КВАНТ

НОЯБРЬ ДЕКАБРЬ 2002 № 6

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Бюро Квантум

Мариан Смолуховский и броуновское движение

(к 130-летию со дня рождения)

А.ГАБОВИЧ

Существенный признак того, что в обыденной жизни и в науке мы обозначаем как случайность, можно кратко определить следующим образом: малые причины – большие следствия.

М.Смолуховский

Гипотеза о существовании атомов, из которых состоит вещество, родилась в Древней Греции (Демокрит и Левкипп, 5 в. до н.э.). Однако до середины XIX века она оставалась только одним из возможных вариантов микроструктуры Вселенной. Чего же не хватало тогда исследователям, чтобы доказать существование атомов и молекул? Отчасти – экспериментальных данных. Что же касается основополагающей молекулярно-кинетической теории, то она уже была создана Дж.Максвеллом и Л.Больцманом. Однако сделать следующий шаг, базируясь на молекулярно-кинетической концепции, было очень трудно методически и идейно. Противоречие «дискретное – непрерывное» казалось в то время непреодолимым, причем не только в обсуждаемом здесь вопросе, но также, например, при попытках примирить квантовый характер взаимодействия света с веществом и непрерывность классического электромагнитного поля. Интересно, что в решение обеих проблем значительный вклад внес Альберт Эйнштейн, причем начало этому было положено в одном и том же 1905 году.

Научное сообщество в конце XIX столетия столкнулось с еще одним родственным кругом вопросов, которые задавали Больцману ехидные оппоненты в связи с его знаменитой H-теоремой, выражающей закон возрастания энтропии для изолированной системы. Этой теоремой Больцман как будто бы доказывал необратимость эволюции системы многих частиц (например, газа) при идеальной обратимости механического движения каждой отдельной частицы, описываемого уравнениями динамики Ньютона. Два «главных» вопроса принадлежали Э.Цермело и И.Лошмидту, и сформулировать их можно приблизительно следующим образом. 1) Как согласовать второй закон статистической термодинамики – закон возрастания энтропии, т.е. беспорядка, – с уже известной на то время теоремой великого французского математика А.Пуанкаре про обязательный возврат динамической системы в окрестность начального состояния? 2) Как согласовать этот же второй закон с неизменностью базовых динамических (ньютоновских) уравнений движения относительно обращения направления времени и скоростей всех частиц? Исчерпывающие ответы на эти вопросы человечество не получило до сих пор, хотя соответствующие исследования привели к созданию замечательной науки – статистической теории динамических систем (Дж.Биркгоф, А.Колмогоров, Я.Синай, В.Арнольд).

Однако обоснование атомно-молекулярной гипотезы строения вещества было получено значительно раньше и на основе других соображений. При этом были не только объяснены имеющиеся факты, озадачивающие ученых, но и предложены новые опыты, окончательно похоронившие аргументы противников кинетической теории материи. Кроме того, в соответствующих теоретических работах появилась непротиворечивая статистическая интерпретация второго закона термодинамики, причем, что очень важно, были поняты и сформулированы ограничения на его применение. Здесь имеются в виду совокупности работ по теории броуновского движения и теории флуктуаций. Авторами этих публикаций были двое молодых ученых, работавших в одиночестве и вдалеке от ведущих научных центров: сотрудник патентного бюро в Цюрихе (Швейцария) Альберт Эйнштейн, родившийся в 1879 году, и профессор теоретической физики Львовского университета (Австро-Венгрия) Мариан Смолуховский, который родился на 7 лет раньше, в 1872 году.

Эйнштейн и Смолуховский работали над указанным кругом вопросов с начала XX века и до первой мировой войны. Они решили ключевые проблемы, размышляя по большей части независимо, а иногда – опираясь на результаты друг друга. Известно, что каждый из них с глубоким уважением относился к достижениям коллеги и результатам других современников, которые также внесли огромный вклад в теорию и экспериментальное ее подтверждение. Среди них в первую очередь необходимо выделить таких ученых, как лорд Рэлей (Рейли), П.Ланжевен, Т.Сведберг и Ж.Перрен.

Иллюстрация П.Чернуского

В начале XX столетия физики безоговорочно признавали равноправность участия Эйнштейна и Смолуховского в основополагающих открытиях, сделанных в области статистической физики и кинетической теории. Однако после преждевременной смерти Смолуховского (в 1917 году) фигура гениального Эйнштейна, который в то время уже был автором специальной и общей теорий относительности и одним из основателей квантовой физики, в глазах широкой научной общественности вышла на первый план и в обсуждаемых здесь областях науки. В результате сложилось так, что личность Смолуховского как бы отошла на задний план. (Отметим, кстати, что серьезные историки физики такой досадной ошибки никогда не делали.)

Однако не это является наиболее интересным при рассмотрении самой истории теоретических исследований атомно-молекулярного движения, которые проводили Смолуховский и Эйнштейн. Оказалось, что они использовали существенно отличающиеся методические подходы, которые, тем не менее, часто приводили к полностью или частично совпадающим конечным результатам, эффективно дополняя двух друга. В частности, из работ Смолуховского родилась теория стохастических процессов – один из разделов статистической физики. Собственно говоря, Смолуховский внес вклад и в математическую сторону упомянутой теории. Его работы стали классическими наряду с чисто математическими исследованиями русских ученых А.Маркова и А.Колмогорова. Смолуховский был первым, кто использовал теорию вероятностей при анализе случайных перемещений собственных молекул жидкости, а также крохотных посторонних частиц в окружении молекул среды, которые непрерывно движутся под действием присущего им беспокойства, т.е. тепловой энергии. Хаотические метания посторонней частицы и представляют собой знаменитое броуновское движение, открытое английским ботаником Р.Броуном (Брауном) в 1827 году.

Попытаемся разъяснить суть явлений, вызванных существованием тепловых флуктуаций, и проследим за историей их теоретического осмысления. Рассматривая эти революционные события, мы подробно остановимся на роли только одного из двух главных героев – Мариана Смолуховского. Связано это с тем, что жизнь и творчество Альберта Эйнштейна хорошо известны, благодаря обширной научно-биографической и популярной литературе. Конечно, там где это необходимо для сохранения исторической правды, будет проанализирован и вклад Эйнштейна, и роль других ученых начала XX века. Любопытно отметить, что глубокое проникновение в проблему броуновского движения молодого Эйнштейна, хотя и было пионерским и позволило получить основные формулы, в идейном смысле оказалось слишком сложным. В результате все попытки популярного изложения основаны как раз на более прозрачном подходе Смолуховского.

Хорошо известно, что имеется несколько важных циклов исследований, где творчество Эйнштейна пересекается с работами его предшественников, современников и последователей. Вспомним хотя бы специальную теорию относительности (СТО), в которую кроме Эйнштейна существенный вклад внесли Г.Лоренц, А.Пуанкаре и Г.Минковский. Однако этих великих ученых авторы учебников и популярных книжек никогда не забывают, а иногда даже (несправедливо) отмечают как главных авторов СТО, отрицая доминирующую роль Эйнштейна. Причина такой «благосклонности» понятна: указанные исследователи широко известны другими своими достижениями, так что их интеллектуальная мощь не вызывает сомнений у историков науки. В то же время для Смолуховского достижения в области динамической теории флуктуаций и статистического обоснования второго закона термодинамики явились вершиной творческого наследия. Ему «не повезло» в том смысле, что младший коллега после потрясающе плодотворного 1905 года молниеносно стал звездой первой величины.

Как указывал выдающийся математик и физик М.Кац, который учился в Львовском университете в 30-е годы XX столетия, когда Львов принадлежал Польской республике, тут проявился эффект святого Матфея. Этот экзотический термин, введенный в оборот Р.Мертоном в 1968 году, основывается на теоретическом положении, содержащемся в Евангелии от Матфея. А именно, в этом источнике говорится: «Ибо, кто имеет, тому дано будет и приумножиться; а кто не имеет, у того отнимется и то, что имеет» (Ев. от Матфея, глава 13, стих 12). Сформулированный эффект много раз срабатывал в истории науки, иногда даже при отсутствии злого умысла со стороны общественности. Особенно характерны случаи, когда открытия должны были бы по праву разделить ученые условного «Запада» и условного «Востока». Так пострадали от модных предпочтений А.Попов (радио), Л.Мандельштам и Г.Ландсберг (комбинационное рассеяние света), В.Фабрикант (лазеры) и многие другие замечательные ученые и изобретатели. В области сверхпроводимости, в которой работает автор этих строк, ему не раз приходилось лично наблюдать это не очень приятное для пострадавших явление. С полным на то основанием «лауреатом святого Матфея» можно считать и Смолуховского.

Мариан Смолуховский родился 28 мая 1872 года в городе Вордербрюль под Веной в семье юриста Вильхельма Смолуховского и его жены Теофилы Шчепановской. Его отец занимал высокую должность секретаря канцелярии австрийского императора Франца Иосифа. Мать была культурной и музыкально одаренной женщиной, благодаря которой Мариан стал квалифицированным и полным энтузиазма пианистом (так, находясь вне дома хотя бы короткое время, он всегда арендовал пианино). Кроме того, мать передала сыну польские культурные традиции. Именно поэтому в будущем он выберет в качестве места работы провинциальные Львовский и Краковский университеты, единственные на то время университеты, где преподавали по-польски, хотя они тогда и не были передовыми учреждениями в области точных наук. Пришлось Смолуховскому самому сделать их таковыми!

Детство Мариана не было омрачено ни материальными, ни моральными трудностями. Он учился в знаменитой венской Терезианской гимназии, которую посещали дети аристократов и высшего чиновничества Австро-венгерской монархии. Чудесный учитель А.Хёфлер способствовал возникновению интереса к физике, астрономии и, вообще, к естествознанию. Окончив гимназию с отличием, Смолуховский поступил в Венский университет, где выбрал физику и математику в качестве основных предметов.

Интересно отметить, что во время обучения и позже, став профессиональным исследователем, он старался уделять равное внимание эксперименту и теории. В этом Смолуховский напоминал своего кумира, великого теоретика Больцмана, у которого были действительно «золотые руки». Кстати, Смолуховскому посчастливилось непосредственно слушать лекции Больцмана, а также других известных физиков, таких, как Дж.Стефан, Ф.Экснер и Э.Мах. Эти блестящие профессора многому научили талантливого ученика, так что его «кандидатская» (в наших терминах) диссертация «Акустические исследования упругости мягких материалов» была избрана для публикации в сборнике трудов Венской академии за 1894 год и отмечена высшей наградой имени Императора и перстнем с бриллиантом.

Несколько последующих лет Смолуховский провел в научных командировках. Сначала он работал в Париже в Сорбоннской лаборатории Г.Липпмана (Нобелевского лауреата по физике за разработку методов цветной фотографии) над экспериментальными и теоретическими аспектами теплового излучения. Потом на протяжении восьми месяцев он вместе с Дж.Битти и великим английским ученым лордом Кельвином (одним из авторов второго закона термодинамики, который потом нашел свое обоснование в работах Смолуховского) изучал в Глазго влияние рентгеновских и «ядерных» лучей на электропроводность газов. Коллеги подготовили несколько совместных публикаций, а в 1901 году Смолуховский получил почетную степень доктора права университета Глазго. Это не должно удивлять, так как, согласно британской традиции, почетная степень не должна соответствовать той области знаний, в которой действительно работает награжденное лицо. На третьем этапе плодотворного трансевропейского научного турне Смолуховский работал в чудесной берлинской лаборатории Э.Варбурга, известного своими достижениями в области физической кинетики и физики ферромагнетизма. Там молодой ученый экспериментально и теоретически изучил внутреннее трение в газах. Там же окончательно сформировалось главное направление творчества Смолуховского – кинетическая теория, которую он впоследствии мастерски применил к исследованию разных явлений, вплоть до голубизны неба над Землей.

В 1898 году Смолуховский стал приват-доцентом Венского университета, а в мае следующего года занял такую же должность в университете Львова. Там он стал сначала экстраординарным профессором по теоретической физике (1900 год), а затем и полным профессором (1903 год). В то время он был самым молодым профессором Габсбургской монархии. В Львовском университете Смолуховский работал до мая 1913 года. Именно эти 14 лет счастливой творческой жизни привели к получению научных результатов, которые изменили наши представления о природе конденсированного состояния. Последние годы до своей преждевременной смерти от дизентерии, последовавшей 5 сентября 1917 года, Смолуховский преподавал и проводил исследования в Ягеллонском университете Кракова. Его интеллектуальный потенциал стал еще мощнее, он ушел из жизни действительно в расцвете сил.

Львовские годы принесли Мариану и личное счастье. В 1901 году он сочетался браком с Зофией Баранецкой, дочерью профессора математики Ягеллонского университета, от которой имел дочку Альдону (1902 год) и сына Романа (1910 год), впоследствии известного физика, работавшего в США.

Смолуховский очень любил Львов, однако жаловался на провинциализм этого города и отсутствие коллег должного уровня, с которыми он мог бы обсуждать свои результаты. Эти недостатки он компенсировал частыми поездками в Вену, где работал его ближайший гимназический друг, выдающийся физик Ф.Хазенёрль (который погиб в 1915 году на одном из фронтов первой мировой войны). Смолуховский часто ездил в Геттинген, Варшаву (тогда в составе Российской империи) и британский Кембридж, где девять месяцев сотрудничал с Дж.Дж.Томсоном (Нобелевским лауреатом, который открыл электрон) и Э.Резерфордом (Нобелевским лауреатом, который открыл атомное ядро). Он общался с Эйнштейном в связи с броуновским движением, теорию которого они оба и создали, и с проницательным физиком из Лейдена П.Эренфестом, специально приезжавшим во Львов, чтобы обсуждать актуальные научные проблемы со Смолуховским.

Несмотря на все перечисленные контакты, можно утверждать, что Мариан Смолуховский волею судьбы и вопреки собственному складу характера стал ученым-одиночкой, не работавшим в составе какой-нибудь школы и не создавшим своей. Однако его значительное влияние на развитие физики реализовалось обычным (с середины XIX столетия) способом: с помощью публикаций в научных журналах на немецком, французском и английском языках и выступлений на семинарах в ведущих научных учреждениях и на конференциях.

Особое значение имели его исследования по статистической теории атомно-молекулярного движения. К обсуждению соответствующих работ Смолуховского мы сейчас и перейдем.

Броуновское движение, про которое уже говорилось, сначала связывалось со спецификой пыльцы растений, частицы которой, «подвешенные» в жидкости, находятся в беспрестанном хаотическом движении. Сам Броун выяснил, что и неорганические частицы микронных размеров блуждают в толще жидкости не хуже органических. В связи с этим начиная с 1877 года существовала гипотеза о том, что броуновское движение возникает вследствие *теплового* движения молекул жидкости. В соответствующих рассуждениях все как будто было в порядке – когда частица маленькая, совокупная сила толчков в том или ином направлении может преобладать на протяжении небольшого отрезка времени. Почему же мы с полным основанием говорим, что правильное объяснение явления принадлежит Эйнштейну и Смолуховскому и получено лишь в 1905–1906 годах?

Дело в том, что в XIX веке ученые еще не умели теоретически описывать процессы случайного блуждания, а следовательно, и наблюдаемые зигзагообразные траектории броуновских частичек. Господствовало заблуждение, согласно которому отдельные столкновения пробной частицы с молекулами окружения, налетающими с разных сторон с *равной* вероятностью, уравновесят друг друга и дадут в среднем *нулевое* смещение. Поэтому-то научная общественность и не приняла разумную и, как оказалось потом, правильную гипотезу, приведенную выше. На самом деле рассуждения о неизбежном усреднении влияния случайных толчков глубоко ошибочны!

Как указывал Смолуховский, допущенная ошибка сродни той, которую часто делает неосторожный игрок в азартные игры. Этому игроку кажется, что при «честной» игре со случайным результатом в каждом туре (например, при подбрасывании монеты) и неизменными ставками проигрыш после достаточно продолжительной игры не может превысить одну ставку. На самом деле это ошибка, могущая стать роковой для игрока. Как следует из теории вероятностей, случайный проигрыш (или эквивалентный ему выигрыш) в азартной игре такого сорта пропорционален квадратному корню из числа туров (подбрасываний монеты). Доказательство этого вывода принадлежит Смолуховскому.

Огромной заслугой Смолуховского явилось выяснение аналогии между вероятностными играми, с одной стороны, и процессами случайного блуждания, включающими броуновское движение и диффузию, с другой. Он сделал революционное предположение, что безнадежно сложную динамическую задачу о столкновениях микрочастички с молекулами окружения можно свести к относительно простым вероятностным рассуждениям: следствие каждого столкновения как бы моделируется подбрасыванием монеты, а динамические законы механики лишь определяют базовые значения вероятностей перескока частички в другое положение в каждом элементарном акте. Из отмеченной аналогии следует, что амплитуда ее среднего смещения в результате случайного процесса будет пропорциональна *корню квадратному* из времени наблюдения. Именно эти идеи Смолуховского и легли в основу современной теории стохастических процессов в естественных науках и в экономике.

Саму формулу для зависимости смещения броуновской частицы от времени на год раньше, чем Смолуховский, получил Эйнштейн, исходя из общих принципов статистической физики и весьма сложных рассуждений. Однако оригинальный вывод Смолуховского имеет не только методическую ценность. После наглядной демонстрации Смолуховским действенности кинетической теории Больцмана физики начала XX века прониклись уверенностью в справедливость термодинамической теории флуктуаций, окончательно поверили в тепловую природу броуновского движения.

Смолуховский получил свой результат для наиболее общего случая трехмерных блужданий частиц, что требует применения сферической тригонометрии. Однако в двумерной геометрии, наиболее важной для осуществления практических наблюдений, расчеты упрощаются. (Этот вариант схематически рассматривается в Дополнении к статье.)

Теория Смолуховского и Эйнштейна была блестяще подтверждена в экспериментах Перрена и Сведберга. Теперь уже не осталось никаких сомнений касательно существования атомов и молекул – первичных частиц материи, которая находится в нормальных, земных условиях. (Для бóльших энергетических и меньших пространственных масштабов эта первичность, как известно, не имеет места, и «пальма первенства» переходит к ядрам и электронам, а затем – к кваркам и различным лептонам.) Свое идеологическое поражение признал лидер так называемого «энергетизма» (термодинамического подхода на основе непрерывности материи) и многолетний критик Больцмана В.Оствальд, который, наконец, понял, что существование атомов с необходимостью диктуется опытом. Исторические корни поверженного «энергетизма», как указывали Больцман и Эйнштейн, представляют собой чрезмерную, «аллергическую» реакцию на неспособность примитивных механических построений, столь популярных в течение XVII–XVIII столетий, объяснить электрические, магнитные и тепловые явления.

Работы Эйнштейна и Смолуховского, вызванные необходимостью дать объяснение броуновскому движению, вышли далеко за пределы этой скромной цели. Эти ученые создали *теорию флуктуаций*, радикально расширив статистическую термодинамику. В частности, современная теория фазовых переходов является флуктуационной, а построенная в начале XX века теория флуктуаций служит для нее основой. Важно подчеркнуть, что больцмановские идеи о статистическом характере второго закона термодинамики были развиты и доведены до современного уровня именно Эйнштейном и Смолуховским. Они показали, что второй закон справедлив лишь с точностью до флуктуаций, которые в малом пространственном и временнóм масштабе постоянно изменяют преимущественное направление кинетических процессов. Только отвлекшись от флуктуаций или избавившись от них путем усреднения по времени и (или) по пространству, можно воспроизвести основное направление этих процессов, однозначно и непрерывно переводящих замкнутую систему в равновесное состояние. Кстати, для так называемых открытых систем, обменивающихся с окружающей средой энергией или частицами, это уже не так. В них могут возникать причудливые неравновесные структуры – предмет исследования синергетики, относительно нового раздела статистической физики, возникшего в 60-е годы XX века.

Однако вернемся в переломные годы становления современной кинетической теории. Смолуховский ответил на упомянутые выше парадоксы возврата Цермело и необратимости Лошмидта тем, что указал на зависимость самого определения необратимости данного процесса от реализации в этом конкретном эксперименте какой-либо иерархии характерных времен. А именно, если время наблюдения мало по сравнению со средним временем возврата в первоначальное состояние, который диктуется теоремой Пуанкаре, то процесс можно считать необратимым, несмотря на обратимый динамический характер основных законов механики, которые описывают элементарные акты взаимодействия составляющих макроскопическую систему классических микрочастиц. В противоположном случае больших времен наблюдения динамические отклонения от стандартной релаксации к равновесному состоянию могут быть выявлены. Следует, однако, иметь в виду, что подобные «большие» времена для объектов лабораторного размера на много порядков превышают время жизни нашей Метагалактики, так что второй закон термодинамики исчерпывающе определяет эволюцию подобной макроскопической системы.

Смолуховскому принадлежит также объяснение невозможности «обхода» второго закона термодинамики с помощью некоторого устройства молекулярных размеров, управляющего флуктуационными процессами. Такое устройство, или эквивалентное ему в смысле динамики маленькое разумное гипотетическое существо, появилось на свет в результате фантазии Максвелла и получило название «демон Максвелла». Представим себе, что между двумя сосудами с газом имеется маленькое отверстие с дверцей. Демон, расположившийся возле отверстия, сортирует молекулы следующим образом. Пусть из левого сосуда к дверце подлетает «быстрая» молекула с энергией, превышающей среднюю тепловую энергию молекул, которая определяется температурой этого сосуда. В этом случае бдительный демон открывает дверцу, и молекула влетает в правый сосуд. Эта процедура повторяется каждый раз, когда слева оказывается очередная подходящая молекула. Аналогично демон регулирует и прохождение отверстия молекулами, появляющимися со стороны правого сосуда. Только теперь он пропускает налево лишь «медленные» молекулы, энергия которых меньше средней (тепловой), присущей правому сосуду.

Понятно, что вследствие такой целенаправленной сортировки через определенное время средняя энергия молекул, содержащихся в левом сосуде, уменьшится, т.е. понизится температура этого сосуда и заполняющего его газа. Очевидно, что температура правого сосуда, напротив, возрастет. В результате указанных процессов в системе, состоящей из соединяющихся сосудов с изначально равной температурой, произойдет самопроизвольная передача тепловой энергии от одной его части к другой, причем без выполнения работы каким-либо внешним устройством. Такое перераспределение энергии явно противоречит второму закону термодинамики, поскольку в замкнутой макроскопической системе происходит самопроизвольное отклонение от наиболее вероятного состояния.

Иными словами, наличие демона привело бы к осуществлению вечного двигателя второго рода, чего быть не может. Допустив возможность демона с описанными свойствами, мы пришли к парадоксу. Его блестяще разрешил Смолуховский. Согласно его соображениям, суть дела заключается в том, что сортировочное устройство (или, если угодно, демон) с необходимостью должно быть молекулярных размеров или включать в себя соответствующий фрагмент. А такой объект будет подвержен нерегулярным тепловым флуктуациям и в силу этого будет неспособным к целенаправленному отбору необходимых молекул.

Другим выдающимся достижением Смолуховского было объяснение голубого цвета неба. Собственно говоря, такое объяснение вроде бы уже существовало. Крупнейший английский ученый лорд Рэлей еще в 1871 году показал, что интенсивность света, рассеянного на большом количестве посторонних объектов, малых по сравнению с длиной его волны, пропорциональна четвертой степени частоты света. Поэтому и в атмосфере Земли голубая составляющая солнечного излучения рассеивается интенсивнее, чем красная. Этот рассеянный свет, попадая на сетчатку нашего глаза, формирует зрительный образ голубого неба. (Кстати, а почему цвет неба не фиолетовый – для соответствующих лучей длина волны еще меньше? Оказывается, все дело в том, что чувствительность сетчатки уменьшается для этого спектрального участка видимого света по сравнению с чувствительностью к голубым лучам.)

Однако Рэлей ошибался относительного того, на каких именно маленьких частицах рассеивается свет в атмосфере Земли. Он считал, что ими являются сами молекулы, которые двигаются в разные стороны с различными скоростями. Такое отождествление оказалось неверным, что было доказано выдающимся русским ученым Л.Мандельштамом в 1907 году: несмотря на движение молекул, рассеянные волны, исходящие от разных элементарных объемов газа, компенсируют друг друга. Уже на следующий год Смолуховский нашел правильное решение, предположив *неоднородность* среды, присущую ей из-за непрекращающихся тепловых флуктуаций. Тогда центрами рассеяния можно считать флуктуации плотности молекул газов, образующих атмосферу. Он подтвердил свою теорию собственноручно проведенным экспериментом – наблюдая голубой оттенок чистого (профильтрованного) воздуха в трубе, через которую были направлены лучи света от искусственного источника. Окончательную точку поставил Эйнштейн, получивший формулу для интенсивности рассеянного света на основании идеи Смолуховского. Интересно, что рассчитанная зависимость интенсивности от длины волны (частоты) и объема, на котором происходит рассеяние, совпадает с соответствующими зависимостями, найденными Рэлеем, т.е. несмотря на неверные исходные соображения британский ученый, руководствуясь своей фантастической интуицией, получил верную формулу!

Смолуховскому принадлежит также качественное объяснение явления критической опалесценции, т.е. резкого усиления рассеяния света на флуктуациях вблизи критической точки (например, в системе жидкость – газ). Он показал, что флуктуации кардинально усиливаются в этом случае, и, следовательно, рассеяние света на них резко возрастает. В окрестности данной точки, которой достигают на опыте соответствующим изменением давления и температуры, разница между жидкостью и газом исчезает. Если давление фиксировано, то интенсивность рассеянного излучения при этом возрастает обратно пропорционально малой разности между температурой наблюдения и критической температурой. Критическую опалесценцию легко наблюдать в школьной лаборатории. Она представляет собой еще одну наглядную демонстрацию существования флуктуаций плотности.

Стоит отметить еще несколько важных направлений деятельности Смолуховского в области физической кинетики: разработку теории осаждения частиц в поле силы тяжести и теории коагуляции коллоидов. Кроме того, в области коллоидной химии он является одним из создателей теории электрофореза – движения твердых частиц в суспензии или коллоидном растворе под действием внешнего электрического поля. Ключевое уравнение этой теории носит его имя.

В связи с приведенным выше обсуждением важнейших достижений Смолуховского необходимо отметить, что не только его конкретные предсказания и объяснения различных явлений сыграли важную роль в развитии физики XX столетия. Прежде всего сам глубокий, образный и убедительный стиль его работ, использующий математический аппарат теории вероятностей и проникнутый ее духом, изменил инструментарий и научный словарь последующих поколений физиков-теоретиков. Смолуховский внес решающий вклад в осознание научной общественностью объективного характера понятия вероятности. Как любил говорить выдающийся русский физик Л.Ландау, метод важнее результата, поскольку мощный метод позволяет получить множество новых ценных результатов.

Занятия любимой наукой, преподавательские и семейные обязанности не исчерпывали круг интересов Смолуховского. Кроме музыки и акварельной живописи, он увлекался и альпинизмом. Это пристрастие он воспринял от старшего брата – Тадеуша, химика, бывшего выдающимся альпинистом своего времени. Братья были широко известны как пара профессиональных альпинистов. Напрашивается аналогия с не менее известными датскими футболистами Борами – братьями Нильсом (великий физик, создатель теории атома) и Харальдом (известный математик). В 1911 – 1912 годах Мариан Смолуховский был президентом туристской секции Польского общества Татр, а в 1916 году получил «Серебряный эдельвейс» от Немецко-австрийского альпийского общества.

Несмотря на глубокую близость к искусству и литературе своего времени, выдающийся физик, скорее всего, был бы весьма удивлен, узнав, что лично он стал одним из героев книги «Inferno» («Ад») шведского писателя-модерниста Ю.Стриндберга. История этого эпизода известна от самого автора романа. Он писал, что во время пребывания в Париже случайно обратил внимание на несколько писем, лежавших на конторке портье. Одно из них было отправлено из Вены и заинтересовало писателя адресатом с псевдонимом (так думал Стриндберг) «Шмуляховский». Славянская фамилия показалась Стриндбергу такой странной, что он предположил, что за ней скрывается переодетый дьявол. А в действительности это было письмо к молодому Смолуховскому, который находился в Париже в научной командировке в 1895–1896 годах.

На этой лирической ноте и хочется закончить рассказ о Мариане Смолуховском, романтике науки, по классификации Оствальда.

Автор благодарен профессору Богдану Чихоцкому и доктору Марку Пенкале за помощь в поиске первоисточников. Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда «Kasa Mianowskiego» (Варшава, Польша).

Дополнение. Кинематика броуновского движения

Когда мы изучаем закономерное, неслучайное движение под действием каких-то постоянных или регулярно меняющихся во времени сил, то мы можем всегда найти мгновенную скорость тела:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\,. \qquad (*)$$

Если же силы меняются во времени случайным образом, то такого предела не существует. Как отмечал Смолуховский, отсутствие предела станет понятным, если уяснить, что переходя при наблюдениях ко все меньшим и меньшим промежуткам времени, мы все-таки рассматриваем положения частицы, которые она заняла в результате многих столкновений и изменений направления движения.

Математически динамическое уравнение для броуновской частицы можно сравнительно просто описать, вводя так называемую случайную силу, средняя величина которой равняется нулю, в отличие от среднего модуля этой величины. Это сделал в 1908 году выдающийся французский физик Ланжевен, опираясь на предшествующие результаты Эйнштейна и Смолуховского.

Однако для нашей, более скромной цели достаточно ограничиться кинематикой броуновского движения, которую можно качественно верно описать, взявши в качестве исходного пункта концепцию *молекулярного хаоса*, выдвинутую Больцманом. Собственно, так и сделал Смолуховский. Рассмотрим следом за ним извилистый путь какой-нибудь выбранной наугад броуновской частицы. Будем фиксировать ее местоположение через ряд последовательных равных между собою промежутков времени Δt. Подчеркнем, что результат, который мы сейчас получим, не зависит от величины выбранного элементарного промежутка Δt. Существует лишь практически несущественное для нашего квазимакроскопического рассмотрения ограничение на Δt снизу. А именно, Δt должно быть больше характерного времени t свободного пробега молекулы среды между последовательными столкновениями. Сам Смолуховский рассматривал броуновское движение в трехмерном пространстве. Однако нам для иллюстрации его метода достаточно рассмотреть блуждание в двумерном пространстве – на плоскости. Это позволит избежать использования сферической тригонометрии, но никак не повлияет на конечный результат и выводы.

Итак, пусть наблюдатель зафиксировал частицу, находящуюся в точке S, и включил секундомер. А выключил он его, когда частица через время $n\Delta t$ очутилась в точке F. Промежуточные положения частицы на зигзагообразной траектории, соответствующие фиксированным моментам наблюдения, будем обозначать $I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}$. Заметим, что рассматриваемая траектория – это не действительный путь частицы, а чисто условная ломаная линия, вид которой зависит от частоты измерений ее координат. Соединим точку начала изучаемого движения S и две первые промежуточные точки I_1 и I_2 в треугольник SI_1I_2. Используем геометрическую теорему косинусов, согласно которой имеет место равенство

$$(SI_2)^2 = (SI_1)^2 + (I_1I_2)^2 - 2\,SI_1 \cdot I_1I_2 \cos\varphi_1 ,$$

где φ_1 – угол при вершине I_1. Для дальнейшего анализа удобно вместо угла φ_1 ввести дополнительный ему угол α_1 между направлениями смещений SI_1 и I_1I_2. Тогда $\cos\varphi_1 = \cos(\pi - \alpha_1) = -\cos\alpha_1$, так что

$$(SI_2)^2 = (SI_1)^2 + (I_1I_2)^2 + 2\,SI_1 \cdot I_1I_2 \cos\alpha_1 .$$

Целиком аналогично для треугольника SI_2I_3 можно получить соотношение

$$(SI_3)^2 = (SI_2)^2 + (I_2I_3)^2 + 2\,SI_2 \cdot I_2I_3 \cos\alpha_2 ,$$

где α_2 – угол между направлениями смещений SI_2 и I_2I_3. Подставляя сюда $(SI_2)^2$ из предыдущего уравнения, получим

$$(SI_3)^2 = (SI_1)^2 + (I_1I_2)^2 + (I_2I_3)^2 + \\ + 2\,SI_1 \cdot I_1I_2 \cos\alpha_1 + 2\,SI_2 \cdot I_2I_3 \cos\alpha_2 .$$

Повторяя эту цепочку преобразований вплоть до конечной точки наблюдения F, придем к уравнению

$$(SF)^2 = (SI_1)^2 + (I_1I_2)^2 + (I_2I_3)^2 + \ldots + (I_{n-1}F)^2 + \\ + 2\,SI_1 \cdot I_1I_2 \cos\alpha_1 + \\ + 2\,SI_2 \cdot I_2I_3 \cos\alpha_2 + \ldots + 2\,SI_{n-1} \cdot I_{n-1}F \cos\alpha_{n-1} .$$

Учтем теперь, что *в среднем* все квадраты смещений частички за одинаковое время Δt равны между собой:

$$\overline{(SI_1)^2} = \overline{(I_1I_2)^2} = \ldots = \overline{(I_{n-1}F)^2} \equiv \overline{(\Delta R)^2} .$$

Это соотношение справедливо именно потому, что, как уже отмечалось выше, время Δt достаточно велико по сравнению со временем τ между столкновениями. Следовательно, каждое выражение в соотношении, соответствующее квадрату смещения за одно и то же время, является результатом многих столкновений. Из этих же соображений равны между собой и сами амплитуды смещений. С другой стороны, благодаря молекулярному хаосу положительные и отрицательные значения множителей $\cos\alpha_i$ в формуле для $(SF)^2$ встречаются с одинаковой вероятностью. Поэтому сумма произведений в правой части формулы будет стремиться к нулю при увеличении числа шагов n, т.е. времени наблюдения $n\Delta t$. В результате средний квадрат смещения броуновской частицы за время наблюдения составит

$$\overline{(SF)^2} \equiv \overline{R^2} = n\overline{\Delta R}^2 .$$

Если обозначить полное время наблюдения за объектом как $t \equiv n\Delta t$, то это уравнение можно переписать следующим образом:

$$\frac{\overline{R^2}}{t} = \frac{\overline{(\Delta R)^2}}{\Delta t} .$$

Теперь нам становится понятным, почему формула (∗) непригодна для описания скорости хаотического движения: времени t пропорционально не среднее смещение частицы, а его квадрат.

Таким образом, отношение квадрата смещения частицы к соответствующему времени *не зависит* ни от выбора промежутка времени между последовательными наблюдениями, ни от полного времени наблюдения. Однако естественно полагать, что это отношение зависит от свойств окружающей среды и характеристик самой частицы. Кроме того, так как случайная сила определяется тепловым движением молекул, амплитуда смещения за то же время должна возрастать с температурой. Теоретическое рассмотрение задачи о случайном блуждании на основе так называемых дифференциальных уравнений Фоккера–Планка, истоки которых лежат в трудах Эйнштейна и Смолуховского, позволяет выразить обсуждаемое отношение через феноменологический коэффициент диффузии D:

$$\frac{\overline{(\Delta R)^2}}{\Delta t} = 2D .$$

Этот факт не должен нас удивлять, ибо, как отмечал в 1906 году Смолуховский, один и тот же подход пригоден и для анализа блуждания броуновской частицы, и для движения молекулы, в том числе и собственной молекулы среды. В последнем случае процесс блуждания, по определению, является процессом самодиффузии.

Еще раньше, в 1905 году, Эйнштейн рассмотрел броуновское движение при наличии вязкого сопротивления среды с коэффициентом диссипации γ и нашел свое знаменитое соотношение между величинами γ и D:

$$D = \frac{kT}{\gamma} ,$$

где k – постоянная Больцмана, а T – температура (в кельвинах). Это уравнение дало возможность Перрену экспериментально определить k, а затем и постоянную Авогадро (за что он получил Нобелевскую премию).

В заключение нам осталось лишь указать на один интересный аспект броуновского движения. А именно, если мы увеличим разрешение микроскопа, с помощью которого наблюдаем за броуновской частицей, и уменьшим промежуток времени Δt между последовательными регистрациями положения частицы, то полученная ломаная линия будет подобна первоначальной траектории. Повторение процедуры также приведет к ломаной того же вида. Такое свойство кривых называется самоподобием. Самоподобие кривых свидетельствует о том, что пути случайного блуждания имеют так называемую фрактальную размерность. Последнюю нельзя считать ни единицей (как для обычной кривой), ни двойкой (как у поверхности). Несмотря на отсутствие знакомства непосвященных людей с фракталами, они встречаются в жизни очень часто. Классический пример тому – береговая линия. Чем более пристально в нее вглядываться, тем менее заметные, более мелкомасштабные изгибы обнаруживаются. Особенно это поражает на карте Норвегии, с ее многочисленными разветвляющимися фьордами. Другим примером могут служить дендритные кристаллы – хотя бы снежинки.

Уравнения Пелля

А.СПИВАК

В предыдущих частях статьи доказано много разных интересных теорем. Не доказана только одна, самая трудная – десятая. Эта теорема утверждает, что любое уравнение $x^2 - dy^2 = 1$, где d – натуральное число, не являющееся точным квадратом, имеет хотя бы одно решение в натуральных числах.

Я изложу четыре доказательства. Первый способ использует принцип Дирихле и приближения иррациональных чисел рациональными. Этот способ короткий и прозрачный, но у него есть принципиальный недостаток: он не дает приемлемого для практики метода нахождения решения. Похожие друг на друга другие два способа – английский и индийский методы – свободны от этого недостатка, являясь алгоритмами поиска решения. К сожалению, доказательство того, что эти алгоритмы рано или поздно останавливаются и приводят именно к наименьшему решению, требует значительных усилий.

Мне больше всего нравится четвертый способ, использующий цепные дроби. Их роль в теории уравнений Пелля не менее значительна, чем роль иррациональных чисел, о которой было рассказано в первой и второй частях статьи. Да и сами по себе цепные дроби чрезвычайно интересны.

Но прежде всего расскажу одну историю. [1]

Продолжение. Начало см. в «Кванте» №3, 4.

Вызов Ферма

Начало есть более чем половина всего.
Аристотель

«Сейчас едва ли найдется кто-нибудь, кто предлагает арифметические вопросы, и кто-нибудь, кто их понимает. Не потому ли это происходит, что до сих пор арифметику рассматривали скорее с геометрической, чем с арифметической точки зрения? Так было всегда – и в древних, и в современных работах; примером тому является даже Диофант. Ибо хотя он и более чем другие освободился от геометрии в том отношении, что ограничивает свой анализ рассмотрением рациональных чисел, однако даже у него геометрия не полностью отсутствует...

Теперь арифметика имеет, так сказать, собственную область изучения – теорию целых чисел. Евклид лишь слегка затронул ее в своих «Началах», а его

[1] *Многое из того, что вошло в эту часть статьи, заимствовано из книги Г.Эдвардса «Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел».*

Иллюстрация В.Акатьевой

последователи недостаточно занимались этой теорией (если только она не содержалась в тех книгах Диофанта, которых мы лишились вследствие разрушительного действия времени); следовательно, арифметикам предстоит развивать или восстанавливать ее.

Поэтому арифметикам, дабы осветить тот путь, по которому надо следовать, предлагаю я эту теорему, чтобы они доказали ее, или эту задачу, чтобы они решили ее. Если же преуспеют они в ее доказательстве или решении, то им придется признать, что вопросы такого рода ничем не уступают в отношении красоты, трудности или метода доказательства самым знаменитым вопросам геометрии.

> *Если дано произвольное число, которое не является квадратом, то найдется бесконечное множество таких квадратов, что если этот квадрат умножить на данное число и к произведению прибавить единицу, то результат будет квадратом.*

Пример. Пусть 3, которое не является квадратом, будет данным числом. Если умножить его на квадрат, равный 1, и к произведению добавить 1, то в результате получится 4, что является квадратом. Если то же самое число 3 умножить на 16, то получится произведение, которое при увеличении на 1 превращается в 49, тоже квадрат. И кроме 1 и 16 можно найти бесконечное множество квадратов с тем же свойством.

Но я спрашиваю об общем правиле решения – когда дано произвольное число, не являющееся квадратом. Например, найдите такой квадрат, что если произведение этого квадрата и числа 109, 149 или 433 увеличить на 1, то получится квадрат.»

Таков был вызов Ферма, который он сделал в 1657 году другим математикам, в частности английским. Очевидно, что он желает не традиционного диофантова решения в рациональных числах, а решения задачи в *целых* числах.[2] Как это ни странно, но пояснения к задаче были опущены одним из посредников в том экземпляре письма, который был передан английским математикам; в результате они сочли задачу совершенно глупой. А именно, можно ввести обозначение

$$x = 1 + \frac{m}{n} y$$

и подставить в уравнение:

$$\left(1 + \frac{m}{n} y\right)^2 - dy^2 = 1, \qquad \frac{2m}{n} y + \frac{m^2}{n^2} y^2 - dy^2 = 0,$$

$$2mn = \left(dn^2 - m^2\right) y,$$

откуда

$$y = \frac{2mn}{dn^2 - m^2}, \; x = \frac{dn^2 + m^2}{dn^2 - m^2}.$$

Полученные формулы, как легко убедиться, дают бесконечно много решений в рациональных числах.

