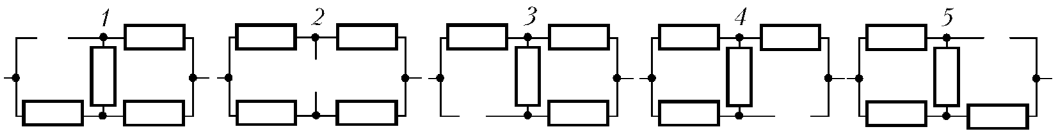


Рис.2

схема *1* имеет сопротивление $200\ \text{Ом} + 100\ \text{Ом} \times 200\ \text{Ом}/(100 + 200)\,\text{Ом} = 267\ \text{Ом}$, схема *2* – 120 Ом, схема *3* – 167 Ом, схема *4* – 175 Ом, схема *5* – 200 Ом. Итак, минимальное сопротивление, а значит, и минимальное изменение сопротивления получится при удалении резистора из диагонали мостика (схема *2*). Кстати, можно посчитать сопротивление цепи до вырезания: $1300\ \text{Ом}/11 \approx 118\ \text{Ом}$, но этого по условию задачи не требуется (как и вычисления других сопротивлений).

З.Мостов

Ф1875. *Конденсаторы емкостями 1 мкФ и 2 мкФ соединены последовательно. Каждый из них может выдержать напряжение 200 В (так написано в документации). Можно ли их подключать крайними выводами к сети переменного напряжения 220 В? А к источнику постоянного напряжения 220 В? Диэлектрик – промасленная бумага (самый распространенный тип конденсатора такой емкости в недавнем прошлом).*

С переменным напряжением 220 В все совсем просто – это действующее значение, а амплитуда напряжения больше в $\sqrt{2}$ раз и составляет (примерно) 310 В. Это напряжение делится между конденсаторами в отношении 2:1 (обратном отношению емкостей), и на конденсаторе емкостью 1 мкФ получается больше разрешенных 200 В (даже без учета возможных перенапряжений в сети).

А вот с постоянным напряжением немного сложнее. Сразу после подключения все будет в порядке – напряжение на каждом конденсаторе не превысит $440\ \text{В}/3 = 147\ \text{В}$. Однако пройдет некоторое время (возможно, десятки секунд), напряжения конденсаторов начнут меняться и в конце концов распределятся пропорционально сопротивлениям изоляции конденсаторов, а эти сопротивления могут отличаться в десятки и сотни раз! Представьте себе, что первый конденсатор очень хороший, а второй – еще в 10 раз лучше (изоляция лучше). Именно ему и «достанется» больше 90% напряжения, он будет пробит, а за ним окажется пробитым и первый конденсатор.

Итак – все-таки нельзя!

А.Повторов

Ф1876. *Конденсатор емкостью С зарядили до напряжения U_0 и подключили к катушке индуктивностью L, после чего в цепи возникли колебания. В некоторый момент к выводам конденсатора подключают параллельно соединенные резистор сопротивлением R и катушку индуктивностью 3L. Найдите максимальное и минимальное количества теплоты, которые могут выделиться в резисторе за достаточно большой интервал времени. Считайте элементы цепи идеальными.*

Вначале нужно понять, почему не вся энергия системы превращается в тепло. Все дело в том, что в сверхпроводящем контуре, содержащем две катушки индуктивности, может течь некоторый «остаточный» ток, сохраняющий часть энергии системы. Этот ток окажется наибольшим, если параллельно соединенные резистор и катушку индуктивностью $3L$ подключать к конденсатору в момент максимального тока в катушке индуктивностью L:

$$\frac{LI_m^2}{2} = \frac{CU_0^2}{2}, \text{ и } I_m = U_0\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

В этом случае можно использовать закон сохранения магнитного потока в контуре:

$$LI_m = LI + 3LI, \text{ и } I = \frac{I_m}{4},$$

где I – «остаточный» ток. Энергия магнитного поля составит при этом

$$\frac{LI^2}{2} + \frac{3LI^2}{2} = \frac{LI_m^2}{8} = \frac{CU_0^2}{8},$$

а тепла выделится

$$Q_{\min} = \frac{CU_0^2}{2} - \frac{CU_0^2}{8} = \frac{3CU_0^2}{8}.$$

Если же подключаться в момент нулевого тока в катушке индуктивностью L, то энергия системы полностью перейдет в тепло:

$$Q_{\max} = \frac{CU_0^2}{2}.$$

При подключении в произвольный момент времени

$$\frac{3CU_0^2}{8} \le Q \le \frac{CU_0^2}{2}.$$

Р.Александров

Ф1877. *На тороидальном сердечнике с большой магнитной проницаемостью намотана толстым проводом катушка, содержащая большое количество витков. От середины обмотки сделан отвод. Крайние выводы катушки подключили к сети 220 В, а между крайним и средним выводами катушки включили лампу на 110 В мощностью 60 Вт. Найдите токи каждой из половин обмотки. Кстати, заметим, что такое устройство (катушка с отводом на ферромагнитном сердечнике) называется автотрансформатором.*

Пусть та часть обмотки, к которой подключена лампа, называется нижней, а вторая часть обмотки – верхней. Ток от сети втекает в верхнюю обмотку, затем, дойдя до точки соединения половин, он частично ответвляется в лампу, а частично течет в нижнюю обмотку. Ток

(Окончание см. на с.27)

Задачи

1. Профессор Мумбум-Плюмбум пытается подобрать две цифры a и b такие, что обыкновенная дробь $\frac{a}{b}$ равна десятичной дроби a,b. Удастся ли ему это сделать?

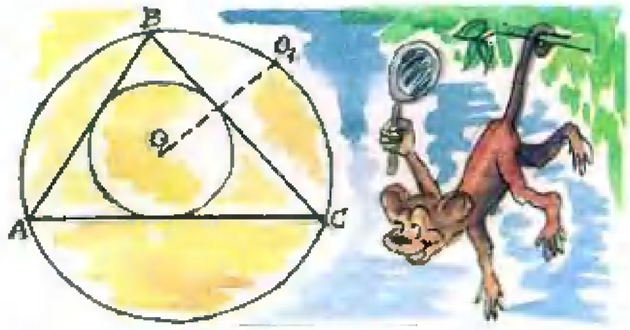
М.Инозуков

2. Стал я рядом с цифрой пять
Слева двойки выставлять.
Двойку выставил – и рад:
Получается квадрат. $25 = 5^2$
Снова двойка – снова рад:
У меня опять квадрат. $225 = 15^2$
Стал я дальше выставлять,
А квадратов – не видать. 2225, 22225, ...
Помогите разобраться.
Вдруг – не стоит и стараться?

А.Зайчик

3. В треугольнике ABC центр вписанной окружности отразили симметрично относительно стороны BC – получили точку, лежащую на описанной окружности. Докажите, что угол A равен 60°.

В.Сендеров

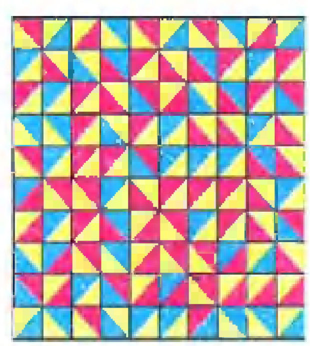


4. На станцию Нью-Васюки прибыл товарный поезд, на каждом вагоне которого написан восьмизначный номер. Этот номер может начинаться с нуля, но не может состоять из одних нулей. В номере головного вагона каждая содержащаяся в нем цифра встречается одинаковое количество раз. Номер хвостового вагона обладает тем же свойством. Какие это номера, если номер головного вагона равен квадрату номера хвостового вагона?

И.Акулич

5. Андрей взял клетчатую бумагу 10×10 и во всех клетках как попало провел по одной диагонали. После чего 200 получившихся треугольников раскрасил в красный, желтый и синий цвета так, что любые два треугольника, имеющие общую сторону, оказались окрашенными в разные цвета. Считаете ли вы, что Андрею повезло, или трех цветов всегда достаточно?

В.Произволов



Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

6. Фирма «Безенчук и К°», состоящая из шефа фирмы и нескольких рабочих, изготавливает сувениры. В течение дня каждый из рабочих изготавливает по одинаковому целому количеству сувениров, а шеф – тоже целое число сувениров, но на 13 сувениров больше, чем в среднем каждый из сотрудников фирмы (включая и его самого). Сколько рабочих трудится в этой фирме?

И.Акулич

7. Про числа x, y и z известно, что

$$[x+y] \text{ отличается от } x+y \text{ на } \frac{1}{3};$$

$$[y+z] \text{ отличается от } y+z \text{ на } \frac{1}{3};$$

$$[z+x] \text{ отличается от } z+x \text{ на } \frac{1}{3}.$$

А на сколько $[x+y+z]$ отличается от $x+y+z$? Здесь $[x]$ – целая часть числа x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее число x.

Д.Калинин

8. Дана окружность, внутри которой отмечены точки A и C, лежащие на одном диаметре. При помощи циркуля и линейки без делений постройте на окружности такую точку B, для которой угол ABC является наибольшим.

А.Малеев

9. Я последовательно записал все цифры номера моего мобильного телефона. Умножив получившееся натуральное число на 5, я обнаружил, что в результате получилось девятизначное число, запись которого содержит все цифры от 1 до 9. Чему равна сумма цифр моего телефонного номера?

С.Дворянинов, Р.Семизаров

10. Все натуральные числа выписаны в порядке возрастания без разделителей. В результате получилась бесконечная последовательность цифр:

1234567891011121314...

Докажите, что для некоторого натурального N число, образованное первыми N цифрами этой последовательности, делится на 2003.

И.Акулич

Поле Чудес

А.КОТОВА

...Лиса Алиса и кот Базилио объяснили Буратино, что золотые монеты могут прорасти, если посадить их ночью на Поле Чудес и хорошенько полить.

«Здорово, – подумал Буратино. – У меня пять золотых. Если я их посажу и вырастут денежные деревья, я смогу купить новую куртку папе Карло... А может, и не только куртку?» И он поскорей побежал на Поле Чудес, что в Стране Дураков, закопал монеты – каждую в свою ямку, – посолил для верности и полил теплой водой из ближайшей лужи.

Был понедельник – день тяжелый, – и Буратино очень боялся, что денежные деревья не проклюнутся. Каково же было его счастье, когда во вторник утром он увидел, что из каждой ямки растет маленькое деревце! И как же быстро они росли! Прямо на глазах они тянулись вверх, на них распускались листики, и каждый листик, сначала зеленый, начинал желтеть. «Ого! – подумал Буратино. – Выходит, из каждого листа будет монетка? Вот это да! Я стр-р-рашно разбогатею!» И он начал прикидывать, что он сможет купить на выращенные деньги.

На новую азбуку тут хватит... И на куртку папе Карло...

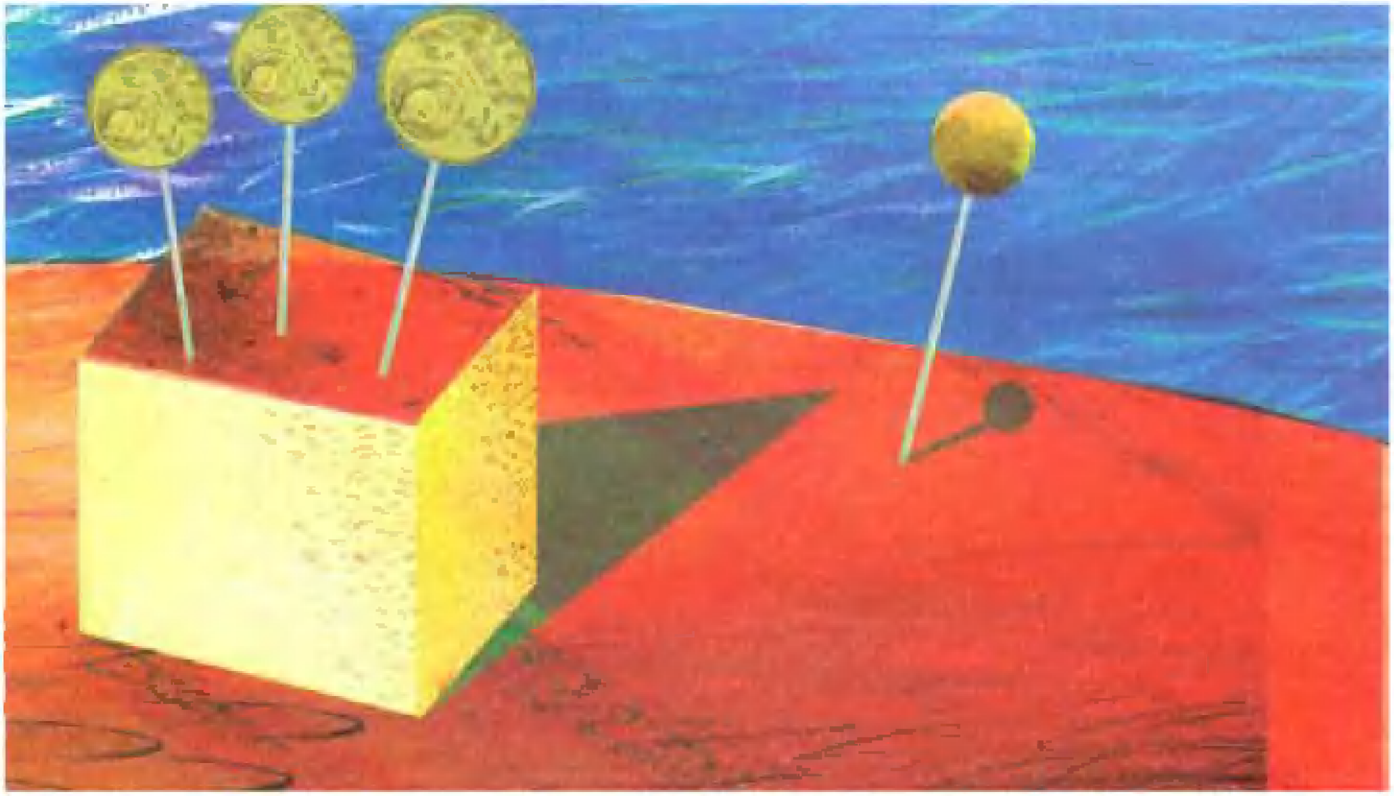


Иллюстрация В.Акатьевой

А может, хватит и на новые башмаки? Буратино быстро пересчитал листья на одном из деревьев, потом на втором, на третьем... Оказалось, что на каждом из них листьев поровну. Пожалуй, хватило бы и на две пары башмаков... И тут Буратино осенила великая идея: может быть, вырастить побольше монет и купить сразу новый дом для себя и папы Карло? Красивый, большой дом, можно даже двухэтажный, с террасой, балконом и прудом во дворе!.. В этот момент Буратино понял, что первого денежного урожая будет мало, да, пожалуй, и второго тоже.

Тогда он принялся за подсчеты. Нужно по крайней мере полторы тысячи золотых... А если в пруду устроить фонтан? Еще четыреста монет... Итого 1900. Кстати, неплохо бы вырыть колодец, на это нужно еще монет пятьдесят... Когда проект дома совсем оформился в его голове, Буратино понял, что ему нужно, ни много ни мало, 2002 монеты. Теперь следовало посчитать, сколько времени придется выращивать нужную сумму. После долгих размышлений Буратино понял, что 2002 монеты вырастут никак не раньше среды, но и не позже пятницы.

«Ничего, — решил он. — Можно немного пожить тут, в поле, и подождать». Между тем денежки зрели, зрели и созрели. Буратино собрал первый урожай и, дождавшись темноты, принялся за новый посев.

Было далеко за полночь, когда Буратино засеял поле свежесорванными монетами, полил каждую и решил, что может немного поспать. Еще бы — он очень устал!

Во сне он слышал странные звуки — будто кто-то шушукался рядом с ним. «Надо же, и правда выросли», — сказал голос лисы Алисы. «Не зря говорят — дуракам везет», — отвечал голос кота Базилио. «И точно, вот дурень! Собрал такой урожай и снова закопал!» Потом шушуканье смолкло, раздавались только хруст земли под лопатой и приглушенные ругательства.

«Странный сон», — подумал Буратино, проснувшись. Огляделся — увы! Это был не сон, а печальная действительность! Все его так тщательно посаженные монеты оказались вырытыми, только пустые ямки, сиротливо зиявшие по всему Полю Чудес, подтверждали, что, действительно, был урожай... Был, да сплыл!..

Кот Базилио и лиса Алиса с мешком золота были уже далеко, и догнать их бедный ограбленный Буратино не смог бы, даже если бы понял, в какую сторону они убежали. Разбойники не оставили ему ни одной монетки, даже тех пяти, что были у него с самого начала!

«Бедный я, бедный, — думал про себя Буратино, стараясь не зареветь. — А ведь не позже пятницы я мог бы построить дом, и какой!» И, вспоминая свой прекрасный дом с фонтаном, колодцем, балконом и верандой, он печально поплелся прочь из Страны Дураков. «И нужно-то всего было 2002 золотых! Ни монетки больше я бы не взял!»

«Стоп! А если бы выросло чуть больше? Неужели бы не взял?» — спросил Буратино сам у себя. И, чтобы не думать больше об утраченном доме, куртке папы Карло и азбуке, он принялся соображать, мог ли он вырастить ровно 2002 монеты? Задача оказалась не по зубам Буратино, все-таки голова у него была деревянная.

А правда, получилось бы или нет?

Победители конкурса «Математика 6–8» 2002/03 учебного года

Лучших результатов в конкурсе добились следующие школьники:

Гончарук Наталья – Харьков, ФМЛ 27, 8кл.,
Шмаров Владимир – Саров, лицей 15, 7 кл.,
Бабичева Татьяна – Набережные Челны, гимназия 26, 8 кл.,
Бабичев Дмитрий – Набережные Челны, гимназия 26, 6 кл.,
Марковцев Вадим – Сергиев Посад, школа 18, 8 кл.,
Плетнев Александр – Орел, школа 24, 8 кл.,
Козлов Иван – Москва, школа 537, 8 кл.,
Лаврентьев Юрий – Чебоксары, Чувашский национальный лицей-интернат им. Г.С.Лебедева, 8 кл.,
Кравченко Андрей – Москва, лицей 1533, 8 кл.,
Саженкова Ольга – Барнаул, школа 59, 7 кл.,
Красовицкий Евгений – Харьков, СОУВК 45, 7 кл.,
Жернов Антон – Харьков, ФМЛ 27, 6 кл.,
Вайсбурд Антон – Харьков, СОУВК 45, 7 кл.,
Жернов Павел – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.

и кружки:

Донецкого областного лицея «Эрудит», Донецк, руководители *Л.Л.Потемкина, В.Л.Потемкин*,
«Эврика» ФМЛ 27, Харьков, руководители *Е.Л.Аринкина, А.Л.Берштейн, В.Я.Крупчицкий, А.П.Ершова, О.Ф.Крыжановский, В.В.Венгеровский*,
гимназии 127, Снежинск, руководитель *А.А.Малеев*,
«Квантик» при подростковом клубе «Кировец», Москва, руководитель *И.А.Николаева,*
Чувашского национального лицея-интерната им. Г.С.Лебедева, Чебоксары, руководитель *С.А.Иванов*,
школы 117, Омск, руководитель *И.А.Чернявская*,
школы-гимназии 10, 8 кл., Ангарск, руководитель *О.Н.Маслова*,
«Таланты среди нас» УК ФМШЛ 61, Бишкек, руководитель *Л.С.Хохлова*,
«Лига юных математиков», Винница, руководитель *И.М.Кривошея*,
«Эрудит» ФМШ 32, Астрахань, руководитель *Т.М.Сергеева.*

Все школьники и кружки, добившиеся лучших результатов, награждаются комплектами журнала «Квант» за второе полугодие 2003 года.

Жюри конкурса отмечает также хорошие работы следующих учеников:

Багацкой Юлии – Харьков, СОУВК 45, 6 кл.,
Волковой Екатерины – Бишкек, УК ФМШЛ 61, 8 кл.,
Кадец Людмилы – Харьков, СОУВК 45, 7 кл.,
Криворучко Андрея – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Генераловой Евгении – Бишкек, УК ФМШЛ 61, 8 кл.,
Албутова Андрея – Чебоксары, Чувашский национальный лицей-интернат им. Г.С.Лебедева, 8 кл.,
Дудинова Ивана – Фрязино Московской обл., 8 кл.,
Есебуа Вахтанга – Харьков, ФМЛ 27, 6 кл.,
Батыева Андрея – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Гарина Павла – Ульяновск, 8 кл.,
Васильева Дмитрия – Чебоксары, Чувашский национальный лицей-интернат им. Г.С.Лебедева, 8 кл.,
Зайцева Алексея – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Чергинца Антона – Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,
Андрианова Евгения – Волгоград, школа 110, 7 кл.,
Карайко Алины – Харьков, ФМЛ 27, 6 кл.

и кружков:

«Школы успеха», Магнитогорск, руководители *А.В.Устинов, Н.С.Никифорова*,
гимназии 1, Самара, руководитель *А.А.Гусев*,
школы-гимназии 10, 7 кл., Ангарск, руководитель *Н.В.Чепелева*,
Малой академии, Шелехов Иркутской обл., руководитель *А.А.Кошкин*,
ФМШ 9, Пермь, руководитель *О.Н.Вязьмина*.

Задачи по математике и физике

(Начало см. на с.17)

через лампу составляет 60 Вт/110 В = 0,54 А (мы работаем с действующими значениями напряжения и тока). Если потери энергии в сердечнике и обмотке не учитывать, то от сети тоже потребляется мощность 60 Вт, тогда ток верхней половины обмотки вдвое меньше тока нагрузки и составляет 60 Вт/220 В = = 0,27 А. Получается, что ток нижней обмотки тоже составляет 0,27 А и течет навстречу току верхней обмотки (их сумма протекает через лампу).

При этих рассуждениях мы не учитывали маленького тока, дополнительно втекающего в трансформатор, – этот ток протекал через обмотку и до подключения лампы, его называют током холостого хода трансформатора (автотрансформатора). Именно этот ток создает магнитный поток через катушку, производная которого (ЭДС самоиндукции) компенсирует приложенное к катушке напряжение сети. Но при большой индуктивности катушки (много витков, ферромагнитный сердечник катушки) ток холостого хода получается совсем малым, и по сравнению с вычисленными токами им можно пренебречь.

З.Рафаилов

Физика 9–11

Публикуемая ниже заметка «Как летать: дальше или тише?» предназначена девятиклассникам, «Дело — труба» — десятиклассникам и «Откуда течет энергия: открытие за открытием» — одиннадцатиклассникам.

Как летать: дальше или тише?

А.СТАСЕНКО

Войдя в глубокое состояние ЦИГУН, после определенной тренировки можно понимать язык птиц.

Школа мастера Сюн Минтана

Хорошо, когда есть выбор. Но с чем он связан для крылатых летательных аппаратов (самолетов, птиц)? Попробуем разобраться.

На тело, движущееся в воздухе, действует аэродинамическая сила. Что ж тут удивительного? Ведь «аэро» означает воздух, а «динамис» – сила. Но найти эту силу теоретически очень непросто.

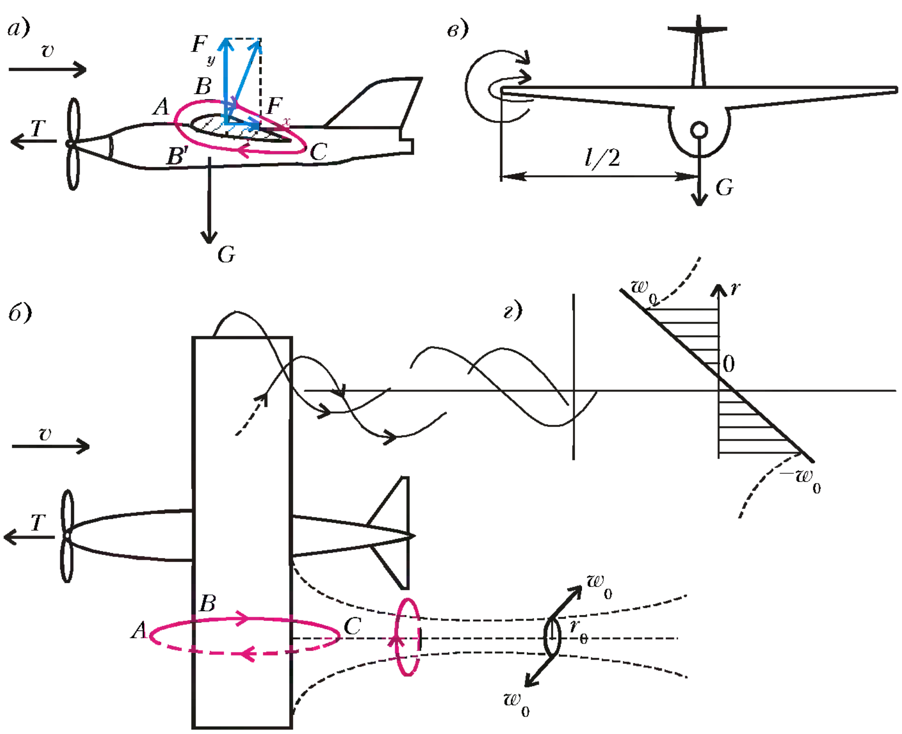


Рис. 1

Понятно, что при горизонтальном полете с постоянной скоростью v ее можно представить в виде векторной суммы двух взаимно перпендикулярных составляющих: вертикальной $\vec{F}_y$, называемой подъемной силой и по величине в точности равной весу $\vec{G}$, и горизонтальной $\vec{F}_x$, которая называется силой сопротивления и должна уравновешиваться силой тяги двигателей $\vec{T}$ (рис. 1,*а*).

Далее, легко проверить, что обе эти составляющие пропорциональны произведению $\rho v^2 lc$, где ρ – плотность воздуха, lc – площадь крыла самолета (рис.1,*б* и *в*). (Проверьте, по крайней мере, что размерность этого произведения есть ньютон.) Но «пропорциональны» совсем не значит «равны». Любому конструктору самолета хочется, чтобы F_x была поменьше: ведь тогда и мощность двигателя $N = F_x v$ (значит, и запас горючего) потребуется меньше. Поэтому качество летательного аппарата характеризуют отношением

$$\frac{F_y}{F_x} = \frac{G}{T}.$$

Для современных крылатых летательных аппаратов оно порядка 10–20. Это означает, что две составляющие аэродинамической силы «качественного» летательного аппарата заметно различимы по величине.

Еще на заре авиации, около сотни лет назад, ученые пытались понять, как «устроены» эти силы. И вот что придумали.

Одна из самых изящных идей состоит в том, что подъемная сила крыла связана с так называемой циркуляцией Г:

$$F_y = \Gamma\rho v l. \qquad (1)$$

Сравнивая с записанным выше выражением для F_y, видим, что $\Gamma \sim vc$. Немного еще о циркуляции. Когда вода сливается в отверстие ванны, часто образуется вихрь с выделенным направлением вращения (по часовой стрелке или против нее), такой, что на окружности радиусом r скорость воды $w(r)$ одна и та же. Если умножить эту скорость на длину окружности, мы и получим то, что называется циркуляцией:

$$\Gamma = 2\pi r w. \qquad (2)$$

Во время полета самолета за его крылом образуются два вихря. Действительно, самолет держится в воздухе за счет того, что его крыло, образно говоря, «дует вниз», т.е. создает поток импульса, равный весу летательного аппарата. Масса воздуха, отклоненная вниз, должна вернуться на свое место сверху (см. рис.1,*в*), но, поскольку за время этого возвращения самолет улетает вперед, она совершает винтовое движение в системе координат, связанной с самолетом (см. рис.1,*б*).

Одно из объяснений подъемной силы таково (см. рис.1,*а* и *б*). Масса набегающего воздуха разделяется крылом на две части. Одна из них проходит над крылом путь ABC, больший, чем путь $AB'C$ той части, которая проходит под крылом. Если мы умножим значение скорости в каждой точке пути $ABCB'A$ на небольшой участок этого пути и потом все это сложим (в пределе проинтегрируем), то и получим циркуляцию Г. Значит, крыло родило вихрь. А поскольку вихрь в газе или жидкости не может нигде закончиться (разве что замкнуться на себя или на твердую стенку – так называемая теорема Гельмгольца), то с двух концов крыла будут сбегать спутные вихри (см. рис.1,*б*), которые на большом удалении могут образовать эллиптические кольца – понаблюдайте за следом самолета в чистом небе. (В частности, еще в 1907 году один из зарубежных аэродинамиков – Ланчестер – очень наглядно изобразил процесс сворачивания вихревой пелены крыла; см. рис.2.)

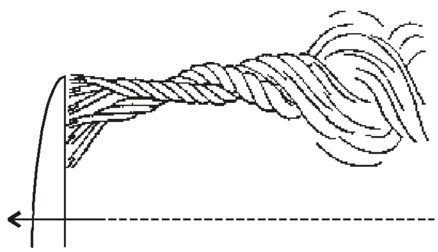


Рис. 2

Приятно отметить, что зависимость подъемной силы от циркуляции (1) связана с именем русского профессора Николая Егоровича Жуковского.

А что же сопротивление, т.е. горизонтальная составляющая аэродинамической силы? Прежде всего, оценим так называемое индуктивное сопротивление F_{xi}, связанное со спутными вихрями. Представим себе вихрь в виде стержня (см. рис.1,*б*) радиусом r_0, на поверхности которого окружная (линейная) скорость равна w_0 (а движением воздуха вокруг вихря пренебрежем). Тогда кинетическая энергия единицы объема воздуха в вихре равна $\frac{\rho w_0^2}{2}\cdot\frac{1}{2}$ (здесь коэффициент $\frac{1}{2}$ появляется потому, что мы предположили линейную зависимость окружной скорости от радиуса – см. рис.1,*г*, но это не важно для дальнейшего). Далее, самолет, пролетая в единицу времени расстояние, равное v, порождает вихревой объем $2\cdot\pi r_0^2 v$ (так как вихрей – два). А для этого требуется мощность

$$F_{xi}v = \frac{\rho w_0^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\pi r_0^2 v\ .$$

Следовательно, сила индуктивного сопротивления равна (см. также (1) и (2))

$$F_{xi} = \frac{\rho w_0^2}{2}\pi r_0^2 = \frac{\rho\Gamma^2}{8\pi} = \frac{G^2}{8\pi\rho v^2 l^2} = \frac{\alpha}{v^2}\ ,$$

где в α входят все характеристики данного самолета (вес, площадь крыла,..). Из последнего выражения видно, что, чем больше скорость полета, тем меньше индуктивное сопротивление, и наоборот. Поэтому при посадке большой самолет порождает мощные вихри над аэродромом, опасные для следующих за ним летательных аппаратов.

Подчеркнем еще раз, что индуктивное сопротивление связано с циркуляцией спутных вихрей. Ведь даже если подъемная сила и, следовательно, циркуляция равны нулю (например, для пикирующего штурмовика), то сопротивление воздуха все равно существует. Это так называемое профильное сопротивление F_{xp}. Оно пропорционально $\rho v^2 S_\perp$, где $S_\perp$ – лобовое сечение движущегося тела. Видно, что профильное сопротивление тоже связано с квадратом скорости:

$$F_{xp} = \beta v^2\ .$$

Запишем теперь сумму этих двух видов сопротивления:

$$F_x = \frac{\alpha}{v^2} + \beta v^2\ .$$

Качественный вид этих зависимостей показан на рисунке 3,*а*. В частности, легко показать, что суммарное сопротивление достигает минимального значения, когда обе его составляющие равны друг другу, откуда

$$v = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\beta}}$$

и

$$F_{x\,\min} = 2\sqrt{\alpha\beta}\ .$$

Значит, если мы хотим пролететь как можно дальше, нужно обеспечить равенство профильного и индуктивного сопротивлений в течение всего полета. При этом нужна мощность двигателей

$$N\left(F_{x\,\min}\right) = 2\sqrt{\alpha\beta}\sqrt[4]{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Но, может быть, наша мощность ограничена? Тогда нужно постараться лететь с наименьшей мощностью. Следовательно, нужно найти минимум функции

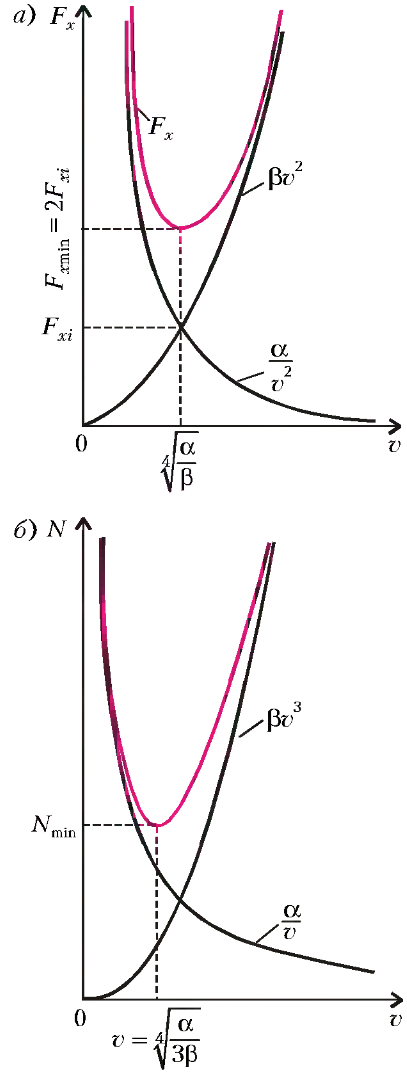


Рис. 3

$$N = F_x v = \frac{\alpha}{v} + \beta v^3$$

(рис.3,*б*). Можно показать, что ему соответствует скорость $v = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{3\beta}}$. При этом индуктивное сопротивление составляет уже не половину (как в первом случае), а три четверти от суммарного сопротивления. Подставив найденное значение скорости в формулу для N, получим

$$N_{\min} = \left(\sqrt[4]{3} + \frac{1}{\sqrt[4]{3^3}}\right)\sqrt{\alpha\beta}\sqrt[4]{\frac{\alpha}{\beta}}\ .$$

Отношение мощностей в двух рассмотренных случаях составит

$$\frac{N_{\min}}{N\left(F_{x\,\min}\right)} = \frac{3^{1/4} + 3^{-3/4}}{2} \approx 0,87\ .$$

По-видимому, эти 13% и небезразличны для птиц и двигателей.

Так что «думайте сами, решайте сами», как сказано в одной хорошей песне.

Дело – труба

В.ДРОЗДОВ

Как-то зимой я услышал в «Последних известиях» уже не удивляющее сообщение о лопнувших отопительных системах, что и послужило импульсом к написанию этой заметки.

Зададимся вопросом: реально ли создать стальную трубу, которая не лопнет при замерзании в ней воды? Заметим, что работники жилищно-коммунального хозяйства говорят почему-то наоборот: разморозить трубы. Видимо, таков их профессиональный термин.

Допустим, что вода в трубе все же замерзла. Физически ясно, что относительное линейное удлинение ε льда и трубы одно и то же. Поскольку плотность воды равна $\rho_в = 1000$ кг/м^3, а плотность льда составляет $\rho_л = 900$ кг/м^3 (при нормальном атмосферном давлении), то относительное увеличение объема льда будет равно $10/9 - 1 = 1/9$. Так как труба длинная и цилиндрическая, а расширение носит радиальный характер, то должно выполняться равенство

$$\frac{\pi(R+\Delta R)^2 - \pi R^2}{\pi R^2} = \frac{1}{9},$$

где R – радиус трубы, ΔR – его увеличение. Отсюда легко получаем

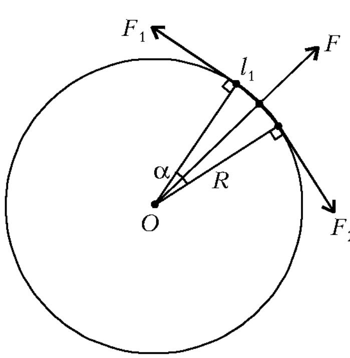
$$\varepsilon = \frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{18}.$$

Согласно закону Гука, возникшее при замерзании воды механическое напряжение в стальной стенке трубы равно

$$\sigma = \varepsilon E,$$

где $E = 200$ ГПа – модуль Юнга для стали. Получаем $\sigma = 11$ ГПа, что значительно больше, чем предел прочности стали на разрыв $\sigma_{пр} = 0,60$ ГПа. Следовательно, если уж вода в трубе замерзнет, то последняя неизбежно лопнет, что и подтверждается печальными «опытами». (Конечно, это только оценка по порядку величины, поскольку при расчетах не учитывались различные превходящие обстоятельства, например увеличение плотности льда по мере роста внешнего давления.)

Если же сделать трубу толстой, это ничего не даст даже в случае, когда трещины, в которые углубится лед, дойдут не до конца. Труба при этом утратит прочность и в следующий раз при замерзании воды непременно лопнет. Но самое главное, что толстая труба будет и дорогой, и тяжелой. Ну а расчет толстой трубы весьма сложен (он ближе к сопромату, чем к чистой физике). Рассчитать же тонкую трубу, толщина которой $h \ll R$, можно и в рамках школьного курса физики.



Свяжем величины R и h с давлением в трубе p и механическим напряжением в стенке трубы σ. Мысленно выделим малый участок трубы, опирающийся на достаточно малый центральный угол α (см. рисунок). Поскольку этот участок трубы находится в равновесии, сумма сил, действующих на него, равна нулю:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F} = 0.$$

Здесь $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ – силы, растягивающие выделенный участок трубы соседними участками, $\vec{F}$ – сила давления льда на участок. Проецируя векторное равенство на направление силы $\vec{F}$, получим

$$F_1\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) + F_2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) + F = 0. \qquad (*)$$

Из соображений симметрии следует, что $F_2 = F_1$. Если труба имеет длину l, то

$$F_2 = F_1 = \sigma h l,$$

а

$$F = pS,$$

где $S = ll_1$ – площадь рассматриваемого участка. Из формулы $(*)$ выводим последовательно

$$-2F_1\sin\frac{\alpha}{2} + F = 0,$$

$$-2\sigma hl\sin\frac{\alpha}{2} + pll_1 = 0,$$

$$-2\sigma h\sin\frac{\alpha}{2} + pR\alpha = 0.$$

При малых углах α (а α действительно можно представлять сколь угодно малым) справедливо приближенное равенство $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$. Следовательно,

$$\alpha(-\sigma h + pR) = 0,$$

откуда получаем

$$\frac{p}{\sigma} = \frac{h}{R}.$$

А теперь можно ответить вот на какой интересный вопрос: начиная с какой температуры возникает опасность разрушения трубы? Из справочника (см. «Справочник по физике» А.С.Еноховича, М.: Просвещение, 1990, с. 144) возьмем фрагмент таблицы «Температура плавления некоторых веществ при различном давлении p», относящийся ко льду:

t, °C	0	–1	–5	–10	–20
p, МПа	0,1	13	61	113	197

Примем, что трубу с отношением $h/R = 0,15$ еще можно считать тонкой. Тогда, полагая $\sigma = \sigma_{пр} = 0,60$ ГПа, получим $p = 90$ МПа. Это означает, что трубе грозит разрыв уже при переходе от –5 °C к –10 °C. Но трубы обычно быстро зашлаковываются, т.е. забиваются, если они не совсем новые, – ведь через них циркулирует отнюдь не дистиллированная вода. Учесть это количественно не представляется возможным, хотя ясно, что зашлакованная труба выдержит несколько больший мороз – поскольку воды в ней меньше. Реальная жизнь показывает, что переход от –10 °C к –20 °C для трубы с замерзающей водой «смертелен».

Так что не надо «размораживать» батареи!

Откуда течет энергия: открытие за открытием

Е.РОМИШЕВСКИЙ, А.СТАСЕНКО

Где только возможно, знание должно быть внедряемо в ум другого тем самым путем, каким оно было впервые открыто.

Бэкон

Рассмотрим самую что ни на есть простую электрическую цепь – батарейку, электроды которой замкнуты проводом, обладающим некоторым конечным сопротивлением (рис.1,*а*). Разумеется, в проводе будет течь постоянный электрический ток, и будет постоянно выделяться джоулево тепло. Тут еще (или уже) нет открытий. Чтобы их сделать, надо потрудиться. Поэтому вспомним основные свойства электромагнитного поля.

Самым «простым» полем иногда считается электрическое поле плоского конденсатора (рис.2,*а*). Поскольку оно пространственно однородно, то, протащив любой заряд $+q$ по замкнутому контуру $ABCDA$, мы получим нулевую работу. Действительно, на участке AB работа будет равна $-qE \cdot AB$ (поле сопротивляется перемещению заряда), на участке CD поле совершает работу $+qE \cdot CD = +qE \cdot AB$, а на участках BC и DA работа не совершается вовсе. В этом же можно убедиться и на примере точечного заряда (рис.2,*б*). И вообще, это свойство любого потенциального поля: работа поля по замкнутому контуру (или циркуляция поля) равна нулю. В качестве другого аналогичного примера может служить поле тяготения. Можно показать, что свойство потенциальности поля не зависит ни от формы контура, ни от направления его обхода – ноль он и в Африке ноль.

Однако, не так уж он прост, этот плоский конденсатор (поэтому выше эта его простота взята в кавычки). Ведь если мы захотим пройти по контуру $ABC'D'A$, то из потенциальности электростатического поля мы должны будем сделать заключение, что на внешнем участке контура $C'D'$ тоже должно быть поле, в точности компенсирующее нашу работу на участке AB. Поэтому, когда говорят о том, что поле плоского конденсатора однородно и локализовано внутри, часто произносят извиняющие слова типа «далеко от концов пластин», «расстояние между пластинами много меньше их линейных размеров» или даже «возьмем бесконечно большие пластины» (хотя это и очень нелегко).

Но мы можем извлечь из плоского конденсатора еще один полезный факт. Если, действительно, взять участок AB далеко от краев пластин, то замыкающий внешний участок контура $C'D'$ будет очень длинным и, значит, среднее значение напряженности поля вдоль него будет малым, а «в пределе», если пластины бесконечно велики, это значение будет стремиться к нулю. Отсюда получим другое важное утверждение: скачок нормальной (перпендикулярной) составляющей электростатического поля при прохождении заряженной плоскости (а это и есть пластина конденсатора)

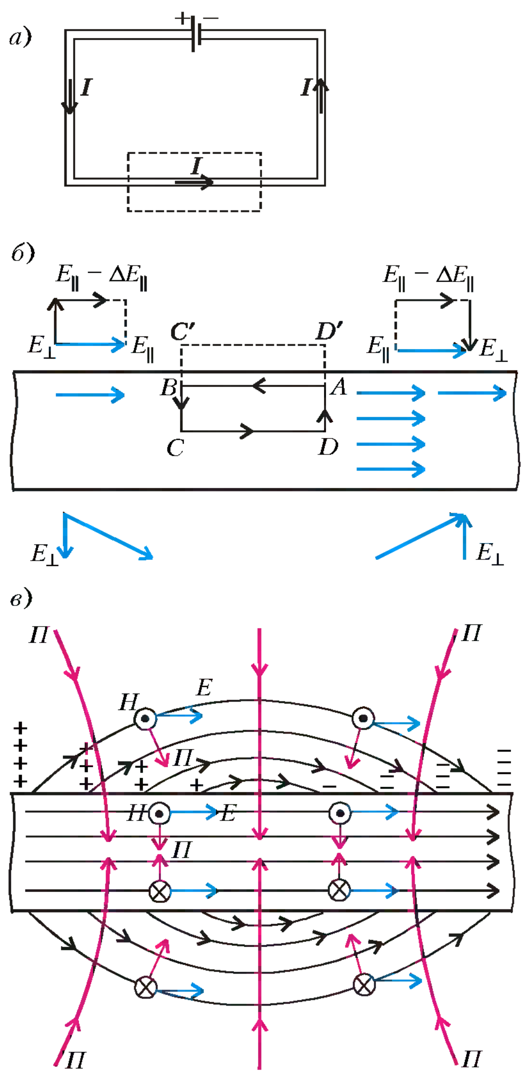


Рис. 1

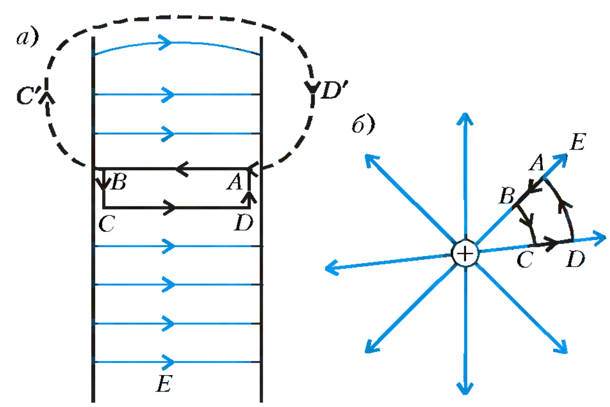


Рис. 2

(Продолжение см. на с. 34)

Если человек будет рассматривать буквы или другие мелкие предметы с помощью стекла или другого прозрачного тела, расположенного над буквами, и если это тело будет шаровым сегментом,.. то буквы видны лучше и кажутся больше...

Роджер Бэкон

Все это было открыто и наблюдено... при помощи изобретенной мной зрительной трубы по просвещающей милости божией.

Галилео Галилей

Мне хочется верить, что те, кто любят познавать причины явлений и умеют восхищаться чудесными явлениями света, найдут некоторое удовлетворение при ознакомлении... с новым объяснением его замечательнейшего свойства, составляющего главную основу устройства наших глаз и тех великих изобретений, которые столь расширяют возможность ими пользоваться.

Христиан Гюйгенс

Но предел возможностей микроскопа связан не с тем, что невозможно добиться увеличения более чем в 2000 раз. Можно построить систему линз, увеличивающую в 10000 раз, и все же не увидеть два пятнышка, расположенные близко одно к другому, и не увидим мы их из-за ограниченности возможностей геометрической оптики...

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакомы вам оптические приборы?

Многие столетия, стоящие за приведенными в эпиграфе высказываниями, наполнены непрерывными поисками способов улучшить наше зрение, вооружить глаз, расширить диапазон возможностей, предоставленных человеку Природой. Открытия и изобретения, совершенные на этом пути, позволили человеку заглянуть и в недоступный до поры до времени мир мельчайших живых существ, и в невообразимо далекие уголки Вселенной. Кроме того, многие достижения ученых перекочевали из лабораторий оптиков в медицинские кабинеты и кинотеатры, в жилые квартиры и на рабочие места. Очки и лупы, фотоаппараты и увеличители, оптические зонды и бинокли прочно вошли в обиход.

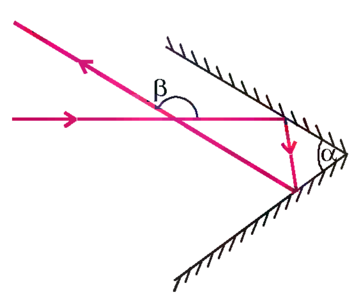
Не раз казалось, что предел совершенствования оптических приборов уже достигнут – либо не хватало технических средств для воплощения дерзких идей, либо наука накладывала на дальнейшее продвижение жесткие запреты. Однако всякий раз сама же наука и обнаруживала выходы на новые рубежи, и наши приборы становились еще более «остроглазыми».

А чтобы разобраться, как действует современная «умная» оптика, прежде стоит обратиться к внешне нехитрым устройствам – в них также кроется немало неожиданного. И вы, например, узнаете, как применяются оптические законы в отражателях на вашем велосипеде, или обнаружите, что обычный театральный бинокль – это комбинация из двух небольших труб Галилея.

Вопросы и задачи

1. Зачем у диапозитивов, помещаемых в проекционный аппарат, необходимо предварительно определить верх и низ кадра, его правую и левую стороны?

2. Два плоских зеркала образуют угол α. Найдите угол отклонения светового луча β. Зависит ли он от угла падения луча на первое зеркало?



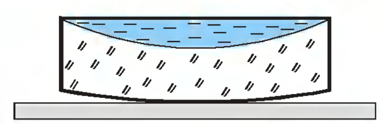
3. Можно ли наблюдать солнечное затмение, располагая лишь плотным листом бумаги и карандашом?

4. Почему при использовании лупы глаз лучше располагать как можно ближе к ней?

5. Верно ли утверждение, что лупа приближает к глазу рассматриваемый предмет?

6. Какие очки следует прописать человеку, если в воде он видит нормально?

7. В выпукло-вогнутую линзу, лежащую на горизонтальном столе, налили воду. Изменилась ли при этом оптическая сила линзы?



8. Может ли находящаяся в воздухе двояковыпуклая стеклянная линза рассеивать падающий на нее параллельный пучок лучей?

9. Что представляет собой заключенная в трубку оптическая система, которая увеличивает предметы, находящиеся у одного ее конца, и уменьшает предметы, расположенные у другого?

10. Можно ли создать такую систему зеркал и призм (или линз), через которую один наблюдатель видел бы второго, а второй не видел бы первого?

11. После съемки человека фотограф перевел камеру аппарата на облака. Куда ему следует передвинуть объектив, если используется аппарат с ручной наводкой на резкость?

12. Как отличить на фотографии реальный пейзаж от его отражения в спокойной воде?

13. На представленных американскими астронавтами фотографиях лунных экспедиций на черном небе не было видно звезд. Может ли это вызвать подозрение в мистификации – что полета не было, а съемки проводились в земном павильоне?

14. Почему при наблюдении в телескоп яркие звезды видны даже днем?

15. Во время полнолуния большие темные пятна на Луне видны в верхней части ее диска. Отчего же на картах Луны эти пятна расположены в нижней ее части?

16. У вас есть три пары собирающих линз с фокусными расстояниями по 2 см, 10 см и 100 см. Какие две линзы вы выбрали бы для телескопа и какие две – для микроскопа?

17. Можно ли изображение, даваемое микроскопом или телескопом, получить на экране?

Микроопыт

Установите настольную лампу (не матовую) на расстоянии около двух метров от экрана из белой бумаги. Проделайте иглой отверстие в центре кусочка фольги (например, от шоколадки) и расположите фольгу между лампой и экраном так, чтобы изображение нити накала было видно на экране. Как в этом опыте найти расстояние между витками спирали?

Любопытно, что...

... свойство двугранного зеркала, описанное в задаче 2, используется в секстанте – навигационном приборе, позволяющем измерять высоту светила над горизонтом даже на качающейся палубе корабля.

... три взаимно перпендикулярных зеркала (или срезанный угол стеклянного кубика) отражают обратно падающий луч при произвольной его ориентации. Это устройство, называемое уголковым отражателем или катафотом, активно применяется в дорожном движении, а также было использовано для точного измерения расстояния до Луны с помощью лазерного луча.

... увеличительные стекла были довольно широко распространены уже в XIII веке. Достоверно известно, что ими в своих опытах пользовался Р. Бэкон и даже подарил одно стекло своему покровителю папе Клименту IV.

... до появления телескопов в качестве астрономического прибора использовалась камера-обскура. Так, в 1600 году к ней прибегнул Кеплер для наблюдения солнечного затмения.

... Галилей сумел построить зрительную трубу, но не разобрал теорию ее действия. Кеплер же, подробно описав свою трубу с двумя двояковыпуклыми линзами, не имел достаточных средств для ее сооружения.

... несмотря на активное применение оптических приборов, формирование ими образа не всегда было понятно как их создателям, так и пользователям. Например, правильное описание процесса создания изображения в микроскопе впервые было проведено лишь в 1872 году немецким физиком Э. Аббе.

... наибольшей из линз, когда-либо использованных для объектива телескопа, является линза диаметром в один метр (созданная в конце XIX века), а зеркала современных телескопов-рефлекторов достигают десяти метров в диаметре. Такие зеркала оснащаются системой специальных механических «пальцев», способных изменять их форму сто раз в секунду – для устранения атмосферного дрожания изображений.

... калейдоскоп, более известный как игрушка, а не как оптический прибор, имеет и практическое применение – для составления рисунков на тканях, обоях и театральных декорациях. Кроме того, лежащий в основе его устройства принцип играет важную роль в геометрии, теории чисел, топологии и других разделах математики.

... еще до недавнего времени считалось, что минимальный размер различимого оптическими приборами объекта ограничивается дифракцией излучения и измеряется долями микрометра. Однако конец XX века ознаменовался преодолением этого предела, благодаря изобретению сканирующего оптического микроскопа, способного регистрировать отдельные крупные молекулы.

Что читать в «Кванте» об оптических приборах

(*публикации последних лет*)

1. «Волшебная линза» – 1999, № 1, с. 44; 2002, Приложение № 4, с. 108;
2. «Камера-обскура» – 1999, № 2, с. 12;
3. «Капельки росы, стеклянные шарики и микроскоп Левенгука» – 1999, № 5, 4-я с. обл.; 2002, Приложение № 4, с. 112;
4. «Что думали о дальнозоркости две тысячи лет назад» – 1999, № 6, с. 23;
5. «Геометрическая оптика» – 1999, Приложение, № 6, с. 31;
6. «Оптика без оптики» – 1999, Приложение № 6, с. 41;
7. «Эрнст Аббе и «Карл Цейс Йена» – 2000, № 1, с. 17;
8. «Пределы зоркости приборов» – 2000, № 3, с. 39;
9. Калейдоскоп «Кванта» – 2001, № 5, с. 32;
10. «Оптические задачи на вступительных экзаменах» – 2002, № 6, с. 29;
11. «Принцип Ферма» – 2003, № 4, с. 39;
12. «Отражение и преломление света» – 2003, № 5, с. 38.

Материал подготовил
А.Леонович

(Начало см. на с. 31)

пропорционален поверхностной плотности заряда σ:

$$E_{\text{снаружи}} - E_{\text{внутри}} \sim \sigma .$$

Все это нам немедленно пригодится. Рассмотрим увеличенный отрезок провода (рис.1,*б*). Поскольку ток течет параллельно оси, электрическое поле внутри провода тоже параллельно оси. Плотность тока $\vec{j}$ связана с напряженностью поля $\vec{E}$ в любой точке локальным законом Ома $\vec{j} = \lambda\vec{E}$, где λ – удельная электропроводность материала. Если мы пройдемся вдоль контура *ABCDA* внутри провода, то, опять же из условия равенства циркуляции поля нулю, сделаем вывод о том, что вдоль *CD* и *BA* поле $\vec{E}$ должно быть одинаково. Значит, ток тоже равномерно распределен по сечению проводника, т.е. $\vec{j} = \text{const}$, так что $I = j\pi a^2$ (где a – радиус поперечного сечения провода). Но по той же причине, пройдясь вдоль контура $ABC'D'A$, мы заключим, что продольная составляющая электрического поля $E_{\parallel}$ вдоль отрезка $C'D'$, лежащего вне провода, должна быть такой же, как и внутри провода. Получается, что снаружи провода есть электрическое поле. (Чем не открытие?!)

Далее, интуитивно ясно, что с удалением от провода напряженность поля будет уменьшаться. Но ведь его циркуляция по любому контуру должна оставаться нулевой. Как это себе представить? Очень просто: это означает, что вне провода существует и перпендикулярная (радиальная) составляющая $E_{\perp}$, направленная либо вверх, либо вниз, но в любом случае «помогающая» более слабому полю $E_{\parallel} - \Delta E_{\parallel}$ (более удаленному от провода) компенсировать вклад в циркуляцию более сильного поля $E_{\parallel}$. Таким образом, получается, что вне провода линии электрического поля $\vec{E}$, вообще говоря, наклонены к его оси. В результате получится картина, представленная на рисунке 1,*в*.

Но чтó это? Внутри провода поле $\vec{E}$ строго параллельно оси, следовательно, не имеет радиальной составляющей, а снаружи есть составляющая, перпендикулярная поверхности провода. Значит, существует скачок нормальной составляющей электрического поля при переходе через поверхность провода. А это означает, что существуют поверхностные заряды. В целом провод, конечно, нейтрален: ведь батарейка не может создать электрический заряд, а может только перераспределить его.

Но что это мы все об электрическом поле? А магнитное? Ведь если течет ток, то вокруг него образуется кольцевое магнитное поле. Как вы знаете, силовой характеристикой магнитного поля является его индукция $\vec{B}$. Но, по аналогии с электрическим полем, наряду с индукцией говорят и о напряженности магнитного поля $\vec{H}$. Для вакуума связь между этими характеристиками предельно проста: $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$, где μ_0 – магнитная постоянная. Напряженность магнитного поля удовлетворяет своему закону: циркуляция по замкнутому контуру равна току, охватываемому этим контуром (рис. 3,*а*):

$$H \cdot 2\pi r = I .$$

Отсюда видна, во-первых, размерность магнитной напряженности: $[H]$ = А/м. Во-вторых, видно, что значение индукции вне провода убывает с расстоянием от провода:

$$H \sim \frac{1}{r} \text{ при } r > a.$$

В-третьих, если мы возьмем контур внутри провода ($r < a$), то должны записать

$$H \cdot 2\pi r = j \cdot \pi r^2$$

(справа как раз и стоит ток, протекающий через площадку πr^2, – вспомним, что j = const). Отсюда

$$H \sim r \text{ при } r < a.$$

В результате получим радиальное распределение окружной составляющей магнитного поля, изображенное на рисунке 3,*б*.

Важно, что в любой точке пространства (внутри и вне провода) поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно перпендикулярны.

Итак, мы знаем уже достаточно много, чтобы приступить к Основному Открытию.

Что получится, если векторно перемножить напряженности обоих полей – электрического и магнитного? Получим новую физическую величину, размерность которой есть

$$[EH] = \frac{\text{В}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2} .$$

Но ведь это размерность плотности потока энергии! (Вспомним, что плотность тока, равная плотности потока заряда, имеет размерность $[j] = \frac{\text{Кл}}{\text{с} \cdot \text{м}^2}$, плотность потока массы имеет размерность $\frac{\text{кг}}{\text{с} \cdot \text{м}^2}$ и т.д.) Исторически эта величина называется вектором Умова-Пойнтинга $\vec{\Pi}$. Но если это вектор, то куда он направлен? Конечно, перпендикулярно обоим векторам $\vec{E}$ и $\vec{H}$ (а не вдоль одного из них – чтобы другому не было обидно). Причем так, что векторы $\vec{E}$, $\vec{H}$ и $\vec{\Pi}$ образуют правую тройку, как оси *x*, *y* и *z*. (Это очень похоже и на расположение векторов в электромагнитной волне, которая потому и называется поперечной, что $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в ней перпендикулярны направлению ее распространения, т.е. тому направлению, в котором течет энергия волны.) Взаимное расположение этих векторов и их векторные линии качественно изображены на рисунке 1,*в*.

Заметим, что внутри провода вектор $\vec{\Pi}$ направлен строго к оси, поскольку там поле $\vec{E}$ параллельно оси. Кроме того, на оси его величина равна нулю, поскольку в произведение входит множитель *H*, обращающийся в ноль на оси (см. рис.3,*б*).

Что же получается? Плотность потока энергии во всем пространстве течет к проводу, а затем направляется кратчайшим путем к его оси, погибая на расстоянии, равном его радиусу? Но энергия не может бесследно исчезнуть. И

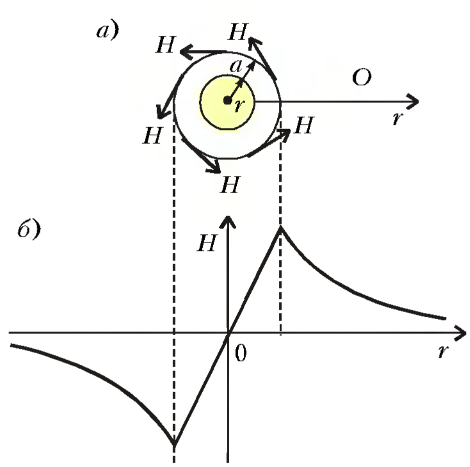


Рис. 3

действительно, она просто превращается в другой вид – тепло. Это и есть джоулевы потери.

Возьмем участок провода длиной l, на концах которого разность потенциалов равна U. Поскольку у поверхности провода напряженности магнитного и электрического полей равны, соответственно,

$$H_a = \frac{I}{2\pi a} \text{ и } E_a = \frac{U}{l},$$

то плотность потока энергии через поверхность площадью $2\pi al$ внутрь провода равна

$$H_a E_a \cdot 2\pi al = IU .$$

Если еще учесть, что $I = U/R$ (где R – сопротивление этого участка провода), то правую часть последнего равенства можно записать и в виде

$$I^2 R \text{ или } \frac{U^2}{R}.$$

Все эти формулы для тепловой мощности хорошо знакомы каждому здравомыслящему школьнику. Это еще раз убеждает, что «все в порядке».

А откуда же берется этот поток энергии во всем пространстве? Иные студенты отвечают в духе модных оккультистов: из Космоса. Ну и замечательно, тогда не нужны ветряные мельницы, двигатели внутреннего сгорания, электростанции – в Космосе энергии сколько угодно. А иные считают, что энергия от источника к потребителю течет внутри провода вдоль его оси. Для них описанная картина полей и потока энергии действительно может служить полезным открытием.

И последнее открытие. Если энергия электромагнитного поля погибает в проводе, превращаясь в тепло, то зачем нужны провода? Долой их?! И не нужны миллионы тонн меди и алюминия, и нет никаких потерь?!

Увы, это открытие не состоится. Действительно, пространственная структура электрического и магнитного полей такова, как мы изобразили. Действительно, энергия течет извне и «пропадает» внутри провода. Но ее линии тока идут, конечно, из той батарейки, которая гонит электрический ток (попробуйте изобразить это самостоятельно). И провода нужны как раз для того, чтобы создать именно такое распределение плотности потока энергии в пространстве. А тепловые потери – это плата за передачу энергии.

Кстати, чтó если мы разделим произведение EH на скорость света? Получится новая величина с размерностью $\text{Дж}/\text{м}^3$. Естественно назвать ее объемной плотностью энергии (вспомним о массовой плотности, размерность которой $\text{кг}/\text{м}^3$). Выходит, вектор Умова-Пойнтинга указывает, куда и с какой скоростью перемещается плотность энергии.

И еще. Чтó если в нашу схему (см. рис. 1,*а*) вставить ключ и замкнуть его в некоторый начальный момент? Тогда потечет переменный ток, и мы перейдем от электромагнитостатики к электромагнитной динамике. А это уже другой разговор, который можно продолжить на физическом факультете МГУ или в Московском физико-техническом институте. Чего вам и желаем!

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Великое уравнение механики

А.СТАСЕНКО

Теоретическая физика стремится к тому, чтобы все процессы описать единым уравнением. Пока что это мечта, поэтому физика до сих пор расчленена на отдельные области – механика, термодинамика, электромагнетизм... Но и в каждой из этих областей сделано очень много для того, чтобы наименьшим числом уравнений описать как можно более широкий класс явлений.

Например, если спросить школьника, какое уравнение в механике представляется ему наиболее общим, он скорее всего ответит:

$$m\vec{a} = \vec{F}, \text{ или } m\Delta\vec{v} = \vec{F}\Delta t . \qquad (1)$$

Это верно, но только для тел постоянной массы. А если мы хотим описать, скажем, движение капли, которая сталкивается и сливается с другими каплями в облаке, или ракеты, которая постоянно отбрасывает часть своей массы? Как в этих случаях должно выглядеть уравнение поступательного движения тела? (Под «телом» разумеем материальную точку, не интересуясь его возможным вращением.)

Рассмотрим каплю, падающую в воздухе под действием силы тяготения и сталкивающуюся с другими каплями (рис.1). Пусть эти столкновения абсолютно неупругие (в результате чего происходит слияние капель). Предположим, что капля, которую мы наблюдаем, крупнее других и опускается с большей скоростью. В некоторый момент времени t масса отмеченной нами капли равна m, скорость v, а все остальные капельки пусть имеют одинаковую массу m_1 и скорость падения v_1. Что случится через небольшой отрезок времени Δt?

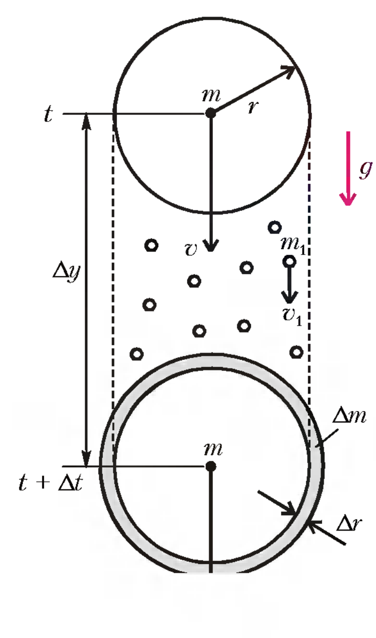


Рис. 1

Масса нашей капли увеличится и станет равной $m + \Delta m$, где Δm – масса всех прилипших к ней капелек, а скорость тоже изменится и станет равной $v + \Delta v$ (поскольку, по предположению, скорости мелких капелек отличаются от скорости выделенной нами капли). Как тут не вспомнить о мысленном эксперименте, при помощи которого было доказано (Г.Галилей), что в вакууме все тела должны падать с одинаковым ускорением. Предположим противное – например, что тяжелое тело падает с большим ускорением, чем легкое. Соединим их вместе. Тогда, с одной стороны, легкое тело должно притормозить тяжелое, и значение ускорения этого нового тела должно лежать где-то между значениями ускорений двух первоначальных тел; с другой стороны, это новое тело ведь тяжелее тяжелого, и оно, по предположению, должно падать с еще большим ускорением. Это противоречие показывает ложность принятой посылки.

Но вернемся к нашим каплям. Помимо изменения импульса выделенной нами капли за счет прилипания к ней микрокапелек, в течение временнóго промежутка Δt на нее действуют внешние силы – сила тяготения $m\vec{g}$ и сила сопротивления воздуха $\vec{F}_с$, которые действовали бы и в отсутствие остальных капелек. Теперь нам осталось записать важную идею – изменение импульса системы равно импульсу внешних сил:

$$(m+\Delta m)(\vec{v}+\Delta\vec{v})-(m\vec{v}+\Delta m\vec{v}_1)=\left(m\vec{g}+\vec{F}_с\right)\Delta t.$$

Раскроем скобки в левой части уравнения:

$$\underline{m\vec{v}}+\Delta m\vec{v}+m\Delta\vec{v}+\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\Delta m\Delta\vec{v}}-\underline{m\vec{v}}-\Delta m\vec{v}_1\approx m\Delta\vec{v}+\Delta m\left(\vec{v}-\vec{v}_1\right).$$

Видно, что слагаемые основного порядка ($m\vec{v}$) взаимно уничтожились и остались слагаемые первого порядка малости, а вторым порядком малости мы пренебрегли, потому что произведение малых величин ($\Delta m\Delta\vec{v}$) – совсем уж малая величина. Следовательно, уравнение движения капли можно записать в виде

$$m\Delta\vec{v}=\left(m\vec{g}+\vec{F}_с\right)\Delta t+\Delta m\left(\vec{v}_1-\vec{v}\right). \qquad (2)$$

Конечно, в правой части этого уравнения можно учесть и электростатическую силу $\vec{F}_э=q\vec{E}$ (если капля имеет заряд q, а электрическое поле в данной точке облака имеет напряженность $\vec{E}$), и силу Лоренца $\vec{F}_Л=q\left[\vec{v}\times\vec{B}\right]$ (если учесть влияние локального магнитного поля $\vec{B}$), и... Но можно сумму всех действующих сил обозначить через $\vec{F}$ и написать в общем случае

$$\boxed{m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\vec{F}+\frac{\Delta m}{\Delta t}\left(\vec{v}_1-\vec{v}\right)}. \qquad (3)$$

Чего же мы добились при помощи этих рассуждений? Просто, в правой части появилось дополнительное слагаемое (по сравнению с (1)), описывающее более общий случай переменной массы тела. Может быть, какой-нибудь Навсеспособныйстудент скажет, что это уравнение получается и без столь долгих размышлений? Что ж, поздравим его. Но как бы то ни было, это уравнение открывает столько возможностей для исследователя, что впору назвать его великим и даже взять в рамку.

Продемонстрируем его возможности на нескольких простых примерах.

1. Сначала потренируемся на «обычном» случае, когда масса капли не изменяется. Силу сопротивления можно записать в виде

$$\vec{F}_с=-\alpha r\vec{v}-\beta r^2 v\vec{v}. \qquad (4)$$

Первое слагаемое в правой части – так называемая сила Стокса, порождаемая вязкостью окружающей среды. Как видно, эта сила пропорциональна скорости $\vec{v}$ и радиусу капли r. Она возникает только при медленном (ползущем) движении в очень вязкой среде. Второе слагаемое – аэродинамическая сила лобового сопротивления, пропорциональная площади сечения и квадрату скорости. Понятно, что с ростом скорости эта сила становится превалирующей, а с уменьшением скорости она стремится к нулю быстрее, чем первая, которая и выступает при этом как основная (рис. 2,*а*).

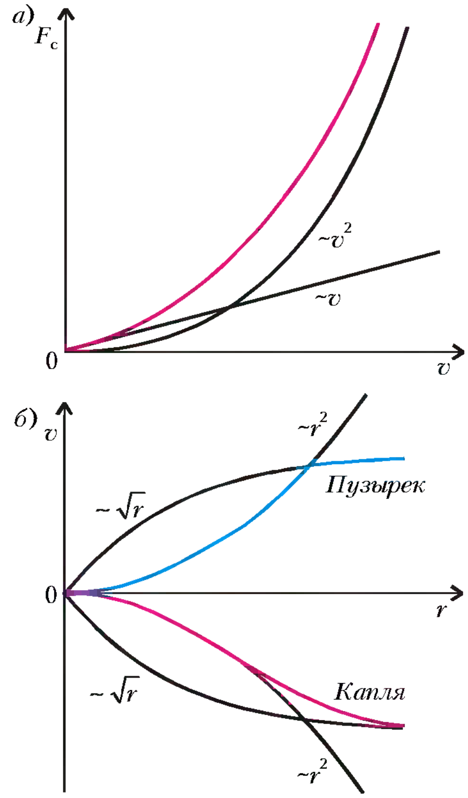


Рис. 2

Найдем скорость установившегося падения отдельной капли в воздухе (других капель нет). Уравнение (2) при этом «звучит» совсем просто: сила тяжести капли (плотностью $\rho_к$) уравновешивается силой сопротивления:

$$\frac{4}{3}\pi\rho_к r^3 g=\alpha rv+\beta r^2 v^2. \qquad (5)$$

Это – квадратное уравнение для v, которое нетрудно решить. Но еще проще рассмотреть два частных случая:

а) малые скорости, когда вторым слагаемым справа можно пренебречь, при этом $v\sim r^2$;

б) большие скорости, когда второе слагаемое справа становится превалирующим, при этом $v\sim\sqrt{r}$.

Видно, что большие капли падают с большей скоростью, чем мелкие (рис.2,*б*; красная линия).

Если вместо капли в воздухе рассмотреть пузырек газа в жидкости, то в левой части уравнения нужно учесть силу Архимеда, т.е. вместо $\rho_к$ написать $-\rho_ж\left(1-\rho_г/\rho_ж\right)$. Тогда изменятся знаки скорости (пузырек всплывает вверх) и силы сопротивления (она действует вниз), но прежним остается тот факт, что большие пузырьки будут обгонять мелкие. В этом легко убедиться, открыв бутылку газированной воды.

2. Пусть капля начинает падать в облаке мелких капелек массой m_1 каждая, концентрация которых равна n_1 и которые «висят» почти неподвижно ($v_1 = 0$). Слова «начинает падать» означают, что в течение некоторого времени скорость капли столь мала, что силой сопротивления воздуха можно пренебречь (поскольку эта сила монотонно растет со скоростью движения, см. (4)). Тогда уравнение (2) в проекциях на вертикальную ось можно записать в виде

$$m\Delta v + \Delta m v = \Delta(mv) = mg\Delta t\ . \qquad (6)$$

А как изменяется масса падающей капли? За отрезок времени Δt , пройдя путь $v\Delta t$, она «заметает» объем $\Delta V = \pi r^2 v\Delta t$, в котором находилось $n_1\Delta V$ микрокапелек, теперь прилипших к интересующей нас капле. Значит, приращение массы капли равно

$$\Delta m = m_1 n_1 \pi r^2 v\Delta t\ .$$

С другой стороны,

$$\Delta m = \rho_к \Delta\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \rho_к \cdot 4\pi r^2 \Delta r.$$

Тут видно, что прибывшая масса «размазалась» в тонком слое толщиной Δr и площадью $4\pi r^2$. Из последних двух уравнений получим, что радиус капли растет пропорционально пройденному пути (см. рис. 1):

$$\Delta r \sim v\Delta t = \Delta y\ , \text{ или } r \sim y$$

(если принять, что начальный радиус мал). Значит, масса капли увеличивается пропорционально третьей степени пройденного пути:

$$m \sim y^3\ .$$

Подставив это выражение в уравнение (6), получим

$$y^3 g = \frac{\Delta\left(y^3 v\right)}{\Delta t}\ .$$

Конечно, любой студент МФТИ или МГУ решит это уравнение стандартными методами. Но давайте предположим, что растущая капля падает с постоянным ускорением a. Тогда $v = at,\ y = at^2/2$ и последнее уравнение примет вид

$$t^6 g = \frac{\Delta\left(at^7\right)}{\Delta t} = 7at^6,$$

откуда

$$a = \frac{g}{7} = 1{,}4\ \ \text{м}/\text{с}^2.$$

Очень любопытный факт.

3. Вернемся к «великому» уравнению (3). Пусть теперь масса Δm не прилипает к нашему объекту, а наоборот отбрасывается им с относительной скоростью $v_1 - v = u$, следовательно, масса объекта m убывает. Обозначим эту убыль (расход массы) положительной величиной $\mu = -\dfrac{\Delta m}{\Delta t}$. И пусть внешних сил нет ($F = 0$). Тогда уравнение (3) примет вид

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = \mu u. \qquad (7)$$

Понятно, что в рассматриваемом случае речь идет, например, о ракете вдали от гравитирующих тел и их атмосфер. А правая часть уравнения есть сила тяги ракеты.

Если расход массы μ постоянен, то масса ракеты убывает линейно: $m = m_0 - \mu t$, где m_0 – ее начальное значение (рис. 3). Значит, ускорение ракеты равно

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mu}{m_0 - \mu t}u.$$

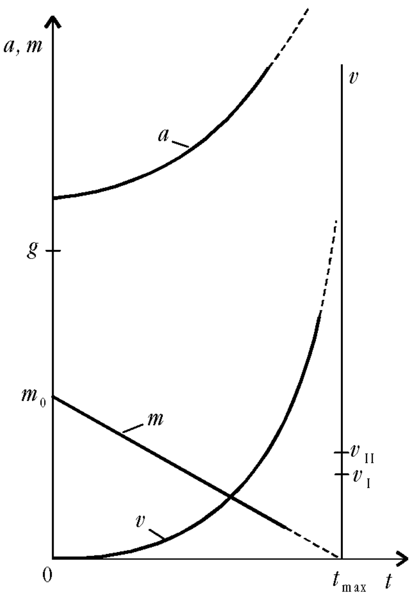


Рис. 3

Отсюда видно, что ускорение ракеты стремится к бесконечно большому значению, когда время стремится к ограниченной величине $t_{max} = m_0/\mu$. В этот момент времени «сгорит все». Можно показать, что и скорость в этот момент времени достигает бесконечно большой величины.

Эти факты и привели К.Э.Циолковского к мысли о том, что только при помощи ракеты можно достичь и первой v_I и второй v_{II} космических скоростей. Кстати сказать, Циолковский первым решил уравнение (7) при постоянном значении u и получил формулу

$$\frac{v}{u} = \ln\frac{m_0}{m_0 - \mu t},$$

которая носит его имя.

Итак, рассмотренные примеры показали, что «великое» уравнение механики (3) существенно более информативно, чем уравнение (1), поскольку позволяет описать случай движения тел переменной массы. Конечно, при этом оно включает в себя и все случаи, которые описывает уравнение (1). Значит, оно ближе к Абсолютной Истине, или к Единому Уравнению Всего, которое когда-нибудь, возможно, напишут физики.

И тут уместно немного пофилософствовать и вспомнить, что́ в науке считается критерием истины. Перечислим лишь некоторые из этих критериев, связанные с именами великих ученых.

• Критерий экономичности и простоты (Исаак Ньютон, Эрнст Мах): истинна наиболее простая теория, легко понимаемая и экономящая время при ее использовании.

• Критерий красоты (Анри Пуанкаре, Поль Дирак).

• Критерий предсказательности новых фактов и явлений.

• Критерий соответствия принципу дополнительности (Нильс Бор): новая теория должна в качестве частного случая включать старую.

• Критерий соответствия экспериментальным фактам (хотя набор последних всегда ограничен и содержит ошибку эксперимента) (Галилео Галилей, Роджер Бэкон).

Несомненно, что уравнение (3) механики материальной точки переменной массы соответствует всем этим критериям, поэтому и названо здесь «великим».

Отражение и преломление света

В.МОЖАЕВ

При обсуждении вопросов распространения, отражения и преломления света мы будем оставаться в рамках геометрической оптики, которая оперирует понятием отдельных световых лучей, указывающих направление распространения света, и узких световых пучков. Опытным путем были установлены четыре основных закона геометрической оптики.

1) Закон прямолинейного распространения света: в однородной среде свет распространяется по прямым линиям.

2) Закон независимости действия световых пучков: отдельные пучки света не влияют друг на друга и распространяются независимо.

3) Закон отражения света от зеркальной поверхности: луч падающий, нормаль к отражающей поверхности и луч отраженный лежат в одной плоскости, причем углы между падающим или отраженным лучом и нормалью (угол падения и угол отражения) равны между собой.

4) Закон преломления света: луч падающий и луч преломленный лежат в одной плоскости с нормалью к границе раздела двух сред, а угол падения α и угол преломления β связаны соотношением

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{n_2}{n_1},$$

где n_1 и n_2 – показатели преломления соответствующих граничащих сред.

А теперь перейдем к рассмотрению конкретных задач.

Задача 1. *Плоскопараллельная стеклянная пластинка толщиной $h = 3$ мм рассматривается в микроскоп. Сначала микроскоп устанавливают для наблюдения верхней поверхности пластинки, а затем смещают тубус микроскопа вниз для отчетливого наблюдения нижней поверхности пластинки. Смещение тубуса $d = 2$ мм. Определите показатель преломления пластинки.*

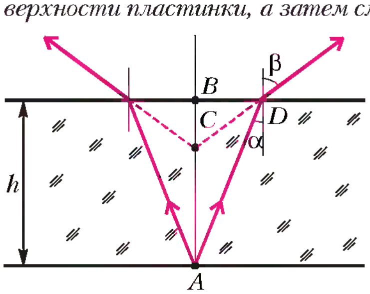


Рис. 1

На рисунке 1 показан ход лучей от точки A, принадлежащей нижней поверхности пластинки, к наблюдателю. Ее мнимое изображение будет находиться в точке C (для наблюдения сверху). Очевидно, что при изменении настройки микроскопа с верхней поверхности пластины (точка B) на нижнюю (точка A) тубус микроскопа необходимо передвинуть вниз на величину $d = BC$. Из треугольников ABD и CBD получаем

$$\frac{BC}{AB}=\frac{d}{h}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\approx\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{1}{n}.$$

Отсюда находим показатель преломления пластинки:

$$n=\frac{h}{d}=1{,}5.$$

Задача 2. *С каким углом α нужно взять стеклянный трапецеидальный сосуд с водой $ABCD$ (рис.2), чтобы сквозь его боковую стенку не было видно предмета, расположенного под дном сосуда? Показатель преломления воды $n = 1{,}33$. Дно сосуда имеет форму прямоугольника.*

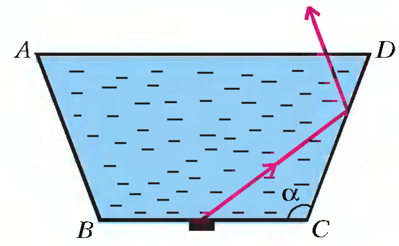


Рис. 2

От каждой точки на верхней поверхности предмета световые лучи будут падать на дно сосуда под углами от $\pi/2$ до $-\pi/2$. На рисунке 3 изображены лучи только с углами падения от 0 до $\pi/2$. На границе с водой будет происходить преломление лучей. Для луча, падающего на придонную поверхность воды под углом $\pi/2$, угол преломления β будет равен $\arcsin(1/n)$, а все преломленные лучи будут располагаться в интервале от 0 до β. Крайний луч с углом преломления β будет падать на боковую поверхность сосуда под углом $\gamma=\alpha-\beta$, а все остальные преломленные лучи будут составлять с боковой поверхностью сосуда бóльшие углы. Поэтому если этот крайний луч будет испытывать полное внутреннее отражение, то остальные лучи – тем более. Запишем условие полного внутреннего отражения крайнего луча:

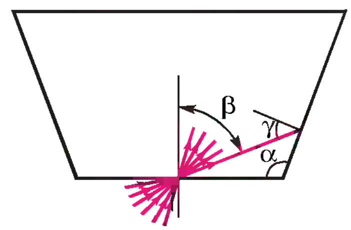


Рис. 3

$$\sin\gamma=\frac{1}{n},\ \text{или}\ \sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{n}.$$

Отсюда получим

$$\alpha\geq\arcsin\frac{1}{n}+\beta=2\arcsin\frac{1}{n}\approx 98^\circ.$$

Задача 3. *Луч света падает на плоскопараллельную пластинку толщиной $H = 1$ см из стекла с показателем преломления $n = 1{,}41$ (рис.4). Из-за многократных отражений от граней пластинки на экране Э образуется ряд световых пятен. Найдите расстояние между соседними пятнами, если угол падения равен $\alpha = 45^\circ$ и падающий луч параллелен плоскости экрана. Плоскость падения луча совпадает с плоскостью рисунка.*

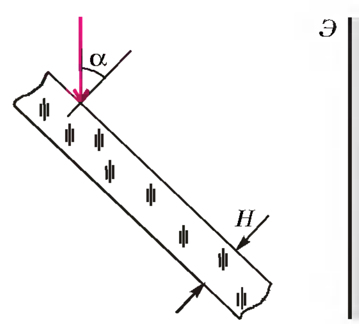


Рис. 4

На рисунке 5 показаны многократные отражения падающего луча от граней пластинки. Угол падения входного луча $\alpha = 45^\circ$, а

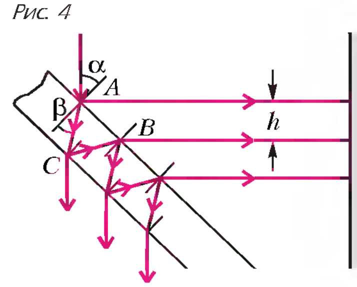


Рис. 5

преломленный угол β можно найти из закона преломления света:

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}.$$

Из треугольника ABC выразим сторону AB:

$$AB = 2H\,\mathrm{tg}\,\beta.$$

Расстояние h между двумя соседними лучами (между соседними пятнами на экране) равно

$$h = AB\sin\alpha = 2H\,\mathrm{tg}\,\beta\sin\alpha = 2H\frac{\sin^2\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} \approx 0{,}82 \text{ см}.$$

Задача 4. *Стеклянный трапецеидальный сосуд (рис.6) с малым углом $\alpha = 6^\circ$ заполнен водой с показателем преломления $n = 1{,}33$. На сосуд падает параллельный пучок света. За сосудом расположена собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 50$ см. На экране, расположенном в фокальной плоскости линзы, наблюдается светлая точка. На сколько сместится эта точка на экране, если убрать сосуд?*

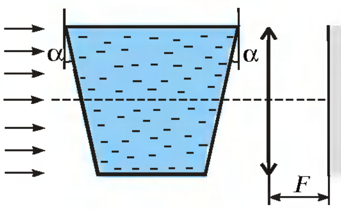


Рис. 6

Указание: для малых углов $\sin\alpha \approx \alpha$.

Решим задачу двумя способами. В первом способе мы рассмотрим ход одного из лучей через сосуд с водой и, используя закон преломления света, найдем угол отклонения выходного луча по отношению к входному. А во втором способе используем понятие волнового фронта и найдем поворот волнового фронта на выходе из сосуда.

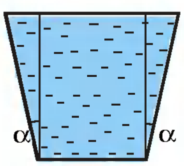


Рис. 7

Сначала разберем первый способ. Наш сосуд с трапецеидальной формой сечения будем рассматривать как два клина с углами при вершине α и сосуд с прямоугольным сечением (рис.7). На рисунке 8 показан ход произвольного луча через клин. Сразу отметим, что все углы малы, поэтому

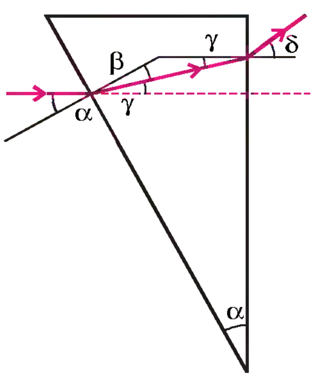


Рис. 8

$$\beta = \frac{\alpha}{n},$$

$$\gamma = \alpha - \beta = \frac{\alpha(n-1)}{n},$$

$$\delta = n\gamma = \alpha(n-1).$$

Итак, мы получили, что любой луч, пройдя призму с углом при вершине α, отклоняется от горизонтали на угол δ. Затем луч проходит сосуд с прямоугольным сечением. Такой сосуд ведет себя как плоскопараллельная пластинка, т.е. выходящий из пластинки луч остается параллельным входящему лучу. Значит, и после прохождения прямоугольного сосуда выходящий луч будет отклонен от горизонтали на тот же угол δ. Пройдя вторую призму, угол отклонения луча от горизонтали увеличится в два раза и станет равным $2\alpha(n-1)$. Следовательно, на линзу будет падать параллельный пучок света под углом $2\alpha(n-1)$ к горизонту. На экране будет наблюдаться светящаяся точка, расположенная выше центра экрана на $h = 2\alpha(n-1)F$. Если убрать сосуд с водой, то светящаяся точка попадет в центр экрана. Поэтому точка сместится на

$$h = 2\alpha(n-1)F \approx 3{,}45 \text{ см}.$$

Теперь разберем второй способ решения. Для этого рассмотрим два крайних луча, один из которых проходит вдоль верхнего слоя воды в сосуде, а второй – вблизи дна сосуда (рис.9). Волновым фронтом входного пучка является плоскость, проходящая через прямую MN и перпендикулярная плоскости рисунка. Оптические пути, пройденные верхним и нижним лучами до точек M и N, одинаковы. Они будут равны и для точек A и D, поскольку $AD \parallel MN$. Теперь рассмотрим оптические пути AB и $DEGC$. Обозначим длину отрезка EG через l. Оптический путь AB равен

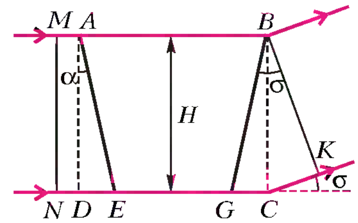


Рис. 9

$$s_1 = AB\cdot n = (l + 2H\,\mathrm{tg}\,\alpha)n,$$

а оптический путь DC равен

$$s_2 = ln + 2H\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Мы видим, что $s_2 < s_1$ и разность оптических путей составляет

$$s_1 - s_2 = 2H(n-1)\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Следовательно, наши лучи не могут и дальше распространяться в прежним направлении, а должны отклониться вверх на некоторый угол. Обозначим этот угол через σ. Прямая BK перпендикулярна лучам, и через нее проходит волновой фронт, поэтому оптический путь CK должен компенсировать разность $s_1 - s_2$:

$$CK = 2H(n-1)\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

А тогда из треугольника CBK найдем

$$\sin\sigma = 2(n-1)\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

или

$$\sigma = 2(n-1)\alpha,$$

и

$$h = 2(n-1)\alpha F.$$

В этом решении мы вышли за рамки геометрической оптики и рассматривали параллельный пучок света как плоскую волну.

Задача 5. *Тонкий пучок света (луч) падает перпендикулярно плоской поверхности оптически прозрачного полушара (рис.10). Радиус шара R, расстояние от луча до оси OO′ равно a = 0,6R, показатель преломления материала шара n = 4/3. Найдите расстояние от центра шара (точка O) до точки пересечения луча, преломленного на сферической поверхности, с осью OO′ (точка A).*

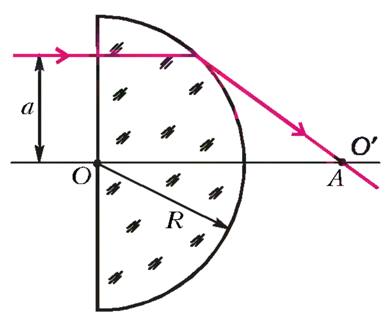


Рис. 10

Соединим центр полушара (точка O) с точкой пересечения луча со сферической поверхностью (точка B) (рис.11). Угол α будет являться углом падения на границу раздела стекло – воздух. Углом

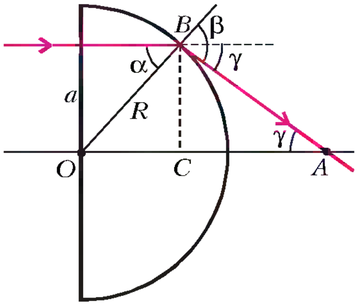


Рис. 11

преломления будет угол β такой, что

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{1}{n}.$$

Отсюда

$$\sin\beta=n\sin\alpha.$$

Как видно из рисунка,

$$\gamma=\beta-\alpha,$$

$$OC=\sqrt{R^2-a^2},$$

$$CA=\frac{a}{\operatorname{tg}(\beta-\alpha)}.$$

Тогда расстояние от точки O до точки A будет равно

$$OA=OC+CA=\sqrt{R^2-a^2}+\frac{a}{\operatorname{tg}(\beta-\alpha)}.$$

Найдем $\operatorname{tg}(\beta-\alpha)$:

$$\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha}.$$

Займемся вычислением тангенсов углов α, β и $\beta-\alpha$:

$$\sin\alpha=\frac{a}{R},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{\sqrt{R^2-a^2}}=\frac{3}{4},$$

$$\sin\beta=\frac{an}{R},\quad \operatorname{tg}\beta=\frac{an}{\sqrt{R^2-(an)^2}}=\frac{4}{3},$$

$$\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{7}{24}.$$

После подстановки числовых значений в выражение для OA получим

$$OA=\frac{20}{7}R.$$

Задача 6. *Мальчик смотрит на рыбку вдоль диаметра сферического аквариума (рис.12). Ему навстречу плывет рыбка со скоростью v. Чему была равна скорость изображения рыбки, когда она пересекала центр аквариума? Показатель преломления воды n.*

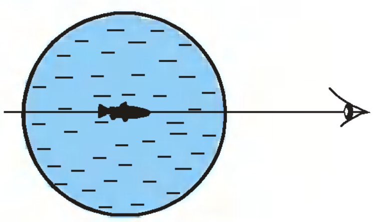


Рис. 12

Пусть в начальный момент времени рыбка находится в центре аквариума O и плывет направо (рис.13). Через небольшое время Δt она переместится в близкую к O точку A. Проведем радиус в произвольную точку C. Луч света, проведенный из точки A в точку C, попадет на границу раздела вода – воздух под углом падения α. Следует сразу оговориться, что все углы, которые будут рассмотрены, малы, а следовательно, синусы и тангенсы углов можно заменять самими углами. Обозначим угол преломления через β, а мнимое изображение рыбки – точкой B. Из закона преломления света,

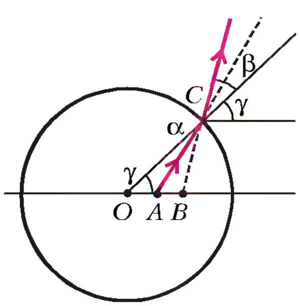


Рис. 13

$$\sin\beta=n\sin\alpha,\ \text{или}\ \beta=n\alpha.$$

Из треугольника OCB по теореме синусов можно записать

$$\frac{OB}{R}=\frac{\beta}{\beta+\gamma}=\frac{n\alpha}{n\alpha+\gamma}.$$

Аналогично, по теореме синусов из треугольника OCA следует

$$\frac{OA}{R}=\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}.$$

Обозначим скорость изображения рыбки, когда она находится вблизи центра аквариума, через u. Тогда

$$\frac{OB}{OA}=\frac{u\Delta t}{v\Delta t}=\frac{\beta(\alpha+\gamma)}{\alpha(\beta+\gamma)}=\frac{n(\alpha+\gamma)}{n\alpha+\gamma},$$

и

$$u=v\frac{n(\alpha+\gamma)}{n\alpha+\gamma}.$$

Чтобы найти скорость изображения рыбки в момент, когда она находится строго в центре аквариума, нужно взять предел полученного выражения для u при стремлении α к нулю:

$$u=\lim_{\alpha\to 0}\frac{vn(\alpha+\gamma)}{n\alpha+\gamma}=vn.$$

Упражнения

1. Цилиндрический стеклянный сосуд заполнен до краев водой и поставлен на стол. Сверху на сосуд положили лист бумаги с круглым отверстием так, что его центр оказался на оси симметрии сосуда. Через отверстие какого минимального радиуса можно разглядеть все дно сосуда? Глубина сосуда H = 5,2 см, радиус дна R = 8 см, показатель преломления воды $n = 4/3$.

2. Узкий пучок света, содержащий излучение двух длин волн, падает под углом $\alpha=60°$ на плоскопараллельную стеклянную пластинку (рис.14). В результате однократного прохождения пластинки из нее выходят два пучка, расстояние между которыми a. Определите толщину пластинки, если показатель преломления стекла для одной длины волны n_1, а для другой n_2 ($n_2>n_1$).

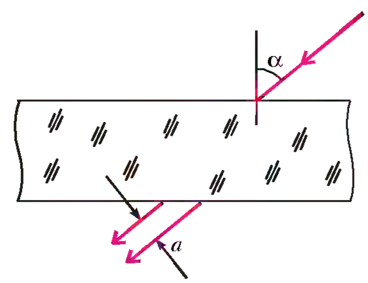


Рис. 14

3. Оптически прозрачный шар радиусом R помещен в параллельный пучок света. Минимальное расстояние, пройденное одним из преломленных лучей внутри шара (до первого пересечения со сферической поверхностью), оказалось равным $\sqrt{7}R/2$. Найдите показатель преломления материала шара.

4. Из стеклянной пластинки с показателем преломления $n=1{,}5$ вырезали толстую линзу в форме полушара радиусом R = 10 см (рис.15). Через такую линзу рассматривается точечный источник света, расположенный на расстоянии a = $R/2$ от плоской поверхности полушара. На каком расстоянии от этой поверхности наблюдатель видит изображение источника света?

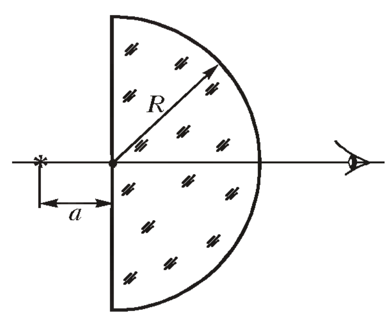


Рис. 15

Геометрические места точек

А.ЗАСЛАВСКИЙ

Когда я был школьником и готовился к вступительным экзаменам, мне довелось решать довольно много задач на определение *геометрических мест точек (ГМТ)*, т.е. множеств точек плоскости или пространства, обладающих определенным свойством. В последнее время такие задачи, к сожалению, стали встречаться значительно реже, а между тем они бывают весьма интересны и полезны, особенно в ситуациях, когда нужно выяснить положение какой-то важной для решения задачи точки. Цель данной статьи – напомнить о некоторых известных ГМТ и описать менее знаменитые.

Начнем с классической и совсем простой задачи.

Задача 1. *Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек A и B плоскости, есть серединный перпендикуляр к отрезку AB (рис.1). Докажите это.*

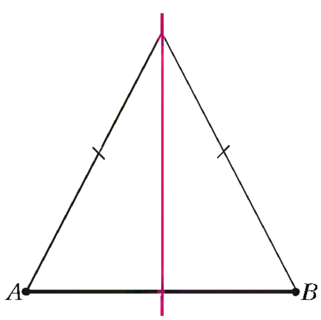


Рис. 1

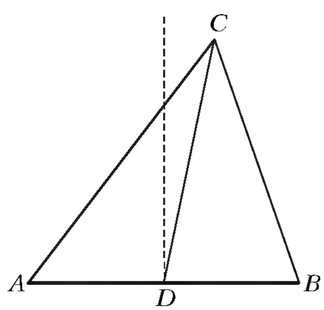


Рис. 2

Хотя это утверждение общеизвестно, полезно остановиться на нем, чтобы понять, как подобные утверждения доказываются. Доказывать необходимо следующее:

1. Любая точка указанного в качестве ГМТ множества обладает требуемыми свойствами.

2. Никакая точка, не принадлежащая множеству, этими свойствами не обладает.

В данном случае пункт 1 очевиден, а доказательство пункта 2 легко получить от противного, например – так. Пусть C не лежит на серединном перпендикуляре и $AC = BC$. Соединим C с серединой D отрезка AB (рис.2). Так как треугольник ABC равнобедренный, его медиана CD является также высотой, т.е. из точки D восставлены два различных перпендикуляра к AB – противоречие.

Следующие утверждения доказываются точно так же, как задача 1, и могут считаться ее пространственными аналогами.

Задача 2. *Геометрическое место точек, равноудаленных от двух точек пространства, есть плоскость, перпендикулярная соединяющему их отрезку и проходящая через его середину. Докажите это.*

Задача 3. *Докажите, что геометрическое место точек, равноудаленных от трех не лежащих на одной прямой точек пространства, есть прямая, перпендикулярная содержащей их плоскости и проходящая через центр описанной окружности образованного ими треугольника.*

Примечание. Нетрудно убедиться, что эта прямая является также ГМТ, равноудаленных от всех точек описанной окружности данного треугольника.

Следствием задач 2 и 3 является, например, следующее утверждение:

Вокруг любого тетраэдра можно описать сферу, и притом только одну.

Действительно, пусть дан тетраэдр $ABCD$. Построим прямую, точки которой равноудалены от A, B, C, и плоскость, точки которой равноудалены от C и D. Так как CD не лежит в плоскости ABC, построенные прямая и плоскость пересекутся в единственной точке O, для которой по построению $OA = OB = OC = OD$, т.е. O – центр искомой сферы.

Следующие две задачи также общеизвестны.

Задача 4. *Докажите, что геометрическим местом точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых плоскости, являются биссектрисы образованных этими прямыми углов (рис.3).*

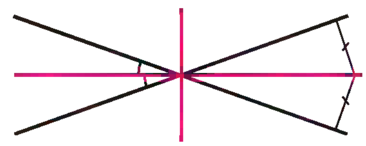


Рис. 3

Задача 5. *Докажите, что геометрическим местом точек, равноудаленных от двух параллельных прямых плоскости, является прямая, параллельная им и проходящая через середину любого отрезка AB, конец A которого лежит на одной из прямых, а B на другой (рис.4).*

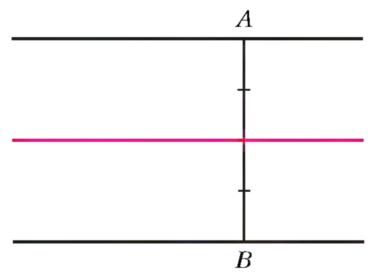


Рис. 4

Приведем утверждения, которые могут считаться пространственными аналогами этих задач.

Задача 6. *Геометрическим местом точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых пространства, являются две плоскости, перпендикулярные плоскости, содержащей данные прямые, и проходящие через биссектрисы образованных ими углов. Докажите это.*

Задача 7. *Геометрическим местом точек, равноудаленных от двух параллельных прямых пространства, является плоскость, перпендикулярная плоскости, содержащей данные прямые, и делящая пополам любой отрезок с концами на этих прямых. Докажите это.*

Задача 8. *Геометрическим местом точек, равноудаленных от двух пересекающихся плоскостей, являются две плоскости, делящие пополам образованные ими двугранные углы. Докажите это.*

Задача 9. *Геометрическим местом точек, равноудаленных от двух параллельных плоскостей, является плоскость, параллельная им и проходящая через середину любого отрезка с концами на этих плоскостях. Докажите это.*

Используя задачи 6–9, нетрудно получить доказательства следующих утверждений.

Задача 10. *Пусть дан трехгранный угол. Тогда биссекторные плоскости его двугранных углов пересекаются по прямой, все точки которой равноудалены от граней трехгранного угла. Докажите, что, выбирая биссекторные плоскости разными способами, можно получить четыре прямые, которые образуют геометрическое место точек, равноудаленных от трех данных плоскостей.*

Задача 11. *Пусть дан трехгранный угол. Тогда плоскости, равноудаленные от его ребер, пересекаются по прямой, точки которой равноудалены от всех ребер угла. Как и в предыдущей задаче, докажите, что всего существует* кими окружностями с радиусами CA и CB. Если же сферы пересекаются, то точкой B служит одна из двух точек пересечения соответствующих окружностей (рис. 7,*б*).

Задача 18. *Дана сфера и точка P внутри нее. Три попарно перпендикулярных луча с началом в P пересекают сферу в точках A, B, C. Найдите геометрическое место центров тяжести треугольника ABC.*

Решение. Рассмотрим плоский аналог задачи. Пусть дана окружность и точка P внутри нее. Два перпендикулярных луча с началом в P пересекают окружность в точках A и B. Нужно найти геометрическое место середин AB. Построим прямоугольник $PAQB$ (рис.8). Центр окружности O, как и любая точка, удовлетворяет равенству $OP^2 + OQ^2 = OA^2 + OB^2$ (докажите!). Поскольку $OA = OB = r$, а OP не зависит от выбора лучей, точка Q лежит на окружности с центром O. Из соображений непрерывности ясно, что Q может попасть в любую точку этой окружности. Так как середина отрезка AB гомотетична Q относительна P, искомым ГМТ будет окружность с центром в середине отрезка OP.

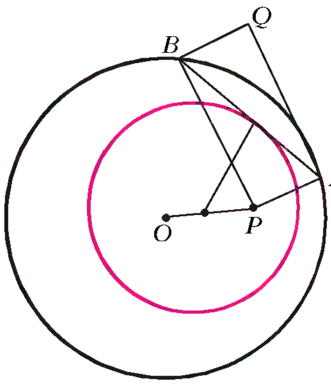


Рис. 8

В пространственном случае аналогичные рассуждения показывают, что искомым ГМТ будет сфера, центр которой X лежит на отрезке OP и делит его в отношении $OX : XP = 2 : 1$.

Задача 19. *Дана сфера и точка P вне нее. Найдите геометрическое место центров сечений сферы плоскостями, проходящими через P.*

Решение. Рассмотрим плоский аналог задачи. Пусть прямая, проходящая через точку P, пересекает окружность в точках A и B, C – середина AB, O – центр окружности (рис.9). Тогда OC перпендикулярна AB, т.е. угол OCP прямой, и точка C лежит на окружности с диаметром OP. Искомым ГМТ будет часть этой окружности, лежащая внутри исходной.

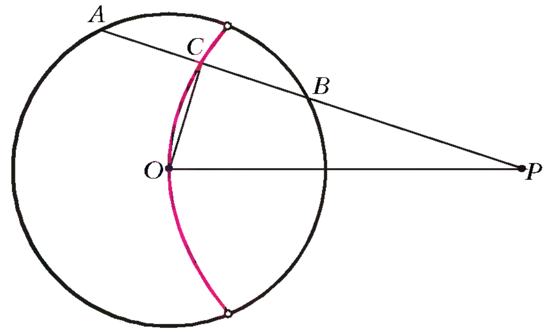


Рис. 9

Аналогично, в пространственном случае искомым ГМТ будет часть сферы с диаметром OP, лежащая внутри данной.

Задача 20. *Дан шаровой сегмент. Рассматриваются пары сфер, вписанных в этот сегмент и касающихся друг друга. Найдите геометрическое место точек касания.*

Решение. Рассмотрим плоский аналог задачи. Пусть круговой сегмент ограничен дугой и хордой AB окружности с центром O, окружность с центром O' касается дуги в точке C, а хорды – в точке Q, P – середина дуги AB, не содержащей C (рис.10). Из подобия треугольников $CO'Q$ и COP следует, что точки C, Q и P лежат на одной прямой. Кроме того, треугольники CAP и AQP подобны, так как углы ACP и PAQ опираются на равные дуги. Следовательно, $PQ \cdot PC = PA^2$. Но $PQ \cdot PC$ – это квадрат касательной, проведенной из P к произвольной окружности, вписанной в сегмент. Значит, если взять две таких касающихся друг друга окружности, то, во-первых, P лежит на их радикальной оси, т.е. общей касательной, а, во-вторых, расстояние от P до точки касания равно PA. Таким образом, все точки касания лежат на окружности с центром P и радиусом PA и, очевидно, заполняют дугу AB этой окружности.

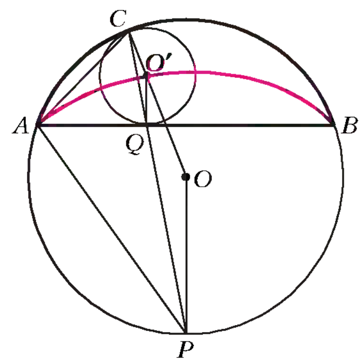


Рис. 10

Аналогично, в пространственном случае искомым ГМТ будет часть сферы с центром в точке, противоположной вершине сегмента, и содержащей его граничную окружность, лежащая внутри сегмента.

Примечание. Читатели, знакомые с понятием инверсии, могут найти существенно более простое решение этой задачи.

XXIX Всероссийская олимпиада школьников по математике

Как обычно, в период весенних каникул был проведен окружной (IV) этап Всероссийской олимпиады школьников по математике. Он проходил в шести городах: Благовещенске, Барнауле, Кирове, Пскове, Долгопрудном и Майкопе. Заключительный (V) этап Всероссийской олимпиады был проведен с 14 по 19 апреля в Орле, на родине выдающегося русского математика и педагога А.П.Киселева, со дня рождения которого недавно исполнилось 150 лет.

Традиционно, участникам заключительного этапа олимпиады были предложены два тура по 4 задачи. На работу в каждом туре отводилось 5 часов. Вести борьбу с серьезными заданиями участникам помогали хорошая погода и интересная культурная программа, подготовленная оргкомитетом олимпиады.

Весьма трудным оказался вариант 9 класса – участники, показавшие лучшие результаты, решили по 6 задач, причем задачу 4 решил лишь один участник – Е.Деменков, а задача 8 и вовсе не была решена. По каждой из остальных задач олимпиады было получено не меньше трех верных решений. В 10 и 11 классах победители решили по 7 задач, а наибольшее количество баллов среди всех участников олимпиады набрала 10-классница Н.Петухова.

Ниже приводятся условия задач окружного и заключительного этапов и список призеров олимпиады.

Окружной этап

8 класс

1. Числа от 1 до 10 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе нацело делится на произведение чисел во второй. Какое наименьшее значение может быть у частного от деления первого произведения на второе?

А.Голованов

2. По каждой из двух пересекающихся прямых с постоянными скоростями, не меняя направления, ползет по жуку. Известно, что проекции жуков на ось Ox никогда не совпадают (ни в прошлом, ни в будущем). Докажите, что проекции жуков на ось Oy обязательно совпадут или совпадали раньше.

Л.Емельянов

3. Двое по очереди выписывают на доске натуральные числа от 1 до 1000. Первым ходом первый игрок выписывает число 1. Затем очередным ходом на доске можно выписать либо число $2a$, либо число $a + 1$, если на доске уже написано число a. При этом запрещается выписывать числа, которые уже написаны на доске. Выигрывает тот, кто выпишет на доске число 1000. Кто выигрывает при правильной игре?

О.Подлипский

4. Докажите, что произвольный треугольник можно разрезать на три многоугольника, один из которых тупоугольный треугольник, так, чтобы потом сложить из них прямоугольник. (Переворачивать части можно.)

О.Дмитриев

5. В вершинах кубика написали числа от 1 до 8, а на каждом ребре – модуль разности чисел, стоящих в его концах. Какое наименьшее количество различных чисел может быть написано на ребрах?

В.Сендеров

6. Для некоторых натуральных чисел a, b, c и d выполняются равенства

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{ab+1}{cd+1}.$$

Докажите, что $a = c$ и $b = d$.

В.Сендеров

7. В треугольнике ABC угол C прямой. На стороне AC нашлась точка D, а на отрезке BD – точка K такие, что $\angle ABC = \angle KAD = \angle AKD$. Докажите, что $BK = 2DC$.

С.Иванов

8. Набор из 2003 положительных чисел таков, что для любых двух входящих в него чисел a и b ($a > b$) хотя бы одно из чисел $a + b$ или $a - b$ тоже входит в набор. Докажите, что если данные числа упорядочить по возрастанию, то разности между соседними числами окажутся одинаковыми.

И.Рубанов

9 класс

1. Докажите, что стороны любого неравнобедренного треугольника можно либо все увеличить, либо все уменьшить на одну и ту же величину так, чтобы получился прямоугольный треугольник.

В.Сендеров

2. См. задачу 2 для 8 класса.

3. В равнобедренном треугольнике ($AB = BC$) средняя линия, параллельная стороне BC, пересекается со вписанной окружностью в точке F, не лежащей на основании AC. Докажите, что касательная к окружности в точке F пересекается с биссектрисой угла C на стороне AB.

Л.Емельянов

4. Два игрока по очереди выписывают на доске в ряд слева направо произвольные цифры. Проигрывает игрок, после хода которого одна или несколько цифр, записанных подряд, образуют число, делящееся на 11. Кто из игроков победит при правильной игре?

Д.Храмцов

5. Пусть I – точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Обозначим через A', B', C' точки, симметричные I относительно сторон треугольника ABC. Докажите, что если окружность, описанная около треугольника $A'B'C'$, проходит через вершину B, то $\angle ABC = 60^\circ$.

Л.Емельянов

6. На вечеринку пришли 100 человек. Вскоре те, у кого не было знакомых среди пришедших, ушли. Потом те, у кого был ровно 1 знакомый среди оставшихся, тоже ушли. Затем аналогично поступали те, у кого было ровно 2, 3, 4, ..., 99 знакомых среди оставшихся к моменту их ухода. Какое наибольшее число людей могло остаться в конце?

С.Берлов

7. Докажите, что из любых шести четырехзначных чисел, взаимно простых в совокупности, всегда можно выбрать пять чисел, также взаимно простых в совокупности.

Д.Храмцов

8. Докажите, что выпуклый многоугольник может быть разрезан непересекающимися диагоналями на остроугольные треугольники не более чем одним способом.

П.Кожевников

10 класс

1. Найдите все углы α, для которых набор чисел $\sin\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\sin 3\alpha$ совпадает с набором $\cos\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$.

Н.Агаханов

2. См. задачу 3 для 9 класса.

3. На встречу выпускников пришли 45 человек. Оказалось, что любые двое из них, имеющие одинаковое число знакомых среди пришедших, не знакомы друг с другом. Каково наибольшее число знакомств среди участвовавших во встрече?

С.Берлов

4. На плоскости отметили n ($n > 2$) прямых, проходящих через одну точку O, таким образом, что для любых двух из них найдется такая отмеченная прямая, которая делит пополам одну из пар вертикальных углов, образованных этими прямыми. Докажите, что проведенные прямые делят полный угол на равные части.

И.Рубанов

5. При каких x уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ имеет решение для любого y?

Д.Храмцов

6. Пусть A_0 – середина стороны BC треугольника ABC, а A' – точка касания с этой стороной вписанной окружности. Построим окружность ω с центром в A_0 и проходящую через A'. На других сторонах построим аналогичные окружности. Докажите, что если ω касается описанной окружности на дуге BC, не содержащей A, то еще одна из построенных окружностей касается описанной.

Л.Емельянов

7. Докажите, что из произвольного множества трехзначных чисел, включающего не менее четырех чисел, взаимно простых в совокупности, можно выбрать четыре числа, также взаимно простых в совокупности.

Д.Храмцов

8. В наборе из 17 внешне одинаковых монет две фальшивые, отличающиеся от остальных по весу. Известно, что суммарный вес двух фальшивых монет вдвое больше веса настоящей. Всегда ли можно определить обе фальшивых монеты, совершив 5 взвешиваний на чашечных весах без гирь? (Определять, какая из фальшивых тяжелее, не требуется.)

И.Богданов, Ю.Хромин

11 класс

1. Найдите все простые p, для каждого из которых существуют такие натуральные x и y, что $p^x = y^3 + 1$.

В.Сендеров

2. На диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбрана такая точка K, что $KD = DC$, $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle KDC$, $\angle DAC = \frac{1}{2}\angle KBC$. Докажите, что $\angle KDA = \angle BCA$ или $\angle KDA = \angle KBA$.

С.Берлов

3. Функции $f(x) - x$ и $f(x^2) - x^6$ определены при всех положительных x и возрастают. Докажите, что функция $f(x^3) - \frac{\sqrt{3}}{2}x^6$ также возрастает при всех положительных x.

А.Голованов

4. См. задачу М1889 «Задачника «Кванта» в следующем номере журнала.

5. Квадратные трехчлены $P(x) = x^2 + ax + b$ и $Q(x) = x^2 + cx + d$ таковы, что уравнение $P(Q(x)) = Q(P(x))$ не имеет действительных корней. Докажите, что $b \neq d$.

И.Рубанов

6. См. задачу 6 для 9 класса.

7. Дан тетраэдр $ABCD$. Вписанная в него сфера ω касается грани ABC в точке T. Сфера ω' касается грани ABC в точке T' и продолжений граней ABD, BCD, CAD. Докажите, что прямые AT и AT' симметричны относительно биссектрисы угла BAC.

А.Заславский

8. См. задачу 8 для 10 класса.

Заключительный этап

9 класс

1. Числовое множество M, содержащее 2003 различных числа, таково, что для любых двух различных элементов a, b и M число $a^2 + b\sqrt{2}$ рационально. Докажите, что для любого a из M число $a\sqrt{2}$ рационально.

Н.Агаханов

2. Окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точках A и B. Касательные к S_1 и S_2 в точке A пересекают отрезки BO_2 и BO_1 в точках K и L соответственно. Докажите, что $KL \parallel O_1O_2$.

С.Берлов

3. См. задачу М1880 «Задачника «Кванта».

4. Последовательность $\{a_n\}$ строится следующим образом: $a_1 = p$ – простое число, имеющее ровно 300 ненулевых цифр; a_{n+1} – период десятичной дроби $1/a_n$, умноженный на 2. Найдите число a_{2003}.

И.Богданов, А.Храбров

5. В стране N ($N \geq 3$) городов. Между любыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнет путешествие, и маршрут так, что ему придется поменять вид транспорта не более одного раза.

О.Подлипский

6. См. задачу М1881 «Задачника «Кванта».

7. Можно ли в клетках бесконечного клетчатого листа расставить натуральные числа таким образом, чтобы при любых натуральных m, $n > 100$ сумма чисел в любом прямоугольнике $m \times n$ клеток делилась на $m + n$?

С.Берлов

8. На сторонах AP и PD остроугольного треугольника APD выбраны точки B и C соответственно. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке Q. Точки H_1 и H_2 являются ортоцентрами треугольников APD и BPC соответственно. Докажите, что если прямая H_1H_2 проходит через точку X пересечения описанных окружностей треугольников ABQ и CDQ, то она проходит и через точку Y пересечения описанных окружностей треугольников BQC и AQD ($X \neq Q$, $Y \neq Q$).

С.Берлов, Л.Емельянов

10 класс

1. Числовое множество M, содержащее 2003 различных положительных числа, таково, что для любых трех различных элементов a, b, c из M число $a^2 + bc$ рационально. Докажите, что можно выбрать такое натуральное n, что для любого a из M число $a\sqrt{n}$ рационально.

Н.Агаханов

2. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Пусть S_1 и S_2 – окружности, описанные около треугольников ABO и CDO соответственно, O и K – точки пересечения окружностей S_1 и S_2. Прямые, проходящие через точку O параллельно прямым AB и CD, вторично пересекают S_1 и S_2 в точках L и M соответственно. На отрезках OL и OM выбраны, соответственно, точки P и Q так, что $OP : PL = MQ : QO$. Докажите, что точки O, K, P, Q лежат на одной окружности.

С.Берлов

3. Дано дерево с n вершинами, $n \geq 2$ (т.е. граф с n вершинами и $n - 1$ ребром, в котором из любой вершины в любую можно пройти по ребрам и нет циклического маршрута, проходящего по ребрам). В его вершинах расставлены числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а на каждом ребре записано произведение чисел, стоящих в концах этого ребра. Обозначим через S сумму чисел на всех ребрах. Докажите, что

$$\sqrt{n-1}\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right) \geq 2S.$$

В.Дольников

4. На плоскости дано конечное множество точек X и правильный треугольник T. Известно, что любое подмножество X' множества X, состоящее из не более 9 точек, можно покрыть двумя параллельными переносами треугольника T. Докажите, что все множество X можно покрыть двумя параллельными переносами T.

В.Дольников, Р.Карасев

5. См. задачу 5 для 9 класса.

6. Последовательность натуральных чисел a_n строится следующим образом: a_0 – некоторое натуральное число; $a_{n+1} = \frac{a_n}{5}$, если a_n делится на 5, и $a_{n+1} = \left[\sqrt{5}a_n\right]$, если a_n не делится на 5 (через $[x]$ обозначена целая часть от x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x). Докажите, что начиная с некоторого члена последовательность a_n возрастает.

А.Храбров

7. В треугольнике ABC через O, I обозначены центры описанной и вписанной окружностей соответственно. Вневписанная окружность ω_a касается продолжений сторон AB и AC в точках K и M соответственно, а стороны BC – в точке N. Известно, что середина P отрезка KM лежит на описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что точки O, N и I лежат на одной прямой.

П.Кожевников

8. Найдите наибольшее натуральное число N такое, что для произвольной расстановки различных натуральных чисел от 1 до 400 в клетках квадратной таблицы 20×20 найдутся два числа, стоящих в одной строке или одном столбце, разность которых будет не меньше N.

Д.Храмцов

11 класс

1. Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \tau$ – такие положительные числа, что при всех x

$$\sin \alpha x + \sin \beta x = \sin \gamma x + \sin \tau x .$$

Докажите, что $\alpha = \gamma$ или $\alpha = \tau$.

Н.Агаханов, А.Голованов, В.Сендеров

2. См. задачу 2 для 10 класса.

3. Даны многочлены $f(x)$ и $g(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами, m – наибольший коэффициент многочлена f. Известно, что для некоторых натуральных чисел $a < b$ имеют место равенства $f(a) = g(a)$ и $f(b) = g(b)$. Докажите, что если $b > m$, то многочлены f и g совпадают.

А.Храбров

4. См. задачу М1882 «Задачника «Кванта».

5. Длины сторон треугольника являются корнями кубического уравнения с рациональными коэффициентами. Докажите, что длины высот треугольника являются корнями уравнения шестой степени с рациональными коэффициентами.

Н.Агаханов

6. См. задачу 7 для 9 класса.

7. В стране 100 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Для любых четырех городов существуют хотя бы две дороги между ними. Известно, что не существует маршрута, проходящего по каждому городу ровно один раз. Докажите, что можно выбрать два города таким образом, чтобы любой из оставшихся городов был соединен дорогой хотя бы с одним из двух выбранных городов.

И.Иванов

8. Вписанная в тетраэдр $ABCD$ сфера касается его граней ABC, ABD, ACD и BCD в точках D_1, C_1, B_1 и A_1 соответственно. Рассмотрим плоскость, равноудаленную от точки A и плоскости $B_1C_1D_1$, и три плоскости, аналогичные ей. Докажите, что тетраэдр, образованный этими четырьмя плоскостями, имеет тот же центр описанной сферы, что и тетраэдр $ABCD$.

Ф.Бахарев

Призеры олимпиады

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Девятов Ростислав – Москва, лицей «Вторая школа», 8 кл.,
Белоусов Кирилл – Челябинск, ФМЛ 31,
Вдовин Валерий – Нижний Новгород, лицей 36,
Ефимов Александр – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Мартынов Павел – Нижний Новгород, Педагогическая гимназия,
Христофоров Михаил – Санкт-Петербург, ФМЛ 239, 8 кл.,
Калибин Борис – Иваново, лицей «Гармония»;

по 10 классам –

Петухова Надежда – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Пермяков Дмитрий – Снежинск, гимназия 127;

по 11 классам –

Гольберг Олег – Ростов-на-Дону, школа 8,
Бадзян Андрей – Челябинск, ФМЛ 31, 10 кл.,
Куюмжиян Каринэ – Ростов-на-Дону, школа 8.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Трегубов Алексей – Киров, ФМЛ,
Куюмжиян Вергинэ – Ростов-на-Дону, школа 8,
Деменков Евгений – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Перепечко Александр – Новосибирск, лицей 130,
Семейко Александр – Москва, гимназия 1543,
Блинов Вениамин – Саров, лицей 3,
Астахов Василий – Саратов, ФТЛ1,
Шевяков Вадим – Сухиничи, школа 1,
Разумовский Роман – Иваново, лицей «Гармония»,
Подхалюзин Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Нохрин Алексей – Ижевск, ЭМЛИ 29;

по 10 классам –

Филимонов Владислав – Екатеринбург, гимназия 9,
Шнурников Игорь – Краснодар, гимназия 36,
Калинин Максим – Пермь, ФМШ,
Тимофеев Алексей – Москва, СУНЦ МГУ,
Баштанов Алексей – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Мешин Юрий – Киров, ФМЛ,
Родин Александр – Москва, СУНЦ МГУ;

по 11 классам –

Томин Дмитрий – Иваново, лицей 33,
Травкин Роман – Липецк, школа 5,
Швед Даниил – Челябинск, ФМЛ 31,
Ширяев Дмитрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Гравин Николай – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Смирнов Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Волков Юрий – Кемерово, Классический лицей,
Молчанов Евгений – Краснодар, школа 64,
Петухов Алексей – Москва, лицей «Вторая школа»,
Костин Андрей – Челябинск, ФМЛ 31,
Ланин Константин – Иркутск, лицей ИГУ.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Фильченков Андрей – Санкт-Петербург, гимназия 261,
Вершинин Олег – Киров, ФМЛ,
Нетай Игорь – Ростов-на-Дону, школа 103,
Светухин Павел – Санкт-Петербург, ФМЛ 30,
Калинин Никита – Санкт-Петербург, школа 407,
Козачок Марина – Долгопрудный, школа 5, 8 кл.,
Ерёмин Алексей – Краснодар, школа 47, 8 кл.,
Ярухин Евгений – Ижевск, ЭМЛИ 29,
Осиненко Антон – Москва, лицей «Вторая школа»,
Пикалов Павел – Екатеринбург, гимназия 9, 8 кл.,
Петров Андрей – Москва, гимназия 1543,
Гаврилюк Андрей – Долгопрудный, школа 5,
Иванов Владимир – Долгопрудный, школа 5,
Ананьевский Алексей – Санкт-Петербург, Аничков лицей,
Маринин Евгений – Ярославль, школа 33;

по 10 классам –

Мурашкин Михаил – Протвино, лицей,
Полутина Александра – Озерск, лицей 39,
Лазарев Алексей – Киров, ФМЛ,
Никитин Сергей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Дильман Глеб – Челябинск, ФМЛ 31,
Березняк Тарас – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Козлов Павел – Ростов, гимназия 1, 9 кл.,
Исаев Михаил – Барнаул, гимназия 42,
Каменов Андрей – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Кирьянов Александр – Краснодар, гимназия 88,
Батузов Кирилл – Саратов, Лицей прикладных Наук,
Кислицын Евгений – Киров, ФМЛ,
Коврижных Николай – Киров, ФМЛ,
Ефремов Руслан – Набережные Челны, гимназия 26,
Лугинин Иван – с.Высокораменское Кировской обл., школа;

по 11 классам –

Кузнецов Кирилл – Нижний Новгород, лицей 40,
Дубашинский Михаил – Санкт-Петербург, ФМЛ 239, 10 кл.,
Сатюков Роман – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Поршнев Евгений – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Миргасимов Алмаз – Набережные Челны, гимназия 26,
Бугаев Дмитрий – Омск, лицей 64,
Куликов Антон – Нижний Новгород, лицей 165,
Гнеушев Сергей – Челябинск, ФМЛ 31,
Сухарев Николай – Тобольск, гимназия,
Антипов Дмитрий – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Сидоров Иван – Москва, лицей «Вторая школа»,
Панов Михаил – Рыбинск, лицей 2,
Горин Вадим – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Вальтман Виталий – Санкт-Петербург, АГ СПбГУ,
Красильников Павел – Краснодар, школа 2,
Ефремов Михаил – Ижевск, ЭМЛИ 29,
Гайфуллин Сергей – Раменское, гимназия,
Вершинина Анастасия – Киров, ФМЛ,
Лазеев Владимир – Тамбов, лицей 6,
Ломоносов Роман – Краснодар, школа 89.

Публикацию подготовили
Н.Агаханов, П.Кожевников, Д.Терёшин

XXXVII Всероссийская олимпиада школьников по физике

В апреле 2003 года в Воронеже прошел заключительный этап очередной Всероссийской физической олимпиады школьников. Напомним, что финальному этапу предваряют городской, региональный и зональный этапы.

Ниже приводятся условия избранных теоретических задач регионального и зонального этапов, все задачи теоретического и экспериментального туров заключительного этапа и список призеров олимпиады.

Региональный этап

Теоретический тур

8 класс

Задача 1. Тайна рождения Буратино

Последние исследования историков показали, что Буратино был изготовлен не из одного, а из двух поленьев. Его голову Папа Карло выточил из дуба, а остальные части тела выстругал из сосны. Известно, что плотность дуба $\rho_1 = 690\ \text{кг}/\text{м}^3$, вес изготовленной из него части тела составляет треть от веса Буратино, а объем – только четверть. Найдите плотность ρ_2 соснового полена.

Д.Александров

Задача 2. Пешеход Глюк

Экспериментатор Глюк шел в лабораторию вдоль железнодорожного полотна со скоростью $u = 4$ км/ч. Он заметил, что по путям идут две встречные электрички, одна из которых составлена из $n_1 = 9$ вагонов, а другая – из $n_2 = 10$ вагонов. Глюк обратил внимание на то, что головные вагоны поравнялись друг с другом как раз напротив него. Это ему показалось удивительным. Но еще больше Глюк удивился, когда увидел, что и последние вагоны разошлись тоже строго напротив него. Глюку стало любопытно, с какой скоростью v идут электрички. А вы можете ответить на этот вопрос? Считайте, что скорости обеих электричек одинаковы.

В.Слободянин

Задача 3. Парафиновое кольцо

В ванну, заполненную водой, опустили кольцо из парафина (рис.1). Площадь поперечного сечения отверстия кольца $S = 300\ \text{см}^2$, а его высота $H = 5$ см. Какую массу бензина можно влить внутрь кольца так, чтобы бензин не попал наружу? Известны: $\rho_в = 1000\ \text{кг}/\text{м}^3$ – плотность воды, $\rho_п = 900\ \text{кг}/\text{м}^3$ – плотность парафина, $\rho_б = 700\ \text{кг}/\text{м}^3$ – плотность бензина.

А.Шеронов

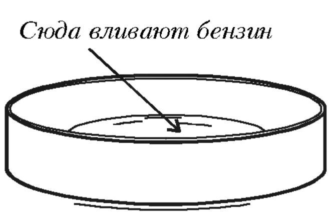


Рис. 1

Задача 4. Чай с кубиками льда

В калориметр с горячим чаем бросили кубик льда, имеющий температуру 0 °С. К моменту установления теплового равновесия температура чая понизилась на $\Delta t_1 = 12$ °С. Когда в калориметр бросили другой такой же кубик льда, температура чая понизилась еще на $\Delta t_2 = 10$ °С. Найдите массу кубика льда. Первоначальная масса чая $M = 100$ г. Теплоемкостью калориметра, теплообменом с окружающей средой и примесями заварки в чае пренебречь.

Д.Подлесный

9 класс

Задача 1. Источник в зазеркалье

Оптическая система состоит из точечного источника S, идеальной собирающей линзы с фокусным расстоянием F и плоского зеркала конечных размеров (рис.2). Источник находится на двойном фокусном расстоянии от центра O линзы и лежит на ее главной оптической оси. Зеркало параллельно этой оси, касается линзы, а его края находятся на расстояниях $a = 3F/2$ и $b = 5F$ от плоскости линзы. Найдите все изображения источника в системе. Для каждого изображения укажите области в плоскости рисунка, из которых можно увидеть это изображение.

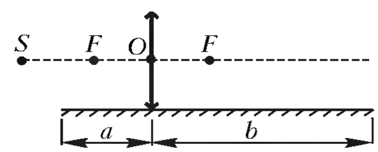


Рис. 2

А.Чудновский

Задача 2. Путевая скорость

Камень бросили вертикально вверх со скоростью $v_0 = 10$ м/с. Через какое время после начала полета абсолютная величина его мгновенной скорости станет равна путевой скорости? Сопротивление воздуха не учитывать, считать ускорение свободного падения $g = 10\ \text{м}/\text{с}^2$.

Примечание. Путевая скорость определяется как отношение пройденного пути ко времени прохождения этого пути.

В.Ефимов

10 класс

Задача 1. Катушка на склоне

Сначала катушку с нитками положили на наклонную плоскость и свободный конец нити закрепили так, что прямой участок нити оказался параллелен склону (рис.3). При этом со стороны нити на катушку действовала сила T. В другой раз катушку установили так, как показано на рисунке 4. Прямой участок нити

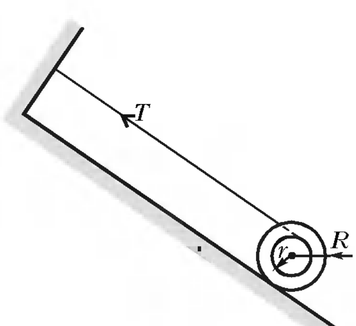


Рис. 3

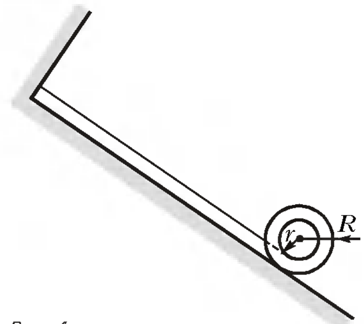


Рис. 4

вновь оказался параллелен склону. В обоих случаях катушка неподвижна. Радиусы обода и оси катушки равны R и r соответственно. Найдите величины и направления сил трения $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, действующих на катушку в первом и втором случаях.

В.Слободянин

Задача 2. Температура в центре цикла

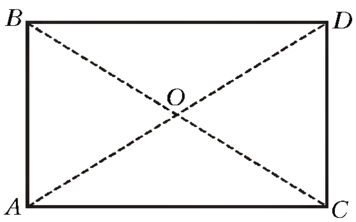


Рис. 5

Циклический процесс *ABDCA*, совершаемый над идеальным газом, состоит из двух изохор *AB* и *CD* и двух изобар *AC* и *BD* (рис.5). Температуры газа в точках *A*, *B* и *C* равны T_A, T_B и T_C соответственно. Найдите температуру T_D в точке *D* и температуру T_O в точке *O*, лежащей на пересечении диагоналей.

В.Слободянин

11 класс

Задача 1. К вопросу о ширине петли

По рельсам катится вагонетка. Радиус ее колеса равен r, а радиус реборды (выступающей части обода колеса, предохраняющей его от схода с рельса) составляет R (рис.6).

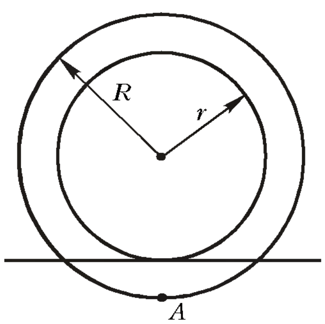


Рис. 6

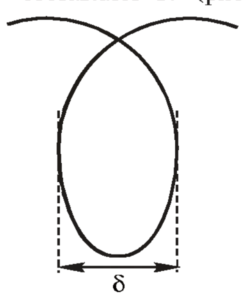


Рис. 7

Траектория точки *A* реборды имеет вид, показанный на рисунке 7. Определите ширину «петли» δ.

В.Муравьев

Задача 2. Неидеальный газ

Для определения значения постоянной адиабаты $\gamma = C_p/C_V$ неидеального газа экспериментатор Глюк провел изобарический *1–2* и изохорический *1–3* процессы, в ходе которых внутренняя энергия газа изменялась на одну и ту же малую величину (рис.8). Оказалось, что в изохорическом процессе изменение температуры вдвое больше, чем в изобарическом, и что в изобарическом процессе треть количества теплоты, полученного газом, пошла на совершение работы против внешних сил. Чему равно значение γ для исследуемого Глюком газа?

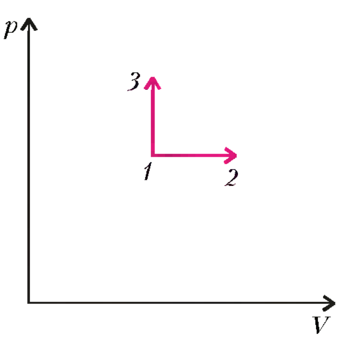


Рис. 8

Д.Александров

Задача 3. Разные вольтметры

Вольтметр V магнитоэлектрической системы подключен к четырем источникам тока с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 1$ В, $\mathcal{E}_2 = 2$ В, $\mathcal{E}_3 = 3$ В, $\mathcal{E}_4 = 4$ В (рис.9). Для ограничения токов в схему включены резисторы. Их сопротивления равны $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 2$ кОм, $R_3 = 3$ кОм, $R_4 = 4$ кОм. Если магнитоэлектрический вольтметр заменить на электростатический вольтметр, то показания последнего окажутся в 2 раза больше. Найдите величину тока, протекающего через вольтметр в первом эксперименте.

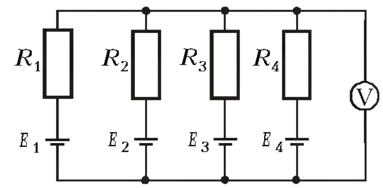


Рис. 9

Указание: электростатический вольтметр является идеальным вольтметром в отличие от магнитоэлектрического, который имеет конечное внутреннее сопротивление.

А.Шеронов

Задача 4. Заряд шара

Шар радиусом R через катушку индуктивностью L соединен с землей (рис.10). Из бесконечности на него налетает пучок электронов. Определите максимальный заряд шара и постройте график зависимости силы тока, текущего через катушку, от времени. Считайте, что изначально шар не был заряжен, плотность электронов в налетающем пучке n, а их скорость $v \ll c$, где c – скорость света.

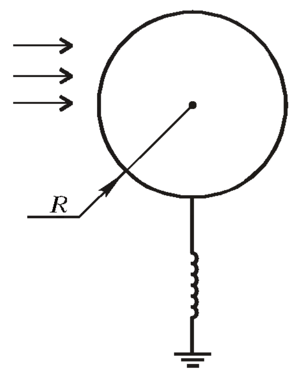


Рис. 10

В.Муравьев

Зональный этап

Теоретический тур

9 класс

Задача 1. Шайба в рамке

На горизонтальной поверхности лежит прямоугольная рамка, у которой короткие стенки отстоят друг от друга на расстояние L (рис.11). Внутри рамки покоится маленькая шайба *Ш*. Рамку начинают двигать по поверхности с постоянной скоростью v_0. Определите интервал времени между двумя последовательными столкновениями шайбы с задней стенкой *AB* рамки. Коэффициент трения между шайбой и горизонтальной поверхностью равен μ, а удар шайбы о стенки рамки считайте абсолютно упругим.

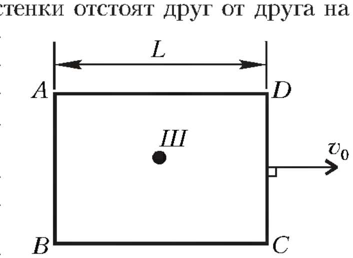


Рис. 11

С.Кузьмичев

10 класс

Задача 1. Разлетающиеся шарики

В трех вершинах правильного тетраэдра с длиной ребра a удерживают три маленьких шарика, каждый из которых имеет массу M и заряд Q. В четвертой вершине удерживают еще один маленький шарик массой m и зарядом q. Известно, что $m \ll M$, а $Q = 2q$. Все шарики одновременно освобождают. 1) Найдите абсолютные величины скоростей шариков после их разлета (удаления друг от друга на бесконечно большие расстояния). 2) Под какими углами к грани тетраэдра, содержавшей три тяжелых шарика, они будут двигаться после разлета?

В.Чивилёв

Задача 2. Сверхтекучий маятник

В высоком цилиндрическом сосуде радиусом R = 4 см с жидким гелием при температуре, близкой к абсолютному нулю (так что гелий является сверхтекучим и трением можно пренебречь), вертикально плавает ареометр – пластмассовый цилиндр радиусом r = 3,9 см и массой m = 500 г. В результате малых колебаний ареометра уровень гелия в сосуде тоже колеблется, причем амплитуда этих колебаний x = 1 мм. Найдите максимальную скорость v уровня поверхности гелия при этих колебаниях. Считайте, что капиллярными эффектами можно пренебречь, а плотность гелия равна $\rho = 122$ кг/м^3.

Л.Мельниковский

11 класс

Задача 1. «Изоэрга»

Экспериментатор Глюк обратил внимание на то, что почти у всех известных ему изопроцессов (изохорического, изобарического, изотермического и адиабатического) график зависимости давления от объема имеет соответствующее название: изохора, изобара, изотерма, адиабата. У процесса же, в ходе которого не изменяется внутренняя энергия, такого названия нет. Глюк решил восполнить этот пробел и назвал отмеченную зависимость «изоэргой». Далее он решил сравнить ход «изоэрги» с изотермой и адиабатой для реального одноатомного газа при условиях, близких к нормальным. На рисунке 12 приведены результаты его исследований. Выясните, какому из трех процессов *1–2*, *1–3* или *1–4* соответствует «изоэрга», какому – изотерма, а какому – адиабата. Ответ обоснуйте.

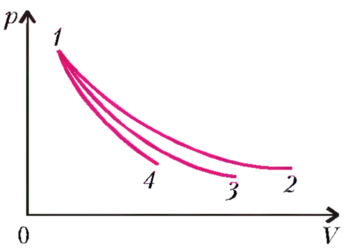


Рис. 12

Д.Александров

Заключительный этап

Теоретический тур

9 класс

Задача 1. Удаляющийся камень

Мальчик бросил камень под некоторым углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, при каких значениях α камень все время (до падения на землю) будет удаляться от мальчика.

С.Козел

Задача 2. Поплавок в центрифуге

На горизонтальной платформе стоит сосуд с водой. В сосуде закреплен тонкий стержень AB, наклоненный к горизонту под углом α (рис.13). Шар радиусом R может скользить без трения вдоль стержня, проходящего через его центр. Плотность шара ρ_0, плотность воды ρ ($\rho_0 < \rho$). При вращении системы с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси OO', проходящей через нижний конец A стержня, центр шара устанавливается на расстоянии l от этого конца. 1) С какой силой шар действует на стержень? 2) Найдите угловую скорость вращения платформы. 3) При какой минимальной угловой скорости вращения шар «утонет» и окажется на дне сосуда? Воды достаточно, так что шар всегда полностью погружен в воду.

В.Чивилёв

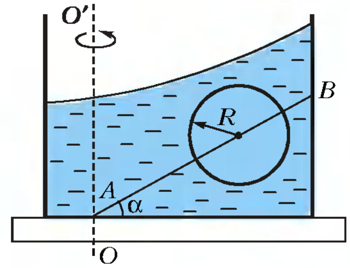


Рис. 13

Задача 3. Байкальские морозы

На поверхности озера Байкал зимой намерзает толстый слой льда. Предположим, что где-то в декабре толщина льда составляет x = = 80 см. Температура воздуха t = –40 °С. С какой скоростью v (в мм/ч) увеличивается в этот период толщина слоя льда? Для льда: плотность $\rho_л = 0{,}92$ г/см^3, удельная теплота плавления $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг, коэффициент теплопроводности $k = 2{,}2$ Вт/(м·°С).

Примечание. Количество теплоты, проходящее в единицу времени через слой вещества площадью S и толщиной h при разнице температур Δt между поверхностями, определяется соотношением $q = kS\Delta t/h$. Теплоемкость воды и льда не учитывать.

С.Козел

Задача 4. Нагревание и остывание проволоки

Цилиндрический проводник площадью поперечного сечения $S = 0{,}1$ см^2 подключают к источнику постоянного тока. Температура проводника начинает увеличиваться. Как видно из графика зависимости температуры t от времени τ (рис.14), через время $\tau_1 = 10$ мин температура проводника становится равной $t_1 = 90$ °С. 1) За какое время τ_0 температура проводника достигла бы значения t_1, если бы проводник был окружен теплонепроницаемой оболочкой? 2) Найдите силу тока I в проводнике. 3) Предположим, что по истечении времени $\tau_2 = 5$ мин проводник был отключен от источника тока и начал остывать. Определите, за какое приблизительно время $\Delta\tau$ температура проводни-

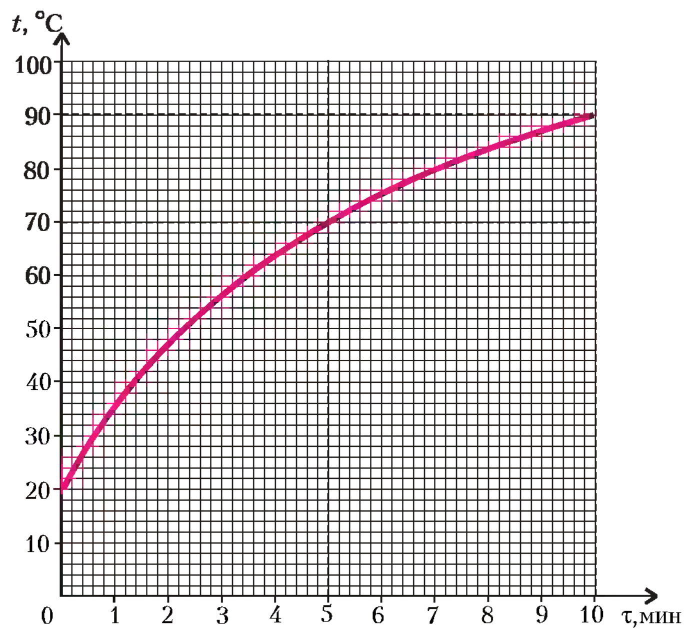


Рис. 14

ка изменится от 70 °С до 65 °С? Для материала проводника: удельная теплоемкость $c = 390$ Дж/(кг · °С), плотность $d = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, удельное сопротивление равно $\rho = 1{,}75 \cdot 10^{-8}$ Ом · м и практически не зависит от температуры.

С.Козел

10 класс

Задача 1. «Плоская» Земля

В древние времена люди считали Землю плоской. Вообразим, что Земля действительно не является шаром радиусом R = 6370 км, а представляет собой безграничный плоский слой толщиной H. Предполагая, что плотность Земли постоянна и одинакова в обеих моделях, определите, при какой толщине «плоской» Земли ускорение свободного падения на ее поверхности оказалось бы таким же, как и на поверхности реальной Земли.

Примечание. Можно использовать аналогию между электростатическим и гравитационным полями.

С.Козел

Задача 2. Ковер-самокат

Горка представляет собой плавный переход между двумя плоскими поверхностями, отстоящими друг от друга по высоте на h (рис.15). На горке и плоских поверхностях достаточно часто расположены небольшие шероховатые массивные валики, по которым катится длинный тяжелый ковер. Расстояние между осями соседних валиков равно l. Определите установившуюся скорость v ковра. Масса m валика сосредоточена в его ободе. Трением в осях валиков можно пренебречь. Первоначально валики были неподвижны. Погонная плотность ковра равна ρ. Гибкость ковра позволяет ему повторить профиль горки, но, вместе с тем, не дает переднему краю провалиться между валиками.

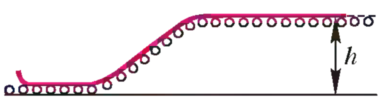


Рис. 15

Д.Александров

Задача 3. «Водородная бомба»

Водород находится в стальном сферическом контейнере высокого давления («бомбе»). Плотность стали $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, предел прочности $\sigma = 5 \cdot 10^8$ Н/м^2. Водород из контейнера заполняет легкую растяжимую оболочку воздушного шара при неизменной температуре T = 300 К. Может ли этот воздушный шар поднять сферический контейнер, в котором водород находился ранее? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К), молярную массу воздуха примите равной $\mathrm{M} = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. При расчете весом водорода и оболочки шара можно пренебречь.

С.Козел

Задача 4. Электрический ток вместо лопаты

В 1899 году выдающийся американский физик Роберт Вуд оригинально решил сложную техническую проблему, за что институт, в котором он работал, сразу получил премию в 200000 долларов. Придуманное им «электротаяние» широко используют и сейчас.

Однажды во время сильного мороза в проложенной под землей к дому сенатора железной трубе длиной l = 100 м на участке длиной $l_1 \approx 5$ м замерзла вода, и водопровод перестал работать. Вуд предложил подсоединить к концам трубы провода от вторичной обмотки понижающего трансформатора, и через t = 10 минут после подключения из крана полилась вода. Какое примерно напряжение было приложено к концам трубы, и какая сила тока была в ней? Как изменилось бы время отогрева, если бы длина замерзшего участка была в 2 раза больше?

Диаметры трубы: внутренний $D_1 = 20$ мм, наружный $D_2 = 26$ мм. Для железа: плотность $d_ж = 7{,}8$ г/см^3, удельная теплоемкость $c_ж = 0{,}45$ кДж/(кг · К), удельное сопротивление $\rho_ж = 0{,}1$ Ом · мм^2/м. Для льда: плотность $d_л = 0{,}9$ г/см^3, удельная теплоемкость $c_л = 2{,}1$ кДж/(кг · К), удельная теплота плавления $\lambda = 340$ кДж/кг.

Примечание. Для упрощения решения можно считать, что снаружи трубы также находится замерзшая вода.

В.Ефимов

Задача 5. Мигалка

В цепи (рис.16) переключатель K находится в среднем (разомкнутом) положении, а конденсаторы C_1 и C_2 одинаковой емкости C не заряжены. В некоторый момент переключатель замыкают в одно из положений. После установления равновесия в цепи его перебрасывают в противоположное положение. Найдите отношение $Q_{Л_1}/Q_{Л_2}$ количеств теплоты, выделившихся на лампах накаливания $Л_1$ и $Л_2$ после многократного повторения переключений. Источники тока с ЭДС $\mathcal{E}$, $2\mathcal{E}$ и $3\mathcal{E}$ считать идеальными.

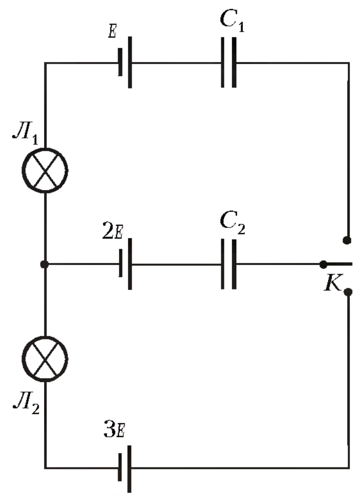


Рис. 16

Д.Подлесный

11 класс

Задача 1. Шарнирная конструкция

Конструкция (рис.17) состоит из трех одинаковых маленьких шариков массой m каждый, шарнирно соединенных легкими спицами длиной l. В положении равновесия конструкция удерживается вертикальной пружиной жесткостью k и имеет форму квадрата. 1) Найдите длину l_0 недеформированной пружины. 2) Пусть нижний шарик смещен по вертикали (вверх или вниз) на малое (по сравнению с l) расстояние x. Определите изменение $\Delta E_п$ потенциальной энергии системы. 3) Пусть нижнему шарику сообщена вертикально направленная скорость v. Определите кинетическую энергию $E_к$ системы. 4) Определите период T малых вертикальных колебаний нижнего шарика.

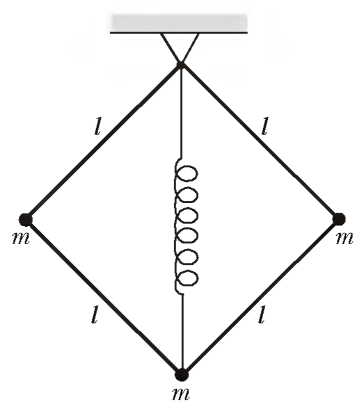


Рис. 17

С.Козел

Задача 2. Теплоемкость газа

С молем идеального газа произвели замкнутый цикл (рис.18), где *3–1* – адиабата. Определите максимальное давление газа за цикл и его теплоемкость C_V при постоянном объеме и вычислите (с точностью большей, чем дает прямое

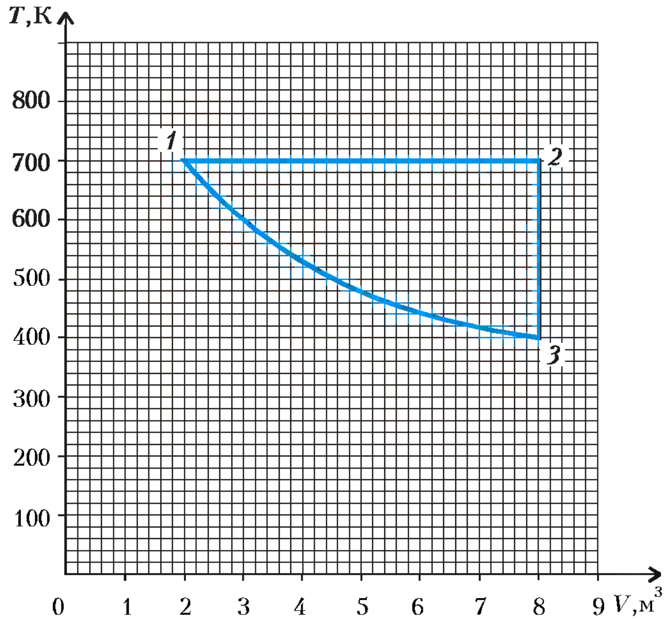


Рис. 18

измерение по графику) «тангенс» угла (К/м^3) между изотермой и адиабатой в точке *1*.

В.Муравьев

Задача 3. Глюк продолжает исследования

См. задачу Ф1887 из «Задачника «Кванта».

Задача 4. Заряженная частица в магнитном поле

См. задачу Ф1890 из «Задачника «Кванта».

Задача 5. Нелинейный элемент

В цепи (рис.19) электродвижущая сила источника $\mathcal{E} = 12$ В, сопротивление резистора $R = 4$ Ом, индуктивность катушки $L = 0{,}5$ Гн, а нелинейный элемент Э имеет известную вольт-амперную характеристику $I(U)$ (рис.20). В начальный момент ключ K разомкнут, ток в катушке не течет. 1) Какое количество теплоты выделится на нелинейном элементе после замыкания ключа? 2) Постройте качественный график зависимости тока в катушке от времени. Укажите характерные точки на графике. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

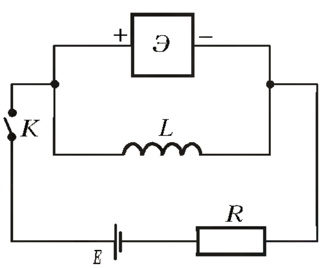


Рис. 19

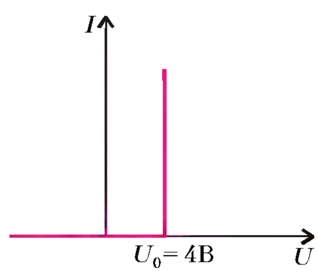


Рис. 20

Д.Подлесный

Экспериментальный тур

9 класс

Задача 1. Определите энергию, запасенную в пружине заводной игрушки (машинки), при фиксированном заводе.

Оборудование. Заводная игрушка известной массы, линейка, штатив с лапкой и муфтой, наклонная плоскость.

Примечание. Заводите игрушку так, чтобы ее пробег не превышал длину стола.

А.Москаленко

Задача 2. Определите плотность груза (резиновой пробки) и рычага (деревянной рейки), используя предложенное оборудование.

Оборудование. Груз известной массы (пробка маркированная), рычаг (деревянная рейка), цилиндрический стакан на 200–250 мл, нитки (1 м), деревянная линейка, вода.

И.Бовин

10 класс

Задача 1. Определите массу резинового шарика.

Оборудование. Резиновый шарик, 2 булавки и 2 силовые кнопки, нить, миллиметровая бумага формата А5, маркированный груз.

Примечание. В качестве маркированного груза используется моток ниток с ярлычком, на котором указана масса ниток.

Т.Тураева

Задача 2. Определите показатель преломления неизвестной жидкости.

Оборудование. Тонкостенный химический стакан (цилиндрической формы), исследуемая жидкость, миллиметровая бумага, источник света (карманный фонарик), ножницы, скотч.

Т.Тураева

11 класс

Задача 1. Измерьте силу натяжения нити, прикрепленной к столу в точках A и B, с подвешенным к ней посередине грузом (рис.21). Необходимо придумать два способа измерения: с использованием часов и без использования часов.

Оборудование. Закрепленная силовыми кнопками в точках A и B нить, груз известной массы m, кусок нити длиной 1 м.

Примечание. Длину верхней нити и положения точек A и B задают организаторы олимпиады.

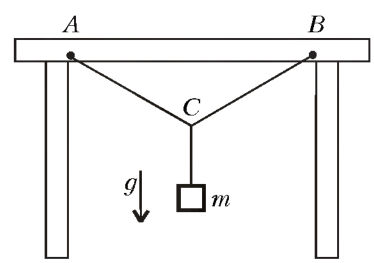


Рис. 21

В.Федоров

Задача 2. Определите показатель преломления неизвестной жидкости.

Оборудование. Чашка Петри, плоскопараллельная пластина, скотч, линейка (треугольник), лист бумаги, неизвестная жидкость.

Б.Татьянкин

Призеры олимпиады

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Ахунзянов Руслан – Набережные Челны, гимназия 57,
Гусихин Павел – Казань, ФМЛ 131,
Зоркин Сергей – Иркутск, лицей-интернат 1, 8 кл.,
Мозгунов Евгений – Сергиев Посад, ФМЛ,
Мельдин Игнат – Саратов, ФТЛ 1;

по 10 классам –

Оферкин Игорь – Новочебоксарск, гимназия 18,
Лесничий Яков – Кропоткин Краснодарского кр., лицей 3,
Моржаков Василий – Саратов, Лицей прикладных наук,
Глазырин Семен – Снежинск, гимназия 127,
Коноплев Евгений – Киров, школа 47,
Богословский Никита – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»;

по 11 классам –

Аверьянов Петр – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Кучумов Рустам – Пермь, ФМШ 146,
Фортунатов Антон – Долгопрудный, школа 5,
Лепешкин Сергей – Саратов, ФТЛ 1,
Егоров Михаил – Рязань, школа 63,
Мохначевский Александр – Якутск, Республиканский колледж,
Тявин Павел – Озерск Челябинской обл., ФМЛ 39,
Ульянов Александр – Саратов, Лицей прикладных наук,
Иванов Георгий – Екатеринбург, гимназия 161,
Касаткин Виктор – Санкт-Петербург, АГ СпбГУ.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Маловичко Иван – Москва, ФМЛ 1557,
Смирнов Сергей – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Храмцов Алексей – Дубна, лицей «Дубна»,
Бочкарев Константин – Тюмень, школа 31,
Власов Андрей – Саров Нижегородской обл., гимназия 2,
Жуков Павел – Долгопрудный, школа 5,
Павловский Константин – Санкт-Петербург, ФМЛ 30,
Семанин Александр – Долгопрудный, школа 5,
Харичкин Александр – Волгоград, лицей 5;

по 10 классам –

Мостовых Павел – Санкт-Петербург, школа 306,
Гаврилов Дмитрий – Чебоксары, лицей 44,
Речистов Григорий – Вологда, ВГЕМЛ,
Самонов Алексей – Иркутск, лицей-интернат 1,
Дзябура Евгений – Сергиев Посад, ФМЛ,
Белоусов Антон – Москва, лицей «Вторая школа»,
Перчуков Юрий – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Бочкарев Дмитрий – Магнитогорск, школа 56,
Гималтдинов Ильгиз – Нефтекамск, лицей 1,
Ларцев Арсений – Москва, ФМЛ 1557,
Перунов Николай – Оренбург, гимназия 1,
Зосимов Андрей – Дубна, лицей «Дубна»;

по 11 классам –

Рыжиков Михаил – Северодвинск, лицей 17,
Баканов Сергей – Астрахань, школа 32,
Лукьянов Игорь – Москва, СУНЦ МГУ,
Стародуб Виктор – Хабаровск, Лицей информационных технологий,
Григорьев Дмитрий – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Бурдейный Дмитрий – Нижний Новгород, лицей 40,
Татаринов Айсен – Якутск, Республиканский колледж,
Кудреватых Александр – Сыктывкар, КРФМЛИ,
Аполонская Инна – Бийск, лицей,
Ланцов Антон – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Новожилов Федор – Нарва (Эстония), Гуманитарная гимназия,
Храбрый Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Дегтярев Илья – Екатеринбург, школа 151,
Игудин Евгений – Смоленск, Педагогический лицей,
Кутафин Антон – Ливны Орловской обл., школа 4,
Алфимов Михаил – Брянск, лицей 1,
Соколов Андрей – Вологда, ВГЕМЛ,
Корчагин Александр – Дубна, лицей «Дубна»,
Лутохин Александр – Тамбов, лицей 14,
Мотузюк Артем – Дубна, лицей «Дубна»,
Наместников Артем – Киров, ФМЛ,
Флегонтова Екатерина – Якутск, школа 52,
Зернин Илья – Пермь, ФМШ 146,
Зорин Артем – Новосибирск, гимназия 1;

по 10 классам –

Анохин Павел – Чебоксары, гимназия 46,
Андреев Иван – Черноголовка Московской обл., ЭСОШ 82,
Бутюгин Дмитрий – Новосибирск, СУНЦ НГУ,
Понфиленок Олег – Казань, лицей 131,
Федотов Юрий – Тамбов, лицей 14,
Дремов Дмитрий – Волгодонск, школа 24,
Рябков Олег – Вологда, ВГЕМЛ,
Величкин Андрей – Набережные Челны, гимназия 57,
Желтов Алексей – Заречный Пензенской обл., лицей 230,
Степанова Анна – Воронеж, гимназия им.Басова,
Дворкин Михаил – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Папилин Сергей – Винсады Ставропольского кр., школа 9,
Ериклинцев Илья – Челябинск, ФМЛ 31,
Чернов Алексей – Киров, ФМЛ,
Зателепин Алексей – Долгопрудный, школа 5,
Пихенько Максим – Клинцы Брянской обл., школа 9;

по 11 классам –

Соловейчик Илья – Москва, гимназия 1516,
Имакаев Максим – Пермь, лицей 1,
Родионов Павел – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Сафронов Михаил – Москва, СУНЦ МГУ,
Сунцов Евгений – Киров, ФМЛ,
Украинцев Олег – Челябинск, ФМЛ 31,
Балакчин Виктор – Петропавловск-Камчатский, школа 33,
Смирнов Олег – Казань, лицей 131,
Храмов Василий – Саров Нижегородской обл., лицей 15,
Чегодаев Андрей – Обнинск Калужской обл., ФТШ,
Сыроватский Артем – Волжский Волгоградской обл., школа 30,
Каменских Марина – Пермь, ФМШ 146,
Снигирев Степан – Нижний Тагил, гимназия 86,
Тихонов Михаил – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа.

Публикацию подготовили Д.Александров, С.Дунин, И.Иоголевич, В.Михайлов, В.Слободянин

Финал VII Международного турнира «Компьютерная физика»

Турнир «Компьютерная физика» – часть программы Международного интеллект-клуба (МИК) «ГЛЮОН», проводимой с целью поиска, отбора и поддержки интеллектуально одаренных детей, проявляющих интерес к математике, физике и информатике. Уникальность и новизна этого турнира состоят в том, что все задачи предполагается решать с помощью численного моделирования на компьютере.

Для участия в турнире «Компьютерная физика» приглашаются команды школьников (5 человек), обладающих знанием физики и навыками работы на IBM PC. Турнир проводится в виде интеллектуального соревнования между командами в два тура – заочный и очный.

Заочный тур VII Турнира начался в октябре 2002 года после объявления задания, которое рассылалось в лицеи, школы и гимназии по заявкам. Шесть команд были приглашены на финал турнира (очный тур соревнований), который прошел с 19 по 26 января 2003 года в городе Пущино при участии Пущинского центра биологических исследований, Межрегиональной ассоциации «Женщины в науке и образовании», при поддержке компаний «1С», «Физикон», «Кирилл и Мефодий», «Интелл» (Московское представительство) и Соросовской программы в области точных наук. Участники турнира стали и участниками конференции «Математика. Компьютер. Образование», проводимой Межрегиональной ассоциацией «Женщины в науке и образовании».

Защита задания заочного тура проходила следующим образом. Каждой команде было предложено выступить с докладом и рассказать о результатах решения. Остальные команды в этот момент исполняли роль оппонентов и рецензентов. Научная дискуссия команд докладчиков, оппонентов и рецензентов завершилась победой ФМЛ 1511 при Московском инженерно-физическом институте (МИФИ).

Подготовка к соревнованиям очного тура началась с лекции профессора МГУ А.М.Попова об основах физики деления ядер. Затем в течение 36 часов команды школьников, образовавшие временные научные коллективы, в острой конкурентной борьбе пытались найти научно обоснованное решение поставленной задачи. На защите этого задания отличилась команда Классического лицея 1 при РГУ (г.Ростов-на-Дону), представившая наиболее глубокие результаты исследования условий реализации ядерного взрыва. Она стала абсолютным победителем турнира и получила переходящий приз «Хрустальный глобус». Дипломами I степени награждены команды ФМЛ 1511 при МИФИ и ФМЛ 1580 при Московском государственном техническом университете (МГТУ) им.Н.Э.Баумана. Дипломами II степени жюри отметило команды Самарского аэрокосмического лицея (СМАЛ), Самарского медико-технического лицея (МТЛ) и Многопрофильной гимназии 4 города Норильска. Участникам соревнований было вручено множество различных призов от спонсоров и организаторов турнира.

Впервые в рамках турнира был проведен конкурс компьютерного творчества, включивший в себя смотр компьютерных разработок и программ, а также компьютерные командные соревнования. Победителем этого конкурса стала команда МТЛ и отличилась команда Образовательного центра «Газпром».

Международный интеллект-клуб «ГЛЮОН» приглашает региональные центры, гимназии и школы, работающие с одаренными детьми, принять участие в VIII Международном Турнире «Компьютерная физика», который пройдет в феврале 2004 года в городе Дубне (Московская область).

Заявки на участие присылайте по адресу: 115522 Москва, Пролетарский пр., 15/2, МИК «ГЛЮОН». Тел.: (095)324-2040, факс: (095)396-8227, e-mail: gluon@yandex.ru (для информации см. также сайт: www.informika.ru/text/goscom/gluon).

Заочный тур. «Опыт Франка и Герца»

Об опыте Франка и Герца и о его двумерной компьютерной модели подробно рассказывалось в «Кванте» № 6 за 2002 год. Здесь же мы напомним само задание и проведем его разбор.

Задание

1. Исследуйте зависимость анодного тока от величины ускоряющего напряжения между катодом и сеткой в диапазоне значений $U_{KC} = 0{,}1 - 15$ В. Считать, что U_{CA} изменяется от $-0{,}2$ В до $-0{,}5$ В, а давление паров ртути составляет $p = 1$ торр.

2. Исследуйте зависимость анодного тока от давления паров ртути в диапазоне значений $p = 0{,}1 - 10$ торр. Считать, что $U_{KC} = 10$ В.

3. Получите распределение электронов по энергиям в различных областях пространства между катодом и анодом.

Разбор задания

Для получения информации о вольт-амперных характеристиках (ВАХ) требуется промоделировать случайные блуждания от катода к аноду нескольких тысяч электронов для накопления статистики. Зависимость смещения одного из электронов от времени приведена на рисунке 1. Как видно, электрон испытывает большое количество упругих соударений и блуждает в пространстве в диффузионном режиме, а в момент $t = 0{,}33$ мкс достигает анода.

Величина анодного тока определяется долей электронов, достигших поверхности анода. Рассчитанные ВАХ при различных значениях напряжения между анодом и сеткой представлены на рисунке 2 и демонстрируют наличие глубоких минимумов при значениях напряжения порядка 5, 10 и 15 В, связанных с потерей энергии электронами в одном, двух и трех неупругих соударениях. С увеличением давления паров ртути наблюдается падение анодного тока, связан-

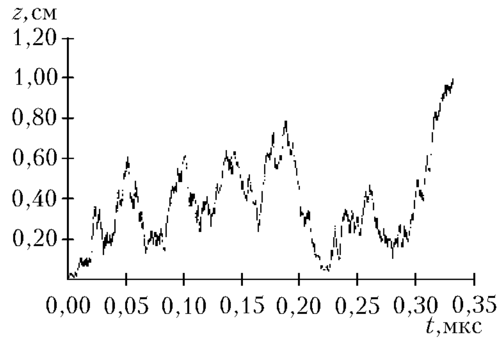


Рис.1. Блуждание одного из электронов от катода к аноду (U_{KC} = 4 В, U_{CA} = –0,3 В, p = 1 торр)

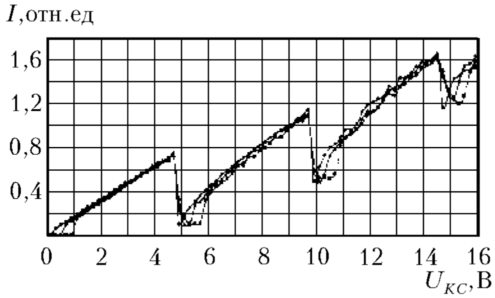


Рис.2. Вольт-амперные характеристики, полученные при одном и том же значении давления (p = 1 торр) и трех различных значениях напряжения между сеткой и анодом (–0,3 В, –0,1 В, –0,5 В)

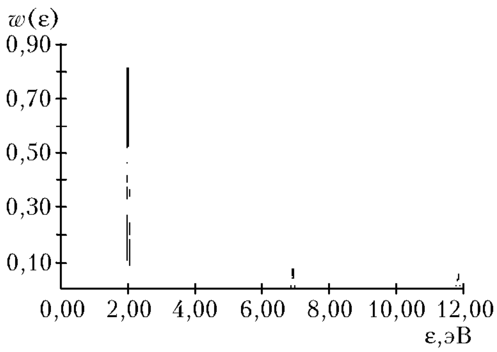


Рис.3. Вероятность распределения электронов по энергиям (U_{KC} =12 В, U_{CA} = –0,3 В, p = 1 торр, z = 0,8 см)

ное с ростом вероятности испытать неупругое соударение и не достичь поверхности анода.

Наличие неупругих соударений определяет характерную пичковую структуру энергетического распределения электронов (рис.3). В пространстве между сеткой и анодом, электроны группируются вблизи энергии порядка $\varepsilon = eU_{KC} - n\varepsilon^*$, где n = 0, 1, 2 и определяет количество неупругих соударений, испытанных электроном.

Очный тур. «Физика деления и взрыва»

Известно, что при делении тяжелых ядер освобождается энергия, которая примерно на семь порядков превышает энергию, выделяющуюся при протекании химических реакций. Открытый в 1938 году О.Ганом и Ф.Штрассманом процесс деления ядер урана нейтронами возвестил путь к использованию ядерной энергии. При этом для осуществления цепной реакции деления крайне важно, что в процессе деления ядра на два осколка образуется избыточное количество нейтронов (обычно их бывает 2 – 3 на один акт деления).

Скорость цепной реакции может быть различной в зависимости от условий, в которых осуществляется процесс. В частности, возможен неконтролируемый быстроразвивающийся процесс взрывного типа (ядерная бомба), а также медленный управляемый процесс, реализуемый на атомных электростанциях (АЭС).

На практике для осуществления взрыва используются изотопы урана $^{235}\mathrm{U}$ и плутония $^{239}\mathrm{Pu}$, в качестве же топлива на АЭС используют обогащенный уран, а иногда и природную смесь изотопов урана $^{238}\mathrm{U}$ и $^{235}\mathrm{U}$ (доля $^{235}\mathrm{U}$ составляет 0,7% от общего количества урана).

Особенностью процессов взаимодействия нейтронов с ядрами изотопов урана является то, что ядро $^{235}\mathrm{U}$ делится под действием нейтронов любых энергий, а ядро $^{238}\mathrm{U}$ – только быстрыми нейтронами (с энергией ≥1 МэВ), причем в этом случае велика вероятность радиационного захвата (нейтрон захватывается ядром, а избыточная энергия уносится γ-квантом). Эти обстоятельства делают непригодной природную смесь изотопов урана для осуществления цепной реакции взрывного типа.

Для развития и поддержания цепной реакции необходимо, чтобы число нейтронов в системе не убывало во времени. Учитывая, что скорость потерь нейтронов зависит от размера и формы установки (от массы делящегося вещества), мы приходим к выводу о существовании критических размеров (критической массы) расщепляющегося материала, при превышении которых цепная реакция может быть самоподдерживающейся. Минимальная критическая масса достигается для делящегося вещества сферической формы.

Участникам турнира предлагалось промоделировать процесс взрывного типа в чистых изотопах $^{235}\mathrm{U}$ и $^{239}\mathrm{Pu}$, а также в смеси $^{235}\mathrm{U} + ^{238}\mathrm{U}$ для различных процентных соотношений изотопов и определить энергию взрыва.

Основные параметры процесса таковы:

- константа скорости k и число вторичных нейтронов деления ν при делении ядра U (Pu) нейтроном;
- константа скорости k_γ при радиационном захвате (только для изотопа $^{238}\mathrm{U}$);
- время вылета нейтрона из делящегося вещества $\tau = R/V$, где R – размер куска расщепляющегося материала, $V = 10^9$ см/с – характерная скорость вторичного нейтрона.

Задание

Запишите уравнения, описывающие изменение концентрации нейтронов и ядер расщепляющегося материала во времени. Запишите выражение, определяющее зависимость энерговыделения от времени. На основе записанных уравнений проделайте следующее.

1. Промоделируйте развитие цепного процесса в образце чистого урана $^{235}\mathrm{U}$ в зависимости от его размера. Считайте, что образец имеет сферическую форму радиусом R. Определите величину критической массы $^{235}\mathrm{U}$. Параметры: $k = 1{,}5\cdot10^{-15}$ см$^3\cdot$с$^{-1}$, плотность $\rho = 19{,}5$ г/см^3, $\nu = 2{,}5$.

2. Промоделируйте развитие цепного процесса в образце плутония $^{239}\mathrm{Pu}$, если $k = 2{,}0\cdot10^{-15}$ см$^3\cdot$с$^{-1}$, $\rho = 19{,}86$ г/см^3, $\nu = 3{,}0$.

3. Промоделируйте развитие цепного процесса в образце, содержащем смесь изотопов $^{238}\mathrm{U} + ^{235}\mathrm{U}$ в зависимости от параметра α – процентного содержания $^{235}\mathrm{U}$ в смеси. Считайте, что цепная реакция развивается на ядрах обоих изотопов, причем $k_{238} = k_{235}/3 = 5\cdot10^{-16}$ см$^3\cdot$с$^{-1}$, а константа скорости радиационного захвата нейтронов ядрами $^{238}\mathrm{U}$ равна $k_\gamma = 2\cdot10^{-15}$ см$^3\cdot$с$^{-1}$. При делении одного ядра любого изотопа энерговыделение составляет q = 200 МэВ.

Следует учесть, что длительность развития процесса не может превышать время гидродинамического разлета образующейся высокотемпературной плазмы $\tau_{п} = R/c$, где $c \approx 10^6$ см/с – скорость звука.

Разбор задания

Уравнения, описывающие изменение во времени концентрации нейтронов n и ядер урана N, имеют следующий вид:

$$\frac{dn}{dt} = knN(\nu - 1) - \frac{n}{\tau}, \quad \frac{dN}{dt} = -knN.$$

В качестве начальных условий следует положить $N_0 = \rho/M$ (где M – масса атома урана), а $n(0) \approx 10^5$ см$^{-3}$ – такая концентрация нейтронов соответствует естественному фону, определяемому спонтанным распадом ядер. Записанные уравнения решаются методом Эйлера с шагом $\Delta t \approx 10^{-10}$ с.

Критический размер (масса) вещества находится из условия

$$\left.\frac{dn}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

Энергия взрыва определяется по формуле

$$E = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot qk\int_0^t n(t)N(t)\,dt.$$

На рисунках 4 и 5 приведены рассчитанные зависимости концентрации нейтронов от времени для надкритического режима, соответствующего ядерному взрыву ^{235}U, и энергии взрыва от массы образца. Критическая масса равна 66,3 кг.

В случае смеси изотопов ^{235}U и ^{238}U процесс взрыва описывается уравнениями

$$\frac{dn}{dt} = k_{235}nN_{235}(\nu - 1) + k_{238}nN_{238}(\nu - 1) - \frac{n}{\tau} - k_r nN_{238},$$

$$\frac{dN_{235}}{dt} = -k_{235}nN_{235}, \quad \frac{dN_{238}}{dt} = -k_{238}nN_{238}.$$

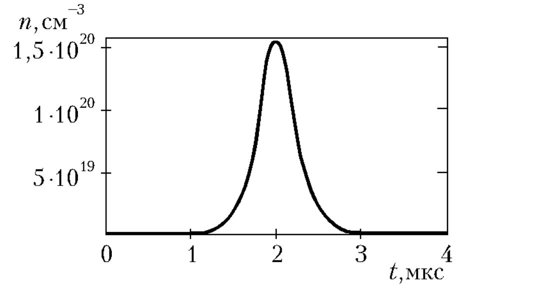


Рис.4. Зависимость концентрации быстрых нейтронов от времени

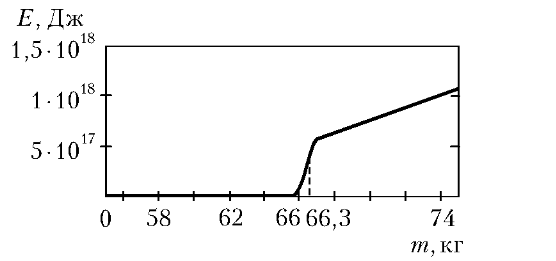


Рис.5. Зависимость энергии взрыва от массы вещества

В начальный момент времени $N_{235} = \alpha N_0$, $N_{238} = (1-\alpha)N_0$. Исследование зависимости критической массы от параметра α показывает, что ядерный взрыв может быть осуществлен только в сильно обогащенном уране ($\alpha \geq 0,5$).

Представленные результаты получены командой Классического лицея 1 при РГУ в составе Ю.Румеги, А.Смирнова, Н.Юрьева и И.Скибы.

Публикацию подготовили
В.Альминдеров, А.Попов, О.Поповичева

X Межобластная заочная математическая олимпиада школьников

Всероссийская школа математики и физики «АВАНГАРД» совместно с Министерством образования РФ и при участии журнала «КВАНТ» проводит очередную межобластную заочную математическую олимпиаду для школьников 6—10 классов. Срок проведения олимпиады октябрь – декабрь 2003 года.

Чтобы принять участие в олимпиаде, нужно в течение недели после получения этого номера журнала решить предлагаемые ниже задачи, аккуратно оформить решения (каждую задачу – на отдельном листочке) и отослать их по почте в обычном почтовом конверте в Оргкомитет олимпиады по адресу: 115446 Москва, а/я 450, Оргкомитет, «М-КВАНТ – номер класса» (например, «М-КВАНТ – 8» для учащихся восьмых классов).

В письмо вложите два пустых маркированных конверта с надписанным домашним адресом (для присылки вам результатов олимпиады).

Заметим, что для участия в олимпиаде необязательно решить все задачи – достаточно хотя бы одной. Победители олимпиады получат призы, среди которых несколько бесплатных подписок на журнал «КВАНТ». (Оргкомитет приложит все усилия к тому, чтобы поощрения и дипломы получили даже приславшие хотя бы одно правильное решение.)

Все учащиеся, приславшие свои работы в Оргкомитет олимпиады, независимо от результатов их проверки получат приглашение учиться на заочном отделении Всероссийской школы математики и физики «АВАНГАРД» в 2003/04 учебном году.

Âíèìàíèþ ó÷èòåëåé ìàòåìàòèêè 6–10 êëàññîâ!
Ïðèãëàñèòå ê ó÷àñòèþ â îëèìïèàäå ñâîèõ ó÷åíèêîâ!

Задачи олимпиады

6 класс

1. Определите пропущенные числа и найдите сумму

$$1 + 4 + 9 + \ldots + 225 + 256.$$

2. Замостите плоскость одинаковыми прямоугольными треугольниками.

3. Сколько существует трехзначных чисел, делящихся на 49?

4. Автомобильный номер в стране Авангардии состоит из двух букв русского алфавита и пяти четных цифр. Сколько автомобилей можно зарегистрировать в Авангардии?

5. Куб распилили на две части. Какие многоугольники могут быть на срезе?

7 класс

1. Фраза

Bekybekjwe – tvunemwe ctyd meuw,

имеющая прямое отношение к математике, зашифрована следующим образом: русские буквы заменены на латинские, причем гласные заменены на гласные, а согласные – на согласные. Расшифруйте фразу.

2. Из шести одинаковых спичек составьте четыре треугольника с вершинами в концах спичек.

3. Докажите, что разность четырехзначного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, не может равняться 2003.

4. Двое играют в следующую игру: они по очереди кладут на круглый стол по одной пятирублевой монетке. Проигрывает тот, кому не останется места. Докажите, что первый может не проиграть.

5. Мышь грызет куб сыра размером $3 \times 3 \times 3$, разрезанный на 27 единичных кубиков. Когда мышь съедает какой-либо кубик, она переходит к другому кубику, имеющему общую грань с предыдущим. Может ли мышь съесть весь куб, кроме центрального кубика?

8 класс

1. Решите в целых числах уравнение

$$x^3 - x = 2003.$$

2. Веревка равномерно намотана сверху донизу в виде винтовой линии в 8 полных оборотов на столб высотой 6 м и обхватом 1 м. Найдите длину веревки.

3. Что больше: 1000^{2003} или 2003^{1000}?

4. На планете Авангард суша занимает $1003/2003$ поверхности планеты, а остальное занимает океан. Докажите, что авангардцы могут прорыть прямой тоннель через центр планеты, выходящий в обе стороны на сушу.

5. Докажите, что

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{2003^2} < 1.$$

9 класс

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 1 - x.$$

2. Дан равносторонний треугольник со стороной единица. В каком отношении делит его площадь окружность с центром в одной из вершин, проходящая через центр треугольника?

3. Докажите, что произведение всех натуральных чисел от 1 до 2003 не может быть квадратом натурального числа.

4. См. задачу 5 для 7 класса.

5. Изобразите на плоскости параметров $0ab$ множество точек $(a;\ b)$ таких, для которых уравнение

$$(ab+1)x^2 + (a+b)x + 1 = 0$$

относительно переменной x имеет положительные корни.

10 класс

1. Найдите последнюю цифру числа 7^{2003}.

2. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ xy = 1 \end{cases}$$

при различных значениях параметра a?

3. Считая Землю шаром радиуса R, найдите площадь земной поверхности, ограниченной меридианами $19^\circ 59'$ и $20^\circ 37'$ восточной долготы, а также (с юга) траекторией кратчайшего пути между точкой пересечения первого меридиана с Северным тропиком и второго меридиана с Южным тропиком. (Широта тропика $23^\circ 27'$.)

4. Дана функция $f(x)$. Следует ли из периодичности функции $f(f(x))$ периодичность $f(x)$?

5. Изобразите на координатной плоскости $0xy$ множество точек, координаты x и y которых таковы, что уравнение

$$2a^2 - 4a\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \cos(x-y) - \cos(x+y) = 0$$

относительно a имеет корни разных знаков.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для «младших» школьников

Задачи

(см. «Квант» №4)

1. Пусть Вася задумал числа a, b, c, а Петя – числа x, y, z. Полагаем $xb = \frac{5}{9}$, $xc = \frac{5}{8}$, $ya = \frac{3}{7}$, $yc = \frac{9}{14}$, $za = \frac{7}{16}$. Отсюда

$$(xb)\cdot(yc) = \frac{5}{9}\cdot\frac{9}{14} = (xc)\cdot(yb) = \frac{5}{8}yb.$$

Значит, в центральной клетке находится число

$$yb = \frac{8}{5}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{9}{14} = \frac{4}{7}.$$

Аналогично находим числа в других клетках:

$$zb = (za)\cdot(yb):(ya) = \frac{7}{16}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{7}{3} = \frac{7}{12},$$

$$xa = (xb)\cdot(ya):(yb) = \frac{5}{9}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{4} = \frac{5}{12},$$

$$zc = (yc)\cdot(zb):(yb) = \frac{9}{14}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{7}{4} = \frac{21}{32}.$$

2. Сразу замечаем, что число $n = 10$ подходит (в этом случае буква И соответствует цифре 0, а остальные буквы можно заменять цифрами по-разному, например $\overline{ЖУК} = 123$). Докажем, что n не может принимать других значений. Предположим противное: пусть цифровому ребусу удовлетворяют два различных значения n, равные n_1 и n_2:

$$\overline{ЖУК} \times n_1 = \overline{ЖУКИ}, \qquad \overline{ЖУК} \times n_2 = \overline{ЖУКИ}.$$

Вычтя из первого равенства второе, имеем

$$\overline{ЖУК}\times(n_1-n_2)=0,$$

откуда $n_1=n_2$ – противоречие.

3. Суммы чисел, записанных около каждой вершины стопки, не могут быть равными.

Предположим, что это не так. Тогда, поскольку сумма чисел на всех картонных квадратах равна $(0+1+3+4)\cdot 25=200$, сумма чисел около каждой вершины стопки должна быть равной 200 : 4 = 50 – четное число.

Значит, если около некоторой вершины стопки записано нечетное число единиц, то возле этой же вершины стопки должно быть записано нечетное число троек. Следовательно, возле диаметрально противоположной вершины стопки также должно быть нечетное количество единиц. Итак, около любых двух диаметрально противоположных вершин стопки в общей сложности должно быть записано четное количество единиц. Тогда общее количество единиц должно быть четным, что противоречит условию.

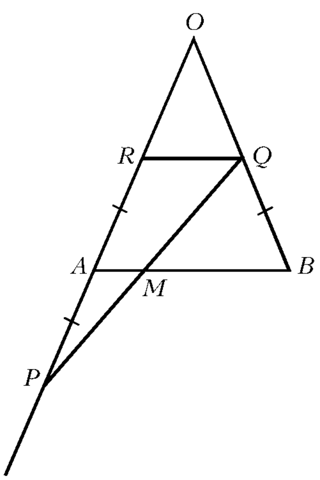


Рис. 1

4. Собака Моська за все время движения не выбежит за пределы аллеи AB. Покажем это. Пусть в некоторый произвольный момент времени одна из девочек находится в точке P, а другая – в точке Q, при этом $AP=BQ$ (рис.1). На стороне AO треугольника AOB рассмотрим точку R такую, что $AR=AP$. Треугольник ROQ – равнобедренный и $\angle ORQ=\angle OAB$, следовательно, $RQ\parallel AB$. Так как прямая AB проходит через середину стороны PR треугольника PRQ, то она делит другую сторону PQ этого треугольника пополам.

Итак, середина отрезка PQ располагается на отрезке AB.

5. Расположим решетку размером $m\times n$ вертикально так, чтобы ее высота равнялась m, а ширина – n. Заметим, что при этом у каждой заготовки один стержень будет вертикален, а второй – горизонтален. Поэтому суммарное количество горизонтальных единичных стержней в решетке равно суммарному числу вертикальных единичных стержней. Для решетки размером $m\times n$ эти значения равны $(m+1)\times n$ и $(n+1)\times m$ соответственно. Поэтому $(m+1)\times n=(n+1)\times m$, откуда $m=n$. Итак, если решетку можно изготовить, то она непременно *квадратная*.

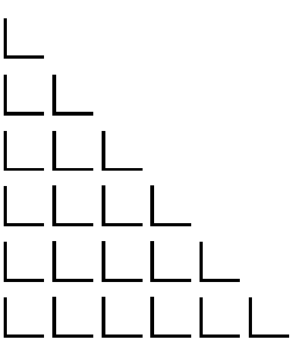


Рис. 2

Покажем, что можно изготовить квадратную решетку *любых* размеров. Для этого сначала изготовим две ее равные между собой половины, которые образуются, если разрезать решетку по диагонали. Такая половина решетки, напоминающая по форме прямоугольный треугольник, составляется из Г-образных заготовок вполне очевидным способом, показанным на рисунке 2. Соединив две такие половины, получим квадратную решетку нужного размера.

Итак, можно изготовить решетку $m\times n$ при любых натуральных $m=n$, и ни для каких других.

Поле Чудес

Пусть на каждом дереве вырастает N монет. Тогда во вторник Буратино получит $5N$ монет, в среду, самое большее, $5N^2$, а в пятницу не более $5N^4$ монет, следовательно, $5N\le 2002\le 5N^4$, откуда $5\le N\le 400$. В результате взращивания одного дерева число монет у Буратино увеличивается на $k=N-1$ (одну монету он закапывает в ямку). Значит, $4\le k\le 399$. Если Буратино закопал M монет (за все время выращивания урожая), то у него стало $5+kM$ монет. Приравняв это число к 2002, получим, что $kM=1997$. Но число 1997 простое, и его делители 1 и 1997 не удовлетворяют неравенству $4\le k\le 399$. Итак, Буратино не может получить ровно 2002 монеты.

Цепи и антицепи

1. 6, 5, 4, 3, 2, 1, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 24, 23, 22, 21, 20, 19.

3. Хотя это утверждение легко вывести из задачи М1774, забавы ради рассмотрим другое – чуть более длинное и трудное – доказательство. Неравенство $M\le m$ следует из того, что если в системе есть m попарно непересекающихся отрезков, то на каждый из них нужно поместить по крайней мере по одной точке.

Докажем теперь неравенство $M\ge m$. Для этого докажем, что из системы всегда можно выбрать некоторое количество k непересекающихся отрезков $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ и в каждом из них выбрать по точке $A_1,A_2,\ldots,A_k$ так, чтобы каждый из отрезков системы содержал одну из этих k точек. (Почему этого достаточно? Если удалось найти такие точки и отрезки, то $M\le k$ и $k\le m$, откуда $M\le m$.)

Как можно выбрать такие отрезки и точки? Выберем отрезок α_1, правый конец A_1 которого расположен левее, чем правые концы всех других отрезков. Выбросим из системы все отрезки, содержащие точку A_1 (в частности, α_1). (Мы считаем, что отрезки, о которых идет речь в задаче, замкнутые, т.е. содержат свои концевые точки. Впрочем, теорема, как легко убедиться, верна и для открытых интервалов – отрезков, из которых выброшены их концевые точки.)

Каждый из оставшихся отрезков (если такие есть) расположен целиком правее точки A_1 и не пересекается с отрезком α_1. К оставшимся отрезкам применим ту же процедуру – получим отрезок α_2 и точку A_2, затем – отрезок α_3 и точку A_3 и так далее до тех пор, пока справа от правого конца A_k отрезка α_k не останется ни одного отрезка. Тогда отрезки $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ и точки $A_1,A_2,\ldots,A_k$ – как раз те, что надо!

4. Это – утверждение теоремы Дилуорса для ЧУМа, элементы которого – данные натуральные числа, а упорядочение введено при помощи отношения делимости.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Проекционный аппарат создает на экране перевернутое изображение.

2. $\beta=2\alpha$; от угла падения луча на первое зеркало угол β не зависит.

3. Да. Например, остро отточенным карандашом можно сделать в листе бумаги отверстие размером 1–2 миллиметра и спроецировать изображение Солнца на стену комнаты (по принципу камеры-обскуры).

4. С удалением глаза от лупы уменьшается поле зрения.

5. Нет, лупа лишь увеличивает угол зрения, под которым виден предмет.

6. Слой воды, непосредственно соприкасающийся с роговицей

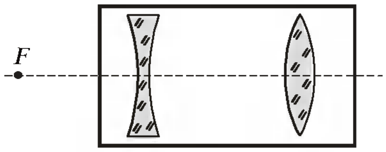


Рис. 3

глаза, ведет себя как сильно рассеивающая линза. Значит, в воздухе человеку необходимы очки для близоруких.

7. Оптическая сила линзы уменьшилась.

8. Да, если линза имеет достаточную толщину.

9. Это может быть, например, система, изображенная на рисунке 3, где F – фокус собирающей линзы.

10. Согласно принципу обратимости лучей, создать такую систему нельзя.

11. Изображение облаков получится ближе к объективу, чем изображение человека. Чтобы оно попало на пленку, объектив следует приблизить к ней, т.е. вдвинуть в фотоаппарат.

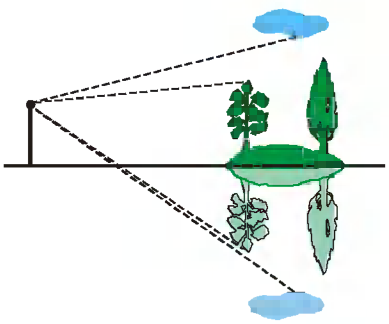


Рис. 4

12. Отраженный пейзаж мы видим так, как если бы смотрели на него из точки, расположенной под поверхностью воды на расстоянии, равном расстоянию от объектива до воды. На рисунке 4 видно, что в прямых лучах какие-либо точки предметов разделены большим угловым расстоянием, чем в отраженных лучах.

13. Нет, не может. Из-за ярко освещенной Солнцем поверхности Луны при фотографировании необходимо было делать короткие выдержки, недостаточные для того, чтобы звезды оставили следы на негативе.

14. Телескоп увеличивает контрастность изображения звезды на фоне неба.

15. Луна на картах обычно изображается так, как она видна в телескоп.

16. Для получения максимального увеличения в телескопе линза объектива должна быть с наибольшим фокусным расстоянием (100 см), а линза окуляра – с наименьшим (2 см). В микроскопе обе линзы – объектива и окуляра – должны иметь наименьшие фокусные расстояния (по 2 см).

17. Да, можно. Для этого достаточно выдвинуть окуляр так, чтобы изображение, даваемое объективом, оказалось дальше фокусного расстояния окуляра.

Микроопыт

Чем ближе фольга расположена к лампе, тем больше будет увеличение спирали. Ее шаг можно рассчитать по формуле $H = ha/b$, где h – расстояние между витками на экране, a – расстояние от лампы до фольги, b – расстояние от фольги до экрана.

Отражение и преломление света

1. $r_{\min} = R - \dfrac{H}{\sqrt{n^2-1}} = 2{,}1$ см.

2. $H = \dfrac{2a}{\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4n_1^2-3}} - \dfrac{1}{\sqrt{4n_2^2-3}}\right)}$.

3. $n = \dfrac{4}{3}$. **4.** $x = R\dfrac{n^2}{2+n-n^2} = 18$ см.

XXIX Всероссийская олимпиада школьников по математике

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

9 класс

1. Возьмем произвольные числа $a, b, c \in M$, $a \ne b \ne c$. Из рациональности чисел $a^2 + b\sqrt{2}$, $b^2 + a\sqrt{2}$, $c^2 + a\sqrt{2}$, $c^2 + b\sqrt{2}$ следует рациональность чисел

$$a^2 + b\sqrt{2} - \left(b^2 + a\sqrt{2}\right) = (a-b)\left(a+b-\sqrt{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(a\sqrt{2} - b\sqrt{2}\right)\left(a\sqrt{2} + b\sqrt{2} - 2\right)$$

и

$$c^2 + a\sqrt{2} - \left(c^2 + b\sqrt{2}\right) = a\sqrt{2} - b\sqrt{2},$$

т.е. числа $a\sqrt{2} + b\sqrt{2}$. Значит, число $a\sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{2} + b\sqrt{2} + a\sqrt{2} - b\sqrt{2}\right)$ рационально.

2. Заметим, что

$$\angle LAK = \angle BAK + \angle BAL = \frac{1}{2}\left(\angle BO_2A + \angle BO_1A\right) =$$

$$= \angle BO_2O_1 + \angle BO_1O_2 = 180^\circ - \angle LBK,$$

поэтому четырехугольник $ALBK$ – вписанный. Но тогда $\angle BAK = \angle BLK$, а $\angle BO_1O_2 = \frac{1}{2}\angle BO_1A = \angle BAK$ из касания, поэтому $\angle BO_1O_2 = \angle BLK$, следовательно, $O_1O_2 \parallel KL$.

4. $a_{2003} = 10p$.

Пусть в записи числа $1/n$ есть предпериод A из m цифр и период B из k цифр. Тогда из формулы суммы геометрической прогрессии имеем

$$\frac{1}{n} = \frac{A}{10^m} + \frac{B}{10^m\left(10^k-1\right)} = \frac{A\left(10^k-1\right)+B}{10^m\left(10^k-1\right)}.$$

Следовательно, $10^m\left(10^k-1\right) \vdots\, n$. Наоборот, пусть m, k – наименьшие числа такие, что $10^m\left(10^k-1\right) \vdots\, n$ (т.е. m есть максимальная из степеней двойки и пятерки, на которые делится n, а k – минимальное число такое, что $10^k - 1 \vdots \dfrac{n}{\text{НОД}\left(n, 10^m\right)}$), и пусть $C = \dfrac{10^m\left(10^k-1\right)}{n}$. Положим $A = \left[\dfrac{C}{10^k-1}\right]$, $B = C - A\left(10^k-1\right)$. Тогда $B < 10^k - 1$, $A < 10^m$, и дробь $1/n$ имеет предпериод A (с нулями, дополняющими его до m цифр) и период B (аналогично), ибо m и k были выбраны минимальными.

Из условия на p следует, что $p \ne 2$, $p \ne 5$ и p не может быть числом, в десятичной записи которого присутствуют только нули и единицы. Последнее следует из того, что сумма цифр такого числа должна равняться 300 и, значит, оно не простое. Мы докажем, что последовательность a_n будет периодической с периодом 2. Период обыкновенной дроби $1/p$ равен $\left(10^n-1\right)/p$, где n – наименьшее натуральное число, для которого $10^n - 1 \vdots\, p$. Таким образом, $a_2 = 2\left(10^n-1\right)/p$. Докажем, что $a_3 = 10p$. Поскольку a_2 делится на 2, но не делится ни на 2^2, ни на 5, период обыкновенной дроби $1/a_2$ будет равен $\left(10^{k+1}-10\right)/a_2$, где n – наименьшее натуральное число, для которого $10^{k+1} - 10 \vdots\, a_2 = 2\left(10^n-1\right)/p$ (в обозначениях первого абзаца A = 0, так как $a_2 > 10\left(a_2 \vdots 18\right)$, поэтому B = C). Следовательно, k является наименьшим натуральным числом, для которого

$$\left(10^k-1\right)p \vdots 10^n-1. \qquad (*)$$

Покажем, что в этом случае $k = n$. Сначала установим, что $n \vdots k$. Предположим противное, тогда $n = kq + r$, где $0 < r < k$. Заметим, что

$$\left(10^{kq}-1\right)p \vdots \left(10^k-1\right)p \vdots 10^n-1$$

и

$$\left(10^n-1\right) \vdots 10^n-1.$$

А значит,

$$10^{kq}\left(10^r-1\right)p = \left(10^n-1\right)p-\left(10^{kq}-1\right)p \vdots 10^n-1.$$

Стало быть, $\left(10^r-1\right)p \vdots 10^n-1$. Что невозможно, ибо k было наименьшим числом, удовлетворяющим условию $(*)$. Поэтому $n = km$ и $\left(10^k-1\right)p \vdots 10^{mk}-1$. Отсюда заключаем, что $p \vdots 10^{k(m-1)}+10^{k(m-2)}+\ldots+10^k+1$. Но p – простое число, следовательно, если $m \ne 1$, то $p = 10^{k(m-1)}+10^{k(m-2)}+\ldots+10^k+1$, что невозможно, ибо p не может быть числом такого вида. Итак, мы установили, что $k = n$, а значит, $a_3 = \left(10^{n+1}-10\right)/a_2 = 10p$. Для завершения доказательства осталось лишь заметить, что периоды чисел $1/p$ и $1/(10p)$ равны.

5. Переформулируем задачу на языке графов. Нам дан полный граф с N вершинами, ребра которого покрашены в два цвета. Требуется доказать, что мы можем выделить в этом графе цикл, проходящий через все вершины, состоящий не более чем из двух одноцветных частей. Доказательство проведем по индукции. Для полного графа с 3 вершинами утверждение очевидно. Пусть доказываемое утверждение верно для $N = k$. Рассмотрим полный граф с $k + 1$ вершиной. Удалим из рассмотрения одну вершину M с выходящими из нее ребрами. Для оставшегося графа с k вершинами по предположению индукции существует цикл, проходящий через все вершины и состоящий не более чем из двух одноцветных частей. Возможны два случая.

1) Все ребра цикла окрашены в один цвет. Занумеруем вершины цикла по порядку $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Тогда, удалив ребро A_1A_2 и соединив вершину M с вершинами A_1 и A_2, мы получим цикл, состоящий не более чем из двух одноцветных частей.

2) Не все ребра цикла окрашены в один цвет. Пусть изменение цвета происходит в вершинах A_1 и A_m, т.е. в цикле есть две одноцветные части: $A_1A_2\ldots A_m$ (первого цвета) и $A_mA_{m+1}\ldots A_1$ (второго цвета). Тогда посмотрим на цвет ребра A_mM. Если это ребро первого цвета, то цикл $A_1A_2\ldots A_mMA_{m+1}\ldots A_1$ – искомый, если же оно второго цвета, то искомым будет цикл $A_1A_2\ldots A_{m-1}MA_m\ldots A_1$.

Т.е. в любом случае мы получили требуемый цикл с $k + 1$ вершиной.

7. Нельзя.

Рассмотрим любой квадрат A размером 200×200 клеток. Пусть он будет угловым квадратом некоторого квадрата B размером $200t\times200t$ клеток, где t – некоторое натуральное число, на которое не делится сумма чисел в квадрате A. Разобьем фигуру $B\setminus A$ на прямоугольники размером $200\times200(t-1)$. В каждом из этих прямоугольников по условию сумма чисел будет делиться на t, в квадрате B – тоже, значит, и в квадрате A сумма чисел будет делиться на t, что невозможно в силу выбора t.

8. Рассмотрим окружности ω_1 и ω_2, построенные на диагоналях AC и BD как на диаметрах. Пусть BB_1, CC_1, AA_1, DD_1 – высоты в треугольниках BPC и APD соответственно (точки A_1 и C_1 лежат на ω_1, B_1 и D_1 – на ω_2). Тогда точки A, B, B_1, A_1 лежат на одной окружности, поэтому $H_1A\cdot H_1A_1 = H_1B\cdot H_1B_1$, т.е. H_1 лежит на радикальной оси ω_1 и ω_2. Аналогично, H_2 также на ней лежит, следовательно, эта радикальная ось есть прямая H_1H_2. Обозначим через M и N середины диагоналей AC и BD соответственно. Так как точка X по условию лежит на радикальной оси ω_1 и ω_2, то $XM^2-CM^2 = XN^2-DN^2$. Но треугольники XAC и XBD подобны, так как $\angle XAQ = \angle XBQ$, $\angle XCQ = \angle XDQ$, следовательно, эти разности квадратов должны относиться как квадрат коэффициента подобия или равняться 0. Но во втором случае получаем, что $\angle AXC = \angle BXD = 90°$, и тогда прямые AB и CD будут перпендикулярны (так как одна из них будет получаться из другой поворотной гомотетией с углом 90° и центром X), что противоречит различности точек H_1 и H_2. Значит, треугольники AXC и BXD будут равны. Но тогда равны будут и треугольники AYC и DYB, так как они подобны (по причинам, аналогичным подобию треугольников AXC и BXD) и имеют равные соответственные стороны ($AC = BD$). Значит, степени точки Y относительно окружностей ω_1 и ω_2 равны (так как $YM = YN$, $MC = ND$), поэтому она лежит на той же радикальной оси.

10 класс

1. Возьмем четыре различных числа a, b, c, $d \in M$. Из рациональности чисел d^2+ab и d^2+bc следует рациональность $bc - ab$, откуда $a^2+ab = a^2+bc-(bc-ab) \in \mathbf{Q}$. Аналогично, $b^2+ab \in \mathbf{Q}$. Поэтому для произвольных различных $a, b \in M$ число $q = \frac{a}{b} = \frac{a^2+ab}{b^2+ab} \in \mathbf{Q}$. Тогда $a = qb \Rightarrow a^2+ab = b^2\left(q^2+q\right) = l \in \mathbf{Q}$, $b = \sqrt{\frac{l}{q^2+q}} = \sqrt{\frac{m}{k}}$, $m, k \in \mathbf{N}$. Значит, $b\sqrt{n}$, где $n = mk$, рационально. Тогда для любого $c \in M$ $c\sqrt{n} = \frac{c}{b}\cdot b\sqrt{n} \in \mathbf{Q}$.

2. Не умаляя общности, можно считать, что $\angle ABO \ge \angle BAO$, тогда $ABOL$ и $DCOM$ – равнобочные трапеции (рис.5). Имеем: $\angle LOA = \angle OAB = \angle ODC = \angle DOM = \angle DCM = \angle CMO$ и $\angle KMC = \pi - \angle KOC = \angle KOA$, откуда $\angle KMO = \angle KOL$. Аналогично, $\angle KLO = \angle KOM$. Значит, треугольники KOM и KLO подобны. Но тогда подобны и треугольники KOP и KMQ. Отсюда $\angle KPO = \angle KQM = \pi - \angle KQO$. Значит, четырехугольник $KPOQ$ вписанный.

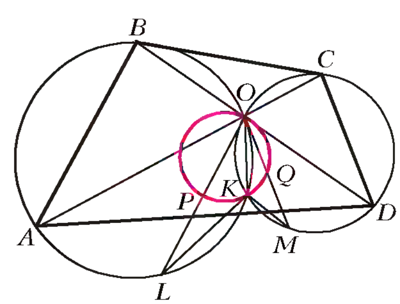


Рис. 5

3. Достаточно рассмотреть случай неотрицательных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть $x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_n > 0$.

Рассмотрим висячие вершины дерева (т.е. вершины, из которых выходит ровно одно ребро). Пусть некоторая висячая вершина x_i, $i \ne 1$, соединена с вершиной x_j, $j \ne 1$.

Сделаем следующую перестройку дерева: удалим ребро, соединяющее x_i и x_j, и добавим ребро, соединяющее x_i и x_1. Нетрудно видеть, что после перестройки граф остается деревом, а величина S изменяется на $x_1x_i - x_jx_i \ge 0$. Будем производить перестройки, пока это возможно. Поскольку при каждой перестройке увеличивается число вершин, соединенных ребром с x_1, через конечное число перестроек мы придем к дереву T, в котором каждая висячая вершина (за исключением x_1) соединена с x_1. Дерево T единственно: в нем вершина x_1 соединена со всеми остальными.

Осталось решить задачу для дерева T.

Имеем:

$$\sqrt{n-1}\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)-2S=$$

$$=\sqrt{n-1}\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)-2\left(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_n\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}x_1^2+\sqrt{n-1}x_2^2-2x_1x_2\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}x_1^2+\sqrt{n-1}x_n^2-2x_1x_n\right)=$$

$$=\left(\frac{x_1}{\sqrt[4]{n-1}}-\sqrt[4]{n-1}\,x_2\right)^2+\ldots+\left(\frac{x_1}{\sqrt[4]{n-1}}-\sqrt[4]{n-1}x_n\right)^2\geq 0\,.$$

4. Нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. *Если два треугольника T_1 и T_2 положительно гомотетичны и треугольник T_2 пересекает каждую прямую, содержащую сторону треугольника T_1, то T_2 содержит T_1.*

Доказательство. Из условия следует, что каждая сторона T_2 отделена от T_1 соответствующей стороной T_1, очевидно, отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 2. *Для любого конечного множества точек M и треугольника T найдется треугольник T', положительно гомотетичный T, содержащий M и содержащий на каждой своей стороне какую-то точку из M.*

Доказательство. Рассмотрим какой-то треугольник, положительно гомотетичный T и содержащий M. Если какая-то сторона не пересекается с M, уменьшим его гомотетией с центром в противоположной этой стороне вершине и добьемся, чтобы сторона пересеклась с M и треугольник все еще содержал M. Повторяя это для каждой стороны, получим требуемое.

Заметим, что в условии предыдущей леммы любой положительно гомотетичный T треугольник, содержащий M, содержит также и T' по лемме 1.

Теперь перейдем к решению задачи. Применим лемму 2 к T и X. Получим треугольник, обозначим его для определенности ABC. На сторонах BC, AC и AB есть, соответственно, три точки x_A, x_B и x_C из множества X, среди которых могут быть совпадающие.

Если ABC не превосходит T по размерам, доказательство очевидно закончено. Иначе рассмотрим три треугольника AB_AC_A, A_BBC_B и A_CB_CC, положительно гомотетичные ABC с центрами в его вершинах и равные исходному T. Обозначим подмножества множества X:

$$X_A=X\setminus\Delta AB_AC_A,\quad X_B=X\setminus\Delta A_BBC_B,\ X_C=X\setminus\Delta A_CB_CC.$$

Докажем еще одну лемму.

Лемма 3. *Если какой-то треугольник T', получающийся из T параллельным переносом, содержит точки x_A и x_B, то он не может пересекать множество X_C. Аналогично для других пар точек и соответствующего им множества.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда можно заметить, что T' пересекает все прямые сторон A_CB_CC, а значит, содержит A_CB_CC. Так как эти треугольники равны, то они совпадают, но тогда T' не может пересекать X_C.

Теперь применим лемму 2 к треугольнику T и множествам X_A, X_B, X_C, получим треугольники T_A, T_B, T_C, причем на их сторонах можно выбрать точки $\{x_{AB}, x_{AC}, x_A\}$, $\{x_{BA}, x_{CB}, x_B\}$, $\{x_{CA}, x_{CB}, x_C\}$ соответственно (некоторые из них могут совпасть), лежащие в соответствующих множествах X_A, X_B, X_C.

К точкам x_A, x_B, x_C, x_{AB}, x_{AC}, x_{BA}, x_{BC}, x_{CA}, x_{CB} применим условие задачи. Они содержатся в треугольниках T_1 и T_2, являющихся параллельными переносами T.

Какие-то две из первых трех точек содержатся в одном из этих треугольников, без ограничения общности $x_A, x_B \in T_1$. Тогда по лемме 3 T_1 не пересекает множество X_C и все три точки x_C, x_{CA}, x_{CB} содержатся в другом треугольнике T_2. Отсюда следует, что множество X_C содержится в T_2 по лемме 1; значит, треугольники A_CB_CC и T_2 покрывают все множество X.

6. Условие эквивалентно тому, что начиная с некоторого n число a_n не делится на 5. Докажем это.

Покажем, что найдутся 2 соседних члена последовательности, не делящихся на 5. Предположим противное. Тогда для любого n либо a_{n+1} получается из a_n делением на 5, либо a_{n+2} получается из a_{n+1} делением на 5. Заметим, что всегда $a_{k+1}\leq\sqrt{5}a_k$, поэтому $a_{n+2}\leq a_n\cdot\sqrt{5}/5<a_n$. Это означает, что последовательность натуральных чисел a_1, a_3, a_5 строго монотонно убывает – противоречие.

Итак, доказано, что найдутся a_k и a_{k+1}, не делящиеся на 5. Докажем, что a_{k+2} тоже не делится на 5. По условию $a_{k+1}=\left[\sqrt{5}a_k\right]$, $a_{k+2}=\left[\sqrt{5}a_{k+1}\right]$. Положим $a_k=m$, тогда $a_{k+1}=\sqrt{5}m-\alpha$, где $0<\alpha<1$. Далее,

$a_{k+2}=\left[\sqrt{5}\left(\sqrt{5}m-\alpha\right)\right]=5m+\left[-\sqrt{5}\alpha\right]$. Но поскольку $0<\sqrt{5}\alpha<3$, получаем, что $5m-3\leq a_{k+2}<5m$, т.е. a_{k+2} не делится на 5. Далее последовательно получим, что $a_{k+3}, a_{k+4}, \ldots$ не делятся на 5, откуда следует решение задачи.

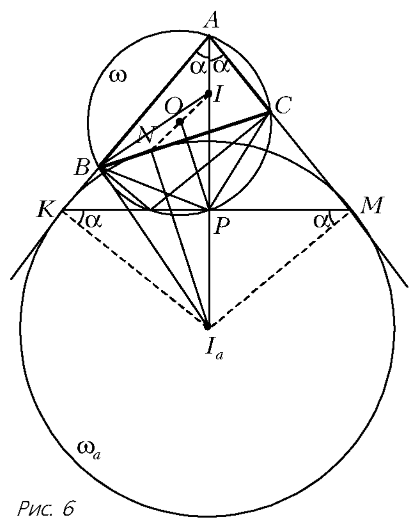


Рис. 6

7. Обозначим через I_a центр окружности ω_a, через R, R_a – радиусы окружностей ω, ω_a (рис.6). Поскольку $AK=AM$, прямая AP является биссектрисой угла KAM, следовательно, прямая AP проходит через I и I_a, точка P является серединой дуги BC окружности ω.

Лемма. $PI=PI_a=PB=PC$.

Доказательство. Обозначим $\angle BAI=\angle CAI=\alpha$, $\angle ABI=\angle CBI=\beta$. Далее, $\angle CBP=\angle CAP=\alpha$ (вписанные, опирающиеся на одну дугу). Отсюда $\angle IBP=\angle IBC+\angle CBP=\beta+\alpha$. Угол BIP – внешний для ΔABI, поэтому $\angle BIP=\angle ABI+\angle BAI=\beta+\alpha$. Получаем, что $\angle IBP=\angle BIP$, откуда $BP=IP$.

Далее, $\angle IBI_A=90^\circ$ (угол между внутренней и внешней биссектрисами $\angle ABC$), откуда $\angle PBI_a=90^\circ-\angle IBP=90^\circ-(\alpha+\beta)$, $\angle PI_aB=90^\circ-\angle BII_a=90^\circ-(\alpha+\beta)$. Получаем, что $\angle PBI_a=\angle PI_aB$, и $BP=I_aP$.

Аналогично доказывается, что $CP=IP=I_aP$. Лемма доказана.

Поскольку $\angle PKI_a=90^\circ-\angle KI_aP=\angle KAI_a=\alpha$, из ΔKPI_a получаем $PI_a=KI_a\cdot\sin\alpha=R_a\sin\alpha$.

Из ΔABP по теореме синусов находим $PB=2R\sin\alpha$.

Из леммы следует, что $PI_a = PB$, откуда $R_a = 2R$.
Пусть O' – середина отрезка NI. Тогда $O'P \parallel NI_a$, следовательно, $O'P \perp BC$. Далее, $O'P = I_aN/2 = R_a/2 = R$. Но $OP \perp BC$ и $OP = R$. Это означает, что $O' = O$, откуда следует утверждение задачи.

8. 209.
Приведем пример, показывающий, что $N \le 209$. Разделим таблицу на два прямоугольника 20×10 по вертикали. В первом прямоугольнике расставим числа от 1 до 200 по строкам в возрастающем порядке (в первой строке от 1 до 10, во второй – от 11 до 20 и т.д.). Во втором расставим так же числа от 201 до 400. Тогда максимальная разность между числами в любой строке равна 210 – 1 = 209, а в любом столбце 191 – – 1 = 190. Поэтому $N \le 209$.
Покажем, что N = 209 подходит. Рассмотрим два множества чисел: от 1 до 91 и от 300 до 400. Отметим все строки и столбцы, в которых есть числа первого множества, красным, а второго – синим. Покажем, что красным отмечено не менее 20 линий (т.е. строк или столбцов), а синим – не менее 21 (тогда какая-то линия будет отмечена и красным, и синим, и в ней максимальная разность чисел будет не меньше чем 300 – 91 = 209, что и требовалось).
Пусть красным отмечено i строк и j столбцов. Тогда все первое множество находится в клетках их пересечения, поэтому $ij \ge 91$. Отсюда $i + j \ge 2\sqrt{ij} \ge 2\sqrt{91} > 19$. Аналогично, для второго множества сумма числа строк и столбцов $i + j \ge 2\sqrt{101} > 20$.

11 класс

1. *Первое решение.* Без ограничения общности можно считать $\alpha - \beta \ge 0$, $\gamma - \tau \ge 0$. Положим $a = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $b = \frac{\alpha-\beta}{2}$, $c = \frac{\gamma+\tau}{2}$, $d = \frac{\gamma-\tau}{2}$, тогда условие задачи перепишется в виде

$$\sin ax \cos bx = \sin cx \cos dx,$$

где $a > b \ge 0$, $c > d \ge 0$.

Наименьший положительный корень левой части – число $\frac{\pi}{a}$ или $\frac{\pi}{2b}$, а правой – число $\frac{\pi}{c}$ или $\frac{\pi}{2d}$. Если $a = c$, то $\cos bx = \cos dx$ и, значит, $b = d$. Из этих равенств следует требуемое.

Пусть корень равен $\frac{\pi}{a}$. Если $\frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{2d}$, то $a = 2d$, и из равенства функций $\sin 2dx \cos bx = \sin cx \cos dx$ следует

$$2\sin dx \cos bx = \sin cx.$$

Приравнивая наименьшие положительные корни левой и правой частей, получаем $c = d$ (что невозможно) либо $c = 2b$. В последнем случае $\sin bx = \sin dx$, так что $b = d$. Тогда $\sin ax = \sin cx$, т.е. $a = c$. Так же $a = c$ и $b = d$ в случае $\frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{c}$. Наконец, в случае $\frac{\pi}{2b} = \frac{\pi}{2d}$ тоже получаем $b = d$ и $a = c$.

Второе решение. Продифференцируем равенство задачи и положим $x = 0$:

$$\alpha\cos\alpha x + \beta\cos\beta x = \gamma\cos\gamma x + \tau\cos\tau x \Rightarrow \alpha + \beta = \gamma + \tau.$$

Возьмем третью производную и подставим $x = 0$:

$$-\alpha^3\cos\alpha x - \beta^3\cos\beta x = -\gamma^3\cos\gamma x - \tau^3\cos\tau x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 = \gamma^3 + \tau^3.$$

Мы получили систему

$$\begin{cases}\alpha + \beta = \gamma + \tau, \\ \alpha^3 + \beta^3 = \gamma^3 + \tau^3,\end{cases}$$

из которой следует, что пары (α, β) и (γ, τ) совпадают.

3. Предположим, что $f \ne g$. Пусть

$$f(x) = c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1x + c_0$$

и

$$g(x) = d_kx^k + d_{k-1}x^{k-1} + \ldots + d_1x + d_0.$$

Поскольку $0 \le c_i \le m < b$, в b-ичной системе счисления число $f(b)$ будет записываться как $\overline{c_nc_{n-1}\ldots c_1c_0}$. Если все коэффициенты многочлена g также меньше b, то из единственности записи числа $f(b) = g(b)$ в b-ичной системе счисления мы можем заключить, что коэффициенты многочленов f и g совпадают, а значит, $f = g$. Пусть i – наименьший номер, для которого $d_i > b$. Тогда $d_i = bq + r$. Рассмотрим вместо многочлена g новый многочлен g_1, у которого коэффициент d_i заменен на r, а коэффициент d_{i+1} – на $d_{i+1} + q$. Тогда $g_1(b) = g(b)$, а $g_1(a) < g(a)$, ибо

$$d_ia^i + d_{i+1}a^{i+1} = (bq + r)a^i + d_{i+1}a^{i+1} >$$
$$> (aq + r)a^i + d_{i+1}a^{i+1} = ra^i + (d_{i+1} + q)a^{i+1}.$$

Далее продолжим эту процедуру со следующим номером i. На каждом шаге i увеличивается хотя бы на 1 и всегда не больше n, поэтому не более чем через n шагов процесс остановится, и мы придем к некоторому многочлену g_j, у которого все коэффициенты будут целыми неотрицательными и меньшими b. Тогда по единственности записи числа $f(b) = g_j(b)$ в b-ичной системе счисления следует, что многочлены f и g_j совпадают, но это невозможно, ибо $f(a) = g(a) > g_j(a)$. Противоречие.

5. В силу рациональности коэффициентов многочлена можно считать, что он приведенный. Из теоремы Виета следует, что если a, b, c – длины сторон треугольника, то $2p = a + b + c = A$, $ab + bc + ba = B$, $abc = C$ рациональны. Тогда из формулы Герона $S^2 = p \cdot (p^3 - Ap^2 + Bp - C)$ следует рациональность S^2. (Действительно, если $f(x) = 0$ – данное кубическое уравнение, то $\frac{S^2}{p} = f(p)$, так как $f(x) = (x - a)(x - - b)(x - c)$.)
Из равенств $h_a = \frac{2S}{a}$, $h_b = \frac{2S}{b}$, $h_c = \frac{2S}{c}$ следует, что h_a, h_b, h_c – корни уравнения

$$\left(x^2 - \frac{4S^2}{a^2}\right)\left(x^2 - \frac{4S^2}{b^2}\right)\left(x^2 - \frac{4S^2}{c^2}\right) = 0,$$

имеющего рациональные коэффициенты в силу тождеств

$$\frac{4S^2}{a^2} + \frac{4S^2}{b^2} + \frac{4S^2}{c^2} =$$
$$= \frac{4S^2}{C^2}\left(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2\right) = \frac{4S^2}{C^2}\left(B^2 - 2AC\right),$$

$$\frac{16S^4}{a^2b^2} + \frac{16S^4}{b^2c^2} + \frac{16S^4}{c^2a^2} =$$
$$= \frac{16\left(S^2\right)^2}{C^2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = \frac{16\left(S^2\right)^2}{C^2}\left(A^2 - 2B\right),$$

$$\frac{64S^6}{a^2b^2c^2} = \frac{64\left(S^2\right)^3}{C^2}.$$

7. Построим граф, вершины которого соответствуют городам, а ребра – дорогам. Выберем в этом графе самый длинный путь S, пусть вершины A и B – концы этого пути. Из условия задачи следует, что в пути S не более 99 вершин. Отметим, что концы пути S – вершины A и B – не могут быть смежны с вершинами не из S (иначе путь можно удлинить). А в случае, когда вершины A и B смежны и наш путь замыкается в цикл, никакая вершина пути S по аналогичным причинам не может быть смежна с вершиной не из S.

1) Рассмотрим случай, когда в S не более 98 вершин. В этом случае рассмотрим любые две вершины Y_1 и Y_2, не входящие в путь S, и концы пути A и B. Среди этих четырех вершин должны быть проведены хотя бы два ребра. Так как ни A, ни B не могут быть смежны с вершинами не из S, то концы пути A и B соединены ребром.

Таим образом, путь S замыкается в цикл, и тогда одна из вершин пути S не смежна с вершиной не из S. Рассмотрим четверку из любых двух вершин X_1 и X_2 пути S и любых двух вершин Y_1 и Y_2, не входящих в S. Так как между этими четырьмя вершинами проведено хотя бы два ребра, то одно из них соединяет X_1 и X_2, а другое – Y_1 и Y_2. Таким образом, в рассматриваемом случае все вершины пути S попарно смежны и все вершины не из S также попарно смежны. Отсюда очевидно следует утверждение задачи.

2) Рассмотрим случай, когда вне пути S лежит ровно одна вершина. Пусть это вершина D. Если D не смежна ни с одной из вершин пути S, то рассмотрим D и любые три вершины пути S. Поскольку среди этих четырех вершин проведено хотя бы два ребра, то среди любых трех вершин пути S проведено хотя бы два ребра. Следовательно, для любой вершины из S есть не более одной не смежной с ней вершины пути S. Поскольку 99 вершин пути S нельзя разбить на пары вершин, не соединенных ребром, то в S должна быть вершина, смежная со всеми остальными вершинами S. Эта вершина в паре с D удовлетворяет утверждению задачи.

Если концы максимального пути A и B смежны, то, как мы доказали, вершина D не смежна ни с одной из вершин пути S, а этот случай уже разобран.

Остается рассмотреть последний случай, когда концы пути S не смежны и вершина D смежна хотя бы с одной из вершин пути S. Рассмотрим вершины A, B, D и произвольную четвертую вершину Z (естественно, лежащую на пути S). Так как A, B и D попарно не смежны, то Z смежна хотя бы с двумя вершинами из A, B и D. Пусть D смежна с вершиной X пути S. Одна из соседних с X вершин пути S не является концом пути. Можно считать, что это первая вершина Y, лежащая на пути из X в B по ребрам S. Если Y смежна с D, то, пройдя от A к X по пути S, далее по ребрам XD и DY и затем по пути S от Y к B, мы обойдем все вершины нашего графа ровно по одному разу, что невозможно по условию.

Если же Y не смежна с D, то, как мы доказали, это вершина смежна и с A, и с B. Тогда пройдем по ребру DX, далее по пути S от X к A, по ребрам AY и YB и затем по пути S от его конца B до вершины, соседней с Y на пути S, – получится путь, проходящий по каждой вершине нашего графа ровно один раз, которого по условию не существует. Следовательно, и этот случай невозможен.

Таким образом, мы рассмотрели все случаи и в тех из них, которые возможны, убедились в справедливости утверждения задачи.

8. Обозначим вершины получающегося тетраэдра A_2, B_2, C_2 и D_2. Тогда тетраэдры $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ гомотетичны. Причем эта гомотетия переводит центр вписанной сферы тетраэдра $ABCD$ в центр описанной сферы тетраэдра $A_2B_2C_2D_2$. Покажем, что она переводит центр вписанной сферы тетраэдра $ABCD$ в центр описанной сферы тетраэдра $ABCD$.

Заметим, что точка A_2 – радикальный центр трех точек B, C, D и вписанной в тетраэдр $ABCD$ сферы, поскольку является точкой пересечения трех радикальных плоскостей (именно эти плоскости рассматриваются в задаче). В связи с этим точка A_2 равноудалена от вершин B, C и D. Поэтому прямая, проходящая через A_2 перпендикулярно плоскости BCD, проходит через центр описанной сферы $ABCD$. Именно эта прямая является образом при гомотетии прямой, проходящей через A_1 перпендикулярно BCD. Точка пересечения этих прямых – центр вписанной сферы $ABCD$ – переходит, таким образом, в центр описанной сферы $ABCD$. Что и требовалось.

XXXVII Всероссийская олимпиада школьников по физике

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП

8 класс

1. $\rho_2 = 2\rho_1/3 = 460$ кг/м^3. **2.** $v = u\dfrac{n_1+n_2}{n_2-n_1} = 76$ км/ч.

3. $m_б = \rho_б SH\dfrac{\rho_в-\rho_п}{\rho_в-\rho_б} \approx 0{,}35$ кг. **4.** $m = M\dfrac{\Delta t_1-\Delta t_2}{2\Delta t_2} = 10$ г.

9 класс

1. См. рис.7.

2. $t = v_0\sqrt{2}/g \approx 1{,}4$ с.

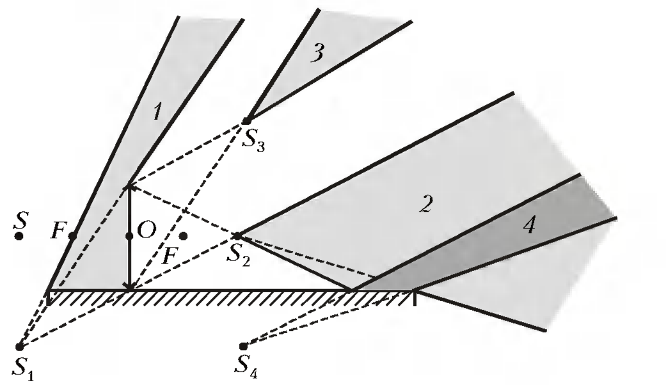


Рис. 7

10 класс

1. В первом случае сила трения направлена вверх по наклонной плоскости и равна $F_1 = T\dfrac{r}{R}$; во втором случае сила трения направлена вниз по наклонной плоскости и равна $F_2 = T\dfrac{r}{R}\dfrac{R+r}{R-r}$.

2. $T_D = T_BT_C/T_A$, $T_O = (T_A+T_B+T_C+T_D)/4$.

11 класс

1. $\delta = 2\sqrt{R^2-r^2} - 2r\arccos(r/R)$. **2.** $\gamma = 3$.

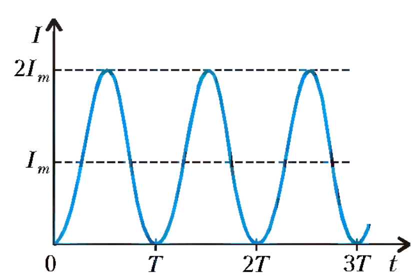


Рис. 8

3. $I = \frac{1}{2}\sum \frac{\mathcal{E}_i}{R_i} = 2$ мА .

4. $Q_m = ne\pi R^2 v\sqrt{4\pi\varepsilon_0 RL}$; см. рис.8, где

$I_m = ne\pi R^2 v$ и $T = 2\pi\sqrt{4\pi\varepsilon_0 RL}$.

ЗОНАЛЬНЫЙ ЭТАП

9 класс

1. Если $v_0^2/(2\mu g) < L$, то $\Delta t = 2v_0/(\mu g)$; в противном случае

$$\Delta t = 2\frac{v_0}{\mu g}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2L\mu g}{v_0^2}}\right).$$

10 класс

1. 1) Скорость легкого шарика равна $v = \sqrt{\frac{3kQ^2}{ma}}$, где $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, скорость каждого тяжелого шарика составляет

$V = \sqrt{\frac{2kQ^2}{Ma}}$;

2) $\alpha \approx \sqrt{\frac{m}{6M}}$.

2. $v = rx\sqrt{\rho g\pi/m} = 3{,}5$ мм/с .

11 класс

1. Кривая *1–2* – изотерма, *1–3* – «изоэрга», *1–4* – адиабата.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

9 класс

1. $\alpha < 70{,}5^\circ$.

2. 1) $F = \frac{(4/3)(\rho - \rho_0)\pi R^3 g}{\cos\alpha}$; 2) $\omega = \sqrt{\frac{g\,\mathrm{tg}\,\alpha}{l\cos\alpha}}$;

3) $\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{R}}\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

3. $v = k\frac{t_0 - t}{x}\frac{1}{\rho_л\lambda} \approx 1{,}3$ мм/ч (здесь $t_0 = 0\,^\circ\mathrm{C}$ – температура воды под слоем льда).

4. 1) $\tau_0 \approx 3$ мин ; 2) $I \approx 89$ А ; 3) $\Delta\tau \approx 16$ с .

10 класс

1. $H = 2R/3 \approx 4250$ км. **2.** $v = \sqrt{\rho ghl/m}$. **3.** Нет, не может.

4. $U = lD_1\sqrt{\frac{2{,}3\lambda d_л\rho_ж}{\left(D_2^2 - D_1^2\right)t}} \approx 41$ В , $I = \frac{U\pi\left(D_2^2 - D_1^2\right)}{4\rho_ж l_1} \approx 870$ А; время отогрева не изменилось бы.

5. $Q_{Л_1}/Q_{Л_2} = 2/3$.

11 класс

1. 1) $l_0 = \sqrt{2}l - \frac{2mg}{k}$; 2) $\Delta E_п = \frac{kx^2}{2}$; 3) $E_к = mv^2$;

4) $T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$.

2. $p_{\max} = 2{,}9$ кПа ; $C_V = (20{,}5 \pm 0{,}2)$ Дж/(моль · К);

$\mathrm{tg}\,\varphi = p_{\max}/C_V = (141{,}8 \pm 1{,}4)$ К/м^3.

5. 1) $Q = \frac{L}{2}\left(\frac{\mathcal{E} - U_0}{R}\right)^2 = 1$ Дж ; 2) см. рис.9.

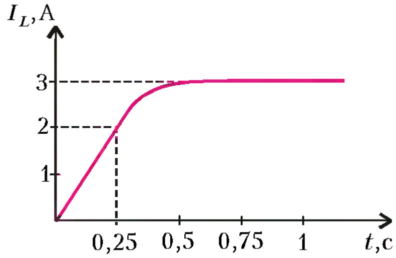


Рис. 9

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.А.Акатьева, Д.Н.Гришукова, В.Н.Иванюк, А.Е.Пацхверия, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №