ISSN 0130-2221
МАРТ/АПРЕЛЬ
2003· №2

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

Коллекция Коллекция Коллекция

Головоломок

Лиса и колобок

В 1994 году по инициативе изобретателя головоломок из города Тулы Владимира Рыбинского был создан клуб любителей головоломок "Диоген". Сейчас клуб насчитывает несколько десятков активных членов из разных городов России, выпускает свой собственный журнал "Шарада" с головоломками и их решениями, а также устраивает чемпионаты России по решению головоломок.

На заседание клуба, проходившее в декабре 2002 года в Москве, участники привезли придуманные и сделанные ими новые головоломки. По традиции, члены клуба дарили свои игрушки для ума друг другу. Таким образом, каждый приезжал с несколькими одинаковыми игрушками, а увозил домой все разные.

Головоломку, показанную на рисунке, придумали и изготовили Елена Жукова и ее отец Владимир Павлович, которые живут в городе Истре Московской области. Игрушка состоит из коробочки, куда помещены девять плоских плашек с кусочками картинки на тему русской сказки "Колобок". Как вы можете догадаться, задача заключается в том, чтобы переместить плашку, на которой нарисован колобок, как можно дальше от носа лисы – в верхний левый угол коробочки. В конце этого перемещения все остальные плашки должны вернуться на свои прежние места. Вынимать плашки запрещается, их можно только двигать внутри коробочки.

За сколько ходов вам удастся это сделать?

А.Калинин

Коллекция Коллекция Коллекция Коллекция Коллекция

КВАНТ

МАРТ АПРЕЛЬ 2003 №2

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

Бюро Квантум

В номере:

Вода внутри нас

К. БОГДАНОВ

Как это ни удивительно, но все мы более чем наполовину состоим из воды. Поэтому поговорка «... одно мокрое место останется» имеет под собой вполне реальную основу. Как следует из таблицы 1, содержание воды во всех органах и тканях человека (за исключением жира и костей) колеблется в относительно узком диапазоне от 68 до 83 %.

Таблица 1

Ткань или орган	Содержание воды, %	Ткань или орган	Содержание воды, %
Кожа	72	Легкие	79
Мышцы	75,6	Почки	82,7
Скелет	22	Селезенка	75,8
Мозг	74,8	Кровь	83
Печень	68,3	Кишечник	74,5
Сердце	79,2	Жировая ткань	10

В нормальном состоянии поступление воды в организм и ее потери уравновешены. В условиях умеренного климата человек в среднем потребляет 2,5 л воды в сутки. Таблица 2 иллюстрирует соответствующий водный баланс взрослого человека.

Таблица 2

Прием воды	мл/сутки	Потери воды	мл/сутки
Питье	1200	Моча	1400
Пища	900	Легкие и кожа	900
Обменные процессы [1]	300	Кал	100
Всего	2400	Всего	2400

Таким образом, ежесуточный круговорот воды у взрослого человека в среднем составляет около 3–4% массы тела. Минимальной суточной потребностью взрослого человека в воде принято считать 1,5 л, из которых 0,6 л необходимы для выведения шлаков почками, а 0,9 л испаряются в течение суток с поверхности кожи. Бóльшую часть веществ, удаляемых почками, составляют мочевина (30 г, или около 0,5 моль в сутки) и хлористый натрий (10 г, или около 0,2 моль в сутки). При этом максимальная концентрация веществ, растворенных в моче, составляет 1,2–1,4 моль/л, что и определяет минимальный объем жидкости, выделяемой с мочой.

Уменьшение поступления воды в организм (дегидратация) чревато тяжелыми последствиями. Часть из них связана с тем, что кровь, становясь при этом более концентрированной и вязкой, уже не в состоянии течь по тончайшим капиллярам многих органов, и эти органы начинают отмирать. В тех случаях, когда количество воды в организме уменьшается на 1/3, наступает смерть. Интересно, что смертельные случаи, вызванные дегидратацией, были отмечены у лиц, потерпевших кораблекрушение и пытавшихся утолить жажду морской водой, концентрация растворенных веществ в которой составляет около 0,9 моль/л. Причиной дегидратации в этом случае служит то, что для выведения солей, содержащихся в морской воде, организм вынужден использовать собственную воду, а потребление 1 л морской воды сопровождается образованием по меньшей мере 1,6 л мочи.

Как же узнать, сколько в нас воды? Для этого обычно используют методы, основанные на принципе разведения индикатора. Очевидно, что если ввести в кровь человека безвредное вещество, свободно (так же, как вода) проникающее через мембраны всех клеток организма, то через некоторое время его концентрация будет одинакова во всех жидких фазах организма. После чего, разделив количество введенного индикатора на его концентрацию в организме, можно найти объем жидкой фазы тела человека.

Для определения общего объема воды в организме в качестве индикатора чаще всего используют антипирин, а также тяжелую воду (D_2O, или ^3H_2O). Эти вещества уже через два часа равномерно распределяются между различными жидкостями организма. Однако за это время часть введенного вещества выводится из кровяного русла и концентрируется в мочевом пузыре, что мешает оценить истинный объем жидкой фазы организма. Поэтому необходима количественная аппроксимация процесса разведения индикатора на математической модели.

Пусть V – объем жидкой фазы организма, $C(t)$ – концентрация индикатора в ней, ΔC – изменение этой концентрации за время Δt и v_0 – объемная скорость выведения жидкости вместе с растворенным индикатором через почки. Тогда из закона сохранения масс (для индикатора) следует

$$V\Delta C = -Cv_0 . \qquad (1)$$

Интегрируя уравнение (1), получаем

$$\ln C(t) = \ln C(0) - \frac{v_0 t}{V}, \qquad (2)$$

[1] *При окислении 1 г углеводов, жиров и белков образуется 0,6, 1,1 и 0,4 мл воды соответственно.*

Иллюстрация В.Власова

где $C(0)$ – концентрация индикатора сразу после его введения в организм (считаем, что проникновение индикатора во все жидкие среды и перемешивание происходит мгновенно). Из выражения (2) следует, что кривая $C(t)$ в полулогарифмических координатах должна иметь вид прямой линии, пересекающей ось ординат в точке $C(0)$. Таким образом, если экспериментально полученную кривую разведения индикатора (т.е. зависимость концентрации индикатора от времени) построить в полулогарифмических координатах и аппроксимировать ее к оси ординат, то можно получить искомое значение $C(0)$, необходимое для вычисления объема жидкой фазы организма.

Заметное в левой части графика на рисунке 1 существенное превышение реально измеренной концентрации индикатора (сплошная линия) над ее аппроксимацией (штриховая линия) говорит о том, что в действительности равномерное распределение индикатора

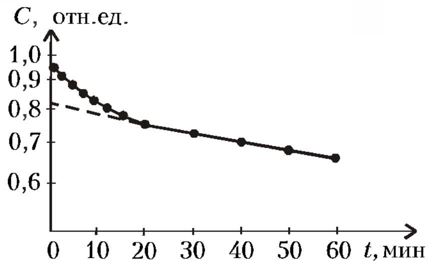


Рис.1. Изменение концентрации индикатора в плазме крови с течением времени

происходит не мгновенно, и в течение всего времени распределения концентрация в крови несколько больше, чем в остальных жидких средах организма.

У взрослых мужчин масса воды, содержащейся в организме и измеренная так, как это описано выше, составляет в среднем 60% массы тела, а у женщин – 50%. При этом бóльшая часть воды находится в мышцах (32% массы тела), коже (13%) и крови (7%).

Аналогичным способом можно измерить объем внеклеточной жидкости в организме. Для этого в кровь человека вводят индикаторы, не проникающие через клеточные мембраны. Такими индикаторами обычно являются различные сахара, а в качестве стандартного вещества, используемого для определения суммарного внеклеточного пространства, исследователями был выбран инулин, который очень быстро выводится из организма. Масса воды во внеклеточном пространстве, определенная с помощью инулина (инулиновое пространство), составляет в среднем 16,5% массы тела. Однако если использовать в качестве индикатора другие вещества (такие, как тиоцианат) и ждать достаточно долго (от 5 до 10 часов), то окажется, что истинное внеклеточное пространство может составлять до 27% массы тела.

Очевидно, что объем воды, содержащейся внутри клеток, можно найти, вычитая из суммарной воды организма ее внеклеточную часть. Поэтому считают, что внутриклеточная вода составляет около 33% массы человека.

Чудесный фильтр

Все клетки нашего организма окружены со всех сторон межклеточной жидкостью. Необходимым условием работы клеток является постоянство объема этой жидкости и ее состава. Это утверждение впервые высказал более 100 лет назад известный французский физиолог Клод Бернар. Каким же образом поддерживается это постоянство?

В принципе, количество воды в организме и состав межклеточной жидкости регулируются нами подсознательно, когда мы, например, удовлетворяем возникшее чувство голода или жажды. Большая часть избытка воды и электролитов выводится через почки, поэтому основой для поддержания постоянного состава и объема жидкостей организма является нормальная работа почек. Структурно-функциональной единицей почки, в которой происходит образование мочи, служит нефрон. В каждой почке человека, имеющей массу около 150 г, содержится приблизительно 1 млн нефронов.

Как изображено на рисунке 2, нефрон состоит из двух основных частей: почечного клубочка *1* и канальцев *2*, изогнутых в виде петли Генле *3*. Артериальная

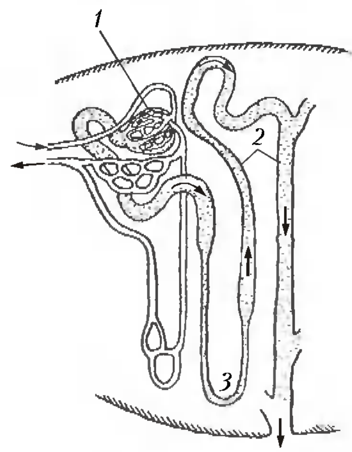


Рис.2. Схематическое изображение нефрона

кровь, проходя через капилляры, находящиеся в клубочке, фильтруется через их стенки, и получившийся фильтрат оказывается в полости, открывающейся в почечный каналец. Эта жидкость, уже не содержащая молекул с молекулярной массой больше 80000 дальтон (в химии атомную единицу массы называют дальтоном и, соответственно, молекулярную массу измеряют в дальтонах), получила название первичной мочи. Ее объем составляет в сутки около 180 л, а по составу она отличается от плазмы крови только тем, что в ней отсутствуют высокомолекулярные белки.

Источником энергии для фильтрации плазмы крови в почечном клубочке служит сердце. Сокращаясь, оно создает избыточное давление (20–30 мм рт. ст.) внутри капилляра в клубочке, которое и заставляет часть проходящей через капилляр крови фильтроваться через его стенку, образуя первичную мочу. В почечном канальце, изогнутом в виде петли Генле, происходит концентрация первичной мочи, и в результате 99 % содержащейся в ней воды – 178,5 л в сутки – возвращается обратно в кровь и только 1,5 л выводится в виде мочи.

Рассмотрим подробнее, как происходит концентрация раствора в петле Генле. Саму петлю Генле можно смоделировать, представив ее в виде трубки, разделенной полупроницаемой мембраной (*М*) на два колена (левое *Л* и правое *П*) одинаковых размеров (рис.3). Колена петли соединяются между собой узкой капиллярной трубкой (*К*), через которую жидкость из левого колена под действием давления перетекает в правое.

Пусть сначала капилляр, соединяющий колена петли, закрыт, и оба колена заполнены одинаковой по составу жидкостью (см. рис.3,*а*). Естественно, что

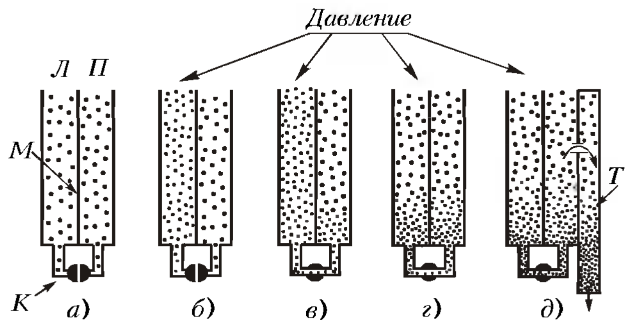


Рис. 3. Иллюстрация противоточного механизма концентрации мочи в петле Генле

движения жидкости по петле в этом случае не будет, однако, если к колену *Л* приложить гидростатическое давление, то вода (для которой мембрана проницаема) начнет переходить из левого колена в правое. В результате концентрация веществ в левом колене будет расти, а в правом уменьшаться.

Однако как только концентрация веществ в левом колене петли начнет увеличиваться, возникнет обратный поток воды (справа налево), вызванный тем, что ее концентрация в правом колене выше, чем в левом. Такое проникновение растворителя (в данном случае воды) через полупроницаемую мембрану, разделяющую два раствора с разными концентрациями, называют осмосом. При этом молекулы растворителя проходят через мембрану, непроницаемую для растворенных веществ, в более концентрированный раствор, и этот процесс идет до выравнивания концентраций. Для того чтобы предотвратить выравнивание концентраций, происходящее вследствие осмоса, можно приложить к левому колену дополнительное давление, которое будет препятствовать движению воды. Это давление $\Delta\pi$ называют осмотическим давлением, и, как нетрудно показать, его можно вычислить по формуле

$$\Delta\pi = RT\left(C_Л - C_П\right), \qquad (3)$$

где R – универсальная газовая постоянная, T – температура (в кельвинах), а $C_Л$ и $C_П$ – концентрации растворенных веществ в левом и правом коленах петли соответственно. Следует отметить, что если растворенное вещество диссоциирует в растворе на несколько ионов, то его осмотическая концентрация равняется сумме концентраций ионов в растворе. Так, например, для того чтобы вычислить осмотическое давление одномолярного раствора NaCl, в формулу (3) необходимо подставить значение концентрации с учетом того, что NaCl в воде диссоциирует на ионы Na и Cl. Чтобы не возникало путаницы, для измерения осмотической концентрации выбрали специальную единицу – осмоль/л. Таким образом, осмотическая концентрация одномолярного раствора NaCl рава 2 осмоль/л.

Очевидно, что, когда поток воды слева направо, вызванный градиентом гидростатического давления, станет равным осмотическому потоку справа налево, наступит равновесие (см. рис.3,*б*). Это произойдет, когда градиент осмотического давления станет равным гидростатическому давлению, приложенному к левому колену петли. Соответствующую разность концентраций можно найти, используя уравнение (3).

Откроем теперь капилляр (*К*), соединяющий колена петли. Так как капилляр очень узок, можно считать, что градиент гидростатического давления между коленами остался тем же. В то же время в правом колене сразу после открытия капилляра (сначала в нижней части *П*, а потом и в верхней) появится концентрированная жидкость (см. рис.3,*в*). А это значит, что равновесие между *Л* и *П* нарушилось (градиент осмотического давления уменьшился), и слева направо опять начнет поступать вода. В результате концентрация веществ в жидкости левого колена вблизи капилляра вырастет. Таким образом, противоточная система обменивающихся через полупроницаемую мембрану жидкостей приводит к повышению концентрации раствора вблизи точки поворота (см. рис.3,*г*).

Заметим, что концентрация раствора, покидающего петлю, такая же, как и концентрация поступающего. Следовательно, концентрирующая способность противоточной петли в данном случае не используется. Для того чтобы удалять концентрированный раствор из петли Генле, Природа предусмотрела третье колено (*Т*), отделенное от *П* полупроницаемой мембраной и соединенное с ним небольшим отверстием (см. рис.3,*д*). Так как отверстие очень мало, то только малая часть жидкости (около 1 %) оттекает из *П* в колено *Т*, и поэтому движение жидкости по петле и концентрационный градиент не нарушаются. В то же время жидкость, движущаяся медленно (диаметр колена тот же, а расход жидкости около 1%) сверху вниз по колену *Т*, приходит в осмотическое равновесие через полупроницаемую мембрану и покидает эту трехколенную петлю Генле с очень высокой концентрацией веществ, равной концентрации в месте соединения *П* и *Л*.

Попробуем количественно оценить концентрирующую способность петли Генле. Разобьем каждое колено петли по вертикали на N сегментов: 1-й наверху, а N-й в самом низу (рис.4). Пусть концентрация в левом колене петли в k-м сегменте в момент времени t равна $L_k(t)$, а в аналогичном сегменте справа – $R_k(t)$. Для того чтобы облегчить расчеты, примем, что движение раствора по петле имеет прерывистый характер. При этом раствор «мгновенно» передвигается на длину сегмента s, после чего покоится в течение интервала

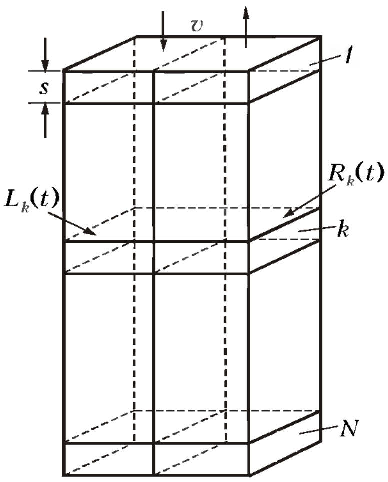


Рис. 4. Элементы модели колена петли Генле

времени s/v, где v – средняя линейная скорость движения жидкости по петле. Будем считать, что перетекание воды между соседними сегментами колен через полупроницаемую мембрану (полностью проницаемую лишь для воды) имеет место только после завершения очередного «шажка» и происходит в течение времени s/v.

Процесс переноса растворителя (в данном случае воды) через мембрану под действием градиента гидростатического давления называется ультрафильтрацией. Объемную скорость ультрафильтрации $\Delta V/\Delta t$ можно найти из уравнения

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = k_{\text{ф}} A\left(p + \Delta\pi\right),$$

где $k_{\text{ф}}$ – коэффициент фильтрации, A – площадь мембраны, p – величина градиента гидростатического давления, а $\Delta\pi$ – осмотическое давление между этими растворами, связанное с концентрациями веществ в них по формуле (3). Пусть все сегменты петли равны и каждый имеет форму параллелепипеда с площадью боковой грани A. Тогда, подставляя $\Delta t = s/v$ и принимая $V = sA$, получаем

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{k_{\text{ф}}\left(p + RT\left(R_k - L_k\right)\right)}{v}. \tag{4}$$

Выражение (4) дает нам возможность вычислить относительное изменение количества воды после одиночного акта ультрафильтрации длительностью s/v. Очевидно, зная это, мы сможем уже вычислить изменение концентраций в обоих граничащих сегментах после ультрафильтрации:

$$\begin{aligned} L_k(\text{после}) &= L_k(\text{до})\left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right), \\ R_k(\text{после}) &= R_k(\text{до})\left(1 - \frac{\Delta V}{V}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Ну что ж, ультрафильтрацию мы, кажется, описали полностью, но ведь жидкость еще движется. Запишем кинематические соотношения. Пусть единицей времени (t) у нас будет s/v. В нашей модели раствор, только что поступивший в левый k-й сегмент, имеет ту же осмотическую концентрацию, что и в $(k-1)$-м сегменте в предыдущий момент времени; для сегментов правого колена имеют место аналогичные зависимости. Поэтому кинематические соотношения будут иметь такой вид:

$$\begin{aligned} L_k(t+1) &= L_{k-1}(t), \\ R_k(t+1) &= R_{k+1}(t). \end{aligned} \tag{6}$$

В первый сегмент левой части петли все время поступает первичная моча с постоянной осмотической концентрацией a, поэтому при расчетах по формулам (5) и (6) следует полагать $L_1 = L_1(\text{до}) = a$. Кроме того, для расчетов по формуле (6), очевидно, следует положить $L_0 = a$. В самый нижний сегмент правого колена петли жидкость поступает сразу из нижнего сегмента левого колена, минуя капилляр, объемом которого можно пренебречь. Поэтому в формуле (6) R_{N+1} следует полагать равным L_N.

Система уравнений (4)–(6) описывает изменение осмотических концентраций при переходе от момента t к моменту $t+1$. Для решения этих уравнений необходимо задаться начальными условиями, т.е. значениями переменных при $t = 0$. Положим, что в момент $t = 0$ петля заполнена первичной мочой с осмотической концентрацией a, но движения раствора нет (гидростатическое давление к левому колену не приложено). Тогда, очевидно, следует положить

$$L_k(0) = R_k(0) = a. \tag{7}$$

Система уравнений (4)–(6) с начальными условиями (7) решается довольно просто, используя персональный компьютер и любой из алгоритмических языков программирования. И если положить $N = 50$, $a = 0{,}3$ осмоль/л, $p/(RT) = 0{,}1$ осмоль/л, $k_{\text{ф}} = 2\cdot10^{-10}$ $\text{Па}^{-1}\cdot\text{с}^{-1}$, $v = 0{,}00004$ м/с, $RT = 2{,}24$ МПа/(осмоль/л), то окажется, что с течением времени t (в выбранных единицах) L_N постепенно достигает следующих стационарных значений (в осмоль/л):

t	10	20	50	100	200	500	1000	2000	5000
L_N	0,38	0,43	0,53	0,65	0,83	1,16	1,38	1,44	1,45

Конечно, точно определить коэффициенты, входящие в эту систему уравнений, невозможно. Поэтому результаты расчетов следует воспринимать только как иллюстрацию физического процесса, протекающего в противоточной петле, обращая внимание лишь на основные закономерности.

На рисунке 5 показано, каких значений достигает концентрация раствора (C) в различных сегментах (k) петли Генле при таком моделировании. Из данных, полученных при моделировании, следует, что противоточный концентрирующий механизм может увеличивать концентрацию раствора в месте поворота петли в 5 раз. Следует отметить, что только одна ультрафильтрация (без противотока) способна увеличить концентрацию раствора лишь на 0,05 осмоль/л (т.е. на 17%). Наша модель дает возможность оценить также зависимость концентрирующей способности петли от ее длины (см. кривые на рисунке 5 для $N = 5$, 10, 20 и 50). Как и следовало ожидать, чем длиннее петля, тем больше ее концентрирующая способность.

Очевидно, что для млекопитающих, живущих рядом с пресноводными водоемами, а иногда и в них самих, вода не проблема. Экономить воду им нет

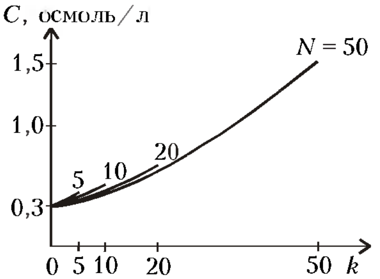


Рис. 5. Зависимость осмолярной концентрации от порядкового номера сегмента, полученная в результате моделирования

особой необходимости, и поэтому ее количество в моче может быть большим, а концентрация веществ в моче (осмотичность) – низкой. Наоборот, для млекопитающих, живущих в пустынях, вдалеке от водоемов, каждая капля воды на счету. Поэтому обитатели пустынь, выводя шлаки с мочой, должны как можно больше увеличивать ее осмотичность. Действительно, исследования показали, что осмотичность мочи у бобров составляет всего 0,5 осмоль/л, а у тушканчика – более 5 осмоль/л. Различия в осмолярности мочи у этих животных можно объяснить тем, что у тушканчика длина петли Генле почти в 10 раз больше, чем у бобра.

Криобиология и биологические антифризы

Жизнь возможна только в очень узком диапазоне температур – от нескольких градусов ниже температуры замерзания чистой воды (0 °С) до 40–50 °С. Здесь, конечно, речь идет о температуре самого организма, а не окружающей среды. Изменение температуры очень сильно сказывается на многих физиологических процессах, а ее уменьшение значительно замедляет их. Так, потребление кислорода животными при понижении температуры на 10 °С падает в 2–3 раза. Оказавшись вне диапазона температур, совместимых с активной жизнью, многие животные могут выживать, переходя в состояние оцепенения. Некоторые из них, находясь в таком состоянии, способны переносить температуру жидкого воздуха (–193 °С) или даже жидкого гелия (–269 °С). Однако такой сопротивляемостью по отношению к низким температурам обладают далеко не все организмы. Те, кто держит тропических рыб в комнатных аквариумах, наверное, знают, что стоит отключить подогрев, и в первую же прохладную ночь все рыбки погибнут.

Животные, обитающие в условиях холодного климата, выдерживают длинные холодные зимы, когда их температура может падать гораздо ниже температуры замерзания воды. Один из способов, который помогает им избегать гибели в таких условиях, это переохлаждение. Под переохлаждением имеется в виду снижение температуры жидкости внутри клеток животного ниже температуры ее замерзания без образования кристаллов льда. Следует отметить, что образование кристаллов внутри клетки может привести к необратимому разрушению внутриклеточных структур и ее гибели.

Заметим, что если воду или солевой раствор охладить ниже температуры замерзания, то это не обязательно сразу приведет к образованию кристаллов льда. Необходимым условием образования льда является наличие центров кристаллизации и достаточная длительность охлаждения. При отсутствии чужеродных частиц, служащих, как правило, центрами кристаллизации, чистую воду можно переохладить почти до –40 °С. При этом, как только появляется первый кристаллик льда, замерзание всей жидкости происходит очень быстро.

Давно известно, что глицерин предохраняет живые организмы от повреждения при замораживании. Глицерин в высокой концентрации содержится в гемолимфе насекомых, и с этим связывают их способность выживать при низких температурах. Например, у осы к наступлению зимы концентрация глицерина увеличивается до 5 моль/л, и в этот период глицерин составляет около 3% всего жидкого содержимого этого насекомого. В результате температура замерзания гемолимфы осы снижается до –17,5 °С. Так же, по-видимому, можно объяснить недавнее открытие энтомологов, обнаруживших на одном из ледников Гималаев насекомого, похожего на комара, довольно активного при температуре ниже –16 °С.

Доказано, что способность переносить резкие похолодания, увеличивая концентрацию глицерина в крови, характерна не только для тех насекомых, которые на зиму впадают в спячку. Так, обычные мясные мухи легко переносят понижение температуры до –10 °С, однако они выживают только тогда, когда температура падает относительно медленно.

Оказалось, что причиной такой быстрой адаптации насекомых к отрицательным температурам является трехкратное увеличение концентрации глицерина в их гемолимфе. Это, очевидно, помогает им выживать во время заморозков ранней весной и поздней осенью.

Свойство глицерина быть хорошим криоконсервантом широко используется в биологии и медицине. Известно, что эритроциты можно много месяцев хранить без повреждения в замороженном состоянии, если предварительно погрузить их в глицерин. Используя глицерин, можно предохранить от криоповреждения даже целых животных. Вот – пример. Хомяков сначала перфузировали (от латинского perfusio – вливание) небольшим количеством глицерина, после чего их погружали в ледяную воду. Все признаки жизни (дыхание, сердцебиение) у них вскоре исчезали. Далее животных замораживали до температуры –14 °С, и они становились совершенно твердыми. Затем, пробыв около часа в комнате, они оттаивали, и большая их часть возвращалась к жизни.

Рыбы и множество беспозвоночных животных обитают в арктических водах, где круглый год температура воды держится около –1,8 °С. Температура замерзания жидкостей тела придонных антарктических рыб составляет около –0,7 °С, что примерно на целый градус выше температуры морской воды в приполярных районах. Почему же рыбы не замерзают? Оказывается, они в течение всей жизни находятся в переохлажденном состоянии. Если к такой рыбе прикоснуться куском льда, то в ее теле сразу начнется процесс кристаллизации, и она погибнет. Однако это происходит крайне редко, так как придонные рыбы никогда не соприкасаются со льдом.

Внеклеточная жидкость у животных и растений замерзает раньше, чем внутриклеточная. При медленном замерзании внеклеточного солевого раствора вода кристаллизуется, а соли накапливаются между кристаллами, повышая осмотическую концентрацию оставшегося внеклеточного раствора. В результате внеклеточный концентрированный раствор отсасывает воду из клеток, они обезвоживаются, и температура замерзания внутриклеточного раствора понижается.

Рыбы, обитающие в холодных приполярных водах (нототениевые, камбала и др.), обладают уникальной способностью не замерзать, находясь в переохлажденном состоянии, до температуры −2,2 °С. Для сравнения: большинство рыб тропических и умеренных широт в присутствии льда замерзают при охлаждении до −0,8 °С. У многих читателей сравнение этих двух чисел наверняка вызовет улыбку. Всего-то 1,4 градуса?! Да, именно эти полтора градуса и помогают антарктическим рыбам выжить – ведь, например, в проливе Мак-Мердо (самой близкой к Южному полюсу части мирового океана) средняя годовая температура составляет −1,87 °С, варьируя в пределах от −1,4 до −2,15 °С. Но механизм, посредством которого нототения избегает замерзания, плавая среди льдов, отличен от того, который используют насекомые.

Прежде чем познакомиться с секретом приполярных рыб, посмотрим, от чего зависит образование кристаллов льда. Установлено, что температура замерзания большинства растворов связана с количеством растворенных частиц, а не с их природой. Присутствие растворенных частиц, очевидно, уменьшает вероятность образования кристаллического зародыша, так как при этом уменьшается число столкновений молекул воды между собой. Таков, например, механизм действия хлористого натрия, используемого до сих пор во многих городах для борьбы с гололедом. Аналогично, по-видимому, действует и глицерин, препятствующий замерзанию насекомых в холодное время года. Но возможен и другой, более тонкий механизм действия антифризов, не требующий большой их концентрации. Оказалось, что некоторые полипептиды и гликопротеины, молекулы которых состоят из множества повторяющихся единиц, а молекулярная масса составляет от 3 до 40 тысяч дальтон, способны уже в миллимолярных концентрациях значительно понижать температуру замерзания. И если сравнить эти белковые антифризы с NaCl, то окажется, что первые в 300–500 раз более эффективны. Каков же механизм действия белковых антифризов?

Молекулы воды в кристаллах льда образуют гексагональную решетку с атомами кислорода в углах шестиугольников. Поэтому в идеальных условиях кристаллы льда представляют собой шестиугольные призмы. Ученые установили, что многочисленные полярные группы в молекуле белкового антифриза, способные образовывать водородные связи с молекулами воды, находятся друг от друга на том же расстоянии (порядка 4,5 ангстрем), что и молекулы воды в кристаллах льда. И как следствие, длинные молекулы биологических антифризов, связываясь с торцевой быстрорастущей гранью, могут значительно тормозить рост кристалла. На долю белковых антифризов приходится около 3,5% массы всех жидкостей тела полярных рыб. Эти антифризы, действуя сообща, и понижает температуру замерзания приблизительно на 1,2 °С. Еще на один градус понижают ее содержащиеся в жидкостях антарктических рыб различные ионы и молекулы (главным образом, NaCl). Концентрация биологических антифризов в жидкостях тепловодных рыб ничтожна.

Однако белки могут играть роль не только биологических антифризов, но и совсем другую – облегчать кристаллизацию льда в живых организмах. Таково, например, значение некоторых видов белков, обнаруженных на внешней мембране бактерий Erwinia herbicola, Pseudomonas syringae и др. Эти бактерии, которые обычно можно найти на поверхностях растений в Европе, Азии и Северной Америке, относят к разряду вредных, связывая с ними низкую сопротивляемость растений к холоду. Известно, что даже очень чувствительные к холоду растения могут переносить понижение температуры до нескольких градусов ниже 0 °С из-за переохлаждения внутриклеточной воды. Холодовые повреждения таких растений в открытой местности случаются от −2 до −5 °С и являются следствием роста кристаллов льда из переохлажденной внутриклеточной воды. Однако если выращивать те же растения в стерильных условиях, исключающих попадание бактерий на их поверхности, то даже при охлаждении до −8 °С кристаллизации внутриклеточной воды (а значит, и повреждения) не происходит. Обработка антибиотиками (стрептомицин, тетрациклин), убивая бактерии, также помогает значительно увеличить морозостойкость растений. Ученые установили, что белок, находящийся в мембране этих бактерий, обладает уникальным свойством связывать молекулы воды, собирая из них конфигурацию, аналогичную той, которая имеется в кристаллах льда. В результате на мембране бактерий появляются микроскопические кристаллики, служащие зародышами для кристаллизации всей внутриклеточной воды.

Оказывается, способностью облегчать кристаллизацию льда обладают лишь очень немногие виды бактерий. Так, из 42 видов бактерий, собранных с листьев боярышника, этими свойствами обладал только один вид – Pseudomonas syringae van Hall. Да и не все бактерии этого вида содержат в своей мембране уникальный белок – кристаллизатор воды. Считается, что бактерии, служащие зародышами для кристаллизации льда, могут играть существенную роль в определении климата местности, определяя температуру кристаллизации атмосферной влаги.

Ожерелье Штейнера, или Любовь к вычислениям

Р. ИСМАГИЛОВ

Эта статья адресована школьнику; а потому, наряду с математическим содержанием, в ней заключено и некоторое нравоучение.

Цепочка Штейнера

Возьмем на плоскости два круга, один из которых расположен строго внутри другого; таким образом, соответствующие окружности (границы кругов) не имеют общих точек. Область, ограниченную этими окружностями, назовем кольцом, а окружности, составляющие границу этого кольца, назовем закрепленными (скоро появятся и подвижные окружности). Если некоторая окружность расположена в кольце и касается обеих закрепленных окружностей, будем говорить, что она вписана в кольцо.

Введем теперь геометрическую конфигурацию, кото-

Иллюстрация П. Чернусского

рая и будет предметом исследования. Назовем цепочкой Штейнера такую последовательность окружностей $C_1, C_2, \ldots$, вписанных в кольцо, что для каждого $n = 1, 2, \ldots$ окружность C_{n+1} касается окружности C_n и расположена относительно C_n по ходу часовой стрелки (при движении по кольцу). Ясно, что эта цепочка однозначно определена, если задана начальная окружность C_1.

Ожерелье Штейнера

Может случиться, что цепочка замкнется, т.е. для некоторого n окружность C_n коснется окружности C_1 (и, таким образом, $C_k = C_{k+n}$ для любого $k \geq 1$); будем считать, что n – наименьший номер, на котором произошло такое касание. В этом случае цепочка Штейнера превращается в ожерелье Штейнера – набор из n окружностей, вписанных в кольцо, таких, что каждая окружность касается ровно двух других окружностей этого набора. Будем записывать ожерелье в виде $C_1, \ldots, C_n$.

Основное свойство описанной конструкции заключено в следующем утверждении.

Теорема 1. *Пусть цепочка Штейнера замкнулась при некотором выборе начальной окружности C_1 (и, таким образом, возникло ожерелье $C_1, \ldots, C_n$); тогда при любом другом выборе начальной окружности C_1' (вписанной в кольцо) соответствующая цепочка Штейнера $C_1', C_2', \ldots$ также замкнется (и, тем самым, возникнет ожерелье $C_1', \ldots, C_n'$).*

Разумеется, эта теорема – теорема Штейнера – содержательна только для того случая, когда закрепленные окружности не концентричны; в случае их концентричности утверждение теоремы очевидно.

Таким образом, если для данных закрепленных окружностей имеем некоторое ожерелье Штейнера, то это ожерелье подвижно: оно может скользить, сохраняя свое основное свойство – каждая из составляющих его окружностей касается двух других и все окружности касаются закрепленных окружностей. Конечно, в случае, когда закрепленные окружности не концентричны, окружности нашего ожерелья деформируются при упомянутом скольжении (меняются их радиусы). Если же закрепленные окружности концентричны, то деформации не происходит.

Мы приведем два доказательства теоремы Штейнера. Первое из них – классическое; оно найдено самим Якобом Штейнером, швейцарским геометром, жившим в XIX столетии. (Ему же принадлежит сама постановка задачи, а потому ожерелье носит его имя.) Оно очень короткое и почти не содержит формул. Второе доказательство, напротив, основано на достаточно длинных вычислениях.

Классическое доказательство

Это доказательство использует понятие инверсии плоскости. Читатель, возможно, уже знаком с ним – оно изложено во многих геометрических книжках. Напомним его. Зафиксируем на плоскости точку M_0 и выберем число $R > 0$. Каждой точке P, отличной от M_0, поставим в соответствие точку P', определяемую следующими условиями: 1) P' расположена на луче, который выходит из точки M_0 и проходит через точку P; 2) $|M_0P'| \cdot |M_0P| = R^2$. Получили отображение плоскости, из которой удалена точка M_0, на себя (рис.1). Это и есть инверсия. Точка M_0 называется центром инверсии, а величина R – ее радиусом.

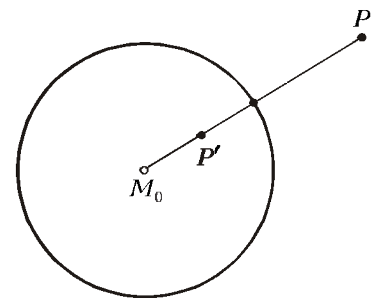


Рис.1

Для нас важно следующее замечательное свойство инверсии: она переводит любую окружность, не проходящую через центр инверсии, в окружность с тем же свойством. Если при этом центр инверсии лежит вне круга, ограниченного первой окружностью, то этот круг переводится нашей инверсией также в круг (ограниченный второй окружностью). Для доказательства этих утверждений следует ввести на плоскости декартовы координаты (точку M_0 следует взять в качестве начальной) и записать инверсию в координатах, т.е. записать формулы, связывающие координаты точек P и P'. После этого доказательство первого утверждения сводится к несложному преобразованию уравнения окружности посредством полученных формул. Затем отсюда выводится и второе утверждение (относительно кругов). (Надо ли говорить, что читателю полезно самому проделать все эти вычисления!)

Можно также доказать, что если даны два неконцентрических круга и точка M_0, не принадлежащая им, то существует такое $R > 0$, что инверсия с центром M_0 и радиусом R переводит эти круги в пару концентрических кругов.

Вернемся к цепочке Штейнера. Покажем, что это последнее свойство инверсии приводит к немедленному доказательству теоремы Штейнера. Действительно, пусть закрепленные окружности не концентричны. Взяв любую точку M_0 вне круга, ограниченного большей из них, совершим инверсию с центром в M_0, переводящую закрепленные окружности в концентрическую пару. Любая цепочка Штейнера, взятая в первом кольце, перейдет под действием инверсии в цепочку, вписанную во второе кольцо. Эта вторая цепочка состоит, разумеется, из окружностей одного и того же радиуса. Для такой цепочки утверждение теоремы выполнено очевидным образом (как уже отмечалось выше). Отсюда ясно (после минутного размышления), что оно выполнено и для первой цепочки.

Приведенное классическое доказательство замечательным образом использует идею преобразования геометрических объектов – одну из важнейших в математике. Оно короткое и эффектное. Словом, это – превосходное доказательство. И все же, и все же... Это доказательство напоминает игрушку, из которой, если нажать нужную кнопку, выскакивает чертик (или еще какое-либо чудо такого же рода). Обладатель игрушки догадывается, что все дело в каком-то механизме, скрытом внутри; его разбирает любопытство: а что же там, внутри, происходит? В нашем случае, можно догадываться, все дело в некоторой закономерности, которой подчинены радиусы окружностей, составляющих цепочку Штейнера. Сейчас мы вскроем эту закономерность и, таким образом, заглянем внутрь механизма, управляющего цепочкой (и ожерельем) Штейнера.

Вычислительное доказательство

Итак, имеем пару закрепленных окружностей (неконцентрических) и ограниченное ими кольцо. Пусть $a > b > 0$ – радиусы этих окружностей, $c > 0$ – расстояние между их центрами. Ясно, что $b + c < a$. Цепочки Штейнера пока нет; она появится позже. Рассуждение, которое приведет к доказательству теоремы Штейнера (и даже к некоторому ее уточнению), разобьем на шаги.

Шаг 1. Впишем в кольцо пару окружностей так, что обе они касаются закрепленных окружностей и касаются друг друга. Пусть r_1, r_2 – радиусы этих окружностей. Цель этого шага – найти зависимость между r_1 и r_2.

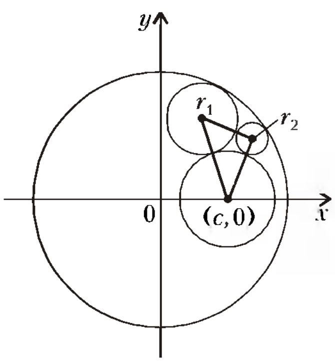


Рис. 2

Введем на плоскости декартовы координаты $x0y$, причем центры закрепленных окружностей пусть имеют координаты $(0; 0)$ и $(c; 0)$, а точки с координатами $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ – центры двух только что построенных окружностей (рис.2). Выразив расстояния между центрами окружностей через их координаты, получаем систему уравнений

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (r_1 + r_2)^2, \qquad (1)$$

$$x_1^2 + y_1^2 = (a - r_1)^2, \qquad (2)$$

$$x_2^2 + y_2^2 = (a - r_2)^2, \qquad (3)$$

$$(x_1 - c)^2 + y_1^2 = (b + r_1)^2, \qquad (4)$$

$$(x_2 - c)^2 + y_2^2 = (b + r_2)^2. \qquad (5)$$

Исключим из них x_i, y_i, $i = 1, 2$. Во-первых, из (2), (4) (а затем из (3), (5)) получаем (путем вычитания и последующего деления на $2c$) равенства

$$x_i = \frac{a^2 + c^2 - b^2 - 2(a+b)r_i}{2c}. \qquad (6)$$

Далее, сложив (2), (3) и вычтя сумму из (1), приходим к равенству

$$x_1x_2 + y_1y_2 = a^2 - a(r_1 + r_2) - r_1r_2. \qquad (7)$$

В этом равенстве перенесем вправо слагаемое x_1x_2, возведем в квадрат обе части полученного равенства и заменим y_1^2, y_2^2 выражениями, получаемыми из (2) и (3). Это приводит (после упрощений) к равенству

$$(a - r_2)^2 x_1^2 + (a - r_1)^2 x_2^2 - 2x_1x_2\left(a^2 - a(r_1 + r_2) - r_1r_2\right) = $$
$$= 4ar_1r_2(a - r_1 - r_2). \qquad (8)$$

Наконец, заменив в нем величины x_i, $i = 1, 2$, правыми частями равенств (6), получаем (разумеется, после упрощений) следующую связь между r_1 и r_2 (любите вычисления, читатель!):

$$r_1^2 + r_2^2 - 2\frac{c^2 - a^2 - b^2 + 6ab}{(a+b)^2 - c^2}r_1r_2 -$$
$$- \frac{8(a-b)}{(a+b)^2 - c^2}r_1r_2(r_1 + r_2) + \frac{16(a+b)^2}{\left((a+b)^2 - c^2\right)^2}r_1^2r_2^2 = 0. \qquad (9)$$

Это уравнение несколько упрощается, если от радиусов r_k, $k = 1, 2$, перейти к обратным величинам $\rho_k = r_k^{-1}$, $k = 1, 2$, и ввести величины

$$E = \frac{c^2 - a^2 - b^2 + 6ab}{(a+b)^2 - c^2}, \quad F = \frac{8(a-b)}{(a+b)^2 - c^2},$$

$$G = \frac{16(a+b)^2}{\left((a+b)^2 - c^2\right)^2}. \qquad (10)$$

Тогда уравнение (9) перепишется в виде

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2E\rho_1\rho_2 - F(\rho_1 + \rho_2) + G = 0. \qquad (11)$$

Подчеркнем, что величины E, F, G зависят только от радиусов и взаимного расположения закрепленных окружностей, а потому фиксированы; величины ρ_i, $i = 1, 2$, связанные уравнением (11), – переменные (пара вписанных окружностей может скользить внутри кольца, сохраняя взаимное касание). Равенство (11) и было целью Шага 1. Оно отнюдь не выглядит обнадеживающим.

В дальнейшем нам понадобятся неравенства

$$-1 \le E \le 1; \qquad (12)$$

читатель без труда докажет их, используя уже упомянутое неравенство $a > b + c$.

Шаг 2. Пусть теперь в кольцо вписаны три окружности с радиусами r_k, $k = 1, 2, 3$, причем вторая (с радиусом r_2) касается первой и третьей. Положим, как и выше, $\rho_k = r_k^{-1}$, $k = 1, 2, 3$. Сейчас мы выведем соотношение, связывающее величины ρ_k. С этой целью заменим в уравнении (11) величину ρ_1 независимой переменной x. Получим квадратное уравнение. Ясно (здесь требуется минутное размышление!), что его корнями являются ρ_1, ρ_3. Но тогда, согласно формуле Виета для суммы корней квадратного уравнения, справедливо равенство

$$\rho_1 + \rho_3 = 2E\rho_2 + F. \qquad (13)$$

Это соотношение и было целью Шага 2.

Шаг 3. Рассмотрим, наконец, цепочку Штейнера $C_1, C_2, \ldots$ Она может быть замкнутой (в этом случае имеем ожерелье) либо незамкнутой; рассуждения этого шага одинаково пригодны для обоих случаев. Пусть r_k — радиус окружности C_k; положим $\rho_k = r_k^{-1}$. Из результата Шага 2 вытекает, что последовательность ρ_k, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяет соотношению

$$\rho_{k-1} + \rho_{k+1} - 2E\rho_k = F,\ k = 2, 3, \ldots \qquad (14)$$

Сейчас мы изучим это соотношение, временно забыв о геометрическом смысле величин ρ_k. Соотношение вида (14) называется рекуррентным, а также возвратным, а любая последовательность, удовлетворяющая ему, называется его решением. Найдем все решения соотношения (14).

Во-первых, очевидным решением является постоянная последовательность $\nu_k = F\left(2(1-E)\right)^{-1}$, $k = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим далее последовательность $\tau_k = \rho_k - \nu_k = \rho_k - F\left(2(1-E)\right)^{-1}$. Ясно, что она удовлетворяет соотношению $\tau_{k-1} + \tau_{k+1} - 2E\tau_k = 0$.

Чтобы найти его решения, возьмем такое $\alpha \in [0; \pi]$, что $\cos\alpha = E$; существование такой величины α вытекает из (12). Приходим к соотношению

$$\tau_{k-1} + \tau_{k+1} - 2\tau_k \cos\alpha = 0.$$

Для любых A, β последовательность $\tau_k = A\cos(\alpha k + \beta)$ есть решение этого соотношения, что видно из известных формул для тригонометрических функций. Возвращаясь к соотношению (14), получаем следующее: для любых чисел A, β последовательность вида

$$\rho_k = A\cos(\alpha k + \beta) + F\left(2(1-E)\right)^{-1},\ k = 1, 2, \ldots \qquad (15)$$

является его решением. Покажем, что любое решение соотношения (14) можно представить в виде (15) (при подходящем выборе чисел A, α). Действительно, возьмем любое решение соотношения (14) и такие A и α, что первый и второй члены этого решения выражаются формулой (15), записанной для $k = 1$ и $k = 2$; читатель легко найдет такие A, α. Из соотношения (14) следует, что и все дальнейшие члены указанного решения выражаются формулой (15). Итак, найдены все решения соотношения (14). В дальнейшем будем считать, что $A > 0$; этого можно добиться, заменив β на $\beta + \pi$.

Вспомним теперь, что числа ρ_k возникли из цепочки Штейнера, а потому удовлетворяют еще и условиям (11). Подставив (15) в (11) и произведя упрощения (щадя читателя, опускаем их), получаем равенство

$$A = 2c\left((a-b+c)(a-b-c)\right)^{-1}.$$

А поскольку $\rho_k = r_k^{-1}$, приходим к следующему выводу.

Теорема 2. *Пусть $C_1, C_2, \ldots$ – ожерелье Штейнера, r_k — радиус окружности C_k, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда существует такое число β, что*

$$r_k = \frac{(a-b+c)(a-b-c)}{2\left(c\cos(\alpha k + \beta) + a - b\right)},\ k = 1, 2, \ldots \qquad (16)$$

Напомним, что число α полностью определено радиусами закрепленных окружностей и расстояниями между их центрами по формуле

$$\cos\alpha = \frac{c^2 - a^2 - b^2 + 6ab}{(a+b+c)(a+b-c)}.$$

Шаг 4. Выведем из теоремы 2 теорему Штейнера. Пусть число α соизмеримо с π, т.е. $\alpha = \frac{m}{n}\pi$, где m, n — взаимно простые целые числа, $n > 0$. Тогда, как видно из равенства (16), $r_{k+2n} = r_k$ для всех k, если m нечетно, и $r_{k+n} = r_k$, если m четно. Таким образом, цепочка Штейнера замкнулась, и получилось ожерелье Штейнера. Оно составлено из $2n$ окружностей, если m нечетно, и из n окружностей, если m четно (при любом выборе числа β). Если же α и π не соизмеримы (число α/π иррационально), то цепочка не замкнется. Мы получили, во-первых, явный признак того, что цепочка Штейнера замкнется, и, во-вторых, указали число окружностей в ожерелье Штейнера. Это и есть обещанное уточнение теоремы Штейнера.

Немного истории и нравоучений

То, что изложено в предыдущем разделе, было получено мной в 1954 году, в летние каникулы после девятого класса средней школы. Разумеется, я не знал тогда, что эта задача была поставлена и решена Я.Штейнером еще в девятнадцатом веке. Не знал я также об инверсии и о решении рекуррентных соотношений. Но это – тот случай, когда незнание оказалось благом. Ведь что было бы, если бы кто-то поспешил сообщить мне все эти сведения? Я лишился бы пары восхитительных недель, наполненных тем, что составляет творчество: это и острое любопытство (замкнется или не замкнется цепочка окружностей?), и упорные вычисления, и счастливая идея применения формулы Виета, и финальная формула (16), заключающая решение загадки. Мне повезло: в сельской школе 1954 года никому и не снилось наблюдаемое сегодня мельтешение кружков и олимпиад, профильных школ и лицеев, «Шагов в будущее» (есть и такие!) и пр. и пр. Известная истина: самостоятельное творчество – вещь более ценная, чем сумма знаний, а к творчеству побуждает скорее здоровый интеллектуальный голод, нежели пресыщение.

Этим нравоучением я и закончу. Да не покинут чувство меры и здравый смысл того читателя, который пожелает применить его к себе!

«Солнце остановил, сдвинул Землю»

А. ВАСИЛЬЕВ

Николай Коперник, великий польский астроном и математик, стоял у самых истоков научной революции Нового времени. Внешне жизнь Коперника не была богата событиями. Лишь постоянные притязания на северопольские земли соседнего Тевтонского ордена, угрозы, сменявшиеся грабительскими набегами и прямыми военными действиями, омрачали и усложняли ее. За исключением лет учения в Кракове, а затем в Италии, Коперник почти всю сознательную жизнь провел в одном из удаленных уголков Европы – маленьком городке Фромборке, расположенном на побережье Балтийского моря. Именно здесь Коперником были выполнены исследования, влияние которых на умы людей и на последующее развитие науки трудно переоценить.

Основной заслугой Коперника было обоснование положения о том, что видимое движение Солнца и звезд объясняется не обращением им вокруг Земли, а суточным вращением самой Земли вокруг собственной оси и годичным обращением ее вокруг Солнца. Этим самым идее гелиоцентризма, высказанной еще в древности Аристархом Самосским, было дано научное обоснование и отвергнута господствовавшая до того геоцентрическая система Клавдия Птолемея. Разработанная Коперником теория позволила ему впервые в истории науки о небе сделать обоснованные выводы о действительном расположении планет в Солнечной системе и с весьма большой точностью определить их относительные расстояния от Солнца.

Учение Коперника было важно не только для астрономии и всего естествознания в целом, но и имело огромное значение для переворота в мировоззрении человечества. Коперник проводил астрономические наблюдения с простыми и примитивными даже для того времени инструментами и с невысокой точностью. Однако он по праву считается первым представителем нового естествознания – явления окружающей действительности он рассматривал не изолированно друг от друга, а в их взаимосвязи и взаимной обусловленности. Эта методика исследования была впоследствии принята на вооружение и развита многочисленными сторонниками учения Коперника во главе с Галилео Галилеем и Иоганом Кеплером.

Николай Коперник родился 19 февраля 1473 года в польском городе Торуни в обеспеченной семье владельца торговой фирмы, однако в 10-летнем возрасте из-за эпидемии чумы он лишился отца, и его образованием занялся дядя, брат матери Лукаш Ваченроде, сделавший духовную карьеру епископа. Предполагается, что Николай окончил кафедральную школу во Вроцлавеке, славившуюся хорошей постановкой преподавания. В те годы в этой школе преподавал известный астроном и астролог Николай Водка, от которого Коперник и получил первые сведения об этой науке. Свое образование будущий астроном продолжил в Краковском университете на философском факультете, где преподавался цикл естественно-математических наук. Четыре года, проведенные Коперником в стенах Краковского университета, были для него важнейшим периодом овладения знаниями, без которых его дальнейшая плодотворная научная деятельность вряд ли была бы возможна. Сам Коперник говорил: «Меня породила Торунь, а Краков наукой украсил».

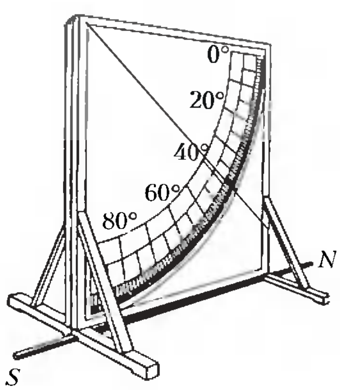
В 1496 году дядя Лукаш направил Николая для продолжения образования в Болонский университет, желая, чтобы он сделал церковную карьеру. Однако уже в то время интересы Коперника были далеки от церковной юриспруденции. Его интересовали точные науки вообще и астрономия в частности. В Италии этот интерес только усилился. В то время в Болонском университете точные науки преподавал астроном Доменико Мария Новара, учеником и помощником которого стал Коперник. Вместе они провели ряд интересных астрономических наблюдений, в частности – изучали положение Луны и наклон эклиптики Солнца, следили за соединениями Сатурна с Луной. В 1500 году Коперник посещает Рим, где выступает с докладом перед аудиторией.

Еще в 1497 году Николай Коперник по ходатайству дяди получает духовный чин каноника в небольшом городке Фромборке на берегу Балтийского моря. В 1501 году пришло время возвращаться к месту службы, однако Николаю было разрешено продолжить образование, для чего он был направлен в Падую с целью изучения медицины (члены капитула решили, что им надо иметь в своей среде хорошо обученного врача). К изучению медицины Коперник подошел с большим желанием, чем к изучению канонического права. Позже он прослыл весьма знающим и искусным врачом, хотя так и не получил степени доктора медицины. Этому мешали многие обстоятельства: желание из первых рук познакомиться с идеями падуанских гуманистов, продолжить изучение астрономии и как-то завершить изучение канонического права, чтобы добыть удостоверяющий это докторский диплом. Летом 1503 года Коперник получил этот диплом, после чего был отозван на родину.

За семь лет пребывания в Италии Коперник проникся гуманистическим духом, выработал в себе привычку критически подходить к догматическим суждениям и умение сопоставить и анализировать обнаруженное в ходе наблюдений. В это же время он еще глубже овладел математическим аппаратом астрономии и вычислительными навыками, которые ему весьма пригодились в дальнейшем. В Италии Коперник в совершенстве освоил греческий язык, что позволило ему изучить произведения многих античных авторов (и Птолемея в том числе) в оригинале.

На родине Коперник некоторое время был помощником своего дяди-епископа, а после его смерти в 1512 году осел во Фромборке, где выполнял обязанности каноника и другие поручения церковного капитула, а также имел медицинскую практику и принимал активное участие в политической жизни страны. Самым главным для него занятием в этот период стали, однако, астрономические наблюдения и размышления над ними. Свои наблюдения Коперник производил из служившей ему квартирой башни кафедрального собора, которая так и стала называться «башней Коперника», а также с площадки звонницы. Из большого количества наблюдений, выполненных Коперником, до нашего времени сохранились сведения о 63 наблюдениях за Луной, Солнцем, планетами и о 3 наблюдениях за звездами.

Для своих наблюдений астроном пользовался не самыми совершенными даже для того времени приборами. Так, для определения угла наклона эклиптики – большого круга небесной сферы, по которому происходит видимое годичное движение Солнца, – Коперник использовал «гороскопий», или солнечные часы. Этот прибор представлял собой плоскость с нанесенной на ней четвертью



«Гороскопий» Коперника (реконструкция)

круга, разбитого на 90 частей, каждая из которых подразделялась еще на 60 частей. В плоскость вбивался хорошо обточенный штырь, и в дни летнего и зимнего солнцестояния производилось наблюдение над тенями полуденного Солнца, падающими от этого штыря. Это позволяло определять направление между тропиками, а затем и угол наклона эклиптики к экваториальной плоскости.

Для определения широты и эклиптической долготы Луны и планет Коперник использовал армиллярную сферу, представлявшую собой шесть выточенных из дерева концентрических колец. Первое из них (внешнее) закреплялось на подставке и устанавливалось вертикально в плоскости меридиана, остальные, связанные с первым шарнирно, располагались в плоскостях экватора, эклиптики, других меридианов и т.д.

Во Фромборке в период с 1512 по 1516 годы Коперником выполнен полный цикл наблюдений движения Солнца за год, определены положения Сатурна и Марса в моменты их противостояния, проведены наблюдения Луны и пр. Дальнейшая работа свелась к глубокому анализу полученных результатов.

К началу научной деятельности Коперника в астрономии общепринятой считалась система мира, предложенная Птолемеем. Согласно этой системе, Землю окружали семь планетных сфер: Луны, Меркурия, Венеры, Солнца, Марса, Юпитера и Сатурна, которые вращались с соответствующими эпициклами и эксцентрами. Сферы иногда понимались как чисто геометрические (идеальные), а иногда как материальные. Эти планетные сферы окружала восьмая материальная сфера, на которой закреплены неподвижные звезды; она вращается вокруг полюсов Земли, делая один оборот за 24 часа. Вне этой сферы философы помещали бесконечное пространство, заполненное тонкой материей – эфиром, а средневековая церковь считала, что вне сферы звезд помещается эмпирей, т.е. царство Бога, ангелов, а также душ добродетельных людей и святых. Астрономы предпочитали не развивать этого вопроса, находящегося вне сферы их ведения. Птолемей исходил из некоторого среднего равномерного вращения планет, к которому прибавлялись поправки, так называемые неравенства. Основных поправок было две: одна из них вызывалась тем, что в действительности планета движется не по окружности, а по эллипсу, поэтому в различных местах орбиты меняется ее скорость. Эта поправка заключалась во введении эксцентра (или деферента). Другая поправка появлялась из-за того, что наблюдения велись с движущейся Земли, поэтому планета совершала то прямое движение, то обратное, а в некоторых точках даже останавливалась. Эта поправка заключалась во введении дополнительной окружности – эпицикла, центр которой перемещался по эксцентру, в то время как сама планета совершала движение по эпициклу.

Размышляя, нельзя ли найти более рациональное сочетание кругов, по которым движутся планеты, объясняющее все видимые неравномерности их движения, Коперник пришел к выводу, что этого можно добиться при помощи меньшего числа сфер, введя ряд аксиом. Главными из них были такие:

1) центр Земли не является центром мира, а только центром тяготения и центром лунной орбиты;

2) все сферы движутся вокруг Солнца, расположенного как бы в центре всего;

3) все движения, замечающиеся у небесной тверди, принадлежат не ей самой, но Земле, именно Земля вращается в суточном движении вокруг неизменных своих полюсов;

4) все замечаемые у Солнца движения не свойственны ему, но принадлежат Земле, вместе с которой мы вращаемся вокруг Солнца, как и всякая другая планета, – таким образом, Земля имеет несколько движений.

Свои построения Коперник развивал не на пустом месте. Он прочитал все доступные ему философские труды, желая найти, не высказывались ли ранее мнения, что мировые сферы движутся иначе, чем считалось по теории Птолемея. И он обнаружил, что такие взгляды имели еще античные ученые – у Цицерона встречается упоминание о том, что Гикетас считал, что Земля движется, у Плутарха упоминается о ранних сторонниках этой идеи. Но все это, естественно, стало только отправной точкой при построении новой теории.

Предварительное изложение своего учения Коперник дал в книге «Малый комментарий» в 1516 году, однако

(*Окончание см. на с. 21*)

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июля 2003 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2–2003» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1856» или «Ф1863». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1856—М1860, Ф1863—Ф1867

М1856. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается его основания AC в точке E, а боковых сторон – в точках M и K (рис.1). Прямая MK пересекает продолжение основания в точке P. Докажите, что прямая PO перпендикулярна прямой BE.

М.Волчкевич

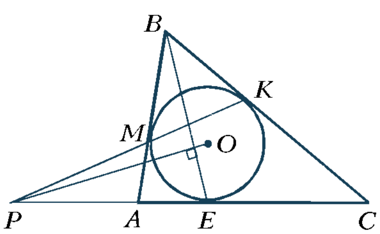


Рис. 1

М1857. На окружности находится множество K, состоящее из k точек, делящих окружность на k равных дуг. В K взяты два подмножества M и N, содержащие m и n точек соответственно. У подмножеств M и N ровно r общих точек. Более того, на какой бы угол, кратный $\frac{2\pi}{k}$, мы ни повернули подмножество N, оно по-прежнему будет иметь ровно r общих точек с подмножеством M. Докажите, что $r = \frac{mn}{k}$.

В.Произволов

М1858. Даны такие натуральные числа a и b, что $2a + 1$ и $2b + 1$ взаимно просты. Каким может быть наибольший общий делитель чисел $2^{2a+1} + 2^{a+1} + 1$ и $2^{2b+1} + 2^{b+1} + 1$?

Д.Ростовский, А.Храбров

М1859. Квадратный стол площади 2 можно в два слоя покрыть четырьмя квадратными салфетками, площадь каждой из которых равна 1. Более того, это можно сделать 100 различными способами. Найдите эти способы. (Салфетки можно перегибать, но нельзя разрывать.)

В.Произволов

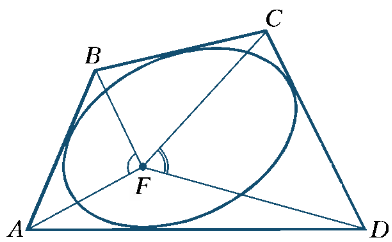


Рис. 2

М1860. Точка F является одним из фокусов эллипса, вписанного в выпуклый четырехугольник $ABCD$ (рис.2). Докажите, что $\angle AFB + \angle CFD = 180^\circ$.

М.Волчкевич

Ф1863. В системе (рис.3) нить очень легкая и нерастяжимая. Грузы, массы которых M и $2M$, вначале удерживают, а затем отпускают. С каким ускорением начнет двигаться груз массой m? Трение в системе отсутствует.

П.Митюшкин (ученик 10 кл.)

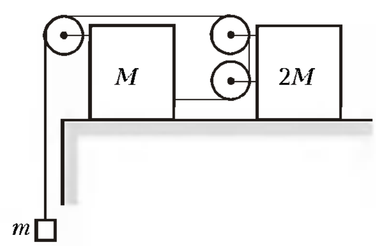


Рис. 3

Ф1864. На горизонтальном столе находится очень легкий клин с углом $\alpha = 30^\circ$ при основании (рис.4). На него поставили тяжелый тонкий обруч и отпустили его без начальной скорости. Коэффициент трения между обручем и клином $\mu = 0{,}7$. При каком коэффициенте тре-

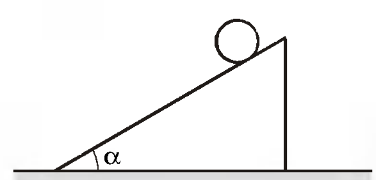


Рис. 4

ния между клином и столом клин останется неподвижным?

М.Учителев

Ф1865. В сосуде объемом $V = 100$ л находится гелий при давлении $p = 0{,}5$ атм и температуре $T = 350$ К. Давление снаружи немного возросло, и объем сосуда изменился, при этом температура газа увеличилась на $\Delta T = 1$ К, а в окружающую среду было отдано количество теплоты $Q = 20$ Дж, после чего в сосуде установилось равновесие. Оцените, на сколько изменились объем сосуда и давление газа в сосуде.

А.Простов

Ф1866. Заряд q находится на расстоянии h от бесконечной слабопроводящей плоскости. Заряд быстро перемещают параллельно плоскости на расстояние $2h$, так что распределение зарядов не успевает измениться. Сколько тепла выделится, когда распределение зарядов снова установится? Сколько еще выделится тепла, если заряд быстро сдвинуть на h перпендикулярно плоскости?

Е.Антышев

Ф1867. Два генератора гармонических колебаний с частотами 50 Гц и 400 Гц включены, как показано на рисунке 5: «общие» их выходы соединены непосредственно, а «сигнальные» – через последовательно соединенные катушку индуктивностью 1 Гн и конденсатор емкостью 1 мкФ. Амплитуда напряжения каждого генератора 10 В, сопротивление провода, которым намотана катушка, 1 Ом, в остальном элементы цепи можно считать идеальными. Найдите максимальный заряд конденсатора и среднюю мощность, переходящую в тепло.

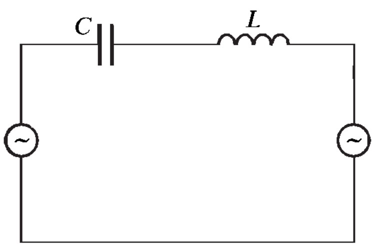


Рис. 5

З.Рафаилов

Решения задач М1831—М1840, Ф1848—Ф1852

М1831. *В наборе 20 гирек, массы которых различны. Среди любых одиннадцати из них можно выбрать две, общая масса которых равна 100 г. Докажите, что общая масса всех 20 гирек набора равна 1000 г.*

Будем говорить, что две гирьки образуют пару, если их суммарная масса равна 100 г. Ввиду того, что массы всех гирек различны, каждая гирька может входить не более чем в одну пару. Наша цель – показать, что 20 гирек набора распадаются на 10 пар.

Возьмем три коробки: A, B и C. В коробку A положим какие-то 11 гирек, в коробку B положим остальные 9 гирек, коробку C оставим пока пустой.

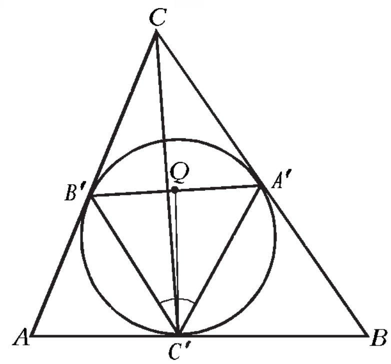
В коробке A найдется пара, одну из гирек этой пары переложим в C, а из B тоже одну (любую) гирьку переложим в A.

В коробке A снова найдется пара, одну из гирек этой пары переложим в C, а из B одну гирьку переложим в A.

Так будем поступать до тех пор, пока коробка B станет пустой, а в коробке A обнаружится последняя, нужная нам, десятая пара.

В.Произволов

М1832. *Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках A', B', C' (рис.1). Точка Q – середина $A'B'$. Докажите, что углы $B'C'C$ и $A'C'Q$ равны.*



Пусть P – вторая точка пересечения прямой CC' с окружностью (рис.2). Так как углы $C'B'A$ и $C'PB'$ равны, треугольники CPB' и $CB'C'$ подобны. Следовательно, $PB'/B'C' = CP/CB'$. Аналогично, из подобия треугольников CPA' и $CC'A'$ имеем $CP/CA' = PA'/A'C'$. Значит, $A'C' \cdot B'P = B'C' \cdot A'P$, а так как четырехугольник $PA'C'B'$ – вписанный, по теореме Птолемея $PB' \cdot A'C' + PA' \cdot B'C' = PC' \cdot A'B'$, т.е. $B'P \cdot A'C' = C'P \cdot A'B'/2 = C'P \cdot A'Q$. Поэтому треугольники $C'PB'$ и $C'QA'$ подобны, откуда и следует утверждение задачи.

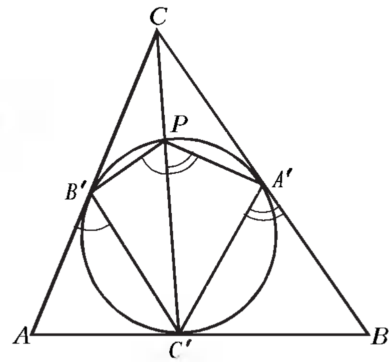


Рис.2

Отметим, что в любом треугольнике прямые, соединяющие его вершины и точки касания противоположных сторон со вписанной окружностью, пересекаются в одной точке, которая называется точкой Жергонна. Прямые, симметричные медианам треугольника относительно его биссектрис, также пересекаются в одной точке, которая называется точкой Лемуана. Таким образом, утверждение задачи допускает следующую красивую формулировку: точка Жергонна треугольника ABC совпадает с точкой Лемуана треугольника $A'B'C'$.

А.Заславский

М1833. *Фигура «танк» ходит по горизонтали или вертикали ровно на n клеток ($n > 1$), закрашивая все клетки, по которым прошла. Сделав несколько ходов на бесконечной клетчатой доске, «танк» вернулся на исходную позицию. Оказалось, что его след нигде себя не пересек. При каких n площадь, ограниченная следом «танка», может оказаться равной 2002?*

Ответ: $n = 3$ и $n = 23$.

На бесконечной клетчатой доске введем систему координат так, чтобы центр исходной позиции «танка» был началом этой системы, а оси были направлены параллельно линиям сетки. Тогда каждой клетке однозначно соответствует пара неотрицательных чисел $(x; y)$ –

координаты центра этой клетки. Вертикальные столбцы клеток, для которых $x = pn$, и горизонтальные строки клеток, для которых $y = qn$ (p, q – целые числа), назовем дорогами. Пересечения дорог назовем перекрестками. Из условия следует, что «танк» может двигаться только по дорогам, а менять направление движения – только на перекрестке.

Покажем, что площадь любой фигуры, ограниченной следом «танка», при делении на n дает в остатке 1. Спроецируем фигуру, ограниченную следом, на ось OX и рассмотрим полоску клеток, содержащих эту проекцию (ниже под проекцией фигуры мы будем подразумевать эту полоску). Очевидно, эта полоска начинается и заканчивается перекрестком и состоит из $n(m-1)+1$ клеток, где m – число перекрестков в полоске. Применим индукцию по m. Если $m = 2$, то фигура, ограниченная следом, является прямоугольником с основанием $a = n - 1$ и высотой $b = tn - 1$, где t – натуральное число. Тогда $ab = (n-1)(tn-1) = n(tn-t-1)+1$, и база индукции установлена. Пусть утверждение доказано для всех фигур, у которых $m = 2, \ldots, k$. Рассмотрим любую ограниченную следом «танка» фигуру F, у которой $m = k+1 \ge 3$. В этом случае проекция фигуры содержит хотя бы один промежуточный (отличный от крайних) перекресток. Рассмотрим вертикальную дорогу, проходящую через этот перекресток. Ясно, что эта дорога пересекает внутренность фигуры F. Следовательно, на этой дороге встретится r участков ($r \ge 1$), каждый из которых начинается и заканчивается перекрестками, принадлежащими следу «танка», а между ними будут только внутренние клетки фигуры F. Легко понять, что если «танк» пройдет через все эти участки, то он разобьет фигуру F на $r + 1$ других фигур: $F_1, F_2, \ldots, F_{r+1}$, каждая из которых также ограничена следом «танка». Поскольку проекции фигур $F_1, F_2, \ldots, F_{r+1}$ содержат не более k перекрестков, то по индукционному предположению их площади равны $S(F_1) = p_1n+1$, $S(F_2) = p_2n+1$, … …, $S(F_{r+1}) = p_{r+1}n+1$, где $p_1, p_2, \ldots, p_{r+1}$ – некоторые натуральные числа. Пусть каждый из r участков содержит $q_1, \ldots, q_r$ внутренних перекрестков. Тогда площадь фигуры F удовлетворяет соотношению

$$S(F) = S(F_1) + \ldots + S(F_{r+1}) + (n(q_1+1)-1) + \ldots + (n(q_r+1)-1) =$$
$$= (p_1n+1) + \ldots + (p_{r+1}n+1) + n(q_1 + \ldots + q_r + r) - r =$$
$$= n(p_1 + \ldots + p_{r+1} + q_1 + \ldots + q_r + r) + (r+1) - r =$$
$$= n(p_1 + p_2 + \ldots + p_{r+1} + q_1 + \ldots + q_r + r) + 1.$$

Индукция закончена.

Пусть теперь площадь ограниченной следом «танка» фигуры равна 2002. Тогда выполнено условие $2002 = pn + 1$, где p – некоторое натуральное число. Отсюда вытекает, что $pn = 2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$, т.е. n является натуральным делителем числа 2001, причем $n \ge 3$. Заметим, что дороги разделяют между собой кварталы (квадраты со стороной $n - 1$). Очевидно, площадь любой ограниченной следом «танка» фигуры не меньше, чем площадь одного квартала. Следовательно, $(n-1)^2 \le 2002$, откуда вытекает, что $n \le 45$. Таким образом, n может принимать максимум три значения: 3, 23 и 29.

При $n = 3$ легко получить требуемую площадь. Для этого «танк» должен сделать 1 ход по горизонтали и 334 хода по вертикали, а потом те же ходы в обратном направлении. В результате его след ограничит прямоугольник размером 2×1001. Аналогично, при $n = 23$ «танк» должен сделать 1 ход по горизонтали и 4 хода по вертикали. Ясно, что мы получим прямоугольника размером 22×91.

Рассмотрим $n = 29$. Заметим, что в этом случае площадь квартала равна $28^2 = 784$. Поскольку $784 \cdot 3 > 2002$, то искомая фигура содержит не более двух кварталов. Но тогда ее площадь не превосходит площади прямоугольника размером 28×57. Но эта площадь равна $28 \cdot 57 = 1596 < 2002$. Следовательно, случай $n = 29$ отпадает.

А.Малеев, С.Волчёнков

М1834. *Для действительных чисел x, y, z докажите неравенства:*

а) $x^6y^6 + x^6z^6 + y^6z^6 + 3x^4y^4z^4 \ge 2(x^3+y^3+z^3)x^3y^3z^3$,

б) $x^6 + y^6 + z^6 + 3x^2y^2z^2 \ge 2(x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3)$.

Первое решение. Если хотя бы одно из чисел x, y, z равно 0, то первое неравенство очевидно, а второе хорошо известно. Далее полагаем все числа x, y, z положительными. Разделим первое неравенство на $x^3y^3z^3$ и введем новые обозначения для $\sqrt{\frac{xy}{z}}$, $\sqrt{\frac{yz}{x}}$, $\sqrt{\frac{zx}{y}}$. Легко видеть, что в результате указанных действий получилось второе неравенство. Таким образом, остается доказать только второе неравенство. Сначала разделим его на $x^2y^2z^2$ и введем новые обозначения: $a = \frac{xy}{z^2}$, $b = \frac{yz}{x^2}$, $c = \frac{xz}{y^2}$. При этом $abc = 1$. Перепишем неравенство:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 \ge 2(a+b+c).$$

Выберем два из трех чисел, которые лежат по одну сторону от 1. Пусть это a и b. Перепишем неравенство в следующем виде:

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + 2(a-1)(b-1) + (ab-1)^2 \ge 0.$$

Но сумма трех неотрицательных слагаемых неотрицательна.

Этим завершено доказательство обоих неравенств.

Второе решение. Поскольку неравенства задачи эквивалентны, докажем лишь первое из них; очевидно, при этом достаточно ограничиться неотрицательными значениями переменных. Мы будем опираться на следующую простую, но очень эффективную при доказательстве неравенств теорему.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, $f(a) \ge 0$ и $f'(x) \ge 0$ при $x > a$, то $f(x) \ge 0$ при $x \ge a$.

Приступим к решению задачи: считая, без ограничения общности, $x \ge y \ge z \ge 0$, рассмотрим

$$f(x) = x^6y^6 + y^6z^6 + z^6x^6 + 3x^4y^4z^4 - 2(x^3+y^3+z^3)x^3y^3z^3.$$

Из теоремы следует, что достаточно доказать два неравенства:

$$f(y) \ge 0 \qquad (1)$$

и

$$f'(x) \ge 0 \text{ при } x > y. \qquad (2)$$

Эти неравенства почти очевидны. В самом деле, (1), или

$$f_1(y) = y^4 - 4z^3y + 3z^4 \ge 0 \text{ при } y \ge z \ge 0, \qquad (3)$$

можно переписать в виде

$$t^4 - 4t + 3 \ge 0 \text{ при } t \ge 1. \qquad (4)$$

А теперь осталось разделить левую часть на $t-1$:

$$\left(t^4-1\right) - 4(t-1) = (t-1)\left(\left(t^2+1\right)(t+1) - 4\right).$$

Неравенство доказано.

Можно поступить и по-другому: применить теорему еще раз, к неравенству (3) (либо (4)). Применим:

$$f_1(z) = 0 \text{ и } f_1'(y) = 4y^3 - 4z^3 > 0 \text{ при } y > z.$$

Теперь докажем неравенство (2), или (после очевидных упрощений)

$$f_2(x) = \left(y^6 + z^6 - 2y^3z^3\right)x^3 + \\ + 2y^4z^4x - y^3z^3\left(y^3+z^3\right) \ge 0.$$

Поскольку $f_2(x)$ возрастает, то достаточно доказать $f_2(y) \ge 0$, или

$$f_3(y) = y^4 - 3z^3y + 2z^4 \ge 0 \text{ при } y \ge z \ge 0, \qquad (5)$$

– что абсолютно аналогично доказательству (3).

Заметим еще, что (5) можно и не доказывать: поскольку $f_1(y) \ge 0$, то и

$$f_3(y) = f_1(y) + z^3y - z^4 \ge 0.$$

Ф.Шлейфер, В.Сендеров

М1835. *Около четырехугольника можно описать окружность и в него можно вписать окружность. Через центр вписанной окружности проведена прямая, параллельная какой-либо стороне четырехугольника, две его противоположные стороны отсекают на ней отрезок. Докажите, что длина отсекаемого отрезка равна четверти периметра четырехугольника.*

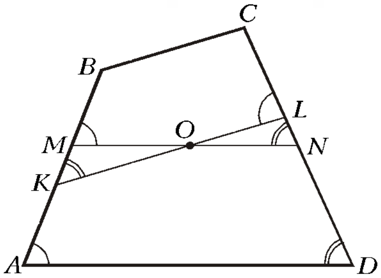


Рис. 2

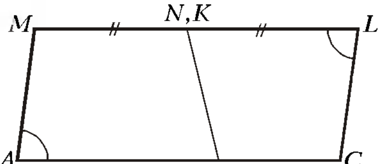


Рис 2

Отрезок MN проходит через центр O вписанной в четырехугольник $ABCD$ окружности параллельно стороне AD, отрезок KL тоже проходит через O, но параллельно стороне BC (рис.1). Нам нужно показать, что $2MN = AD + BC$. Этого будет достаточно, ввиду того, что в четырехугольник можно вписать окружность.

Замечаем равенство $\angle OMB = \angle OLC$, а значит, $OM = OL$. Далее, $\angle OKB = \angle ONC$, а значит, $OK = ON$. Таким образом, $MN = KL$.

Трапеции $AMND$ и $BCLK$ имеют равные высоты и $\angle ADN + \angle CBK = 180^\circ$. Значит, из трапеций можно сложить параллелограмм $AMLC$ (рис.2). Откуда следует, что $2MN = AD + BC$.

В.Произволов

М1836. *Гидры состоят из голов и шей (любая шея соединяет ровно две головы). Одним ударом меча можно снести все шеи, выходящие из какой-то головы A гидры. Но при этом из головы A мгновенно вырастает по одной шее во все головы, с которыми A не была соединена. Геракл побеждает гидру, если ему удастся разрубить ее на две не связанные шеями части. Найдите наименьшее N, при котором Геракл сможет победить любую стошеюю гидру, нанеся не более чем N ударов.*

Ответ: 10.

Перейдем к графу, в котором головы – вершины, шеи – ребра, а удар по шеям, выходящим из головы A, назовем инвертированием вершины A. Тогда если есть вершина X степени не больше 10, то достаточно инвертировать ее соседей, и она отделится, т.е. эта вершина не будет соединена с остальными вершинами графа. Если есть вершина, соединенная со всеми вершинами, за исключением n ($n \le 9$), то нужно инвертировать сначала эту вершину, а затем те n вершин, с которыми она вначале не была соединена, и тогда эта вершина отделится. Если же для каждой вершины есть хотя бы 11 соединенных с ней вершин и хотя бы 10 не соединенных с ней, то всего вершин не меньше 22, а ребер не меньше $22 \cdot 11 > 100$.

Приведем пример гидры, которую нельзя разрубить за 9 ударов: две группы по 10 голов и 100 шей, соединяющих все пары голов из разных групп.

Действительно, пусть нанесено не более 9 ударов. Тогда в каждой группе осталось по неотрубленной голове, и поэтому есть шея из одной группы в другую. С другой стороны, каждая неотрубленная голова связана со всеми отрубленными в своей группе. Поэтому, если в каждой части отрублено хотя бы по голове, то гидра осталась связной. Легко видеть, что если отрублено 9 голов в одной части, то гидра тоже осталась связной.

Ю.Лифшиц

М1837. *Докажите, что для любого натурального числа $n > 10000$ найдется такое натуральное число m, представимое в виде суммы двух квадратов, что $0 < m - n < 3\sqrt[4]{n}$.*

Пусть x – наибольшее целое число, квадрат которого не превосходит n: $x^2 \le n < (x+1)^2$. Так как n – целое, $n - x^2 \le 2x \le 2\sqrt{n}$. Пусть, далее, y – наименьшее натуральное число, квадрат которого больше $n - x^2$:

$$(y-1)^2 \le n - x^2 < y^2.$$

Тогда

$$y = (y-1) + 1 \le \sqrt{n - x^2} + 1 \le \sqrt{2\sqrt{n}} + 1 = \sqrt{2}\sqrt[4]{n} + 1.$$

Ясно, что $m = x^2 + y^2 > n$, т.е. m представимо в виде суммы двух квадратов, и $m - n > 0$.

С другой стороны,

$$m - n = x^2 + y^2 - n = y^2 - \left(n - x^2\right) \le y^2 - (y-1)^2 =$$

$$= 2y - 1 \le 2\sqrt{2}\sqrt[4]{n} + 1 .$$

Осталось заметить, что при $n > 10000$

$$2\sqrt{2}\sqrt[4]{n} + 1 < 3\sqrt[4]{n} .$$

А.Голованов

М1838. *На плоскости взято конечное число красных и синих прямых, среди которых нет параллельных, так, что через любую точку пересечения одноцветных прямых проходит прямая другого цвета. Докажите, что все прямые проходят через одну точку.*

Предположим противное. Рассмотрим синюю прямую l; пусть A, B – две наиболее удаленные друг от друга точки пересечения l с красными прямыми, m и n – красные прямые, проходящие через A и B; C – точка пересечения m и n (рис.1). Тогда через C проходит синяя прямая p, которая пересекает l в какой-то точке D отрезка AB, иначе A и B – не наиболее удаленные.

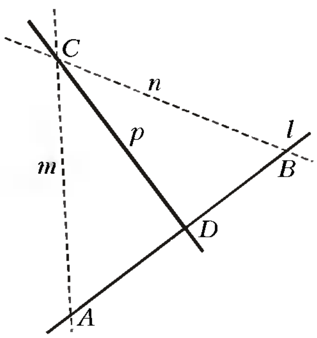


Рис. 1

Рассмотрим все четверки прямых l', m', n', p', расположенных как l, m, n, p (l', p' – одного цвета; m', n' – другого; m', n', p' пересекаются в одной точке; точка пересечения p' и l' лежит между точками пересечения l' с m' и n'), и выберем среди них такую, в которой прямые l', m', n' образуют треугольник наименьшей площади (рис.2). Тогда через точку D' проходит прямая q', одноцветная с m'. Она пересекает либо отрезок $B'C'$, либо $A'C'$ (пусть, для определенности, $B'C'$). Тогда прямые n', l', p', q' образуют конфигурацию с треугольником меньшей площади. Получили противоречие.

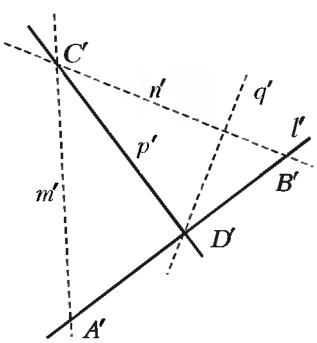


Рис. 2

В.Дольников, И.Богданов

М1839. *Пусть* $0 < x < \frac{\pi}{4}$. *Докажите, что*

$$(\cos x)^{\cos^2 x} > (\sin x)^{\sin^2 x} ,$$

а также

$$(\cos x)^{\cos^4 x} < (\sin x)^{\sin^4 x} .$$

На первый взгляд кажется, что одно из неравенств противоречит другому, но это не так.

Рассмотрим

$$f(y) = \cos^y x - \sin^y x ,$$

где $0 < x < \frac{\pi}{4}$, $y \ge 0$. Имеем: $f(0) = 0$, $f(y) > 0$ при $y > 0$, $f(y) \to 0$ при $y \to \infty$. Далее,

$$f'(y) = \cos^y x \ln\cos x - \sin^y x \ln\sin x =$$

$$= \cos^y x\left(\ln\cos x - \operatorname{tg}^y x \ln\sin x\right),$$

поэтому $f'(y)$ имеет единственный корень при $y > 0$, так как функция $g(y) = \operatorname{tg}^y x$ монотонна. Из равенства

$$f(2) = f(2)\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = f(4)$$

следует, что $f'(2) > 0$, $f'(4) < 0$.

Перепишем первое неравенство:

$$\cos^2 x \ln\cos x > \sin^2 x \ln\sin x ,$$

что эквивалентно первому неравенству задачи. Аналогично, $f'(4) < 0$, или

$$\cos^4 x \ln\cos x < \sin^4 x \ln\sin x ,$$

что эквивалентно второму неравенству задачи.

В.Сендеров

М1840. *В сферу вписаны несколько правильных тетраэдров так, что каждые два из них имеют общую вершину. Докажите, что все тетраэдры имеют общую вершину.*

Поначалу заметим, что все наши тетраэдры равны; можно считать, что ребро каждого из них равно 1. При этом, если два из них имеют две общие вершины, т.е. общее ребро, то они совпадают.

Два тетраэдра T_1 и T_2 имеют общую вершину A (только одну). На сфере найдется окружность ω, на которой расположены остальные шесть вершин тетраэдров T_1 и T_2. Отметим свойство окружности ω: если один конец ее хорды длины 1 является вершиной T_1 либо T_2, то другой конец хорды тоже является вершиной T_1 или T_2 соответственно.

Предположим, что среди наших тетраэдров нашелся тетраэдр T_3, для которого точка A не является вершиной. Тогда есть точка B – общая вершина тетраэдров T_3 и T_1, и точка C – общая вершина тетраэдров T_3 и T_2. Отрезок BC является ребром тетраэдра T_3 и хордой длины 1 окружности ω. В силу свойства окружности ω точки B и C, обе сразу, должны являться вершинами и тетраэдра T_1, и тетраэдра T_2, что противоречит факту.

В.Произволов

Ф1848. *При движении точки по прямой график зависимости ее скорости от координаты представляет в выбранном масштабе четверть окружности (рис.1). Найдите ускорение точки в конце отрезка – когда скорость спадает до нуля. Найдите также время движения на отрезке* $(0; x_0)$.

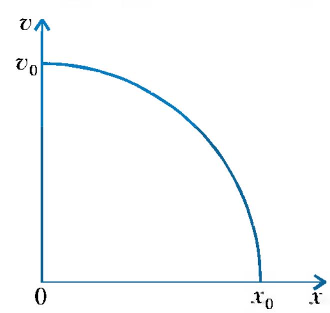


Рис. 1

Такая зависимость между скоростью точки и ее координатой получается при гармонических колебаниях. Проще всего записать энергетический баланс, на-

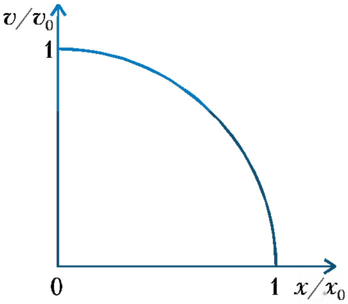


Рис.2

пример, для колебаний груза на пружине:

$$\frac{mv^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=\frac{mv_0^2}{2},$$

откуда

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{x}{v_0}\right)^2=1,$$

или (рис.2)

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2+\left(\frac{x}{x_0}\right)^2=1.$$

Дальше все понятно:

$$\omega_0=\frac{v_0}{x_0},\quad a(x_0)=a_m=\omega_0^2x_0=\frac{v_0^2}{x_0}.$$

Конечно, нужно еще «добавить» знак «минус»:

$$a(x_0)=-\frac{v_0^2}{x_0}.$$

Искомое время составляет четверть периода колебаний:

$$\tau=\frac{\pi/2}{\omega_0}=\frac{\pi}{2}\frac{x_0}{v_0}.$$

З.Рафаилов

Ф1849. *Блок подвешен при помощи куска легкой нерастяжимой нити, один конец которой закреплен, а к другому концу прикреплен груз массой m (рис.1). Груз вначале удерживают, затем отпускают. Найдите ускорение груза. Масса блока M, она сосредоточена в оси блока. Свободные концы нити при движении остаются вертикальными.*

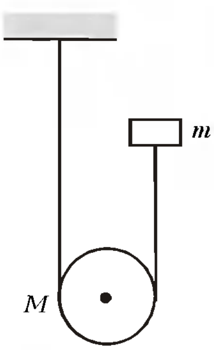


Рис.1

Если нить натянута, то ускорение оси блока в 2 раза меньше ускорения груза. Вся масса блока сосредоточена в его оси, так что вращение блока несущественно, а натяжение нити одинаково с обеих сторон блока. Тогда можно записать уравнения движения для груза и блока (рис.2):

$$mg+T=ma,$$

$$Mg-2T=M\cdot 0{,}5a.$$

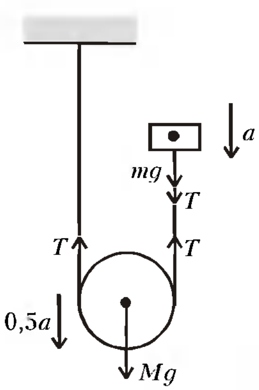


Рис.2

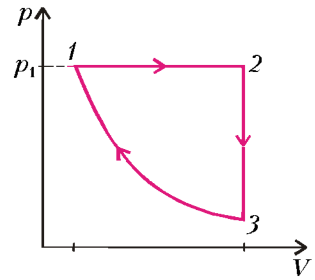
Отсюда получим

$$a=g\frac{M+2m}{0{,}5M+2m}>g.$$

Видно, что нить и в самом деле натянута.

А.Зильберман

Ф1850. *Порция гелия участвует в замкнутом цикле 1—2—3—1. На участке 1—2 давление остается постоянным, а температура возрастает на 50 К; на участке 2—3 газ охлаждается на 80 К при неизменном объеме; на участке 3—1 газ сжимают адиабатически. Найдите термодинамический КПД этого цикла.*



Газ получает в этом цикле (см. рисунок) тепло от нагревателя на участке 1—2:

$$Q_н=C_p\nu(T_2-T_1)=\frac{5}{2}R\nu\Delta T_1,$$

где $\Delta T_1=50$ К. Работа в цикле равна

$$A=A_{12}+A_{31}=$$

$$=p_1(V_2-V_1)-C_V\nu(T_1-T_3)=R\nu\Delta T_1-\frac{3}{2}R\nu\Delta T_2,$$

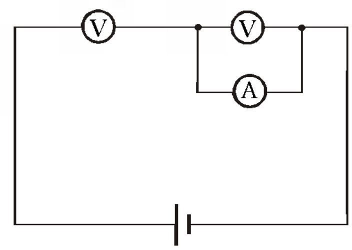
где $\Delta T_2=80\text{ К}-50\text{ К}=30$ К.

Тогда КПД цикла равен

$$\eta=\frac{A}{Q_н}=\frac{R\nu\Delta T_1-3R\nu\Delta T_2/2}{5R\nu\Delta T_1/2}=\frac{1}{25}=4\%.$$

А.Циклов

Ф1851. *К батарейке подключены два одинаковых вольтметра, соединенных последовательно, и параллельно одному из них подключен миллиамперметр. Вольтметры показывают 1,5 В и 0,3 В, показание миллиамперметра 0,5 мА. Что покажут приборы, если их подключить к батарейке, соединив последовательно? А какими могут быть их показания, если все приборы подключить к батарейке параллельно? Только не нужно подключать миллиамперметр прямо к батарейке на практике — лишь посчитайте!*



Из данных, приведенных в условии (см. рисунок), легко найти напряжение батарейки U (считаем батарейку идеальной) и сопротивления приборов R для вольтметра и r для миллиамперметра:

$$U=1{,}5\text{ В}+0{,}3\text{ В}=1{,}8\text{ В},$$

$$\frac{1{,}5\text{ В}}{R}=\frac{0{,}3\text{ В}}{R}+I\Rightarrow R=\frac{1{,}2\text{ В}}{0{,}5\text{ мА}}=2{,}4\text{ кОм},$$

$$I=\frac{0{,}3\text{ В}}{r}\Rightarrow r=\frac{0{,}3\text{ В}}{0{,}5\text{ мА}}=0{,}6\text{ кОм}.$$

При последовательном соединении приборов общее сопротивление равно

$$R_{общ}=2R+r=5{,}4\text{ кОм},$$

и по цепи идет ток

$$I_1=\frac{U}{R_{общ}}=\frac{1}{3}\text{ мА}.$$

При этом показания вольтметров одинаковы и равны

$$U_1=I_1R=0{,}8\text{ В}.$$

При параллельном подключении приборов вольтметры показывают напряжение батарейки:

$$U_2=U=1{,}8\text{ В},$$

а миллиамперметр показывает ток

$$I_2=\frac{U}{r}=3\text{ мА}.$$

Р.Александров

Ф1852. *К звуковому генератору подключили цепь, состоящую из амперметра переменного тока, двух одинаковых конденсаторов и катушки индуктивности (рис.1). На частотах 1000 Гц и 1100 Гц показания амперметра оказались одинаковыми. На какой частоте ток будет практически нулевым? На какой частоте ток окажется очень большим? При расчете элементы цепи считайте идеальными.*

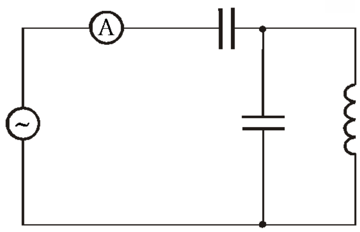


Рис.1

Если начать с очень низкой частоты и постепенно ее увеличивать, ток будет возрастать – общее сопротивление цепи на этих частотах определяется верхним (см. рис.1) конденсатором, а сопротивление параллельно включенных катушки и конденсатора мало. При этом практически весь ток течет через катушку, сопротивление которой мало. По мере возрастания частоты растет общий ток и меняется соотношение токов в параллельной цепи, причем токи конденсаторов оказываются противофазными. На некоторой частоте f_{p1} токи в конденсаторах сравняются (ток через катушку при этом будет равен их сумме), напряжения конденсаторов в сумме дадут ноль, а ток в цепи резко возрастет – наступит «резонанс напряжений» (рис.2). Нам не нужно находить этот ток, иначе пришлось бы учитывать неидеальность элементов цепи, а частоту f_{p1} можно найти из условия

$$I_1 X_C = 2 I_1 X_L$$

(для параллельно соединенных C и L). Тогда получим

$$\frac{1}{2\pi f_{p1} C} = 2 \cdot 2\pi f_{p1} L ,$$

и

$$f_{p1} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2LC}} .$$

Рис.2

При дальнейшем увеличении частоты ток падает, на некоторой частоте f_{p2} он станет практически нулевым – наступит «резонанс токов» в параллельном контуре. Это соответствует условию

$$I_2 = \frac{U}{X_C} = \frac{U}{X_L} , \text{ или } 2\pi f_{p2} C = \frac{1}{2\pi f_{p2} L} ,$$

откуда

$$f_{p2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \sqrt{2} f_{p1} .$$

Ясно, что частоты 1000 Гц и 1100 Гц могут лежать по разные стороны от f_{p1} – тогда эта частота равна приближенно (1000 Гц + 1100 Гц)/2 = 1050 Гц (более точный расчет с явно округленными данными в условии задачи делать неразумно). При этом частота «нулевого» тока составит $1050\sqrt{2}$ Гц ≈ 1485 Гц.

Второй возможный вариант – частоты 1000 Гц и 1100 Гц «окружают» частоту f_{p2}, тогда эта частота будет равна 1050 Гц, а частота, на которой ток будет очень большим, составит $1050/\sqrt{2}$ Гц ≈ 743 Гц.

А.Токов

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

«Солнце остановил, сдвинул Землю»

(*Начало см. на с. 13*)

основной его труд, книга «О вращениях небесных сфер», был опубликован лишь в 1543 году. Для подтверждения своей теории Коперник провел математические расчеты и сравнил их выводы с собственными астрономическими наблюдениями и с имевшимися в его распоряжении наблюдениями Птолемея. Следует отметить, что для этого Коперник должен был овладеть всеми известными к тому времени методами математического исследования. Ощущая неполноту имеющихся в его распоряжении знаний, он вынужден был самостоятельно заняться совершенствованием математических средств и методов, имеющих важные приложения в астрономических исследованиях. При этом он упорядочил аппарат сферической тригонометрии, дал оригинальные выводы основных ее теорем, отличающиеся простотой и изяществом. Тригонометрическая часть сочинения Коперника «О вращениях небесных сфер» вышла отдельной книгой, которая заканчивалась оригинальными таблицами синусов, вычисленными до седьмой цифры с шагом в $1'$, впервые приспособленными для вычисления синусов дополнительных дуг, иначе говоря, косинусов. Копернику принадлежит также идея введения в вычислительную математику секанса.

Хотя полностью труд Коперника был опубликован только в 1543 году, некоторые сведения о его работе распространились по Европе задолго до этого. Большую роль в подготовке и публикации рукописи сыграл ученик и сподвижник Коперника немецкий астроном и математик Георг Иоахим Ретик. Он стал страстным пропагандистом его учения.

К сожалению, выпуск книги Коперника совпал со временем его тяжелой болезни. Николай Коперник скончался 24 мая 1543 года. Он похоронен под плитами фромборкского кафедрального собора. В 1830 году в Варшаве был открыт памятник Николаю Копернику работы известного датского скульптора Торвальдсена. На пьедестале этого первого памятника великому ученому высечены слова, вынесенные в заголовок данной статьи.

Траектории замечательных точек треугольника Понселе

А.ЗАСЛАВСКИЙ, Д.КОСОВ, М.МУЗАФАРОВ

Одной из наиболее сложных и красивых теорем геометрии является теорема Понселе. Приведем ее формулировку.

Теорема 1. *Пусть окружность* β *лежит внутри окружности* α. *Из точки A окружности* α *проведем касательную к окружности* β *и отметим вторую точку* A_1 *(рис.1) ее пересечения с окружностью* α. *Из точки* A_1 *снова проведем касательную к окружности* β *и отметим точку* A_2 *ее пересечения с* α. *Аналогично получаются точки* A_3, A_4, ... *Если окажется, что* $A_n = A$, *то для всякой другой точки* $\tilde{A}$ *окружности* α *точка* $\tilde{A}_n$ *совпадает с* $\tilde{A}$.

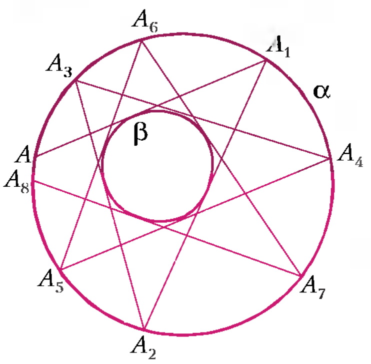


Рис. 1

Доказательство теоремы Понселе для любого n можно найти, например, в задачнике И.Ф.Шарыгина «Геометрия. Задачник, 9 – 11 кл. Учебное пособие» (М.: Дрофа, 1996), задачи 614 – 615. Впрочем, нас будет интересовать только случай $n = 3$.

Теорема Понселе для $n = 3$

Прежде чем доказывать теорему Понселе для треугольника, докажем формулу Эйлера, связывающую радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника с расстоянием между их центрами.

Теорема 2. *Пусть R – радиус описанной около треугольника ABC окружности, r – радиус вписанной в него окружности, а d – расстояние между центрами этих окружностей. Тогда*

$$d^2 = R^2 - 2Rr .$$

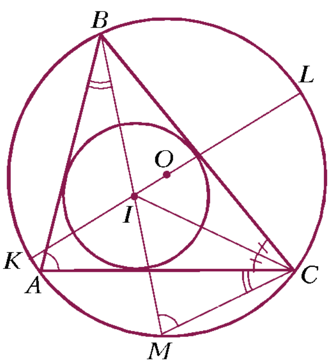


Рис. 2

Доказательство. Пусть O и I – центры описанной и вписанной окружностей соответственно (рис. 2). Через точки O и I проведем диаметр KL описанной окружности и продлим биссектрису угла B до пересечения с описанной окружностью в точке M. Тогда

$$MI \cdot BI = KI \cdot LI =$$

$$= (R - d)(R + d). \quad (*)$$

Заметим, что треугольник MCI равнобедренный, причем $MC = MI$. В самом деле, по теореме о вписанных углах,

$$\angle CMI = \angle A, \quad \angle MCA = \angle CBM = \frac{1}{2}\angle B .$$

Поэтому

$$\angle MCI = \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = \frac{\pi - \angle A}{2} .$$

Но тогда

$$\angle MIC = \pi - \angle A - \frac{\pi - \angle A}{2} = \frac{\pi - \angle A}{2} = \angle MCI .$$

По теореме синусов

$$MI = MC = 2R\sin\frac{\angle B}{2} .$$

В то же время $BI = r / \sin\frac{\angle B}{2}$. Подставляя в $(*)$ выражения для MI и BI, получаем, что

$$2Rr = R^2 - d^2 ,$$

но это и требовалось доказать.

Пусть теперь α – описанная, а β – вписанная окружности треугольника ABC. Возьмем произвольную точку A' на окружности α и проведем из нее две касательные к окружности β (рис.3). Пусть B' и C' – точки пересечения этих касательных с окружностью α, отличные от точки A'. Докажем, что $B'C'$ касается окружности β.

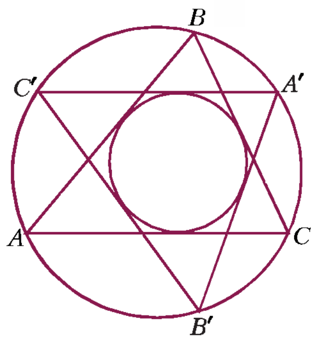


Рис. 3

Предположим, что это не так. Будем теперь, сохраняя центр меньшей окружности, непрерывно менять ее радиус до тех пор, пока касание не будет достигнуто (если $B'C'$ пересекает окружность, радиус ее надо уменьшать, если нет – увеличивать). Когда $B'C'$ коснется окружности, возникнет противоречие с формулой Эйлера: у треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают R и d, а радиусы вписанных окружностей – нет.

Тем самым теорема Понселе для треугольника доказана.

Теперь представим себе, что вершина A движется по окружности α. Движущийся таким образом треугольник будем называть треугольником Понселе. Тогда замечательные точки [1] треугольника ABC тоже движутся по некоторым линиям.

[1] *Замечательной точкой мы считаем такую точку в плоскости треугольника, определение которой не зависит от того, в каком порядке берутся стороны треугольника. Таковы, например, точки пересечения медиан, высот, биссектрис и т.п.*

В уже упомянутой книге И.Ф.Шарыгина и в статье В.Дубровского и В.Сендерова «Ловушка для треугольника» («Квант» № 3 за 1999 г.) доказано, например, что центр тяжести треугольника движется по некоторой окружности. Мы решим эту задачу и исследуем траектории других замечательных точек треугольника Понселе.

Барицентрические координаты

Барицентрические координаты точек плоскости могут оказаться полезными при решении многих геометрических задач. В дальнейшем они будут основным аппаратом наших исследований.

Определение. *Пусть дан треугольник ABC и точка X. Барицентрическими координатами X относительно ABC называются числа* $\alpha = S_{BCX}/S_{ABC}$, $\beta = S_{ACX}/S_{ABC}$, $\gamma = S_{ABX}/S_{ABC}$, *причем если X лежит вне треугольника, то площади треугольников, не имеющих с ABC общих внутренних точек, считаются отрицательными, так что сумма трех координат равна 1.*

Нетрудно убедиться, что барицентрические координаты любой точки определены однозначно, и, напротив, любые три числа α, β, γ, сумма которых равна единице, однозначно определяют точку на плоскости.

Поскольку отношение площадей двух треугольников с общим основанием равно отношению их высот, барицентрические координаты равны отношениям расстояний от точки X до прямых BC, AC и AB к соответствующим высотам треугольника ABC, но взятым с соответствующим знаком.

Например, координата α положительна, если точки A и X лежат по одну сторону от прямой BC, равна нулю, если точка X лежит на BC, и отрицательна, если A и X находятся по разные стороны от BC. На рисунке 4 показаны знаки чисел α, β, γ в зависимости от положения точки X.

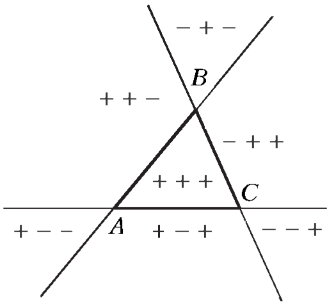


Рис. 4

Пусть даны точки X_1 и X_2 с координатами ($\alpha_1; \beta_1; \gamma_1$) и ($\alpha_2; \beta_2; \gamma_2$) соответственно, а Y – точка с координатами $(\alpha; \beta; \gamma)$, принадлежащая отрезку X_1X_2. Тогда

$$\alpha = \lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2, \quad \beta = \lambda\beta_1 + (1-\lambda)\beta_2, \quad \gamma = \lambda\gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2,$$

где

$$\lambda = \frac{YX_2}{X_1X_2}.$$

Упражнение 1. Докажите это утверждение.

В дальнейшем нам также понадобится формула, выражающая расстояние d между двумя точками через их барицентрические координаты ($\alpha_1; \beta_1; \gamma_1$) и ($\alpha_2; \beta_2; \gamma_2$):

$$d^2 = -\big((\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)c^2 + \\ +(\alpha_1-\alpha_2)(\gamma_1-\gamma_2)b^2 + (\beta_1-\beta_2)(\gamma_1-\gamma_2)a^2\big). \quad (1)$$

Доказательство формулы (1) проводится с помощью несложных, но довольно длинных вычислений. Провести их вы сможете самостоятельно, решив следующие упражнения.

Упражнения

2. Пусть точка X имеет координаты $(\alpha; \beta; \gamma)$. Тогда $\overrightarrow{AX} = \gamma\vec{b} - \beta\vec{c}$, где $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BA}$.

3. Пусть $\vec{u} = \overrightarrow{X_1X_2}$. Вычислите скалярное произведение $u^2 = \vec{u}\cdot\vec{u}$, пользуясь тем, что, по предыдущему упражнению,

$$\vec{u} = \overrightarrow{AX_2} - \overrightarrow{AX_1} = (\gamma_2-\gamma_1)\vec{b} - (\beta_2-\beta_1)\vec{c}.$$

Преобразуйте полученное выражение с помощью соотношений $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 0$, $\alpha+\beta+\gamma = 1$.

Симметрические функции

Многочлен $f(a,b,c)$ называется *симметрическим*, если он не меняется при любой перестановке аргументов a, b, c. Можно доказать (мы не будем здесь этого делать), что $f(a,b,c)$ можно выразить через основные симметрические многочлены

$$\sigma_1 = a+b+c, \quad \sigma_2 = ab+ac+bc, \quad \sigma_3 = abc.$$

Например,

$$a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b = \\ = (a+b+c)(ab+ac+bc) - 3abc = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3.$$

Упражнение 4. Выразите через σ_1, σ_2 и σ_3 функции а) $a^2+b^2+c^2$; б) $a^3+b^3+c^3$.

Из формулы (1) следует, что для замечательных точек X_1 и X_2 треугольника расстояние X_1X_2 является симметрической функцией длин сторон a, b, c. Это замечание дает возможность выразить расстояние X_1X_2 через σ_1, σ_2, σ_3. В свою очередь, функции σ_1, σ_2, σ_3 могут быть выражены через полупериметр p и радиусы R и r. Прежде всего,

$$\sigma_1 = a+b+c = 2p$$

по определению. Далее,

$$\sigma_2 = ab+ac+bc = p^2+r^2+4Rr,$$

$$\sigma_3 = abc = 4Rpr.$$

Выражение для σ_3 очевидным образом получается из двух формул для площади S треугольника: $S = rp$ и $S = \dfrac{abc}{4R}$.

Упражнение 5. Докажите формулу для σ_2. *Указание.* Воспользуйтесь формулой Герона $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$.

Итак, расстояния между любыми двумя замечательными точками треугольника могут быть выражены через функции от p, r и R. Для этого нужно вычислить барицентрические координаты замечательных точек. Нас главным образом будут интересовать расстояния точек O и I до других замечательных точек.

Барицентрические координаты точек *O* и *I*

Здесь мы вычислим барицентрические координаты «основных» точек – центров вписанной и описанной окружностей.

Прежде всего, $I = \left(\dfrac{a}{2p}; \dfrac{b}{2p}; \dfrac{c}{2p}\right)$. Для доказательства достаточно заметить, что $S_{ABC} = rp$, а $S_{ABI} = \dfrac{1}{2}rc$, поэтому $\gamma = \dfrac{c}{2p}$. Аналогично, $\alpha = \dfrac{a}{2p}$, $\beta = \dfrac{b}{2p}$.

Для вычисления координат точки O заметим, что $S_{ABO} = \dfrac{1}{2}cR|\cos\angle C|$. В самом деле, если угол C острый, то $\angle AOB = 2\angle C$, но тогда высота равнобедренного треугольника AOB, опущенная на сторону AB, равна $R\cos\angle C$. Аналогично, если угол C тупой, то $\angle AOB = 2\pi - 2\angle C$, но тогда высота треугольника AOB равна $-R\cos\angle C$. Поэтому в любом случае $\gamma = \dfrac{cR\cos\angle C}{2S}$, а так как $\cos\angle C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, $R = \dfrac{abc}{4S}$, $S = rp$, то

$$\gamma = \frac{c^2\left(b^2+a^2-c^2\right)}{16p^2r^2}.$$

Аналогично находятся α и β.

Таким образом,

$$O = \left(\frac{a^2\left(b^2+c^2-a^2\right)}{16p^2r^2}; \frac{b^2\left(a^2+c^2-b^2\right)}{16p^2r^2}; \frac{c^2\left(b^2+a^2-c^2\right)}{16p^2r^2}\right).$$

Траектория центра тяжести

Напомним, что *центром тяжести*, или *центроидом* треугольника, называется точка пересечения его медиан M. Поскольку прямые, соединяющие центр тяжести с вершинами, разрезают треугольник на три равновеликих треугольника, барицентрические координаты точки M равны $(1/3; 1/3; 1/3)$.

Подставляя координаты точек I, O, M в формулу (1), получаем после вычислений

$$IM^2 = \left(5r^2 + p^2 - 16Rr\right)/9,$$

$$OM^2 = \left(9R^2 + 8Rr + 2r^2 - 2p^2\right)/9.$$

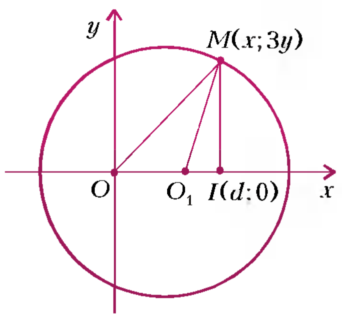


Рис. 5

Введем систему декартовых координат с центром в точке O и осью абсцисс, направленной вдоль прямой OI (рис.5), так что точка I имеет координаты $(d;\ 0)$. Исключив из выписанных соотношений p^2, получим уравнение

$$2IM^2 + OM^2 = \frac{3R^2 - 8Rr + 4r^2}{3}. \quad (2)$$

Пусть $(x;\ y)$ – декартовы координаты точки M. Тогда

$$OM^2 = x^2 + y^2,$$

$$IM^2 = (x-d)^2 + y^2.$$

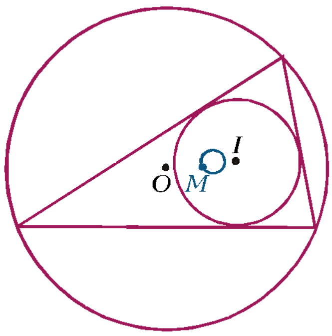


Рис. 6

Подставим эти выражения в уравнение (2) и преобразуем его к виду

$$\left(x - \frac{2}{3}d\right)^2 + y^2 = \rho^2,$$

где $\rho = \left(\dfrac{R-2r}{3}\right)^2$.

Это уравнение окружности радиуса $\dfrac{R-2r}{3}$ с центром в точке O_1, делящей отрезок OI в отношении 2:1 (рис.6).

Одно геометрическое место точек

В предыдущем пункте нам пришлось встретиться с геометрическим местом точек M, для которых $2IM^2 + OM^2 = \text{const}$, где I и O – фиксированные точки. Точно так же находится геометрическое место точек X, для которых

$$k_1IX^2 + k_2OX^2 = m^2,$$

где I и O – данные точки, k_1, k_2 – числа, а m – данный отрезок.

В самом деле, пусть $(x;\ y)$ – координаты точки X, тогда

$$OX^2 = x^2 + y^2,$$

$$IX^2 = (x-d)^2 + y^2.$$

По условию,

$$x^2 - \frac{2k_1dx}{k_1+k_2} + y^2 = \frac{m^2 - k_1d^2}{k_1+k_2},$$

или (если $k_1 + k_2 \neq 0$)

$$\left(x - \frac{k_1d}{k_1+k_2}\right)^2 + y^2 = U.$$

Отсюда видно, что при $U > 0$ получается окружность с центром $O_1\left(\dfrac{k_1d}{k_1+k_2}; 0\right)$; при $U = 0$ – точка O_1; при $U < 0$ – пустое множество, при этом точка O_1 лежит на прямой OI. Если же $k_1 + k_2 = 0$, то геометрическим местом точек X является прямая, перпендикулярная прямой OI.

Траектория ортоцентра

Ортоцентр H, т.е. точка пересечения высот треугольника, имеет барицентрические координаты

$$\left(c^2+a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)/\left(16p^2r^2\right),$$

$$\left(c^2+b^2-a^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)/\left(16p^2r^2\right),$$

$$\left(c^2+a^2-b^2\right)\left(c^2+b^2-a^2\right)/\left(16p^2r^2\right).$$

Однако для определения траектории ортоцентра удобнее воспользоваться теоремой Эйлера, утверждающей, что точки H, M и O лежат на одной прямой (прямая Эйлера), причем $HM = 2MO$. Поскольку M движется по окружности, а точка O неподвижна, то точка H тоже движется по окружности, гомотетичной окружности, по которой движется центр тяжести, с коэффициентом 3 (рис.7).

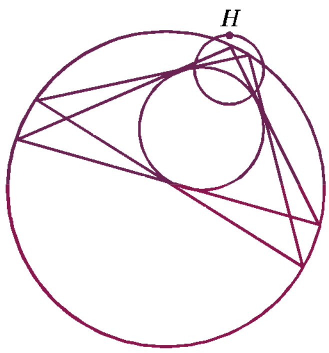


Рис. 7

Упражнение 6. Докажите формулу для барицентрических координат ортоцентра и, пользуясь условиями принадлежности трех точек одной прямой, докажите теорему Эйлера.

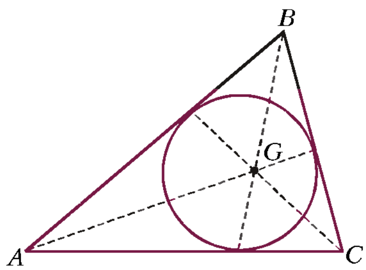


Рис. 8

Точка Жергонна

Точкой Жергонна называется точка G пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника с точками касания вписанной окружности (рис.8). Ее барицентрические координаты –

$$(p-b)(p-c)/\left(r^2+4Rr\right),$$

$$(p-a)(p-c)/\left(r^2+4Rr\right),\ (p-b)(p-a)/\left(r^2+4Rr\right).$$

Упражнение 7. Докажите, что точка G существует, т.е. что упомянутые отрезки пересекаются в одной точке. Докажите также формулы для барицентрических координат точки G.

По формуле (1) находим

$$OG^2 = R^2 - 4rp^2(R-r)/(r+4R)^2,$$

$$IG^2 = r^2 - 3r^2p^2/(r+4R)^2.$$

Исключая p^2, получаем

$$\frac{OG^2 - R^2}{IG^2 - r^2} = \frac{4}{3}\frac{R+r}{r}, \text{ т.е. } k_1OG^2 + k_2IG^2 = C,$$

где k_1, k_2 и C выражаются через постоянные величины r и R. Таким образом, искомое геометрическое место есть окружность, центр которой лежит на прямой OI (рис.9), так что G движется по окружности.

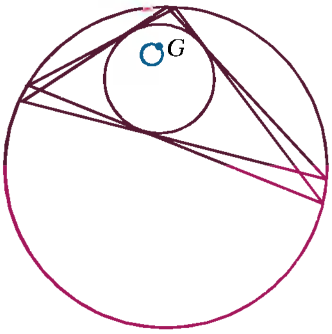


Рис. 9

Точка Нагеля

Точкой Нагеля N называется точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника с точками касания соответствующих вневписанных окружностей (рис.10).

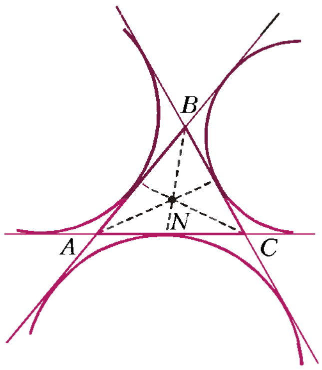


Рис. 10

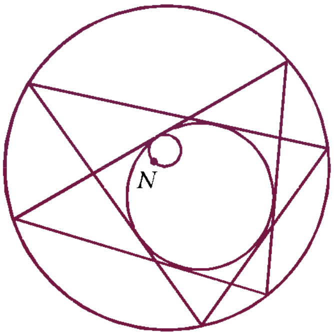


Рис. 11

Упражнение 8. Докажите, что а) точка N существует, т.е. что упомянутые отрезки пересекаются в одной точке; б) барицентрические координаты точки N равны

$$\left(\frac{p-a}{p}; \frac{p-b}{p}; \frac{p-c}{p}\right).$$

Из выражений для барицентрических координат точек M, I и N следует, что эти точки лежат на одной прямой и $MN = 2MI$. Отсюда вытекает, что точка N тоже описывает окружность (рис.11).

Упражнение 9. Докажите это.

Точка Лемуана

Точкой Лемуана называется точка L, сумма квадратов расстояний от которой до сторон треугольника минимальна. Ее барицентрические координаты –

$$a^2/\left(2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right)\right), b^2/\left(2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right)\right),$$

$$c^2/\left(2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right)\right).$$

Вычисления по формуле (1) дают

$$OL^2 = R^2 - 6Rrt - 3r(r+4R)t^2,$$

$$IL^2 = 2r(r+R)t - 3r(r+4R)t^2,$$

где $t = 2Rr/\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right)$. Исключая из этих соотношений t, получаем, что L движется по кривой, уравнение которой

$$k_1(x-x_0)^2 + k_2(y-y_0)^2 = \text{const},$$

где $k_1 \neq k_2$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Такая кривая является эллипсом (рис. 12).

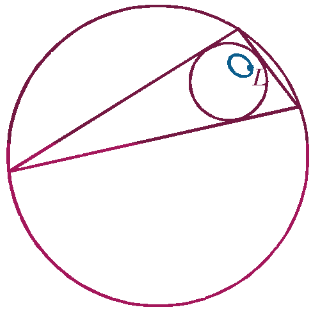


Рис. 12

Точки Торричелли

Если на сторонах треугольника ABC построить во внешнюю сторону правильные треугольники ABC_1, BCA_1 и ACB_1, то прямые A_1A, B_1B и C_1C пересекутся в одной точке T_1, *называемой первой точкой Торричелли* (рис.13,*а*). Эта точка обладает замечательным экстремальным свойством: если наибольший угол треугольника меньше 120°, то сумма расстояний от вершин треугольника до точки T_1 меньше, чем до любой другой точки плоскости.

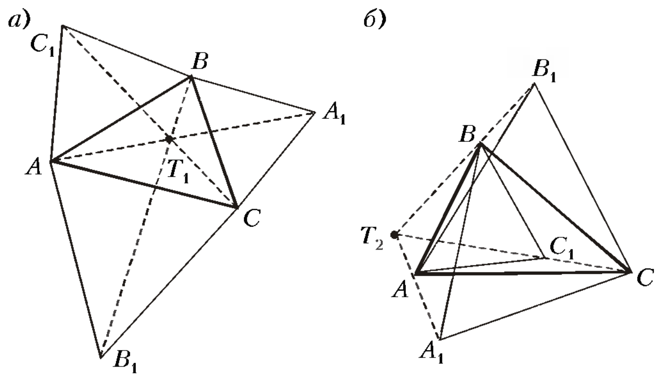


Рис. 13

Существует и вторая точка Торричелли T_2, она получается аналогичным образом, если правильные треугольники построить внутрь треугольника ABC (рис.13, *б*).

Координаты точек T_1 и T_2 пропорциональны числам

$$a/\sin(\angle A \pm \pi/3),\ b/\sin(\angle B \pm \pi/3),\ c/\sin(\angle C \pm \pi/3).$$

Для точек Торричелли выражения для расстояний до точек O и I получаются довольно сложными. Однако можно заметить, что при переходе от одной из этих точек к другой в выражениях для расстояний меняется знак при p. Таким образом, траектории этих точек являются двумя частями одной кривой. Можно показать, что эта кривая имеет четвертый порядок.

Неподвижные точки

И наконец, укажем несколько точек, остающихся при вращении треугольника неподвижными. Это, прежде всего, центры гомотетий вписанной и описанной окружностей треугольника. Кроме того, неподвижным остается центр тяжести треугольника с вершинами в точках касания сторон треугольника Понселе с вписанной окружностью. Для доказательства достаточно заметить, что эта точка лежит на прямой OI и делит отрезок OI в отношении, не зависящем от p.

Задачи

1. Любые четыре из некоторых десяти гирек перевешивают любые три другие из этих гирек. Верно ли, что любые три из этих десяти гирек перевешивают любые две другие?

С.Волчёнков

2. В клубе встретились 20 джентльменов. Некоторые были в шляпах, а некоторые — нет. Время от времени один из джентльменов снимал с себя шляпу и надевал ее на одного из тех, у кого в этот момент шляпы не было. В конце 10 джентльменов подсчитали, что каждый из них отдавал шляпу большее число раз, чем получал. Сколько джентльменов пришли в шляпах?

Ю.Лифшиц

3. В Ачухонии жили 100 рыцарей, 99 принцесс и 101 дракон. Рыцари убивают драконов, драконы едят принцесс, а принцессы изводят до смерти рыцарей. Древнее заклятие запрещает убивать того, кто сам погубил нечетное число других жителей. Сейчас в Ачухонии остался всего один житель. Кто это?

А.Чухнов

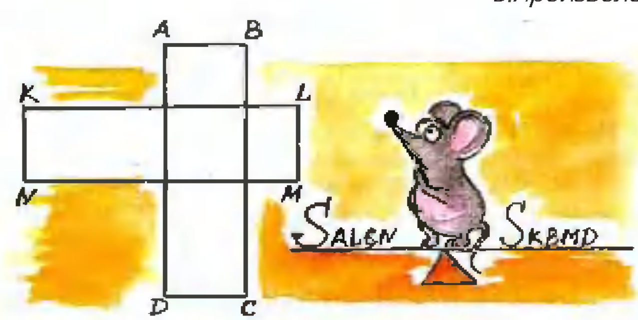
Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

4. В нескольких кошельках лежат одинаковые суммы денег. Если в каждый кошелек добавить по копейке, а количество кошельков уменьшить на 1%, общая сумма денег уменьшится. Если, наоборот, из каждого кошелька забрать по копейке, а количество кошельков увеличить на 1%, общая сумма денег опять-таки уменьшится. Во сколько раз увеличится общая сумма, если количество кошельков не менять, но в каждый кошелек добавить по рублю?

И.Акулич

5. Прямоугольники *ABCD* и *KLMN* имеют соответственно параллельные стороны и расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что площади четырехугольников *ALCN* и *KBMD* равны.

В.Произволов



Иллюстрации Д.Гришуковой

О колпаках, хранящихся в темном чулане

А.МАЛЕЕВ

Вы, наверное, не раз уже слышали о принципе Дирихле. В шутливой форме он звучит, например, так: «Если шесть зайцев посадить в пять клеток, то обязательно найдется клетка, в которой будут сидеть не менее двух зайцев». (При этом, естественно, подразумевается, что целостность зайцев не нарушается.) В более общем виде принцип Дирихле можно сформулировать таким образом: «Если $kn+1$ или более зайцев посадить в n клеток, то обязательно найдется клетка, в которой будут сидеть не менее $k+1$ зайцев». Это утверждение доказывается на редкость легко. Допустим, что после рассадки в каждой клетке оказалось не более k зайцев. Тогда в n клетках сидят не более kn зайцев. Но это противоречит условию, что зайцев $kn+1$ или более.

Существует много задач, в основе которых лежит этот принцип, носящий имя знаменитого немецкого математика [1]. Рассмотрим, например, такую.

Задача 1. *В ящике комода хранятся красные, желтые и зеленые носки. Какое наименьшее число носков надо взять наугад из комода, чтобы среди них обязательно оказались четыре носка одного цвета?*

Решение. Поскольку в условии ничего не сказано о том, сколько носков каждого цвета лежит в комоде, то следует предполагать, что возможны любые (в том числе самые худшие) варианты. Поэтому 9 носков нам может не хватить, ибо среди них могут оказаться по три носка каждого цвета. А вот 10 носков заведомо хватит. Действительно, у нас имеются 10 «зайцев» (это взятые из комода носки) и 3 «клетки» (это цвета носков). Поскольку $10 = 3\times 3+1$, то по принципу Дирихле обязательно найдется «клетка», в которой будут сидеть не менее 4 «зайцев», т.е. обязательно найдутся 4 носка одного цвета.

Теперь немного усложним ситуацию.

Задача 2. *Три поросенка, Ниф-Ниф, Нуф-Нуф и Наф-Наф, хранят в жестяной коробке красные, желтые и зеленые леденцы. Какое наименьшее число леденцов надо взять наугад из коробки, чтобы каждому поросенку обязательно достались пять леденцов одного цвета?*

Решение. Покажем, что это наименьшее число – 23. Сначала заметим, что $13 = 4\times 3+1$. Следовательно, в силу принципа Дирихле среди любых 13 или более леденцов (леденцы – это «зайцы») всегда найдутся 5 леденцов одного цвета (цвета – это «клетки»). Поэтому из 23 леденцов можно выбрать 5 леденцов одного цвета. Отдадим из Ниф-Нифу. Среди оставшихся 18 леденцов вновь найдутся 5 леденцов одного цвета. Отдадим их Нуф-Нуфу. И, наконец, из последних 13 леденцов опять можно выбрать 5 леденцов одного цвета, которые отдадим Наф-Нафу. Остается показать, что 22 леденцов может не хватить. Для этого предположим, что среди наугад выбранных 22 леденцов оказалось 14 красных, 4 желтых и 4 зеленых. Ясно, что в этом случае только два поросенка могут получить по 5 леденцов одного цвета.

По сути те же идеи применим теперь к решению задачи, опубликованной в пятом номере журнала «Квант» за 2002 год в Конкурсе имени А.П.Савина «Математика 6–8». Здесь мы рассмотрим более общую формулировку, чем была приведена в журнале.

Задача 3. *В темном чулане N гномов хранят вперемешку колпаки разных цветов, причем колпаков каждого цвета поровну. Проснувшись как-то утром, первый гном попросил m_1 колпаков одного цвета. Белоснежка сходила в чулан и отсчитала в темноте наугад столько колпаков, чтобы их наверняка хватило выполнить его просьбу. Но тут проснулись остальные гномы, и второй гном попросил m_2 колпаков одного цвета, третий попросил m_3 колпаков одного цвета, и так далее, вплоть до последнего гнома, который попросил m_N колпаков одного цвета, причем $m_1 > m_2 \ge m_3 \ge \ldots \ldots \ge m_N$. Чтобы выполнить просьбы всех гномов, Белоснежка вынуждена была еще раз сходить в чулан. Какое наибольшее количество цветов могли иметь колпаки, хранящиеся в чулане?*

Решение. Пусть в чулане хранятся колпаки n разных цветов, причем колпаков каждого цвета поровну и не меньше m_1. Покажем, что если выполнено неравенство

$$n \ge \max_{t=1,2,\ldots,N-1} \frac{m_1+m_2+\ldots+m_t}{m_1-m_{t+1}}, \tag{1}$$

то Белоснежке не придется второй раз идти в чулан. Действительно, предположим, что она в первый раз наугад отсчитала в чулане s колпаков. Мы, конечно, не знаем это число, но, чтобы наверняка выполнить просьбу первого гнома, оно обязательно должно удовлетворять соотношению

$$s \ge (m_1-1)n+1, \tag{2}$$

так как по принципу Дирихле из $(m_1-1)n+1$ колпаков всегда можно выбрать m_1 колпаков одного цвета, а вот $(m_1-1)n$ колпаков может не хватить. Далее, предпо-

[1] *Петер Густав Лежён Дирихле (1805–1859) – немецкий математик, широко известный своими трудами по аналитической теории чисел, теории функций и математической физике.*

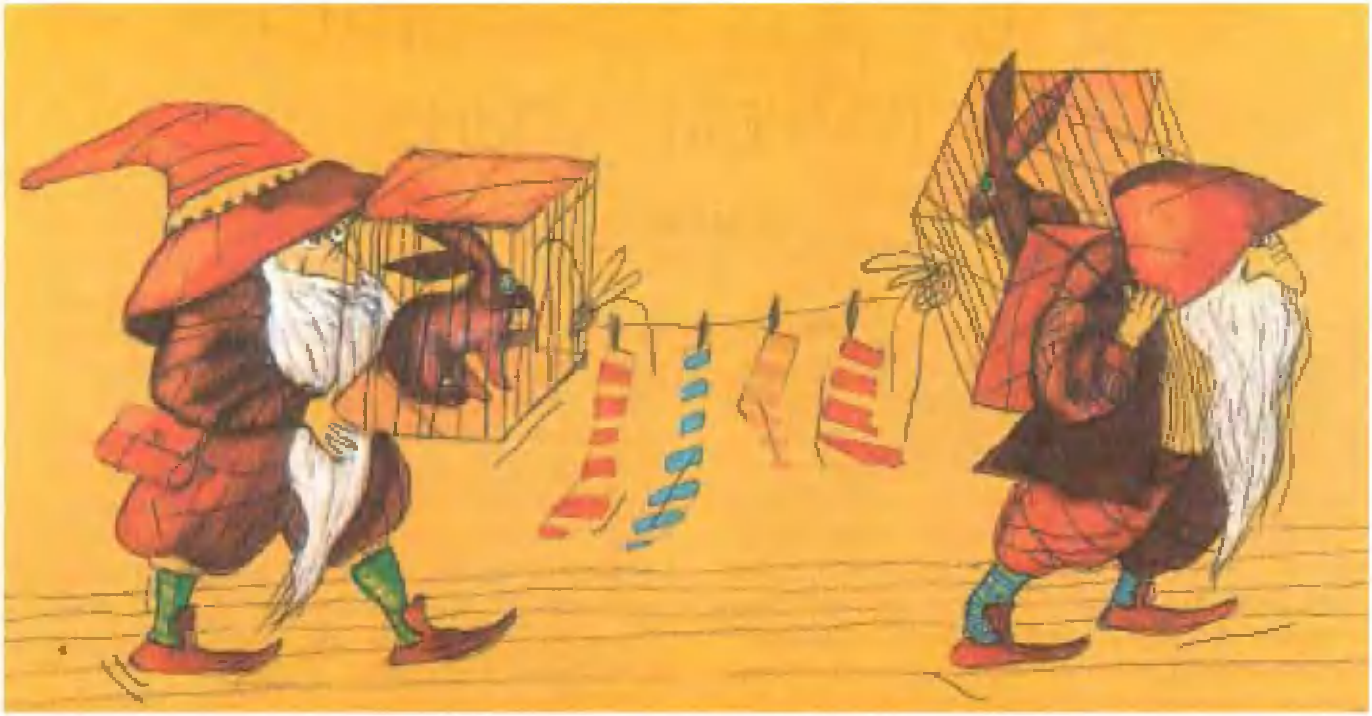


Иллюстрация В.Акатьевой

ложим, что принесенных Белоснежкой колпаков оказалось достаточно, чтобы выполнить просьбы первых k гномов, где k — некоторое число от 1 до $N-1$. В силу (1) и (2), из цепочки соотношений

$$s-(m_1+m_2+\ldots+m_k)\geq$$

$$\geq (m_1-1)n+1-(m_1+m_2+\ldots+m_k)=$$

$$=(m_{k+1}-1)n+1+(m_1-m_{k+1})n-(m_1+m_2+\ldots+m_k)=$$

$$=(m_{k+1}-1)n+1+(m_1-m_{k+1})\left(n-\frac{m_1+m_2+\ldots+m_k}{m_1-m_{k+1}}\right)\geq$$

$$\geq(m_{k+1}-1)n+1$$

вытекает, что

$$s-(m_1+m_2+\ldots+m_k)\geq(m_{k+1}-1)n+1.$$

Согласно принципу Дирихле, последнее неравенство показывает, что оставшихся колпаков хватит, чтобы выполнить и просьбу $(k+1)$-го гнома. Следовательно, если справедливы соотношения (1) и (2), то выполнена просьба 1-го гнома, а поэтому выполнена и просьба 2-го гнома, а поэтому выполнена и просьба 3-го гнома, и так далее, вплоть до последнего, N-го гнома. Но по условию задачи Белоснежка была вынуждена еще раз сходить в чулан, чтобы выполнить все просьбы. Отсюда заключаем, что число n должно быть подчинено неравенству

$$n<\max_{t=1,2,\ldots,N-1}\frac{m_1+m_2+\ldots+m_t}{m_1-m_{t+1}}. \qquad (3)$$

Рассмотрим величину, стоящую в правой части (3). Предположим, что максимум достигается при некотором $t=p$, т.е.

$$\frac{m_1+m_2+\ldots+m_p}{m_1-m_{p+1}}=\max_{t=1,2,\ldots,N-1}\frac{m_1+m_2+\ldots+m_t}{m_1-m_{t+1}}.$$

Пусть $m_1+\ldots+m_p=(m_1-m_{p+1})q+r$, где $0\leq r<m_1-m_{p+1}$. Тогда наибольшее целое число, удовлетворяющее (3), есть

$$M=\begin{cases}q-1, & \text{если } r=0,\\ q, & \text{если } r>0.\end{cases} \qquad (4)$$

Отметим, что $M=0$ в том и только том случае, если $m_2=\ldots=m_N=0$. Но это невозможно, так как в этом случае Белоснежке незачем было бы идти в чулан второй раз. Следовательно, $M\geq1$. Докажем, что число M и будет искомым ответом на вопрос задачи. Для этого нам достаточно построить подходящий пример. Итак, пусть в чулане имеются колпаки M цветов, причем каждого цвета имеется $m_1+m_2+\ldots+m_N$ колпаков. Этого заведомо хватает, чтобы выполнить просьбы всех гномов. Предположим, что Белоснежка в первый раз принесла из чулана $s=m_1+\ldots+m_p+M(m_{p+1}-1)$ колпаков. Сначала покажем, что этого количества наверняка хватит, чтобы выполнить просьбу первого гнома, т.е. докажем справедливость соотношения

$$m_1+\ldots+m_p+M(m_{p+1}-1)\geq(m_1-1)M+1,$$

или эквивалентного ему неравенства

$$M\leq\frac{m_1+\ldots+m_p-1}{m_1-m_{p+1}}=q+\frac{r-1}{m_1-m_{p+1}}.$$

Но последнее легко выводится из формулы (4). Далее, покажем, что принесенных колпаков может не хватить для выполнения всех просьб. Действительно, среди них вполне могло оказаться $m_1 + \ldots + m_p + m_{p+1} - 1$ колпаков одного цвета, а колпаков остальных цветов – по $m_{p+1} - 1$ штук каждого. Ясно, что в этом случае выполнить одновременно просьбы первых $p + 1$ гномов невозможно. Поэтому Белоснежке придется еще раз сходить в чулан. Если обозначить через $[x]$ наибольшее целое число, не превосходящее число x, то ответ в задаче можно записать в виде

$$M = \max_{t=1,2,\ldots,N-1}\left[\frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_t}{m_1 - m_{t+1}}\right].$$

Замечание 1. Отметим, что в условии задачи 3 требование $m_2 \geq m_3 \geq \ldots \geq m_N$ не является существенным. Если оно не выполняется, то всех гномов, кроме первого, сначала нужно перенумеровать так, чтобы эти неравенства выполнялись.

Замечание 2. Существенным является условие, что первый гном попросил колпаков больше, чем каждый из остальных гномов, т.е. $m_1 > m_k$, $k = 2, \ldots, N$. Если допустить для какого-то j-го гнома справедливость неравенства $m_j \geq m_1$, то легко показать, что в таком случае число различных цветов может быть произвольно большим.

Замечание 3. В формулировке задачи, помещенной в Конкурсе «Математика 6–8», были выбраны значения $N = 7$, $m_1 = 10$, $m_2 = 9$, ..., $m_7 = 4$. Нетрудно посчитать, что в этом случае $M = 9$.

Тем юным читателям журнала, которым показалось, что в задаче 3 ответ всегда существенно зависит от числа гномов или от количества попрошенных колпаков (и, конечно, всем остальным), в качестве упражнения предлагается решить следующую задачу.

Задача 4. *В темном чулане гномы вперемешку хранят колпаки разных цветов, причем колпаков каждого цвета поровну. Проснувшись как-то утром, первый гном попросил принести m колпаков одного цвета. Белоснежка сходила в чулан и отсчитала в темноте наугад столько колпаков, чтобы их наверняка хватило выполнить его просьбу. Но тут проснулись остальные гномы, и второй гном тоже попросил колпаки одного цвета, третий тоже попросил колпаки одного цвета, и так далее, вплоть до последнего гнома, который тоже попросил колпаки одного цвета. Известно, что а) каждый гном просил колпаков меньше, чем предыдущий; б) отношение запроса второго гнома к запросу первого равнялось p (0 < p < 1), а отношение запроса каждого следующего гнома к запросу предыдущего не превосходило p. Чтобы выполнить просьбы всех гномов, Белоснежка вынуждена была еще раз сходить в чулан за колпаками. Какое наибольшее количество цветов могли иметь колпаки, хранящиеся в чулане?*

(Ответ: а) $m - 1$; б) $-\left[\frac{p}{p-1}\right]$.)

Много интересных и логически не простых задач на эту тему можно найти в книгах: Д.Бизам, Я.Герцег. «Многоцветная логика» (М.: Мир, 1978, часть V – «Возьмем не глядя!»); И.Ф.Шарыгин, А.В.Шевкин. «Задачи на смекалку» (М.: Просвещение, 1995, раздел 8 – «В худшем случае»).

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Термодинамика круговых процессов

В.МОЖАЕВ

В этой статье мы будем рассматривать круговые процессы, совершаемые так называемым рабочим веществом, в нашем случае – идеальным газом. При этом рабочее тело на разных этапах участвует в различных квазистатических процессах, переходя из одного равновесного состояния в другое, и в конечном итоге возвращается в исходное состояние.

Устройство, в котором круговой процесс, изображенный на pV-диаграмме, идет по часовой стрелке, называют тепловой машиной. Поскольку изменение внутренней энергии при круговом процессе равно нулю (внутренняя энергия является функцией состояния), алгебраическая сумма количеств теплоты, подводимых к рабочему телу, равна работе, совершаемой рабочим телом за цикл. Если суммарное подводимое к рабочему веществу количество теплоты обозначить через Q_1, а через Q_2 обозначить суммарное отводимое количество теплоты, то очевидно, что работа, совершенная рабочим веществом, равна

$$A = Q_1 - Q_2 .$$

Эффективность работы тепловой машины принято характеризовать коэффициентом полезного действия:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Поскольку в случае тепловой машины $Q_1 > Q_2$, то $\eta < 1$.

Если круговой процесс происходит в обратном направлении, т.е. в случае холодильной машины, тепловые потоки изменяют свои направления: там, где раньше рабочее тело отдавало тепло, теперь получает его от внешнего резервуара, а там, где получало, теперь отдает тепло. Таким образом, уже не рабочее тело совершает работу, равную разности подводимых и отводимых количеств теплоты, а за счет внешней работы, совершаемой над рабочим веществом, тепло, отбираемое от внешнего тела с меньшей температурой (холодиль-

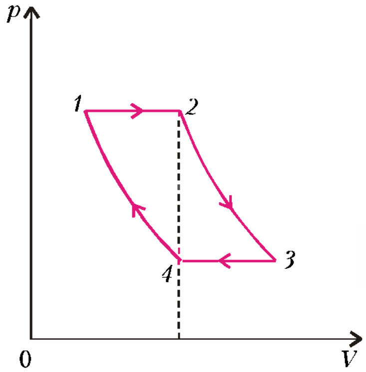


Рис. 1

ка), передается внешнему телу с большей температурой (нагревателю).

Перейдем к разбору конкретных задач.

Задача 1. *На диаграмме зависимости давления p от объема V для некоторой массы идеального газа две изотермы пересекаются двумя изобарами в точках 1, 2, 3 и 4 (рис.1). Найдите отношение температур* T_3/T_1 *в точках 3 и 1, если отношение объемов в этих точках* $V_3/V_1 = \alpha$. *Объемы газа в точках 2 и 4 равны.*

Рассмотрим изобарические участки. Уравнение изобары имеет вид $T/V = \text{const}$. Очевидно, что изобары *1–2* и *3–4* имеют разные константы, но нам они не понадобятся.

Запишем для состояний *1* и *2* соотношение

$$\frac{T_1}{V_1} = \frac{T_2}{V_2},$$

где T_1 и T_2 – температуры газа на изотермах *4–1* и *2–3*, а V_1 и V_2 – объемы газа в состояниях *1* и *2*. Аналогичное соотношение для состояний *3* и *4* будет иметь вид

$$\frac{T_3}{V_3} = \frac{T_1}{V_2},$$

где V_3 и V_2 – объемы газа в состояниях *3* и *4*. Из каждого уравнения выразим отношение T_3/T_1 (равное отношению T_2/T_1):

$$\frac{T_3}{T_1} = \frac{V_2}{V_1}, \quad \frac{T_3}{T_1} = \frac{V_3}{V_2}.$$

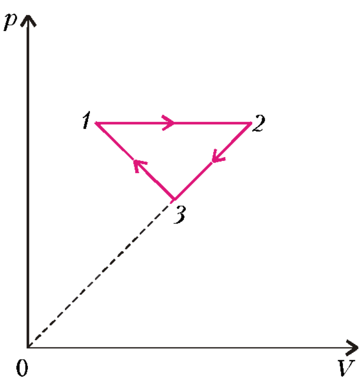


Рис. 2

Перемножив почленно эти отношения, получим

$$\left(\frac{T_3}{T_1}\right)^2 = \frac{V_3}{V_1} = \alpha.$$

Отсюда

$$\frac{T_3}{T_1} = \sqrt{\alpha}.$$

Задача 2. *На рисунке 2 для ν молей гелия показан цикл, состоящий из двух участков линейной зависимости давления p от объема V и изобары. На изобаре 1–2 газ совершил работу A, и его температура увеличилась в 4 раза. Температуры в состояниях 1 и 3 равны. Точки 2 и 3 на pV-диаграмме лежат на прямой, проходящей через начало координат. Определите температуру газа в точке 1. Определите также работу газа за цикл.*

Обозначим температуру гелия в состоянии *1* через T_1. Тогда температура в состоянии *2* будет равна $4T_1$. Пусть давление на изобаре *1–2* равно p_1, тогда работа, которую совершил газ при изобарическом процессе, равна

$$A = p_1(V_2 - V_1),$$

где V_1 и V_2 – объемы гелия в состояниях *1* и *2*. Поскольку

$$p_1V_1 = \nu RT_1 \text{ и } p_1V_2 = 4\nu RT_1,$$

то

$$A = 3\nu RT_1.$$

Отсюда

$$T_1 = \frac{A}{3\nu R}.$$

Работу газа за цикл найдем по площади треугольника *123*:

$$A_ц = \frac{1}{2}(p_1 - p_3)(V_2 - V_1),$$

где p_3 – давление газа в состоянии *3*. Из уравнения состояния для идеального газа найдем

$$V_1 = \frac{\nu RT_1}{p_1} = \frac{A}{3p_1}, \quad V_2 = \frac{4\nu RT_1}{p_1} = \frac{4A}{3p_1}.$$

После подстановки значений V_1 и V_2 в выражение для работы газа за цикл получим

$$A_ц = \frac{A}{2}\left(1 - \frac{p_3}{p_1}\right).$$

Так как на нашей pV-диаграмме точки *2* и *3* лежат на прямой, проходящей через начало координат, можно записать соотношение

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{V_3}{V_2}.$$

Поскольку

$$V_3 = \frac{\nu RT_1}{p_3} = \frac{A}{3p_3} \text{ и } V_2 = \frac{4A}{3p_1},$$

то

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{p_1}{4p_3}.$$

Отсюда

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{1}{2},$$

и окончательно

$$A_ц = \frac{A}{4}.$$

Задача 3. *Найдите работу A, которую совершает моль гелия в замкнутом цикле, состоящем из адиабаты 1–2, изобары 2–3 и изохоры 3–1 (рис.3). В адиабатическом процессе разность максимальной и минимальной температур газа равна* ΔT. *В изобарическом процессе от газа отвели количество теплоты Q.*

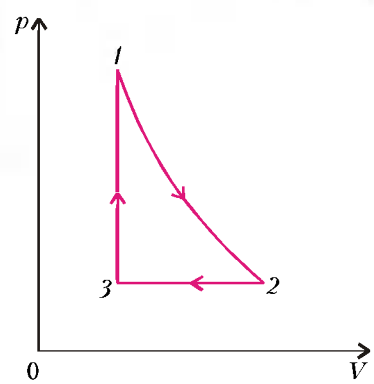


Рис. 3

Обозначим температуру гелия в состоянии *1* через T_1, в состоянии *2* – через T_2, а в состоянии *3* – через T_3.

Рассмотрим адиабатический процесс *1–2*. Процесс идет с увеличением объема газа, следовательно, газ совершает работу. При адиабатическом процессе работа, совершаемая газом, численно равна изменению внутренней энергии газа, взятому с противоположным знаком, следовательно, температура газа уменьшается. В состоянии *1* температура максимальна, а в состоянии *2* – минимальна, поэтому можно записать

$$T_1 - T_2 = \Delta T.$$

Рассмотрим теперь изобарический процесс *2–3*. По первому началу термодинамики можно записать

$$-Q = C_V(T_3 - T_2) + p_2(V_3 - V_2),$$

где $C_V = 3R/2$ – молярная теплоемкость гелия при постоянном объеме, p_2 – давление газа в изобарическом процессе *2–3*. Отсюда, с учетом соотношений $p_2V_3 = RT_3$ и $p_2V_2 = RT_2$, получим

$$T_2 - T_3 = \frac{Q}{C_V + R} = \frac{2}{5}\frac{Q}{R}.$$

На изохорическом участке *3–1* работа газом не совершается, а увеличение внутренней энергии газа происходит за счет подвода тепла:

$$Q_{31} = C_V\left(T_1 - T_3\right) = C_V\left(\left(T_1 - T_2\right) + \left(T_2 - T_3\right)\right) =$$

$$= C_V\left(\Delta T + \frac{2}{5}\frac{Q}{R}\right) = \frac{3}{2}R\Delta T + \frac{3}{5}Q.$$

Работа, совершаемая молем газа в заданном цикле, равна

$$A = Q_{31} - Q = \frac{3}{2}R\Delta T - \frac{2}{5}Q.$$

Задача 4. *Газообразный гелий находится в цилиндре под подвижным поршнем. Газ нагревают при постоянном давлении, переводя его из состояния 1 в состояние 2 (рис.4). При этом газ совершает работу A_{12}. Затем газ сжимается в процессе 2–3, когда его давление p прямо пропорционально объему V. При этом над газом совершается работа A_{23} ($A_{23} > 0$). Наконец, газ сжимается в адиабатическом процессе 3–1, возвращаясь в первоначальное состояние. Найдите работу сжатия A_{31}, совершенную над газом в адиабатическом процессе.*

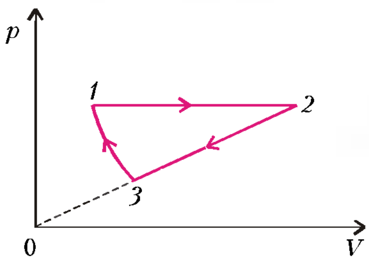


Рис. 4

Обозначим температуру гелия в состояниях *1* и *2* через T_1 и T_2, а объемы газа – через V_1 и V_2. Пусть давление на изобаре *1–2* равно p_1, тогда работа, совершенная газом в этом процессе, будет равна

$$A_{12} = p_1\left(V_2 - V_1\right) = \nu R\left(T_2 - T_1\right),$$

где ν – число молей гелия.

Работу, совершенную над газом на участке *2–3*, можно записать в виде

$$A_{23} = \frac{p_2 + p_3}{2}\left(V_2 - V_3\right) = \frac{p_2V_2 + p_3V_2 - p_2V_3 - p_3V_3}{2},$$

где V_2, p_2 – объем и давление газа в состоянии *2*, а V_3, p_3 – объем и давление в состоянии *3*. На pV-диаграмме точки *2* и *3* лежат на прямой, проходящей через начало координат, следовательно,

$$\frac{p_2}{p_3} = \frac{V_2}{V_3}, \text{ или } p_3V_2 - p_2V_3 = 0.$$

С учетом этого соотношения выражение для работы A_{23} приобретает вид

$$A_{23} = \frac{p_2V_2 - p_3V_3}{2} = \frac{\nu R\left(T_2 - T_3\right)}{2},$$

где T_3 – температура гелия в состоянии *3*.

Работа сжатия на адиабате *3–1* равна изменению внутренней энергии гелия:

$$A_{31} = \frac{3}{2}\nu R\left(T_1 - T_3\right).$$

Найдем разность температур $T_1 - T_3$. Для этого перепишем выражения для A_{12} и A_{23} в виде

$$T_2 - T_1 = \frac{A_{12}}{\nu R}, \quad T_2 - T_3 = \frac{2A_{23}}{\nu R},$$

откуда

$$T_1 - T_3 = \frac{2A_{23} - A_{12}}{\nu R}.$$

Тогда окончательно

$$A_{31} = \frac{3}{2}\nu R\left(T_1 - T_3\right) = \frac{3}{2}\left(2A_{23} - A_{12}\right).$$

Задача 5. *КПД тепловой машины, работающей по циклу, состоящему из изотермы 1–2, изохоры 2–3 и адиабатического процесса 3–1 (рис.5), равен η, а разность максимальной и минимальной температур газа в цикле равна ΔT. Найдите работу, совершенную ν молями одноатомного идеального газа в изотермическом процессе.*

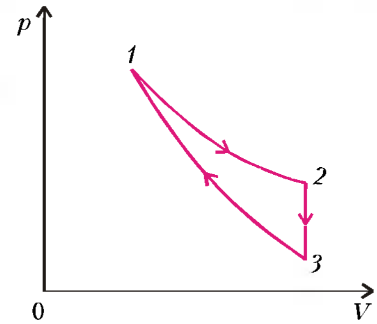


Рис. 5

Нам задан КПД цикла, поэтому сначала разберемся, на каких участках цикла тепло подводится к идеальному газу, а на каких отводится. На изотермическом участке *1–2* газ совершает работу (происходит увеличение объема), а поскольку внутренняя энергия газа не изменяется, то работа газа происходит за счет подвода тепла. Обозначим подведенное количество теплоты через Q_1. На изохоре *2–3* при постоянном объеме происходит падение давления. Очевидно, что это осуществляется за счет уменьшения температуры газа, и в этом случае тепло отводится от газа. Обозначим отведенное количество теплоты через Q_2. На адиабатическом участке *3–1* тепло не отводится и не подводится, а с уменьшением объема над газом совершается работа, и его температура растет. Следовательно, в точке *3* газ имеет наименьшую температуру T_{min}, а максимальная температура T_{max} газа была на изотерме *1–2*. Таким образом,

$$T_{max} - T_{min} = \Delta T.$$

По определению, КПД замкнутого цикла равен

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

На изотермическом участке *1–2* подведенное количество теплоты равно искомой работе, совершенной газом:

$$Q_1 = A.$$

Тепло, отведенное на участке *2–3*, очевидно, равно изменению внутренней энергии газа, взятому с противоположным знаком:

$$Q_2 = \frac{3}{2}\nu R\left(T_{max} - T_{min}\right) = \frac{3}{2}\nu R\Delta T.$$

После подстановки Q_1 и Q_2 в выражение для КПД получим

$$\eta = 1 - \frac{3}{2}\frac{\nu R\Delta T}{A}.$$

Отсюда

$$A = \frac{3\nu R\Delta T}{2(1-\eta)}.$$

(Окончание см. на с. 34)

Числа Фибоначчи

В 1202 году Леонардо Фибоначчи (Леонардо Пизанский) в «Книге об абаке» рассмотрел последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... , каждый следующий член которой равен сумме двух предыдущих. Формулами это можно записать так: $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$, $\varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} + \varphi_n$. Пользуясь ими, можно посчитать сколь угодно много первых членов последовательности:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
φ_n	1	1	2	3	5	8	13	21
n	9	10	11	12	13	14	15	16
φ_n	34	55	89	144	233	377	610	987

Последовательность Фибоначчи возникает во многих задачах и обладает интересными свойствами. Например, рассмотрим выражения

$$1,\ 1+\frac{1}{1}=\frac{2}{1},\ 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}=\frac{3}{2},$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}=\frac{5}{3},$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}=\frac{8}{5},$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}=\frac{13}{8}\ldots$$

Возникают дроби вида φ_{n+1}/φ_n. Да оно и не удивительно:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}}=1+\frac{1}{13/8}=$$

$$=1+\frac{8}{13}=\frac{13+8}{13}=\frac{21}{13}.$$

В общем виде это можно записать так:

$$1+\frac{1}{\varphi_{n+1}/\varphi_n}=1+\frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}}=$$

$$=\frac{\varphi_{n+1}+\varphi_n}{\varphi_{n+1}}=\frac{\varphi_{n+2}}{\varphi_{n+1}}.$$

Следующий пример. Давайте выясним: сколькими способами можно разрезать полоску размером $2\times n$ на доминошки (т.е. прямоугольники размером 1×2)? При маленьких n можно все нарисовать: обозначив искомое число способов через $f(n)$, видим из рисунков 1–4, что

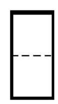


Рис. 1

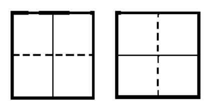


Рис. 2

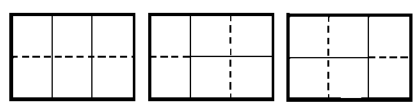


Рис. 3

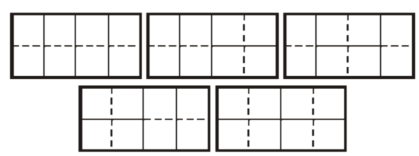


Рис. 4

$f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$, $f(4)=5$. Как найти следующее значение, т.е. $f(5)$? Да очень просто: левая верхняя клетка покрыта либо вертикально (рис.5), либо горизонтально

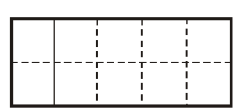


Рис. 5

(рис.6) расположенной доминошкой. Значит, $f(5)$ вариантов

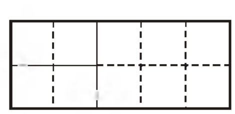


Рис. 6

распадаются на $f(4)$ вариантов рисунка 5 и $f(3)$ вариантов рисунка 6, т.е.

$$f(5)=f(4)+f(3)=5+3=8.$$

Вообще, при любом $n>1$ верна рекуррентная формула

$$f(n+1)=f(n)+f(n-1).$$

Поскольку $f(1)=\varphi_2$ и $f(2)=\varphi_3$, имеем

$$f(n)=\varphi_{n+1}.$$

Теперь выясним: сколько существует n-значных чисел, составленных из цифр 2 и 5, в которых никакие две двойки не стоят рядом? Обозначим искомое количество способов через $g(n)$. Очевидно, $g(1)=2$ и $g(2)=3$ (годятся числа 25, 52 и 55). Легко выписать и трехзначные числа: 252, 255, 525, 552 и 555. Значит, $g(3)=5$. Впрочем, это значение находить даже и не обязательно. Важнее то, что любое интересующее нас $(n+1)$-значное число начинается либо с двойки, либо с пятерки. В первом случае после двойки должна идти пятерка, после которой – любое из $g(n-1)$ чисел, во втором случае никаких ограничений пятерка не создает, так что годится любой из $g(n)$ вариантов.

Мы получили рекуррентную формулу

$$g(n+1)=g(n-1)+g(n),$$

совпадающую с формулой Фибоначчи. Поскольку $g(1)=\varphi_3$, $g(2)=\varphi_4$, имеем

$$g(n)=\varphi_{n+2}.$$

Опять последовательность Фибоначчи!

На рисунке 7 числа Фибоначчи выражают длины сторон спиральной последовательности квадратов на клетчатой бумаге. Из этого рисунка очевидна формула

$$\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2+\ldots+\varphi_n^2=\varphi_n\varphi_{n+1}.$$

Между числами Фибоначчи есть и другие любопытные соот-

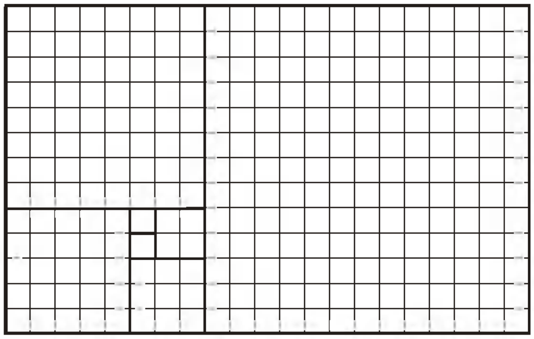


Рис. 7

ношения:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots + \varphi_n = \varphi_{n+2} - 1,$$

$$\varphi_1 + \varphi_3 + \varphi_5 + \ldots + \varphi_{2n-1} = \varphi_{2n},$$

$$\varphi_2 + \varphi_4 + \varphi_6 + \ldots + \varphi_{2n} = \varphi_{2n+1} - 1,$$

$$\varphi_{n+1}\varphi_{n-1} - \varphi_n^2 = (-1)^n,$$

которые можно доказать методом математической индукции. Последнее соотношение открыл в 1680 году французский астроном Жан Доминик Кассини. При $n = 6$ оно превращается в числовое равенство

$$13 \cdot 5 - 8^2 = 1,$$

которое лежит в основе геометрического парадокса: на рисунке 8 шахматная доска разрезана на четыре части, из которых на рисунке 9 сложен прямоугольник размером 5×13. (Аналогичная конструкция при любом n разбивает квадрат со стороной φ_n на четыре части, из которых получается прямоугольник размером $\varphi_{n-1} \times \varphi_{n+1}$. Одна клетка либо теряется, либо возникает лишняя – в зависимости от четности n.) Разгадка парадокса проста: на рисунке 9 линии, соединяющие левый верхний угол с нижним правым углом, на самом деле образуют не отрезок, а незаметный для глаза параллелограмм.

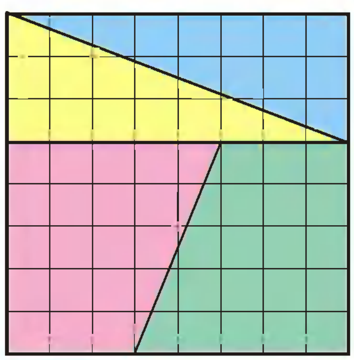


Рис. 8

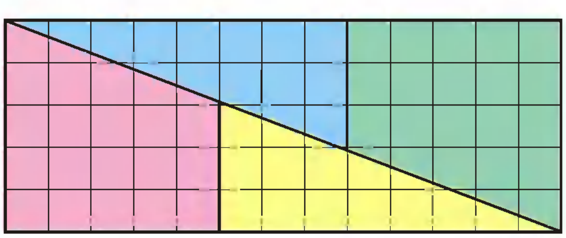


Рис. 9

Соотношение Кассини можно использовать и для других целей. Если заменить в нем φ_{n-1} на $\varphi_{n+1} - \varphi_n$, то оно примет вид

$$\varphi_{n+1}^2 - \varphi_{n+1}\varphi_n - \varphi_n^2 = (-1)^n.$$

Можно доказать, что никаких других решений в натуральных числах уравнение

$$x^2 - xy - y^2 = \pm 1$$

не имеет. В 1970 году это (и более сложные свойства) было использовано Ю.В.Матиясевичем при решении десятой проблемы Гильберта о несуществовании алгоритма, который решает задачу, имеет или нет уравнение вида $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, где P – многочлен с целыми коэффициентами, решения в целых числах.

Много интересного в арифметике чисел Фибоначчи. Каждое третье число Фибоначчи четно; каждое четвертое кратно 3; каждое пятнадцатое оканчивается нулем; два соседних числа Фибоначчи взаимно просты; φ_n кратно φ_m в том и только том случае, когда n кратно m; наибольший общий делитель чисел φ_n и φ_m – число Фибоначчи с номером НОД(m, n) (например,

$$\text{НОД}(\varphi_{12}, \varphi_{18}) = \text{НОД}(144, 2584) = 8 = \varphi_6).$$

Для доказательства последнего факта полезно тождество

$$\varphi_{m+n} = \varphi_m\varphi_{n-1} + \varphi_{m+1}\varphi_n,$$

которое можно доказать по индукции. Но мы разберем более интересное доказательство – выясним комбинаторный смысл этого тождества.

Рассмотрим для этого полоску из k клеток и задумаемся, сколько существует способов пройти из левой клетки полоски в правую клетку этой полоски, если каждым ходом разрешается переходить в соседнюю справа клетку или перепрыгивать через одну клетку. Очевидно, при $k = 1$ идти некуда, да и не нужно; при $k = 2$ нужно сделать ровно один шаг. Значит, при $k = 1$ или 2 число способов равно 1. Для рассматриваемого числа способов выполнена в точности такая же рекуррентная формула, что и для чисел Фибоначчи. В самом деле, если первый шаг – сдвиг на 1 клетку, то остается полоска из $k - 1$ клетки, если же первый шаг – сдвиг на 2 клетки, то остается полоска из $k - 2$ клеток.

Итак, число способов пройти полоску – это число Фибоначчи. Осталось заметить, что все φ_{m+n} способов можно разбить на два типа: можно остановиться на $(m+1)$-й клетке (таких способов $\varphi_{m+1}\varphi_n$), а можно ее перепрыгнуть (таких способов $\varphi_m\varphi_{n-1}$).

В 1728 году Даниэль Бернулли опубликовал формулу

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

но о ней позабыли до 1843 года, когда она была вновь открыта французом Жаком Бине.

Из этой формулы следует, в частности, что φ_n растет примерно как геометрическая прогрессия со знаменателем $\tau = (1+\sqrt{5})/2$, точнее, φ_n равно ближайшему к $\tau^n/\sqrt{5}$ целому числу.

А.Спивак

(Начало см. на с. 29)

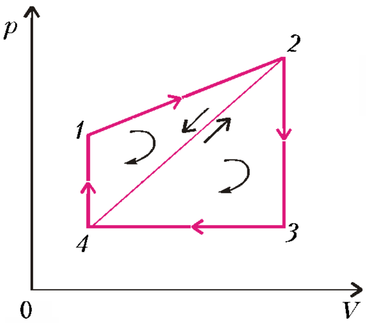


Рис. 6

Задача 6. *КПД цикла 1–2–4–1 равен η_1, а цикла 2–3–4–2 равен η_2 (рис.6). Найдите КПД цикла 1–2–3–4–1. Участки 4–1 и 2–3 – изохоры, участок 3–4 – изобара, участки 1–2 и 2–4 представляют линейную зависимость давления от объема. Все циклы обходятся по часовой стрелке. Рабочее вещество – идеальный газ.*

Рассмотрим цикл *1–2–4–1*. На участке *1–2* тепло подводится к газу. Обозначим подведенное количество теплоты через Q_1. На участке *2–4* тепло отводится. Пусть это количество теплоты равно Q_2. На изохорическом участке *4–1* подводимое к газу количество теплоты обозначим через Q_3. Если обозначить работу, совершаемую газом в этом цикле, через A_1, то КПД цикла равен

$$\eta_1 = \frac{A_1}{Q_1 + Q_3}.$$

С другой стороны, $\eta_1 = 1 - \frac{Q_2}{Q_1 + Q_3}$, откуда найдем

$$Q_2 = (1 - \eta_1)(Q_1 + Q_3).$$

Теперь рассмотрим цикл *2–3–4–2*. На участках *2–3* и *3–4* тепло отводится от газа. Подводится тепло только на участке *4–2*, и подведенное количество теплоты, очевидно, равно Q_2. КПД данного цикла равен

$$\eta_2 = \frac{A_2}{Q_2},$$

где A_2 – работа, совершаемая газом в этом цикле. Используя выражение для Q_2, можно записать

$$\eta_2 = \frac{A_2}{(1 - \eta_1)(Q_1 + Q_3)}.$$

КПД цикла *1–2–3–4–1* равен

$$\eta_3 = \frac{A_1 + A_2}{Q_1 + Q_3}.$$

Выразив работы A_1 и A_2 из выражений для КПД η_1 и η_2, получим

$$\eta_3 = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2.$$

Упражнения

1. На диаграмме зависимости давления p от объема V для некоторой массы идеального газа две изобары и две изохоры пересекаются в точках *1*, *2*, *3* и *4* (рис.7). Найдите температуры газа T_1 и T_3 в точках *1* и *3*, если точки *2* и *4* лежат на прямой, проходящей через начало координат, а температуры газа в этих точках равны T_2 и T_4 соответственно.

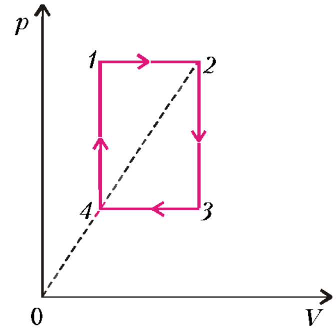


Рис. 7

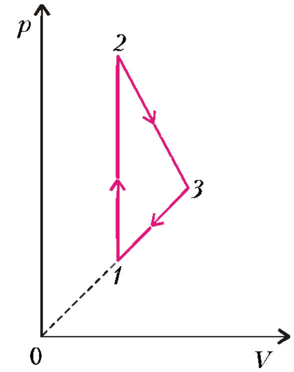


Рис. 8

2. Цикл для ν молей гелия состоит из двух участков линейной зависимости давления p от объема V и изохоры (рис.8). В изохорическом процессе *1–2* газу сообщили количество теплоты Q, и его температура увеличилась в 4 раза. Температуры в состояниях *2* и *3* равны. Точки *1* и *3* на pV-диаграмме лежат на прямой, проходящей через начало координат. Найдите температуру T_1 в точке *1* и работу газа за цикл.

3. Моль гелия совершает работу A в замкнутом цикле, состоящем из адиабаты *1–2*, изотермы *2–3* и изобары *3–1* (рис.9). Найдите работу, совершенную в изотермическом процессе, если разность максимальной и минимальной температур газа в цикле равна ΔT.

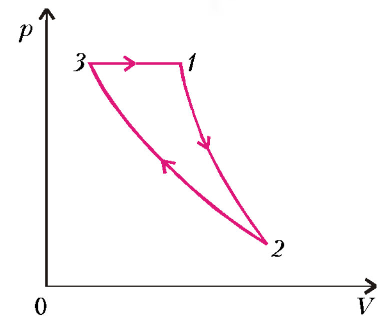


Рис. 9

4. Газообразный гелий находится в цилиндре под подвижным поршнем. Газ сжимают в адиабатическом процессе, переводя его из состояния *1* в состояние *2* (рис.10). Над газом совершается при этом работа сжатия A_{12} ($A_{12} > 0$). Затем газ расширяется в изотермическом процессе *2–3*, и наконец из состояния *3* газ переводят в состояние *1* в процессе, когда его давление p прямо пропорционально объему V. Найдите работу A_{23}, которую совершил газ в процессе изотермического расширения, если во всем замкнутом цикле *1–2–3–1* он совершил работу A.

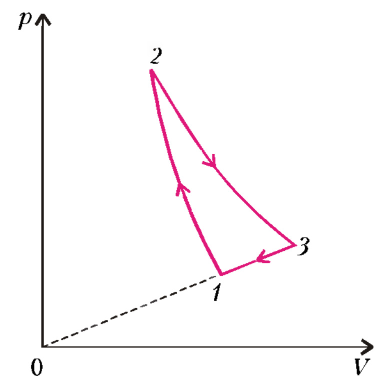


Рис. 10

Поправка

В статье Э.Балаша «Целочисленные треугольники» («Квант» №5 за 2002 г.) в условии упражнения 2 по вине редакции допущена неточность. Фразу «причем $b > a$» следует читать «причем $b > a$ и $c + 2a - b$ не делится на 3».

Как указал автор статьи, если a, b, c – длины сторон целочисленного треугольника с углом 60°, причем $b > a$ и $a + b + c$ делится на 3, то можно ввести такие натуральные числа m и n, что

$$a = \frac{(m+n)^2 - n^2}{3}, \quad b = \frac{(m+n)^2 - m^2}{3}, \quad c = \frac{(m+n)^2 - mn}{3}.$$

При этом $n - m$ делится на 3. Если же $a + b + c$ не делится на 3, то существуют такие натуральные числа m и n, что

$$a = (m+n)^2 - n^2, \quad b = (m+n)^2 - m^2, \quad c = (m+n)^2 - mn.$$

При этом $n - m$ не делится на 3.

Материалы вступительных экзаменов 2002 года

Институт естественных наук и экологии при «Курчатовском институте»

МАТЕМАТИКА

Вариант письменного экзамена

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} -\cos(x+y)+5\cos(x-y)=4, \\ 3\cos x\sin y-2\sin x\cos y=1 \end{cases}$$

на интервале $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, $-\pi/2 \le y \le \pi/2$.

2. Найдите все значения параметра p, при котором система неравенств

$$\begin{cases} (p+2)x+4y \ge 4p+3, \\ 2x+(6p+1)y \le 2-6p, \\ px+10y \le 4(p-1) \end{cases}$$

имеет единственное решение.

3. При каком значении x_0 площадь криволинейной фигуры, ограниченной графиком функции $y=x^4+8x^2$, касательной к нему, проведенной в точке графика с абсциссой x_0, и прямой $x=x_0-2$, наименьшая? Какова эта наименьшая площадь?

4. В треугольник ABC помещены три равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Все три окружности имеют одну общую точку. Найдите радиус этих окружностей, если радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника ABC равны r и R.

5. Два конуса имеют общее основание и расположены по разные от него стороны. Радиус основания r, высота одного конуса h, другого H ($h \le H$). Найдите наибольшее расстояние между двумя прямыми, содержащими образующие этих конусов.

6. Вычислите сумму

$$nx+(n-1)x^2+(n-2)x^3+\ldots+2x^{n-1}+x^n.$$

ФИЗИКА

Вариант письменного экзамена

1. На горизонтальной поверхности стола стоит тонкий обруч массой M и радиусом R (рис.1). В противоположных точках его вертикального диаметра закреплены два точечных груза с массами m_1 и m_2 ($m_2 > m$). Найдите период T малых колебаний обруча, считая, что проскальзывание в точке касания обруча и стола отсутствует. *Указание*: $\sin\varphi \approx \varphi$ и $\cos\varphi \approx 1-\varphi^2/2$ при малых значениях φ.

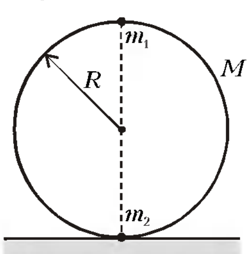


Рис. 1

2. На горизонтальной поверхности стоит цилиндрический сосуд с гладкими стенками, перекрытый невесомым поршнем (рис.2). К поршню и дну сосуда прикреплена невесомая упругая пружина. Верхняя часть сосуда сообщается с вакуумом. Под поршнем находится один моль идеального газа. Газ нагрели так, что его температура увеличилась на конечную величину ΔT. 1) Найдите теплоемкость газа C и работу A, совершенную газом в процессе нагревания. 2) Найдите изменение объема газа ΔV, если известны его начальный объем V_1 и начальная температура T_1. Длиной недеформированной пружины пренебречь.

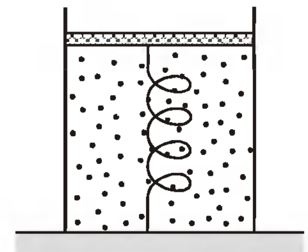


Рис. 2

3. Найдите количество теплоты, которое выделится в цепи после замыкания ключа K (рис.3). Потерями энергии на излучение пренебречь.

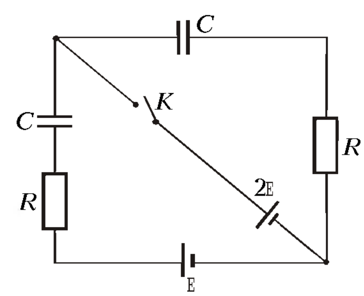


Рис. 3

4. В одной плоскости расположены длинный тонкий прямой провод, по которому течет постоянный ток I, и квадратная рамка со стороной a, сделанная из проводника общим сопротивлением R. Расстояние между проводом и ближайшей стороной рамки, параллельной проводу, равно b. На какое расстояние Δl сместится рамка после того, как ей мгновенно сообщат небольшой импульс Δp, перпендикулярный проводу? Считать, что $\Delta l \ll b$.

5. Тонкий стержень перпендикулярен главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием F. Расстояние от стержня до линзы d больше F. Между линзой и стержнем перпендикулярно главной оптической оси ставят плоскопараллельную пластинку, изготовленную из стекла с показателем преломления n. 1) При каких значениях толщины пластинки l линза будет давать действительное изображение стержня? 2) Найдите коэффициент поперечного увеличения линзы Γ. Считать, что поперечные размеры пластинки велики по сравнению с диаметром линзы.

Публикацию подготовил С.Фомичев

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Какое из двух чисел больше:

$$-\frac{\log_{1/13}(17424)}{\log_{13}(121)}-1 \text{ или } \operatorname{ctg}\left(\frac{75\pi}{23}\right)?$$

Ответ обоснуйте. Таблицами и калькулятором пользоваться не разрешается.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{12-6\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x} = 3\sin x - \frac{\sqrt{2}}{\cos x}.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{1}{x}\log_5\left(\frac{10}{3} - 5^{-x}\right) > 1.$$

4. Для каждого значения параметра a определите количество решений уравнения $3x^2 + 4x = a|x+2| + 4$ и найдите все эти решения.

5. В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность. Прямая, параллельная стороне BC и касающаяся окружности, пересекает сторону AB в точке N так, что $AN = \frac{3}{8}AB$. Найдите радиус окружности, если площадь треугольника ABC равна 12.

6. Два лыжника бегут по кольцевой трассе длины S, $1/6$ часть которой проходит по стадиону, а оставшаяся часть – в лесу. Скорость первого лыжника на стадионе равна v, а в лесу равна $5v$. Скорость второго лыжника на стадионе равна $8v/5$, а в лесу равна $4v$. Лыжники стартуют одновременно и сначала пробегают часть трассы на стадионе. Через какое время один из них впервые обгонит другого?

Вариант 2

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Определите, при каких значениях x числа $a_1 = \lg 4$, $a_2 = \lg\left(9^x + 5\right)$, $a_3 = \lg\left(9^x + 13\right)$, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию.

2. Решите уравнение

$$2 + \cos\frac{3x}{2} + \sqrt{3}\sin\frac{3x}{2} = 4\sin^2\frac{x}{4}.$$

3. Решите уравнение

$$\left(x^2 - 6x - 9\right)^2 = x\left(x^2 - 4x - 9\right).$$

4. Решите неравенство

$$\log_{0,3}\log_{0,8}\left(\frac{2x+1}{3x+2}\right) \le 0.$$

5. В урне лежали белые и черные шары, их общее число не превышало 55. Число белых шаров относилось к числу черных как 3 : 2. После того как из урны вынули 4 шара, оказалось, что соотношение белых и черных шаров стало 4 : 3. Сколько шаров лежало в урне?

6. Через точку, взятую на одной стороне треугольника ABC, проведены прямые, параллельные двум другим сторонам. Эти прямые делят треугольник на два треугольника и параллелограмм. Площади треугольников равны 4 и 9. Найдите площадь параллелограмма.

Вариант 3

(олимпиада, все факультеты)

1. Решите уравнение

$$x^{\log_3\frac{x}{147}} \cdot 21^{\log_3 7} = 1.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2-x} + 4x - 3}{x} \ge 2.$$

3. Решите уравнение

$$\log_2\left(\cos 2x + \cos\frac{x}{2}\right) + \log_{1/2}\left(\sin x + \cos\frac{x}{2}\right) = 0.$$

4. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{y+7x} - \sqrt{y+2x} = 4,\\ 2\sqrt{y+2x} - \sqrt{5x+8} = 2.\end{cases}$$

5. Сравните числа $5\log_{4639}(4633) + 1$ и $6\log_{4639}(4634)$. Ответ обоснуйте.

6. На заводе было несколько одинаковых прессов, штампующих детали, и завод выпускал 6480 деталей в день. После реконструкции все прессы заменили на более производительные, но также одинаковые, а их количество увеличилось на 3. Завод стал выпускать в день 11200 деталей. Сколько прессов было на заводе первоначально?

7. Угол при основании равнобедренного треугольника равен $\pi/6$. Построен круг радиуса $2/\sqrt{3}$ с центром в вершине треугольника, противолежащей основанию. Определите отношение площади общей части треугольника и круга к площади треугольника, если длина медианы, проведенной к боковой стороне, равна $\sqrt{7}$.

8. Найдите все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющих соотношению

$$\sqrt{2-|y|}\left(5\sin^2 x - 6\sin x\cos x - 9\cos^2 x + 3\sqrt[3]{33}\right) = \\ = (\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 - \frac{5}{4}\pi^2.$$

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Два тела брошены у поверхности Земли с одинаковыми начальными скоростями под углами α и $90° - \alpha$ к горизонту. Найдите отношение наибольшей высоты подъема первого тела $H_{1\max}$ к соответствующей величине $H_{2\max}$ для второго тела.

2. Шар массой M висит на легкой нерастяжимой нити. В шар попадает пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью v, и застревает в нем. Угол наибольшего отклонения нити от вертикали α ($\alpha < \pi/2$). Найдите период гармонических колебаний, считая подвешенный на нити шар математическим маятником.

3. Каково должно быть сопротивление R (рис.1), чтобы сила тока через амперметр с внутренним сопротивлением R_A при перемещении ключа K из положения *1* в положение *2* изменилась на ΔI? Схема питается от сети с напряжением U.

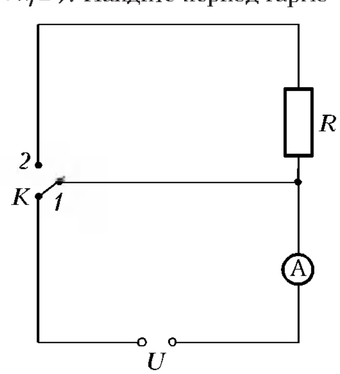


Рис. 1

4. В цилиндре под поршнем находится некоторая масса газа при температуре T_1, занимающая при давлении p объем V_1. Какой стала температура T_2 газа, если при неизменном давлении его объем уменьшился настолько, что при этом над газом была совершена работа A?

5. На каком расстоянии f от объектива проекционного аппарата нужно поместить экран, чтобы изображение на экране было в $k = 50$ раз больше предмета на диапозитиве? Фокусное расстояние объектива $F = 0{,}1$ м.

Вариант 2

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Диск катится без проскальзывания со скоростью v по горизонтальной дороге (рис.2). Найдите скорость v_B точки B – конца горизонтального диаметра диска.

2. В свободно падающий шар массой M попадает пуля массой m и застревает в нем. В момент удара скорость шара равна v_0 и направлена вертикально вниз, скорость пули равна v_1 и направлена вниз под углом φ к вертикали. Определите скорость v_2 шара с застрявшей в нем пулей сразу после удара. Время взаимодействия ничтожно мало. Сопротивление воздуха не учитывать.

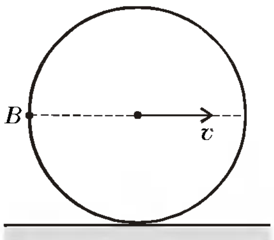


Рис. 2

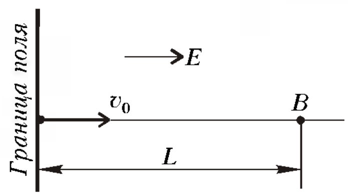


Рис. 3

3. Электрон, двигавшийся со скоростью v_0, влетает в параллельное его движению однородное электрическое поле и движется вдоль силовой линии (рис.3). Промежуток времени между двумя моментами, когда электрон проходит точку B, находящуюся на расстоянии L от границы поля, равен t_0. Найдите напряженность поля E. Масса электрона m, модуль его заряда e.

4. Оба колена U-образной трубки имеют одинаковую высоту (рис.4,*а*). Одно колено запаяно и в нем находится столб воздуха высотой $h_1 = 0{,}28$ м. Воздух отделен от атмосферы ртутью, и его давление равно атмосферному. Какова будет высота h_2 столба воздуха в запаянном колене, если второе колено доверху залить ртутью (рис.4,*б*)? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Плотность ртути $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. Температура постоянна.

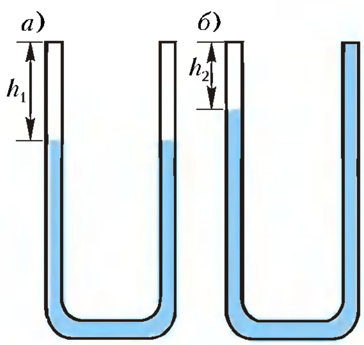


Рис. 4

5. На горизонтальном дне водоема лежит монета радиусом r. На каком максимальном расстоянии H от монеты надо поместить в воде плоский экран радиусом R, чтобы монету нельзя было обнаружить из воздуха при спокойной поверхности воды? Показатель преломления воды n.

Вариант 3

(олимпиада, все факультеты)

1. На некоторой высоте одновременно из одной точки брошены два тела под углом 45° к вертикали со скоростью v: одно вверх, другое вниз. Определите разность высот H, на которых будут тела через время t. Тела движутся в одной плоскости.

2. Тело массой M движется вверх по вертикальной стене под действием силы неизвестной величины, направленной под углом α к вертикали (рис.5). Коэффициент трения между телом и стеной μ. При какой величине силы F движение будет равномерным?

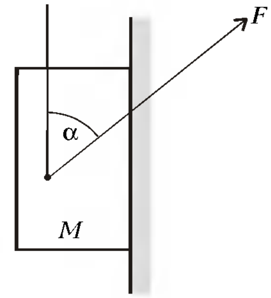


Рис. 5

3. Две одинаковые тележки массой M каждая, соединенные недеформированной пружиной жесткостью k, стоят друг за другом на гладкой горизонтальной поверхности. Из первой тележки вдоль линии, соединяющей тележки, бросают камень массой M_0 с горизонтальной скоростью v_0 в направлении от второй тележки. Найдите максимальную силу F сжатия пружины после броска. Масса камня мала по сравнению с массой тележки.

4. До какого давления можно накачать футбольный мяч объемом $V = 3$ л за $n = 40$ качаний поршневого насоса? При каждом качании насос захватывает из атмосферы объем воздуха $V_0 = 0{,}15$ л при атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па.

5. Пучок положительно заряженных частиц с зарядом q и массой m ускоряется электрическим полем и, пройдя разность потенциалов U, попадает в камеру с поперечным магнитным полем с индукцией B (рис.6). Найдите отклонение h пучка в камере от первоначального направления движения. Длина камеры L.

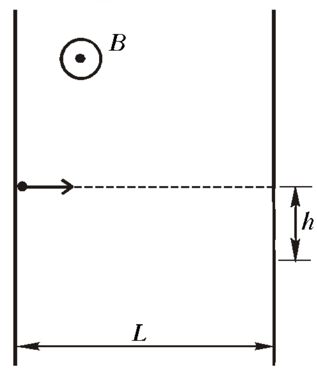


Рис. 6

6. Колебательный контур состоит из параллельно соединенных конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L. В тот момент, когда заряд конденсатора равен Q, а ток катушки равен I, параллельно подключают еще одну катушку индуктивностью $2L$ (рис.7). Найдите максимальный заряд Q_1 конденсатора после такого подключения. Элементы цепи считать идеальными. Взаимной индуктивностью катушек пренебречь.

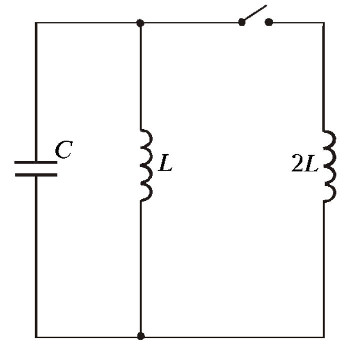


Рис. 7

7. Точечный источник света находится на главной оптической оси на расстоянии $d = 40$ см от рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F = -10$ см. Источник сместили вверх на $h = 5$ см в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси. На сколько и куда надо сместить линзу, чтобы изображение источника вернулось в старое положение?

Публикацию подготовили
А.Леденев, А.Пичкур

Московский государственный институт электронной техники (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\frac{x+1}{x+2}+\frac{2}{x^2+6x+8}=\frac{2}{x+4}.$$

2. Вычислите

$$\left(\frac{1+\operatorname{tg}^2(3\pi/8)}{1-\operatorname{tg}^2(3\pi/8)}\right)^2.$$

3. Вычислите

$$\frac{4}{\log_2 144}-\log_{\sqrt{12}}2.$$

4. Решите уравнение

$$\sin\frac{\pi+x}{2}=\cos(\pi+x)-1.$$

5. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 34, а катеты относятся как 8 : 15. Найдите радиус вписанной окружности.

6. Сколько надо взять 5%-го и 25%-го раствора кислоты, чтобы получить 4 литра 10%-го раствора?

7. Решите неравенство

$$\frac{1}{|x-9|}\le\frac{x-3}{4x-11}.$$

8. Решите неравенство

$$\log_{1/2}\left(\sqrt{5-x}-x+1\right)>-3.$$

9. При каких значениях параметра a функция

$$f(x)=\frac{1}{2^x+a}+\frac{1}{2}$$

является нечетной?

10. Через сторону CD основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ и центр вписанного в нее шара проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит площадь боковой грани SAB, если боковое ребро пирамиды в 1,5 раза больше стороны основания?

11. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющих уравнению

$$6x^2y+4x^2-5xy-8x+y+3=0.$$

Вариант 2

1. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{16-x}\,\log_3\left(x^2-5x+6\right).$$

2. Вычислите

$$\left(\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{27}\right)^2+7\right)\left(\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{27}\right)^2-7\right).$$

3. Найдите первый член арифметической прогрессии, у которой сумма первого и пятого членов равна 22, а произведение второго и третьего равно 66.

4. На поверхности шара, объем которого равен $256\pi/3$, расположены две окружности радиуса $2\sqrt{3}$, касающиеся друг друга. Найдите угол между плоскостями, содержащими данные окружности.

5. Решите уравнение

$$\log_{0,1}\frac{2x+5}{1+2x}-\lg\frac{1+3x}{x+7}=0.$$

6. Решите уравнение

$$\sin x\cos 5x=\sin 9x\cos 3x.$$

7. Постройте график функции

$$y=\sin|x|-\left|\cos(x-3\pi/2)\right|.$$

8. Основание AB равнобедренного треугольника ABC равно $4\sqrt{3}$, а медиана AD равна $2\sqrt{7}$. Построен круг радиуса CD с центром в вершине C треугольника. Определите отношение площади общей части треугольника и круга к площади треугольника.

9. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{8-x}}-\frac{1}{\sqrt{2x+1}}>\frac{1}{\sqrt{8+15x-x^2}}.$$

10. В два сосуда налиты различные растворы соли, причем в первый сосуд налито 5 кг, а во второй – 20 кг. При испарении воды процентное содержание соли в первом сосуде увеличилось в p раз, а во втором сосуде – в q раз. О числах p и q известно только, что pq = 9. Какое наибольшее количество воды могло испариться из обоих сосудов вместе?

11. Найдите наибольшее значение выражения $x+3y$, если пары чисел x и y удовлетворяют неравенству

$$x^2+xy+4y^2\le 6.$$

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Легковой автомобиль движется прямолинейно со скоростью v_1 = 72 км/ч за грузовиком, скорость которого v_2 = 54 км/ч. Когда расстояние между автомобилями составило L = 15 м, легковой автомобиль начал тормозить с ускорением a = 2,5 м/с^2 и остановился. Найдите минимальное расстояние $L_{\min}$ между автомобилями при их движении.

2. На неподвижной горизонтально расположенной плите покоится брусок. Плиту начинают двигать поступательно с ускорением a под углом α вверх к горизонту (рис.1). При каком коэффициенте трения μ между бруском и плитой оба тела будут двигаться как единое целое? Ускорение свободного падения равно g.

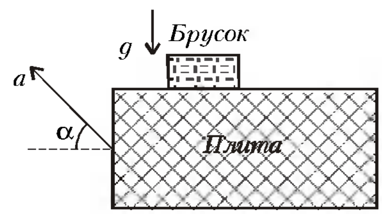


Рис. 1

3. По двум непроводящим параллельным стержням могут скользить две разноименно заряженные бусинки, имеющие массы m_1 = 0,2 г и m_2 = 0,4 г. Сначала бусинки удерживают на некотором расстоянии друг от друга, а затем отпускают. Известно, что максимальная скорость первой бусинки v_1 = 2 м/с. Чему равна максимальная скорость v_2 второй бусинки? Трением и силой тяжести пренебречь.

4. В баллон, содержащий m = 1 кг кислорода, добавили $N=3\cdot10^{25}$ молекул водорода. Во сколько раз n увеличи-

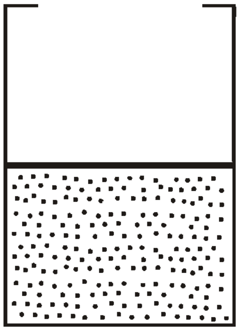


Рис. 2

лось при этом давление в баллоне? Температура постоянная.

5. В вертикальном цилиндрическом сосуде объемом V под легким подвижным поршнем содержится некоторое количество гелия при температуре T_0 (рис.2). Наружное атмосферное давление равно p_0, поршень находится в равновесии и делит сосуд пополам. Газ медленно нагревают, увеличивая его температуру. Сверху сделан упор, который не дает поршню выскочить из сосуда. а) При какой температуре T_1 поршень дойдет до упора? б) Какое количество теплоты Q нужно сообщить газу для его нагревания до температуры $3T_0$? Газ считать идеальным. Трением пренебречь.

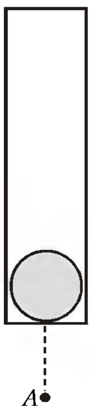


Рис. 3

6. На дне длинной стеклянной пробирки, закрепленной вертикально, находится положительно заряженный диэлектрический шарик массой m = 0,1 г чуть меньшего, чем пробирка диаметра (рис.3). В точке A, расположенной под пробиркой, он создает электрическое поле напряженностью $E = 10^5$ В/м. Найдите силу Кулона, которая будет действовать на точечный положительный заряд q, если его поместить в точку A и дождаться установления равновесия. Рассмотрите случаи: а) $q = 0{,}5 \cdot 10^{-8}$ Кл; б) $q = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл. Влиянием стеклянной пробирки на электрическое поле пренебречь.

7. К батарейке с ЭДС $\mathcal{E}$ = 4,5 В и внутренним сопротивлением r = 10 Ом подключены три одинаковых резистора сопротивлением R = 10 Ом каждый (рис.4). а) Какое напряжение U покажет вольтметр с очень большим внутренним сопротивлением, если его подключить к точкам A и B? б) Какой ток I покажет амперметр с очень малым внутренним сопротивлением, если его подключить к точкам A и B?

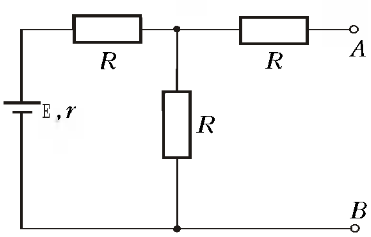


Рис. 4

8. Прямоугольная проволочная рамка находится в однородном магнитном поле, вектор индукции $\vec{B}$ которого перпендикулярен плоскости рамки, а модуль B этого вектора увеличивается со временем по линейному закону. Во сколько раз n уменьшится индукционный ток в рамке после того, как одна из ее половин будет развернута относительно другой на угол α = 60° (рис.5)?

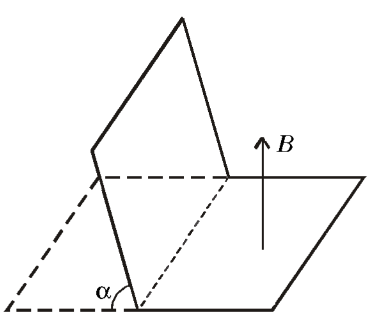


Рис. 5

9. Два луча падают под малыми углами на тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием F = 10 см (рис.6). До преломления в линзе лучи пересекаются в точке A с координатами $x_1 = -20$ см, $y_1 = 2$ см. Найдите координаты x_2, y_2 точки B, в которой пересекутся эти лучи после преломления в линзе.

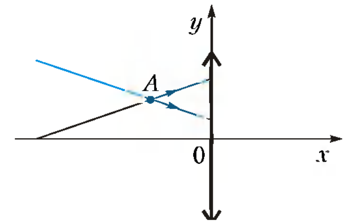


Рис. 6

10. При освещении катода светом с длиной волны λ_1 = 0,5 мкм ток фотоэлектронов регистрируется, а при освещении светом с длиной волны λ_2 = 0,6 мкм ток фотоэлектронов отсутствует. По результатам этих измерений укажите, в каком диапазоне $A_1 < A < A_2$ лежит значение работы выхода A для материала катода.

Физические постоянные

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2
Постоянная Авогадро $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Молярная масса кислорода $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с
Постоянная Планка $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж · с

Вариант 2

1. Две шестерни с радиусами R_1 = 8 см и R_2 = 3 см находятся в зацеплении друг с другом (рис.7). Большая из них вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 20$ рад/с. а) Найдите угловую скорость ω_2 второй шестерни. б) В некоторый момент времени метки A и B, поставленные на шестернях, совпадают. Определите минимальное время τ, через которое метки опять совпадут.

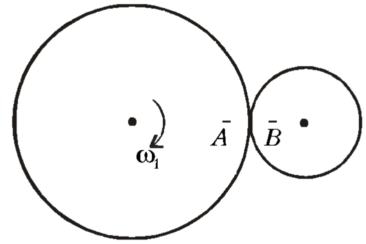


Рис. 7

2. По наклонной плоскости скользит с ускорением a = = 1 м/с^2 брусок массой m = 200 г. С какой силой F нужно прижимать брусок перпендикулярно наклонной плоскости, чтобы он начал двигаться равномерно? Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость μ = 0,1.

3. Легкую горизонтальную пружину, один конец которой закреплен, деформируют на l_1 = 4 см, прижимая к ее свободному концу брусок (рис.8). Брусок отпускают, и пружина, распрямляясь, толкает его по горизонтальному столу. Брусок (он не прикреплен к пружине) проходит до остановки расстояние l_2 = 6 см. На каком расстоянии x от точки старта скорость бруска максимальна?

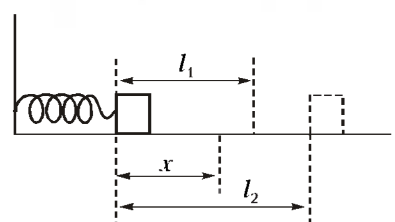


Рис. 8

4. В сосуде объемом V_1 = 7 л находится воздух с относительной влажностью φ_1 = 50 %. Какой объем V_2 воздуха с относительной влажностью φ_2 = 70 % нужно закачать в этот сосуд, чтобы на его стенках появилась роса? Температура воздуха во всех случаях одинакова.

5. Три теплоизолированных сосуда одинакового объема содержат одинаковое количество гелия при температурах $T_1 = 200$ К, $T_2 = 300$ К, $T_3 = 400$ К. Первый сосуд соединяют тонкой теплоизолированной трубкой с краном со вторым сосудом и после установления теплового равновесия разъединяют их. Затем второй сосуд соединяют точно так же с третьим сосудом. Какая температура T установится в третьем сосуде?

6. Два электрона движутся в однородном электрическом поле с напряженностью $E = 16$ кВ/м. В некоторый момент времени ускорение одного из электронов равно нулю. а) Чему равно в этот момент ускорение a другого электрона? б) На каком расстоянии друг от друга находятся электроны? Учесть только электрическое взаимодействие электронов друг с другом и с внешним полем.

7. Если резистор сопротивлением $R = 8$ Ом и конденсатор соединить последовательно и подключить к клеммам источника, то заряд на обкладках конденсатора оказывается в $\alpha = 1{,}5$ раза больше, чем при параллельном соединении резистора, конденсатора и источника. Определите внутреннее сопротивление r источника.

8. Заряженный конденсатор подсоединили к идеальной катушке. Через время $\tau = 10^{-8}$ с энергия конденсатора в первый раз уменьшилась в $n = 4$ раза по сравнению с первоначальной. Определите длину λ волны, излучаемой контуром.

9. Линза с фокусным расстоянием $F = 3$ см дает действительное и увеличенное в $\Gamma = 2$ раза изображение предмета. а) На каком расстоянии f от линзы находится изображение предмета? б) В какую сторону и на какое расстояние L сместится изображение, если пространство за задним фокусом линзы заполнить водой (рис.9)? При вычислениях углы падения считайте малыми.

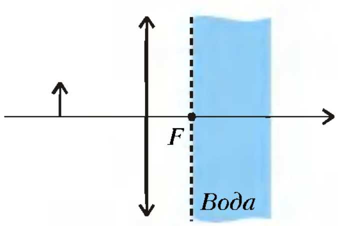


Рис. 9

10. Какое количество N электронов покинет поверхность серебряного шарика радиусом $R = 15$ мм при длительном освещении его излучением с длиной волны $\lambda = 0{,}25$ мкм? Потенциал поверхности шара связан с зарядом шара соотношением $\varphi = kq/R$.

Физические постоянные

Коэффициент пропорциональности в законе Кулона $k = 9 \cdot 10^9$ Н·м²/Кл²

Масса электрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг

Элементарный заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

Показатель преломления стекла $n = 4/3$

Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с

Постоянная Планка $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с

Работа выхода электронов из серебра $A = 7{,}5 \cdot 10^{-19}$ Дж

Публикацию подготовили И.Бардушкина, А.Берестов, И.Горбатый, С.Кальней, С.Куклин, Д.Ничуговский, Т.Олейник, А.Терещенко

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Стоимость проезда возросла на 2,5 рубля за одну поездку, поэтому на выделенную сумму в 234 рубля теперь можно сделать ровно на 10 поездок меньше. Сколько сейчас стоит одна поездка?

2. Решите уравнение

$$\sqrt{1+\sin x} = \sqrt{6}\sin x .$$

3. Решите уравнение

$$x^{\log_4(3x)} = 3^{\frac{1}{\log_3 2}} .$$

4. Решите неравенство

$$\frac{x^3-27}{x^2-9} < \frac{2x+9}{3} .$$

5. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, если на его гипотенузе лежит точка $M(0;\ 1)$, а его катеты лежат на прямых $x = -2$ и $y = 0$?

6. Укажите все значения параметра p, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y^2 - 16y + 63 = 3\dfrac{|x|}{x}, \\ y - p = (x-2)^2 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения. Найдите эти решения при указанных p.

7. В прямоугольном параллелепипеде проведена плоскость, которая проходит через его диагональ, образует углы 45° и 30° со сторонами основания и параллельна диагонали основания. Чему равна площадь сферы, описанной около параллелепипеда, если расстояние от этой плоскости до диагонали основания равно l?

Вариант 2

1. Из пункта A в пункт B вышел один пешеход, и с некоторым опозданием – второй. Когда первый прошел половину пути, второй прошел 15 км, а когда второй прошел половину пути, первый прошел 24 км. В пункт B пешеходы пришли одновременно. Чему равно расстояние между пунктами A и B?

2. Найдите все корни уравнения

$$\cos 9x + \sqrt{3}\cos 6x + \cos 3x = 0 ,$$

принадлежащие промежутку $[\pi/4;\ \pi/2]$.

3. Решите уравнение

$$\log_4(20x-34) = 2 + \log_2(x-5) .$$

4. Решите неравенство

$$3 \cdot 2^x + 5 < 2^{1-x} .$$

5. Найдите площадь прямоугольника, две стороны которого лежат на координатных осях, одна из вершин расположена на графике функции $y = \dfrac{30}{x} - \dfrac{4x}{3}$, а диагональ имеет наименьшую возможную длину.

6. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y = 2\log_2\left(2 + \dfrac{|x|}{x} + \dfrac{|x-9|}{x-9}\right), \\ (y-a-2)^2 - x^2 = 144 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это решение при каждом a.

7. Найдите площадь сечения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через вершину C и середину стороны B_1C_1 основания $A_1B_1C_1$ и параллельной диагонали AC_1 боковой грани AA_1C_1C, если расстояние между AC_1 и секущей плоскостью равно 1, а сторона основания призмы равна $\sqrt{14}$.

Публикацию подготовил Л.Паршев

Новосибирский государственный университет

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из задач трех типов.

Первые три задачи – расчетные, различной степени трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной ситуации.

Четвертая задача – задача-оценка. Для ее решения необходимо разобраться в рассматриваемом физическом явлении, сформулировать простую (так как нужна только достаточно грубая оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивается, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача – задача-демонстрация, при решении которой необходимо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Среди различных факторов, влияющих на процесс, необходимо выделить главный.

Вариант 1

1. Вертикальный, хорошо проводящий тепло цилиндр высотой H перекрывают поршнем. В дне цилиндра имеется широкое отверстие, заклеенное бумагой, которая рвется при перепаде давлений Δp. На поршень медленно насыпают песок. Найдите, с какой скоростью поршень ударится о дно цилиндра после разрыва бумаги. Атмосферное давление p_0. Ускорение свободного падения g.

2. В замкнутом цилиндрическом теплоизолированном сосуде под подвижным тяжелым поршнем находится гелий, а над поршнем – вакуум. Затем гелий начинает просачиваться в верхнюю часть сосуда через маленький зазор. Найдите установившуюся температуру газа, когда поршень опустится на дно сосуда. Начальная температура газа T_0. Теплоемкостью цилиндра и поршня пренебречь.

3. По наклонной плоскости в однородном магнитном поле с индукцией B соскальзывает шайба массой m, имеющая заряд q. Плоскость установлена под углом α к горизонту, вектор магнитного поля перпендикулярен плоскости. Найдите установившуюся скорость шайбы. Коэффициент трения между шайбой и плоскостью μ. Ускорение свободного падения g.

4. В аудитории вылили на пол ведро воды. Оцените, какой объем воздуха будет вытеснен из помещения, когда вся вода испарится.

5. Оптическая система, состоящая из двух линз, создает на экране яркое пятно. Если попытаться перекрыть свет тонким стержнем вблизи любой из линз, то изображение практически не изменится. Если же провести стержнем в определенном месте между линзами, то в некоторый момент изображение полностью исчезнет. Объясните явление.

Вариант 2

1. Точечные тела с массами m_1 и m_2, имеющие разноименные заряды $+q$ и $-q$, находятся на расстоянии R друг от друга. С какой силой надо тянуть тело массой m_2, чтобы расстояние между телами при движении не изменялось?

2. В цилиндрическом сосуде под поршнем массой $m = 50$ кг и площадью $S = 1$ дм^2 в равновесии находятся вода и воздух при температуре $t_1 = 100$ °С. Высота поршня над поверхностью воды $H = 20$ см. На какое расстояние опустится поршень, если температуру внутри понизить до $t_2 = 7$ °С? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Давлением пара воды при 7 °С пренебречь.

3. В момент, когда в колебательном контуре из катушки индуктивностью L и конденсатора емкостью C ток достиг максимального значения I, замыкают ключ K, подсоединив катушку индуктивностью L_1, как показано на рисунке 1. Определите максимальный ток в катушке индуктивностью L_1.

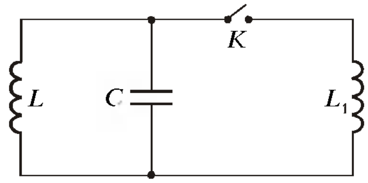


Рис. 1

4. Оцените механическую мощность, которую в спокойном состоянии развивает ваше сердце.

5. Закрытая пробирка, на дне которой закреплен груз, медленно всплывает в узкой вертикальной трубке, заполненной водой. Если же пробирку перевернуть грузом вверх, то она не всплывает. Объясните результат эксперимента.

Вариант 3

1. Тело после броска с поверхности земли через время t_1 упруго отскакивает от вертикальной стенки и падает на землю еще через время t_2. Найдите высоту точки удара.

2. В стене укреплен горизонтальный стержень, по которому без трения может двигаться бусинка массой m. Бусинка соединена со стеной нитью длиной $2L$, к середине которой прикреплен груз массой M, как показано на рисунке 2. Вначале нить натянута. Грузы отпускают. Какие скорости наберут груз и бусинка перед ударом о стену? Ускорение свободного падения равно g. Размерами тел пренебречь.

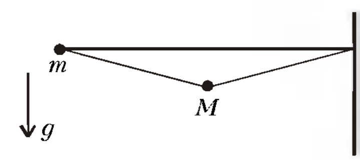


Рис. 2

3. Металлический поршень помещен в трубу из диэлектрика, площадь сечения которой S. По обе стороны от поршня труба перекрыта металлическими пластинами A и B, соединенными проводником, как показано на рисунке 3. Труба заполнена газом. Вначале давление по обе стороны поршня p_0, а расстояния между поршнем и пластинами d. Поршню сообщают электрический заряд q, а обеим металлическим пластинам вместе – противоположный заряд $-q$, так что суммарный заряд системы нулевой. Найдите все положения равновесия поршня. Трением пренебречь, температуру считать постоянной. Расстояние d мало по сравнению с размерами пластин.

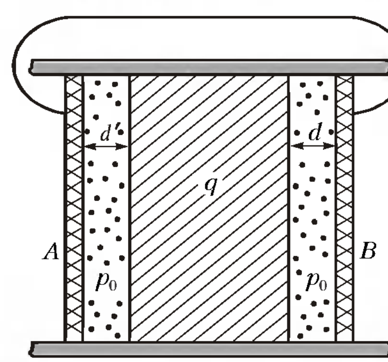


Рис. 3

4. Оцените, сколько воздушных шариков, наполненных водородом, потребуется, чтобы преодолеть ваш вес.

5. Шарик для настольного тенниса, скатываясь с наклонной плоскости, которая упирается в вертикальную стенку, при небольшом наклоне плоскости отскакивает от стенки. Если же наклон велик, шарик перестает отскакивать, хотя высота, с которой он спускается, увеличилась. Объясните результат эксперимента.

Публикацию подготовили Г.Меледин, А.Ершов

Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Для каждого натурального числа $n > 1$ определена функция

$$f_n(x) = 0,25^{\log_n\left(x^2+2nx+7\right)}.$$

а) Найдите области определения этих функций.

б) Нарисуйте график функции

$$g(x) = \sqrt{\frac{1}{f_4(x)} + 9}.$$

в) При каких a уравнение $|g(x) - 5| = a$ имеет только два решения?

2. Решите неравенство

$$\cos\left(\frac{5\pi}{2} + 10x\right) > \cos 2x \cos 3x - \sin 2x \sin 3x.$$

3. В ромб вписана окружность радиуса R. Найдите площадь ромба, если его большая диагональ в 4 раза больше радиуса описанной окружности.

4. Основанием пирамиды служит прямоугольник, площадь которого равна S. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углами 30° и 60°. Найдите объем пирамиды.

5. Рассмотрим следующие свойства числа a: а) сумма цифр числа a делится на 3; б) a – четное число; в) остаток от деления числа a на 6 равен 1; г) a делится на 9.

1) Покажите, что никакое число не обладает одновременно свойствами а) – г).

2) Верно ли, что если число a обладает свойством в), то число $a + 2$ обладает свойством б)?

Вариант 2

1. Для каждого натурального числа n определена функция

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{n-x}{(6+3x)|x-2|}}.$$

а) Найдите области определения этих функций.

б) Нарисуйте график функции

$$g(x) = \left|f_2^2(x) - 1\right|.$$

в) Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(f_5(x)\sqrt{2+x}\right) > \log_{\frac{1}{3}}(5-x).$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{3} - \sin 7x = 2\sqrt{3}\cos^2 2x - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right).$$

3. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренной трапеции с основаниями 2 и 14 и боковой стороной 10.

4. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб $ABCD$ со стороной a и острым углом 60°. Ребро AA_1 также равно a и образует с ребрами AB и AD углы 45°. Определите объем параллелепипеда и площадь его полной поверхности.

5. Дана функция $f(x) = \sqrt{a-x}$.

а) Покажите, что при любых различных числах a и b графики функций $f_a(x)$ и $f_b(x)$ не пересекаются.

б) Верно ли, что если $a > b$, то область определения функции $f(x)$ содержится в области определения функции $f_b(x)$?

Публикацию подготовили Н.Подходова, О.Корсакова

Российский государственный технологический университет им. К.Э.Циолковского (МАТИ)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 + 11x - 9} = \sqrt{8x - 5}.$$

2. Решите уравнение

$$\sin 3|x| + \sqrt{3}\cos 3x = \sqrt{2}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_5 \log_6 \frac{5x-1}{x+5} \le 0.$$

4. Отношение суммы первых трех членов геометрической прогрессии к сумме последних трех членов равно 1 : 5, а отношение суммы всех ее членов без первых трех к сумме всех членов без последних трех равно 7 : 5. Найдите количество членов прогрессии.

5. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{x + 2a^2}\left(x^2 + (2-a)x - 2a\right) = 0$$

имеет ровно два различных корня?

6. В трапецию $ABCD$ с острым углом D вписана окружность, точки касания которой с основанием AD и боковой стороной CD делят длину окружности на части 1 : 2. На сторонах AD и CD выбраны точки E и T так, что отрезок ET касается окружности и перпендикулярен AD. Найдите отношение площадей трапеции $ABCD$ и треугольника ETD, если $AB = 4TE$.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 + 2x - 8} = 3x - 8.$$

2. Решите уравнение

$$\sin\left(\sqrt{x} + \sqrt{7-x}\right) = 0.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{x+4} 3 + \log_{2x+9} 3 \le 0.$$

4. В арифметической прогрессии четное число членов. Разность между последним и первым членами равна 153, разность между суммой четных и суммой нечетных членов равна 81, а четвертый член равен 20. Найдите сумму членов прогрессии.

5. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{x + 3a^2}\left(x^2 + 2(2-a)x - 8a\right) = 0$$

имеет ровно два различных корня?

6. Окружность вписана в трапецию $ABCD$ с тупым углом

B. Точки ее касания с боковой стороной *AB* и основанием *BC* делят длину окружности на части 1 : 5. Точки *T* и *N* выбраны на сторонах *AB* и *BC* так, что $TB = NB$ и *TN* – касательная к окружности. Найдите отношение площадей трапеции *ABCD* и треугольника *TBN*, если *CD* в $4\sqrt{3}$ раз больше радиуса окружности.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Виток провода в виде окружности диаметром 10 см замкнут на конденсатор. Виток находится в однородном магнитном поле, линии индукции перпендикулярны плоскости витка. Индукция магнитного поля изменяется со скоростью 10^{-2} Тл/с. Найдите заряд конденсатора, если его емкость 125 мкФ.

2. На катод фотоэлемента падает световой поток 0,02 Вт. На каждые 10 квантов света, попадающих на катод, приходится в среднем 1 вылетевший фотоэлектрон. Определите ток насыщения фотоэлемента, если длина волны падающего света 0,2 мкм.

3. Наклонная плоскость имеет основание 10 м и высоту 2,5 м. На наклонной плоскости стоит коробка. Чтобы передвинуть коробку вниз по наклонной плоскости на некоторое расстояние, нужно совершить минимальную работу 15 Дж, а чтобы передвинуть на такое же расстояние вверх, необходимо совершить работу не менее 65 Дж. В обоих случаях сила прикладывается параллельно наклонной плоскости. Найдите коэффициент трения.

4. С одноатомным идеальным газом совершается циклический процесс. Из начального состояния с давлением 1,6 МПа и объемом 2 л газ расширяется при постоянном давлении до объема 16 л. Затем при постоянном объеме давление газа уменьшается до 50 кПа. После чего газ возвращают в начальное состояние адиабатическим сжатием. Постройте график процесса в координатах *p*, *V* и найдите работу, совершенную газом за цикл.

5. В четырех вершинах квадрата со стороной 1 м расположены одинаковые по модулю точечные заряды. Знаки зарядов указаны на рисунке 1. Известно, что напряженность электрического поля в середине стороны, соединяющей одноименные заряды, равна 360 В/м. Найдите силу, действующую на каждый заряд.

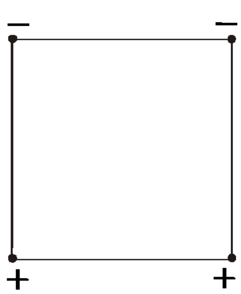


Рис. 1

6. Шар, двигавшийся поступательно, испытывает упругое соударение с другим, покоившимся, шаром такой же массы. При соударении угол между прямой, проходящей через центры шаров, и направлением первоначального движения налетающего шара оказался равным 45°. Найдите долю кинетической энергии налетающего шара, которая переходит в потенциальную энергию в момент наибольшей деформации шаров.

Физические постоянные

Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с
Постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Элементарный заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
Коэффициент в законе Кулона $k = 9 \cdot 10^9$ Н·м²/Кл²

Вариант 2

1. Тело движется равноускоренно на некотором отрезке пути, увеличивая свою скорость от 1 м/с до 7 м/с. Найдите скорость тела в середине этого отрезка.

2. Десять параллельно соединенных лампочек, рассчитанных на напряжение 120 В, питают от сети с напряжением 180 В через последовательно подключенный реостат. Начертите схему и рассчитайте ее КПД. Сопротивление каждой лампочки 500 Ом.

3. Если груз прикрепить к первой пружине, то период колебаний будет 1 с. На второй пружине период колебаний этого же груза будет 2 с. Каким будет период колебаний груза, прикрепленного к двум пружинам вместе, как показано на рисунке 2? Трения нет.

4. В сосуде находится смесь льда массой 2,1 кг и воды. После начала нагревания температура смеси в течение 11 мин оставалась постоянной, а затем в течение следующих 4 мин повысилась на 20 °С. Определите общую массу смеси, если количество теплоты, получаемое системой в единицу времени, постоянно. Потерь тепла в окружающую среду нет. Удельная теплоемкость воды 4,2 кДж/(кг·К), удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг.

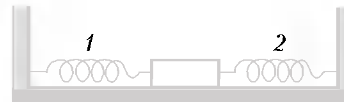


Рис. 2

5. Космический корабль подлетел к планете и вышел на круговую орбиту, проходящую точно над экватором. Корабль движется по орбите в направлении вращения планеты вокруг оси на высоте, равной радиусу планеты. Наблюдения показали, что период обращения планеты вокруг своей оси такой же, как у Земли, а корабль пролетает над одной и той же точкой экватора каждые 5 часов. Вычислите по этим данным среднюю плотность планеты, считая ее шаром.

6. По кольцу радиусом *R* равномерно распределен заряд *q*. Сила натяжения проволоки, из которой сделано кольцо, при этом составляет 10% от силы F_m, при которой проволока рвется. В центр кольца помещают заряд *Q*. При какой минимальной величине этого заряда кольцо разорвется? Изменением радиуса кольца пренебречь.

Физические постоянные

Гравитационная постоянная $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг²
Постоянная в законе Кулона $k = 9 \cdot 10^9$ Н·м²/Кл²

Публикацию подготовили Т.Медина, А.Миронов, В.Мирошкин, Л.Муравей, Г.Никулин, А.Симонов

Российский государственный университет нефти и газа им. И.М.Губкина

Дорогие читатели-абитуриенты!

Поступив в РГУ нефти и газа, вы сможете стать не только инженером-нефтяником, но и математиком или физиком. Для этого вам надо выбрать специальность «Прикладная математика» или «Физические процессы нефтегазового производства». Окончив университет, вы будете заниматься фундаментальными исследованиями физики и механики жидкости и газа, работать на современном оборудовании и новейших компьютерах, удовлетворяя свое научное любопытство на благо и за счет нефтегазовой отрасли.

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите и вычислите при $a = 3\sqrt{2}$

$$\frac{a^3 + 8\sqrt{8}}{a + \sqrt{8}} - \frac{a^3 - 8\sqrt{8}}{a - \sqrt{8}}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 81}} = \frac{1}{x\sqrt{10} - 9\sqrt{10}}.$$

3. Отношение девятого члена геометрической прогрессии к ее шестому члену равно 1/8. Найдите первый член прогрессии, если ее пятый член равен 3.

4. Решите неравенство

$$0,4|x-0,4| \ge x^2 + 0,2 .$$

5. Решите неравенство

$$3^{\sqrt{x+11}} \ge 2^{6\sqrt{x+11}} .$$

6. Вычислите

$$\log_{49} 16 - \log_7 (4/343) .$$

7. Вычислите

$$\sin^2 13^\circ + \cos 47^\circ \cos 73^\circ .$$

8. Найдите в градусах наибольший отрицательный корень уравнения

$$\sin\left(x+16^\circ\right) - \sin\left(x+4^\circ\right) = \sin 6^\circ .$$

9. На графике функции

$$y = a + \frac{b}{x} \ \ (ab \ne 0)$$

взята точка с абсциссой 8 и в ней проведена касательная к графику. Прямая, параллельная этой касательной, проходит через начало координат и пересекает график в двух различных точках M и N. Абсцисса точки M равна (–4). Найдите абсциссу точки N.

10. Найдите произведение корней уравнения

$$x^{3\log_{27} x} = 3x^2 .$$

11. $ABCD$ – трапеция, в которой $\angle DAB = \angle ABC = \pi/2$, $\angle CDA = \alpha$, причем $\sin\alpha = 0,3$. Окружность радиуса 5 касается сторон AD, AB, BC и пересекает сторону CD в точках M и N, причем MN= 8. Найдите площадь трапеции.

12. В правильную треугольную пирамиду $SABC$ с основанием ABC вписан шар, к нему проведена касательная плоскость, параллельная грани ASC. Эта плоскость пересекает ребро SB в точке M такой, что $BM : MS$ = 1,55. Найдите косинус угла между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды $SABC$.

Вариант 2

1. Упростите и вычислите при $a = \sqrt[3]{16} + 1$

$$\frac{16 - 12\sqrt[3]{4a} + 6\sqrt[3]{2a^2} - a^3}{\left(\sqrt[3]{16} - a\right)^2} .$$

2. Найдите наибольшее целое значение x, входящее в область определения функции

$$y = \log_3 \frac{14-3x}{x+1} .$$

3. Найдите 19-й член арифметической прогрессии, если известно, что ее 9-й член равен 22, а разность прогрессии равна 4.

4. Решите уравнение

$$|x+1| = |x+7| .$$

5. Решите уравнение

$$\sqrt{27^{4x+8}} = \sqrt[3]{9^{8x+4}} .$$

6. Дано: $\lg 2 = 0,301$. Вычислите $\lg 8\sqrt{10}$.

7. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 10\sin\left(\frac{\pi}{6}\sin 10x\right).$$

8. Найдите в градусах наименьший положительный корень уравнения

$$\frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{3}} .$$

9. Прямая, параллельная оси Ox, пересекает график функции $y = 4\sqrt{-x}$ в точке M, а график функции $y = \dfrac{12}{\sqrt{x}}$ – в точке N. Найдите наименьшее возможное значение, которое может принимать длина отрезка MN.

10. Решите уравнение

$$\sqrt{\log_x \sqrt{0,1x}} \cdot \log_{0,1} x = -1 .$$

11. В треугольнике ABC проведены высоты AM и BN. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AB = \sqrt{5}$, $MN = 1$.

12. Образующая конуса составляет с плоскостью его основания угол α, $\cos\alpha = 0,25$. В конус вписан шар, через окружность касания шара и боковой поверхности конуса проведена плоскость. Объем части конуса, лежащей ниже этой плоскости, равен 37. Найдите объем части конуса, лежащей выше этой плоскости.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Внимание! Если единицы измерения не указаны, выразите ответ в единицах СИ. Ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2.

Вариант 1

1. Автомобиль, двигаясь равноускоренно, через 4 с после начала движения достиг скорости 8 м/с. Какой путь прошел автомобиль за четвертую секунду движения?

2. Санки передвигаются по горизонтальному участку дороги с помощью веревки, наклоненной под углом 30° к горизонту. Сила натяжения веревки составляет 100 Н. Найдите работу силы натяжения на пути 15 м. *Указание*: $\sqrt{3} = 1,72$.

3. Во сколько раз давление воды на глубине 50 м больше, чем давление воды на глубине 10 м? Атмосферное давление 100 кПа. Плотность воды 1000 кг/м^3.

4. Баллон емкостью 83 л содержит 3,3 кг углекислого газа. Баллон выдерживает давление не выше $9 \cdot 10^6$ Па. При какой температуре (в кельвинах) баллон может разорваться? Молярная масса углекислого газа 44 кг/кмоль, универсальная газовая постоянная 8,3 Дж/(моль · К).

5. Какая масса ртути имеет такую же теплоемкость, как 325 г спирта? Удельная теплоемкость спирта 2400Дж/(кг · К), удельная теплоемкость ртути 130 Дж/(кг · К).

6. В проводнике сопротивлением 5 Ом, включенном в сеть постоянного напряжения, за 4 с выделилась энергия 500 Дж. Каково напряжение сети?

7. Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов 2 кВ, влетел в однородное магнитное поле с индукцией 0,003 Тл перпендикулярно линиям поля. Найдите радиус кривизны траектории электрона (в мм). Заряд электрона $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $9 \cdot 10^{-31}$ кг.

8. На каком расстоянии (в см) от выпуклой линзы с фокусным расстоянием 32 см следует поместить предмет, чтобы получить действительное изображение, увеличенное в 4 раза?

9. Тело массой 1 кг вращается в вертикальной плоскости на нити длиной 2 м. Когда тело при подъеме проходит точку, расположенную на 1 м выше точки подвеса нити, она обрывается. На сколько выше точки подвеса поднимется тело, если натяжение нити перед обрывом было равно 35 Н?

10. Невесомый стержень, на концах которого закреплены грузы массами 1 кг и 3 кг, может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину. Стержень приводят в горизонтальное положение и отпускают. С какой силой стержень будет действовать на ось, проходя вертикальное положение?

11. Два диэлектрических шара радиусом 1 см каждый равномерно заряжены одинаковым зарядом 0,4 мкКл. В начальный момент один из шаров, массой 16 г, покоится, а другой, массой 8 г, издалека приближается к нему со скоростью 6 м/с. Найдите скорость первоначально покоившегося шара непосредственно перед соударением шаров. Коэффициент в законе Кулона равен $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

12. Грузик, подвешенный на пружине, вывели из положения равновесия и отпустили. Через сколько миллисекунд в первый раз кинетическая энергия грузика будет в 3 раза больше потенциальной энергии пружины? Период колебаний 1,2 с.

Вариант 2

1. Камень, брошенный под углом к горизонту, достиг наибольшей высоты 5 м. Найдите полное время полета камня.

2. Конькобежец катил груженные санки по льду со скоростью 3 м/с, а затем толкнул их вперед и отпустил. С какой скоростью в (см/с) покатится конькобежец непосредственно после толчка, если скорость санок возросла до 6 м/с? Масса санок 60 кг, масса человека 80 кг. В ответе укажите модуль скорости.

3. Мяч массой 200 г, брошенный вертикально вверх со скоростью 40 м/с, упал на землю со скоростью 30 м/с. Определите работу силы сопротивления воздуха. В ответе укажите модуль полученной величины.

4. Какую горизонтальную силу надо приложить к телу массой 10 кг, чтобы оно находилось в равновесии на гладкой наклонной плоскости с углом наклона 60°? *Указание*: $\sqrt{3} = 1{,}72$.

5. Какое количество теплоты (в кДж) надо сообщить 3 кг льда, взятого при −10 °С, чтобы полностью его растопить? Удельная теплоемкость льда 2100 Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг.

6. Какова полная мощность, развиваемая источником тока с внутренним сопротивлением 2 Ом при подключении к нему сопротивления 3 Ом, если падение напряжения на этом сопротивлении равно 9 В?

7. Маятник отклонили на 15 мм и отпустили. Какой путь (в см) пройдет маятник за 12 с, если период его колебаний 8 с?

8. Изображение предмета, помещенного перед собирающей линзой на расстоянии 100 см, получено по другую сторону линзы в натуральную величину. Во сколько раз увеличится размер изображения, если предмет передвинуть в сторону линзы на 40 см?

9. Тело поднимают вверх вдоль наклонной плоскости, прикладывая к нему горизонтальную силу, величина которой вдвое больше действующей на тело силы тяжести. Высота наклонной плоскости 3 м, ее длина 5 м. Найдите ускорение тела, если коэффициент трения равен 0,2.

10. Объем газа увеличили при постоянном давлении в 1,3 раза, после чего уменьшили его температуру при постоянном объеме, а затем изотермически уменьшили его объем до первоначального значения. Найдите первоначальную температуру газа (в °С), если максимальная температура газа в описанных процессах 104 °С.

11. Две частицы имеют массу 1 г каждая и заряды 1 мкКл и −1 мкКл. В начальный момент расстояние между частицами 3,2 м, одна из частиц покоится, а другая удаляется от нее со скоростью 3 м/с. Найдите максимальное расстояние между частицами в процессе движения. Коэффициент в законе Кулона равен $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

12. Замкнутый контур образован двумя вертикальными рейками, между верхними концами которых включен источник тока с ЭДС 60 мВ и внутренним сопротивлением 1 мОм, а нижние концы замкнуты перемычкой, длина которой 10 см, а масса 10 г. Контур находится в перпендикулярном его плоскости однородном магнитном поле с индукцией 0,1 Тл. Когда перемычку освобождают, она начинает подниматься. Пренебрегая сопротивлениями реек и перемычки, а также трением, найдите ее установившуюся скорость.

Публикацию подготовили Б.Писаревский, А.Черноуцан

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(физико-механический факультет)

1. Упростите выражение

$$\frac{a^3 - a - 24}{a - 3} - \frac{a^3 + 6a - 7}{a - 1}.$$

2. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2 - x$.

3. Решите неравенство $\arcsin x > -\pi/6$.

4. Вычислите $\log_{4-2\sqrt{3}}\left(\sqrt{3} - 1\right)$.

5. Решите уравнение

$$x \log_5 15 = \log_5\left(4 - 3^x\right) + x.$$

6. Решите уравнение $\sqrt[3]{5^x} \cdot 3^{5-x} = 45$.

7. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{3 - \left|\log_3 x\right|}.$$

8. Найдите количество различных корней уравнения $\sin\left(\pi x^2\right) = \sqrt{2}/2$ на промежутке $[2; 3]$.

9. Решите уравнение

$$2\left(x^2 - 1\right) = \left(x^2 + x\right)\left(|x| - 1\right).$$

10. Решите неравенство $|x + 3|^{x-6} \geq 1$.

11. Второй член убывающей геометрической прогрессии равен 192, а ее четвертый член равен 48. Сколько членов данной прогрессии являются двузначными натуральными числами?

12. Решите неравенство $5\sqrt{x^2 - 4|x| + 4} \leq 2\left(4 - x^2\right)$.

13. Найдите третий член арифметической прогрессии, если для любого натурального числа n справедливо равенство $S_{n+3} - S_n = 24n + 39$, где S_n – сумма первых n членов прогрессии.

14. Для скольких натуральных чисел n число $n/(n + 6)$ лежит в промежутке $[1/3; 1/2]$?

15. Найдите корни уравнения $|\sin x| + \sin|x| = 0$ на промежутке $[-\pi/2; 3\pi/2]$.

16. Решите неравенство $(x + 2) \cdot 3^x < (x + 2) \cdot 9^{3-x}$.

17. Диагонали трапеции $ABCD$ делятся в отношении 1 : 4 их точкой пересечения О. Большее основание трапеции BC

равно 8, а площадь треугольника BOC равна 1. Найдите площадь трапеции.

18. Вычислите площадь поверхности, полученной вращением ромба, площадь которого равна 4, вокруг своей стороны.

19. Найдите точки на графике функции $y = |x-5| - 3$, ближайшие к точке $M(5;3)$.

20. При каких действительных значениях параметра a уравнение $1 - ax^2 = 2|ax+1|$ имеет хотя бы один корень на интервале $(-1/2; 0)$?

Вариант 2

(физико-технический факультет)

1. Найдите число $A > 0$, если оно составляет 20% от $2A^2 - A$.

2. Решите уравнение
$$\frac{4}{x-1} = \frac{2x+1}{x^2+x-2}.$$

3. Вычислите
$$\frac{\log_2 3 + \log_4 9}{\log_8 27 - \log_2 27}.$$
Убедитесь, что это число – целое.

4. Решите уравнение $\log_5(1+x) = \log_{25}(1-2x)$.

5. Вычислите
$$\frac{\sqrt{2}\sin\alpha}{\cos(\alpha + \pi/4)},$$
если $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

6. Какое число больше: $a = \sin 17^\circ$ или $b = \cos(2\pi/5)$?

7. Решите уравнение $2^{x+1} - 2^{3-x} = 6$.

8. Найдите $f(3)$, если $f(\log_2 x) = \log_4(2x)$.

9. Решите уравнение $\sin 3x + \cos 2x = \sin x$.

10. Найдите количество целых решений неравенства
$$\left|x^2 - 1\right| \le \left|x^2 - 7\right|.$$

11. Решите уравнение $2(x+4)^2 = \sqrt{x^2+8x+19}$.

12. Напишите уравнение касательной к графику $y = x^2 - 4x$, проходящей через точку $M(2;-4)$.

13. Решите неравенство
$$\sqrt{\frac{3-x}{x+1}} > 1.$$

14. Решите неравенство $(\operatorname{tg}^2 x + 2)|\cos x| \le 2$.

15. Найдите область определения функции
$$y = \sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 1} + \sqrt{\pi x - x^2}.$$

16. Найдите все пары натуральных чисел $(x; y)$, являющиеся решениями системы уравнений
$$\begin{cases} x^3 = 5x^2 - y^2, \\ y^2/4 = y - x^2. \end{cases}$$

17. Отрезок, параллельный основанию трапеции, делит трапецию на части, площади которых относятся как 3 : 5. Найдите длину этого отрезка, если основания трапеции равны 2 и 6.

18. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна $\sqrt{17}$, площадь его основания равна 6, а тангенс угла, образованного диагональю параллелепипеда с его основанием, равен $2/\sqrt{13}$. Найдите объем параллелепипеда.

19. Найдите множество значений функции
$$y = \frac{2x + x^{-1}}{4x^2 + x^{-2} + 8}.$$

20. Найдите все положительные значения параметра a, при которых промежуток $[-3; -1]$ содержится в множестве решений неравенства $|x + a| < 2a^2(a - x)^{-1}$.

Публикацию подготовили
И.Ильин, Н.Комарчев, С.Преображенский

ОЛИМПИАДЫ

XLIII Международная математическая олимпиада

XLIII Международная математическая олимпиада (ММО) прошла с 19 по 30 июля 2002 года в городе Глазго (Шотландия) с участием 479 школьников из 84 стран мира. В нынешнем году, впервые в истории выступления на ММО не только команды России, но и команды Советского Союза, все наши школьники завоевали золотые медали. До этого по 5 золотых медалей на ММО команды СССР и России завоевывали в 1965, 1966, 1968 годах (в тот период по регламенту команды состояли из 8 участников), а также в 1984, 2000 и 2001 годах (6 участников).

Особо следует выделить выступление Андрея Халявина. Только трем участникам, в том числе и ему, удалось решить все 6 задач и набрать 42 балла (два других абсолютных результата у школьников из Китая). Второй результат – 36 баллов – показали 6 школьников, среди них Андрей Бадзян и Олег Гольберг. Следует отметить, что впервые Россию на ММО представляли сразу два девятиклассника: Андрей Бадзян (ФМЛ 31, Челябинск) и Михаил Дубашинский (ФМЛ 239, Санкт-Петербург). Кроме них в команду вошли десятиклассник Олег Гольберг (школа 8, Ростов-на-Дону) и выпускники Андрей Халявин (ФМЛ, Киров), Кирилл Сухов (ФМЛ 239, Санкт-Петербург), Олег Стырт (лицей 64, Омск). Запасным членом команды был выпускник школы 33 из Ярославля Егор Куликов.

Наши участники не потеряли ни одного балла (!) при решении легких и средних задач и в итоге показали такие результаты:

	1	2	3	4	5	6	Σ
А.Халявин	7	7	7	7	7	7	42
А.Бадзян	7	7	5	7	7	3	36
О.Гольберг	7	7	1	7	7	7	36
К.Сухов	7	7	1	7	7	3	32
М.Дубашинский	7	7	1	7	7	0	29
О.Стырт	7	7	1	7	7	0	29

(задачу 3 решили 14, задачу 6 – 12 участников олимпиады).

Огромная благодарность работавшим с командой тренерам А.Белову, С.Берлову, А.Глазырину, В.Дольникову, Д.Карпову, П.Кожевникову, А.Пояркову, М.Пратусевичу, А.Храброву, Г.Челнокову.

Всего на олимпиаде золотыми медалями были награждены 39 участников, и их вручала победителям британская принцесса Анна.

В неофициальном командном зачете значительных изменений по сравнению с прошлыми годами не произошло, и лучшие 20 команд расположились в следующем порядке:

	Очки	Золото	Серебро	Бронза
Китай	212	6	0	0
Россия	204	6	0	0
США	171	4	1	0
Болгария	167	3	2	1
Вьетнам	166	3	1	2
Ю.Корея	163	1	5	0
Тайвань	161	1	4	1
Румыния	157	2	3	1
Индия	156	1	3	2
Германия	144	2	1	2
Иран	143	0	4	2
Канада	142	1	3	1
Венгрия	142	1	2	3
Белоруссия	135	1	2	3
Турция	135	1	1	4
Япония	133	1	4	1
Казахстан	133	0	3	3
Израиль	130	0	3	3
Франция	127	0	2	3
Украина	124	1	3	0

В заключение хотелось бы выразить благодарность всем организациям и лицам, оказавшим поддержку в успешном выступлении команды России на XLIII ММО: Министерству образования РФ, Стипендиальному фонду Владимира Потанина, компании «Apple», Исполкому Союза правых сил, а также Ю.В.Прохорову.

Ниже приведены задачи олимпиады и их решения, предложенные нашими участниками.

Задачи олимпиады

1. Дано натуральное число n. Обозначим через T множество точек $(x; y)$ координатной плоскости, где x и y – неотрицательные целые числа такие, что $x + y < n$. Каждая точка из T окрашена в красный или синий цвет. Если точка $(x; y)$ красная, то все точки $(x'; y')$ из T, для которых $x' \le x$ и $y' \le y$, также красные. Назовем X-множеством множество из n синих точек, имеющих различные координаты x, а Y-множеством – множество из n синих точек, имеющих различные координаты y. Докажите, что количество X-множеств равно количеству Y-множеств.

(Колумбия)

2. Дана окружность Γ с центром O и диаметром BC. Пусть A – точка на Γ такая, что $0^\circ < \angle AOB < 120^\circ$, а D – середина дуги AB, не содержащей C. Прямая, проходящая через точку O параллельно DA, пересекает прямую AC в точке J. Серединный перпендикуляр к отрезку OA пересекает Γ в точках E и F. Докажите, что точка J – центр вписанной окружности треугольника CEF.

(Ю.Корея)

3. Найдите все пары натуральных чисел $m, n \ge 3$, для которых существует бесконечно много натуральных чисел a таких, что число
$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$
целое.

(Румыния)

4. Дано натуральное число n, большее 1. Обозначим через $d_1, d_2, \ldots, d_k$ все его делители так, что
$$1 = d_1 < d_2 < \ldots < d = n .$$
Пусть $D = d_1d_2 + d_2d_3 + \ldots d_{k-1}d_k$.

а) Докажите, что $D < n^2$.

б) Найдите все n, для которых D – делитель числа n^2.

(Румыния)

5. Найдите все функции f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ такие, что
$$\left(f(x) + f(z)\right)\left(f(y) + f(t)\right) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$
для всех действительных x, y, z, t.

(Индия)

6. На плоскости расположены окружности $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$, радиуса 1 каждая, с центрами $O_1, O_2, \ldots, O_n$ соответственно; $n \ge 3$. Известно, что любая прямая плоскости имеет общие точки не более чем с двумя из этих окружностей. Докажите, что
$$\sum_{1 \le i < j \le n} \frac{1}{O_iO_j} \le \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

(Украина)

Решения задач

1 (О.Стырт). Занумеруем точки множества T: $(i; j)$, где i – номер столбца, j – номер строки, $i \ge 0$, $j \ge 0$, $i + j < n$, т.е. $i + j \le n - 1$. Будем также считать точки $(i; -1)$ и $(-1; j)$ красными. Пусть m_i – число синих точек в i-м столбце. Тогда количество X-множеств равно произведению $P = \prod_{i=0}^{n-1} m_i$. Выберем некоторое $i_0 \in \{0, \ldots n-1\}$. Если $m_{i_0} = 0$, то все точки i_0-го столбца красные. Пусть $m_{i_0} > 0$. Рассмотрим наименьшее j_0 такое, что $(i_0; j_0)$ – синяя точка. Тогда, из определения, точка $(i_0; j)$ синяя, т.е. $j \ge j_0$. Также $i_0 + j \le n - 1$, т.е. $m_{i_0} = n - i_0 - j_0$.

Посмотрим, сколько раз число k, $1 \le k \le n$, встречается среди чисел m_i в произведении P. Это количество равно числу пар $\{i; j\}$ таких, что $i \ge 0$, $j \ge 0$, $i + j = n - k$, и при этом точка $(i; j)$ синяя, а точка $(i; j - 1)$ красная. С другой стороны, из определения множества T точки $(i; j)$ и $(i; j - 1)$ либо одноцветны, либо $(i; j)$ синяя, а $(i; j - 1)$ красная. Значит, разность между числом синих точек $(i_0; j)$ и числом синих точек $(i_0; j-1)$ как раз равна числу пар $(i_0; j)$ таких, что $(i_0; j)$ синяя, а $(i_0; j-1)$ красная точка.

Итак, любое ненулевое число k встречается в произведении P ровно столько раз, какова разность между числом синих точек $(i; j)$, для которых $i + j = n - k$, и числом синих точек, для которых $i + j = n - k - 1$. Из симметрии этого выражения относительно i и j следует, что ненулевое k входит в произведение P ровно столько раз, сколько раз оно входит в произведение $Q = \prod_{j=0}^{n-1} l_j$, где l_j – количество синих точек в j-й строке, задающее количество Y-множеств.

Если же в P входит хотя бы один нулевой множитель, т.е. если $m_{i_0} = 0$ для некоторого i_0, то все точки $(i_0; j)$, в том числе и $(i_0; j_0)$, где $i_0 + j_0 = n - 1$, красные. Это означает, что $l_{j_0} = 0$. Итак, либо P и Q одновременно равны нулю, либо являются произведением одинаковых наборов множителей.

Утверждение доказано.

2 (А.Бадзян). Из условия (рис.1) следует, что $OF = FA$, $OE = EA$, кроме того, $OF = OA = OE = R$, где R – радиус окружности Γ. Значит, ΔOFA и ΔOEA – правильные. Отсюда $\angle AOE = 60^\circ$, $\angle AOF = 60^\circ$, следовательно, точка E

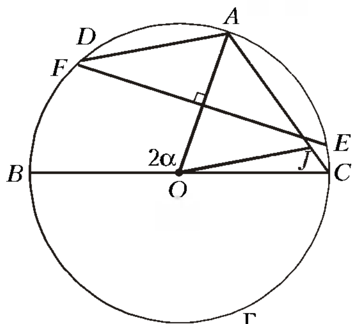


Рис. 1

лежит на дуге AC, не содержащей точки B, так как $\angle AOB < 120^\circ$. Далее, $\angle ECA = \frac{1}{2} \cup EA = \frac{1}{2}\angle AOE = 30^\circ$, $\angle ACF = \frac{1}{2} \cup AF = \frac{1}{2}\angle AOF = 30^\circ$, т.е. CA – биссектриса угла ECF.

Пусть $\angle AOB = 2\alpha$, тогда $\angle OAC = \frac{1}{2}\angle AOB = \alpha$; $\angle AOJ = \angle DAO$, так как $OJ \parallel DA$. Но из ΔDOA имеем $\angle DAO = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \angle DOA\right) = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \alpha\right) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Поэтому из ΔAOJ имеем

$$\angle AJO = 180^\circ - \angle OAJ - \angle AOJ = 180^\circ - \alpha - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \angle AOJ.$$

Значит, $AJ = AO = R$, откуда $AE = AF = AJ$. Кроме того, точка J лежит на отрезке AC ($0 < 90^\circ - \frac{\alpha}{2} < 180^\circ - 2\alpha$). Таким образом, точка J однозначно определена условиями $J \in AC$, $AJ = AE$, поэтому осталось доказать, что J совпадает с точкой T – центром вписанной окружности ΔFEC. Имеем:

$$\angle FET = \frac{1}{2}\angle FEC,$$

$$\angle AEF = \frac{1}{2}\angle ECF \Rightarrow \angle AET = \frac{1}{2}\left(\angle ECF + \angle FEC\right) = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \angle EFC\right) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle EAT \Rightarrow \angle ATE = 180^\circ - \angle AET - \angle EAT = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle EAT = \angle AET.$$

Отсюда $AT = AE$, и, значит, точка J совпадает с точкой T. Утверждение доказано.

3 (А.Халявин). Обозначим $P(x) = x^n + x^2 - 1$, $Q(x) = x^m + x - 1$. Если $m \le n$, то при $a > 1$ имеем $0 < a^m + a - 1 < a^n + a^2 - 1$ и, значит, число $\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$ не целое. Поэтому $m > n$. Коэффициенты многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ – целые, и старший коэффициент у $P(x)$ равен 1, поэтому $Q(x) = R_1(x) \cdot P(x) + R_2(x)$, где $\deg R_2 < n = \deg P$ ($\deg f$ – степень многочлена f), и многочлены $R_1(x)$ и $R_2(x)$ имеют целочисленные коэффициенты. Далее, из равенства $\frac{Q(a)}{P(a)} = R_1(a) + \frac{R_2(a)}{P(a)}$ следует, что $\frac{Q(a)}{P(a)} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \frac{R_2(a)}{P(a)} \in \mathbf{Z}$. Но, так как степень многочлена R_2 меньше степени многочлена P, можно выбрать такое N, что $\left|R_2(a)\right| < P(a)$ при всех $a > N$. Если $R_2 \not\equiv 0$, то многочлен R_2 имеет конечное число корней, поэтому можно выбрать $M \ge N$ такое, что $R_2(a) \ne 0$ при $a > M$. Но тогда при $a > M$ число $\frac{R_2(a)}{P(a)} \in (-1; 0) \cup (0; 1)$ не является целым, что противоречит условию. Значит, $R_2 \equiv 0$. Поэтому нам нужно найти такие m и n, что многочлен $Q(x)$ делится на многочлен $P(x)$.

Если $Q(x) \vdots P(x)$, то любой корень многочлена $P(x)$ является корнем многочлена $Q(x)$. Но $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^n + x^2 = 1$. На отрезке [0; 1] функция $f(x) = x^n + x^2$ является возрастающей, $f(0) = 0$, $f(1) = 2 > 1$. Значит, $c^n + c^2 = 1$ при некотором $c \in (0; 1)$. Тогда $Q(c) = 0 \Rightarrow c^m + c = 1$. Но $c + c^{n+1} > c^2 + c^n$ при любом $c \in (0; 1)$, так как

$$c + c^{n+1} - c^2 - c^n = c\left(1 - c - c^{n-1} + c^n\right) = c(1-c)\left(1 - c^{n-1}\right) > 0.$$

Значит, $m \ne n + 1 \Rightarrow m \ge n + 2$. Тогда $m \ge 5$ при $n = 3$. Если $m = 5$, то $x^5 + x - 1 = \left(x^3 + x^2 - 1\right)\left(x^2 - x + 1\right)$, т.е. пара $n = 3$, $m = 5$ подходит. При $m \ge 6$ получаем $c^6 + c < c^5 + c = 1$ ($c^5 + c = c^3 + c^2 = 1$), значит, пары $n = 3$, $m \ge 6$ не подходят.

Пусть теперь $n \ge 4$. Если n четно, то $P(c) = 0 \Rightarrow P(-c) = 0$, поэтому $Q(c) = Q(-c) = 0$, т.е. $c^m + c = 1$ и $(-c)^m - c = 1$. Это невозможно при нечетном m: $(-c)^m - c = -\left(c^m + c\right) = -1$. А при четном m получаем $c^m + c = 1$ и $c^m - c = 1 \Rightarrow c = 0$ – противоречие. Значит, n нечетно, т.е. $n \ge 5$.

Покажем теперь, что $m < 2n$. Пусть $c = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon \in (0; 1)$. Тогда $c^2 = 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2$, $c^n = 1 - c^2 = 2\varepsilon - \varepsilon^2$, $c^m = 1 - c = \varepsilon$. Если $m \ge 2n$, то

$$\varepsilon = 1 - c = c^m \le c^{2n} = \left(2\varepsilon - \varepsilon^2\right)^2 \Leftrightarrow \varepsilon \le \varepsilon^2(2 - \varepsilon)^2 \Leftrightarrow 1 \le \varepsilon(2 - \varepsilon)^2 < 4\varepsilon \le 1,$$

если $\varepsilon \le \frac{1}{4}$. Значит, $\varepsilon > \frac{1}{4}$, но тогда

$$c < \frac{3}{4} \Rightarrow c^n + c^2 \le c^5 + c^2 \le \left(\frac{3}{4}\right)^5 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 < \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64} + \frac{9}{16} = \frac{63}{64} < 1$$

– противоречие.

Следовательно, $m < 2n$, т.е. $m = n + k$, где $2 \le k \le n - 1$. Тогда

$$x^m + x - 1 = x^n x^k + x - 1 = x^k\left(x^n + x^2 - 1\right) + (1 - x)\left(x^k(1 + x) - 1\right).$$

Поэтому из делимости $Q(x)$ на $P(x)$ следует, что $(1 - x)\left(x^k(1 + x) - 1\right) \vdots \left(x^n + x^2 - 1\right)$. Но многочлены $1 - x$ и $x^n + x^2 - 1$ взаимно просты, так как 1 не является корнем многочлена $x^n + x^2 - 1$. Значит, $x^k(1 + x) - 1 \vdots x^n + x^2 - 1$, откуда $\deg\left(x^k(1 + x) - 1\right) \ge \deg\left(x^n + x^2 - 1\right)$, т.е. $k + 1 \ge n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k \geq n-1$. Но $k \leq n-1$, значит, $k = n-1$. Получаем

$$x^{n-1}(1+x) - 1 \vdots x^n + x^2 - 1 \Leftrightarrow x^n + x^{n-1} - 1 \vdots x^n + x^2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^{n-1} - x^2 \vdots x^n + x^2 - 1,$$

т.е. $n-1=2$, $n=3$. Противоречие.

Значит, $n=3$, $m=5$ – единственная подходящая пара.

4 (К.Сухов). Из равенства $\frac{n}{d_i} = d_{k+1-i}$ следует, что

$$D = d_1d_2 + d_2d_3 + \ldots + d_{k-1}d_k = \frac{n^2}{d_kd_{k-1}} + \ldots + \frac{n^2}{d_2d_1} =$$

$$= n^2\left(\frac{1}{d_1d_2} + \frac{1}{d_2d_3} + \ldots + \frac{1}{d_{k-1}d_k}\right).$$

а) Докажем, что

$$\frac{1}{d_1d_2} + \ldots + \frac{1}{d_{k-1}d_k} < 1,$$

откуда и будет следовать неравенство $D < n^2$. Действительно, $d_i \geq d_{i-1} + 1 \Rightarrow d_i \geq i$, $i = 1, \ldots, k$, поэтому

$$\frac{1}{d_1d_2} + \ldots + \frac{1}{d_{k-1}d_k} \leq$$

$$\leq \frac{1}{d_1(d_1+1)} + \frac{1}{d_2(d_2+1)} + \ldots + \frac{1}{d_{k-1}(d_{k-1}+1)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(k-1)k} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{k} < 1.$$

б) Если D – делитель n^2, то $\frac{n^2}{D} = m$, где $m \in \boldsymbol{N}$. Значит,

$$\frac{1}{d_1d_2} + \ldots + \frac{1}{d_{k-1}d_k} = \frac{1}{m}.$$

Предположим, что $k > 2$, тогда $\frac{1}{m} > \frac{1}{d_1d_2} = \frac{1}{d_2}$, значит, $m < d_2$. Но из а) следует, что $m > 1$, поэтому m содержит простой делитель p, т.е. $p \leq m < d_2$ и $n^2 \vdots m \vdots p \Rightarrow n \vdots p \Rightarrow \Rightarrow d_2 \leq p$. Но $d_2 > m \geq p$ – противоречие.

Итак, $k \leq 2$, но $n > 1$, значит, $k = 2$, т.е. n – простое ($d_1 = 1, d_2 = n$). Проверкой убеждаемся в том, что любое простое n подходит: $D = 1\cdot n = n$ и $n^2 \vdots n$.

Ответ: n – простое число.

5 (М.Дубашинский). *Ответ:* 1) $f(x) \equiv 0$, 2) $f(x) \equiv \frac{1}{2}$, 3) $f(x) \equiv x^2$.

Подставим в данное равенство

$$\left(f(x) + f(z)\right)\left(f(y) + f(t)\right) = f(xy - zt) + f(xt + yz) \quad (1)$$

$x = y = z = t = 0$. Имеем: $4f^2(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$ или $f(0) = \frac{1}{2}$.

Пусть $f(0) = \frac{1}{2}$. Подставим в (1) $y = t = 0$, $x = z = a \in \boldsymbol{R}$. Имеем: $2f(a) = 1$, т.е. $f(a) = \frac{1}{2}$ при всех $a \in \boldsymbol{R}$. Функция $f(x) \equiv \frac{1}{2}$ – один из ответов.

Пусть теперь $f(0) = 0$. Подставим в (1) $z = t = 0$. Имеем: $f(x)f(y) = f(xy)$, т.е. функция f мультипликативна. Тогда из (1) получаем

$$f(xy) + f(yz) + f(xt) + f(zt) = f(xy - zt) + f(xt + yz). \quad (2)$$

Сделав в (2) замены $x \leftrightarrow z$, $y \leftrightarrow t$, получим

$$f(zt) + f(xt) + f(yz) + f(xy) = f(zt - xy) + f(yz + xt). \quad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), получаем $f(xy - zt) = f(zt - xy)$. Но в виде $xy - zt = a$ можно представить любое число $a \in \boldsymbol{R}$ ($x = a$, $y = 1$, $z = 0$). Итак, $f(a) = f(-a)$, т.е. f четна.

Далее, из мультипликативности f имеем $f\left(x^2\right) = f^2(x) \geq 0$. Но в виде $a = x^2$ можно представить любое неотрицательное число a. Значит, $f(a) \geq 0$ при $a \geq 0$. Но $f(-a) = f(a) \Rightarrow \Rightarrow f(x) \geq 0$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$.

Теперь подставим в (2) $x = a$, $y = \sqrt{\frac{b}{a}}$, $z = \sqrt{ab}$, $t = 1$, где $a > 0$, $b \geq 0$. Тогда $xy = zt = \sqrt{ab}$, $xt = a$, $yz = b$ и мы получаем

$$f(a) + f(b) + 2f\left(\sqrt{ab}\right) = f(0) + f(a+b) = f(a+b),$$

так как $f(0) = 0$.

Последнее равенство, с учетом $f(a) = \left(f\left(\sqrt{a}\right)\right)^2$, $f(b) = \left(f\left(\sqrt{b}\right)\right)^2$, $f\left(\sqrt{ab}\right) = f\left(\sqrt{a}\right)\cdot f\left(\sqrt{b}\right)$, дает

$$\left(f\left(\sqrt{a}\right) + f\left(\sqrt{b}\right)\right)^2 = f(a+b),$$

т.е., в силу неотрицательности f,

$$f\left(\sqrt{a}\right) + f\left(\sqrt{b}\right) = \sqrt{f(a+b)}.$$

Отсюда

$$\sqrt{f(a)} + \sqrt{f(b)} = \sqrt{f(a+b)},$$

так как

$$\left(\sqrt{f(a)}\right)^2 = f(a) = \left(f\left(\sqrt{a}\right)\right)^2.$$

Пусть $g(x) = \sqrt{f(x)}$, $x \geq 0$. Тогда $g(a) + g(b) = g(a+b)$, т.е. функция g аддитивна. С другой стороны, $g(xy) = \sqrt{f(xy)} = \sqrt{f(x)f(y)} = \sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{f(y)} = g(x)g(y)$, т.е. g мультипликативна. Таким образом, g аддитивна и мультипликативна. Выведем из этого, что либо $g \equiv 0$, либо $g(x) \equiv x$.

Итак, функция g удовлетворяет равенствам

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \quad (4)$$

$$g(xy) = g(x)g(y). \quad (5)$$

Подставим в (5) $x = y = 1$. Имеем: $g(1) = g^2(1) \Rightarrow g(1) = 1$ или $g(1) = 0$.

Если $g(1) = 0$, то $g(x) = g(x\cdot 1) = g(x)\cdot g(1) = 0 \Rightarrow g(x) \equiv \equiv 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$.

Если $g(1) = 1$, то из (4) $g(m) = mg(1) = m$ при любом $m \in \boldsymbol{N}$. Кроме того,

$$m = g\left(n\cdot\frac{m}{n}\right) = ng\left(\frac{m}{n}\right) \Rightarrow g\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n},$$

т.е. $g(r) = r$ для любого $r \in \boldsymbol{Q}_+$.

Из (4) и неотрицательности $g(y)$ при $y \geq 0$ следует монотонность g ($g(x)$ возрастает). Но $g(x) = x$ при $r \in \boldsymbol{Q}_+$. Значит, $g(x) \equiv x$ при $x \geq 0$. Действительно, пусть $g(x) \neq x$ при некотором $x > 0$. Возьмем число $r \in \boldsymbol{Q}_+$ между x и $g(x)$. Тогда $g(r) = r$, а пары $(r; x)$ и $\left(g(r); g(x)\right)$ упорядочены поразному, что противоречит монотонности g.

Итак, если $g(1) = 1$, то $g(x) \equiv x$ при $x \geq 0$. Отсюда $f(x) \equiv x^2$ при $x \geq 0$. Но $f(x)$ – четная функция, следовательно, $f(x) = x^2$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$.

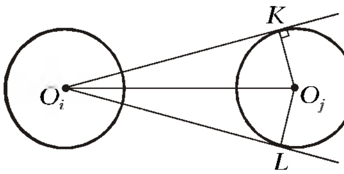


Рис. 2

6 (О.Гольберг). Заметим, что окружности не пересекаются и (поскольку $\sin x < x$ при $x > 0$) $\frac{1}{O_iO_j}$ меньше радианной меры угла KO_iO_j (рис.2), где O_iK и O_iL – касательные к окружности Γ_j.

Будем обозначать через V_{ij} угол KO_iL, через W_{ij} – объединение V_{ij} с вертикальным ему углом, через $\Phi(V_{ij})$ – радианную меру угла V_{ij}. $\Phi(W_{ij}) = 2\Phi(V_{ij})$. Тогда $\frac{1}{O_iO_j} <$ $< \frac{1}{O_iO_j} < \frac{1}{2}\Phi(V_{ij}) = \frac{1}{4}\Phi(W_{ij})$.

Рассмотрим выпуклую оболочку центров данных окружностей. При этом три центра не могут лежать на одной прямой, так как в противном случае проходящая через них прямая пересекает три окружности. Следовательно, в выпуклой оболочке k вершин, где $k \ge 3$. Обозначим через $P_1, P_2, \ldots, P_k$ вершины выпуклой оболочки по порядку, например, по часовой стрелке, $Q_{k+1}, \ldots, Q_n$ – вершины, не вошедшие в выпуклую оболочку. Пусть $R = \{1, \ldots, k\}$, $S = \{k+1, \ldots, n\}$.

Предположим, что S не пусто, т.е. $k < n$. Выберем произвольно $l \in S$. Углы W_{lj}, $j \ne l$, пересекаются только в вершине Q_l, так как в противном случае прямая, проходящая через Q_l и общую точку этих углов, пересекает три окружности. Поэтому

$$\sum_{j\ne l}\Phi(W_{lj}) < 2\pi \Rightarrow \sum_{j\ne l}\frac{1}{O_lO_j} < \frac{1}{4}\sum_{j\ne l}\Phi(W_{lj}) < \frac{\pi}{2}.$$

Сложив эти неравенства по всем $l \in S$, получим

$$2\sum_{i\ne j;\ i,j\in S}\frac{1}{O_iO_j} + \sum_{i\in S,\ j\in R}\frac{1}{O_iP_j} < (n-k)\frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

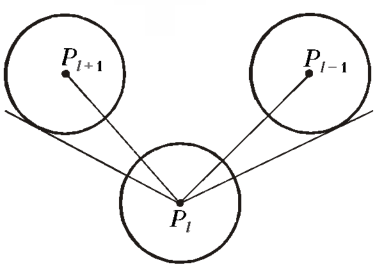


Рис. 3

Выберем теперь произвольно $l \in R$. Рассмотрим углы V_{lj}, $j \ne l$. Они все лежат в угле, образованном касательными из P_l к окружностям с центрами P_{l-1} и P_{l+1} (здесь и далее $P_0 = P_k$, $P_{k+1} = P_1$), лежащими вне выпуклой оболочки (рис.3). Поэтому если обозначить углы $P_{l-1}P_lP_{l+1}$, $l \in R$, через α_l, то

$$\sum_{j\ne l}\Phi(V_{lj}) \le \alpha_l + \frac{1}{2}\Phi(V_{l(l-1)}) + \Phi(V_{l(l+1)}).$$

Отсюда

$$\sum_{j\ne l-1,l,l+1}\Phi(V_{lj}) + \frac{1}{2}\Phi(V_{l(l-1)}) + \Phi(V_{l(l+1)}) \le \alpha_l.$$

Сложив эти неравенства по всем $l \in R$ и воспользовавшись равенством

$$\sum_{l=1}^{k}\alpha_l = \pi(k-2),$$

получаем

$$\sum_{l\in R}\Phi(V_{l(l+1)}) + 2\sum_{m\ne l\pm1;\ m,l\in R}\Phi(V_{lm}) + \sum_{l\in R,\ t\in S}\Phi(V_{lt}) \le \pi(k-2).$$

Но $\frac{2}{O_iO_j} < \Phi(V_{ij})$, значит,

$$\sum_{l\in R}\frac{1}{P_lP_{l+1}} + 2\sum_{m\ne l\pm1;\ m,l\in R}\frac{1}{P_lP_m} + \sum_{l\in R,\ t\in S}\frac{1}{P_lQ_t} < \frac{\pi(k-2)}{2}. \qquad (2)$$

Оценим первую из сумм. Проведем общие внутренние касательные к окружностям с центрами P_{l-1}, P_l, P_{l+1}, как показано на рисунке 4. Пусть они пересекаются в точке W и пересекают отрезки P_lP_{l-1} и P_lP_{l+1} в точках V и U соответственно. Тогда $\angle UWV < \pi$, так как если $\angle UWV \ge \pi$, то найдется прямая, пересекающая все три окружности с центрами P_{l-1}, P_l и P_{l+1} (рис.5). Итак, получаем, что

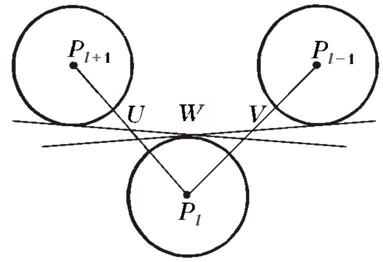


Рис. 4

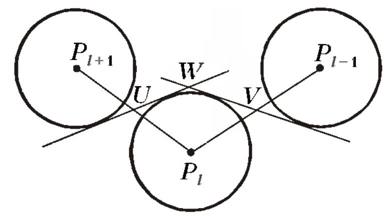


Рис. 5

$$\angle WVP_l + \angle P_lUW + \alpha_l < \pi,$$

т.е.

$$\angle WVP_l + \angle WUP_l < \pi - \alpha_l.$$

Из равенства радиусов окружностей следует, что V – середина отрезка P_lP_{l-1}, поэтому

$$\sin\angle WVP_l = \frac{2}{P_lP_{l-1}} \Rightarrow \frac{1}{P_lP_{l-1}} = \frac{\sin\angle WVP_l}{2} < \frac{\angle WVP_l}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P_lP_{l-1}} + \frac{1}{P_lP_{l+1}} \le \frac{\angle WVP_l}{2} + \frac{\angle WUP_l}{2} < \frac{\pi - \alpha_l}{2}.$$

Сложив эти неравенства по всем $l \in R$, получаем

$$2\sum_{l\in R}\frac{1}{P_lP_{l-1}} < \sum_{l\in R}\frac{\pi-\alpha_l}{2} = \pi, \text{ так как } \sum_{l=1}^{k}\alpha_l = (k-2)\pi.$$

Итак,

$$\sum_{l\in R}\frac{1}{P_lP_{l-1}} \le \frac{\pi}{2}. \qquad (3)$$

Сложив неравенства (1), (2) и (3), получаем

$$2\sum_{i\ne j;\ i,j\in S}\frac{1}{Q_iQ_j} + 2\sum_{i\in S,\ j\in R}\frac{1}{Q_iP_j} + 2\sum_{j\ne i\pm1;\ i,j\in R}\frac{1}{P_iP_j} + 2\sum_{i\in R}\frac{1}{P_iP_{i-1}} \le$$

$$\le \frac{\pi}{2} + \frac{\pi(k-2)}{2} + \frac{\pi(n-k)}{2} = \frac{\pi}{2}(n-1).$$

Но сумма в левой части есть $2\sum_{i\ne j}\frac{1}{O_iO_j}$, поэтому $\sum_{i\ne j}\frac{1}{O_iO_j} \le \frac{\pi}{4}(n-1)$, что и требовалось доказать.

Публикацию подготовили
Н.Агаханов, Д.Терёшин

XXXIII Международная физическая олимпиада

Очередная международная физическая олимпиада школьников проходила с 21 по 30 июля 2002 года в Индонезии, на острове Бали. В олимпиаде приняли участие 296 школьников из 67 стран мира (команды Соединенных Штатов Америки и Израиля пропустили эту олимпиаду по не зависящим от школьников причинам).

Подготовка сборной команды России проводилась но базе Московского физико-технического института. С ребятами работали многие преподаватели кафедры общей физики и студенты Физтеха – победители международных олимпиад прошлых лет. Команду возглавляли профессор МФТИ С.М.Козел и доцент МФТИ В.П.Слободянин. Вместе с командой на олимпиаду вылетел в качестве наблюдателя учитель физики ФМЛ 31 города Челябинска И.А.Иоголевич, ученики которого на олимпиадах 1997–2001 годов завоевали для России 4 золотые медали.

Российскую команду представляли:

Квасов Игорь – г. Дзержинск Нижегородской обл., школа 2 (учитель – Л.В.Пигалицин),

Кондратьев Андрей – г. Саратов, ФТЛ 1 (учителя – Л.В. Правдина, Е.А.Терентьев),

Михайлов Виктор – г. Саратов, ФТЛ 1 (учителя Л.В.Правдина, Е.А.Терентьев),

Постоев Андрей – г. Ейск Краснодарского кр., школа 11 (учителя – А.И.Семке, Н.Г.Черная),

Ражев Михаил – г. Дубно Московской обл., лицей «Дубна» (учителя – М.Ю.Зомятнин, Д.А.Александров, Д.В.Подлесный).

Участникам олимпиады было предложено три теоретических и два экспериментальных задания. Каждое из заданий оценивалось в 10 баллов. Таким образом, максимальное количество баллов, которое мог набрать каждый из участников олимпиады, равнялось 50.

В этом году впервые распределение наград проводилось по новой системе. По итогам предварительной проверки (до апелляции) выделялась группа (6% участников) с лучшими результатами, и нижняя граница баллов для золотых медалистов проводилась по ближайшему целому числу баллов. Аналогичным образом определялось первоначальное количество серебряных медалистов (не менее 12%), бронзовых медалистов (не менее 18%) и получивших похвальные грамоты (не менее 24%). По итогам олимпиады (после апелляции) нагрaдоми было отмечено 205 школьников: 42 – золотыми медалями, 37 – серебряными, 57 – бронзовыми и 69 – похвальными грамотами.

Наши ребята показали хорошие результаты. В теоретическом туре они набрали 80% от максимального числа баллов, а в экспериментальном – 65% и в итоге завоевали 3 золотые и 2 серебряные медали. Золотые медали получили И.Квосов (41 балл), В.Михайлов (38,5 б.) и А.Постоев (36,45 б.). Серебряными медалистами стали А.Кондратьев (35,8 б., до золотой медали ему не хватило 0,2 б.) и М.Ражев (33,95 б.).

В неофициальном командном первенстве стран-участниц олимпиады десять лучших команд распределились следующим образом:

№	Страна	Золотые медали	Серебряные медали	Бронзовые медали	Сумма баллов
1	Китай	4	1	0	195,75
2	Иран	5	0	0	190,55
3	Южная Корея	4	1	0	185,90
4	Россия	3	2	0	185,25
5	Венгрия	3	1	1	182,55
6	Индонезия	3	1	1	180,80
7	Индия	1	4	0	176,70
8	Тайвань	3	1	1	173,05
9	Румыния	0	5	0	170,60
10	Грузия	2	2	1	167,58

Несмотря на неплохие результаты команд Белоруссии (147 баллов) и Украины (138 баллов), они оказались далеко за пределами лидирующей десятки.

Успешное выступление школьников на международных олимпиадах для большинства стран из перечисленной группы лидеров стало приоритетной государственной задачей. Следует отметить, что в последние годы состав лидирующей группы практически не меняется, а конкуренция между командами становится все более острой. Об этом свидетельствует весьма плотное расположение команд друг зо другом. Максимальный разрыв между ними не превышает 5 баллов, и часто решающим фактором в борьбе за лидерство становится аккуратная запись результатов, четко выполненный рисунок, грамотно оцененное число измерений в экспериментальной задаче.

Содержание теоретических заданий (и ответов к ним) приведено ниже. Здесь же заметим, что формулировко условия каждого из них занимала 2 страницы мошинописного текста, а решение третьего задания оказалась столь громоздким, что сами авторы допустили в нем ошибки (их обнаружил наш наблюдатель И.А.Иоголевич). Примерно такой же объем приходился на каждое экспериментальное задание. Интересно, что оба экспериментальных задания можно было выполнять одновременно. Приведем их краткое описание.

В задаче 1 экспериментального тура участником олимпиады предлагалось определить отношение заряда электрона к постоянной Больцмана при помощи электролиза воды. Для решения этой задачи нужно было собирать в пробирку выделяющийся на одном из электродов водород. Искомое отношение можно было определить, измерив электрический заряд, прошедший по цепи, и объем газа в пробирке. Дополнительная трудность заключалась в том, что цена деления шкалы на пробирке была неизвестна (в оборудовании также не было линейки, но был дан секундомер). Для определения цены деления нужно было собрать математический маятник и, измерив период его колебаний при различной длине подвеса, проградуировать использовавшуюся в качестве подвеса тонкую проволоку. Для получения максимальной оценки за решение этой задачи требовалось аккуратно нарисовать схемы экспериментальных установок («математический маятник» и «электролиз воды»); перечислить все приближения в модели матемотического маятника; выполнить не менее 4 измерений в каждой части задачи; вывести формулу для вычисления искомого отношения по результатам измерений; выбрать оптимальное значение силы тока в процессе электролиза; по данным измерений построить графики, подтверждающие качество измерений (их согласие с используемыми теоретическими закономерностями); оценить погрешность измерений.

В задаче 2 экспериментального тура требовалось раскрыть тайну оптического «черного ящика». Для этого нужно было определить, какие 3 элемента из предложенного в условии *задачи списка находятся в «черном ящике»; указать, как эти элементы расположены; определить характеристики элементов. В качестве источника света использовалась лазерная указка. Эта задача оказалась самой интересной и в то же время самой трудной для участников олимпиады. В «черном ящике» находились две дифракционные решетки, причем щели решеток были ориентированы перпендикулярно друг другу и оси «черного ящика». А между решетками располагалась наклоненная к оси «черного ящика» плоскопараллельная пластинка. Искомыми характеристиками элементов являлись периоды дифракционных решеток, толщина пластинки и угол ее наклона.*

Теоретический тур

Задача 1. Подземный радар

Подземный радар используется для обнаружения и определения местоположения объектов под земной поверхностью путем излучения электромагнитных волн в землю и регистрации волн, отраженных от этих объектов. Антенна и детектор располагаются непосредственно на земле и практически в одном и том же месте.

Линейно поляризованная плоская электромагнитная волна с круговой частотой ω распространяется в направлении z и описывается следующим выражением для напряженности электрического поля:

$$E = E_0 e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z), \qquad (1)$$

где E_0 – постоянная величина, α – коэффициент затухания и β – волновое число, для которых справедливы формулы

$$\alpha = \omega\left(\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\left(1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}\right)^{1/2} - 1\right)\right)^{1/2},$$
$$\beta = \omega\left(\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\left(1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}\right)^{1/2} + 1\right)\right)^{1/2} \qquad (2)$$

Здесь μ, ε и σ – абсолютная магнитная проницаемость, абсолютная диэлектрическая проницаемость и электрическая проводимость соответственно ($\mu = \mu_r\mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$, μ_r – относительная магнитная проницаемость, ε_r – относительная диэлектрическая проницаемость).

Отраженный сигнал не регистрируется, если амплитуда радарного сигнала, достигающего объекта, уменьшается в e раз ($\approx 37\%$) от своего начального значения. В данном радаре обычно используются электромагнитные волны с различными частотами в диапазоне от 10 МГц до 1000 МГц.

Качество работы радара зависит от его разрешения. Разрешение определяется минимальным расстоянием между двумя объектами, которые еще можно различить радаром. Минимальное расстояние соответствует минимальной разности фаз в 180° между двумя отраженными волнами, принятыми детектором.

Далее предполагайте, что земля является немагнитной средой (т.е. $\mu = \mu_0$), удовлетворяющей условию $\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2 \ll 1$. Используйте следующие значения констант: $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м и $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Вопросы:

1) Выведите выражение для скорости распространения сигнала v через μ и ε, используя уравнения (1) и (2). (1 б.)

2) Определите максимальную глубину обнаружения объекта в земле, если земля имеет электрическую проводимость $\sigma = 10^{-3}$ Ом$^{-1}\cdot$м$^{-1}$ и абсолютную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon = 9\varepsilon_0$. (2 б.)

3) Рассмотрите два параллельных проводящих стержня, закопанных в землю горизонтально на глубине 4 м. Земля имеет электрическую проводимость $\sigma = 10^{-3}$ Ом$^{-1}\cdot$м$^{-1}$ и диэлектрическую проницаемость $\varepsilon = 9\varepsilon_0$. Считайте, что радар находится над одним из стержней, а детектор точечный. Определите минимальную частоту, необходимую, чтобы получить боковое (по отношению к стержням) разрешение в 50 см. (3,5 б.)

4) Для определения глубины d отдельного стержня, закопанного в той же земле, рассмотрим результаты измерений, проведенных при перемещении радара вдоль линии, перпендикулярной стержню. Результаты качественно показаны на рисунке 1. Выведите выражение для времени t как функции x и определите величину d. (3,5 б.)

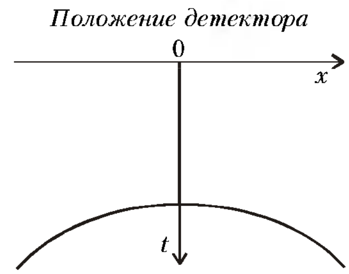


Рис.1. График зависимости времени t прохождения сигнала до объекта и обратно до детектора от координаты x детектора; $t_{\min} = 100$ *нс*

Задача 2. Детектирование электрических сигналов

Некоторые морские животные способны обнаруживать другие существа на расстоянии благодаря электрическим токам, текущим в теле этих существ в процессе дыхания или в других процессах, связанных с сокращением мышц. Некоторые хищники используют этот электрический сигнал для обнаружения своих жертв, даже когда последние прячутся в песок.

Физический механизм, лежащий в основе возникновения тока в жертве и ее обнаружения хищником, можно смоделировать, как показано на рисунке 2. Ток, генерируемый жертвой, течет между двумя расположенными в теле жертвы сферами, имеющими положительный и отрицательный потенциалы. Расстояние между центрами этих двух сфер l_1, каждая сфера имеет радиус r_1, значительно меньший, чем l_1. Удельное сопротивление морской воды ρ. Предположим, что удельное сопротивление тела жертвы такое же, как и окружающей морской воды, так что границы между телом жертвы и окружающей средой нет.

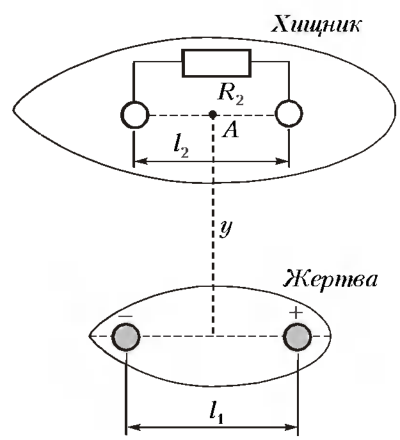


Рис. 2. Модель, описывающая прием электрического сигнала, приходящего от жертвы к хищнику

Для описания того, как хищник принимает электрический сигнал, исходящий от жертвы, смоделируем детектор в виде двух сфер в теле хищника, находящихся в контакте с окружающей морской водой и расположенных параллельно аналогичной паре сфер в теле жертвы. Сферы в теле хищника находятся на расстоянии l_2 друг от друга и имеют радиус r_2, значительно меньше l_2. Центр детектора находится на y выше жертвы, а линия, соединяющая две сферы детектора, ориентирована вдоль линий электрического поля, создаваемого жертвой. Расстояния l_1 и l_2 много меньше y. Напряженность электрического поля между сферами хищника

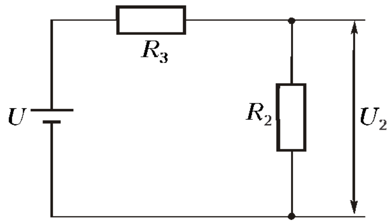


Рис.3. Замкнутый контур, включающий внутреннее сопротивление R_2 хищника и сопротивление окружающей среды R_3

можно считать постоянной по модулю.

Таким образом, хищник и окружающая его среда образуют замкнутый контур, включающий заданное внутреннее сопротивление R_2 хищника и сопротивление окружающей среды , как показано на рисунке 3. Здесь U – это напряжение между сферами детектора, обусловленное электрическим полем жертвы (в отсутствие R_2), U_2 – это напряжение между сферами с учетом внутреннего сопротивления хищника.

Вопросы:

1) Определите вектор плотности тока $\vec{j}$ (ток на единицу площади), обусловленный точечным источником тока I_1 на расстоянии r от него в неограниченной однородной среде. (1,5 б.)

2) Для заданной силы тока I_1, текущего между сферами жертвы в неограниченной среде, определите, опираясь на закон $\vec{E} = \rho\vec{j}$, напряженность электрического поля в середине между сферами детектора (точка A на рисунке 2). (2 б.)

3) Определите для той же силы тока I_1 напряжение U_1 между сферами в жертве. (1,5 б.)

Определите сопротивление R_1 между этими сферами. (0,5 б.)

Определите также мощность P_1, выделяющуюся при этом в окружающей среде. (0,5 б.)

4) Определите сопротивление среды R_3 между сферами хищника. (0,5 б.)

Определите напряжение U_2 между этими сферами. (1 б.)

Получите выражение для мощности P_2, передаваемой от жертвы к хищнику. (0,5 б.)

5) Определите оптимальное значение R_2, при котором детектируемая мощность P_2 максимальна. (1,5 б.)

Определите также эту максимальную мощность. (0,5 б.)

Задача 3. Тяжелая тележка, движущаяся по наклонной дороге

На рисунке 4 изображена упрощенная модель массивной тележки с одним передним и одним задним цилиндром в качестве колес на наклонной дороге, угол наклона которой θ. Каждый цилиндр имеет массу M и состоит из цилиндрического слоя с внешним радиусом R и внутренним радиусом $0{,}8R$ и нескольких спиц, суммарная масса которых $0{,}2M$. Схематическое изображение цилиндров показано на рисунке 5. Массой стержней, поддерживающих платформу тележки, можно пренебречь. Тележка движется вниз под действием сил тяжести и трения. Передняя и задняя части тележки симметричны. Статический и кинетический коэффициенты трения (коэффициенты трения покоя и трения скольжения) между цилиндрами и дорогой равны μ_1 и μ_2 соответственно. Однородная платформа тележки имеет массу $5M$, длину L и толщину d. Расстояние между осями переднего и заднего цилиндров $2l$, а расстояние от центра каждого цилиндра до нижней части тележки h. Трением качения и трением в осях цилиндров пренебречь.

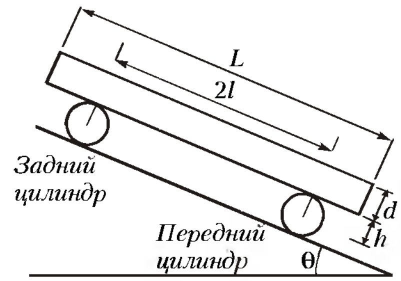


Рис.4. Упрощенная модель массивной тележки, движущейся по наклонной дороге

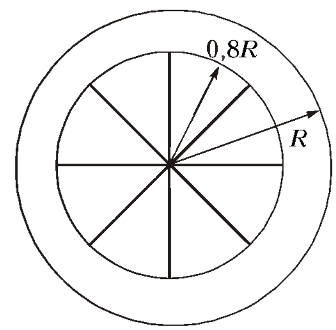


Рис.5. Упрощенная модель цилиндров

Вопросы:

1) Вычислите момент инерции каждого цилиндра. (1,5 б.)

2) Изобразите все силы, действующие на платформу тележки, на ее передний и задний цилиндры. Запишите уравнения движения каждой части тележки. (2,5 б.)

3) Считая, что тележка начинает двигаться из состояния покоя под действием силы тяжести, установите все возможные типы движения системы и найдите ее ускорения во всех этих случаях. Выразите ускорения через физические параметры, заданные в условии задачи. (4 б.)

4) Начав двигаться из состояния покоя, тележка прошла путь s_0, двигаясь без проскальзывания, а затем попала на участок дороги, на котором статический и кинетический коэффициенты трения уменьшаются до величин μ_1' и μ_2', так что дальше оба цилиндра начинают проскальзывать. Вычислите линейную скорость тележки и угловые скорости вращения цилиндров после того, как тележка прошла полный путь s. Считайте, что величины s_0 и s значительно больше размеров тележки. (2 б.)

Публикацию подготовили
С.Козел, В.Слободянин, И.Иоголевич

XI Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» в рамках международной программы «Дети. Интеллект. Творчество» провел традиционную олимпиаду «Интеллектуальный марафон» (ИМ-2002) на территории северной части Греции с 9 по 16 октября 2002 года. На олимпиаду были приглашены школьники, достигшие значительных результатов в изучении математики и физики, из региональных центров МИК «Глюон», а также стран ближнего и дальнего зарубежья.

Участники олимпиады соревновались по трем направлениям: история научных идей и открытий (командный тур), матемотика (индивидуальный и командные туры), физика (индивидуальный и командные туры).

Олимпиада проводилась при спонсорской поддержке российских компаний «Кирилл и Мефодий», «Физикон», «1С», «Начало координат», а также при информационной поддержке журнала «Квант» и Издательского домо «Первое сентября». Генеральным *спонсором олимпиады выступило компания «Кирилл и Мефодий», которая обеспечила российских участников единой олимпийской формой, призами и наградами. Большую помощь в размещении участников и проведении культурно-экскурсионной части олимпиады оказали Туристический клуб «Вояж» (Россия) и компания «Ambotis tours» (Греция).*

После церемонии открытия, где по традиции участники рассказывали о себе и своих оброзовательных центрах, состоялись соревнования по истории научных идей и открытий. Победителем в них стала команда Классического лицея 1 при Ростовском государственном университете(руководитель Крыштоп В.Г.), второе и третье место заняли команды лицея 60 из Уфы (руководитель Ускова Н.Н.) и Российско-Норвежской школы (Москва). В командном соревновании по физике и математике первенствовали: команда Физико-технического лицея 1 (Саратов, руководитель Козырева Н.А.) – 1 место, команда Классического лицея 1 при РГУ – 2 место и команда лицея 1511 при Московском инженерно-физическом институте (руководитель Альминдеров В.В.) – 3 место.

Напряженная борьба сложилась и в индивидуальном первенстве. В личном зачете по мотематике (индивидуальный письменный тур) победителем стал Ульянов Артем (ФТЛ 1, Саратов), второе место завоевал Лепешкин Сергей (тот же лицей), а третьим стал Вороткин Никита (лицей 60, Уфа).

В индивидуальном письменном туре по физике призерами оказались: Лепешкин Сергей (ФТЛ 1, Саратов) – 1 место, Румега Юрий (Классический лицей 1 при РГУ) – 2 место, Ульянов Артем (ФТЛ 1, Саратов) – 3 место.

Всем призерам олимпиады были вручены серебряные и бронзовые медали и подарки от оргкомитета, жюри и спонсоров олимпиады.

Большую золотую медаль абсолютного победителя олимпиады «Интеллектуальный марафон-2002» завоевал Сергей Лепешкин, большую серебряную медаль олимпиады получил Артем Ульянов, а большая бронзовая медаль досталась Юрию Румеге.

Переходящий Большой кубок (Суперкубок) увезло команда Классического лицея 1 при РГУ как абсолютный победитель командных соревнований олимпиады. Второе место в общем зачете командных соревнований заняла команда Физико-технического лицея 1 из Саратова. Третьей командой в общем зачете стала команда лицея 60 из Уфы.

Дни, проведенные на олимпиаде, оставили самые хорошие воспоминания у всех участников – и детей и взрослых. Оргкомитет и жюри благодарят всех, кто помогал в подготовке и проведении олимпиады, и приглашают школы, лицеи, гимназии, центры по работе с одаренной молодежью к участию в акциях МИК «Глюон». Ближайшая акция – Международный фестиваль «Дети. интеллект. Культура» – состоится в Греции с 4 по 11 мая 2003 года.

Заявки на участие и полную информацию об акциях МИК «Глюон» можно получить по адресу: Россия, 115522 Москва, Пролетарский пр-т, д.15/6, корп. 2, Международный интеллект-клуб «Глюон».

Тел.: (095) 324-2040,
факс: (095) 396-8227,
e-mail: olga@mics.msu.su или gluon@yandex.ru

Задачи олимпиады

Письменный индивидуальный тур

МАТЕМАТИКА

1. Найдите а) количество; б) сумму цифр в десятичной записи числа

$$9\cdot 99\cdot 9999\cdot\ldots\cdot\underbrace{99\ldots9}_{2^{2002}}$$

(количество цифр в каждом числе в 2 раза больше, чем в предыдущем).

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы B и D прямые, а $AB = BC$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если расстояние от точки B до прямой AD равно h.

3. Решите уравнение

$$\left(2x^3+x-3\right)^3=3-x^3.$$

4. Может ли сумма квадратов трех последовательных натуральных чисел быть равной а) кубу натурального числа; б) сумме кубов двух последовательных натуральных чисел; в) сумме кубов $n \ge 3$ последовательных натуральных чисел?

5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AK и BL. Найдите угол A, если известно, что KL – биссектриса угла AKC.

6. Груз общей массой 36 т представляет собой несколько ящиков. Масса каждого ящика не больше 1 т. За какое наименьшее количество рейсов заведомо можно перевезти этот груз на четырехтонном грузовике?

7. При каких m и n клетчатый прямоугольник $m\times n$ можно разрезать на «уголки» из трех клеток?

ФИЗИКА

1. На сколько сдвинется лодка, если рыбак перейдет с одного ее конца на другой? Масса рыбака m, масса лодки M, длина лодки l. Рассмотрите два случая: а) трение о воду полностью отсутствует; б) сила сопротивления воды пропорциональна скорости: $F_c = kv$. Рассмотрите предельный переход $k \to 0$.

2. Груз массой m висит на упругом шнуре. К грузу дважды приложили постоянную силу, направленную вверх: в первом случае величиной $0{,}25mg$, во втором – величиной $0{,}75mg$. Во сколько раз максимальная высота подъема груза во втором случае больше, чем в первом?

3. Камень бросили вверх с поверхности Земли со скоростью, на 0,1% меньшей, чем вторая космическая. Оцените, через сколько дней он упадет обратно.

4. В теплоизолированном вертикальном цилиндре под поршнем находится идеальный одноатомный газ. Над поршнем газа нет. На поршень ставят груз, масса которого равна массе поршня, и отпускают. После достижения системой равновесия груз с поршня мгновенно убирают. Во сколько раз конечная температура газа отличается от начальной? Трением пренебречь.

5. Маленький шарик массой m с зарядом q медленно приближается издалека к проводящей сферической оболочке радиусом R и толщиной $\Delta R \ll R$ и пролетает ее насквозь через два маленьких отверстия. Найдите скорость шарика в тот момент, когда он пролетает через центр сферы.

6. Тонкая проводящая пластина массой m, площадью S и толщиной d падает в вертикальном положении в однородном горизонтальном магнитном поле $\vec{B}$, линии индукции которого параллельны плоскости пластины. Найдите ускорение пластины.

7. Нерелятивистский дейтрон упруго рассеивается на первоначально покоившемся протоне. Найдите максимальный угол отклонения дейтрона. (Масса дейтрона в два раза больше массы протона.)

Устный командный тур

МАТЕМАТИКА

1. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля. Через сколько времени они встретились, если автомобиль, выехавший из A, доехал до пункта

B через 9 часов после встречи, а автомобиль, выехавший из B, приехал в A через 4 часа после встречи?

2. Вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на сторонах четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$. Может ли площадь $ABCD$ быть больше площади $A_1B_1C_1D_1$?

3. Является ли число 16016003 простым?

4. Сколько сторон у выпуклого n-угольника, если число его диагоналей равно 119?

5. Какое наибольшее количество месяцев, содержащих 5 пятниц, может быть в году?

6. Даны прямая l и точка A вне ее. Проведя всего 3 линии циркулем и линейкой, постройте прямую, проходящую через точку A параллельно l.

7. Какое из положительных чисел a или b больше, если $a(1-b) > \frac{1}{4}$?

8. В однокруговом турнире по волейболу (за победу присуждается одно очко, за поражение – ноль, ничьих не бывает) участвовали 12 команд. Можно ли выбрать три команды A, B и C так, чтобы A выиграла у B, B – у C, а C – у A, если ни одна из команд не набрала 7 очков?

9. Сколько сейчас лет моему племяннику, если в x^2 году ему исполнится x лет?

10. Три мотоциклиста A, B и C выехали из одной точки кольцевой дороги с постоянными скоростями в одном направлении. Через некоторое время они снова оказались в одной точке. Сколько раз мотоциклист A обгонял C, если A обгонял B 3 раза, а B обгонял C 4 раза?

ФИЗИКА

1. Как двум участникам марафона преодолеть глубокую расщелину в греческих горах, если в их распоряжении есть только две легкие, но прочные доски, длина каждой из которых немного меньше ширины расщелины?

2. Шарик для пинг-понга бросили вертикально вверх. Что займет больше времени – подъем или падение? Почему?

3. Один из участников олимпиады заблудился в лесу. Стемнело. Вдруг он обо что-то споткнулся. При свете спички он увидел водопроводную трубу. Как он может определить, в какую сторону течет вода по трубе?

4. Для хранения живой рыбы рыбак сделал в лодке ящик с отверстием в дне лодки. Будет ли лодка плавать или утонет? Почему?

5. Сколько времени падала бы Земля на Солнце, если бы она внезапно остановилась?

6. В двух одинаковых чайниках, стоящих на одинаковых горелках, кипит вода. У одного чайника крышка неподвижна, а у другого все время бренчит и подпрыгивает. Почему?

7. Во сколько раз возрастет полезная мощность вентилятора при увеличении скорости вращения в два раза?

8. Космонавт оттолкнулся от орбитальной станции на высоте 400 км от Земли и полетел в ее сторону со скоростью 5 м/с. Как скоро он упадет на Землю?

9. Античные источники описывают маятниковые часы для использования вне помещений, сделанные в виде тонкой трубки, заканчивающейся резервуаром со ртутью. В чем смысл такого устройства?

10. Как далеко от вас находится линия видимого горизонта, если вы плывете в лодке при полном штиле вне видимости берегов? Считайте, что линия глаз находится на высоте 1 м.

История научных идей и открытий

МАТЕМАТИКА

1. Легендарная школа Пифагора, заложившая основы математической науки, среди прочих задач занималась задачей о целочисленных прямоугольных треугольниках. В частности, пифагорейцы нашли бесконечные серии (не все) троек натуральных чисел (a, b, c), для которых $a^2 + b^2 = c^2$. Вслед за пифагорейцами выясните, существует ли целочисленный прямоугольный треугольник, одним из катетов которого является число а) 2001; б) $2k + 1$, где k – произвольное натуральное число.

2. В древнем Египте представляли дроби в виде суммы различных долей (т.е. дробей вида $\frac{1}{n}$). В папирусе жреца Ахмеса имелись даже таблицы таких представлений для дробей вида $\frac{2}{n}$ для $5 \le n \le 99$. Представьте в виде суммы долей дроби а) $\frac{2}{19}$; б) $\frac{7}{19}$.

3. Архимед при вычислениях, связанных с окружностью, пользовался утверждением, которое в современной формулировке выглядит так: «В дугу AB вписана ломаная AMB из двух отрезков ($AM > MB$). Тогда основание перпендикуляра KH, опущенного из середины K дуги AB на отрезок AM, делит ломаную пополам: $AH = HM + MB$».

а) Докажите утверждение Архимеда. б) Какую тригонометрическую формулу заменяло в вычислениях Архимеда это утверждение? Запишите эту формулу.

4. Французский математик монах Марин Мерсенн (1588–1648) состоял в переписке с крупнейшими математиками своего времени (Ферма, Паскалем, Декартом и др.). Его переписка исполняла роль своего рода математического журнала. Сам Мерсенн изучал, среди прочего, совершенные числа, т.е. числа, равные сумме своих делителей, отличных от самого числа. Совершенные числа связаны с простыми числами Мерсенна, т.е. с простыми числами вида $2^n - 1$: всякое четное совершенное число имеет вид $2^{n-1}\left(2^n - 1\right)$, если $2^n - 1$ простое число. Докажите, что если $2^n - 1$ простое число, то и n простое.

5. 5 августа 2002 года исполнилось 200 лет со дня рождения великого математика, прожившего очень короткую жизнь – неполных 27 лет. Он внес гигантский вклад во многие разделы математики. Теоремы и термины, связанные с его именем, известны всем математикам, начиная с первого курса университета. Одним из самых его замечательных результатов является доказательство теоремы, окончательно решившей проблему, связанную с алгебраическими уравнениями, и не поддававшуюся усилиям математиков в течение многих столетий. Кто этот математик и о какой теореме идет речь? Назовите какие-нибудь известные вам термины, теоремы и факты, связанные с его именем.

ФИЗИКА

1. Ученые и учения Древней Греции:

а) Кому из древнегреческих ученых принадлежит учение, что «ни одна вещь не возникает беспричинно, все возникает на каком-нибудь основании и в силу необходимости» (принцип причинности) и «все вещи состоят из атомов и пустоты, все явления природы происходят в результате их движения»?

б) Кому первому принадлежит гипотеза о шарообразности Земли?

в) Кто сформулировал правило параллелограмма для сложения скоростей: «если движимое движется сразу двумя движениями так, что пространства, пробегаемые в одно и то же время, находятся в постоянном отношении, то это движимое движется по диагонали параллелограмма, длина сторон которого находится в том же отношении»?

2. Отклонение света, испущенного звездой в поле тяготения Солнца, – один из первых эффектов, правильно рассчитанных общей теорией относительности Эйнштейна, – было обнаружено в 1919 году. На основе каких представлений о движении брошенных тел древнегреческие ученые полагали, что скорость света очень велика?

3. История изобретения термометра началась с Галилея, который построил термоскоп – прибор, состоящий из стеклянной трубки, которая заканчивалась шариком. Открытый конец трубки опускался в сосуд с водой; когда воздух в шарике нагревался, столбик воды в трубке опускался. Позже французский ученый Амонтон сконструировал газовый термометр, в котором вместо воды он использовал ртуть и проградуировал столбик ртути. Изобретателем современного ртутного термометра считается Фаренгейт. Аналогичные жидкостные термометры, но на основе спирта, сконструировали Реомюр и Цельсий.

а) Какие физические законы лежат в основе действия газовых и жидкостных термометров?

б) Какие термометры – жидкостные или газовые – пригодны для создания эталонной температурной шкалы?

в) Какие температуры принципиально нельзя измерять газовыми термометрами?

4. Про какого ученого говорили, что он «взвесил Землю»? Что вы еще знаете об этом ученом и его открытиях? Что на самом деле он измерял в эксперимента, о котором идет речь?

5. Красивое зрелище представляет собой летящая по ночному небу комета, напоминающая героиню древнегреческого мифа Медузу Горгону. Какие силы определяют направление хвоста кометы? Кто из ученых занимался изучением этих сил? Где еще проявляется действие этих сил?

Публикацию подготовили В.Альминдеров, Б.Алиев, А.Егоров, О.Поповичева, А.Черноуцан

Московская студенческая олимпиада по физике

19 мая 2002 года в Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э.Баумана прошел московский региональный тур Всероссийской олимпиады по физике среди студентов технических вузов. К участию в олимпиаде были приглашены все ведущие технические вузы Москвы. Состав каждой команды – 10 студентов до 3 курса включительно. Командный зачет проводился по 5 лучшим результатом членов команды.

Участникам олимпиады был предложен вариант из 10 задач (в зависимости от сложности задачи оценивались от 6 до 10 баллов) и разрешалось пользоваться любой литературой.

По результатам олимпиады в командном зачете первое место заняла команда МГТУ им. Н.Э.Баумана (98 баллов), второе место – команда Московского государственного института стали и сплавов (МИСиС) (80 б.), третье место – команда Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики (35 б.).

В личном зачете первое место завоевал В.Семененко (МГТУ им. Н.Э.Баумана, 32 балла), второе место – С.Ерохин (МГТУ им. Н.Э.Баумана, 24 б.), третье место – Д.Новокшанов (МИСиС, 20 б.).

Избранные задачи олимпиады

1. Винтовочная пуля массой m на каждые сто метров полета теряет 10% своей скорости. Определите зависимость силы сопротивления от скорости.

2. Капилляр представляет из себя усеченный конус, радиус нижнего основания которого втрое больше верхнего радиуса R_0; длина капилляра H. Капилляр медленно опускают нижним основанием на поверхность воды. Найдите максимальный радиус капилляра R_0, при котором вода поднимется на всю его высоту. Поверхностное натяжение воды σ известно. Внутреннюю поверхность капилляра считать абсолютно смачиваемой.

3. Космический корабль вращается по стационарной круговой орбите радиусом $2R$ вокруг малой планеты радиусом R. Каким образом должен действовать экипаж корабля, чтобы совершить мягкую посадку на поверхность планеты с минимальными затратами топлива, если ускорение свободного падения на поверхности планеты $G \ll g$? Какая для этого необходима характеристическая скорость? (Характеристическая скорость – это скорость, до которой способен разогнаться корабль в свободном пространстве.)

4. Частица абсолютно упруго отскакивает от двух параллельных стенок, начальное расстояние между которыми x_0. Начальная скорость частицы равна v_0 и перпендикулярна стенкам. Определите зависимость скорости частицы от расстояния между стенками при медленном их сближении.

5. Заряд q находится внутри металлической сферы радиусом R с зарядом Q и расположен на середине ее радиуса. Определите работу по удалению заряда на бесконечность.

6. По цилиндрическому проводнику радиусом R протекает ток, плотность которого постоянна и равна j. Концентрация носителей заряда в проводнике n. Средняя линейная плотность заряда на единицу длины проводника равна нулю. Определите распределение по радиусу проводника объемной плотности заряда ρ и поверхностную плотность заряда проводника τ.

7. Два плоских проводника длиной l и шириной a ($l \gg a$) сложили поочередно с двумя полосами диэлектрической пленки таких же размеров и толщиной d ($a \gg d$). Проводники с одного края (по стороне a) замкнули, а с другого края подключили источник тока и пропустили по ним ток I_0. Определите работу, которую необходимо затратить, чтобы свернуть все четыре слоя в рулон с очень большим числом витков, если ток поддерживается постоянным.

8. По первой трубе перекачивают газ с начальной температурой T_0. В конце трубы газ нагревают на ΔT и перекачивают обратно по второй лежащей рядом трубе. Теплообмен между трубами осуществляют посредством идеальной тепловой машины таким образом, что в установившемся режиме температура на выходе из второй трубы равна $2T_0$. Определите максимальную температуру газа в процессе перекачки.

9. Две большие параллельные пластины находятся в свободном пространстве и имеют температуры T_1 и T_2. Коэффициент отражения обеих пластин во всем спектральном диапазоне одинаков и равен 0,5. Определите поток энергии q, переносимый с одной пластины на другую тепловым излучением, и силу f, действующую на единицу площади этой системы, если расстояние между пластинами много меньше их размеров.

Публикацию подготовили М.Яковлев, В.Голубев

«Квант» для «младших» школьников

Задачи

(см. «Квант» №1)

1. Покажем, что двух взвешиваний достаточно для того, чтобы среди трех весов A, B, C определить неисправные.

Взвесим на весах A весы B и C. Если обнаружится равновесие, то весы A неисправные. В противном случае одни из взвешиваемых весов тяжелее и, значит, заведомо исправные. Произведя на них второе взвешивание, выявим неисправные весы.

Одного взвешивания недостаточно. Если первое взвешивание производится на неисправных весах, то результат этого взвешивания может быть каким угодно, и определить по нему неисправные весы в общем случае не удастся.

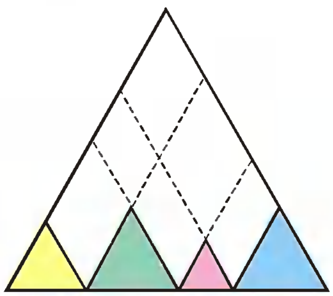


Рис. 1

2. Рассмотрим все маленькие треугольники, примыкающие к основанию исходного треугольника (рис.1). Поскольку сумма периметров этих треугольников равна периметру исходного треугольника, то периметр исходного треугольника выражается целым числом.

3. Один из трех географических объектов, с которыми соединен мостами остров Чанга, или один из трех объектов, с которыми соединен остров Чунга, должен быть материком. Пусть, для определенности, с материком соединен остров Чанга. Тогда Чунга и связанные с ним три острова образуют изолированную группу островов, не связанную ни с материком, ни с остальными островами архипелага. В этом случае с острова Чанга и двух связанных с ним островов выходит по одному мосту на материк. Таким образом, острова архипелага с материком связывают 3 моста (рис. 2).

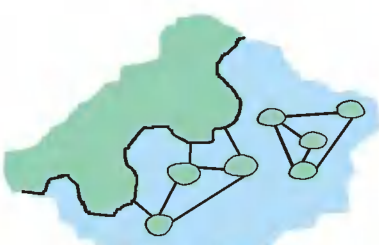


Рис. 2

4. Произвольно разрезая исходные квадраты на прямоугольники 2×1, мы получим два одинаковых набора прямоугольников. Докажем это.

Условимся считать, что исходные квадраты окрашены белым, синим и красным цветом. Предположим, что во втором наборе красно-синих прямоугольников больше, чем в первом наборе. Тогда в первом наборе должно быть больше красно-белых и сине-белых прямоугольников. Но в таком случае белых клеток в первом наборе окажется больше, чем во втором. Противоречие.

Аналогично рассматривая другие пары цветов, убеждаемся, что в обоих наборах имеется равное количество одинаково окрашенных прямоугольников. Следовательно, из прямоугольников второго набора всегда можно составить точно такой же квадрат, как и из частей первого набора.

5. Вместо многоточий можно последовательно вставить, например, следующие числа: 2, 6, 14, 15, 17, 20, 22, 25, 27, 28.

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №5 за 2002 г.)

6. В условии этой задачи (по вине ведущего рубрики) была допущена неточность. Исправленный вариант условия задачи был опубликован на сайте math.child.ru. Приведем его здесь вместе с авторским решением задачи. В конце дадим решение задачи, опубликованной в журнале.

Задача. *8 одинаковых по внешнему виду монет расположены по кругу. Известно, что 3 из них фальшивые (более тяжелые по весу), причем эти монеты лежат рядом друг с другом (подряд). Все фальшивые монеты весят одинаково, все настоящие тоже. Можно ли определить все три фальшивые монеты, произведя лишь два взвешивания на чашечных весах без гирь?*

Решение. Пронумеруем монеты по часовой стрелке, начиная с любой из них. Первым взвешиванием сравним общий вес 1, 2, 3 и 5, 6, 7 монет. Если вес оказался равным, то это может быть только в том случае, если в каждой кучке по одной фальшивой монете. Вторым взвешиванием сравниваем вес 4 и 8 монет. Одна из них окажется более тяжелой, следовательно, эта монета и ее соседи – искомые.

Если вес оказался не равным, то это значит, что в более тяжелой кучке либо две, либо три фальшивые монеты. Вторым взвешиванием сравниваем вес 4 и 8 монет. Если их вес оказался одинаковым, то все фальшивые монеты находятся в более тяжелой кучке из предыдущего взвешивания. Если же вес 4 и 8 монет не одинаков, то фальшивые монеты – это более тяжелая из второго взвешивания и ее два соседа (с одной стороны), находящиеся в более тяжелой кучке из первого взвешивания.

Итак, три фальшивые монеты можно определить за два взвешивания.

А вот решение задачи, опубликованной в журнале.

Очевидно, что если ни про одну из 8 монет нельзя сказать, настоящая она или фальшивая, то за одно взвешивание на чашечных весах без гирь выделить из них три фальшивые монеты невозможно. И такая неопределенная ситуация всегда может возникнуть после первого взвешивания.

Действительно, если при первом взвешивании на весы каким-то образом выкладываются все монеты (никакие монеты не откладываются в сторону), то определить по результатам этого взвешивания хотя бы одну фальшивую монету невозможно.

Предположим, какие-то монеты при первом взвешивании откладываются в сторону, а на обеих чашах весов размещаются одинаковые количества монет. Если при взвешивании весы окажутся в равновесии, то по результатам этого взвешивания определить хотя бы одну фальшивую монету невозможно.

Если какие-то монеты откладываются в сторону, а на обе чаши весов размещаются разные количества монет, то легко проверить, что по результатам такого взвешивания определить хотя бы одну фальшивую монету невозможно.

Итак, за два взвешивания определить три фальшивые монеты нельзя.

7. Решение задачи содержится в статье А.Малеева в этом номере журнала.

8. Рассмотрим две соседние стороны AB и BC десятиугольника, касающееся указанной в условии задачи окружности ω в точках P и Q (рис.3). Поскольку $AB = BC$ и $BP = BQ$, то $AP = QC$ и, следовательно, $AO = OC$ (O – центр окружности ω). Таким образом, все вершины десятиугольника, взятые через одну, лежат на окружности, концентричной ω. Соединив все вершины десятиугольника с центром ок-

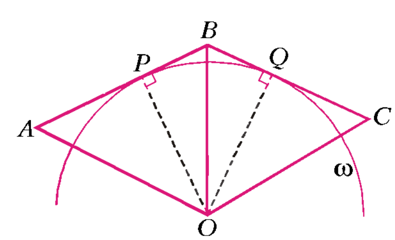


Рис. 3

ружности O, получим 10 треугольников, равных друг другу по трем сторонам. Их высоты, проведенные из вершины O, равны. Следовательно, сомнительная десятая сторона касается той же окружности, что и остальные девять сторон десятиугольника.

9. Пусть наибольшее из выписанных чисел равно d. Это означает, что разность между любыми двумя близкими числами по абсолютной величине не превосходит d.

Заметим, что из любой угловой клетки таблицы ходом шахматного короля можно перейти в противоположную угловую клетку ровно за $m-1$ ходов. В самом деле, двинемся сначала по диагонали. Через $n-1$ ходов мы окажемся на одной вертикали с противоположной угловой клеткой и еще через $m-n$ ходов по вертикали достигнем цели. Общее число ходов составит $m-1$. Отсюда следует, что из любой клетки таблицы можно перейти в любую другую не более чем за $m-1$ ходов. Следовательно, из клетки с числом 1 можно перейти в клетку с числом mn также не больше чем за $m-1$ ходов. Поэтому разность между числами 1 и mn по абсолютной величине не превышает $d(m-1)$.

Итак, $mn-1 \le d(m-1)$, откуда $d \ge \frac{mn-1}{m-1} = n + \frac{n-1}{m-1}$. Так как $n > 1$, то $\frac{n-1}{m-1} > 0$ и $d \ge n+1$. Получена оценка снизу. Максимальную разность $n+1$ между числами в близких клетках таблицы можно достичь, расставив их следующим образом. Числа от 1 до n запишем в первую строку, числа от $n+1$ до $2n$ – во вторую строку, и т.д. Несложно проверить, что разность между любыми числами в близких клетках такой таблицы не превышает $n+1$.

10. Такое натуральное число n существует. Для доказательства этого факта воспользуемся вспомогательным утверждением:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Обозначим $S_1 = 1+2+\ldots+n$, $S_2 = 1^2+2^2+\ldots+n^2$ и рассмотрим тождество $(x+1)^3 - x^3 = 3x^2+3x+1$. Полагая в нем последовательно $x = 1, 2, 3, \ldots, n$ и суммируя почленно получающиеся равенства, имеем

$$\left(2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3\right) - \left(1^3+2^3+\ldots+n^3\right) = 3S_2+3S_1+n.$$

Итак, $3S_2+3S_1+n = (n+1)^3-1$. Но $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$, поэтому $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Вспомогательное утверждение доказано. Пусть $n = 2k+1$ и $x-k, x-k+1, \ldots, x, \ldots, x+k-1, x+k$ – числа задачи. Имеем

$$n^2 = (x-k)^2+\ldots+x^2+\ldots+(x+k)^2,$$

$$(2k+1)^2 = (2k+1)x^2 + 2\frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

$$3(2k+1) = 3x^2 + k(k+1),$$

$$k^2-5k+3x^2-3 = 0.$$

Отсюда

$$k = \frac{5 \pm \sqrt{25-4\left(3x^2-3\right)}}{2},$$

а значит,

$$25-4\left(3x^2-3\right) = y^2,$$

где y – целое число. Получили

$$37-12x^2 = y^2.$$

При $x = 0$ это равенство не выполняется $\left(37 \ne y^2\right)$, при $x = \pm1$ – выполняется: $37-12 = (\pm5)^2$. При этом либо $k = 0$ и $n = 1$, либо $k = 5$ и $n = 11$. Числа задачи во втором случае таковы: $-6, -5, \ldots, 3, 4$ либо $-4, -3, \ldots, 5, 6$. Получили

$$11^2 = (-6)^2+(-5)^2+\ldots+3^2+4^2 = (-4)^2+(-3)^2+\ldots+5^2+6^2.$$

(Заметим, что при $|x| \ge 2$ будет $37-12x^2 < 0$, а значит, равенство $37-12x^2 = y^2$ опять не выполнено. Кроме того, рассуждая, как и выше, легко показать, что никакое число $n = 2k$ условиям задачи не удовлетворяет. Таким образом, 11 – единственное число, удовлетворяющее условиям задачи.)

Термодинамика круговых процессов

1. $T_1 = T_3 = \sqrt{T_2T_4}$. **2.** $T_1 = \frac{2Q}{9\nu R}$; $A = \frac{Q}{3}$.

3. $A_{23} = A - \frac{5}{2}R\Delta T$. **4.** $A_{23} = A + \frac{4}{3}A_{12}$.

Институт естественных наук и экологии при «Курчатовском институте»

МАТЕМАТИКА

1. В указанной области система имеет два решения:

$$\left(-\arcsin\left(2/\sqrt5\right); -\arcsin\left(1/\sqrt5\right)\right),$$

$$\left(\arcsin\left(2/5\sqrt5\right); \arcsin\left(1/\sqrt5\right)\right).$$

2. $-1/2$. **3.** $x_0 = 1/2$, $S_{\min} = 356/15 = 23\frac{11}{15}$. **4.** $rR/(r+R)$.

5. $r(h+H)\big/\sqrt{r^2+H^2}$. **6.** $x\left(x^{n+1}-(n+1)x+n\right)\big/(x-1)^2$.

ФИЗИКА

1. $T = 2\pi\sqrt{\frac{2R(M+2m_1)}{g(m_2-m_1)}}$.

2. 1) $A = \frac{1}{2}R\Delta T$; $C = \frac{R(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}$, где γ – отношение молярных теплоемкостей газа C_p и C_V, определяемых при постоянных давлении и объеме соответственно;

2) $\Delta V = V_1\left(\sqrt{1+\frac{\Delta T}{T_1}}-1\right)$.

3. $Q = \frac{9}{4}C\mathcal{E}^2$.

4. $\Delta l = \left(\frac{2\pi b(a+b)}{\mu_0 I a^2}\right)^2 R\Delta p$. *Указание*: индукция магнитного поля бесконечного прямого провода с током I на расстоянии d от провода равна $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{d}$.

5. 1) $l < \frac{n(d-F)}{n-1}$; 2) $\Gamma = \frac{F}{F-d}$.

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. Первое число больше.

2. $\arccos\left(1/\sqrt3\right)+\pi n$, $\pi - \arccos\left(1/\sqrt3\right)+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. $\left(\log_5\frac{3}{10}; \log_5\frac{1}{3}\right) \cup \left(0; \log_5 3\right)$.

4. При $a > 8$ три решения: $\frac{a+2}{3}$, $\frac{2-a}{3}$, -2; при $a \in (-8;\, 8]$ два решения: $\frac{a+2}{3}$, -2; при $a \le -8$ одно решение: -2.

5. $\frac{3}{2}$.

6. Второй лыжник обгонит первого по прошествии времени $\frac{40}{9}\frac{S}{v}$.

Вариант 2

1. 0,5. **2.** $\frac{2\pi}{3}+\pi n$, $\frac{4\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. -1; 9; $\frac{5\pm\sqrt{61}}{2}$. **4.** $(-\infty;\, -3/2] \cup (-1/2;\, +\infty)$.

5. 25. **6.** 12.

Вариант 3

1. 7; 21. **2.** $(-\infty;\, 0) \cup [1;\, 2]$.

3. $\pi/6+4\pi n$, $5\pi/6+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **4.** $(11{,}2;\, 2{,}6)$.

5. Первое число меньше. **6.** 5.

7. $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}+\frac{1}{3}$. **8.** $(-1;\, 2)$; $(-1;\, -2)$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $H_{1\max}/H_{2\max} = \mathrm{tg}^2\alpha$. **2.** $T = \frac{\pi m v}{g(m+M)\sin(\alpha/2)}$.

3. $R = \frac{\Delta I R_A^2}{U - \Delta I R_A}$. **4.** $T_2 = T_1\left(1-\frac{A}{pV_1}\right)$.

5. $f = (k+1)F = 5{,}1$ м.

Вариант 2

1. $v_B = v\sqrt{2}$. **2.** $v_2 = \frac{\sqrt{m^2v_1^2+2mMv_1v_0\cos\varphi+M^2v_0^2}}{M+m}$.

3. $E = \frac{2m\left(\sqrt{4L^2+t_0^2v_0^2}-2L\right)}{et_0^2}$.

4. $h_2 = \frac{\sqrt{p_0^2+4\rho g p_0 h_1}-p_0}{2\rho g} \approx 0{,}22$ м.

5. $H = (R-r)\sqrt{n^2-1}$.

Вариант 3

1. $H = vt\sqrt{2}$. **2.** $F = Mg/(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)$.

3. $F = M_0 v_0\sqrt{k/(2M)}$. **4.** $p = nV_0p_0/V = 2\cdot 10^5$ Па.

5. $h = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}\left(1-\sqrt{1-\frac{qB^2L^2}{2mU}}\right)$. **6.** $Q_1 = \sqrt{Q^2+2LCI^2/3}$.

7. $L = hF/d = -1{,}25$ см (знак «минус» означает, что линзу надо сместить вниз).

Московский государственный институт электронной техники

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. -1. **2.** 2. **3.** 0. **4.** $\pm\frac{4\pi}{3}+4\pi n$, $\pi+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **5.** 6. **6.** 3 л и 1 л. **7.** $\left(-\infty;\, \frac{11}{4}\right) \cup \{4\} \cup \left[8+\sqrt{26};\, +\infty\right)$. **8.** $\left(-4;\, \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$.

9. -1. **10.** $2:\left(1+2\sqrt{2}\right)$. **11.** $(0;\, -3)$, $(-2;\, -1)$.

Вариант 2

1. $(-\infty;\, 2) \cup (3;\, 16]$. **2.** 47. **3.** 1. **4.** 60°. **5.** 1/2. **6.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **7.** См. рис. 4. **8.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. **9.** $(4;\, 8)$.

10. $18\frac{1}{3}$ кг. **11.** 4.

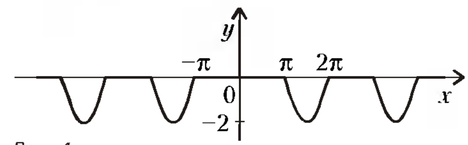


Рис. 4

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $L_{\min} = L - \frac{(v_1-v_2)^2}{2a} = 10$ м. **2.** $\mu > \frac{a\cos\alpha}{a\sin\alpha+g}$.

3. $v_2 = \frac{v_1 m_1}{m_2} = 1$ м/с. **4.** $n = 1+\frac{NM}{N_A m} = 2{,}6$.

5. а) $T_1 = 2T_0$; б) $Q = 2p_0V$.

6. а) $F = qE = 0{,}5\cdot 10^{-3}$ Н; б) $F = mg = 10^{-3}$ Н.

7. а) $U = \frac{ER}{r+2R} = 1{,}5$ В; б) $I = \frac{E}{2r+3R} = 0{,}09$ А.

8. $n = \frac{2}{\cos\alpha+1} = \frac{4}{3}$.

9. $x_2 = \frac{Fx_1}{x_1+F} = 20$ см, $y_2 = \frac{Fy_1}{x_1+F} = -2$ см.

10. $3{,}30\cdot 10^{-19}$ Дж $= \frac{hc}{\lambda_2} < A < \frac{hc}{\lambda_1} = 3{,}96\cdot 10^{-19}$ Дж.

Вариант 2

1. а) $\omega_2 = \frac{\omega_1 R_1}{R_2} \approx 53{,}3$ рад/с; б) $\tau = \frac{6\pi}{\omega_1} \approx 0{,}94$ с.

2. $F = \frac{ma}{\mu} = 2$ Н. **3.** $x = l_1\left(1-\frac{l_1}{2l_2}\right) \approx 2{,}7$ см.

4. $V_2 = \frac{(100\% - \varphi_1)V_1}{\varphi_2} = 5$ л. **5.** $T = \frac{1}{2}\left(\frac{T_1+T_2}{2}+T_3\right) = 325$ К.

6. а) $a = 2\frac{e}{m}E = 5{,}6\cdot 10^{15}$ м/с^2; б) $d = \sqrt{\frac{ke}{E}} = 0{,}3$ мкм.

7. $r = (\alpha-1)R = 4$ Ом. **8.** $\lambda = \frac{2\pi c\tau}{\arccos\frac{1}{\sqrt{n}}} = 18$ м.

9. а) $f = F(\Gamma+1) = 9$ см;

б) расстояние от линзы увеличится на $L = F\Gamma(n-1) = 2$ см.

10. $N = \frac{R}{ke^2}\left(\frac{hc}{\lambda}-A\right) \approx 2{,}7\cdot 10^6$.

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 9 руб. **2.** $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** $\{1/9;\, 3\}$.

4. $(-\infty;\, -3) \cup (0;\, 3) \cup (3;\, 6)$. **5.** 4.

6. $\left(2+\sqrt{10-p};\, 10\right)$, $\left(2+\sqrt{6-p};\, 6\right)$ при $p \in (-\infty;\, 2]$; $(4;\, 10)$, $(2;\, 6)$ при $p = 6$; $\left(2\pm\sqrt{10-p};\, 10\right)$ при $p \in (6;\, 10)$.

7. $22\pi l^2$.

Вариант 2

1. 40 км. **2.** $\frac{\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{18}$; $\frac{7\pi}{18}$; $\frac{5\pi}{12}$. **3.** $7\frac{3}{4}$. **4.** $(-\infty;\, -\log_2 3)$. **5.** 6.

6. $\left(\sqrt{a^2-4a-140};\,4\right)$ при $a \in (-\infty;-15)\cup(17;+\infty)$;
$\left(\sqrt{a^2-144};\,2\right)$ при $a \in [-13;-12)\cup(12;15)$. **7.** $\frac{21}{4}$.

Новосибирский государственный университет

ФИЗИКА

Вариант 1

1. В момент разрыва бумаги высоту поршня h находим из условия $p_0H=(p_0+\Delta p)h$. Далее – свободное падение: $v=\sqrt{2gh}$. Отсюда

$$v=\sqrt{\frac{2gHp_0}{p_0+\Delta p}}.$$

2. При опускании поршня сохраняется энергия:

$$\frac{3}{2}\nu RT_0+mgh=\frac{3}{2}\nu RT.$$

Вначале поршень находился в равновесии:

$$mg=\frac{p_0Sh}{h}=\frac{\nu RT_0}{h}.$$

Отсюда

$$T=T_0+\frac{2mgh}{3\nu R}=\frac{5}{3}T_0.$$

3. Сила Лоренца действует в пределах наклонной плоскости и перпендикулярна скорости. При установившейся скорости v все силы в плоскости уравновешиваются. Удобно рассмотреть проекции сил поперек и вдоль скорости, которая отклоняется от направления наискорейшего спуска на угол β:

$$mg\sin\alpha\sin\beta=qvB,\quad mg\sin\alpha\cos\beta=\mu mg\cos\alpha.$$

Отсюда

$$\cos\beta=\frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha},\quad v=\frac{mg\sqrt{\sin^2\alpha-\mu^2\cos^2\alpha}}{qB}.$$

Если $\operatorname{tg}\alpha<\mu$, тело не двигается.

4. После испарения молекулы воды непременно перемешиваются с молекулами воздуха. Число молей водяного пара равно $\nu=m/M=10$ кг/0,018 кг/моль ≈ 500 моль. Объем замещаемого паром воздуха равен

$$V=\frac{\nu RT}{p_а}=\frac{500\text{ моль}\cdot 8{,}3\text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}\cdot 300\text{ К}}{10^5\text{ Па}}\approx 10\text{ м}^3=10^4\text{ л}.$$

Искомый объем можно оценить и как 10^3 объемов ведра, полагая, что воздух на три порядка легче воды.

5. Вблизи линзы препятствие перекрывает небольшую часть светового пучка и лишь немного ослабляет яркость пятна на экране. Полное перекрытие пучка где-то между линзами указывает, что там есть точка фокусировки.

Вариант 2

1. Ускорение тел при совместном движении равно $a=F/(m_1+m_2)$. Для тела массой m_1: $m_1a=kq^2/R^2$. Отсюда

$$F=\frac{kq^2}{R^2}\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right).$$

2. В начальном состоянии давление под поршнем равно $p_0+mg/S=1{,}5p_0$. Можно считать, что первое слагаемое обусловлено давлением пара воды, а второе – воздухом под поршнем. После охлаждения давление под поршнем не изменится, но будет целиком обеспечиваться воздухом. Из уравнения состояния

$$\frac{0{,}5p_0SH}{T_1}=\frac{1{,}5p_0Sh}{T_2}$$

находим

$$h=H\frac{T_2}{3T_1}\approx 0{,}05\text{ м}=5\text{ см}.$$

Поршень сместится на 15 см.

3. При максимуме тока через катушку индуктивностью L напряжение на катушке (как и на конденсаторе) нулевое. Вся энергия сосредоточена в катушке и равна $LI^2/2$. Энергия после замыкания сохраняется. В момент максимума тока через катушку индуктивностью L_1 на конденсаторе опять нет напряжения:

$$\frac{LI^2}{2}=\frac{LI_2^2}{2}+\frac{L_1I_1^2}{2}.$$

Токи в катушках связаны условием равенства напряжений: $|L\Delta I_2/\Delta t|=L_1\Delta I_1/\Delta t$, тогда, с учетом знака (уменьшение I_2), для любого момента времени можно записать

$$L(I-I_2)=L_1I_1,\text{ или } LI_2+L_1I_1=LI$$

(сохранение магнитного потока). Окончательно получаем

$$I_1=\frac{2LI}{L+L_1}.$$

(Можно отметить аналогию с упругим ударом: индуктивности соответствуют массам, токи – скоростям, конденсатор «обеспечивает» упругое взаимодействие.)

4. Мощность равна $N\approx\Delta pV/t$, где Δp – разность артериального и венозного давлений, равная примерно 100 мм рт.ст. Ее можно оценить также как давление столба крови высотой в 1 м (порядка роста человека). Выталкиваемый сердцем объем крови V – это величина порядка 100 см^3. Отсюда получаем

$$N\approx\frac{100\text{ мм рт.ст}\cdot 10^5\text{ Па}\cdot 10^{-4}\text{ м}^3}{760\text{ мм рт.ст}\cdot 1\text{ с}}\approx 1{,}3\text{ Вт}\sim 1\text{ Вт}.$$

5. Положение пробирки грузом вниз устойчиво, и силы трения о стенку невелики, даже если при всплывании имеется контакт. Если же пробирка расположена вверх дном, она стремится перевернуться и упирается в стенки трубки, что создает заметные силы реакции и трения.

Вариант 3

1. Начальная вертикальная скорость равна

$$v=\frac{g(t_1+t_2)}{2}$$

(в момент $(t_1+t_2)/2$ высота максимальна). Высота в момент t_1 составляет

$$h=vt_1-\frac{gt_1^2}{2}=\frac{gt_1t_1}{2}.$$

2. Скорость бусинки u всегда вдвое больше горизонтальной составляющей v скорости груза; перед ударом скорости связаны соотношением $u=2v$. Закон сохранения энергии дает уравнение

$$\frac{Mv^2}{2}+\frac{mu^2}{2}=MgL.$$

Отсюда получаем

$$v=\sqrt{\frac{2MgL}{M+4m}},\quad u=2\sqrt{\frac{2MgL}{M+4m}}.$$

3. Имеем два параллельно включенных конденсатора. При сдвиге поршня на x заряд перераспределяется между его сторонами, в сумме оставаясь равным начальному:

$$q_1+q_2=q,$$

а напряжения на конденсаторах одинаковые:

$$\frac{q_1}{C_1}=\frac{q_2}{C_2},\quad C_1=\frac{\varepsilon_0S}{d-x},\quad C_2=\frac{\varepsilon_0S}{d+x}.$$

Напряженности полей равны, соответственно,

$$E_1=\frac{q_1}{C_1(d-x)}=\frac{q_1}{\varepsilon_0S},\quad E_2=\frac{q_2}{C_2(d+x)}=\frac{q_2}{\varepsilon_0S}.$$

Поршень находится в поле внешних пластин с напряженностью $(E_1-E_2)/2$, на него действует электрическая сила, равная

$$q\frac{E_1-E_2}{2}=\frac{q^2x}{2\varepsilon_0 Sd}$$

и направленная к ближайшей пластине. Разность давлений газа на поршень равна

$$\Delta p=p_1-p_2=p_0\frac{d}{d-x}-p_0\frac{d}{d+x}=\frac{2p_0dx}{d^2-x^2}.$$

Условие равновесия поршня

$$\frac{2p_0dxS}{d^2-x^2}=\frac{q^2x}{2\varepsilon_0 Sd}$$

имеет решения

$$x=0 \text{ и } x=\pm d\sqrt{1-4\varepsilon_0 p_0 S^2/q^2}.$$

Последние два решения имеют смысл, если под корнем положительное число, т.е. если заряд достаточно велик, тогда первое решение (отсутствие сдвига) неустойчиво. Если же заряд мал, остается только решение $x = 0$. При этом заряд не обязательно компенсировать: поле снаружи несущественно.

4. Разность плотностей воздуха и водорода около 1 кг/м^3, плотность человека порядка 1000 кг/м^3. Надо набрать объем, примерно в 1000 раз больший, чем занимает человек, т.е. около 6000 л. Объем шарика радиусом 20 см составляет 30 л. Значит, потребуется минимум 200 шариков, а с учетом их веса – порядка 400 шариков.

5. При небольшом наклоне скорость почти перпендикулярна стенке, шарик останавливается и затем разгоняется обратно в основном силой реакции стенки. Шарик отскакивает, хотя и не вполне упруго (как из-за вращения, так и из-за неупругости деформации: вертикально падающий на пол шарик тоже отскочит на меньшую высоту). При большом наклоне силы реакции стенки и плоскости одного порядка и почти поперечны направлению отскока; в торможении основную роль играют силы трения, которые после остановки уже не разгоняют шарик в обратном направлении.

При достаточно малом угле между плоскостью и стенкой возможно заклинивание: после остановки силы трения сменят знак и силы реакции не смогут вытолкнуть шарик. Даже без трения потери возросли бы: вместо одного удара можно говорить о серии ударов, в каждом из которых теряется часть энергии.

Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. а) $\mathbf{R}$, если $n = 2$; $\left(-\infty;-n-\sqrt{n^2-7}\right)\cup\left(-n+\sqrt{n^2-7};+\infty\right)$, если $n\ge 3$; б) см. рис.5; в) $a = 0$ или $a\ge 2$.

2. $-\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5}<x<-\frac{\pi}{30}+\frac{2\pi k}{5}$, $k\in\mathbf{Z}$ или $\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}<x<\frac{7\pi}{30}+\frac{2\pi n}{5}$, $n\in\mathbf{Z}$. **3.** $\frac{8R^2\sqrt{3}}{3}$. **4.** $\frac{S\sqrt{S}}{3}$.

5. 2) Неверно: например, $a = 13$ обладает свойством в), но $a + 2$ не является четным.

$g(x)=|x+4|$,
$x\in(-\infty;-7)\cup(-1;+\infty)$

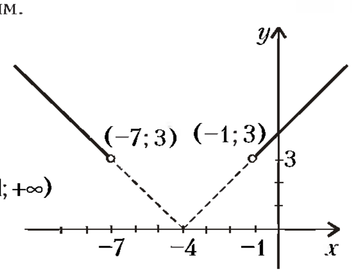


Рис. 5

Вариант 2

1. а) $(-2;1]$, если $n = 1$; $(-2;2)$, если $n = 2$; $(-2;2)\cup(2;n]$, если $n\ge 3$; б) см. рис.6; в) $\left(-2;\frac{5}{3}\right)\cup\left(\frac{7}{3};5\right)$.

$g(x)=\left|\frac{1}{3x+6}-1\right|$,
$x\in(-2;2)$

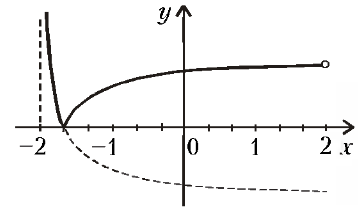


Рис. 6

2. $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$, $k\in\mathbf{Z}$ или $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$. **3.** $5\sqrt{2}$.

4. $V=\frac{a^3}{2}$; $S=a^2\left(\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)$.

5. б) Неверно: например, если $a = 3$ и $b = 2$, то $a > b$, но $(-\infty;3]\not\subset(-\infty;2]$.

Российский государственный технологический университет им. К.Э.Циолковского

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 1.

2. $\pm\left((-1)^n\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}\right)$, $n\ge 1$; $\pm\left(\frac{5\pi}{36}+\frac{2\pi n}{3}\right)$, $n\ge 0$; $n\in\mathbf{Z}$.

3. $(-\infty;-31)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. **4.** 19.

5. $a=-2$; $-1\le a<-\frac{1}{2}$; $0<a\le 1$. **6.** $\frac{8\left(3\sqrt{3}-2\right)}{3\left(\sqrt{3}-1\right)^2}$.

Вариант 2

1. 4. **2.** $\frac{7+\pi\sqrt{14-\pi^2}}{2}$, $\frac{7-\pi\sqrt{14-\pi^2}}{2}$.

3. $-\frac{7}{2}\le x<-3$. **4.** 1251.

5. $a=-2$; $-\frac{2}{\sqrt{3}}\le a<-\frac{2}{3}$; $0<a<\frac{2}{\sqrt{3}}$. **6.** $\frac{16}{7-4\sqrt{3}}$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $q\approx 10^{-8}$ Кл. **2.** $I_{н}=3{,}2\cdot 10^{-4}$ А. **3.** $\mu=0{,}4$.
4. $A=18{,}8\cdot 10^3$ Дж. **5.** $F\approx 10^{-5}$ Н. **6.** $\alpha=1/4$.

Вариант 2

1. $v=5$ м/с. **2.** $\eta\approx 67\%$. **3.** $T\approx 0{,}9$ с.
4. $m=3$ кг. **5.** $\rho\approx 5\cdot 10^3$ кг/м^3. **6.** $Q=\frac{1{,}8\pi R^2F_m}{kq}$.

Российский государственный университет нефти и газа им. И.М.Губкина

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. –24. **2.** 11. **3.** 48. **4.** –0,2. **5.** –11. **6.** 3. **7.** 0,25. **8.** –70. **9.** –16. **10.** 9. **11.** 150. **12.** 0,7.

Вариант 2

1. –1. **2.** 4. **3.** 62. **4.** –4. **5.** –14. **6.** 1,403. **7.** –5. **8.** 15. **9.** 6. **10.** 100. **11.** 1,25. **12.** 27.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $s = 7$ м. **2.** $A = 1290$ Дж. **3.** $\alpha = 3$. **4.** $T = 1200$ К. **5.** $m = 6$ кг. **6.** $U = 25$ В. **7.** $r = 50$ мм. **8.** $d = 40$ см. **9.** $h = 4$ м. **10.** $F = 60$ Н. **11.** $v = 1$ м/с. **12.** $t = 200$ мс.

Вариант 2

1. $t = 2$ с. **2.** $v = 75$ см/с. **3.** $A = 70$ Дж. **4.** $F = 172$ Н. **5.** $Q = 1053$ кДж. **6.** $P = 45$ Вт. **7.** $l = 9$ см. **8.** $k = 5$. **9.** $a = 6$ м/с^2. **10.** $t = 17$ °С. **11.** $l = 16$ м. **12.** $v = 5$ м/с.

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $2a + 1$. **2.** $\{1/2; 5/2\}$. **3.** $[-1/2; 1]$. **4.** 1/2. **5.** $\log_3 2$. **6.** 3. **7.** $[1/27; 27]$. **8.** 12. **9.** $\pm 1; 2; \left(3 - \sqrt{17}\right)/2$. **10.** $(-4; -3) \cup (-3; -2) \cup [6; +\infty)$. **11.** 4. **12.** $[-2; -1/2] \cup [1/2; 2]$. **13.** 21. **14.** 4. **15.** $\{0\} \cup [\pi; 3\pi/2]$. **16.** $(0; 1) \cup (1; +\infty)$. **17.** 25/26. **18.** 16π. **19.** $(1; 1)$, $(9; 1)$. **20.** $(4/3; +\infty)$.

Вариант 2

1. 3. **2.** –7/2. **3.** –1. **4.** 0. **5.** –4. **6.** $b > a$. **7.** 2. **8.** 2. **9.** $\pi/4 + \pi n/2$, $(-1)^{n+1}\pi/6 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **10.** 5. **11.** –3; –5. **12.** $y = -4$. **13.** $(-1; 1)$. **14.** πn, $n \in \mathbf{Z}$. **15.** $[\pi/4; \pi/2) \cup (\pi/2; 3\pi/4]$. **16.** $(1; 2)$. **17.** 4; $\sqrt{24}$. **18.** 12. **19.** $\left[-\sqrt{2}/6; 0\right) \cup \left(0; \sqrt{2}/6\right]$. **20.** $\left(\sqrt{3}; +\infty\right)$.

XXXIII Международная физическая олимпиада

Задача 1

1) $v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$. 2) $h_{\max} = \dfrac{6}{\sigma}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = 15{,}93$ м. 3) $f_{\min} = 800$ МГц.

4) $t = 2\dfrac{\sqrt{d^2 + x^2}}{v}$, где v – скорость волны; $d = 5$ м.

Задача 2

1) $\vec{j} = \dfrac{I_1}{4\pi r^3}\vec{r}$.

2) $\vec{E}_A \approx -\dfrac{\rho I_1 l_1}{4\pi y^3}\vec{i}$ для $l_1 \ll y$; здесь $\vec{i}$ – единичный вектор, направленный от отрицательно заряженной сферы к положительно заряженной.

3) $U_1 \approx \dfrac{\rho I_1}{2\pi r_1}$ для $l_1 \gg r_1$; $R_1 = \dfrac{\rho}{2\pi r_1}$; $P_1 = \dfrac{\rho I_1^2}{2\pi r_1}$.

4) $R_3 = \dfrac{\rho}{2\pi r_2}$; $U_2 = \dfrac{\rho I_1 l_1 l_2}{4\pi y^3}\dfrac{R_2}{R_2 + \dfrac{\rho}{2\pi r_2}}$;

$$P_2 = \left(\frac{\rho I_1 l_1 l_2}{4\pi y^3}\right)^2 \frac{R_2}{\left(R_2 + \dfrac{\rho}{2\pi r_2}\right)^2}.$$

5) $R_{2\text{опт}} = \dfrac{\rho}{2\pi r_2}$; $P_{2\max} = \dfrac{\rho\left(I_1 l_1 l_2\right)^2 r_2}{32\pi y^6}$.

Задача 3

1) $I \approx 0{,}7MR^2$.

2) См. рис.7. Уравнения движения платформы:

$$m_1 g \sin\theta - f_{12} - f_{13} = m_1 a,$$

$$m_1 g \cos\theta = N_{12} + N_{13},$$

$$N_{12}l - N_{13}l + f_{12}h_1 + f_{13}h_1 = 0,$$

где $m_1 = 5M$, $h_1 = h + d/2$;

заднего цилиндра:

$$f_{21} - f_2 + Mg\sin\theta = Ma,$$

$$N_2 - N_{21} - Mg\cos\theta = 0,$$

$$f_2 R = Ia/R,$$

где $f_2 = \mu_2 N_2$;

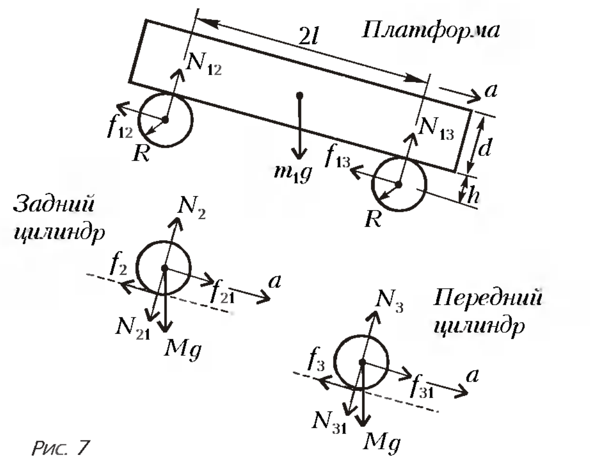


Рис. 7

переднего цилиндра:

$$f_{31} - f_3 + Mg\sin\theta = Ma,$$

$$N_3 - N_{31} - Mg\cos\theta = 0,$$

$$f_3 R = Ia/R,$$

где $f_3 = \mu_2 N_3$.

3) Возможны три варианта.

а) Оба цилиндра катятся без проскальзывания:

$$a_1 = \frac{7Mg\sin\theta}{7M + 2I/R^2} \approx 0{,}833 g\sin\theta, \quad \operatorname{tg}\theta \le \frac{3{,}5\mu_1}{0{,}5831 + 0{,}41\mu_1 h/l}.$$

б) Оба цилиндра проскальзывают:

$$a_2 = g\sin\theta - \mu_2 g\cos\theta, \quad \operatorname{tg}\theta > \frac{3{,}5\mu_1}{0{,}5831 - 0{,}41\mu_1 h/l}.$$

в) Передний цилиндр катится, а задний проскальзывает:

$$a_3 = \frac{7Mg\sin\theta - \mu_2 N_2}{7{,}7M} \approx$$

$$\approx 0{,}9091 g\sin\theta - \frac{\mu_2 g}{7{,}7} \cdot \frac{7\cos\theta + 0{,}1818\sin\theta}{1 + \left(1 + 0{,}725\mu_2 h/l\right)/\left(1 - \mu_2 h/l\right)}.$$

4) $v = \sqrt{1{,}666 s_0 g\sin\theta + 2a_2\left(s - s_0\right)}$;

$$\omega = \frac{\sqrt{1{,}666 s_0 g\sin\theta}}{R} +$$

$$+ \frac{\mu_2 N_2 R}{I}\frac{-\sqrt{1{,}666 s_0 g\sin\theta} + \sqrt{1{,}666 s_0 g\sin\theta + 2a_2\left(s - s_0\right)}}{a_2}.$$

XI Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Письменный индивидуальный тур

МАТЕМАТИКА

1. а) $2^{2003}-1$; б) $9\cdot 2^{2002}$. *Указание.* Умножим число $A=\overline{a_1 \ldots a_k}$, где $a_1, \ldots, a_k \neq 0$ – цифры, на $\underbrace{99\ldots9}_{n}$, $n \geq k$. Имеем

$$B=A\left(10^n-1\right)=A\cdot 10^n-A=\overline{a_1\ldots a_k \underbrace{00\ldots0}_{n}}-\overline{a_1\ldots a_k}.$$

Выполняя вычитание «столбиком», получим

$$B=A\left(10^n-1\right)=\overline{a_1\ldots\left(a_k-1\right)\underbrace{99\ldots9}_{n-k}\left(9-a_1\right)\left(9-a_2\right)\left(10-a_k\right)}.$$

Это число $(n+k)$-значно, а сумма цифр его равна $9n$. Поэтому количество цифр в десятичной записи произведения равно

$$1+2+2^2+\ldots+2^{2002}=2^{2003}-1,$$

а сумма цифр равна $9\cdot 2^{2002}$.

2. h^2. *Указание.* На продолжении стороны AD за точку D возьмем точку D' такую, что $AD'=CD$. Треугольники $D'AB$ и BDC равны. Поэтому треугольник $D'BD$ – равнобедренный и, кроме того, прямоугольный.

3. $\sqrt[3]{3/2}$. Пусть $y=2x^3+x-3$, тогда $x^3=\dfrac{y-x+3}{2}$ и $y^3=3-\dfrac{y-x+3}{2}$, т.е.

$$x=2y^3+y-3.$$

Осталось решить систему уравнений

$$\begin{cases} y=2x^3+x-3, \\ x=2y^3+y-3. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, после преобразований получаем уравнение

$$(x-y)\left(x^2+xy+y^2+1\right)=0.$$

Второй множитель заведомо не равен нулю

$$\left(x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2 \geq 0\right),$$

поэтому $x=y$.

4. а) Нет; б) нет; в) нет. *Указание.* Пусть $n-1$, n, $n+1$ – последовательные целые числа. Сумма их квадратов равна $3n^2+2$ и при делении на 9 имеет остатки 2 или 5. В то же время сумма кубов нескольких последовательных чисел при делении на 9 может иметь остатки 0, 1 или 8.

5. 120°. *Указание.* Точка L является точкой пересечения биссектрис внутреннего угла ABK и внешнего угла AKC треугольника ABK. Поэтому AL – биссектриса внешнего угла при вершине A этого треугольника.

6. 11. Если груз представляет собой 44 ящика с массой $\dfrac{36}{44}$ т $=\dfrac{9}{11}$ т, то меньше чем за 11 рейсов его перевезти нельзя. Покажем, как можно перевезти весь груз за 11 рейсов. Сначала будем загружать ящики в машину по одному до тех пор, пока масса груза в кузове не превысит 4 т. Снимем после этого последний положенный ящик, отложим его в сторону и отправим машину. Затем повторим такую процедуру 7 раз. Останутся 8 отложенных ящиков и еще сколько-то ящиков с общей массой, меньшей 4 т. Очевидно, что все оставшиеся ящики можно увезти за 3 рейса.

7. Пусть, для определенности, $m \leq n$. Разрезать прямоугольник $m\times n$ на уголки можно тогда и только тогда, когда $m\times n$ делится на 3, кроме случаев: $m=1$, n любое; $m=3$, n нечетно. *Указание.* Если $m\times n$ делится на 6, прямоугольник можно разрезать на прямоугольники 2×3 и, следовательно, на уголки. При нечетных $m\geq5$, $n\geq9$ вырежем из прямоугольника $m\times n$ угловой прямоугольник 5×9. Оставшаяся часть доски разрезается на прямоугольники 2×3, а сам прямоугольник 5×9 без труда разрезается на уголки.

ФИЗИКА

1. а) $s=\dfrac{ml}{m+M}$; б) $s=0$, при $k\to0$ к концу движения рыбака лодка сдвинется на $s\approx\dfrac{ml}{m+M}$, а обратное смещение лодки будет сравнимо с s через большое время $t\sim\sqrt{\dfrac{m+M}{k}}$.

2. $k=4$. *Указание.* Во втором случае шнур в конце движения окажется нерастянутым.

3. $T=2\pi\sqrt{\dfrac{R}{(4\alpha)^3 g}}\approx230$ дней, где R – радиус Земли, $\alpha=0{,}001$.

4. $k=28/25=1{,}12$.

5. $v=\sqrt{\dfrac{q^2\Delta R}{4\pi\varepsilon_0 R^2 m}}$.

6. $a=\dfrac{mg}{m+\varepsilon_0 SdB^2}$.

7. $\alpha=\arcsin\dfrac{m_p}{m_d}=\arcsin\dfrac{1}{2}=30°$.

Устный командный тур

МАТЕМАТИКА

1. 6 ч. **2.** Может. См. рис.8.

3. Не является, ибо $16016003+1=4002^2$.

4. 17. **5.** 5.

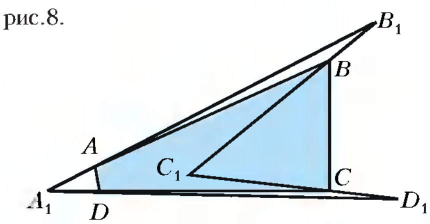


Рис. 8

6. На прямой l возьмем точку O и проведем полуокружность радиусом OA с центром в точке O (первая линия), пересекающую l в точках K и L. Затем раствором циркуля, равным KA, проведем окружность с центром в точке L, пересекающую полуокружность в точке A' (вторая линия). Наконец, линейкой проводим прямую AA' (третья линия).

7. $a>b$. Это легко следует из цепочки неравенств

$$\frac{1}{2}<\sqrt{a(1-b)}\leq\frac{a+1-b}{2}.$$

8. Можно. Пусть нужной тройки команд нет. Возьмем любые 2 команды A и B и будем считать, что A выиграла у B. Но тогда A выиграла и у всех команд, проигравших B, т.е. A набрала больше очков, чем B. Таким образом, любые две команды набрали по разному числу очков. Но тогда найдется команда, набравшая ровно 7 очков. Противоречие.

9. Племяннику в 2025 году исполнится 45 лет, так что в 2002 году ему исполнилось 22 года.

10. 8. Пусть v_A, v_B и v_C – скорости мотоциклистов, t – время, по прошествии которого они оказались в одной точке, l – длина дороги. Тогда $v_At-v_Bt=4l$, $v_Bt-v_Ct=5l$, т.е. $v_At-v_Ct=9l$. Значит, A прошел на 9 кругов больше, чем C, и, следовательно, обгонял его 8 раз.

ФИЗИКА

2. Падение. **3.** Разжечь костер под трубой.

4. Лодка будет плавать, если верхний край ящика окажется выше уровня воды в реке.

5. Примерно 65 дней.

6. В первом чайнике уровень воды ниже основания носика.

7. В 8 раз.

8. Космонавт никогда не упадет на Землю, а будет двигаться по эллиптической орбите, близкой к круговой.

9. Период колебаний такого маятника не меняется в зависимости от температуры, поскольку тепловое расширение ртути приводит к подъему центра тяжести системы, что компенсирует тепловое удлинение стержня маятника.

10. $s = \sqrt{2hR} \approx 3{,}6$ км (здесь R – радиус Земли, $h = 1$ м).

История научных идей и открытий

МАТЕМАТИКА

1. Существует. *Указание.* Пусть $a = 2k + 1$ – нечетное натуральное число, а $a^2 + b^2 = c^2$. Тогда $c^2 - b^2 = (2k+1)^2$. Подберем b и c так, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{cases} c - b = 1, \\ c + b = (2k+1)^2. \end{cases}$$

Треугольник со сторонами

$$a = 2k + 1,\ b = 2k^2 + 2k,\ c = 2k^2 + 2k + 1$$

– искомый.

2. а) $\frac{2}{19} = \frac{1}{10} + \frac{1}{190}$; б) $\frac{7}{19} = \frac{2}{19} + \frac{5}{19} = \frac{1}{10} + \frac{1}{190} + \frac{1}{4} + \frac{1}{76}$.

Возможны и другие представления.

3. б) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. Продлим отрезок AM (рис.9) за точку M на расстояние $MB' = MB$. Тогда

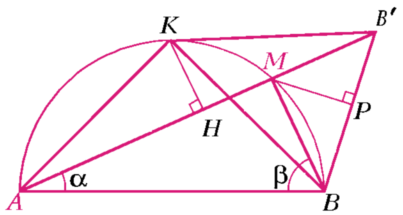


Рис. 9

$\angle B'MB = \alpha + \beta$, а $\angle B'MP = \frac{\alpha+\beta}{2}$, т.е. MP – биссектриса угла $B'MB$, а следовательно, высота и медиана в треугольнике BMB'. Поэтому $KB' = KB = KA$, т.е. треугольник AKB' равнобедренный и

$$AH = HM + MB' = HM + MB.$$

Пусть R – радиус окружности. Тогда $AM = 2R\sin\beta$,

$BM = 2R\sin\alpha$, $AH = AK\cos\angle KAM = 2R\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Итак, $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

4. Пусть $n = kp$, где $k > 1$, $p > 1$. Тогда

$$2^n - 1 = \left(2^k\right)^p - 1 = \left(2^k - 1\right)\left(\left(2^k\right)^{p-1} + \left(2^k\right)^{p-2} + \ldots + 1\right)$$

– составное число.

5. Это великий норвежский математик Нильс Хенрик Абель (1802 – 1829). Речь идет о его теореме о неразрешимости в радикалах алгебраических уравнений степени $n \ge 5$. (Подробнее см. статью В.Тихомирова «Абель и его великая теорема» в предыдущем номере «Кванта».)

ФИЗИКА

1. а) Левкипп, Демокрит, Эпикур; б) Пифагор; в) Аристотель.

2. Траектория брошенного тела искривляется, а искривление светового пучка не наблюдается.

3. а)Законы идеальных газов и теплового расширения вещества. б) Газовые. в) Очень низкие и очень высокие.

4. Г.Кавендиш (1731–1810).

5. Это сила светового давления, которую изучал П.Н.Лебедев.

Московская студенческая олимпиада по физике

1. $F = kmv^2$, где $k = 0{,}001$ м$^{-1}$. **2.** $R_0 = 16\sigma/(9\rho gH)$.

3. $v_{\text{хар}} = \left(1 + \sqrt{2/3}\right)\sqrt{GR/2}$. *Указание.* Сначала корабль нужно перевести на эллиптическую траекторию, касательную к поверхности планеты, а затем совершить непосредственно мягкую посадку.

4. $v = v_0 x_0 / x$. **5.** $A = q(0{,}62q + 2Q)/(8\varepsilon_0 R)$.

6. $\rho = \mu_0\varepsilon_0 j^2/(en)$; $\tau = \rho R/2$. **7.** $A = -\mu_0 l d I_0^2/(4a)$.

8. $T_{\max} = 2\Delta T$.

9. $q = \sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)/3$, где σ – постоянная Стефана–Больцмана; $f = g/c$.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Московский Центр непрерывного математического образования
kvant.mccme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru

Курьер образования
www.courier.com.ru

Vivos Voco!
vivovoco.nns.ru
(раздел «Из номера»)

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.А.Акатьева, В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №

Крамник не справился с «Фрицем»

В экзотическом королевстве Бахрейн в октябре 2002 года состоялся матч из восьми партий между чемпионом мира Владимиром Крамником и программой «Фриц». Он проходил с классическим контролем времени: 2 часа на сорок ходов + 1 час на двадцать. Поединок можно разбить на две равные, но совершенно непохожие части. Если судить по первой половине, то человек сумел подобрать ключи к электронному сопернику, а если по второй, то «Фриц» был абсолютно неуязвим.

На старте, играя черными, Крамник избрал берлинский вариант испанской партии, тот самый, который так и не сумел пробить Каспаров в их матче за корону. Черные ценой некоторого пешечного дискомфорта разменивают ферзей, и игра из дебюта стремительно переходит в эндшпиль с ничейными очертаниями. Поначалу машина действовала точно, сохранила инициативу, но когда фигур осталось совсем мало, неожиданно перешла в ничейное пешечное окончание.

Во второй партии в принятом ферзевом гамбите Крамник тоже сразу предложил размен ферзей. «Фриц» сочетал странные ходы с остроумными, но перевес белых постепенно нарастал и по дороге к ладейному окончанию набрал критическую массу. Машина признала свое поражение.

По тому же сценарию проходили и следующие две партии. Если в первых двух встречах размен ферзей состоялся на восьмом ходу, то в третьей (шотландская партия) – на девятом. Крамник диктовал свои условия и легко завоевал очко. В четвертой возникла защита Тарраша, и размен ферзей произошел чуть позже, на 18-м ходу. Снова Владимир добился заметного перевеса, и «Фрицу» еле-еле удалось устоять.

Казалось, исход матча предрешен. Но тут «Фриц» получил серьезное внушение от «тренеров», поменял дебютный репертуар, и неожиданно все перевернулось на 180 градусов. В пятой партии Крамник избрал систему Ласкера в ферзевом гамбите. В ней происходит ряд разменов, но ферзи остаются на доске. И тут произошел случай, который встречается у чемпионов мира раз в жизни: в чуть худшей позиции человек «зевнул» смертельный шах конем, потерял собственного коня и немедленно сдался.

В шестой партии рассерженный Крамник вступил с «Фрицем» в бурную тактическую схватку. Была разыграна новоиндийская защита, дебют с ничейными тенденциями, но чемпион мира решился на жертву коня, и черный король двинулся в опасное плавание. Машина была дальновиднее своего соперника, остроумно защищалась и перехитрила человека. Счет стал 3 : 3.

В двух последних партиях матча Крамник и «Фриц» избегали риска: фигуры почти не покидали доску, но и не вступали в конфликт. В седьмой партии снова встретилась новоиндийская защита, а в восьмой – славянская.

Окончательный счет 4 : 4 для «Фрица» – почетный, для Крамника – выгодный (он получил 800 тысяч вместо миллиона в случае победы), для человечества, увы, – обидный. Неужели роботы достигли уровня чемпионов мира?

Какие изменения произошли в мире компьютерных шахмат после 1997 года, когда Каспаров уступил «Дип Блю»? На первый взгляд, человек подтянулся: как-никак ничья лучше, чем поражение. Но здесь есть один нюанс. Дело в том, что Каспаров годом раньше легко обыграл «Дип Блю» и, понятное дело, даже не представлял себе, что электронный соперник в состоянии взять над ним верх. Ко второму матчу он отнесся без должного внимания, да и в процессе игры порой действовал легкомысленно. Что касается Крамника, то он учел ошибки своего предшественника, понимал, что поединок с «Фрицем» предстоит нешуточный, готовился к нему целый год, даже избегал встреч с себе подобными, а одолеть робота так и не сумел!

Первую половину матча лучше всего характеризует вторая встреча.

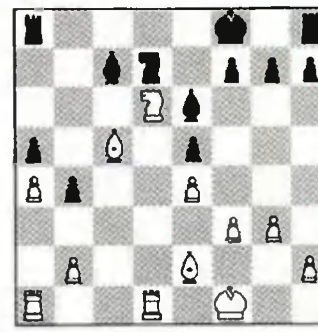
Крамник – «Фриц»

Принятый ферзевый гамбит

1. d4 d5 2. c4 dc 3. ♘f3 ♘f6 4. e3 e6 5. ♗:c4 c5 6. 0-0 a6 7. dc! Не претендуя на многое, но обеспечивая себе чуть лучшее окончание. Впрочем, перевес скоро становится решающим. **7... ♕:d1+ 8. ♔:d1+ ♗:c5 9. ♔f1.** Встречалось и 9. ♗e2 или 9. ♘bd2. **9....b5?** Выглядит активно, но выдвинутая вперед коневая пешка только доставит компьютеру хлопоты.

10. ♗e2 ♗b7 11. ♘bd2 ♘bd7 12. ♘b3 ♗f8. Отступление слоном на исходный рубеж удивило и даже возмутило большинство комментаторов. А все дело в том, что «Фриц» полагал, что белому коню нечего делать на b3, и он должен вернуться на d2, тогда и слон опять появится на c5 – черные не возражают против ничьей повторением ходов. Но у коня совсем другие планы. Человек, естественно, сыграл бы 12... ♗e7 или 12... ♗b6.

13. a4 b4. Лучше было избавиться от этой пешки 13...ba 14. ♖:a4 ♘c5 15. ♘:c5 ♗:c5, чем терять ее (через 36 ходов!). **14. ♘fd2.** Белые кони оккупируют ферзевый фланг соперника. **14... ♗d5 15. f3 ♗d6.** Черные слоны суетятся, а Крамник захватывает все больше пространства. **16. g3 e5 17. e4 ♗e6 18. ♘c4 ♗c7 19. ♗e3 a5.** Не пуская на a5 коня, но он идет в другом направлении. **20. ♘c5 ♘:c5 21. ♗:c5**



♘d7. Король черных застрял в центре, и они пытаются наладить оборону. **22. ♘d6+ ♔f8!** Положение «Фрица» сомнительное, но фигуры вступили в соприкосновение, и машина пытается запутать обстановку. **23. ♗f2.** Вскрытый шах не опасен: 23. ♘b5+ ♘:c5 24. ♘:c7 ♖c8 25. ♘:e6+ fe, и черный конь превосходит белого слона.

23... ♗:d6 24. ♖:d6 ♔e7 25. ♖ad1 ♖hc8 26. ♗b5 ♘c5 27. ♗c6 ♗c4+ 28. ♔e1 ♘d3+. Теперь происходят массовые размены, но возникающий ладейный эндшпиль явно в пользу белых. **29. ♖1:d3 ♗:d3 30. ♗c5! ♗c4!** И снова черный король не боится вскрытого шаха, нельзя 30... ♔f8? из-за 31. ♖d8×.

31. ♖d4+ ♔f6 32. ♖:c4 ♖:c6 33. ♗e7+ ♔:e7 34. ♖:c6 ♔d7 35. ♖c5. Черных подводит слабость пешек, поспешно выдвинутых ими в дебюте. **35...f6 36. ♔d2 ♔d6 37. ♖d5+ ♔c6 38. ♔d3 g6 39. ♔c4 g5 40. h3 h6 41. h4 gh 42. gh ♖a7 43. h5 ♖a8 44. ♖c5+ ♔b6 45. ♖b5+ ♔c6 46. ♖d5 ♔c7 47. ♔b5 b3.** Приходится расставаться с материалом, шансов на спасение нет. **48. ♖d3 ♖a7 49. ♖:b3 ♖b7+ 50. ♔c4 ♖a7 51. ♖b5 ♖a8 52. ♔d5 ♖a6 53. ♖c5+ ♔d7 54. b3 ♖d6+ 55. ♔c4 ♖d4+ 56. ♔c3 ♖d1 57. ♖d5+! Черные сдались.** После размена ладей одна из белых пешек проходит в ферзи.

Е. Гик

Индекс 70465

По обилию изображений на монетах и банкнотах мира НИКОЛАЙ КОПЕРНИК (1473–1543) может сравниться лишь с Альбертом Эйнштейном и Марией Склодовской-Кюри. Так, великий польский астроном представлен на многотиражных медно-никелевых монетах достоинством в 10 злотых, отпечатанных в 1959, 1965 и в 1967–1969 годах. В 1973 году к 500-летию со дня рождения Коперника в Польше и Германии были выпущены юбилейные монеты достоинством в 100 злотых и 5 марок соответственно, причем на немецкой монете было изображена гелиоцентрическая система мира. Родина Коперника Торунь представлена на двух польских монетах 1989 года , а его «Alma mater» Краковский университет – на двух монетах 1964 года. Портрет ученого и его гелиоцентрическая система изображены также на двух польских банкнотах достоинством в 1000 злотых 1965 и 1982 годов выпуска.

(Подробнее о Николае Копернике – внутри журнала.)

Физики и математики на монетах мира