Упражнение 54. а) Убедитесь, что эти формулы дают все решения. б) Найдите аналогичные формулы для уравнения $x^2 + y^2 = 1$.

[2] *По иронии судьбы, ныне слово «диофантово» употребляют, желая получить решения в целых числах, тогда как сам Диофант ни в одной из дошедших до нас работ не занимался решениями в целых числах, а только в рациональных.*

Когда же дополнительное требование, что x и y должны быть целыми числами, дошло до английских математиков, то они пожаловались, что условие задачи изменили. Конечно, их жалобу можно понять в свете сильной диофантовой традиции, но, как указал Ферма, было наивно надеяться, что он предложил тривиальную задачу. Как видно из приведенной здесь таблицы, задача Ферма весьма сложная: для $d = 61$ наименьшее решение – это пара $y = 226153\,980$ и $x = 1766319049$. (Впрочем, впервые посчитал это не Ферма, а родившийся в 1114 году индиец Бхаскара Акхария.) А для $d = 109$ вообще $y = 15140424455100$.

Таблица

2) 2	3) 1	5) 4	6) 2
7) 3	8) 1	10) 6	11) 3
12) 2	13) 180	14) 4	15) 1
17) 8	18) 4	19) 39	20) 2
21) 12	22) 42	23) 5	24) 1
26) 10	27) 5	28) 24	29) 1820
30) 2	31) 273	32) 3	33) 4
34) 6	35) 1	37) 12	38) 6
39) 4	40) 3	41) 120	42) 2
43) 531	44) 30	45) 24	46) 3588
47) 7	48) 1	50) 14	51) 7
52) 90	53) 9100	54) 66	55) 12
56) 2	57) 20	58) 2574	59) 69
60) 4	61) 226153980	62) 8	63) 1
65) 16	66) 8	67) 5967	68) 4
69) 936	70) 30	71) 413	72) 2
73) 267000	74) 430	75) 3	76) 6630
77) 40	78) 6	79) 9	80) 1
82) 18	83) 9	84) 6	85) 30996
86) 1122	87) 3	88) 21	89) 53000
90) 2	91) 165	92) 120	93) 1260
94) 221064	95) 4	96) 5	97) 6377352
98) 10	99) 1	101) 20	102) 101
03) 22419	104) 5	105) 4	106) 3115890
107) 93	108) 130	109) 15140424455100	110) 2
111) 28	112) 12	113) 113296	114) 96
115) 105	116) 910	117) 60	118) 28254
119) 11	120) 1	122) 22	123) 11
124) 414960	125) 83204	126) 40	127) 419775
128) 51	129) 1484	130) 570	131) 927
132) 2	133) 224460	134) 12606	135) 21
136) 3	137) 519712	138) 4	139) 6578829
140) 61	41) 8	142) 12	143) 1
145) 24	146) 12	147) 8	148) 6
149) 2113761020	150) 4		

Что сделали англичане?

Англичанам удалось не только найти частные решения при $d = 109$, 149 или 433, но и разработать общую процедуру получения решений для любого значения d. Кто это сделал – неизвестно. Хотя Джон Валлис (1616–1703) первым дал описание процедуры и получил решения в трех частных случаях, он приписывает авторство виконту Уильяму Броункеру (1620–1684). В опубликованной переписке Валлиса нет никаких указаний на то, что Броункер когда-либо сообщал ему что-либо об этом методе, кроме нескольких простых замечаний, которые, быть может, послужили зародышем идеи, развитой впоследствии Валлисом. Возможно, Валлису было важно добиться расположения Броункера и его покровительства, поэтому он и назвал этот метод методом Броункера (ибо Броункер в 1662–1677 годах был президентом основанного в 1660 году Лондонского Королевского общества). Впрочем, некоторые историки считают самого Броункера весьма способным математиком и утверждают, что по своим личным качествам Валлис скорее мог приписать себе чужие заслуги, чем отказаться от своих.

Строго говоря, англичане не решили задачу Ферма, которая заключалась в том, что при данном (не являющемся квадратом) натуральном d существует бесконечно много натуральных x таких, что dx^2+1 является квадратом. Они не доказали, что процедура всегда завершится, и, кажется, даже не понимали, что это нужно доказывать.[3]

Ферма написал письмо, в котором признал, что англичанам удалось решить его задачу, и не проявил ни малейшей неудовлетворенности их методом. Однако главным для Ферма в этом письме было убедить англичан, что перед ними была поставлена достойная задача, так что он мог сознательно закрыть глаза на недостатки.

Несколько лет спустя, подводя в письме к Каркави итоги некоторых своих открытий, Ферма указал, что англичане получили решение его задачи только в отдельных частных случаях и им не удалось дать общее доказательство. Очевидная интерпретация этого замечания заключается в том, что Ферма заметил отсутствие доказательства того, что процесс всегда приводит к решению; с другой стороны, в нем можно увидеть и менее глубокую критику того, что процесс был описан в недостаточно общих терминах. Ферма утверждает, что он мог бы дать доказательство, «надлежащим образом» применив метод бесконечного спуска. Эти слова, разумеется, нельзя считать достаточным свидетельством в пользу того, что он умел решать свою задачу.

Индийский и английский методы

Легенды гласят, что за несколько веков до нашей эры в Индии было известно равенство $2\cdot 408^2+1=577^2$. Равенство $92\cdot 120^2+1=1151^2$ вместе с изощренной техникой его вывода было получено Брахмагуптой (родился в 598 году). Общий способ решения уравнения Пелля[4] дал Бхаскара Акхария. Этот метод называют циклическим или индийским.

Познакомимся с ним на примере $d=67$. Наша цель – найти такие натуральные x и y, чтобы разность y^2-67x^2 равнялась 1. В качестве первого приближения рассмотрим равенство

$$8^2-67\cdot 1^2=-3.$$

Вспомнив формулу

$$\left(a^2-67b^2\right)\left(c^2-67d^2\right)=(ac+67bd)^2-67(bc+ad)^2$$

и применив ее к равенствам $8^2-67\cdot 1^2=-3$ и $r^2-67\cdot 1^2=s$, где r (а тем самым и s) будет определено позже, получим

$$(8r+67)^2-67(r+8)^2=-3s.$$

Пытаясь сделать правую часть (по модулю) как можно меньшей только за счет выбора наименьшего по модулю значения s, мы выбрали бы $r=8$, при котором $s=-3$, и получили бы равенство

$$131^2-67\cdot 16^2=9,$$

с которым непонятно что делать дальше.

Идея циклического метода – выбор такого r, чтобы $r+8$ делилось на 3 и s при этом было как можно меньше по модулю. (Когда это сделано, обе части уравнения разделятся нацело на 3^2.)

Идея английского метода – выбор такого как можно большего r, что $r^2<d$ и $r+8$ делится на 3.

Как видите, методы очень похожи. Оба можно применять для поиска решений при данном d, не зная заранее, что это приведет к успеху. (Между прочим, априори нет никакой уверенности в том, что в общем случае в английском методе после каждого шага r будет существовать. Это – одна из теорем, которые надо доказывать, обосновывая английский метод.)

Проведем подробно вычисления для циклического метода. Чтобы $r+8$ делилось на 3, число r должно равняться одному из чисел бесконечной в обе стороны арифметической прогрессии ..., −2, 1, 4, 7, 10, 13, 16, ... Выбор $r=7$ дает наименьшее по модулю значение $s=-18$. Этим r и s соответствует равенство

$$123^2-67\cdot 15^2=54,$$

которое после сокращения на 9 превращается в

$$41^2-67\cdot 5^2=6.$$

Теперь – следующий шаг циклического метода:

$$(41r+67\cdot 5)^2-67(5r+41)^2=6s.$$

Число $5r+41$ делится на 6 при $r=\ldots,\ -7,\ -1,\ 5,\ 11,\ 17,\ 23,\ldots$ Выбор $r=5$ дает наименьшее по модулю $s=-42$, и мы получаем равенство

$$540^2-67\cdot 66^2=6\cdot(-42),$$

которое после сокращения на 6^2 превращается в

$$90^2-67\cdot 11^2=-7.$$

Дальше надо выполнить следующий шаг циклического метода, потом еще один, и так до тех пор, пока не получим равенство, в правой части которого будет 1.

---

[3] *Даже Эйлеру не удалось доказать, что английский метод всегда приводит к успеху. Удалось это Лагранжу через 110 лет после того, как Валлис отослал ответ на вызов Ферма.*

[4] *Термин «уравнение Пелля» возник в результате ошибки Леонарда Эйлера. Почему-то – возможно, по причине смутных воспоминаний, оставшихся от чтения «Алгебры» Валлиса,– у Эйлера создалось впечатление, будто Валлис приписывает метод решения этой задачи не Броункеру, а Пеллю – современнику Валлиса, который много раз упомянут в его работах, но не имел никакого отношения к уравнению $x^2-dy^2=1$. Эйлер впервые сделал эту ошибку в 1730 году, когда ему было 23 года, но она попала и в окончательное издание «Введения в алгебру» (примерно 1770 г.). Эйлер был самым популярным математическим автором своего времени, и ошибка вошла в историю...*

Упражнения

55. Выполнив еще пять шагов циклического метода, найдите решение $48842^2 - 67 \cdot 5967^2 = 1$.

56. а) Выполните вычисления для $d = 67$, применяя английский метод. б) Сравнив английский и циклический методы для $d = 67$ и для нескольких других значений d, сформулируйте гипотезу о взаимосвязи этих двух методов.

Если вы решили эти два упражнения, то убедились, что индийский и английский методы позволяют найти решение для $d = 67$. Однако ни для английского, ни для индийского метода нет никаких очевидных причин, по которым равенство с правой частью 1 должно обязательно получиться в общем случае. Есть и много других вопросов. Например, если эти методы дадут нам какое-то решение уравнения Пелля, можно ли утверждать, что это решение – наименьшее из возможных?

Я уверен, что попытка самостоятельно разобраться в этих вопросах будет очень полезной. Любитель компьютеров может начать с написания английской и индийской программ, которые вычислят приведенную выше таблицу. А вот для обоснования циклического или английского метода (а лучше бы обоих!) вам придется создать чуть ли не целую теорию! Но даже если у вас ничего не получится (а у большинства, вы уж не обижайтесь, действительно ничего не получится, поскольку задача очень сложна даже для тех, кто успешно справляется с «Задачником «Кванта»), это будет очень полезно.

Доказательство существования

Приближения иррациональных чисел рациональными

Теорему 10 можно доказать, рассматривая приближения числа $\sqrt{d}$ рациональными числами. Для этого сначала сформулирую и докажу следующую лемму.

Лемма. *Для любого вещественного числа ξ и любого натурального числа N существуют такие целое число a и натуральное число b, что $b \le N$ и*

$$|b\xi - a| \le \frac{1}{N+1}.$$

Доказательство. Рассмотрим числа 0 и 1, а также дробные части чисел ξ, 2ξ, …, $N\xi$. Если бы все расстояния между этими $(N+2)$-мя числами были больше $1/(N+1)$, то получилось бы противоречие. Значит, какое-то из расстояний не превосходит $1/(N+1)$. Если

$$|\{b_2\xi\} - \{b_1\xi\}| \le \frac{1}{N+1},$$

где $1 \le b_1 < b_2 \le N$, то

$$|(b_2\xi - [b_2\xi]) - (b_1\xi - [b_1\xi])| \le \frac{1}{N+1},$$

так что достаточно взять $b = b_2 - b_1$ и $a = [b_2\xi] - [b_1\xi]$. Остальные два случая столь же очевидны: если

$$\{b\xi\} - 0 \le \frac{1}{N+1},$$

то годится $a = [b\xi]$; если же

$$1 - \{b\xi\} \le \frac{1}{N+1},$$

то можно взять $a = [b\xi] + 1$. Лемма доказана.

Упражнения

57. Для любых чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ и любого натурального числа N существуют такие целые числа $b_1, b_2, \ldots, b_k$ и a, хотя бы одно из которых отлично от нуля, что абсолютные величины чисел $b_1, b_2, \ldots, b_k$ не превосходят N и

$$|b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \ldots + b_k\xi_k - a| \le \frac{1}{N^k + 1}.$$

Докажите это.

58. Для любых чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ и любого натурального числа N существует такое натуральное число b, что $b \le N^k$ и дробные части чисел $b\xi_1, b\xi_2, \ldots, b\xi_k$ не превосходят $1/N$. Докажите это.

Доказательство теоремы 10

Положим $\xi = \sqrt{d}$. Для любого натурального $n > 1$ в силу леммы существуют такие натуральные числа a_n и b_n, что $b_n < n$ и

$$\left|a_n - b_n\sqrt{d}\right| \le \frac{1}{n}.$$

Очевидно,

$$\left|a_n^2 - db_n^2\right| = \left|a_n - b_n\sqrt{d}\right| \cdot \left|a_n + b_n\sqrt{d}\right| \le$$
$$\le \frac{1}{n}\left|a_n - b_n\sqrt{d} + 2b_n\sqrt{d}\right| \le \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + 2n\sqrt{d}\right) < 1 + 2\sqrt{d}.$$

Итак, величина $a_n^2 - db_n^2$ может принимать лишь конечное число значений. Но n можно брать сколь угодно большим! И при этом в силу неравенства $\left|a_n - b_n\sqrt{d}\right| \le \frac{1}{n}$ при $n \to \infty$ имеем $b_n \to \infty$. Значит, хотя бы для одного целого числа c, по модулю меньшего $1 + 2\sqrt{d}$, существует бесконечно много пар натуральных чисел $(a_n; b_n)$, для которых

$$a_n^2 - db_n^2 = c.$$

Зафиксируем одно из таких чисел c. Рассмотрим остатки от деления чисел a_n и b_n на $|c|$. Поскольку количество остатков конечно, то существуют такие две[5] разные пары натуральных чисел $(a; b)$ и $(A; B)$, что

$$a^2 - db^2 = c = A^2 - dB^2$$

и

$$a \equiv A \pmod{|c|},$$
$$b \equiv B \pmod{|c|}.$$

(Продумайте это!) Рассмотрим частное

$$\frac{A + B\sqrt{d}}{a + b\sqrt{d}} = \frac{\left(a - b\sqrt{d}\right)\left(A + B\sqrt{d}\right)}{a^2 - db^2} =$$
$$= \frac{aA - bBd + (aB - Ab)\sqrt{d}}{c}.$$

[5] *На самом деле даже не две, а бесконечно много, но нам это не нужно.*

Поскольку

$$aA - bBd \equiv a^2 - b^2 d = c \equiv 0 \pmod{|c|}$$

и

$$aB - Ab \equiv ab - ab = 0 \pmod{|c|},$$

то числа $x = (aA - bBd)/c$ и $y = (aB - Ab)/c$ целые. Так как

$$x^2 - dy^2 = \left(x - y\sqrt{d}\right)\left(x + y\sqrt{d}\right) =$$

$$= \frac{A - B\sqrt{d}}{a - b\sqrt{d}} \cdot \frac{A + B\sqrt{d}}{a + b\sqrt{d}} = \frac{A^2 - dB^2}{a^2 - db^2} = \frac{c}{c} = 1$$

и $y \neq 0$, то $(x; y)$ – искомое нетривиальное решение уравнения Пелля!

Упражнения

59. Докажите, что $y \neq 0$.

60. Докажите, что для любого натурального числа n существуют такие натуральные x и y, что $x^2 - 3y^2 = 1$ и y делится на 3^n, однако степенью тройки y быть не может (за тривиальным исключением $y = 1$).

Цепные дроби

Цепная дробь числа $\sqrt{2}$

Очевидно, $\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 1\right) = 2 - 1 = 1$ и, следовательно,

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}.$$

Воспользуемся этой формулой много-премного раз:

$$\sqrt{2} = 1 + \left(\sqrt{2} - 1\right) = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \left(\sqrt{2} - 1\right)} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \sqrt{2}}} =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \sqrt{2}}}} = \ldots = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}.$$

Мы получили разложение числа $\sqrt{2}$ в цепную дробь.

Впрочем, что это значит – разложить данное число α в цепную дробь? Это значит, прежде всего, выделить его целую часть, т.е. представить его в виде

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\},$$

где $[\alpha]$ – целая часть числа α, т.е. такое целое число, что $[\alpha] \leq \alpha < [\alpha] + 1$. Обозначаем: $a_0 = [\alpha]$. Если α – целое число, то $\{\alpha\} = 0$, и процесс разложения в цепную дробь на этом обрывается. Если же $\{\alpha\} > 0$, то число α можно представить в виде $\alpha = a_0 + \frac{1}{\beta}$, где $\beta > 1$. Записав $\beta = [\beta] + \{\beta\}$, находим следующее неполное частное: $a_1 = [\beta]$. Если $\{\beta\} = 0$, то разложение получено. Если же $\{\beta\} > 0$, то

$$\beta = a_1 + \frac{1}{\gamma},$$

где $\gamma > 1$. И так далее, и так далее, пока очередное число не окажется целым или – до бесконечности (точнее, пока не наступит конец света).

Если исходное число α иррационально, то и β, и γ, и все возникающие далее такие числа иррациональны, так что процесс разложения в цепную дробь никогда не остановится и даст бесконечную последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ элементов – так называемых *неполных частных*.

Обрывая цепную дробь числа $\sqrt{2}$ в разных местах, получаем *подходящие дроби*:

$$\frac{1}{1};\quad 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2};\quad 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = \frac{7}{5};\quad 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{17}{12};\ldots$$

Наши старые знакомые!

Может быть, это случайное совпадение? Нет, если n-этажная дробь (т.е. дробь, в которой n двоек) приводится к несократимому виду x/y, то $(n+1)$-этажная дробь равна

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{x}{y}} = 1 + \frac{y}{x + y} = \frac{x + 2y}{x + y}.$$

Очевидно, НОД$(x + 2y,\ x + y)$ = НОД$(y,\ x + y)$ = = НОД$(x,\ y)$, так что дробь $(x + 2y)/(x + y)$ тоже несократима. Поэтому увеличение количества дробных черт на единицу – это переход от несократимой дроби x/y к несократимой дроби $(x + 2y)/(x + y)$. А это и есть формулы первой части статьи!

Подходящие дроби $1/1$, $3/2$, $7/5$, $17/12$,... замечательны тем, что дают (попеременно, слева и справа) весьма точные приближения числа $\sqrt{2}$. А именно,

$$\frac{1}{1} < \frac{7}{5} < \frac{41}{29} < \frac{239}{169} < \ldots < \sqrt{2} < \ldots < \frac{99}{70} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}.$$

Оценить погрешность приближения несложно:

$$\left|\frac{x}{y} - \sqrt{2}\right| =$$

$$= \left|\frac{\left(x - y\sqrt{2}\right)\left(x + y\sqrt{2}\right)}{y\left(x + y\sqrt{2}\right)}\right| = \frac{\left|x^2 - 2y^2\right|}{y^2\left(\frac{x}{y} + \sqrt{2}\right)} = \frac{1}{y^2\left(\frac{x}{y} + \sqrt{2}\right)}.$$

Например,

$$0 < \frac{17}{12} - \sqrt{2} = \frac{1}{12^2\left(\sqrt{2} + \frac{17}{12}\right)} < \frac{1}{12^2 \cdot 2\sqrt{2}} < 0{,}0025,$$

$$0 < \sqrt{2} - \frac{41}{29} = \frac{1}{29^2\left(\sqrt{2} + \frac{41}{29}\right)} < \frac{1}{29^2 \cdot 2 \cdot \frac{41}{29}} < 0{,}00043,$$

так что дробь $17/12$ приближает число $\sqrt{2}$ с точностью 0,0025, а дробь $41/29$ – с точностью 0,00043.

Упражнения

61. Существует ли дробь, которая приближает число $\sqrt{2}$ с точностью до одной миллионной, а ее знаменатель – трехзначное число?

62. Докажите следующие утверждения:

а) Если m, n – натуральные числа и $\sqrt{2} > \frac{m}{n}$, то $\sqrt{2} - \frac{m}{n} > \frac{1}{2n^2\sqrt{2}}$.

б) Если m, n – натуральные числа, то $\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| > \frac{1}{4n^2}$.

в) Существует такая бесконечная ограниченная последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$, что для любых различных m и n выполнено неравенство $\left|x_n - x_m\right| \geq \frac{1}{|n-m|}$. (Этот пункт решали в 1978 году школьники двух самых старших классов на Всесоюзной математической олимпиаде.)

г) Если $\varepsilon > 0$, то неравенство $\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{\left(\varepsilon + 2\sqrt{2}\right)n^2}$ имеет лишь конечное число решений в натуральных числах m, n.

63. Для любого положительного числа a рассмотрим последовательность, первый член которой $a_1 = a$, а каждый следующий вычисляется по формуле $a_{n+1} = (2 + a_n)/(1 + a_n)$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

Цепная дробь числа $\sqrt{3}$

Поступим с $\sqrt{3}$ так же, как мы поступали с $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{3} = 1 + \left(\sqrt{3} - 1\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{\left(\sqrt{3}+1\right)/2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}+1}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \left(\sqrt{3}-1\right)}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\left(\sqrt{3}+1\right)/2}}} = \ldots$$

$$\ldots = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}}}.$$

Выпишем несколько первых подходящих дробей:

$$\frac{1}{1};\ 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1};\ 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} = \frac{5}{3};$$

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{7}{4};\ 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{19}{11};$$

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}}}} = \frac{26}{15}.$$

Заметим:

$$1^2 - 3\cdot 1 = -2, \quad 2^2 - 3\cdot 1^2 = 1,$$

$$5^2 - 3\cdot 3^2 = -2, \quad 7^2 - 3\cdot 4^2 = 1,$$

$$19^2 - 3\cdot 11^2 = -2, \quad 26^2 - 3\cdot 15^2 = 1,$$

так что половина дробей «лишние» – они дают решения не уравнения $x^2 - 3y^2 = 1$, а уравнения $x^2 - 3y^2 = -2$. (Как вы помните, подходящие дроби числа $\sqrt{2}$ обладают аналогичным свойством.)

Упражнение 64. Если начать с дроби $1/1$ или $2/1$ и применять правило $\frac{x}{y} \to \frac{x+3y}{x+2y}$, то все дроби, которые будут при этом получены, являются подходящими дробями числа $\sqrt{3}$. Докажите это.

В следующей части статьи мы докажем многие удивительные свойства цепных дробей. В частности, если x/y – подходящая дробь числа ξ, то $\left|\xi - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{y^2}$. Кроме того, если $x^2 - dy^2 = 1$ и x, y – натуральные числа, то x/y – подходящая дробь числа $\sqrt{d}$, так что для поиска решения $(x; y)$ уравнения Пелля следует перебирать лишь подходящие дроби числа $\sqrt{d}$. А вот обратное утверждение, как видно на примерах $d = 2$ и $d = 3$, ложно: не каждая подходящая дробь соответствует решению уравнения Пелля.

Вряд ли вам удастся самостоятельно создать теорию цепных дробей. Но поэкспериментировать, разлагая разные числа (и рациональные, и иррациональные) в цепные дроби и вычисляя подходящие дроби, очень полезно. Хотя бы одну-две интересные закономерности обязательно обнаружите! Например, постарайтесь выяснить, как связаны между собой английский метод решения уравнения $x^2 - dy^2 = 1$ и цепная дробь числа $\sqrt{d}$.

(Продолжение следует)

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 марта 2003 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №6– 2002» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1841» или «Ф1848». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1841—М1845, Ф1848—Ф1852

М1841. Для натуральных чисел a, b, c докажите равенство

$$\text{НОК}\left(\text{НОД}(a,b),\text{НОД}(b,c),\text{НОД}(c,a)\right) = \text{НОД}\left(\text{НОК}(a,b),\text{НОК}(b,c),\text{НОК}(c,a)\right)$$

(НОК – наименьшее общее кратное, НОД – наибольший общий делитель).

В.Произволов

М1842. Вершины A и B треугольника ABC лежат на окружности с центром O. Точки C и O находятся по одну сторону от AB. Поворотом треугольника ABC около центра O получен треугольник $A_1B_1C_1$, причем луч B_1C_1 проходит через вершину C и пересекает окружность в точке F. Докажите, что $CF = CB$.

В.Дубов

М1843. Имеется неограниченное количество кошельков. Первоначально в одном из них лежит KM монет (K, M – натуральные), а остальные кошельки пусты. Затем неоднократно выполняется следующая операция: из каждого кошелька, в котором есть монеты, вынимается по одной монете, и все вынутые монеты складываются в какой-либо пустой кошелек. Через некоторое время в K кошельках оказалось по M монет. При каких K и M такое возможно?

И.Акулич

М1844. Пятиугольник $ABCDE$, периметр которого равен 4, таков, что $AB = DE = 1$, а также $\angle BAE = \angle DEA = \angle BCD = 90^\circ$ (рис.1). Докажите, что биссектриса CF угла C делит пятиугольник на четырехугольники, у которых равны периметры и равны площади.

В.Произволов

М1845. Назовем несоседние натуральные числа a и b близкими, если $a^2 - 1$ делится на b и $b^2 - 1$ делится на a.

а) Пусть $n > 1$. Докажите, что в любом отрезке $[n; 8n - 8]$ найдется пара близких чисел.

б) Постройте отрезок $[n; 8n - 9]$ $(n > 1)$, в котором пар близких чисел нет.

И.Богданов, В.Сендеров

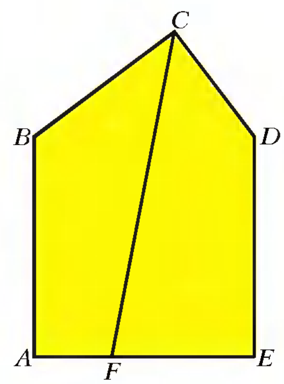


Рис.1

Ф1848. При движении точки по прямой график зависимости ее скорости от координаты представляет в выбранном масштабе четверть окружности (рис.2). Найдите ускорение точки в конце отрезка – когда скорость спадает до нуля. Найдите также время движения на отрезке $(0; x_0)$.

З.Рафаилов

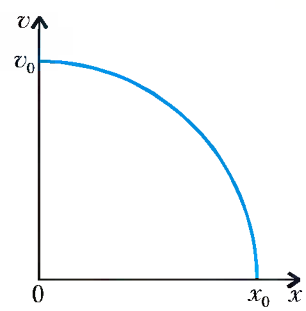


Рис.2

Ф1849. Блок подвешен при помощи куска легкой нерастяжимой нити, один конец которой закреплен, а к другому концу прикреплен груз массой m (рис.3). Груз вначале удерживают, затем отпускают. Найдите ускорение груза. Масса блока M, она сосредоточена в оси блока. Свободные концы нити при движении остаются вертикальными.

А.Зильберман

Ф1850. Порция гелия участвует в замкнутом цикле *1* —

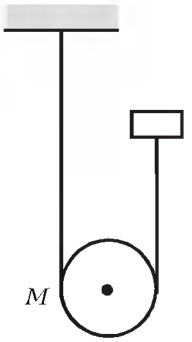


Рис.3

2–3–1. На участке *1–2* давление остается постоянным, а температура возрастает на 50 К; на участке *2–3* газ охлаждается на 80 К при неизменном объеме; на участке *3–1* газ сжимают адиабатически. Найдите термодинамический КПД этого цикла.

А.Циклов

Ф1851. К батарейке подключены два одинаковых вольтметра, соединенных последовательно, и параллельно одному из них подключен миллиамперметр. Вольтметры показывают 1,5 В и 0,3 В, показание миллиамперметра 0,5 мА. Что покажут приборы, если их подключить к батарейке, соединив последовательно? А какими могут быть их показания, если все приборы подключить к батарейке параллельно? Только не нужно подключать миллиамперметр прямо к батарейке на практике – лишь посчитайте!

Р.Александров

Ф1852. К звуковому генератору подключили цепь, состоящую из амперметра переменного тока, двух одинаковых конденсаторов и катушки индуктивности (рис.4). На частотах 1000 Гц и 1100 Гц показания амперметра оказались одинаковыми. На какой частоте ток будет практически нулевым? На какой частоте ток окажется очень большим? При расчете элементы цепи считайте идеальными.

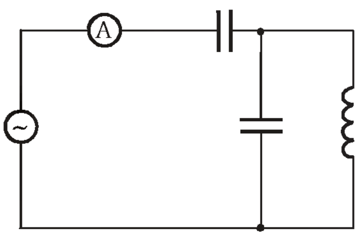


Рис.4

А.Токов

Решения задач М1816—М1825, Ф1833—Ф1837

М1816. *Сумма 2000 натуральных чисел больше их произведения. Докажите, что не более 10 из этих чисел отличны от 1.*

Если одно из чисел больше 2, то при уменьшении его на 1 сумма всех 2000 чисел уменьшится на 1, а произведение уменьшится не менее чем на 1. Поэтому из набора натуральных чисел, сумма которых больше их произведения, мы такой операцией получим опять набор чисел, сумма которых больше их произведения. Выполнив эту операцию несколько раз, рано или поздно мы получим набор чисел, состоящий только из единиц и двоек. Если двоек m штук, то сумма всех $2000 - m$ единиц и m двоек равна

$$2m + 2000 - m = 2000 + m,$$

а произведение равно 2^m. Должно быть выполнено неравенство

$$2000 + m > 2^m .$$

При $m = 11$ имеем $2^m - m = 2048 - 11 > 2000$. При $11 < m \le 2000$, очевидно, $2^m - m \ge 2^{12} - 2000 = 2096 > 2000$. Следовательно, $m \le 10$, что и требовалось доказать.

Аналогично можно доказать, что если сумма n натуральных чисел больше их произведения, причем m из этих чисел отличны от 1, то $2^m - m < n$.

Есть и другой способ решения задачи. Обозначив данные натуральные числа буквами $x_1, x_2, \ldots, x_{2000}$, мы без ограничения общности можем считать, что x_{2000} – наибольшее из рассматриваемых чисел. Если среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2000}$ всего m отличных от 1 и, соответственно, $2000 - m$ единиц, то

$$(2000 - m) + m x_{2000} \ge x_1 + x_2 + \ldots + x_{2000} > x_1 x_2 \ldots x_{2000},$$

откуда

$$\frac{2000 - m}{x_{2000}} + m > x_1 \ldots x_{1999} \ge 2^{m-1}.$$

Если $x_{2000} = 1$, то все рассматриваемые числа равны 1. Если же $x_{2000} \ge 2$, то

$$\frac{2000 - m}{2} + m > 2^{m-1},$$

так что

$$2000 + m > 2^m,$$

откуда, как мы знаем из первого способа, следует неравенство $m \le 10$.

В.Сендеров, А.Спивак

М1817. *Четырехугольник с перпендикулярными диагоналями вписан в квадрат. Диагонали и стороны четырехугольника разделили квадрат на 8 треугольников, попеременно окрашенных в красный и синий цвет (рис.1). Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в красные треугольники, равна сумме радиусов окружностей, вписанных в синие треугольники.*

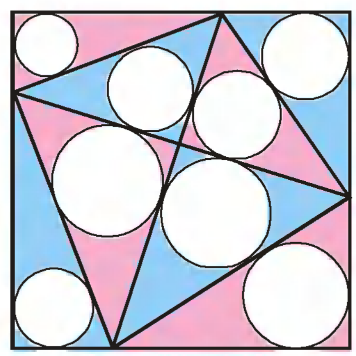


Рис.1

Сначала два вспомогательных факта.

1°. Диаметр вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен разности между суммой его катетов и гипотенузой, т.е. $2r = a + b - c$.

Обоснование этого полезного утверждения можно усмотреть из рисунка 2.

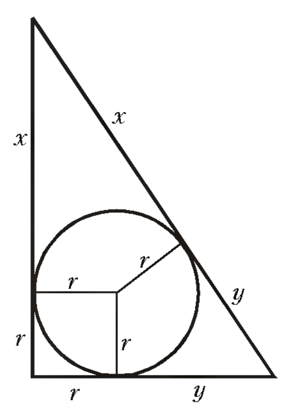


Рис.2

2°. Два взаимно перпендикулярных отрезка разделили квадрат на четыре четырехугольника. Тогда сумма периметров любых двух несоседних из них равна сумме периметров двух других (рис.3). Обоснуем это. Один из разделяющих отрезков перенесем параллельно себе так, чтобы он прошел через центр квад-

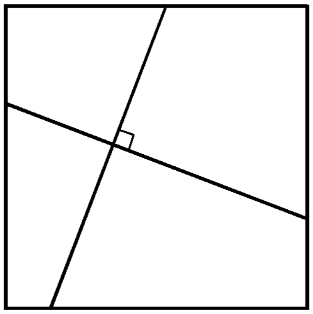


Рис.3

рата; при этом сумма периметров несоседних четырехугольников останется прежней. То же самое сделаем со вторым отрезком. Но два отрезка, взаимно перпендикулярные и проходящие через центр квадрата, делят его на четыре равных четырехугольника. Теперь рассуждение легко закончить самостоятельно.

Вернемся к условию задачи. На основании утверждения 2° можно заключить, что сумма длин всех катетов красных треугольников равна сумме длин всех катетов синих треугольников. К этому можно добавить, что сумма длин всех гипотенуз красных треугольников равна сумме длин всех гипотенуз синих треугольников. Откуда, используя утверждение 1°, делаем вывод, что сумма радиусов окружностей, вписанных в красные треугольники, равна сумме радиусов окружностей, вписанных в синие треугольники.

В.Произволов

М1818. *Докажите неравенство*

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2,$$

где $a>0$, $b>0$, $c>0$.

Рассмотрим функцию

$$f(x,y,z)=\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{z+x}}+\sqrt{\frac{z}{x+y}},$$

где $x>0$, $y>0$, $z>0$. Считая, без ограничения общности, $x\le y\le z$, докажем вначале неравенство

$$f(x,y,z)\ge f\left(x,\frac{y+z}{2},\frac{y+z}{2}\right). \qquad (1)$$

Обозначив $\frac{z+y}{2}=\alpha$, $\frac{z-y}{2}=t$, перепишем (1) в виде

$$\varphi(t)\ge\varphi(0), \qquad (2)$$

где

$$\varphi(t)=\sqrt{\frac{\alpha+t}{\alpha+x-t}}+\sqrt{\frac{\alpha-t}{\alpha+x+t}}.$$

Здесь $0\le t\le\alpha$, $\alpha\ge x$.

Докажем (2). Имеем

$$\varphi'(t)=(x+2\alpha)\left(\frac{1}{(\alpha+t)^{1/2}(x+\alpha-t)^{3/2}}-\frac{1}{(\alpha-t)^{1/2}(x+\alpha+t)^{3/2}}\right).$$

Очевидно, знак $\varphi'(t)$ совпадает со знаком функции

$$\psi(t)=(\alpha-t)(x+\alpha+t)^3-(\alpha+t)(x+\alpha-t)^3,$$

и любой нуль функции $\varphi'(t)$ является также нулем функции $\psi(t)$. Исследуем $\psi(t)$. Имеем: $\psi(t)$ – отличный от константы нечетный многочлен, степень которого не выше 3. Следовательно, $\psi(t)$ имеет на положительной полуоси не более одного корня.

Получили: $\varphi(t)$ может иметь внутри отрезка $[0,\alpha]$ не более одного экстремума. Но и этот экстремум не может быть минимумом, поскольку $\psi(\alpha)<0$.

Итак, $\varphi(t)\ge\min\{\varphi(0),\varphi(\alpha)\}$. Но, поскольку $\alpha\ge x$, имеем

$$\varphi(0)=2\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+x}}\le\sqrt{\frac{2\alpha}{x}}=\varphi(\alpha).$$

Неравенство (1) доказано.

(Выше мы ограничились необходимой нам информацией о производной; легко получить и полную информацию о ней. Именно, $\psi(t)$ – многочлен третьей степени; $\psi(t)=0$ при $t=0$ и при

$$t^2=\frac{(x+\alpha)^2(2\alpha-x)}{3x+2\alpha}.$$

При этом $t^2<\alpha^2$ при $x>0$, $\alpha>0$. Значит, исследуемая функция при любом x, $0<x<\alpha$, имеет экстремум на интервале $(0;\alpha)$.)

Вследствие (1) для решения задачи достаточно доказать, что

$$f_1(x)=\sqrt{\frac{x}{2\alpha}}+2\sqrt{\frac{\alpha}{x+\alpha}}>2 \qquad (3)$$

при $0<x\le\alpha$.

Исследуем $f_1(x)$ на отрезке $[0;\alpha]$. Во внутренних точках этого отрезка знак $f_1'(x)$ совпадает со знаком многочлена $P(x)=(x+\alpha)^3-8\alpha^2x$. Кроме того, любой нуль функции $f_1'(x)$ является также нулем многочлена $P(x)$. Заметим, что $P(\alpha)=0$; помимо этого, $P(x)$ имеет корень на отрицательной полуоси. Следовательно, если $P(x_0)=0$ при $0<x_0<\alpha$, то при переходе через x_0 многочлен $P(x)$ меняет знак с «+» на «–». Поэтому x_0 – точка максимума функции $f_1(x)$.

Получили:

$$f_1(x)>\min\{f_1(0),f_1(\alpha)\}$$

при $0<x<\alpha$. Но

$$f_1(\alpha)=\frac{3}{\sqrt2}>2=f_1(0).$$

Неравенство (3) доказано.

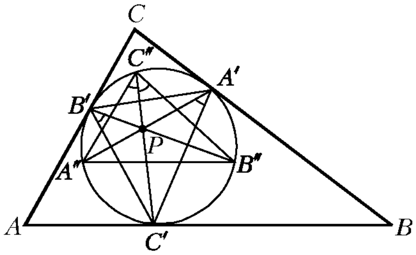
(Легко видеть, что $P(x)=0$ при $x=\alpha$ и при $x=\alpha\left(-2\pm\sqrt5\right)$. Значит, исследуемая функция имеет экстремум на интервале $(0;\alpha)$.)

А.Ковальджи, С.Нестеров, В.Сендеров

М1819. *В треугольнике ABC точки O, I – центры описанной и вписанной окружностей, A',B',C' – точки касания вписанной окружности со сторонами BC, CA, AB, точка P – ортоцентр треугольника $A'B'C'$. Докажите, что точки O, I и P лежат на одной прямой.*

Пусть прямые $A'P$, $B'P$, $C'P$ вторично пересекают вписанную в треугольник ABC окружность в точках A'', B'', C'' (см. рисунок). Тогда

$$\angle C'B'B''=\pi/2-\angle A'C'B'=\angle C'A'A'',$$



т.е. $C''P$ – биссектриса угла $A''C''B''$. Кроме того, $C'C''$ перпендикулярна $A'B'$ и, значит, параллельна биссектрисе угла C треугольника ABC. Таким образом, биссектрисы треугольников ABC и $A''B''C''$ параллельны, т.е. эти треугольники гомотетичны. При этой гомотетии точка O переходит в I, а I – в P, что и доказывает утверждение задачи.

Далее, из того, что коэффициент гомотетии равен r/R, где R, r – радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC, следует, что $OI/IP = R/r$. Поскольку IP – прямая Эйлера треугольника $A'B'C'$, можно сформулировать аналогичное утверждение для его центра тяжести.

А.Заславский

М1820. *а) Для натуральных чисел x и y десятичная запись числа $x^2 + xy + y^2$ оканчивается нулем. Докажите, что она оканчивается двумя нулями.*

б) Для натуральных чисел x и y число $x^4 + x^2y^2 + y^4$ делится на 11. Докажите, что это число делится на 14641.*

а) Достаточно доказать, что $x^2 + xy + y^2$ делится на 4 и на 25.

Число $x^2 + xy + y^2$ по условию четное, но четным оно может быть лишь тогда, когда оба числа x и y четны. В таком случае $x^2 + xy + y^2$ делится на 4.

Число $x^2 + xy + y^2$ делится на 5. Но тогда число $x^3 - y^3$ тоже делится на 5. В таблице

a	0	1	2	3	4
a^3	0	1	3	2	4

приведены остатки от деления a^3 на 5, соответствующие остаткам от деления целого неотрицательного числа a на 5. Таблица показывает, что $x^3 - y^3$ делится на 5 лишь тогда, когда x и y имеют равные остатки от деления на 5; пусть этот остаток равен r. Так как $x^2 + xy + y^2$ делится на 5, то $3r^2$ делится на 5, т.е. $r = 0$. Значит, каждое из чисел x и y делится на 5, а следовательно, $x^2 + xy + y^2$ делится на 25.

б) Нужно доказать, что $x^4 + x^2y^2 + y^4$ делится на 11^4. Так как

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = \left(x^2 + xy + y^2\right)\left(x^2 - xy + y^2\right),$$

то из условия следует, что хотя бы одна скобка делится на 11. Но тогда либо $x^3 - y^3$ делится на 11, либо $x^3 + y^3$ делится на 11.

Таблица остатков

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a^3	0	1	8	5	9	4	7	2	6	3	10

показывает остатки от деления a^3 на 11, соответствующие остаткам от деления целого неотрицательного числа a на 11.

Если $x^2 + xy + y^2$ делится на 11, то $x^3 - y^3$ делится на 11. Но тогда, как показывает таблица, числа x и y имеют одинаковые остатки от деления на 11; пусть каждый из них равен r. Значит, $3r^2$ делится на 11, т.е. $r = 0$. Попросту говоря, каждое из чисел x и y делится на 11. Следовательно, $x^4 + x^2y^2 + y^4$ делится на 11^4.

Если $x^2 - xy + y^2$ делится на 11, то $x^3 + y^3$ делится на 11. Но тогда, как показывает таблица, число $x + y$ делится на 11. Пусть r и $11 - r$ – остатки от деления x и y на 11; число $r^2 - r(11-r) + (11-r)^2 = 3r^2 - 33r + 121$ делится на 11, т.е. $r = 0$. Делаем вывод: в рассматриваемом случае опять-таки оба числа x и y делятся на 11, т.е. $x^4 + x^2y^2 + y^4$ делится на 11^4.

В.Произволов

М1821*. *Докажите, что для каждого натурального n выполняется неравенство*

$$\left|\left\{\frac{n}{1}\right\} - \left\{\frac{n}{2}\right\} + \left\{\frac{n}{3}\right\} - \ldots - (-1)^n\left\{\frac{n}{n}\right\}\right| < \sqrt{2n}$$

($\{a\}$ – дробная часть числа a).

Неравенство верно для $n = 1$ или 2, поэтому пусть $n \ge 3$. Рассмотрим число $k = \left[\sqrt{2n}\right] + 1$ и оценим по отдельности величины

$$A_k = \left\{\frac{n}{1}\right\} - \left\{\frac{n}{2}\right\} + \left\{\frac{n}{3}\right\} - \ldots - (-1)^{k-1}\left\{\frac{n}{k-1}\right\}$$

и

$$B_k = \left\{\frac{n}{k}\right\} - \left\{\frac{n}{k+1}\right\} + \ldots + (-1)^{n-k}\left\{\frac{n}{n}\right\}.$$

Очевидно,

$$A \le \left\{\frac{n}{1}\right\} + \left\{\frac{n}{3}\right\} + \ldots,$$

где всего $\left[\frac{k}{2}\right]$ слагаемых, причем первое из них равно 0. Далее,

$$A \ge -\left\{\frac{n}{2}\right\} - \left\{\frac{n}{4}\right\} - \ldots,$$

где слагаемых $\left[\frac{k-1}{n}\right]$ штук. Для любого натурального $m < k$ имеем

$$\left\{\frac{n}{m}\right\} \le \frac{m-1}{m} \le \frac{k-2}{k-1},$$

поэтому

$$|A| \le \left[\frac{k-1}{2}\right] \cdot \frac{k-2}{k-1} \le \frac{k-2}{2}.$$

Поскольку дробная часть – это разность самого числа и его целой части, то

$$B = C - D,$$

где

$$C = \frac{n}{k} - \frac{n}{k+1} + \ldots + (-1)^{n-k}\frac{n}{n}$$

и

$$D = \left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n}{k+1}\right] + \ldots + (-1)^{n-k}\left[\frac{n}{n}\right].$$

Так как

$$0 \le \left(\frac{n}{k} - \frac{n}{k+1}\right) + \left(\frac{n}{k+2} - \frac{n}{k+3}\right) + \ldots = C =$$

$$= \frac{n}{k} - \left(\frac{n}{k+1} - \frac{n}{k+2}\right) - \ldots \le \frac{n}{k},$$

то $0 \le C \le \frac{n}{k}$. Аналогично, $0 \le D \le \left[\frac{n}{k}\right] \le \frac{n}{k}$. Следовательно,

$$|B| = |C - D| \le \frac{n}{k}$$

и, наконец,

$$\left|\left\{\frac{n}{1}\right\} - \left\{\frac{n}{2}\right\} + \left\{\frac{n}{3}\right\} - \ldots - (-1)^n\left\{\frac{n}{n}\right\}\right| =$$

$$= \left|A - (-1)^k B\right| \le \frac{k-2}{2} + \frac{n}{k} < \frac{\sqrt{2n}-1}{2} + \sqrt{\frac{n}{2}} < \sqrt{2n}.$$

В.Барзов, А.Спивак

М1822. *На турнир математических боев съехались 2N команд, каждая из которых должна по одному разу встретиться со всеми остальными. Организаторы планируют провести соревнования за 2N − 1 туров (чтобы в каждом туре участвовали все команды и выходных дней у команд не было). Однако вследствие своей безалаберности они составляют расписание встреч на каждый тур без каких-либо планов на будущее – лишь бы в данном туре участвовали все команды и не произошло повторных встреч. Может ли случиться так, что составить расписание для очередного тура окажется невозможным (т.е. при любом разбиении команд на пары окажется, что какие-то две команды уже встречались ранее), если*

а) N = 5;

б) N = 6;

в) N = 8;

г) N – любое натуральное число?

Для краткости числа N, для которых расписание какого-то очередного тура может не получиться, будем называть опасными (подразумевая: для безалаберного жюри). Легко сообразить, что числа $N = 1$ и 2 безопасные.

Прежде чем доказывать, что все другие числа опасные, покажем, как можно составлять некоторые расписания.

Лемма 1. *Даны две группы по k команд в каждой. Можно так организовать первые k туров, что каждая команда первой группы сыграет с каждой командой второй группы.*

Доказательство. Рассмотрим правильный k-угольник и разместим команды первой группы в его вершинах. Остальные k команд разместим вокруг многоугольника напротив его вершин (на рисунке 1,*а* это сделано для

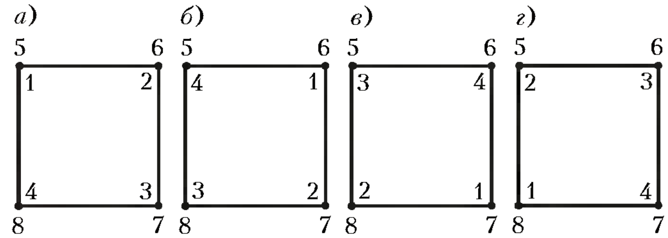


Рис.1

$k = 4$). Дальше будем поворачивать многоугольник вокруг его центра, чтобы он совмещался сам с собой всевозможными способами (рис.1,*б*, *в*, *г*).

Лемма доказана. Если вам не понравился «геометрический мотив», можете то же самое сформулировать на языке сравнений: пронумеровав команды первой группы числами 1, 2,…, k, а команды второй группы – числами $k+1$, $k+2$,…, $2k$, прикажите в m-м туре, где $m = 0, 1, \ldots, k-1$, играть командам с номерами x и y, где $1 \le x \le k < y \le 2k$, если и только если

$$y - x \equiv m \pmod{k}.$$

Лемма 2. *Если N нечетное и N > 1, то N опасное.*

Доказательство. Разобьем команды на две группы по N команд в каждой. В силу леммы 1 после первых N туров может возникнуть необходимость разбивать N команд на пары. Но N нечетно!

Лемма 3. *Число 4 опасное.*

Доказательство – рисунок 2, где сплошные синие отрезки показывают игры первого дня, пунктирные

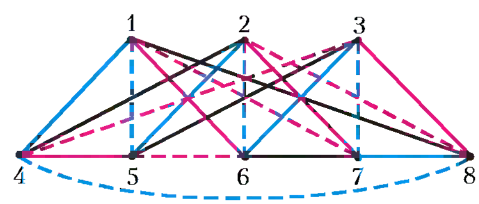


Рис.2

синие – игры второго дня, сплошные красные – третьего, пунктирные красные – четвертого, сплошные черные – пятого. Очевидно, первые три команды успели сыграть со всеми остальными и поэтому в шестом туре могут играть только между собой. Но три команды нельзя разбить на пары!

Лемма 4. *Если число N опасное, то 2N тоже опасное.*

Доказательство. Разобьем $4N$ команд на две группы по $2N$ команд в каждой и применим лемму 1 при $k = 2N$. После этого турнир $4N$ команд фактически превратился в два параллельных турнира, в каждом из которых участвуют $2N$ команд. Поскольку N опасное, то безалаберное жюри может дезорганизовать эти турниры, а это нам и надо!

Собственно, вот и все: из лемм 3 и 4 следует, что числа 4, 8, 16, …, 2^n,… опасные, а из лемм 2 и 4 – что для всякого нечетного числа $N > 1$ опасными являются числа N, $2N$, $4N$,…, $2^n N$,… Значит, действительно все числа, кроме 1 и 2, опасные.

И.Акулич, А.Спивак

M1823*. *Пусть $f(x)$ – кубический многочлен. Предположим, что при любом натуральном n число $f(n)$ является кубом целого числа. Докажите, что $f(x) = (ax+b)^3$ для некоторых целых чисел a, b.*

Положим $f(x) = Ax^3 + f_1(x)$, где степень $f_1(x)$ не превосходит 2. По условию все члены последовательности

$$y_n = \sqrt[3]{f(n)} = \sqrt[3]{An^3 + f_1(n)}$$

являются целыми числами. Рассмотрим последовательность (первых разностей)

$$z_n = \Delta^1 y_n = y_{n+1} - y_n\,,$$

также состоящую из целых чисел. Используя явную формулу для z_n, нетрудно убедиться в том, что $z_n \to \sqrt[3]{A}$ при $n \to \infty$. Это возможно только тогда, когда последовательность z_n стабилизируется: $z_n = \sqrt[3]{A}$ для всех $n \ge N$, при этом $a = \sqrt[3]{A}$ есть целое число. Таким образом, $y_{n+1} - y_n = a$ при $n \ge N$. Отсюда

$$y_n = an + b\,,$$

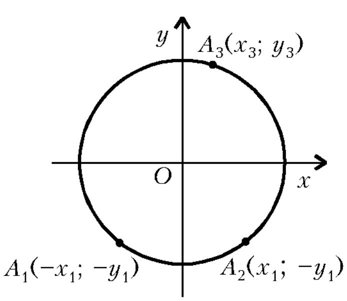
где $b = y_N - aN$. Тем самым $f(n) = (an+b)^3$ для всех $n \ge N$. Значит, $f(x) = (ax+b)^3$ для всех x.

Утверждение задачи можно обобщить на случай многочлена f степени mk, значения которого при натуральных x являются k-ми степенями целых чисел (m-е разности $\Delta^m y_n$ последовательности $y_n = \sqrt[k]{f(n)}$ стремятся к пределу, а значит, будучи целыми числами, постоянны). Заметьте, впрочем, что при $m > 2$ коэффициенты многочлена f не обязательно целые: например, многочлен $\frac{1}{8}x^3(x+1)^3$ при всех натуральных x имеет значениями кубы целых чисел.

Н.Осипов

M1824. *Пусть $A_1(x_1, y_1), \ldots, A_n(x_n, y_n)$ – различные точки координатной плоскости, $n \ge 2$, $M\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}; \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}\right)$ – их центр масс. Обозначим через C центр круга наименьшего радиуса r, в котором содержатся точки $A_1, \ldots, A_n$, а через d – расстояние между точками M и C. Докажите, что $\frac{d}{r} \le \frac{n-2}{n}$.*

Для $n = 2$ утверждение очевидно. Рассмотрим случай $n = 3$. Если $\triangle A_1A_2A_3$ неостроугольный (с неострым углом при вершине A_3), то C – середина отрезка A_1A_2 и совпадает с центром масс точек A_1A_2. Поэтому M удалена от C не более чем на $\frac{r}{3}$. Если $\triangle A_1A_2A_3$ остроугольный, введем новую декартову прямоугольную систему координат так, чтобы точка C была началом координат, а оси ориентированы согласно рисунку. Применяя гомотетию, можем считать, что $r = 1$. Точка M имеет координаты $\left(\frac{x_3}{3}; \frac{y_3 - 2y_1}{3}\right)$. Значит, $9d^2 = x_3^2 + y_3^2 - 4y_1y_3 + 4y_1^2 = 4y_1^2 - 4y_1y_3 + 1$. Так как $\triangle A_1A_2A_3$ остроугольный, $y_3 \ge y_1$. Следовательно, $9d^2 \le 1$. Для $n > 3$ применим индукцию. Пусть K – круг наименьшего (считаем единичного) радиуса, содержащий точки $A_1, \ldots, A_{n+1}$. Заметим, что можно удалить одну из точек (для определенности A_{n+1}) так, что K по-прежнему будет кругом наименьшего радиуса, содержащим точки $A_1, \ldots, A_n$. Пусть M' – центр масс точек $A_1, \ldots, A_n$. По предположению индукции $M'C \le \frac{n-2}{n}$. Значит,



$$\left|\overrightarrow{CM}\right| = \left|\left(n\overrightarrow{CM'} + \overrightarrow{CA}_{n+1}\right)\frac{1}{n+1}\right| \le \frac{1}{n+1}\left(n\left|\overrightarrow{CM'}\right| + \left|\overrightarrow{CA}_{n+1}\right|\right) \le$$

$$\le \frac{1}{n+1}\left(n\frac{(n-2)}{n} + 1\right) = \frac{n-1}{n+1}.$$

Теперь все доказано.

И.Протасов, Г.Радзиевский

M1825*. *Поверхность куба размером $5 \times 5 \times 5$ можно естественным образом оклеить 150-ю бумажными квадратами размером 1×1 каждый. При этом любая грань куба будет оклеена 25-ю бумажными квадратами. Докажите, что поверхность этого куба можно оклеить нашими бумажными квадратами так, что никакая его грань не будет оклеена 25-ю из них.*

Доказательство этого факта имеет характер «показательства»: мы предъявим нужный способ оклейки куба 150-ю бумажными квадратами единичного размера. Характерным признаком этой удивительной оклейки (удивительной при ее сопоставлении с естественной) является то, что каждый бумажный квадрат будет наклеен на поверхность куба косо, т.е. так, что никакая его сторона не будет параллельна никакому ребру куба (в отличие от естественной оклейки, описанной в условии задачи).

Сначала оклеиваем отдельную грань куба $ABCD$ четырьмя прямоугольниками 3×4 и одним квадратом 1×1 «с избытком» (рис.1) с тем, чтобы уголки, составляющие «избыток», загнуть на смежные грани. При этом каждый прямоугольник 3×4 мыслится составленным из 12 единичных квадратов. Затем... На рисунке 2 показано, как поверхность куба полностью покрыли 12 бумажных прямоугольников размером 3×4 и 6 квадратов 1×1; каждое ребро куба при этом является диагональю соответствующего прямоугольника.

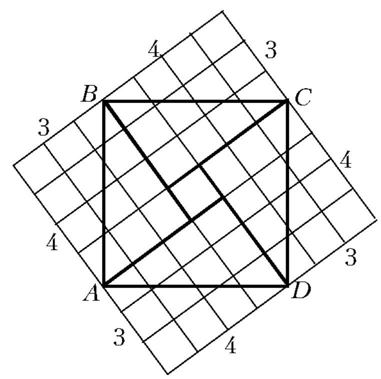


Рис.1

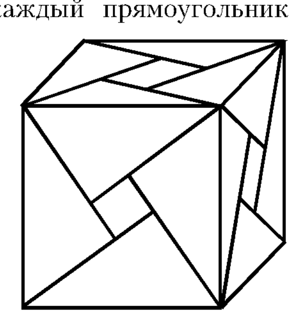
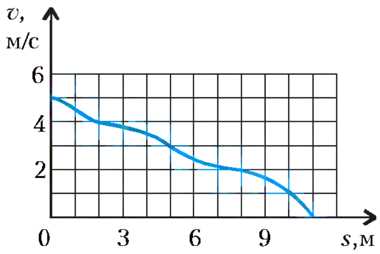


Рис.2

В.Произволов



Ф1833. *Маленькую шайбу запустили по шероховатой горизонтальной поверхности со скоростью $v_0 = 5$ м/с. График зависимости скорости шайбы v от пройденного ею пути s изображен на рисунке. Какой путь пройдет шайба до полной остановки, если ее запустить из той же точки в том же направлении со скоростью $v_1 = 4$ м/с?*

Пусть шайбу массой m запустили с начальной скоростью v_0. Скорость шайбы v на расстоянии s от точки начала движения можно определить из закона изменения механической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A(s), \qquad (1)$$

где $A(s)$ – работа, которую совершает сила трения на пути s. При достаточно малом перемещении Δs справедлива формула

$$\Delta A(s) = -\mu(s) mg\Delta s,$$

где $\mu(s)$ – коэффициент трения на расстоянии s от точки начала движения. Видно, что величина $\Delta A(s)$ не зависит от начальной скорости v_0, а значит, и суммарная работа $A(s)$ на всем пути s не зависит от v_0, пока $v(s) \ge 0$. Поэтому при начальной скорости шайбы v_1 она остановится, пройдя путь s, который можно определить из соотношения

$$-\frac{mv_1^2}{2} = A(s). \qquad (2)$$

Из выражений (1) и (2) получаем

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{mv_1^2}{2},$$

откуда находим величину скорости v на нашем графике, соответствующую точке остановки шайбы во втором случае:

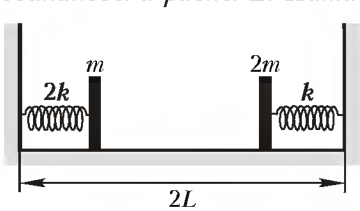
$$v = \sqrt{v_0^2 - v_1^2} = 3 \text{ м/с}.$$

Из графика находим, что скорости $v = 3$ м/с соответствует пусть $s = 5$ м.

Таким образом, при начальной скорости 4 м/с шайба пройдет до полной остановки путь 5 м.

О.Шведов

Ф1834. *В системе, изображенной на рисунке, прикрепленные к невесомым пружинам грузики при помощи нитей удерживаются на расстоянии $L/2$ от стенок, к которым прикреплены концы пружин. Длины обеих пружин в недеформированном состоянии одинаковы и равны L. Нити одновременно пережигают, после чего грузики сталкиваются и слипаются. Найдите максимальную скорость, которую будут иметь грузики при колебаниях, возникших после этого столкновения. Удар является центральным. Жесткости пружин и массы грузиков указаны на рисунке. Трением и размерами грузиков пренебречь.*



Направим координатную ось X вдоль общей оси пружин и поместим начало координат посередине между стенками. Тогда после пережигания нитей левый грузик будет двигаться по закону

$$x_1(t) = -\frac{L}{2}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t,$$

а правый – по закону

$$x_2(t) = \frac{L}{2}\cos\sqrt{\frac{k}{2m}}\,t$$

(время t отсчитывается от момента пережигания нитей). Грузики столкнутся через время t_0, которое определяется из условия $x_1(t) = x_2(t)$, т.е.

$$-\frac{L}{2}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t_0 = \frac{L}{2}\cos\sqrt{\frac{k}{2m}}\,t_0.$$

Преобразовав сумму косинусов в произведение, имеем

$$2\cos\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}} + \sqrt{\frac{k}{2m}}\right)t_0 \cdot \cos\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}} - \sqrt{\frac{k}{2m}}\right)t_0 = 0,$$

откуда получаем

$$\cos\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}} + \sqrt{\frac{k}{2m}}\right)t_0 = 0$$

или

$$\cos\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}} - \sqrt{\frac{k}{2m}}\right)t_0 = 0.$$

Из всех решений этой системы уравнений нужно выбрать наименьшее положительное. Оно получается из условия

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}} + \sqrt{\frac{k}{2m}}\right)t_0 = \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$t_0 = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{2m}{k}}.$$

В момент столкновения грузики будут иметь координаты

$$x_1 = x_2 = x_0 = \frac{L}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}} \cdot \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{2m}{k}}\right) = \frac{L}{4}.$$

Скорости левого и правого грузиков перед столкновением будут равны, соответственно,

$$v_1 = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{2k}{m}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t_0 =$$

$$= \frac{L}{2}\sqrt{\frac{2k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}} \cdot \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{2m}{k}}\right) = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{2k}{m}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

и

$$v_2 = -\frac{L}{2}\sqrt{\frac{k}{2m}}\sin\sqrt{\frac{k}{2m}}\,t_0 =$$

$$= -\frac{L}{2}\sqrt{\frac{k}{2m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{2m}} \cdot \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{2m}{k}}\right) = -\frac{L}{2}\sqrt{\frac{k}{2m}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Скорость грузиков u непосредственно после неупругого центрального соударения можно найти из закона сохранения импульса:

$$u = \frac{mv_1 + 2mv_2}{m + 2m} = \frac{L\sqrt{3}}{12m}\left(\sqrt{2km} - \sqrt{2km}\right) = 0 .$$

Таким образом, скорость грузиков после удара обращается в ноль, а удлинение пружин в этот момент времени отлично от нуля и равно $x_0 = L/4$. Следовательно, после столкновения слипшиеся грузики будут совершать гармонические колебания с амплитудой

$$x_0 = \frac{L}{4}$$

и частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k + 2k}{m + 2m}} = \sqrt{\frac{k}{m}} .$$

В процессе этих колебаний максимальная скорость грузиков будет равна

$$v_m = \omega x_0 = \frac{L}{4}\sqrt{\frac{k}{m}} .$$

А.Якута

Ф1835. *На рисунке 1 приведен график зависимости давления насыщенного пара некоторого вещества от температуры. Определенное количество этого вещества находится в закрытом сосуде постоянного объема в равновесном состоянии, соответствующем точке А на рисунке. До какой температуры следует охладить эту систему, чтобы половина имеющегося в сосуде вещества сконденсировалась? Объемом сконденсировавшегося вещества можно пренебречь по сравнению с объемом сосуда.*

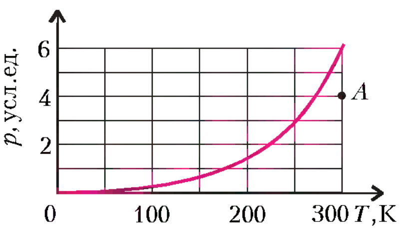


Рис.1

Поскольку давление в точке A меньше давления насыщенного пара при температуре $T_A = 300$ K, то все вещество находится в газообразном состоянии. Если бы вещество не конденсировалось, то давление p и температура T этого вещества в соответствии с уравнением Менделеева–Клапейрона были бы связаны прямой пропорциональной зависимостью $p = \beta T$. В условиях, когда вещество из пара может переходить в конденсированное состояние, линейная зависимость давления от температуры при понижении температуры справедлива только до момента начала конденсации, который соответствует точке пересечения данного графика с прямой линией $p = \beta T$, проходящей через начало координат и точку A.

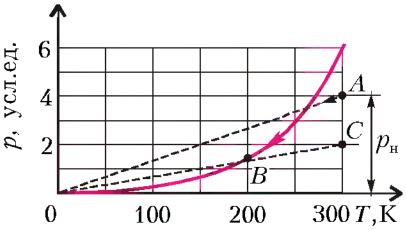


Рис.2

Если, как это требуется по условию задачи, сконденсировалась половина имеющегося вещества, то это состояние будет соответствовать некоторой точке B на кривой зависимости давления насыщенного пара от температуры (рис.2). Эту точку можно найти путем следующих рассуждений. Если все сконденсировавшееся вещество удалить, то давление в системе останется равным давлению насыщенного пара в точке B. Если теперь нагревать оставшийся пар до начальной температуры $T_A = 300$ K, то его давление, очевидно, будет линейно возрастать до величины вдвое меньшей, чем было начальное давление, поскольку количество вещества в системе уменьшилось вдвое. Отсюда следует простой графический способ нахождения температуры, соответствующей точке B. Поставим на pT-диаграмме вспомогательную точку C, соответствующую начальной температуре $T_A = 300$ K и давлению, вдвое меньшему начального. Проведем через точку C и начало координат прямую линию. Эта линия пересечет график зависимости давления насыщенного пара от температуры в искомой точке B, соответствующей в нашем случае температуре $T \approx 200$ K.

Следовательно, систему нужно охладить приблизительно до 200 K.

С.Варламов

Ф1836. *При измерении зависимости величины напряженности электрического поля от времени в некоторой точке пространства был получен график, изображенный на рисунке 1. Электрическое поле создается двумя одинаковыми точечными зарядами, один из которых неподвижен и находится на расстоянии d от точки наблюдения, а другой движется с постоянной скоростью. Найдите величины зарядов, минимальное расстояние от движущегося заряда до точки наблюдения и скорость движущегося заряда.*

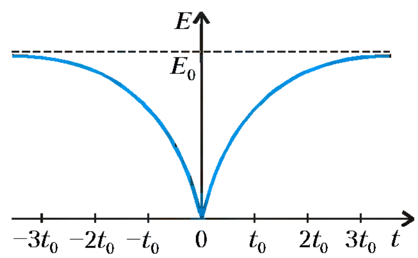


Рис.1

При больших значениях времени t движущийся заряд находится очень далеко от точки наблюдения, и поэтому электрическое поле создается только неподвижным зарядом Q_1. Величина напряженности поля при этом равна E_0, причем, в соответствии с законом Кулона,

$$E_0 = \frac{|Q_1|}{4\pi\varepsilon_0 d^2} ,$$

откуда

$$|Q_1| = 4\pi\varepsilon_0 d^2 E_0 .$$

Этот заряд может быть как положительным, так и отрицательным – знак из условия задачи определить нельзя. Движущийся заряд Q_2 имеет такие же величину и знак, как и заряд Q_1.

Из рисунка 1 видно, что в момент времени $t = 0$ напряженность электрического поля в точке наблюдения обращается в ноль. Кроме того, график симметричен относительно оси ординат. Поскольку заряды по условию задачи одинаковы, то это возможно лишь в том случае, когда заряд Q_2 движется вдоль прямой линии и в момент времени $t = 0$ находится на минимальном расстоянии d от точки наблюдения на прямой,

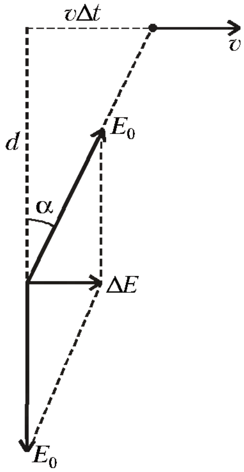


Рис.2

проходящей через эту точку и неподвижный заряд Q_1. При этом заряды располагаются симметрично по разные стороны от точки наблюдения, и расстояние между ними составляет $2d$.

Для того чтобы определить скорость движущегося заряда v, найдем напряженность поля в точке наблюдения через малое время Δt после того, как поле было равно нулю (для определенности будем считать заряды отрицательными). За время Δt движущийся заряд сместился на расстояние $v\Delta t$, а поле возросло (см. рис.2) на величину

$$\Delta E \approx 2E_0 \sin\frac{\alpha}{2} \approx E_0\alpha \approx E_0\frac{v\Delta t}{d}.$$

Таким образом, величина напряженности поля в точке наблюдения при малых временах возрастает пропорционально времени. Отношение $\Delta E/\Delta t$ равно угловому коэффициенту касательной к графику, проведенной в точке, соответствующей моменту времени $t = 0$. Из рисунка 3 видно, что эта касательная, выходящая из начала координат, проходит через точку с координатами (t_0, E_0). Следовательно,

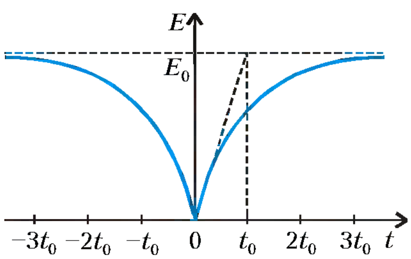


Рис.3

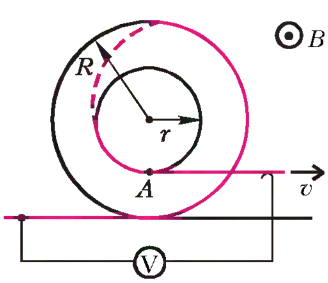
$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = E_0\frac{v}{d} = \frac{E_0}{t_0},$$

откуда

$$v = \frac{d}{t_0}.$$

О.Шведов

Ф1837. *Катушка состоит из среднего цилиндра радиусом r и двух крайних цилиндров радиусами $R > r$. Длинный тонкий провод плотно наматывают на катушку следующим образом: сначала обматывают один из крайних цилиндров, а затем продолжают наматывать этот же провод на средний цилиндр в том же направлении, в каком начинали намотку. После завершения намотки катушку кладут на горизонтальный стол, помещенный в однородное постоянное магнитное поле B, линии индукции которого параллельны оси катушки (см. рисунок). К одному концу провода, лежащему на столе, подсоединяют одну клемму идеального вольтметра, а другой конец провода, касающийся неподвижного скользящего контакта, соединенного со второй клеммой вольтметра, начинают тянуть вдоль поверхности стола с постоянной скоростью v в направлении, перпендикулярном оси катушки. Считая, что катушка катится по столу без проскальзывания, найдите показания вольтметра.*



В данной ситуации катушка, очевидно, будет катиться в том направлении, в котором тянут второй конец провода. При этом провод будет наматываться на средний цилиндр и сматываться с крайнего цилиндра. Вследствие этого будет изменяться общая площадь контура, пронизываемого магнитным полем, и в контуре возникнет ЭДС индукции, которую и покажет вольтметр.

Изменение магнитного потока через контур удобно разбить на две части: первую, связанную с изменением площади обмотки самой катушки, и вторую, связанную с изменением площади той части контура, которая образована подводящими проводами и меняется за счет движения катушки. Нужно также иметь в виду, что знак потока через вторую часть контура противоположен знаку потока через первую, поскольку направления обхода этих контуров противоположны.

Рассмотрим сначала изменение магнитного потока через обмотку катушки. Точка A катушки (см. рисунок) движется вдоль стола с постоянной скоростью v. Так как проскальзывание отсутствует, скорость u оси катушки можно найти из соотношения

$$\frac{v}{R-r} = \frac{u}{R},$$

откуда

$$u = \frac{vR}{R-r}, \text{ а } u - v = \frac{vr}{R-r}.$$

Пусть за время Δt ось катушки сместилась вдоль стола на расстояние $\Delta L_1 = u\Delta t$. При этом на средний цилиндр намотается участок провода длиной $\Delta L_2 = (u-v)\Delta t$, а с крайнего цилиндра смотается участок длиной ΔL_1. Изменение потока магнитной индукции через обмотку на крайнем цилиндре при этом будет равно

$$\Delta\Phi_1 = B\Delta S_1 = B\frac{\pi R^2}{2\pi}\frac{\Delta L_1}{R} = \frac{BRu}{2}\Delta t = \frac{BR^2v}{2(R-r)}\Delta t,$$

а через обмотку на среднем цилиндре –

$$\Delta\Phi_2 = B\Delta S_2 = B\frac{\pi r^2}{2\pi}\frac{\Delta L_2}{r} = \frac{Br(u-v)}{2}\Delta t = \frac{Br^2v}{2(R-r)}\Delta t,$$

где ΔS_1 и ΔS_2 – изменения площадей средней и крайней обмоток соответственно. При этом поток через обмотку на крайнем цилиндре уменьшается, а через обмотку на среднем – увеличивается.

Поток через площадь, ограниченную подводящими проводами, уменьшается за счет того, что катушка движется вправо со скоростью u. За время Δt поток уменьшится на величину

$$\Delta\Phi_3 = B(R-r)u\Delta t = BRv\Delta t.$$

Итак, с учетом противоположности направлений обхода двух частей общего контура величина ЭДС индукции, которую покажет вольтметр, будет равна

$$U = -\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} + \frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t} + \frac{\Delta\Phi_3}{\Delta t} = -\frac{BR^2 v}{2(R-r)} + \frac{Br^2 v}{2(R-r)} + BRv = \frac{Bv(R-r)}{2}.$$

Задачу можно решить и другим, более простым способом, рассматривая не изменение магнитного потока через контуры, а движение проводников в магнитном поле. Заметим, что при движении катушки нескомпенсированная ЭДС возникает только на участке провода, начинающемся в точке касания катушки и стола и заканчивающемся в точке A. Это следует из того, что все идущие вверх участки намотанного на катушку провода, кроме указанного, имеют соответствующие идущие вниз участки по другую сторону вертикальной оси симметрии катушки, и возникающие в этих участках провода ЭДС взаимно компенсируются. Остающийся «нескомпенсированным» участок провода имеет длину $R - r$, его начало в любой момент времени покоится, а конец движется вдоль стола со скоростью v, причем скорость точек этого воображаемого проводника, лежащих между его началом и концом, равномерно возрастает от 0 до v. Поэтому средняя скорость этого проводника направлена горизонтально и равна $v_{\text{ср}} = v/2$, а возникающая в нем ЭДС составляет

$$U = B(R-r)v_{\text{ср}} = \frac{Bv(R-r)}{2}.$$

А.Якута

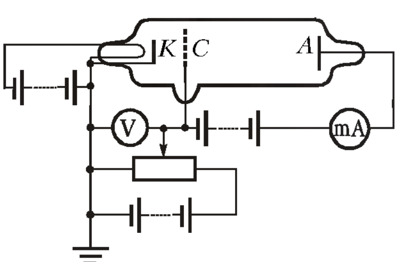
ОЛИМПИАДЫ

VII Международный турнир «Компьютерная физика»

Заочный тур. Опыт Франка и Герца

В начале XX века стала понятна недостаточность традиционных классических представлений для описания физических явлений в микромире. Получили развитие новые, квантовые представления о строении вещества. Первая квантовая модель атома водорода была создана Н.Бором в 1913 году. Согласно этой модели, электрон в атоме может иметь только строго определенные значения энергии (энергетические уровни), т.е. атом имеет дискретную структуру.

В 1913 году Дж.Франком и Г.Герцем был проведен эксперимент, доказавший наличие в атоме дискретных энергетических уровней (в 1925 году эта работа была удостоена Нобелевской премии по физике). Опыт состоял в следующем. К разрядной трубке, содержащей катод K, анод A и сетку C, подавалось напряжение, как показано на рисунке. Трубка заполнялась насыщенными парами ртути. Электроны эмитировались с поверхности катода, ускорялись в пространстве между K и C, а затем попадали в тормозящее поле между C и A. В процессе движения от катода к аноду электроны испытывали упругие и неупругие соударения с атомами ртути. При упругом соударении атом ртути оставался в основном состоянии, при неупругом переходил в возбужденное состояние. В эксперименте измерялся анодный ток (количество электронов, пришедших на анод) в зависимости от величины напряжения между K и C. Анализ вольт-амперных характеристик привел к доказательству того, что при возбуждении атом теряет строго определенное значение энергии, т.е. атом имеет дискретную энергетическую структуру.



Об условиях и порядке проведения этого турнира рассказано в предыдущем номере журнала «Квант», а также на сайте http://www. informika. ru/text/goscom/gluon.

Двумерная компьютерная модель опыта Франка и Герца

Для простоты будем считать, что движение электронов происходит всего в двух пространственных измерениях (x, z), причем ось z направлена вдоль оси системы.

Предполагается моделировать движение электронов между K и A методом Монте-Карло (методом статистических испытаний). В рамках этого метода прослеживается судьба конкретного электрона, эмитируемого с катода и совершающего случайное движение в газе в результате упругих и неупругих столкновений с атомами ртути. Движение между столкновениями происходит под действием внешнего постоянного однородного электрического поля. Каждое столкновение происходит в случайный момент времени, и направление вектора скорости после рассеяния на атоме ртути является также случайным. Общее представление о физическом процессе – величине анодного тока, его зависимости от ускоряющего и тормозящего напряжений, энергетическом распределении электронов в определенной точке пространства и т.п. – получается в результате усреднения результатов анализа движения большого количества отдельно взятых электронов.

Пусть средняя частота упругих соударений ν_0 постоянна (т.е. не зависит от энергии). Потеря энергии в неупругих соударениях составляет $\varepsilon^* = 4{,}9$ эВ (энергия возбуждения),

(Окончание см. на с.40)

Задачи

1. Число УГУ делится на 13. Обязательно ли делится на 13 число ГУГ? (Числа записаны в десятичной системе счисления; одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными буквами – разные цифры.)

А.Зайчик

2. Генный инженер Пупкин может из одной особи создать другую, у которой количество носов на 1 меньше количества ушей или количество ушей в 2 раза больше количества носов, чем у первой особи. Какое самое меньшее количество ушей должно иметь одноносое существо, чтобы из него генный инженер Пупкин, многократно применяя свой способ, смог вывести существо с 33 носами?

А.Жуков

3. Имеется ли в последовательности 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ... число, которое, как и 8, отличалось бы от некоторой натуральной степени числа 10 на 2?

О.Кужва

4. На бесконечном во все стороны листе клетчатой бумаги в каждой клетке записано натуральное число, причем все натуральные числа встречаются по одному разу. Докажите, что найдутся две клетки, имеющие общую сторону, числа в которых различаются больше чем на миллиард.

И.Акулич

5. Одиннадцать вершин правильного 25-угольника отмечены красным цветом. Обязательно ли найдутся три отмеченные точки, которые являются вершинами некоторого равнобедренного треугольника?

В.Произволов

Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон.

11. Робинзон поручил Пятнице запастись бананами, кокосами, ананасами и дурианами. Пятница решил каждый принесенный банан отмечать палочкой, кокос – палочкой и кружочком, ананас – двумя кружочками. Может ли Пятница отмечать дуриан какой-нибудь последовательностью из палочек и кружочков, чтобы по его записи (Пятница пишет подряд без пробелов) Робинзон всегда мог однозначно установить, сколько каких плодов было запасено?

А.Малеев

12. Сколько существует трехзначных чисел, представимых в виде суммы

$$\overline{abc}+\overline{ab}+a\,?$$

А.Спивак

13. Докажите, что в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ имеются по крайней мере две параллельные стороны тогда и только тогда, когда произведение площадей треугольников ABD и BCD равно произведению площадей треугольников ABC и ACD.

А.Джумадильдаев

14. Докажите, что

а) среди чисел вида 5^m-5^n, где m и n – различные натуральные числа, $m>n$, имеется сколь угодно много квадратов;

б) среди чисел вида 7^m+7^n нет ни одного квадрата, зато имеется сколь угодно много кубов.

А.Зайчик

15. Имеется 10 столбиков, содержащих 61, 62, 63, ..., 70 монет. Двое игроков ходят по очереди, снимая монеты со столбиков. За один ход можно забирать монеты из одного или нескольких столбиков (даже со всех сразу), но количество снятых с каждого столбика монет не может превышать $\sqrt{n}$, где n – количество монет в этом столбике. Победителем считается тот, кто возьмет последнюю монету.

Кто из игроков может обеспечить себе победу при любой игре соперника?

И.Акулич

Великомученик Петя

И.АКУЛИЧ

Рассмотрим положительные числа a и b. Как известно, их среднее арифметическое – это $\frac{a+b}{2}$, а среднее геометрическое – число $\sqrt{ab}$. Чуть меньшей известностью пользуется среднее гармоническое: $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\dfrac{2ab}{a+b}$. Очевидно, что

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2ab}{a+b}=ab,$$

т.е. произведение среднего арифметического и среднего гармонического равно произведению самих чисел a и b.

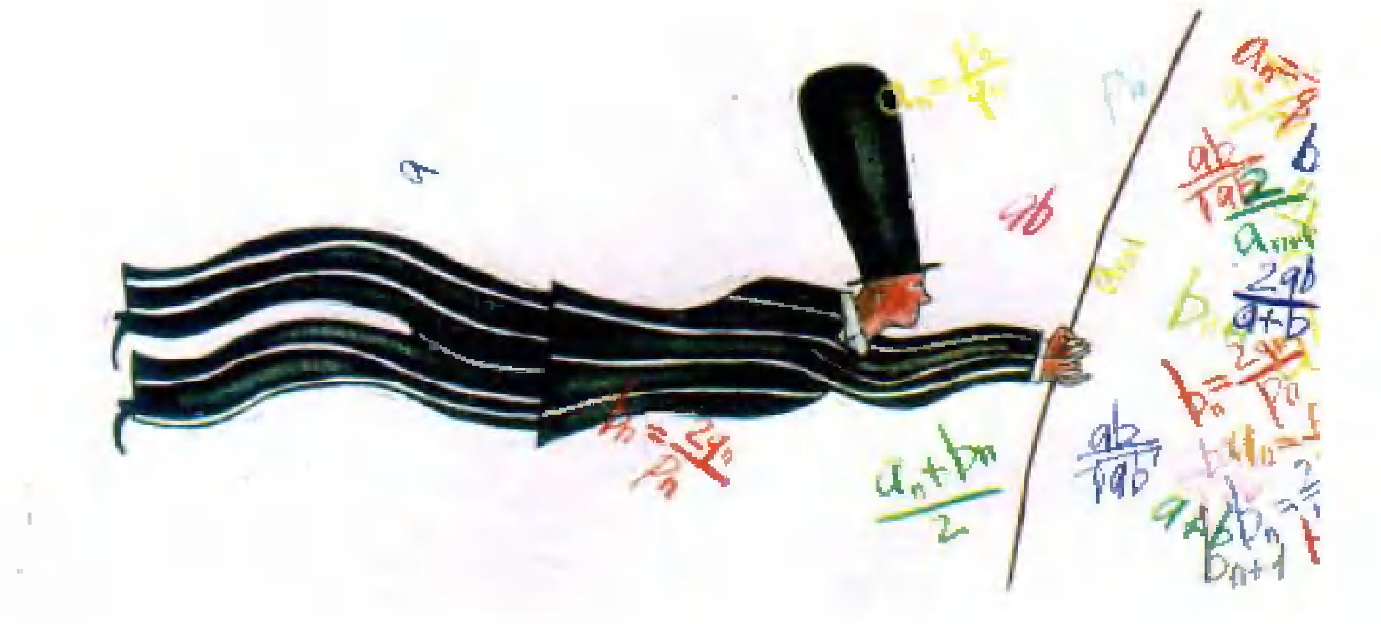
В 1999 году А.Канель понял, что из этого можно «слепить» неплохую задачу для олимпиады, примерно такую:

Пусть $a_0=1$, $b_0=2$ и для любого натурального n числа a_n и b_n – соответственно, среднее арифметическое и среднее гармоническое чисел a_{n-1} и b_{n-1}. Найдите произведение $a_{1999}b_{1999}$.

Решение состоит в том, что произведение a_nb_n одно и то же для всех n, поэтому $a_{1999}b_{1999}=a_0b_0=2$.

Но автор, видимо, решил, что условие выглядит скучновато, и «оживил» его:

На доске в лаборатории написаны два числа. Каждый день старший научный сотрудник Петя стирает с доски оба числа и пишет вместо них их среднее арифмети-



ческое и среднее гармоническое. Утром первого дня на доске были написаны числа 1 и 2. Найдите произведение чисел, которые Петя напишет вечером 1999-го дня.

В таком виде задачу предложили девятиклассникам на LXII Московской олимпиаде. Вроде бы задача отличается от первоначальной лишь появлением лишней сюжетной линии, а по сути эквивалентна первоначальной. Но давайте проследим за действиями старшего научного сотрудника. В первый день он напишет на доске числа $\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$ и $\frac{2\cdot 1\cdot 2}{1+2}=\frac{4}{3}$. Во второй день — числа $\frac{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}{2}=\frac{17}{12}$ и $\frac{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}}{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}=\frac{24}{17}$. Впрочем, что это мы среднее гармоническое вычисляем? Вы же помните, что произведение среднего арифметического и среднего гармонического равно 2. Так что дальше можно вычислять только среднее арифметическое. На третий день (проверьте, если сомневаетесь!) на доске окажутся числа $\frac{577}{408}$ и $\frac{816}{577}$, на четвертый — $\frac{665857}{470832}$ и $\frac{941664}{665857}$, на пятый — $\frac{886731088897}{627013566048}$ и $\frac{1254027132096}{886731088897}$, на шестой —

$$\frac{1572584048032918633353217}{1111984844349868137938112}$$

и

$$\frac{2223969688699736275876224}{1572584048032918633353217}.$$

Дальше цифр будет еще больше ...

Петя, конечно, может воспользоваться компьютером — старший научный сотрудник все-таки. Но интересно, сможет ли Петя выписывать числа, т.е. хватит ли ему места на доске? И всегда ли сможет компьютер подсчитать эти числа? Уж больно быстро они возрастают...

Читатель, наверное, уже предчувствует ответ. Но убедиться не мешает. Запишем число a_n в виде несократимой дроби:

$$a_n=\frac{p_n}{q_n}.$$

Тогда

$$b_n=\frac{2q_n}{p_n},$$

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}=\frac{\frac{p_n}{q_n}+\frac{2q_n}{p_n}}{2}=\frac{p_n^2+2q_n^2}{2p_nq_n},$$

$$b_{n+1}=\frac{2}{a_{n+1}}=\frac{4p_nq_n}{p_n^2+2q_n^2}.$$

Таким образом, $p_{n+1}=p_n^2+2q_n^2>p_n^2$. Оценка, заметьте, довольно грубая (по индукции можно доказать [1], что $p_n^2-2q_n^2=1$, так что на самом деле $p_{n+1}=2p_n^2-1$). Мы уже знаем, что $p_6>10^{24}$. Значит, $p_7>10^{48}$, $p_8>10^{96}$, ..., $p_{1999}>10^{24\cdot 2^{1993}}$. Поскольку $2^{10}=1024>1000$, то

$$24\cdot 2^{1993}=24\cdot 2^3\cdot 2^{10\cdot 199}>192\cdot 1000^{199}>10^{599}.$$

Значит, числитель дроби, которую Петя должен написать на доске на 1999-й день, будет содержать более 10^{599} цифр. Сказать, что это число очень большое, — значит ничего не сказать. Оно несусветно большое. Даже если Петя будет выписывать миллиард цифр в секунду, то ему потребуется более 10^{590} секунд. Поскольку

$$60\cdot 60\cdot 24\cdot 366=31622400<40000000,$$

то Пете понадобится более 10^{582} лет для того, чтобы выписать один только этот числитель...

---

[1] *Об этом и многом другом можно прочитать в статье В.Сендерова и А.Спивака «Уравнения Пелля» в «Кванте» №3.*

Оптические задачи на вступительных экзаменах

В.МОЖАЕВ

Задача 1. *Два луча симметрично пересекают главную оптическую ось собирающей линзы на расстоянии d = 7,5 см от линзы под углом $\alpha = 4^\circ$ (рис.1). Определите угол β между этими лучами после прохождения ими линзы, если фокусное расстояние линзы F = 10 см.*

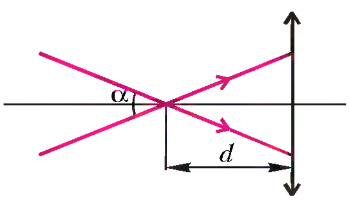


Рис. 1

Построим ход одного из данных лучей после преломления в линзе (рис.2). Через оптический центр линзы (на рисунке 2 это точка O) проведем побочную оптическую ось OC, параллельную данному лучу AB. Параллельные лучи после прохождения собирающей линзы пересекаются в ее фокальной плоскости. Очевидно, что точкой пересечения данных лучей будет точка C, которая одновременно принадлежит оси OC и фокальной плоскости FC. Продолжим луч BC влево до пересечения с главной оптической осью линзы в точке A'. Угол $BA'O$ является половиной искомого угла β.

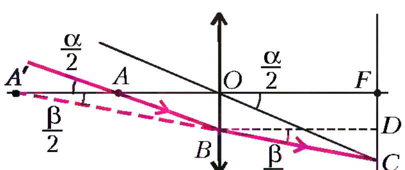


Рис. 2

Проведем линию BD параллельно главной оптической оси. Угол CBD также равен $\beta/2$. Отрезок FC равен $F\,\mathrm{tg}(\alpha/2)$, где F – фокусное расстояние нашей линзы. А отрезок FD равен отрезку OB, который в свою очередь равен $d\,\mathrm{tg}(\alpha/2)$. Из треугольника CBD найдем

$$\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{FC - FD}{F} = \frac{F-d}{F}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда

$$\beta = 2\mathrm{arctg}\frac{\beta}{2} \approx 1{,}7\cdot 10^{-2}\ \text{рад} \approx 1^\circ.$$

Эту задачу можно решать и с использованием формулы линзы. Так как точка A расположена ближе фокуса линзы, ее изображение будет мнимым. Запишем формулу линзы и найдем расстояние f от мнимого изображения A' точки A до линзы:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F},\ \text{и}\ f = \frac{dF}{F-d}.$$

Из треугольника $A'OB$ (см. рис.2) находим $\mathrm{tg}(\beta/2) = OB/f$. Поскольку $OB = d\,\mathrm{tg}(\alpha/2)$, получаем

$$\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{F-d}{F}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Задача 2. *Точечный источник света находится на главной оптической оси на расстоянии d = 60 см от рассеивающей линзы с фокусным расстоянием F = 15 см. Линзу сместили вверх на L = 2 см в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси. На сколько и куда надо сместить источник света, чтобы его изображение вернулось в старое положение?*

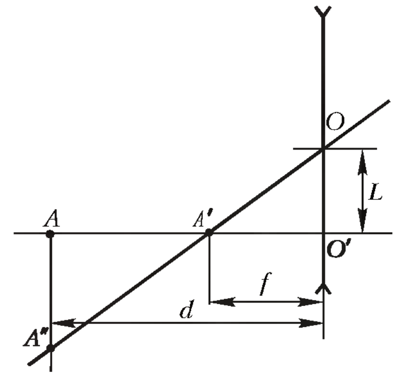


Рис. 3

Поскольку линзу смещают в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси, а изображение источника (A') должно остаться в прежнем положении, расстояние от источника (A) до плоскости линзы также должно сохраниться. Все это будет выполнено, если оптический центр линзы (O), изображение источника (A') и новый источник (A'') будут лежать на одной прямой. На рисунке 3 это прямая OA''. Следовательно, источник надо сместить вниз на расстояние AA''.

По формуле линзы найдем расстояние f от изображения источника до линзы:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F},\ \text{и}\ f = \frac{dF}{d+F}.$$

Из подобия треугольников $AA'A''$ и $A'OO'$ можно записать

$$\frac{AA''}{L} = \frac{d-f}{f}.$$

Отсюда находим искомое расстояние:

$$AA'' = L\left(\frac{d}{f} - 1\right) = \frac{Ld}{F} = 8\ \text{см}.$$

Задача 3. *Изображение точечного источника, расположенного на главной оптической оси собирающей линзы на расстоянии d = 60 см от нее, получено на экране. Между линзой и источником вставили плоскопараллельную прозрачную пластинку толщиной a = 3 см, перпендикулярную главной оптической оси линзы. Чтобы снова получить четкое изображение источника, экран пришлось передвинуть вдоль оптической оси на Δ = 1 см. Определите показатель преломления пластинки, если фокусное расстояние линзы F = 30 см.*

Сначала рассмотрим прохождение лучей от точечного источника A через плоскопараллельную пластинку (рис.4). Направим один из лучей под произвольным углом α к главной оптической оси линзы. После преломления на двух границах пластинки луч выйдет параллельно падающему

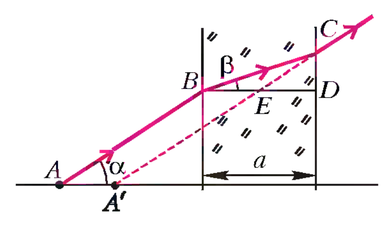


Рис. 4

лучу. Из треугольника BCD найдем длину стороны BC:

$$BC = \frac{a}{\cos\beta}.$$

Из треугольника BCE по теореме синусов можно записать

$$\frac{BE}{BC} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha},$$

откуда получим

$$BE = a\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta\sin\alpha}.$$

Для параксиальных лучей, т.е. для лучей, идущих под малыми углами к главной оптической оси линзы, можно считать, что $\sin(\alpha-\beta) = \alpha-\beta$, $\sin\alpha = \alpha$, а $\cos\beta = 1$. В этом приближении

$$BE = a\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Расстояние BE равно смещению источника по направлению к линзе. До помещения пластины источник и его изображение находились на двойном фокусном расстоянии от линзы. После установления пластины источник приблизился к линзе на расстояние $AA' = BE$, а изображение отодвинулось от линзы на Δ. По формуле линзы можно записать

$$\frac{1}{d-AA'} + \frac{1}{d+\Delta} = \frac{1}{F},$$

или

$$d - a\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{F(d+\Delta)}{d+\Delta-F}.$$

Разрешая это равенство относительно n, получим

$$n = \left(\frac{(a-d)(d+\Delta-F)+F(d+\Delta)}{a(d+\Delta-F)}\right)^{-1} = \frac{31}{21} \approx 1{,}48.$$

Задача 4. *В комнате на столе лежит плоское зеркало, на котором находится тонкая плосковыпуклая линза с фокусным расстоянием $F = 40$ см (рис.5). По потолку AB ползет муха со скоростью $v = 2$ см/с. Расстояние от потолка до зеркала d = 220 см. На каком расстоянии от зеркала находится изображение мухи в данной оптической системе? Чему равна скорость изображения мухи в тот момент, когда она пересекает главную оптическую ось линзы OO'?*

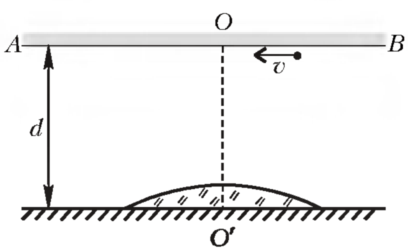


Рис. 5

Пусть муха в некоторый момент находится на небольшом расстоянии OM от главной оптической оси линзы (рис.6). По формуле линзы мы можем найти, на каком расстоянии от линзы находится изображение мухи M':

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{2}{F}, \text{ и}$$

$$f = \frac{dF}{2d-F} = 22 \text{ см}.$$

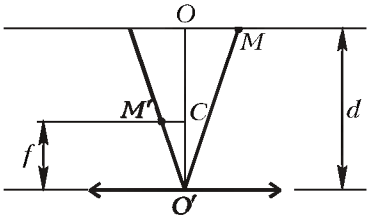


Рис. 6

Здесь f – расстояние от изображения мухи до линзы, а двойка в числителе правой части формулы учитывает двойной проход лучей через линзу.

Из подобия треугольников $OO'M$ и $M'CO'$ следует, что $d/f = OM/M'C$. Очевидно, что $OM/M'C = v/u$, где u – скорость изображения мухи. Следовательно,

$$u = v\frac{f}{d} = 0{,}2 \text{ см/с}.$$

Задача 5. *С помощью рассеивающей линзы получено изображение спички, расположенной перпендикулярно главной оптической оси линзы, с увеличением $\Gamma_1 = 1/2$. По другую сторону линзы на расстоянии l = 9 см от нее перпендикулярно главной оптической оси линзы установили плоское зеркало. Изображение спички в системе линза – зеркало получилось с увеличением $\Gamma = 1/4$. Определите фокусное расстояние линзы.*

Рассмотрим сначала первый случай, когда зеркала нет, а с помощью рассеивающей линзы получено изображение спички с увеличением Γ_1. Обозначим расстояние от спички до линзы через d, а от изображения спички до линзы через f. По формуле линзы можно записать

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F},$$

где F – фокусное расстояние линзы. Умножив каждый член этого равенства на f, получим

$$\frac{f}{d} - 1 = -\frac{f}{F}.$$

С учетом того, что $f/d = \Gamma_1$, мы получаем однозначную связь между расстоянием от изображения до линзы и увеличением:

$$f = F(1-\Gamma_1).$$

Мнимое изображение B точки спички B_0 в линзе (рис.7) будет являться предметом для плоского зеркала. Расстояние от этого предмета до зеркала равно $f + l$. Изображение B' этого предмета в зеркале находится также на расстоянии $f + l$ от зеркала. Расстояние от изображения B' до линзы равно $d' = f + 2l$. Обозначим расстояние от изображения B'' в линзе через f' и снова воспользуемся формулой линзы:

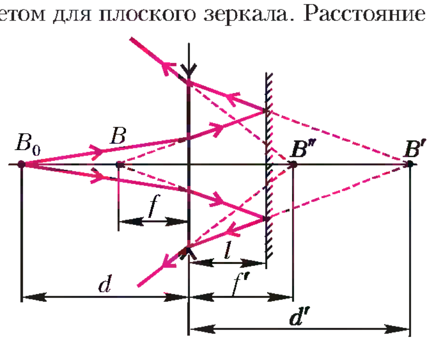


Рис. 7

$$\frac{1}{f+2l} - \frac{1}{f'} = -\frac{1}{F}.$$

Увеличение в этом случае равно $\Gamma_2 = \frac{f'}{f+2l}$. С другой стороны, $\Gamma_2 = \Gamma/\Gamma_1$. Умножим все члены в формуле линзы на $f + 2l$, подставим ранее найденное выражение для f и получим

$$F = \frac{2l}{\Gamma_1 + \Gamma_1/\Gamma - 2} = 36 \text{ см}.$$

Задача 6. *Из стеклянной пластинки с показателем преломления n = 1,5 вырезали толстую линзу в форме полушара радиусом R = 10 см. Через такую линзу рассматривается точечный источник света S, расположенный на расстоянии $d = R/2$ от плоской поверхности полушара (рис.8). На каком расстоянии от этой поверхности наблю-*

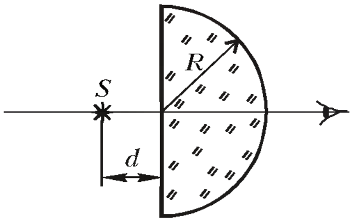


Рис. 8

датель увидит изображение источника света? Указание: для малых углов $\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha = \alpha$.

Сразу оговоримся, что мы будем рассматривать параксиальные лучи, т.е. лучи, которые распространяются под малыми углами к главной оптической оси линзы. Решение задачи разобьем на два этапа. На первом этапе рассмотрим падение лучей от источника на плоскую границу раздела: справа находится стекло с показателем преломления n, а слева – воздушная среда (рис.9). Из треугольника SAO находим

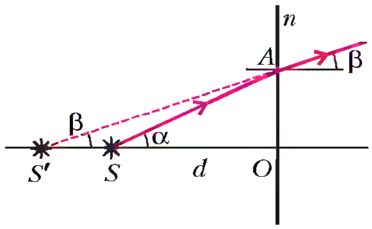


Рис. 9

$$AO = d\operatorname{tg}\alpha,$$

где α – произвольный угол. Расстояние $S'O$ найдем из треугольника $S'AO$:

$$S'O = \frac{AO}{\operatorname{tg}\beta} = d\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = d\frac{\alpha}{\beta} = dn.$$

Полученный результат позволяет нам заменить реальный источник S, расположенный в воздушной среде, мнимым источником S', расположеным в стекле. Эта эквивалентная ситуация изображена на рисунке 10. Слева от сферической границы находится стеклянная среда с показателем преломления n, а справа – воздушная среда. Из точки S' проведем произвольный луч под углом δ к горизонту. Обозначим угол падения на границу двух сред через α, а угол преломления через β. По закону преломления,

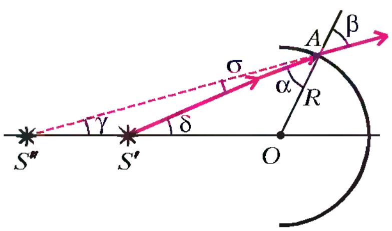


Рис. 10

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} = n.$$

Из треугольника $S'AO$ по теореме синусов можно записать

$$\frac{R}{S'O} = \frac{\sin\delta}{\sin\alpha} = \frac{\delta}{\alpha}.$$

Подставляя сюда выражение для $S'O$, получим связь между углами δ и α:

$$\delta = \frac{2\alpha}{n}.$$

Угол σ, очевидно, равен разности углов β и α:

$$\sigma = \beta - \alpha = \alpha(n-1).$$

Углы σ и γ в сумме равны углу δ, поэтому

$$\gamma = \delta - \sigma = \frac{2\alpha}{n} - \alpha(n-1) = \alpha\frac{2-n(n-1)}{n}.$$

Теперь рассмотрим треугольник $S''AO$. По теореме синусов можно записать

$$\frac{S''O}{R} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{n^2}{2-n^2+n}.$$

Отсюда искомое расстояние будет равно

$$S''O = R\frac{n^2}{2-n^2+n} = 18 \text{ см}.$$

Данная задача имеет другое решение, которое принципиально отличается от приведенного выше. Для параксиальных лучей стеклянную полусферу можно рассматривать как суперпозицию стеклянной плоскопараллельной пластинки толщиной R и плосковыпуклой линзы с радиусом кривизны R. Вывод выражения для фокуса F такой системы выходит за рамки школьной программы, потому мы приведем лишь окончательный результат:

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty}\right) = \frac{n-1}{R}$$

(с одной стороны радиус кривизны поверхности линзы равен R, с другой стороны мы имеем плоскую поверхность, т.е. радиус кривизны бесконечно большой). Проведите этот способ решения и сравните результат с полученным выше ответом.

Упражнения

1. Два луча симметрично пересекают главную оптическую ось рассеивающей линзы на расстоянии $d = 24$ см от линзы под углом $\alpha = 6^\circ$ (рис.11). Определите угол между этими лучами после прохождения ими линзы, если фокусное расстояние линзы $F = 12$ см.

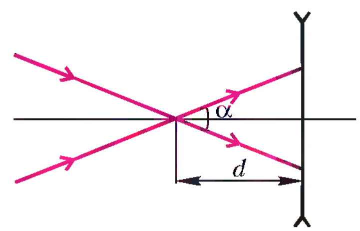


Рис. 11

2. Сходящийся пучок света, падающий на рассеивающую линзу симметрично относительно главной оптической оси, собирается в точку на экране, находящимся на расстоянии $f = 90$ см от линзы. Если перед линзой перпендикулярно главной оптической оси разместить плоскопараллельную оптически прозрачную пластинку, то из линзы будет выходить параллельный пучок света. Чему равна толщина пластинки l, если ее показатель преломления $n = 1{,}5$? Фокусное расстояние линзы $F = 10$ см.

3. На столе лежит плоское зеркало, к которому плотно прилегает тонкая плосковогнутая линза с фокусным расстоянием $F = 45$ см. Над оптической системой параллельно плоскости зеркала на расстоянии $d = 4F$ пролетает комар со скоростью $v = 9$ см/с. На каком расстоянии от зеркала находится изображение комара в данной оптической системе? Чему равна скорость изображения комара в тот момент, когда комар будет пересекать главную оптическую ось линзы?

4. С помощью положительной линзы с фокусным расстоянием $F = 15$ см получено мнимое изображение иголки, расположенной перпендикулярно главной оптической оси линзы, с увеличением $\Gamma_1 = 2$. По другую сторону линзы перпендикулярно ее главной оптической оси установили плоское зеркало. Изображение иголки в системе линза – зеркало получилось с увеличением $\Gamma_2 = 3$. Определите расстояние от линзы до зеркала.

Спички

1. На рисунке 1 шесть спичек образуют четыре маленьких равносторонних треугольника и один большой. Можно ли из шести спичек составить четыре равно-

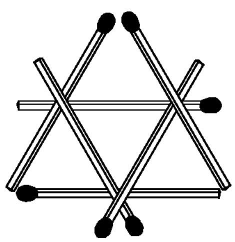


Рис. 1

сторонних треугольника, длины всех сторон которых равны одной спичке? (Вам может пригодиться клей или пластилин.)

2. Положите на стол три спички, чтобы головки не касались стола. (Ставить спички «шалашиком» или пользоваться стенами, мебелью и тому подобным запрещено. Нельзя использовать и край стола, свесив с него головки спичек.)

3. Три спички лежат на столе (рис.2). Удалите среднюю спичку из середины, не трогая ее.

4. Ничего не ломая и не разрезая, создайте на столе а) треу-

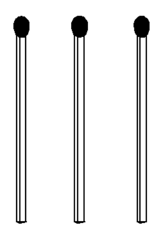


Рис. 2

гольник при помощи одной спички; б) квадрат при помощи двух спичек.

5. Положите 12 спичек, чтобы получились четыре маленьких квадрата и один большой.

6. Из десяти спичек составьте три квадрата.

7. Уберите указанное слева на рисунках 3, *а–п* число спичек, чтобы осталось указанное справа число квадратов. (Никаких болтающихся без дела спичек не должно остаться!)

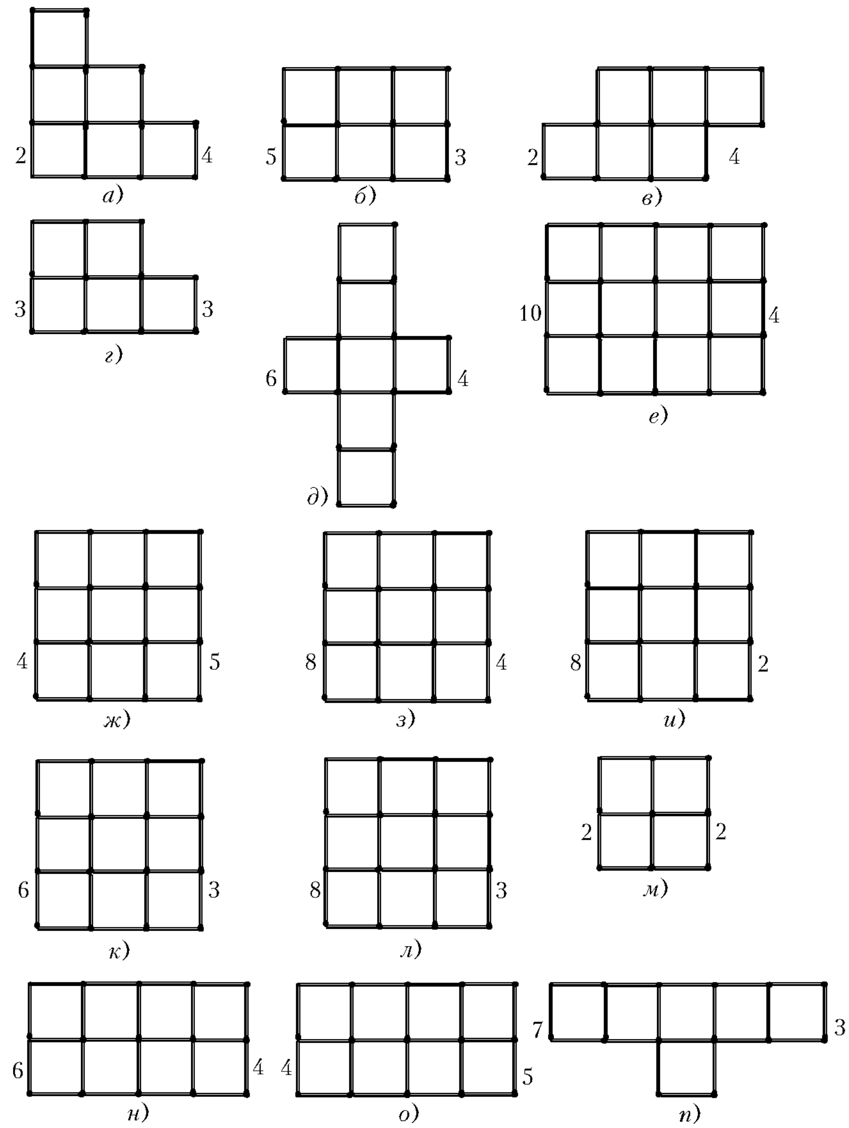


Рис. 3

8. Уберите 4 спички (рис.4), чтобы оставшиеся образовывали два равных шестиугольника.

9. Уберите 8 спичек (рис.5), чтобы оставшиеся образовывали четыре равных шестиугольника.

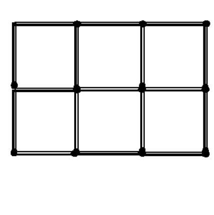


Рис. 4

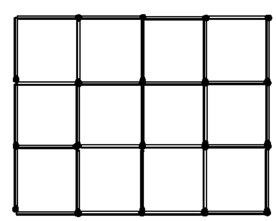


Рис. 5

10. Уберите 16 спичек (рис.6), чтобы оставшиеся образовывали один квадрат и четыре равных ему по площади шестиугольника.

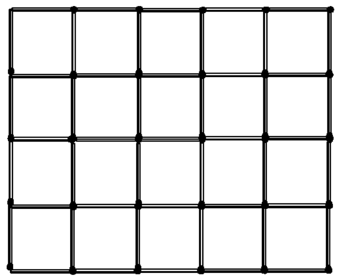


Рис. 6

11. Из шести спичек сложите шестиугольник с четырьмя острыми углами.

12. Переложив две спички, поверните дом (рис.7) другой стороной.

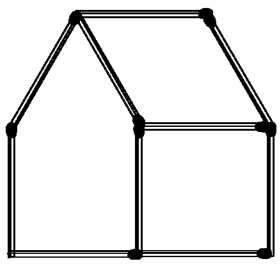


Рис. 7

13. Из 40 спичек образована квадратная решетка (рис.8). Покажите, как снять 9 спичек, чтобы полностью не сохранилось контура ни одного квадрата, состоящего из одного или большего количества маленьких квадратиков. (Достаточно указать один способ, как это сделать.)

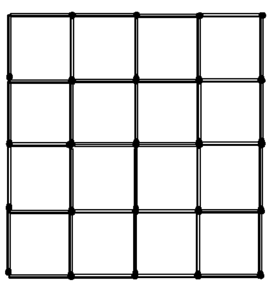


Рис. 8

14. Переложите указанное слева на рисунках 9, *а—е* число спичек, чтобы получилось указанное справа число квадратов.

15. Переложите 6 спичек (рис.10), чтобы образовалась «снежинка» из 6 равных ромбов.

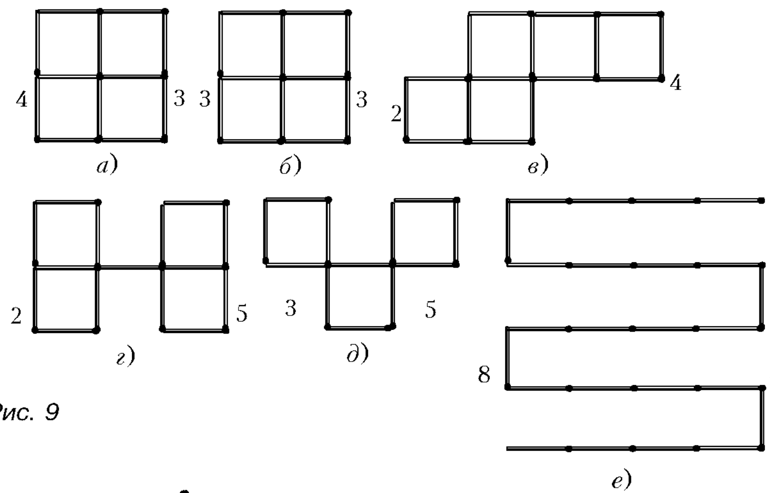


Рис. 9

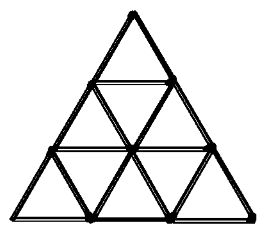


Рис. 10

16. Переложите а) 3 спички; б) 4 спички; в) 6 спичек (рис.11), чтобы образовались четыре треугольника.

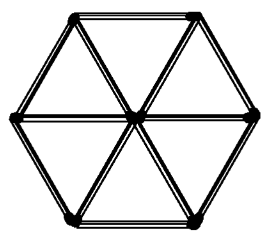


Рис. 11

17. Переложите 4 спички (рис.12), чтобы образовались пять треугольников.

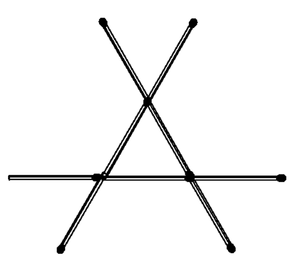


Рис. 12

18. Переложите 4 спички (рис.13), чтобы образовался правильный шестиугольник.

19. Переложите 3 спички (рис.14), чтобы образовался шестиугольник, составленный из трех ромбов.

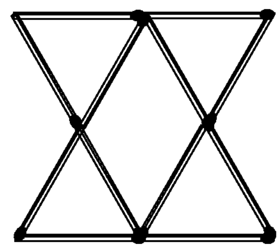


Рис. 13

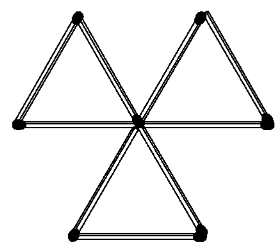


Рис. 14

20* (А.Храбров, Д.Ростовский, Санкт-Петербургская математическая олимпиада 2000 г.). Из спичек сложен клетчатый прямоугольник размером 2000×3000. Сколько спичек нужно убрать, чтобы не осталось ни однлго спичечного прямоугольника меньшего размера?

А. Спивак

Монотонные функции в конкурсных задачах

А.ЕГОРОВ, Ж.РАББОТ

Метод решения задач, который мы рассмотрим в этой статье, применим как к обычным школьным задачам, так и к более сложным, часто называемым нестандартными.

При изучении школьного курса алгебры и особенно начал математического анализа вам часто приходилось выяснять, возрастает или убывает та или иная функция. Мы постараемся в этой статье показать, что использование монотонности функций, входящих в уравнение или неравенство (иногда вообще не фигурирующих в условии, а появляющихся по ходу решения), нередко сильно упрощает техническую часть решения, а порой без него просто немыслимо решить задачу.

Теорема о корне

Сначала напомним основное определение.

Функция $y = f(x)$ называется *монотонно возрастающей* (*монотонно убывающей*) на некотором промежутке, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) > f(x_2)$).

Наглядный смысл возрастания или убывания функции прозрачен – график возрастающей функции при движении по нему слева направо идет все выше и выше (а убывающей – все ниже и ниже). Мы, естественно, предполагаем, что оси координат расположены стандартным образом: ось абсцисс Ox горизонтальна и направлена слева направо, а ось ординат Oy вертикальна и направлена снизу вверх.

Если функция возрастает или убывает на некотором промежутке, говорят, что она *монотонна* на этом промежутке.

Первый факт, часто использующийся при решении задач, в том или ином виде доказан в вашем школьном курсе (например, в учебнике для 10–11 классов под редакцией А.Н.Колмогорова он приводится под названием «Теорема о корне» при введении обратных тригонометрических функций в начале 10 класса). Напомним его.

(А) *Пусть функция f возрастает (убывает) на промежутке I, число a – любое из значений, принимаемых f на этом промежутке. Тогда уравнение $f(x) = a$ имеет единственный корень в промежутке I.*

Нам иногда будет удобнее несколько иная формулировка этого факта.

(А*) *Пусть $y = f(x)$ – монотонная на некотором промежутке функция. Тогда при любом значении a уравнение $f(x) = a$ имеет на этом промежутке не более одного корня.*

Наглядный смысл теоремы о корне (А) и ее переформулировки (А*) также прозрачен – горизонтальная прямая $y = a$ может пересечь график монотонной функции $y = f(x)$ не более чем в одной точке (т.е. либо вообще его не пересекает, либо пересекает в единственной точке).

Начнем с совсем простой задачи.

Задача 1. *Решите уравнение*

$$x^3 + x = 10\,. \qquad (1)$$

Решение. Сразу заметим, что левая часть данного уравнения – функция, возрастающая на всей числовой прямой (это очень легко доказать). Следовательно, уравнение (1) имеет не более одного корня – теорема (А*). Но корень легко угадать: при $x = 2$ левая часть данного уравнения равна правой.

Ответ: $x = 2$.

Решим теперь чуть более трудную задачу.

Задача 2. *Решите уравнение*

$$\sqrt{37x+12} - \sqrt{31-6x} = 2\,. \qquad (2)$$

Комментарий. Уравнение (2) можно решить стандартным школьным способом, почленно возведя (дважды) промежуточные иррациональные уравнения в квадрат, найдя затем корни полученного квадратного уравнения с многозначными коэффициентами и произведя после этого отсев возможных посторонних решений. Однако задача допускает решение «в одну строчку».

Решение. Левая часть уравнения (2) – возрастающая в своей области определения функция (первый радикал при увеличении x, очевидно, увеличивается, а второй – уменьшается, но он вычитается из первого, поэтому их разность возрастает). По теореме (А*) уравнение (2) имеет не более одного решения. Его легко предъявить: это $x = 1$. Действительно, при подстановке этого значения неизвестного в (2) получается верное равенство $7 - 5 = 2$.

Ответ: $x = 1$.

Замечания. 1. Откуда взялся корень $x = 1$? Мы его просто угадали! Некоторые школьники считают приведенное решение «нестрогим» – как это можно что-то угадывать? Но в нашем решении все в порядке – доказано, что решений не больше одного и предъявлено решение (неважно, откуда мы его взяли). Кстати, угадать решение было довольно просто – мы начали перебирать целые неотрицательные значения x и искать, при каких из них «извлекается» второй корень (там просто меньше коэффициенты, чем под знаком первого корня). При $x = 0$ корень «не извлекся», а при $x = 1$ – извлекся (под корнем получился полный квадрат – число 25), тогда мы подставили $x = 1$ в уравнение (2) и получили верное равенство. Начинали мы с $x = 0$, так как при отрицательных целых x первый радикал не существует – подкоренное выражение отрицательно. Конечно, угадать корень можно далеко не всегда, но мы и не претендуем на универсальность такого подхода к решению.

2. Насколько строго наше доказательство монотонности левой части уравнения (2)? На наш взгляд, приведенного нами рассуждения вполне достаточно, но при необходимости его легко формализовать. Пусть x_1 и x_2 – произвольные числа из области определения левой части уравнения (2), причем $x_1 > x_2$. Введем обозначения:

$$f(x) = \sqrt{37x+12}\,,\quad g(x) = \sqrt{31-6x}\,.$$

Тогда

$$f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{37x_1+12} - \sqrt{37x_2+12} =$$

$$= \frac{(37x_1+12)-(37x_2+12)}{\sqrt{37x_1+12}+\sqrt{37x_2+12}} =$$

$$= \frac{37(x_1-x_2)}{\sqrt{37x_1+12}+\sqrt{37x_2+12}} > 0 \text{, т.е. } f(x_1)-f(x_2)>0 . \quad (2^*)$$

(Заметим, что, как это нередко бывает при преобразовании выражений, содержащих квадратные радикалы, нам помогло умножение и деление разности корней на сопряженное выражение – сумму этих же квадратных корней.)

Аналогично,

$$g(x_1)-g(x_2) = \frac{-6(x_1-x_2)}{\sqrt{31-6x_1}+\sqrt{31-6x_2}} < 0 ,$$

$$\text{т.е. } g(x_1)-g(x_2)<0 . \quad (2^{**})$$

Наконец, обозначив левую часть уравнения (2), т.е. $f(x)-g(x)$, через $h(x)$ и почленно вычтя из неравенства (2*) неравенство (2**) [1], получим $\big(f(x_1)-g(x_1)\big)-\big(f(x_2)-g(x_2)\big)>0$. Но это значит, что $h(x_1)-h(x_2)>0$, т.е. функция $h(x)$ монотонно возрастает, что и утверждалось в нашем решении задачи.

Решая следующие упражнения, потренируйтесь в угадывании корней.

Упражнения

1. Решите уравнения:

а) $2x^3+x-3=0$; б) $x^5+3x^3+4=0$;

в) $2^x+x=6$; г) $\lg x+\sqrt{x-1}=4$.

2. Решите уравнения:

а) $\sqrt{5x+1}+\sqrt{17x+13}=12$;

б) $\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[5]{14x+4}=4$; в) $\sqrt{x}-\sqrt{5-x}=1$.

3. Исследуйте на монотонность функции:

а) $y=x+\dfrac{1}{x}$ при $x>1$; б) $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$;

в) $y=2^x-3^x$ при $x>0$; г) $y=5^x-3^x$ при $x>0$;

д) $y=\log_3 x-\log_2 x$ при $x<0$, $0<x<1$;

е) $y=a^x-b^x$ при $x<0$ и $0<a<b<1$;

ж) $y=\log_a x-\log_b x$ при $a>b>1$.

Сумма и разность монотонных функций

Сейчас мы сформулируем два важных свойства монотонных функций (мы ими, по существу, уже пользовались).

(B) *а) Сумма возрастающих (убывающих) функций – функция, возрастающая (соответственно, убывающая) на их общей области определения.*

б) Разность возрастающей и убывающей (убывающей и возрастающей) функций – функция, возрастающая (соответственно, убывающая) на их общей области определения.

Упражнение 4. Докажите оба утверждения (B).

Указание. Можно использовать известные вам свойства числовых неравенств.

Понятно, что первое из свойств (B) верно для любого конечного числа складываемых функций.

[1] *Здесь мы используем известное свойство числовых неравенств: неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать, сохраняя знак уменьшаемого неравенства (того,* ***из которого*** *вычитают). Вообще, мы советуем повторить свойства неравенств, поскольку ими часто приходится пользоваться при исследовании функций (в частности, на монотонность).*

Задача 3. *Решите уравнение*

$$\sqrt[3]{4x-1}+\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[9]{x-6}=6 .$$

Комментарий. Конечно, немыслимо решить это уравнение почленным возведением в степень (третью, девятую, причем неоднократно!). Это, как ни странно, сильно облегчает задачу – предостерегает от неправильного пути и заставляет искать другие способы.

Решение. Левая часть данного уравнения – возрастающая функция (см. утверждение (B)). Поэтому, согласно (A*), у него не более одного корня. Решение легко предъявить – это $x=7$: при подстановке его в уравнение получаем $3+2+1=6$, это – верное равенство.

Ответ: $x=7$.

Теперь рассмотрим задачу, для решения которой в указанном духе удобно привлечь идею симметрии (эта задача предлагалась на заочном туре одной из Соросовских олимпиад).

Задача 4. *Решите уравнение*

$$\sqrt{x(x+7)}+\sqrt{(x+7)(x+17)}+\sqrt{(x+17)(x+24)}=12+17\sqrt{2} . \quad (3)$$

Решение. Если записать первое подкоренное выражение в виде $(x+0)(x+7)$ и нанести на числовую ось четыре числа, которые суммируются с неизвестной величиной во всех скобках левой части, мы увидим, что эта система из четырех точек имеет центр симметрии – точку 12 (относительно нее симметрична пара чисел 0 и 24, а также пара 7 и 17). Поэтому замена переменной $t=x+12$ (откуда $x=t-12$) симметризует левую часть уравнения (3), которое примет вид

$$\sqrt{(t-12)(t-5)}+\sqrt{(t-5)(t+5)}+\sqrt{(t+5)(t+12)}=12+17\sqrt{2} . \quad (3^*)$$

Обозначим левую часть уравнения (3*) через $f(t)$. Заметим, что функция $f(t)$ определена в симметричной относительно нуля области

$$\left[\begin{array}{l} t\le -12, \\ t\ge 12 \end{array}\right.$$

и обладает свойством $f(-t)=f(t)$, т.е. является четной. Поэтому достаточно решить уравнение (3*) для $t\ge 12$. Но при этих значениях t каждый из трех трехчленов, стоящих под знаком радикала в левой части (3*), возрастает, значит, возрастают и квадратные корни из этих трехчленов. Поэтому, применив утверждение (B), получим, что при $t\ge 12$ левая часть (3*) – возрастающая функция, а значит, уравнение имеет не более одного корня. Находим подбором, что $t=13$ – корень (подставив это значение t в левую часть уравнения (3*), получим

$$\sqrt{8}+12+5\sqrt{18}=2\sqrt{2}+12+15\sqrt{2}=12+17\sqrt{2} ,$$

что равно правой части).

Итак, $t=13$, откуда $x=1$. Поскольку $t=-13$ тоже решение уравнения (3*), получаем и второй корень исходного уравнения: $x=-25$.

Ответ: $x_1=1$; $x_2=-25$.

Замечание. Конечно, можно не делать замену переменной, а рассуждать о симметрии левой части относительно $x=12$ и использовать ее монотонность при $x\ge 12$, но это выглядит менее изящно и естественно.

Понятно, что соображения монотонности могут применяться не только при решении уравнений, но и в задачах с неравенствами.

Задача 5. *Решите неравенство*

$$\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{3x-2}<4\,. \qquad (4)$$

Решение. Найдем область допустимых значений переменной данного неравенства:

$$\begin{cases} x^2+x-2\ge 0, \\ 3x-2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1.$$

При этих значениях x левая часть (4) – возрастающая функция (вершина параболы – графика квадратного трехчлена $y=x^2+x-2$ – имеет абсциссу $x=-0{,}5$, поэтому при $x\ge 1$ первое подкоренное выражение, а вместе с ним и все первое слагаемое левой части (4), возрастает, второе слагаемое – также возрастающая функция), а правая часть – константа. Поскольку при $x=2$ левая часть (4) равна правой, данное неравенство справедливо при всех допустимых значениях x, меньших 2 (при бóльших значениях x левая часть (4) больше, чем при $x=2$).

Ответ: $1\le x<2$.

Замечание. Полезно отметить, что мы, по существу, использовали следующее утверждение: *если* $y=f(x)$ *– функция, возрастающая на промежутке* $[a;b]$, *то для любого числа с, такого что а < с < b, неравенство* $f(x)<f(c)$ *равносильно неравенству* $a\le x<c$.

Решим теперь несколько более сложную задачу.

Задача 6. *Решите уравнение*

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}+x=\frac{24}{5}\,.$$

Решение. Ясно, что отрицательных корней данное уравнение иметь не может (при отрицательных значениях x его левая часть отрицательна, а правая – положительна). Не очень сложно угадать один его корень: $x=4$. Покажем, что других корней нет. Для этого убедимся в том, что функция $y=f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ возрастает при положительных значениях x. Действительно, при таких x справедливо равенство $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{9}{x^2}}}$. Дальше рассуждаем стандартным образом: подкоренное выражение в знаменателе последней дроби при $x>0$ убывает, поэтому и сам знаменатель убывает, но тогда дробь возрастает – ее числитель не меняется, а знаменатель убывает.

Ответ: $x=4$.

Замечание. Очень важно научиться легко ориентироваться в подобных ситуациях: что будет с дробью, если ее числитель растет, а знаменатель убывает и при этом (очень важно!) они положительны (или отрицательны); числитель убывает, знаменатель растет и т.п.

Упражнения

5. Исследуйте на монотонность функции:

а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; б) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; в) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

6. Решите уравнения и неравенства:

а) $\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-3}=\sqrt{3}$;

б) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}-x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; в) $4^x-3^x=37$;

г) $x^{10}+\sqrt{x-1}\ge 33$; д) $x^5+x^3+2\sqrt{x}\ge 4$;

е) $2^{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}<1$.

«Встречная» монотонность

Приведем теперь еще одну очевидную, но часто употребляющуюся переформулировку теоремы (А) о корне (ее иногда называют теоремой о «встречной» монотонности).

(А**) *Пусть функция* $y=f(x)$ *возрастает на промежутке I, а функция* $y=g(x)$ *убывает на этом промежутке. Тогда уравнение* $f(x)=g(x)$ *имеет на промежутке I не более одного корня.*

Задача 7. *Решите уравнение*

$$x^2-x+2=\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}\,. \qquad (5)$$

Решение. Правая часть уравнения (5) – функция, убывающая на своей области определения, т.е. при всех значениях $x\ge 1$:

$$\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}=\frac{(x+7)-(x-1)}{\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}}=\frac{8}{\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}}\,;$$

очевидно, что дробь, у которой числитель постоянен, а знаменатель возрастает, убывает. С другой стороны, при $x\ge 1$ квадратный трехчлен, стоящий в левой части уравнения (5), возрастает, так как вершина его графика, параболы, имеет абсциссу, равную 0,5, а ее ветви направлены вверх. Таким образом, у нас имеется ситуация, описанная в утверждении (А**), и уравнение (5) имеет не более одного корня. Но при $x=2$ левая часть (5) равна правой.

Ответ: $x=2$.

Задача 8. *Решите неравенство*

$$3^x-7>4^{\frac{1}{x}}\,.$$

Решение. Очевидно, при $x<0$ неравенство решений не имеет: его левая часть отрицательна, а правая – положительна; $x=0$ – тоже не решение. Пусть теперь $x>0$. Тогда левая часть данного неравенства возрастает, а правая – убывает (с ростом x показатель степени убывает) – опять «встречная» монотонность. При $x=2$ левая часть равна правой (и равна 2). Поэтому при $x>2$ левая часть больше двух, а правая часть меньше двух, и данное неравенство будет выполнено. При $0<x<2$ левая часть меньше двух, а правая – больше, так что эти значения x не являются решениями.

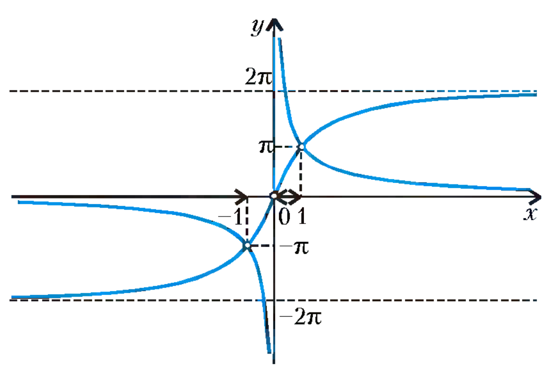
Ответ: $x>2$.

Задача 9. *Решите неравенство*

$$4\operatorname{arctg} x<\frac{\pi}{x}\,.$$

Решение. Функция $y=4\operatorname{arctg} x$ возрастает на всей числовой оси. Функция $y=\dfrac{\pi}{x}$ убывает и при $x<0$, и при $x>0$. Поэтому рассмотрим отдельно отрицательные и положительные значения x. На каждом из этих множеств имеется «встречная» монотонность (см. рисунок). Корни соответствующего уравнения угадываются легко: $x=\pm 1$ (можно воспользоваться и нечетностью левой и правой частей).

Ответ: $x<-1$, $0<x<1$.



Замечание. Обратите внимание на то, что мы рассматривали отдельно два промежутка монотонности правой части. Дело в том, что все наши рассуждения верны лишь на общем промежутке монотонности двух функций. Если бы мы забыли, что правая часть монотонна не на всей числовой прямой, а лишь на полуосях оси абсцисс, произошла бы ошибка; например, «при $x = 1$ левая и правая части равны, левая часть возрастает, правая – убывает, поэтому при всех $x < 1$, $x \neq 0$ неравенство верно».

Упражнение 7. Решите уравнения и неравенства:

а) $2\sqrt[3]{x^2 + x - 1} = \sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 1}$;

б) $4^{\frac{1}{x}} - 1 = 3^{2x-1}$; в) $\log_3\left(1 + \sqrt{x}\right) = 5 - x$;

г) $\log_2 x - \log_3 x = \sqrt{1 - x}$; д) $\arcsin x < \arccos x$.

Преобразование к монотонным функциям

Во всех рассмотренных ранее задачах мы имели дело с монотонными левыми и правыми частями уравнений и неравенств, причем это была «нужная» монотонность – либо «встречная», либо с одной стороны монотонная функция, а с другой – константа. Чаще встречается ситуация, когда надо предварительно привести данное соотношение к такому виду, чтобы получились удобные для приведенных нами рассуждений функции. Вот классический пример такой задачи.

Задача 10. *Решите уравнение*

$$3^x + 4^x = 5^x . \qquad (6)$$

Комментарий. Конечно, корень $x = 2$ «виден» сразу (вы, наверное, помните «египетский» прямоугольный треугольник), но доказать его единственность аналогично предыдущим случаям не удается: ведь в уравнении (6) и левая, и правая части возрастают, и применять к этому уравнению утверждение (А**) мы не можем. Но с этой ситуацией в нашем случае легко справиться.

Решение. Разделив обе части уравнения (6) на не равную нулю (и даже положительную) при всех значениях x функцию 5^x, приходим к уравнению

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1 , \qquad (6^*)$$

у которого левая часть убывает, а в правой – константа. По теореме (А) уравнение (6*) имеет не более одного корня, но $x = 2$ – корень.

Ответ: $x = 2$.

К рассмотренной задаче примыкает и следующая, чуть более сложная задача.

Задача 11. *Пусть положительные числа a, b и c при некотором положительном k удовлетворяют соотношению*

$$a^k + b^k = c^k . \qquad (7)$$

а) При каких значениях k существует треугольник со сторонами a, b и c?

б) Выясните, как зависит от k вид треугольника со сторонами a, b и c, когда он существует.

Комментарий. Конечно, мы должны преобразовать уравнение в духе решения задачи 10 и воспользоваться монотонностью левой части полученного уравнения. Кроме того, мы используем тот факт, что если c – наибольшее из трех данных чисел, то для существования искомого треугольника необходимо и достаточно выполнение неравенства $c < a + b$. Для решения пункта б) вспомним, что треугольник со сторонами a, b, c, где сторона c – наибольшая, *остроугольный*, если $a^2 + b^2 > c^2$, *прямоугольный*, если $a^2 + b^2 = c^2$, *тупоугольный* – если $a^2 + b^2 < c^2$ (это вытекает, например, из теоремы косинусов).

Решение. Ясно, что c – наибольшее из трех данных чисел, ведь $c^k = a^k + b^k > a^k$, откуда $\left(\frac{c}{a}\right)^k > 1$, поэтому $\frac{c}{a} > 1$, т.е. $c > a$; аналогично, $c > b$. Далее, разделив обе части данного уравнения на положительное число c^k , получим

$$\left(\frac{a}{c}\right)^k + \left(\frac{b}{c}\right)^k = 1 . \qquad (7^*)$$

а) В левой части уравнения (7*) стоит сумма монотонно убывающих функций, поэтому при $k \leq 1$ одновременно выполняются неравенства $\left(\frac{a}{c}\right)^k \geq \frac{a}{c}$ и $\left(\frac{b}{c}\right)^k \geq \frac{b}{c}$. Складывая полученные неравенства и используя уравнение (7*), получаем, что при этих значениях k

$$1 = \left(\frac{a}{c}\right)^k + \left(\frac{b}{c}\right)^k \geq \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} , \text{ т.е. } a + b \leq c .$$

Итак, при $0 < k \leq 1$ треугольник со сторонами a, b и c не существует.

Осталось рассмотреть $k > 1$. В этом случае из монотонного убывания слагаемых левой части уравнения (7*) вытекает, что одновременно выполняются неравенства $\left(\frac{a}{c}\right)^k < \frac{a}{c}$ и $\left(\frac{b}{c}\right)^k < \frac{b}{c}$, откуда аналогично получим, что $a + b > c$, т.е. треугольник существует.

б) Снова воспользуемся монотонным убыванием слагаемых, стоящих в левой части уравнения (7*), только теперь нам надо сравнивать k не с единицей, как в пункте а), а с числом 2 (см. комментарий); при этом, конечно, не будем забывать, что теперь у нас $k > 1$ (ведь треугольник с данными сторонами существует).

Если $1 < k < 2$, одновременно выполняются неравенства $\left(\frac{a}{c}\right)^2 < \left(\frac{a}{c}\right)^k$ и $\left(\frac{b}{c}\right)^2 < \left(\frac{b}{c}\right)^k$. Сложив почленно эти неравенства, получаем, что при этих значениях k выполнено неравенство $a^2 + b^2 < c^2$, т.е. треугольник тупоугольный. Аналогично рассматриваются два остальных случая.

Ответ: а) при $k > 1$; б) при $1 < k < 2$ треугольник тупоугольный, при $k = 2$ – прямоугольный, при $k > 2$ – остроугольный.

Приведем две задачи, где не только обнаружить, но и доказать монотонность довольно сложно. При этом по традиции, сложившейся на вступительных экзаменах в МГУ, где давались эти задачи (факультет психологии, 1982 г., и химический факультет, 1998 г.), мы постараемся обойтись без использования производной (ее применение, конечно, не запрещено, но задачи составляются так, чтобы можно было обосновать монотонность непосредственно).

Задача 12. *Решите уравнение*

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\left(x^2 + 2x - 2\right) = \log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2 + 2x - 3\right). \qquad (8)$$

Комментарий. Поскольку под знаком логарифма стоят квадратные трехчлены с положительным старшим коэффициентом, ни о какой монотонности в таком виде не может быть и речи. С другой стороны, эти трехчлены, а также основания логарифмов очень «похожи», как-то связаны друг с другом, так что попробуем удачно преобразовать основания и сделать хорошую замену переменной. Обратите внимание на то, как мы далее получим монотонную функцию, и постарайтесь освоить этот прием.

Решение. Во-первых, очевидно, что $x^2+2x-2=\left(x^2+2x-3\right)+1$, так что, если обозначить x^2+2x-3 через t, то $x^2+2x-2=t+1$.

Во-вторых, заметим, что

$$2\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{1+\left(7+4\sqrt{3}\right)}=\sqrt{1+\left(2+\sqrt{3}\right)^2},$$

поэтому, если обозначить $7+4\sqrt{3}$ через a, можно провести следующую цепочку равносильных в области определения преобразований данного уравнения (конечно, с учетом введенных обозначений):

$$(8)\Leftrightarrow \log_{\sqrt{1+a}}(t+1)=\log_{\sqrt{a}}t\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{a+1}(t+1)=\log_a t. \qquad (8^*)$$

Заметим теперь, что, очевидно, $a=7+4\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2>1$, $t>0$ (иначе не существует логарифм в правой части (8*), поэтому $t+1>1$, но тогда $t>1$ (в противном случае левая часть уравнения (8*) положительна, а правая – отрицательна). Итак, мы пришли к уравнению (8*), где $t>1$, $a>1$.

Перейдем в уравнении (8*) к новому основанию логарифмов, например к основанию 2:

$$(8^*)\Leftrightarrow\frac{\log_2(t+1)}{\log_2(a+1)}=\frac{\log_2 t}{\log_2 a}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\log_2(t+1)}{\log_2 t}=\frac{\log_2(a+1)}{\log_2 a}. \qquad (8^{**})$$

Пусть $f(z)=\dfrac{\log_2(z+1)}{\log_2 z}$, тогда, как легко видеть, уравнение (8**) можно записать в виде

$$f(t)=f(a). \qquad (8^{***})$$

Это уравнение имеет очевидный корень $t=a$. Если нам удастся доказать, что функция $y=f(z)$ монотонна при $z>1$, из этого будет следовать (теорема о корне), что других решений нет. Докажем это.

Для этого достаточно заметить, что при всех k, кроме нуля, выполняется равенство $k+1=k\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$. Поэтому при всех допустимых в нашей задаче значениях z (т.е. при $z>1$)

$$f(z)=\frac{\log_2(z+1)}{\log_2 z}=$$

$$=\frac{\log_2\left(z\left(1+\frac{1}{z}\right)\right)}{\log_2 z}=\frac{\log_2 z+\log_2\left(1+\frac{1}{z}\right)}{\log_2 z}=1+\frac{\log_2\left(1+\frac{1}{z}\right)}{\log_2 z}.$$

При $z>1$ сумма $1+(1/z)$, очевидно, убывает; логарифм по основанию 2 – возрастающая функция, т.е. числитель последней дроби в последнем равенстве убывает, а знаменатель возрастает. А так как они при этом еще и положительны, эта дробь убывает с ростом z.

Таким образом, функция $y=f(z)$ убывает при $z>1$, и уравнение (8***) имеет единственное решение $t=a$. Осталось найти корни исходного уравнения (8):

$$x^2+2x-3=7+4\sqrt{3}\Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{11+4\sqrt{3}}.$$

Ответ: $x=-1\pm\sqrt{11+4\sqrt{3}}$.

В решении последней задачи нам встретились важные соображения, которые мы сформулируем в виде следующих утверждений.

(С) *а) Если числитель и знаменатель дроби положительны, числитель убывает (возрастает), а знаменатель возрастает (соответственно, убывает), то дробь убывает (возрастает).* (См. также замечание после решения задачи 6.)

б) Если функция $y=g(x)$ определена и возрастает (убывает) на промежутке I, а функция $z=f(y)$ определена и возрастает на промежутке I_1, содержащем область значений функции g, то сложная функция $y=f(g(x))$ определена и возрастает (соответственно, убывает) на промежутке I.

Задача 13. *Решите уравнение*

$$\log_2(4x+1)\cdot\log_5(4x+4)+\log_3(4x+2)\cdot\log_4(4x+3)=$$

$$=2\log_3(4x+2)\cdot\log_5(4x+4). \qquad (9)$$

Решение. Сделаем замену переменной $t=4x+1$ и, разбив правую часть данного уравнения на два одинаковых слагаемых, преобразуем уравнение (9) так, чтобы можно было разложить левую и правую части нового уравнения на множители:

$$\log_2 t\cdot\log_5(t+3)-\log_3(t+1)\cdot\log_5(t+3)=$$

$$=\log_3(t+1)\cdot\log_5(t+3)-\log_3(t+1)\cdot\log_4(t+2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_5(t+3)\cdot\left(\log_2 t-\log_3(t+1)\right)=$$

$$=\log_3(t+1)\cdot\left(\log_5(t+3)-\log_4(t+2)\right). \qquad (9^*)$$

Заметим теперь, что уравнение (9*) имеет корень $t=2$ (это число обращает в нули скобки в его правой и левой частях), и попробуем показать, что других корней оно (а вместе с ним и данное уравнение) не имеет.

Рассмотрим функцию $f(z)=\log_a z-\log_{a+1}(z+1)$, где $a>1$, и докажем ее монотонность. Для этого преобразуем разность логарифмов, перейдя во втором логарифме к основанию a и используя для представления суммы $(z+1)$ тот же прием, что в предыдущей задаче:

$$f(z)=\log_a z-\frac{\log_a(z+1)}{\log_a(a+1)}=$$

$$=\log_a z-\frac{\log_a\left(z\left(1+\frac{1}{z}\right)\right)}{\log_a(a+1)}=\log_a z-\frac{\log_a+\log_a\left(1+\frac{1}{z}\right)}{\log_a(a+1)}=$$

$$=\left(\log_a z-\frac{\log_a z}{\log_a(a+1)}\right)-\frac{\log_a\left(1+\frac{1}{z}\right)}{\log_a(a+1)}=$$

$$=\log_a z\left(1-\log_{a+1}a\right)-\log_{a+1}\left(1+\frac{1}{z}\right).$$

Заметим теперь, что функцию $f(z)$ нам удалось представить как разность возрастающей функции $\log_a z\left(1-\log_{a+1}a\right)$ (она возрастает, так как $\log_{a+1}a<1$, поэтому $1-\log_{a+1}a>0$ и функция $\log_a z$ возрастает – по условию, $a>1$) и убывающей функции $\log_{a+1}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)$. Поэтому (см. утверждение (В)) функция $f(z)$ возрастает.

Осталось заметить, что первый множитель в левой части уравнения (9*) положителен при всех допустимых значениях t (т.е. при всех $t>0$), а второй множитель – это функция $f(z)$ при $a=2$, а раз она возрастает и равна, как мы видели, нулю при $t=2$, то левая часть уравнения (9*) отрицательна при $t<2$ и положительна при $t>2$. Первый множитель правой части уравнения (9*) также положителен при всех $t>0$, а второй множитель – это взятая со знаком минус функция $f(z)$ при $a=4$. Поэтому при всех допустимых значениях t, кроме $t=2$, левая и правая части уравнения (9*) имеют разные знаки, и их значения не могут совпадать, т.е.

это уравнение имеет единственный корень $t = 2$. Отсюда получаем ответ.

Ответ: $x = 1/4$.

Теперь привлечем соображения монотонности к решению системы уравнений.

Задача 14. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6, \\ x^6 + x^2 = 8y^3 + 2y. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что пара $x = 0$, $y = 0$ – решение данной системы. Если же $y \neq 0$, то и $x \neq 0$. Перепишем первое уравнение так:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^5 + \frac{x}{y} = y^5 + y .$$

Поскольку функция $f(t) = t^5 + t$ возрастающая, из полученного равенства следует, что

$$\frac{x}{y} = y \text{, т.е. } x = y^2 .$$

Аналогично, из возрастания функции $g(t) = t^3 + t$ следует, что второе уравнение системы равносильно уравнению

$$x^2 = 2y .$$

Осталось решить систему

$$\begin{cases} x = y^2, \\ x^2 = 2y. \end{cases}$$

Ответ: $\left(2\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{2}\right)$.

Упражнения

8. Решите уравнения:

а) $(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right) + 3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right) = 0$;

б) $\log_2(3x+1)\cdot\log_5(x+4) +$
$+ \log_3(3x+2)\cdot\log_4(3x+3) = 2\log_3(3x+2)\cdot\log_5(3x+4)$.

9. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x + \sin x = y + \sin y, \\ x^2 + 3xy + y^2 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^5 + x = y + \sqrt[5]{y}, \\ 2x^3 = 3y^2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2^x + x = y + \log_2 y, \\ \log_2 x + y = 5. \end{cases}$

10. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$4^{-|x-a|}\log_{\sqrt{3}}\left(x^2 - 2x + 3\right) + 2^{-x^2+2x}\log_{\frac{1}{3}}\left(2|x-a|+2\right) = 0$$

имеет ровно три корня.

11. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\log_{\frac{1}{a}}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+1\right)\log_5\left(x^2+ax+6\right) + \log_a 3 \geq 0$$

имеет единственное решение.

Монотонность и метод интервалов

Здесь мы рассмотрим метод решения неравенств, представляющий собой некоторое усовершенствование метода интервалов. Именно, в задачах, где существенным является знак функции, можно заменять разность значений монотонных функций разностями значений их аргументов. Это позволяет решать довольно сложные неравенства сравнительно просто – методом интервалов, применяемым обычно к рациональным функциям.

Для обоснования указанной замены мы переформулируем определение возрастающей функции, приведенное в самом начале этой статьи. Надеемся, что доказательство эквивалентности этих определений не составит для вас особого труда.

Функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке I тогда и только тогда, когда для любых u и v из этого промежутка знаки чисел $f(u) - f(v)$ и $u - v$ совпадают (соответственно, противоположны).

Это замечание позволяет в целом ряде задач, связанных с исследованием знака функций, заменить разность $f(u) - f(v)$ на более простое выражение $u - v$.

Для решения конкретных задач полезно помнить, что знаки чисел $a^2 - b^2$ и $a - b$ при положительных a и b совпадают, а при отрицательных – противоположны (подумайте, что можно сказать, если знаки a и b противоположны, а также – если рассматривать не квадраты, а любые положительные степени!). Одинаковы будут также знаки чисел $2^u - 2^v$ и $u - v$, $\log_2 u - \log_2 v$ и $u - v$, $\operatorname{arctg} u - \operatorname{arctg} v$ и $u - v$, а вот знаки чисел $\log_{0,5} u - \log_{0,5} v$ и $u - v$ противоположны.

Упражнение 12. Докажите, что совпадают знаки следующих чисел:

а) $|u| - |v|$ и $u^2 - v^2$; б) $\sqrt{u} - \sqrt{v}$ и $u - v$;

в) $a^u - a^v$ и $(u-v)(a-1)$; г) $\log_a u - \log_a v$ и $(u-v)(a-1)$;

д) $a^x - b$ и $(x - \log_a b)(a-1)$; е) $\log_a x - b$ и $\left(x - a^b\right)(a-1)$.

Рассмотрим теперь несколько примеров.

Задача 15. *Решите неравенство*

$$\frac{\sqrt{2-x} + 4x - 3}{x} \geq 2 .$$

Решение. Область определения данного неравенства описывается системой

$$\begin{cases} x \leq 2, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Поскольку мы хотели бы применить метод интервалов, перенесем число 2 в левую часть неравенства, приведем ее к общему знаменателю:

$$\frac{\sqrt{2-x} + 2x - 3}{x} \geq 0 . \qquad (10)$$

Неравенство (10), очевидно, справедливо при $x \geq \frac{3}{2}$. При $x < \frac{3}{2}$ запишем его так:

$$\frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{(3-x)^2}}{x} \geq 0 . \qquad (10^*)$$

В неравенстве (10*) заменим разность корней разностью подкоренных выражений:

$$\frac{2 - x - (3-x)^2}{x} \geq 0 ,$$

т.е.

$$\frac{4x^2 - 11x + 7}{x} \leq 0 .$$

Решив последнее неравенство методом интервалов, получаем ответ.

Ответ: $x < 2$; $1 \leq x < 2$.

Замечание. Как это нередко бывает, для решения задачи методом интервалов мы могли использовать разные функции. Например, мы могли рассуждать так: разность положительных чисел $\sqrt{2-x}$ и $\sqrt{(3-2x)^2}$ имеет тот же знак, что и разность их квадратов, а дальше все аналогично.

Применение монотонности упрощает и решение следующей задачи.

Задача 16. *Решите неравенство*

$$\log_{|x|}(x+2) < 2 .$$

Решение. Сначала находим допустимые значения:

$$\begin{cases} x+2>0, \\ |x|>0, \\ |x|\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2, \\ x\ne 0, \\ x\ne \pm 1. \end{cases}$$

При этих значениях x, перенеся число 2 в левую часть данного неравенства, можно переписать его в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{cases} \log_{|x|}(x+2)-\log_{|x|}x^2<0, \\ x>-2;\ x\ne 0;\ x\ne\pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+2-x^2\right)\left(|x|-1\right)<0, \\ x>-2;\ x\ne 0;\ x\ne\pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+2-x^2\right)\left(x^2-1\right)<0, \\ x>-2;\ x\ne 0;\ x\ne\pm 1. \end{cases}$$

Первое преобразование выполнено в силу соотношений упражнения 12,*г*), а второе – упражнения 12,*а*). Осталось решить полученную систему.

Ответ: $-2<x<-1;\ -1<x<0;\ 0<x<1;\ x<2$.

В заключение рассмотрим еще один пример на неравенство с логарифмами. Здесь мы еще раз убедимся в том, насколько сведение к методу интервалов сокращает объем решения.

Задача 17. *Решите неравенство*

$$\left(\log_{3x-1}(2x)-1\right)\left(\log_x(3-x)-1\right)>0.$$

Решение. Найдем область определения неравенства: $\frac{1}{3}<x<3$; $x\ne\frac{2}{3}$; $x\ne 1$. В области определения знаки скобок левой части в силу упражнения 12,*г*) совпадают со знаками соответствующих выражений, что приводит к легко решаемой системе:

$$\begin{cases} (1-x)(3x-2)(3-2x)(x-1)>0, \\ \frac{1}{3}<x<3;\ x\ne\frac{2}{3};\ x\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2(3x-2)(2x-3)>0, \\ \frac{1}{3}<x<3;\ x\ne\frac{2}{3};\ x\ne 1. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$; $\frac{3}{2}<x<3$.

При решении следующего упражнения вам могут помочь результаты предыдущего.

Упражнение 13. Решите неравенства:

а) $\dfrac{\left|x^2-2x\right|-2x-1}{x^2-2+\left|x^2+3x\right|}\ge 0$; б) $\dfrac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{\left|x^2-6x+5\right|-\left|x^2-2x-3\right|}\le 0$;

в) $\dfrac{\sqrt{x^2-5}-3}{|x+4|-7}\ge 1$; г) $\dfrac{16-3x+\sqrt{x^2-3x-4}}{6-x}\ge 1$;

д) $\log_{x-2}x\le\log_{x-2}4$; е) $\log_x\left(\dfrac{1}{\log_4\left(3\cdot 2^{\frac{1}{x}}+4\right)}\right)\le 1$;

ж) $\dfrac{\log_{21+4x-x^2}(7-x)}{\log_{x+3}\left(21+4x-x^2\right)}<\dfrac{1}{4}$.

VII Международный турнир «Компьютерная физика»

(Начало см. на с. 25)

и эти столкновения возможны для электронов с энергией ε, большей ε^*. Предположим, что если $\varepsilon>\varepsilon^*$, то частота неупругих соударений равна ν^*. (Обычно выполняется условие $\nu^*\ll\nu_0$.) Общая частота столкновений равна $\nu=\nu^*+\nu_0$, а среднее время между двумя столкновениями (произвольной природы) есть $\tau=1/\nu$.

Будем считать, что электрон вылетает с катода с нулевой скоростью. Пусть электрон испытал столкновение в момент времени t_0. Тогда вероятность того, что следующее столкновение произойдет в интервале времени от t^* до t^*+dt, определяется выражением

$$dP=\exp\left(-\nu\left(t^*-t_0\right)\right)\cdot\nu dt.$$

В частности, если $t^*-t_0\ll\tau$, т.е. если рассматриваемый интервал времени много меньше среднего времени между столкновениями, это выражение принимает вид

$$dP=\nu dt.$$

Если столкновение произошло, то вероятность того, что оно было упругим, есть

$$w_0=\frac{\nu_0}{\nu_0+\nu^*},$$

а вероятность того, что оно было неупругим, определяется как

$$w^*=\frac{\nu^*}{\nu_0+\nu^*}.$$

Мы будем предполагать, что упругие и неупругие столкновения изотропны, т.е. рассеяние электрона на любой угол равновероятно. Расстояние между катодом и анодом $L=1$ см, расстояние между катодом и сеткой $l=0{,}2$ см. В поперечном направлении размер системы считать неограниченным. Связь частоты упругих и неупругих столкновений с давлением паров ртути задается соотношениями

$$\nu_0=A\cdot p(\text{торр}),\ \nu^*=B\cdot p(\text{торр}),$$

где $A=3{,}5\cdot 10^9\ \text{с}^{-1}\cdot\text{торр}^{-1}$, $B=5\cdot 10^7\ \text{с}^{-1}\cdot\text{торр}^{-1}$ (здесь 1 торр – внесистемная единица давления, равная $1/760$ атмосферы).

Задание

1. Исследуйте зависимость анодного тока от величины ускоряющего напряжения между катодом и сеткой в диапазоне значений $U_{KC}=0{,}1-15$ В. Считать, что U_{CA} изменяется от $-0{,}2$ В до $-0{,}5$ В, а давление паров ртути составляет $p=1$ торр.

2. Исследуйте зависимость анодного тока от давления паров ртути в диапазоне значений $p=0{,}1-10$ торр. Считать, что $U_{KC}=10$ В.

3. Получите распределение электронов по энергиям в различных областях пространства между катодом и анодом.

Материалы вступительных экзаменов 2002 года

Московский физико-технический институт (государственный университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение
$$\frac{3+\cos 4x-8\sin^4 x}{4(\sin x+\cos x)}=\frac{1}{\cos x}.$$

2. Решите неравенство
$$\log_{(1-x)^3}\left(\frac{x+6}{3+2x-x^2}\right)+\frac{1}{3}\le 0.$$

3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}\sqrt{11x-y}-\sqrt{y-x}=1,\\ 7\sqrt{y-x}+6y-26x=3.\end{cases}$$

4. В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) окружность касается основания AD, боковых сторон AB и CD и проходит через точку пересечения диагоналей AC и BD. Найдите радиус окружности, если $AD : BC = 7 : 5$, а площадь трапеции $S = 4$.

5. Дано число $a=3^{2002}+7^{2002}$. Найдите последнюю цифру числа a и остаток от деления числа a на 11.

6. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2. Плоскость α, параллельная прямым SB и AD, пересекает пирамиду так, что в сечение можно вписать окружность, причем периметр сечения равен $\frac{48}{7}$. Найдите: 1) в каком отношении плоскость α делит ребра пирамиды; 2) отношение объемов частей, на которые плоскость α разбивает пирамиду; 3) расстояние от центра описанной около пирамиды сферы до плоскости α.

Вариант 2

1. Решите уравнение
$$\operatorname{arcctg}\frac{1-x}{2x}+\arccos 2x=\frac{\pi}{2}.$$

2. Найдите действительные решения системы уравнений
$$\begin{cases}y+\dfrac{x^3}{y^3}=\dfrac{y^3}{x}+\dfrac{x^2}{y},\\[2mm] \dfrac{1}{y}+\dfrac{y^3}{x^3}+\dfrac{10}{x^2}=0.\end{cases}$$

3. Решите неравенство
$$\sqrt{\frac{500+30x-2x^2}{2x+5}}>10-|x|.$$

4. Один из углов треугольника равен $\pi/4$, радиус вписанной в него окружности равен $2\left(2-\sqrt{2}\right)$, а радиус описанной вокруг него окружности равен 3. Найдите площадь этого треугольника.

5. Найдите все значения a, при которых система
$$\begin{cases}\log_3(2-x-y)+2=\log_3(17-8x-10y),\\ (x-a)^2+x=y+a+6\end{cases}$$
имеет ровно два решения.

6. Расстояние от центра О шара радиуса $6\sqrt{2}$, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, до боковой грани равно 3. Найдите: 1) высоту пирамиды; 2) расстояние от точки О до бокового ребра пирамиды; 3) радиус вписанного в пирамиду шара.

Вариант 3

1. Решите уравнение
$$\sin^2 x+\sin^2 2x=1-\frac{\cos 3x}{\cos 2x}.$$

2. Решите неравенство
$$2\log_{2x-8}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}\right)<1.$$

3. Окружность с центром на стороне AB равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) проходит через точку A, пересекает отрезок AC в точке F, касается отрезка BC в точке G и пересекает отрезок AB в точке E, причем $GC/BG=\sqrt{3}-1$, $FC = a$. Найдите радиус окружности.

4. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна $4\sqrt{2}$, угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью основания равен $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$. Точка M – середина ребра SD, точка K – середина ребра AD. Найдите: 1) объем пирамиды $CMSK$; 2) угол между прямыми CM и SK; 3) расстояние между прямыми CM и SK.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$\left(a-6+|x-1|\right)\left(a-x^2+2x\right)=0$$
имеет: 1) ровно три корня, 2) ровно два корня.

6. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}2x^3-y^3-2z^3+xyz+5=0,\\ y^3+2z^3-x^3-2xyz-2=0,\\ x^3-y^3-z^3+xyz+4=0.\end{cases}$$

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Шайба массой m скользит со скоростью v_0 по гладкой горизонтальной поверхности стола, попадает на покоящийся клин массой $2m$, скользит по нему без трения и отрыва и

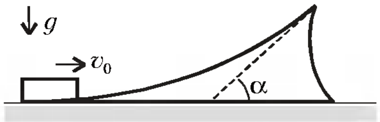


Рис. 1

покидает клин (рис.1). Клин, не отрывавшийся от стола, приобретает скорость $v_0/4$. Найдите угол α наклона к горизонту поверхности верхней части клина. Нижняя часть клина имеет плавный переход к поверхности стола. Изменением потенциальной энергии шайбы в поле тяжести при ее движении по клину пренебречь. Направления всех движений параллельны плоскости рисунка.

2. На чашке пружинных весов уравновесили сосуд, в котором находится вода массой $m_в$ (рис.2). Для приготовления соленого раствора была использована крупная соль, содержащая нерастворимые в воде примеси. Соль с примесями в марлевом мешочке была опущена на нити в сосуд так, что мешочек оказался полностью погруженным в воду. После того как соль полностью растворилась в воде, показания весов изменились на ΔP ($\Delta P > 0$) по сравнению с их показаниями до опускания соли в воду. Плотность соленого раствора была измерена и оказалась равной ρ. Найдите объем $V_п$ примесей в мешочке после растворения соли, если он остался висеть на нити целиком погруженным в раствор. Плотность чистой соли $\rho_с$, воды $\rho_в$, ускорение свободного падения g. *Указание:* считать раствор однородным с плотностью $\rho = (m_с + m_в)/(V_с + V_в)$, где $m_в$ и $m_с$ – массы воды и соли, а $V_в$ и $V_с$ – их объемы.

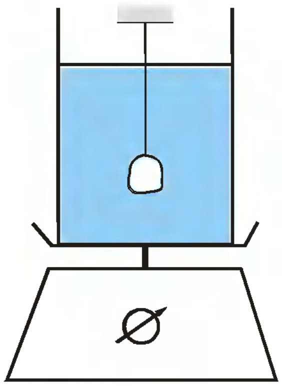


Рис. 2

3. На рисунке 3 изображена вольт-амперная характеристика двух соединенных параллельно элементов, одним из которых является резистор сопротивлением R = = 100 Ом, а другим – неизвестный элемент Z. Используя заданную вольт-амперную характеристику, постройте вольт-амперную характеристику элемента Z.

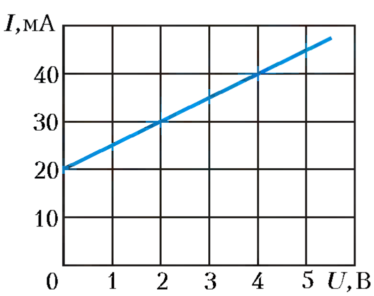


Рис. 3

4. Оптическая система, состоящая из собирающей линзы с фокусным расстоянием F = 20 см и плоского зеркала в форме посеребренной с одной стороны плоскопараллельной пластинки толщиной l = 6 см с показателем преломления n = 1,5, создает действительное изображение точечного источника света S, расположенного на главной оптической оси линзы (рис.4). Расстояние от источника S до линзы $d = 3F/5$, а от изображения S', даваемого системой, до линзы $f = 3F/2$. Найдите расстояние L от линзы до пластинки. Отражением от передней поверхности пластинки пренебречь.

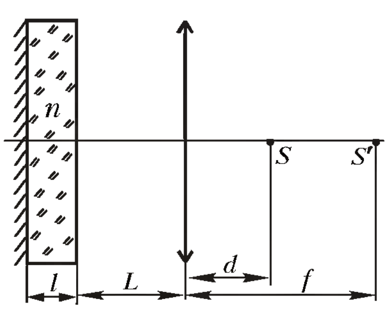


Рис. 4

5. На горизонтальном непроводящем диске по его диаметру укреплен тонкий проводящий стержень AC (рис.5). Диск, находящийся в однородном магнитном поле с индукцией, равной $B = 10^{-2}$ Тл и перпендикулярной плоскости диска, совершает крутильные гармонические колебания относительно вертикальной оси, проходящей через точку O: $\varphi = \varphi_0 \cos \omega t$, где t – время. Длина стержня $L = a + b$, где $a = 0{,}5$ м, $b = 1$ м. Определите максимальную разность потенциалов между концами стержня A и C, если $\varphi_0 = 0{,}6$ рад, а $\omega = 0{,}2$ с$^{-1}$.

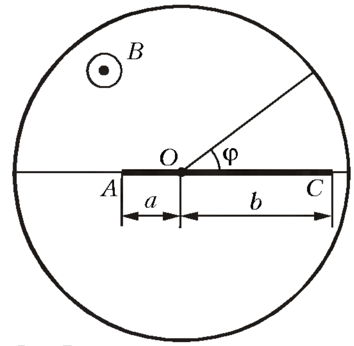


Рис. 5

Вариант 2

1. Стеклянный шар объемом V и плотностью ρ_0 находится в сосуде с водой (рис.6). Угол между стенкой сосуда и горизонтальным дном α. Внутренняя поверхность сосуда гладкая. Плотность воды ρ. Найдите силу давления шара на дно в двух случаях: 1) сосуд неподвижен; 2) сосуд движется с постоянным горизонтальным ускорением a.

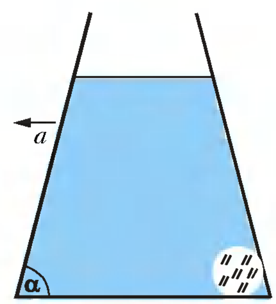


Рис. 6

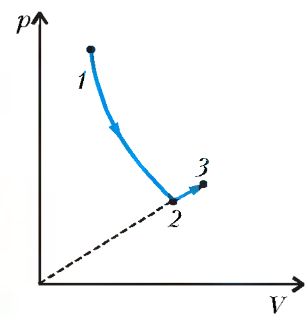


Рис. 7

2. Моль гелия переходит из начального состояния *1* в конечное состояние *3* в двух процессах (рис.7). Сначала расширение идет в процессе *1–2* с постоянной теплоемкостью $C = 3R/4$ (R – универсальная газовая постоянная). Затем газ расширяется в процессе *2–3*, когда его давление p прямо пропорционально объему V. Найдите работу, совершенную газом в процессе *1–2*, если в процессе *2–3* он совершил работу A. Температуры начального состояния (*1*) и конечного (*3*) равны.

3. Плоский конденсатор, пластины которого имеют площадь S и расположены на расстоянии d, заполнен твердым диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε. Конденсатор подсоединен к батарее постоянного тока, ЭДС которой равна $\mathcal{E}$. Правую пластину конденсатора отодвигают так, что образуется воздушный зазор (рис.8). На какое расстояние x отодвинута пластина, если при этом внешними силами была совершена работа A? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

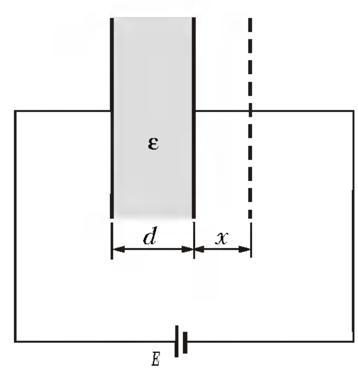


Рис. 8

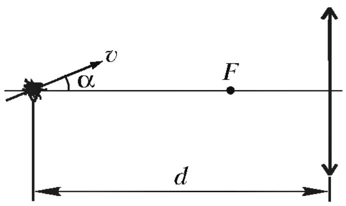


Рис. 9

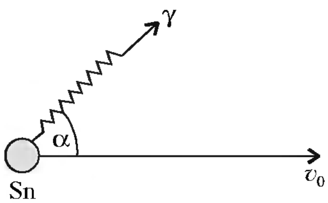


Рис. 10

4. Муха пересекает главную оптическую ось собирающей линзы на расстоянии $d = 3F$, где F – фокусное расстояние линзы, под малым углом α к оси линзы со скоростью v (рис.9). Под каким углом изображение мухи пересекает главную оптическую ось? Чему равна в этот момент скорость изображения мухи? *Указание:* для малых углов $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$.

5. Гамма-излучением называется электромагнитное излучение, которое возникает при переходе атомных ядер из возбужденных в более низкие энергетические состояния. Движущееся со скоростью $v_0 = 64$ м/с ядро атома олова ^{119}Sn испускает γ-квант под углом $\alpha = 60^\circ$ к направлению своего движения с энергией, равной энергии перехода ядра из возбужденного в основное состояние (рис.10). Найдите энергию γ-кванта. Энергия покоя ядра олова равна $W_0 = m_я c^2 = 113$ ГэВ (1 ГэВ$=10^9$ эВ).

Публикацию подготовили
М.Балашов, В.Можаев, Ю.Чешев, М.Шабунин

Московский государственный институт электроники и математики (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты электроники, информатики и телекоммуникаций, автоматики и вычислительной техники)

1. Решите уравнение
$$3^{x+1} - 4\cdot 3^{-x} = 4.$$

2. Решите неравенство
$$\frac{3x-5}{x-2} \ge x+1.$$

3. Решите уравнение
$$\frac{5\cos 2x - 12\sin x + 11}{5\cos x - 3} = 0.$$

4. Дана функция $f(x) = \sqrt{2x+1} - x$. Требуется:
1) решить неравенство $f(x) > -7$;
2) найти множество значений функции $f(x)$.

5. Числа x, y удовлетворяют системе уравнений
$$\begin{cases} x + y = a + 3, \\ xy = 5a - 1. \end{cases}$$
Найдите, при каких значениях a сумма $x^2 + y^2$ принимает наименьшее значение.

6. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AB = 5\sqrt{3}$; $AD = 9$; $AA_1 = 15$). Точка M лежит на ребре DD_1 так, что $D_1M : MD = 1:2$. Плоскость, проходящая через точки B_1, A, C, пересекает прямую BM в точке E. Найдите длину отрезка EM.

7. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$ax - \frac{1}{2} = x^2 - \left|x^2 - 3x\right|$$
имеет ровно два решения.

Вариант 2

(факультеты прикладной математики, экономико-математический)

1. Решите неравенство
$$\log_{\frac{1}{4}}\left(3x^2 + x - 14\right) \ge -2.$$

2. Решите неравенство
$$\frac{3|x-1|}{x^2 - 2x} < 2.$$

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции
$$f(x) = x^2 - 10x + 6 + 2\left|x^2 - 8x + 7\right|$$
на отрезке $[2; 7{,}5]$.

4. Решите уравнение
$$(9\cos 2x - 7)\left(\sqrt{3\cos 2x + 5\sin x - 1} + \sin x\right) = 0.$$

5. Числа x, y удовлетворяют равенству
$$7x^2 - 4xy + 4y^2 = 12.$$
Найдите все значения, которые может принимать x, а также сумма $x^2 + y^2$.

6. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Пусть M – середина ребра AB. Через точки C, A, M проходит сфера, которая касается ребра B_1C_1. Найдите радиус сферы.

7. Найдите все значения a, при которых неравенство
$$\left|\frac{a^2\sin^2 x + 16}{a\sin x}\right| \le -50\cos^2 x + 80\cos x - 24$$
имеет решение.

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

1. Тело массой $m = 1$ кг, брошенное под углом к горизонту, упало на расстоянии $s = 32$ м от места бросания. Зная, что максимальная высота, достигнутая телом, равна $H = 5$ м, найдите работу бросания. Сопротивление воздуха не учитывать.

2. Два тела начинают скользить по горизонтальной поверхности навстречу друг другу с одной и той же скоростью $v_0 = 2$ м/с. При каком максимальном начальном расстоянии между телами они столкнутся? Коэффициенты трения между телами и поверхностью, по которой они движутся, равны $\mu_1 = 0{,}1$ и $\mu_2 = 0{,}2$ соответственно.

3. Как должна меняться в зависимости от положения столба сила, приложенная перпендикулярно оси столба к одному из его концов, чтобы столб равномерно поворачивался вокруг другого конца, переходя из горизонтального положения в вертикальное? Масса столба $m = 250$ кг. Постройте график зависимости этой силы от угла α, который столб образует с горизонтом. Какова сила реакции земли при $\alpha = 45^\circ$?

4. На дне цилиндра, заполненного воздухом, лежит металлический шарик массой $m = 4$ г и радиусом $r = 3$ см. Температура воздуха $t = 17$ °C. До какого давления надо сжать воздух, чтобы шарик поднялся наверх? Молярная масса воздуха $M = 29$ г/моль.

5. В вертикально расположенном цилиндре под поршнем находится $m = 160$ г кислорода. Поршень подвешен на пружине. Высота столба кислорода под поршнем при температуре $t = 17$ °С равна $h = 60$ см, пружина не деформирована. При нагревании цилиндра на $\Delta t = 100$ °С поршень поднялся на $\Delta h = 20$ см. Определите жесткость пружины.

6. Батарея из $n = 10$ последовательно соединенных конденсаторов емкостью $C = 1{,}2$ мкФ каждый поддерживается при постоянном напряжении $U = 300$ В. Один из конденсаторов пробивается. Определите работу источника напряжения.

7. Определите ЭДС элемента, если известно, что при увеличении внешнего сопротивления в $n = 3$ раза разность потенциалов на его зажимах, ранее равная $U = 3$ В, увеличивается на $k = 20\%$.

8. Трансформатор, погруженный в масло, вследствие перегрузки начинает греться. Определите КПД трансформатора, если при полной мощности $P_1 = 60$ кВт масло массой $m = 40$ кг нагрелось за время $\tau = 4$ мин на $\Delta t = 20$ °С. Удельная теплоемкость масла $c = 210$ Дж/(кг · К).

9. Квадратный контур находится в однородном магнитном поле с индукцией, равной $B = 3{,}4$ мТл и перпендикулярной плоскости контура. Затем его изгибают в прямоугольник с соотношением сторон 1 : 2. При этом по контуру протекает заряд $q = 1{,}7$ мкКл. Определите длину провода сопротивлением $R = 0{,}8$ Ом, из которого изготовлен контур.

10. Линза с фокусным расстоянием $F = 30$ см вплотную прилегает к плоскому зеркалу. На расстоянии $d = 20$ см перед линзой помещен предмет высотой $h = 2$ см. Определите, где находится изображение предмета и какова высота этого изображения.

Публикацию подготовили
С.Кашина, Ю.Колмаков

Московский педагогический государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{2\sin 2x \sin x} = \sqrt{5\cos x + 4\sin 2x}\ .$$

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = 2x^2 + 1 + \frac{6}{x}$$

на отрезке $[0,5; 1,5]$.

3. Решите неравенство

$$\frac{\left(21x - 98 - x^2\right)\log_{0,5}(x+12)}{x+21} \le 0\ .$$

4. Бригада должна изготовить 300 приборов с заданной ежедневной нормой. Если бригада будет изготовлять ежедневно на 5 приборов больше нормы, то ей потребуется на 8 дней меньше, чем в том случае, если она будет изготовлять ежедневно на 5 приборов меньше нормы. Сколько приборов в день должна изготовлять бригада по норме?

5. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат со стороной 2, а боковое ребро равно 4. Найдите радиус шара с центром в точке O_1, касающегося плоскости KLB_1, где O_1 – центр грани $A_1B_1C_1D_1$, K и L – середины ребер AA_1 и CC_1.

Вариант 2

(математический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{\sin 3x + \cos x - \sin x} = \sqrt{\cos x - \sin 2x}\,.$$

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = 3x + 36x^{-1} + 64x^{-3}$$

на отрезке $[2; 6]$.

3. Решите неравенство

$$\log_{7-x}\left(3 - \frac{1}{x-1}\right) + \log_{7-x}\frac{1}{x} \ge 0.$$

4. Покупатель купил электрический кабель в первом магазине на 300 руб. Если бы он покупал кабель во втором магазине, то заплатил бы за каждый метр на 5 руб. меньше, чем в первом, а в третьем – на 5 руб. больше, чем в первом. При этом за те же деньги он купил бы во втором магазине на 8 метров кабеля больше, чем в третьем магазине. Сколько стоит метр кабеля в первом магазине?

5. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат со стороной 12, а боковое ребро равно 6. Найдите радиус шара с центром в точке B, касающегося плоскости ACB_1.

Вариант 3

(физический факультет)

1. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, а плоский угол при вершине пирамиды равен α. Определите объем пирамиды.

2. Решите уравнение

$$\cos 2x - \cos 4x + \cos 6x = 1\ .$$

3. Решите уравнение

$$\log_3\left(2 + 3^{-x}\right) = x + 1\ .$$

4. Решите уравнение

$$\log_2 x - \log_4 x + \log_{16} x = \frac{3}{4}\,.$$

5. Исследуйте на возрастание и убывание функцию

$$y = (x+1)^3(2x-3)\,.$$

Вариант 4

(химический факультет)

1. Найдите площадь прямоугольной трапеции с острым углом α и радиусом вписанного в нее круга r.

2. Решите уравнение

$$\sin x + \cos x = 1\ .$$

3. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}+1} > 2^{-\frac{1}{x+1}}\,.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{1}{5 - 4\lg x} + \frac{4}{1 + \lg x} = 3\ .$$

5. Составьте уравнение касательной к графику функции

$$f(x) = \frac{x(x-2)}{x^2+1}$$

в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

Вариант 5

(факультет технологии и предпринимательства)

1. Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен 45°. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади ее основания.

2. Решите уравнение

$$\cos 2x + \sin^2 x + \sin x = 0,25 .$$

3. Решите неравенство

$$\log_\pi (x + 27) - \log_\pi (16 - 2x) \le \log_\pi x .$$

4. Решите уравнение

$$x^{\log_3 x - 4} = \frac{1}{27} .$$

5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$$

на отрезке $[1; 8]$.

Задачи устного экзамена

(математический факультет)

1. Решите уравнение

$$3\sqrt{\lg x} = 2\left(1 - \lg\sqrt{\frac{1}{x}}\right).$$

2. Решите уравнение

$$x^{3-\lg x} = 100$$

и найдите сумму его корней.

3. Решите неравенство

$$\frac{|x+3| + x}{x+2} \ge 1 .$$

4. Найдите все значения параметра a, для которых функция

$$f(t) = \log_5\left(a + 4t + at^2\right) - 1 + \log_5\left(1 + t^2\right)$$

определена при всех t.

5. Корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ равны x_1 и x_2. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются $\frac{x_1}{x_2^2}$ и $\frac{x_2}{x_1^2}$.

6. Вычислите

$$\sin\left(3^{\frac{\log_3 12 + \log_4 12}{\log_3 12 \cdot \log_4 12}} \cdot \pi\right).$$

7. Вычислите

$$\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x} - 2\sin\frac{x}{2} ,$$

если $x = \frac{\pi}{19}$.

8. Постройте график функции $y = x^2 - 4|x + 3|$.

9. Постройте график функции $y = \left|3^{\log_9 x^4} - 4\right|$.

10. Найдите площадь треугольника, образованного осью абсцисс и касательными к кривым $y = x^2 + 2x - 1$ и $y = x^2 + 6x + 7$ в точке их пересечения.

11. К графику функции $f(x) = 2x^4 - x^3 - 4x/3 + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$ проведена касательная. Найдите расстояние от начала координат до этой касательной.

12. Найдите двузначное число, если его последняя цифра на 2 меньше первой цифры, а произведение этого числа и суммы его цифр равно 252.

13. Найдите площадь параллелограмма, если одна из его сторон равна 51, а диагонали равны 40 и 74.

14. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 5, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите объем пирамиды.

15. Конус и цилиндр имеют общее основание. Вершина конуса находится в центре другого основания цилиндра. Найдите угол между осью конуса и его образующей, если площадь боковой поверхности цилиндра относится к площади полной поверхности конуса, как $\sqrt{3} : 1$.

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

1. Аэростат поднимается вертикально вверх с ускорением 2 м/с^2. Через 5 с от начала его движения из него выпал предмет. Через сколько времени этот предмет упадет на землю? Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

2. Тело движется без начальной скорости вниз по наклонной плоскости длиной 30 м и высотой 15 м. Коэффициент трения составляет 0,03. Какова скорость тела в конце наклонной плоскости?

3. Два абсолютно упругих шарика с массами 100 г и 300 г подвешены рядом на одинаковых нитях длиной 50 см каждая. Первый шарик отклоняют от положения равновесия на угол 90° и отпускают. На какую высоту поднимется второй шарик после соударения?

4. Воздух в упругой оболочке при 20 °С и под давлением 100 кПа занимает объем 2 л. Какой объем займет этот воздух, если опустить оболочку под воду на глубину 50 м, где температура воды составляет 10 °С?

5. Сколько гелия находится под поршнем в цилиндрическом сосуде, если при нагревании от 300 К до 700 К при постоянном давлении газ произвел работу 1620 Дж? (Универсальная газовая постоянная равна 8,31 Дж/(К · моль).)

6. Как изменится ускорение падающего тела с массой 4 г, если ему сообщить заряд $3,3 \cdot 10^{-8}$ Кл? Напряженность электрического поля Земли равна 100 В/м и направлена нормально к ее поверхности.

7. К источнику тока с ЭДС 1,25 В и внутренним сопротивлением 0,4 Ом присоединена лампочка, имеющая сопротивление 10 Ом. Напряжение на ее зажимах 1 В. Определите напряжение на подводящих проводах и их сопротивление.

8. Электрон, прошедший ускоряющую разность потенциалов 600 В, влетел в однородное магнитное поле с индукцией 0,3 Тл и начал двигаться по окружности. Найдите радиус окружности. (Масса электрона $9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, заряд электрона $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.)

9. Луч света падает на поверхность воды под углом 30° и преломляется под углом β. Под каким углом должен упасть луч на поверхность стекла, чтобы угол преломления в нем оказался тоже β? (Показатель преломления воды 1,33, стекла 1,8.)

10. Работа выхода электрона с поверхности цезия равна $1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж. С какой скоростью вылетают электроны из цезия, если металл освещен желтым светом с длиной волны $5,89 \cdot 10^{-5}$ см? (Масса электрона $9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, постоянная Планка $6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.)

Публикацию подготовили
С.Жданов, Б.Кукушкин, С.Лозовенко, Е.Пантелеева

Очередной прием в ОЛ ВЗМШ

Открытый лицей «Всероссийская заочная многопредметная школа» (ОЛ ВЗМШ) Российской академии образования, работающий при Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова, в очередной раз проводит набор учащихся.

ОЛ ВЗМШ – государственное учреждение дополнительного образования, причем не только для школьников. «Открытый» – значит доступный для всех желающих пополнить свои знания в одной или нескольких из следующих областей науки: математика, биология, филология, физика, экономика, химия, правоведение, история (перечисление – в хронологическом порядке открытия соответствующего отделения).

Сейчас ОЛ ВЗМШ совместно с другими научно-педагогическими учреждениями разрабатывает новые интерактивные технологии в образовании и переводит часть своих учебно-методических комплексов на язык современных телекоммуникаций, в частности – готовится к открытию Интернет-отделение ОЛ ВЗМШ.

За время существования ВЗМШ удостоверения о ее окончании получили несколько сотен тысяч школьников и тысячи кружков – групп «Коллективный ученик ВЗМШ».

Обучение в школе ЗАОЧНОЕ, т.е. начиная с сентября-октября 2003 года все поступившие будут систематически (примерно раз в месяц) получать специально разработанные для заочного обучения материалы, содержащие изложение теоретических вопросов, методов рассуждений, разнообразные задачи для самостоятельной работы с образцами решений, деловые игры, контрольные и практические задания.

Контрольные работы учащихся будут тщательно проверяться и рецензироваться преподавателями ВЗМШ – студентами, аспирантами, преподавателями и научными сотрудниками МГУ, а также других вузов и учреждений, где имеются филиалы школы. Многие из преподавателей в свое время сами закончили ВЗМШ и поэтому особенно хорошо понимают, как важно, помимо конкретных недочетов, указать пути ликвидации имеющихся пробелов в знаниях, порекомендовать дополнительную литературу, поругать за невнимательность и похвалить за заметный (а иногда – и за самый маленький) прогресс и трудолюбие.

Поступившие в ОЛ ВЗМШ смогут узнать об увлекательных вещах, часто остающихся за страницами школьного учебника, познакомиться с интересными нестандартными задачами и попробовать свои силы в их решении. Для многих станет откровением, что задачи бывают не только в математике, физике и химии, но и в биологии, филологии, экономике и других науках. Решение задач поможет прояснить, сделать интересными многие казавшиеся непонятными и скучными разделы.

Одна из особенностей учебных программ и пособий ВЗМШ – в том, что они созданы действующими на переднем крае науки талантливыми учеными и опытными незаурядными педагогами (часто эти два качества совмещаются в одном и том же человеке).

Чтобы успешно заниматься в заочной школе, вам придется научиться самостоятельно и продуктивно работать с книгой, грамотно, четко, коротко и ясно излагать свои мысли на бумаге и других носителях информации, а это, как известно, умеют далеко не все. Возможно, заочная школа поможет вам выбрать профессию, найти свое место в окружающем мире.

Все выполнившие программу ОЛ ВЗМШ получают соответствующие дипломы. Хотя формальных преимуществ они не дают, приемные комиссии многих вузов учитывают, что обладатели этих удостоверений в течение продолжительного времени самоотверженно трудились над приобретением знаний, научились самостоятельно творчески работать, а это значит, что из них получатся хорошие студенты и, в дальнейшем, грамотные, вдумчивые, широко образованные специалисты.

Для поступления в ОЛ ВЗМШ надо успешно выполнить вступительную контрольную работу. Успешно – это не значит обязательно решить все задачи. Приемную комиссию интересует, в первую очередь, ваше умение рассуждать, попытки (пусть поначалу не совсем удачные) самостоятельно мыслить и делать выводы. Преимуществом пользуются проживающие в сельской местности, поселках и небольших городах, где нет крупных научных центров и учебных заведений и получить дополнительное образование можно лишь заочно.

Решения задач вступительной работы надо написать на русском языке в обычной ученической тетради в клетку (за исключением отделений филологии, экономики, права и истории – см. ниже) и выслать *простой бандеролью, не сворачивая в трубку*. Желающие поступить сразу на несколько отделений каждую работу присылают в *отдельной тетради*. На обложке тетради укажите: *фамилию, имя, отчество, год рождения, базовое образование* (сколько классов средней школы будет закончено *к сентябрю 2003 года*), *полный почтовый адрес* (с индексом), *откуда узнали об ОЛ ВЗМШ* (из «Кванта», от друзей, из афиш заочной школы и т.п.), *на какое отделение хотите поступить*.

Вступительные работы обратно не высылаются.

Срок отправки работ – не позднее 30 апреля 2003 года.

Без вступительной работы, только по заявлению, принимаются на индивидуальное обучение победители областных (краевых, республиканских) туров Всероссийских олимпиад по соответствующим предметам, а также участники финальных туров этих олимпиад (не обязательно участие в самых последних олимпиадах).

Учащиеся ОЛ ВЗМШ частично возмещают расходы на свое обучение. Плата невелика, на каждом отделении своя. По просьбе тех, кто не в состоянии сам внести эту плату, ОЛ ВЗМШ готов обратиться по любому адресу – в школу, в орган народного образования, к другому спонсору – с ходатайством об оплате этим благотворителем соответствующих расходов.

Помимо индивидуального обучения, на всех отделениях ОЛ ВЗМШ, кроме экономического, имеется еще одна форма – «Коллективный ученик». Это группа учащихся, работающая под руководством преподавателя (школьного учителя, преподавателя вуза, студента или другого энтузиаста), как правило, по тем же пособиям и программам, что и индивидуально. *Прием в эти группы проводится до 15 октября 2003 года.* Для зачисления группы требуется заявление ее руководителя (с описанием его профессии и должности, со списком учащихся и четким указанием, в каком классе они будут учиться с сентября 2003 года); заявление должно быть подписано руководителем группы, заверено и подписано руководителем учреждения, при котором будет работать группа. Работа групп «Коллективный ученик» может оплачиваться школами по представлению ОЛ ВЗМШ как факультативные занятия.

На Северо-Западе России работает Заочная школа Ленинградского областного Министерства образования, созданная при Санкт-Петербургском университете, имеющая отделения математики, биологии и химии.

Проживающие на Северо-Западе России (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми республиках), желающие поступить на отделения математики и химии, могут выслать вступительные работы по адресу:

198097 Санкт-Петербург, ул. Трефолева, д.32, Северо-Западная ЗМШ (на прием).

Проживающие в остальных регионах России, а также в дальнем и ближнем зарубежье высылают свои работы в адрес ОЛ ВЗМШ или (по математике) соответствующего филиала.

Адрес ОЛ ВЗМШ: 119234 Москва В-234, Ленинские горы, МГУ, ОЛ ВЗМШ, на прием (с указанием отделения). Телефон: (095) 939-39-30.

Филиалы математического отделения ОЛ ВЗМШ имеются:

- при университетах – в Воронеже, Донецке (Украина), Екатеринбурге, Майкопе, Ульяновске, Челябинске;
- при педагогических институтах – в Иванове и Кирове;
- при Брянском центре технического творчества молодежи.

Ниже вы найдете краткие сведения о каждом отделении ОЛ ВЗМШ и условия вступительных контрольных заданий.

Отделение математики

Это отделение открылось в 1964 году. Из него выросла вся заочная школа (вначале она так и называлась – «математическая»).

За время обучения вы более глубоко, чем в обычной школе, сможете осознать основные идеи, на которых базируется курс элементарной математики, познакомиться (по желанию) с некоторыми дополнительными, не входящими сейчас в школьную программу разделами, а также поучиться решать олимпиадные задачи. На последнем курсе большое внимание уделяется подготовке к сдаче школьных выпускных и вступительных экзаменов в вузы.

На отделении созданы учебно-методические комплексы, приспособленные для заочного обучения. Часть из них издана массовым тиражом. Осуществляется перевод уже апробированных и вновь создаваемых материалов на электронный язык в интерактивном режиме, отделение готовится к работе в Интернете.

Окончившие отделение математики получат, в зависимости от желания и способностей, либо подготовку, необходимую для выбора математики как профессии, либо математическую базу для успешного усвоения вузовского курса математики, лежащего в основе профессиональной подготовки по другим специальностям: ведь сейчас математика служит мощным инструментом исследований во многих отраслях человеческой деятельности.

Обучение длится 4 года. Можно поступить на любой курс. Для этого к сентябрю 2003 года надо иметь следующую базу: на 1-й курс – 7 классов средней школы, на 2-й курс – 8 классов, на 3-й – 9 классов, на 4-й – 10. При этом поступившим на 2-й и 3-й курсы будет предложена часть заданий за предыдущие курсы. Для поступивших на 4-й курс обучение проводится по специальной интенсивной программе с упором на подготовку в вуз.

Для поступления надо решить хотя бы часть задач помещенной ниже вступительной работы (около номера каждой задачи в скобках указано, учащимся каких классов она предназначена; впрочем, можно, конечно, решать и задачи для более старших классов). На обложке тетради напишите, на какой курс вы хотите поступить.

Группы «Коллективный ученик» (на все курсы и по любой программе) принимаются без вступительной работы.

Задачи

(звездочкой отмечены более трудные, с точки зрения составителей работы, задачи)

1 (7–10). Может ли произведение всех цифр натурального числа делиться на 66?

2 (7–10). Можно ли провести из одной точки плоскости пять лучей так, чтобы среди образованных ими углов было ровно четыре острых? (Учтите, что рассматриваются углы, образованные любой парой лучей – не только из соседей!)

3 (7–10). Пешеход прошел $4/7$ узкого моста, когда заметил приближающуюся к нему спереди машину, с которой на мосту он бы не смог разойтись. Тем не менее он продолжил идти с той же скоростью и подошел к концу моста одновременно с машиной. Оказалось, что если бы он вернулся, заметив машину, то подошел бы к началу моста также одновременно с машиной. Считая, что пешеход и машина всегда движутся с одной и той же скоростью, найдите отношение их скоростей.

4 (7–10). Можно ли приписать к числу 2003 справа такие три цифры, чтобы полученное семизначное число делилось на 7, на 8 и на 9?

5 (7–10). Пусть $\dfrac{4x^2-3xy+4y^2}{x^2+xy+y^2}=2$. Найдите $\dfrac{x+3y}{y}$.

6 (9–10). Пусть углы B и D четырехугольника $ABCD$ прямые, причем $AB = BC$, а расстояние от вершины B до стороны AD равно h. Найдите площадь этого четырехугольника.

7 (7–10). Сколько существует: а) десятизначных; б) 11-значных чисел, делящихся на 9, в десятичной записи которых используются лишь нули и пятерки?

8* (9–10). Пусть известно, что AA_1, BB_1, CC_1 – биссектрисы треугольника ABC, причем $\angle B_1C_1A_1 = 90°$. Прямые A_1C_1 и B_1C_1 пересекают прямую, параллельную стороне AB и проходящую через вершину C, в точках K и P соответственно. Найдите CC_1, если $KP = a$.

9* (8–10). Известно, что корни x_1 и x_2 квадратного трехчлена x^2+px+q удовлетворяют условию $x_1-x_2=7$. Какое наименьшее значение может принимать этот квадратный трехчлен?

10* (7–10). Назовем «уголком» фигуру, образованную одной клеткой шахматной доски и двумя ее соседними клетками, примыкающими к ней по двум ее смежным сторонам. Какое: а) наибольшее; б) наименьшее количество уголков можно разместить на шахматной доске 8×8 без перекрытий так, чтобы ни одного уголка на этой доске больше не поместилось?

11* (8–10). Решите уравнение $\left(x^2-2x-2\right)^2+x^2=7$.

12* (7–10). Фирма набирает штат сотрудников. При этом соблюдается следующая процедура. Каждому сотруднику при приеме предлагаются два дня недели (по выбору фирмы), из которых работник выбирает себе один выходной и сообщает о своем выборе фирме. Фирме необходимо, чтобы каждый день (включая воскресенье) на работу выходили не менее 10 человек. Каким наименьшим числом сотрудников может при приеме гарантированно ограничиться фирма при соблюдении процедуры?

Отделение биологии

Набор проводится в 30-й раз. Основное внимание при обучении уделяется наименее изучаемым в школе, но бурно развивающимся в настоящее время разделам биологической науки: молекулярной биологии, биохимии, иммунологии, генетике, биофизике, физиологии и т.д.

На отделении созданы известные в стране оригинальные учебники, задачники и другие учебные пособия для школьников (часть из них издана массовым тиражом издательствами «Мирос» и «Фазис» и хорошо известна в школах).

Проводится набор на два потока: трехгодичное обучение на базе 8 классов и двухгодичное – на базе 9 классов. Принимаются группы «Коллективный ученик». Такой группе надо выслать коллективно выполненную работу, а также заверенный печатью учреждения, при котором она будет работать, список членов группы с указанием фамилии, имени и отчества руководителя кружка.

При решении задач можно использовать и факты, найденные в литературе (в этом случае приведите ссылки на источник), и собственные идеи. Вместе с работой необходимо прислать стандартный конверт с маркой и полным (с индексом) почтовым адресом – в нем вам пришлют решение Приемной комиссии.

Поступающие на трехгодичное обучение решают задачи 1 – 5 из приведенного ниже списка, на двухгодичное обучение – задачи 4 – 8. В задании использованы материалы Всероссийской биологической олимпиады учреждений дополнительного образования и Биологической олимпиады школьников МГУ.

Задачи

1. Опишите как можно больше особенностей строения, образа жизни и поведения, связанных с заботой о потомстве, у разных птиц.

2. Далеко не все тропические и субтропические растения могут стать комнатными (т.е. успешно выращиваться в домашних условиях в удаленных от экватора широтах). С какими причинами может быть связана сложность или невозможность «приручения» таких растений?

3. Представьте себе, что рядом с вашим домом (или дачей) есть старый пруд, и вы решили составить максимально полный список обитающих в нем живых организмов. Какие действия следует для этого предпринять? Обоснуйте их необходимость и достаточность.

4. Как вы думаете, какие функции в живых организмах могут осуществлять клетки, форма которых: а) почти шарообразная; б) плоская и широкая; в) вытянутая в длину и узкая; г) с торчащими отростками? Постарайтесь придумать как можно больше разных функций и для каждой функции напишите, почему для ее осуществления необходима именно такая форма клеток.

5. Юный натуралист Шурик прочитал, что гусеницы бабочек-белянок встречаются только на растениях из семейства крестоцветных. «Как же так, – подумал Шурик, – далеко не каждый школьник справится с определением семейства растения, а значительно менее мозговитые насекомые ухитряются это делать...» Какие эксперименты мог бы поставить Шурик, чтобы узнать, как белянкам удается обитать только на растениях из семейства крестоцветных?

6. Перечислите различные механизмы, из-за которых деятельность человека может приводить к вымиранию видов животных и растений. По возможности подтвердите примерами указанные вами механизмы.

7. В рекламе различных снадобий часто приводится утверждение: «Наш препарат – естественный продукт, участвующий в нормальном обмене веществ человека. Следовательно, он не может быть вреден». Справедливо ли это? Ответ обоснуйте, по возможности приведите примеры.

8. Классическим примером, позволяющим изучить многие закономерности перехода к многоклеточности, является вольвокс. Среди вольвоксовых встречаются и одиночные организмы, и небольшие колонии, и скопления из десятков тысяч особей. Объясните, какие преимущества получают клетки, входящие в состав колонии вольвокса, по сравнению с клетками, обитающими поодиночке.

Отделение физики

Отделение работает 11 лет. За это время создан и прошел проверку оригинальный двухгодичный курс заочного обучения, завершается работа по созданию трехгодичного.

Основное внимание уделяется решению физических задач. В пособиях излагаются методы, пригодные для изучения как стандартных, так и более сложных ситуаций. Акценты делаются как на выяснение физического смысла тех или иных явлений, так и на техническую, вычислительную сторону, на использование математического аппарата и качественное истолкование полученных результатов.

В программе – все основные разделы школьного курса, а также темы, мало или совсем не изучаемые в школе. Изложение максимально приближено к современным взглядам и достижениям физической науки.

Обучение одно- и двухгодичное. На двухгодичный поток принимаются учащиеся, имеющие базовое образование в объеме 9 классов средней школы, на одногодичный – 10 классов. Для поступления на двухгодичный поток нужно решить задачи 1–5 приведенной ниже вступительной работы, на одногодичный поток – задачи 4–8. На базе 10 классов можно пройти программу двухгодичного потока за один год, тогда нужно написать «10+11» на обложке тетради и постараться решить все предлагаемые ниже задачи.

Группы «Коллективный ученик» принимаются в 10 и 11 классы без вступительной работы, только по заявлению руководителя.

Задачи

1. Из одной точки окружности начинают ползти два жука: один – по дуге этой окружности, а другой – вдоль ее диаметра. Скорости жуков постоянны и таковы, что жуки встречаются в точке на другом конце диаметра. В этот момент жук, ползущий по диаметру, меняет направление скорости на противоположное, и через некоторое время жуки снова встречаются в точке, из которой начали движение. Нарисуйте, как будет выглядеть траектория жука, ползущего по дуге окружности, в системе отсчета, связанной с другим жуком.

2. Тело массой $m = 5$ кг лежит на краю длинной тележки массой $M = 10$ кг, которая покоится на горизонтальной поверхности. После того как телу толчком сообщают скорость $v_0 = 3$ м/с, оно начинает скользить по тележке. Коэффициент трения скольжения тела о тележку $\mu = 0,2$. Найдите величину перемещения тела относительно земли за время $t = 2$ с от начала движения. Считайте, что за это время тело не достигает противоположного края тележки, и примите $g = 10$ м/с^2.

3. Коробка в форме куба без нижней грани стоит на доске. Доску медленно поднимают за конец, и в определенный момент коробка переворачивается через ребро. Найдите угол наклона доски к горизонту в этот момент времени. Считайте, что коробка по доске не скользит.

4. Человек массой m стоит перед неподвижным эскалатором длиной L, составляющим угол α с горизонтом. Какую работу должен совершить человек, чтобы взобраться на верх эскалатора, двигаясь с постоянной скоростью v? Как изменится мощность, развиваемая человеком при подъеме, если эскалатор будет двигаться вниз со скоростью $u < v$, а человек по-прежнему будет идти со скоростью v относительно эскалатора?

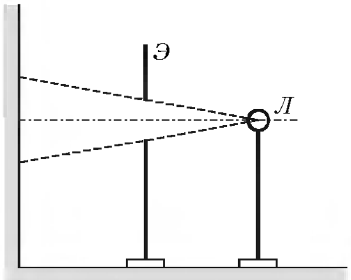


Рис. 1

5. Посередине между лампочкой и стенкой на столе установлен непрозрачный экран с круглым отверстием (рис.1). Расстояние между лампочкой и стенкой равно $L = 90$ см. Имеется набор собирающих и рассеивающих линз с оптическими силами $D = \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 10$ дптр. Когда между лампочкой и экраном установили одну из линз, радиус светового пятна на стенке увеличился в $n = 5$ раз. Какая линза была использована, и где ее нужно было установить?

6. Тело массой $2m$, двигавшееся со скоростью v_0, абсолютно упруго соударяется с покоившимся телом массой m. После удара скорости тел сонаправлены и перпендикулярны неподвижной стенке, которая расположена на расстоянии L от начального положения тела массой m. Абсолютно упруго отразившись от стенки, легкое тело снова сталкивается с тяжелым. Определите промежуток времени между соударениями тел. Столкнутся ли после этого тела еще раз?

7. Чугунную трубу длиной $L = 7$ м, подвешенную вертикально на тросе, медленно опускают в воду. Верхний конец трубы герметично закрыт, а нижний открыт. Когда трубу погрузили на $\alpha = 3/4$ ее длины, сила натяжения троса уменьшилась в $n = 2$ раза. В этот момент нижний конец трубы закрыли, и вынули трубу из воды. После этого сила натяжения троса оказалась в $k = 1{,}2$ раза больше начальной. Определите по этим данным величину атмосферного давления. Плотность чугуна $\rho = 7000$ кг/м^3.

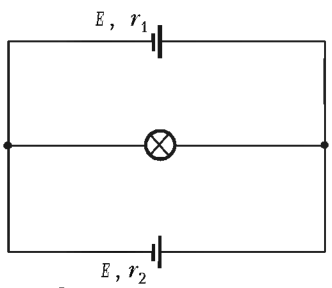


Рис. 2

8. Лампочка подключена к двум источникам постоянного тока, имеющим одинаковые ЭДС, но разные внутренние сопротивления r_1 и r_2 (рис.2). При каком сопротивлении лампочки R ее накал будет максимальным? Какую часть энергии, вырабатываемой источниками, в этом случае потребляет лампочка?

Отделение химии

На отделение принимаются учащиеся, имеющие базовое образование в объеме 8, 9 или 10 классов средней школы.

В программе обучения следующие одногодичные курсы:
– общая химия (с элементами неорганической химии);
– неорганическая химия;
– органическая химия;
– химия окружающей среды.

Более подробные сведения о программе и порядке обучения высылаются вместе с извещением о решении Приемной комиссии.

Задачи вступительной работы, помещенные ниже, – общие для всех поступающих, независимо от базового образования.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы, по заявлению руководителя.

Задачи

1. Изобразите строение молекул H_2S, H_2S_2, SO_2, H_2SO_4. Укажите валентность и степень окисления серы в каждом из этих соединений.

2. Газообразное соединение азота и водорода содержит 12,5% водорода по массе, а плотность его паров по водороду равна 16. Найдите простейшую и молекулярную формулы этого соединения.

3. 12,0 г угля сожгли в 16,8 л кислорода. Продукты пропустили через 150 г 20%-го раствора гидроксида натрия. Найдите массы всех растворенных веществ.

4. Теплота образования аммиака 46,19 кДж/моль. При смешивании 300 л азота и 600 л водорода в промышленном реакторе выделилось 68,8 кДж тепла. Найдите максимальную массу 50%-й азотной кислоты, которую можно получить из произведенного аммиака.

5. Напишите структурные формулы всех продуктов, которые могут образоваться при нагревании смеси бутанола-2 и пропанола-1 с концентрированной серной кислотой.

Отделение филологии

Отделению скоро четырнадцать лет. За это время подготовлено и издано большое количество уникальных учебных пособий по русскому языку, литературе, интересным проблемам литературоведения и лингвистики.

Принимаются *все желающие, имеющие базовую подготовку в объеме 8 классов.* Отделение предлагает на выбор 15 учебных программ.

Вы хотите исправить свою грамотность? Познакомиться с любопытными проблемами теории и практики русского языка? Освоить приемы лингвистического или литературоведческого анализа? Научиться говорить по-английски и понимать английскую речь? Узнать кое-что о журналистике и оценить свои творческие способности? Приобрести навыки, необходимые для успешной сдачи экзаменов в вуз? Тогда пришлите нам вступительную работу, и мы предложим вам ту программу или программы, которые помогут решить именно вашу проблему. Поскольку специалистам отделения необходимо как можно больше знать о ваших целях и задачах, *вступительная работа – это ответы на вопросы помещенного ниже теста.*

Внимание! Отвечайте на вопросы теста на двойном тетрадном листе, указав на первой странице важные для нас данные: ФИО, какой класс заканчиваете, полный (с индексом!) почтовый адрес, телефон (если есть). Затем полностью *перепишите условия теста* и *выполните задания 1 – 6* (впишите, подчеркните нужное, проставьте галочки или цифры в квадратики и т.п.).

Тест

1. Впишите нужное

К 1 сентября 2003 года я закончу _______ класс.

2. Заполните клетки

Моя средняя оценка:
по русскому языку □
по литературе □

3. Подчеркните нужное

Моя грамотность:
а) абсолютная;
б) вполне приличная;
в) так себе;
г) низкая.

4. Расставьте цифры от 1 до 6 в соответствии с тем, насколько для вас важны следующие задачи (1 – самое важное, 6 – наименее важное):

□ узнать как можно больше об устройстве русского языка;

□ узнать как можно больше о русской литературе;

☐ научиться хорошо и логично выражать свои мысли в сочинении;

☐ писать грамотнее;

☐ узнать больше об устройстве языков мира;

☐ узнать больше о том, что за наука – литературоведение.

5. Подчеркните нужное

Надеюсь, что учеба на филологическом отделении ОЛ ВЗМШ даст мне возможность:

а) удовлетворить свое природное любопытство;

б) заняться в свободное время тем, что мне интересно;

в) исправить школьные оценки по русскому языку и литературе;

г) приобрести знания и навыки, необходимые для успешной сдачи экзаменов в вуз.

6. Подчеркните нужное

Скорее всего, я буду поступать в вуз:

а) на филологическую специальность, где пишут сочинение и сдают русский устно;

б) на гуманитарную специальность, где пишут сочинение;

в) в негуманитарный вуз и писать сочинение;

г) в негуманитарный вуз и писать диктант;

д) в негуманитарный вуз и писать тест;

е) мне важно школу закончить!

Желающие поступить только на новые курсы «Журналистика: первый шаг» (основы журналистики, анализ текста, практическая работа в разных публицистических жанрах) и/или «Английский язык» (для тех, кто знает язык в объеме «Yes, it is») принимаются на основании заявления и анкету не заполняют.

Вместе с анкетой и/или заявлением пришлите, пожалуйста, стандартный конверт с маркой и заполненным вашим адресом (с индексом) для ответа Приемной комиссии.

Группам «Коллективный ученик» предлагаются курсы по русскому языку и литературе (курсы «Английский язык» и «Журналистика» – только индивидуально).

Отделение экономики

Обучение проводится по двум программам: «Прикладная экономика» и «Экономика и география». Основной курс обучения включает изучение основ экономической теории, а также знакомство с практикой бизнеса в деловой игре по переписке. Учащиеся программы «Экономика и география» знакомятся с физической и экономической географией, участвуют заочно в увлекательных путешествиях по странам мира.

Окончившим основной курс предлагается специализация по выбору: «Мировая экономика», «Бухгалтерский учет и финансовый анализ», «Предпринимательство и менеджмент», «Экономика России: прошлое, настоящее и будущее» и др.

Учащимся, желающим одновременно подготовиться к поступлению на экономический факультет МГУ и в другие вузы, предлагается специальная программа «Экономика ПЛЮС», включающая наряду с экономическими дисциплинами углубленное изучение нескольких дополнительных предметов по выбору: математики, обществознания, русского языка и литературы, истории и географии. Есть специальный «Университетский курс» – для тех, кто готовится поступать в Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова и другие университеты и вузы страны с повышенными требованиями к поступающим. Существует также программа «География ПЛЮС», ориентированная на тех, кто поступает на географический факультет МГУ и в другие вузы с повышенными требованиями по географии.

Принимаются *все желающие, имеющие образование не ниже 7 классов.* Обучение ведется либо индивидуально, либо в небольших группах (2–4 человека). Формы обучения «Коллективный ученик» на экономическом отделении нет.

Вступительная работа для учащихся дается в форме теста – он включает вопросы по экономике, математике, истории, географии, литературе, общей культуре.

Решения присылайте *только на открытках* с указанием полного почтового адреса и индекса, фамилии, имени и отчества (все – *печатными* буквами); обязательно укажите источник информации об ОЛ ВЗМШ и напишите «Экономика, вступительный тест 2003 г.». На открытке достаточно записать в строчку номера вопросов и под каждым написать букву, соответствующую ответу, который вы считаете правильным. Верно ответившие на все вопросы получат из букв своих ответов термин, характеризующий один из важных экономических процессов, в котором участвует и Россия.

Тест

1. В июне 1984 года правительства Нидерландов, Бельгии, Германии, Франции и Люксембурга заключили Шенгенское соглашение, в котором определены:

(р) механизмы проведения единой европейской сельскохозяйственной политики;

(г) формы свободного перемещения денежных средств из страны в страну и свободного перемещения граждан через границу для создания единого рынка рабочей силы;

(м) идеи создания единого фондового рынка на территории ЕС;

(п) введение единой европейской валюты, создание Европейского центрального банка и Европейской фондовой биржи;

(и) сокращение ядерных вооружений в Европе.

2. Экспорт страны Экономии состоит из двух видов товаров – нефти и бананов, причем 40% его приходится на нефть. В 2002 году средняя цена тонны бананов на мировом рынке выросла на 5%, а барреля нефти – упала на 20%. Укажите, что произошло с количеством экспорта страны:

(л) сократился на 5%;

(в) повысился на 8%;

(о) не изменился;

(а) вырос на 7%;

(р) снизился на 10%.

3. В начале XXI века усилия мирового сообщества направлены на разрешение глобальных проблем современности, к которым относится проблема:

(и) предотвращения мировой глобализации;

(к) сдерживания развития средств вооружения;

(о) предотвращения третьей мировой войны;

(а) использования достижений НТР в мирных целях;

(к) реконверсии, т.е. перевода части ресурсов из гражданской сферы в военную.

4. В 2001 году объемы производства корпорации «Кока-Кола» в Азербайджане, Германии, России, США и Франции, рассчитанные в млн долларов США, соотносились как 18 : 150 : 115 : 240 : 140. В 2002 году объем выпуска напитков в каждой из стран вырос на 115 млн долларов США. В какой стране наблюдались наибольшие темпы роста производства:

(б) Азербайджане;

(а) Германии;

(с) России;

(в) США;

(е) Франции?

5. Заявка России на присоединение к ВТО существует с декабря 1994 года, с 1998 года ведутся переговоры по присоединению к этой организации, обеспечивающей правовую основу для осуществления:

(и) международной торговли товарами и услугами;
(о) европейского рынка рекламы;
(т) улучшения качества телекоммуникационных сетей;
(а) создание системы международных транспортных коридоров;
(м) развития межпланетных перевозок.

6. Укажите произведение, главный герой которого интересовался трудами Адама Смита:

(л) «Евгений Онегин»;
(з) «Горе от ума»;
(к) «Герой нашего времени»;
(н) «Обломов»;
(т) «Отцы и дети».

7. С 2002 года официальной валютой на территории стран-членов «зоны евро» становится единая европейская валюта – евро, при этом национальные денежные единицы выводятся из обращения. Какая из нижеуказанных стран переходит на расчеты в евро НЕ с франков:

(ю) Бельгия;
(д) Люксембург;
(и) Нидерланды;
(е) Франция;
(ф) Швейцария?

8. Назовите философское течение, представители которого указывали, что Россия должна теснее взаимодействовать с Европой, войти в европейскую жизнь в качестве полноправного участника:

(к) альтруизм;
(т) эпикурейство;
(з) западничество;
(и) марксизм-ленинизм;
(с) славянофильство.

9. Выберите пример из художественной литературы, наиболее соответствующий натуральному хозяйству:

(а) хозяйство Робинзона Крузо («Робинзон Крузо», Д. Дефо);
(о) хозяйство семьи Кирсановых («Отцы и дети», И. Тургенев);
(л) экономика Российской империи («Петр I», А. Толстой);
(р) хозяйство семьи Фамусовых («Горе от ума», А. Грибоедов);
(к) хозяйство Коробочки («Мертвые души», Н. Гоголь).

10. Укажите тройку крупнейших государств по доле в мировом ВВП:

(ц) США, Япония, Германия;
(р) Китай, Индия, Малайзия;
(с) Аргентина, Бразилия, Мексика;
(н) Великобритания, Германия, Франция;
(г) Россия, Беларусь, Украина.

11. Название какой породы собак в русском языке совпадает с названием размера налогового сбора:

(и) такса;
(т) мопс;
(к) бассет;
(е) бульдог;
(а) фокстерьер?

12. Назовите интеграционное объединение мировой экономики, членом которого является Россия:

(й) НАТО;
(т) АСЕАН;
(ь) НАФТА;
(и) ЕС;
(я) СНГ.

Отделение «Нравственность, право, закон»

Это – седьмой набор на отделение. Для поступления необходимо иметь базовое образование не ниже 8 классов средней школы.

Предлагается одногодичный курс «Беседы о правах человека, нравственности, праве, законе и государстве». В программе:

– человек и природа, обычай, мораль, право, закон и государство, гражданское общество, либерализм – возникновение этих понятий, что они значат для нас сейчас;
– права человека;
– основы современного законодательства России;
– общекультурная тематика, связанная с основным направлением курса.

Успешно окончившим годовой курс будут затем предложены на выбор следующие спецкурсы:

– курс «Беседы-2» – продолжение одногодичного курса;
– углубленный юридический курс.

Предварительных знаний в области права от поступающих на отделение не требуется, нужны только желание учиться и настойчивость. Формы обучения – индивидуальная и в небольших группах «Коллективный ученик».

Для поступления достаточно правильно ответить на вопросы предлагаемого ниже теста.

Желающие поступить должны прислать письмо со своим полным почтовым адресом (с индексом), фамилией, именем и отчеством, сведениями о базовом образовании (сколько классов средней школы закончено) и об источнике информации об ОЛ ВЗМШ. В письмо вложите чистый конверт с маркой и заполненным вашим адресом (мы пришлем в нем наш ответ). На отдельном листе бумаги напишите: «Ответы на тест: 1, 2, 3, 4, 5» и под каждым номером впишите букву, соответствующую ответу, который вы считаете правильным. Верно ответившие на все вопросы получат из выписанных букв ключевое слово.

Тест

1. В нашей стране суд выносит приговор:

в) именем закона;
г) от имени данного суда;
д) от имени Российской Федерации;
е) от имени судьи.

2. Юрисдикция – это:

д) диктатура юристов;
е) круг полномочий данного органа или лица;
ж) судебное красноречие;
з) ни то, ни другое, ни третье.

3. В Древней Греции слово «идиот» означало:

к) умственно отсталого человека;
л) не имело особого смысла и употреблялось как ругательство;
м) означало человека, занятого только личными проблемами;
н) человека, отправляющегося в далекое плавание.

4. Кому принадлежат слова: «...необходимо предоставить народу участие во всех областях управления настолько, насколько он сможет участвовать в их деятельности; и это единственный путь обеспечить устойчивое и четкое распоряжение властью»:

н) Солону;
о) Томасу Джефферсону;
п) Николаю II;
р) И.В.Сталину?

5. «Права человека» – это:

р) права, которые даются человеку за особые заслуги;

с) права, которыми обладает от рождения любой человек;
т) права, которыми государство наделяет своих граждан;
у) нечто, о чем часто спорят, но никто не знает, что это такое.

Отделение истории

Отделение в пятый раз объявляет набор на курс дистантного обучения «История России». Учащимся регулярно высылаются оригинальные учебные пособия и задания, разработанные преподавателями специально для заочного образования. Обучение на историческом отделении позволит всем, в том числе жителям самых отдаленных городов и деревень, расширить свой кругозор, подготовиться к поступлению в вуз. Успешно прошедшие годовой курс обучения получают диплом, желающие смогут продолжить свое историческое образование, выбрав спецкурсы.

А зачем нужно изучать историю? Во-первых, это просто интересно. Любопытно знать, как жили когда-то люди, во что одевались, чем питались, что читали, как женились и выходили замуж, за что боролись и на что «напарывались». Во-вторых, это полезно. Только зная прошлое, можно понять настоящее и прогнозировать будущее. Мы поможем вам в этом разобраться. Специально для вас опытные преподаватели пишут книжки и составляют другие материалы. Последние новости из мира истории вы узнаете одним из первых!

Мы будем поддерживать с вами постоянную связь. По нашим книжкам вы будете выполнять особые задания и сообщать нам, что вы раскопали. Мы подскажем вам, как действовать дальше. Ведь в сущности труд историка и состоит из этих раскопок: историк-археолог копает землю и песок, отыскивая крупицы ушедших времен; историк-архивариус копается в груде бумаг и достает из архивов и даже из частной переписки все, что может позволить ему понять образ времени; историк-теоретик как увлекательный роман читает археологические таблицы, сухие сводки, статистику и превращает их в живую ткань ушедшей жизни. У историка особая профессия: он в одном лице и следователь, и прокурор, и адвокат времени.

Для поступления на историческое отделение необходимо выполнить следующие два задания и оформить их на двух листах бумаги.

Группы «Коллективный ученик» принимаются только по заявлению руководителя.

Задания

1. Отгадайте, кто это:

- С легкой руки Фридриха II его прозвали «русский Гамлет».
- Его отец – внук Петра I по материнской линии и внучатый племянник Карла XII по отцовской.
- Его мать, немецкая принцесса, приехала в Россию 15-летней девочкой; пришла к власти в 33 года, свергнув мужа; правила 34 года, не имея на трон законных прав.
- Придя к власти в 42 года, он отменил указ Петра I о передаче престола по воле императора, которым чуть не воспользовалась его мать, желавшая передать власть внуку, минуя сына.
- Православный царь, глава католического Мальтийского ордена.
- Главная черта его правления – мелочный деспотизм.
- Во время военных смотров мог, осерчав, отправить в Сибирь прямо с плаца за нечеткий шаг, оторвавшуюся пуговицу или плохо напудренные букли.
- Проверял преданность придворных внезапной ночной тревогой, требуя явиться ко двору без всякого промедления, хоть бы и в ночной рубахе.
- При нем за ношение одежды на французский манер и использование в платье одновременно трех цветов – красного, синего и белого – подвергали аресту.
- Указом о трехдневной барщине снискал себе славу крестьянского царя.
- Отправил 22 тысячи казаков завоевывать Индию, чтобы ослабить Англию, и только его смерть вернула солдат с дороги.
- Боясь заговора, этот император построил себе замок и в нем был убит.
- Его старший сын мечтал о конституции для России, а далее Польше.

2. Не более чем в семи предложениях нарисуйте портрет русского правителя, образ которого воплощен в трагедии А.С.Пушкина, заканчивающейся строкой «...народ безмолвствует».

Заочная физико-техническая школа при МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) Министерства образования Российской Федерации при Московском физико-техническом институте (государственном университете) (МФТИ) проводит набор учащихся общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий и т. п.), расположенных на территории Российской Федерации, на 2003/04 учебный год.

ЗФТШ при МФТИ как федеральное государственное учреждение дополнительного образования детей работает с 1966 года. За прошедшие 36 лет школу окончили свыше 65 тысяч учащихся; практически все ее выпускники поступают в ведущие вузы страны, а каждый второй студент МФТИ – выпускник ЗФТШ. Финансирует ЗФТШ Министерство образования Российской Федерации. Обучение в ЗФТШ для граждан, проживающих в Российской Федерации (в рамках утвержденного плана приема), бесплатное. Школьники, желающие обучаться в ЗФТШ и выполнившие вступительное задание на положительные оценки, но не прошедшие по конкурсу, а также проживающие в других государствах, могут быть зачислены в ЗФТШ на платной договорной основе.

Научно-методическое руководство школой осуществляет Московский физико-технический институт (государственный университет), который готовит специалистов по единому направлению «Прикладные математика и физика». В их подготовке принимают участие ведущие отраслевые и академические научно-исследовательские институты и научно-производственные объединения страны (базовые организации МФТИ). Преподаватели МФТИ – крупнейшие ученые, среди которых около 100 членов Российской академии наук. Физтеховское образование позволяет не только успешно работать в науке, но и хорошо ориентироваться в жизни.

Цель ЗФТШ при МФТИ – помочь учащимся, интересующимся физикой и математикой, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам, а также способствовать профессиональному самоопределению учащихся.

Набор в 8, 9, 10 и 11 классы ЗФТШ на 2003/04 учебный год проводится на следующие отделения:

– *Заочное (индивидуальное обучение).*
Тел: (095) 408-51-45

Прием на заочное отделение проводится на конкурсной основе по результатам выполнения вступительного задания по физике и математике, приведенного ниже. Полная программа обучения рассчитана на 4 года, т.е. на 8 – 11 классы, но поступать можно в любой из этих классов.

В течение учебного года, в соответствии с программой ЗФТШ, ученик будет получать тематические задания по физике и математике (4 задания по каждому предмету для 8 класса, 6 – 7 заданий по каждому предмету для 9, 10 и 11 кл.), а затем рекомендуемые ЗФТШ авторские решения этих заданий вместе с проверенной работой учащегося.

Задания содержат теоретический материал, разбор характерных примеров и задач по соответствующей теме и 8 – 12 контрольных вопросов и задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Задания ЗФТШ составляют опытные преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ. Работы учащихся-заочников проверяют студенты, аспиранты и выпускники МФТИ (часто – выпускники ЗФТШ).

– *Очно-заочное (обучение в факультативных группах). Тел./факс: (095) 485-42-27*

Факультативные группы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении двумя преподавателями – физики и математики. Руководители факультатива принимают в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Группа (не менее 8 человек) принимается в ЗФТШ, если директор общеобразовательного учреждения сообщит в ЗФТШ фамилии, имена, отчества ее руководителей и поименный алфавитный список обучающихся (ФИО полностью) с указанием класса *текущего учебного года и итоговых оценок* за вступительное задание по физике и математике, телефон, факс и e-mail школы. Все эти материалы и конверт для ответа о приеме в ЗФТШ с обратным адресом на имя одного из руководителей следует выслать до 15 июня 2003 года по адресу: 141700 г. Долгопрудный Московской области, Институтский пер., 9, МФТИ, ЗФТШ (с указанием «Факультатив»). *Тетради с работами учащихся в ЗФТШ не высылаются.*

Работа руководителей факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением как факультативные занятия по предоставлению ЗФТШ при МФТИ соответствующих сведений.

Руководители факультативов будут получать в течение учебного года учебно-методические материалы ЗФТШ (программы по физике и математике, задания по темам программы, решения заданий с краткими рекомендациями по оценке работ учащихся) и информационно-рекламные материалы (газеты МФТИ «За науку», проспекты МФТИ и его факультетов с правилами приема и т.п.). Работы учащихся проверяют и оценивают руководители факультативов, а в ЗФТШ ими высылаются ведомости с итоговыми оценками по каждому заданию.

– *Очное (обучение в вечерних консультационных пунктах). Тел./факс: (095) 485-42-27*

Для учащихся Москвы и Московской области по программе ЗФТШ работают вечерние консультационные пункты, набор в которые проводится по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ или собеседования по физике и математике, которое проводится в первой декаде сентября.

Программы ЗФТШ при МФТИ являются дополнительными образовательными программами и едины для всех отделений.

Кроме занятий по этим программам, ученикам ЗФТШ (всех отделений) предлагается участвовать в физико-математической олимпиаде «Физтех-абитуриент», которая проводится на базе МФТИ и в ряде городов России в мартовские школьные каникулы, в других очных и заочных олимпиадах МФТИ и его факультетов, а также в конкурсах и научно-технической конференции школьников «Старт в науку».

По окончании учебного года учащиеся, успешно выполнившие программу ЗФТШ по выбранной форме обучения, переводятся в следующий класс, а выпускникам (одиннадцатиклассникам) выдается свидетельство о получении профильного дополнительного образования с итоговыми оценками по физике и математике, которое учитывается на собеседовании при поступлении в МФТИ.

Вне конкурса в ЗФТШ принимаются *победители* областных, краевых, республиканских, зональных и всероссийских олимпиад по физике и математике 2002/03 учебного года. Им необходимо до 15 мая 2003 года выслать в ЗФТШ выполненную вступительную работу и копии дипломов, подтверждающих участие в вышеперечисленных олимпиадах.

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет самостоятельно в одной школьной тетради на русском языке. Порядок задач сохраняйте тот же, что и

Л.№								
№ задач	1	2	3	…	15	16	17	Σ
Ф.								
М.								

1. Область	*Архангельская*
2. Фамилия, имя, отчество	*Личенко Иван Алексеевич*
3. Класс, в котором учитесь	*восьмой*
4. Номер школы	*2*
5. Вид школы (обычная, лицей, гимназия, с углубленным изучением предмета и т.п.)	*обычная*
6. Подробный домашний адрес (с указанием индекса), телефон, e-mail	*164260 Архангельская область, Плесецкий район, п. Плесецк, ул. Галактическая, д.99, кв.8* ivan@atn.ru
7. Место работы и должность родителей:	
отец	*ГУ «Архгосэнергонадзор», инспектор*
мать	*Межрайонная ИМНС России* №6 *по Архангельской области, начальник отдела учета налогоплательщиков*
8. Адрес школы, телефон, факс, e-mail	*п. Плесецк, ул. Южная, д. 2, 2-10-44*
9. Фамилия, имя, отчество преподавателей:	
по физике	*Сагитова Вера Александровна*
по математике	*Сагитова Вера Александровна*
10. Каким образом к Вам попало это объявление?	*передали друзья*

в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на *внутреннюю* сторону обложки тетради.

На *лицевую* сторону обложки наклейте лист бумаги, четко заполненный по приведенному здесь образцу.

В ЗФТШ ежегодно приходит более 6 тысяч вступительных работ. Пожалуйста, обратите внимание на правильность заполнения анкеты! Пишите аккуратно, лучше печатными буквами.

Внимание! Для получения ответа на вступительное задание и для отправки вам первых заданий *обязательно* вложите в тетрадь *два одинаковых* бандерольных конверта размером 160×230 мм. На конвертах четко напишите свой домашний адрес.

Ученикам, зачисленным в ЗФТШ в рамках утвержденного плана приема, необходимо будет оплатить целевой взнос для обеспечения учебного процесса в соответствии с уставными целями школы. Сумма взноса будет составлять ориентировочно для учащихся заочного и очного отделений 200–350 руб. в год, для очно-заочного – 400–700 руб. (с каждой факультативной группы).

Срок отправления решения – *не позднее 1 марта 2003 года.* Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 2003 года.

Тетрадь с выполненными заданиями (по физике и математике) высылайте по адресу: *141700 г.Долгопрудный Московской области, Институтский пер., 9, МФТИ, ЗФТШ.*

Для учащихся Украины работает Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ (обучение платное). Желающим в него поступить следует высылать работы по адресу: 03680 г.Киев, пр.Вернадского, 36, Институт металлофизики, Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Тел.: (044) 444-95-24.

Для учащихся из зарубежных стран возможно только платное обучение на заочном и очно-заочном отделениях ЗФТШ. Условия обучения для прошедших конкурсный отбор будут сообщены дополнительно.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике.

В задании *по математике* задачи 1 – 5 предназначены для учащихся седьмых классов, задачи 2 – 7 – для восьмых классов, 5 – 11 – для девятых классов, 8 – 14 – для десятых классов.

В задании *по физике* задачи 1, 3, 4, 6, 7 предназначены для учащихся седьмых классов, задачи 2, 3, 5 – 8 – для восьмых классов, 7 – 13 – для девятых классов, 9, 12 – 17 – для десятых классов.

Номера классов указаны на текущий 2002/03 учебный год.

Вступительное задание по математике

1. Упростите выражение

$$\left(\frac{(a+1)^3-3a^2-1}{a^2+3}+\frac{(a-1)^2-1}{a-2}\right)^3-8a^3.$$

2. Найдите все простые числа p, такие, что число $3p+1$ является квадратом натурального числа.

3. Каково наибольшее число квартир в стоквартирном доме, у которых сумма цифр номера одинакова?

4. Турист отправляется в поход из A в B и обратно и проходит весь путь за 3 ч 41 мин. Дорога из A в B идет сначала в гору, потом по ровному месту, а затем под гору. На каком протяжении дорога проходит по ровному месту, если скорость туриста составляет при подъеме в гору 4 км/ч, на ровном месте 5 км/ч, при спуске с горы 6 км/ч, а расстояние AB равно 9 км?

5. Докажите, что с помощью гирек массами 3 г и 5 г на равноплечих весах можно взвесить груз массой в любое целое число граммов, превышающее 7 г. (Гирьки укладываются только на одну чашку весов.)

6. На плоскости даны три точки P, K и R. Постройте параллелограмм, середины трех сторон которого лежат в заданных точках P, K и R.

7. Для каждого значения параметра a решите систему уравнений

$$\begin{cases}a^2x+y=2,\\ x+y=2a.\end{cases}$$

8. Найдите трехзначное число, уменьшающееся в 13 раз после зачеркивания в нем средней цифры.

9. Найдите все значения параметра a, при которых разность l между наибольшим и наименьшим корнями уравнения

$$x^3-\frac{x^2-1}{a}-x=0$$

удовлетворяет неравенству $2al+3\ge 0$.

10. В треугольнике ABC, у которого угол C равен 120°, проведены высоты AD и BE. Пусть F – середина AB. Найдите углы треугольника DEF.

11. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{1+x^3}+x-2}{x-1}\ge x+1.$$

12. Решите уравнение

$$\frac{\cos 4x+\cos 3x+\cos 2x+\cos x}{\sin 4x+\sin 3x-\sin 2x-\sin x}=\frac{\sqrt{2}\left|1-2\sin^2 x\right|}{\sin x\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}.$$

13. В треугольнике ABC, таком, что $AB=BC=2\sqrt{5}$, $AC=\sqrt{5}$, проведены биссектриса AA_1, медиана BB_1 и высота CC_1. Найдите площадь треугольника, образованного пересечением прямых: а) AC, AA_1 и CC_1; б) AA_1, BB_1 и CC_1.

14. Найдите все пары a и b, при которых система уравнений

$$\begin{cases}x^2-y^2+a(x+y)=x-y+a,\\ x^2+y^2+bxy-1=0\end{cases}$$

имеет не менее пяти решений $(x;y)$.

Вступительное задание по физике

1. Скорость автомобиля на второй половине пути вдвое превышала его скорость на первой половине, поэтому на вторую половину пути он затратил на час меньше. Сколько времени занял весь путь?

2. Первую треть пути автомобиль проехал с постоянной скоростью v_1, а оставшуюся часть – с постоянной скоростью v_2. Найдите среднюю скорость автомобиля на всем пути.

3. Из двух полушарий, сделанных из разных материалов, склеили шар. Массы половинок отличаются в два раза. Шар плавает в воде, погрузившись ровно наполовину. Найдите плотность материала тяжелой половинки.

4. На равноплечих весах уравновешены два тела массой 1 кг каждое, сделанные из материалов с плотностями 2 г/см^3 и 4 г/см^3 соответственно. Оказалось, что, если тела полностью погрузить в воду, равновесие весов не нарушится.

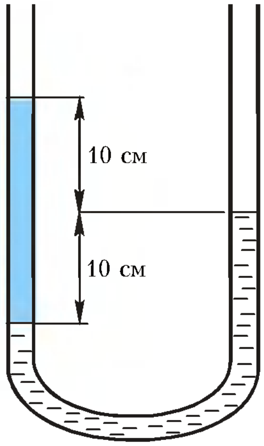


Рис. 1

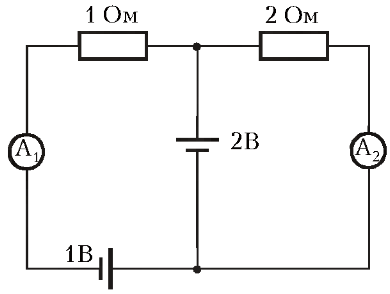


Рис. 2

Найдите объем полости в одном из тел, если известно, что другое тело сплошное.

5. На неравноплечих весах уравновешены два тела. Оказалось, что, если тела полностью погрузить в воду, равновесие весов не нарушится. Найдите отношение плотностей тел.

6. В литре воды содержится примерно $3 \cdot 10^{25}$ молекул. Оцените размер одной молекулы воды.

7. В U-образную трубку залиты две несмешивающиеся жидкости, как показано на рисунке 1. Пользуясь указанными на рисунке размерами, определите отношение плотностей этих жидкостей.

8. Внесенный с мороза в теплую комнату кусочек льда полностью растаял через 10 минут после начала таяния. Сколько времени он нагревался от −2 °С до −1 °С?

9. Найдите показания амперметров в схеме, изображенной на рисунке 2. Все элементы схемы считайте идеальными.

10. Камень, брошенный почти вертикально вверх со скоростью 50 м/с, упал на горизонтальную крышу сарая. Найдите высоту сарая, если время подъема камня до максимальной высоты на 1 секунду больше времени падения оттуда на крышу.

11. При каких значениях массы m показанная на рисунке 3 система будет находиться в равновесии? Известны: коэффициент трения $\mu = 0,5$, масса лежащего груза M = 4 кг, угол $\alpha = 30^\circ$.

12. Маленький шарик висит на нити длиной L. Во сколько раз изменится сила натяжения нити, если шарик отклонить в сторону и толкнуть так, чтобы он двигался по окружности в горизонтальной плоскости, совершая полный оборот за время T (конический маятник)?

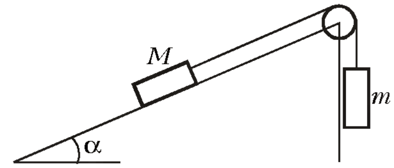


Рис. 3

13. Два пластилиновых шарика массами $2m$ и $3m$, скользившие по гладкому горизонтальному столу с перпендикулярными друг другу скоростями, равными $2v$ и v соответственно, в результате удара слиплись и дальше продолжали двигаться вместе. Найдите скорость образовавшегося комка пластилина.

14. В тепловом процессе объем идеального газа изменяется линейно с давлением по закону $V = \beta p$, где β – некоторая постоянная. Во сколько раз изменяется давление газа при уменьшении температуры от 400 К до 200 К?

15. В сосуде находится 4 г молекулярного водорода при температуре $T_1 = 300$ К и давлении $p_1 = 10^5$ Па. При повышении температуры до $T_2 = 3000$ К происходит частичная диссоциация молекул водорода, и давление возрастает в 15 раз. Какая часть молекул водорода диссоциировала на атомы?

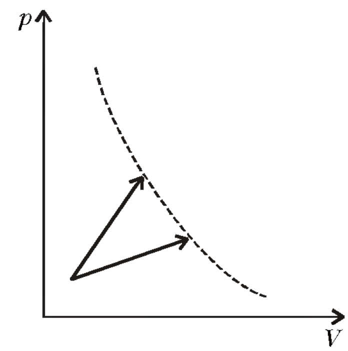


Рис. 4

16. С некоторым веществом провели два процесса, показанных на рисунке 4. Начальные состояния процессов совпадают. Конечные состояния процессов оказались на одной адиабате. В каком процессе к веществу подвели больше тепла?

17. В процессе расширения к одноатомному идеальному газу было подведено количество теплоты, в 4 раза превышающее величину его внутренней энергии в начальном состоянии. Во сколько раз увеличился объем газа, если в процессе расширения он менялся прямо пропорционально давлению ($V \sim p$)?

Новый прием в школы-интернаты при университетах

Специализированный учебно-научный центр (сокращенно – СУНЦ) при МГУ (школа имени академика А.Н.Колмогорова), а также СУНЦ НГУ, СУНЦ УрГУ и Академическая гимназия при СПбГУ объявляют набор учащихся в 10 классы (двухгодичное обучение) на физико-математический и химический потоки и в 11 классы (одногодичное обучение) на физико-математический поток. В рамках двухгодичного физико-математического потока выделяются компьютерно-информационный и биофизический классы (СУНЦ МГУ).

Зачисление в школу проводится на конкурсной основе по итогам двух туров. Первый тур – заочный письменный экзамен по математике, физике и химии. Успешно выдержавшие заочный экзамен приглашаются на второй, очный тур.

Ниже приводятся условия задач заочного вступительного экзамена. Работа должна быть выполнена в обычной ученической тетради, на обложке которой указываются фамилия, имя, отчество (полностью), желаемый профиль обучения, подробный домашний адрес с индексом, адрес и номер школы, класс.

Работу нужно отправить простой бандеролью на имя Приемной комиссии по одному из следующих адресов (обязательно вложите конверт с маркой, заполненный на ваш домашний адрес):

121357 Москва, Кременчугская ул.,11, СУНЦ МГУ (внимание: жители Москвы принимаются в школу без предоставления общежития, телефон для справок: 445-11-08);

199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/96, Академическая гимназия;

620137 Екатеринбург, ул. Голощекина, 30, СУНЦ УрГУ;

630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, СУНЦ НГУ (Олимпиадный комитет).

Срок отправки работ – *не позднее 10 марта 2003 года* (по почтовому штемпелю).

Вступительные экзамены второго, очного тура будут проводиться с 20 марта по 20 мая по регионам, 28 апреля – в СУНЦе МГУ для жителей Подмосковья и 11 мая – в СУНЦе МГУ для жителей Москвы.

Желаем успеха!

Вступительное задание заочного тура

Математика

Для поступающих в 10 класс

1. Существует ли выпуклый многоугольник, число диагоналей которого в 10 раз больше числа его сторон?

2. Найдите последнюю цифру десятичной записи числа

$$0^2 - 1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \ldots - 2001^2 + 2002^2 .$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^9 + 3x^3 = 2y^9 + 3y^3, \\ 3x^2 + x = y^2 + 1. \end{cases}$$

4. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = a$ и $BC = b$ окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD, касаются друг друга. Найдите AC.

5. В прямоугольном треугольнике ABC проведены биссектрисы BL и CM. Найдите острые углы треугольника ABC, если угол BLM равен 30°.

Для поступающих в 11 класс

1. Найдите последнюю цифру десятичной записи числа

$$2002^3 - 2001^3 + 2000^3 - \ldots + 2^3 - 1^3 .$$

2. Дан треугольник с периметром 7. Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек плоскости, которые лежат вне треугольника и удалены от его границы не более чем на 1.

3. При каких значениях a уравнения

$$ax^2 + \left(a^2 - 1\right)x + a = 0 \text{ и } \left(a^2 - 1\right)x^2 + ax + a = 0$$

имеют общий корень?

4. В параллелограмме $ABCD$ высоты BK и BL (точки K и L лежат на сторонах AD и CD) пересекают диагональ AC в точках M и N соответственно. Найдите $\frac{AB}{AD}$, если $\frac{AM}{NC} = \frac{4}{25}$, $\frac{AL}{AB} = \frac{5}{7}$.

5. Решите уравнение

$$\left(x^3 + x - 2\right)^3 = 4 - x^3 .$$

Физика

Для поступающих в 10 класс

1. Начальная скорость автомобиля равна нулю. Первую половину пути он движется с постоянным ускорением. На втором участке пути он движется с постоянной скоростью $v_0 = 18$ м/с, которой он достиг в конце первого участка. Найдите среднюю величину скорости автомобиля на всем пути.

2. Плитку, на которую действует сила тяжести P = 5 Н, прижимают к стене силой F = 12 Н, направленной горизонтально. Коэффициент трения скольжения плитки по стене $\mu = 0,5$. Найдите силу, действующую на плитку со стороны стены.

3. Шарик, подвешенный на нити, качается в вертикальной плоскости. Величина ускорения шарика в положении наибольшего отклонения нити от вертикали в два раза меньше величины ускорения в момент прохождения положения равновесия. Найдите угол наибольшего отклонения нити.

Для поступающих в 11 класс

1. На рисунке 1 изображен процесс $a-b$, проведенный с одним молем идеального газа. Параметры состояний $p_1 = p_0/2$, $p_2 = p_0$, $V_1 = V_0$, $V_2 = 2V_0$ связаны соотношением $p_oV_0 = \nu RT_0$, где $\nu = 1$ моль. Найдите максимальное значение температуры в этом процессе.

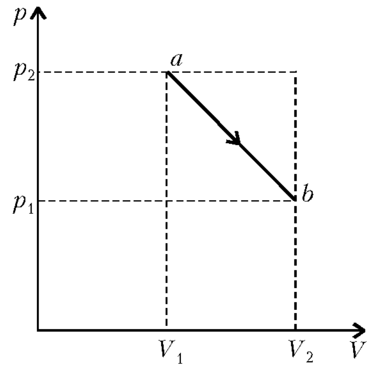


Рис. 1

2. Заряд равномерно распределен по окружности радиусом R, расположенной в плоскости xy с центром в начале координат. Потенциал поля в начале координат равен φ_0. Найдите работу, которую необходимо совершить, чтобы переместить точечный заряд q из начала кооординат в точку с координатами $x = y = 0$, $z = R$.

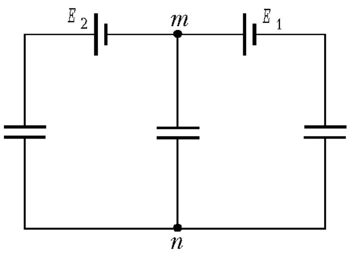


Рис. 2

3. В схеме на рисунке 2 емкости конденсаторов одинаковы, ЭДС батарей равны $E_1 = 6$ В и $E_2 = 3$ В. Найдите разность потенциалов точек m и n.

4. Рамка в форме квадрата $AKCD$, изготовленная из однородного провода, лежит на горизонтальной плоскости. Длина стороны рамки a = 10 см. К точкам A и C присоединяют провода, по которым проходит ток силой I = 1 А от точки C к точке A. Плоскость с рамкой помещают в однородное постоянное магнитное поле с индукцией $B = 10^{-2}$ Тл. Вектор магнитной индукции параллелен направленному отрезку DK. Найдите приращение силы нормального давления рамки на стол.

Химия

Для поступающих на химический поток

1. Предложите три способа получения селенита рубидия Rb_2SeO_3 из различных исходных веществ. Приведите уравнения соответствующих реакций.

2. Колба, заполненная хлороводородом при н.у., соединена трубкой с большой банкой с водой. Благодаря высокой растворимости хлороводорода вода полностью заняла колбу. Какова концентрация получившейся в колбе соляной кислоты: а) в моль/л; б) в % по массе? Изменением плотности раствора и объемом присоединенной к колбе трубки можно пренебречь.

3. Масса смеси кислорода и озона (озонированный кислород) в 9 раз больше массы того же объема гелия при тех же условиях. В каком объемном соотношении нужно смешать этот озонированный кислород с водородом для полного сгорания? Приведите уравнения реакций и соответствующие расчеты.

«Квант» для младших школьников

Задачи

(см. с.26)

1. *Ответ*: число ГУГ делится на 13.
Поскольку разность чисел УГУ и ГУГ

$$\text{УГУ} - \text{ГУГ} = 100\times\text{У} + 10\times\text{Г} + \text{У} - 100\times\text{Г} - 10\times\text{У} - \text{Г} = 91\times(\text{У} - \text{Г})$$

длится на 13, то из делимости на 13 числа УГУ следует делимость на 13 числа ГУГ.

2. *Ответ*: 3 уха.
Легко проверить, что если одноносое существо имеет меньше 3 ушей, то, пользуясь правилами инженера Пупкина, из него невозможно вывести монстра с 33 носами. Если же одноносое существо имеет 3 уха, то существо с 33 носами из него получить возможно. Ниже приводится схема вывода такого монстра:

$$\begin{array}{lcccccccccccccccccccccccc} \text{носы:} & 1 & & 2 & & 2 & & 3 & & 3 & & 5 & & 5 & & 9 & & 9 & & 17 & & 17 & & 33 \\ & & \to & & \to & & \to & & \to & & \to & & \to & & \to & & \to & & \to & & \to & & \to & \\ \text{уши:} & 3 & & 3 & & 4 & & 4 & & 6 & & 6 & & 10 & & 10 & & 18 & & 18 & & 34 & & 34 \end{array}$$

3. *Ответ*: другого такого числа не существует.
Покажем, что уравнение

$$\left|10^m - 2^n\right| = 2 \qquad (*)$$

имеет единственное решение $m = 1$, $n = 3$ в натуральных числах. Если $10^m \ge 2^n$, то из $(*)$ следует

$$2^m\cdot 5^m = 2^n + 2 = 2\cdot\left(2^{n-1}+1\right), \text{ или } 2^{m-1}\cdot 5^m = 2^{n-1}+1.$$

Поскольку в правой части последнего равенства при $n > 1$ стоит нечетное число, то $m = 1$ и, значит, $n = 3$.
Аналогично рассматривается случай $2^n > 10^m$.

4. Предположим противное – что любые два числа в клетках, имеющих общую сторону, различаются не более чем на 10^9. Рассмотрим квадрат со стороной $\left(10^9+1\right)$ клеток, в центре которого стоит число 1. Будем называть «ходом» переход от одной клетки к другой через общую сторону. Заметим, что от центральной клетки квадрата можно дойти до любой его клетки не более чем за 10^9 ходов (а именно, сделав не больше $5\cdot10^8$ ходов по вертикали и не больше $5\cdot10^8$ ходов по горизонтали). Так как числа в последовательно пройденных клетках различаются не больше чем на 10^9, то любое число в квадрате отличается от 1 не более чем на $10^9\times10^9 = 10^{18}$ и поэтому не превышает $\left(10^{18}+1\right)$. С другой стороны, в квадрате всего $\left(10^9+1\right)^2 = 10^{18}+2\cdot10^9+1$ чисел, а так как, по условию, все они различны (и притом все натуральные), то наибольшее из них не меньше $\left(10^{18}+2\cdot10^9+1\right)$. А это, очевидно, больше $\left(10^{18}+1\right)$. Противоречие!
Таким образом, наше предположение было неверным, и непременно найдутся два числа, различающиеся более чем на миллиард, что и требовалось доказать.

5. *Ответ*: обязательно.
25 вершин разбиваются на пять групп, каждая из которых представляет собой вершины некоторого правильного пятиугольника. Так как отмеченных точек 11, то найдется правильный пятиугольник, у которого отмечены не менее 3 вершин. Но всякие 3 вершины правильного пятиугольника являются вершинами некоторого равнобедренного треугольника.

Задачи

(см. «Квант» №5)

1. Искомый год рождения можно записать в виде $\overline{19АБ}$, где цифры $А$ и $Б$ таковы, что $А \le 4$, $Б$ нечетно, $А\cdot Б$ – квадрат. Если $А = 1$, то $Б = 1$ или $Б = 9$; если $А = 3$, то $Б = 3$; если $А = 4$, то $Б = 1$. Вариант $А = 2$ невозможен. Числа 1941, 1919, 1911 – составные, так как $1 + 9 + 4 + 1$ и $1 + 9 + 1 + 1$ делятся на 3, а 1919 делится на 19. Единственное оставшееся число 1933 удовлетворяет условию задачи.
Математик родился в 1933 году.

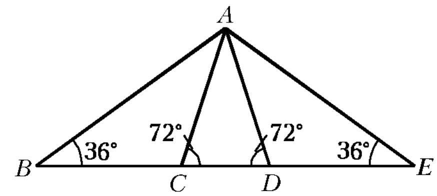


Рис. 1

2. Могут (см. рис.1). Треугольники BAC, BAD, BAE, CAD, CAE, DAE равнобедренные.

3. Пусть в начале прогулки a детей имели на своих ногах равное количество носков, b детей имели на одной своей ноге на 1 носок больше, чем на другой, а у c детей разность количеств носков на ногах была больше 1. После переодевания равное количество носков на ногах может возникнуть только у некоторой части детей из последней группы – обозначим количество таких детей c_1, так что $c = c_1 + c_2$, где c_2 – часть детей последней группы, которые после переодевания по-прежнему имеют разное количество носков.
Из условия задачи следуют равенства

$$5a = b + c, \qquad (1)$$

$$2c_1 = a + b + c_2. \qquad (2)$$

Прибавив к обеим частям равенства (2) по c_2, с учетом равеств $c = c_1 + c_2$ и (1) получаем $3c_1 = 6a$, или $c_1 = 2a$. Поскольку $c_1 \le c$, то из (1) следует $b = 5a - c \le 5a - c_1 = 3a$, т.е.

$$b \le 3a. \qquad (3)$$

Если бы выполнялось неравенство $b > a + c$, то в силу того, что $c \ge 2a$, было бы справедливо также неравенство $b > 3a$, что противоречит (3).
Итак, в начале прогулки не более половины детей имели на одной ноге ровно на один носок меньше, чем на другой.

4. Ответ на первый вопрос положителен: $88^2 = 7744$. Прийти к этому числу можно, например, так. Обозначим $A = \overline{xxyy}$. Имеем: $A = x\cdot11\cdot100 + y\cdot11 = \overline{x0y}\cdot11$. Поскольку A – полный квадрат, число $\overline{x0y}$ тоже делится на 11, и частное – опять полный квадрат: $\overline{x0y} = 11\cdot B^2$. Число B не может быть больше 9, иначе было бы $11\cdot B^2 \ge 1100$. Следовательно, число B однозначное. Перебирая различные цифры, находим единственное решение: $B = 8$, $x = 7$, $y = 4$.
Покажем, что число $C = \overline{xxxyyy} = \overline{x00y}\cdot111$ не может быть квадратом. Поскольку число 111 не делится на квадрат, то $\overline{x00y} = 111\cdot D^2$, где $9 \ge D \ge 1$. Если $D \ne 8$, то уже вторая справа цифра числа $111\cdot D^2$ отлична от нуля. Легко проверить, что значение $D = 8$ тоже не подходит.
Подумайте также, почему равенство $\overline{x00y} = 111\cdot z$ не может быть выполнено ни для какого натурального числа z.

5. Сумма внутренних углов двенадцатиугольника равна $180^\circ\cdot(12-2) = 1800^\circ$. С другой стороны, наибольший угол двенадцатиугольника ввиду его выпуклости не превышает 150°, поэтому сумма всех его внутренних углов не превышает $150^\circ\cdot12 = 1800^\circ$, причем наибольшее возможное значение 1800° достигается лишь в том случае, если все углы двенадцатиугольника равны 150°.

Калейдоскоп «Кванта»

1. Сложите правильный тетраэдр.

2. Положите спички «по циклу»: головку первой – на хвостик второй, головку второй – на хвостик третьей, головку третьей – на хвостик первой.

Рис. 2

3. Достаточно передвинуть куда-нибудь крайнюю спичку (например, положить ее рядом с другой крайней).

4. б) Две спички положите в углу стола, чтобы края его дали две другие стороны квадрата.

5. См. рис.2. **7.** См. рис.3. **8.** См. рис.4.

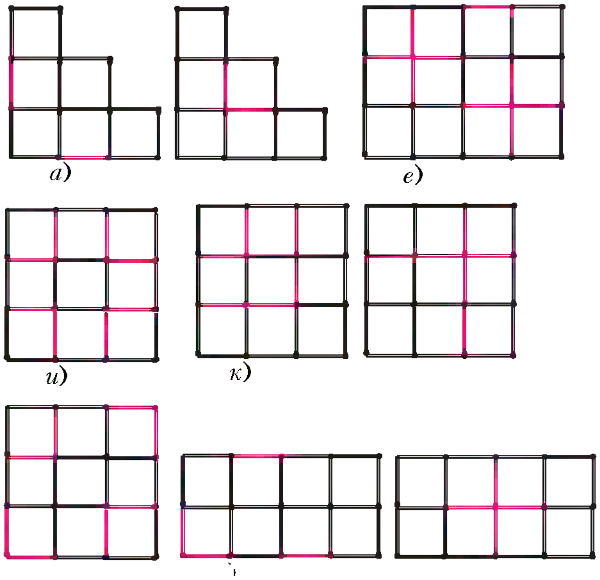


Рис. 3

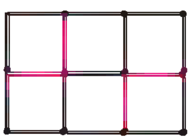


Рис. 4

Рис. 5

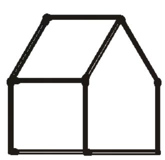


Рис. 6

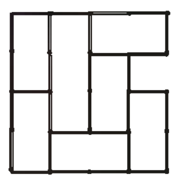


Рис. 7

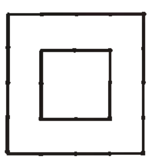


Рис. 8

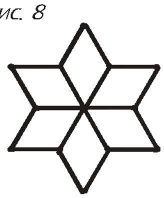


Рис. 9

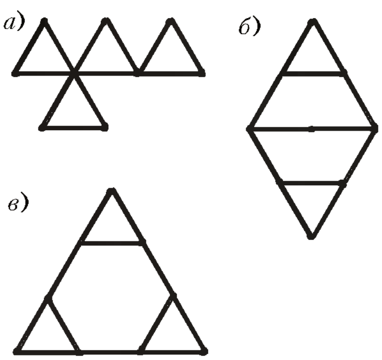


Рис. 10

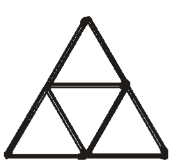


Рис. 11

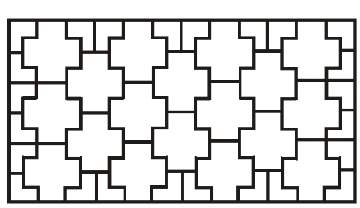


Рис. 12

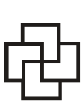


Рис. 13

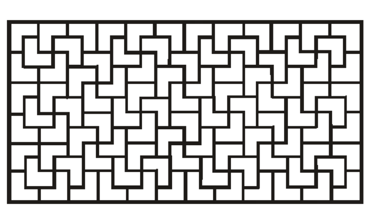


Рис. 14

11. См. рис.5. **12.** См. рис.6. **13.** См. рис.7. **14.** См. рис.8. **15.** См. рис.9. **16.** См. рис.10. **17.** См. рис.11.

20. 4000000. Рассмотрим рисунок 12, на котором показано, как данный прямоугольник разбить на двенадцатиугольники и «уголки» по краям. В каждом двенадцатиугольнике уберем несколько спичек так, чтобы получилась фигура, изображенная на рисунке 13. Получим красивый «коврик» (рис.14). Докажем, что нужно убрать не меньше 4000000 спичек. Как бы ни лежали спички, они разбивают прямоугольник на некоторое количество клетчатых фигур – компонент связности. Каждая компонента состоит по крайней мере из 3 клеток (иначе это прямоугольник), следовательно, всего компонент не более чем два миллиона. В каждой компоненте, состоящей из a клеток, убрано не менее $a-1$ спичек. (Ибо в связном графе из a вершин не менее $(a-1)$ ребер.) Поэтому всего убрано не менее $2000\cdot 3000-2000000=4000000$ спичек. Задача решена. Подумайте, какие прямоугольники можно разрезать на уголки так, чтобы в результате не образовалось никаких прямоугольников меньшего размера. А какое наименьшее количество единичных квадратиков нужно выломать в параллелепипеде $1000\times 2000\times 3000$ так, чтобы никакие из оставшихся не образовывали параллелепипед меньшего размера?

Оптические задачи на вступительных экзаменах

1. $\beta = 2\operatorname{arctg}\left(3\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right)\approx 0{,}3$ рад $\approx 18^\circ$.

2. $l=\dfrac{nF^2}{(n-1)(f+F)}=3$ см.

3. $f=-0{,}2$ м, при этом знак «минус» означает, что изображение комара находится ниже зеркала; $u=vf/d=1$ см/с.

4. $l=F/3=5$ см.

Монотонные функции в конкурсных задачах

1. а) 1; б) –1; в) 2; г) 10. **2.** а) 3; б) 2; в) 4.

3. а) Возрастает. *Указание.* Если $x_1>x_2>1$, то

$$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)-\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)=\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-1)}{x_1x_2}>0.$$

б) Убывает. *Указание.* $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$.

в) Убывает. *Указание.* $2^x-3^x=3^x\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^x-1\right)$. Первый множитель возрастает при $x>0$, а второй убывает и отрицателен.

г) Возрастает. д) Убывает. *Указание.* $\log_3 x-\log_2 x=$ $=\log_2 x(\log_3 2-1)$. е) Убывает. ж) Возрастает при $x>0$.

5. а) Возрастает при $x<-1$, убывает при $x>1$.

б) Убывает при $x<-1$ и при $x>1$.

в) Возрастает при $x\in \boldsymbol{R}$.

6. а) 2; б) $\sqrt{3}/2$; в) 3; г) $x\ge 2$; д) $x\ge 1$; е) $0<x<1$.

7. а) 1; б) 1; в) 4; г) 1; д) $-1\le x<\sqrt{2}/2$.

8. а) $-1/5$. *Указание.* Приведите уравнение к виду $f(u)=$ $=f(v)$, где $f(t)=t\left(2+\sqrt{t^2+3}\right)$, $u=2x+1$, $v=-3x$. Докажите, что функция $y=f(t)$ – возрастающая. б) $1/3$.

9. а) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}};\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$; $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}};-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$. *Указание.* Функция $x+\sin x$ – возрастающая.

б) (0; 0); $\left(\sqrt[7]{\dfrac{2}{3}};\sqrt[7]{\dfrac{32}{243}}\right)$. *Указание.* Перепишите первое уравнение в виде $x^5+x=t^5+t$, где $t=\sqrt[5]{y}$.

в) (2; 4). *Указание.* Из первого уравнения следует, что $x = \log_2 y$.

10. 1/2; 1; 3/2. *Указание.* Запишите уравнение в виде $2^t \log_3(t+2) = 2^u(u+2)$, где $t = (x-1)^2$, $u = 2|x-a|$. Из монотонности функции $2^t \log_3(t+2)$ при $t \geq 0$ следует что $t = u$. Осталось выяснить, при каких a уравнение $(x-1)^2 = 2|x-a|$ имеет ровно 3 корня.

11. 2. *Указание.* При $0 < a < 1$ неравенство приводится к виду $\log_3(u+1)\log_5(u^2+1) \geq 1$, где $u = \sqrt{x^2+ax+5}$, имеющему бесконечное число решений при любом a. При $a > 1$ имеем $\log_3(u+1)\log_5(u^2+1) \leq 1$, откуда $u \leq 2$. Неравенство же $\sqrt{x^2+ax+5} \leq 2$ имеет единственное решение лишь при $a = 2$.

13. а) $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right] \cup \left[2-\sqrt{5};\frac{1}{2}\right) \cup \left[2+\sqrt{5};+\infty\right)$;

б) $[1;2) \cup \left(2+\sqrt{5};6\right]$; в) $(-\infty;-11) \cup (3;+\infty)$;

г) $(-\infty;-1] \cup [4;6) \cup [8;+\infty)$; д) $(2;3) \cup [4;+\infty)$;

е) $\left[\frac{1}{2};1\right) \cup (1;+\infty)$; ж) $(-3;\ 7)$, $x \neq 2-2\sqrt{6}$, -2, 2, $2+2\sqrt{6}$.

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. πn , $n \in \mathbf{Z}$. **2.** $(-\infty;-6) \cup (0;3/7]$.

3. $(1/2;3/2)$. *Указание.* Выполните замену $u = \sqrt{y-x}$, $v = \sqrt{11x-y}$.

4. $\frac{7}{12}\sqrt[4]{\frac{10}{3}}$. *Указание.* Пусть $AD = a$, $BC = b$, L – точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$, O – центр окружности, MN – касательная к окружности в точке L (рис.15). Тогда $MN = \frac{2ab}{a+b}$, $OP^2 = R^2 = PN \cdot PD$, а высота трапеции $ABCD$ (из подобия треугольников BLC и ALD) равна $\frac{24}{7}R$. Осталось выразить площадь трапеции $ABCD$ через R и найти R.

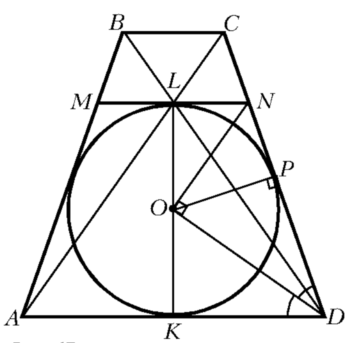


Рис. 15

5. 8; 3. *Указание.* Выписывая последние цифры степеней тройки и семерки, убеждаемся в том, что они периодически повторяются с периодом 4. С тем же периодом повторяются последние цифры сумм $3^n + 7^n$. Поскольку $2002 = 4 \cdot 500 + 2$, последняя цифра числа $3^{2002} + 7^{2002}$ такая же, как и при $n = 2$, т.е. 8.

Аналогично убеждаемся в том, что остатки от деления 3^n на 11 повторяются с периодом 5, а остатки от деления 7^n на 11 – с периодом 10.

6. 1) $SN/AN = SP/PD = 5/2$, $DQ/QC = AM/MB = 2/5$ (рис.16); 2) $38/305$; 3) $107\sqrt{34}/119\sqrt{35}$. *Указания.* 1) Секущая плоскость α параллельна плоскости SBC, а сечение пирамиды этой плоскостью – равнобокая трапеция $MNPQ$ (см. рис.16). Проведем в треугольние SBC отрезок B_1C_1, параллельный BC и равный NP. Трапеции $MNPQ$ и BB_1C_1C равны. Окружность, вписанная в трапецию BB_1C_1C , вписана в треугольник SBC. Пусть $SC = x$. Треугольники SB_1C_1 и SBC подобны с коэффициентом k, равным отношению периметров этих треугольников: $k = \frac{x-1}{x+1}$. В то же время $BC + B_1C_1 = \frac{24}{7}$, $B_1C_1 = k \cdot BC$. Отсюда $x = 6$, $k = \frac{5}{7}$.

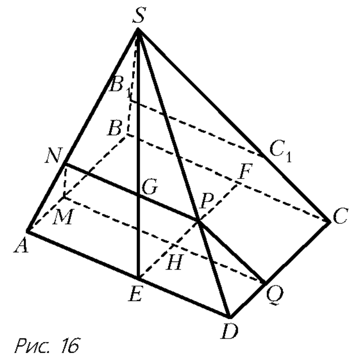


Рис. 16

2) Воспользуйтесь тем, что многогранник $ADQMNP$ можно представить как объединение четырехугольной и треугольной пирамид $AMQDP$ и $APMN$, объемы которых нетрудно выразить через объем V пирамиды $SABCD$, пользуясь результатом предыдущего пункта.

Вариант 2

1. 2/5. *Указание.* Перепишите уравнение так:

$$\arccos 2x = \operatorname{arctg}\frac{1-x}{2x},$$

а затем вычислите тангенс левой и правой частей.

2. (4; – 2). *Указание.* Из первого уравнения следует, что либо $x = y^2$, либо $x^3 + y^4 = 0$. Из второго уравнения следует, что второе равенство невозможно.

3. $(-\infty;-10) \cup (-5/2;0) \cup (5/2;25]$. **4.** $20\left(\sqrt{2}-1\right)$.

5. $-5 < a < 2 - 3\sqrt{3}/2$. *Указание.* Из первого уравнения получаем, что $y = x - 1$, причем $x < 3/2$. После подстановки во второе уравнение получаем, что

$$x^2 - 2ax + a^2 - a - 5 = 0.$$

Последнее уравнение должно иметь 2 корня, меньших 3/2.

6. 1) $28\sqrt{2}/3$; 2) 4 ; 3) $4\left(4-\sqrt{2}\right)/3$.

Вариант 3

1. $\frac{\pi}{6}(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$. **2.** $(4;9/2) \cup (5;6)$.

3. $a\left(\sqrt{3}+1\right)/\left(2\sqrt{2}\right)$. *Указание.* Докажите, что $\angle CAG = \pi/4$, а затем примените теорему синусов для треугольников AGB и CAG.

4. 1) 4/3; 2) arccos(23/27); 3) $\frac{4}{5}\sqrt{2}$. *Указания.* 1) Объем пирамиды $CMSK$ равен 1/4 объема $ADSC$, т.е. $\frac{1}{8}V$, где V – объем $SABCD$. 2) Проведите через точку M отрезок MK_1 ($K_1 \in AD$), параллельный SK, и примените теорему косинусов к треугольнику K_1MC. 3) Искомое расстояние d равно высоте треугольной пирамиды MK_1MC, проведенной из вершины K_1 , т.е. $d = 6V_{KK_1MC}/(MK_1 \cdot MC\sin\angle K_1MC)$.

5. 1) $a = 6$, $a = -1$; 2) $a \in (-\infty;-1) \cup \left\{\left(13-\sqrt{29}\right)/2\right\} \cup (6;+\infty)$. *Указание.* Выполните замену $t = x - 1$ и постройте на плоскости (t; a) графики $a = |t| - 6$ и $a = t^2 - 1$.

6. $\left(-\sqrt[3]{9};-\sqrt[3]{3};-2\right)$, $\left(-\sqrt[3]{3/2};-\sqrt[3]{9/2};-\sqrt[3]{1/2}\right)$. *Указание.* Сложите первое уравнение со вторым, второе – с третьим. Вычтите из первого уравнения удвоенное третье. Получится система

$$\begin{cases} x^3 - xyz + 3 = 0, \\ z^3 - xyz + 2 = 0, \\ y^3 - xyz - 3 = 0. \end{cases}$$

Запишите ее в виде

$$\begin{cases} x^3 = xyz - 3, \\ y^3 = xyz + 3, \\ z^3 = xyz - 2, \end{cases}$$

перемножьте уравнения этой системы и выполните замену $t = xyz$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. На рисунке 17 изображен момент соскальзывания шайбы с клина. Обозначим в этот момент скорость шайбы относительно клина через $\vec{v}_{\text{отн}}$, а скорость самого клина через $\vec{u}$. Очевидно, что скорость клина направлена горизонтально, а относительная скорость шайбы составляет угол α с горизонтом. Поскольку действующая на систему тел шайба – клин в горизонтальном направлении результирующая сила равна нулю, горизонтальная составляющая импульса этой системы остается неизменной:

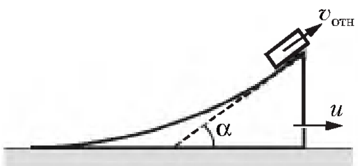


Рис. 17

$$mv_0 = 2mu + m\left(v_{\text{отн}}\cos\alpha + u\right).$$

По закону сохранения энергии,

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{2mu^2}{2} + \frac{mv_{\text{ш}}^2}{2},$$

где $v_{\text{ш}}$ – скорость шайбы в момент соскальзывания относительно неподвижной системы координат. В соответствии с теоремой косинусов,

$$v_{\text{ш}}^2 = v_{\text{отн}}^2 + u^2 + 2v_{\text{отн}}u\cos\alpha.$$

Из совместного решения полученных уравнений с учетом того, что $u = v_0/4$, найдем

$$\cos\alpha = 1/\sqrt{11}.$$

2. Пружинные весы измеряют вес тела. Первоначальное показание весов было

$$P_1 = m_{\text{в}}g + M_{\text{с}}g,$$

где $M_{\text{с}}$ – масса сосуда (массой марлевого мешочка пренебрегаем). Показание весов после растворения соли в воде стало

$$P_2 = m_{\text{в}}g + M_{\text{с}}g + m_{\text{с}}g + \rho V_{\text{п}}g.$$

Показания изменились на

$$\Delta P = P_2 - P_1.$$

Плотность соленого раствора равна

$$\rho = \frac{m_{\text{с}} + m_{\text{в}}}{\left(\dfrac{m_{\text{с}}}{\rho_{\text{с}}} + \dfrac{m_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}}}\right)}.$$

Отсюда находим объем примеси:

$$V_{\text{п}} = \frac{\Delta P}{\rho g} - \frac{m_{\text{в}}}{\rho}\frac{\rho_{\text{с}}}{\rho_{\text{в}}}\frac{(\rho - \rho_{\text{в}})}{(\rho_{\text{с}} - \rho)}.$$

3. Поскольку неизвестный элемент Z и резистор соединены параллельно, падения напряжения на них всегда равны, а их общий ток равен алгебраической сумме токов через каждый элемент. Поэтому для построения вольт-амперной характеристики неизвестного элемента Z нужно при фиксированных значениях напряжения U из заданной вольт-амперной характеристики (прямая *1* на рисунке 18) вычесть вольт-амперную характеристику резистора (прямая *2*). Полученная таким способом прямая *3* является вольт-амперной характеристикой неизвестного элемента.

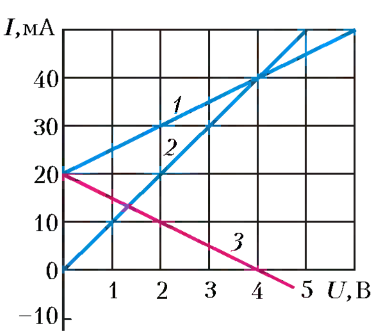


Рис. 18

4. Сначала найдем изображение источника в линзе. В соответствии с формулой линзы,

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F}.$$

При $d = 3F/5$ расстояние от изображения до линзы будет равно $f_1 = -3F/2$. Изображение в линзе S_1 является мнимым и совпадает с изображением в системе S' (рис.19). После прохождения линзы световые лучи преломляются на передней границе зеркала. Преломленные лучи кажутся исходящими из мнимого источника S_2. Расстояние этого источника до передней поверхности зеркала равно $AS_2 = n(L + f)$. Это соотношение справедливо для параксиальных лучей, т.е. для малых углов падения, которые мы и рассматриваем. После преломления лучи отражаются от зеркальной поверхности и кажутся исходящими из мнимого источника S_3. Расстояние от этого источника до зеркальной поверхности равно

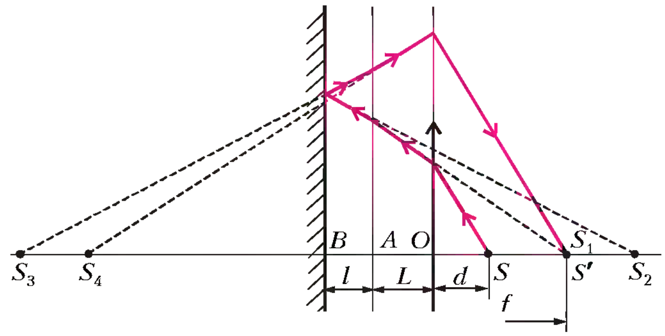


Рис. 19

$$S_3B = AB + AS_2 = l + n(L + f).$$

Зеркально отразившись, лучи снова преломляются на передней границе зеркала и кажутся исходящими из мнимого источника S_4, при этом $AS_4 = AS_3/n = 2l/n + L + f$.

После преломления лучи проходят линзу и собираются в точке S'. Расстояние до линзы равно

$$OS_4 = AS_4 + L = 2l/n + 2L + f.$$

По формуле линзы можно записать

$$\frac{1}{2l/n + 2L + f} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

откуда и найдем искомое расстояние:

$$L = 11 \text{ см}.$$

5. При вращении стержня в магнитном поле на свободные электроны стержня будет действовать сила Лоренца (рис.20). Под воздействием этой силы произойдет перераспределение зарядов, которое приведет к появлению в стержне электростатического поля, направленного вдоль стержня. Распределение напряженности электрического поля по радиусу диска $E(r)$ находим из условия равновесия свободных зарядов:

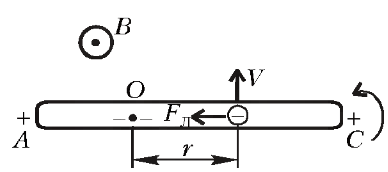


Рис. 20

$$qVB = qE(r).$$

Поскольку линейная скорость зарядов равна

$$V = \varphi' r = -\varphi_0\omega\sin\omega t\cdot r,$$

то

$$E(r) = -\varphi_0\omega Br\sin\omega t.$$

Разность потенциалов между концами стержня равна

$$U = \int_0^b E(r)\,dr - \int_0^a E(r)\,dr =$$

$$= -\int_0^b \varphi_0 B\omega r \sin\omega t \cdot dr + \int_0^a \varphi_0 B\omega r \sin\omega t \cdot dr =$$

$$= -\varphi_0 B\omega \frac{\left(b^2 - a^2\right)}{2} \sin\omega t .$$

Очевидно, что максимальная разность потенциалов между концами стержня будет

$$U_{\max} = \varphi_0 B\omega \frac{\left(b^2 - a^2\right)}{2} = 4{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ В}.$$

Вариант 2

1. 1) $F = (\rho_0 - \rho)Vg$; 2) $F = (\rho_0 - \rho)V(g + a\,\mathrm{ctg}\,\alpha)$.

2. $A_{12} = 3A/2$. **3.** $x = \dfrac{d}{\varepsilon\left(\dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S \mathcal{E}^2}{2dA} - 1\right)}$.

4. $\beta \approx 2\alpha$; $v_{\text{из}} = v\dfrac{F}{d - F}\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \approx \dfrac{1}{4}v$. **5.** $E_\gamma = W_0 v_o / c = 24{,}1$ кэВ .

Московский государственный институт электроники и математики

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\log_3 2$. **2.** $(-\infty; 1] \cup (2; 3]$. **3.** $\pi - \arcsin\dfrac{4}{5} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

4. 1) $\left[-\dfrac{1}{2}; 12\right)$; 2) $(-\infty; 1]$. *Указание.* Выполните замену $u = \sqrt{2x+1} \ge 0$ и выясните, при каких a уравнение $f(t) = a$ имеет корни.

5. 1. *Указание.* Числа x, y являются корнями уравнения $z^2 - (a+3)z + 5a - 1 = 0$, причем $D \ge 0$.

6. 10.

7. -1; 3; $19/6$. *Указание.* Выясните, при каких a прямая вида $y = ax$ пересекает график функции $x^2 - \left|x^2 - 3x\right| + \dfrac{1}{2}$ ровно в двух точках.

Вариант 2

1. $\left[-\dfrac{10}{3}; -\dfrac{7}{3}\right) \cup (2; 3]$. **2.** $(-\infty; -1] \cup (0; 1) \cup [2; +\infty)$.

3. 1; -15. **4.** $(-1)^n \arcsin\dfrac{1}{3} + \pi n,\ (-1)^{n+1} \arcsin\dfrac{2}{7} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

5. 1) $\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$. *Указание.* Рассматривая равенство как квадратное уравнение относительно y, потребуйте, чтобы $D \ge 0$.

2) $\left[\dfrac{3}{4}; 4\right]$. *Указание.* Пусть $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. С помощью формул понижения степени и вспомогательного аргумента приведите равенство к виду

$$r^2 = \frac{24}{5\cos(2\varphi + \arccos 3/5) + 11}.$$

6. $\dfrac{\sqrt{865}}{32}a$. **7.** $\pm\dfrac{20}{3}$. *Указание.* Левая часть неравенства достигает минимального значения 8 при $|a| \cdot |\sin x| = 4$ (в силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим). Правая часть неравенства достигает максимального значения 8 при $\cos x = \dfrac{4}{5}$.

ФИЗИКА

1. $A = mg\left(H + \dfrac{s^2}{16H}\right) = 178$ Дж. **2.** $l_{\max} = \dfrac{v_0^2(\mu_1 + \mu_2)}{2g\mu_1\mu_2} = 3$ м.

3. $F = \dfrac{mg}{2}\cos\alpha = 1250\cos\alpha$;

$$N = mg\sqrt{\left(\frac{\sin 2\alpha}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{2}\right)^2} \approx 2 \text{ кН}.$$

4. $p = \dfrac{3mRT}{4\pi r^3 \mathrm{M}} \approx 2{,}9$ МПа. **5.** $k = \dfrac{mR(\Delta T h - T\Delta h)}{\mathrm{M} h \Delta h (h + \Delta h)} \approx 0{,}9$ кН/м.

6. $A = \dfrac{CU^2}{n(n-1)} = 1{,}2$ мДж. **7.** $\mathcal{E} = U\dfrac{(k+1)(n-1)}{n-k-1} = 4$ В.

8. $\eta = 1 - \dfrac{cm\Delta t}{\tau P_1} \approx 0{,}99 = 99\%$. **9.** $l = 12\sqrt{\dfrac{qR}{B}} = 24$ см.

10. $f = \dfrac{dF}{2d - F} = 60$ см; $h' = h\dfrac{f}{d} = 6$ см.

Московский педагогический государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменнный экзамен

Вариант 1

1. $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$, $n, k \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Уравнение $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \ge 0. \end{cases}$$

2. $f_{\max} = f(0{,}5) = 13{,}5$; $f_{\min} = f\left(\sqrt[3]{1{,}5}\right) = 9\sqrt[3]{2/3} + 1$.

3. $(-12; -11] \cup [7; 14]$. **4.** 20.

5. $2/\sqrt{3}$. *Указание.* Рассмотрите сечение BB_1D_1D .

Вариант 2

1. $2\pi n$, $-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$, $n, k \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Уравнение $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \ge 0. \end{cases}$$

Решив уравнение, отберите корни, удовлетворяющие неравенству.

2. $f_{\max} = f(2) = 32$; $f_{\min} = f(4) = 22$.

3. $(0; 1) \cup \{2\} \cup (6; 7)$. *Указание.* Рассмотрите случаи $0 < 7 - x < 1$ и $7 - x > 1$.

4. 20 руб.

5. $2\sqrt{6}$. *Указание.* Рассмотрите сечение BB_1D_1D .

Вариант 3

1. $\dfrac{a^3\sqrt{\cos\alpha}}{6\sin(\alpha/2)}$.

2. $(2n+1)\pi/4$, $k\pi/3$, $n, k \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Перенесите $\cos 4x$ в правую часть и преобразуйте обе части уравнения в произведение.

3. 0. **4.** 2. *Указание.* Перейдите к логарифмам по основанию 2.

5. Функция строго убывает на $(-\infty; 7/8]$ и строго возрастает на $[7/8; +\infty]$. *Указание.* Так как $y < 0$ на $(-\infty; -1)$ и $(-1; 7/8)$, то на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[-1; 7/8]$ функция строго убывает.

Вариант 4

1. $2r^2(1 + \sin\alpha)/\sin\alpha$.

2. $2\pi k$, $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n, k \in \boldsymbol{Z}$. Ответ можно записать и по-другому: $\dfrac{\pi}{4} \pm \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. $\left(-\dfrac{3+\sqrt5}{2};-1\right)\cup\left(-\dfrac{3-\sqrt5}{2};0\right)$. **4.** $\sqrt{10}$, 10. **5.** $y=-2x$.

Вариант 5

1. $\sqrt3\operatorname{ctg}22{,}5^\circ=\sqrt3\left(\sqrt2+1\right)$. *Указание.* Котангенс угла $22{,}5^\circ$ можно вычислить по формуле $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

2. $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **3.** $[3;4{,}5]$.

4. 3; 27. *Указание.* Прологарифмируйте данные уравнение.

5. $f_{\max}=f(1)=2\dfrac18$, $f_{\min}=f(4)=1$.

Задачи устного экзамена

1. 10; 1000.
2. 110 (корни равны 10 и 100).
3. $[-5;-2)\cup[-1;+\infty)$.
4. $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. *Указание.* Рассмотрите случаи $a<0$, $a=0$, $a>0$.
5. $x^2+\dfrac{p\left(p^2-3q\right)}{q^2}x+\dfrac1q=0$. *Указание.* Воспользуйтесь формулами Виета.
6. 0. *Указание.* Дробь, стоящую в показателе степени, запишите в виде суммы двух слагаемых.
7. 0. *Указание.* Воспользуйтесь равенствами $1\pm\sin x=\left(\cos\dfrac x2\pm\sin\dfrac x2\right)^2$ и тем, что в первой четверти $\cos\dfrac x2\pm\pm\sin\dfrac x2>0$.
8, 9. См. рис.21, 22. **10.** 1/2. **11.** 3/5.

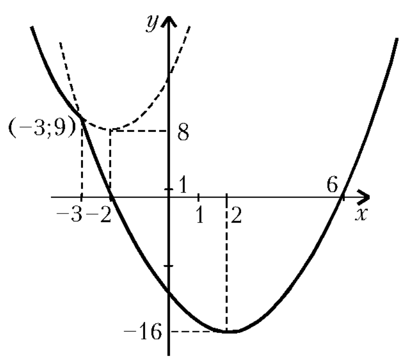


Рис. 21

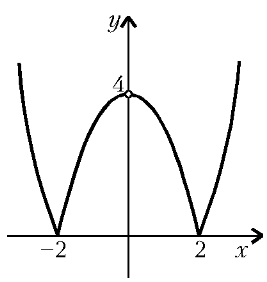


Рис. 22

12. 42. *Указание.* Если первая и вторая цифры числа равны x и y, то само число равно $10x+y$. *Замечание.* Задачу можно решить и без первого условия (тогда потребуется перебор делителей числа 252).
13. 1224. *Указание.* Площадь четверти параллелограмма можно найти по формуле Герона.
14. $125\sqrt3/12$. **15.** $\arcsin\dfrac17$. *Указание.* Обозначив образующую конуса через l, выразите высоту и радиус основания через l и α: $h=l\cos\alpha$, $r=l\sin\alpha$. Получившееся тригонометрическое уравнение удобно решать возведением его в квадрат.

ФИЗИКА

1. $t=3{,}4$ с. **2.** $v=16{,}9$ м/с. **3.** $h=12{,}5$ см.
4. $V=0{,}32$ л. **5.** $m=1{,}9$ г.
6. Увеличится на $8{,}3\cdot10^{-4}$ м/с^2.
7. $U_{\text{пр}}=0{,}21$ В; $R_{\text{пр}}=2{,}1$ Ом. **8.** $r=2{,}75\cdot10^{-4}$ м.
9. $\alpha=\arcsin0{,}68$. **10.** $v=624$ км/с.

Уравнения Пелля

(см. «Квант» №4)

41. Если $2x<3y$, то $y^2-y=x(3y-x-1)>x\left(\dfrac32y-1\right)$, откуда $x<\dfrac{y^2-y}{\frac32y-1}<y$.

42. а) Обозначим $\varphi_n=a$ и $\varphi_{n+1}=b$. Тогда $\varphi_{n+3}+\varphi_{n+5}==2\varphi_{n+3}+\varphi_{n+4}=\varphi_{n+2}+3\varphi_{n+3}=3\varphi_{n+1}+4\varphi_{n+2}=4a+7b$ и $\varphi_{n-1}+\varphi_{n+1}=2b-a=4a+7b-5(a+b)$.

в) Обозначим для краткости $\varphi_m=a$ и $\varphi_{m+1}=b$. Тогда $\varphi_{2m}+\varphi_{2m+2}-5\varphi_m\varphi_{m+1}=\varphi_{m+1}^2-\varphi_{m-1}^2+\varphi_{m+2}^2-\varphi_m^2-5\varphi_m\varphi_{m+1}==b^2-(b-a)^2+(a+b)^2-a^2-5ab=b^2-ab-a^2=(-1)^m$.

43. б) Допустим, что данное уравнение имеет решение $(x;y)$, тогда $4x^n=(y-x-1)(y+x+1)$. Сомножители в правой части имеют одинаковую четность и, следовательно, четны. Пусть $y-x-1=2a$, тогда $y+x+1=2(a+x+1)$, т.е. $x^n=a(a+x+1)$. Поскольку любой общий делитель чисел a и $a+x+1$ должен одновременно делить x^n и $x+1$, то числа a и $a+x+1$ взаимно просты, и потому существуют такие натуральные числа u и v, что $a=u^n$, $a+x+1=v^n$ и $x=uv$. Но тогда при $n\ge3$ имеем

$$uv+1=x+1=v^n-u^n=$$
$$=(v-u)\left(v^{n-1}+v^{n-2}u+\ldots+u^{n-1}\right)\ge v^2+vu+u^2.$$

Полученное противоречие показывает, что исходное уравнение не имеет решений в натуральных числах.

44. Примените утверждение теоремы 12 к положительному из чисел $x+y\sqrt d$ и $-\left(x+y\sqrt d\right)$.

45. $q=10+3\sqrt{11}$. Как легко подсчитать,

$$\frac{10+3\sqrt{11}+17}{2\sqrt{11}}<5.$$

Поэтому достаточно проверить значения $y=1,2,3,4$. (Впрочем, эту задачу можно было решить проще, заметив, что 17 не является квадратичным вычетом по модулю 11. Надо признаться, что число 17 возникло в результате опечатки: по замыслу было уравнение $x\ \ -11y^2=38$. У него тоже нет решений, ибо

$$\frac{10+3\sqrt{11}+38}{2\sqrt{11}}<9,$$

а значения $y=1,2,3,\ldots,8$ не подходят. В то же время $38\equiv4^2\pmod{11}$ и $11\equiv7^2\pmod{19}$, так что «наивное» доказательство с помощью сравнений не проходит.)

46. а) Обозначив среднее из 11 последовательных чисел буквой y, получаем уравнение $(y-5)^2+(y-4)^2+(y-3)^2+\ldots\ldots+(y+4)^2+(y+5)^2=11x^2$, т.е. $11x^2+110=11y^2$. Сократив на 11, получаем уравнение

$$x^2-11y^2=-10.$$

Его решения таковы:

$$x+y\sqrt{11}=\pm a\left(10+3\sqrt{11}\right)^n,$$

где $a\in\left\{1+\sqrt{11};23+7\sqrt{11}\right\}$, n – целое число.

б) Аналогично пункту а), получаем уравнение $x^2-23y^2==-11$. Его решения таковы:

$$x+y\sqrt{23}=\pm a\left(24+5\sqrt{23}\right)^n,$$

где $a\in\left\{9+2\sqrt{23};14+3\sqrt{23}\right\}$, n – целое число.

НАПЕЧАТАНО В 2002 ГОДУ

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Курьер образования
http://www.courier.com.ru

Vivos Voco!
http://vivovoco.nns.ru
(раздел «Из номера»)

Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.Д.Акатьева, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати
Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №