КВАНТ

МАЙ ИЮНЬ 2002 № 3

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

2 Уравнения Пелля. *В.Сендеров, А.Спивак*
10 Тепловые свойства воды. *С.Варламов*
13 Обратимость энергетических МГД-систем. *Б.Рыбин*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

18 Задачи М1816–М1825, Ф1823–Ф1832
20 Решения задач М1796–М1800, Ф1808–Ф1817

«КВАНТ» ДЛЯ «МЛАДШИХ» ШКОЛЬНИКОВ

26 Задачи
27 Ишаки в наследство. *И.Акулич*

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

29 Похожие движения. *Я.Смородинский*
30 Преобразование электрических цепей. *А.Зильберман*
35 Разрешающая способность измерительных приборов. *М.Лившиц*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

32 Явления переноса

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

37 Как найти сумму? *Л.Шибасов*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

44 Если вращается елочный шарик. *А.Стасенко*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

46 Арифметические текстовые задачи на конкурсном экзамене. *И.Шарыгин*
49 Колебательный контур. *В.Можаев*

ИНФОРМАЦИЯ

53 Заочная физическая школа при физическом факультете МГУ

ОЛИМПИАДЫ

54 VIII Российская олимпиада по астрономии и физике космоса

57 Ответы, указания, решения
Вниманию наших читателей! (25)
Нам пишут (42)
«Квант» улыбается (43)
Кроссворд (56)

НА ОБЛОЖКЕ

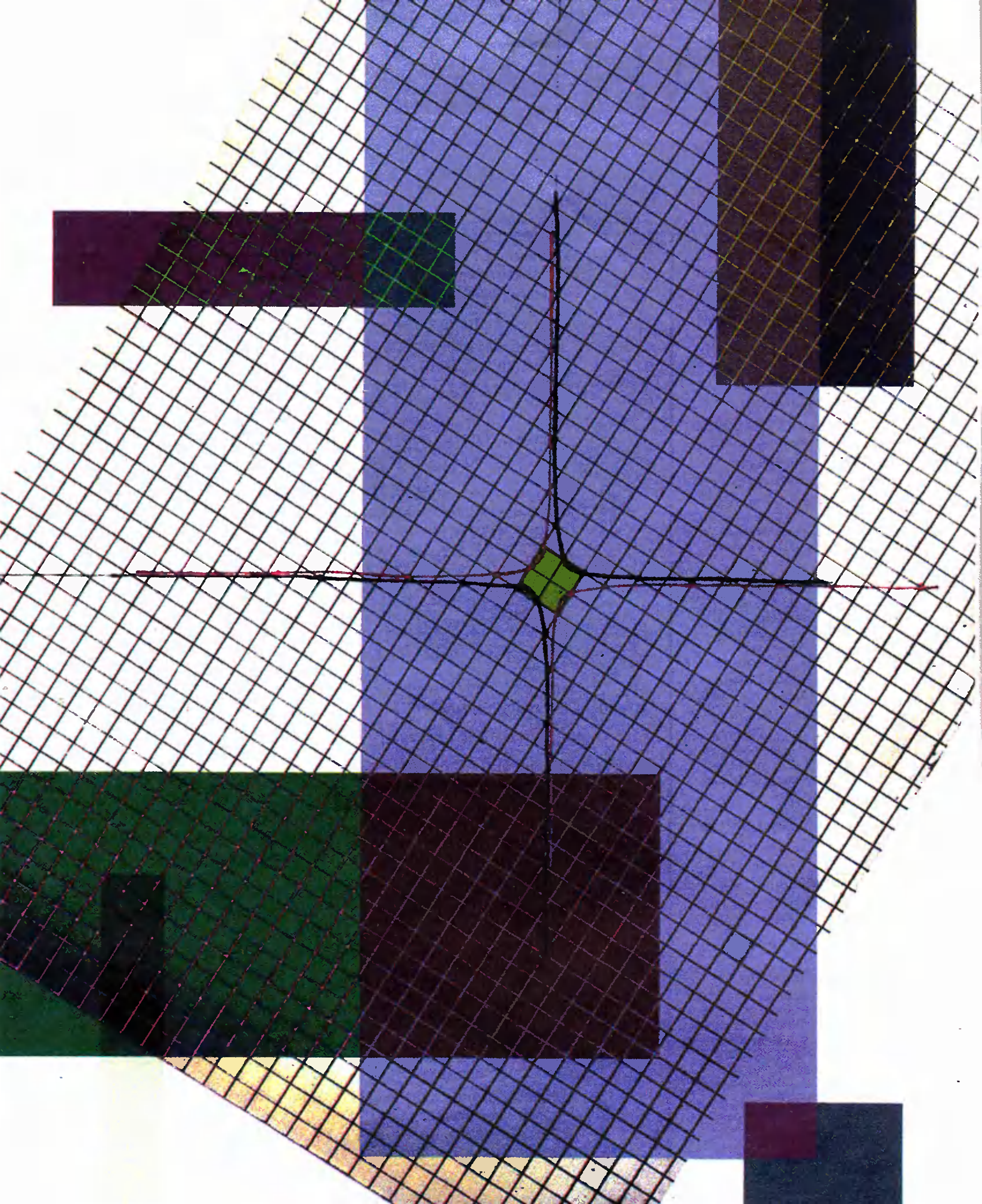
I *Иллюстрация к статье «Тепловые свойства воды»*
II *Кванты Интернета*
III *Шахматная страничка*
IV *Коллекция головоломок*

Компания Sakhalin Energy («Сахалинская Энергия») выписывает сто экземпляров журнала «Квант» для школ Сахалина.

Частный предприниматель Русинович В.В. выписывает пятьдесят экземпляров журнала «Квант» для школ Сахалина.

Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

Бюро Квантум



Уравнения Пелля

В.СЕНДЕРОВ, А.СПИВАК

Всякое уравнение, имеющее несколько переменных, подлежит исследованию теории чисел. Но не все они одинаково доступны исследованию и не все имеют одинаковую важность по приложениям своим. Теория чисел до сих пор ограничивается только рассмотрением уравнений, наиболее простых и в то же время имеющих наиболее важные приложения.

П.Л.Чебышёв

Напишем уравнение и спросим, имеет ли оно решение в целых числах, – получится задача. Скорее всего, если уравнение взято «просто так», эта задача будет очень трудной (или вообще не поддастся решению), а главное, не будет никому интересна. Но есть уравнения, знакомство с которыми неизбежно и в высшей степени полезно для всякого, кто интересуется математикой. Именно таковы уравнения Пелля:

$$x^2 - dy^2 = 1,$$

где d – натуральное число, не являющееся точным квадратом.

Почему «не являющееся точным квадратом»? Потому что левую часть уравнения

$$x^2 - a^2y^2 = 1,$$

где a – натуральное число, можно разложить на множители:

$$(x - ay)(x + ay) = 1.$$

Число 1 можно представить в виде произведения двух целых чисел двумя способами: $1 \cdot 1$ и $-1 \cdot (-1)$. В первом случае $x - ay = 1$ и $x + ay = 1$, откуда $x = 1$ и $y = 0$. Во втором случае $x - ay = -1$ и $x + ay = -1$, откуда $x = -1$ и $y = 0$.

Итак, уравнение $x^2 - dy^2 = 1$, где $d = a^2$, решить очень легко. Ничего особенно интересного в нем нет – мы всего лишь разложили на множители разность квадратов. Действительно поразительные эффекты обнаружатся, когда d не будет точным квадратом.

Уравнениями Пелля можно заниматься по-разному. Что-то может понять даже семиклассник. Интересны эти уравнения и для студента мехмата МГУ – например, очень важная для математики 10-я проблема Гильберта, поставленная в августе 1900-го года в докладе на Международном математическом конгрессе в Париже, была решена в 1970 году Ю. Матиясевичем при помощи уравнений типа уравнений Пелля.

В этой статье будет рассказано как о самых простых свойствах решений уравнений Пелля, так и о весьма серьезных и трудных теоремах и задачах, связанных с этими замечательными уравнениями.

Несколько примеров

Уравнение $x^2 - 2y^2 = \pm 1$

Рассмотрим уравнение

$$x^2 - 2y^2 = \pm 1.$$

Не удивляйтесь тому, что в правой части не 1, а ± 1. Поверьте, что так легче догадаться до закономерности, о которой вскоре пойдет речь.

Подбором найдем несколько решений: $(x; y) = (1; 0)$, $(1; 1)$ или $(3; 2)$. Продолжая вычисления, составим таблицу:

x	1	1	3	7	17	41	99	239
y	0	1	2	5	12	29	70	169
x^2-2y^2	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1

Если присмотреться, то можно заметить, что каждый следующий столбец получается из предыдущего по простому правилу: «новое» значение y есть сумма «старых» x и y, а «новое» значение x есть сумма «старого» и «нового» значений y. Точнее,

$$\begin{cases} X = x + 2y, \\ Y = x + y. \end{cases}$$

Конечно, таблицы с несколькими первыми решениями недостаточно для того, чтобы быть уверенным в справедливости этих формул для всего множества решений уравнения; мы должны доказать следующие утверждения.

Теорема 1. *Если* $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, *то пара чисел* $(X; Y) = (x + 2y; x + y)$ *удовлетворяет равенству* $X^2 - 2Y^2 = \mp 1$.

Следствие. *Уравнение* $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ *имеет бесконечно много решений в натуральных числах.*

Теорема 2. *Уравнение* $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ *не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из «тривиального» решения* $(1; 0)$ *при помощи правила* $(x; y) \to (x + 2y; x + y)$.

Доказать теорему 1 очень легко: достаточно подста-

Иллюстрация В.Хлебниковой

вить значения X и Y вместо x и y. А именно,

$$(x+2y)^2-2(x+y)^2=$$
$$=x^2+4xy+4y^2-2(x^2+2xy+y^2)=$$
$$=2y^2-x^2=-(x^2-2y^2).$$

Как видите, если $x^2-2y^2=\pm1$, то $X^2-2Y^2=\mp1$. Теорема 1 доказана, мы научились строить «новое» решение из «старого».

А вот доказательство теоремы 2 хотя и не очень сложно, но требует привлечения идеи, которая слишком важна, чтобы говорить о ней мимоходом. Поэтому мы займемся этим позже, а пока посмотрим, как для решения уравнения Пелля можно использовать иррациональные числа.

Упражнения

1. Рассмотрим последовательности $x_0=1$, $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=7$, $x_4=17$, … и $y_0=0$, $y_1=1$, $y_2=2$, $y_3=5$, $y_4=12$, …, заданные своими первыми членами $x_0=1$, $y_0=0$ и рекуррентными соотношениями $x_{n+1}=x_n+2y_n$ и $y_{n+1}=x_n+y_n$. Докажите, что $x_{n+2}=2x_{n+1}+x_n$ и $y_{n+2}=2y_{n+1}+y_n$.

2. По правилам новомодного танца надо делать либо шаг вперед, либо два шага вперед, либо два шага вперед и сразу же шаг назад. Сколькими способами танцор может за несколько таких па сдвинуться на 7 шагов от исходного рубежа?

Степени числа $1+\sqrt{2}$

Если d не является квадратом натурального числа, то в разложении

$$x^2-dy^2=\left(x-y\sqrt{d}\right)\left(x+y\sqrt{d}\right)$$

участвует иррациональное число $\sqrt{d}$. Казалось бы, мы решаем уравнения в целых числах; зачем нам иррациональности?

Но заметьте:

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^2=1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2},$$
$$\left(1+\sqrt{2}\right)^3=1+3\sqrt{2}+3\cdot2+2\sqrt{2}=7+5\sqrt{2}.$$

Узнали? Это же решения (3; 2) и (7; 5) уравнения $x^2-2y^2=\pm1$! Если вас не убедили эти два примера, вот еще один:

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^4=\left(1+\sqrt{2}\right)^3\left(1+\sqrt{2}\right)=$$
$$=\left(7+5\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)=17+12\sqrt{2}.$$

Впрочем, это всего лишь примеры. Чтобы получить доказательство, посмотрим, что происходит при переходе от n-й степени числа $1+\sqrt{2}$ к $(n+1)$-й. А именно, пусть

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n=x_n+y_n\sqrt{2},$$

где x_n и y_n – натуральные числа. Тогда

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1}=\left(1+\sqrt{2}\right)^n\left(1+\sqrt{2}\right)=\left(x_n+y_n\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)=$$
$$=x_n+y_n\sqrt{2}+x_n\sqrt{2}+2y_n=(x_n+2y_n)+(x_n+y_n)\sqrt{2},$$

так что $x_{n+1}=x_n+2y_n$ и $y_{n+1}=x_n+y_n$. Знакомые формулы, не правда ли?

Что будет, если возводить в степень не $1+\sqrt{2}$, а $1-\sqrt{2}$? Смотрите:

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^2=3-2\sqrt{2},$$
$$\left(1-\sqrt{2}\right)^3=7-5\sqrt{2},$$
$$\left(1-\sqrt{2}\right)^4=17-12\sqrt{2},$$

и вообще,

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^n=x_n-y_n\sqrt{2}.$$

Это легко доказать по индукции:

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}=\left(1-\sqrt{2}\right)^n\left(1-\sqrt{2}\right)=\left(x_n-y_n\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)=$$
$$=x_n-y_n\sqrt{2}-x_n\sqrt{2}+2y_n=(x_n+2y_n)-(x_n+y_n)\sqrt{2}.$$

А можно обойтись и без индукции, заметив, что при возведении числа $1+\sqrt{2}$ в степень мы используем равенство $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$; но число $\left(-\sqrt{2}\right)^2$ тоже равно 2.

Подобные соображения в алгебре используют часто, есть даже термин: *сопряженные числа*. В полной общности это важное понятие нам не понадобится. Поэтому пока просто скажем, что для каждого числа вида $a+b\sqrt{2}$, где a, b – рациональные числа, сопряженным числом называют $a-b\sqrt{2}$. Если вы знаете, что такое комплексные числа, и помните, что для любого комплексного числа $a+bi$ сопряженное – это $a-bi$, не удивляйтесь использованию одного и того же слова для разных целей: если бы мы подробно рассказали о сопряженных числах, то все стало бы абсолютно ясно. Но это, к сожалению, слишком отвлекло бы нас от основной темы.

Тем не менее, для нас важно следующее свойство: *сопряженное к сумме (разности, произведению, частному) двух чисел равно сумме (разности, произведению, частному) сопряженных к ним*. Например, вот как выглядит это для сложения:

$$(a+c)-(b+d)\sqrt{2}=\left(a-b\sqrt{2}\right)+\left(c-d\sqrt{2}\right).$$

Чуть больших усилий потребует от нас проверка этого свойства для умножения.[1] Прежде всего вычислим произведение

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)\left(c+d\sqrt{2}\right)=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}.$$

Значит, сопряженное к произведению равно $(ac+2bd)-(ad+bc)\sqrt{2}$. Осталось вычислить произведение сопряженных:

$$\left(a-b\sqrt{2}\right)\left(c-d\sqrt{2}\right)=(ac+2bd)-(ad+bc)\sqrt{2}.$$

Как видите, результат получился тот же самый.

Отображение $a+b\sqrt{2}\mapsto a-b\sqrt{2}$ называют *автоморфизмом* поля $\mathbf{Q}\left[\sqrt{2}\right]$. А произведение

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)\left(a-b\sqrt{2}\right)=a^2-2b^2$$

[1] *Строго говоря, надо бы еще разобраться с разностью и частным, но не будем тратить на это силы: при желании вы легко сделаете это самостоятельно.*

называют *нормой* числа $a+b\sqrt{2}$. Очень многое из того, что мы расскажем об уравнениях Пелля, можно перенести на случай так называемого норменного уравнения в полях алгебраических чисел. Но мы слишком увлеклись. Порекомендовав заинтересованному читателю когда-нибудь изучить «Теорию чисел» З.И.Боревича и И.Р.Шафаревича, вернемся к нашим делам.

Упражнение 3. Пусть a, b – целые числа, d – натуральное число, не являющееся квадратом, $x+y\sqrt{d}=\dfrac{1}{a+b\sqrt{d}}$. Докажите, что числа x и y целые в том и только том случае, когда $a^2-db^2=\pm 1$.

Сложив равенства

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{2}$$

и

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^n = x_n - y_n\sqrt{2}$$

и поделив на 2, находим

$$x_n = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2}.$$

А если не сложить, а вычесть, то получим

$$y_n = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}.$$

Это и есть не рекуррентные (когда каждую следующую пару получаем из предыдущей), а явные формулы решений уравнения $x^2-2y^2=\pm 1$ в натуральных числах. Заметьте: натуральные x_n и y_n получаются из формул, в которые входит иррациональное число $\sqrt{2}$!

Не каждому читателю, по себе знаем, легко привыкнуть пользоваться иррациональными числами для решения уравнений в целых числах. Поэтому мы вернемся к таким рассмотрениям чуть позже, а пока продолжим рассмотрение примеров.

Упражнения

4. а) Докажите равенства $x_{2n}=2x_n^2-(-1)^n$ и $y_{2n}=2x_ny_n$. б) Если d – натуральное число, не являющееся квадратом, а z и t – натуральные числа, удовлетворяющие равенству $z^2-dt^2=1$, то натуральные числа a_n и b_n, определенные формулой $a_n+b_n\sqrt{d}=\left(z+t\sqrt{d}\right)^n$, обладают тем свойством, что $a_{2n}=2a_n^2-1$ и $b_{2n}=2a_nb_n$. Докажите это.

5. а) Для любого натурального n число $\left(1+\sqrt{2}\right)^n$ представимо в виде $\sqrt{k}+\sqrt{k+1}$, где k – натуральное число. Докажите это. б) (М1522) Для любых натуральных m, d, n существует такое натуральное k, что $\left(\sqrt{m}+\sqrt{m+d}\right)^n = \sqrt{k}+\sqrt{k+d^n}$. Докажите это. в) Пусть m и n – натуральные числа, $n>1$. Докажите, что для некоторого натурального числа k имеем $\left(\dfrac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}\right)^m=\dfrac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$.

6. Существуют ли такие рациональные числа a, b, c, d, что $\left(a+b\sqrt{2}\right)^2+\left(c+d\sqrt{2}\right)^2=7+5\sqrt{2}$?

7(М874)**.** Пусть m и n – натуральные числа. Докажите, что а) $\left(5+3\sqrt{2}\right)^m \ne \left(3+5\sqrt{2}\right)^n$; б*) $\left(a+b\sqrt{d}\right)^m \ne \left(b+a\sqrt{d}\right)^n$, где a, b и d – натуральные числа, $a\ne b$ и число d не является точным квадратом.

8. Докажите следующие утверждения.

а) (М352) Число $\left[\left(45+\sqrt{1975}\right)^{30}\right]$ нечетно.

б) Первые 1000 цифр после запятой десятичной записи числа $\left(6+\sqrt{35}\right)^{1979}$ – девятки.

в) Первые 999 цифр после запятой десятичной записи числа $\left(6+\sqrt{37}\right)^{999}$ – нули.

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right\}=1$.

д) Перед запятой в десятичной записи числа $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{2000}$ стоит цифра 1, а после запятой – не менее 666 девяток. *Указание.* Для любого целого неотрицательного n обозначьте $a_n=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2n}+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2n}$ и докажите равенство $a_{n+2}=10a_{n+1}-a_n$.

(Пункт б) предлагали в соответствующем году самым сильным абитуриентам мехмата МГУ на устном экзамене. Пункт в) предлагали в 1965 году на конкурсе ВМШ при мехмате МГУ. Пункт г) предлагали на студенческой олимпиаде 1977 года.)

9* (М520)**.** Рассмотрим последовательность чисел $x_n=\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^n$. Каждое из них можно привести к виду $x_n=q_n+r_n\sqrt{2}+s_n\sqrt{3}+t_n\sqrt{6}$, где q_n, r_n, s_n, t_n – целые числа. Найдите пределы $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r_n}{q_n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{s_n}{q_n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{t_n}{q_n}$.

Уравнение $x^2+(x+1)^2=y^2$

Прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5 обладает тем свойством, что один из его катетов на 1 длиннее другого. Много ли еще таких треугольников, точнее, много ли решений в натуральных числах имеет уравнение $x^2+(x+1)^2=y^2$? Чтобы ответить на этот вопрос, раскроем скобки и приведем подобные:

$$2x^2+2x+1=y^2.$$

Теперь, домножив обе части на 2, выделим полный квадрат:

$$(2x+1)^2+1=2y^2.$$

Обозначив $z=2x+1$, получим уравнение

$$z^2-2y^2=-1.$$

Любое удовлетворяющее последнему уравнению число z нечетно. Поэтому мы свели задачу к уравнению $z^2-2y^2=-1$, где y, z – натуральные числа, причем $z>1$.

Как мы помним, если $z^2-2y^2=-1$, то

$$(z+2y)^2-2(z+y)^2=1.$$

В правой части теперь находится 1, а не −1. Мы умеем переходить от 1 к −1: для любого решения $(a;\ b)$ уравнения $a^2-2b^2=1$ выполнено равенство

$$(a+2b)^2-2(a+b)^2=-1.$$

Следовательно, из любой пары натуральных чисел $(z;\ y)$, удовлетворяющей равенству $z^2-2y^2=-1$, мы можем получить новую пару:

$$Z = (z+2y) + 2(z+y) = 3z + 4y,$$
$$Y = (z+2y) + (z+y) = 2z + 3y,$$

удовлетворяющую равенству $Z^2 - 2Y^2 = -1$. Давайте проверим это:

$$(3z+4y)^2 - 2(2z+3y)^2 = 9z^2 + 24zy + 16y^2 - $$
$$- 2\left(4z^2 + 12zy + 9y^2\right) = z^2 - 2y^2.$$

(Никакой логической необходимости в последней проверке нет. Но, согласитесь, приятно убедиться, что мы не ошиблись в вычислениях.)

Упражнения

10. а) Найдите некоторые три решения в натуральных числах уравнения $x^2 + (x+1)^2 = y^2$. б) Придумайте такие натуральные числа a, b, c, d, e, f, что для всякого решения x, y уравнения $x^2 + (x+1)^2 = y^2$ верно равенство $(ax+by+c)^2 + (ax+by+c+1)^2 = (dx+ey+f)^2$.

11. Существует бесконечно много различных прямоугольных треугольников, каждый из которых обладает следующими свойствами: длины сторон – целые числа, длина гипотенузы – квадрат целого числа, а один из катетов на единицу короче гипотенузы. Докажите это.

Уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$

При помощи многократно примененного перехода $(x;y) \to (3x+4y; 2x+3y)$ из решения (1; 0) получаются решения (3; 2), (17; 12), (99; 70), ... уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$. Например,

$$99 = 3 \cdot 17 + 4 \cdot 12,$$
$$70 = 2 \cdot 17 + 3 \cdot 12.$$

Таким образом, уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$, как и уравнение $x^2 - 2y^2 = -1$, имеет бесконечно много решений в натуральных числах. Если бы мы уже доказали теорему 2, то могли бы утверждать, что эти уравнения не имеют никаких других решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из «начального» решения $(x;y) = (1;0)$ или $(1;1)$ при помощи правила $(x;y) \to (3x+4y; 2x+3y)$. Но пока теорема 2 не доказана, торопиться с этим не стоит.

Упражнения

12. Существует ли такой многочлен второй степени f, что среди его значений $f(n)$, где n – натуральное число, имеется бесконечно много квадратов натуральных чисел, а сам многочлен f не представим в виде $f = g^2$ ни для какого многочлена g?

13. Рассмотрим последовательности $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 17$, $x_3 = 99$, ... и $y_0 = 0$, $y_1 = 2$, $y_2 = 12$, $y_3 = 70$, ..., заданные своими начальными членами $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ и рекуррентными соотношениями $x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$, $y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$. Существуют ли такие числа a и b, что для любого натурального n верны равенства $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$ и $y_{n+1} = ay_n + by_{n-1}$?

Уравнение $x^2 - 2y^2 = 7$

Правило $(x;y) \to (3x+4y; 2x+3y)$ позволяет из одного решения уравнения $x^2 - 2y^2 = 7$ получить другое решение. Так, из решения $(x;y) = (3;1)$ получаем $(3\cdot 3 + 4\cdot 1; 2\cdot 3 + 3\cdot 1) = (13;9)$, из которого получаем $(3\cdot 13 + 4\cdot 9; 2\cdot 13 + 3\cdot 9) = (75;53)$, из которого можно получить еще одно решение, и так далее.

Привычная ситуация, скажете вы? Решения уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$ получались из «начального» решения $(1;0)$ при помощи этого же правила $(x;y) \to (3x+4y; 2x+3y)$, так что ничего нового нет? Не торопитесь:

$$5^2 - 2\cdot 3^2 = 7.$$

Решение $(5;3)$ не входит в цепочку

$$(3;1) \to (13;9) \to (75;53) \to \ldots,$$

а порождает свою цепочку:

$$(5;3) \to (3\cdot 5 + 4\cdot 3; 2\cdot 5 + 3\cdot 3) =$$
$$= (27;19) \to (3\cdot 27 + 4\cdot 19; 2\cdot 27 + 3\cdot 19) =$$
$$= (157;111) \to \ldots$$

Других цепочек нет. Точнее говоря, верна следующая теорема.

Теорема 3. *Уравнение $x^2 - 2y^2 = 7$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из одного из двух «начальных» решений* (3; 1) *и* (5; 3) *при помощи правила $(x;y) \to (3x + 4y; 2x+3y)$.*

Доказательство примерно такое же, как и доказательство теоремы 2. Поэтому мы отложим его на будущее, а пока продолжим рассмотрение примеров.

Уравнение $x^2 - 3y^2 = \pm 1$

Пара $(x;y) = (1;0)$ удовлетворяет любому уравнению $x^2 - dy^2 = 1$. Подбором легко найти решение $x = 2$, $y = 1$ уравнения

$$x^2 - 3y^2 = 1.$$

Можно найти и решение $(x;y) = (7;4)$, а затем и $(26;15)$. Возможны и дальнейшие вычисления (особенно если есть калькулятор и готовность к продолжительному и не очень разумному труду). Они приводят к решению $(97;56)$.

Здесь явно пора остановиться и подумать. Мы не нашли ни одного решения уравнения

$$x^2 - 3y^2 = -1.$$

И не потому, что плохо искали, а потому, что их нет. В самом деле, рассмотрим остаток от деления на 3 левой части уравнения $x^2 - 3y^2 = -1$. Поскольку $3y^2$ делится на 3, искомый остаток совпадает с остатком от деления x^2 на 3. Число x можно представить одной из трех формул: $x = 3k$ (если x делится на 3), $x = 3k+1$ (если x при делении на 3 дает остаток 1) или, наконец, $x = 3k+2$ (если остаток равен 2). При этом $x^2 = 9k^2$, $9k^2 + 6k + 1$ или $9k^2 + 12k + 4$. Остаток от деления на 3 в первом случае равен 0, а в двух других случаях остаток равен 1.

Итак, левая часть уравнения $x^2 - 3y^2 = -1$ при делении на 3 дает остаток 0 или 1, а правая – остаток 2. Мы доказали, что уравнение $x^2 - 3y^2 = -1$ не имеет решений в целых числах.

Упражнение 14. Может ли сумма квадратов а) трех; б) четырех; в) пяти; г) шести; д) семи; е) восьми; ж) девяти; з) десяти; и) двенадцати последовательных целых чисел быть квадратом целого числа?

Уравнение $x^2 - 3y^2 = 1$

Уравнение $x^2 - 3y^2 = 1$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах. Чтобы доказать это, мы, как и в теореме 1, укажем формулы, которые из решения $(x; y)$ строят новое решение $(X; Y)$. А именно, пару $(1; 0)$ эти формулы преобразуют в $(2; 1)$, пару $(2; 1)$ – в $(7; 4)$, которую, в свою очередь, они преобразуют в $(26; 15)$. Следующая пара, как помните, $(97; 56)$.

Что же это за формулы? Немного терпения и удачи, и вы заметите, что $97 = 2 \cdot 26 + 3 \cdot 15$ и $56 = 26 + 2 \cdot 15$.

Впрочем, можно получить формулу $(x; y) \to (2x + 3y; x + 2y)$ и более «научным» способом, если использовать иррациональности. Смотрите:

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3},$$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^3 = 8 + 12\sqrt{3} + 18 + 3\sqrt{3} = 26 + 15\sqrt{3}.$$

Мы получили решения $(7; 4)$ и $(26; 15)$ уравнения $x^2 - 3y^2 = 1$.

Если

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n = x + y\sqrt{3},$$

то

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1} = \left(x + y\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right) = \\ = (2x + 3y) + (x + 2y)\sqrt{3},$$

что и дает нужную нам формулу.

Вообще, давайте равенство

$$2^2 - 3 = 1$$

запишем в виде

$$\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right) = 1,$$

а затем возведем обе части в n-ю степень:

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n\left(2-\sqrt{3}\right)^n = 1.$$

Обозначив через x_n и y_n такие натуральные числа, что

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{3},$$

получим, заменив знаки перед $\sqrt{3}$, равенство

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^n = x_n - y_n\sqrt{3}.$$

(Переход к сопряженным числам законен по той же причине, что и для $\sqrt{2}$.) Следовательно,

$$1 = \left(2+\sqrt{3}\right)^n\left(2-\sqrt{3}\right)^n = \left(x_n + y_n\sqrt{3}\right)\left(x_n - y_n\sqrt{3}\right) = x_n^2 - 3y_n^2.$$

Значит, пара

$$(x_n; y_n) = \left(\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2}; \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2\sqrt{3}}\right)$$

– решение уравнения $x^2 - 3y^2 = 1$. Других решений в натуральных числах, как следует из сформулированной ниже теоремы 5, у этого уравнения нет.

Теорема 4. *Если $x^2 - 3y^2 = 1$, то пара чисел $(X; Y) = (2x + 3y; x + 2y)$ удовлетворяет равенству $X^2 - 3Y^2 = 1$.*

Теорема 5. *Уравнение $x^2 - 3y^2 = 1$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из «тривиального» решения $(1; 0)$ при помощи правила $(x; y) \to (2x + 3y; x + 2y)$.*

Доказательство теоремы 5 отложим на будущее, а теорему 4 докажем:

$$(2x + 3y)^2 - 3(x + 2y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2 - \\ - 3\left(x^2 + 4xy + 4y^2\right) = x^2 - 3y^2 = 1.$$

Фокус вновь удался. Интересно, что мы будем делать, когда d будет не таким маленьким и догадаться до правила, которое «размножает» решения, будет сложно? Да и всегда ли такое правило существует? Не будем пока отвечать на эти законные вопросы. Подождите – вскоре и это, и многое другое прояснится.

Упражнения

15. Докажите следующие утверждения.

а) Уравнение $(x + 1)^3 - x^3 = y^2$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

б) (М960) Если квадрат некоторого натурального числа n представим в виде разности кубов последовательных целых чисел, то число n есть сумма квадратов двух последовательных целых чисел.

в) Уравнение $(x + 2)^3 - x^3 = y^2$ не имеет решений в целых числах.

16. Если натуральные числа k, m и n удовлетворяют равенству $m + n\sqrt{3} = \left(2+\sqrt{3}\right)^k$, где k а) нечетно; б) четно, то число а) $\sqrt{m-1}$; б) $\sqrt{(m+1)/2}$ целое. Докажите это.

17. а) Пусть p – простое число и $x^2 - py^2 = 1$, где x, y – натуральные числа. Докажите, что если x (не)четно, то одно из чисел $x - 1$ или $x + 1$ является (удвоенным) квадратом.

б) Существуют ли такие натуральные числа x, y, d, что $x^2 - dy^2 = 1$ и ни одно из чисел $x - 1$ и $x + 1$ не является ни квадратом, ни удвоенным квадратом?

18. Пусть n – целое неотрицательное число. Докажите, что число $\left[\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n+1}\right]$ делится на 2^{n+1} и не делится на 2^{n+2}.

Гиперболы и решетки

Мы уже долго занимаемся алгеброй и арифметикой. Наверное, стоит чуть отвлечься на геометрию – там тоже встречаются интересные для нас явления. В «Задачнике «Кванта» недавно опубликована следующая задача Н.Осипова.

М1775. а) *Существует ли квадрат, все вершины и все середины сторон которого лежат на гиперболах $xy = \pm 1$?*

б) *Докажите, что существует бесконечно много параллелограммов, одна из вершин каждого из которых – начало координат, две другие лежат на гиперболе $xy = 1$, а четвертая – на гиперболе $xy = -1$.*

в) *Докажите, что площадь любого такого параллелограмма равна $\sqrt{5}$.*

г) *Рассмотрим для некоторого такого параллелограмма OABC порожденную им решетку, т.е. множество таких точек P, что* $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OC}$*, где m, n – целые числа. Докажите, что внутренность «креста», ограниченного гиперболами* $xy = \pm 1$*, содержит лишь одну точку этой решетки – начало координат.*

В авторском варианте задача имела продолжение: *а на самих гиперболах* $xy = \pm 1$ *лежит бесконечно много точек решетки*! Редакция вычеркнула это, убоявшись, что задача покажется читателю слишком сложной. Но мы, разумеется, решим и неопубликованный пункт.

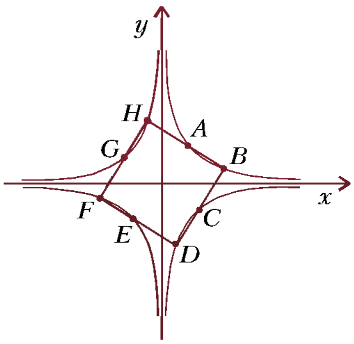


Рис.1

Решение задачи М1775. а) Проанализируем ситуацию. Пусть искомый квадрат существует и выглядит так, как показано на рисунке 1. Обозначим координаты точки A – середины стороны квадрата – через $\left(a; \frac{1}{a}\right)$. Тогда, как легко видеть, $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{a}; -a\right)$, так что точка B имеет координаты $\left(a + \frac{1}{a}; \frac{1}{a} - a\right)$. Условие принадлежности точки B гиперболе $xy = 1$ дает уравнение

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{a} - a\right) = 1,$$

откуда $\frac{1}{a^2} - a^2 = 1$. Этому уравнению удовлетворяет число $a = \sqrt{\left(\sqrt{5} - 1\right)/2}$. Анализ окончен.

Теперь легко предъявить искомый квадрат: при найденном значении a все четыре точки $B\left(a + \frac{1}{a}; \frac{1}{a} - a\right)$, $D\left(-a + \frac{1}{a}; -\frac{1}{a} - a\right)$, $F\left(-a - \frac{1}{a}; -\frac{1}{a} + a\right)$, $H\left(a - \frac{1}{a}; \frac{1}{a} + a\right)$ (вершины квадрата) и точки $A\left(a; \frac{1}{a}\right)$, $C\left(\frac{1}{a}; -a\right)$, $E\left(-a; -\frac{1}{a}\right)$, $G\left(-\frac{1}{a}; a\right)$ (середины сторон) лежат на гиперболах $xy = \pm 1$.

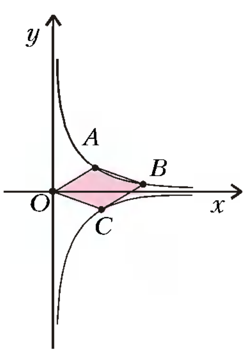


Рис.2

Упражнение 19. Докажите, что если все вершины и все середины сторон квадрата лежат на гиперболах $xy = \pm 1$, то центр этого квадрата – начало координат.

б) Рассмотрим точки $A\left(a; \frac{1}{a}\right)$ и $C\left(c; -\frac{1}{c}\right)$, а также начало координат $O(0; 0)$ (рис.2). Вершина B параллелограмма $OABC$ имеет координаты $\left(a + c; \frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)$. Она лежит на гиперболе $xy = 1$ при условии

$$(a + c)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) = 1,$$

которое можно записать в виде

$$\frac{c}{a} - \frac{a}{c} = 1,$$

т.е.

$$\frac{c}{a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Осталось заметить, что последнему условию удовлетворяют бесконечно много пар чисел a и c.

в) Легко доказать, что площадь S параллелограмма $OABC$, где O – начало координат, $\overrightarrow{OA} = (a; b)$ и $\overrightarrow{OC} = (c; d)$, равна $S = |ad - bc|$. Подставляя $b = \frac{1}{a}$ и $d = -\frac{1}{c}$, находим

$$S = \left|\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right| = \left|\frac{2}{1 \pm \sqrt{5}} + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right| = \sqrt{5},$$

что и требовалось доказать.

Но решение еще не закончено! Дело в том, что параллелограмм может выглядеть так, как показано на рисунке 3. Его вершины $A\left(a; \frac{1}{a}\right)$ и $C\left(c; \frac{1}{c}\right)$ лежат на гиперболе $xy = 1$. Точка B имеет координаты $\left(a + c; \frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)$. Чтобы она принадлежала гиперболе $xy = -1$, должно быть выполнено равенство

$$(a + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) = -1,$$

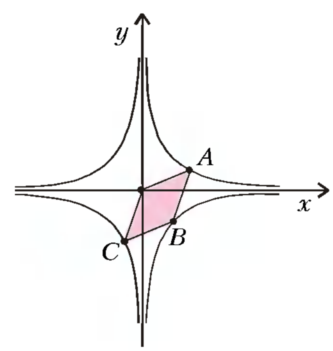


Рис.3

т.е. $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} = -3$. Площадь параллелограмма $OABC$ равна

$$S = \left|\frac{a}{c} - \frac{c}{a}\right| = \sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 - 2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 + 2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 - 4} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 - 4} = \sqrt{(-3)^2 - 4} = \sqrt{5}.$$

г) Рассмотрим порожденную параллелограммом рисунка 2 решетку (рис.4). Для произвольной точки $P(x; y)$ этой решетки $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OC} = \left(ma + nc; \frac{m}{a} - \frac{n}{c}\right)$, где m, n – целые числа, имеем

$$|xy| = \left|(ma+nc)\left(\frac{m}{a}-\frac{n}{c}\right)\right| =$$

$$= \left|m^2 + mn\left(\frac{c}{a}-\frac{a}{c}\right) - n^2\right| = \left|m^2 + mn - n^2\right|.$$

Внутренность «креста» из гипербол $xy = \pm 1$ задается неравенством $|xy| < 1$. Но при целых m и n величина $\left|m^2 + mn - n^2\right|$ тоже целая. Единственным целым числом, которое по модулю меньше 1, является ноль. Значит, для лежащей внутри креста точки решетки имеем

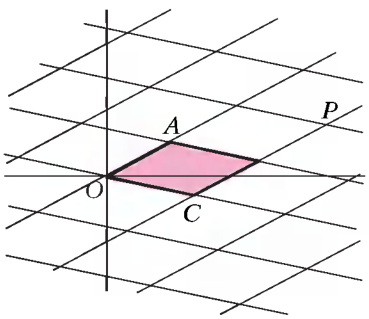


Рис.4

$$\left|(ma+nc)\left(\frac{m}{a}-\frac{n}{c}\right)\right| = 0,$$

откуда $ma + nc = 0$ или $mc - na = 0$. Ввиду иррациональности отношения a/c это возможно лишь при $m = n = 0$.

Значит, внутри «креста» из гипербол расположена единственная точка рассматриваемой решетки – начало координат.

Для решетки, порожденной параллелограммом рисунка 3, решение аналогично, поэтому мы выпишем только формулы

$$\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OC} = \left(ma+nc; \frac{m}{a}+\frac{n}{c}\right)$$

и

$$|xy| = \left|(ma+nc)\left(\frac{m}{a}+\frac{n}{c}\right)\right| = \left|m^2 + mn\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) + n^2\right| =$$

$$= \left|m^2 - 3mn + n^2\right| = \left|(m-n)^2 - (m-n)n - n^2\right| =$$

$$= \left|k^2 - kn - n^2\right|,$$

где обозначено $k = m - n$.

Итак, внутри «креста гипербол» нет ни одной точки решеток, кроме начала координат. А на самих гиперболах таких точек бесконечно много. Чтобы доказать это, в первом из рассмотренных нами случаев достаточно убедиться, что уравнение

$$m^2 + mn - n^2 = \pm 1$$

имеет бесконечно много решений в целых числах m, n, а во втором случае – сделать то же самое для уравнения

$$k^2 - kn - n^2 = \pm 1.$$

Впрочем, первое из этих двух уравнений сводится ко второму заменой m на $-k$.

Уравнение $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$

Это уравнение не имеет вида $x^2 - dy^2 = 1$. Но умножение на 4 приводит его к виду

$$4x^2 - 4xy - 4y^2 = \pm 4,$$

т.е.

$$(2x-y)^2 - 5y^2 = \pm 4,$$

что уже похоже на уравнение Пелля. Впрочем, мы воспользуемся этим преобразованием чуть позже, а здесь решим уравнение в его первоначальном виде.

Немного посчитав, можно составить таблицу:

x	0	1	1	2	3	5	8	13	21
y	1	0	1	1	2	3	5	8	13
$x^2 - xy - y^2$	–1	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1

Всякий, кто знаком с числами Фибоначчи, уже узнал их. А остальным скажем, что последовательность Фибоначчи задана своими двумя членами $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 1$ и рекуррентной формулой $\varphi_{n+2} = \varphi_n + \varphi_{n+1}$. Несколько следующих членов этой замечательной последовательности таковы: $\varphi_2 = 0 + 1 = 1$, $\varphi_3 = 1 + 1 = 2$, $\varphi_4 = 1 + 2 = 3$, $\varphi_5 = 2 + 3 = 5$, $\varphi_6 = 3 + 5 = 8$, $\varphi_7 = 5 + 8 = 13$.

Теорема 6. *Если $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$, то пара чисел $(X; Y) = (x + y; x)$ удовлетворяет равенству $X^2 - XY - Y^2 = \mp 1$.*

Доказательство.

$$(x+y)^2 - (x+y)x - x^2 = x^2 + 2xy + y^2 - x^2 - xy - x^2 =$$

$$= -\left(x^2 - xy - y^2\right) = \mp 1.$$

Доказав теорему 6, мы наконец-то решили задачу М1775.

Как и не раз выше, сформулируем и не докажем еще одну теорему.

Теорема 7. *Уравнение $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из «тривиального» решения $(0; 1)$ при помощи правила $(x; y) \to (x + y; x)$.*

Следствие. *Все решения уравнения $z^2 - 5y^2 = \pm 4$ в натуральных числах даются формулой $(z; y) = (\varphi_{n+1} + \varphi_{n-1}; \varphi_n)$.*

Доказательство. Каждой паре целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющей равенству $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$, соответствует пара целых чисел $(z; y) = (2x - y; y)$, удовлетворяющая равенству $z^2 - 5y^2 = \pm 4$, и наоборот (поскольку числа z и y одной четности). Осталось заметить, что если $x = \varphi_{n+1}$ и $y = \varphi_n$, то

$$z = 2x - y = 2\varphi_{n+1} - \varphi_n = \varphi_{n+1} + \varphi_{n-1}.$$

Упражнение 20. Докажите тождества

а) $\varphi_n^2 = \varphi_{n-1}\varphi_{n+1} - (-1)^n$;

б) $\varphi_n^2 = \varphi_{n-2}\varphi_{n+2} + (-1)^n$.

(*Продолжение следует*)

Тепловые свойства воды

С.ВАРЛАМОВ

Теплоемкость воды в разных состояниях

При постепенном повышении температуры и сохраняющемся внешнем давлении вода последовательно переходит из одного фазового состояния в другое: лед – вода – пар.

Известно, что водяной пар при температурах 300–400 К имеет молярную теплоемкость (при постоянном объеме) $C_V = 3R \approx 25$ Дж/(моль·К). Величина $3R$ соответствует теплоемкости идеального многоатомного газа, имеющего шесть кинетических степеней свободы – три поступательные и три вращательные. Это означает, что колебательные степени свободы самих молекул воды в этом диапазоне температур еще не включены. Естественно, что при более низких температурах они не включены тем более.

Удельная теплоемкость воды в жидком состоянии, равная 4200 Дж/(моль·К), соответствует молярной теплоемкости 75,9 Дж/(моль·К) $\approx 9{,}12R$. На один моль атомов (и кислорода, и водорода), входящих в состав жидкой воды, приходится около $3{,}04R$ – вода формально подчиняется закону Дюлонга и Пти для твердых тел, хотя и не является твердым телом. На это обстоятельство стоит обратить пристальное внимание!

Молярная теплоемкость льда при температуре 273 К равна примерно $4{,}5R$, т.е. вдвое меньше, чем для жидкой воды. Классическое объяснение теплоемкости твердых тел основано на предположении, что каждый атом в составе твердого тела имеет три колебательные степени свободы. Атомы не имеют вращательных степеней свободы, поэтому, в соответствии с правилом о равнораспределении энергии по степеням свободы, молярная теплоемкость атомов, входящих в состав твердого тела, равна $3R$ и не зависит от температуры. Это правило действительно выполняется при достаточно высоких температурах для большинства твердых тел и носит название закона Дюлонга и Пти.

Колебательные степени свободы в твердой и жидкой воде

Существуют так называемые ориентационные и трансляционные колебания относительно положения равновесия молекулы в структуре вещества. (Раньше уже было отмечено, что колебательные степени свободы самих молекул воды при температурах ниже 400К еще не включены.) Давайте подсчитаем, сколько степеней свободы может иметь молекула воды, если она совершает независимые от других молекул движения.

Молекула воды из своего положения равновесия может поступательно смещаться в трех взаимно перпендикулярных направлениях и поворачиваться на небольшие углы вокруг трех взаимно перпендикулярных осей вращения, сохраняя в среднем по времени свое пространственное положение и свою ориентацию. Таким образом, каждая молекула воды теоретически может иметь шесть колебательных степеней свободы. Если исходить из закона равнораспределения энергии, то эти шесть колебательных степеней свободы соответствуют молярной теплоемкости $6R$. Напомним, что на

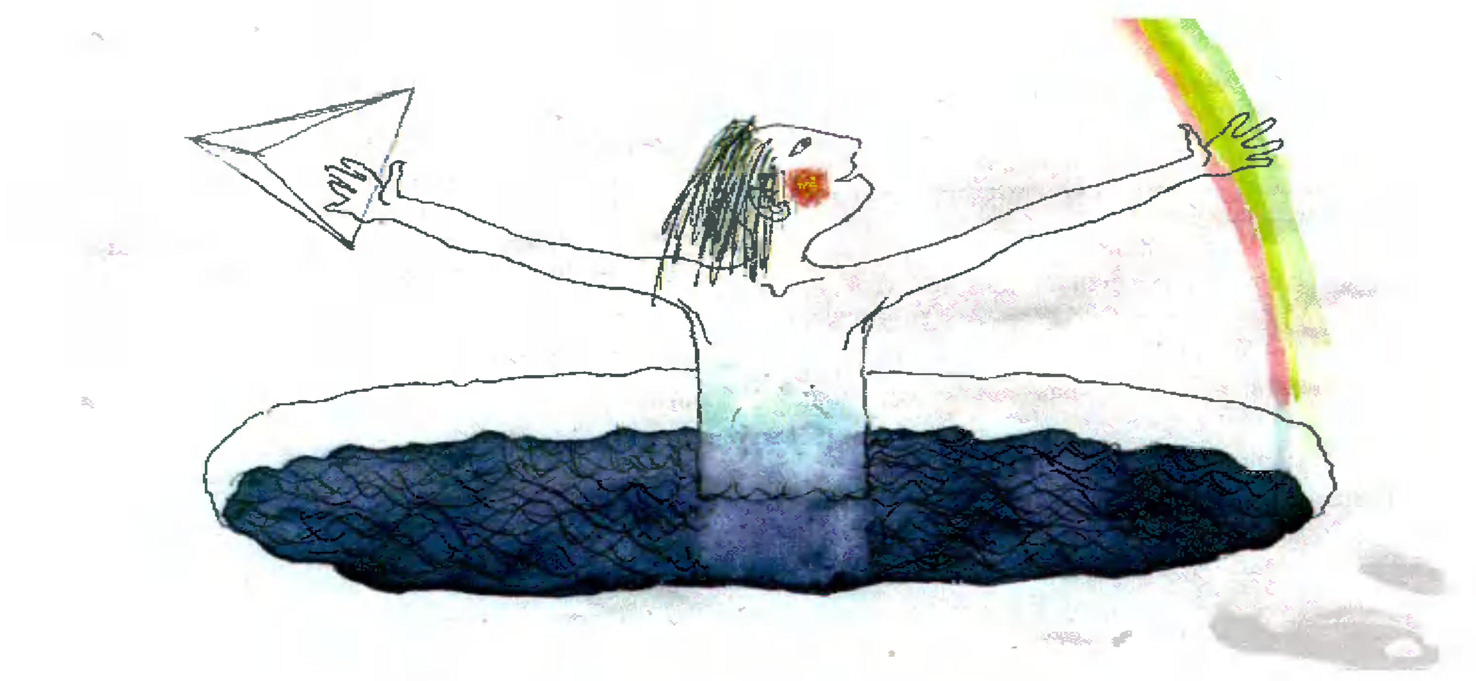


Иллюстрация П.Чернуского

один моль молекул в жидкой воде приходится теплоемкость около $9R$, а на тот же моль замерзших молекул – около $4{,}5R$. Величина $6R$ больше теплоемкости льда, но меньше теплоемкости жидкой воды. Значит, в структуре льда часть возможных колебательных степеней свободы молекул воды не задействована, а в структуре жидкой воды молекулы имеют какой-то дополнительный резервуар для запасания энергии при повышении температуры.

Что же это за таинственный резервуар, который мы обнаружили? Запомним, что мы задали себе такой вопрос, но пока отложим поиск ответа на него.

Структура воды и льда

Молекулы воды, в целом электрически нейтральные (не заряженные), имеют электрический дипольный момент. Грубо говоря, положительные заряды находятся на атомах водорода, а отрицательным зарядом заряжен атом кислорода. Угол, который составляют между собой отрезки, соединяющие атом кислорода с атомами водорода в молекуле воды, равный 104,5°, близок к 120° и к тетраэдрическому углу 109,5°.

Эти две особенности строения молекулы воды ответственны за устройство льда и воды и за особые термодинамические свойства воды-жидкости и воды-льда. Молекулы воды, притягиваясь своими противоположно заряженными частями, могут образовать кластеры (объединения молекул) из очень большого числа молекул. Связь между двумя соседними молекулами при таком объединении называется водородной связью (атом водорода одной молекулы приближен к атому кислорода другой молекулы). Энергия такой связи характеризуется глубиной потенциальной ямы, в которую как бы помещают друг друга молекулы, образовав такое объединение. В жидкой и твердой воде энергия водородной связи составляет примерно $2\cdot10^4$ Дж/моль. (Это во много раз больше величины $RT\approx 2{,}5\cdot10^3$ Дж/моль.)

На одну молекулу, находящуюся в структуре льда, в среднем приходится четыре с половиной колебательных степени свободы. Можно предположить, что часть молекул имеет свои «законные» 6 степеней, а какая-то часть имеет меньшее количество степеней свободы. Возможно, что часть колебательных степеней свободы являются общими, т.е. одна степень свободы приходится на две (или более) молекулы.

В сплошном кристалле льда молекулы воды образуют сложную пространственную ажурную структуру с пустотами, напоминающую структуру стенок мыльных пузырей в пене. Какие положения молекул в структуре соответствуют большему, а какие меньшему числу степеней свободы, или как две (или больше) молекулы вместе колеблются в решетке, можно только догадываться.

Существенное увеличение числа колебательных степеней свободы – их «растормаживание» – возникает при плавлении льда, в результате которого упорядоченная структура молекул воды в заметной степени разрушается. На это разрушение указывает бо́льшая плотность воды в сравнении с плотностью льда. Кстати, на то что эта структура не рушится *полностью* сразу после плавления льда, указывает тот факт, что в диапазоне температур от 0°С до 4°С плотность воды продолжает увеличиваться! Для большинства веществ и материалов переход твердое тело – жидкость сопровождается уменьшением плотности. При переходе лед – вода разрушается пространственная ажурная кристаллическая структура льда, и обломки занимают меньший объем. (Так же изменяется и объем здания при землетрясении.) Чем сильнее трясти, тем на меньшие осколки будет разрушена структура и тем плотнее будет жидкость (до 4°С). Затем начинает доминировать другой фактор – конденсированные тела при повышении температуры расширяются. Теплоемкость при переходе твердое тело – жидкость скачком повышается, так как буквально размораживаются дополнительные колебательные степени свободы. Но, как мы помним, их «растормаживания» недостаточно для того, чтобы обеспечить воде молярную теплоемкость около $9R$.

Расширение тел при нагревании сопровождается работой по преодолению сил притяжения друг к другу удаленных молекул. Эти силы приводят к существованию внутреннего давления в конденсированных телах. Оценку внутреннего давления для воды можно получить, если вычислить лапласовское давление внутри пузырька с радиусом, равным диаметру молекулы. Для воды это давление равно примерно $4{,}6\cdot10^8$ Па. Вдали от температуры фазового перехода лед – вода коэффициент объемного расширения воды равен $0{,}0007\ \text{К}^{-1}$. Работа против сил внутреннего давления при нагреве 1 моля воды на 1 кельвин равна 5,8 Дж, или около $0{,}7R$. Сложим теперь все учтенные нами до этого момента теплоемкости. Полученная нами величина $6R + 0{,}7R = 6{,}7R$ все равно меньше реально наблюдаемой теплоемкости воды порядка $9R$. (Коэффициент объемного расширения льда при температуре 273 К равен $0{,}00016\ \text{К}^{-1}$, поэтому оценка вклада работы по преодолению сил внутреннего давления в теплоемкость льда равна $0{,}16R$.)

Таинственный резервуар

Вот и пришло время вернуться к вопросу о том, какой же таинственный резервуар запасания энергии при повышении температуры воды работает в дополнение ко всем возможным колебательным степеням свободы молекул воды.

По-видимому, дополнительные затраты энергии на повышение температуры воды связаны с продолжающимся разрушением той самой ажурной решетки льда, т.е. энергия расходуется на разрыв связей между молекулами. Совпадение теплоемкости воды с величиной, которая фигурирует в законе Дюлонга и Пти, таким образом, следует признать случайным.

Давайте грубо оценим соотношение между количеством молекулярных связей, которые рвутся при плавлении льда, и количеством связей, которые рвутся при повышении температуры воды от 0°С до 100°С и при испарении воды.

Разрыв большей части связей происходит при испарении воды. Удельная теплота испарения воды при атмосферном давлении равна 2,3 МДж/кг, причем из этой величины примерно 0,17 МДж/кг приходится на работу, которую расширяющийся водяной пар совершает против сил атмосферного давления (на разрыв связей остается 2,13 МДж/кг). Удельная теплота плавления льда равна 0,34 МДж/кг. Количество теплоты, которое нужно, чтобы нагреть 1 кг воды на 100°С, равно 0,42 МДж/кг, причем из этого количества только около одной четверти приходится на недостающую часть теплоемкости (примерно 0,107 МДж/кг). По нашим оценкам получается, что на разрыв всех связей тратится приблизительно 2,56 МДж/кг.

Итак, по мере нагрева сначала 13% связей рвутся при таянии льда, затем 4% связей рвутся в процессе нагрева воды от 0°С до 100°С, а оставшиеся 83% связей рвутся при испарении воды. Случайное совпадение – 0,04% связей рвутся при нагреве воды на 1 кельвин – привело к тому, что жидкая вода формально подчиняется закону Дюлонга и Пти.

Самый существенный вывод, который можно сделать на основе проведенных оценок, таков: структура воды в диапазоне температур от 0°С до 100°С более чем на 80% повторяет структуру льда. Если учесть, что на одну водородную связь приходится примерно $2 \cdot 10^4$ Дж/моль энергии, то при испарении воды тратится столько энергии, что на каждую испарившуюся молекулу приходится примерно по 2 разорванные водородные связи. Это означает, что молекулы в жидкой воде в среднем занимают положения и ориентации, соответствующие тетраэдрической пространственной структуре типа алмаза. (Экспериментальные данные, полученные с помощью рентгеноструктурного анализа, нейтронографии и других физических методов, позволяют утверждать, что трехмерная приближенно тетраэдрическая сетка водородных связей существует и у льда, и у жидкой воды.)

Аномалия плотности воды

Как известно, вода при атмосферном давлении в диапазоне температур от 0°С до 4°С увеличивает свою плотность. По-видимому, при 0°С в жидкой воде имеется очень много островков с сохранившейся структурой льда. Каждый из этих островков при дальнейшем увеличении температуры испытывает тепловое расширение, но одновременно с этим уменьшаются количество и размеры этих островков вследствие продолжающегося разрушения их структуры. При этом часть объема воды между островками имеет другой коэффициент расширения. К сожалению, этот коэффициент невозможно измерить отдельно. Однако можно попытаться его оценить косвенными методами. Из данных справочника известно, что скорость звука в воде при 273 К примерно в 2,5 раза меньше, чем скорость продольных звуковых волн во льду. Тепловое расширение происходит вследствие повышения средней энергии поступательного движения молекул и должно быть обратно пропорционально жесткости материала или прямо пропорционально его сжимаемости. Скорость звука пропорциональна корню квадратному из отношения жесткости материала (модуля Юнга) к его плотности (плотности воды и льда практически совпадают). В структуре воды по сравнению со структурой льда изменилось только 13%, а скорость звука упала в 2,5 раза, следовательно, сжимаемость межостровковой воды примерно в $(2,5)^2/0,13 = 48$ раз больше сжимаемости льда.

Попробуем оценить, на сколько должен был бы измениться объем жидкости за счет разрыва 0,04% связей (нагрев от 0°С на 1°С), если предположить, что тенденция к уменьшению объема за счет разрыва связей будет такая же, как и при таянии льда, а тенденция к расширению объема островков будет такой же, как у твердого льда вблизи температуры плавления. Учтем также расширение межостровковой воды. При таянии льда плотность увеличивается на 9% (при этом порвались всего 13% связей); значит, увеличение плотности при разрыве 0,04% связей должно составить величину порядка +0,028%. Лед при нагреве на 1 градус вблизи температуры 273 К расширяется в объеме на 0,016%; значит, плотность должна уменьшиться на 0,87 от этой величины (–0,014%). Расширение водной межостровковой части при нагреве на один градус приведет к изменению плотности на $-48 \cdot 0,13 \cdot 0,016\% = -0,01\%$. Итоговая оценка дает +0,004%, а на самом деле плотность воды при повышении температуры на один градус выше точки плавления изменяется на +0,006%, т.е. примерно в полтора раза больше. Сложность ситуации состоит в том, что вклады противоположного знака имеют близкие абсолютные величины. В таких случаях принято говорить, что порядок полученной оценки близок к тому, что наблюдается на самом деле (отличается меньше чем на единицу), а с учетом грубости исходных предположений можно считать, что порядки величин просто совпадают.

Вязкость воды

Еще одна физическая величина, связанная со структурой воды, имеет особенную зависимость от температуры – это вязкость.

Вязкость воды уменьшается при изменении температуры от 0°С до 100°С в семь раз, тогда как вязкости большинства жидкостей с неполярными молекулами, не имеющими, соответственно, водородных связей, уменьшаются при таком же изменении температур всего в два раза! Спирты, молекулы которых являются полярными, как и молекула воды, тоже изменяют вязкость в 5–10 раз при таком изменении температуры.

Исходя из нашей оценки количества разорванных связей при нагревании воды от 0°С до 100°С (порядка 4%), следует признать, что подвижность воды и ее малая вязкость обеспечиваются весьма малой долей всех молекул.

* * *

Таким образом, необычное поведение различных характеристик воды при изменении температуры от 0°С до 100°С говорит о ее уникальных свойствах и дает повод думать, что Природа неспроста использовала воду в качестве элемента биологических структур, который не может быть заменен никаким другим растворителем.

Обратимость энергетических МГД-систем

Б.РЫБИН

Широко известны энергетические магнитогидродинамические системы (кратко МГД-системы), в которых происходят взаимные превращения электрической и механической энергий в результате движения плазмы в магнитном поле. Например, динамо-машины, электромоторы, МГД-генераторы, МГД-насосы. Причем под «плазмой» подразумевается не только собственно плазма, но и, скажем, вращающаяся рамка (здесь положительной составляющей «плазмы» является кристаллическая решетка проводника, а отрицательной – свободные электроны).

В динамо-машине ротор вращается под действием источника механической энергии, и в результате (если ротор замкнут на какую-нибудь нагрузку) в нем возникает электрический ток. Если же к зажимам ротора вместо пассивной нагрузки подсоединить источник электрической энергии, то динамо-машина превратится в электромотор. В этом и заключается обратимость такой МГД-установки.

Рассмотрим явление обратимости более подробно. Воспользуемся простенькой моделью, позволяющей выделить и проанализировать элементарные физические процессы, протекающие при МГД-превращениях энергии.

Пусть точечный заряд q движется равномерно и прямолинейно в магнитном поле, причем его скорость $\vec{v}$ перпендикулярна индукции поля $\vec{B}$. Так как на заряд действует сила Лоренца, перпендикулярная векторам $\vec{v}$ и $\vec{B}$ и равная

$$f_Л = qvB,$$

а заряд движется равномерно, то должна быть еще одна сила $\vec{f}$, равная и противоположно направленная силе $\vec{f}_Л$ (рис.1, *а*). Введем систему координат *xqy*, ориентация которой произвольна (рис.1, *б*). Разложим $\vec{v}$ на x- и y-составляющие:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y .$$

Тогда и силы $\vec{f}_Л$ и $\vec{f}$ тоже разложатся на составляющие, причем (на языке модулей)

$$f_x = f_{Лx} = qv_yB \text{ и } f_y = f_{Лy} = qv_xB .$$

Обозначим острый угол между вектором $\vec{v}$ и осью x через α. Тогда мощности, развиваемые силами f_x и f_y, равны

$$p_x = f_xv\cos\alpha = f_xv_x \text{ и } p_y = f_yv\sin\alpha = f_yv_y .$$

Так как полная мощность, развиваемая силой $\vec{f}$, равна нулю (потому что $\vec{f} \perp \vec{v}$), справедливо равенство

$$p_x + p_y = f_xv_x + f_yv_y = 0 .$$

Теперь предположим, что на заряд q в самом деле действуют два разных источника: один с силой f_x, а второй с силой f_y (индукция $\vec{B}$ параллельна оси z). Тогда все наши предыдущие операции теряют свой чисто формальный характер и приобретают вполне определенный физический смысл. Из последнего выражения, в частности, следует, что мощности, развиваемые x- и y-источниками, равны по величине и противоположны по знаку. Один из них совершает работу против силы Лоренца, *расходуя* при этом свою энергию. Над вторым совершается точно такая же работа силой Лоренца, и он *получает* энергию. Первый источник мы будем в дальнейшем называть активным, а второй – пассивным, или потребителем энергии.

Предложенная модель МГД-преобразования энергии может быть названа одночастичной. Она позволяет очень просто (используя правило левой руки) вскрывать основные факторы, определяющие направлен-

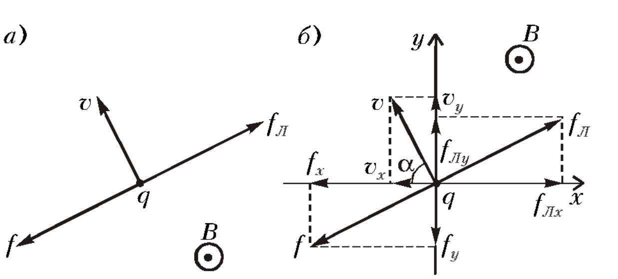


Рис.1

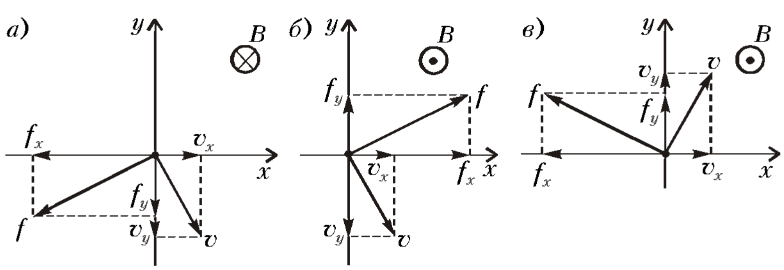
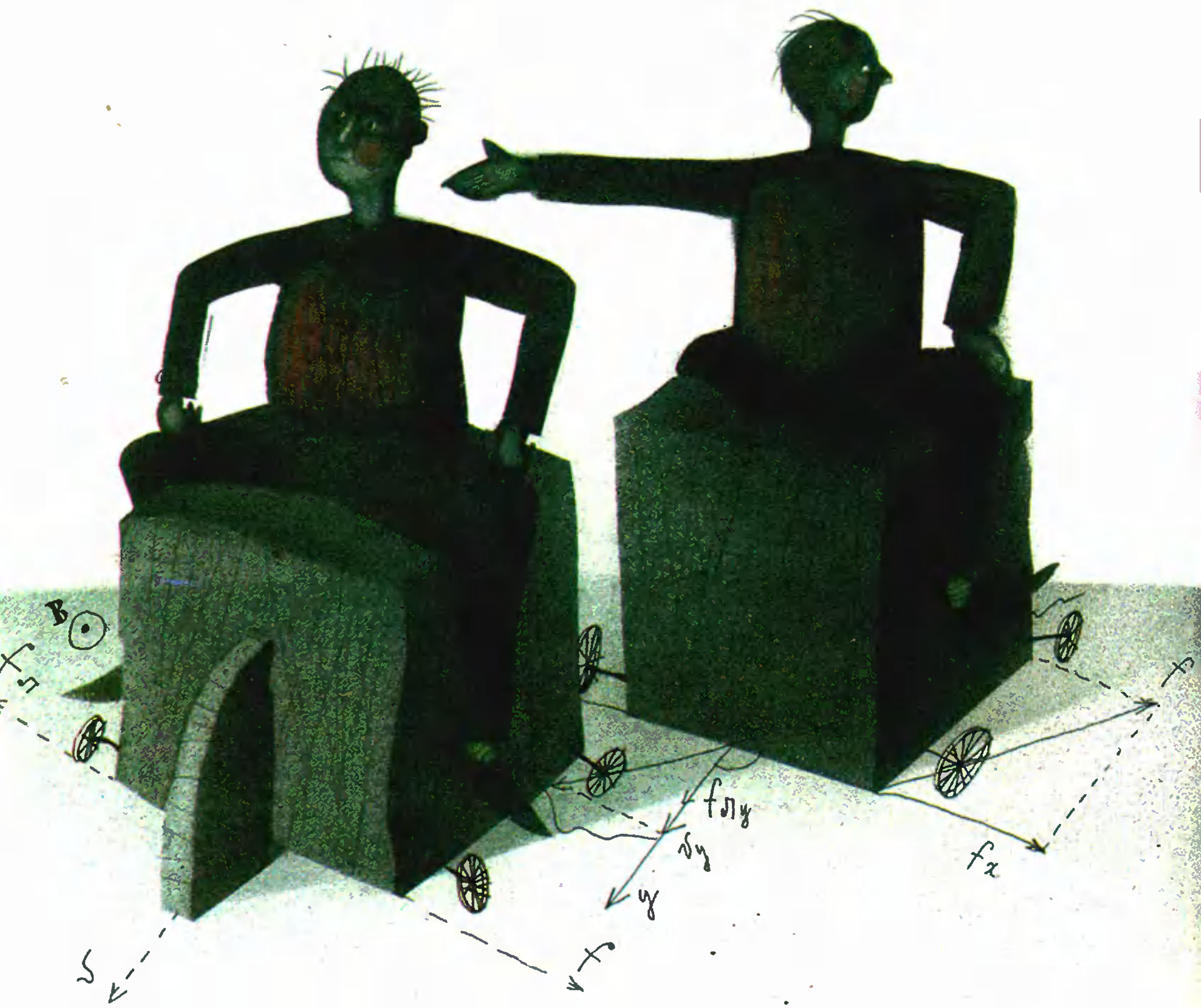


Рис.2


B
$f_{Лy}$
y
f_x

ность протекающих процессов. Так, направление постоянной скорости $\vec{v}$ в этой модели определяется векторами $\vec{B}$ и $\vec{f}$. Если направление одного из этих векторов, например $\vec{B}$, изменится на противоположное, то и направление скорости $\vec{v}$ изменится на противоположное.

Направление потока энергии (от x-источника к y-источнику или наоборот) определяется знаками мощностей $p_x = f_x v_x$ и $p_y = f_y v_y$. Если изменить на противоположное направление вектора $\vec{B}$, то v_x и v_y поменяют свои знаки и, соответственно, энергия потечет вспять (см. рис.1, *б* и 2, *а*). Если же изменить на противоположную силу $\vec{f}$, то свои знаки поменяют не только f_x и f_y, но и v_x и v_y, а направление потока энергии при этом останется неизменным (см. рис.1,*б* и 2,*б*). Направление потока энергии можно изменить еще таким образом – изменив на противоположное направление действия только одного из двух внешних источников. Например, если изменить знак f_y, то изменится знак и v_x. Соответственно, знаки мощностей p_x и p_y изменятся на противоположные (см. рис.1,*б* и 2,*в*).

Перейдем от одночастичной модели к рассмотрению движения большого числа частиц – плазмы. Будем считать, что плазма в целом нейтральна и что все ее частицы движутся равномерно (речь идет о направленном движении). Ради простоты будем также считать, что заряды положительных и отрицательных частиц плазмы по модулю равны ($q_+ = -q_- = q$). Ограничимся простым, но и наиболее интересным с точки зрения практики случаем. Пусть вдоль оси y имеет место чисто механическое движение, т.е. все частицы плазмы движутся с одной и той же скоростью: $v_{y_+} = v_{y_-} = v_{y_0} = V_y$. Вдоль оси x механическое движение отсутствует, а имеет место только относительное перемещение положительных и отрицательных частиц, т.е. течет ток (конечно, электрический ток сопровождается движением массы, но, как правило, масса носителей тока пренебрежимо мала по сравнению с массой остальной плазмы). В этом случае сила Лоренца выступает как двуликий Янус. Сумма всех y-составляющих сил Лоренца, действующих на отдельные частицы плазмы, равна силе Ампера $F_{\text{А}}$. Эту силу можно рассматривать как механическую, которая уравновешивается внешней механической силой y-источника. Можно показать, что сумма мощностей, развиваемых отдельными микросилами $f_{\text{Л}y}$, определяется известной из механики формулой

$$P_y = F_{\text{А}} V_y.$$

Докажите эту формулу самостоятельно. [1][1]

Далее, x-составляющие сил Лоренца, действующих на положительные и отрицательные частицы, равны по величине и противоположны по знаку, т.е. при наших предположениях можно считать, что вдоль оси x на плазму действует стороннее электрическое поле с напряженностью

$$E_{\text{ст}} = \frac{f_{\text{Л}x}}{q} = V_y B.$$

Опять-таки можно показать, что сумма всех мощностей, развиваемых отдельными микросилами $f_{\text{Л}x}$, выражается хорошо известной формулой

$$P_x = \mathcal{E} I,$$

где $\mathcal{E}$ – электродвижущая сила.

Докажите эту формулу. [2]

Любая энергетическая МГД-установка состоит из собственно МГД-блока с двумя плечами и двух источников энергии, подсоединяемых к этим плечам. Один источник механический, а второй электрический. Простая модель МГД-блока показана на рисунке 3,*а*. Здесь *ab* – прямолинейный проводник, находящийся в электрическом контакте с двумя длинными параллельными проводниками, причем *ab* может без трения двигаться вдоль этих проводников. Все это расположено в однородном магнитном поле, перпендикулярном проводникам. Система координат $x0y$ определяет плечи x и y.

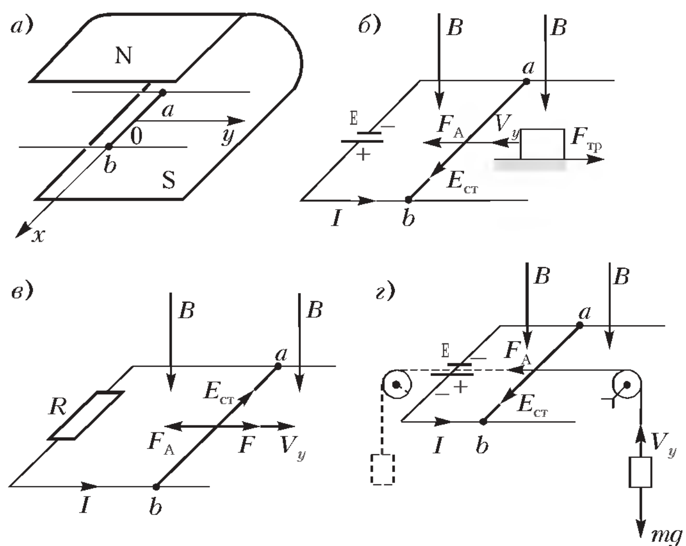


Рис. 3

Пусть к x-плечу подсоединена электрическая батарея, а к y-плечу – перемещаемое тело (см. рис.3,*б*). Какой из двух источников активный, а какой пассивный, очевидно. Поток энергии будет направлен из плеча x в плечо y независимо от направления магнитного поля $\vec{B}$ или полярности подсоединенной батареи. Для того чтобы обратить поток энергии, нужно заменить батарею сопротивлением, а перемещаемое тело – активной силой, перемещающей проводник *ab* (см. рис.3,*в*). В этом и заключается обратимость рассматриваемой МГД-установки в том смысле, о котором говорилось в начале статьи.

Более интересным для анализа является случай, когда и x-, и y-источники могут быть как активными, так и пассивными, в зависимости от обстоятельств. Так, подсоединим к x-плечу аккумулятор, а к y-плечу подвесим груз. Тогда направление потока энергии

[1] *Цифра в квадратных скобках указывает номер подсказки из Приложения в конце статьи.*

Иллюстрация Е.Силиной

определяется направлением вектора $\vec{B}$ и направлением действия источников. На рисунке 3,*г* аккумулятор будет разряжаться и поднимать груз.

Докажите это. [3]

Для того чтобы груз начал опускаться и заряжать аккумулятор, можно либо поменять направление вектора $\vec{B}$ на противоположное, либо поменять полярность аккумулятора, либо, наконец, подвесить груз с другой стороны.

Объясните, с точки зрения одночастичной модели, почему направление потока энергии на рисунках 3,*б* и 3,*в* не зависит от направления $\vec{B}$ и от полярности источников. [4]

Рассмотрим два примера.

Пример 1. Так как направление потока энергии не зависит от величин сил f_x и f_y, а зависит только от их направлений, аккумулятор на рисунке 3,*г* должен поднимать любой сколь угодно большой груз, чего в действительности не может быть.

Решите возникший парадокс. В частности, считая известными индукцию B, ЭДС аккумулятора $\mathcal{E}$, сопротивление электрического плеча r, длину l проводника ab, определите максимальную массу, которую сможет поднять аккумулятор. [5]

Пример 2. Можно представить себе гибридный МГД-осциллятор, в котором соединены электрический и механический элементы, например конденсатор и пружина. В процессе колебаний электрическая и механическая энергии попеременно превращаются друг в друга. При этом изменение направления превращения энергии происходит самопроизвольно. (Более подробное описание гибридного осциллятора можно найти в статье «Осцилляторы-кентавры» в «Кванте» №5 за 1995 г.)

Вплоть до настоящего момента рассматривались такие преобразования МГД-систем, при которых пассивный источник заменялся активным и наоборот. Качественная природа источников (электрический или механический) при этом оставалась неизменной. Поэтому изменение направления потока энергии в геометрическом смысле означало изменение направления превращения энергии в качественном смысле (механическая в электрическую или наоборот). Можно говорить об обратимости, связанной только с изменением качественной природы источников. Такие преобразования не могут быть сведены к простой замене источников (к электрическому плечу нельзя подсоединить механический источник). Они предполагают изменение МГД-блока в целом и иногда вообще невозможны.

В качестве первого частного случая рассмотрим гомополярный двигатель (рис. 4,*а*). Металлический диск находится в однородном магнитном поле и может свободно вращаться вокруг вертикальной оси. Под действием источника тока в диске возникают радиальные токи. Сила Ампера, действующая на них, вращает диск. Электромеханический двойник гомополярного двигателя показан на рисунке 4,*б*. В плоском цилиндрическом сосуде находится жидкий проводник. Под действием насоса он приводится в радиальное движение. Возникающая при этом ЭДС индукции порождает в жидкости вихревые токи.

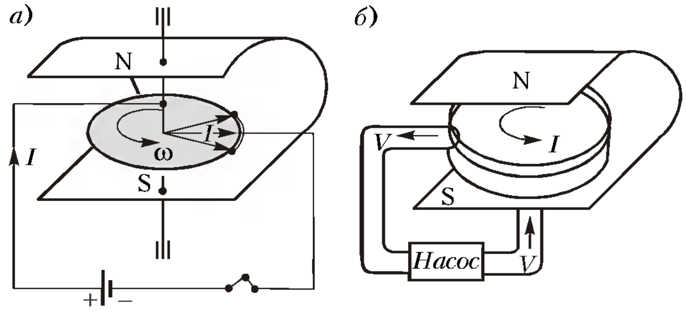


Рис. 4

В качестве второго частного случая рассмотрим магнитное торможение, возникающее при движении проводника в неоднородном магнитном поле. Если дать монете свободно падать в сильно неоднородном магнитном поле (рис.5,*а*), то ее движение будет таким, как будто она падает в вязкой жидкости. Причина заключается в том, что в монете возникают вихревые токи, на которые действуют силы Ампера. Равнодействующая этих сил всегда направлена против скорости и может быть названа силой магнитного трения. Это же самое явление магнитного трения представлено на рисунке 5,*б*. При вращении металлического диска в неоднородном магнитном поле в нем возникают вихревые токи (показаны пунктиром), которые в свою очередь порождают силы, тормозящие вращение диска. Электромеханический двойник МГД-установки, показанной на рисунке 5,*б*, представлен на рисунке 5,*в*. В дископодобном сосуде в неоднородном магнитном поле находится проводящая жидкость (или плазма). Если в этой жидкости создать круговой электрический ток, то он породит вихревые течения жидкости (пунктир). Движение жидкости порождает в ней ЭДС индукции, действующую против тока. Это эквивалентно возникновению дополнительного электрического сопротивления в проводнике.

Каждой из четырех МГД-систем, показанных на

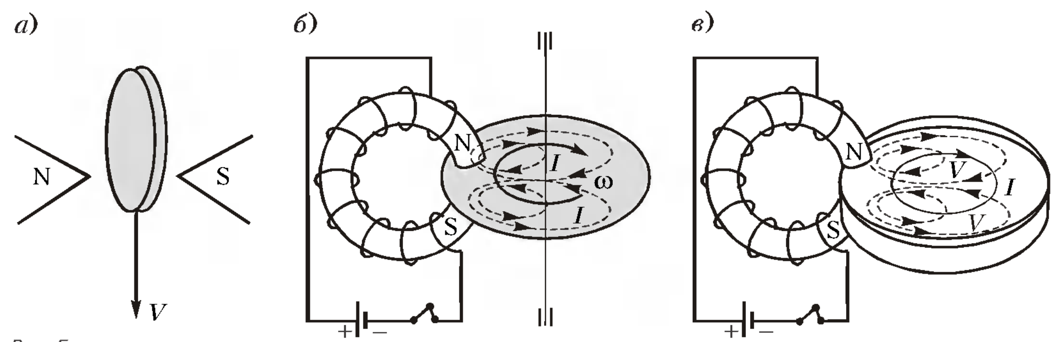


Рис. 5

рисунках 4 и 5, можно поставить в соответствие ее активно-пассивный антипод.

Попробуйте сделать это. [6]

В начале статьи указывалось, что МГД-преобразование энергии в своей основе не предполагает ее качественного превращения. В заключение покажем, что и на макроуровне качественное превращение энергии не является обязательным. На рисунке 6 приведена схема опыта, иллюстрирующего эффект Холла. Здесь $AKCD$ – металлическая пластина. Электрическая энергия, порождаемая источником с ЭДС $\mathcal{E}_x$, течет в контуре x и поглощается резистором R_x. Если включить магнитное поле, перпендикулярное пластине, часть этой энергии будет ответвляться в контур y и поглощаться в резисторе R_y.

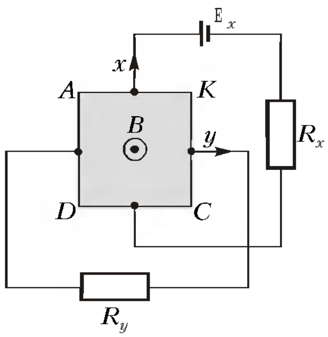


Рис. 6

Приложение

(*подсказки*)

1,2. Напомним, что $q_+ = -q_- = q$ и, поскольку плазма в целом нейтральна, $n_+ = n_- = n$, т.е. концентрации носителей тока равны. Чтобы не напутать со знаками, изобразим направления скоростей и сил Лоренца на рисунке. Учтем, что $v_{y_+} = v_{y_-} = V_y$ (где V_y – скорость нейтральной составляющей плазмы), а v_{x_+} и v_{x_-} могут быть направлены (вдоль оси x) произвольно. Для определенности будем считать, что они направлены в противоположные стороны (все другие возможные варианты приводят к аналогичным конечным формулам). Если вектор $\vec{B}$ направлен к читателю, то направление всех сил Лоренца таково, как показано на рисунке 7.

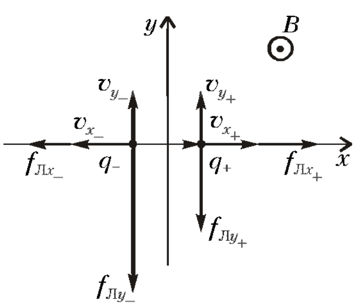


Рис. 7

Пусть $U = Sl$ –объем плазмы, где l – ее протяженность вдоль оси x, S – площадь ее сечения, перпендикулярного оси x. Тогда

$$P_y = -\left(n_+ f_{Лy_+} v_{y_+} + n_- f_{Лy_-} v_{y_-}\right)U = -nq\left(v_{x_+} - v_{x_-}\right)BV_yU.$$

Поскольку плотность тока равна $j = nq\left(v_{x_+} - v_{x_-}\right)$, а сила тока $I = jS$, то

$$P_y = -IBlV_y.$$

Аналогично,

$$P_x = -\left(n_+ f_{Лx_+} v_{x_+} + n_- f_{Лx_-} v_{x_-}\right)U = nq\left(v_{x_+} - v_{x_-}\right)BV_yU,$$

или

$$P_x = IBlV_y.$$

Так как $F_А = IBl$, то

$$P_y = -F_А V_y,$$

а поскольку $E_{ст} = BV_y$, а $\mathcal{E} = E_{ст}l$, то

$$P_x = \mathcal{E}I.$$

3. Так как проводник ab движется равномерно, то сила $\vec{F}_А$ должна уравновешивать силу $m\vec{g}$. Соответствующее направление $\vec{F}_А$ показано на рисунке 3,*г*. Зная направления $\vec{F}_А$ и $\vec{B}$, определяем направление тока (показано на рисунке). При таком направлении тока аккумулятор разряжается. Отсюда следует, что груз должен подниматься.

4. Пассивные источники на рисунках 3,*б*,*в* не имеют собственной направленности действия, т.е. им нельзя приписать какую-либо «полярность». Силы, с которыми они действуют на заряженные частицы, подобны силам трения (механического или электрического). Эти силы возникают только после начала движения частиц и всегда направлены против их скорости.

5. Здесь следует учитывать сопротивление электрической цепи. Полярность электрического источника определяется не полярностью аккумулятора, а знаком величины $\mathcal{E} - Ir$. При достаточно больших токах (сколь малой ни была бы величина r) выражение $\mathcal{E} - Ir$ становится отрицательным. В этом случае аккумулятор можно рассматривать просто как резистор.

Теперь найдем m_{max}. ЭДС индукции на концах проводника ab равна

$$\mathcal{E}_i = E_{ст}l = BV_yl.$$

Сила тока определяется выражением

$$I = \frac{F_А}{Bl} = \frac{mg}{Bl}.$$

Закон Ома для замкнутой цепи запишем в виде

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_i = Ir.$$

Тогда

$$V_y = \frac{1}{Bl}\left(\mathcal{E} - \frac{mg}{Bl}r\right).$$

Если $m = m_{max}$, то $V_y = 0$; следовательно,

$$m_{max} = \frac{\mathcal{E}Bl}{rg}.$$

6. Для примера рассмотрим МГД-установку, изображенную на рисунке 4,*б*. С помощью внешнего электрического источника создадим в жидком проводнике круговой ток. Для этой цели можно воспользоваться явлением электромагнитной индукции. Одновременно уберем насос. Тогда электрическая энергия будет превращаться в механическую, что приведет к движению жидкости по трубам.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 2002 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3 – 2002» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1816» или «Ф1823». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

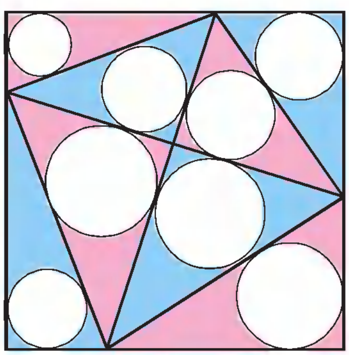
В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1816–М1825, Ф1823–Ф1832

М1816. Сумма 2000 натуральных чисел больше их произведения. Докажите, что не более 10 из этих чисел отличны от 1.

А.Спивак, В.Сендеров

М1817. Четырехугольник с перпендикулярными диагоналями вписан в квадрат. Диагонали и стороны четырехугольника разделили квадрат на 8 треугольников, попеременно окрашенных в красный и синий цвет (см. рисунок). Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в красные треугольники, равна сумма радиусов окружностей, вписанных в синие треугольники.



В.Произволов

М1818. Докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2,$$

где $a>0$, $b>0$, $c>0$.

С.Нестеров

М1819. В треугольнике ABC точки O, I – центры описанной и вписанной окружностей, A', B', C' – точки касания вписанной окружности со сторонами BC, CA, AB, точка P – ортоцентр треугольника $A'B'C'$. Докажите, что точки O, I и P лежат на одной прямой.

А.Заславский

М1820. а) Для натуральных чисел x и y десятичная запись числа x^2+xy+y^2 оканчивается нулем. Докажите, что она оканчивается двумя нулями.

б*) Для натуральных чисел x и y число $x^4+x^2y^2+y^4$ делится на 11. Докажите, что это число делится на 14641.

В.Произволов

М1821*. Докажите, что для каждого натурального n выполняется неравенство

$$\left|\left\{\frac{n}{1}\right\}-\left\{\frac{n}{2}\right\}+\left\{\frac{n}{3}\right\}-\ldots+(-1)^n\left\{\frac{n}{n}\right\}\right|<\sqrt{2n}$$

($\{a\}$ – дробная часть числа a).

В.Барзов

М1822. На турнир математических боев съехались $2N$ команд, каждая из которых должна по одному разу встретиться со всеми остальными. Организаторы планируют провести соревнования за $2N-1$ туров (чтобы в каждом туре участвовали все команды, и выходных дней у команд не было). Однако вследствие своей безалаберности они составляют расписание встреч на каждый тур без каких-либо планов на будущее – лишь бы в данном туре участвовали все команды и не произошло повторных встреч.

Может ли случиться так, что составить расписание для очередного тура окажется невозможным (т.е. при любом разбиении команд на пары окажется, что какие-то две команды уже встречались ранее), если

а) $N=5$;
б) $N=6$;
в) $N=8$;
г) N – любое натуральное число?

И.Акулич

М1823*. Пусть $f(x)$ – кубический многочлен. Предположим, что при любом натуральном n число $f(n)$ является кубом целого числа. Докажите, что $f(x) = (ax+b)^3$ для некоторых целых чисел a, b.

Н.Осипов

М1824. Пусть $A_1(x_1, y_1), \ldots, A_n(x_n, y_n)$ – различные точки координатной плоскости, $n \geq 2$, $M\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}, \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}\right)$ – их центр масс. Обозначим через C центр круга наименьшего радиуса r, в котором содержатся точки $A_1, \ldots, A_n$, а через d – расстояние между точками M и C. Докажите, что $\frac{d}{r} \leq \frac{n-2}{n}$.

И.Протасов, Г.Радзиевский

М1825*. Поверхность куба размером $5 \times 5 \times 5$ можно естественным образом оклеить 150-ю бумажными квадратами размером 1×1 каждый. При этом любая грань куба будет оклеена 25-ю бумажными квадратами. Докажите, что поверхность этого куба можно оклеить нашими бумажными квадратами так, что никакая его грань не будет оклеена 25-ю из них.

В.Произволов

Ф1823. В поле, на расстоянии 1 км от прямой дороги, стоит и размышляет профессор Очков, большой знаток геометрической оптики. На расстоянии 2 км от ближайшей к профессору точки дороги A находится железнодорожная станция $Ж$. Скорость при ходьбе по полю равна 3 км/ч, по дороге – 4 км/ч. За какое минимальное время профессор может добраться до станции? А за какое время он смог бы добраться до середины отрезка $AЖ$?

А.Очков

Ф1824. На большой плоскости построена стена высотой 30 м. На расстоянии 30 м от стены на уровне земли расположена игрушечная пушка, а мишень установлена на расстоянии 80 м от пушки на прямой, перпендикулярной стене. При какой скорости снаряда возможно попадание?

А.Стрелков

Ф1825. На гладком горизонтальном столе находится куб массой M = 2 кг, на его верхней грани лежит большой легкий лист бумаги, на нем – кубик массой m = 1 кг. Лист бумаги тянут с горизонтальной силой F = 15 Н. Коэффициент трения между бумагой и каждым из кубов $\mu = 0{,}7$. Найдите ускорения каждого из тел. А какими будут ускорения при силе F_1 = 10 Н?

Р.Александров

Ф1826. На гладкой горизонтальной плоскости находится клин массой M с углом α при основании. На клине удерживают неподвижно тонкий обруч массой m. Трение между обручем и поверхностью клина велико. Обруч отпускают, и он начинает двигаться по клину без проскальзывания. Найдите скорость клина в тот момент, когда центр обруча опустится на h.

Р.Обручев

Ф1827. Молекула водяного пара при попадании в воду может отразиться, а может и «прилипнуть» – стать молекулой жидкости. Оцените вероятность «прилипания», если известно, что при +20 °С в условиях низкой влажности уровень воды в блюдце понижается за минуту примерно на 1,5 мм. Давление насыщенных паров при этой температуре составляет приблизительно 2 кПа.

А.Паров

Ф1828. Моль гелия расширяется при неизменной температуре T_0 = 300 К в заданных пределах, получая при этом от внешних тел количество теплоты Q = = 20 кДж. Оцените работу газа при расширении в тех же пределах, но без подвода тепла извне.

А.Диабатов

Ф1829. Простейший прибор для измерения сопротивления (омметр) состоит из последовательно соединенных батарейки, миллиамперметра и реостата (его часто называют переменным резистором или потенциометром). Измеряемый резистор подключают к выводам этой цепи. Перед началом измерений прибор настраивают – замыкают накоротко выводы цепи (это соответствует нулевому сопротивлению измеряемого резистора) и реостатом устанавливают стрелку миллиамперметра на конец шкалы. В нашем случае настроенный прибор при сопротивлении резистора R_1 = 500 Ом отклоняется на $3/4$ шкалы, а при сопротивлении R_2 = 1500 Ом – на $1/2$ шкалы. В каком месте шкалы у нашего омметра должно стоять отметка 1 кОм? А 300 Ом? Какое сопротивление еще можно измерять нашим прибором со сколь-нибудь разумной точностью, если суммарная погрешность измерений тока лежит в пределах ±2 деления шкалы (всего на шкале миллиамперметра 100 одинаковых делений)?

А.Простов

Ф1830. Для определения емкости C конденсатора большой емкости применяется следующий метод. Конденсатор заряжают до напряжения батарейки, а затем разряжают его несколько раз при помощи конденсатора известной емкости C_0 = 10 мкФ, который каждый раз присоединяют к выводам батарейки, а затем подключают параллельно выводам конденсатора емкостью C в противоположной полярности – «плюсом» к «минусу». Так повторяют определенное число раз, а затем проверяют остаточный заряд конденсатора емкостью C, подключая к нему микроамперметр. После 8 повторов максимальное отклонение стрелки составило 10 делений. В следующем опыте после 9 повторов стрелка отклонилась на 20 делений в другую сторону. Определите по этим данным емкость C.

З.Рафаилов

Ф1831. Источник переменного напряжения $U = U_0 \cos \omega t$ подключен к последовательно соединенным конденсатору емкостью C = 1 мкФ и катушке индуктивностью L = 1 Гн. Вольтметр, присоединенный к источнику, показывает напряжение U_1 = 1В, а если подключить его к катушке, он покажет U_2 = 100 В. Какой может быть частота источника ω? Элементы цепи считайте при расчете идеальными. А если катушка намотана проводом, имеющим сопротивление, то при каком его сопротивлении описанное выше возможно?

А.Зильберман

Ф1832. Плоская монохроматическая волна с длиной $\lambda = 0{,}55$ мкм падает перпендикулярно на очень тонкий плоский непрозрачный лист. В листе прорезаны две длинные параллельные щели шириной 0,5 мм и 1 мм, а расстояние между ближайшими краями щелей составляет 0,5 мм. На расстоянии 10 м от листа параллельно ему расположен экран для наблюдения интерференции. На каком расстоянии от главного максимума располагается ближайшая серая полоса? Рассчитайте то же для ближайшей черной полосы.

А.Волнов

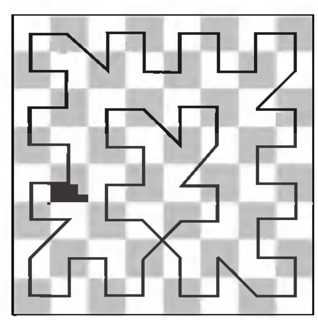
Решения задач М1796–М1800, Ф1808–Ф1817

М1796. *Король обошел шахматную доску, побывав на каждом поле по одному разу, и последним ходом вернулся на исходное поле. Когда соединили центры полей, которые он последовательно проходил, получилась замкнутая ломаная из 64 звеньев (каждому ходу соответствует одно звено). Оказалось, что никакие два соседних звена не лежат на одной прямой. Докажите, что наименьшее возможное число диагональных ходов равно 8.*

Назовем угловое поле и еще два поля, соседние с ним по стороне, *угловой группой*. Всего, таким образом, получим 4 угловые группы. Докажем, что хотя бы одна клетка каждой угловой группы является концом (или, если хотите, началом) диагонального звена. Для этого допустим обратное – что это не так, и рассмотрим любую уголовую группу, для определенности левую нижнюю (поля a1, a2 и b1). Так как от поля a1 не отходит диагональное звено, то поле a1 соединяется «прямыми» звеньями с полями a2 и b1. Далее, от полей a2 и b1 диагональные ходы не отходят, и, кроме того, поле a2 не может соединяться с полем a3 (так как получатся два соседних звена a1-a2-a3, лежащих на одной прямой), а также поле b1 не может соединяться с полем c1 (по аналогичной причине). Что же выходит? Единственные возможные звенья, отходящие от полей a2 и b1, ведут в одно и то же поле b2. Противоречие. Значит, хотя бы одна клетка каждой угловой группы является концом диагонального звена. Заметим также, что никакие две клетки из разных угловых групп не могут соединяться *общим* диагональным звеном (слишком далеко они расположены одна от другой). Таким образом, как минимум 4 диагональных хода (вблизи углов) должны быть.

Запомним пока этот результат и введем еще кое-какие термины. А именно: центральную часть доски размером 4×4 назовем *середкой*, а все остальное – *каймой* (с «шириной», равной 2 клеткам). Понятно, что должны быть ходы, соединяющие середку и кайму между собой (поскольку король обошел *всю* доску). Докажем следующий факт: *любой ход, соединяющий середку и кайму, либо сам диагональный, либо каждому такому ходу можно поставить в соответствие диагональный ход, целиком лежащий на кайме (причем этот ход не является ни одним из рассмотренных выше «вблизиугольных» ходов).* Итак, рассмотрим любой ход, соединяющий середку и кайму. Если он диагональный, то доказывать здесь нечего. Пусть он не диагональный, а «прямой». Для определенности рассмотрим ход, которому соответствует звено d2-d3 (для других ходов доказательство аналогично). Тогда хотя бы одно звено, отходящее от поля d1, должно быть диагональным. В самом деле, звена d1-d2 быть не может (ибо тогда соседние звенья d1-d2-d3 лежали бы на одной прямой), и если диагонального звена нет, то остается единственная возможность: звенья c1-d1-e1, опять-таки лежащие на одной прямой. Таким образом, каждому «прямому» ходу, соединяющему середку и кайму, соответствует диагональный ход на кайме (или сам этот ход является диагональным). Отметим напоследок, что никакой из этих диагональных ходов не является одновременно каким-либо из ранее рассмотренных диагональных ходов «вблизи углов».

Итак, если центр и середку соединяют N ходов, то (с учетом «вблизиугольных» диагональных ходов) общее число диагональных ходов не меньше $N + 4$. Так как путь короля замкнутый, то сколько раз король переходит с каймы на середку, столько раз и возвращается обратно. Поэтому N – четное число. Если $N \geq 4$, то общее число диагональных ходов получается не меньше 8. Рассмотрим отдельно случай $N = 2$ и убедимся, что и здесь общее число диагональных ходов не меньше 8. Для этого докажем, что при $N = 2$ *внутри* середки *непременно* будет хотя бы два диагональных хода. Итак, пусть некоторые две (ровно две!) клетки на границе середки соединены звеньями с какими-то полями каймы. Разобьем середку на 4 квадрата размером 4×4. В силу вечного принципа Дирихле хотя бы два из них *не содержат* ни одной из этих самых двух клеток, соединенных с каймой. Пусть для определенности один из этих квадратов – левая нижняя четвертушка середки, т.е. состоит из полей c3, c4, d3 и d4. Докажем, что хотя бы от одной из трех клеток – c3, c4, d3 – отходит диагональное звено. Как доказать? Да очень просто – точно так же, как мы в начале решения доказывали наличие диагонального звена, отходящего хотя бы от одного из полей a1, a2, b1. В самом деле, кроме двух звеньев, середка не имеет ничего общего с каймой, так что клетки c3, c4, d3 являются такими же угловыми полями для середки – своеобразной «внутренней доски». И доказательство совершенно аналогично.



Таким образом, если середка соединена с каймой ровно двумя звеньями, то внутри середки есть еще по крайней мере два диагональных звена.

Итак, всего на доске не меньше 8 диагональных ходов. С другой стороны, путь короля, содержащий ровно 8 диагональных ходов, существует (см. рисунок). Так что окончательный ответ: 8.

И.Акулич

М1797. *Красные и синие точки, строго чередуясь, разделили окружность на 2n дуг. Из них любые две смежные дуги различаются по длине на 1. Докажите, что n-угольник с красными вершинами и n-угольник с синими вершинами имеют равные периметры и равные площади.*

Ввиду геометрического смысла задачи начальное n, для которого реализуется ее утверждение, равно 2. Тогда четыре точки, две красные и две синие, разделили окружность на четыре дуги. Если длина минимальной дуги равна l, то возможны два варианта для последовательно выписанных длин четырех дуг: (l, $l+1$, $l+2$, $l+1$) и (l, $l+1$, l, $l+1$). И в том, и в другом варианте n-угольник с красными вершинами и n-угольник с синими вершинами будут «двуугольниками», т.е. удвоенными хордами (хорда с красными концами и хорда с синими концами), и притом равной длины. Периметры таких двуугольников равны, а площади их тоже раны, ибо равны нулю.

Обратимся к общему случаю. Выпишем последовательно длины $2n$ дуг, на которые разделена окружность:

$$l_1, l_2, l_3, \ldots, l_{2n}. \qquad (1)$$

При этом $|l_i - l_{i+1}| = 1$ для $1 \le i < 2n$, а также $|l_{2n} - l_1| = 1$. Наряду с последовательностью (1) рассмотрим две другие последовательности, содержащие по n чисел:

$$l_1 + l_2,\ l_3 + l_4,\ \ldots,\ l_{2n-1} + l_{2n} \qquad (2)$$

и

$$l_{2n} + l_1,\ l_2 + l_3,\ \ldots,\ l_{2n-2} + l_{2n-1}. \qquad (3)$$

Можно считать, что в (2) последовательно выписаны n дуг, стягивающих стороны n-угольника с красными вершинами, а в (3) – длины дуг, стягивающих стороны n-угольника с синими вершинами. Утверждается, что последовательности (2) и (3) эквивалентны в том смысле, что всякое число, встречающееся сколько-то раз в одной из них, столько же раз встречается и в другой. Это без затруднений можно доказать методом математической индукции по n. При переходе $n \to n+1$ из последовательности (1), содержащей $2n+2$ чисел, мы убираем минимальное число и соседнее с ним, и, воспользовавшись предположением индукции, показываем, что соответствующие последовательности (2) и (3) для случая $n+1$ тоже будут эквивалентны.

Так как n-угольник с красными вершинами и n-угольник с синими вершинами имеют одни и те же стороны, то их периметры равны. Но и площади их тоже равны, ибо они вписаны в одну окружность.

В.Произволов

M1798. *Известно, что в некотором городе живут 1000 человек и ровно 300 из них – честные. Остальных назовем хитрыми. На некоторые вопросы хитрые отвечают правду, а на некоторые лгут по своему усмотрению. Сколько хитрых людей мы можем обнаружить, задавая жителям произвольное число вопросов, при условии, что жители все друг о друге знают?*

Мы сможем обнаружить 100 хитрых людей. Спросим каждого жителя про честность каждого, в том числе и про его собственную честность.

Для каждого человека a обозначим множество людей, про которых a сказал, что они честные, через $S(a)$.

Введем три способа определения заведомо хитрых людей:

а) человек заведомо хитрый, если он сказал про себя, что он хитрый;

б) человек заведомо хитрый, если он назвал честными не 300 человек;

в) если a сказал, что b честный и $S(a)$ не равно $S(b)$, то a – хитрый.

Действительно, если a был бы честным, то и b был бы честным и на все вопросы они дали бы одинаковые ответы.

Исключим уже определенных хитрых из рассмотрения.

Тогда оставшиеся люди разобьются на группы по 300 человек такие, что все люди из одной группы говорят про всех людей из этой же группы, что они честные, а про всех людей из остальных групп – что они хитрые. Докажем это. Пусть a про 300 человек сказал, что они честные. Все эти люди дали такие же ответы (в противном случае они были бы заведомо хитрыми по способу в)). Никто другой не может сказать ни про одного из этих 300 человек, что он честный (способ а)). Так как максимальное количество групп по 300 человек три, то количество обнаруженных хитрых не меньше 100.

Докажем, что при правильной стратегии хитрых мы сможем выявить не больше 100 хитрых людей.

Хитрые должны создать две группы по 300 человек, и каждый из них должен говорить, что в его группе все честные, а все остальные – хитрые. На более сложные вопросы типа «Правда ли, что размер обуви самого высокого честного плюс количество букв в имени самого старого хитрого равняется простому числу?» каждый человек должен отвечать так, как он ответил бы, если бы его группа состояла из честных, а все остальные были бы хитрыми.

Н.Васильев, Б.Гинзбург

M1799*. *Натуральные числа x и y таковы, что сумма $xy + x + y$ дает квадрат целого числа. Докажите, что найдется натуральное число z такое, что каждая из семи сумм $xy + z$, $yz + x$, $zx + y$, $yz + y + z$, $zx + z + x$, $xy + yz + zx$ и $xy + yz + zx + x + y + z$ дает квадрат целого числа.*

Предъявим выражение натурального числа z в явном виде. Положим $z = x + y + 2m + 1$, где $m = \sqrt{xy + x + y}$. Выпишем семь равенств:

$$yz + y + z = (y + m + 1)^2,$$

$$zx + z + x = (x + m + 1)^2,$$

$$xy + z = (m + 1)^2,$$

$$yz + x = (y + m)^2,$$

$$zx + y = (x + m)^2,$$

$$xy + yz + zx = (x + y + m)^2,$$

$$xy + yz + zx + x + y + z = (x + y + m + 1)^2.$$

Справедливость каждого из этих равенств проверяется непосредственно, и вместе с тем утверждение задачи доказано.

Пар чисел x и y, удовлетворяющих условиям задачи, существует бесконечно много.

В.Произволов

М1800. *Докажите, что сумма квадратов площадей граней любого тетраэдра равна учетверенной сумме квадратов площадей трех его сечений, каждое из которых проходит через середины четырех ребер.*

Сначала докажем следующее утверждение.

Теорема косинусов для тетраэдра. Пусть S_0, S_1, S_2, S_3 – площади граней тетраэдра, α_{ij} – двугранный угол между гранями с площадями S_i и S_j. Тогда

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - 2S_1S_2\cos\alpha_{12} - 2S_1S_3\cos\alpha_{13} - 2S_2S_3\cos\alpha_{23}.$$

Доказательство. Так как площадь любой грани тетраэдра равна сумме площадей проекций на нее остальных граней, имеем

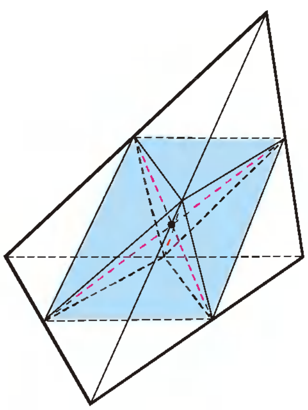
$$S_0 = S_1\cos\alpha_{01} + S_2\cos\alpha_{02} + S_3\cos\alpha_{03},$$

$$S_1 = S_0\cos\alpha_{01} + S_2\cos\alpha_{12} + S_3\cos\alpha_{13},$$

$$S_2 = S_0\cos\alpha_{02} + S_1\cos\alpha_{12} + S_3\cos\alpha_{23},$$

$$S_3 = S_0\cos\alpha_{03} + S_1\cos\alpha_{13} + S_2\cos\alpha_{23}.$$

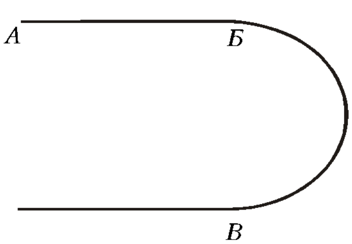
Умножив второе равенство на S_1, третье на S_2, четвертое на S_3 и вычтя из их суммы первое, умноженное на S_0, получим утверждение теоремы.



Теперь четырьмя плоскостями, параллельными граням тетраэдра и проходящими через середины его ребер, отрежем от него четыре вдвое меньших тетраэдра. Получим многогранник, ограниченный 8 треугольниками. Серединные сечения исходного тетраэдра разбивают этот многогранник на 8 тетраэдров, основания которых равны уменьшенным вдвое граням исходного, а боковые грани – четвертям его серединных сечений (см. рисунок). Если применить к каждому из них теорему косинусов и сложить полученные равенства, то каждое из удвоенных произведений войдет в сумму с противоположными знаками, и в результате будет получено утверждение задачи.

А.Заславский

Ф1808. *Траектория точки состоит из отрезка прямой АБ длиной L и полуокружности БВ радиусом R, причем прямая касается окружности (см. рисунок). За какое минимальное время точка проедет из А в В? Начальная скорость равна нулю, а ускорение все время постоянно по величине и равно a.*



Скорость движения точки по окружности при заданных в условии ограничениях не может превышать $v_m = \sqrt{aR}$. Следовательно, к моменту перехода на окружность необходимо иметь именно такую скорость (больше нельзя – не удержаться на окружности, а меньше – нет смысла). Для разгона по прямой от нуля до этой скорости нужно пройти путь $L_0 = v_m^2/(2a) = R/2$. Если $L < L_0$, то задача сильно усложняется – придется «доразгоняться» на окружности, а там касательная составляющая ускорения уже не постоянна (решение задачи про разгон на окружности – Ф1583 – см. в «Кванте» №3 за 1997 г.). При $L > L_0$ все довольно просто – нужно разогнаться до максимально возможной скорости, а затем начать торможение и к концу отрезка $АБ$ снизить скорость до $v_m = \sqrt{aR}$. Обозначим время дополнительного разгона через t (столько же займет и торможение). Тогда для этого времени t получим уравнение

$$\frac{1}{2}\left(L - L_0\right) = v_m t + \frac{1}{2}at^2,$$

откуда

$$t = \sqrt{\frac{L + R/2}{a}} - \sqrt{\frac{R}{a}}.$$

Теперь легко найти полное минимальное время движения:

$$T = \frac{L_0}{v_m/2} + 2t + \frac{\pi R}{v_m} = (\pi - 1)\sqrt{\frac{R}{a}} + 2\sqrt{\frac{L + R/2}{a}}.$$

А.Простов

Ф1809. *Три маленьких груза массой М каждый соединены тонкими легкими стержнями длиной L, образуя треугольную конструкцию АБВ. Этот треугольник скользит по гладкому горизонтальному столу. В некоторый момент скорость точки А направлена вдоль АБ и равна v, а скорость точки Б в этот же момент параллельна БВ. Найдите скорость точки В и силу натяжения стержней.*

Стол гладкий и горизонтальный, поэтому скорость центра масс системы $АБВ$ постоянна и угловая скорость вращения тоже не меняется. Проекция скорости точки $Б$ на $АБ$ равна проекции скорости точки $А$ на $АБ$, тогда мгновенная скорость точки $Б$ равна $v_Б = 2v$, а ее «перпендикулярная» составляющая равна $2v\sin 60^\circ = v\sqrt{3}$. В связанной с точкой $А$ системе отсчета скорость точки $Б$ определяется ее вращением вокруг $А$, т.е. равна $v\sqrt{3}$, такая же скорость вращения и у точки $В$ (она направлена перпендикулярно $АВ$). В неподвижной системе осталось сложить векторы $\vec{v}$ и $\vec{v}\sqrt{3}$. Поскольку угол между ними равен 150°, по теореме косинусов квадрат искомой скорости равен $\left(v^2 + 3v^2 - 2vv\sqrt{3}\cos 150^\circ\right) = 7v^2$. Тогда мгновенная скорость точки $В$ равна $v\sqrt{7}$.

Угловую скорость вращения системы $АБВ$ можно найти множеством разных способов. Рассмотрим, например, поворот отрезка $АБ$ за очень малый интервал времени. В поступательно движущейся со скоростью v вдоль направления $АБ$ системе отсчета точка $А$ неподвижна, а скорость точки $Б$ равна $v\sqrt{3}$ и перпендикулярна $АБ$, тогда угловая скорость равна $\omega = \left(v\sqrt{3}\right)/L$.

Теперь найдем силы натяжения стержней (очевидно, они все одинаковы):

$$2T\cos 30^\circ = \frac{M\omega^2 L}{\sqrt{3}},$$

откуда

$$T = \frac{Mv^2}{L}.$$

А.Старов

Ф1810. *Клин массой M_1 с углом α при вершине может свободно двигаться по гладкой горизонтальной поверхности. На нем расположен еще один клин массой M_2 с таким же углом при вершине так, что его верхняя плоская поверхность горизонтальна (рис.1). Сверху на этот клин положили грузик массой m. С какой силой нужно действовать по горизонтали на нижний клин, чтобы грузик некоторое время мог оставаться неподвижным?*

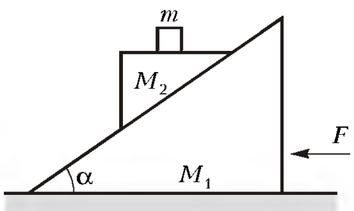


Рис.1

Для выполнения условия задачи сумма сил, действующих на грузик массой m, должна быть равна нулю. Это возможно, если клин массой M_2 имеет точно такое же ускорение a, как и клин массой M_1, – будем считать, что они едут вместе (проскальзывание с постоянной

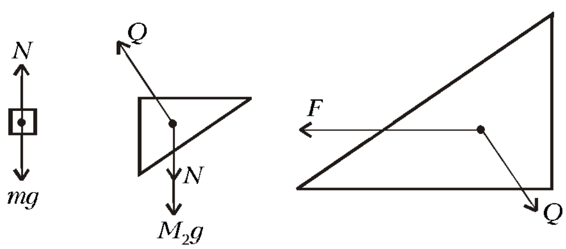


Рис.2

относительной скоростью не меняет дела). Запишем соответствующие уравнения движения (см. рис.2) для грузика:

$$mg - N = 0,$$

для верхнего клина по вертикали:

$$M_2 g + N - Q\cos\alpha = 0$$

и по горизонтали:

$$Q\sin\alpha = M_2 a,$$

а также для нижнего клина (нарисованы только силы, дающие проекции на горизонтальное направление):

$$F - Q\sin\alpha = M_1 a.$$

Решая эти уравнения, найдем

$$F = \left(M_1 + M_2\right)\left(1 + m/M_2\right) g \operatorname{tg}\alpha.$$

З.Рафаилов

Ф1811. *Анна Каренина слышит звук камертона и с удивлением понимает, что вместо ноты «ля» второй октавы звучит нота «си». Приближается поезд или удаляется? С какой скоростью? Что можно сказать о музыкальном слухе героини? Нужные данные найдите где угодно.*

Частота f ноты «си» в $2^{1/12} = 1{,}06$ раза больше «правильной» частоты f_0 ноты «ля». В соответствии с эффектом Доплера это означает, что поезд приближается со скоростью

$$v = c\left(\frac{f}{f_0} - 1\right) = 340\ \text{м/с} \cdot 0{,}06 = 20\ \text{м/с} = 72\ \text{км/ч}$$

(здесь c = 340 м/с – скорость звука в воздухе). Многовато для тех времен. Скорее всего, героиня одноименного романа не очень точно определила изменение тональности звука – должно быть, волновалась…

Л.Толстов

Ф1812. *Во сколько раз отличается плотность сухого воздуха при давлении 1 атм и температуре +20 °С от плотности влажного воздуха при тех же условиях? Пар считать насыщенным.*

Примем давление насыщенного пара при данной температуре равным 2 кПа. При общем давлении 100 кПа 2% молекул сухого воздуха в выбранном объеме заменяются молекулами воды (если общее давление при данной температуре не изменилось, то число частиц осталось прежним). Значит, отношение плотностей влажного и сухого воздуха равно

$$\frac{\rho_{\text{вл}}}{\rho_{\text{сух}}} = \frac{29 \cdot 0{,}98 + 18 \cdot 0{,}02}{29} = \frac{28{,}78}{29} = 0{,}9924,$$

где 29 г/моль – молярная масса воздуха, 18 г/моль – молярная масса водяных паров. Таким образом, плотность влажного воздуха меньше примерно на 3/4%.

З.Рафаилов

Ф1813. *Порция кислорода участвует в цикле, состоящем из изотермического расширения, сжатия до начального объема при неизменном давлении и нагревания до начальной температуры при постоянном объеме. Цикл длится 10 секунд, на изотерме газ получает 1000 Дж тепла, а в изобарном сжатии над ним совершается работа 700 Дж. Найдите по этим данным среднюю механическую мощность, развиваемую в цикле, и термодинамический КПД.*

Работу в цикле и механическую мощность найти совсем легко. Действительно, полученные на изотерме 1000 Дж тепла полностью переходят в работу, при сжатии работа газа равна –700 Дж, на изохоре работа нулевая, тогда работа в цикле составляет A = = 1000 Дж – 700 Дж = 300 Дж и при длительности цикла $\tau = 10$ с мощность равна

$$N = \frac{A}{\tau} = 30\ \text{Вт}.$$

Для нахождения термодинамического КПД η нужно вычислить полученное в цикле количество теплоты. Тепло газ получает при изотермическом расширении и при изохорическом нагревании. Первое слагаемое нам известно, второе найдем, исходя из того, что при изобарном сжатии внутренняя энергия уменьшается на некоторую величину, но на эту же величину она должна увеличиться при нагревании до первоначальной температуры (возвращение на изотерму). Этой же величине равно количество теплоты, полученное газом при изохорическом нагревании. Итак (поскольку газ двухатомный),

$$\Delta U = 2{,}5\nu R\Delta T = 2{,}5p\Delta V = 2{,}5\cdot 700\text{ Дж} = 1750\text{ Дж}.$$

Тогда полное количество теплоты составляет

$$Q = 1000\text{ Дж} + 1750\text{ Дж} = 2750\text{ Дж},$$

и термодинамический КПД равен

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{300\text{ Дж}}{2750\text{ Дж}} = 0{,}11 = 11\%.$$

З.Циклов

Ф1814. *Одна из квадратных пластин плоского конденсатора закреплена горизонтально, и на нее помещена большая тонкая пластина из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1$. По гладкой верхней поверхности листа диэлектрика может свободно скользить массивная вторая пластина конденсатора, имеющая такие же размеры, как и первая. На обкладки конденсатора помещены заряды Q и $-Q$, и система приведена в равновесие. Сдвинем верхнюю пластину по горизонтали на малое расстояние x параллельно одной из сторон квадрата и отпустим. Найдите период колебаний этой пластины. Площадь каждой из обкладок S, толщина диэлектрика d существенно меньше размеров пластин. Масса подвижной обкладки M.*

Расчет сил (горизонтальных!) в данном случае совсем не прост – они обусловлены так называемыми «краевыми эффектами». Но можно посчитать не «в лоб».
Запишем энергию конденсатора в равновесном положении пластин и при смещении верхней пластины на x:

$$W_0 = \frac{Q^2}{2C_0} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 a^2},$$

$$W_1 = \frac{Q^2}{2C_1} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 a(a-x)},$$

где $a = \sqrt{S}$ – сторона квадратной пластины. Найдем разность этих энергий с учетом малости x по сравнению с размером a:

$$W_1 - W_0 = \frac{Q^2 dx}{2\varepsilon_0 a^3}.$$

Видно, что эта величина пропорциональна смещению x – получается ПОСТОЯННАЯ возвращающая сила, колебания вовсе не гармонические! Это означает, в частности, что период этих колебаний зависит от начального смещения (амплитуды) x.
Итак, сила равна

$$F = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 a^3},$$

тогда ускорение (обозначим его b, поскольку буква a занята) равно

$$b = \frac{Q^2 d}{2M\varepsilon_0 a^3},$$

а четверть периода колебаний равна времени возвращения пластины в положение равновесия:

$$0{,}25T = \sqrt{2x/b}.$$

Отсюда находим период колебаний:

$$T = 8\sqrt{\frac{\varepsilon_0 xMa^3}{Q^2 d}} = 8\sqrt{\frac{\varepsilon_0 xMS^{3/2}}{Q^2 d}}.$$

А.Зильберман

Ф1815. *Для измерения сопротивления резистора собрана схема из батарейки, амперметра и вольтметра, причем вольтметр подключен параллельно резистору и показывает 1 В, а амперметр подключен к ним последовательно и показывает 1 А. После того как приборы в схеме поменяли местами, вольтметр стал показывать 2 В, а амперметр показал 0,5 А. Считая батарейку идеальной, определите по этим данным сопротивление резистора. Хороши ли используемые приборы?*

Напряжение батарейки в обоих случаях одно и то же, поэтому, обозначив сопротивление амперметра r, получим

$$1\text{ В} + r\cdot 1\text{ А} = 2\text{ В} + r\cdot 0{,}5\text{ А},$$

откуда

$$r = 2\text{ Ом}.$$

Тогда напряжение батарейки составляет 3 В, напряжение резистора в обоих случаях равно 1 В, а токи через него одинаковы и составляют 0,5 А. При этом получается, что резистор и вольтметр имеют одинаковые сопротивления – по 2 Ом, как и амперметр.
Заметим, что амперметр довольно плохой – при таких измеряемых токах сопротивление его слишком велико. Вольтметр ОЧЕНЬ плохой (еще один такой же амперметр, но с замененной шкалой?). И только резистор и батарейка (особенно батарейка) в этой задаче на что-то годны!

Р.Александров

Ф1816. *На тороидальный сердечник, сделанный из материала с очень большой магнитной проницаемостью, намотаны очень тонким проводом две катушки – с числом витков 500 и 510. При измерении индуктивности первой из катушек на постоянном токе – по значению магнитного потока катушки при заданном токе через нее – получили величину 20 Гн. Какова индуктивность второй катушки? Какая индуктивность получится при последовательном соединении катушек? При параллельном соединении? Выводы катушек сделаны проводом большого сечения. Рассеяние магнитного потока считать малым.*

Измерять индуктивность на постоянном токе можно несколькими способами. Самый распространенный способ – задать ток через катушку, а потом измерить ее магнитный поток по отбросу стрелки подключенного к ней баллистического гальванометра при отключении катушки от внешней цепи. (Для катушки с большой индуктивностью гальванометр не подходит, нужно применять куда более грубый прибор, но именно в баллистическом режиме – когда ток через прибор практически перестает течь, а стрелка только начинает отклоняться и продолжает делать это по инерции.) Можно также задать ток через катушку, а потом, размыкая внешнюю цепь, при помощи диода перекачать ее энергию в конденсатор известной емкости и измерить его напряжение (или заряд). В общем, сделать это можно.

Вернемся к задаче. Для магнитного потока одной катушки поле в сердечнике $B \sim In$, где I – ток, а n – число витков, а магнитный поток через все витки катушки $\Phi = BSn \sim In^2$, где S – сечение сердечника. Тогда индуктивность первой катушки равна $L_1 = kn_1^2$, откуда $k = 20\ \text{Гн}/500^2 = 8 \cdot 10^{-5}$ Гн. Соответственно, индуктивность второй катушки равна

$$L_2 = kn_2^2 = 20{,}8\ \text{Гн}.$$

При соединении катушек существенно направление токов через них – переключая выводы одной из катушек наоборот, мы изменяем направление поля, создаваемого витками этой катушки, и изменяем знак магнитного потока, пронизывающего эту катушку. Пусть при последовательном соединении катушек витки второй как бы являются продолжением витков первой – поля и потоки при этом складываются: $B = B_1 + B_2 \sim I(n_1 + n_2)$, $\Phi \sim I(n_1 + n_2)^2$, а общая индуктивность равна

$$L_3 = k(n_1 + n_2)^2 = 81{,}6\ \text{Гн}.$$

При противоположном включении катушек поля вычитаются, остается только поле 510 – 500 = 10 витков. Потоки полей частично компенсируются, и остается поток только через 10 витков. Значит, индуктивность будет равна

$$L_4 = k(n_1 - n_2)^2 = 8 \cdot 10^{-3}\ \text{Гн}.$$

Для параллельного подключения все намного сложнее – токи распределяются обратно пропорционально сопротивлениям обмоток (не сразу, нужно подождать установления), а они в наших условиях пропорциональны числам витков катушек. Для случая противоположного включения обмоток получается нулевое суммарное поле, поля катушек в точности компенсируют друг друга, и индуктивность оказывается нулевой. При «согласном» подключении обмоток поля обмоток одинаковы и складываются. А вот поток нужно считать только через одну обмотку (это станет особенно ясным, если рассмотреть две одинаковые обмотки, – индуктивность в этом случае получается такая же, как для одной обмотки). В результате мы получим индуктивность чуть больше 20 Гн.

А.Повторов

Ф1817. *Искусственный хрусталик для глаза сделан так, что позволяет четко видеть удаленные предметы. В отличие от естественного хрусталика, кривизна поверхностей которого может изменяться (при этом глаз фокусируется на выбранных объектах – это называется аккомодацией глаза), искусственный хрусталик жесткий и перестраиваться не может. Оцените оптическую силу очков, дающих возможность читать книгу. Расстояние от глаза до книги принять равным примерно 0,3 м.*

Назначение очков – располагать изображение предмета там, где хозяину очков удобно его наблюдать. В нашем случае читатель держит книгу на расстоянии 0,3 м от глаза, а изображение должно получиться вдали. Это означает, что книга находится практически в фокальной плоскости линзы, т.е. фокусное расстояние линзы составляет F = 0,3 м. Оптическая сила при этом равна $D = 1/F$ = 3,3 дптр.

Большая точность в таком расчете неуместна, нужно взять очки +3 или +3,5 диоптрии. Учет расстояния между глазом и линзой (примерно 1 см) практически не меняет результат.

Автор задачи с удовлетворением сообщает, что после обследования с помощью сложного прибора (содержащего лазер и встроенную ЭВМ) ему были прописаны в описанном случае именно такие очки!

А.Зильберман

Вниманию наших читателей!

Дорогие друзья!

К сожалению, в этот раз вы не получите Приложения к очередному номеру нашего журнала («Квант» № 3 за 2002 год).

Мы были вынуждены пойти на эту меру в связи с непредвиденными расходами – введением 10-процентной ставки НДС на продукцию средств массовой информации, решение о которой было принято Государственной Думой РФ уже после окончания подписной компании на периодические издания.

Задачи

1. Брат и сестра имеют одну фамилию, но я не смог назвать фамилию брата, узнав фамилию сестры. Как такое могло случиться?

В.Произволов

2. Чтобы почтовый индекс журнала «Квант» легче запомнился, решите вот такой ребус:

Одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры.

И.Акулич

3. Как, не имея никаких иных инструментов, кроме ножниц, разрезать два бумажных квадрата площадью 9 и 16 квадратных единиц на прямоугольные куски, из которых можно составить квадратный лист площадью 25 квадратных единиц?

Р.Сарбаш

4. Можно ли представить число 100 в виде суммы ста последовательных целых чисел? А число 101 — в виде суммы ста одного последовательного целого числа?

В.Сендеров

5. Штирлиц должен передать в Центр набор из четырех секретных натуральных чисел $\{a, b, c, d\}$. Чтобы никто не догадался, он отправил набор чисел $\{a+b, a+c, a+d, b+c, b+d\}$ неизвестно в каком порядке. Центр, получив от Штирлица числа 13, 15, 16, 20, 22, расшифровал сообщение и нашел требуемый набор из четырех секретных чисел. Какие числа Штирлиц должен был передать в Центр?

А.Спивак

Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

Ишаки в наследство

И.АКУЛИЧ

— Твоя история о наследнике калифа весьма занятна и поучительна, о многомудрый Гуссейн Гуслия,[1] — сказал Ходжа Насреддин, стараясь добавить в свой голос побольше масла. — Но где наследники, там и наследство, и когда дело доходит до его дележа, вспыхивают порой такие страсти, по сравнению с которыми великое побоище на бухарском базаре (где тебя угораздило зачем-то переодеться женщиной) покажется мирной и ласковой беседой добрых друзей. Встречал я, помнится, двоих братьев, не поделивших старую облезлую козу. Они настолько упорствовали в своих правах, что каждый не позволял другому даже кормить *свое* животное. Результат печален: коза сдохла, ее шкуру прибрал себе светлейший эмир бухарский, а все имущество братьев пошло на уплату судебных издержек.

— К чему это ты клонишь? — раздраженно воскликнул Гуссейн Гуслия (напоминание о злосчастном переодевании, виновник которого был хорошо известен, больно задело его). — Я сам был единственным наследником моего отца, а у меня наследников нет...

— Не о тебе речь, славный Гуссейн Гуслия, — так же елейно продолжал Насреддин. — Но как-то в Бухаре одному неглупому человеку пришлось помогать делить наследство, состоящее из одиннадцати ишаков, между тремя братьями. Согласно завещанию, старший брат должен был получить половину всех ишаков, средний — четверть, а младший — шестую часть. Наследники попали в затруднительное положение: ведь 11 не делится ни на 2, ни на 4, ни на 6. Не рубить же ишаков на части! Тем не менее этот весьма неглупый, как я уже сказал, человек нашел достойный выход из положения. Сумеешь ли сообразить, какой?

Гуссейн Гуслия задумался лишь на мгновение и тут же просиял, как начищенный медный кумган.

— Сумею! — с гордостью провозгласил он. — И ты, порождение шайтана, будешь вынужден зарезать свинью своей наглости ножом восхищения перед моей мудростью и глубокомыслием. Упомянутый тобой неглупый человек был все же не умнее меня, и потому я легко могу определить, что он сделал. Он приехал туда на *собственном* ишаке и объявил: «Надеюсь, вы не откажетесь, если к вашим ишакам я добавлю своего и буду делить между вами не 11, а 12 ишаков?» Братья, конечно, согласились — ведь наследство от этого только увеличивалось. Ну, а число 12 прекрасно делится и на 2, и на 4, и на 6, так что старшему досталось $12 : 2 = 6$ ишаков, среднему $12 : 4 = 3$ ишака, и младшему $12 : 6 = 2$ ишака, а всего — обрати внимание, презренный! $6 + 3 + 2 = 11$ ишаков. То есть один ишак, как раз тот, на котором приехал этот человек, не достался никому, и на том же ишаке он уехал обратно. Вот так!

— Поразительно! — Насреддин широко раскрыл гла-

[1] См. «Квант» №2 за 2000 г.

Иллюстрации В.Акатьевой

за, изобразив крайнюю степень изумления. — Но почему такое решение привело к успеху? Ведь делил он не наследство, а *больше*, чем наследство, и все равно оказалось, что...

— Сейчас поймешь! — перебил его Гуссейн Гуслия, все больше надуваясь от важности. — Причина в том, что само завещание содержало ошибку. Ведь если братья должны были получить, соответственно, 1/2, 1/4 и 1/6 части наследства, то всего это составляет $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{11}{12}$ наследства, и непонятно, кому должна достаться оставшаяся 1/12 часть. Именно она и явилась тем самым ишаком, который был сперва добавлен, а потом изъят обратно. Ну что, готов ли ты оценить по достоинству остроту и гибкость моего ума?

— Готов, но только твою память, почтенный! — улыбнулся Насреддин. — Ибо история эта стара, как мир, и я сам слышал о ней еще в глубоком детстве, когда жил в доме моего приемного отца гончара Шир-Мамеда, мир его праху. Нет сомнения, что и ты узнал о ней из многочисленных бесед с разными людьми, коих ты за свой долгий век повидал немало. Но одно дело знать, и совсем иное — уметь применить свои знания в будущем. Поэтому позволь теперь действительно проверить и остроту, и гибкость, и все прочие достоинства твоего ума на примере случая, произошедшего со мной самим в Коканде, куда я забрел в поисках некоего Агабека, хозяина горного озера...

— Если ты его нашел, я ему не завидую, — ехидно вставил Гуссейн Гуслия.

— И опять ты прав, но речь не о том. Итак, однажды я забрел во двор, привлеченный громкими воплями, и увидел четырех человек, сцепившихся в большой клубок, катавшийся туда-сюда по земле, усыпанной вырванными из бород клочьями волос. Кое-как успокоив их, я выяснил, что эти четверо — тоже

братья, которые таким образом пытаются поделить наследство, состоящее из 25 ишаков. Одному из братьев должна была достаться половина наследства, второму — четвертая часть, третьему — шестая и четвертому — восьмая часть. Я задумался, как быть, и, поскольку день уже клонился к закату, пообещал прийти завтра, чтобы попробовать разделить наследство в соответствии с завещанием. И как ты думаешь, удалось мне это сделать?

— Нет! — злорадно воскликнул Гуссейн Гуслия. — И никакие попытки приехать, как в предыдущем случае, на своем ишаке, тебе не помогут. Ведь здесь сумма долей, причитающихся братьям, равна $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{25}{24}$, а это больше, чем целое. Приедь ты к ним хоть на дюжине ишаков — все равно при дележе их не хватит! Так что здесь тебе уж точно пришлось признать поражение, клянусь своей бородой!

— Не клянись, уважаемый, — борода может еще пригодиться. Когда я приехал к ним утром, и притом все-таки на ишаке, со двора опять был слышен шум. Оказалось, ночью неизвестный злоумышленник взломал дверь сарая и украл одного ишака! Наследство, таким образом, сократилось до 24 ишаков. Погоревав ради приличия некоторое время вместе с братьями, я обратился к ним: «Что поделаешь! Придется делить тех животных, которые остались. Тебе, первый брат, причитается половина, то есть 12 ишаков. Забирай их и отходи подальше, чтобы не мешать. Тебе, второй, полагается четверть, или 6 ишаков. Тоже забирай и отходи. А тебе, третий, досталась шестая часть — 4 ишака (тоже бери и отходи). Остался последний брат, который должен забрать восьмую часть — 3 ишака. Бери!» «Как же я возьму? — удивился последний брат. — Ведь ишаков-то осталось только два!» «Что, правда два? — поразился я. — Не может быть, пересчитай еще раз! Пересчитал? Все-таки два? О горе мне! Обсчитался! Ладно, забирай моего ишака — пусть это будет мне наказанием за глупую промашку!». Вот как закончилась эта история.

— Значит, ты ошибся! И поплатился за это! — радостно завопил Гуссейн Гуслия. — Ты был вынужден отдать им своего ишака!

— Почему же своего? — спокойно спросил Насреддин. — Я ведь сказал тебе, что ночью братьев обокрали — и я им просто вернул пропажу. Эта кража оказалась очень кстати — как будто сам Аллах помог мне!

— Аллах ли? — Гуссейн Гуслия с подозрением вгляделся в лицо собеседника.

— Ну, пусть не Аллах... Я забыл упомянуть, что еще до Коканда познакомился и сдружился с багдадским вором. Ему ничего не стоило украсть даже пару арабских скакунов из конюшни менялы Рахимбая, а увести ишака из обычного сарая — вообще пустяк. Вот так-то, мудрейший из мудрых: знание ценно своим применением, иначе оно не стоит и четверти таньга!

Физика 9–11

Публикуемая ниже заметка «Похожие движения» предназначена девятиклассникам, заметка «Преобразование электрических цепей» – десятиклассникам и «Разрешающая способность измерительных приборов» – одиннадцатиклассникам.

Похожие движения

Я.СМОРОДИНСКИЙ

Существует ряд механических движений, которые хотя и различны по природе, но описываются одними и теми же формулами. Поэтому, если мы выясним, как меняются какие-то величины при одном движении, можно сделать выводы для аналогичных.

Расскажем о двух таких движениях.

Гармонические колебания. Между движением по окружности и гармоническим колебанием можно установить полезное соответствие.

Рассмотрим материальную точку, которая движется равномерно по окружности. Ее скорость равна v и направлена по касательной к окружности. Если радиус окружности R, то центростремительное ускорение точки равно v^2/R и направлено по радиусу к центру (рис.1).

Посмотрим, как движется проекция точки на диаметр окружности. Из рисунка ясно, что если положение точки на окружности задается углом φ, то положение ее проекции определяется координатой

$$x = R\cos\varphi .$$

Проекция скорости на диаметр равна

$$u = -v\sin\varphi ,$$

а проекция ускорения –

$$a = -\frac{v^2}{R}\cos\varphi .$$

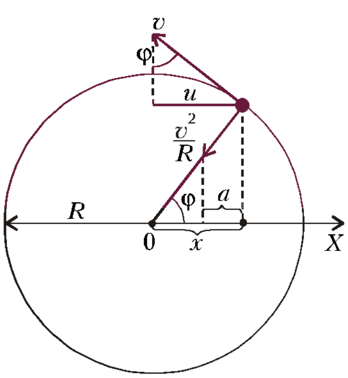


Рис. 1

Из первой и третьей формул легко получить, что

$$a = -\left(\frac{v^2}{R^2}\right)x .$$

С таким же ускорением двигалась бы материальная точка массой m под действием силы

$$F = ma = -m\left(\frac{v^2}{R^2}\right)x .$$

Сила, пропорциональная координате, называется гармонической, а движение под действием такой силы – гармоническим колебательным движением.

Введем вместо линейной скорости угловую: $\omega = v/R$. Тогда $\varphi = \omega t$, и

$$x = R\cos\omega t ,$$

$$u = -\omega R\sin\omega t ,$$

$$a = -\omega^2 R\cos\omega t .$$

Таким образом, мы получили все характеристики гармонического движения. Отсюда можно сделать вывод, что проекцию точки на окружности можно заменить реальной частицей, движение которой будет описываться полученными выше формулами.

Напомним, что входящие в уравнение второго закона Ньютона величины $\vec{F}$ и $\vec{a}$ – векторные. Следовательно, их можно спроектировать на любое направление, и зависимость между проекциями будет тоже описываться законом Ньютона.

Туннель в Земле. Покажем, что на точку, находящуюся внутри Земли, также действует гармоническая сила.

Пусть материальная точка массой m находится на расстоянии r от центра Земли. Если r больше радиуса Земли R, то на точку со стороны Земли действует сила тяготения

$$F = G\frac{Mm}{r^2} ,$$

где G – гравитационная постоянная, а M – масса Земли. Если же $r < R$, то действие, которое оказывает на точку Земля, можно разбить на две части (рис.2): действие внутренней сферы (радиусом r) и действие внешнего сферического слоя.

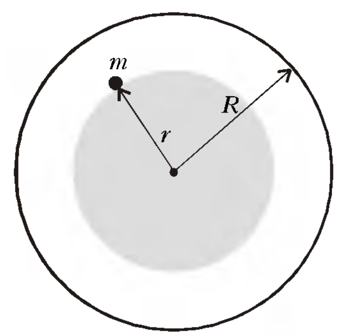


Рис. 2

Как известно, сферический слой не создает внутри себя поля тяжести. Поэтому на точку будет действовать только внутренняя часть, масса которой равна

$$M_{\text{вн}} = \frac{4}{3}\pi r^3\rho ,$$

где ρ – плотность Земли, с силой тяготения

$$F = -G\frac{M_{\text{вн}}m}{r^2} = -G\frac{4\pi\rho m}{3}r .$$

Следовательно, внутри Земли на точку действует гармоническая сила, пропорциональная расстоянию от центра Земли. Движение точки внутри Земли, например в туннеле, оказывается похожим на движение тела, подвешенного к пружине, – упругая сила пружины также пропорциональна ее растяжению.

Теперь мы можем решить такую задачу. Допустим, что через центр Земли прорыт узкий туннель (рис.3). В него из точки A уронили (без начальной скорости) камень. Камень

Опубликовано в «Кванте» №9 за 1971 год.

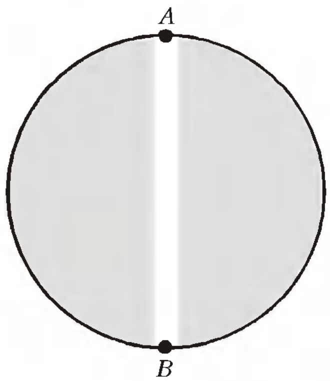


Рис. 3

долетает до точки B и начинает падать обратно, опять долетает до точки A и начинает падать к точке B, и так далее. Как найти период таких колебаний?

Фактически, эту задачу мы уже решили. Движение камня в туннеле можно рассматривать, как движение проекции точки, вращающейся вокруг Земли у ее поверхности, например спутника на круговой орбите вблизи Земли. Поэтому частота колебаний камня в туннеле равна угловой частоте вращения спутника вокруг Земли. Так как центростремительное ускорение спутника $a = \omega^2 R$ (расстояние от спутника до поверхности Земли $h \ll R$) и, с другой стороны, $a = F/m$, то угловая частота равна

$$\omega = \sqrt{\frac{a}{R}} = \sqrt{\frac{F}{mR}} = \sqrt{G\frac{4\pi\rho mR}{3mR}} = \sqrt{G\frac{4\pi\rho}{3}}.$$

Период колебаний, следовательно, равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}.$$

Отметим, что эта формула определяет и период колебаний тел в туннеле, проведенном через Землю в любом направлении (не обязательно через центр). Это следует из приведенного выше утверждения о том, что уравнение Ньютона остается справедливым, если входящие в него векторные величины заменить их проекциями на любое направление. Однако можно провести доказательство и непосредственно, заметив, что хорда во столько же раз меньше диаметра, во сколько проекция силы на направление хорды меньше самой силы.

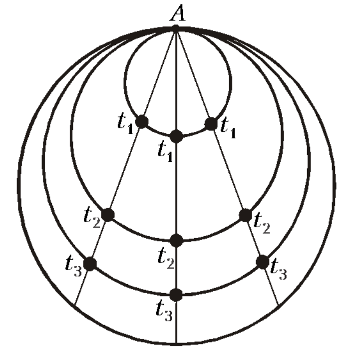


Рис. 4

Тот же период будет характеризовать и движение точки по подземному круговому туннелю с центром в центре Земли.

Теперь вы, наверное, сами можете показать, что если одновременно уронить несколько тел в разные туннели, исходящие из одной точки A (рис.4), то в любой момент времени t_1, t_2, ... они будут находиться на окружности, проходящей через точку A.

Преобразование электрических цепей

А.ЗИЛЬБЕРМАН

В этой статье рассказывается о методе, позволяющем упрощать сложные задачи по расчету электрических цепей.

Что мы понимаем под «преобразованием цепи»? Предположим, что у нас есть сложная схема из резисторов, имеющая множество выводов и подключенная к источникам. Заменим эту схему другой, но с тем же числом выводов, причем так, чтобы сопротивления между двумя любыми выводами у новой схемы были такими же, как у старой. Ясно, что источники «ничего не узнают» об этой замене и токи, потребляемые схемой, останутся прежними. Но найти эти токи, возможно, окажется проще.

Итак, если мы хотим подсчитать токи в сложной схеме, ее можно заменить более простой эквивалентной схемой. При этом токи внутри заменяемой части меняются. Поэтому так поступать можно только с той частью схемы, которая нас непосредственно не интересует.

Опубликовано в «Кванте» №3 за 1971 год.

С подобными заменами вы, конечно же, встречались. Пусть, например, в схеме два сопротивления[1] r_1 и r_2 включены последовательно. Их мы можем заменить одним, равным по величине сумме $r_1 + r_2$. Если же два сопротивления включены параллельно, то их также можно заменить одним, величина которого равна $\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$. Это – простейшие примеры преобразования цепей. Мы же остановимся на более сложных схемах.

Посмотрим, как преобразуются друг в друга схемы, имеющие по три вывода, – «звезда» и «треугольник» (рис.1).

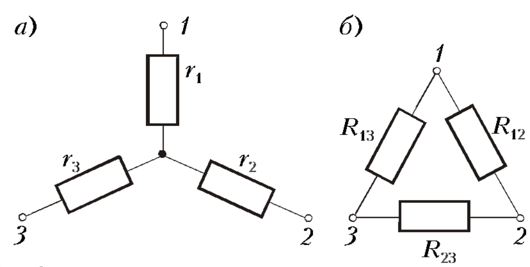


Рис. 1

Немного непривычные обозначения на рисунке 1,*б* очень удобны – индексы показывают, между какими точками включено сопротивление. Например, сопротивление R_{13} включено между точками *1* и *3* и т.д.

Если мы хотим заменить одну из этих схем другой, нужно получить такие соотношения между r и R, чтобы сопротивления между любыми точками были для обеих схем одинаковы.

В схеме «звезда» (см. рис.1, *а*) сопротивление между

[1] *Здесь и далее более правильно говорить «два резистора с сопротивлениями r_1 и r_2». (Прим. ред.)*

точками *1* и *2* равно $r_1 + r_2$, а в схеме «треугольник» оно равно $\dfrac{R_{12}\left(R_{13}+R_{23}\right)}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}$. Следовательно, для того чтобы сопротивления между точками *1* и *2* были одинаковы для обеих схем, необходимо, чтобы

$$r_1 + r_2 = \frac{R_{12}\left(R_{13}+R_{23}\right)}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}. \qquad (1)$$

Аналогично, для точек *2* и *3*

$$r_2 + r_3 = \frac{R_{23}\left(R_{13}+R_{12}\right)}{R_{12}+R_{13}+R_{23}} \qquad (2)$$

и для точек *1* и *3*:

$$r_1 + r_3 = \frac{R_{13}\left(R_{12}+R_{23}\right)}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}. \qquad (3)$$

Система уравнений (1)—(3) легко решается. Сложим все уравнения и поделим обе части на 2:

$$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{R_{12}R_{13} + R_{12}R_{23} + R_{13}R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}.$$

Вычтя теперь из этого уравнения уравнение (2), получим

$$r_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}.$$

Аналогично,

$$r_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}$$

и

$$r_3 = \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}.$$

Эти результаты легко запомнить – знаменатель всюду один и тот же, а в числителе справа дважды встречается тот же индекс, что и слева: $r_1 \to R_{12}R_{13}$, $r_2 \to R_{12}R_{23}$, $r_3 \to R_{13}R_{23}$.

Немного сложнее получить формулы для обратного преобразования:

$$R_{12} = \frac{r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3}{r_3},$$

$$R_{13} = \frac{r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3}{r_2},$$

$$R_{23} = \frac{r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3}{r_1},$$

но их также легко запомнить – числитель всюду один и тот же, а в знаменателе стоит как раз тот индекс, которого недостает слева.

Пользуясь формулами, которые мы только что получили, можно производить замену одной схемы другой. Например,

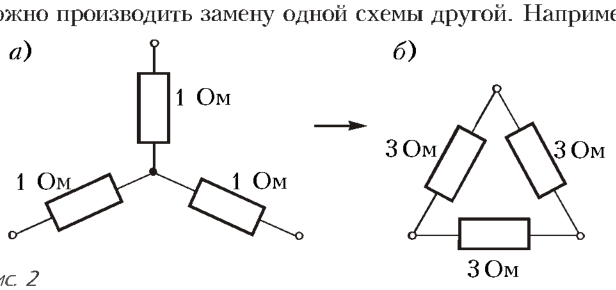


Рис. 2

«звезду» с сопротивлениями 1 Ом можно заменить «треугольником» с сопротивлениями 3 Ом (рис.2).

Решим теперь такую задачу: найдем сопротивление между точками *A* и *B* в схеме на рисунке 3.

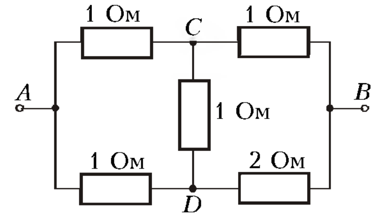


Рис. 3

Это обычная схема «мостика», но в нашей задаче «мостик» не уравновешен. Такие задачи приходится решать при помощи правил Кирхгофа. В школьной программе их нет, да и вычисления с помощью этих правил очень громоздкие – в нашем случае получилась бы система пяти уравнений с пятью неизвестными. Мы поступим проще: заменим «треугольник» *ACD* «звездой», как показано на рисунке 4. Теперь ясно, что сопротивление между точками *A* и *B* будет равно

$$R_{AB} = \frac{1}{3}\ \text{Ом} + \frac{28}{33}\ \text{Ом} = \frac{13}{11}\ \text{Ом}.$$

Мы заменяли «треугольник» *ACD* «звездой», но можно было решать задачу иначе – заменяя «звезду» *ADB* «треугольником» (проделайте это самостоятельно).

Пусть теперь к точкам *A* и *B* подключена батарея с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением и ЭДС $\mathcal{E} = 1$ В. Нужно найти ток через участок *CB*. Понятно, что преобразовать схему надо так, чтобы не затронуть интересующее нас сопротивление *CB*. Подойдет то преобразование,

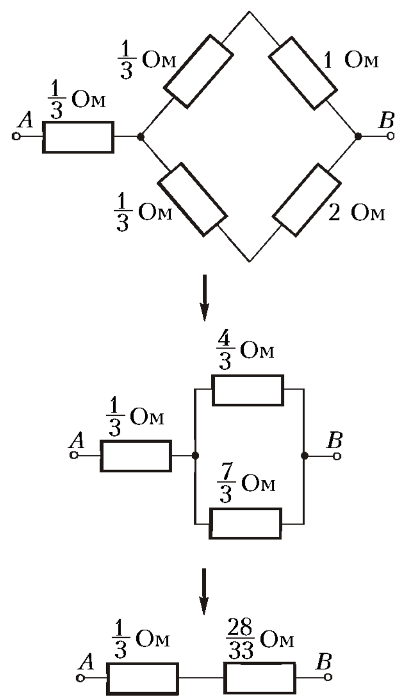


Рис. 4

которое мы делали раньше (см. рис.4). Используя, что $R_{AB} = \dfrac{13}{11}$ Ом, получим

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{AB}} = \frac{11}{13}\ \text{А}.$$

После разветвления токи в верхней и в нижней ветвях поделятся в отношении, обратном сопротивлениям ветвей:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{7}{4}.$$

(Продолжение см. на с. 34)

...не все тела в одинаковой степени обладают способностью содержать тепло, получать или передавать тепло через свою поверхность и проводить его в глубину массы.

Жан Батист Жозеф Фурье

Переход электричества от одного участка к ближайшему я принял пропорциональным электродвижущей силе в каждом участке подобно переходу теплоты, который пропорционален разности температур.

Георг Ом

...если изложенное здесь истолкование трения газов правильно, то коэффициент трения не зависит от плотности... в ближайшем будущем нам придется сопоставить свою теорию с тем, что известно о диффузии газов и о прохождении теплоты через газ.

Джеймс Клерк Максвелл

...ход вычислений теплопроводности очень похож на вычисление потока заряженных частиц в ионизированном газе.

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакомы вам явления переноса?

Что общего между проблемой подбора посуды для приготовления пищи и объяснением механизма затихания ветра или бури, выбором материала для строительства дома и решением задачи о разделении изотопов, особенностями движения летательных аппаратов и расплыванием капли чернил в стакане воды? В этих и еще очень многих, казалось бы, абсолютно различных ситуациях нам приходится сталкиваться с одним и тем же явлением — *переносом*: то тепловой энергии, то вещества, то импульса. В первом случае мы имеем дело с теплопроводностью, во втором — с диффузией, в третьем — с вязкостью, или внутренним трением.

Немудрено, что такого рода явления объединили одним названием — явления переноса. Более того, как оказалось, описывающие их математические модели тоже похожи, как две капли воды. Изучая явления порознь, как, например, Ньютон исследовал передачу тепла через вещество или устанавливал закономерности трения в жидкостях и газах, трудно было уловить такое подобие. Однако, начиная с работ Фурье, аналогии между различными физическими процессами стали не просто бросаться в глаза, но и послужили «катализатором» для некоторых выводов — например, закона Ома.

В задачах, предлагаемых вам сегодня, практически нет математики, особенно ярко демонстрирующей связь между явлениями переноса. Рассчитываем, однако, что вы пока и без ее помощи уловите качественную внутреннюю общность внешне разнородных процессов и сумеете совершить перенос своих новых знаний, наблюдений и обнаруженных аналогий в другие области физики.

Вопросы и задачи

1. Почему запах краски ощущается не только вблизи свежевыкрашенной поверхности, но и далеко от нее?

2. Зачем сахар размешивают ложкой в стакане чая или кофе?

3. Где дольше сохранит свой объем резиновый шарик, наполненный водородом: в холодном или теплом помещении?

4. При сильном сдавливании двух железных деталей друг с другом даже в холодном состоянии удается добиться их прочного соединения. Почему?

5. Отчего перемешавшиеся вещества, например входящие в состав воздуха азот и кислород, вновь не разделяются?

6. В сосуде, разделенном на две секции пористой перегородкой, слева находится газ, состоящий из легких молекул, а справа, при том же давлении, — из тяжелых. Через некоторое время давление справа увеличилось, затем, через большой промежуток времени, давления в секциях выравнялись. Как это объяснить?

7. Что поддерживает диффузионный поток газа из объема мыльного пузыря наружу?

8. Куда следует поместить бутылку с газировкой, чтобы побыстрее ее охладить: в снег или в измельченный лед, если их температуры одинаковы?

9. В каком случае и металл, и дерево будут казаться нам при соприкосновении с ними одинаково нагретыми?

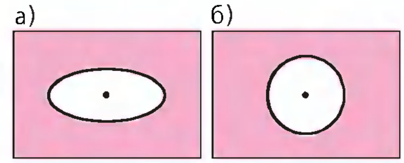
10. Почему при долгом использовании обычного чайника вода в нем все медленнее закипает?

11. Температура газа возрастает вдоль некоторой оси. Куда направлен поток тепла в газе, если концентрация его молекул всюду одинакова?

12. Почему капли воды на большой раскаленной сковороде перемещаются от ее центра к краю?

13. К обратной стороне изображенных на рисунке пластин из кристаллического гипса и стекла, покрытых спереди парафином, прикоснулись раскаленной иглой. Как по форме площади расплавленного парафи-

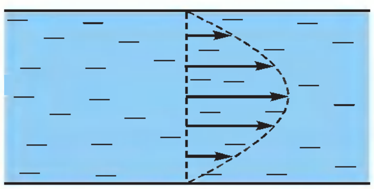
а) б)



на определить, где гипс, а где стекло?

14. При измерении температуры на поверхности одинаковых с виду комбинезонов, в которые были облачены два полярника, на первом из них она оказалась выше, чем на втором. Какой комбинезон теплее?

15. На рисунке изображено распределение скорости жидкости по сечению круглой трубы. Куда направлена действующая на трубу сила вязкого трения?



16. Как объяснить, что в жару растительное масло выливается из бутылки легко, а постоявшее на морозе — заметно труднее?

17. Почему опытная хозяйка определяет степень готовности варенья по способности сахарного сиропа образовывать тонкие нити?

Микроопыт

Устройте «водоворот» в ведре с воздухом и в таком же ведре с водой, раскрутив их приблизительно до одной скорости с помощью, например, большой деревянной ложки. Что придет в покой раньше — воздух или вода?

Любопытно, что...

...методы, разработанные к 1822 году французским математиком Фурье в его «Аналитической теории тепла», посвященной теории теплопроводности, обладали такой универсальностью, что стали одним из главных инструментов математической физики, а затем и теории функций.

... выравнивание температур двух в разной степени нагретых тел, приведенных в соприкосновение, происходит таким образом, что температура контакта не зависит от времени и определяется лишь тепловыми свойствами веществ, из которых изготовлены тела. Это объясняет, в частности, почему разные материалы при одной и той же температуре кажутся столь различными на ощупь.

...вода проводит тепло приблизительно в 200 раз хуже, чем медь, теплопроводность же воздуха примерно в 20000 раз меньше теплопроводности меди. А вот гелий, охлажденный до температуры ниже 2,19 кельвинов — так называемый гелий II, — обладает уникальными свойствами, превосходя по теплопроводности медь почти в 100 раз и проявляя при этом сверхтекучесть, т.е. полное отсутствие вязкости.

...вещество плотных звезд, именуемых белыми карликами, состоит в основном из ядер гелия и свободных электронов, что обеспечивает сходный с металлами электронный механизм теплопроводности, из-за чего звезда практически по всему объему имеет температуру порядка 100 миллионов кельвинов.

...в 1855 году швейцарскому физику А. Фику пришла в голову аналогия между движением вещества вследствие диффузии и распространением тепла из-за теплопроводности. «Достаточно, — посчитал Фик, — заменить в законе Фурье слова «количество тепла» словами «количество вещества» и слово «температура» словом «концентрация». Так появился на свет диффузионный закон Фика.

...своеобразным продолжением знаменитого опыта по диффузии золота в свинце, проведенного в 1896 году английским металлургом У.Робертсом-Остеном, стали сенсационные эксперименты американского исследователя Э. Киркендайла, показавшего в 1942 году, что, вопреки предположениям теоретиков, атомы различных металлов диффундируют друг в друга с разной скоростью.

...частицы, входящие в состав космических лучей, отклоняясь межзвездными магнитными полями, блуждают по Галактике в полном соответствии с диффузионным движением молекул в газах или жидкостях.

...будучи не только физиком, но и врачом, Жан Пуазейль, в честь которого названа единица вязкости, при исследовании течения жидкости по тонким трубкам (1840 г.) интересовался, прежде всего, аналогией с циркуляцией крови по сосудам. Много позже выяснилось, что частицы крови при увеличении ее скорости ориентируются так, чтобы, в отличие от обычных жидкостей, сопротивление потоку было минимальным и вязкость уменьшалась.

...вязкость жидкостей очень сильно зависит от температуры. Так, при нагревании на 200 градусов от начальной температуры минус 20 градусов Цельсия вязкость глицерина уменьшается примерно в миллион раз!

...прежде чем охлаждаемая жидкая струйка превратится в твердое волокно, она должна прожить достаточно долго, чтобы успеть затвердеть. Как показал Уильям Стретт (лорд Рэлей), время жизни такой жидкой нити пропорционально ее вязкости. Для воды оно составляет десятитысячные доли секунды — вот почему из воды невозможно изготовить волокна.

Что читать в «Кванте» о явлениях переноса

(публикации последних лет)

1. «О явлениях переноса» — 1996, Приложение №4, с. 42;
2. «Эстафетный бег молекул, или Как работает термос» — 1997, №5, с. 31;
3. «Просто физика» — 1998, №4, с. 11;
4. «Дом, который построил...» — 1999, Приложение №6, с. 60;
5. «Где найти прошлогоднюю зиму?» — 2000, №5, с. 36;
6. «Чуть-чуть физики для настоящего охотника» — 2000, Приложение №5, с. 110;
7. «Как в землю казан закопали» — 2001, №1, с. 29;
8. «Физика приготовления кофе» — 2001, №4, с. 3;
9. «Как чайник стал таймером» — 2001, №5, с. 36.

Материал подготовил
А.Леонович

(Начало см. на с. 30)

Отсюда находим

$$I_1 = \frac{7}{13}\ \text{А}.$$

Немного сложнее было бы найти ток, идущий через участок CD. Для этого пришлось бы еще найти ток через участок AC, а затем вычесть из него найденный уже ток через участок CB.

Можно еще немного усложнить задачу – учесть внутреннее сопротивление батареи r. Тогда полный ток равен

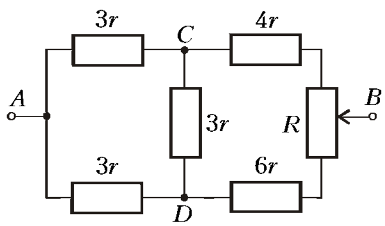


Рис. 5

$$I = \frac{\mathrm{E}}{r + R_{AB}},$$

а остальные токи находятся так же, как и раньше.

Рассмотрим более интересную задачу: найдем, при каком соотношении между величинами r и R сопротивление между точками A и B в схеме, показанной на рисунке 5, максимально в крайнем положении движка потенциометра.

Сначала преобразуем схему, заменив «треугольник» ACD «звездой» (рис.6). Очевидно, что сопротивление r не влияет на соотношение сопротивлений в остальной цепи. Займемся поэтому оставшейся частью схемы. Тут включены параллельно два сопротивления: $5r + R_1$ и $7r + R_2$, где R_1 и R_2 – сопротивления верхней и нижней частей потенциометра соответственно. При этом сумма сопротивлений $5r + R_1$ и $7r + R_2$ остается постоянной. Посмотрим, какими они должны быть, чтобы полное сопротивление было максимальным. Обозначим

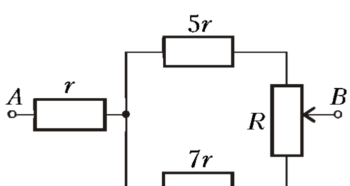


Рис. 6

$$5r + R_1 = r_1 \text{ и } 7r + R_2 = r_2.$$

Тогда общее сопротивление включенных параллельно частей схемы равно

$$r_0 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Если учесть, что

$$r_1 + r_2 = \text{const} = c,$$

то

$$r_0 = \frac{r_1(c - r_1)}{c}.$$

Это выражение максимально, когда максимален числитель. Но $y = cr_1 - r_1^2$ – это уравнение параболы, ветви которой пересекают ось абсцисс в точках 0 и c. Поэтому числитель дроби наибольший при $r_1 = c/2$. Так как $r_1 + r_2 = c$, то это означает, что сопротивление между точками A и B максимально, если $r_1 = r_2$, т.е.

$$5r + R_1 = 7r + R_2, \text{ или } R_1 - R_2 = 2r.$$

Ясно, что это возможно лишь в том случае, если сопротивление всего потенциометра $R = R_1 + R_2$ не меньше чем $2r$. В противном же случае максимум сопротивления между точками A и B достигается, когда движок потенциометра находится в крайнем положении.

Итак, ответ: $R \le 2r$.

Метод, о котором мы рассказали, очень удобен для последовательного преобразования сложной схемы к простому виду. Он позволяет рассчитать практически любую сложную цепь, состоящую из сопротивлений. Однако его можно применять и к цепям, содержащим не только сопротивления. Обратим внимание на то, что мы вообще не говорили нигде о физических процессах в цепи, а пользовались только формальным выражением для закона Ома: $U = rI$. Из него следует, что при последовательном соединении сопротивлений их величины складываются, а при параллельном – складываются величины, обратные сопротивлениям. Понятно, что если какие-нибудь другие физические величины связаны законом, аналогичным закону Ома, то все наши выводы справедливы и для них.

Рис. 7

В качестве примера рассмотрим цепь с конденсатором (рис.7). Мы знаем, что заряд конденсатора Q связан с его емкостью C и напряжением на нем U соотношением

$$Q = CU, \text{ или } U = \frac{1}{C}Q.$$

Сравним последнее выражение с выражением для закона Ома $U = rI$. Видно, что законы похожи, только вместо тока стоит заряд, а вместо сопротивления–величина, обратная емкости. Это означает, что для того чтобы найти, скажем, заряды на конденсаторах, можно поступить так: вместо цепи, содержащей конденсаторы, нарисовать цепь, содержащую сопротивления, причем конденсатор емкостью C(Ф) заменить сопротивлением $r = \frac{1}{C}$ (Ом). После того как мы рассчитаем токи в цепи из сопротивлений, можно сразу записать, каковы заряды на конденсаторах: если по сопротивлению течет ток $I = x$ (А), то на соответствующем конденсаторе будет заряд $Q = x$ (Кл). ЭДС батарей при таком преобразовании цепи остаются без изменения. Но, разумеется, в цепи с конденсаторами внутренние сопротивления батарей не влияют на результат. Поэтому, преобразуя цепь, нам придется лишить батареи их внутренних сопротивлений.

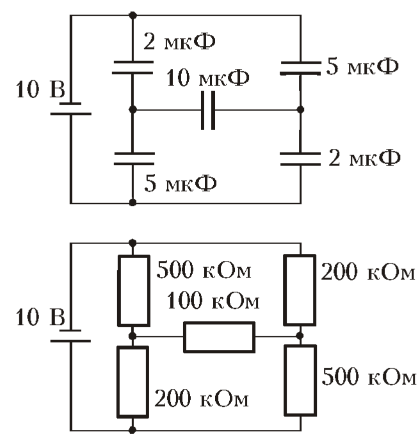


Рис. 8

Пусть, например, нужно найти заряд на конденсаторе емкостью 10 мкФ в схеме, изображенной на рисунке 8. Конденсатору емкостью $C = 2$ мкФ $= 2 \cdot 10^{-6}$ Ф соответствует сопротивление $r = 5 \cdot 10^5$ Ом $= 500$ кОм. Далее расчет проводится уже достаточно просто (проделайте это самостоятельно).

Таким образом, метод преобразования цепей, как мы видим, пригоден и для схем из конденсаторов.

Разрешающая способность измерительных приборов

М.ЛИВШИЦ

Всем известно, что микроскоп нужен для того, например, чтобы пересчитать число микробов на предметном столике, телескоп – чтобы пересчитать звезды на небе, радиолокатор – чтобы установить число летательных аппаратов в небе и расстояния до них.

В этой статье речь пойдет о важнейшем свойстве физических приборов – их разрешающей способности, т.е. величине наименьших деталей объектов измерения, различаемых в процессе измерения. Именно разрешающая способность является главной характеристикой качества применяемого измерителя (даже более важной, чем точность измерений). Например, не только от увеличения микроскопа зависит его качество. Если устройство микроскопа не обеспечивает раздельное восприятие достаточно мелких деталей объекта, то получаемое изображение не улучшится даже при значительном росте увеличения. Мы получим только более крупную, но такую же нечеткую картинку рассматриваемого предмета. Кроме того, сами ошибки измерения могут быть определены только после разрешения, т.е. после выделения данной детали объекта из других.

Покажем, какие физические свойства дистанционных (неконтактных) измерителей непосредственно влияют на получающееся при их использовании разрешение и какими методами можно добиться улучшения разрешающей способности таких приборов.

Сначала дадим количественную оценку. Чем более мелкие детали объектов могут быть выделены данным прибором в процессе измерения, тем лучше (выше) его разрешающая способность. Для различных приборов существуют различные определения и разные формулы для количественной оценки разрешающей способности в зависимости от целей и методов: например, оценивается ли разрешение деталей предмета (микроскоп, бинокль, телескоп) или отдельных линий в спектре излучения (призма, дифракционная решетка и другие спектральные устройства), используется ли независимость наблюдения и измерения координат нескольких целей (радиолокатор, гидролокатор, эхолокатор животного) и т.п. Однако общепринятой основой количественной оценки разрешающей способности является критерий Рэлея, первоначально установленный для случая раздельного наблюдения двух точечных источников света (разрешение двойных звезд). Его обобщение, позволяющее использовать этот критерий в самых разных случаях, осуществляется следующим образом.

Пусть входное воздействие на измерительный прибор состоит из двух пиков, отстоящих на интервал Δx; при этом на выходе прибора от каждого пика получается «отклик» в виде более размазанного по x всплеска конечной ширины, характеризующий свойства прибора и называемый аппаратной функцией (рис.1). Тогда разрешающей способностью по Рэлею называют минимальный интервал $\Delta x_{\min}$ между воздействиями двух пиков, при котором суммарный отклик еще имеет вид

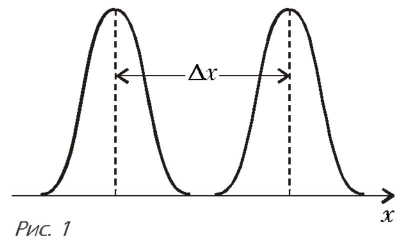


Рис. 1

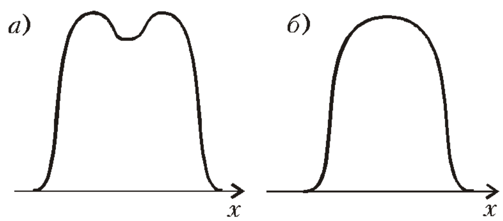


Рис. 2

двугорбой кривой (рис.2,*а*). Если уменьшить Δx, верхушка суммарного всплеска уплощается и всплески сливаются в один (рис.2,*б*).

Какие же параметры волн, используемых в дистанционных измерителях, определяют величину разрешающей способности? Оказывается, таким параметром является степень когерентности волн (латинское слово «когерентный» означает «находящийся в связи»).

Прежде вспомним о когерентности колебаний. Колебания называются когерентными, если разности фаз и отношения амплитуд колебаний остаются постоянными в течение всего времени наблюдения. В простейшем случае когерентными являются два синусоидальных колебания $A\cos(\omega t+\alpha)$ и $B\cos(\omega t+\beta)$, где A, B, α и β – постоянные величины. Поскольку волновые процессы определяются колебаниями во всех точках пространства, где эти волны существуют, необходимым условием когерентности волн является когерентность колебаний, происходящих в каждой данной точке волны в течение времени наблюдения.

Более общим и кратким является определение некогерентности волн: пучки света или других волн будут некогерентными, если разность фаз между колебаниями во всех точках пространства, где эти волны существуют совместно, многократно и нерегулярным образом изменяется в течение времени наблюдения.

Теперь постараемся установить связь разрешающей способности измерителя со степенью когерентности волн. Наиболее наглядно это можно сделать на примере радиолокации – способе определения местонахождения объектов с помощью радиоволн.

Кратко напомним принцип работы импульсной радиолокационной станции (РЛС). На рисунке 3 изображена блок-схема РЛС. Здесь *1* – передатчик, *2* – антенный переключатель, *3* – антенна, *4* – диаграмма направленности антенны, *5* – приемник, *6* – индикатор. Передатчик РЛС с помощью узконаправленной антенны производит периодическое облучение пространства кратковременными цугами радиоволн (так

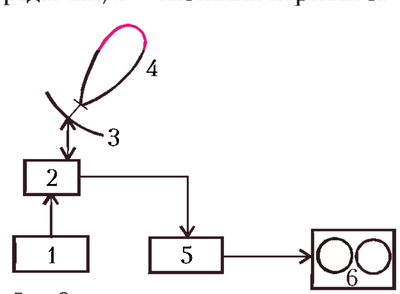


Рис. 3

называемыми зондирующими, т.е. «ощупывающими», импульсами). Поворотом антенны (или другими способами) производится изменение направления излучения радиоволн и, тем самым, осуществляется последовательное зондирование большего или меньшего сектора пространства (или круговой обзор). Отраженные от различных целей импульсы поступают (обычно через ту же антенну) в приемник РЛС. При этом определение угловых координат целей основано на использовании диаграммы направленности антенны на излучение и прием. Измерение дальности D производится по измерению времени запаздывания $t_{зап}$ прихода отраженного от цели импульса относительно момента излучения зондирующего импульса:

$$D = \frac{ct_{зап}}{2},$$

где c – скорость света. Двойка в знаменателе появляется из-за того, что время запаздывания складывается из времени прохождения зондирующего импульса до цели и такого же времени прохождения отраженного импульса до РЛС.

Разрешающей способностью РЛС по углу называется наименьшая разность углов $\Delta\alpha$ между направлениями на две цели, находящиеся на одной дальности, при которой отраженные импульсы от них наблюдаются раздельно. Легко видеть, что это соответствует простейшему случаю пространственной некогерентности: разрешаются (по углу) те цели, на которые не может одновременно попасть «освещающее» излучение РЛС, так как направления на них отличаются на ширину диаграммы направленности антенны (рис.4).

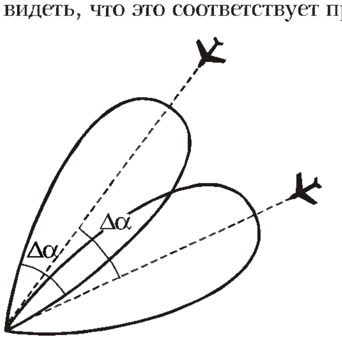


Рис. 4

Разрешающей способностью РЛС по дальности называется наименьшее расстояние δr между двумя целями, находящимися в одном направлении, при котором они наблюдаются раздельно. В так называемых классических РЛС в качестве зондирующего импульса применялся синусоидальный цуг волн постоянной амплитуды. Это объясняется, в частности, тем, что такой цуг легко создать: достаточно на высокочастотный генератор (например, магнетрон) кратковременно подать постоянное по величине высокое напряжение. Однородность структуры цуга приводит к тому, что отраженные от различных целей волны будут иметь одинаковую частоту (если они движутся по направлению к РЛС с одинаковой скоростью или если можно пренебречь эффектом Доплера), в пределах взаимного перекрытия отраженных импульсов они будут когерентны, и разделить цели полностью не удастся. Отраженные от двух целей импульсы будут некогерентны только тогда, когда они не совпадают по времени прихода в приемник РЛС и поэтому не перекрываются на экране индикатора (рис.5). Таким образом, разрешающая способность этих РЛС по дальности составляет

$$\delta r = \frac{c\tau}{2},$$

где τ – длительность импульса. Можно сказать, что в рассматриваемой РЛС некогерентность приходящих от разных целей отраженных сигналов выступает в самом простом виде: как отсутствие их совпадения во времени.

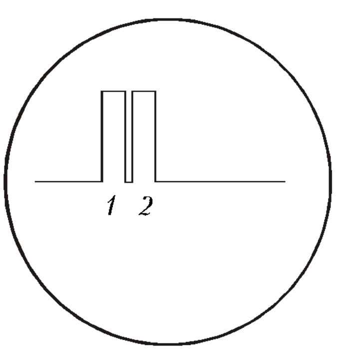


Рис. 5

Как видно из последней формулы, для повышения разрешающей способности по дальности необходимо уменьшать длительность импульса τ. Но это неизбежно приводит к соответствующему расширению полосы частот. Дело в том, что, с одной стороны, существует фундаментальное соотношение между длительностью τ сигнала (например, обрывка синусоиды) и шириной $\Delta\nu$ его спектра (на шкале частот), в которой сосредоточена основная энергия импульса:

$$\Delta\nu \approx \frac{1}{\tau}.$$

С другой стороны, вполне понятно, что дальность обнаружения цели определяется энергией зондирующего и, следовательно, вернувшегося назад импульса. Значит, при укорочении импульса приходится соответственно увеличивать мощность передатчика, что является непростой задачей.

В поисках выхода из этой ситуации в радиолокации пошли по пути увеличения ширины полосы частот импульса без изменения его длительности: путем перехода от синусоидальной к более усложненной внутренней структуре зондирующего импульса. Так появились РЛС с линейно-частотно-модулированными (ЛЧМ) зондирующими импульсами (рис.6). В этом случае оказывается, что соотношение между длительностью и шириной сигнала будет выполняться уже не для длительности импульса $\tau_{имп}$, а для времени когерентности $\tau_{ког}$:

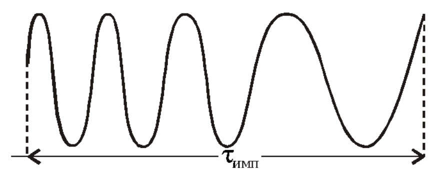


Рис. 6

$$\tau_{ког} \approx \frac{1}{\Delta\nu} \quad \left(\text{где } \Delta\nu \gg \frac{1}{\tau_{имп}}\right).$$

Правда для этого в приемнике РЛС вводится дополнительный специальный фильтр, с помощью которого осуществляется сжатие принятого импульса до длительности $\tau_{сж} = \tau_{ког}$. Теперь импульсы на экране РЛС будут разделяться при гораздо меньшем расстоянии между целями, чем это было при использовании синусоидального импульса:

$$\delta r = \frac{c\tau_{сж}}{2} \ll \frac{c\tau_{имп}}{2}.$$

Так подтверждается неразрывная связь разрешающей способности дистанционного измерителя со степенью когерентности волн: для повышения (улучшения) разрешающей способности измерителя необходимо ухудшать когерентность используемых волн.

Любопытно отметить, что в живой природе развитие в этом направлении пошло еще дальше. Например, наряду с летучими мышами, эхолокаторы которых также используют ЛЧМ зондирующие импульсы, существуют так называемые «шепчущие» летучие мыши, применяющие еще более широкополосные шумовые импульсы, т.е. высокочастотные импульсы, модулированные «белым» шумом. Они обнаруживают цели при значительно меньших мощностях излучения, при этом обеспечивается также лучшая защита их локаторов от помех, особенно от взаимных, возникающих при одновременной охоте на насекомых больших групп этих летучих мышей.

Как найти сумму?

Л.ШИБАСОВ

Как найти сумму? Если речь идет о сложении двух или трех чисел – все ясно. Но часто нужно бывает найти сумму очень большого или вообще произвольного числа слагаемых, образующих некоторую последовательность. Эта задача уже не столь проста, и она привлекала внимание людей с глубокой древности, о чем сохранились легенды и письменные свидетельства.

В египетском папирусе, которому почти 4 тысячи лет, содержится записанная писцом Ахмесом задача-шутка: имеется 7 домов, в каждом доме 7 кошек, каждая кошка съедает 7 мышей, каждая мышь съедает 7 колосьев ячменя, из каждого колоса вырастает 7 мер ячменя. Найти сумму всех предметов. Решая задачу, Ахмес находит сумму пяти членов геометрической прогрессии.

О гораздо большем числе слагаемых, тоже образующих геометрическую прогрессию, идет речь в древней легенде об изобретении шахмат. Индийский царь Шерам, восхищенный этой игрой, решил отблагодарить ее изобретателя Сету и предложил тому любую награду. Сета попросил за первую клетку шахматной доски выдать ему одно пшеничное зерно, за вторую – два, за третью – 4, за четвертую – 8 и т.д. Царь приказал немедленно исполнить эту «смехотворную» просьбу. Каково же было его удивление, когда он узнал, что царедворцы не могут выполнить приказ своего повелителя. Ведь число зерен, причитавшихся изобретателю, так велико, что не только в царских кладовых, но и на всей Земле не нашлось бы такого количества зерна.

В более поздний период стали находить суммы слагаемых, устроенных посложнее. В XIV веке индийский математик Нарайана решил такую задачу: найти число коров и телок, появившихся от одной коровы за 20 лет, при условии, что корова в начале каждого года приносит телку, а телка дает такое же потомство в начале года, достигнув трех лет. Как он это сделал, мы узнаем позже.

Надо сказать, что вычисление сумм с древних времен носило не только занимательный характер. Оно служило и практическим целям. Еще задолго до нашей эры Архимед, применяя суммирование, нашел площадь параболического сегмента и объемы некоторых тел вращения. Этим же методом находили площади и объемы вплоть до XVII века, когда были созданы интегральное и дифференциальное исчисления, позволившие свести задачи вычисления мер к нахождению первообразной и применению формулы Ньютона—Лейбница. Но и сейчас вычисление сумм используется для решения различных задач интегрального исчисления. Это не единственная область математики, где нужны суммы. Широко применяются они в теории рядов, в различного рода приближенных вычислениях и, конечно, в теории чисел.

Теперь, когда, надеемся, читатели убедились в древности и важности проблемы суммирования, обратимся к конкретным задачам такого рода. Начнем с простой геометрической задачи.

Пример 1. На плоскости расположены две касающиеся друг друга внешним образом окружности единичного радиуса. К ним проведена внешняя касательная. В фигуру, заключенную между окружностями и касательной, вписывается круг, затем в образовавшуюся фигуру между данными окружностями и первым кругом вписывается второй круг и т.д. (рис.1). Спрашивается, какова суммарная длина диаметров вписанных кругов, полученных на n-м шаге.

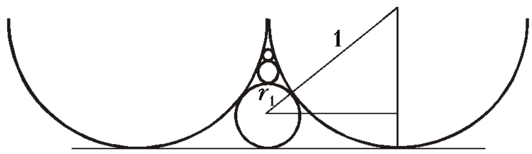


Рис. 1

Упражнение 1. Покажите, что диаметр k-го вписанного круга равен $\frac{1}{k(k+1)}$.

Итак, чтобы ответить на вопрос задачи, нужно найти сумму

$$S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Для ее вычисления обратимся к равенству $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Применяя его к каждому слагаемому суммы, получаем ответ:

$$S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Вообще говоря, найти компактную формулу, выражающую сумму n слагаемых (или, как говорят в математике, «записать результат в конечном виде»), удается очень редко. В школе выводят две формулы такого типа: для арифметической прогрессии

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (a + (n-1)d) = \frac{2a + (n-1)d}{2}n$$

и для геометрической прогрессии

$$S_n = b + bq + bq^2 + \ldots + bq^{n-1} = b\frac{q^n - 1}{q-1}.$$

Мы рассмотрим примеры вычисления более сложных сумм. При этом мы будем считать слагаемые значениями некоторой функции $f(x)$ в точках x = 1, 2, ..., n, а возникающую сумму $f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$ записывать в виде $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$ (читается: «сумма чисел $f(k)$ по k от 1 до n»). В этих обозначениях результат примера 1 будет выглядеть так:

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Решение оказалось очень простым за счет того, что по функции $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}$ мы сумели найти другую функцию $F(x)=-\dfrac{1}{x}$, так что выполняется равенство

$$f(k)=F(k+1)-F(k)=\Delta F(k). \qquad (1)$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)=F(n+1)-F(1). \qquad (2)$$

Не правда ли, (1) напоминает формулу дифференцирования функции $F(x)$, а (2) – интегрирования функции $f(x)$, знакомые читателям из школьного курса математического анализа? Но если в математическом анализе приращение аргумента устремляют к нулю, то здесь оно равно единице и все время остается постоянным. Поэтому мы не можем воспользоваться известными из анализа правилами вычисления первообразной, пример 1 это наглядно подтверждает. Поиск по функции $f(x)$ ее «первообразной» $F(x)$ здесь уже нелегкая проблема, в каждом конкретном примере она решается индивидуально, и не всегда успешно. Тем интереснее случаи, когда удается найти решение.

Пример 2. Обобщим сумму, возникшую в примере 1. В качестве $f(x)$ возьмем функцию $\dfrac{1}{x(x+1)\ldots(x+m)}$.

Упражнение 2. Покажите, что в этом случае

$$F(x)=\frac{-1}{mx(x+1)\ldots(x+m-1)}.$$

На основании равенства (2) получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\ldots(k+m)}=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!}-\frac{1}{(n+1)\ldots(n+m)}\right). \qquad (3)$$

Здесь $m!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot m$ (читается: «m факториал»).

Такую сумму рассматривал немецкий математик Г.Лейбниц, когда в юности начал серьезно изучать математику. Правда, он находил сумму бесконечной последовательности слагаемых, т.е. сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)\ldots(k+m)}.$$

Эту задачу в числе других поставил перед ним Х.Гюйгенс, к которому Лейбниц обратился с просьбой помочь ему ликвидировать, как он выразился, его «математическое невежество». Мы можем найти решение задачи Гюйгенса, устремив в равенстве (3) n к бесконечности. Сумма ряда равна числу $S=(m\cdot m!)^{-1}$. Заметим, что Лейбниц не только быстро, но и столь успешно ликвидировал свое «математическое невежество», что сумел в течение десяти лет создать ни много ни мало новую область математики – дифференциальное и интегральное исчисление.

Пример 3. Рассмотрим функцию $f(x)=x^m$. Обозначим

$$S_n^m=1^m+2^m+\ldots+n^m$$

и вычислим эту сумму для некоторых показателей m.

При $m=1$ имеем $f(x)=x$, $F(x)=x(x-1)/2$, и мы приходим к известной формуле

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Упражнение 3. Покажите, что при $m=2$, т.е. для $f(x)=x^2$, соответствующая функция $F(x)=x(x-1)(2x-1)/6$, а для функции $f(x)=x^3$ (т.е. при $m=3$) имеем $F(x)=x^2(x-1)^2/4$.

Отсюда находим

$$S_n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\quad S_n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Заметим, что в правой части последней формулы записан квадрат суммы S_n^1, поэтому возникает легко запоминающаяся формула

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2. \qquad (4)$$

Она была известна еще в Древней Греции. Но из-за отсутствия в то время алгебраической символики выводилась она геометрически. Древнегреческие математики для доказательства различных числовых свойств использовали изображение чисел при помощи камешков или точек на песке.

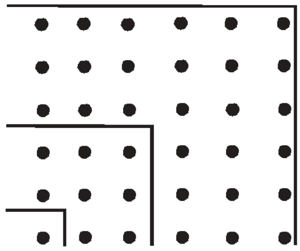


Рис. 2

Решая одну задачу (см. упражнение 17,г), Никомах (I в.) расположил точки в виде квадрата, сторона которого содержит $1+2+3+\ldots+n$ точек (рис.2). В этом квадрате он выделил угловую точку, за ней квадрат из 9 точек, потом из 36 точек и т.д. Полученные Г-образные фигуры греки называли гномонами[1]. Никомах показал, что из точек гномона с основанием k можно сложить куб с ребром k. Используя современную символику, читатели легко могут это доказать. А поскольку все гномоны составляют квадрат со стороной $1+2+3+\ldots+n$, то формула (4) доказана.

Вернемся к вычислению сумм S_n^m. Как мы видим, в образовании $F(x)$ при $m=1, 2, 3$ не прослеживается какой-либо закономерности, позволяющей найти эту функцию для любого m.

Упражнение 4. Покажите, что для $m=4$

$$F(x)=\frac{x(x-1)(2x-1)\left(3x^2-3x-1\right)}{30}.$$

Тем не менее можно выработать алгоритм вычисления S_n^m, если обратиться к новой функции.

Назовем *обобщенной степенью числа* x произведение

$$x^{(m)}=x(x-1)\ldots(x-m+1).$$

Упражнение 5. Убедитесь, что

$$\Delta x^{(m+1)}=(m+1)x^{(m)}. \qquad (5)$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n}k^{(m)}=\frac{(n+1)^{(m+1)}}{m+1}. \qquad (6)$$

Получили замечательные формулы, напоминающие правила дифференцирования и интегрирования обычной степенной функции. Таким образом, для обобщенной степени проблема поиска функции F решена.

Покажем, как, используя обобщенную степень, найти

---

[1] γνω'μων – *распознаватель; сначала времени: простейшие солнечные часы состояли из двух планок, скрепленных в виде буквы Г, затем распознаватель перпендикулярности; позже так стали называть Г-образную фигуру, приложение которой к основной фигуре не меняет ее форму.*

сумму S_n^m. Разберем для примера случай $m = 2$. Так как

$$\sum_{k=1}^{n} k^{(2)} = \frac{(n+1)^{(3)}}{3}, \text{ или } \sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}, \text{ то}$$

$$S_n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^{(2)} + \sum_{k=1}^{n} k =$$

$$= \frac{n(n+1)(n-1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Этот прием позволяет найти суммы S_n^m при любом показателе m, зная формулы для соответствующих сумм с меньшими показателями.

Упражнение 6. Вычислите таким способом $S_n^3, S_n^4, S_n^5, S_n^6$.

Одним из первых способ суммирования, использующий формулу (2), применил к вычислению S_n^m французский математик Б.Паскаль. Он даже рассмотрел суммы более общего вида, когда основания степеней образуют произвольную арифметическую прогрессию.

Пример 4. Вычислим, вслед за Паскалем, сумму

$$Q_m = a^m + (a+d)^m + \ldots + (a+(n-1)d)^m.$$

Воспользуемся биномом Ньютона – формулой возведения двучлена в m-ю степень:

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k,$$

где $C_m^k = \dfrac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}$ – биномиальные коэффициенты. Тогда

$$(a+d)^{m+1} - a^{m+1} = C_{m+1}^1 a^m d + C_{m+1}^2 a^{m-1} d^2 + \ldots + d^{m+1},$$

$$(a+2d)^{m+1} - (a+d)^{m+1} =$$

$$= C_{m+1}^1 (a+d)^m d + C_{m+1}^2 (a+d)^{m-1} d^2 + \ldots + d^{m+1},$$

$$(a+nd)^{m+1} - (a+(n-1)d)^{m+1} =$$

$$= C_{m+1}^1 (a+(n-1)d)^m d + C_{m+1}^2 (a+(n-1)d)^{m-1} d^2 + \ldots + d^{m+1}.$$

Складывая левые и правые части равенств, получим

$$(a+nd)^{m+1} - a^{m+1} = C_{m+1}^1 Q_m d +$$

$$+ C_{m+1}^2 Q_{m-1} d^2 + C_{m+1}^3 Q_{m-2} d^3 + \ldots + nd^{m+1}. \quad (7)$$

Применим формулу (7) для вычисления некоторых Q_m (учитывая равенство $C_{m+1}^k = 0$ при $k > m+1$). Значения $Q_0 = n$ и $Q_1 = \dfrac{2a+(n-1)d}{2} n$ нам хорошо известны. Найдем Q_2. Положим в (7) $m = 2$: $(a+nd)^3 - a^3 = 3Q_2 d + 2Q_1 d^2 + Q_0 d^3$. Откуда

$$Q_2 = n\left(a^2 + a(n-1)d + \frac{d^2}{6}\left(2n^2 - n + 1\right)\right).$$

В частности,

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = n\frac{4n^2-1}{3}, \quad \sum_{k=1}^{n} (3k-2)^2 = n\frac{6n^2-3n-1}{2}.$$

Упражнение 7. Найдите Q_3 и убедитесь в верности равенства

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = n^2\left(2n^2 - 1\right).$$

Решим, используя обобщенную степень, несколько интересных геометрических задач. В частности, найдем число одинаковых шаров, из которых сложены правильные пирамиды. Но прежде чем обращаться к пирамидам, рассмотрим правильные многоугольники, выложенные на плоскости из шаров.

Начнем с треугольника. Возьмем один шар, к нему приложим еще два так, чтобы образовался треугольник, каждая сторона которого содержит два шара. Затем к этим шарам приложим еще три, так чтобы снова получился треугольник (рис.3), но уже со стороной в три шара. Далее можно выложить треугольник с четырьмя шарами в каждой стороне и т.д. Выпишем последовательность чисел, выражающих количества шаров, составляющих полученные правильные треугольники:

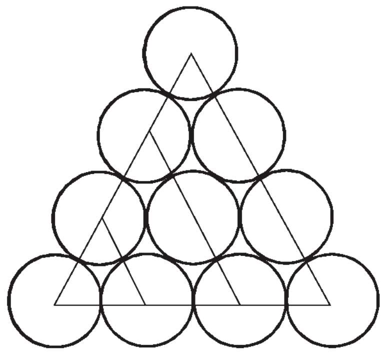


Рис. 3

1, 3, 6, 10, ...

Эти числа называют *треугольными.* Аналогично из шаров строят квадраты, пятиугольники и другие правильные многоугольники, растущие из какой-либо одной своей вершины (рис.4, 5). Количества используемых при этом шаров представляют собой соответственно *квадратные числа*

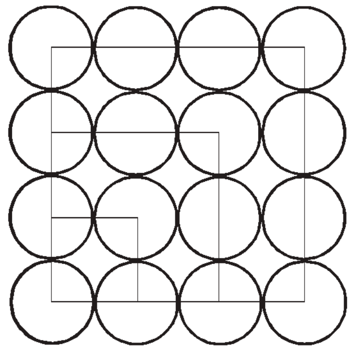


Рис. 4

1, 4, 9, 16, ...,

пятиугольные числа

1, 5, 12, 22, ...

и т.д.

Идея выкладывания шаров на плоскости в виде правильных многоугольников восходит к школе Пифагора. Пифагорейцами было подмечено, что n-е треугольное число представляет собой сумму первых n натуральных чисел, n-е квадратное – сумму первых n нечетных чисел, n-е пятиугольное – сумму n членов прогрессии 1, 4, 7, 10, ... $(3n-2)$, ... Это позволило им дать общее определение *q-угольного числа* с номером n как суммы n членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью $q - 2$.

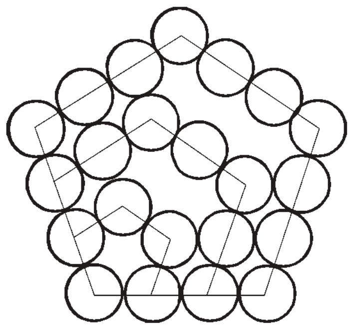


Рис. 5

Упражнение 8. Покажите, пользуясь этим определением, что q-угольноое число с номером n задается формулой

$$\Phi_q(n)=\frac{n}{2}\left((n-1)(q-2)+2\right).$$

Откуда, в частности, имеем

$$\Phi_3(n)=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(n+1)^{(2)}}{2},\ \Phi_4(n)=n^2.$$

Фигурные числа обладают многими интересными свойствами (см. далее упражнение 17). Одно из самых замечательных их свойств было установлено П.Ферма: *всякое натуральное число является суммой не более трех треугольных чисел, не более четырех квадратных, не более пяти пятиугольных чисел и т.д.* Доказано оно было О.Коши в 1815 году.

Пример 5. А теперь сложим из одинаковых шаров правильный *тетраэдр* – треугольную пирамиду, все грани которой правильные треугольники. Сначала плотно уложим на плоскости шары нижнего слоя в виде правильного треугольника со стороной n (в каждой стороне содержится n шаров); в углублениях между шарами нижнего слоя разместим шары следующего слоя и т.д. Количество шаров каждого слоя выражается соответствующим треугольным числом, а поэтому количество шаров, из которых сложен тетраэдр, выражается суммой

$$\Phi_3^{(3)}(n)=\Phi_3(n)+\Phi_3(n-1)+\ldots+\Phi_3(1)=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{(2)}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Числа $\Phi_3^{(3)}$ называют *тетраэдрическими*, они представляют собой обобщение треугольных чисел на случай трехмерного пространства. Чтобы это подчеркнуть, мы добавили верхний индекс 3; для плоского случая индекс 2 мы не писали.

Пример 6. Из шаров можно сложить и правильную 4-угольную пирамиду. Число шаров нижнего слоя такой пирамиды равно $\Phi_4(n)$, а их количество во всей пирамиде равно

$$\Phi_4^{(3)}(n)=\Phi_4(n)+\Phi_4(n-1)+\ldots+\Phi_4(1)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Числа $\Phi_4^{(3)}(n)$ называют *пирамидальными.* С тетраэдрическими и пирамидальными числами были знакомы пифагорейцы, им и принадлежит идея выкладывания пирамид из одинаковых шаров. Но они не строили q-угольных пирамид для $q>4$: ведь в этом случае невозможно на правильный q-угольник, сложенный из шаров, уложить новый слой той же формы из меньшего числа шаров так, чтобы шары лежали плотно и не скатывались. Мы же можем пойти дальше.

Пример 7. Найдем сумму q-угольных чисел для любого q, уже не обращаясь к геометрическому истолкованию этих сумм.

$$\Phi_q^{(3)}(n)=\sum_{k=1}^{n}\Phi_q(k)=\sum_{k=1}^{n}k\left(1+\frac{(k-1)(q-2)}{2}\right)=$$
$$=1+2+3+\ldots+n+\frac{q-2}{2}\sum_{k=1}^{n}k^{(2)}=$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{q-2}{2}\cdot\frac{(n+1)n(n-1)}{3}=\frac{n(n+1)}{6}\left((n-1)(q-2)+3\right).$$

И тем более античные ученые, мыслившие геометрически, не могли себе даже позволить обобщения тех же тетраэдрических и пирамидальных чисел, не говоря уже об аналогах любого q-угольного числа, на случай четырехмерного пространства. Попытки выйти из трехмерного пространства в пространство большей размерности рассматривались тогда как противоречащие здравому смыслу. Даже в III веке н.э. александрийский математик Папп писал: «Не существует ничего, что заключало бы больше, чем три измерения». Ну а мы займемся «строительством» правильных q-угольных пирамид в четырехмерном пространстве. Обозначим

$$\Phi_q^{(4)}(n)=\Phi_q^{(3)}(1)+\Phi_q^{(3)}(2)+\ldots+\Phi_q^{(3)}(n).$$

Упражнение 9. Покажите, что

$$\Phi_q^{(4)}(n)=\frac{n(n+1)(n+2)}{4!}\left((n-1)(q-2)+4\right).$$

Продолжая обобщать q-угольные числа на пространства большей размерности, определим сумму

$$\Phi_q^{(m)}(n)=\Phi_q^{(m-1)}(1)+\Phi_q^{(m-1)}(2)+\ldots+\Phi_q^{(m-1)}(n).$$

Упражнение 10. Индукцией по m докажите, что

$$\Phi_q^{(m)}(n)=\frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{m!}\left((n-1)(q-2)+m\right).$$

В частности, при $q=3$ получаем

$$\Phi_3^{(m)}(n)=\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{m!}.$$

Это – обобщение треугольных чисел на случай m-мерного пространства. Поскольку многомерное обобщение треугольника называют симплексом (от лат. simplex – простой), то числа $\Phi_3^{(m)}(n)$ естественно назвать *m-мерными симплициальными.* Числа эти появились уже у Нарайаны при решении задачи, сформулированной в начале статьи. Теперь мы можем привести решение Нарайаны, используя наши обозначения.

1. Корова приносит $20=\Phi_3^{(1)}(20)$ телок первого поколения.

2. Первая телка первого поколения дает 17 телок второго поколения, вторая – 16 и т.д. Всего будет 17 + 16 + 15 + … … + 1 телок второго поколения. В результате получаем число $\Phi_3^{(2)}(17)=153$.

3. Подсчитывая потомство телок второго поколения, приходим к сумме $\Phi_3^{(2)}(14)+\Phi_3^{(2)}(13)+\ldots+\Phi_3^{(2)}(1)$. А она равна $\Phi_3^{(3)}(14)=560$.

4. Продолжая рассуждать дальше, найдем численность всего потомства:

$$\Phi_3^{(1)}(20)+\Phi_3^{(2)}(17)+\Phi_3^{(3)}(14)+\Phi_3^{(4)}(11)+$$
$$+\Phi_3^{(5)}(8)+\Phi_3^{(6)}(5)+\Phi_3^{(7)}(2)=$$
$$=20+153+560+1001+792+210+8=2744.$$

Итак, в течение 20 лет от одной коровы появится стадо численностью в 2745 голов.

Все рассмотренные до сих пор примеры касались суммирования степенных функций. И у читателя может создаться впечатление, что для других функций формула (2) не годится. На самом деле это не так.

Пример 8. Вычислим следующую сумму:

$$\sin a+\sin 2a+\ldots+\sin na.$$

Умножим каждое слагаемое на $2\sin\frac{a}{2}$ и преобразуем полученные произведения в разности:

$$2\sin\frac{a}{2}\sin ka = \cos\frac{2k-1}{2}a - \cos\frac{2k+1}{2}a = F(k) - F(k+1).$$

Откуда

$$2\sin\frac{a}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin ka = \cos\frac{a}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}a = 2\sin\frac{n+1}{2}a\sin\frac{na}{2}.$$

Таким образом, при $a \neq 2\pi m$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\sin ka = \frac{\sin\frac{n+1}{2}a\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}.$$

В случае $a = 2\pi m$ сумма равна нулю.

Другие примеры читатели найдут в упражнениях.

В заключение сделаем два замечания.

Замечание 1. Если по функции f не удается найти функцию F, удовлетворяющую (1), то стоит попытаться найти функцию F, удовлетворяющую какому-нибудь другому условию, например такому:

$$f(x) = x\big(F(x-1) - 2F(x) + F(x+1)\big).$$

При внимательном рассмотрении нетрудно увидеть, что выражение, стоящее в скобках, равно $\Delta F(x) - \Delta F(x-1) = \Delta\big(\Delta F(x-1)\big) = \Delta^2 F(x-1)$. И в этом случае при суммировании $f(k)$ все промежуточные слагаемые взаимно уничтожаются, в результате

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = nF(n+1) - (n+1)F(n) + F(0).$$

Пример 9. Вычислим сумму $\cos a + 2\cos 2a + \ldots + n\cos na$.

Упражнение 11. Покажите, что

$$4\cos ka\sin^2\frac{a}{2} = -\cos(k-1)a + 2\cos ka - \cos(k+1)a.$$

Умножая обе части равенства на k и суммируя по k, найдем при $a \neq 2\pi m$ искомую сумму

$$\sum_{k=1}^{n} k\cos ka = \frac{(n+1)\cos na - n\cos(n+1)a - 1}{4\sin^2\frac{a}{2}}.$$

Этот результат можно вывести из формулы примера 8, если заметить, что $(\sin kx)' = k\cos kx$, и продифференцировать полученную там сумму, предварительно заменив в ней a на x. Предлагаем читателям проделать это самостоятельно.

Замечание 2. Предположим теперь, что по функции f удалось найти такую функцию F, для которой выполняется равенство

$$f(x) = F(x+1) - tF(x).$$

Тогда

$$\frac{f(k)}{t^k} = \frac{F(k+1)}{t^k} - \frac{F(k)}{t^{k-1}},$$

что позволяет найти сумму

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{f(k)}{t^k} = \frac{F(n+1)}{t^n} - F(1).$$

Приведем примеры.

Пример 10. Пусть $f(x) = x(3-x)$.

Так как $x(3-x) = x(x+1) - 2(x-1)x$, то $t = 2$, $F(x) = (x-1)x$, и

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k(3-k)}{2^k} = \frac{n(n+1)}{2^n}.$$

Пример 11. Вычислим сумму

$$-\cos a + \cos 2a - \cos 3a + \ldots + (-1)^n\cos na.$$

Запишем тождество

$$2\cos\frac{a}{2}\cos ka = \cos\frac{2k+1}{2}a + \cos\frac{2k-1}{2}a;$$

здесь $t = -1$, поэтому

$$2\cos\frac{a}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos ka = (-1)^n\cos\frac{2n+1}{2}a - \cos\frac{a}{2}.$$

Откуда при $a \neq \pi(2m+1)$ получаем

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos ka = -\frac{1}{2} + (-1)^n\frac{\cos\frac{2n+1}{2}a}{2\cos\frac{a}{2}}.$$

При $a = \pi(2m+1)$ каждое слагаемое равно единице, и сумма равна n.

Упражнения

12. Докажите равенство

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(a+kd)(a+(k+1)d)\ldots(a+(k+m)d)} =$$

$$= \frac{1}{md}\left(\frac{1}{(a+d)(a+2d)\ldots(a+md)} - \frac{1}{(a+(n+1)d)(a+(n+2)d)\ldots(a+(n+m)d)}\right)$$

и рассмотрите его частные случаи:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$;

4) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$.

13. Найдите следующие суммы:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)(2k+1)$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)}$;

4) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k-1}{k!}$;

5) $\sum\limits_{k=1}^{n}\log_a\left(1+\frac{1}{k}\right)$;

6) $\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{arctg} \frac{1}{1+k(k+1)}$;

7) $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin x}{\sin kx \sin(k+1)x}$;

8) $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin x}{\cos kx \cos(k+1)x}$.

14. Докажите при $d \neq 2\pi m$

а) $$\sum_{k=0}^{n} \sin(a+kd) = \frac{\sin\frac{n}{2}d \sin\left(a+\frac{n+1}{2}d\right)}{\sin\frac{d}{2}};$$

б) $$\sum_{k=1}^{n} \cos(a+kd) = \frac{\sin\frac{n}{2}d \cos\left(a+\frac{n+1}{2}d\right)}{\sin\frac{d}{2}}.$$

15. Выведите следующие формулы:

а) $$\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right) = \sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-\sqrt{2}+1;$$

б) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \operatorname{tg}\frac{a}{2^k} = \frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{a}{2^n} - \operatorname{ctg} a;$$

в) $$\sum_{k=1}^{n} k \sin ka = \frac{(n+1)\sin na - n\sin(n+1)a}{4\sin^2\frac{a}{2}};$$

г) $$\sum_{k=1}^{n} a^k \sin kx = \frac{a^{n+2}\sin nx - a^{n+1}\sin(n+1)x + a\sin x}{1-2a\cos x + a^2};$$

д) $$\sum_{k=1}^{n} a^k \cos kx = \frac{a^{n+2}\cos nx - a^{n+1}\cos(n+1)x + a\cos x - a^2}{1-2a\cos x + a^2}.$$

16. Вычислите сумму рядов

а) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+d)}$;

б) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$.

17. Докажите следующие утверждения:

а) квадратное число есть сумма двух последовательных треугольных чисел (результат пифагорейцев);

б) $\Phi_k(n) = \Phi_{k-1}(n) + \Phi_3(n-1)$ (результат Никомаха);

в) восьмикратное треугольное число, увеличенное на 1, является квадратным (результат Диофанта, III в.);

г) если разбить ряд нечетных чисел на группы, число членов которых возрастает как натуральный ряд, то сумма чисел каждой группы равна кубу числа членов этой группы (результат Никомаха).

НАМ ПИШУТ

Аномальные элементы

Существует ряд химических элементов, которые с полным правом могут быть названы *аномальными*. Это галлий Ga, германий Ge, висмут Bi, ксенон Xe и радон Rn. Аномальность их заключается в том, что при переходе соответствующего вещества из жидкого состояния в твердое его плотность не увеличивается, а уменьшаться (см. таблицу). Из химических элементов они единственные в своем роде.

Но существует всем известное химическое соединение – вода, обладающая аналогичным свойством. Это свойство воды играет колоссальную роль в сохранении жизни на Земле. Если бы лед был плотнее воды, то северные реки и Северный Ледовитый океан промерзли бы до дна, жизнь в них была бы уничтожена. Все это могло бы привести к катастрофическому изменению климата с гибельными последствиями. И только благодаря аномальным свойствам воды этого не происходит.

Можно предположить, что и аномальные элементы играют существенную роль в природных процессах, пока только не ясно какую – положительную или отрицательную. Они могут быть как катализаторами, так и ингибиторами этих процессов. (Напомним, что катализаторы – это вещества, ускоряющие химические реакции. Биологические катализаторы называют ферментами. Ингибиторы – это вещества, снижающие скорость химических реакций или подавляющие их. Ингибиторы ферментов используют для изучения механизма их действия, а также для лечения нарушений обмена веществ.) Приведем интересную аналогию с углекислым газом. В микроколичествах он способствует дыханию за счет воздействия на нервные центры человека, в больших же количествах делает дыхание невозможным. Не исключено, что такую же двоякую роль играют и аномальные элементы. Все это требует детального изучения.

Таблица

	Ga	Ge	Bi	Xe	Rn	H_2O	
$T_{пл}$	302,95	1209,65	544,45	161,35	202,15	273,15	
$\rho_ж$	6095	5570	10049	2987	4400	1000	999,87
T	302,95	1209,65	614,05	165,05	211,15	277,13	273,15
$\rho_т$	5904	5326	9800	2700	4000	916,8	
T	293,15	298,15		133,15		273,15	

Здесь $T_{пл}$ – температура плавления вещества (измеряется в К), $\rho_ж$ –плотность вещества в жидком состоянии (измеряется в кг/м^3), $\rho_т$ – плотность вещества в твердом состоянии (измеряется в кг/м^3), T – температура замера плотности вещества (измеряется в К). К сожалению, не все замеры были проведены при температуре плавления, но это не меняет общую тенденцию. Кроме того, не обнаружены данные о температуре, при которой производились замеры плотности Bi и Rn в твердом состоянии.

Посмотрим, каковы концентрации аномальных элементов (в атомных частях) в земной коре:

$$\text{Ga} - 400\cdot 10^{-8},\ \text{Ge} - 200\cdot 10^{-8},$$
$$\text{Bi} - 1{,}7\cdot 10^{-8},\ \text{Rn} - 5\cdot 10^{-19}$$

и в атмосфере:

$$\mathrm{Xe} - 8\cdot 10^{-8},\ \mathrm{Rn} - 6\cdot 10^{-20}.$$

Казалось бы, концентрации малы. Но обратимся снова к аналогии. В полупроводниковой технике требуются особо чистые вещества. Известно, что наличие примесей в количестве 1 атома на 10^8 атомов основного элемента резко меняет свойства последнего. Концентрации же аномальных элементов, за исключением Rn, выше этого значения. Кстати, концентрация озона O_3 в земной атмосфере порядка 10^{-8}, т.е. в 8 раз ниже, чем у Xe, но всем известна существенная роль O_3 в предотвращении проникновения избытка ультрафиолетового излучения на Землю.

Уже на первый взгляд видны сходства пяти аномальных элементов. Эти сходства можно распределить по трем уровням (по степени убывания важности).

Первый уровень

1. Все аномальные элементы расположены в главных подгруппах таблицы Менделеева.
2. Все аномальные элементы расположены в длинных периодах таблицы Менделеева.

Второй уровень

3. Элементы Ga и Ge расположены в одном ряду таблицы Менделеева.
4. Элементы Bi и Rn расположены в одном ряду таблицы Менделеева.

Третий уровень

5. Xe и Rn – инертные газы.
6. Электросопротивление Bi и Ga в жидком состоянии ниже, чем в твердом (отметим, что это же свойство присуще и сурьме Sd, которая не входит в группу аномальных элементов).

Кроме того, Ga и Ge формируют полупроводниковые свойства материалов, а Rn и Xe используются для определения возраста урановых минералов (радон-ксеноновый метод).

Возможно, что данные элементы оказывают влияние на какие-либо процессы, находясь не в твердом или жидком состоянии, а в газообразном (что может быть весьма актуально для Xe и Rn), так как описываемая аномалия говорит об общей анамальности структуры, которая проявляется в любом агрегатном состоянии вещества.

Надеемся, что детальное изучение этих элементов и их соединений позволит определить ту роль, которую они играют в процессах, происходящих на Земле и, возможно, на других небесных телах (в частности, ^{129}Xe обнаружен в метеоритах и в атмосфере Марса).

А.Либерман

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

Живой фольклор

У некоторых задач счастливая судьба. Однажды появившись на свет, они начинают жить своей собственной жизнью. Их, как яркие анекдоты, часто пересказывают, порой переформулируя, изменяя или переиначивая условия. Найти автора такой популярной задачи труднее, чем ее решить!

Вот и к нам в редакцию иногда «залетают» такие задачи. Две из них мы предлагаем вашему вниманию. Ну а если у них обнаружатся авторы – поздравляем с успехом и приглашаем к дальнейшему сотрудничеству!

Задача о мистере Брауне. У этой задачи замечательная история. По слухам, ее как-то предложил на собеседовании для желающих поступить в Московскую государственную Пятьдесят седьмую школу некий студент. Эта задача так понравилась решавшему ее школьнику, что тот вечером, за ужином, рассказал ее своему папе. Отцу она тоже понравилась, и, поскольку глава семейства работал преподавателем в вузе, он решил задать ее своим студентам... Да, вы уже догадались: к этому папе-преподавателю как раз и попал студент, предлагавший ее в 57-й школе!

Вот условие этой задачи:

«На некоторой вечеринке собрались 5 супружеских пар. Встречаясь, участники обменивались рукопожатиями (супруги, разумеется, друг другу руки не пожимали). Мистер Браун опросил всех участников, сколько рукопожатий сделал каждый из них. Все названные числа оказались различными.

Сколько рукопожатий сделала миссис Браун?»

(Эту задачу вы могли встретить в прошлом номере нашего журнала.)

Задача о пароле. Эту задачу принес в редакцию ведущий раздела «Задачник Кванта» по физике А.Р.Зильберман. Узнал он ее от своих учеников в лицее «Вторая школа».

Условие задачи таково:

«Некий хитрый лазутчик вознамерился проникнуть в стан неприятеля. Он искусно замаскировался в кустах и стал подслушивать, какой пароль говорят охране лагеря. Вот кто-то подходит, и часовой к нему обращается, называя число:

– Двадцать шесть.

Немного подумав, посетитель отвечает:

– Тринадцать, – и часовой его пропускает.

Вот еще кто-то появляется. Часовой к нему:

– Двадцать два.

Гость:

– Одиннадцать, – и проходит в лагерь.

«Ага»! – осенило лазутчика. – «Секрет предельно прост!» Он вылезает из кустов и уверенной походкой направляется к охране.

– Сто, – говорит ему часовой.

– Пятьдесят, – небрежно отвечает лазутчик. И тут же попадает в цепкие объятия охраны:

– Неправильно, три! Попался, голубчик!

В чем секрет пароля?»

Публикацию подготовил
А.Жуков

Если вращается елочный шарик

А.СТАСЕНКО

Так, забывая жизни скоротечность,
Постигнем мы, что время есть Движенье.
И, покидая цепкую Конечность, –
Что бесконечность есть Круговращенье!..

А.Чижевский

О ЧЕМ ДУМАЛ ОТЛИЧНИК ТИН ЭЙДЖЕР, ГЛЯДЯ НА новогоднюю елку? Конечно, не о конфетах и жвачках, спрятанных под елкой добрым Дедом Морозом. Нет, он наблюдал, как в потоках теплого воздуха от свеч поворачивается вокруг вертикальной оси елочный шарик. А что если его вращать все быстрее и быстрее – почти до момента, когда его разорвут центробежные силы инерции? Ведь если стеклянная оболочка шарика покрыта блестящим слоем металла, в нем должны быть свободные электроны. И значит...

Дальнейшие мысли были таковы. На любой электрон проводящего слоя действует центробежная сила инерции $\vec{F}_c$, перпендикулярная оси вращения (рис.1); ее касательная (тангенциальная) составляющая $F_\tau = -F_c \sin\varphi$ будет перемещать его вдоль поверхности, так что электроны в конце концов (т.е. в равновесном состоянии) скопятся где-то в окрестности экватора; но поскольку шарик в целом электронейтрален, то у его полюсов останутся положительные заряды. В результате в качестве первого приближения Тин Эйджер вообразил себе такую картину (см. рис.1): отрицательно заряженный экватор (заряд $-Q$) и положительно заряженные полюсы ($+Q/2$ и $+Q/2$) создают электрическое поле, причем, как полагается, векторные линии поля $\vec{E}$ начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных, так что в меридиональном сечении получаются четыре «уха». Да ведь это квадруполь! – подумал наш герой, и был прав (потому что «квадро» значит «четыре», о чем знает всякий любитель дискотеки).

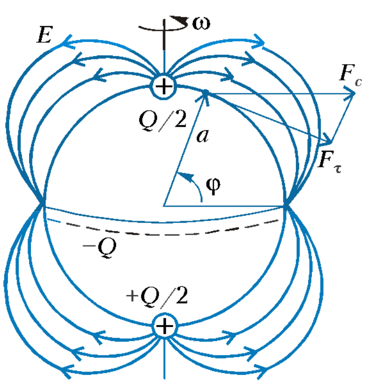


Рис. 1

Ну действительно, у точечного заряда векторные линии электрического поля строго радиальны (рис.2,*а*), а напряженность поля убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от заряда: $E \sim r^{-2}$ (закон Кулона). У диполя все линии вектора $\vec{E}$ начинаются на положительном заряде и оканчиваются на точно таком же (по модулю) отрицательном заряде (рис.2,*б*), так что в меридиональной плоскости получаются два «уха», а напряженность электрического поля на большом расстоянии ($r \gg l$) убывает как r^{-3}. Поэтому, если на расстоянии l расположить антипараллельно друг другу два диполя с плечом l (рис.2,*в*), возникнет квадруполь, и его поле

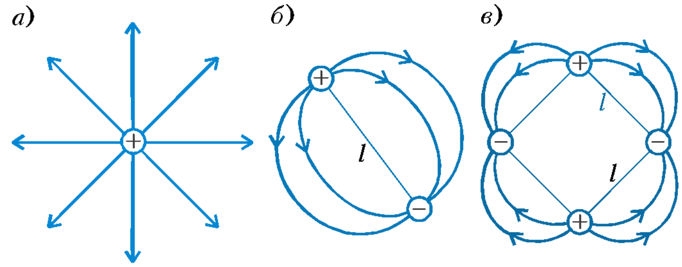


Рис. 2

будет убывать еще быстрее, а именно как r^{-4}. А если в плоскости, параллельной квадруполю, расположить еще один такой же, но повернутый на 90°, то возникнет октуполь («окто» означает «восемь»), и его поле будет пропорционально r^{-5}. А если... Но, стоп! – сказал себе волевой Тин Эйджер, – не отвлекаться от главного направления!

Итак, в случае равномерно вращающегося шарика с проводящим поверхностным слоем возникает квадрупольное электростатическое поле, которое быстро ($\sim r^{-4}$) уменьшается с расстоянием и, конечно, как-то зависит от широтного угла φ.

Безусловно, наш герой понимал, что заряды на полюсах едва ли будут точечными, а на экваторе – линейными: вероятнее всего, они будут как-то «размазаны» по поверхности шарика, т.е. возникнет поверхностное распределение зарядов с плотностью $\sigma(\varphi)$, зависящее от широты. Но как его найти?

Многие свойства этого распределения ясны из соображений симметрии. Например, оно должно быть симметричным относительно экватора (где $\varphi = 0$), так что $\sigma(\varphi) = \sigma(-\varphi)$. Поэтому как полный заряд всей сферы, так и заряды обеих ее половин в отдельности должны равняться нулю. С ростом же широтного угла φ при некотором его значении φ_* должен измениться знак зарядов с отрицательного на положительный. Значит, это распределение должно иметь вид, изображенный на рисунке 3. А значения на экваторе $\sigma(0) = \sigma_0$ или на полюсах $\sigma(\pm\pi/2)$ характеризуют масштаб разделения зарядов. Как бы оценить порядок этих величин?

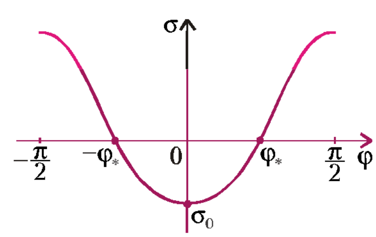


Рис. 3

Вспомним, что центробежную силу инерции, действующую на отдельный электрон, находящийся на широте φ, можно записать в виде

$$F_c = m_e \omega^2 a \cos\varphi, \qquad (1)$$

или иначе можно сказать, что центробежное ускорение на этой широте равно (это нам понадобится в дальнейшем)

$$w_c = \omega^2 a \cos\varphi. \qquad (2)$$

Значит, касательная составляющая центробежной силы инерции равна

$$F_\tau = -F_c \sin\varphi = -m_e \omega^2 a \cos\varphi \sin\varphi.$$

(В стационарном состоянии эта сила уравновешивается кулоновской силой, возникшей из-за разделения зарядов под действием центробежных сил инерции.) Поэтому

$$E_\tau = \frac{F_\tau}{e} = -\frac{m_e\omega^2 a}{e}\cos\varphi\sin\varphi .$$

Знаки «минус» в двух последних формулах говорят о том, что и касательная составляющая центробежной силы, и тангенциальная составляющая возникшего электростатического поля направлены против роста широтного угла φ.

Этого уже достаточно, чтобы оценить масштаб разделения зарядов на поверхности шарика. Как известно, поверхностная плотность заряда равна разности нормальных компонентов электрического поля по обе стороны от поверхности, умноженной на электрическую постоянную ε_0. Вполне понятно, что формулы для нормальных компонентов будут иметь тот же размерный множитель $m_e\omega^2 a$, что и тангенциальные (им просто больше не от чего зависеть), только безразмерная зависимость от угла φ будет, скорее всего, другой. Поэтому можно ожидать, что поверхностная плотность заряда будет порядка

$$\sigma \sim \frac{m_e}{e}\omega^2 a\varepsilon_0 .$$

Но для того чтобы полюсы приобрели хотя бы по одному положительному заряду, равному e, к экватору должна быть отброшена хотя бы пара электронов – тогда уже и возникнет обещанный квадруполь. Это значит, что угловая скорость должна быть больше определенной минимальной величины. Полагая для оценки, что этим двум электронам отведен экваториальный пояс площадью порядка a^2, получим

$$\sigma_0 a^2 \sim \frac{m_e\omega^2 a\varepsilon_0}{e}a^2 \gtrsim 2e ,$$

откуда

$$\omega^2 \gtrsim \frac{2e^2}{m_e\varepsilon_0 a^3} \sim a^{-3} . \qquad (3)$$

С другой стороны, при слишком большой скорости вращения шарик будет разорван центробежными силами инерции. Оценим и эту угловую скорость. Мысленно разделим шарик пополам и заменим одну из половин силами f, распределенными по поверхности кольца и отнесенными к единице площади этой поверхности (рис.4). Размерность величины f есть $\text{Н}/\text{м}^2$, т.е. f представляет собой механическое напряжение. Если оно достигает предела прочности на разрыв f_{max}, шарик разрушается. Эти силы, обеспечивающие прочность шарика (силы упругости), приложены к площади $2\pi a\delta$, где δ – толщина оболочки шарика (мы считаем, что она много меньше его радиуса a). Значит, суммарная сила равна $f\cdot 2\pi a\delta$. Она уравновешивается равнодействующей $F_{1/2}$ всех центробежных сил инерции, действующих на элементы полусферы. Эти центробежные силы изменяются от экватора до полюса, и мы знаем каким образом (см. выражение (1)). Так что можно было бы проинтегрировать их по поверхности полусферы и найти равнодействующую. Но мы не будем здесь этим заниматься, а снова сделаем оценку по порядку величины. Примем, что среднее (по поверхности шарика) значение центробежного ускорения

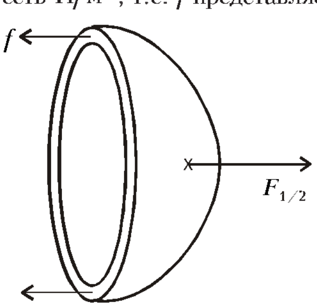


Рис. 4

равно, например, половине наибольшего значения, достигаемого на экваторе (см. выражение (2)): $\langle w_c\rangle \sim \omega^2 a/2$. Умножим его на массу полусферической тонкой оболочки $4\pi a^2\delta\rho_ш/2$, где $\rho_ш$ – плотность материала шарика (стекла). Тогда условие сохранности шарика запишется в виде

$$\frac{4\pi a^2\delta\rho_ш}{2}\cdot\frac{\omega^2 a}{2} \lesssim f_{max}\cdot 2\pi a\delta ,$$

откуда

$$\omega^2 \lesssim \frac{2f_{max}}{\rho_ш a^2} \sim a^{-2} . \qquad (4)$$

(Интересно, что результат не зависит от толщины оболочки δ.)

Неравенства (3) и (4) определяют нашу «рабочую зону», в которой шарик уже стал квадруполем, но еще не разрушается (она заштрихована на рисунке 5). Найдем точку пересечения a_* соответствующих «кривых» в предельном случае, когда неравенство заменяется равенством (конечно, это не совсем линии, а скорее размазанные полосы – ведь мы делаем грубые оценки по порядку величины). Итак,

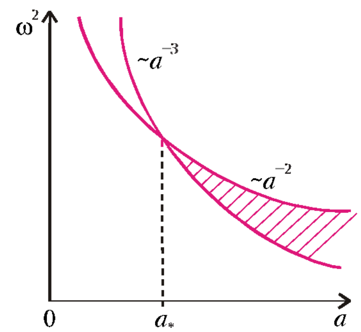


Рис. 5

$$\frac{2e^2}{m_e\varepsilon_0 a_*^3} \sim \frac{2f_{max}}{\rho_ш a_*^2} , \quad \text{и} \quad a_* \sim \frac{e^2\rho_ш}{m_e\varepsilon_0 f_{max}} .$$

Осталось сделать численные оценки. Фундаментальные константы известны: $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл, $m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг, $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ $\text{Кл}^2/(\text{Н}\cdot\text{м}^2)$. А что это за стекло, из которого сделан шарик? Поискав в таблицах, примем $\rho_ш \approx \approx 2{,}5\cdot 10^3$ $\text{кг}/\text{м}^3$, $f_{max} \sim 10^9$ $\text{Н}/\text{м}^2$. (Например, в справочнике «Таблицы физических величин», изданном в 1976 году под редакцией И.К.Кикоина – одного из основателей журнала «Квант», что приятно вспомнить, – для стеклянного волокна указано предельное напряжение на разрыв, равное $2{,}1\cdot 10^9$ $\text{Н}/\text{м}^2$. Конечно, эта характеристика зависит от технологии производства стеклянного изделия, в том числе и елочного шарика. Поэтому для оценки мы приняли, из соображений осторожности, вдвое меньшую величину.) Подставив эти числа в последнюю формулу, получим $a_* \sim 10^{-2}$ м $= 2$ см. А соответствующее значение угловой скорости можно найти из любого из выражений (3) или (4): $\omega_* \sim 10^5$ с^{-1}, что для частоты вращения дает $\nu_* = \omega_*/(2\pi) \sim 10^4$ Гц, т.е. 10^4 оборотов в секунду. Похоже, что реальный елочный шарик можно-таки сделать электрическим квадруполем путем его вращения.

И тут Тин Эйджер вспомнил, что шарик можно не только равномерно вращать вокруг фиксированной оси, но и скатывать по наклонной плоскости с углом α без проскальзывания, а значит, с ускорением $g\sin\alpha$. Э, брат, – подумал наш герой, – да ведь это будет уже не электростатика, а целая электродинамика! Но тут наступил Новый Год, и настала пора заниматься подарками.

Арифметические текстовые задачи на конкурсном экзамене

И.ШАРЫГИН

— Это задача, собственно говоря, алгебраическая, — говорит он. — Ее с иксом и игреком решить можно.

— И без алгебры решить можно, — говорит Удодов, протягивая руку к счетам и вздыхая.

— Вот-с... по-нашему, по-неученому.

А. П. Чехов. Репетитор

Давным-давно, в доброе старое время, любили в школе текстовые арифметические задачи. Методам их решения, зачастую весьма изощренным, учили долго и тщательно, и умения эти сохранялись на всю жизнь. При этом школа не только учила методам, но и воспитывала вкус – арифметическое решение считалось более красивым, чем алгебраическое. Впрочем, и сегодня для любого мало-мальски математически воспитанного человека арифметические решения алгебраических задач, равно как и геометрические решения задач по геометрии, выглядят куда как привлекательнее алгебраических решений.

Здесь самое время вспомнить задачу, поставившую в тупик репетитора Егора Зиберова.

Задача 1. *«Купец купил 138 арш. черного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 руб. за аршин, а черное 3 руб.?»*

По всей видимости, Удодов-старший решал ее следующим образом. 138 арш. черного сукна стоят $138 \cdot 3 = 414$ руб. Разница $540 - 414 = 126$ руб. получается за счет синего, каждый метр которого на 2 руб. дороже. Следовательно, синего сукна было $126:2 = 63$ арш., а черного было $138 - 63 = 75$ арш.

Интересно, что будет, если подобную задачу дать на конкурсном экзамене? Нет, мы не сомневаемся в том, что… впрочем, лучше сказать – мы надеемся на то, что подавляющее большинство абитуриентов успешно справится с этой задачей. Но вряд ли найдется хотя бы одно решение, подобное приведенному. У некоторых даже возникнет вопрос: а разве так можно? Вся выучка выпускника восстает против таких решений. Лучше, во всяком случае спокойнее, решать эту задачу как обычно с «иксом» и «игреком».

Тем не менее, изредка на конкурсных экзаменах встречаются текстовые задачи, предполагающие именно арифметические решения. Кроме того, бывают ситуации, когда здравые арифметические соображения могут существенно упростить процесс решения. О такого рода задачах мы и расскажем в этой статье.

Опубликовано в «Кванте» №3 за 1990 год.

Задача 2. *На реке расположены пункты A и B, причем B ниже по течению на расстоянии 20 км от A. Катер направляется из A в B, затем сразу возвращается в A и снова следует в B. Одновременно с катером из A отправился плот. При возвращении из B катер встретил плот в 4 км от A. На каком расстоянии от A катер нагонит плот, следуя вторично в B?*

Решение. Заметим, что катер удаляется от плота или приближается к нему с одной и той же скоростью – своей скоростью относительно воды. Следовательно, время, которое катер плыл от A до B, удаляясь от плота, равно времени, которое катер плыл от B до встречи с плотом. Значит, отношение путей, пройденных катером от A до B и от B до плота, равно отношению его скоростей по и против течения, т. е. отношение скоростей равно $20/16 = 5/4$. Таким же и по тем же соображениям будет отношение путей, пройденных катером от A до второй встречи с плотом и от первой встречи до A. Таким образом, катер нагонит плот в 5 км от A.

Задача 3. *На реке расположены пункты A и B. Одновременно из этих пунктов навстречу друг другу отходят два одинаковых катера, которые встречаются в некотором пункте, обмениваются почтой и возвращаются обратно. Катер, вышедший из A, возвращается обратно через 1 ч после выхода. Если бы катер, отправляющийся из A, вышел на 15 мин раньше катера, отправляющегося из B, то встреча произошла бы на равных расстояниях от обоих пунктов. Через сколько времени возвращается обратно катер, выходящий из пункта B?*

Решение. Заметим, что момент возвращения катера в A полностью определяется лишь моментом выхода катера из B, равно как и возвращение катера в B определяется моментом выхода катера из A. Чтобы понять это, достаточно представить себе, что в точке встречи они не обмениваются почтой, а продолжают движение в противоположный пункт. Следовательно, во второй раз катер, вышедший из A, вернулся бы обратно через 1 ч 15 мин после выхода, т. е. на половину пути из A в B и обратно ему нужно 1 ч 15 мин, а на весь путь 2 ч 30 мин. Таким образом, катер, выходящий из B, возвращается обратно через 1 ч 30 мин.

Во многих сборниках конкурсных задач можно встретить следующую задачу.

Задача 4. *Имеются два слитка с массами m кг и n кг с различным процентным содержанием меди. От каждого слитка отделяется кусок, причем эти куски имеют равную массу, и сплавляется с оставшейся частью другого слитка. Какой массы куски следует отрезать от каждого слитка, чтобы процентное содержание меди в новых слитках было равным?*

Решение. Безусловно, эта задача легко решается стандартным образом при помощи уравнений. Правда, при этом надо не испугаться того, что число неизвестных (три) будет больше числа уравнений (одно). Как ни странно, более общим методом решения в данном случае будет арифметический. Более общим в том смысле, что он безболезненно проходит для любого числа слитков, в то время как алгебраический метод приводит к громоздким, трудно обозримым вычислениям.

На самом деле данная задача – обычная арифметическая задача «на части». В каждый из вновь образовавшихся слитков части исходных должны войти в отношении $m:n$. (Подумайте, почему.) Значит, в новом слитке массой в m кг содержится m равных частей из первого слитка (массой m кг) и n таких же частей из второго слитка. Масса одной части равна $\frac{m}{m+n}$ кг. Остаток от первого слитка в этом новом слитке равен $\frac{m}{m+n}m = \frac{m^2}{m+n}$ кг, а отрезанная часть второго равна $\frac{mn}{m+n}$ кг. Такую же часть надо отрезать от первого слитка.

Рассмотрим теперь несколько задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах в вузы.

Задача 5. *Пятеро благородных рыбаков занимались ловлей рыбы. По окончании лова первому показалось, что он поймал больше остальных, и он разделил между ними поровну 1/3 своей добычи. После этого стало ясно, что у второго оказалось больше рыбы, чем у остальных, и он разделил между всеми остальными поровну 1/3 всей оказавшейся у него рыбы. Известно, что общий улов составлял 6 кг 400 г и что в результате описанных процедур он разделился поровну. Определите первоначальный улов каждого из рыбаков.*

Решение. Данная задача – типичный пример арифметической задачи, решаемой с конца. В конце у каждого рыбака оказалось по 1 кг 280 г рыбы. Значит, у второго рыбака, перед тем как он делился с остальными, было в 3/2 раза больше рыбы, а именно 1 кг 920 г. Следовательно, у каждого из четырех оставшихся рыбаков в это время было по 1 кг 280 г – 640 г : 4 = 1 кг 120 г. Рассуждая таким же образом, найдем, что улов первого рыбака равнялся 1 кг 680 г, второго – 1 кг 780 г, а у каждого из трех оставшихся – по 980 г.

Задача 6. *В порту для загрузки танкеров имеются три трубопровода. По первому из них закачивается в час 300 тонн нефти, по второму – 400 тонн, по третьему – 500 тонн. Нужно загрузить два танкера. Если загрузку производить первыми двумя трубопроводами, подключив к одному из танкеров первый трубопровод, а к другому танкеру второй трубопровод, то загрузка обоих танкеров при наиболее быстром из двух возможных способов подключения займет 12 часов. При этом какой-то из танкеров, может быть, окажется заполненным раньше, и тогда подключенный к нему трубопровод отключается и в дальнейшей загрузке не используется. Если бы вместимость меньшего по объему танкера была вдвое больше, чем на самом деле, и загрузка производилась бы вторым и третьим трубопроводами, то при быстрейшем способе подключения загрузка заняла бы 14 часов. Определите, сколько тонн нефти вмещает каждый из танкеров.*

Решение. Очевидно, что более производительный трубопровод следует подключить к танкеру с большей вместимостью. Поскольку один из двух танкеров был заполнен ровно за 12 часов, то либо меньший вмещает $12 \cdot 300 = 3600$ тонн нефти, либо больший $12 \cdot 400 = 4800$ тонн. Первый случай невозможен, так как при удвоении вместимости меньшего танкера получаем 7200 тонн, а для заполнения такого танкера даже третьим трубопроводом требуется более 14 часов. Следовательно, больший танкер вмещает 4800 тонн и заполняется вторым и, тем более, третьим трубопроводом быстрее чем за 14 часов. Значит, меньший танкер вмещает $\frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 500 = 3500$ тонн.

Самое главное в этой задаче – не испугаться громоздкого условия, подойти к ней с позиции обычного здравого смысла.

Минимальный здравый смысл и понимание, что такое «процент», – вот все необходимое для решения следующей задачи.

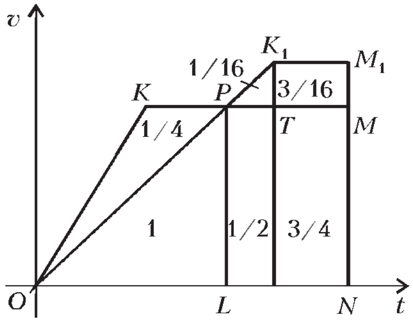
Задача 7. *В сообщении о лыжном кроссе сказано, что процент числа членов группы, принявших участие в кроссе, заключен в пределах от 96,8% до 97,2%. Определите минимально возможное число членов такой группы.*

Решение. Процент не участвовавших в кроссе заключен в пределах от 2,8% до 3,2%. Если бы в кроссе не участвовал 1 человек (меньше уже нельзя), то число членов группы заключалось бы в пределах от $1 \cdot \frac{100}{2{,}8} = 35{,}7\ldots$ до $1 \cdot \frac{100}{3{,}2} = 31{,}2\ldots$, т.е. минимальное число членов группы будет 32 человека. Понятно, что при меньшем числе членов группы 3,2% от этого числа будет меньше 1, а по условию в кроссе не участвовал по крайней мере один человек.

Следующая задача не совсем соответствует теме статьи, поскольку при ее решении больше используются геометрические, чем арифметические методы. Мы включили ее по двум причинам. Во-первых, при ее решении не используются ни уравнения, ни другие соотношения, содержащие неизвестные. Во-вторых, здесь иллюстрируется один весьма полезный метод решения задач на движение – графическая интерпретация.

Задача 8. *Из пунктов A и B навстречу друг другу вышли одновременно два поезда. Каждый из них двигался сначала равноускоренно (начальные скорости поездов равны нулю, ускорения различны), а затем, достигнув некоторой скорости, – равномерно. Отношения скоростей равномерного движения поездов равно 5/4. В некоторый момент времени скорости поездов оказались равными, а один из них прошел к этому времени расстояние в 5/4 раза больше, чем другой. В пункты B и A поезда прибыли одновременно. Какую часть пути прошел каждый из поездов к тому моменту, когда их скорости оказались равными?*

Решение. Рассмотрим графики, изображающие зависимость скорости от времени для каждого поезда. При этом можно считать, что оба поезда вышли из одного пункта. Для одного поезда графиком является ломаная OKM, для другого – OK_1M_1 (см. рисунок). Длина пройденного пути к определенному моменту времени одним из поездов равна площади фигуры, ограниченной снизу отрезком оси t и соответствующей частью графика его скорости сверху. По условию площади трапеций $OKMN$ и OK_1M_1N равны, значит, равновелики и фигуры OKP и PK_1M_1M. Площадь $OKPL$ равна 5/4 площади OPL (по условию). Если площадь OPL равна 1, то площадь OKP есть 1/4; площадь



PK_1T равна $1/16$, поскольку $K_1T = \frac{1}{4}PL$ (по условию отношение скоростей равномерного движения равно $5/4$, т.е. $M_1N = \frac{5}{4}PL$), а треугольники OPL и PK_1T подобны. Далее из равновеликости OKP и PK_1M_1M находим площадь прямоугольника TK_1M_1M. Она равна $\frac{3}{16}$. Затем находим площади двух оставшихся прямоугольников. Весь путь (он равен площади $OKMN$ или OK_1M_1N) равен $2\frac{1}{2}$. Поскольку площади трапеции $OKPL$ и треугольника OPL соответственно равны $\frac{5}{4}$ и 1, то в момент равенства скоростей (точка P) один поезд прошел $\frac{1}{2}$ пути, а другой – $\frac{2}{5}$.

И в заключение рассмотрим задачу, которая, по существу, является арифметической, поскольку решение основано на свойствах делимости натуральных чисел, хотя для удобства мы все же введем неизвестные. По содержанию эта задача скорее олимпиадная, чем конкурсная.

Задача 9. *У восьми школьников в сумме имеется 719 руб. Известно, что у любых двух из них различные суммы денег, но у одного из них в целое число раз больше денег, чем у другого. Сколько денег у каждого школьника?*

Решение. Пусть x_1 – наименьшая сумма, x_1x_2 – вторая по величине, …, $x_1x_2\ldots x_8$ – наибольшая сумма. По условию $x_i \neq 1$ при $i > 1$, $x_1 + x_1x_2 + \ldots + x_1x_2\ldots x_8 = 719$. 719 – число простое, следовательно, $x_1 = 1$. Далее имеем $x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_2x_3\ldots x_8 = 718 = 2\cdot 359$. Таким образом, $x_2 = 2$. Затем получим $x_3 = x_4 = 2$ и $x_5 + x_5x_6 + x_5x_6x_7 + x_5x_6x_7x_8 = 88 \cdot x_5$ – делитель 88. Если $x_5 = 2$, то $x_6 + x_6x_7 + x_6x_7x_8 = 43$. 43 – число простое, а $x_6 \neq 1$, значит, $x_5 \neq 2$. При $x_5 = 4$ найдем $x_6 = 3$, $x_7 = x_8 = 2$. Другие значения x_5 не подойдут.

Итак, школьники имели 1, 2, 4, 8, 32, 96, 192, 384 рубля соответственно.

Задачи для самостоятельного решения

1. На овощной базе имелся крыжовник, влажность которого составляла 99%. За время хранения его влажность уменьшилась на 1% (стала 98%). На сколько процентов уменьшилась масса хранившегося на базе крыжовника?

2. Автомобиль проезжает путь от A до B за 1 час. Автомобиль выехал из A, и одновременно из B вышел пешеход. Автомобиль встретил пешехода, довез его до A и затем прибыл в B, затратив на весь путь 2 ч 40 мин. За какое время может пройти весь путь от B до A пешеход?

3. Теплоход проходит путь от A до B по течению за 3 часа, а возвращается обратно за 4 часа. За какое время преодолеют путь от A до B плывущие со скоростью течения плоты?

4. Поезд, следующий из пункта A в пункт B, делает по пути несколько остановок. На первой остановке в поезд садятся 5 пассажиров, а на каждой следующей – на 10 пассажиров больше. На каждой остановке 50 пассажиров выходят из поезда. Возможен ли случай, когда в пункт B прибывает менее 336 пассажиров, если из пункта A их выезжает 462?

5. В сообщении о лыжном кроссе сказано, что процент числа участников кросса, не уложившихся в норматив, заключен от 94,2% до 94,4%. Каково наименьшее число участников кросса?

6. Автобус на пути из A в B делает 5 остановок по 10 мин через каждые 16 км (расстояние от A до B равно 96 км), скорость автобуса равна 65 км/ч. Одновременно с автобусом из B навстречу ему выезжает велосипедист со скоростью 21 км/ч. На каком расстоянии от A автобус встретится с велосипедистом?

7. Пассажирский поезд проходит мимо столба за 6 секунд. За какое время пройдут друг мимо друга скорый и пассажирский поезда, если скорость скорого поезда в $3/2$ раза больше скорости пассажирского, а длина пассажирского в $4/3$ раза больше длины скорого?

8. Работа началась между 9 и 10 часами утра, а закончилась между 15 и 16 часами того же дня. Определите продолжительность работы, если в момент начала и в момент окончания работы минутная и часовая стрелки были перпендикулярны.

9. Один рабочий может изготовить партию деталей за 12 часов. Работу начал один рабочий, через 1 час к нему присоединился второй, еще через час – третий и т.д., пока работа не была выполнена. Сколько времени проработал первый рабочий? (Производительность труда всех рабочих одинакова.)

10. Имеются три слитка массой 2, 3 и 5 кг с различным содержанием меди. Каждый слиток разделен на три части, и из девяти кусков получены три слитка массой 2, 3 и 5 кг с равным содержанием меди. На какие части следует разделить исходные слитки, чтобы гарантировать равное процентное содержание меди в получившихся слитках независимо от содержания ее в исходных слитках?

11. Три школьника делят между собой орехи. Сначала первый школьник дал каждому из двух других по одной четверти имевшихся у него орехов и еще пол-ореха. Затем второй дал каждому из двух других по одной четверти оказавшихся у него орехов и еще пол-ореха. Затем то же сделал третий школьник. В результате у каждого оказалось по 30 орехов. Сколько орехов было у каждого школьника ?

12. Имеются два сосуда. В одном содержится 3 л 100%-й кислоты, а в другом – 2 л воды. Из первого сосуда во второй перелили один стакан кислоты, а затем из второго в первый – один стакан смеси. Эту операцию повторили еще три раза. В результате во втором сосуде оказалась кислота крепостью 42%. Сколько процентов кислоты содержится теперь в первом сосуде?

13. Пункт B находится выше по течению, чем пункт A, на расстоянии 4,5 км от A. Скорость течения реки 3 км/ч. Двигаясь в стоячей воде, гребец идет со скоростью 5 км/ч. Гребец вышел из A, доплыл до B и вернулся в A. Через равные промежутки времени гребец отдыхал в течение 10 мин (в это время лодка плывет по течению), а всего таких перерывов оказалось 8. Через сколько времени гребец вернулся обратно в A?

Колебательный контур

В.МОЖАЕВ

В этой статье будут разобраны задачи, в которых основным элементом является колебательный LC-контур. В состав такого контура обычно входят два реактивных элемента – индуктивность и емкость, а также активное сопротивление. Последовательно соединенные, эти элементы и образуют последовательный колебательный контур. Основная задача при расчете колебательного контура состоит в определении временнóй зависимости тока в контуре и напряжений на его элементах при заданных начальных условиях.

Процессы в колебательном контуре описываются так называемым дифференциальным уравнением второго порядка, а общее решение этого уравнения содержит две неизвестные константы. Эти константы можно определить из начальных условий, вот почему для нахождения решения необходимо знать начальный ток в контуре и начальное напряжение, скажем, на конденсаторе.

Часто в задачах на колебательный контур требуется найти не общее решение, а какой-то конкретный параметр, например максимальный ток в контуре или максимальное напряжение на конденсаторе. Такие задачи можно решать, исходя из закона сохранения энергии и общих физических соображений. Так, при максимальном токе в контуре ЭДС индукции в катушке равна нулю, а если активное сопротивление контура равно нулю, то и напряжение на конденсаторе также равно нулю. Или, если напряжение на конденсаторе максимально, то ток в контуре отсутствует.

А теперь – конкретные задачи.

Задача 1. *В колебательном LC-контуре (рис.1) в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор емкостью C заряжен до напряжения U_0. Найдите зависимости напряжения на конденсаторе и тока в контуре от времени после замыкания ключа.*

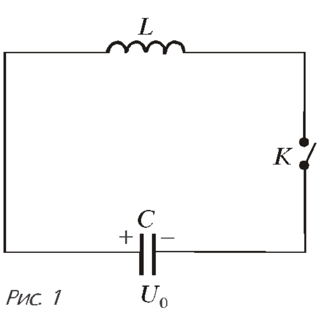


Рис. 1

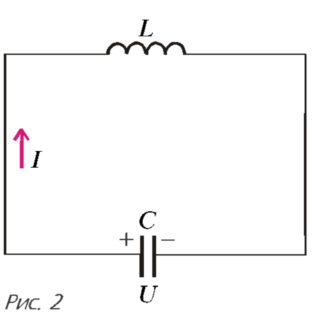


Рис. 2

Сразу после замыкания ключа напряжение на конденсаторе $U(0)=U_0$, а ток в контуре $I(0)=0$. Пусть в произвольный момент времени после замыкания ключа в контуре течет ток, как это изображено на рисунке 2. Запишем закон Ома для нашего контура:

$$LI' = U.$$

Поскольку $I = -CU'$, получим

$$U'' + \frac{1}{LC}U = 0.$$

Это – однородное (справа стоит ноль) дифференциальное уравнение второго порядка (старшая производная второго порядка). Уравнения такого вида описывают гармонические колебания одного из параметров колебательной системы. В нашем случае –напряжения на конденсаторе. Решение уравнения имеет вид

$$U(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t,$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – собственная частота колебаний контура, а A и B – константы, которые находятся из начальных условий. Первое начальное условие – это

$$U(0) = U_0.$$

После подстановки его в решение получим $A = U_0$. Из второго начального условия

$$I(0) = -CU' = 0$$

следует, что $B = 0$.

Теперь запишем окончательные выражения для напряжения на конденсаторе:

$$U(t) = U_0\cos\omega_0 t$$

и для тока в контуре:

$$I(t) = U_0\omega_0 C\sin\omega_0 t.$$

Сравнивая последние два выражения, видим, что напряжение на конденсаторе и ток в контуре изменяются по гармоническому закону с одной и той же частотой, но колебания тока и напряжения сдвинуты по фазе на $\pi/2$. Зависимости $U(t)$ и $I(t)$ изображены на рисунке 3.

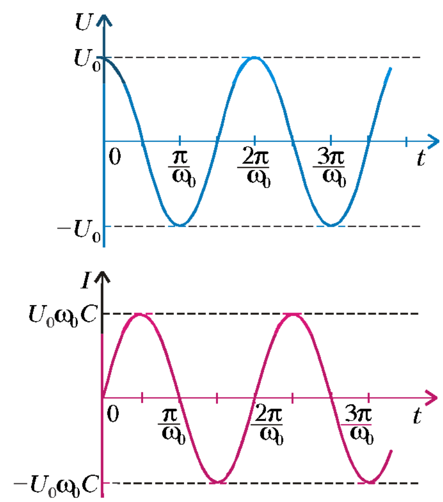


Рис. 3

Задача 2. *К LC-контуру (рис.4) в момент $t = 0$ подключают источник постоянной ЭДС $\mathcal{E}$ с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением. Определите напряжение на конденсаторе в зависимости от времени.*

Рассмотрим произвольный момент после замыкания ключа. Пусть в контуре течет ток I, как это изображено на рисунке 5. Запишем закон Ома для нашего контура:

$$\mathcal{E} - LI' = U_C,$$

где U_C – напряжение на конденсаторе. Используем связь между током и напряжением на конденсаторе:

$$I = CU_C'.$$

Продифференцируем это соотношение по времени:

$$I' = CU_C''.$$

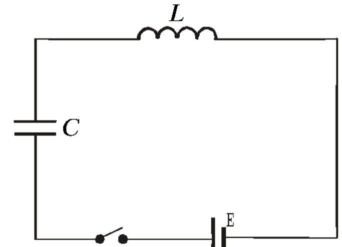


Рис. 4

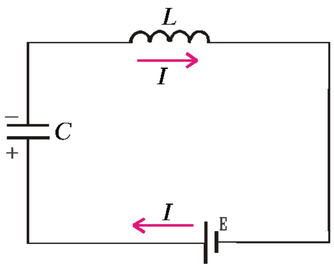


Рис. 5

Подставляя выражение для I' в уравнение закона Ома, получим

$$U_C'' + \omega_0^2 U_C = \omega_0^2 \mathcal{E},$$

где $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ – собственная частота контура. Это уравнение является неоднородным (справа не ноль) линейным дифференциальным уравнением второго порядка (по старшей производной). Ранее, в задаче 1, мы имели дело с аналогичным уравнением, только с нулевой правой частью. Сделав замену переменной: $X = U_C - \mathcal{E}$, сведем наше неоднородное уравнение к однородному:

$$X'' + \omega_0^2 X = 0.$$

Решение такого уравнения мы уже знаем:

$$X = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t.$$

Для определения констант A и B используем наши начальные условия: при $t = 0$ $U_C = 0$, или $X = -\mathcal{E}$, и $I = CU_C' = 0$, или $X' = 0$. Подстановка начальных условий в решение позволяет найти A и B:

$$A = -\mathcal{E},\ B = 0.$$

Окончательно получим

$$X(t) = -\mathcal{E}\cos\omega_0 t,$$

или

$$U_C(t) = \mathcal{E}(1 - \cos\omega_0 t).$$

Изменение напряжения на конденсаторе будет происходить по гармоническому закону (рис.6), но, в отличие от предыдущей задачи, не относительно нулевого уровня, а относительно уровня $U_C = \mathcal{E}$.

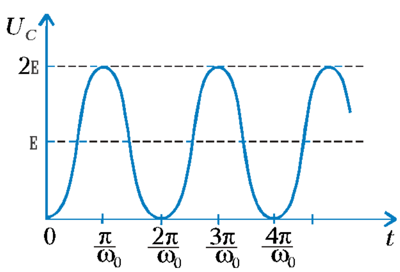


Рис. 6

Задача 3. *В колебательном LC-контуре, изображенном на рисунке 7, при разомкнутом ключе K заряд на конденсаторе емкостью C_1 равен q_0, а конденсатор емкостью C_2 не заряжен. Через какое время после замыкания ключа заряд на конденсаторе емкостью C_2 будет иметь максимальное значение? Чему будет равен этот заряд? Омическими потерями в катушке индуктивности пренебречь.*

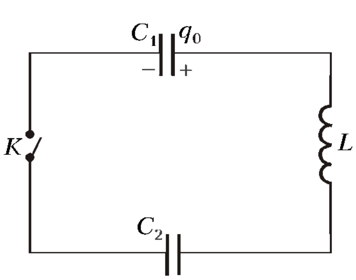


Рис. 7

Рассмотрим произвольный момент времени после замыкания ключа. Пусть в этот момент заряд на первом конденсаторе q_1, на втором конденсаторе q_2 и в контуре течет ток I (рис.8). Поскольку нас интересует заряд $q_{2\max}$, разумно найти зависимость $q_2(t)$. Для этого запишем закон Ома для нашего контура:

$$-LI' = \frac{q_2}{C_2} - \frac{q_1}{C_2}.$$

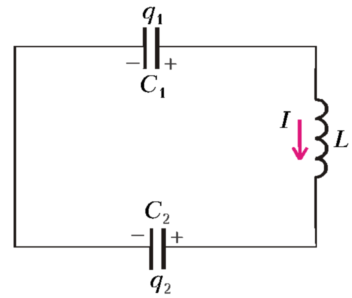


Рис. 8

Поскольку $I = q_2'$, а $q_1 + q_2 = q_0$, уравнение относительно q_2 будет иметь вид

$$q_2'' + \frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2} q_2 = \frac{q_0}{LC_1}.$$

Введем новую переменную:

$$X = q_2 - \frac{q_0 C_2}{C_1 + C_2},$$

запишем для нее уравнение колебаний:

$$X'' + \omega_0^2 X = 0,$$

где $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{C_1 + C_2}{LC_1C_2}}$ – собственная частота контура, и его решение:

$$X(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t.$$

При $t = 0$ $q_2 = 0$, или $X(0) = -\dfrac{q_0 C_2}{C_1 + C_2}$, и $I = 0$, или $X' = 0$. Начальные условия позволяют найти константы A и B:

$$A = -\frac{q_0 C_2}{C_1 + C_2},\ B = 0.$$

Решение уравнения колебаний имеет вид

$$X(t) = -\frac{q_0 C_2}{C_1 + C_2}\cos\omega_0 t,$$

или, переходя обратно к переменной q_2,

$$q_2(t) = \frac{q_0 C_2}{C_1 + C_2}(1 - \cos\omega_0 t).$$

Очевидно, что первый раз заряд q_2 достигнет максимального значения через время $t_1 = \pi/\omega_0$, затем это максимальное значение будет повторяться с периодом $T = 2\pi/\omega_0$. В общем случае это можно записать в виде

$$t_N = \frac{\pi}{\omega_0}(1 + 2N),\ \text{где } N = 0,\ 1,\ 2\ldots$$

Величина максимального заряда на втором конденсаторе равна

$$q_{2\max} = \frac{2q_0 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Задача 4. *В схеме, изображенной на рисунке 9, в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор емкостью C не заряжен. Ключ K на некоторое время замыкают, а затем снова размыкают. Определите ток через катушку индуктивности в момент размыкания ключа, если после размыкания ключа максимальное напряжение на конденсаторе оказалось равным $2\mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ – ЭДС батареи. Омическим сопротивлением катушки пренебречь. Внутреннее сопротивление батареи настолько мало, что время зарядки конденсатора (при замкнутом ключе) много меньше времени, в течение которого ключ K остается замкнутым.*

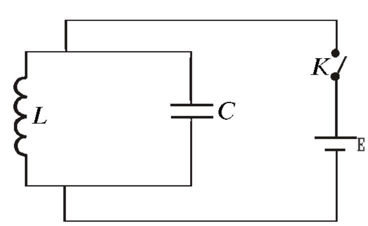


Рис. 9

Сразу после замыкания ключа конденсатор быстро зарядится до напряжения, равного ЭДС батареи, а в катушке индуктивности будет медленно нарастать ток, начиная с нулевого значения. В момент размыкания ключа напряжение на конденсаторе будет равно ЭДС батареи $\mathcal{E}$, а через катушку будет течь ток, который мы обозначим I_0. Это будут начальные условия для нашего LC-контура.

Пусть в произвольный момент времени (после размыкания ключа) в контуре течет ток I, а напряжение на конденсаторе равно U_C, как это изображено на рисунке 10. Запишем закон Ома для данного контура:

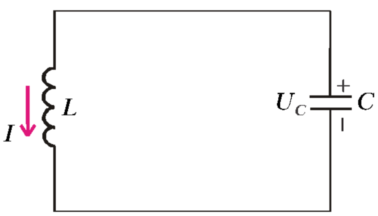


Рис. 10

$$LI' = U_C,$$

или, поскольку $I = -CU'$,

$$U_C'' + \omega_0^2 U_C = 0,$$

где $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$. Решение данного уравнения будем искать в виде

$$U_C(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Эта форма записи решения эквивалентна используемой ранее. Там мы имели две константы A и B, и в данном случае также две константы: A и φ. Используя начальные условия $U_C(0) = \mathcal{E}$ и $I(0) = I_0$, получим $\mathcal{E} = A\cos\varphi$, $I_0 = AC\omega_0\sin\varphi$. Отсюда

$$A = \sqrt{\mathcal{E}^2 + \left(\frac{I_0}{C\omega_0}\right)^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{I_0}{\mathcal{E}C\omega_0}.$$

Поскольку A является амплитудой колебаний напряжения на конденсаторе, эта величина и есть максимальное напряжение на нем. Следовательно, $\sqrt{\mathcal{E}^2 + \left(\frac{I_0}{C\omega_0}\right)^2} = 2\mathcal{E}$, откуда

$$I_0 = \sqrt{3}\mathcal{E}C\omega_0 = \mathcal{E}\sqrt{3\frac{C}{L}}.$$

Как в предыдущих трех задачах, так и при решении этой задачи мы использовали общий принцип решения, который позволяет получить полную информацию о контуре. Теперь приведем упрощенное решение, исходя из общих физических соображений и закона сохранения энергии. Запишем закон сохранения энергии для момента времени $t = 0$ и для того момента, когда напряжение на конденсаторе максимально и ток в контуре равен нулю:

$$\frac{LI_0^2}{2} + \frac{C\mathcal{E}^2}{2} = \frac{4C\mathcal{E}^2}{2},$$

откуда и найдем искомый ток:

$$I_0 = \mathcal{E}\sqrt{3\frac{C}{L}}.$$

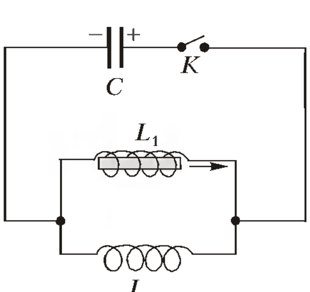


Рис. 11

Задача 5. *В схеме на рисунке 11 конденсатор емкостью C заряжен до некоторого напряжения, а ключ K разомкнут. После замыкания ключа в схеме происходят свободные колебания, при которых амплитудное значение тока в катушке индуктивностью L_2 равно I_0. Когда ток в катушке индуктивностью L_1 достигает максимального значения, из нее быстро (за малое время по сравнению с периодом колебаний) выдвигают сердечник, что приводит к уменьшению ее индуктивности в k раз. Найдите максимальное напряжение на конденсаторе после выдвижения сердечника.*

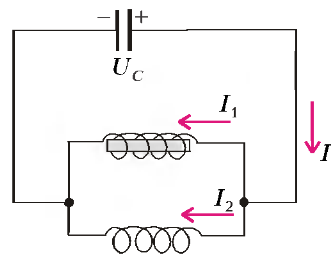


Рис. 12

Рассмотрим произвольный момент времени после замыкания ключа K, но до выдвижения сердечника. Обозначим начальное напряжение на конденсаторе U_{C0}, напряжение в произвольный момент времени U_C. Пусть через катушку индуктивностью L_1 течет ток I_1, а через катушку индуктивностью L_2 – ток I_2 (рис.12). Запишем закон Ома для контура, включающего в себя конденсатор и катушку индуктивностью L_2:

$$L_2 I_2' = U_C. \qquad (1)$$

Закон Ома для контура, охватывающего обе катушки, имеет вид

$$L_1 I_1' = L_2 I_2',$$

или

$$(L_1 I_1 - L_2 I_2)' = 0.$$

Отсюда получим

$$L_1 I_1 - L_2 I_2 = \text{const},$$

или, поскольку начальные токи через катушки равны нулю,

$$L_1 I_1 = L_2 I_2.$$

Из условия непрерывности тока следует, что

$$I = I_1 + I_2 = \frac{L_1 + L_2}{L_1} I_2. \qquad (2)$$

Продифференцируем уравнение (1) по времени:

$$L_2 I_2'' = U_C'.$$

Поскольку $I = -CU_C'$, уравнение приобретает вид

$$L_2 I_2'' + \frac{1}{C} I = 0.$$

Подставив сюда выражение (2), окончательно получим

$$I_2'' + \frac{L_1 + L_2}{CL_1L_2} I_2 = 0.$$

Решение этого уравнения запишем в виде

$$I_2(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t,$$

где $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{L_1 + L_2}{CL_1L_2}}$. Поскольку $I_2(0) = 0$, получим $A = 0$. Для нахождения константы B воспользуемся тем фактом, что амплитудное значение тока в катушке индуктивностью L_2 равно I_0, и получим $B = I_0$. Тогда зависимости токов от времени имеют вид

$$I_2(t) = I_0\sin\omega_0 t \quad \text{и} \quad I_1(t) = \frac{L_2}{L_1} I_0 \sin\omega_0 t.$$

За время удаления сердечника из первой катушки магнитные потоки в обеих катушках не изменятся. Это приведет к тому, что ток во второй катушке сохранится:

$$I_2^* = I_0.$$

Ток I_1^* в первой катушке найдем из условия $L_2 I_0 = \frac{L_1}{k} I_1^*$:

$$I_1^* = \frac{kL_2}{L_1} I_0 .$$

Для определения максимального напряжения на конденсаторе воспользуемся законом сохранения энергии. Магнитная энергия, запасенная в катушке сразу после удаления сердечника, равна

$$W_L = \frac{L_1 \left(I_1^*\right)^2}{2k} + \frac{L_2 \left(I_2^*\right)^2}{2} =$$

$$= \frac{L_1}{2k}\left(\frac{kL_2}{L_1} I_0\right)^2 + \frac{L_2 I_0^2}{2} = \frac{L_2 I_0^2}{2}\left(1 + \frac{kL_2}{L_1}\right).$$

Когда напряжение на конденсаторе максимально, общий ток в контуре равен нулю, т.е. токи через катушки связаны соотношением

$$I_1^{**} + I_2^{**} = 0.$$

Ранее полученная связь между токами $(L_1 I_1 - L_2 I_2 = \text{const})$ для токов I_1^{**} и I_2^{**} будет иметь вид

$$\frac{L_1}{k} I_1^{**} - L_2 I_2^{**} = 0.$$

Из последних двух уравнений следует, что токи в катушках будут равны нулю, а вся энергия контура будет сосредоточена в конденсаторе и равна

$$W_C = \frac{CU_m^2}{2},$$

где U_m – максимальное напряжение на конденсаторе. Согласно закону сохранения энергии, $W_L = W_C$, или

$$\frac{L_2 I_0^2}{2}\left(1 + \frac{kL_2}{L_1}\right) = \frac{CU_m^2}{2} .$$

Отсюда находим

$$U_m = I_0 \sqrt{\frac{L_2 \left(L_1 + kL_2\right)}{CL_1}} .$$

Задача 6. *В колебательном LCR-контуре (рис.13) активное сопротивление R мало, так что колебания в нем затухают слабо. Для получения незатухающих колебаний поступают следующим образом: в те моменты, когда ток в цепи максимален, катушку индуктивности быстро (за малое время по сравнению с периодом колебаний в контуре) растягивают от длины l_1 до длины l_2, причем $l_2 - l_1 \ll l_1$, а в моменты, когда ток в цепи равен нулю, катушку быстро сжимают до прежнего размера. При каком относительном изменении длины катушки $\left(l_2 - l_1\right)/l_1$ колебания в контуре не будут затухать? Индуктивность катушки считать обратно пропорциональной ее длине.*

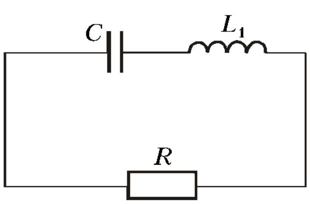


Рис. 13

Рассмотрим момент времени, когда ток в катушке индуктивностью L_1 достигает максимального значения I_{1m} и катушку растягивают до длины l_2, при которой индуктивность равна L_2. Поскольку изменение индуктивности происходит быстро, будет сохраняться магнитный поток, пронизывающий катушку:

$$L_1 I_{1m} = L_2 I_{2m},$$

где I_{2m} – новый ток в катушке после ее удлинения. Так как индуктивность обратно пропорциональна длине катушки,

$$l_2 I_{1m} = l_1 I_{2m} .$$

Отсюда

$$I_{2m} = \frac{l_2}{l_1} I_{1m} .$$

Новая энергия в контуре стала

$$W_2 = \frac{L_2 I_{2m}^2}{2} = \frac{L_2 l_2^2 I_{1m}^2}{2 l_1^2},$$

а первоначальная энергия была

$$W_1 = \frac{L_1 I_{1m}^2}{2} .$$

Приращение энергии в контуре равно

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{L_2 l_2^2}{2 l_1^2} I_{1m}^2 - \frac{L_1}{2} I_{1m}^2 ,$$

или, поскольку $L_2 = \frac{l_1}{l_2} L_1$,

$$\Delta W = \frac{L_1 l_2}{2 l_1} I_{1m}^2 - \frac{L_1}{2} I_{1m}^2 = \frac{L_1 \left(l_2 - l_1\right)}{2 l_1} I_{1m}^2 .$$

Возвращение индуктивности к прежнему значению при нулевом токе в контуре, очевидно, не приводит к изменению энергии – она остается неизменной. Последующая подкачка энергии в контур происходит через время, равное полупериоду колебаний. За это время в контуре происходит потеря энергии в виде выделяющегося в резисторе тепла

$$\Delta W_R = \frac{I_{1m}^2 R}{2} \frac{T}{2} = \pi \sqrt{L_1 C} \frac{I_{1m}^2 R}{2} .$$

Колебания в контуре не будут затухать, если подкачка энергии в контур ΔW будет больше или равна потерям энергии ΔW_R:

$$\frac{L_1 \left(l_2 - l_1\right)}{2 l_1} I_{1m}^2 \ge \pi \sqrt{L_1 C} \frac{I_{1m}^2 R}{2} .$$

Отсюда находим искомую величину относительного изменения длины катушки:

$$\frac{l_2 - l_1}{l_1} \ge \pi R \sqrt{\frac{C}{L_1}} .$$

Упражнения

1. В LC-контуре, изображенном на рисунке 14, при разомкнутом ключе K заряд на конденсаторе емкостью C_1 равен q, а конденсатор емкостью C_2 $(C_2 = 4C_1)$ не заряжен. Определите максимальный ток в контуре после замыкания ключа. Омическими потерями в катушке индуктивностью L можно пренебречь.

2. В схеме на рисунке 15 в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор емкостью C не заряжен. Ключ на некоторое время замыкают, а затем снова размыкают. Определите ток I_0 через катушку индуктивностью L в момент размыкания ключа, если после размыкания ключа максимальный ток

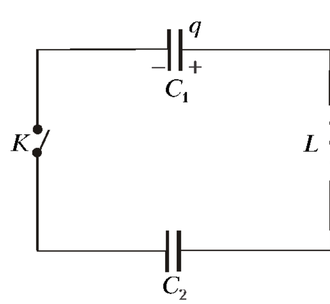


Рис. 14

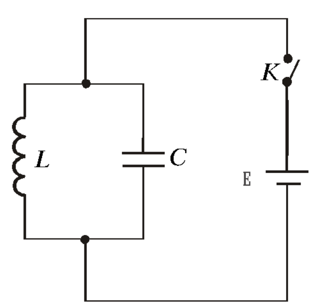


Рис. 15

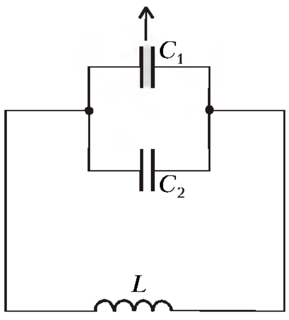


Рис. 16

в LC-контуре оказался равным $2I_0$. Омическим сопротивлением катушки пренебречь. ЭДС источника $\mathcal{E}$.

3. Колебательный контур состоит из двух параллельно соединенных конденсаторов емкостью C_1 и C_2 и катушки индуктивностью L (рис.16). В контуре происходят свободные колебания, при которых амплитуда колебаний заряда на конденсаторе емкостью C_2 равна q_0. В конденсаторе емкостью C_1 находится диэлектрическая пластина с диэлектрической проницаемостью ε, которая полностью заполняет его пространство. Когда заряд на этом конденсаторе достигает максимального значения, пластину быстро (за малое время по сравнению с периодом колебаний) удаляют из конденсатора. Определите амплитуду новых колебаний тока в катушке.

4. В колебательном LCR-контуре (см. рис.13) сопротивление R мало, так что колебания в нем затухают слабо. Для получения незатухающих колебаний поступают следующим образом: дважды за период, когда заряд конденсатора максимален, его пластины быстро (по сравнению с периодом колебаний) раздвигают от расстояния d_1 до расстояния d_2, а в моменты, когда заряд равен нулю, их быстро сдвигают до прежнего расстояния. При каком относительном изменении расстояния между обкладками $(d_2 - d_1)/d_1$ колебания в контуре не будут затухать?

ИНФОРМАЦИЯ

Заочная физическая школа при физическом факультете МГУ

Физический факультет МГУ объявляет прием учащихся в 10 и 11 классы Заочной физической школы (ЗФШ) при факультете на очередной учебный год.

Физический факультет МГУ готовит физиков — теоретиков и экспериментаторов по всем разделам современной физики и астрономии. Фундаментальное университетское образование позволяет выпускникам физического факультета быстро осваивать специфику любого научного или технического направления, успешно работать на стыке научных направлений – таких, например, как геофизика и биофизика, астрофизика и химическая физика, компьютерная физика и математическое моделирование.

Выпускникам физического факультета присваивается степень магистра.

Основная цель ЗФШ – помочь учащимся средней школы глубже изучить физику, лучше подготовиться к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения, прежде всего – на физический факультет МГУ.

Прием в ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать *до 1 октября* по адресу:

119899 Москва, ГСП-2, Воробьевы горы, МГУ, физический факультет, ЗФШ.

В письмо вложите два экземпляра анкеты, заполненной на листах плотной бумаги размером 7×12 см по приведенному здесь образцу, и конверт с Вашим адресом.

Решение о зачислении в ЗФШ будет сообщено до 20 октября.

Принятым в ЗФШ в течение года высылаются контрольные задания по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Решенные задания оцениваются, рецензируются и отсылаются обратно. Учащиеся 10 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 11 класс. Успешно прошедшие обучение получают удостоверение об окончании ЗФШ (при поступлении на физический факультет МГУ удостоверения об окончании ЗФШ учитываются приемной комиссией).

Для проживающих в Москве и Московской области имеется вечерняя физическая школа.

Справки по телефону (095) 939-54-95 с 14 до 16 часов по рабочим дням.

Фамилия, имя, отчество	*Пирогов Юрий Андреевич*
Класс ЗФШ	*10*
Профессия родителей	*мать – врач,* *отец – инженер*
Подробный домашний адрес	*120713 Москва,* *ул.Столетова, д.3,кв.13*
Номер и адрес школы	*школа 564,* *Севастопольский пр., 5а*

Вступительное задание

Поступающим в 10 класс нужно решить задачи 1–4, в 11 класс — задачи 4–7

1. По взаимно перпендикулярным дорогам движутся два автомобиля с постоянными скоростями v_1 и v_2. В момент времени, когда расстояние между ними минимально, первый автомобиль находится на расстоянии L от перекрестка. На каком расстоянии от перекрестка находится в этот момент второй автомобиль?

2. На пути тела массой m, скользящего по гладкой горизонтальной поверхности, находится незакрепленная горка высотой H и массой M. Передний склон горки плавно переходит в плоскость; горка может скользить по плоскости без трения и не отрываясь от нее. При какой минимальной скорости тела оно сможет преодолеть горку?

3. К бруску массой M, покоящемуся на горизонтальной плоскости, прикреплена пружина жесткостью k, которую начинают плавно растягивать горизонтальной силой. До начала движения бруска эта сила совершает работу A. Определите коэффициент трения тела о плоскость.

4. Придумайте качественную задачу по любому разделу физики и приведите ее решение.

5. Идеальный газ массой m и молярной массой M, имеющий начальную температуру T_0, охлаждают изохорически так, что его давление падает в k раз, а затем расширяют изобарически до тех пор, пока его температура не станет равной первоначальной. Определите совершенную газом работу.

6. Внутри уединенной толстостенной металлической сферической оболочки с радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) на расстоянии $d < R_1$ от центра помещен точечный заряд Q. Определите потенциал центра оболочки.

7. Возможно ли существование электростатического поля, у которого силовые линии представляют собой сгущающиеся параллельные прямые?

VIII Российская олимпиада по астрономии и физике космоса

Заключительный этап очередной олимпиады школьников по астрономии и физике космоса прошел с 8 по 13 апреля 2001 года в подмосковном городе Троицке на базе Фонда «Байтик» и Центра новых педагогических технологий. По традиции, научное и идейное руководство олимпиадой осуществляло Астрономическое общество.

В олимпиаде приняли участвовали 145 школьников из 31 региона России и Белоруссии.

Как и в прошлые годы, участники олимпиады были разделены на три возрастные группы: 8 – 9, 10 и 11 классы (по традиции, задания для учащихся 8 и 9 классов немного различались). Каждый регион мог направить на олимпиаду четырех участников по 8 – 9 классам, двух десятиклассников и двух одиннадцатиклассников, а также (дополнительно) победителей Российской и Международной олимпиад 2000 года и Олимпиады ННЦ 2001 года.

Теоретический и творческо-практический туры олимпиады включали в себя, соответственно, 6 и 2 задачи. Большинство задач были достаточно традиционными. Лидерами же по числу «оригинальных» решений стала задача 5 для 8 класса. Знаете ли вы, например, что смена времен года бывает потому, что «ось Земли – кривая»!? Интересно также, что «при попадании в телескоп звезда увеличивается в размерах», а «окуляр дает в глаз астроному больше света».

На закрытии олимпиады ее призерам были вручены дипломы и ценные подарки, в том числе – два телескопа. Победители получили приглашения войти в состав команд России и Московской области, которые отправятся в Крым на VI Международную астрономическую олимпиаду.

По традиции, просим все вопросы, замечания и предложения (по комплекту задач прошедшей олимпиады и другим вопросам, а также интересные задачи, которые вы хотели бы видеть в будущих олимпиадах) сообщить автору по электронной почте: gavrilov@issp.ac.ru или по почтовому адресу: 142432 Черноголовка Московской обл., Институтский проспект, 15, ИФТТ РАН.

Ниже приводятся условия задач теоретического тура олимпиады и список ее призеров.

Задачи теоретического тура

8 класс

1. В прошлом году Юпитер ярче всего был виден в середине ноября. Когда он будет наиболее ярок в течение текущего года? Объясните, почему.

2. На какой географической широте в день летнего солнцестояния высота Солнца над горизонтом наибольшая?

3. С какой точностью должен идти часовой механизм телескопа (т.е. на сколько секунд в сутки допустимо его отставание или опережение), чтобы изображение звезды, равное $3''$, за часовую экспозицию не размазалось больше чем на треть своего размера (т.е. оставалось почти круглым)?

4. Художник нарисовал картину «Высадка космонавтов на спутник Сатурна», изобразив на фоне звездного неба диск Солнца и планету Сатурн примерно одного размера. Какой из спутников Сатурна имел в виду художник?

5. Почему бывают зима и лето? Иными словами, по каким астрономическим причинам происходит смена времен года? Ответ необходимо дать развернутый (т.е. популярно объяснить это, скажем, пятиклассникам, чтобы они поняли).

6. Вот несколько описаний Млечного Пути писателями разных стран:

«А ночь была чудесная! На ясном, без единого облачка, глубоком небе, с россыпью звезд и туманной полосой Млечного Пути, сияла полная Луна.

Ночь была великолепная – теплая и ясная; Луна (было полнолуние) ярко сияла среди мерцающих звезд, и Млечный Путь переливался серебром.

Хлопец с трудом раскрыл отяжелевшие веки, но увидел только серый Чумацкий Шлях [Млечный Путь], пересекающий небо, и на нем месяц, блестевший истертой подковой.

Наступила ночь [в Индии]. Над головой повисла серебряной лодочкой лежачая Луна. Млечный Путь поднялся мостом через весь небосвод от горизонта до горизонта. По сравнению с искрящимся звездным небом притихшая Земля казалась мрачной и угрожающей».

Писатели, безусловно, не сговаривались между собой, однако их описания почти одинаковы. Такое сходство как будто говорит о верности описаний, и все же в них есть одна и та же ошибка. Найдите ее.

9 класс

1–4. См. задачи 1–4 для 8 класса.

5. Может ли на какой-либо гипотетической планете быть так, чтобы сезоны года сменялись на всей планете синхронно, а не как на Земле или Марсе, где в северном и южном полушариях они сменяются в противофазе?

6. Институт физики твердого тела РАН проводил на орбитальной станции «Мир» эксперименты по росту кристаллов в условиях невесомости. Однако невесомость на станции «Мир» весьма условная: достичь абсолютной невесомости мешают движения космонавтов, работа приборов на станции и другие факторы. Впоследствии исследования стали называться экспериментами по росту кристаллов в условиях микрогравитации. Оцените уровень этой микрогравитации, т.е. характерные величины ускорений, которые испытывает корпус станции в процессе эксплуатации. (Заметим, что космонавты даже отменяли зарядку в те дни, когда проходил рост кристаллов!) Масса комплекса «Мир» в последний год эксплуатации составляла около 140 тонн (в последние дни – 137 т).

Примечание: внесистемной единицей микрогравитации считается μg («микроже»), $1\mu g = 10^{-6} g = 9{,}81$ мкм/с^2.

10 класс

1. В феврале 2001 года космический аппарат NEAR впервые осуществил мягкую посадку на астероид Эрос. Скорость опускания аппарата на поверхность Эроса составила 2 м/с. Если бы удар оказался упругим, то на какую высоту подпрыгнул бы аппарат от удара? Для упрощенных расчетов считать астероид шаром диаметром 30 км со средней плотностью вещества $\rho = 3000$ кг/м^3.

Примечание: объем шара вычисляется по формуле $V = 4/3\pi R^3$.

2. Некоторая звезда имеет координаты $\alpha = 6$ ч, $\delta = +23{,}5^\circ$. Однако, как известно, координаты всех звезд медленно меняются из-за прецессии земной оси – ось Земли описывает конус за период около 26 тысяч лет. Какие координаты (α, δ) будет иметь эта звезда через 6500 лет?

3. Найдите период обращения планеты (по круговой орбите вокруг Солнца), с которой звездная величина Солнца равна звездной величине Луны в полнолуние.

4. В романе Айзека Азимова «Сами боги» есть эпизод, в котором герой, живущий на лунной базе, выходит на поверхность Луны и смотрит на небо:

«Земля висела в небе на положенном месте – ее широкий серп выгибался к юго-западу. Прямо под ним горел Орион».

1) На какой стороне Луны и в каком ее полушарии находился герой?

2) В какой фазе была Луна для наблюдателей на Земле?

3) На фоне какого созвездия была видна Луна с Земли?

4) В каком сезоне года это происходило?

5–6. См. задачи 5–6 для 9 класса.

11 класс

1. Как астрономы могут узнать расстояние до скопления звезд, параллакс которого не удается измерить непосредственно?

2–4. См. задачи 2–4 для 10 класса.

5. Современный аппарат «Планетарий» устроен так, что каждую группу звезд проецирует на купол некоторая маленькая оптическая система. Оцените, каковы должны быть параметры (сообразите сами, какие именно параметры тут важны) объектива данной оптической системы, чтобы зрители, сидящие в центре зала планетария, воспринимали точками «звезды» на куполе. Рассмотрите случай обычного планетария с залом (куполом) диаметром 10 м. На слайдах созвездий, проецируемых на купол, изображения звезд имеют размер $l_0 = 0{,}1$ мм (в качестве таких «слайдов» часто используется фольга с дырочками-звездами упомянутого размера).

6. Вам дан баллистический бюллетень № 57 о полете комплекса «Мир», опубликованный 16 марта 2001 года (см., например, http://www.pereplet.ru/pops/space.cgi):

«Виток текущий – 86219.

Масса комплекса – 137 тонн.

Период обращения – 89,161 мин.

Средняя высота орбиты – 236,0 км.

Суточное падение средней высоты орбиты в текущие сутки – 2,5 км.

Положение Солнца относительно плоскости орбиты – +48,5 град.

Продолжительность освещенной части орбиты – 57,4 мин.

Параметр солнечной активности F10.7 – 140.

Геомагнитная возмущенность Земли Ap – 7.

Время достижения высоты 220 км, начало динамических операций – 21.03.2001 (+ 2 сут.).

Время существования с учетом 15 % отклонения прогноза осредненных значений параметров солнечной активности – 28.03.2001 (+3 сут. / –2 сут.).

Дата определения параметров орбиты – 15.03.2001».

Считая орбиту комплекса круговой, оцените плотность атмосферы на высоте 236 км от Земли. Поперечное сечение комплекса принять равным $S = 50$ м^2. Масса Земли $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ кг, радиус $R = 6371$ км.

Призеры олимпиады

Дипломы I степени получили

Бадьин Д. – Лесной Свердловской обл., 11 кл.,
Балуев Р. – Саратов, 11 кл.,
Батраев В. – Тольятти, 11 кл.,
Блинов Д. – Лесной Свердловской обл., 9 кл.,
Булах В. – Тула, 10 кл.,
Гуреев С. – Москва, 8 кл.,
Капарулин Д. – Томск, 9 кл.,
Квасов И. – Джержинск Нижегородской обл., 10 кл.,
Константинов С. – Челябинск, 10 кл.,
Лебедев А. – Москва, 10 кл.,
Ловягин Н. – Сыктывкар, 9 кл.,
Нургалиев Д. – Москва, 11 кл.,
Пятков Ф. – Липецк, 8 кл.,
Румянцев Р. – Санкт-Петербург, 11 кл.,
Сафонов Б. – Екатеринбург, 9 кл.,
Субботин М. – Рязань, 8 кл.

Дипломы II степени получили

Андреев И. – п.Черноголовка Московской обл., 8 кл.,
Боченков С. – Рязань, 10 кл.,
Бургар А. – Волгодонск, 11 кл.,
Веремьев А. – ст.Ленинградская Краснодарского кр., 10 кл.,
Иванов А. – Челябинск, 11 кл.,
Иванов М. – Москва, 11 кл.,
Каменский А. – Русско-Высоцкое Ленинградской обл., 9 кл.,
Канев Е. – Ухта, 8 кл.,
Касимов Р. – Каменск-Уральский, 10 кл.,
Киселев В. – Тихорецк, 10 кл.,
Королев С. – Рязань, 11 кл.,
Кузьмин Д. – Иркутск, 11 кл.,
Лавренов И. – Москва, 7 кл.,
Лихачев Р. – Сыктывкар, 11 кл.,
Павлов В. – Ярославль, 10 кл.,
Соломаха Ю. – Миасс, 8 кл.,
Сумин А. – Славянск-на-Кубани Краснодарского кр., 9 кл.,
Хлыбов С. – Челябинск, 8 кл.,
Худяков А. – Железнодорожный Московской обл., 10 кл.

Дипломы III степени получили

Бабкин Ю. – Москва, 9 кл.,
Баринов М. – Минск, 11 кл.,
Башаков А. – Тихвин, 11 кл.,
Бокарева А. – Оренбург, 9 кл.,
Бородин И. – Челябинск, 8 кл.,
Бухараев А. – Казань, 11 кл.,
Веревкин К. – Гатчина, 10 кл.,
Гедерцев А. – Санкт-Петербург, 11 кл.,
Егоров А. – Тула, 8 кл.,
Енгалычев Ф. – Железнодорожный Московской обл., 9 кл.,
Зигулев С. – Екатеринбург, 10 кл.,
Зиновьев Д. – Челябинск, 11 кл.,
Ким А. – Оренбург, 11 кл.,

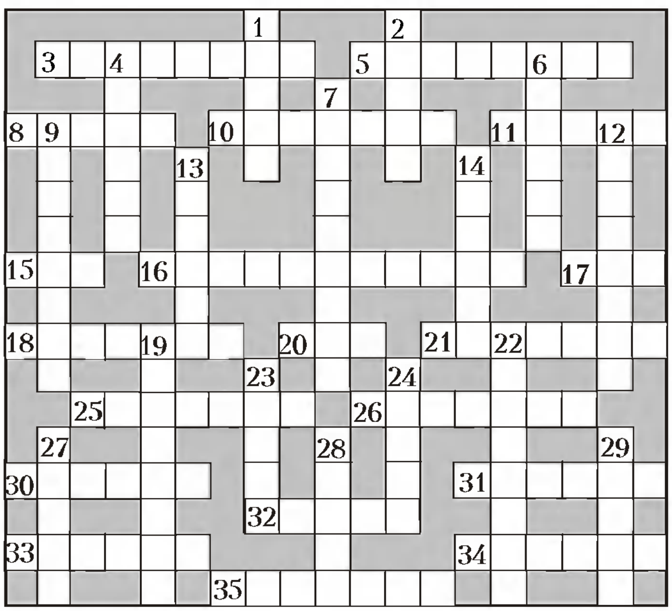
Кожихов П. – Челябинск, 10 кл.,
Короткий С. – Москва, 11 кл.,
Краснокутский О. – Ярославль, 11 кл.,
Лымарев В. – Челябинск, 9 кл.,
Мананников А. – Раменское, 11 кл.,
Нагаев М. – Белгород, 10 кл.,
Нестеров Н. – Брянск, 9 кл.,
Перунов М. – Оренбург, 11 кл.,
Пилипенко С. – Москва, 10 кл.,
Плотников Д. – Оренбург, 11 кл.,
Подлесных Д. – Сергиев Посад, 10 кл.,
Сабуров А. – Оренбург, 9 кл.,
Сажин С. – Пермь, 11 кл.,
Сахаров О. – Нальчик, 10 кл.,
Слесарев А. – Бугульма, 9 кл.,
Соколовский К. – Москва, 11 кл.,
Спивак И. – Курск, 11 кл.,
Ткаченко Р. – Алексеевка Белгородской обл., 9 кл.,
Трубников Г. – Челябинск, 8 кл.,
Тыклин А. – Москва, 10 кл.,
Тюпин А. – Ижевск, 9 кл.,
Хацуков И. – Урвань, 8 кл.,
Щёкин А. – п.Черноголовка Московской обл., 10 кл.

Публикацию подготовил
М.Гаврилов

ИГРЫ И ГОЛОВОЛОМКИ

Кроссворд «Физики и их открытия»

В этом кроссворде в качестве вопроса сформулирована область исследований или же конкретное открытие того или иного ученого-физика, а ответом является фамилия этого человека.



По горизонтали: 3. Теория относительности (Германия, Швейцария, США, 20 в.). **5.** Теория электромагнитного поля (Великобритания, 19 в.). **8.** Закон изменения интенсивности поляризованного света (Франция, 19 в.). **10.** Измерение давления света на вещество (Россия, 19–20 вв.). **11.** Изобретение гальванопластики и электродвигателя (Россия, 19 в.). **15.** Открытие деления ядер урана нейтронами (Германия, 20 в.). **16.** Основы космонавтики (Россия, 19–20 вв.). **17.** Закон упругости (Великобритания, 17 в.). **18.** Правило рычага, выталкивающая сила (Др. Греция, 3 в. до н.э.). **20.** Два экспериментальных закона теплового излучения тел (Германия, 19–20 вв.). **21.** Передача давления в жидкостях и газах (Франция, 17 в.). **25.** Закон инерции (Италия, 16–17 вв.). **26.** Слепое пятно на сетчатке глаза, изотермический процесс для идеальных газов (Франция, 17 в.). **30.** Открытие нейтрона (Великобритания, 20 в.). **31.** Экспериментальное подтверждение теории броуновского движения (Франция, 20 в.). **32.** Вращение плоскости поляризации света, намагничивание железных опилок вблизи проводника с током, связь между магнитными бурями и полярными сияниями (Франция, 19 в.). **33.** Законы движения планет, основы теории ви́дения (Германия, 16–17 вв.). **34.** Принцип действия масс-спектрографа, экспериментальное доказательство существования изотопов, открытие электрона (Великобритания, 19–20 вв.). **35.** Электромагнитная индукция (Великобритания, 19 в.).

По вертикали: 1. Зависимость цвета от частоты излучения света, закон сохранения момента импульса (Швейцария, Россия, 18 в.). **2.** Закон сохранения и превращения энергии (Германия, 19 в.). **4.** Основы классической механики, дисперсия света (Великобритания, 18 в.). **6.** Закон прямолинейного распространения света, закон отражения света (Др. Греция, 3 в. до н.э.). **7.** Расчет ядерного цепного процесса в уране, теория импульсного сжатия плазмы током, исследование последней стадии формирования галактик (Россия, 20 в.). **9.** Закон равного количества молекул в равных объемах газов при одинаковых условиях (Италия, 19 в.). **12.** Уравнение стационарного движения идеальной жидкости (Швейцария, Россия, 18 в.). **13.** Изобретение воздушного насоса, манометра, классический опыт по демонстрации атмосферного давления (Германия, 17 в.). **14.** Получение сверхнизких температур и сверхсильных магнитных полей, открытие явления сверхтекучести (Россия, 20 в.). **19.** Измерение заряда электрона (США, 20 в.). **22.** Экспериментальные законы внешнего фотоэффекта (Россия, 19 в.). **23.** Основной принцип геометрической оптики (Франция, 17 в.). **24.** КПД идеального теплового двигателя (Франция, 19 в.). **27.** Теория магнитных диполей, гипотеза о дискретности электрического заряда (Германия, 19 в.). **28.** Обменная теория ядерных сил, предсказание существования мезонов (Япония, 20 в.). **29.** Обобщение достижений античной механики и оптики, создание действующей модели паровой турбины (Др. Греция, 1–2 в. до н.э.).

М.Красин

Уравнения Пелля

1. Рассуждайте по индукции.

2. Обозначим через f_n количество способов пройти расстояние длиной n шагов. Очевидно, $f_0 = 1$ (никуда не ходить можно единственным способом) и $f_1 = 2$ (можно сделать либо шаг вперед, либо два шага вперед и шаг назад). Пройти $n + 2$ шага можно трояко: либо пройти сначала $n + 1$ шаг и сделать шаг вперед, либо пройти n шагов и сделать два шага, либо пройти $n + 1$ шаг, а затем сделать два шага вперед и шаг назад. Значит,

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n + f_{n+1} = 2f_{n+1} + f_n.$$

Ответ: $f_7 = 408$.

3. Если $a^2 - db^2 = \pm 1$, то

$$\frac{1}{a+b\sqrt{d}} = \frac{a-b\sqrt{d}}{\left(a-b\sqrt{d}\right)\left(a+b\sqrt{d}\right)} = \frac{a-b\sqrt{d}}{a^2-db^2} = \pm\left(a-b\sqrt{d}\right).$$

Обратно, пусть числа x и y целые. Рассмотрим равенство

$$\left(a+b\sqrt{d}\right)\left(x+y\sqrt{d}\right) = 1$$

и сопряженное к нему

$$\left(a-b\sqrt{d}\right)\left(x-y\sqrt{d}\right) = 1.$$

Перемножив эти равенства, получаем

$$\left(a^2-db^2\right)\left(x^2-dy^2\right) = 1,$$

откуда $a^2 - db^2 = \pm 1$.

4. а) $x_{2n} + y_{2n}\sqrt{2} = \left(1+\sqrt{2}\right)^{2n} =$
$= \left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n\right)^2 = \left(x_n + y_n\sqrt{2}\right)^2 = x_n^2 + 2y_n^2 + 2x_ny_n\sqrt{2}$. Поскольку $x_n^2 - 2y_n^2 = (-1)^n$, то $x_{2n} + y_{2n}\sqrt{2} = \left(2x_n^2 - (-1)^n\right) + (2x_ny_n)\sqrt{2}$.

5. а) $\left(1+\sqrt{2}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{2} = \sqrt{x_n^2} + \sqrt{2y_n^2} = \sqrt{x_n^2} + \sqrt{x_n^2 - (-1)^n}$.

б) Пусть n нечетно. Возведя число $\sqrt{m+d}+\sqrt{m}$ в n-ю степень и воспользовавшись тем, что $\left(\sqrt{m+d}\right)^2$ и $\left(\sqrt{m}\right)^2$ – натуральные числа, получим равенство

$$\left(\sqrt{m+d}+\sqrt{m}\right)^n = s\sqrt{m+d} + t\sqrt{m},$$

где s и t – натуральные числа. Заменив $\sqrt{m}$ на $-\sqrt{m}$, получим сопряженную формулу:

$$\left(\sqrt{m+d}-\sqrt{m}\right)^n = s\sqrt{m+d} - t\sqrt{m}.$$

Перемножим:

$$d^n = (m+d-m)^n = \left(s\sqrt{m+d}+t\sqrt{m}\right)\left(s\sqrt{m+d}-t\sqrt{m}\right) = s^2(m+d) - t^2m.$$

Таким образом, достаточно положить $k = t^2m$ – при этом

$$\left(\sqrt{m+d}+\sqrt{m}\right)^n = \sqrt{s^2(m+d)} + \sqrt{t^2m} = \sqrt{k+d^n} + \sqrt{k}.$$

Решение для четных n аналогично:

$$\left(\sqrt{m+d}+\sqrt{m}\right)^n = s + t\sqrt{m(m+d)},$$

где s, t – натуральные числа. Заменив $\sqrt{m}$ на $-\sqrt{m}$, получим

$$\left(\sqrt{m+d}-\sqrt{m}\right)^n = s - t\sqrt{m(m+d)}.$$

Следовательно,

$$d^n = (m+d-m)^n = \left(s+t\sqrt{m(m+d)}\right)\left(s-t\sqrt{m(m+d)}\right) = s^2 - t^2m(m+d).$$

Значит, если $k = t^2m(m+d)$, то

$$\left(\sqrt{m+d}+\sqrt{m}\right)^n = \sqrt{s^2} + \sqrt{t^2m(m+d)} = \sqrt{k+d^n} + \sqrt{k},$$

что и требовалось.

Можно решить задачу и по-другому. Обозначим $A = \sqrt{m} + \sqrt{m+d}$. Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x+d^n} + \sqrt{x}$. Она непрерывна, а ее значение в точке $x = 0$ меньше числа A^n. Поскольку эта функция стремится к бесконечности при $x \to +\infty$, то существует такое x, что

$$\sqrt{x+d^n} = A^n - \sqrt{x}.$$

Возведя обе части последнего равенства в квадрат, получим после упрощения

$$\sqrt{x} = \frac{A^{2n}-d^n}{2A^n} = \frac{A^n - \left(\dfrac{d}{\sqrt{m+d}+\sqrt{m}}\right)^n}{2} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{m+d}+\sqrt{m}\right)^n - \left(\sqrt{m+d}-\sqrt{m}\right)^n}{2},$$

откуда уже легко вывести, что x – натуральное число.

в) Число $x = \dfrac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}$ удовлетворяет равенству $x + \dfrac{1}{x} = n$. Положим $k_m = x^m + \dfrac{1}{x^m}$. Тогда $k_{m+1} = k_m\left(x+\dfrac{1}{x}\right) - k_{m-1} = nk_m - k_{m-1}$. Поскольку числа $k_0 = 2$ и $k_1 = n$ натуральные, при помощи индукции легко доказать, что все числа k_m натуральные. Решая квадратное уравнение, находим $x^m = \dfrac{k_m \pm \sqrt{k_m^2-4}}{2}$. Поскольку $x \ge 1$, то нужно взять знак «плюс».

6. Нет. Если бы такие числа a, b, c и d существовали, то при помощи перехода к сопряженным числам мы получили бы

$$0 \le \left(a-b\sqrt{2}\right)^2 + \left(c-d\sqrt{2}\right)^2 = 7 - 5\sqrt{2} < 0.$$

7. а) *Первый способ*. Пусть $\left(5+3\sqrt{2}\right)^m = \left(3+5\sqrt{2}\right)^n$. Переход к сопряженным числам дает равенство $\left(5-3\sqrt{2}\right)^m = \left(3-5\sqrt{2}\right)^n$, которое противоречит неравенствам $0 < 5-3\sqrt{2} < 1$ и $5\sqrt{2}-3 > 1$.

Второй способ. Если $\left(5+3\sqrt{2}\right)^m = \left(3+5\sqrt{2}\right)^n$, то и $\left(5-3\sqrt{2}\right)^m = \left(3-5\sqrt{2}\right)^n$. Перемножив эти равенства, получим $(25-9\cdot 2)^m = (9-25\cdot 2)^n$, т.е. $7^m = (-41)^n$, что невозможно.

б) Пусть для определенности $a < b$. Тогда $1 < b + a\sqrt{d} < a + b\sqrt{d}$, и поэтому $m < n$. Перейдя к сопряженным числам и разделив почленно полученное при этом равенство на исходное, получим

$$\left|\frac{a-b\sqrt{d}}{a+b\sqrt{d}}\right|^m = \left|\frac{b-a\sqrt{d}}{b+a\sqrt{d}}\right|^n.$$

Сравним теперь величины $\mu = \left|\dfrac{b\sqrt{d}-a}{a+b\sqrt{d}}\right|$ и $\nu = \left|\dfrac{a\sqrt{d}-b}{b+a\sqrt{d}}\right|$. Для этого достаточно сравнить числа

$$\left|\left(b\sqrt{d}-a\right)\left(b+a\sqrt{d}\right)\right| \text{ и } \left|\left(a\sqrt{d}-b\right)\left(a+b\sqrt{d}\right)\right|.$$

Первое из них равно $\left|ab(d-1) + \left(b^2-a^2\right)\sqrt{d}\right|$, а второе равно

$\left|ab(d-1)-(b^2-a^2)\sqrt{d}\right|$. Обозначив $S=ab(d-1)$ и $T=(b^2-a^2)\sqrt{d}$, сводим дело к сравнению чисел $|S+T|$ и $|S-T|$. Поскольку S и T – положительные числа, то $|S+T|>|S-T|$. Значит, $\mu>\nu$. Тем более, $\mu^m>\nu^n$. Но, как вы помните, $\mu^m=\nu^n$.

8. а) Число $x=\left(45+\sqrt{1975}\right)^{30}$ можно представить в виде $a+b\sqrt{1975}$, где a, b – натуральные числа. Рассмотрим сопряженное число: $y=\left(45-\sqrt{1975}\right)^{30}=a-b\sqrt{1975}$. Заметим, что $x+y=2a$ и $0<y<1$. Значит, $[x]=[2a-y]=2a-1$.

г) Воспользуйтесь тем, что $2-\sqrt{3}>0$, число $\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ целое и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\sqrt{3}\right)^n=0$.

д) $a_n=\left(5+2\sqrt{6}\right)^n+\left(5-2\sqrt{6}\right)^n$. Обозначим $\alpha=5+2\sqrt{6}$ и $\beta=5-2\sqrt{6}$. Тогда

$$a_{n+2}=\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=\left(5+2\sqrt{6}\right)^2\alpha^n+\left(5-2\sqrt{6}\right)^2\beta^n=$$
$$=\left(49+20\sqrt{6}\right)\alpha^n+\left(49-20\sqrt{6}\right)\beta^n=$$
$$=\left(50+20\sqrt{6}\right)\alpha^n+\left(50-20\sqrt{6}\right)\beta^n-\alpha^n-\beta^n=$$
$$=10\left(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\right)-\left(\alpha^n+\beta^n\right)=10a_{n+1}-a_n.$$

Поскольку $a_{n+4}=10a_{n+3}-a_{n+2}=10a_{n+3}-10a_{n+1}+a_n$, то числа a_{n+4} и a_n оканчиваются одной и той же цифрой. Поскольку $a_0=2$, то десятичная запись числа a_{1000} оканчивается цифрой 2. Далее,

$$a_{1000}=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2000}+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2000}>\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2000}=$$
$$=a_{1000}-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2000}>a_{1000}-\left(\frac{1}{3}\right)^{2000}>a_{1000}-10^{-666},$$

откуда и следует, что перед запятой в десятичной записи числа $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2000}$ стоит цифра 1, а после запятой – не менее 666 девяток. (При помощи компьютера можно проверить, что девяток 995 штук.)

9. Обозначим $a=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $b=1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $c=1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ и $d=1-\sqrt{2}-\sqrt{3}$. Наряду с равенством

$$a^n=\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^n=q_n+r_n\sqrt{2}+s_n\sqrt{3}+t_n\sqrt{6}$$

рассмотрим три сопряженных:

$$b^n=q_n-r_n\sqrt{2}+s_n\sqrt{3}-t_n\sqrt{6},$$
$$c^n=q_n+r_n\sqrt{2}-s_n\sqrt{3}-t_n\sqrt{6},$$
$$d^n=q_n-r_n\sqrt{2}-s_n\sqrt{3}+t_n\sqrt{6}.$$

Из этих четырех равенств находим

$$4q_n=a^n+b^n+c^n+d^n,$$
$$4r_n\sqrt{2}=a^n-b^n+c^n-d^n,$$
$$4s_n\sqrt{3}=a^n+b^n-c^n-d^n,$$
$$4t_n\sqrt{6}=a^n-b^n-c^n+d^n.$$

Следовательно,

$$\frac{r_n}{q_n}=\frac{a^n-b^n+c^n-d^n}{\left(a^n+b^n+c^n+d^n\right)\sqrt{2}}=\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n+\left(\frac{c}{a}\right)^n-\left(\frac{d}{a}\right)^n}{\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n+\left(\frac{c}{a}\right)^n+\left(\frac{d}{a}\right)^n\right)\sqrt{2}}\to\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(Стремление величин $(b/a)^n$, $(c/a)^n$ и $(d/a)^n$ к нулю следует из того, что все три числа b/a, c/a и d/a по модулю меньше 1.)

Аналогично можно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{t_n}{q_n}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{t_n}{q_n}=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

10. а) Например, $(x;y)=(3;5)$, $(20;29)$ или $(119;169)$.

б) Например, $a=3$, $b=2$, $c=1$, $d=4$, $e=3$, $f=2$. Найти эти числа можно, выразив из равенств

$$z=2x+1,$$
$$Z=2X+1,$$
$$Z=3z+4y,$$
$$Y=2z+3y$$

числа X и Y через x и y.

11. Уравнение $x^2+\left(y^2-1\right)^2=\left(y^2\right)^2$ эквивалентно уравнению $x^2-2y^2=-1$.

12. Существует. Например, $f(x)=2x^2+1$.

13. Да, существуют. Подставив $n=1$ в искомые соотношения, получим

$$\begin{cases}17=3a+b,\\12=2a,\end{cases}$$

откуда $a=6$, $b=-1$.

Докажем по индукции, что найденные значения удовлетворяют условию задачи. *База* – это та система, из которой мы нашли a и b. *Переход*. Пусть при некотором n выполнены равенства $x_{n+1}=6x_n-x_{n-1}$ и $y_{n+1}=6y_n-y_{n-1}$. Тогда

$$x_{n+2}=3x_{n+1}+4y_{n+1}=3\left(6x_n-x_{n-1}\right)+4\left(6y_n-y_{n-1}\right)=$$
$$=6\left(3x_n+4y_n\right)-\left(3x_{n-1}+4y_{n-1}\right)=6x_{n+1}-x_n;$$

аналогичная выкладка доказывает равенство $y_{n+2}=6y_{n+1}-y_n$.

14. Нет. а) $(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=3x^2+2$; но квадрат не может дать остаток 2 при делении на 3.

б) $(x-1)^2+x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=$ $=4x^2+4x+6\equiv 2\pmod 4$; но квадрат целого числа не может дать остаток 2 при делении на 4.

в) $5x^2+10=5\left(x^2+2\right)$ не может быть квадратом, поскольку x^2+2 ни при каком целом x не делится на 5.

г) $6x^2+6x+19\equiv 3\pmod 4$.

д) $x^2+4=7z^2$. Значит, x^2+4 делится на 7, что невозможно.

е) $2x^2+2x+11=z^2$. Значит, $z^2\equiv 3\pmod 4$.

ж) $(x-4)^2+(x-3)^2+(x-2)^2+\ldots$
$$\ldots+(x+3)^2+(x+4)^2=9x^2+60$$

делится на 3, но не делится на 9 и поэтому не может быть точным квадратом.

з) $2x(x+1)\not\equiv 3\pmod 5$, поскольку $(2x+1)^2\not\equiv 7\pmod 5$.

и) $y^2\not\equiv 2\pmod 4$.

15. а) Домножим обе части уравнения $3x^2+3x+1=y^2$ на 4 и выделим полный квадрат: $3\left(4x^2+4x+1\right)+1=(2y)^2$, т.е. $(2y)^2-3(2x+1)^2=1$. Обозначив $z=2y$ и $t=2x+1$, получаем уравнение Пелля $z^2-3t^2=1$. Нас интересуют не все решения последнего уравнения, а лишь те, где z четно. В любом решении уравнения $z^2-3t^2=1$ одно из чисел z и t четно, а другое нечетно. При переходе $(z;t)\to(2z+3t;z+2t)$ пара (четное; нечетное) преобразуется в (нечетное; четное), и наоборот. Поэтому нужно рассматривать только «половину» решений, а именно $(z;t)=(26;15)$, $(362;209)$, $(5042;2911)$, $(70226;40545)$, $(978122;564719)$, $(13623482;7865521)$ и так далее. Этим решениям соответствуют пары $(x;y)=(7;13)$, $(104;181)$, $(1455;2521)$, $(20272;35113)$, $(282359;489061)$, (3932760; 6811741)... В частности, $8^3-7^3=13^2$ и $3932761^3-3932760^3=6811741^2$. Согласитесь, последняя формула впечатляет!

б) $(2n-1)(2n+1)=3(2x+1)^2$. Числа $2n-1$ и $2n+1$ взаимно просты, так что одно из них должно быть квадратом, а другое – утроенным квадратом. Значит, либо $2n-1=3t^2$ и $2n+1=s^2$, либо $2n-1=t^2$ и $2n+1=3s^2$. В первом случае $s^2-3t^2=2$, что невозможно, поскольку квадрат целого числа не может давать остаток 2 при делении на 3. Значит, имеет место второй случай: $2n-1=t^2$. Обозначив $t=2k+1$, из равенства $2n-1=(2k+1)^2$ получаем $n=2k^2+2k+1=k^2+(k+1)^2$.

в) $6x^2+12x+8\equiv 2\not\equiv y^2 \pmod 3$.

16. Числа m и n удовлетворяют равенству $m^2-3n^2=1$, которое можно записать в виде $(m-1)(m+1)=3n^2$.

а) Если k нечетно, то m четно, так что числа $m-1$ и $m+1$ взаимно просты, и решение такое же, как решение пункта б) предыдущего упражнения.

б) Если k четно, то m нечетно и, следовательно, НОД$(m-1,$ $m+1)=2$. Значит, одно из чисел $m-1$ и $m+1$ имеет вид $2a^2$, а другое $6b^2$. В случае, когда $m-1=2a^2$ и $m+1=6b^2$, имеем $a^2=3b^2-1$, что невозможно. Следовательно, $m+1=2a^2$, что и требовалось доказать.

17. а) Очевидно, $(x-1)(x+1)=py^2$. Если x четно, то числа $x-1$ и $x+1$ взаимно просты, и для некоторых натуральных a и b должна выполняться одна из систем

$$\begin{cases}x-1=a^2,\\ x+1=pb^2\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x-1=pa^2,\\ x+1=b^2.\end{cases}$$

Значит, при четном x одно из чисел $x-1$ и $x+1$ является квадратом натурального числа.

Если же x нечетно, то НОД$(x-1,\ x+1)=2$, и имеем системы

$$\begin{cases}x-1=2a^2,\\ x+1=2pb^2\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x-1=2pa^2,\\ x+1=2b^2,\end{cases}$$

из которых следует, что $x-1$ или $x+1$ является удвоенным квадратом.

б) Да. Например, $x=4$, $y=1$, $d=15$.

18. Поскольку $-1<\left(1-\sqrt{3}\right)^{2n+1}<0$ и число

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n+1}+\left(1-\sqrt{3}\right)^{2n+1}$$

целое, то

$$\left[\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n+1}\right]=\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n+1}+\left(1-\sqrt{3}\right)^{2n+1}=$$

$$=\left(1+\sqrt{3}\right)\left(4+2\sqrt{3}\right)^n+\left(1-\sqrt{3}\right)\left(4-2\sqrt{3}\right)^n=$$

$$=2^n\cdot\left(\left(1+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(1-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right)=$$

$$=2^n\cdot\left(2x_n+6y_n\right)=2^{n+1}\left(x_n+3y_n\right),$$

где $x_n=\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2}$ и $y_n=\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n-\left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2\sqrt{3}}$ удовлетворяют равенству $x_n^2-3y_n^2=1$. Осталось заметить, что x_n и y_n – числа разной четности.

19. Рассмотрим 8 точек: вершины и середины сторон некоторого квадрата. Пусть все они лежат на гиперболах $xy=\pm1$. Если на некоторой ветви лежат некоторые две точки K и L, то соединим их отрезком. Если K и L не лежат на одной стороне квадрата, то с любой стороны от отрезка KL найдется точка M рассматриваемой системы, для которой углы MKL и MLK оба острые. Противоречие очевидно: одна из восьми точек оказалась в полуполосе, ограниченной отрезком KL и перпендикулярами к нему, восстановленными из K и L, и расположенной «внутри» рассматриваемой ветви. Но в этой полуполосе нет ни одной точки рассматриваемых гипербол. Ясно также, что K и L не могут быть соседними вершинами квадрата (иначе середина отрезка KL не лежит на гиперболах).

Поскольку никакая сторона квадрата не может пересекать никакую ветвь гиперболы более чем в двух точках, то мы приходим к единственной конфигурации: на каждой ветви гиперболы лежат одна вершина квадрата и середина одной из выходящих из этой вершины сторон.

Рассмотрим такие две точки A и B. При симметрии относительно начала координат точки A и B переходят в точки A' и B', лежащие на другой ветви той же гиперболы. При этом отрезок $A'B'$ равен и параллелен отрезку BA. Если бы противоположная вершине B вершина квадрата и противоположная середине A середина стороны квадрата не совпадали с точками B' и A' соответственно, то на ветви гиперболы нашлись бы два разных отрезка, равных по длине и параллельных. Противоречие: отрезки, высекаемые на ветви гиперболы разными параллельными прямыми, различны по длине.

20. а) Воспользуйтесь индукцией или, записав тождество в виде $\varphi_n^2-\varphi_n\varphi_{n-1}-\varphi_{n-1}^2=-(-1)^n$, вспомните теорему 6.

б) $\varphi_{n-2}\varphi_{n+2}=(\varphi_n-\varphi_{n-1})(\varphi_n+\varphi_{n+1})=$

$$=\varphi_n^2-\varphi_{n-1}\varphi_{n+1}+\varphi_n\varphi_{n+1}-\varphi_{n-1}\varphi_n=$$

$$=-(-1)^n+\varphi_n(\varphi_{n+1}-\varphi_{n-1})=\varphi_n^2-(-1)^n.$$

«Квант» для «младших» школьников

Задачи

(см. «Квант» №2)

1. Пусть Петя задумал число $\overline{ab}=10a+b$. После указанных в условии задачи операций Петя получит новое число $11(a+b)-10a-b=a+10b=\overline{ba}$, которое отличается от задуманного перестановкой цифр.

Петя задумал число 52.

2. Доля мальчиков может сохраниться лишь в том случае, если на каждого вновь пришедшего мальчика будет приходиться шесть вновь пришедших девочек. Чтобы доля уменьшилась, пришедших девочек должно быть еще больше. Если бы пришли 2 мальчика или больше, то должны еще прийти более $2\cdot6=12$ девочек, т.е. всего более 14 человек. Это невозможно. Значит, в кружок пришел только один мальчик, а девочек пришло – 12.

3. Достроим второй шестиугольник до прямоугольника (рис.1). Далее проводим прямую, проходящую через центр

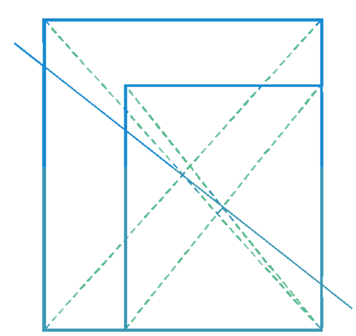


Рис. 1

большого прямоугольника и центр маленького прямоугольника, представляющего собой «вырез», – она и окажется как раз тем, что требуется.

4. Вместо гирек будем рассматривать числа, выражающие их массы. От каждого из двух диаметрально расположенных чисел отнимем величину наименьшего из них. Тогда по кругу будут расставлены только нули и единицы.

Проведем диаметр круга так, чтобы по разные стороны от него оказалось одинаковое количество чисел. Зафиксируем какую-то одну из сторон и подсчитаем сумму всех расположенных на ней чисел. Начнем поворачивать диаметр относительно центра круга на 18°, каждый раз подсчитывая сумму чисел на фиксированной стороне. Эта сумма при каждом повороте будет увеличиваться или уменьшаться на 1, пробегая все промежуточные значения от наименьшей возможной величины n $(n \le 5)$ до наибольшей возможной величины N $(N \ge 5)$, причем $n + N = 10$. Следовательно, при каком-то положении диаметра сумма чисел на фиксированной стороне окажется равной 5, т.е. на двух разделенных этим диаметром половинках круга сумма чисел одинакова. А это означает, что общие массы гирек, стоящие на этих половинках, равны.

5. Можно. Обозначим через $n!$ произведение первых натуральных чисел от 1 до n: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Отметив числа 10, 11, 12, ..., $(9!-1)$, $9!$, получим

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (9!-1) = 10 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (9!-1) \cdot 9!.$$

Конкурс «Математика 6–8»

(*см. «Квант» №6 за 2001 г.*)

11. $\frac{125}{9}$. Рассмотрим любой квадрат 15×15. Его можно разделить на 25 квадратов 3×3. В каждом из них сумма чисел равна 5, поэтому сумма чисел во всем квадрате 15×15 равна $5 \cdot 25 = 125$. С другой стороны, этот квадрат можно разделить на 9 квадратов 5×5. Сумма в каждом из них одинакова, поэтому она равна $\frac{125}{9}$.

12. 16. Чем меньше использовано прямоугольников, тем меньше частей получится после разрезания. Без прямоугольников не обойтись. Действительно, если угол закрыт фигуркой из четырех клеток, то несколько других фигурок вырезаются однозначно, и соседние углы не попадают в фигурку (рис.2).

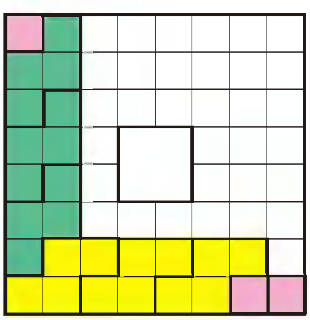


Рис. 2

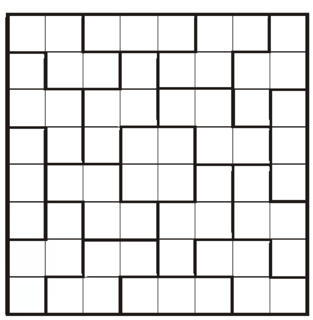


Рис. 3

Если вырезать один, два или три прямоугольника, то число оставшихся клеток не будет делиться на 4 и разрезание оставшейся части на фигурки из четырех клеток невозможно. Четырьмя прямоугольниками обойтись можно (рис.3). При этом получается 16 фигурок.

13. Выигрышную стратегию имеет Малыш. Сначала заметим, что если Малышу удастся оставить Карлсону брусок вида $1 \times n \times n$, где $n > 1$, то Малыш обеспечивает себе победу. Действительно, в этом случае Карлсон своим ходом вынужден будет оставить либо брусок $1 \times 1 \times n$, после чего он проигрывает, либо брусок $1 \times m \times n$, $1 < m < n$. В последнем случае Малыш своим очередным ходом оставляет брусок $1 \times m \times m$, размеры которого меньше размеров предыдущего бруска. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не получится кубик $1 \times 1 \times 1$, который Малыш съедает. Выигрышная стратегия Малыша состоит в следующем. Своим первым ходом Малыш оставляет брусок $2 \times 2001 \times 2002$. В ответ Карлсон не может оставить брусок $1 \times 2001 \times 2002$, $2 \times 2001 \times 2001$ или $2 \times 2001 \times 2$, иначе своим очередным ходом Малыш оставит брусок, один из размеров которого равен 1, а два других одинаковы, после чего выигрывает.

Предположим, Карлсон оставит брусок, заменив один из размеров предыдущего бруска числом p, $2 < p < 2001$. Тогда $p = 2q$ или $p = 2q - 1$, где натуральное число q таково, что $2 \le q \le 1000$. В обоих случаях Малыш может сделать брусок $2 \times (2q-1) \times 2q$ – того же вида, что и брусок, который он оставил перед этим, но меньших размеров. Если Карлсон и дальше будет играть наилучшим образом, то Малыш в конце концов оставит ему брусок $2 \times 3 \times 4$. Несложно убедиться, что как бы Карлсон ни разрезал этот брусок, при правильной игре Малыша он обязательно проигрывает.

14. Продолжим стороны AH, BC и FG до пересечения в точках M, N, K (рис.4). Покажем, что точка O – центр вписанной окружности треугольника MNK – является центром описанной окружности шестиугольника.

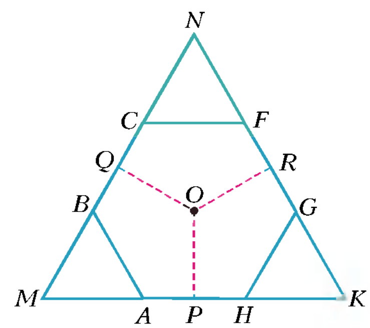


Рис. 4

Обозначим через P, Q, R основания перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны AH, BC и FG соответственно. Из равенств углов: $\angle A = \angle B$, $\angle C = \angle F$ и $\angle G = \angle H$ следуют равенства длин отрезков: $AP = BQ$, $QC = FR$, $RG = HP$. Так как $AP + HP = BQ + QC = FR + RG$, то $AP = BQ = QC = FR = RG = HP$ и шесть прямоугольных треугольников OAP, OHP, OBQ, OCQ, OFR, OGR равны, т.е. равны их гипотенузы. Поскольку точки A, B, C, F, G, H находятся на одинаковом удалении от точки O, то эта точка является центром окружности, описанной вокруг шестиугольника $ABCFGH$.

15. Если справедливо равенство $ab^2 + ba^2 = 0$ или равносильное ему равенство $ab(a+b) = 0$, то либо одно из чисел a или b равно нулю, либо $a + b = 0$. Несложно проверить, что в любом из этих случаев равенство $a^5 + b^5 = (a+b)^5$ выполняется. Пусть теперь справедливо равенство $a^5 + b^5 = (a+b)^5$. Докажем, что в этом случае $ab^2 + ba^2 = 0$. Здесь можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Предположим, что ни одно из равенств $a = 0$, $b = 0$, $a + b = 0$ не выполняется. Числа a и b не могут быть одного знака, поскольку в этом случае было бы справедливо равенство $|a|^5 + |b|^5 = (|a| + |b|)^5$, что невозможно. Действительно, раскрывая скобки в правой части этого равенства, можно убедиться, что она больше левой.

Если числа a и b разных знаков, то знак одного из чисел $(-a)$ или $(-b)$ совпадает со знаком суммы $a + b$, а знак другого числа противоположен ему. Пусть, для определенности, совпадают знаки чисел $a + b$ и $(-a)$. Перепишем исходное равенство:

$$(a+b)^5 + (-a)^5 = b^5.$$

Но в этом случае справедливо равенство

$$(a+b)^5 + (-a)^5 = \left((a+b)+(-a)\right)^5,$$

что для чисел одного знака $(a + b)$ и $(-a)$ невозможно.

Итак, равенство $a^5 + b^5 = (a+b)^5$ влечет выполнение одного из равенств $a = 0$, $b = 0$, $a + b = 0$ и, значит, справедливость равенства

$$ab^2 + ba^2 = 0.$$

Второй способ. Поскольку

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5,$$

то в случае $(a+b)^5 = a^5 + b^5$ имеем

$$5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 = 0.$$

Преобразовав выражение в левой части этого равенства, получим

$$\frac{5}{2}ab(a+b)\left((a+b)^2 + a^2 + b^2\right) = 0.$$

Последнее равенство имеет место лишь тогда, когда $ab = 0$ или $a + b = 0$. В любом из этих случаев $ab^2 + ba^2 = 0$.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Молекулы паров растворителя за счет хаотического движения из-за столкновений с молекулами воздуха диффундируют на большие расстояния.

2. Иначе процесс растворения (диффузия) сахара затянется на долгое время.

3. В холодном, так как скорость диффузии водорода уменьшается при понижении температуры.

4. При сдавливании поверхностные слои деталей размягчаются, усиливается взаимная диффузия частиц и, как следствие, увеличиваются силы сцепления деталей.

5. Диффузия – это самопроизвольное выравнивание концентраций различных веществ, отражающее стремление любой системы из большого числа частиц к хаотичному, беспорядочному их размещению.

6. Сначала более подвижные легкие молекулы, выравнивая свою концентрацию, быстрее продиффундировали сквозь перегородку вправо. Со временем тяжелые молекулы проникли в левую секцию, и давления сравнялись.

7. В пленке пузыря концентрация растворенного газа вблизи ее внутренней поверхности выше, чем вблизи внешней поверхности, поскольку растворимость газа зависит от его давления, а внутри пузыря оно больше, чем снаружи. Разность концентраций и является «движущей силой» диффузионного потока.

8. В лед, так как наличие воздуха в снегу делает его менее теплопроводным.

9. Если их температура будет равна температуре той части тела, которой мы их касаемся.

10. На дне и стенках чайника образуется слой накипи с малой теплопроводностью, что ухудшает передачу тепла воде от нагревателя.

11. Поток тепла направлен в сторону убывания температуры, т.е. против указанной оси.

12. У сковороды большой площади центр нагрет сильнее, чем края; давление паров под интенсивно испаряющейся каплей больше со стороны, ближайшей к центру; разность давлений, «выдавая» разность температур, и перемещает капли к краю.

13. Слева гипс, а справа стекло. В отличие от аморфного стекла, кристаллический гипс обладает анизотропией, т.е. проводит тепло неодинаково по разным направлениям.

14. Считая температуру на внутренней поверхности комбинезона равной температуре человеческого тела и полагая потоки тепла наружу одинаковыми, получим, что материал второго комбинезона, температура внешней поверхности которого ниже, имеет более низкую теплопроводность, а именно такую одежду мы и называем теплой.

15. В сторону потока жидкости.

16. Чем ниже температура масла, тем больше его вязкость, а значит, тем больше силы внутреннего трения.

17. Такую способность приобретает только очень густой, вязкий сироп, содержащий необходимое для длительного хранения количество сахара.

Микроопыт

Раньше успокоится воздух. Трение в движущемся воздухе очень мало, но прежде всего мала зависящая от плотности кинетическая энергия воздуха, которую он должен потерять. Вода же, обладающая много большей, чем воздух, плотностью, тормозится дольше, несмотря на большую вязкость.

Как найти сумму?

1. Из рисунка 1 статьи имеем $(1-r_1)^2 + 1^2 = (1+r_1)^2$, откуда $d_1 = 2r_1 = 1/2$. Аналогично из $(1-d_1-r_2)^2 + 1^2 = (1+r_2)^2$ находим $d_2 = 1/6$. Индукцией по k найдем $d_k = 1/(k(k+1))$.

2. $$\frac{1}{mx(x+1)\ldots(x+m-1)} - \frac{1}{m(x+1)\ldots(x+m)} =$$
$$= \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+m)}.$$

3. $(k+1)k(2k+1)/6 - (k-1)k(2k-1)/6 = k^2$,

$(k+1)^2k^2/4 - k^2(k-1)^2/4 = k^3$.

4. $F(x+1) - F(x) = x^4$.

5. $\Delta x^{(m+1)} = (x+1)x\ldots(x-m+1) -$

$- x(x-1)\ldots(x-m) = (m+1)x^{(m)}$.

6. Найдем, например, S_n^4. Поскольку

$$\sum_{k=1}^{n} k^{(4)} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{5},$$

а

$$k^{(4)} = k^4 - 6k^3 + 11k^2 - 6k,$$

то

$$S_n^4 = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{5} + 6\frac{(n+1)^2n^2}{4} -$$
$$-11\frac{(n+1)n(2n+1)}{6} + 6\frac{(n+1)n}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Аналогично получаем

$$S_n^5=\frac{n^2(n+1)^2\left(2n^2+2n-1\right)}{12},$$

$$S_n^6=\frac{n(n+1)(2n+1)\left(3n+6n^3-3n+1\right)}{42}.$$

7. $4Q_3=4a^3n+6a^2dn(n-1)+2ad^2n\left(2n^2-3n+1\right)+d^3n^2(n-1)^2$.

8. Воспользуйтесь формулой суммы n членов арифметической прогрессии.

9. $\Phi_q^{(4)}(n)=$

$$=\frac{q-2}{3!}\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{(3)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^{(2)}}{2}=\frac{q-2}{4!}(n+2)^{(4)}+\frac{(n+2)^{(3)}}{3!}=$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{4!}\big((n-1)(q-2)+4\big).$$

10. Для $m=2,3,4$ формула верна; предположим, что она верна для $m=s$, и вычислим

$\Phi_q^{(s+1)}(n)=$

$$=\sum_{k=1}^{n}\Phi_q^{(s)}(k)=\frac{q-2}{s!}\sum_{k=1}^{n}(k+s-2)^{(s)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+s-2)^{(s-1)}}{(s-1)!}=$$

$$=\frac{n(n+1)\ldots(n+s-1)}{(s+1)!}\big((n-1)(q-2)+s+1\big).$$

11. Дважды примените формулу преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

12. Используйте равенство

$$\frac{1}{(a+kd)(a+(k+1)d)\ldots(a+(k+m)d)}=$$

$$=\frac{1}{md}\left(\frac{1}{(a+kd)\ldots(a+(k+m-1)d)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(a+(k+1)d)\ldots(a+(k+m)d)}\right).$$

Тогда

1) $\dfrac{n}{2n+1}$; 2) $\dfrac{n}{2(3n+2)}$; 3) $\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{2(n+2)(n+3)}$;

4) $\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{4(2n+1)(2n+3)}$.

13. 1) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{6}$;

2) $\dfrac{n^2+2n}{(n+1)^2}$; 3) $\dfrac{1}{4}-\dfrac{2n+3}{2(n+2)(n+3)}$

(воспользуйтесь равенством

$$\frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{(k+1)(k+2)}-\frac{3}{(k+1)(k+2)(k+3)});$$

4) $1-\dfrac{1}{n!}$; 5) $\log_a(n+1)$;

6) $\operatorname{arctg} n$ (пусть $\operatorname{arctg}(k+1)=a$, $\operatorname{arctg} k=b$, тогда $\operatorname{tg}(a-b)=\dfrac{1}{1+k(k+1)}$);

7) $\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg}(n+1)x$;

8) $\operatorname{tg}(n+1)x-\operatorname{tg} x$.

14. Воспользуйтесь равенствами

а) $2\sin\dfrac{d}{2}\sin(a+kd)=\cos\left(a+\dfrac{2k-1}{2}d\right)-\cos\left(a+\dfrac{2k+1}{2}d\right)$;

б) $2\sin\dfrac{d}{2}\cos(a+kd)=\sin\left(a+\dfrac{2k+1}{2}d\right)-\sin\left(a+\dfrac{2k-1}{2}d\right)$.

15. Для решения п. а) воспользуйтесь замечением 1 статьи; б) $\operatorname{tg} x=\operatorname{ctg} x-2\operatorname{ctg} 2x$, положив $x=\dfrac{a}{2^k}$, получим $\operatorname{tg}\dfrac{a}{2^k}=\operatorname{ctg}\dfrac{a}{2^k}-2\operatorname{ctg}\dfrac{a}{2^{k-1}}$; в) см. упражнение 11;

г) воспользуйтесь равенством

$$\left(1-2a\cos x+a^2\right)a^k\sin kx=$$

$$=a^k\sin kx-a^{k+1}\sin(k+1)x-a^{k+1}\sin(k-1)x+a^{k+2}\sin kx;$$

п. д) аналогичен п. г).

16. а) $\dfrac{1}{d}\left(1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{d}\right)$, так как $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+d}=\dfrac{d}{k(k+d)}$;

б) $\dfrac{3}{4}$, так как $\dfrac{1}{k^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k+1}\right)$.

17. Все утверждения, кроме случая г), доказываются простыми вычислениями; разберем п. г). Выпишем несколько чисел, отвечающих указанному разбиению: 1; 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19; ... Количество чисел, встречающихся до n-й группы, равно $1+2+\ldots+(n-1)=n(n-1)/2$. А их сумма равна $S_{n-1}=\dfrac{(n-1)n}{2}\cdot\dfrac{(n-1)n}{2}=\dfrac{n^2(n-1)^2}{4}$; сумма всех чисел, включая и n-ю группу, равна $S_n=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$. Откуда

$S=S_n-S_{n-1}=n^3$.

Колебательный контур

1. $I_m=\dfrac{2q}{\sqrt{5LC_1}}$.

2. $I_0=\mathrm{E}\sqrt{\dfrac{C}{3L}}$.

3. $I_0=\dfrac{q_0(C_1+C_2)}{C_2}\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{L(C_1+\varepsilon C_2)}}$.

4. $\dfrac{d_2-d_1}{d_1}\ge\pi R\sqrt{\dfrac{C}{L_1}}$.

VIII Российская олимпиада по астрономии и физике космоса

8 класс

1. Планеты выглядят наиболее яркими и поэтому наиболее удобными для наблюдений во время противостояний. Период обращения Юпитера вокруг Солнца составляет около 12 лет (точнее, 11,86 года). Следовательно, через год он уйдет вперед примерно на 1/12 часть окружности, и Земля «догонит» его за один месяц. Следовательно, наилучшая видимость будет в середине декабря.

2. В этот день склонение Солнца $\delta=+23{,}5^\circ$. Поэтому пройти через зенит (а это и есть наибольшая высота) Солнце сможет только на широте тропика Рака, т.е. на широте $\varphi=23{,}5^\circ$.

3. Допустимый «уход» телескопа составляет $1''$ за час, или

$24''$ за сутки. Во временно́й шкале это будет $24''/(15''/c) =$ $= 1{,}6$ секунд времени за сутки.

4. Поскольку Сатурн в 9,54 раза дальше от Солнца, чем Земля, угловой диаметр солнечного диска, наблюдаемого с Сатурна, в 9,54 раза меньше, чем наблюдаемого с Земли: $\alpha = 32'/9{,}54 \approx 3{,}4'$. Нужно определить, с какого из спутников Сатурна под таким же углом виден диск планеты. Приняв экваториальный диаметр Сатурна равным 120 тыс. км, найдем, что под углом $3{,}4'$ он виден с расстояния

$$R = 120 \text{ тыс.км}/\alpha = 120 \text{ тыс.км}/\left(3{,}4'/(3438'/\text{рад})\right) =$$

$$= 120 \text{ тыс.км} \cdot 3438/3{,}4 \approx 120 \text{ млн км}.$$

(Заметим, что 3438 – число, которое полезно запомнить : это соотношение между радианом и угловой минутой, или, проще говоря, «число минут в радиане».) Но такого далекого спутника у Сатурна нет, точнее говоря – еще не открыто. Самый далекий среди известных – Феба – отстоит от Сатурна всего на 13 млн км. Поэтому правильный ответ: либо художник изобразил пока еще неизвестный спутник, либо он просто не задумывался об астрономической достоверности картины.

5. В течение года наклон земной оси практически не изменяется. Именно поэтому одну половину года к Солнцу сильнее обращено северное полушарие, а вторую половину года – южное. В эти периоды года дни там длиннее и, главное, солнечные лучи более отвесно падают на землю и лучше ее нагревают. Это и есть причина смены времен года.

6. Свет далеких звезд, образующих Млечный Путь, очень слаб. При лунном сиянии Млечный Путь не виден.

9 класс

5. Да, может. Для этого планета должна иметь нулевой наклон экватора к плоскости орбиты, а сама орбита должна обладать заметным эксцентриситетом (т.е. должна заметно отличаться от круговой). Тогда сезоны, зависящие только от потока тепла, будут по всей планете определяться лишь ее положением на орбите, а значит, будут везде меняться синхронно.

6. Космонавт для перемещения по станции сначала должен оттолкнуться от стенки и получить при этом ускорение, а потом затормозить у другой стенки – тоже получить ускорение. Если космонавт приобретает ускорение a, то «все остальное» приобретает ускорение am/M в противоположном направлении; таким образом, уровень микрогравитации на станции определяется характерной величиной ускорения космонавта и соотношением масс космонавта и станции. Принимая массу космонавта $m = 70$ кг, получаем $m/M = 1/2000$. Оценим характерные величины ускорений космонавтов. Очевидно, что они определяются силами, с которыми космонавты взаимодействуют с корпусом станции. На Земле при ходьбе эта сила составляет mg. Такая сила ускоряет человека с ускорением g, а станцию, соответственно, с ускорением $1/2000g = 500\,\mu g \approx 5$ мм$/c^2$. Это и есть возможный уровень микрогравитации на станции.

10 класс

1. Поскольку удар упругий, аппарат отскочит от поверхности с той же скоростью, с которой он ударился о нее. Чтобы оценить высоту подъема, необходимо оценить ускорение на поверхности:

$$g = GM/R^2 = G\left(4/3\pi R^3\rho\right)/R^2 = 4/3\pi GR\rho .$$

Предполагая, что аппарат отскочит от астероида на небольшую высоту – такую, что изменением величины ускорения свободного падения можно пренебречь, получаем

$$h = V^2/(2g) = 3V^2/(8\pi GR\rho) \approx 160 \text{ м} .$$

2. Координаты данной звезды – это координаты Солнца в точке летнего солнцестояния. Следовательно, звезда находится на эклиптике. Плоскость эклиптики не меняется со временем, так что звезда всегда будет на эклиптике. Точка весеннего равноденствия, от которой отсчитывается α, совершает обход эклиптики за 26000 лет навстречу годовому движению Солнца. Поэтому через четверть периода прецессии (6500 лет) звезда будет иметь $\alpha = 6$ ч $+ 6$ ч $= 12$ ч. Точка на эклиптике с таким α – это точка осеннего равноденствия. Итак, $\alpha = 12$ ч, $\delta = 0°$.

3. Для того чтобы видимая звездная величина Солнца увеличилась на Δm, необходимо, чтобы световой поток уменьшился в $10^{\Delta m/2,5}$ раз, следовательно, наблюдателю надо удалиться от Солнца в $\left(10^{\Delta m/2,5}\right)^{1/2} = 10^{\Delta m/5}$ раз. По третьему закону Кеплера квадрат периода обращения планеты пропорционален кубу большой полуоси ее орбиты. Сравнивая нашу гипотетическую орбиту с орбитой Земли, получаем

$$(T_X/T_З)^2 = (R_X/R_З)^3 ,$$

откуда

$$T_X = T_З \cdot \left(10^{\Delta m/5}\right)^{3/2} = T_З \cdot 10^{3\Delta m/10} .$$

Разность звездных величин Луны и Солнца составляет

$$\Delta m = -12{,}7 - (-26{,}8) = 14{,}1.$$

Тогда

$$T_X = 1 \text{ год} \cdot 10^{3\cdot 14,1/10} \approx 17000 \text{ лет}.$$

4. 1) Герой романа был в северном полушарии Луны и, разумеется, на видимой ее стороне. 2) Луна была ближе к последней четверти. 3) На фоне Стрельца или (менее вероятно) Змееносца. 4) Скорее всего, была весна – конец марта или апрель.

11 класс

1. Есть несколько способов, хотя все они не очень точные. Наиболее часто используются следующие: а) По светимости ярчайших звезд, которая в свою очередь определяется по их спектральному классу. Для молодых рассеянных скоплений ярчайшими являются голубые сверхгиганты класса O или B, для шаровых – красные гиганты. б) По диаграмме «звездная величина – спектр (или цвет)», совмещая положение главной последовательности на этой диаграмме с ее положением на диаграмме Герцшпрунга–Рессела, построенной для скоплений (или отдельных звезд) с известным расстоянием. в) По цефеидам (если они наблюдаются в скоплении).

5. Видимый угловой размер звезд должен быть меньше разрешающей способности глаза, т.е. линейный размер (диаметр) изображений этих звезд на куполе не должен превышать $L_0 = \alpha R$, где α – разрешающая способность человеческого глаза в темноте (около $50'' \approx 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ рад), R – радиус зала планетария. В нашем случае $L_0 = \alpha R \approx 2{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 5$ м $\approx$ $\approx 1{,}25$ мм. Размер изображения одной звезды, получаемого на куполе с помощью оптической системы, определяется двумя параметрами. Первый – чисто геометрический, связанный с оптическим увеличением размера звезды при проецировании ее на купол. Если размер звезды на слайде $l_0 = 0{,}1$ мм, то размер изображения $L = \Gamma l_0 = l_0 R/r$, где r – расстояние от упомянутой дырочки в фольге до проецирующей линзы (по формуле линзы, $1/R + 1/r = 1/F$). В нашем случае увеличение не должно превышать $\Gamma_0 = L_0/l_0$, откуда находим, что фокусное расстояние системы должно быть не меньше

$$F = R/(\Gamma_0 + 1) = R/(L_0/l_0 + 1) \approx Rl_0/L_0 = $$
$$= Rl_0/(\alpha R) = l_0/\alpha \approx 40 \text{ см}.$$

Условие, вообще говоря, вполне выполнимое.

Второй параметр – дифракционный. Угловой размер расхождения пучка от точечного источника (находящегося вблизи фокуса объектива) равен λ/D, где λ – рабочая длина волны (порядка 500 нм, или $5 \cdot 10^{-7}$ м), D – диаметр объектива проецирующей оптической системы (т.е., именно тот диаметр, который нам надо найти). Размер изображения точечного источника на куполе радиусом R при этом составит $R\lambda/D$. Таким образом, необходимо условие $R\lambda/D = \alpha R$, откуда

$$D = \lambda/\alpha \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{м} = 2 \text{ мм}.$$

Условие тоже вполне выполнимое.

6. Радиус орбиты в среднем за сутки составлял

$$R_0 + h = 6371 \text{ км} + 236 \text{ км} = 6607 \text{ км} \approx 6{,}6 \cdot 10^6 \text{ м},$$

а изменение этого радиуса за сутки равно $\Delta h = -2{,}5$ км $\approx -2{,}5 \cdot 10^3$ м. Падение средней высоты орбиты происходит по причине потери станцией энергии из-за трения о верхние слои атмосферы. Будем рассматривать квазистационарный процесс: считать орбиту все время круговой, а работу сил трения $A = FL$ сводить к изменению параметров этой круговой орбиты. Сила $F = \Delta p/\Delta t$ находится из следующих соображений: в течение каждого промежутка времени Δt о станцию ударяется масса $\mu = \rho S V \Delta t$ в среднем неподвижных молекул (ρ – плотность атмосферы на высоте полета станции). В результате упругих столкновений их скорость относительно станции меняется от –V до +V, а относительно Земли – от 0 до $2V$. За время Δt станция передает молекулам импульс

$$\Delta p = \mu \cdot 2V = 2\rho S V^2 \Delta t .$$

Отсюда

$$F = \Delta p/\Delta t = 2\rho S V^2 .$$

Значит, если за время $\tau = 24$ ч станция пролетит расстояние $L = V\tau$, работа сил трения составит

$$A = FL = 2\rho S V^3 \tau .$$

С другой стороны, поскольку полная энергия станции равна $E = -GMm/(2(R_0 + h))$, то изменение энергии станции за это время составит

$$\Delta E = -GMm/(2(R_0 + h + \Delta h)) -$$
$$- \left(-GMm/(2(R_0 + h))\right) \approx \Delta h\, GMm/\left(2(R_0 + h)^2\right),$$

где Δh – отрицательная величина. Таким образом, $\Delta E = -A$, или

$$-2\rho S V^3 \tau = \Delta h\, GMm/\left(2(R_0 + h)^2\right).$$

Отсюда

$$\rho = -\Delta h\, GMm/\left(4(R_0 + h)^2 S V^3 \tau\right),$$

или, учитывая, что $V^2 = GM/(R_0 + h)$,

$$\rho = m\Delta h/\left(4\tau S (GM)^{1/2} (R_0 + h)^{1/2}\right) \approx 3{,}9 \cdot 10^{-10} \text{ кг/м}^3 .$$

Кроссворд «Физики и их открытия»

По горизонтали: **3.** Эйнштейн. **5.** Максвелл. **8.** Малюс. **10.** Лебедев. **11.** Якоби. **15.** Ган. **16.** Циолковский. **17.** Гук. **18.** Архимед. **20.** Вин. **21.** Паскаль. **25.** Галилей. **26.** Мариотт. **30.** Чедвик. **31.** Перрен. **32.** Араго. **33.** Кеплер. **34.** Томсон. **35.** Фарадей.

По вертикали: **1.** Эйлер. **2.** Майер. **4.** Ньютон. **6.** Евклид. **7.** Зельдович. **9.** Авогадро. **12.** Бернулли. **13.** Герике. **14.** Капица. **19.** Милликен. **22.** Столетов. **23.** Ферма. **24.** Карно. **27.** Вебер. **28.** Юкава. **29.** Герон.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Курьер образования
http://www.courier.com.ru

Vivos Voco!
http://vivovoco.nns.ru
(раздел «Из номера»)

Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.Н.Акатьева, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия, Е.А.Силина, В.М.Хлебникова, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Регистрационное свидетельство №0110473

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»,
тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени ГУП «Чеховский полиграфический комбинат» Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №