

КВАНТ

 ЯНВАРЬ 2002 № 1
ФЕВРАЛЬ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.А.Осипьян

ПЕРВЫЕ ЗАМЕСТИТЕЛИ

ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С.С.Кротов, С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,
А.Н.Виленкин, С.А.Гордониин,
Н.П.Долбиллин, В.Н.Дубровский,
А.А.Егоров, А.Р.Зильберман,
С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,
В.В.Можаяев, В.В.Произолов, Н.Х.Розов,
Ю.П.Соловьев, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров

(заместитель главного редактора),

В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,

А.И.Черноуцан

(заместитель главного редактора),

И.Ф.Шарьгин

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,
Ю.А.Данилов, Н.Н.Константинов,
Г.Л.Коткин, Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ

ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,
М.Л.Смолянский, Я.А.Сморозинский,
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро Квантум

©2002, Президиум РАН,
Фонд Осипьяна, «Квант»

- 2 Радиоволны на земле и в космосе. *П.Блиох*
9 Бревно в шалаше. *К.Осипенко, А.Спивак, В.Тихомиров*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 16 Задачи М1801–М1810, Ф1808–Ф1817
В Решения задач М1781–М1785, Ф1793–Ф1802

«КВАНТ» ДЛЯ «МЛАДШИХ» ШКОЛЬНИКОВ

- 24 Задачи
25 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»
25 За одним столом с Плутархом. *А.Пятаков*

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 29 Сухое трение. *И.Слободецкий*
31 Костры в поле и русская баня. *А.Стасенко*
35 Свист поезда и свет галактик. *А.Стасенко*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Вакуум

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 37 Кинематика и векторы. *В.Плис*

ВАРИАНТЫ

- 41 Материалы вступительных экзаменов 2001 года

ИНФОРМАЦИЯ

- 48 Заочная олимпиада для абитуриентов
49 Ответы, указания, решения

Вниманию наших читателей! (8)

НА ОБЛОЖКЕ

- I Иллюстрация к статье «Свист поезда и свет галактик»
II Кванты Интернета
III Шахматная страничка
IV Коллекция головоломок

Международная благотворительная организация Институт «Открытое общество. Фонд содействия» и Московский комитет образования выписывают для школ Москвы тысячу экземпляров журнала «Квант».

Частный предприниматель Русинович В.В. выписывает пятьдесят экземпляров журнала «Квант» для школ Сахалина.

Радиоволны на земле И В КОСМОСЕ

П. БЛИОХ

Почему звук удается излучать равномерно во все стороны, а радиоволну нет?

Подумаем, как можно было бы сделать всенаправленный, или, как говорят, изотропный излучатель радиоволн. Очевидно, если мы хотим добиться полной симметрии излучения, нам придется сконструировать полностью симметричную антенну.

диполя (рис. 1). В плоскости же, проходящей через его ось, диаграмма совсем не похожа на окружность, а вдоль самой оси излучение вообще отсутствует. Что же мешает сделать полностью симметричную, т.е. сферическую антенну?

Отвлечемся ненадолго от радио и рассмотрим звуковую волну. Она представляет собой периодические изменения плотности вещества и давления в среде.

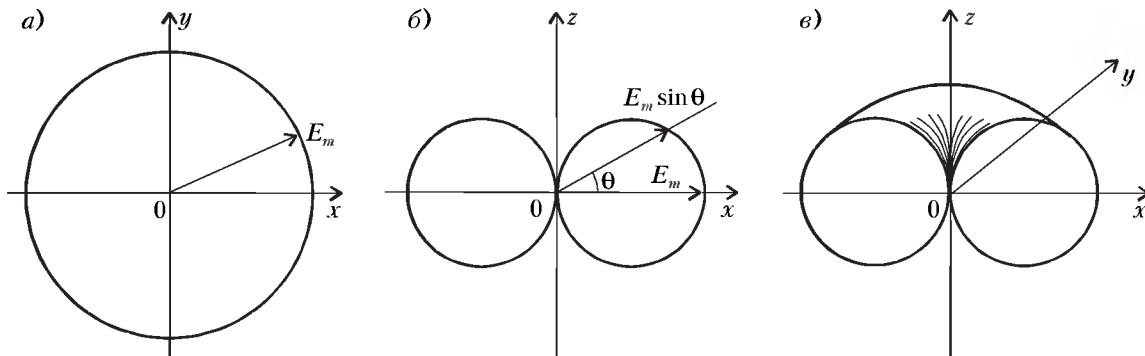


Рис.1. Диаграмма направленности диполя Герца: а) сечение плоскостью $xу$; б) сечение плоскостью xz ; в) объемная диаграмма

Те антенны, которые обычно используются, этому условию не удовлетворяют. Например, диполь Герца, хотя и называется симметричным вибратором, но имеет выделенное направление — ось диполя. Поэтому в объемной диаграмме направленности симметрия проявляется только в плоскости, перпендикулярной оси

Движения частиц в звуковой волне также являются периодическими, причем колебания частиц (например, молекул воздуха) происходят в том же направлении, что и распространение волны. Таким образом, в отличие от радиоволны звуковая волна является продольной. Звук, как известно, возбуждается быстро колеблющимися предметами. Если взять в качестве излучателя пульсирующую сферу, то от нее во все стороны вдоль радиусов побегут звуковые волны (рис. 2, а). На любой концентрической с излучателем сферической оболочке структура волны будет одна и та же: частицы

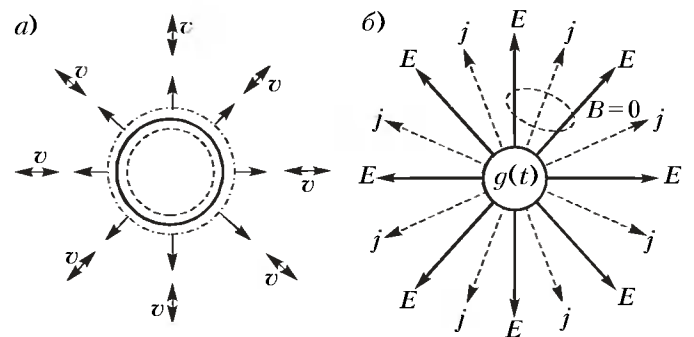


Рис.2. а) Пульсирующая сфера излучает звуковые волны равномерно по всем направлениям; б) пульсирующий электрический заряд и радиальный ток не создают магнитного поля, поэтому электромагнитные волны не излучаются

Автор данной публикации замечательный физик Павел Викторович Блюх в течение многих лет писал для нашего журнала статьи, посвященные физике радиоволн. Эти статьи всегда отличались изяществом формы и глубиной содержания.

Несколько лет назад Павел Викторович подготовил для серии «Библиотечка «Квант» книгу под названием «Радиоволны на земле и в космосе». По объективным причинам издание этой серии было на некоторое время приостановлено и возобновилось только в прошлом году. К сожалению, автор не успел узнать, что его книга станет одним из первых выпусков возобновленной «Библиотечки» (в начале 2001 года Павел Викторович скончался).

Предлагаем вашему вниманию три небольшие отрывка из книги П.В.Блюха, которые, конечно, могут читаться и независимо, но вместе с тем они дают прекрасное представление о книге в целом.

повсюду колеблются вдоль радиуса с одинаковыми скоростями, интенсивность излучения от направления не зависит.

Попробуем построить такой же излучатель для радиоволн. Поскольку компонентами радиоволны являются электрическое и магнитное поля \vec{E} и \vec{B} , в качестве источников нам потребуются временные заряды и токи. Начнем с самой простой конструкции. Пусть на той же самой пульсирующей сферической оболочке, которая хорошо излучает звук, находится постоянный электрический заряд q_0 , равномерно распределенный по всей поверхности. Будет ли он излучать радиоволны? Легко убедиться, что излучения не будет. Действительно, электрическое поле внутри сферы равно нулю, а вне сферы имеет только радиальную составляющую¹ $E_r = q_0/r^2$, где r – расстояние до центра сферы. Поскольку при пульсациях оболочки r остается неизменным, то $E_r = \text{const}$. Что же касается магнитного поля, то его вообще нет, так как вне сферы отсутствуют токи и переменные электрические поля. Следовательно, электромагнитной волны не возникает.

Усложним нашу антенну. Пусть радиус сферы остается постоянным, а ее заряд $g(t)$ периодически меняется. Теперь как будто бы все в порядке: вокруг пульсирующего заряда возникает радиальное переменное электрическое поле

$$E_r = \frac{q(t)}{r^2},$$

оно породит переменное магнитное поле, и от пульсирующего заряда побежит сферически симметричная электромагнитная волна. Оказывается, этого не произойдет, так как заряд не может ни возрасти, ни убывать сам по себе. Для того чтобы изменять заряд, на сферу вдоль радиусов придется пустить переменный электрический ток. Если он равномерно распределен по всей сфере, то связь между плотностью радиального тока j_r на расстоянии r от центра и полным зарядом $q(t)$ дается уравнением

$$\frac{dq}{dt} = -4\pi r^2 j_r.$$

Это – так называемое уравнение непрерывности, которое связывает изменение во времени заряда в некотором объеме с током, протекающим через поверхность, ограничивающую данный объем. Уравнение непрерывности выражает фундаментальный физический закон сохранения заряда.

Чтобы понять, какое магнитное поле будет создано двумя одновременно действующими источниками – полем $E_r(t) = \frac{q(t)}{r^2}$ и током плотностью $j_r = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{dq}{dt}$, – надо обратиться к одному из уравнений Максвелла, а именно

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \left(4\pi \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$

Векторы \vec{j} и \vec{E} имеют только радиальные составляющие, причем

$$\frac{\partial E_r}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{dq}{dt} = -4\pi j_r.$$

Поэтому правая часть уравнения Максвелла равна нулю, и электромагнитная волна вокруг пульсирующего заряда (с учетом обязательно существующего тока) не возникает.

Собственно говоря, об этом можно было бы догадаться и без всяких расчетов, так как в сферически симметричном распределении тока нет никакого преимущественного направления, вокруг которого можно было бы нарисовать замкнутую линию индукции магнитного поля (рис.2,б).

Итак, попытка повторить для радиоволн ту же самую конструкцию, которая обеспечивала изотропное излучение звука, оказалась неудачной. Попробуем придумать что-нибудь похитрее. Возьмем очень много маленьких дипольных излучателей и расположим их равномерно по сфере так, чтобы добиться одинакового излучения по всем направлениям. Оказывается, сделать это не удастся, как бы мы ни располагали диполи, и причина здесь кроется в поперечности электромагнитной волны.

Суть наших рассуждений можно пояснить следующим «зоологическим» примером. Представим себе ежа, свернувшегося в шар и распутившего свои иглы вдоль радиусов. Этот напуганный еж послужит нам образцом изотропного излучателя, а иглы его будут соответствовать направлениям распространения излучаемой волны. Напомним, что в случае звуковой волны скорости движения частиц тоже направлены вдоль радиусов, чем и обеспечивается сферическая симметрия продольной волны.

Когда еж успокаивается, он опускает свои иглы на поверхность шара перпендикулярно радиусам. Это расположение игл соответствует векторным составляющим \vec{E} или \vec{B} в поперечной электромагнитной волне (распространение волны по-прежнему происходит вдоль радиуса). Теперь подумайте, можно ли так «причесать» ежа, чтобы поверхность шара, покрытого лежащими иглами, была совершенно однородной? Легко сообразить, что сделать этого нельзя: обязательно получатся как минимум две «макушки». Следовательно, сферическая симметрия нарушится, и изотропный излучатель поперечных волн не получится.

Можно попробовать пойти совсем иным путем: вместо того чтобы придумывать специальный способ ориентации диполей (вдоль экватора, вдоль меридианов и т.д.), что всегда приводит к выделению полюсов, расположим излучатели совершенно хаотически. Пользуясь опять-таки наглядными сравнениями, представим себе, что на покрытую клеем сферу со всех сторон сыпятся маленькие иглы-диполи, которые прилипают к сфере, имея случайную ориентацию. Ясно, что у хаотически расположенных диполей нет ни экватора, ни полюсов, т.е. мы как будто бы получим, наконец, изотропный излучатель.

Но обмануть природу, конечно, не удастся. Если

¹ Здесь и далее при написании формул используется любимая физиками гауссова система единиц. (Прим. ред.)

число диполей невелико, то на сфере в некоторых местах появляются пробелы, нарушающие симметрию. Если, наоборот, диполей так много, что в пределах любой маленькой (по сравнению с длиной волны) площадки окажется несколько случайно ориентированных диполей, то их излучения почти полностью скомпенсируют друг друга (противоположно ориентированные диполи создают противофазные поля, ослабляющие друг друга). Но если почти не будет излучать каждая маленькая площадка, то в той же мере не будет излучать и вся сферическая антенна. Мы все же пишем «почти», потому что при случайной ориентации может оказаться избыток диполей, повернутых в какую-нибудь сторону. Этот избыток окажется источником дипольного излучения, которое, как мы знаем, не является изотропным.

Таким образом, сфера, покрытая хаотически расположенными диполями, излучает с такой же диаграммой направленности, как многовибраторная антенна со случайно ориентированными излучателями. Диаграмма направленности такой антенны не является изотропной, но в каких направлениях будет наблюдаться максимальное излучение, а в каких минимальное, заранее предсказать нельзя.

Можно ли использовать атмосферу Земли как гигантскую сферическую линзу для фокусировки радиоволн?

В стандартных условиях радиолучи искривляются в тропосфере по направлению к Земле. Поэтому радиоволны от далеких космических источников, огибая Землю со всех сторон, на некотором расстоянии от планеты сходятся в одном месте. Получается, что атмосферная оболочка действует подобно гигантской собирающей линзе. Размеры этой линзы-антенны, созданной самой природой, колоссальны (ее диаметр $d \approx 12800$ км), поэтому не удивительно, что в литературе время от времени появляются довольно смелые проекты ее использования.

Предлагалось, например, воспользоваться атмосферной линзой для передачи энергии на далекие космические корабли. Для этого необходимо поместить в фокус линзы мощный источник и направить поток радиоволн, как луч прожектора, на космический корабль. Благодаря огромным размерам антенны, дифракционная расходимость пучка радиоволн оказывается очень малой:

$$\Delta\varphi_{\text{дифр}} \approx \lambda/d \approx 8 \cdot 10^{-9} \text{ рад} \approx 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ угл. с.}$$

Здесь и далее в численных оценках взята длина волны $\lambda = 10$ см, такие радиоволны слабо поглощаются в тропосфере и практически не испытывают влияния ионосферы.

Слабая расходимость пучка радиоволн послужила основой и для второго проекта, в котором предлагалось использовать атмосферную оболочку как приемную антенну радиотелескопа. Поместив в фокус линзы приемное устройство, можно будет, по мнению авторов, увидеть мелкие детали далеких светящихся объектов, недоступные для обычных земных средств.

Нет необходимости объяснять, сколь заманчивы оба проекта. Но осуществимы ли они? В принципе да, т.е. атмосферную оболочку действительно можно использовать и как передающую антенну, и как гигантский радиотелескоп. Однако их реальные возможности можно оценить только после того, как будут рассчитаны коэффициент усиления линзы-антенны и ее разрешающая способность. Авторы проектов таких расчетов не делали, но мы без особого труда выполним их сами.

Начнем с оценки того минимального расстояния, на котором пересекается поток параллельных лучей после преломления в тропосфере. Сначала сделаем оценку без всяких формул, учитывая, что угол рефракции лучей света вблизи горизонта равен приблизительно

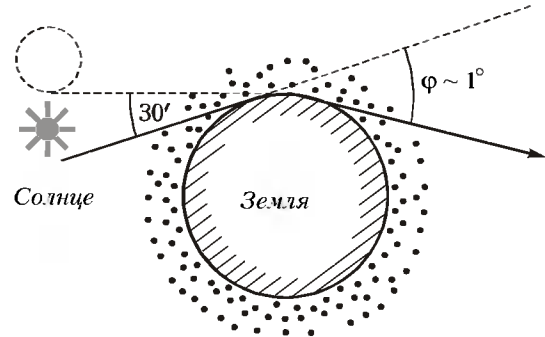


Рис.3. Рефракция световых лучей в тропосфере

$30'$ (рис.3). Вследствие этого эффекта, восход Солнца наступает несколько раньше, а заход — несколько позже по сравнению с тем временем, которое соответствовало бы прямым, неискривленным лучам.² Полный угол преломления светового луча, обогнувшего Землю, будет в два раза больше: $\varphi \sim 1^\circ$. В радиодиапазоне коэффициент преломления воздуха возрастает, и эти цифры надо примерно удвоить. Поэтому угол φ на

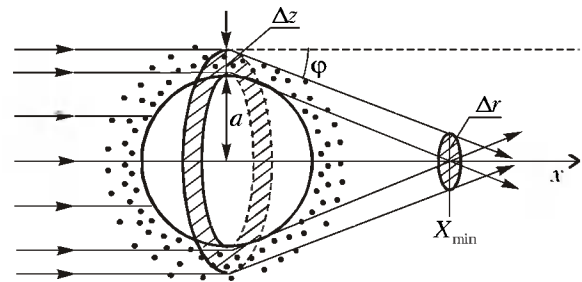


Рис.4. Фокусировка радиоволн земной атмосферой

рисунке 4 уже порядка 2° . Легко рассчитать расстояние до точки пересечения лучей:

$$X_{\text{min}} \approx \frac{a}{\varphi} \approx 180000 \text{ км.}$$

Мы обозначили это расстояние X_{min} , поскольку лучи, проходящие на некоторой высоте z над земной поверхностью, преломляются слабее и пересекают ось x на расстояниях, больших X_{min} .

² Любопытно отметить случайное совпадение: угол рефракции световых лучей вблизи горизонта равен угловому диаметру Солнца.

Очевидно, что в точке пересечения лучей интенсивность радиоизлучения I может во много раз превышать исходную величину I_0 . Но во сколько раз? От численного значения коэффициента усиления $K = I/I_0$ зависит реальность тех заманчивых предложений, о которых говорилось выше. Точно рассчитать величину K практически невозможно, так как для этого надо было бы знать коэффициент преломления по всей толщине тропосферы во всех местах земного шара. Однако приблизительные оценки (они нас вполне устроят) делаются легко.

Взгляните на рисунок 4. Видно, что через круговую площадку радиусом Δr с центром на оси x в точке X_{\min} проходят те лучи, которые прошли через узкое кольцо шириной Δz , примыкающее к земному шару. Площадь кольца (его называют входной апертурой линзы) равна приблизительно $S_0 = 2\pi a \Delta z$, а площадь кружка (фокального пятна) равна $S = \pi(\Delta r)^2$. Из закона сохранения энергии в лучевом конусе следует, что $I_0 S_0 = IS$, и искомый коэффициент усиления интенсивности равен

$$K = \frac{S_0}{S} \approx \frac{2a\Delta z}{(\Delta r)^2}.$$

Лучи, идущие на некоторой высоте z над горизонтом, не проходят через центр фокального пятна. Обозначим их удаление от оси x на расстоянии X_{\min} через r . Между z и r существует определенная зависимость (мы установим ее несколько позже), но для небольших Δz и Δr можно считать, что

$$\Delta z = \frac{dz}{dr} \Delta r.$$

Тогда

$$K = \frac{2adz/dr}{\Delta r} = \frac{2a}{\Delta r(dr/dz)}.$$

Видно, что чем меньше радиус площадки Δr , тем больше коэффициент усиления линзы.

Существует предельно малое значение Δr_{\min} , в пределах которого могут сконцентрироваться лучи. Это ограничение связано с дифракцией волн, поэтому $\Delta r_{\min} \approx X_{\min} \Delta \varphi_{\text{дифр}} \approx 1,4 \cdot 10^{-3}$ км = 1,4 м. Как видим, фокальный кружок получился очень маленьким.

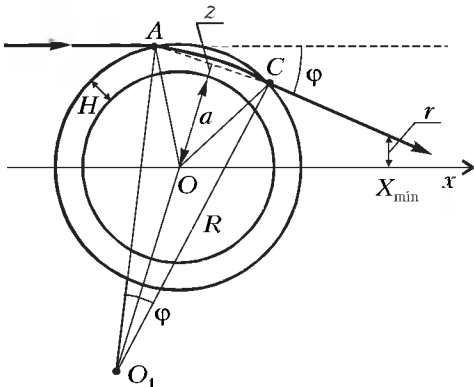


Рис.5. Траектория луча, проходящего в тропосфере на высоте z над Землей

Для определения K надо еще найти производную dr/dz . Схема вычисления поясняется рисунком 5. Будем считать для упрощения расчетов, что тропосфера имеет толщину $H \approx 12$ км, и выше этой границы лучи не преломляются. Учитывая малость угла $\varphi(z)$, связь между z и r запишем в виде

$$r \approx (a + z) - X_{\min} \varphi(z).$$

Луч, пришедший параллельно оси x , в пределах тропосферы распространяется по дуге AC . Радиус этой окружности в стандартных условиях составляет $R \approx 25000$ км. Для малых φ угол преломления можно определить как отношение хорды AC к радиусу R :

$$\varphi = \frac{AC}{R} = \frac{2\sqrt{(a+H)^2 - (a+z)^2}}{R} \approx \frac{2\sqrt{2a(H-z)}}{R}.$$

Интересно сравнить результаты расчета с взятым ранее значением $\varphi \approx 2^\circ$. При $z = 0$, $H = 12$ км, $a = 6400$ км, $R = 25000$ км найдем $\varphi(0) \approx 1,7^\circ$. Получилась несколько заниженная величина, но согласие можно считать вполне удовлетворительным.

Вернемся к определению dr/dz . Согласно приведенному выражению для r , получим

$$\frac{dr}{dz} \approx 1 - X_{\min} \frac{d\varphi}{dz} \approx 1 + \frac{X_{\min} \sqrt{2a}}{R\sqrt{H-z}}.$$

Для луча, проходящего через центр фокального пятна ($r = 0$, $z = 0$),

$$\left. \frac{dr}{dz} \right|_{z=0} \approx 1 + \frac{X_{\min}}{R} \sqrt{\frac{2a}{H}} \approx 240.$$

Теперь нам известны все величины для определения коэффициента усиления, и искомая оценка K_{\max} , соответствующая Δr_{\min} , такова: $K_{\max} \approx 3,7 \cdot 10^4$. Получился вполне обнадеживающий результат: от атмосферной линзы можно ожидать усиления интенсивности в десятки тысяч раз. Если бы это было действительно так! Увы, наш расчет относится к идеализированной линзе, которая образуется совершенно однородной тропосферой. На самом деле коэффициент преломления воздуха меняется не только регулярным образом, уменьшаясь с высотой, что мы учли, используя радиус кривизны луча R , но и испытывает случайные отклонения от среднего значения, на что мы не обращали внимания.

Случайные изменения $n(r, t)$ вызывают непредсказуемые отклонения луча в пределах некоторого угла рассеяния $\Delta \varphi_{\text{расс}}$. Если $\Delta \varphi_{\text{расс}}$ окажется больше $\Delta \varphi_{\text{дифр}}$, то радиус фокальной площадки Δr возрастет, и коэффициент усиления линзы уменьшится. С флуктуациями коэффициента преломления связано, например, мерцание далеких огней. Это красивое зрелище — настоящий бич для астрономических наблюдений. Изображения звезд «пляшут» в фокусе телескопа, ограничивая разрешающую способность инструмента. Чтобы уменьшить влияние случайных неоднородностей тропосферы, телескопы устанавливают высоко в горах, а радикальной мерой являются внеатмосферные наблюдения из космоса. Астрономы давно измерили

среднеквадратическое значение $\Delta\varphi_{\text{расс}}$. Вблизи горизонта оно равно примерно $1''$. В диапазоне сантиметровых радиоволн эту величину надо примерно удвоить. Положив $\Delta\varphi_{\text{расс}} \approx 2'' \approx 10^{-5}$ рад, найдем $\Delta r \approx X_{\text{min}} \Delta\varphi_{\text{расс}} \approx 1,8$ км и получим среднее значение коэффициента усиления $\langle K \rangle \approx 30$. Переход от K к $\langle K \rangle$ объясняется тем, что угол отклонения луча, а вместе с ним и Δr являются случайными величинами.

К сожалению, от усиления в десятки тысяч раз ничего не осталось, но и найденное значение $\langle K \rangle$ все равно является завышенным. Дело в том, что наряду со сравнительно мелкомасштабными флуктуациями коэффициента преломления, которые вызывают рассеяние лучей, существуют более сильные изменения, нарушающие сферическую симметрию линзы. Воздух над океанами и над сушей, днем и ночью имеет разные метеорологические параметры, и вместе с ними меняется коэффициент преломления $n(r, t)$. За счет этих изменений угол оптической рефракции вблизи горизонта отличается в разных местах в течение года более чем на $30''$. Если принять эту величину за $\Delta\varphi_{\text{расс}}$, то $\langle K \rangle$ снизится до 1.

Эта цифра окончательно губит все фантастические проекты, но не устраняет саму возможность наблюдения линзового эффекта. Взгляните снова на рисунок 4. Если бы не было преломления и рассеяния лучей в атмосфере, то точка X_{min} находилась бы в тени Земли, и ни один луч сюда бы не попал. В оптический прибор наблюдатель увидел бы только темный диск Земли. За счет линзового эффекта и рассеяния лучей вокруг темного диска возникает светлый ореол, который при $\langle K \rangle \sim 1$ дает освещенность в точке X_{min} почти такую же, как и в исходном световом потоке. Для радиосвязи здесь открываются возможности передачи сигналов от одного космического корабля к другому, даже если радиолиния заэкранирована Землей, при условии, конечно, что корабли находятся достаточно далеко от Земли.

Линзовый эффект должен наблюдаться и в атмосферах других планет. В атмосфере Венеры это явление было замечено еще М.В. Ломоносовым в 1761 году во время прохождения планеты по диску Солнца. Он увидел светлый выступ вокруг темного пятна вблизи края солнечного диска и правильно объяснил его наличием у Венеры атмосферы.

Как затмения космических радиоисточников Солнцем используются для изучения солнечной короны

Из Солнца непрерывно вытекают потоки плазмы, создавая так называемый солнечный ветер. Плазма заполняет окосолнечное и межпланетное пространства. Область ее влияния охватывает огромные расстояния, значительно превосходящие радиус орбиты Земли. Плазменная корона состоит в основном из протонов и электронов. Электронная концентрация по мере удаления от Солнца спадает сначала очень быстро: от 10^8 см^{-3} до 10^4 см^{-3} на расстоянии в несколько R_{\odot} (так обозначают радиус Солнца). Далее концентрация

убывает намного медленнее: обратно пропорционально квадрату расстояния, и на орбите Земли составляет примерно $5 - 10 \text{ см}^{-3}$.

На оптическое излучение межпланетная плазма практически не влияет, но в диапазоне радиоволн, особенно на метровых и более длинных волнах, это влияние становится весьма заметным. Оно проявляется в виде регулярной рефракции и рассеяния на случайных неоднородностях короны. Наблюдая затмения Солнцем радиоисточников, извлекают много полезных сведений о распределении электронной концентрации в межпланетной среде.

Метод затменных наблюдений, или метод радиопросвечивания, был предложен независимо советским астрономом В.В. Виткевичем и английским ученым А.Хьюишем. В качестве «передатчика» чаще всего используется один из наиболее мощных источников, а именно Крабовидная туманность, или ЗС-144 (название источника указывает, что он занесен под номером 144 в третий каталог Кембриджского университета). Затмения ЗС-144 происходят каждый год. Максимальная фаза приходится на 15 июня, когда Солнце проходит очень близко от Краба.

Первые наблюдения, проведенные в 1951–1953 годах, дали неожиданные результаты: было обнаружено существенное ослабление интенсивности излучения на таких больших расстояниях от Солнца, где поглощение в плазме заведомо отсутствует. Только в 1955 году удалось объяснить причину уменьшения интенсивности. Она заключается не в поглощении, а в том, что окосолнечная плазма имеет неоднородную структуру. Радиоволны рассеиваются на неоднородностях, что воспринимается как увеличение угловых размеров источника.

Далее, надо иметь в виду, что наблюдения проводились с помощью радиоинтерферометра, состоящего из далеко разнесенных друг от друга антенн. Такая система хорошо регистрирует только точечные источники, что позволяет подавить фоновые излучения Галактики и самого Солнца, которые являются в данном случае помехами. Если угловые размеры источника превышают ширину лепестковых диаграмм направленности интерферометра $\varphi \sim \lambda/d$ (где d – расстояние между антеннами), то отклик интерферометра уменьшается. Поэтому увеличение угловых размеров источника за счет рассеяния до величины $\sigma_{\varphi} \geq \lambda/d$ приводит к кажущемуся ослаблению интенсивности, хотя на самом деле она не меняется. Так была обнаружена неоднородная структура солнечной короны на очень больших расстояниях от Солнца. Раньше эти области короны были недоступны для изучения.

Конечной целью затменных экспериментов является определение плотности частиц (электронов) N в корональной плазме. Ее можно представить в виде суммы двух компонентов: $N = \langle N \rangle + \delta N$. Первое слагаемое $\langle N \rangle$ представляет собой регулярную составляющую электронной плотности. Приблизительно можно считать, что величина $\langle N \rangle$ зависит только от расстояния до Солнца и монотонно убывает с ростом r (сферически симметричная корона). Второе слагаемое δN – это

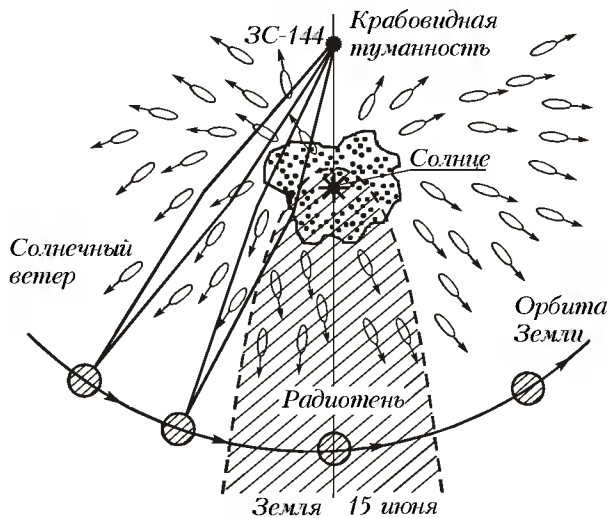


Рис.6. Затмение Крабовидной туманности солнечной короной

случайная составляющая. Она, собственно, и характеризует неоднородную структуру короны. Именно с этой величиной связан угол рассеяния σ_ϕ , который определяется по изменениям отклика интерферометра.

Регулярная составляющая $\langle N \rangle$ изучается другим способом, о котором мы сейчас расскажем. Забудем на время о наличии неоднородностей и об эффекте рассеяния. Как в этом случае будет влиять солнечная корона на распространение радиоволн? Плазменный шар с монотонно убывающей плотностью действует подобно рассеивающей линзе (коэффициент преломления плазмы $n < 1$). Проходя сквозь корону, радиолучи отклоняются от Солнца, и возникает так называемая радиотень (рис.6). При движении по орбите Земля пересекает границу тени, что сопровождается сравнительно резкими изменениями интенсивности с характерным временем порядка суток. Положение границы тени для данной длины волны зависит от закона распределения $\langle N(r) \rangle$. Поэтому, изучая изменения интенсивности во время затмения (в течение нескольких дней вблизи 15 июня), можно получить данные о регулярной составляющей электронной плотности в солнечной короне.

В наших рассуждениях мы отвлеклись для простоты от влияния неоднородностей δN . Они существенно усложняют исследование $\langle N \rangle$. Дело в том, что при измерениях с интерферометром спад интенсивности во время приближения Солнца к источнику связан одновременно с двумя факторами: переходом Земли в область тени и кажущимся увеличением углового диаметра источника за счет рассеяния.

Тем не менее, эти эффекты можно разделить, используя различную зависимость их от длины волны. Мы не будем рассказывать подробно, как это делается, но укажем на главное: наблюдения должны проводиться одновременно на нескольких волнах, желательно наиболее длинных из тех, которые проходят сквозь ионосферу, так как для них рефракция и рассеяние в солнечной короне проявляются наиболее сильно. Такой эксперимент был успешно осуществлен в июне 1965 и 1966 годов на радиотелескопе Радиоастрономического института в Харькове. Затмение источника ЗС-144 наблюдалось одновременно на четырех волнах декаметрового диапазона (7,9 м, 9,7 м, 12 м и 15 м). После обработки результатов удалось выбрать наиболее приемлемые модели распределения $\langle N \rangle$ и δN .

Метод радиопросвечивания с успехом применяется и для исследования планетных атмосфер. В этом случае используются высокостабильные узкополосные передатчики, установленные на космических аппаратах. Сами же аппараты могут пролетать вдали от планеты, находиться на орбитах ее спутников или даже вести передачу с самой поверхности планеты. Ясно, что все эти варианты расширяют возможности радиопросвечивания.

К настоящему времени достаточно детально изучены атмосферы Венеры и Марса. В частности, установлено, что они имеют ионосферы, подобные земной, но несколько меньшей плотности. Максимум электронной концентрации на дневной стороне Марса расположен на высоте примерно 140 км и равен приблизительно $1,5 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$. Высота максимума на Венере та же, а сама концентрация составляет около $5,5 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$.

Внимание наших читателей!

После большого перерыва возобновилась жизнь «Библиотечки «Квант».

Уже поступили в продажу три свежих выпуска:

- выпуск 86 – обновленное издание замечательной книги И.Ш.Слободецкого и Л.Г.Асламазова «Задачи по физике»,
- выпуск 87 – сборник материалов под названием «Физика и...», посвященный связи физики с разными областями науки и деятельности человека,
- выпуск 88 – книга А.В.Спивака «Математический праздник», в которой собраны задачи-жемчужины для развития математического мышления школьников.

Не упустите уникальную возможность приобрести вышедшие книги или сделать заказ на будущие книги серии «Библиотечка «Квант» непосредственно в помещении редакции. Особенно приглашаются к сотрудничеству (на выгодных условиях) оптовые покупатели.

Мы будем рады ответить на все ваши вопросы по телефонам: 930-36-32, 930-56-48, 930-56-41.

Издательство «Книжный дом «Университет» выпустило в свет новое издание книги А.И.Черноуца на «Физика. Задачи с ответами и решениями».

Книга содержит более 1500 задач разной степени сложности, из них 400 задач даются с решениями, остальные – с указаниями и ответами. Подробности и примеры – на сайте <http://vivovoco.nns.ru>.

Справки и заказы – по телефону 939-45-81. Оптовые заказы – по телефону 216-23-62 и 216-26-75 (фирма «Абрис»).

БРЕВНО В ШАЛАШЕ

БРЕВНО В ШАЛАШЕ

9

К.ОСИПЕНКО, А.СПИВАК, В.ТИХОМИРОВ

КАКОВ ЦИЛИНДР МАКСИМАЛЬНОГО ОБЪЕМА, КОТОРЫЙ МОЖНО ВПИСАТЬ В ДАННЫЙ КОНУС?¹ Этот вопрос можно найти во многих учебниках алгебры и математического анализа. В статье «Кеплер и винные бочки – австрийские и рейнские» («Квант» №6 за 2000 год) он был сформулирован в качестве упражнения: «В данный конус впишите цилиндр максимального объема, ось которого совпадает с осью конуса».

Зачем нужны слова «ось которого совпадает с осью конуса»? Нельзя ли их вычеркнуть? Другими словами, верно ли, что ось цилиндра максимального объема, который можно разместить внутри данного конуса, параллельна оси конуса? Скорее всего, верно. Но доказывать это мы не умеем: задача о произвольном (наклонно расположенном) цилиндре оказалась неожиданно сложной, и решить ее мы не смогли. А вот разобраться с цилиндром, ось которого параллельна основанию конуса, удалось. Решение и ответ этой задачи оказались несколько громоздкими, но поучительными. При этом потребовалось вычислить расстояние от точки, лежащей на оси симметрии гиперболы, до самой этой гиперболы.

А где гипербола, там и эллипс, и парабола. Так эта статья, начав с вопроса, можно ли сэкономить слова «ось которого совпадает с осью конуса», несколько разрослась. Разумеется, можно было изложить решение задачи о «лежащем» цилиндре максимального объема и без таких больших отступлений в сторону. Но мы надеемся, что всякий, кто имеет склонность к математике, будет рад познакомиться с классическими понятиями и результатами, которые в изобилии встретятся на нашем пути. Вы научитесь вычислять расстояния от точки до параболы, эллипса, гиперболы, узнаете, как связаны астроид и эллипс, парабола и полукубическая парабола.

Эта статья может быть интересна даже одиннадцатикласснику-абитуриенту, которому не интересно ничего на свете, кроме экзаменов в вуз, выбранный им и еще не выбравший его. Ведь в конце концов задача о максцилиндре (и похожая на нее задача о миниконусе, которая тоже будет решена нами) – это «задача с параметром», правда довольно сложная.

«Стоячий» и «лежащий» максцилиндры

«Стоячий» цилиндр

Пусть $OA = R$ и $OS = H$ – радиус основания и высота прямого кругового конуса, $OL = x$ и $LM = y$ – радиус основания и высота вписанного цилиндра (рис.1). Тогда в силу подобия треугольников получаем: $y/H =$

$= AM/AS$ и $x/R = MS/AS$, так что

$$\frac{y}{H} + \frac{x}{R} = \frac{AM}{AS} + \frac{MS}{AS} = 1.$$

Объем цилиндра равен

$$V = \pi x^2 y = \pi x^2 H \left(1 - \frac{x}{R}\right) = \frac{\pi H}{R} (x^2 R - x^3).$$

Мы свели задачу к нахождению максимума функции

$$f(x) = x^2 R - x^3$$

на интервале $(0; R)$. Эта функция обращается в ноль на концах отрезка $[0; R]$, а производная

$$f'(x) = 2xR - 3x^2$$

на интервале $(0; R)$ равна нулю лишь в точке $x = 2R/3$. (График функ-

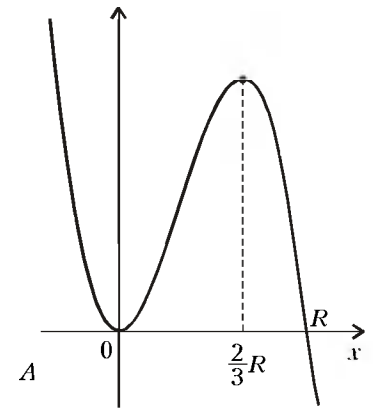


Рис.1

Рис.2

ции f изображен на рисунке 2.) Значит, максимальный объем «стоячего» цилиндра равен

$$V = \frac{\pi H}{R} f\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{4}{27} \pi R^2 H.$$

«Лежащий» цилиндр

На первый взгляд кажется, что задача о «лежащем» цилиндре столь же проста. Ведь если r и $2h$ – радиус основания и высота вписанного в конус «лежащего» цилиндра, ось которого параллельна основанию конуса (на рисунке 3 изображено осевое сечение), то

$$\frac{h}{R} + \frac{2r}{H} = \frac{SK}{SA} + \frac{KA}{SA} = 1,$$

откуда $h = R\left(1 - \frac{2r}{H}\right)$. Объем цилиндра равен

$$2\pi h r^2 = 2\pi r^2 R \left(1 - \frac{2r}{H}\right) = \frac{2\pi R}{H} (r^2 H - 2r^3).$$

¹ Цилиндры и конусы в этой статье – прямые круговые.

Как и для «стоячего» цилиндра, рассмотрим функцию

$$g(r) = r^2 H - 2r^3$$

и продифференцируем ее:

$$g'(r) = 2rH - 6r^2.$$

Функция g обращается в ноль в концах отрезка $[0; H/2]$, а ее производная на интервале $(0; H/2)$ обращается в ноль при $r = H/3$. (График функции g изображен на рисунке 4.) Значит, максимальное значение на интервале $(0; H/2)$ функция принимает

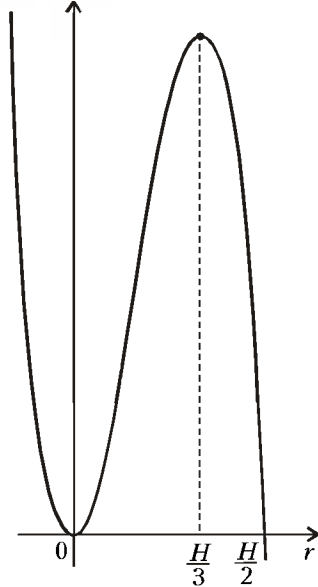


Рис.3

Рис.4

максимум при $r = H/3$. Этому значению соответствует величина

$$h = R \left(1 - \frac{2H/3}{H} \right) = \frac{R}{3};$$

следовательно, максимальный объем «лежащего» цилиндра равен

$$2\pi r^2 h = \frac{2\pi}{27} H^2 R.$$

Например, при $R = 1$ и $H = 9$ объем «лежащего» цилиндра равен 6π .

А объем конуса, в который этот цилиндр вписан, равен

$$\frac{\pi}{3} R^2 H = 3\pi.$$

Внутри одного тела (конуса) удалось расположить другое тело (цилиндр) вдвое большего объема! Представляете, какое значение для практики может иметь наша конструкция?!

В чем ошибка?

Чудес не бывает; конечно же, мы ошиблись. При малых r вписанный цилиндр касается боковой поверхности конуса двумя своими точками (рис.5), а при возрастании r высота h вписанного цилиндра уменьшается, и в некоторый момент происходит «раздвоение» каждой из точек касания. С этого момента рисунок 3 не

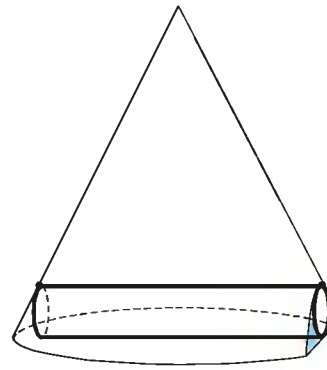


Рис.5

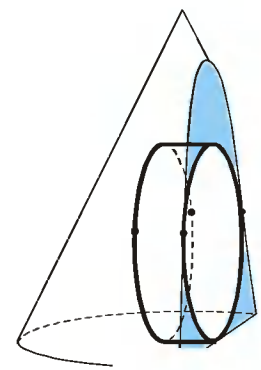


Рис.6

соответствует действительности: цилиндр касается поверхности боковой конуса не двумя, а четырьмя точками (рис.6).

Правильный ответ

Необходимость разбора двух разных случаев касания значительно усложняет решение задачи. Тем не менее, мы сможем ее решить и получим следующий ответ: при $R \geq H$ максимальный объем «лежащего» цилиндра, вписанного в конус с высотой H и радиусом основания R , равен

$$V = \frac{2}{27} \pi R H^2,$$

а при $R \leq H$ максимальный объем равен

$$\frac{\pi R^3 \sqrt{2} \left(\sqrt{12H^2 + 13R^2 + R\sqrt{24H^2 + 25R^2}} - 3R\sqrt{2} \right)^2}{9H\sqrt{6H^2 + 5R^2 + R\sqrt{24H^2 + 25R^2}}}.$$

(При $R = H$, между прочим, можно пользоваться обеими формулами. В самом деле, подставив $H = R$ во вторую формулу, получим $V = \frac{2}{27} \pi R^3$. Убедитесь в этом!)

Мы не будем сразу рассказывать решение задачи о лежащем максцилиндре, а потренируемся – разберем более простые (и, на наш взгляд, более важные и интересные) задачи. Читателю, владеющему математическим анализом, можно пропустить несколько следующих разделов статьи. А менее опытным читателям, надеемся, эта тренировка поможет благополучно во всем разобраться.

Расстояния от точки до параболы, эллипса, гиперболы

Как известно, сечение конуса вертикальной плоскостью – гипербола. (А если вы еще не знаете этого, не огорчайтесь: все, что нам нужно, мы докажем!) Поэтому в решении задачи о лежащем цилиндре мы будем использовать формулы для расстояния от точки до гиперболы. Но для тренировки мы сначала рассмотрим вместо гиперболы параболу $y = kx^2$. (Никакой существенной разницы нет, просто для многих школьников параболы привычнее гиперболы.) И точку пока рассмотрим не произвольную, а лежащую на оси симметрии параболы.

Расстояние от точки (0; b) до параболы $y = kx^2$

Итак, найдем расстояние от данной точки $A(0; b)$ до параболы, заданной уравнением $y = kx^2$, где $k > 0$.

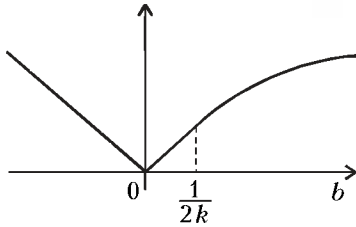


Рис.7

Что такое расстояние от точки до параболы? Это наименьшее из расстояний AM , где $M(x; kx^2)$ – точка параболы, т.е. это наименьшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{x^2 + (b - kx^2)^2}.$$

Обозначив $t = x^2$, имеем

$$f^2(x) = k^2t^2 + (1 - 2kb)t + b^2.$$

Квадратичная функция принимает свое минимальное значение в точке $t_0 = \frac{2kb - 1}{2k^2}$. При этом, как легко посчитать,

$$f^2\left(\sqrt{\frac{2kb - 1}{2k^2}}\right) = \frac{b}{k} - \frac{1}{4k^2}.$$

Впрочем, надо помнить о том, что $t = x^2 \geq 0$: если $2kb - 1 < 0$, то минимальное значение функция $f(x)$ принимает при $x = 0$. Итак,

$$\min f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{b}{k} - \frac{1}{4k^2}}, & \text{если } b > \frac{1}{2k}, \\ |b|, & \text{если } b \leq \frac{1}{2k}. \end{cases}$$

Зависимость $\min f$ от b изображена на рисунке 7.

Расстояние от точки (a; a) до гиперболы $xy = 1$

Продолжим тренировку. Рассмотрим гиперболу. Но не ту, что нам понадобится в задаче о лежащем цилиндре, а более привычную, заданную уравнением $xy = 1$. Очевидно, при $0 < a < 1$ расстояние r от точки $A(a; a)$ до гиперболы равно $(1 - a)\sqrt{2}$.

При $a > 1$ ответ более сложен. До тех пор, пока окружность с центром A и радиусом AK имеет с гиперболой только одну общую точку (рис.8), расстояние равно $AK = (a - 1)\sqrt{2}$. Но при достаточно больших a гипербола имеет с такой окружностью не одну, а три общие точки (рис.9). Расстояние от точки A до гиперболы в таком случае равно $AN < AK$.

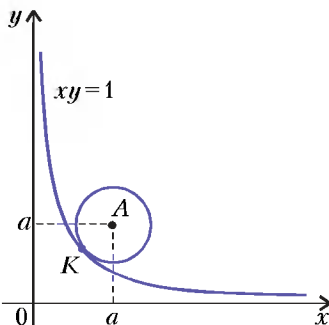


Рис.8

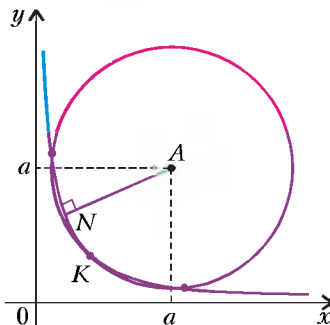


Рис.9

Узнаем, при каких a точка пересечения одна, а при каких – три. Уравнение окружности с центром A и радиусом $(a - 1)\sqrt{2}$ записать легко:

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 = 2(a - 1)^2.$$

Чтобы узнать, в скольких точках заданная этим уравнением окружность пересекает гиперболу, выясним, сколько решений имеет уравнение

$$(x - a)^2 + \left(\frac{1}{x} - a\right)^2 = 2(a - 1)^2.$$

Раскрыв скобки, запишем уравнение в виде

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2a\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4a = 2.$$

Обозначим $t = x + \frac{1}{x}$. Поскольку $t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$, исследуемое уравнение превращается в квадратное:

$$t^2 - 2at + 4a - 4 = 0.$$

Как известно, $t \geq 2$, причем значению $t = 2$ соответствует единственное значение $x = 1$, а любому $t > 2$ соответствуют два взаимно обратных значения x . Таким образом, мы должны выяснить, при каких $a > 1$ уравнение $t^2 - 2at + 4a - 4 = 0$ имеет единственное решение $t \geq 2$, а при каких – два решения.

Нам поможет то, что окружность проходит через точку K и поэтому $t = 2$ – корень уравнения. По теореме Виета, сумма корней равна $2a$, и поэтому отличный от $t = 2$ корень равен $2a - 2$. Решив неравенство

$$2a - 2 \geq 2,$$

получаем ответ: при $a > 2$ окружность и гипербола имеют три общие точки, а при $1 < a \leq 2$ – лишь одну.

Итак, при $1 < a \leq 2$ расстояние от точки A до гиперболы равно $AK = (a - 1)\sqrt{2}$. А при $a > 2$ это расстояние меньше длины отрезка AK . На сколько меньше? На этот вопрос наше рассуждение ответа не дает.

Считали, считали, а расстояние r так и не нашли. Почему? Похоже, мы делали не то, что нужно. Да. Простите нас, уважаемые читатели! Мы это так, понарошку заблудились. Вернемся же на путь истинный.

Для вычисления величины r рассмотрим расстояние

от точки $A(a; a)$ до точки $M\left(x; \frac{1}{x}\right)$:

$$\rho(x) = \sqrt{(a - x)^2 + \left(a - \frac{1}{x}\right)^2}.$$

Очевидно, r – это минимальное значение функции $\rho(x)$. Поэтому мы возведем ρ в квадрат и продифференцируем:

$$\left(\rho^2(x)\right)' = 2(x - a) + 2\left(a - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2}.$$

Приравняем производную нулю:

$$x - a + \frac{a}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 0,$$

$$x^4 - ax^3 + ax - 1 = 0,$$

$$(x^2 - 1)(x^2 - ax + 1) = 0.$$

Значения $x = \pm 1$ соответствуют точкам $(1; 1)$ и $(-1; -1)$ гиперболы. Для нахождения r осталось решить квадратное уравнение $x^2 - ax + 1 = 0$ по стандартной формуле: $x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2a}$. Значит, при $|a| < 2$ решений нет, и r – это расстояние от точки A до ближайшей из точек $(1; 1)$ и $(-1; -1)$. А при $|a| \geq 2$ величину r можно найти, подставив значение x в формулу для $\rho(x)$.

Впрочем, вычисления можно упростить. А именно,

$$r = \sqrt{a^2 - 2ax + x^2 + a^2 - \frac{2a}{x} + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{2a^2 - 2a\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2} - 2.$$

Разделив обе части уравнения $x^2 - ax + 1 = 0$ на x , находим

$$x + \frac{1}{x} = a,$$

откуда

$$r = \sqrt{2a^2 - 2a^2 + a^2 - 2} = \sqrt{a^2 - 2}.$$

Есть и другой способ. Запишем уравнение окружности с центром $A(a; a)$ и радиусом r :

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 = r^2.$$

Подставив $y = 1/x$, раскрыв скобки и выполнив замену $t = x + \frac{1}{x}$, получим

$$t^2 - 2at + 2a^2 - 2 = r^2.$$

Мы должны выяснить, при каких $a > 1$ величину r можно выбрать так, чтобы было выполнено неравенство $r < (a - 1)\sqrt{2}$ и квадратное уравнение $t^2 - 2at + 2a^2 - 2 = 0$ имело на луче $(2; +\infty)$ единственный корень t .

Это – типичная «задача с параметром». Не будем расписывать подробно ее решение, отметим только главное: должен равняться нулю дискриминант, т.е.

$$4a^2 - 4(2a^2 - 2 - r^2) = 0,$$

откуда $r = \sqrt{a^2 - 2}$. При этом значении r имеем $t = a$. А поскольку $t = x + \frac{1}{x} \geq 2$, то должно быть выполнено неравенство $a \geq 2$. Итак, расстояние r от точки $A(a; a)$ до гиперболы равно $|a - 1|\sqrt{2}$ при $0 < a \leq 2$ и равно $\sqrt{a^2 - 2}$ при $a \geq 2$.

(График функции $r(a)$ изображен на рисунке 10.)

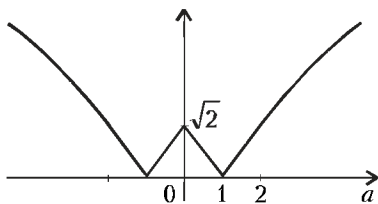


Рис.10

Упражнения

1. Пусть a и k – положительные числа. Найдите расстояние от точ-

ки а) $(a; a)$; б) $(a; -a)$ до гиперболы, заданной уравнением $xy = k$.

2. Найдите $\min_{x^2-y^2=h^2} ((a-x)^2 + y^2)$, где $a \geq h > 0$.

3. Найдите расстояние от начала координат до множества точек, заданного уравнением $x^2 - axy + y^2 = 1$, где a – данное число. (Замечание. При $|a| < 2$ уравнение $x^2 - axy + y^2 = 1$ задает эллипс, при $|a| = 2$ – пару параллельных прямых, а при $|a| > 2$ – гиперболу.)

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $x^2 + 2y^2$, если $x^2 - xy + 2y^2 = 1$.

Перпендикуляр, опущенный из точки на параболу

Расстояние от точки до прямой, как известно, измеряется по перпендикуляру. Для расстояния от точки до кривой это не всегда так: перпендикуляр² не всегда единственен (рис. 11), он не всегда является кратчайшим из от-

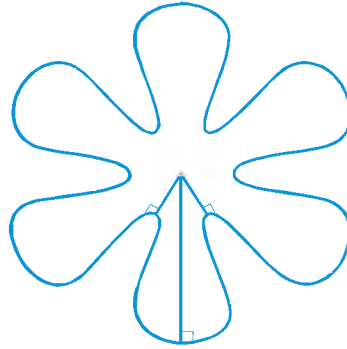


Рис.11

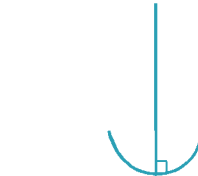


Рис.12

резков, соединяющих данную точку с точками кривой – бывает даже, что перпендикуляр является наидлиннейшим из таких отрезков (рис.12).

Как вы помните, мы решили задачу о расстоянии от точки $(0; b)$ до параболы $y = kx^2$. Если точка $(0; b)$ лежит достаточно низко (точнее, если $b \leq 1/(2k)$), то ближайшая к ней точка параболы – начало координат. Если же $b > 1/(2k)$, то это не так: окружность радиусом b с центром $(0; b)$ пересекает параболу более чем в одной точке (рис.13); из точки $(0; b)$ можно опустить на параболу не один, а три перпендикуляра.

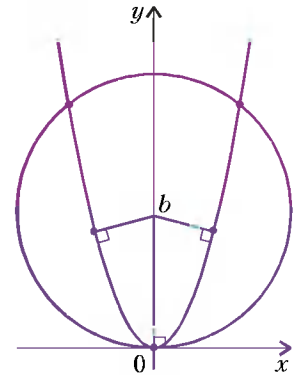


Рис.13

Полукубическая парабола – эволюта параболы

Теперь выясним, из каких точек сколько перпендикуляров можно провести к параболе $y = x^2$. (Читатель, если пожелает, легко проведет вычисления для параболы $y = kx^2$.) Для этого рассмотрим квадрат расстояния

² Перпендикуляр (иначе говоря, нормаль) к кривой в данной точке – это прямая, проходящая через данную точку и перпендикулярная касательной, проведенной в данной точке.

а точка C является пересечением касательных, проведенных в точках A и B . Если точка B будет двигаться по кривой к точке A , то C будет тоже стремиться к точке A . (Разумеется, не следует относиться к вышесказанному, как к точной теореме. Но надеемся, что идею вы уловили. А «строгость навести» будет несложно, когда изучите курс математического анализа.)

Начнем с перпендикуляров к параболе. Поскольку

$$(x^2)' = 2x$$

Рис.19

и поскольку произведение угловых коэффициентов двух взаимно перпендикулярных прямых равно -1 , то угловой коэффициент перпендикуляра, восставленного к параболе в точке $(a; a^2)$, равен $-1/(2a)$. Значит, этот перпендикуляр задан уравнением

$$y = -\frac{1}{2a}(x - a) + a^2,$$

которое можно записать в виде

$$2ay = -x + a + 2a^3.$$

Чтобы найти огибающую, рассмотрим аналогичное уравнение, в котором параметр a заменен на $a + \epsilon$, причем в дальнейшем мы устремим ϵ к нулю. (Хорошенько обдумайте эту идею! Чтобы найти огибающую, мы рассматриваем «близкие» прямые, находим точку их пересечения и переходим к пределу, превращая «близкие» прямые в, если позволено так выразиться, «бесконечно близкие».) Итак, рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} 2ay = -x + a + 2a^3, \\ 2(a + \epsilon)y = -x + a + \epsilon + 2(a + \epsilon)^3. \end{cases}$$

Вычтем первое уравнение из второго:

$$2\epsilon y = \epsilon + 6a^2\epsilon + 6a\epsilon^2 + 2\epsilon^3,$$

откуда $y = \frac{1}{2} + 3a^2 + 3a\epsilon + \epsilon^2$. Устремив ϵ к нулю, находим

$$y = \frac{1}{2} + 3a^2.$$

Подставив это значение в первое уравнение системы, имеем

$$a + 6a^3 = -x + a + 2a^3,$$

откуда

$$x = -4a^3.$$

Итак, $(x; y) = \left(-4a^3; \frac{1}{2} + 3a^2\right)$. Мы нашли огибающую для семейства нормалей (т.е. перпендикуляров) к параболе.

Упражнения

6. Убедитесь, что найденная огибающая – та самая полукубическая парабола $x^2 = \frac{8}{27}(2y - 1)^3$.

7. Прямая, заданная уравнением $2ay = -x + a + 2a^3$, где $a \neq 0$, касается в точке $\left(-4a^3; \frac{1}{2} + 3a^2\right)$ кривой, заданной уравнением $y = \frac{3}{4}x^{2/3} + \frac{1}{2}$. Докажите это.

8. Найдите уравнение огибающей семейства нормалей параболы $y = kx^2$, где $k > 0$.

Астроида

Одна из самых запоминающихся огибающих получается, если спросить, какое множество точек заметает отрезок данной длины, концы которого движутся по сторонам данного прямого угла (рис.20).

Рассмотрим отрезок AB единичной длины, концы которого лежат на осях ко-

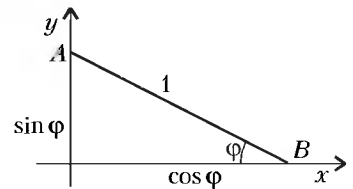


Рис.20

Рис.21

ординат (рис.21). Уравнение прямой AB написать легко: кто-то наизусть помнит так называемое «уравнение прямой в отрезках»

$$\frac{x}{\cos \phi} + \frac{y}{\sin \phi} = 1,$$

кто-то запишет уравнение в виде

$$y = \sin \phi - x \operatorname{tg} \phi.$$

Рассмотрим «близкую» прямую, заданную уравнением

$$y = \sin \psi - x \operatorname{tg} \psi.$$

(Вскоре мы устремим ψ к ϕ , а пока $\psi \neq \phi$.) Найдем точку пересечения этих двух прямых:

$$\sin \phi - x \operatorname{tg} \phi = \sin \psi - x \operatorname{tg} \psi,$$

откуда

$$x = \frac{\sin \psi - \sin \phi}{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \phi} = \frac{\sin \psi - \sin \phi}{\psi - \phi} \cdot \frac{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \phi}{\psi - \phi}.$$

Вспомнив производные синуса и тангенса, получаем: при $\psi \rightarrow \phi$ величина x стремится к $\cos^3 \phi$. Зная x , легко найти

$$y = \sin \phi - \cos^3 \phi \operatorname{tg} \phi = \sin^3 \phi.$$

Итак, $(x; y) = (\cos^3 \phi; \sin^3 \phi)$. Мы получили параметрическим образом заданную кривую, у которой есть название: *астроида*. Очевидно,

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1.$$

(Окончание следует)

а точка C является пересечением касательных, проведенных в точках A и B . Если точка B будет двигаться по кривой к точке A , то C будет тоже стремиться к точке A . (Разумеется, не следует относиться к вышесказанному, как к точной теореме. Но надеемся, что идею вы уловили. А «строгость навести» будет несложно, когда изучите курс математического анализа.)

Начнем с перпендикуляров к параболе. Поскольку

$$(x^2)' = 2x$$

Рис.19

и поскольку произведение угловых коэффициентов двух взаимно перпендикулярных прямых равно -1 , то угловой коэффициент перпендикуляра, восставленного к параболе в точке $(a; a^2)$, равен $-1/(2a)$. Значит, этот перпендикуляр задан уравнением

$$y = -\frac{1}{2a}(x - a) + a^2,$$

которое можно записать в виде

$$2ay = -x + a + 2a^3.$$

Чтобы найти огибающую, рассмотрим аналогичное уравнение, в котором параметр a заменен на $a + \epsilon$, причем в дальнейшем мы устремим ϵ к нулю. (Хорошенько обдумайте эту идею! Чтобы найти огибающую, мы рассматриваем «близкие» прямые, находим точку их пересечения и переходим к пределу, превращая «близкие» прямые в, если позволено так выразиться, «бесконечно близкие».) Итак, рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} 2ay = -x + a + 2a^3, \\ 2(a + \epsilon)y = -x + a + \epsilon + 2(a + \epsilon)^3. \end{cases}$$

Вычтем первое уравнение из второго:

$$2\epsilon y = \epsilon + 6a^2\epsilon + 6a\epsilon^2 + 2\epsilon^3,$$

откуда $y = \frac{1}{2} + 3a^2 + 3a\epsilon + \epsilon^2$. Устремив ϵ к нулю, находим

$$y = \frac{1}{2} + 3a^2.$$

Подставив это значение в первое уравнение системы, имеем

$$a + 6a^3 = -x + a + 2a^3,$$

откуда

$$x = -4a^3.$$

Итак, $(x; y) = \left(-4a^3; \frac{1}{2} + 3a^2\right)$. Мы нашли огибающую для семейства нормалей (т.е. перпендикуляров) к параболе.

Упражнения

6. Убедитесь, что найденная огибающая – та самая полукубическая парабола $x^2 = \frac{8}{27}(2y - 1)^3$.

7. Прямая, заданная уравнением $2ay = -x + a + 2a^3$, где $a \neq 0$, касается в точке $\left(-4a^3; \frac{1}{2} + 3a^2\right)$ кривой, заданной уравнением $y = \frac{3}{4}x^{2/3} + \frac{1}{2}$. Докажите это.

8. Найдите уравнение огибающей семейства нормалей параболы $y = kx^2$, где $k > 0$.

Астроида

Одна из самых запоминающихся огибающих получается, если спросить, какое множество точек заметает отрезок данной длины, концы которого движутся по сторонам данного прямого угла (рис.20).

Рассмотрим отрезок AB единичной длины, концы которого лежат на осях ко-

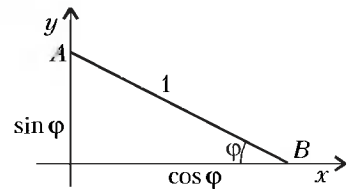


Рис.20

Рис.21

ординат (рис.21). Уравнение прямой AB написать легко: кто-то наизусть помнит так называемое «уравнение прямой в отрезках»

$$\frac{x}{\cos \phi} + \frac{y}{\sin \phi} = 1,$$

кто-то запишет уравнение в виде

$$y = \sin \phi - x \operatorname{tg} \phi.$$

Рассмотрим «близкую» прямую, заданную уравнением

$$y = \sin \psi - x \operatorname{tg} \psi.$$

(Вскоре мы устремим ψ к ϕ , а пока $\psi \neq \phi$.) Найдём точку пересечения этих двух прямых:

$$\sin \phi - x \operatorname{tg} \phi = \sin \psi - x \operatorname{tg} \psi,$$

откуда

$$x = \frac{\sin \psi - \sin \phi}{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \phi} = \frac{\sin \psi - \sin \phi}{\psi - \phi} \cdot \frac{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \phi}{\psi - \phi}.$$

Вспомнив производные синуса и тангенса, получаем: при $\psi \rightarrow \phi$ величина x стремится к $\cos^3 \phi$. Зная x , легко найти

$$y = \sin \phi - \cos^3 \phi \operatorname{tg} \phi = \sin^3 \phi.$$

Итак, $(x; y) = (\cos^3 \phi; \sin^3 \phi)$. Мы получили параметрическим образом заданную кривую, у которой есть название: *астроида*. Очевидно,

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1.$$

(Окончание следует)

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас с неизменной скоростью с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто на нее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 2002 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №6–2001» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1801» или «Ф1808». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (взлом конверта Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1804 и М1805 предлагались на XIII Международной математической олимпиаде.

Задачи М1801–М1810, Ф1808–Ф1817

М1801. Натуральное число n равно сумме некоторых трех различных натуральных делителей числа $n - 1$. Найдите все такие числа.

С.Токарев

М1802. План секретного объекта представляет собой квадрат размером 8×8 , который разбит коридорами на квадратики 1×1 . В каждой вершине такого квадратика есть переключатель. Щелчок переключателя меняет освещенность сразу всех коридоров длины 1, выходящих из этой вершины (в освещенных коридорах свет выключается, а в неосвещенных – включается). Первоначально сторож находится в левом нижнем углу полностью неосвещенного объекта. Он может ходить только по освещенным коридорам и щелкать переключателями сколько угодно раз. а) Может ли сторож перебраться в верхний левый угол, погасив при этом свет во всех коридорах? б) Найдите все вершины квадратиков, в которые сторож сможет так перебраться.

А.Шатовалов

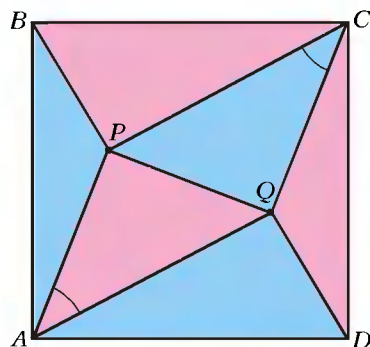


Рис.1

М1803. В квадрате $ABCD$ взяты точки P и Q такие, что $\angle PAQ = \angle QCP = 45^\circ$ (рис.1). Докажите, что суммарная площадь треугольников PAQ , PCB и QCD равна суммарной площади треугольников QCP , QAD и PAB .

В.Произволов

М1804. Докажите, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

для любых положительных чисел a , b и c .

(Южная Корея)

М1805*. В математической олимпиаде приняли участие двадцать один мальчик и двадцать одна девочка. Известно, что

- каждый из них решил не более шести задач;
- для каждого мальчика и каждой девочки найдется по крайней мере одна задача, которая была решена ими обоими.

Докажите, что найдется задача, которую решили хотя бы три мальчика и три девочки.

(Германия)

М1806. Таблица чисел размером $n \times n$ такова, что любые n чисел, указанные по одному в каждой строке и в каждом столбце, дают всегда одинаковую сумму. В каждой строке таблицы определяется минимальное число, среди этих n чисел выделяется максимальное число M . В каждом столбце таблицы определяется максимальное число, среди них выделяется минимальное число m . Докажите, что $M = m$.

В.Произволов

М1807. При каких n можно разрезать треугольник на n выпуклых многоугольников с различным числом сторон?

А.Заславский

М1808. Решите в натуральных числах следующие уравнения:

- $x! + y! = z!;$
- $(x!)(y!) = z!;$

($z!$ – произведение всех натуральных чисел, не превосходящих числа z и имеющих с ним одинаковую четность).

В. Сендеров

М1809*. Пользуясь одной линейкой, найдите центры а) двух пересекающихся окружностей; б) двух касающихся (внешним или внутренним образом) окружностей; в) двух concentрических окружностей.

И. Вайнштейн

М1810*. В каждой вершине выпуклого многогранника сходится четное число ребер. Одна грань многогранника красная, остальные – синие. Периметр каждой синей грани равен 1. Докажите, что периметр красной грани равен 1.

В. Произолов

Ф1808. Траектория точки состоит из отрезка прямой AB длиной L и полуокружности BB радиусом R , причем прямая касается окружности (рис.2).

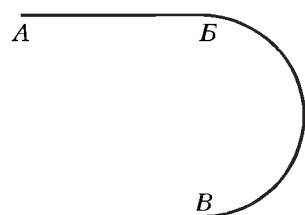


Рис.2

За какое минимальное время точка проедет из A в B ? Начальная скорость равна нулю, а ускорение все время постоянно по величине и равно a .

А. Простов

Ф1809. Три маленьких груза массой M каждый соединены тонкими легкими стержнями длиной L , образуя треугольную конструкцию ABB . Этот треугольник скользит по гладкому горизонтальному столу. В некоторый момент скорость точки A направлена вдоль AB и равна v , а скорость точки B в этот же момент параллельна BB . Найдите скорость точки B и силу натяжения стержней.

А. Старов

Ф1810. Клин массой M_1 с углом α при вершине может свободно двигаться по гладкой горизонтальной поверхности (рис.3). На нем расположен еще один клин массой M_2 с таким же углом при вершине так, что его верхняя плоская поверхность горизонтальна. Сверху на этот клин положили грузик массой m . С какой силой нужно действовать по горизонтали на нижний клин, чтобы грузик некоторое время мог оставаться неподвижным?

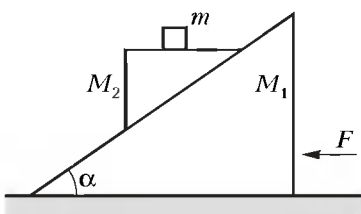


Рис.3

С какой силой нужно действовать по горизонтали на нижний клин, чтобы грузик некоторое время мог оставаться неподвижным?

З. Рафаилов

Ф1811. Анна Каренина слышит звук камертона и с удивлением понимает, что вместо ноты «ля» второй октавы звучит нота «си». Приближается поезд или удаляется? С какой скоростью? Что можно сказать о музыкальном слухе героини? Нужные данные найдите где угодно.

Л. Толстов

Ф1812. Во сколько раз отличается плотность сухого воздуха при давлении 1 атм и температуре $+20^\circ\text{C}$ от плотности влажного воздуха при тех же условиях? Пар считать насыщенным.

З. Рафаилов

Ф1813. Порция кислорода участвует в цикле, состоящем из изотермического расширения, сжатия до начального объема при неизменном давлении и нагревании до начальной температуры при постоянном объеме. Цикл длится 10 секунд, на изотерме газ получает 1000 Дж тепла, а в изобарном сжатии над ним совершается работа 700 Дж. Найдите по этим данным среднюю механическую мощность, развиваемую в цикле, и термодинамический КПД.

З. Циклов

Ф1814. Одна из квадратных пластин плоского конденсатора закреплена горизонтально и на нее помещена большая тонкая пластина из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 1$. По гладкой верхней поверхности листа диэлектрика может свободно скользить массивная вторая пластина конденсатора, имеющая такие же размеры, как и первая. На обкладки конденсатора помещены заряды Q и $-Q$, и система приведена в равновесие. Сдвинем верхнюю пластину по горизонтали на малое расстояние x параллельно одной из сторон квадрата и отпустим. Найдите период колебаний этой пластины. Площадь каждой из обкладок S , толщина диэлектрика d существенно меньше размеров пластин. Масса подвижной обкладки M .

А. Зильберман

Ф1815. Для измерения сопротивления резистора собрана схема из батарейки, амперметра и вольтметра, причем вольтметр подключен параллельно резистору и показывает 1 В, а амперметр подключен к ним последовательно и показывает 1 А. После того как приборы в схеме поменяли местами, вольтметр стал показывать 2 В, а амперметр показал 0,5 А. Считая батарейку идеальной, определите по этим данным сопротивление резистора. Хороши ли используемые приборы?

Р. Александров

Ф1816. На тороидальный сердечник, сделанный из материала с очень большой магнитной проницаемостью, намотаны очень тонким проводом две катушки – с числом витков 500 и 510. При измерении индуктивности первой из катушек на постоянном токе – по значению магнитного потока катушки при заданном токе через нее – получили величину 20 Гн. Какова индуктивность второй катушки? Какова индуктивность получится при последовательном соединении катушек? При параллельном соединении? Выводы катушек сделаны проводом большого сечения. Рассеяние магнитного потока считать малым.

А. Повторов

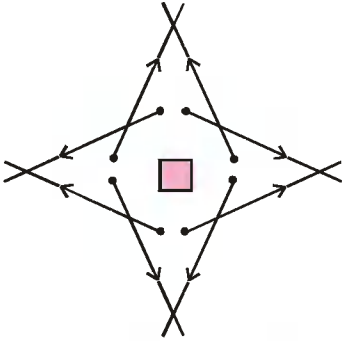
Ф1817. Искусственный хрусталик для глаза сделан так, что позволяет четко видеть удаленные предметы. В отличие от естественного хрусталика, кривизна поверхностей которого может изменяться (при этом глаз фокусируется на выбранных объектах – это называется аккомодацией глаза), искусственный хрусталик жесткий и перестраиваться не может. Оцените оптическую силу очков, дающих возможность читать книгу. Расстояние от глаза до книги принять равным примерно 0,3 м.

А. Зильберман

Решения задач М1781–М1785, Ф1793–Ф1802

М1781. Начальник охраны хочет расставить часовых вокруг лагеря так, чтобы ни к лагерю, ни к часовым нельзя было незаметно подкрасться. Каждый часовой имеет прожектор, который может освещать отрезок длиной 100 м. Сможет ли начальник исполнить свой замысел?

Ответ: да, сможет. На рисунке показан пример расположения восьми часовых, удовлетворяющий условию. Точками обозначены часовые, каждая из стрелок указывает направление, в котором смотрит часовой вдоль прожектора. В случае более сложной конфигурации лагеря (в нашем примере он изображен квадратиком) принцип расположения часовых и прожекторов такой же.



В. Клепцын

М1782. Докажите, что для любого натурального n существует лишь конечное число решений неравенства $|x! - y^y| < n$ в натуральных числах x и y .

Возможны два типа решений нашего неравенства для фиксированного натурального числа n . Первый тип: $x < y$; второй тип: $x \geq y$.

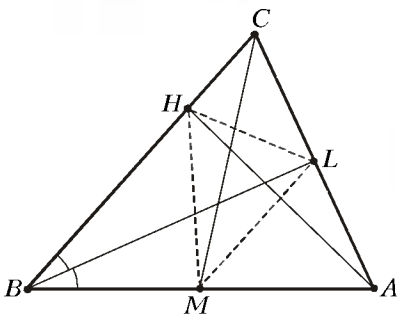
Убедимся, что решений каждого типа будет конечное количество или, как вариант, не будет вообще.

Для решений первого типа, так как $x < y$, можно записать $|x! - y^y| > |y^{y-1} - y^y| \geq y$. Но тогда, в силу условия задачи, $y < n$. Пар натуральных чисел x и y таких, что $x < y < n$, имеется лишь конечное число. А значит, число решений первого типа будет не более чем конечно.

Для решений второго типа, так как $x \geq y$, можно заметить, что число $|x! - y^y|$ делится на y . Тогда либо $|x! - y^y| = 0$, либо $|x! - y^y| \geq y$. Первый случай возможен лишь при $x = y = 1$. Во втором случае $y < n$, но для каждого такого числа y существует лишь конечное количество чисел x таких, что $|x! - y^y| < n$. Итак, число решений во всех случаях конечно.

С. Злобин

М1783. В треугольнике ABC проведены высота AH , биссектриса BL и медиана CM . Оказалось, что треугольник HML равнобедренный. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.



Напомним, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине и, наоборот,

если медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный. Медиана MH прямоугольного треугольника ABH (см. рисунок) равна половинам гипотенузы BM и MA , а также отрезкам HL и LM , так как стороны треугольника HLM равны. В треугольнике ABL медиана ML равна половине стороны AB , поэтому угол ALB прямой и в треугольнике ABC биссектриса BL является высотой. Следовательно, треугольник ABC равнобедренный ($AB = BC$) и BL является также медианой: $AL = LC$. Значит, LH – медиана прямоугольного треугольника AHC , поэтому $AC = 2LH = 2ML = AB$. Итак, $AB = BC = AC$, что и требовалось доказать.

Р. Женодаров

М1784. На доске записаны все целые числа от 1 до 2000. а) Наугад стирают 998 чисел. Докажите, что среди оставшихся чисел можно указать несколько (не менее двух) так, что их сумма тоже имеется на доске. б*) Наугад стирают 89 чисел. Докажите, что среди оставшихся можно указать 20 чисел так, что их сумма тоже имеется на доске. Останутся ли справедливы утверждения, если стереть еще одно число?

а) Обозначим оставшиеся на доске числа:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{1001} < a_{1002}.$$

Рассмотрим две строго возрастающие последовательности чисел в промежутке от 1 до 2000:

$$(1) a_2 < a_3 < \dots < a_{1001} < a_{1002},$$

$$(2) a_2 - a_1 < a_3 - a_1 < \dots < a_{1001} - a_1 < a_{1002} - a_1.$$

В обеих последовательностях содержится $1001 + 1001 = 2002$ числа. Эти числа не могут быть все различными, так как в промежутке от 1 до 2000 всего имеется 2000 различных чисел. Следовательно, существует пара равных чисел, по одному из каждой последовательности: $a_k = a_p - a_1$. Таким образом, среди чисел на доске имеются три числа a_1 , a_k и a_p такие, что $a_1 + a_k = a_p$.

С другой стороны, если первоначально стереть 999 наименьших чисел, то среди оставшихся 1001 чисел сумма двух наименьших $1000 + 1001 = 2001$ уже превышает наибольшее число на доске.

б) Обозначим оставшиеся на доске числа:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{1910} < a_{1911}.$$

1. Покажем, что $a_i \leq 89 + i$ для каждого $i = 1, 2, 3, \dots, 1911$. Действительно,

$$a_{1911} - a_i = (a_{1911} - a_{1910}) +$$

$$+ (a_{1910} - a_{1909}) + \dots + (a_{i+1} - a_i) \geq 1 + 1 + \dots + 1 = 1911 - i.$$

Следовательно,

$$2000 \geq a_{1911} \geq a_i + 1911 - i \text{ и } 89 + i \geq a_i.$$

2. Убедимся, что $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{19} \leq a_{1972}$. На самом деле,

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{18} \leq (89 + 1) + (89 + 2) + \dots + (89 + 18) =$$

$$= 1773 \leq (a_{1792} - a_{1791}) +$$

$$+ (a_{1791} - a_{1790}) + \dots + (a_{20} - a_{19}) = a_{1792} - a_{19},$$

т.е. $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{19} \leq a_{1792}$.

3. Теперь мы уже готовы к рассмотрению двух числовых последовательностей, как в решении задачи а). Итак, рассмотрим две строго возрастающие последовательности чисел в промежутке от 1 до 2000:

- (1) $a_{20} < a_{21} < \dots < a_{1911}$,
- (2) $a_{1793} - S < a_{1794} - S < \dots < a_{1911} - S$, где $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{19}$.

В обеих последовательностях содержится $1892 + 119 = 2011$ чисел. Эти числа не могут быть все различными, так как в промежутке от 1 до 2000 всего имеется 2000 различных чисел. Следовательно, существует пара равных чисел, по одному из каждой последовательности: $a_k = a_p - S$. Таким образом, среди чисел на доске имеется 21 число $a_1, a_2, \dots, a_{19}, a_k$ и a_p такие, что $a_1 + a_2 + \dots + a_{19} + a_k = a_p$.

С другой стороны, если первоначально вычеркнуть 90 наименьших чисел, то сумма двадцати наименьших оставшихся чисел $91 + 92 + \dots + 110 = 2010$ уже превышает наибольшее число на доске.

Ф.Шлейфер

M1785. Остров разделен на княжества.

- а) Каждое княжество представлено на карте острова равносторонним треугольником. Докажите, что для правильной раскраски карты достаточно двух красок.
- б*) Каждое княжество представлено на карте равнобедренным прямоугольным треугольником. Докажите, что для правильной раскраски карты достаточно четырех красок.

(Раскраска является правильной, если всякие два княжества, имеющие общий участок границы, окрашены в разные цвета.)

а) Остров – это многоугольник, который разрезан на равносторонние треугольники. Можно считать, что у каждого из них есть горизонтальная сторона.

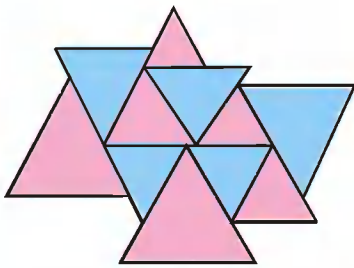


Рис.1

При этом сам треугольник может находиться выше своей горизонтальной стороны (тогда это треугольник первого типа) или ниже своей горизонтальной стороны (тогда это треугольник второго типа). Важно, что два треугольника

одного типа не могут иметь общего участка границы. Поэтому можно закрасить треугольники первого типа красным цветом, а треугольники второго типа – синим цветом и таким образом получить правильную раскраску карты (рис.1).

б) Остров – это многоугольник, составленный из равнобедренных прямоугольных треугольников.

На плоскости расположения многоугольника проведем прямую S , параллельную какой-либо стороне многоугольника. Нарисуем два квадрата $ABCD$ и $KLMN$ с центрами Q и H так, что сторона одного и диагональ другого параллельны S (рис.2). Диагонали разделяют каждый квадрат на четыре равнобедренных прямоугольных треугольника так, что всего их восемь.

Ввиду построения можно утверждать, что каждый треугольник карты гомотетичен одному из полученных восьми

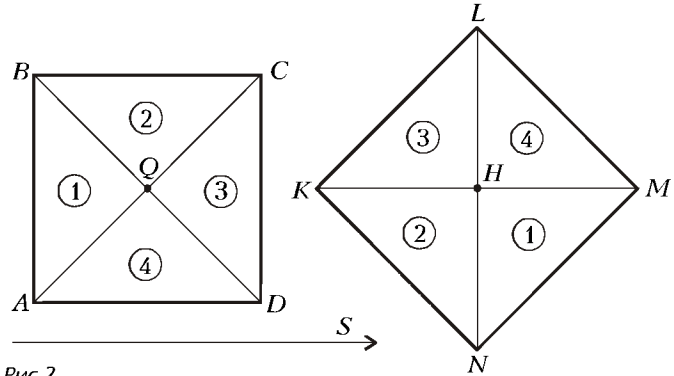


Рис.2

треугольников.

Разделим все равнобедренные прямоугольные треугольники карты на четыре типа. К первому типу отнесем треугольники, гомотетичные треугольнику QAB или треугольнику HMN , ко второму – гомотетичные QBC или HNK , к третьему – гомотетичные QCD или HKL и к четвертому – гомотетичные QDA или HML .

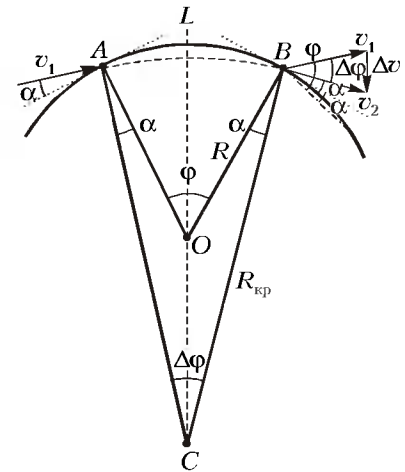
Осталось все треугольники одного типа закрасить одной из четырех красок так, чтобы треугольники разных типов были закрасены разными красками. Раскраска будет правильной, ибо два различных треугольника одного типа не имеют общего участка границы.

В.Произволов

Ф1793. Снаряд вылетел из ствола орудия под углом $\alpha = 3^\circ$ со скоростью $v = 10000$ м/с. Оцените, на каком расстоянии L от орудия он упадет на Землю. Сопротивлением воздуха и вращением Земли при расчете пренебречь.

Скорость снаряда $v = 10$ км/с больше первой космической скорости ($v_{1к} \approx 8$ км/с) и лишь немного меньше второй ($v_{2к} \approx 11,2$ км/с). Поэтому снаряд будет двигаться по сильно вытянутому эллипсу, большая полуось которого значительно больше радиуса Земли $R \approx 6400$ км, и ударится о Землю *позади* орудия. Рассчитать такой эллипс – сложная задача, но в данном случае это делать не обязательно.

Сосредоточим всю массу Земли в ее центре и рассмотрим траекторию снаряда. Из симметрии расположения эллипса относительно Земли следует, что угол падения снаряда на Землю равен углу возвышения орудия $\alpha = 3^\circ$. Ясно, что если бы Земля не мешала, то снаряд пролетел бы по участку траектории, проходящему «внутри Земли» (участок AB на рисунке). Поскольку начальная скорость снаряда велика, а угол возвышения орудия мал, этот участок эллипса внутри Земли близок к прямой линии, а градусная мера Φ дуги, лежащей между точками нахождения орудия и падения



снаряда, мала. Тогда в первом приближении можно считать, что «внутри Земли» снаряд летит по прямой с постоянной скоростью v , а $\varphi \approx 2\alpha$. Таким образом, искомого расстояние равно

$$L = R\varphi \approx 2R\alpha.$$

Так как $2\alpha = 6^\circ \approx 0,1$ рад, то

$$L \approx 0,1 \cdot 6400 \text{ км} \approx 640 \text{ км}.$$

Можно попытаться оценить величину L другим, более точным, способом, учитывая силу притяжения снаряда к центру Земли. После падения снаряд будет двигаться по участку траектории «внутри Земли» и пролетит его с почти постоянной по величине скоростью за время $\Delta t \approx L/v$. За это время вектор скорости повернется на угол $\Delta\varphi = \varphi - 2\alpha$ (см. рисунок), причем этот поворот возникает из-за действия силы притяжения Земли на снаряд во время его полета «внутри Земли». Поскольку сила притяжения почти перпендикулярна скорости, приращение скорости снаряда равно $\Delta v \approx v\Delta\varphi \approx g\Delta t \approx gL/v$. Таким образом,

$$\Delta\varphi \approx \frac{gL}{v^2} \approx \frac{L}{R} - 2\alpha,$$

откуда

$$L \approx \frac{2\alpha R}{1 - \frac{gR}{v^2}} \approx 1780 \text{ км}. \quad (*)$$

Отметим, что вычисление по этой формуле дает результат, который очень близок к точному значению $L \approx 1859$ км (итог численного расчета для полета снаряда по эллиптической траектории при $g = 10 \text{ м/с}^2$, $R = 6400$ км).

Формулу (*) можно получить и другим способом. Небольшой участок траектории, проходящий «внутри Земли», на всем своем протяжении имеет приблизительно одинаковый радиус кривизны $R_{\text{кр}}$ (см. рисунок). Его можно найти из условия примерного равенства вблизи поверхности Земли центростремительного ускорения снаряда $v^2/R_{\text{кр}}$ и ускорения свободного падения g , откуда

$$R_{\text{кр}} \approx \frac{v^2}{g} = 10^7 \text{ м} = 10000 \text{ км}.$$

Если из центра кривизны S данного участка траектории провести два радиуса кривизны – в точку падения A и в точку вылета B снаряда, то векторы скоростей снаряда \vec{v}_1 и \vec{v}_2 в этих точках будут перпендикулярны проведенным радиусам. Углы между этими радиусами SA и SB и радиусами Земли OA и OB , проведенными из центра Земли O в те же точки, будут равны α , так как первые перпендикулярны векторам скорости, а вторые – касательным к поверхности Земли. Поскольку угол ASB равен углу поворота вектора скорости $\Delta\varphi$, а угол $\varphi/2$ является внешним углом для треугольника AOC , то

$$\frac{\varphi}{2} = \alpha + \frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Замечая, что

$$R\varphi \approx R_{\text{кр}}\Delta\varphi \approx \frac{v^2}{g}\Delta\varphi,$$

находим

$$\varphi = 2\alpha + \frac{gR}{v^2}\varphi,$$

откуда

$$\varphi = \frac{2\alpha}{1 - \frac{gR}{v^2}},$$

и для $L = R\varphi$ получаем прежнюю формулу (*).

А.Андрюанов

Ф1794. По гладкой горизонтальной поверхности скользит гантелька – легкий жесткий стержень длиной L , на концах которого закреплены точечные массы M и $2M$. В некоторый момент скорость легкого конца равна по величине v , а скорость тяжелого конца в два раза больше. Какой может быть сила натяжения стержня при движении гантельки?

Стол гладкий – поэтому центр масс гантельки движется с постоянной скоростью и угловая скорость вращения тоже остается постоянной. Для вычисления силы натяжения стержня нужна только угловая скорость, а поступательное движение гантельки несущественно. Проекция мгновенных скоростей концов гантельки на стержень должны быть одинаковы – это единственное условие, которое обязательно должно выполняться. Самая большая угловая скорость получается в том случае, когда скорости концов перпендикулярны гантельке и направлены в противоположные стороны, а самая маленькая – при том же условии, но одинаково направленных скоростях. Это легко объяснить, например, для первого случая. Пусть одна из скоростей направлена не под прямым углом к стержню. Тогда придется «повернуть» и скорость другого конца – при этом угловая скорость уменьшится. А теперь – простой расчет. Максимальная угловая скорость равна $\omega_1 = 3v/L$, сила натяжения составляет

$$F_{\text{max}} = M\omega_1^2 \cdot \frac{2L}{3} = \frac{6Mv^2}{L}.$$

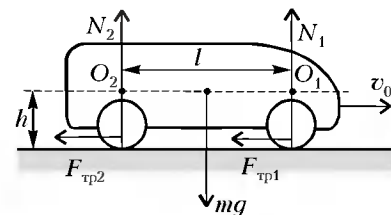
Минимальная угловая скорость в 3 раза меньше, а сила натяжения меньше, соответственно, в 9 раз:

$$F_{\text{min}} = \frac{F_{\text{max}}}{9} = \frac{2Mv^2}{3L}.$$

З.Рафаилов

Ф1795. Центр тяжести спортивного автомобиля находится на равных расстояниях от передних и задних колес. Если при торможении зажимать колодками только задние колеса, то длина тормозного пути оказывается L_1 , если только передние – то L_2 (при той же начальной скорости автомобиля). Найдите длину тормозного пути в том случае, когда колодками зажимают и передние и задние колеса.

Пусть центр масс автомобиля расположен на высоте h относительно полотна дороги, а расстояние между осями передних и задних колес равно l (см. рисунок). Для случая торможения задними колесами запишем уравнение мо-



ментов относительно точки O_1 :

$$N_2 l - \frac{mgl}{2} + \mu N_2 h = 0,$$

откуда

$$N_2 = \frac{mg}{2(1 + \mu h/l)}.$$

Работа силы трения при этом равна

$$A_1 = \mu N_2 L_1 = \frac{\mu mg L_1}{2(1 + \mu h/l)}.$$

Аналогично, при торможении передними колесами запишем уравнение моментов относительно точки O_2 :

$$\frac{mgl}{2} - N_1 l + \mu N_1 h = 0,$$

или

$$N_1 = \frac{mg}{2(1 - \mu h/l)}.$$

Работа сил трения в этом случае равна

$$A_2 = \mu N_1 L_2 = \frac{\mu mg L_2}{2(1 - \mu h/l)}.$$

При торможении всеми четырьмя колесами

$$mg = N_1 + N_2 \text{ и } A_3 = \mu(N_1 + N_2)L_3 = \mu mg L_3.$$

Поскольку

$$\frac{mv_0^2}{2} = A_1 = A_2 = A_3,$$

окончательно получаем

$$L_3 = \frac{L_1 + L_2}{4}.$$

В.Слободянин

Ф1796. На гладком горизонтальном столе находится куб из пенопласта массой $M = 40$ г. В него попадает ледяная пуля массой $m = 10$ г, летящая перед ударом горизонтально со скоростью $v = 100$ м/с. Должно быть, у пули центр тяжести был смещенным – она вылетела через верхнюю грань куба, причем канал на выходе при осмотре оказался перпендикулярным верхней плоскости куба. Пуля после вылета не долетела до потолка. Считая начальные температуры пули и куба равными 0°C , оцените массу растаявшего льда.

Из условия про недолет до потолка следует, что скорость пули на выходе никак не более нескольких метров в секунду (исходя из оценки высоты потолка относительно верхней плоскости стола), поэтому энергетической долей вертикального движения пули явно можно пренебречь (наши оценки довольно грубые). Из закона сохранения горизонтальной составляющей импульса найдем скорость движения куба u (а пуля движется по горизонтали с такой же скоростью):

$$u = \frac{mv}{m + M} = 20 \text{ м/с}.$$

Начальная кинетическая энергия системы составляет

$$\frac{mv^2}{2} = 50 \text{ Дж},$$

а после вылета пули –

$$\frac{(m + M)u^2}{2} = 10 \text{ Дж}.$$

В тепло переходит разница – примерно 40 Дж. Трудно сказать, как распределится это тепло между пенопластовым кубом и ледяной пулей. Учитывая малую теплопроводность и низкую плотность пенопласта, разумно предположить, что «львиная» доля выделившегося тепла пойдет на плавление пули, в этом случае масса растаявшего льда составит

$$\frac{40 \text{ Дж}}{330 \text{ Дж/г}} \approx 0,1 \text{ г}.$$

Более точный расчет просто не имеет смысла.

А.Простов

Ф1797. В сосуд, заполненный воздухом под давлением $p_0 = 1$ атм при температуре $t_0 = -23^\circ\text{C}$, поместили маленькую лединку, после чего герметично его закрыли. Затем сосуд нагрели до температуры $t_1 = 227^\circ\text{C}$, и оказалось, что давление в нем повысилось до $p_1 = 3$ атм. Какова будет относительная влажность воздуха в сосуде после его охлаждения до температуры $t_2 = 100^\circ\text{C}$?

Процессы нагревания и охлаждения сосуда происходят при постоянном объеме. Поэтому давление в сосуде при температуре T_1 может быть найдено по формуле

$$p_1 = p_0 \frac{T_1}{T_0} + p_{\text{воды}},$$

где $p_{\text{воды}}$ – давление паров воды при температуре T_1 . При записи этого соотношения мы воспользовались законом идеальных газов (для воздуха), а также учли, что давление паров воды при температуре T_0 пренебрежимо мало по сравнению с давлением p_0 и что давление смеси газов равно сумме их парциальных давлений. Отсюда находим

$$p_{\text{воды}} = p_1 - p_0 \frac{T_1}{T_0} = 1 \text{ атм},$$

что явно ниже давления насыщенных паров воды при температуре $t_1 = 227^\circ\text{C}$. Следовательно, при охлаждении от температуры t_1 до температуры $t_2 = 100^\circ\text{C}$ давление паров воды также останется меньше давления насыщенных паров воды при температуре t_2 , равного $p_{\text{п2}} = 1$ атм. Для нахождения давления паров воды при этой температуре применим закон идеальных газов:

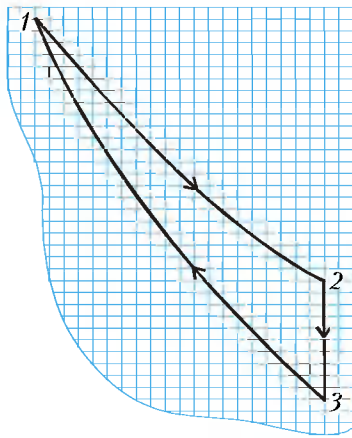
$$p_{2\text{воды}} = p_{1\text{воды}} \frac{T_2}{T_1} = \left(p_1 - p_0 \frac{T_1}{T_0} \right) \frac{T_2}{T_1} = 0,746 \text{ атм}.$$

Тогда относительная влажность воздуха в сосуде будет равна

$$\varphi = \frac{p_{2\text{воды}}}{p_{\text{п2}}} = \frac{(p_1 T_0 - p_0 T_1) T_2}{T_0 T_1 p_{\text{п2}}} = \frac{0,746 \text{ атм}}{1 \text{ атм}} = 74,6\%.$$

М.Семенов

Ф1798. Говорят, что в архиве лорда Кельвина нашли обрывок рукописи, на котором был изображен замкнутый цикл для $\nu = 1$ моль гелия в координатах p, V (см. рисунок). Цикл состоял из изотермы 1–2, изохоры 2–3 и адиабаты 3–1. КПД данного цикла $\eta =$



$= 0,125$. Масштаб по оси объема: 1 дел = $= 0,5$ л, по оси давления: 1 дел = $5 \cdot 10^3$ Па. Найдите объем газа в изохорическом процессе. На рисунке ось давления вертикальна, а ось объема горизонтальна.

По определению, КПД цикла равен

$$\eta = \frac{A}{Q_+},$$

где A – работа газа за цикл, Q_+ – полученное количество теплоты за цикл. Для данного цикла

$$A = A_T + A_V + A_Q = A_T + A_Q,$$

где A_T – работа газа в изотермическом процессе, $A_V = 0$ – работа газа в изохорическом процессе, A_Q – работа газа в адиабатическом процессе. Очевидно, что

$$Q_+ = A_T.$$

Следовательно,

$$\eta = \frac{A}{A_T} = \frac{A_T + A_Q}{A_T} = 1 + \frac{A_Q}{A_T} = 1 + \frac{A_Q}{A - A_Q}.$$

Работа, совершаемая газом за данный цикл, равна площади, ограниченной линиями 1–2–3–1:

$$A \approx \left(81 + \frac{1}{2} \cdot 70 \right) \text{ ед.} = 116 \text{ ед.} = 290 \text{ Дж}$$

(1 ед. = $5 \cdot 10^3$ Па · $5 \cdot 10^{-4}$ м³ = 2,5 Дж). При этом погрешность численного определения A не более 5 ед. Работа газа на адиабатическом участке равна, с противоположным знаком, изменению внутренней энергии на участке 3–1:

$$A_Q = -C_V(T_1 - T_3) = -\frac{3}{2}R(T_2 - T_3) = -\frac{3}{2}V_2(p_2 - p_3).$$

Из рисунка

$$p_2 - p_3 = 5 \cdot 10^4 \text{ Па.}$$

Тогда для искомого объема окончательно получаем

$$V_2 = \frac{2}{3} \frac{1 - \eta}{\eta} \frac{A}{p_2 - p_3} = (27 \pm 1) \text{ л.}$$

А.Шеронов

Ф1799. Два очень длинных параллельных медных проводника расположены на расстоянии 1 м друг от друга.

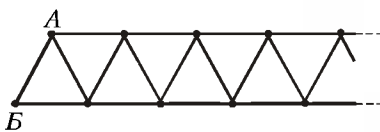


Рис.1

Они соединены перемычками из такого же провода, причем соседние перемычки составляют углы 60° друг с другом и с проводами (рис.1). Считая сопротивление 1 метра провода равным 1 Ом, найдите сопротивление, измеренное между точками А и В.

Считая сопротивление 1 метра провода равным 1 Ом, найдите сопротивление, измеренное между точками А и В.

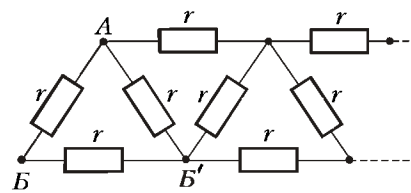


Рис.2

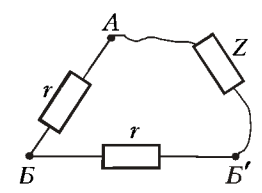


Рис.3

Перерисуем схему, заменяя для наглядности куски провода резисторами (рис.2). Сопротивление одного такого резистора составляет $r = 2/\sqrt{3}$ Ом. Видно, что часть цепи справа от точек А и В' совершенно такая же, как исходная цепь АВ (рис.3). Обозначив ее сопротивлением буквой Z, получим

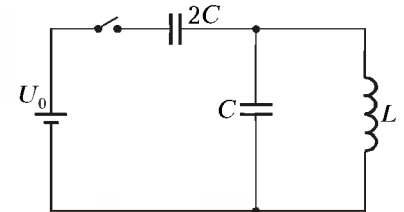
$$R_{AB} = Z = \frac{(r+Z)r}{r+Z+r} = \frac{(r+Z)r}{Z+2r},$$

откуда

$$Z = \frac{\sqrt{5}-1}{2}r = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}} \text{ Ом} \approx 0,71 \text{ Ом.}$$

М.Учителев

Ф1800. Параллельный колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L (см. рисунок). Последовательно с контуром включен конденсатор емкостью $2C$. К концам получившейся цепочки в некоторый момент подключают батарейку напряжением U_0 . Найдите максимальное значение силы тока через катушку и максимальное напряжение на конденсаторе емкостью C . Сопротивление проводов невелико, элементы цепи можно считать идеальными.



Колебания в цепи медленно затухают. Максимальные значения тока катушки и напряжения конденсатора емкостью C достигаются в течение первого периода колебаний, в дальнейшем эти максимумы станут меньше, но при расчете этих величин потерями энергии будем пренебрегать.

В тот момент, когда ток катушки максимален, значение ЭДС индукции нулевое, следовательно, напряжение конденсатора емкостью C , подключенного параллельно катушке, также равно нулю. Это означает, что конденсатор емкостью $2C$ заряжен до напряжения батарейки U_0 и его заряд составляет $Q = 2CU_0$. Тогда работа батарейки равна $A = QU_0$, и баланс энергий имеет вид

$$QU_0 = \frac{2CU_0^2}{2} + \frac{LI^2}{2}.$$

Отсюда находим максимальный (и минимальный – если взять значение со знаком минус) ток:

$$I = U_0 \sqrt{\frac{2C}{L}}.$$

Сумма напряжений конденсаторов все время остается постоянной, поэтому максимальное напряжение конден-

сатора емкостью C достигается в тот момент, когда напряжение конденсатора емкостью $2C$ минимально. Но это означает, что мгновенные значения токов конденсаторов равны нулю, а следовательно, и ток катушки в этот момент также нулевой. Обозначим максимальное напряжение конденсатора емкостью C через U , тогда заряд конденсатора емкостью $2C$ в этот момент равен $Q = 2C(U_0 - U)$, а батарейка к этому моменту совершит работу $A = QU_0$. Запишем баланс энергий:

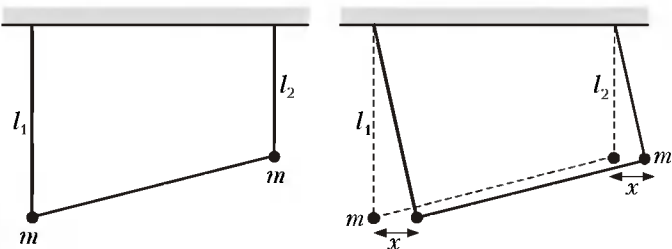
$$QU_0 = \frac{CU^2}{2} + \frac{2C(U_0 - U)^2}{2}.$$

Отсюда

$$U = U_0 \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

А.Зильберман

Ф1801. Два груза массой m каждый подвешены к горизонтальному потолку с помощью двух невесомых и нерастяжимых нитей длиной l_1 и l_2 соответственно (рис.1). Грузы соединены легким жестким стержнем. В положении равновесия нити вертикальны. Определите период малых колебаний системы в плоскости рисунка.



При малых колебаниях можно в первом приближении считать, что грузы смещаются в горизонтальном направлении на одинаковую величину x , так как соединяющий их стержень жесткий (рис.2). Высота поднятия каждого из грузов равна

$$y_{1,2} = l_{1,2} - l_{1,2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{l_{1,2}^2}} \approx \frac{x^2}{2l_{1,2}}.$$

Поэтому потенциальная энергия системы грузов равна

$$E_p = mg(y_1 + y_2) = \frac{mg}{2} \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) x^2.$$

Скорости грузов в первом приближении одинаковы:

$$v_{1,2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_{1,2}}{dt}\right)^2} \approx \frac{dx}{dt} \sqrt{1 + \frac{x^2}{l_{1,2}^2}} \approx \frac{dx}{dt} = v.$$

Поэтому кинетическая энергия системы равна

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mv^2.$$

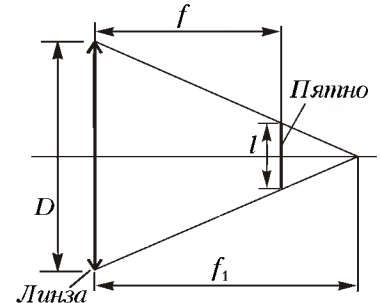
Известно, что если потенциальная энергия системы равна $kx^2/2$, а кинетическая равна $Mv^2/2$, то период колеба-

ний равен $2\pi\sqrt{M/k}$. Поэтому в нашем случае период малых колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{mg\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)}} = 2\pi \sqrt{\frac{2l_1 l_2}{g(l_1 + l_2)}}.$$

Р.Компанеец

Ф1802. Фотографию Буратино – вид спереди, расстояние до аппарата 1 м – делают при помощи простого фотоаппарата с фокусным расстоянием объектива 5 см. На фотографии глаза оказались точно «в фокусе», а вот кончик носа получился размытым. До какого диаметра нужно радиационировать объектив, чтобы сделать четкой всю фотографию? У Буратино нос «морковкой», он перпендикулярен плоскости лица и имеет длину 30 см. На упаковке пленки загадочная надпись: «400 линий на миллиметр».



Найдем по формуле линзы расстояние f от линзы до фотопластинки:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \quad f = \frac{dF}{d - F}.$$

Теперь найдем расстояние f_1 от линзы до изображения кончика носа Буратино:

$$f_1 = \frac{d_1 F}{d_1 - F},$$

причем $d_1 = d - L$, где L – длина носа. Из подобия треугольников (см. рисунок) получим

$$\frac{l}{D} = \frac{f_1 - f}{f_1} = \frac{Fl}{(d - L)(d - F)} = \frac{0,05 \cdot 0,3}{(1 - 0,3)(1 - 0,05)} = 0,023.$$

Если попытаться использовать все возможности фотопленки, размер зерна которой равен примерно $1/400$ мм, то пятно не должно быть больше этой величины. Тогда диаметр открытой части линзы составит 0,1 мм – это неподходящая величина, поскольку при этом сильно проявятся дифракционные эффекты, да и длительность съемки придется сделать очень большой.

Обойдемся требованиями поскромнее: при размерах кадра 24 на 36 мм вполне допустимо размытие на 0,05 – 0,1 мм, а это дает диаметр открытой части линзы 2–4 мм, что уже вполне реально.

Р.Александров

Ἐὶ ἱεὸδοῖν εἰ ἀίε Ἀ. Ἰ. Νὰ ἀεῖ ἰὰ «Математика 6–8»

Μὴ завершаемочереднойконкурспорешениюматематическихзадачдляучащихся6–8классов.Решения задачвысылайтев течениемесяцапослеполученияэтого номеражурналапо адресу: 117296Москва, Ленинскийпроспект,64-А, «Квант»(спометкой«Конкурс«Математика6–8»).Незабудьтеуказатьимя,класс идомашнийадрес.

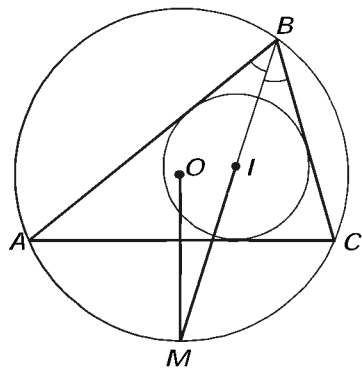
Каки прежде,мыприветствуемучастиенетолькоотдельныхшкольников,ноиматематическихкружков.Руководителейкружковпросимуказатьэлектронныйадресиликонтактныйтелефон.

16. Придумайте два пятизначных числа a и b таких, что если к числу b слева приписать число a , то получится десятизначное число, делящееся на ab .

Д. Карпов, В. Сендеров

17. Даны последовательные натуральные числа $1, 2, \dots, n$, где $n \geq 3$. При каких n из них можно выбрать два числа, произведение которых вдвое больше суммы всех остальных чисел?

И. Акулич



18. Точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC , M — середина дуги AC описанной окружности (не содержащей B). Докажите, что $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$ тогда и только тогда, когда $MI = MO$.

В. Сендеров

19. На некотором острове проживают 1000

туземцев, каждый из которых либо всегда лжет, либо всегда говорит правду. Прибывший на остров новый губернатор может раз в день выбрать любую группу островитян и спросить каждого из выбранных, сколько лжецов находится в данной группе. (Каждый островитянин про каждого из остальных знает, является тот лжецом или нет.)

За какое наименьшее число дней губернатор заведомо может выяснить, кто из островитян лжец, а кто правдивый, если ему известно, что не все островитяне лжецы?

Е. Барабанов

20. Зал размером 90×90 метров разделен на квадратные комнаты размером 10×10 метров. В каждой из стен между двумя соседними комнатами имеется дверь (а в наружной стене зала дверей нет). Какое наибольшее число дверей можно открыть, чтобы в каждой комнате оказались открытыми не более

- а) одной двери;
- б) двух дверей;
- в) трех дверей?

И. Акулич

За одним столом с Плутархом

Α. ἸΒΘΑΕΤΑ

Античный писатель и историк ПЛУТАРХ, автор знаменитых «Сравнительных жизнеописаний» — биографий выдающихся греков и римлян, родился в маленьком городке Херонее и прожил там всю жизнь. Но это не значит, что достойный гражданин пребывал в своем городе безвыездно. Напротив, он много путешествовал и был знаком со многими выдающимися людьми. Вот и сейчас он гостит у афинского философа Аммония, своего бывшего учителя.

...Уже давно минул полдень, но солнце все еще безжалостно палит, словно пытается растопить городские мостовые, стены и крыши домов. На улицах Афин в эту пору мало кого встретишь еще и потому, что подошло время обеда. В одном из домов за обеденным столом собрались друзья и родственники Аммония: его сын Трасилл, бывший ученик Плутарх, Бозт — друг Плутарха и Аристокдем — гость с Кипра. Присоединимся к ним и мы, став гостями незримиыми и безмолвными.

Здесь необходимо пояснить, какое значение придавали обеду люди античности. Если к обоим завтракам житель Эллады или Рима относился без должного внимания, легко закусывая утром и перехватывая кое-что в середине дня, то обед для него значил нечто большее, чем просто прием пищи. Как-то одному римлянину пришлось отобедать в одиночестве. «Сегодня я поел, но не пообедал», – сказал он после. Эти слова многое проясняют. Обеденная трапеза для людей античности – это прежде всего совместное времяпрепровождение.

Собирались обычно то у одного, то у другого участника дружеской компании. Те граждане, которым было не по карману принимать у себя гостей и которые предпочитали обедать у более богатых знакомых, звались параситами (сотрапезниками). Разумеется, подобная привычка не могла снискать уважения ее обладателю. Постепенно слово «парасит» приобретает уничижительное значение и, утратив свое благородное написание, превращается в более знакомого нам «паразита».

Начинаясь около половины третьего дня, обед продолжался до позднего вечера, пока гости не расходились спать. Чем заполнялись долгие часы застолья, зависело от уровня культуры собравшихся. У хозяев попроще пирующие развлекались пением, разгадыванием загадок, на худой конец – игрой в кости. У людей с более высокими запросами на пиру исполнялись стихи, выступали музыканты и актеры. Если собирались люди с философским складом ума (как в нашем случае), то застолье и впрямь походило на современный научный симпозиум (это слово и происходит от греческого «пиршество»). Главной в нем была беседа на темы из самых разных областей человеческого знания, от литературных до естественнонаучных, а вовсе не яства, подаваемые к столу. *«Ведь воспоминания об удовольствии, полученном от еды и питья, заключают в себе нечто низменное, да к тому же и зыбки, подобно быстро улетающемуся запаху, а философские проблемы и рассуждения не только радуют самих вспоминающих, всегда оставаясь с ними, но и позволяют им приобщать к этим отрадным воспоминаниям также и тех, кто их слушает, – так писал сам Плутарх в предисловии к книге «Застольные беседы», объясняя причины, побудившие его взяться за этот труд. – Так теперь любознательным читателям столь же доступно участие в сократических¹ беседах, как и самим тем, кто вел их некогда за столом симпозиа».*

Итак, мы находимся у дома Аммония. Но что это? Кажется, где-то рядом выкрикнули: «Аммоний, Аммоний!» Немногочисленная группа собралась перед ступенями большого дома, шумя и выкрикивая имя его хозяина. Скопление граждан объясняется просто: Аммоний в этом году исполняет обязанности стратега (военачальника), и у них есть, похоже, какое-то дело к нему. Пока слуги пытаются утихомирить собравшихся и выяснить причину их появления, взбежим по ступе-

ням и нырнем в открытый дверной проем. Внезапно обступившая нас темнота после сияния солнечного дня могла бы совершенно сбить с толку, если бы впереди не виднелся конец коридора, светящийся дневным светом. Направляясь туда, попадаем в пря-

¹ Сократические беседы – по имени древнегреческого философа Сократа, славившегося своим искусством вести беседы.

моугольное помещение, более всего похожее на внутренний дворик, окруженный с четырех сторон крытой колоннадой. Сквозь отверстие в потолке льется дневной свет, а дверные проемы в стенах ведут в боковые комнаты. В одной из них виден край стола, заставленного различными блюдами. Нам, пожалуй, сюда.

Вас, вероятно, удивит вид участников симпозиума, развалившихся на массивных ложах, с трех сторон окружающих стол, но таков обычай обедов античности – есть не сидя, а полулежа на боку. На головах сотрапезников лавровые венки – неперемное условие застолья.

– Что там за шум? – недовольно спрашивает слугу Аммоний, подразумевая собравшихся у входа. Тот объясняет в чем дело. – Скажи им, чтобы расходились. На сегодня все дела закончены, – говорит хозяин и снова поворачивается к гостям, все еще досадуя на беспокойных сограждан, прервавших мерное течение симпозиума.

– Интересно, – задал вопрос собравшимся Трасилл после того, как слуга удалился, – почему мы, находясь в закрытом помещении, хорошо слышим наружные голоса, а наши собственные голоса не проникают наружу?

– Ответ на этот вопрос ты можешь найти у Аристотеля, – прервал сына Аммоний, – а вот что действительно требует объяснения, так это то, почему в ночное время звуки становятся сильнее и приобретают бóльшую чистоту и отчетливость.

Некоторое время гости молчали, потом заговорил Бэот:

– Когда я учился геометрии, то пользовался изначальными положениями, принимая их в качестве так называемых постулатов. Теперь я воспользуюсь тем, что уже доказано Эпикуром²: все в мире состоит из атомов, которые движутся в пустоте. Когда воздух разлит в широком пространстве и отдельные частицы имеют большой пробег, то рассеянные атомы занимают много места, заполняя все промежутки. Когда же воздух сгущается, то атомы, стекаясь в одно место, оставляют в другом пустоты. Именно это и происходит в ночное время вследствие охлаждения. Звук, наталкиваясь на множество тесно расположенных тел, приглушается, испытывая множество отражений и задержек, а на пустом, свободном от атомов промежутке, голос достигает уха не ослабляясь. Вот что, по-моему, делает ночное время более способствующим распространению звука. Пусть только никто не отвергает моих первых положений.

Да, вот пример, когда на основании верных положений об устройстве мира, выдвинутых Эпикуром и Демокритом, можно рассуждениями совершенно запутать дело. Ведь если следовать Бэоту, то именно в

дневное время, когда воздух разрежен, он наименее сопротивляется распространению звука. Если же атомы воздуха собираются ночью в одном месте, оставляя пустоты в остальном пространстве, то остается удивляться везению Бэота, умудрившегося прожить столько ночей, ежеминутно рискуя умереть от удущья. А главное, каким образом воздух – проводник звука – стал первой помехой ему? Впрочем, кажется, и Плутарх имеет что-то возразить своему другу:

– Пусть остаются в силе, дорогой Бэот, твои первые положения, придающие такое важное значение пустоте. Но вы, эпикурейцы, не правы, считая пустоту условием сохранения и движения звука. Ведь тому, что недоступно ни осязанию, ни удару, свойственна тишина и покой, а звук – это удар звучащего тела. Передатчиком звука может быть только нечто равноприродное звучащему телу, но легкоподвижное, однородное и способное отвечать ударам звучащего тела благодаря своей упругости и непрерывности; именно таков воздух.

– Поэтому, – продолжал Плутарх, – я отклоняю предложенное объяснение и обращаюсь к Анаксагору³: он говорит, что солнце сообщает воздуху дрожательное и колебательное движение, обнаруживаемое в движениях плавающих в солнечных лучах малых пылинок и пушинок. Как полагает Анаксагор, они днем, производя свистящий шум, приглушают остальные звуки, а ночью их движение и производимый шум затихает.

– А по-моему, – вступил Трасилл, как только Плутарх закончил говорить, – причина этого отчасти зависит от нас самих. Говорить ночью нам приходится обычно в обстановке некоторой встревоженности, и это побуждает нас вкладывать в свое произношение больше силы.

Оставим на время наших героев, чтобы разобраться в этом многообразии мнений. Объяснение, предложенное Плутархом, не столь уж фантастично и напоминает современные представления о тепловом шуме, возникающем вследствие случайных перепадов давления воздуха, т.е. флуктуаций. Но эффект этот слишком мал, чтобы объяснить рассматриваемое явление. Однако интересен сам способ рассуждения Бэота и Плутарха, основанный на рассмотрении физических моделей, – настолько он похож на современный. Иногда кажется, что нас и не разделяют тысячелетия. Трасилл же все сводит к психологическим причинам. А действительно, существует ли эффект усиления звука ночью или это лишь следствие уменьшения шумов, производимых животными и человеком? Оказывается, существует, но для его объяснения нам потребуется ряд сведений из науки о звуке (акустики):

- Воздух является средой-переносчиком звука.
- Звук от точечного источника распространяется в виде сферических волн с центром в месте нахождения источника (подобно тому, как расходятся круги вокруг брошенного в воду камня).

² Эпикур – древнегреческий философ, последователь Демокрита, выдвинувшего идею об атомах – мельчайших неделимых частицах.

³ Анаксагор – тоже древнегреческий философ.

- Скорость звука не бесконечна.
- Скорость звука зависит от температуры воздуха: в более теплом воздухе звук распространяется быстрее.

Любопытно, что из этих четырех утверждений первые три можно найти в античных учебниках по архитектурной акустике. Так что наши собеседники располагали почти всем необходимым для решения обсуждаемой проблемы, за исключением только очень важного последнего пункта.

Теперь запасемся некоторыми сведениями из физики атмосферы. Чем же, собственно, отличается ночной воздух от дневного? Оказывается, дело не в том, что в темное время суток воздух холоднее (это и не всегда верно), а в том, как температура воздуха распределена по высоте. Днем лучи света, почти не поглощаясь атмосферой, нагревают землю, а от нее нагреваются и нижние слои воздуха. В результате устанавливается так называемое *нормальное* распределение температуры по высоте: воздух становится все более холодным по мере удаления от поверхности земли. Ночью же земная поверхность остывает и перестает быть источни-

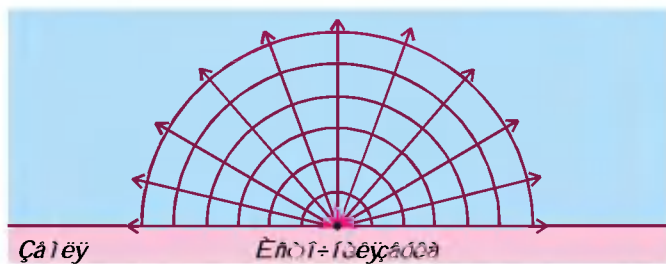


Рис. 1

ком тепла; теплый воздух, как более легкий, поднимается вверх, холодный опускается к земле и уже не может нагреться. Устанавливается *инверсное* (перевернутое, обратное) распределение температур, когда с высотой температура воздуха увеличивается.

Теперь посмотрим, как состояние околосреднего слоя атмосферы влияет на распространение звука. На рисунке 1 показано, как выглядели бы волновые поверхности, если бы температура воздуха была везде одинаковой. Звук распространяется с одинаковой скоростью во всех направлениях, и волновые поверхности представляют собой правильные полусферы, изображаемые на рисунке такими же правильными полуокружностями.

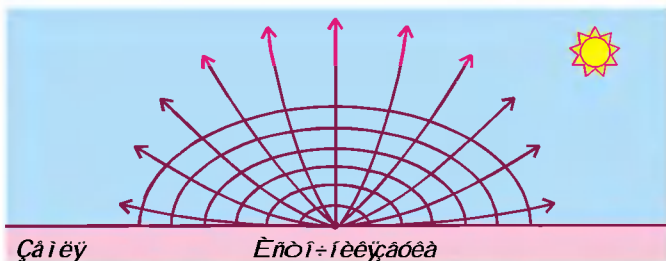


Рис. 2

Картина распространения звука в светлое время суток представлена на рисунке 2. В слоях воздуха, более близких к земле, скорость звука выше, и те части волновой поверхности, которые движутся в приземном слое, успевают удалиться на большее расстояние от источника, чем те, чей путь лежит в более холодных высотных слоях. В результате первоначальная сферическая форма волн искажается, полуокружности на рисунке превращаются в дуги, вытянутые



Рис. 3

вдоль горизонтальной оси. Направление распространения звука в каждой точке перпендикулярно волновой поверхности и изображается на рисунке красными линиями. Линии эти при удалении от источника отклоняются от прямого пути, и основная часть звуковой энергии уходит от поверхности земли ввысь.

Обратную картину мы наблюдаем ночью (рис.3). Теперь участки волнового фронта, движущиеся в приповерхностном слое, удаляются от источника на меньшее расстояние. Волновые поверхности оказываются вытянутыми в вертикальном направлении, а линии, характеризующие распространение звука, загнуты вниз.

Если мы проследим дальнейший ход одной такой

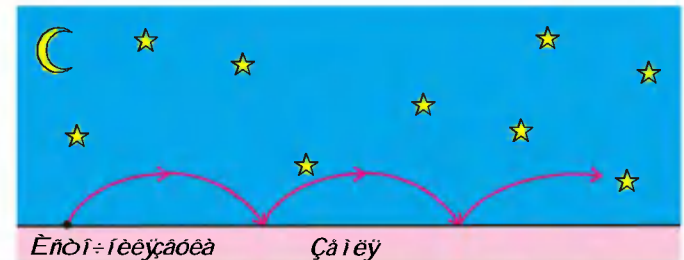


Рис. 4

линии (рис.4), то увидим, как, отразившись от земли, она снова опишет в воздухе дугу, чтобы снова отразиться от поверхности... и так далее до полного затухания звука. Звук голоса «стелется» вдоль земли, распространяясь как бы по воздушному каналу.

То же самое происходит и над водной поверхностью, где также возникает инверсное распределение температур. Именно поэтому звук далеко разносится по реке или по озеру.

Вот как объясняется явление, вызвавшее оживленное обсуждение за столом у Аммония.

Физика 9–11

Публикуемая ниже заметка «Сухое трение» предназначена девятиклассникам, заметка «Костры в попе и русская баня» – десятиклассникам и «Свист поезда и свет галактик» – одиннадцатиклассникам.

Сухое трение

И.СЛОБОДЕЦКИЙ

ПОЧЕМУ ПРИ РЕЗКОМ ТОРМОЖЕНИИ АВТОМОБИЛЬ заносит? Почему скрипит плохо смазанная дверь? Почему движущийся равномерно смычок заставляет звучать скрипичную струну? Все это объясняется свойствами сил трения, о которых и пойдет речь в этой статье.

С трением мы сталкиваемся на каждом шагу. Вернее было бы сказать, что без трения мы и шагу ступить не можем. Но несмотря на ту большую роль, которую играет трение в нашей жизни, до сих пор не создана достаточно полная картина возникновения трения. Это связано даже не с тем, что трение имеет сложную природу, а скорее с тем, что опыты с трением очень чувствительны к обработке поверхности и поэтому трудно воспроизводимы.

Вот пример. Английский физик Гарди исследовал зависимость силы трения между стеклянными пластинками от температуры. Он тщательно обрабатывал пластинки хлорной известью и обмывал их водой, удаляя жиры и загрязнения. Трение увеличивалось с температурой. Опыт был повторен много раз, и каждый раз получались примерно одни и те же результаты. Но однажды, моя пластинки, Гарди протер их пальцами – трение перестало зависеть от температуры. Протерев пластинки, Гарди, как он сам считал, удалил с них очень тонкий слой стекла, изменивший свои свойства из-за взаимодействия с хлоркой и водой.

Когда говорят о трении, различают три несколько различных физических явления: сопротивление при движении тела в жидкости или газе – его называют жидким трением; сопротивление, возникающее, когда тело скользит по какой-нибудь поверхности, – трение скольжения, или сухое трение; сопротивление, возникающее при качении тела, – трение качения. Эта статья посвящена сухому трению.

Первые исследования трения, о которых мы знаем, были проведены Леонардо да Винчи примерно 500 лет назад. Он измерял силу трения, действующую на деревянные параллелепипеды, скользящие по доске, причем, ставя бруски на разные грани, определял зависимость силы трения от площади опоры. Но работы Леонардо да Винчи стали известны уже после того, как классические законы трения были вновь открыты французскими учеными Амонтоном и Кулоном в 17–18 веках. Вот эти законы:

1) Величина силы трения F прямо пропорциональна величине силы нормального давления N тела на поверхность, по которой движется тело, т.е. $F = \mu N$, где μ – безразмерный коэффициент, называемый коэффициентом трения.

2) Сила трения не зависит от площади контакта между поверхностями.

3) Коэффициент трения зависит от свойств трущихся поверхностей.

4) Сила трения не зависит от скорости движения тела.

Триста лет дальнейших исследований трения подтвердили правильность трех первых законов, предложенных Амонтоном и Кулоном. Неверным оказался лишь последний – четвертый. Но это стало ясно много позже, когда появились железные дороги и машинисты заметили, что при торможении состав ведет себя не так, как предсказывали инженеры.

Амонтон и Кулон объясняли происхождение трения довольно просто. Обе поверхности неровные – они покрыты небольшими горбами и впадинами. При движении выступы цепляются друг за друга, и поэтому тело все время поднимается и опускается. Для того чтобы втащить тело на «холм», к нему нужно приложить определенную силу. Если выступ больше, то и сила нужна побольше. Но это объяснение противоречит одному очень существенному явлению: на преодоление трения тратится энергия. Так, кубик, скользящий по горизонтальной поверхности, рано или поздно останавливается. А поднимаясь и опускаясь, тело не тратит своей энергии. Или вспомните аттракцион «Американские горки». Когда санки скатываются с горки, их потенциальная энергия переходит в кинетическую, и скорость санок возрастает, а когда санки въезжают на новую возвышенность, кинетическая энергия, наоборот, переходит в потенциальную. Энергия санок уменьшается за счет трения, но не из-за подъемов и спусков. Аналогично обстоит дело и при движении одного тела по поверхности другого. Здесь потери энергии на трение также не могут быть связаны с тем, что выступы одного тела «взбираются» на бугры другого.

Есть еще возражения. Например, простые опыты по измерению силы трения между полированными стеклянными пластинками показали, что при улучшении полировки поверхности сила трения сначала не меняется, а затем возрастает, а не убывает, как следовало бы ожидать на основании модели явления, предложенной Амонтоном и Кулоном.

Механизм трения значительно более сложен. Обсудим такую модель. Из-за неровностей поверхностей они касаются друг друга только в отдельных точках на вершинах выступов. Здесь молекулы соприкасающихся тел подходят на расстояния, соизмеримые с расстоянием между молекулами в самих телах, и сцепляются. Образуется прочная связь, которая рвется при нажмем на тело. При движении тела связи постоянно возникают и рвутся. При этом возникают колебания молекул. На эти колебания и тратится энергия.

Площадь действительного контакта обычно порядка тысяч квадратных микронов. Она практически не зависит от размеров тела и определяется природой поверхностей, их обработкой, температурой и силой нормального давления. Если на тело надавить, то выступы сминаются, и площадь действительного контакта увеличивается. Увеличивается и сила трения.

При значительной шероховатости поверхностей большую роль в увеличении силы трения начинает играть механическое зацепление между «холмами». Они при движении сминаются, и при этом тоже возникают колебания молекул.

Теперь понятен опыт с полированными стеклянными пластинками. Пока поверхности были «грубые», число контактов было невелико, а после хорошей полировки оно возросло. Можно привести еще пример увеличения трения с улучшением поверхности. Если взять два металлических

бруска с чистыми полированными поверхностями, то они слипаются. Трение здесь становится очень большим, так как площадь действительного контакта велика. Силы молекулярного сцепления, которые ответственны за трение, превращают два бруска в монолит.

Рассмотренная нами модель трения довольно груба. Мы не останавливались здесь на диффузии молекул, т.е. на проникновении молекул одного тела в другое, на роли электрических зарядов, возникающих на соприкасающихся поверхностях, на механизме действия смазки. Эти вопросы во многом неясны, а объяснения спорны. Можно только удивляться тому, что при такой сложности трение описывается столь простым законом: $F = \mu N$. И хотя коэффициент трения μ не очень постоянен и несколько меняется от одной точки поверхности к другой, для многих поверхностей, с которыми мы часто сталкиваемся в технике, можно делать достаточно хорошие оценки ожидаемой силы трения.

Сухое трение имеет одну существенную особенность: наличие трения покоя. В жидкости или газе трение возникает только при движении тела, и тело можно сдвинуть, приложив к нему даже очень маленькую силу. Однако при сухом трении тело начинает двигаться только тогда, когда проекция приложенной к нему силы \vec{F} на плоскость, касательную к поверхности, на которой лежит тело, станет больше некоторой величины (рис. 1).

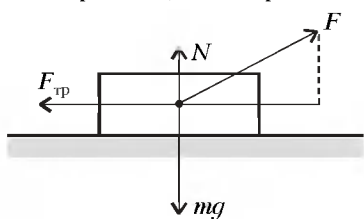


Рис. 1

Пока тело не начало скользить, действующая на него сила трения равна касательной составляющей приложенной силы и направлена в противоположную сторону. При увеличении приложенной силы сила трения тоже

возрастает, пока не достигает максимальной величины, равной μN , при которой начинается скольжение. Дальше сила трения уже не меняется.

Часто об этом забывают при решении задач. На вопрос, какая сила трения действует на стол массой 30 кг, стоящий на полу, если коэффициент трения равен 0,4, большинство уверенно отвечает: 120 Н, что неверно. Сила трения равна нулю – иначе стол поехал бы в сторону действия силы трения, так как других горизонтальных сил нет.

Итак, если тело покоится, то, для того чтобы сдвинуть его с места, к телу нужно приложить силу, большую максимальной возможной силы трения покоя, которая обусловлена прочностью молекулярных связей. А как обстоит дело, если тело уже движется? Какую силу нужно приложить для того, чтобы тело начало двигаться еще и в другом направлении? Оказывается, сколь угодно малую. Связано это как раз с тем, что сила трения не может быть больше максимальной силы трения покоя.

Попробуйте проделать простой опыт. Возьмите книжку и положите ее одним краем на другую книжку потолще. Получится наклонная плоскость. Теперь положите на эту плоскость спичечный коробок, к которому привязана нитка. Если коробок скользит, то уменьшите наклон плоскости, взяв книжку-подставку потоньше. Потяните за нитку коробок вбок. При этом он поедет еще и вниз! Уменьшите наклон плоскости и опять потяните за нитку. Та же картина. Коробок соскальзывает даже при очень малых углах наклона плоскости. Сила трения, раньше удерживавшая коробок на плоскости, стала почему-то очень маленькой.

Постараемся понять, в чем здесь дело. Если бы коробок двигался только горизонтально, то параллельно ребру на-

клонной плоскости на него действовала бы сила трения, равная μN . Для того чтобы коробок при этом не соскальзывал вниз, вверх на него должна действовать сила трения, равная по величине проекции силы тяжести коробка на наклонную плоскость. Равнодействующая этих двух сил трения больше μN , а этого быть не может. Значит, коробок должен соскальзывать с наклонной плоскости.

Теперь представим себе такую ситуацию. Возьмем брусок, привяжем к нему нить и, положив брусок на горизонтальную плоскость, будем тянуть за нить с постоянной скоростью v_1 (рис. 2). Приложив к бруску силу, перпендикулярную \vec{v}_1 , его можно заставить двигаться еще и в этом направлении с постоянной скоростью \vec{v}_2 .

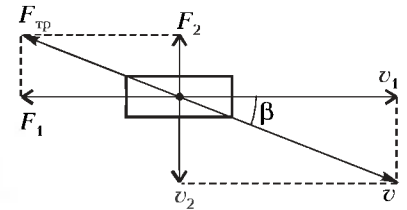


Рис. 2

Сила трения при этом будет равна μN и направлена противоположно скорости \vec{v} движения бруска относительно плоскости ($\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$).

Разложим силу трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ на две составляющие – по направлению скоростей \vec{v}_1 и \vec{v}_2 :

$$F_1 = F_{\text{тр}} \cos \beta, \quad F_2 = F_{\text{тр}} \sin \beta,$$

где β – угол между векторами \vec{v}_1 и \vec{v} , а $\text{tg} \beta = v_2/v_1$. Составляющая \vec{F}_1 силы трения уравнивает силу натяжения нити, а составляющая \vec{F}_2 – «бокковую» силу, приложенную к бруску. Так как

$$\sin \beta = \frac{\text{tg} \beta}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \beta}},$$

то

$$F_2 = F_{\text{тр}} \frac{v_2/v_1}{\sqrt{1 + (v_2/v_1)^2}} = F_{\text{тр}} \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

Если $v_2 \ll v_1$, то угол β мал и $\sin \beta \approx \text{tg} \beta$. В этом случае

$$F_2 = F_{\text{тр}} \text{tg} \beta = \mu N \frac{v_2}{v_1},$$

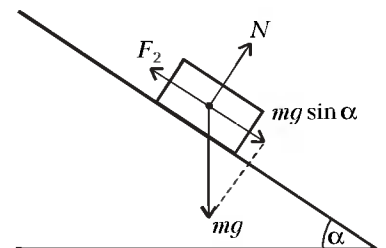
и составляющая силы трения, препятствующая движению бруска «вбок», оказывается пропорциональной скорости этого движения. Картина получается такой, как при малых скоростях в случае жидкого трения. А это означает, что брусок, движущийся в некотором направлении, можно заставить двигаться еще и в перпендикулярном направлении сколь угодно малой силой.

Любопытный вывод можно теперь сделать относительно коробка, равномерно движущегося по наклонной плоскости (рис. 3). Здесь $F_2 = mg \sin \alpha$, а $N = mg \cos \alpha$ (m – масса коробка, α – угол наклона плоскости к горизонту). Поэтому

$$mg \sin \alpha = \mu mg \cos \alpha \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}},$$

откуда

$$v_2 = v_1 \frac{\text{tg} \alpha}{\sqrt{\mu^2 - \text{tg}^2 \alpha}}.$$



Это справедливо, конеч- Рис. 3

но, лишь при $\operatorname{tg} \alpha < \mu$, так как при больших углах наклона плоскости к горизонту коробок уже не удерживается на плоскости силой трения. При малых углах наклона плоскости к горизонту (таких, что $\operatorname{tg} \alpha \ll \mu$)

$$v_2 = v_1 \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu},$$

т.е. скорость соскальзывания коробка пропорциональна скорости его движения параллельно ребру наклонной плоскости и тангенсу угла наклона плоскости к горизонту.

Явление, о котором шла речь, встречается довольно часто. Например, известно, что при резком торможении электродвигателя ремень передачи часто соскальзывает со шкивов. Происходит это потому, что при торможении двигателя ремень начинает проскальзывать относительно шкивов, и достаточно небольшой силы, чтобы сдвинуть ремень вбок. Так как обычно имеется небольшой перекокс в установке шкивов и ремня, то такой силой является составляющая силы натяжения ремня.

Вот еще примеры. Когда хотят вытащить гвоздь из стенки без помощи клещей, его сгибают и тащат, поворачивая одновременно вокруг оси. По той же причине при резком торможении автомобиль теряет управление и машину «заносит»: колеса скользят по дороге, а за счет неровностей дороги возникает боковая сила.

Остановимся теперь на последнем законе Амонтона – Кулона: сила трения не зависит от скорости тела. Это не совсем так.

Вопрос о зависимости силы трения от скорости имеет очень важное практическое значение. И хотя эксперименты здесь связаны со многими специфическими трудностями, они оказываются использованием полученных сведений – например, в теории резания металлов, в расчетах движения пули и снарядов в стволе и т.д.

Обычно считают, что, для того чтобы сдвинуть тело с места, к нему нужно приложить большую силу, чем для того, чтобы тащить тело. В большинстве случаев это связано с загрязнениями поверхностей трущихся тел. Так, для чистых металлов такого скачка силы трения не наблюдается. Опыты с движением пули в стволе показали, что с увеличением скорости пули величина силы трения сначала быстро убывает, потом она уменьшается все медленнее, а затем (при скоростях больше 100 м/с) начинает возрастать. График

зависимости силы трения от скорости показан на рисунке 4. Грубо это можно объяснить тем, что в месте контакта выделяется много тепла. При скоростях порядка 100 м/с температура в месте контакта может достигать нескольких тысяч градусов, и между поверхностями образуется слой расплавленного металла – трение становится жидким. А при больших скоростях сила жидкого трения пропорциональна квадрату скорости.

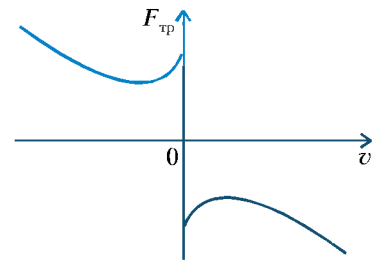


Рис. 4

Интересно, что примерно такую же зависимость от скорости имеет сила трения смычка о струну. Именно поэтому мы можем слушать игру на смычковых инструментах – скрипке, виолончели, альте.

При равномерном движении смычка струна увлекается им и натягивается. Вместе с натяжением струны увеличивается сила трения между смычком и струной. Когда величина силы трения становится максимально возможной, струна начинает проскальзывать относительно смычка. Если бы сила трения не зависела от относительной скорости смычка и струны, то, очевидно, отклонение струны от положения равновесия не изменялось бы. Но при проскальзывании трение уменьшается, поэтому струна начинает двигаться к положению равновесия. При этом относительная скорость струны увеличивается, а это еще уменьшает силу трения. Когда же струна, совершив колебание, движется в обратном направлении, ее скорость относительно смычка уменьшается, смычок опять захватывает струну, и все повторяется сначала. Так возбуждаются колебания струны. Эти колебания незатухающие, поскольку энергия, потерянная струной при ее движении, каждый раз восполняется работой силы трения, подтягивающей струну до положения, при котором струна срывается.

Этим можно и закончить статью о сухом трении – явлении, природу которого мы еще не понимаем достаточно хорошо, но умеем описывать с помощью законов, выполняющихся с удовлетворительной точностью. Это дает нам возможность объяснять многие физические явления и делать необходимые расчеты.

Костры в поле и русская баня

А.СТАСЕНКО

*Только окутает ночь всю землю росистой влагою,
Как остывает земля и смыкается сразу плотнее;
И потому из себя, как бы сжатая чьей-то рукою,
Весь свой запас семян огневых выжимает в источник,
Делая влагу его испарений горячей на ощупь.*

Лукреций

КОГДА ПРИХОДИТ ОСЕНЬ С ЕЕ НОЧНЫМИ ЗАМОРОЗКАМИ, а урожай еще не убран, в полях и садах с вечера

жгут дымные костры. Зачем? Неужто для того, чтобы за счет тепловыделения согреть воздух? Но, как известно, теплый воздух поднимается вверх – что же в таком случае достанется овощам и фруктам? Явно причина такого преднамеренного задымления в чем-то другом. И это другое связано с *фазовыми превращениями*.

Каждый знает (или может легко убедиться), что для испарения воды нужно затрачивать определенную энергию (чайник ставят на печь), а при конденсации пара ту же энергию нужно отводить (для чего делают охлаждаемые змеевики). Далее, известно, что с повышением температуры растет количество водяного пара, который может содержаться в воздухе (в тропических лесах «душно», а в зимние морозы «дышится легко»), – иначе говоря, с ростом температуры растет давление насыщенного пара. Используя физические таблицы, можно построить график этой зависимости. На рисунке 1 приведены соответствующие кривые для воды и для основных компонентов воздуха – азота и кислорода.

(Продолжение см. на с. 34)

...или ни один предмет никуда не перемещается по природе, или, если это происходит, нет пустоты.

Аристотель

Всю, самое по себе, составляют природу две вещи: Это, во-первых, тела, во-вторых же, пустое пространство, Где пребывают они и где двигаться могут различно.

Тит Лукреций Кар

Многие говорили, что пустоты не существует, другие – что она существует, но Природа испытывает к ней отвращение, и что создание такой пустоты требует усилий.

Эванджелиста Торричелли

Если впоследствии возникнут какие-либо иные взгляды на состояние или свойства (пустого) пространства, то их нужно будет увязать со свойствами того, что мы называем

пустым пространством сейчас в соответствии с данными опытами.

Майкл Фарадей

Несомненно, что межпланетное и межзвездное пространства не суть пространства пустые, но заняты материальной субстанцией или телом, самым обширным и, надо думать, самым однородным, как это только нами известно.

Джеймс Клерк Максвелл

Проблема точного описания вакуума, по моему мнению, является основной проблемой, стоящей в настоящее время перед физиками. В самом деле, если вы не можете описать вакуум, то как можно рассчитывать на правильное описание чего-то более сложного?

Поль Дирак

А так ли хорошо знаком вам Вакуум?

Наш традиционный вопрос в данном случае удивительным образом созвучен тому, что был задан Мефистофелем Фаусту в знаменитой трагедии Гете: «Достаточно ли знаком ты с пустотой?» В нем – отражение интереса к одному из самых фундаментальных научных понятий, интереса, как свидетельствуют эпитафии, проявившегося еще на заре возникновения научного знания и по сей пору тревожащего умы крупнейших мыслителей и ученых.

Немало трудов, имевших заголовки типа «Новые опыты с пустотой...», посвящались попыткам получить и исследовать вакуум. Но помимо чисто технических усилий добиться в земных условиях как можно более «пустого» пространства, т.е. отсутствия вещества, исследователей волновал вопрос – а что же собой представляет то, что «осталось»? И действительно, идеальная в житейском понимании пустота, как выяснилось, обладает целым рядом поразительных свойств, влияя буквально на все, что в нее «погружено».

Этот так называемый физический вакуум (по современным представлениям) сыграл определяющую роль в образовании Вселенной; он содержит неис-

числимы запасы энергии. Вакуум словно вспыхивает на короткое время рождающимися полями, кипит появляющимися на ничтожные мгновения парами виртуальных элементарных частиц. Вместо пустого «ничего» мы, благодаря ученым, обрели сложнейшее и насыщенное «нечто», таящее в себе еще множество загадок.

Не слишком ли сложна эта тема для «Калейдоскопа»? Разумеется, нет, поскольку с вакуумом мы невольно сталкиваемся с первых же шагов в изучении физики. Вспомните, например, выражения «торричеллиева пустота», «в отсутствие сопротивления воздуха», «на планете, лишенной атмосферы», «хорошо откачанная лампа» и так далее. Полагаем, что после небольших усилий эти шаги станут более уверенными, и вскоре вы сможете ответить на каверзный вопрос, как Фауст ответил Мефистофелю: «Дух пустоты, надеюсь, схвачен мной».

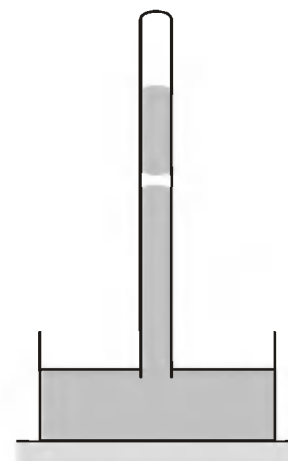
Вопросы и задачи

1. Куда направлено ускорение снаряда после вылета из ствола орудия, если сопротивлением воздуха: а) можно пренебречь; б) нельзя пренебречь?

2. Полый запаянный стеклянный шар уравновешен на весах гирей и помещен под колокол воздушного насоса. Сохранится ли равновесие, если выкачать из-под колокола воздух?

3. Удастся ли опыт Торричелли, если барометрическую трубку со ртутью поставить открытым концом в чашку не со ртутью, а с водой?

4. При постановке опыта Торричелли в столбике ртути оказался пузырек воздуха. Будет ли изменяться объем этого пузырька при изменении атмосферного давления?

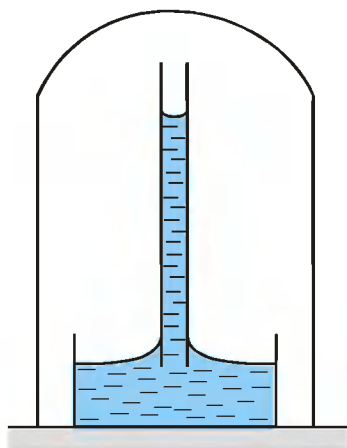


5. Трубку ртутного барометра подвесили к динамометру. Что покажет динамометр?

6. Будут ли действовать в безвоздушном пространстве поршневые жидкостные насосы?

7. Под колоколом воздушного насоса стоит банка с водой, а в ней имеется пузырек воздуха. Будет ли изменяться объем пузырька при откачивании воздуха? Температура постоянна.

8. Капилляр опущен в сосуд с жидкостью, давлением паров которой можно пренебречь. Сосуд с капилляром находится в вакууме под колоколом воздушного насоса. Что можно сказать о давлении внутри жидкости в капилляре на какой-либо высоте от уровня жидкости в сосуде?



9. При всяких ли условиях газ заполняет весь предоставленный ему объем?

10. Для чего между стенками термоса создают вакуум?

11. Каким путем передает Солнце тепло Земле и другим планетам?

12. Всегда ли будет остывать тело, помещенное в вакуум (например, в космосе)?

13. Теплоизолированный сосуд откачан до глубокого вакуума. В некоторый момент открывают кран, и сосуд заполняется окружающим его одноатомным идеальным газом. Будет ли изменяться температура газа в сосуде по мере его заполнения?

14. В стенке сосуда с разреженным газом сделано малое отверстие. Как будет изменяться температура газа в сосуде при вытекании газа в вакуум?

15. Космонавт, находясь на по-

верхности Луны, вскрыл ампулу, заполненную водой. Что произойдет с водой?

16. Может ли звук сильного взрыва на Луне быть слышен на Земле?

17. Как изменялось бы с течением времени напряжение зажигания газосветной трубки на Луне или на какой-нибудь планете, лишённой атмосферы?

18. Зачем в электронно-лучевых и рентгеновских трубках, а также в ускорителях элементарных частиц создают высокий вакуум?

19. В некоторую точку пространства приходят два когерентных луча с определенной геометрической разностью хода. Изменится ли результат интерференции лучей, если опыт перенести из вакуума в воду или стекло?

20. С чем связана способность электронов обгонять свет в некоторых веществах (эффект Вавилова – Черенкова)?

Микроопыт

Поднесите ладонь руки к электрической лампе накаливания, не прикасаясь к ней. При включении лампы на короткое время рука сразу же ощутит тепло. Однако, погасив лампу, вы обнаружите, что ее стеклянный баллон не успел нагреться. Как же тепло от раскаленной нити передалось руке?

Любопытно, что

...по умозаключениям Аристотеля, в пустоте все тела падали бы на землю с одинаковыми скоростями, но так как пустота невозможна, то скорость падения должна быть пропорциональна весу тела. На этот так называемый закон Аристотеля опирались вплоть до работ Галилея и Ньютона.

...экспериментируя с «пустотой», Герике использовал изобретенный им воздушный насос, с помощью которого поставил множество оригинальных опытов и доказал, к примеру, что в безвоздушном пространстве гибнут птицы и животные, что помещенный в откачанный сосуд колокольчик перестает звенеть, что воздух занимает весь предостав-

ленный ему объем и так далее.

...достижимый в лабораторных условиях вакуум – отнюдь не абсолютная пустота, а лишь сильно разреженный газ. Даже в межпланетном пространстве, по оценкам, на каждый кубический сантиметр приходится по нескольку атомов водорода.

...скорость света – максимальная скорость передачи взаимодействий в природе – определяется электрическими и магнитными свойствами вакуума и может быть рассчитана исходя из значений электрической и магнитной постоянных.

...впервые роль вакуума для Вселенной была обоснована формулами и расчетами Полем Дираком, предсказавшим рождение электрон-позитронных пар с помощью фотонов и объяснившим это явление как преобразование вакуума.

...к концу XX века удалось точнее образом подтвердить так называемый эффект Казимира – возникновение слабой электромагнитной силы между зеркалами, расположенными в вакууме на крохотном расстоянии друг от друга. Причиной этого взаимодействия может быть лишь «бурление» вакуума.

Что читать в «Кванте» о вакууме

(публикации последних лет)

1. «Как устроена пустота?» – 1996, Приложение №2, с. 102;
2. «Расширение газа в пустоту» – 1996, Приложение №4, с. 50;
3. «113 летошье Эдисона» – 1996, №5, с. 9;
4. «Звон колокольчика» – 1997, №4, с. 42;
5. «Эстафетный бег молекул, или Как работает термос» – 1997, №5, с. 31;
6. «Вакуум» – 1998, №5, с. 2;
7. «Внутренняя энергия идеального газа» – 2000, №1 с. 38;
8. «Почему вращается вертушка?» – 2000, №4, с. 42;
9. «Хочешь общаться – излучай» – 2000, №5, с. 37;
10. «Лебедевские крылышки» – 2001, №2, с. 11.

Материал подготовил

А.Леонович

(Начало см. на с. 31)

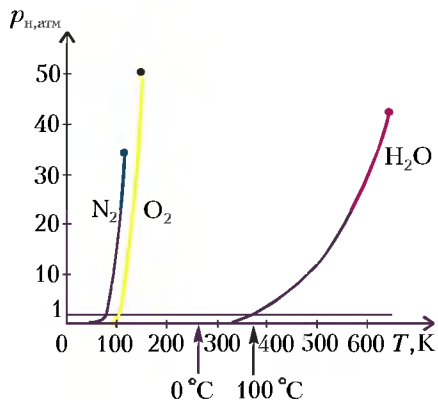


Рис. 1

Особенно отмечен температурный интервал от 0 до 100 °С, в котором существует жидкая вода при нормальном давлении в 1 атмосфере. Уже из самого вида этих кривых понятно, почему воздух не конденсируется «при нормальном давлении» – для этого понадобилось бы сильное охлаждение.

А почему вообще молекулы воды «хотят» сконденсироваться, а молекулы воздуха – «не хотят» (и слава Богу)? Это можно объяснить, например, при помощи графика потенциальной энергии Φ взаимодействия двух молекул, находящихся на расстоянии r друг от друга (рис.2; здесь k – постоянная Больцмана). Если это расстояние велико ($r \rightarrow \infty$),

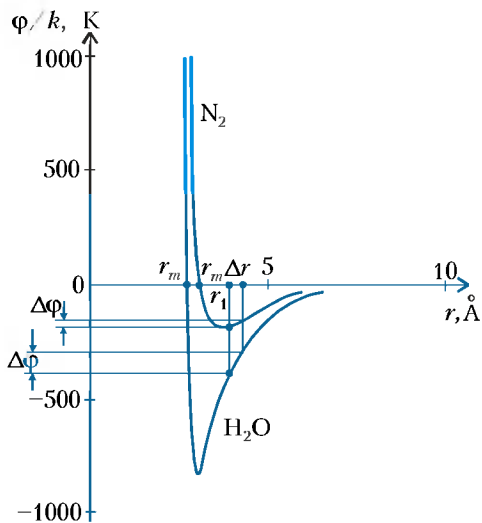


Рис. 2

то энергия взаимодействия почти ноль – молекулы «не чувствуют» друг друга. Но по мере сближения (r уменьшается) молекулы попадают на склон графика (например, в точку r_1) и, как санки с горы, устремляются в потенциальную «яму», где Φ минимально. (Вспомним, что в поле тяготения Земли каждый предмет тоже старается занять положение с наименьшей потенциальной энергией – в этом можно убедиться, например, слегка столкнув карандаш со стола на стул, а со стула – на пол.)

Ту же мысль можно выразить в терминах сил взаимодействия. Известно, что чем круче гора, тем быстрее мчатся санки. Значит, сила взаимодействия (санок с Землей или молекул друг с другом) зависит от крутизны склона, а эту крутизну можно охарактеризовать быстротой изменения потенциала при изменении расстояния:

$$F = - \frac{\Delta\Phi}{\Delta r}$$

Здесь знак «минус» указывает, что сила направлена в сторону дна «ямы». Чем больше наклон кривой $\Phi(r)$, тем больше сила взаимодействия. Теперь понятно, что глубина

потенциальной «ямы» тесно связана с удельной теплотой испарения (фазового перехода) L , а именно: $\Phi_{\min} \sim L$. Кстати, теперь в качестве масштаба силы можно ввести отношение глубины потенциальной ямы к характерному размеру молекулы r_m :

$$F \sim \frac{|\Phi_{\min}|}{r_m} \sim \frac{L}{r_m}$$

Найдя в справочниках значения L и r_m , сравним силы, действующие между парой молекул воды и парой молекул азота:

$$\frac{F_{H_2O}}{F_{N_2}} \sim \frac{L_{H_2O}}{L_{N_2}} \frac{r_{mN_2}}{r_{mH_2O}} \sim \frac{2,5 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}}{0,2 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}} \frac{3,8 \text{ \AA}}{2,6 \text{ \AA}} \sim 20.$$

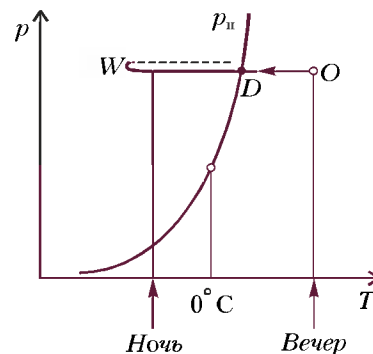
Можно сказать, что молекулы воды «любят друг друга» в двадцать раз сильнее, чем молекулы азота.

Итак, в принципе все молекулы жаждут объединиться. Что же им мешает? Их кинетическая энергия. Ведь на дне «ямы» они будут иметь большую скорость – как камень, сброшенный с крыши, имеет максимальную скорость у земли. Тут нужен третий участник процесса – кто-то должен унести эту кинетическую энергию, чтобы пара молекул осталась рядом друг с другом. Конечно, это должна быть третья молекула. Но для того чтобы начался процесс образования *зародышей конденсации*, газ должен стать довольно холодным – чтобы его молекулы двигались достаточно медленно, успевали сблизиться и отдавать третьему участнику избыток энергии. Какой энергии? Конечно же, теплоты конденсации!

Вот тут-то мы и подошли к кострам в поле.

Расчет теплообмена подогретой воздушной массы с землей и остальной атмосферой – сложная метеорологическая задача. (Всплывающий теплый пузырь, называемый термиком, уносит тепло костра вверх, что нам совершенно ни к чему.) Мы для определенности предположим, что нагретый костром воздух охлаждается изобарически, т.е. давление остается постоянным. Значит, с падением температуры (например, за счет теплового излучения или теплоотвода в почву) растет плотность смеси воздуха с парами воды. В координатах p, T этот процесс (рис.3) изображается горизонтальной линией ODW , где точка O – начальное состояние (вечером, перед заморозками). Если пар не конденсируется, то в процессе охлаждения изобара пересечет кривую насыщения в «точке росы» D , затем уйдет левее, в область пересыщения ($p > p_{\text{п}}$), и, если отношение $p/p_{\text{п}}$ станет значительным, жидкость начнет выпадать в виде

Рис. 3



микрокапель с выделением тепла. Точка W называется точкой Вильсона (того самого, который разработал «туманную камеру» для регистрации треков элементарных частиц на порожденных ими ионах в пересыщенном паре).

Но этот процесс спонтанной (самопроизвольной) конденсации может начаться при слишком низких температурах, недопустимых для живых растений. Вот тут-то и приходят на помощь частички дыма. Они предоставляют свою поверхность для «посадки» на нее молекул воды, отдают избыточную теплоту конденсации, а затем отдают ее другим молекулам, соударяющимся с частичей. Теперь,

в отличие от спонтанной конденсации, эта *гетерогенная конденсация* происходит без пересыщения пара. Система воздух – пар как бы застывает в точке росы D .

Пора сделать количественные оценки.

Если концентрация частичек сажи (их количество в единице объема) n , а массовая плотность пара $\rho_{\text{п}}$, и если весь водяной пар сконденсируется на этих частичках, то масса каждой капельки будет

$$m = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_{\text{в}} = \frac{\rho_{\text{п}}}{n},$$

где a – радиус капельки, $\rho_{\text{в}}$ – плотность жидкой воды. Следовательно, радиус капельки равен

$$a = \left(\frac{\rho_{\text{п}}}{4\pi \rho_{\text{в}} n/3} \right)^{1/3}.$$

Конечно, тут предполагается, что все капельки одинаковы.

Выше мы обозначили через L удельную теплоту испарения. Теперь оценим приращение температуры воздуха ΔT вследствие конденсации всего пара: $c_p \rho_{\text{воз}} \Delta T \sim \rho_{\text{п}} L$, где c_p – удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении, $\rho_{\text{воз}}$ – плотность воздуха, откуда

$$\Delta T \sim \frac{\rho_{\text{п}} L}{c_p \rho_{\text{воз}}}.$$

Известно, что $L \sim 2,5$ МДж/кг, $c_p \sim 1$ кДж/(кг·К), $\rho_{\text{воз}} \sim 1$ кг/м³. Если принять, что к вечеру количество пара в воздухе составляет $\rho_{\text{п}} \sim 1$ г/м³, а концентрация частичек сажи от костра порядка $n \sim 10^{11}$ м⁻³, то

$$a \sim \left(\frac{10^{-3}}{4 \cdot 3,14 \cdot 10^3 \cdot 10^{11}/3} \right)^{1/3} \text{ м} \sim 10^{-6} \text{ м} = 1 \text{ мкм}$$

и

$$\Delta T \sim \frac{10^{-3} \cdot 2,5 \cdot 10^6}{10^3 \cdot 1} \text{ К} = 2,5 \text{ К}.$$

Это уже кое-что: тепло, выделившееся при конденсации водяного пара на твердых частичках, порожденных кострами, позволяет на несколько градусов отдалиться от точки замерзания воды, опасной для растений.

Но при чем здесь русская баня? А при том, что в ней имеется отделение, которое прямо так и называется: *парная*. Там водяной пар конденсируется на теле купальщика, которое представляется очень холодной поверхностью в сильно нагретом воздухе. Именно выделяющееся тепло конденсации и обжигает тело, что и доставляет удовольствие знатокам этого дела. Так что, пребывая в бане, думайте о термодинамике!

Свист поезда и свет галактик

А.СТАСЕНКО

*...всегда до ушей достигают
Медленной звуки, чем то, что дает впечатления глазу.
В этом нетрудно тебе убедиться: коль издали смотрим,
Как дровосек топором двусторонним деревья срубает,
Видим мы раньше удар, а потом уже звук раздается
В наших ушах. Потому мы и молнию видим сначала,
Прежде чем слышится гром...*

Лукреций

И ТАК, УЖЕ ДРЕВНИЕ ФИЗИКИ-ФИЛОСОФЫ ЗНАЛИ, что звук движется медленнее света, во всяком случае, что скорость звука конечна (т.е. ограничена по величине). Но что любопытно: ни один ученый древности не отмечает еще одно явление, связанное с распространением волн, а именно изменение высоты звука при перемещении его источника относительно слушателя. В нашу эпоху этот факт, известный как *эффект Доплера*, регистрируется и используется в случае не только звуковых волн, но и электромагнитных тоже. Однако рассмотрим все по порядку: сначала акустику, затем оптику.

Пусть источник звука неподвижен, а приемник движется к нему со скоростью v (рис.1,а). Если в данный момент времени расстояние между источником и приемником x , то на нем уместилось бы число волн $N = x/\lambda = xv/c$, где λ – длина волны, излучаемой источником, v – частота излучения, c – скорость звука. Но пока приемник доберется до источника, пройдет дополнительное время $\Delta t = x/v$, и за это

время источник излучит еще $\Delta N = v\Delta t$ волн. Итого, приемник зарегистрирует $N + \Delta N$ колебаний, что равносильно частоте

$$v' = \frac{N + \Delta N}{\Delta t} = \frac{xv/c + vx/v}{x/v} = v \left(1 + \frac{v}{c} \right).$$

Перепишем эту зависимость в безразмерном виде:

$$\frac{v'}{v} = 1 + \frac{v}{c}. \tag{1}$$

Теперь поменяем местами приемник и источник звука (рис.1,б). Пусть приемник звука неподвижен, а источник

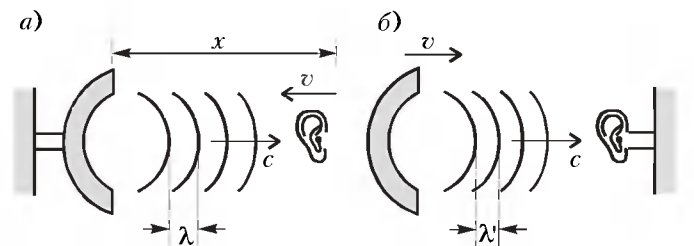


Рис. 1

движется к нему со скоростью v . При этом длина волны в неподвижном воздухе уменьшается:

$$\lambda' = \lambda \frac{c - v}{c},$$

где λ – длина волны в случае неподвижного источника (при $v = 0$). (Отсюда, видно, например, что при $v = c$ получим $\lambda' = 0$: «хвост» волны догоняет ее «голову».) Тогда неподвижный приемник будет «слышать» звуковую волну λ' , которой соответствует частота

$$v' = \frac{c}{\lambda'} = v \frac{c}{c - v}.$$

Или в безразмерном виде:

$$\frac{v'}{v} = \frac{1}{1 - v/c}. \quad (2)$$

На рисунке 2 изображены графики, соответствующие выражениям (2) и (1). Отметим характерные особенности кривых AB и ED .

При $v/c = 0$ (источник и приемник неподвижны относительно воздуха) частота звука не искажается: $v' = v$. При

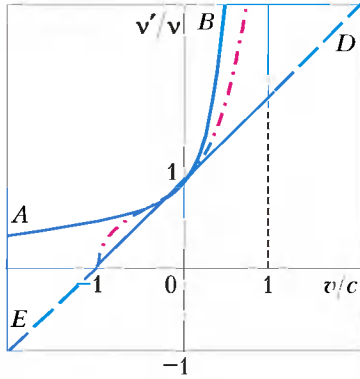


Рис. 2

$v/c \rightarrow 1$ (кривая $1B$) источник все быстрее налетает на приемник, частота звука растет: бас, издаваемый источником, воспринимается как комариный писк, при еще больших скоростях становится ультразвуком, а при $v \geq c$ уже не достигает источника – невозможно, например, услышать сверхзвуковой самолет, пока он не долетит до приемника лично.

Если же v/c становится отрицательной величиной, т.е. источник звука удаляется от приемника (кривая $A1$), воспринимаемый звук оказывается ниже испускаемого.

В случае приближения приемника к источнику звука частота принимаемого звука растет (участок $1D$), в случае удаления – падает, причем в этом последнем случае улетающий приемник будет обгонять волны в обратном порядке (см. штриховый участок прямой $1E$ при $v/c < -1$). Конечно, в окрестностях точек $v/c = \pm 1$ должно происходить еще что-то интересное – ведь в воздухе перед приемником может возникнуть скачок уплотнения, который должны будут преодолевать звуковые волны прежде чем попасть в регистрирующий их приемник, так что потребуются уточнение теории. Ибо в этом скачке все параметры газа (давление, температура и плотность) отличаются от атмосферных.

Посмотрим, как на деле «работают» полученные формулы. Пусть по мосту через пропасть между двумя участками туннеля движется поезд (рис.3) со скоростью v , а его свисток излучает звук частотой ν . Прежде всего, согласно формулам (1) и (2), неподвижные наблюдатели Антон (A) и Борис (B) будут воспринимать звуки с частотами $\nu_{A1} = \nu/(1 - v/c)$ и $\nu_{B1} = \nu(1 - v/c)$. Эти три частоты изображены на рисунке 3 вверху в виде отрезков, высота которых качественно

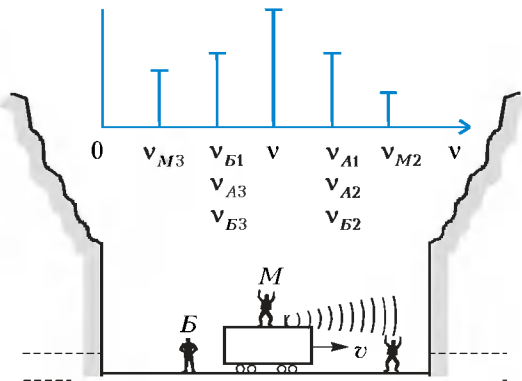


Рис. 3

характеризует интенсивность звука. Ясно, что для наблюдателей A и B эта интенсивность меньше, чем для машинистки Маши (M) – просто оттого, что звуковые «лучи» расходятся во все стороны. Дойдя до стенок туннеля (предполагаем, что они вертикальны), звуковые волны отражаются, и их, в принципе, могут зарегистрировать все три наблюдателя. Волны, отраженные от правой стенки, придут к A , B и M с частотами $\nu_{A2} = \nu_{A1}$, $\nu_{B2} = \nu_{A1}$ и $\nu_{M2} = \nu(1 + v/c)/(1 - v/c)$, потому что эта правая стенка служит как бы излучателем звука частотой $\nu_{A1} = \nu/(1 - v/c)$. Левая стенка служит излучателем звука частотой $\nu_{B1} = \nu(1 - v/c)$ и снабжает неподвижных слушателей звуками той же частоты: $\nu_{A3} = \nu_{B1}$, $\nu_{B3} = \nu_{B1}$, а удаляющийся от этой стенки наблюдатель M услышит звук частотой $\nu_{M3} = \nu(1 - v/c)/(1 + v/c)$.

Учитывая многократные отражения свистка паровоза от вертикальных стенок туннеля, вдумчивый читатель может самостоятельно обогатить палитру звуков, воспринимаемых тремя наблюдателями.

Выше уже было упомянуто, что частота принимаемого звука совпадает с частотой излучаемого ($v' = v$), только если приемник и источник неподвижны относительно воздуха; подчеркнем здесь еще раз – именно относительно воздуха, а не относительно друг друга. Действительно, если, например, источник движется за приемником вправо и оба они движутся со скоростью звука (следовательно, их относительная скорость равна нулю), то излучаемый звук никогда не достигнет приемника – где уж тут говорить о неискаженной частоте! Это происходит потому, что звуковые волны распространяются в материальной среде, обладающей инертностью (и упругостью). В этом случае важно подчеркивать, что движется относительно среды – приемник или излучатель волн, поэтому выше и получились различные формулы для принимаемой частоты.

Другое дело – оптика. Тут определяющую роль играет именно относительная скорость V приемника и источника. Не вдаваясь в тонкости преобразований Лоренца, приведем окончательный результат:

$$\frac{v'}{v} = \frac{1 \pm V/c}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}. \quad (3)$$

Здесь знак «плюс» соответствует случаю сближения приемника и излучателя электромагнитных волн, «минус» – удаления их друг от друга, c – теперь уже скорость света (а не звука), а для относительной скорости специально использована другая буква, а именно V (а не v), чтобы еще раз подчеркнуть отличие оптики от акустики.

Соответствующая выражению (3) кривая изображена на рисунке 2 штрих-пунктиром (тут-то и видна польза безразмерных переменных: и оптика и акустика уместились на одном графике, хотя масштабы скоростей распространения световых и звуковых волн отличаются в миллион раз). Видно, в частности, что, если скорости v или V малы (по сравнению со своим «масштабом» c), то формулы для относительного сдвига частот звуковых и электромагнитных волн одинаковы:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v' - \nu}{\nu} \approx \frac{v}{c} \text{ или } \frac{V}{c}. \quad (4)$$

Эта приближенная формула является самой простой оценкой доплеровского сдвига частот, причем как в акустике, так и в оптике. Теперь ясно, например, что из-за вращения Солнца один край его диаметра (движущийся к нам) должен быть синее, а другой (уходящий от нас) – краснее, чем центр его диска. И если мы обладаем достаточно чувствительным

измерителем разности частот, то при помощи формулы (4) мы найдем линейную (окружную) скорость и, следовательно, скорость вращения звезды.

Тут уместно вспомнить анекдотичный случай с одним Физиком, автомобиль которого остановил Полисмен за движение на красный свет. Физик объяснил, что при сближении со светофором красный свет кажется зеленым. Зная характерные длины волн для этих участков спектра ($\lambda_{кр} \approx 0,65$ мкм, $\lambda_{зел} \approx 0,55$ мкм), по формуле (3) можно рассчитать или по формуле (4) оценить эту скорость сближения – она более ста миллионов километров в час! Поэтому Полисмен все-таки оштрафовал Физика – за превышение скорости в городе. (Полисмен всегда прав.)

Эффект Доплера сыграл большую роль в космологии. Астрономические наблюдения показали, что чем дальше находится галактика, тем больше ее излучение сдвинуто в красную сторону спектра («красное смещение») и, значит, тем быстрее она удаляется от нас: $v = Hr$. Это выражение получило имя *закона Хаббла*, а коэффициент пропорцио-

нальности H – постоянной Хаббла. Картина похожа на разлет осколков при сильном взрыве. Так появилось понятие Большого Взрыва – исходной точки нашей Вселенной. В настоящее время постоянная Хаббла принимается равной приблизительно 50 км/с на миллион парсеков. Поскольку 1 парсек $\approx 3 \cdot 10^{13}$ км, то $H \approx 2 \cdot 10^{-18} \text{ с}^{-1}$. Обратная H величина не случайна – это время: $1/H = \tau_H \approx 5 \cdot 10^{17} \text{ с} \approx 20$ млрд. лет. И оно имеет определенное отношение к возрасту Вселенной, а будучи умноженным на скорость света, дает оценку современного размера Вселенной: $R \sim \tau_H c \sim 10^{26} \text{ м}$.

Так эффект Доплера позволил добраться до самого начала Мира. Почему же древние физики умалчивают о нем (хотя они ближе к Большому Взрыву). Конечно, не только потому, что Доплер тогда еще не родился. По-видимому, это связано с тем, что в то время не было достаточно больших скоростей передвижения, которые позволили бы обнаружить этот эффект. А с лошади что возьмешь?..

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Кинематика и векторы

В. ПЛИС

ОБСУДИМ ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РАБОТЫ С ВЕКТОРНЫМИ соотношениями в кинематике материальной точки и проиллюстрируем их на примерах равномерного и равнопеременного движений.

Равномерное движение

Известно, что при равномерном движении скорость \vec{v} материальной точки остается постоянной и равной начальной скорости \vec{v}_0 , а перемещение

$$\vec{s}(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t$$

за время от 0 до t сонаправлено с вектором \vec{v}_0 и пропорционально ему по величине (здесь \vec{r} – радиус-вектор материальной точки).

Задача 1. *Сверхзвуковой самолет летит горизонтально. Два микрофона, находящиеся на одной вертикали на расстоянии d друг от друга, зарегистрировали приход звука от самолета с запаздыванием по времени, равным τ . Найдите величину v скорости самолета. Скорость звука в воздухе c .*

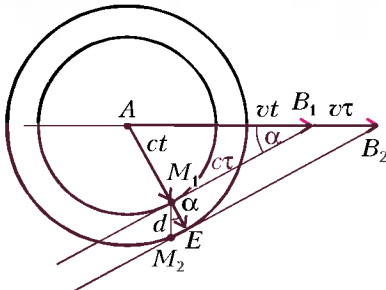


Рис. 1

Обратимся к рисунку 1, иллюстрирующему последовательные перемещения сверхзвукового самолета (источника звука) и фронта звуковой волны (огibaющей вторичных волн). Пусть при пролете самолета через точку A в атмосфере

возбуждается звуковая волна, и через некоторое время t волновое возмущение достигает первого микрофона M_1 . В этот момент времени самолет находится в точке B_1 , и прямая B_1M_1 определяет положение волнового фронта. За последующий промежуток времени τ самолет перемещается в точку B_2 , а волновой фронт, двигаясь со скоростью c , перемещается в положение B_2EM_2 . Проанализировав кинематику перемещений самолета и волнового фронта, находим:

из прямоугольного треугольника AB_1M_1

$$\sin \alpha = \frac{AM_1}{AB_1} = \frac{ct}{vt} = \frac{c}{v},$$

из прямоугольного треугольника M_1M_2E

$$\cos \alpha = \frac{c\tau}{d}.$$

Исключая α из полученных соотношений, получаем

$$v = c \sqrt{1 - \frac{(c\tau)^2}{d^2}}.$$

Задача 2. *Две частицы 1 и 2 движутся с постоянными скоростями \vec{v}_1 и \vec{v}_2 , их радиусы-векторы в начальный момент времени равны \vec{r}_{01} и \vec{r}_{02} соответственно. При каком соотношении между этими четырьмя векторами частицы испытают столкновение друг с другом?*

По условию, частицы в лабораторной системе отсчета движутся равномерно, их радиусы-векторы зависят от времени по законам

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_{01} + \vec{v}_1 t, \quad \vec{r}_2(t) = \vec{r}_{02} + \vec{v}_2 t.$$

Перейдем в систему отсчета, связанную с первым телом и движущуюся поступательно относительно лаборатории. В этой системе положение точки 2 в любой момент времени определяется вектором

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t) = (\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}) + (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)t. \quad (*)$$

Отсюда следует, что в подвижной системе отсчета точка 2 движется по прямой, проходящей через начальное положение точки, определяемое равенством $\vec{r}'_0 = \vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}$, а направляющим вектором прямой является относительная скорость $\vec{v}' = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Рисунок 2 наглядно иллюстрирует приведенные соотношения.

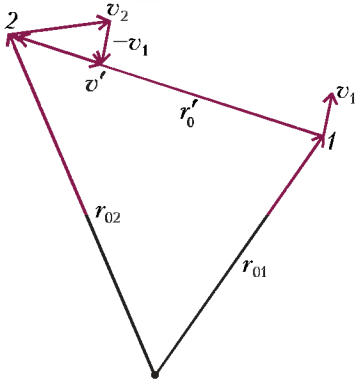


Рис. 2

При произвольных абсолютных скоростях \vec{v}_1 и \vec{v}_2 соотношение (*) описывает пучок прямых, проходящих через начальную точку. И только одна из этих прямых проходит через начало отсчета подвижной системы. Это происходит в том случае, когда векторы \vec{r}'_0 и \vec{v}' анти-

параллельны, т.е. соответствующие единичные векторы имеют противоположные знаки:

$$\frac{\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}}{|\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}|} = - \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_2}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}.$$

Равнопеременное движение

Как известно, в этом случае зависимости скорости и перемещения от времени имеют вид

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t,$$

$$\vec{s}(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2},$$

где $\vec{a} = \text{const}$ – ускорение.

Среди всевозможных случаев равнопеременного движения особое место занимает движение под действием гравитационных сил – свободное падение тел в однородном поле тяжести с постоянным ускорением $\vec{a} = \vec{g}$. Зависимость вектора скорости от времени при свободном падении иллюстрирует рисунок 3. Из соотношения для перемещения следует,

что при свободном падении вектор перемещения материальной точки за время от 0 до t равен сумме

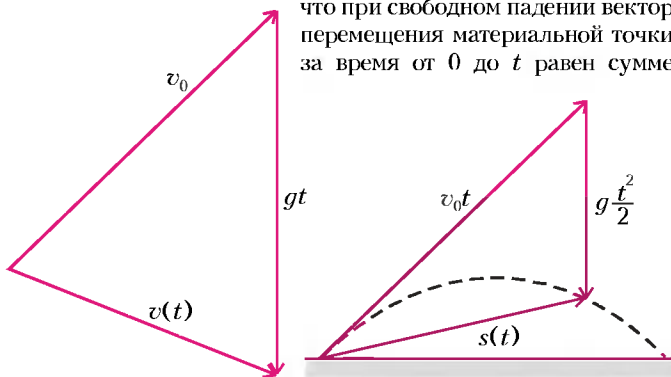


Рис. 3

Рис. 4

векторов $\vec{v}_0 t$ и $\frac{gt^2}{2}$ (рис.4). Это означает, в частности, что движение тела, брошенного под углом к горизонту, есть суперпозиция равномерного прямолинейного движения со скоростью \vec{v}_0 и свободного падения в однородном поле тяжести с нулевой начальной скоростью.

Задача 3. Мышонок стреляет из рогатки “точно” в кот, сидящего на ветке дерева. (Вектор начальной скорости камня направлен на кота). Через $t = 1$ с камень падает на землю в точку, находящуюся на одной вертикали с котом. На какой высоте H находился кот? Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

Перемещение камня за время полета t равно

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{gt^2}{2}$$

(считаем $\vec{r}_0 = \vec{0}$). Изобразим эти векторы на рисунке 5. Отсюда получаем

$$H = \frac{gt^2}{2} = 5 \text{ м}.$$

Если бы гравитационные силы не действовали на камень, то через $t = 1$ с он действительно попал бы в кота.

Заметим, что перемещение камня, брошенного под углом к горизонту, можно представить также в виде полусуммы начальной \vec{v}_0 и конечной $\vec{v}(t)$ скоростей, умноженной на время t :

$$\vec{s}(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t + \frac{gt^2}{2} = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}_0 + \vec{g}t}{2} t = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}(t)}{2} t.$$

Задача 4. Мышонок стреляет из рогатки в кот, сидящего на ветке дерева. Через $t = 1$ с камень попадает в ветку прямо у лап кота. На каком расстоянии s от мышонка находился кот, если известно, что векторы \vec{v}_0 и $\vec{v}(t)$ взаимно перпендикулярны? Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

Искомое расстояние есть абсолютная величина (модуль) вектора перемещения камня за время полета t :

$$s = \left| \vec{s}(t) \right| = \left| \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}(t)}{2} \right| t.$$

В момент времени t вектор скорости $\vec{v}(t)$ перпендикулярен вектору \vec{v}_0 и равен $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t$ (рис.6). Диагонали изображенного на рисунке 6 прямоугольника равны

$$\left| \vec{v}_0 + \vec{v}(t) \right| = \left| \vec{v}(t) - \vec{v}_0 \right| = \left| \vec{g}t \right| = gt.$$

Тогда искомое расстояние будет равно

$$s = \frac{gt^2}{2} \approx 5 \text{ м}.$$

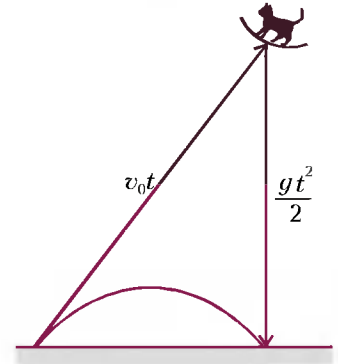


Рис. 5

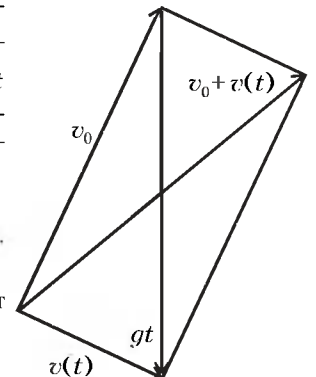


Рис. 6

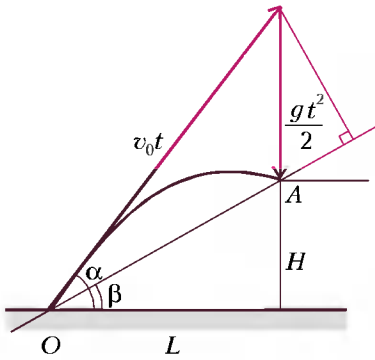


Рис. 7

Задача 5. На крышу дома высотой H с расстояния L от него мальчик хочет забросить мяч. При какой минимальной величине начальной скорости $v_{0\min}$ это возможно? Под каким углом α_* следует в этом случае бросить мяч? Ускорение свободного падения равно g . Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

Через точки старта и окончания полета (рис.7) проведем прямую OA , которая образует угол β с горизонтальной прямой. Перемещение мяча за время полета t равно

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{g t^2}{2}$$

(считаем $\vec{r}_0 = \vec{0}$). Как видим, проекции векторов $\vec{v}_0 t$ и $\vec{g} t^2/2$ на направление нормали к прямой OA равны:

$$v_0 t \sin(\alpha - \beta) = \frac{g t^2}{2} \cos \beta,$$

откуда находим продолжительность полета мяча:

$$t = \frac{2v_0 \sin(\alpha - \beta)}{g \cos \beta}.$$

Далее, из рисунка 7 следует, что алгебраическая сумма проекций векторов $\vec{v}_0 t$ и $\vec{g} t^2/2$ на прямую OA равна расстоянию от точки старта до точки окончания полета:

$$\sqrt{H^2 + L^2} = v_0 t \cos(\alpha - \beta) - \frac{g t^2}{2} \sin \beta.$$

С учетом выражения для времени полета последнее соотношение перепишем в виде

$$\sqrt{H^2 + L^2} = \frac{v_0^2}{g \cos^2 \beta} (\sin(2\alpha - \beta) - \sin \beta).$$

Наименьшему значению начальной скорости соответствует угол бросания α_* такой, при котором множитель в скобках в последнем соотношении принимает наибольшее значение:

$$\sin(2\alpha_* - \beta) = 1, \quad 2\alpha_* - \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_* = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}.$$

Тогда

$$v_{0\min}^2 = g \sqrt{H^2 + L^2} \frac{\cos^2 \beta}{1 - \sin \beta}.$$

С учетом равенства $\text{tg} \beta = H/L$ получаем

$$v_{0\min}^2 = g \left(\sqrt{H^2 + L^2} + H \right),$$

и окончательно

$$v_{0\min} = \sqrt{g \left(\sqrt{H^2 + L^2} + H \right)}.$$

Задача 6. Из точек A и B , находящиеся на одной горизонтальной прямой, одновременно бросили два камня с одинаковыми по модулю скоростями $v_0 = 20$ м/с. Один из

камней полетел по навесной траектории, другой – по настильной, но каждый попал в точку старта другого камня. Известно, что в точке A угол бросания $\alpha = 75^\circ$. Через какое время τ после старта расстояние между камнями станет минимальным? Чему равно это расстояние?

Рассмотрим полет камня, брошенного из точки A . Повторяя построения, выполненные в начале решения предыдущей задачи (с учетом того, что точки начала и окончания полета лежат на одной горизонтальной прямой), находим продолжительность полета:

$$t = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha$$

и расстояние между точками A и B :

$$L = v_0 t \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Аналогично, для камня, брошенного из точки B :

$$L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\beta.$$

Сравнивая выражения для L , получаем

$$\sin 2\alpha = \sin 2\beta,$$

или, поскольку по условию $2\alpha + 2\beta = \pi$,

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Далее, выберем в качестве тела отсчета камень, вылетевший из точки A , и свяжем с ним систему отсчета, движущуюся поступательно относительно лаборатории. Скорость второго камня в этой системе \vec{u} найдем из правила сложения скоростей:

$$\vec{u} = \vec{v}_2(t) - \vec{v}_1(t) = \left(\vec{v}_{02} + \vec{g} t \right) - \left(\vec{v}_{01} + \vec{g} t \right) = \vec{v}_{02} - \vec{v}_{01},$$

т.е. в подвижной системе второй камень движется равномерно и прямолинейно со скоростью

$$\vec{u} = \vec{v}_{02} - \vec{v}_{01},$$

равной начальной относительной скорости. Так как $\vec{v}_{02} \perp \vec{v}_{01}$ и $v_{01} = v_{02} = v_0$,

вектор \vec{u} есть диагональ

Рис. 8

квадрата, построенного на векторах \vec{v}_{02} и $-\vec{v}_{01}$, поэтому $u = \sqrt{2}v_0$.

Обратимся к рисунку 8, иллюстрирующему относительное движение. Из рисунка находим кратчайшее расстояние между камнями – длину катета AC в прямоугольном треугольнике ACB , где угол при вершине B равен $\delta = \alpha - 45^\circ = 30^\circ$:

$$AC = L \sin \delta = \frac{L}{2} = 10 \text{ м}.$$

Максимальное сближение камней произойдет в момент времени

$$\tau = \frac{AC}{u \text{tg} \delta} \approx 0,6 \text{ с}.$$

Задача 7. С горизонтальной поверхности земли бросили мяч, и он упал на землю со скоростью $v = 9,8$ м/с под углом $\beta = 30^\circ$ к горизонту. Величина вертикальной составляющей скорости в точке бросания на 20% больше, чем в точке падения. Найдите продолжительность t полета. Считайте силу сопротивления пропорциональной скорости мяча:

$\vec{F}_c = -k \vec{v}$ ($k > 0$). Ускорение свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

Ускорение мяча в любой момент времени определяется силой тяжести и силой сопротивления:

$$\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{g} - \frac{k}{m} \vec{v},$$

где m – масса мяча. Найдем приращение скорости мяча за любой элементарный промежуток времени Δt :

$$\Delta \vec{v} = \left(\vec{g} - \frac{k}{m} \vec{v} \right) \Delta t$$

и за время полета t :

$$\vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \sum \left(\vec{g} - \frac{k}{m} \vec{v} \right) \Delta t = \vec{g} t - \frac{k}{m} \sum \vec{v} \Delta t = \vec{g} t - \frac{k}{m} \vec{s}(t).$$

По условию, перемещение мяча $\vec{s}(t) = \sum \vec{v} \Delta t$ за время полета – это горизонтальный вектор. Переходя в полученном соотношении к проекциям векторов на вертикальную ось, получаем

$$t = \frac{2,2v \sin \beta}{g} = 1,1 \text{ с.}$$

В заключение отметим, что кинематические соображения позволяют решать не только задачи физики. Например, при решении геометрических задач бывает полезно представить себе, что будет происходить с элементами рассматриваемой фигуры, если некоторые ее точки начнут двигаться.

Задача 8. Некто узнал, что в местности, где зарыт клад, растут три дерева: дуб, сосна и береза. Для того чтобы найти клад, следует стать под березой (точка B на рисунке 9) лицом к прямой, проходящей через дуб (точка D) и сосну (точка C), при этом дуб должен оказаться справа, а сосна слева. Затем следует пойти к дубу, считая шаги. Дойдя до дуба, повернуть под прямым углом направо и

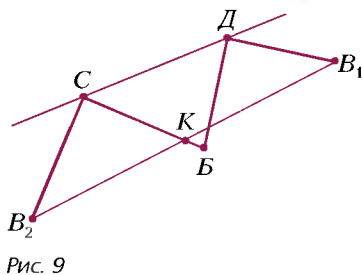


Рис. 9

пройти столько же шагов, сколько было пройдено от березы до дуба. В этом месте остановиться и поставить вешку (точка B_1). Затем следует вернуться к березе и пойти к сосне, считая шаги. Дойдя до сосны, повернуть под прямым углом налево, и про-

йти столько же шагов, сколько было пройдено от березы до сосны. В этом месте остановиться и поставить вешку (точка B_2). Клад зарыт точно посередине между вешками (точка K).

При такой подробной инструкции отыскание клада не могло вызвать затруднений. Однако они все-таки возникли. Дело в том, что когда кладоискатель попал в указанную местность, он обнаружил там только дуб и сосну. Березы же не было и в помине. И все же он нашел клад. Как ему это удалось сделать?

Представим себе, что точка B начала двигаться, и пусть \vec{v} – вектор ее мгновенной скорости. Так как длины отрезков DB_1 и DB равны и отрезок DB_1 получается из отрезка DB поворотом на угол $\pi/2$, то точка B_1 будет двигаться согласованно с точкой B , а именно так, что вектор \vec{v}_1 ее скорости будет

получаться из вектора \vec{v} поворотом на угол $\pi/2$. Аналогично, вектор \vec{v}_2 скорости точки B_2 будет получаться из \vec{v} поворотом на угол $-\pi/2$. Поэтому $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$. Следовательно, при произвольном движении точки B скорость точки K

$$\vec{v}_K = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}$$

всегда равна нулю: точка K неподвижна, и ее положение не зависит от положения точки B ! Чтобы найти теперь положение точки K , достаточно выбрать одно любое положение точки B . Например, совместить точку B с точкой C и применить построение, известное кладоискателю.

Упражнения

1. Самолет, летящий горизонтально на постоянной высоте с постоянной скоростью v , большей скорости звука c , в некоторый момент времени пролетает над наблюдателем. Какой угол α с вертикалью составляет направление на самолет, определяемое по звуку в тот момент, когда истинное (видимое) направление от наблюдателя на самолет составляет с вертикалью угол φ ?

2. Стрелок и мишень находятся в диаметрально противоположных точках карусели радиусом $R = 5 \text{ м}$, равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси. Период вращения карусели $T = 10 \text{ с}$. Под каким углом α к диаметру карусели должен целиться стрелок, чтобы поразить мишень? Скорость пули $v = 300 \text{ м/с}$.

3. По пересекающимся под углом α прямым дорогам едут с постоянными скоростями \vec{v}_1 и \vec{v}_2 две машины. Когда первая машина проезжает перекресток, вторая находится на расстоянии L от перекрестка и приближается к нему. Определите наименьшее расстояние L_{\min} между машинами при дальнейшем движении. Через какое время τ расстояние между машинами будет наименьшим?

4. Гимнаст в цирке прыгает с подкидного трамплина и через $t = 1,2 \text{ с}$ приземляется на расстоянии $L = 6 \text{ м}$ от трамплина. Точка приземления и трамплин расположены на одной горизонтальной прямой. Определите величину v_0 начальной скорости и угол α наклона вектора \vec{v}_0 к горизонтальной плоскости. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

5. Найдите максимальную высоту ограды H_{\max} , через которую вы могли бы перекинуть снежок, находясь на расстоянии $l = 20 \text{ м}$ от нее. В расчетах используйте свои рекордные возможности по метанию снежков на дальность. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

6. Два жонглера, стоящие на горизонтальной площадке на расстоянии L друг от друга, перекидываются мячами, бросая их одновременно. С какой по величине скоростью v_{02} и под каким углом β к горизонту был брошен второй мяч, если он попал в первый, когда тот достиг максимальной высоты? Первый жонглер бросил мяч с начальной скоростью v_{01} под углом α к горизонту. Ускорение свободного падения равно g . Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

7. За время полета мяча, брошенного мальчиком под углом к горизонту, горизонтальная составляющая скорости мяча уменьшилась на 12%, и он упал на землю на расстоянии $s_1 = 14 \text{ м}$. Когда мяч был брошен под тем же углом к горизонту со скоростью на 20% больше, чем в первом случае, горизонтальная составляющая скорости мяча уменьшилась на 15%. На каком расстоянии s_2 от мальчика упал мяч в этом случае? Считайте силу сопротивления пропорциональной скорости мяча: $\vec{F}_c = -k \vec{v}$ ($k > 0$). Опыты проводятся на горизонтальной поверхности.

Материалы вступительных экзаменов 2001 года

Московский государственный университет
им.М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет,
олимпиада «Абитуриент-2001», март)

1. Решите уравнение

$$3x - 2|x - 2| = 3\sqrt{3x + 18} - 2|\sqrt{3x + 18} - 2|.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{\log_{(21+4x-x^2)}(7-x)}{\log_{(x+3)}(21+4x-x^2)} < \frac{1}{4}.$$

3. В трапеции $ABCD$ с боковой стороной $CD = 30$ диагонали пересекаются в точке E , а углы AED и BCD равны. Окружность радиуса 17, проходящая через точки C , D и E , пересекает основание AD в точке F и касается прямой BF . Найдите высоту трапеции и ее основания.

4. Можно ли подобрать числа A , B , φ , ψ так, чтобы выражение

$$\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2\right)^2 + A \cos(x + \varphi) + B \sin(2x + \psi)$$

принимало при всех x одно и то же значение C ? Если да, то какие значения может принимать константа C ?

5. Основанием прямой призмы $ABCA'B'C'$ с высотой $\frac{4}{7}$ служит треугольник ABC , в котором $AB = BC = 1$ и $AC = \frac{3}{7}$. Через точку пересечения диагоналей грани $ACC'A'$ на расстоянии $\frac{4}{13}$ от точки A проводится плоскость, делящая объем призмы пополам. Какова наибольшая площадь сечения призмы такой плоскостью?

6. Найдите все значения a , при которых система

$$\begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 \leq 0, \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 \geq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Вариант 2

(механико-математический факультет, июль)

1. Решите неравенство

$$x \geq \log_2(101 \cdot 10^x - 10^{2+2x}) - \log_5(101 \cdot 2^x - 5^{2+x} \cdot 2^{2+2x}).$$

2. Имеет ли уравнение

$$12 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = |4 - 5 \cos x|$$

хотя бы одну пару корней, расстояние между которыми не превосходит $\frac{\pi}{2}$?

3. Через вершины A , B , C параллелограмма $ABCD$ со сторонами $AB = 3$ и $BC = 5$ проведена окружность, пересекающая прямую BD в точке E , причем $BE = 9$. Найдите диагональ BD .

4. Найдите все трехзначные натуральные числа, каждое из которых больше суммы квадратов своих цифр на 517.

5. Найдите все числа, которые не могут быть корнями уравнения

$$4\sqrt{2x^4 + x^3} = a^4\sqrt{4 - a^4}(x + 4x^2 - 8)$$

ни при каком значении параметра a .

6. Основание $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCD A' B' C' D'$ повернули в плоскости ABC на угол 30° вокруг точки пересечения диагоналей AC и BD (вершина A повернулась в направлении вершины D), а боковые грани заменили гранями $AA'B$, $A'B'B$, $BB'C$, $B'C'C$, $CC'D$, $C'D'D$, $DD'A$ и $D'A'A$. Найдите все значения, которые могут принимать периметр и площадь сечения полученного многогранника плоскостью, параллельной плоскости ABC , если периметр прямоугольника $ABCD$ равен 26, а его площадь равна 42.

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики,
олимпиада «Абитуриент-2001», апрель)

1. Сумма первых трех членов арифметической прогрессии равна 27, а сумма первых пяти членов равна 80. Сумма какого числа первых членов прогрессии равна 486?

2. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3 \sin x + \cos y = 0, \\ 6 \cos x - 2 \sin y = 7. \end{cases}$$

3. Из пункта A в пункт B выехал первый велосипедист. Одновременно с ним с такой же скоростью из B в A выехал второй велосипедист. Через некоторое время первый велосипедист увеличил скорость на 10 км/ч. Если бы первый велосипедист сразу двигался с увеличенной скоростью, то его встреча со вторым велосипедистом состоялась бы на три часа раньше. Известно, что расстояние между A и B равно 180 км, в момент изменения скорости первым велосипедистом расстояние между ними и вторым велосипедистом было меньше 70 км, на весь путь из A в B первый велосипедист затратил 15 ч. Найдите первоначальную скорость велосипедистов.

4. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O , длина диагонали BD равна 12. Расстояние между

центрами окружностей, описанных около треугольников AOD и COD , равно 16. Радиус окружности, описанной около треугольника AOB , равен 5. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

5. Для каждого значения параметра a решите неравенство

$$3a - 1 - (8a - 5)3^{-2\sqrt{-\log_3(x^2 + 6x + 9)}} \leq 3(a + 2)|x + 3|^{2\sqrt{|\log_3|x+3||^{1/9}}}$$

6. Сфера касается всех боковых ребер правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, причем ребер SA и SB она касается в точках K и L соответственно. Точки K , L и S лежат по одну сторону от плоскости, которая касается сферы в точке M , принадлежащей грани SAB , и пересекает ребра SA и SB в точках G и H соответственно. Прямые KM и LM делят апофему грани SAB на три равных отрезка. Известно, что $AB = 9$ и $GH = 3\sqrt{11}$. Найдите объем пирамиды $SABCDEF$ и радиус сферы.

Вариант 4

(факультет вычислительной математики и кибернетики, июль)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \cdot 5^{1-y} = \log_3(x^{-2}), \\ 5^y + \log_3 x = 4. \end{cases}$$

2. Сумма первых четырех членов арифметической прогрессии равна 56. Все члены этой прогрессии – натуральные числа. Двенадцатый член больше 67, но меньше 74. Найдите двадцатый член этой прогрессии.

3. Среди всех решений системы

$$\begin{cases} y + 3x \leq -3, \\ x^2 + y^2 + 4x + 2y \leq 11 \end{cases}$$

найдите такое, при котором выражение $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25$ принимает минимальное значение.

4. Решите уравнение

$$\cos\left(\pi(x + 7\sqrt{x})\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}(4x + \sqrt{x})\right) = 1.$$

5. Трапеция с основанием $\sqrt{8}$ и высотой $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ вписана в окружность радиуса $\sqrt{5}$. Каждый из четырех отсекаемых сторонами трапеции сегментов отражен внутрь трапеции симметрично относительно отсекающей его стороны. Найдите площадь фигуры, состоящей из тех точек трапеции, которые не принадлежат ни одному из отраженных внутрь нее сегментов.

6. Функция $f(x)$ определена, возрастает и отрицательна на всей числовой прямой. Решите неравенство

$$\left(2f(x^2 - 2x - 112) + \left|f(x^2 - 2x - 112) - 3f(-2x\sqrt{32 - 2x})\right|\right) \cdot \left(3f(-2x\sqrt{32 - 2x} - 112) - 2f(-2x\sqrt{32 - 2x})\right)^7 > 0.$$

Вариант 5

(физический факультет, олимпиада «Абитуриент-2001», март)

1. Решите неравенство

$$\frac{2^x + 5x - 18}{x - 2} \leq 5.$$

2. Решите уравнение

$$2 \sin 2x \cos(5x^2) - \sin(5x^2 + 2x) = 0.$$

3. Решите уравнение

$$18^x - 9^{x+1} - 2^{x+2} + 36 = 0.$$

4. В треугольнике ABC приведены медианы AN и CM , $\angle ABC = 120^\circ$. Окружность, проходящая через точки A , M и N , проходит также через точку C . Радиус этой окружности равен 7. Найдите площадь $\triangle ABC$.

5. Решите неравенство

$$\sqrt{2 \log_9(3x^2 - 4)} > \log_3 \sqrt{3x^2 - 4}.$$

6. В правильной треугольной пирамиде $SKLM$, все ребра которой равны $8a$, на ребре SK взята точка A так, что $SA : AK = 1 : 3$. Через точку A проведена плоскость, параллельная ребру SM и высоте KN $\triangle KLM$. Найдите периметр сечения пирамиды этой плоскостью.

7. Для любого значения a решите неравенство

$$3(2x - a) + 5a\sqrt{2x - a} - 2a^2 > 0.$$

8. На стороне острого угла KOM взята точка L (L между O и K). Окружность проходит через точки K и L и касается луча OM в точке M . На дуге LM , не содержащей точки K , взята точка N . Расстояния от точки N до прямых OM , OK и KM равны m , k и l соответственно. Найдите расстояние от точки N до прямой LM .

Вариант 6

(физический факультет, июль)

1. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}(x + 1) \operatorname{ctg}(2x + 3) = 1.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{3-x}} > \frac{1}{x-2}.$$

3. Решите уравнение

$$4^{3x^2+x} - 8 = 2 \cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}}.$$

4. В трапеции $KLMN$ известно, что $LM \parallel KN$, $\angle KLM = \frac{\pi}{2}$, $LM = l$, $KN = k$, $MN = a$. Окружность проходит через точки M и N и касается прямой KL в точке A . Найдите площадь $\triangle AMN$.

5. Решите неравенство

$$\log_2 \left(\log_3 \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \right) < \log_{\frac{1}{8}} \left(\log_{\frac{1}{9}} \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1} \right) \right).$$

6. В пирамиде $SABC$ $AB = 7$, $BC = 8$, $CA = 9$. Высоты боковых граней, проведенные из вершины S , являются касательными к сфере, вписанной в пирамиду. Радиус этой сферы равен $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Найдите объем пирамиды.

7. Для каждого значения a найдите все решения уравнения

$$\cos 2x + 2 \sin^2(x + a) + 2 - \sin a = 0,$$

принадлежащие промежутку $\pi \leq x \leq 2\pi$.

8. В треугольнике ABC известен угол $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$. Прямая, параллельная стороне AC , пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. На отрезках AN и CM как на

диаметрах построены окружности. Их общая хорда пересекает отрезок MN в точке D , $MD : DN = \sqrt{3} : 1$. Найдите $\angle BCA$.

Вариант 7

(химический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{|x-1|} > \frac{1}{|x+1|}.$$

2. В равнобедренном треугольнике с основанием AC проведена биссектриса угла C , которая пересекает боковую сторону AB в точке D . Точка E лежит на основании AC так, что $DE \perp DC$. Найдите длину AD , если $CE = 2$.

3. Решите тригонометрическое уравнение

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x.$$

4. Решите уравнение

$$\sqrt{4x-x^2} + \sqrt{4x-x^2-3} = 3 + \sqrt{2x-x^2}.$$

5. Решите уравнение

$$|x-1| + |x+1| + |x-2| + |x+2| + \dots \\ \dots + |x-100| + |x+100| = 200x.$$

6. Найдите такие значения параметра
- a
- , при которых система

$$\begin{cases} x^3 - (a+3)x^2 + (3a+2)x - 2a \geq 0, \\ x^3 - (a+3)x^2 + 3ax \leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

7. Функция
- $f(x)$
- для всех
- x
- удовлетворяет уравнению

$$f(x+1) = f(x) + 2x + 1.$$

Найдите $f(2001)$, если $f(0) = 0$.**Вариант 8**(биологический факультет
и факультет фундаментальной медицины)

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2 + 5x - 84}}{x-7} \geq 0.$$

2. Решите уравнение

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin x = \frac{1}{2}.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{\log_2 x - 3}{6 \log_x 2 - 1} \leq 2.$$

4. Из аэропорта одновременно вылетают два самолета и сразу набирают скорость и высоту. Они летят по замкнутым круговым маршрутам: первый – по окружности радиуса R , а второй – по окружности радиуса r . Предполагается, что самолеты летят безостановочно с одинаковыми постоянными скоростями, и каждый из них облетает свою окружность за целое число часов. Кроме того, не ранее чем через 43 часа и не позднее чем через 49 часов после вылета произошли следующие два события: первый самолет облетел свою окружность 4 раза, а второй облетел свою окружность 5 раз, и разрыв во времени между этими событиями составил не менее 2 часов. Найдите отношение $\frac{r}{R}$.

5. В треугольник ABC со сторонами $AB = 6$, $BC = 5$, $AC = 7$ вписан квадрат, две вершины которого лежат на стороне AC , одна на стороне AB и одна на стороне BC . Через середину D стороны AC и центр квадрата проведена прямая, которая пересекается с высотой BH треугольника ABC в точке M . Найдите площадь треугольника DMC .

6. Найдите все значения параметра
- a
- , при которых система уравнений

$$\begin{cases} \sin x = \cos(\sqrt{6-2a^2}x), \\ \cos x = \left(a - \frac{2}{3}\right) \sin(\sqrt{6-2a^2}x) \end{cases}$$

имеет ровно одно решение на отрезке $[0; 2\pi]$.**Вариант 9**

(факультет почвоведения)

1. Решите уравнение

$$2 + \cos 2x = 4 \cos^2 x.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{5-x^2} = 1-x.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{x-2} x \leq \log_{x-2} 4.$$

4. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны между собой, $AC = 2$, а $\angle ACB = 30^\circ$. Из вершины A к боковой стороне BC проведены биссектриса AE и медиана AD . Найдите площадь треугольника ADE .

5. Решите неравенство

$$2 \log_{\pi}(\sin x) \log_{\pi}(\sin 2x) - \log_{\pi}^2(\sin 2x) \leq \log_{\pi}^2(\sin x).$$

6. Дано задание: на прямоугольном участке земли размером 1×4 м посадить три дерева, одно из которых должно быть в углу участка. Расстояние между любыми двумя деревьями не должно быть меньше 2,5 м. Можно ли выполнить это задание? Ответ обоснуйте.

Вариант 10

(геологический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{x-1} - 1 \\ 1 - \frac{1}{x-7} \geq 0.$$

2. Найдите неотрицательные решения уравнения

$$1 + \sin 7x = \left(\cos \frac{3x}{2} - \sin \frac{3x}{2}\right)^2.$$

3. Решите уравнение

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{x-2} \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \frac{125}{343}.$$

4. Прямая, проходящая через вершину основания равнобедренного треугольника, делит его площадь пополам, а периметр треугольника делит на части длиной 5 и 7. Найдите площадь треугольника и укажите, где лежит центр описанной окружности: внутри или вне треугольника.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy}{2} + \frac{5}{2x+y-xy} = 5, \\ 2x+y + \frac{10}{xy} = 4 + xy. \end{cases}$$

6. Пункты A и B расположены на двух различных дорогах, представляющих собой две взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в пункте C . Два мотоциклиста одновременно начинают движение: первый из пункта A по направлению к C , а второй из B по направлению к C . Через какое время после начала движения расстояние между мотоциклистами будет наименьшим и каким, если скорость первого мотоциклиста равна 44 км/ч, второго – 33 км/ч, а расстояния от пункта A до пункта C и от пункта B до пункта C равны 275 км?

7. Сфера с диаметром $AD = \sqrt{3}$ касается плоскости треугольника ABC в точке A . Отрезки BD и CD пересекают сферу в точках M и N соответственно. Найдите длину отрезка MN , если $AB = 3$, $AC = 3\sqrt{5}$, а $\angle BDC = \frac{\pi}{3}$.

8. При каких значениях параметра $a \geq 1$ уравнение

$$\sin\left(\frac{4}{13}x\right) \operatorname{tg} x = 0$$

имеет ровно шесть различных корней на отрезке $[2a\pi; (a^2 + 1)\pi]$? Укажите эти корни.

Вариант 11

(географический факультет)

1. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{31}-\sqrt{21}}(x^2 - 9) \geq 0.$$

2. Решите уравнение

$$|\cos x| - \sqrt{3} \sin\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) = 1.$$

3. Числа a , b , c в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию, а числа $a - c$, $c - b$, $2a$ в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Какое минимальное значение может принимать число $2a^2 - 4b^2 - c^2 + 4bc + 6a$?

4. Стороны ромба $EFGH$ являются гипотенузами равнобедренных прямоугольных треугольников EAF , FDG , GCH , HBE , причем все эти треугольники имеют общие внутренние точки с ромбом $EFGH$. Сумма площадей четырехугольника $ABCD$ и ромба $EFGH$ равна 12. Найдите GH .

5. Решите уравнение:

$$4 \arcsin(2^x - 7) - \arccos(5^x - 124) = \frac{6\pi}{x}.$$

6. При каких целых значениях параметра k система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y \leq k^2 + 10k + 20, \\ 5x^2 + 5y^2 - 2kx + 4ky \leq 5 - k^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Вариант 12

(филологический факультет)

1. Решите уравнение

$$3 \cos 2x + 4 \sin x = 1.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_{1/12}(2x^2 - 1)} > \frac{1}{\log_{1/4} x} + \frac{1}{\log_{1/3} x}.$$

3. В трапеции $ABCD$ стороны AB и CD параллельны и $CD = 2AB$. На сторонах AD и BC выбраны точки P и Q соответственно так, что $DP : PA = 2$, $BQ : QC = 3 : 4$. Найдите отношение площадей четырехугольников $ABQP$ и $CDPQ$.

4. Писатель-западник (З) и писатель-славянофил (С) опубликовали по одной книге. З употребляет букву «ф» в среднем на страницу текста на 75% чаще, чем С. Тираж книги писателя С на 5% больше, чем тираж книги писателя З. Количество страниц в книге у З на 10% меньше, чем количество страниц в книге у С. На сколько процентов в опубликованных текстах З букв «ф» больше или меньше, чем в текстах С?

5. При каких значениях параметра a на плоскости Oxy существует круг, содержащий все точки, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} 2y - x \leq 1, \\ y + 2x \leq 2, \\ y + ax \leq -1? \end{cases}$$

Вариант 13

(экономический факультет, отделение экономики)

1. Решите неравенство

$$|x^2 - 8x + 15| \leq |15 - x^2|.$$

2. Брокерская фирма приобрела два пакета акций, а затем продала их за общую сумму 7 миллионов 680 тысяч рублей, получив при этом 28% прибыли. За какую сумму фирма приобрела каждый из пакетов акций, если при продаже первого пакета прибыль составила 40%, а при продаже второго – 20%?

3. На координатной плоскости заданы точки $A(0; 2)$, $B(1; 7)$, $C(10; 7)$ и $D(7; 1)$. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$, где E – точка пересечения прямых AC и BD .

4. Решите неравенство

$$\log_2(2^x - 3) \log_{\sqrt{2}}(4^{x+2} - 12 \cdot 2^{x+3} + 144) < 32.$$

5. Решите уравнение

$$\sqrt{3} \cos\left(\pi\sqrt{x} \sqrt{\frac{6}{x} - x - 4}\right) + 3 \sin\left(\pi x \sqrt{\frac{6}{x^2} - \frac{4}{x} - 1}\right) = \sqrt{12}.$$

6. Центры двенадцати шаров равных радиусов совпадают с серединами ребер правильной шестиугольной пирамиды. Найдите величину двугранного угла при ребре основания пирамиды, если известно, что шар, вписанный в пирамиду, касается всех двенадцати данных шаров.

7. Найдите наибольшие целочисленные значения u и v , для которых уравнение

$$364a^2u - 55v = -20020a^4$$

выполняется ровно при четырех различных значениях a , два из которых относятся как 3 : 5.

Вариант 14

(экономический факультет, отделение менеджмента)

1. Решите уравнение

$$\cos x + \cos 3x = \sqrt{3} \cos 2x.$$

2. Решите уравнение

$$|x^2 - 8x + 15| = |15 - x^2|.$$

3. Антикварный магазин приобрел два предмета, а затем продал их за общую сумму 39900 рублей, при этом прибыль составила 40%. За сколько магазин купил каждый предмет, если при продаже первого предмета прибыль составила 30%, а при продаже второго – 55%?

4. На координатной плоскости заданы точки $A(1; 9)$, $C(5; 8)$, $D(8; 2)$ и $E(2; 2)$. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$, где B – точка пересечения прямых EC и AD .

5. Решите неравенство

$$\log_3(3^x - 1) \log_9(9^{x+2} - 6 \cdot 3^{x+3} + 81) < 3.$$

6. Решите уравнение

$$\sqrt{2} \sin\left(\pi\sqrt{x} \sqrt{\frac{5}{x} - x + 6}\right) + \sqrt{6} \cos\left(\pi x \sqrt{\frac{5}{x^2} + \frac{6}{x} - 1}\right) = \sqrt{8}.$$

Вариант 15

(факультет психологии)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{8-x} = \sqrt{15}.$$

2. Решите неравенство

$$\log_2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{3x+4}{4x-8} \leq 0.$$

3. Решите уравнение

$$3 \sin^2 x - 3 \cos x - 6 \sin x + 2 \sin 2x + 3 = 0.$$

4. В трапеции $BCDE$ основание $BE = 13$, основание $CD = 3$, $CE = 10$. На описанной около $BCDE$ окружности взята отличная от E точка A так, что $CA = 10$. Найдите длину отрезка BA и площадь пятиугольника $ABCDE$.

5. При каждом значении параметра a решите неравенство

$$ax^4 + x^3 + (2a + 3a^3)x^2 + 2x + 6a^3 > 0.$$

Вариант 16

(факультет социологии)

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{|x|} \geq 2.$$

2. Решите уравнение

$$\log_{\sin x}(3 \sin x - \cos 2x) = 0.$$

3. В городе N за последний год численность населения уменьшилась на 4%, а число безработных увеличилось на 5%. Сколько процентов от общего числа жителей составляют безработные, если год назад их было 8%?

4. Диагональ AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ является диаметром описанной около него окружности. Найдите отношение S_{ABC} и S_{ACD} , если известно, что диагональ BD делит AC в отношении 2 : 1 (считая от точки A), а $\angle BAC = 30^\circ$.

5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых расстояние между корнями уравнения

$$ax^2 + (2a + 2)x + (a + 3) = 0$$

больше 1.

6. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{\frac{2+x}{x}} - \sqrt[3]{\frac{2-6x}{x}} = 1.$$

Вариант 17

(Институт стран Азии и Африки)

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2x^2 - 5x - 3}}{6 + 3\sqrt{3x - 2x^2}} \geq 0.$$

2. Найдите все решения уравнения

$$5 \sin^2 2x + 8 \cos^3 x = 8 \cos x,$$

удовлетворяющие условиям $\frac{3}{2}\pi \leq x \leq 2\pi$.

3. Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми равно 10 км, отправились в разное время пешеход, всадник и велосипедист. Известно, что их скорости постоянны и образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Первым из A вышел пешеход, которого в середине маршрута обогнал велосипедист, выехавший из A на 50 минут позже пешехода. В пункт B пешеход прибыл одновременно с всадником, выехавшим из A на 1 час 15 минут позже пешехода. Определите скорости участников маршрута.

4. Решите неравенство

$$(1 + \log_3 x) \sqrt{\log_{3x} 3 \sqrt{\frac{x}{3}}} \leq 2.$$

5. В треугольнике ABC даны длины сторон $AB = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{5}$ и $AC = 3$. Сравните величину угла BOC и $112,5^\circ$, если O – центр вписанной в треугольник ABC окружности.

6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a(x+2) + y = 3a, \\ a + 2x^3 = y^3 + (a+2)x^3 \end{cases}$$

имеет не более двух решений.

7. Решите уравнение

$$\frac{3 \cos x + 2 \sin x}{\cos x} = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \frac{\cos x + \sin x}{\cos x} \sqrt{3 + 2x - 2y + 2xy - x^2 - y^2}.$$

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Гладкая доска, лежащая на цилиндре, может свободно вращаться вокруг проходящей через ее конец оси, прикрепленной к столу. Ось цилиндра и ось вращения доски параллельны. Определите угловую скорость вращения доски в тот момент, когда цилиндр катится по столу без проскальзывания с угловой скоростью ω , удаляясь от закрепленного конца доски, а доска образует со столом угол α (рис.1).

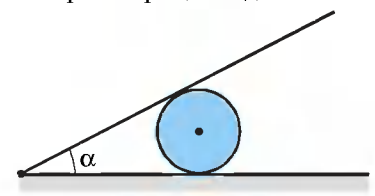


Рис. 1

2. На шероховатом го-

ризонтальном дне бочки, заполненной водой, лежит диск толщиной $h = 4$ мм, изготовленный из материала с плотностью $\rho = 2,4$ г/см³. Радиус диска $R = 15$ см. В бочку вертикально опустили тонкостенную трубку радиусом $r = 5$ мм, в которую вставлен поршень. Нижняя плоскость поршня совпадает с торцом трубки. Трубку плотно прижали к верхней плоскости диска так, что ее ось оказалась смещенной относительно оси диска на расстояние $b = 5,8$ мм. Затем поршень подняли вверх, зафиксировали и стали медленно поднимать трубку. На какой минимальной глубине будет находиться верхняя плоскость диска, когда он оторвется от трубки, если до момента отрыва вода не просачивалась в трубку? Атмосферное давление считать нормальным.

3. На гладкой невесомой нерастяжимой нити висит блок, к оси которого жестко прикреплен груз. Нить прикреплена к легким пружинам, другие концы которых закреплены на

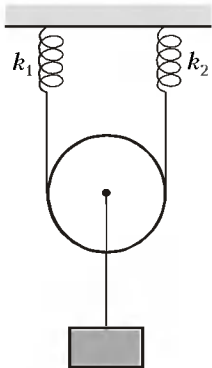


Рис. 2

потолке так, что части нити, не лежащие на блоке, вертикальны и совпадают с осями пружин (рис. 2). Жесткость первой пружины k_1 , второй k_2 . Масса блока с грузом M . При какой амплитуде вертикальные колебания груза могут быть гармоническими?

4. В столе, равномерно вращающемся вокруг вертикальной оси, сделана сферическая ямка, центр которой лежит на оси вращения. В ямке движется небольшая гладкая шайба, периодически проходя через ее нижнюю точку и поднимаясь относительно этой точки на максимальную высоту, много меньшую радиуса R ямки. Двигаясь вверх,

шайба в некоторый момент оказывается на высоте, в $k = 2$ раза меньшей максимальной. В следующий раз на этой же высоте шайба оказывается через n оборотов стола. Найдите период обращения стола.

5. В гладком вертикальном цилиндре под поршнем массой M содержится ν молей неона при температуре T_0 . Площадь поперечного сечения цилиндра S , а поршень удерживают в таком положении, что газ занимает объем V . Затем поршень отпускают, и он после нескольких колебаний занимает определенное положение. Пренебрегая теплообменом неона с окружающими телами, найдите его температуру при новом равновесном положении поршня, зная, что неон все время находится в газообразном состоянии, а давление вне цилиндра равно нулю.

6. Зависимость от температуры молярной теплоемкости c_m идеального одноатомного газа в цикле тепловой машины, который состоит из трех последовательных процессов 1-2, 2-3, 3-1, изображена на рисунке 3, где R — универсальная газовая постоянная. Найдите отношение давлений газа при максимальной T_2 и минимальной T_1 температурах в этом цикле, если КПД машины равен η , количество газа в цикле неизменно и $T_2/T_1 = n$.

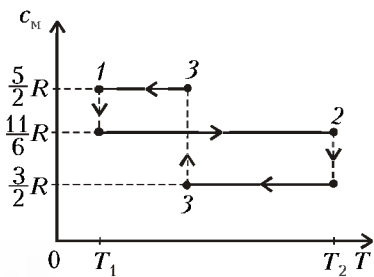


Рис. 3

7. Две проволоки, изготовленные из материала с малым температурным коэффициентом сопротивления, подключают к аккумулятору с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением один раз параллельно, а другой раз последовательно. При первом включении скорости дрейфа носи-

телей заряда в проволоках оказались одинаковыми, а во втором случае скорость в первой проволоке уменьшилась в $k = 5$ раз по сравнению с предыдущим случаем. Найдите отношение диаметров проволок.

8. На каркас, состоящий из двух коаксиальных цилиндров с радиусами r и R , вращающийся вокруг закрепленной горизонтальной оси OO , намотана изолированная тонкая проволока так, как показано на рисунке 4. К нижнему концу проволоки прикреплен груз, а ее верхний конец тянут с постоянной скоростью v вертикально вверх. Цилиндры находятся в однородном магнитном поле, индукция которого равна B и параллельна оси цилиндров. Найдите разность потенциалов между концами проволоки для моментов времени, когда на цилиндре радиусом R остается хотя бы часть проволоки.

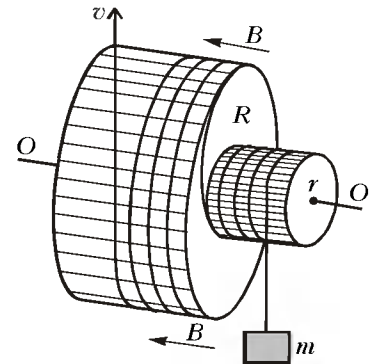


Рис. 4

9. На плоскую поверхность линзы, находящейся в воздухе, перпендикулярно этой поверхности падает узкий пучок света, параллельный главной оптической оси линзы. При этом на экране, расположенном за линзой, наблюдается светлое пятно, диаметр которого в k раз ($k > 1$) меньше диаметра падающего пучка. Найдите показатель преломления n стекла линзы, зная, что при погружении линзы с экраном (при неизменном расстоянии между ними) в жидкость с показателем преломления n_1 диаметр светлого пятна на экране не изменяется.

10. Излучение с длинами волн $\lambda_1 = 589,0$ нм и $\lambda_2 = 589,6$ нм от точечного источника падает на экран с двумя малыми отверстиями, расположенными симметрично относительно оси, проходящей через источник перпендикулярно плоскости экрана. На расстоянии $L = 0,7$ м за этим экраном расположен второй экран, параллельный первому. На втором экране на расстоянии $b = 5$ см от центра картины, там, где максимум, соответствующий одной длине волны, накладывается на минимум, соответствующий другой, интерференционные полосы исчезают первый раз. Найдите расстояние d между отверстиями.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Лестница состоит из трех одинаковых гладких ступенек шириной $a = 30$ см и такой же высоты (рис. 5). На верхней ступеньке расположена в плоскости рисунка невесомая пружина жесткостью $k = 30$ Н/м, правым концом прикрепленная к неподвижной стенке, а левым упирающаяся в лежащий на ступеньке маленький шарик массой $m = 100$ г. Шарик сдвигают вправо, сжимая пружину, после чего отпускают без начальной скорости. До какой максимальной величины Δl_{\max} можно сжать пружину, чтобы выпущенный шарик по одному разу коснулся средней и нижней ступенек? Удар

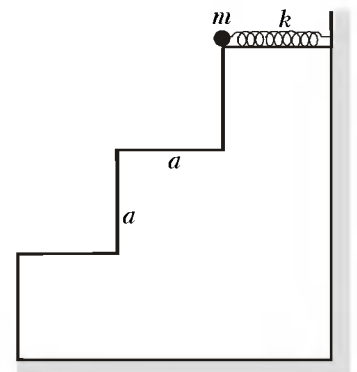


Рис. 5

шарика о ступеньку считать абсолютно упругим, трение и сопротивление воздуха не учитывать. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

2. На шероховатом столе лежит доска массой $M = 1 \text{ кг}$ и длиной $L = 0,5 \text{ м}$ так, что за край стола выступает ее часть длиной αL , где $\alpha = 1/4$ (рис.6). Какую минимальную скорость v_0 нужно сообщить маленькому бруску массой $m = 1 \text{ кг}$, находящемуся на левом конце доски, чтобы в результате его перемещения левый конец доски приподнялся над столом? Коэффициент трения между бруском и доской $\mu = 0,1$. Доска при движении бруска не скользит по столу. Толщиной доски пренебречь, ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

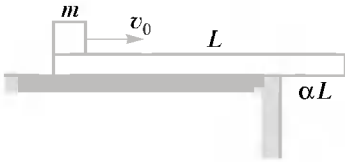


Рис. 6

3. Два маленьких тела начинают одновременно соскальзывать без начальной скорости из точки A: первое по внутренней поверхности гладкой сферы до ее нижней точки B, второе по гладкой наклонной плоскости AB (рис.7). Пренебрегая трением, найдите, во сколько раз α отличаются времена движения этих тел от начальной до конечной точек. Расстояние AB намного меньше радиуса сферы.

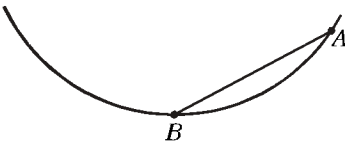


Рис. 7

4. Тело массой $m = 0,1 \text{ кг}$, посаженное на гладкий горизонтальный стержень, связано пружиной жесткостью $k = 10 \text{ Н/м}$ с неподвижной стенкой. Тело смещают от положения равновесия на $x_0 = 10 \text{ см}$ и отпускают без начальной скорости. Найдите среднюю скорость тела $v_{\text{ср}}$ за время, в течение которого оно проходит из крайнего положения путь $x_0/2$.

5. В вертикально расположенном цилиндре находится кислород массой $m = 64 \text{ г}$, отделенный от атмосферы поршнем, который соединен с дном цилиндра пружиной жесткостью $k = 8,3 \cdot 10^2 \text{ Н/м}$. При температуре $T_1 = 300 \text{ К}$ поршень располагается на расстоянии $h = 1 \text{ м}$ от дна цилиндра. До какой температуры T_2 надо нагреть кислород, чтобы поршень расположился на высоте $H = 1,5 \text{ м}$ от дна цилиндра? Универсальная газовая постоянная $R = 8,3 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$, молярная масса кислорода $M = 32 \text{ г/моль}$.

6. Вертикальная цилиндрическая трубка с запаянными концами разделена на две части тонким горизонтальным поршнем, способным перемещаться вдоль нее без трения. Верхняя часть трубки заполнена неонам, а нижняя – гелием, причем массы газов одинаковы. При некоторой температуре поршень находится точно посередине трубки. После того как трубку нагрели, поршень переместился вверх и стал делить объем трубки в отношении 1:3. Определите, во сколько раз α возросла абсолютная температура газов. Молярная масса неона $M_{\text{Ne}} = 20 \text{ г/моль}$, молярная масса гелия $M_{\text{He}} = 4 \text{ г/моль}$.

7. Два маленьких тела с равными зарядами q расположены на внутренней поверхности гладкой непроводящей сферы радиусом R . Первое тело закреплено в нижней точке сферы, а второе может свободно скользить по ее поверхности. Найдите массу второго тела, если известно, что в состоянии равновесия оно находится на высоте h от нижней точки сферы.

8. Кагушка индуктивностью $L = 0,4 \text{ Гн}$ с сопротивлением обмотки $R = 2 \text{ Ом}$ подключена параллельно с резистором

сопротивлением $R_1 = 8 \text{ Ом}$ к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 6 \text{ В}$ и внутренним сопротивлением $r = 0,2 \text{ Ом}$ (рис.8). Какое количество теплоты Q выделится в резисторе после отключения источника?

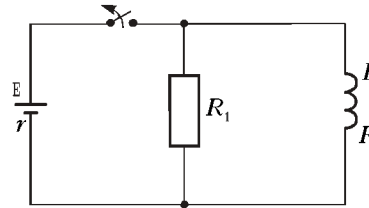


Рис. 8

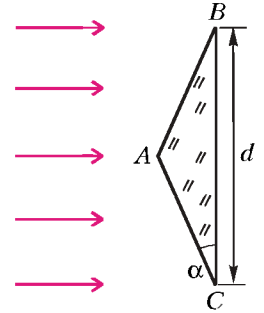


Рис. 9

9. На равнобедренную стеклянную призму падает широкий параллельный пучок света, перпендикулярный грани BC, ширина которой $d = 5 \text{ см}$ (рис.9). На каком расстоянии l от грани BC преломленный призмой свет разделится на два не перекрывающихся пучка? Показатель преломления стекла $n = 1,5$, угол при основании призмы $\alpha = 5,7^\circ$. При расчетах учесть, что для малых углов $\text{tg } \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$.

10. Точечный источник света находится на главной оптической оси рассеивающей линзы. Если поместить источник в точку A (рис.10), то его изображение расположится в точке B. Если поместить источник в точку B, то его изображение расположится в точке C. Зная расстояние $l_1 = 20 \text{ см}$ между точками A и B и расстояние $l_2 = 10 \text{ см}$ между точками B и C, найдите фокусное расстояние линзы.

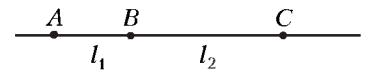


Рис. 10

Химический факультет

1. По спускающемуся эскалатору идет пассажир со скоростью $v = 1 \text{ м/с}$ относительно эскалатора. Скорость эскалатора $u = 1 \text{ м/с}$, общее количество ступеней $N = 100$. Сколько ступеней пройдет пассажир, спускаясь по эскалатору?

2. На двух кубиках, плавающих в воде, покоится невесомая палочка (рис.11). Размеры ребер кубиков $a_1 = 0,1 \text{ м}$ и $a_2 = 0,2 \text{ м}$. Сколько воды нужно налить в один из кубиков, чтобы палочка лежала горизонтально? Массы кубиков $m_1 = 0,05 \text{ кг}$ и $m_2 = 0,1 \text{ кг}$. Толщиной стенок пренебречь. Плотность воды $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$.

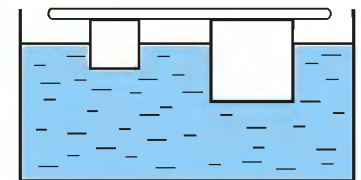


Рис. 11

3. Между двумя точками звуковой волны, колеблющимися в одинаковых фазах, укладывается $N = 825$ длин волн. При повышении температуры на 1 К скорость распространения звука возрастает на $0,2\%$. Найдите минимальное повышение температуры, при котором эти две точки будут совершать колебания в противофазе.

4. Какую работу нужно совершить над одним молем идеального газа для его изобарического сжатия, если концентрация молекул в конечном состоянии в $k = 2$ раза больше, чем в начальном? Первоначальная температура газа $T = 300 \text{ К}$. Универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$.

5. В горизонтальном цилиндрическом сосуде перемещается без трения поршень, который связан с основанием цилиндра пружиной. Недеформированному состоянию пружины соответствует крайнее левое положение поршня. Слева от поршня находится идеальный газ, занимающий объем $V_1 =$

$= 2$ л при давлении $p_1 = 10^5$ Па. Со стороны пружины – вакуум. Какую работу совершит газ при увеличении объема в 2 раза?

6. Замкнутый цилиндрический сосуд сечением $S = 20 \text{ см}^2$ разделен поршнем массой $M = 5 \text{ кг}$ на две части. Под поршнем при начальной температуре $t_0 = 0 \text{ °C}$ находится вода, сверху – вакуум. Поршень связан с верхним основанием цилиндра пружиной жесткостью $k = 15 \text{ Н/м}$. Вначале пружина недеформирована. Определите массу пара под поршнем при нагревании воды до температуры $t = 100 \text{ °C}$. Молярная масса воды $M = 0,018 \text{ кг/моль}$, универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$, ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$, атмосферное давление $p_0 = 10^5 \text{ Па}$. Трением пренебречь.

7. Сосуд представляет собой прямоугольный параллелепипед. Две противоположные боковые грани – металлические пластины, остальные грани – диэлектрики. Расстояние между пластинами $l = 1 \text{ мм}$, что значительно меньше размеров двух других сторон параллелепипеда. Металлические пластины присоединены к клеммам источника постоянного напряжения $U = 10 \text{ В}$. В сосуд наливают диэлектрическую жидкость объемом $V = 20 \text{ см}^3$ с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 21$. Определите, какой заряд пройдет при этом через баллистический гальванометр, включенный в цепь последовательно. Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 9 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$.

8. В бассейне с водой глубиной $H = 2 \text{ м}$, обладающем зеркальным дном, находится точечный источник света на расстоянии $h = H/2$ под поверхностью воды. Определите

радиус светового пятна на поверхности бассейна. Показатель преломления воды $n = 4/3$.

9. Определите, какова должна быть связь преломляющего угла стеклянной призмы φ с показателем преломления призмы n (рис.12), если углы падения луча и выхода его из призмы одинаковы и равны α , причем $\text{tg } \alpha = n$.

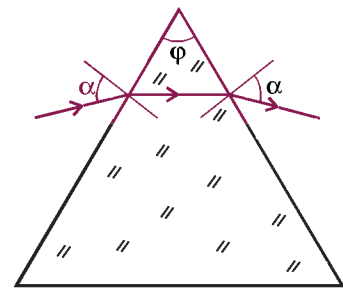


Рис. 12

10. Узкий пучок света с длиной волны $\lambda = 330 \text{ нм}$ падает на металлическую сферу радиусом $R = 0,144 \text{ м}$. Какой максимальный заряд может образоваться на сфере в результате фотоэффекта? Постоянная Планка $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$, скорость света $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$, работа выхода электрона из металла $A = 4 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$, постоянная $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2$, заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$.

Публикацию подготовили

П.Бородин, В.Власов, В.Воронин, Е.Григорьев, Д.Денисов, Н.Лёвшин, Г.Медведев, А.Невзоров, А.Павликов, В.Панферов, В.Погожев, М.Потапов, А.Разгулин, И.Сергеев, В.Тихомиров, В.Ушаков, М.Федотов, С.Чесноков, Е.Шикин, Б.Щедрин

И Н Ф О Р М А Ц И Я

Заочная олимпиада для абитуриентов

Факультет наук о материалах (сокращенно ФНМ) организован в 1991 году как междисциплинарное подразделение при участии механико-математического, физического и химического факультетов Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова. (Подробную информацию о ФНМ можно найти в «Кванте» №2 за 2001 г.)

Студенты ФНМ получают всестороннюю математическую подготовку, приобретают глубокие познания в области химии и физики материалов. Это позволяет выпускникам факультета работать в ведущих материаловедческих научных центрах (как в России, так и за рубежом), создавая и диагностируя новые конструкционные и функциональные материалы, обладающие уникальными свойствами.

Поэтапная система приема на ФНМ предоставляет абитуриентам две возможности для получения экзаменационных оценок.

Первая возможность – участие в предметных олимпиадах. О заочном туре олимпиад подробно рассказывается ниже. Очные туры олимпиад пройдут в два этапа: 20–21 апреля 2002 года – по математике и физике или математике и химии (по выбору абитуриента) и 20 мая – по математике.

Вторая возможность – участие во вступительных экзаменах в июле 2002 года по трем предметам: математика, физика или химия (по выбору), русский язык.

Результаты, полученные победителями олимпиад, могут быть засчитаны при сдаче вступительных экзаменов. Кроме того, победителям предоставляется право перезачесть

оценку по сочинению, полученную на выпускных экзаменах в общеобразовательной школе, в качестве экзаменационной.

Если вас заинтересовала эта информация – приглашаем принять участие в олимпиаде ФНМ МГУ 2002 года. Участвовать в заочном туре могут учащиеся выпускных классов средних школ и лица с законченным средним образованием из всех государств СНГ. Успешно решившие задания заочного тура получают персональные приглашения для участия в очных турах.

Участие в предметных олимпиадах бесплатное.

Ниже приводится текст заданий заочного тура олимпиад по физике и математике. Заочное задание по химии (и дополнительную информацию о ФНМ) вы можете найти в справочнике для поступающих в МГУ «Абитуриент-2002» (см. также статью «10 лет факультету наук о материалах МГУ» в третьем номере журнала «Химия и жизнь» за 2001 г.).

Работа заочного тура должна быть написана в отдельной тетради с указанием фамилии, имени и отчества абитуриента, его домашнего адреса, телефона и номера школы. К письму приложите конверт с обратным адресом.

Выполненные задания следует выслать *не позднее 15 марта 2002 года* по адресу: 119899 Москва, ГСП-3, Ленинские горы, МГУ, Химический факультет, ФНМ, приемная комиссия.

Телефон: 932-88-77.

Электронный адрес: teach@hsms.msu.ru

Дополнительную информацию можно получить на сайте <http://www.hsms.msu.ru>

Задачи заочного тура олимпиады

Физика

1. Два тела бросили одновременно из одной точки: одно вертикально вверх, другое под углом $\theta = 60^\circ$ к горизонту. Начальная скорость каждого тела равна $v_0 = 25$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите расстояние между телами через $\tau = 1,7$ с. (10 баллов)

2. Под каким углом к горизонту надо бросить тело массой M , чтобы максимальная высота его подъема равнялась дальности полета, если на тело действует с постоянной силой F горизонтальный попутный ветер? Ускорение свободного падения равно g . (10 баллов)

3. На столе лежит доска массой M , на одном конце которой находится брусок массой m . Бруску сообщают скорость v_0 вдоль доски. Какое время вся система будет находиться в движении, если коэффициент трения между доской и бруском μ_1 , а между доской и столом μ_2 ? (10 баллов)

4. Температура одного моля идеального одноатомного газа меняется по закону $T = aV^2$. Найдите теплоемкость газа в этом процессе. Универсальная газовая постоянная равна R . (10 баллов)

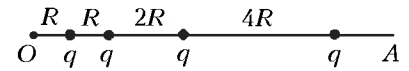
5. В цилиндре под поршнем находится воздух при температуре $t_1 = 100^\circ\text{C}$, имеющий относительную влажность $\varphi = 40\%$. Во сколько раз следует изменить объем воздуха, чтобы при его охлаждении до температуры $t_2 = 20^\circ\text{C}$ на стенках сосуда выпала роса? Нормальное атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, давление насыщенного водяного пара при температуре 20°C $p_{\text{н}} = 2,3 \cdot 10^3$ Па. (10 баллов)

6. В двухэлектродной лампе напряжение между плоскими электродами составляет 22 кВ. Электроны ударяют об анод с общей силой 1 мкН. Удары неупругие. Какой силы ток течет через лампу? Отношение заряда электрона к его массе равно $1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг. (10 баллов)

7. Пучок протонов влетает в однородное магнитное поле с индукцией 0,1 Тл перпендикулярно линиям индукции. Протоны движутся по дуге окружности радиусом 20 см и попадают на заземленную мишень. Найдите тепловую мощность, выделяющуюся в мишени, если сила тока в пучке 0,1 мА. Отношение заряда протона к его массе равно $0,96 \cdot 10^8$ Кл/кг. (10 баллов)

8. На луче OA (см. рисунок) расположено бесконечное множество точечных зарядов величиной q так, что расстояния между очередными двумя соседними зарядами удваива-

ется. Определите потенциал поля в точке O (начало луча), где заряда нет, а до первого заряда расстояние равно R . Электрическая постоянная равна ϵ_0 . (10 баллов)



9. В области пространства, где имеются одновременно однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,2$ Тл и однородное электрическое поле с напряженностью E , движется электрический заряд. Известно, что в тот момент времени, когда скорость заряда равна $v = 500$ м/с и направлена перпендикулярно вектору магнитной индукции, ускорение заряда равно нулю. Пренебрегая силой тяжести, определите величину напряженности электрического поля. (10 баллов)

10. Непрерывное излучение лазера мощностью 600 Вт продолжалось 20 мс. Излученный свет попал на кусочек идеально отражающей фольги массой 2 мг, расположенный перпендикулярно направлению распространения света. Какую скорость приобрел кусочек фольги? (10 баллов)

Математика

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x+5} < \sqrt{x-2} + \sqrt{x-3}. \quad (20 \text{ баллов})$$

2. Проверьте справедливость равенства

$$\arcsin \frac{4}{5} + \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} = \text{arccctg} \frac{2}{11}. \quad (20 \text{ баллов})$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{\lg(-x)} = \lg \sqrt{x^2}. \quad (10 \text{ баллов})$$

4. Группа студентов, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки 2, 3, 4 и 5. Сумма полученных оценок равна 93, причем оценок 3 больше, чем пятерок, но меньше, чем оценок 4. Кроме того, число четверок делилось на 10, а число оценок 5 было четным. Определите, сколько каких оценок получила группа. (25 баллов)

5. В прямоугольном треугольнике ABC с острым углом 30° проведена высота CD из вершины прямого угла C . Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD , если меньший катет треугольника ABC равен 1. (25 баллов)

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №4 за 2001 г.)

1. Преобразовав выражение в правой части исходного тождества к виду

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 3a^2b + 3a^2c + 3bc^2 + 3b^2c - 18abc$$

запишем разность между правой и левой его частями:

$$3(ab^2 + ac^2 + a^2b + a^2c + bc^2 + b^2c - 6abc) = 0.$$

Последнее равенство равносильно тождеству

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 = 0.$$

Поскольку числа a, b, c положительны, то это равенство возможно лишь в одном единственном случае: $a = b = c$.

2. Для произвольных точек A, B, C, D, E, F, K плоскости

справедливы векторные равенства

$$\vec{AF} = \vec{AD} + \vec{DK} + \vec{KF}, \quad \vec{CE} = \vec{BE} - \vec{BC}.$$

Учитывая, что для параллелограммов $ABCD$ и $CEFK$ справедливы равенства

$$\vec{KF} = \vec{CE}, \quad \vec{AD} = \vec{BC},$$

выводим

$$\vec{AF} = \vec{DK} + \vec{BE}.$$

По условию $\vec{DK} \parallel \vec{BE}$, поэтому $\vec{AF} \parallel \vec{DK}$, $\vec{AF} \parallel \vec{BE}$. Векторы \vec{DK} и \vec{BE} могут быть сонаправлены (рис.1) или противоположно направлены (рис.2). В первом случае

$|\vec{AF}| = |\vec{BE}| + |\vec{DK}| = a + b$; во втором случае $|\vec{AF}| = a - b$ или $|\vec{AF}| = b - a$ в зависимости от того, какой из векторов \vec{BE} или \vec{DK} длиннее.

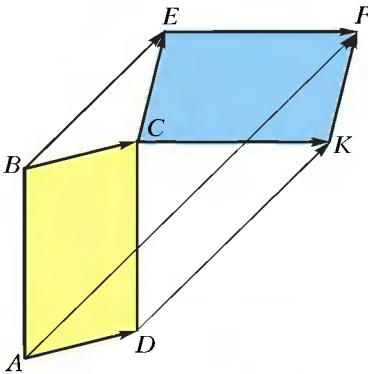


Рис. 1

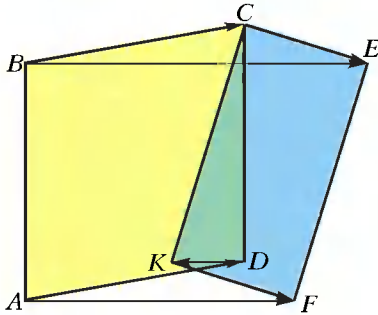


Рис. 2

3. а) Верно. Пусть x – наименьшее, а X – наибольшее из чисел x_1, x_2, \dots, x_{10} . При указанном в условии задачи преобразовании числа x и X могут перейти либо сами в себя (при $a > 0$), либо друг в друга (при $a < 0$). В первом случае из равенств

$$\begin{cases} x = ax + b, \\ X = aX + b \end{cases}$$

находим $a = 1$;

во втором – из равенств

$$\begin{cases} X = ax + b, \\ x = aX + b \end{cases}$$

находим $a = -1$.

б) Неверно. Для доказательства достаточно, например, рассмотреть преобразование с параметрами $a = -1$ и $b = 11$ десяти натуральных чисел $1, 2, \dots, 10$.

4. Нет.

пешек на всех вертикалях (т.е., собственно, на всей доске) делится на 3. Но, как мы знаем, общее количество пешек равно либо 16, либо 32, что на 3 не делится. Противоречие!

5. а) Примем сторону одного маленького квадратика за 1, и пусть квадрат $ABCD$ – это наш гриб. Проекции одного червяка на стороны AB и AD – отрезки длин m и n – натуральные числа. Ясно, что червяк целиком умещается в прямоугольнике $m \times n$; в частности, так как площадь червяка равна 5, $mn \geq 5$. Легко проверить, что тогда и $m + n \geq 5$. Рассмотрим теперь все проекции 13 червячков на стороны AB или AD . В силу вышесказанного, сумма этих 26 отрезков не меньше чем $13 \times 5 = 65$. Но сумма длин AB и AD равна 32. Так как $2 \times 32 = 64 < 65$, то найдется точка на одной из сторон AB или AD , которая принадлежит проекциям на эту сторону по крайней мере трех червячков. Разрез, проходящий через эту точку перпендикулярно стороне, которой она принадлежит, пройдет через всех червячков, в чьих проекциях она содержится.

б) Нет. Нетрудно поместить четырех червячков в квадрат 5×5 так, чтобы любая прямая, параллельная стороне квадрата, пересекала не более двух червячков (рис.3). Расположив три таких квадрата 5×5 «по диагонали» в квадрате 16×16 , получим пример 12 червячков, никаких трех из которых нельзя пересечь линией, параллельной стороне квадрата.

Рис. 3

Докажем это методом «от противного». Допустим, такая расстановка возможна. Пронумеруем вертикали слева направо, а горизонтали – снизу вверх. Рассмотрим различные варианты.

1) На первой горизонтали – 1 пешка. Тогда на второй горизонтали – 3 пешки. На третьей горизонтали должно быть либо в 3 раза больше, либо в 3 раза меньше пешек, чем на второй, т.е. либо 9, либо 1. Так как в каждой горизонтали 8 клеток, то первое невозможно, поэтому на третьей горизонтали стоит 1 пешка. Далее, рассуждая так же, получаем, что на четвертой горизонтали стоят снова 3 пешки, на пятой – опять одна и т.д. Тогда суммарное число пешек на доске равно $1 + 3 + 1 + 3 + 1 + 3 + 1 + 3 = 16$.

Если же на первой горизонтали стоят 3 пешки, то ситуация получается та же, но «в обратном порядке», т.е. на второй горизонтали – 1 пешка, на третьей – 3, на четвертой – снова 1 и т.д., и всего на доске такое же самое количество пешек: 16.

2) На первой горизонтали – 2 пешки. Рассуждая аналогично, выясняем, что на второй горизонтали находятся 6 пешек, на третьей – 2, на четвертой – снова 6, на пятой – опять 2 и т.д. Тогда суммарное число пешек на доске равно $2 + 6 + 2 + 6 + 2 + 6 + 2 + 6 = 32$.

Ну а если на первой горизонтали стоят, наоборот, 6 пешек, то ситуация получается та же, но в «обратном порядке», и количество пешек на доске то же самое: 32.

3) Остальные значения количества пешек на первой горизонтали: 4, 5, 7 или 8 – невозможны, так как эти значения не делятся на 3, поэтому на второй горизонтали может быть лишь втрое больше пешек (но не втрое меньше), однако втрое большее количество пешек во всех случаях больше 8.

Итак, общий вывод: на доске либо 16, либо 32 пешки.

Рассмотрим теперь первые две вертикали. На одной из них вдвое больше пешек, чем на второй. Пусть на той вертикали, где меньше пешек, их количество равно n . Тогда на другой вертикали число пешек равно $2n$. Суммарное же количество пешек на первых двух вертикалях равно $n + 2n = 3n$, т.е. делится на 3. Аналогично, суммарные количества пешек на 3-й и 4-й вертикалях, на 5-й и 6-й вертикалях, на 7-й и 8-й вертикалях также делятся на 3. Поэтому и суммарное количество

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Ускорение: а) направлено вертикально вниз; б) отклонено от вертикали в направлении, противоположном движению снаряда.
2. Выталкивающая сила, действующая в воздухе на шар, больше выталкивающей силы, приложенной к гире, поскольку объем шара больше объема гири. В вакууме выталкивающие силы исчезнут, и шар перетянет.
3. Нет. Жидкость в трубке находится в неустойчивом равновесии, поэтому во втором случае ртуть, скорее всего, вытечет из трубки, а в образовавшийся вакуум ворвется вода.
4. Если над ртутью воздух отсутствует, объем пузырька меняться не будет.
5. На верхний торец трубки сверху действует сила атмосферного давления, которая ничем не компенсируется, так как над ртутью в трубке вакуум. Поэтому показания динамометра являются суммой веса трубки и силы атмосферного давления.
6. Нагнетающие насосы будут, всасывающие – нет.
7. При откачивании воздуха внутреннее давление воздуха в пузырьке становится больше внешнего, поэтому пузырек раздувается.
8. На уровне жидкости в сосуде давление равно нулю. А давление в точке, находящейся выше уровня жидкости в сосуде, меньше давления на этом уровне, значит, давление отрицательное – жидкость растянута.
9. Нет. Например, в очень высокой вертикальной трубе (сравнимой с высотой атмосферы) воздух займет лишь нижнюю ее часть.
10. Для уменьшения теплопроводности.
11. Путем излучения, так как теплопроводность или конвекция в межпланетных пространствах практически невозможны.
12. Нет. Изменение температуры тела будет зависеть от ба-

ланса между излученной и поглощенной энергией.

13. При втекании порции газа в сосуд окружающий газ совершает над ней работу, которая идет на повышение внутренней энергии газа в сосуде и приводит к росту его температуры. Однако через достаточно большой промежуток времени температура выравнивается.

14. Температура газа будет уменьшаться за счет перехода части внутренней энергии газа в кинетическую энергию струи.

15. Вода одновременно будет кипеть и замерзать.

16. Нет. Для передачи звуковых волн нет среды.

17. Из-за диффузии газа из трубки длина свободного пробега электронов увеличивалась бы, а напряжение зажигания уменьшалось.

18. Чтобы избежать рассеяния частиц на молекулах, входящих в состав воздуха.

19. Да. Поскольку изменится оптическая разность хода лучей, определяемая показателем преломления среды.

20. В веществе скорость света меньше, чем в вакууме.

Микроопыт

От нити лампы к руке тепло передается излучением, не требующим наличия какой-либо промежуточной среды.

Кинематика и векторы

1. $\alpha_{1,2} = \arctg \frac{\operatorname{tg} \varphi \pm \beta \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi + 1 - \beta^2}}{1 - \beta^2}$, где $\beta = \frac{v}{c}$.

2. $\alpha \approx \frac{4\pi R}{vT} \approx 0,02$, $\alpha \approx 1^\circ$.

3. $L_{\min} = L \sin \alpha \cdot \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \alpha}}$;

$\tau = \frac{L(v_2 - v_1 \cos \alpha)}{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \alpha}$.

4. $v_0 = \sqrt{\left(\frac{L}{t}\right)^2 + \left(\frac{gt}{2}\right)^2} \approx 7,8 \text{ м/с}$; $\alpha = \arctg \frac{gt^2}{2L} \approx 50^\circ$.

5. Считая, что при броске на максимальную дальность лучшие результаты составляют примерно $L_{\max} = 30 \text{ м}$, получаем

$H_{\max} = \frac{L_{\max}}{2} \left(1 - \left(\frac{L}{L_{\max}}\right)^2\right) \approx 8,3 \text{ м}$.

6. $v_{02} = \sqrt{v_{01}^2 + \left(\frac{gL}{v_{01} \sin \alpha}\right)^2 - 2gL \operatorname{ctg} \alpha}$;

$\beta = \arctg \frac{2v_{01}^2 \sin^2 \alpha}{2gL - v_{01}^2 \sin 2\alpha}$. Отметим, что $\operatorname{tg} \beta > 0$ при условии

$2gL > v_{01}^2 \sin 2\alpha$.

7. $s_2 = 1,5s_1 = 21 \text{ м}$.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 6. *Указание.* Запишите уравнение в виде

$f(x) = f(\sqrt{3x+18})$,

где $f(t) = 3t - 2|t - 2|$. Функция f возрастает на всей числовой прямой, так что исходное уравнение равносильно такому:

$x = \sqrt{3x+18}$.

2. $x \in (-3; 7)$, $x \neq 2 \pm \sqrt{6}$, $x \neq \pm 2$. *Указание.* Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} (\lg(7-x) - \lg(x+3))^2 > 0. \\ x \neq -2, \quad x \neq 2 \pm 2\sqrt{6}. \end{cases}$$

3. 450/17; 255/8; 960/17. *Указание.* Докажите, что $\triangle CFD$ равнобедренный, BC – касательная к окружности, а треугольники BCF и CDF подобны. Подобны также и треугольники ACF и DBC .

4. Да; $C = 9/2$. *Указание.* Пусть

$f(x) = \left(\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2\right)^2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) + 4\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$,

$g(x) = A \cos(x + \varphi) + B \sin(2x + \psi) = A \sin\left(x + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + B \cos\left(2x + \psi - \frac{\pi}{2}\right)$.

Ясно, что $h(x) = f(x) + g(x) = \frac{9}{2}$ при всех x , если $A = -4$,

$B = \frac{1}{2}$, $\varphi = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$, $\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}$.

Наоборот, если $h(x) = \operatorname{const}$, то при всех x выполняются равенства

$h(x) - h(x + \pi) = 2\left(A \cos(x + \varphi) + 4 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right) = 0$,

$h(x) - h\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 2\left(B \sin(2x + \psi) - \frac{1}{2} \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)\right) = 0$,

откуда

$h(x) = 4 \cdot \frac{1}{2} + 0 + 0 = \frac{9}{2}$.

5. $\frac{169}{5292} \sqrt{187}$.

Заметим, что плоскость, проходящая через точку M пересечения диагоналей грани $ACC'A'$ и делящая объем призмы пополам, обязательно проходит через середину N ребра BB' : действительно, если она проходит через точку N , то делит призму на две симметричные относительно оси MN части, а если нет, то, пересекая грань $ACC'A'$ по некоторому отрезку KL (рис.4), она не может делить призму на равновеликие части, так как это уже делает плоскость KLN .

Таким образом, секущая плоскость перпендикулярна грани $ACC'A'$ и может пересекать эту грань либо по отрезку K_1L_1 (рис.5,а), либо по отрезку K_2L_2 (рис.5,б), где

$\alpha = \angle AMD$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$,

$AH = \frac{4}{13}$, $AM = \frac{5}{14}$,

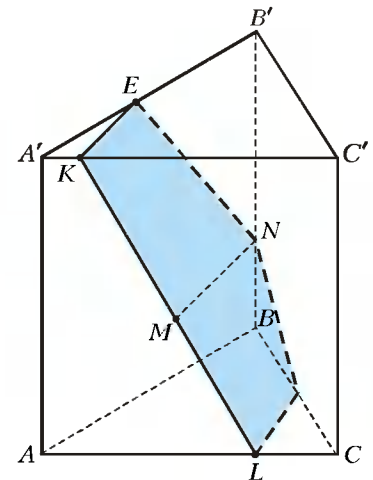


Рис. 4

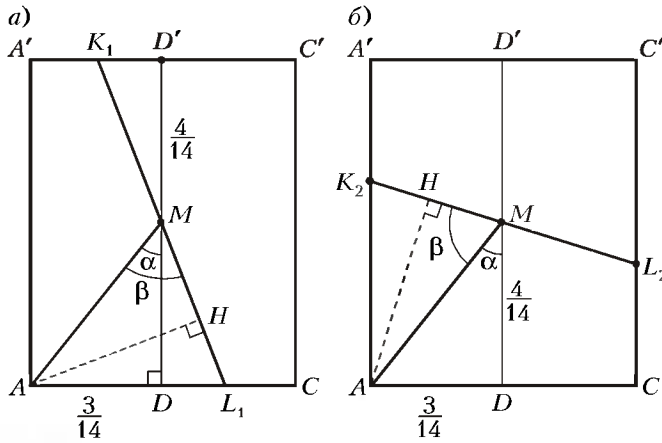


Рис. 5

$$\beta = \angle AMH, \sin \beta = \frac{56}{65}, \cos \beta = \frac{33}{65},$$

$$\cos \angle DML_1 = \cos(\beta - \alpha) = \frac{12}{13}, \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{5}{12},$$

$$\sin \angle DMK_2 = \sin(\beta + \alpha) = \frac{323}{325}.$$

В первом случае сечение выглядит, как на рисунке 4, и имеет площадь

$$S_1 = (MN + KE) \cdot KM = MN \left(1 + \frac{A'K_1}{A'D'} \right) ML =$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{14} \right)^2} \left(1 + \frac{\frac{3}{14} - \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{14}}{\frac{3}{14}} \right) \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{12}{13} =$$

$$= \frac{169}{14^2 \cdot 27} \sqrt{187} = \frac{169}{5292} \sqrt{187}.$$

Во втором случае сечение треугольное и имеет площадь

$$S_2 = K_2M \cdot MN = \frac{3}{325} \sqrt{1 - \left(\frac{3}{14} \right)^2} = \frac{975}{14^2 \cdot 323} \sqrt{187} < S_1.$$

6. $-\frac{3}{4}; \frac{4}{3}$. *Указание.* Множество решений каждого из неравенств системы

$$\begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 \leq 0, \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 \geq 0 \end{cases}$$

может представлять собой отрезок, объединение двух непересекающихся лучей (с началом), прямую, точку или пустое множество. Поэтому система может иметь единственное решение только в следующих случаях:

А. Решением одного из неравенств является ровно одна точка.

Б. Множества решений обоих неравенств имеют общую граничную точку, т.е. существует решение системы

$$\begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 = 0, \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 = 0. \end{cases}$$

Вариант 2

1. $(-\infty; -2] \cup [0; \lg 101 - 2)$. *Указание.* Неравенство преобразуется к виду $(\log_2 5 - 1) \log_5 y \leq 0$, где $y = 101 \cdot 10^x - 10^{2+2x}$.

2. Нет. *Указание.* Приведите уравнение к виду

$$12 \sin x = |5 \cos x - 4|.$$

Решениям этого уравнения соответствуют точки $A(u; v)$ и $B(u; v)$ пересечения единичной окружности $u^2 + v^2 = 1$ с графиком функции $12v = |5u - 4|$ (рис. 6).

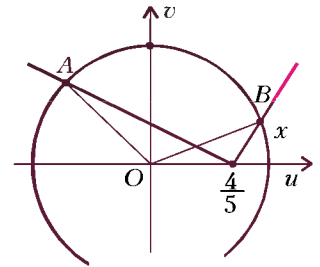


Рис. 6

3. $\frac{34}{9}$. *Указание.* Пусть O – центр параллелограмма, $BD = 2x$, $AC = 2y$. Тогда, так как $2(AB^2 + BC^2) = BD^2 + AC^2$, $BO \cdot BE = AO \cdot OC$, получаем систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x(9 - x) = y^2. \end{cases}$$

4. 618, 659, 698.

5. $(-\infty; -\frac{8}{7}) \cup (-\frac{1}{2}; 0) \cup (\frac{8}{9}; +\infty)$. *Указание.* Область значений функции $f(a) = a\sqrt{4 - a^4}$ – отрезок $-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$. Поэтому корнями данного уравнения не могут быть те и только те значения x , для которых либо $2x^4 + x^3 < 0$, либо $4\sqrt{2}x^4 + x^3 > \sqrt{2}|x + 4x^2 - 8|$. Осталось решить полученные неравенства.

6. 26; $\left[42; \frac{253 + 84\sqrt{3}}{8} \right]$.

Периметр сечения многогранника плоскостью, отстоящей от основания $A'B'C'D'$ (размером 6×7) на расстояние $x \in [0; h]$, где h – высота исходного параллелепипеда, представляет собой линейную функцию $P(x)$, так как сечение каждой из восьми перечисленных в условии граней есть отрезок, длина которого линейно зависит от x . Поэтому из равенств $P(0) = P(h) = 26$ следует, что функция $P(x)$ есть константа, равная 26.

Аналогично, площадь сечения $S(x)$ – квадратичная функция, удовлетворяющая равенствам $S(0) = S(h) = 42$, поэтому она достигает экстремума в точке $\frac{h}{2}$, т.е. когда плоскость сечения равноудалена от оснований (на рисунке 7

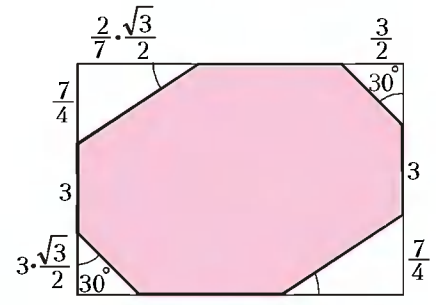


Рис. 7

удалена от оснований (на рисунке 7 изображен вид «сверху»). Это сечение представляет собой 8-угольник, площадь которого равна

$$S\left(\frac{h}{2}\right) = \left(\frac{7}{2} + \frac{7}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \right) \left(3 + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{7}{4} \right) -$$

$$- \frac{7}{4} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{253 + 84\sqrt{3}}{8} > 42.$$

Вариант 3

1. 12. 2. $\left\{ \left(\arccos\left(\frac{27}{28}\right) + 2\pi n; \pi + \arcsin\left(\frac{17}{28}\right) + 2\pi n \right); \right.$

$$\left(-\arccos\left(\frac{27}{28}\right) + 2\pi m; -\arcsin\left(\frac{17}{28}\right) + 2\pi n \right); m, n \in \mathbf{Z} \}.$$

3. 10 км/ч. *Указание.* Рассмотрите два случая: 1) встреча произошла до момента или в момент изменения скорости первым велосипедистом; 2) встреча произошла после изменения скорости первым велосипедистом.

4. $\frac{192}{17}$ или $\frac{1728}{25} = 69,12$. Пусть $ABCD$ – данный параллелограмм (рис.8), O_1, O_2, O_3 и O_4 – центры окружностей, описанных около треугольников AOB, BOC, COD и AOD соответственно.

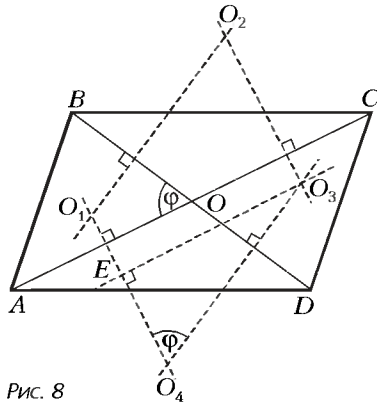


Рис. 8

Пусть $\angle AOB = \varphi$ ($0 < \varphi < \pi$). Так как O_1O_2, O_2O_3, O_3O_4 и O_1O_4 являются срединными перпендикулярами к отрезкам BO, CO, DO и AO соответственно, то $O_1O_2O_3O_4$ – параллелограмм, причем $\angle O_1O_4O_3 = \angle AOB = \varphi$. Пусть E – проекция точки O_3 на прямую O_1O_4 . Поскольку $AO = OC$,

имеем $O_3E = AO$. Тогда $AO = O_3O_4 \cdot \sin \varphi = 16 \sin \varphi$. По следствию из теоремы синусов для треугольника ABO , в котором известен радиус описанной окружности $R = 5$, получаем $AB = 2R \sin \varphi = 10 \sin \varphi$.

В том же треугольнике $BO = \frac{BD}{2} = 6$, следовательно, по теореме косинусов

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cos \varphi,$$

т.е.

$$100 \sin^2 \varphi = 256 \sin^2 \varphi + 36 - 192 \sin \varphi \cos \varphi.$$

Поделив полученное равенство на $12 \sin^2 \varphi$ ($\sin^2 \varphi \neq 0$), приходим к квадратному уравнению

$$3 \operatorname{ctg}^2 \varphi - 16 \operatorname{ctg} \varphi + 16 = 0.$$

Отсюда имеем два решения

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{4}{3} \text{ или } \operatorname{ctg} \varphi = 4.$$

Дальнейшие вычисления очевидны.

5. $\left[-3 - \frac{1}{\sqrt{3}}; 3\right] \cup \left[-3; -3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right]$;

$$\left(-4; -3 - \varphi(a)\right] \cup \left[-3 - \frac{1}{\sqrt{3}}; -3\right] \cup$$

$$\cup \left[-3; -3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[-3 + \varphi(a); -2\right] \text{ при } a \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{10}\right];$$

$$\left(-4; -3\right) \cup \left(-3; -2\right) \text{ при } a = \frac{1}{10};$$

$$\left(-4; -3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[-3 - \varphi(a); -3\right] \cup$$

$$\cup \left(-3; -3 + \varphi(a)\right] \cup \left[-3 + \frac{1}{\sqrt{3}}; -2\right] \text{ при } a \in \left(\frac{1}{10}; \frac{1}{3}\right];$$

$$\left(-4; -3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[-3 + \frac{1}{\sqrt{3}}; -2\right] \text{ при } a \in \left[\frac{1}{3}; +\infty\right).$$

Здесь использовано обозначение $\varphi(a) = \left(\frac{1-3a}{a+2}\right)^{\log_3 \sqrt{\frac{a+2}{1-3a}}}$.

Указание. Выполнив замену

$$t = 3^{-2\sqrt{-\log_{81}(x^2+6x+9)}} = 3^{-2\sqrt{-\log_9|x+3|}},$$

после преобразований приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} 3(a+2)t^2 + (8a-5)t - (3a-1) \geq 0. \\ 0 < t < 1. \end{cases}$$

6. $729\sqrt{6}; \frac{27-3\sqrt{11}}{4\sqrt{2}}$.

Докажем вспомогательное

Утверждение. Пусть в треугольнике GSH вписана окружность с центром в точке O , касающаяся его сторон GS и GH в точках K и M соответственно. Прямая KM пересекает прямую SO в точке P . Тогда $\angle SPH = 90^\circ$.

Доказательство. 1) Если треугольник GSH равнобедренный, $GS = SH$, то точки P и M совпадают. SM является биссектрисой, медианой и высотой треугольника GSH , поэтому угол SPH – прямой.

2) Пусть $SH < GS$. Тогда точки H и M лежат по одну сторону от прямой SO , а P лежит внутри треугольника GSH (рис.9).

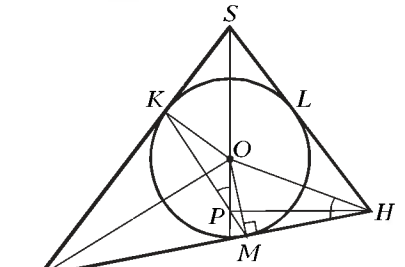


Рис. 9

Пусть $\angle GSH = \alpha$, $\angle SGH = \beta$, $\angle SHG = \gamma$.

Поскольку углы OKG и OMG – прямые, точки O, K, G, M лежат на одной окружности, следовательно, $\angle OKM =$

$$= \angle OGM = \frac{\beta}{2}. \text{ Тогда из треугольника } SKP \text{ имеем}$$

$$\angle SPK = \pi - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\gamma}{2}.$$

Поэтому $\angle OPM + \angle OHM = \pi$, следовательно, выпуклый четырехугольник $OPMH$ является вписанным в некоторую окружность. Но тогда $\angle OPH = \angle OMH = 90^\circ$.

3) Пусть теперь $SH > GS$. Тогда точки H и M лежат по разные стороны от прямой SO , а P находится вне треугольника GSH (рис.10).

Дословно повторяя рассуждения п.2), получаем

$$\angle OKM = \angle OGM = \frac{\beta}{2},$$

поэтому $\angle SPK = \frac{\gamma}{2}$. Так

как равные углы OPM и OHM опираются на один и тот же отрезок OM , а их вершины P и

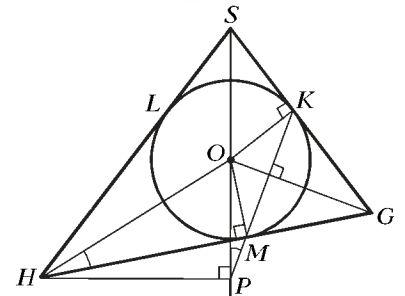


Рис. 10

H находятся по одну сторону от прямой OM , то существует окружность, проходящая через точки O, H, P, M . Следовательно, $\angle OPH = \angle OMH = 90^\circ$. Утверждение доказано.

Сфера, о которой идет речь в условии задачи, в пересечении с плоскостью ASB дает окружность, вписанную в треугольник GSH . Последний отсекается от треугольника ASB плоскостью, касающейся сферы в точке M (рис.11 и 12).

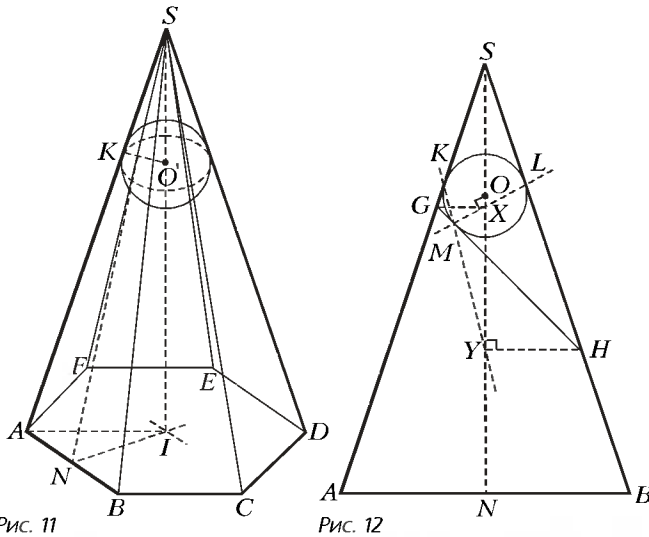


Рис. 11

Рис. 12

Обозначим $AB = a$ и $GH = b$. Из доказанного утверждения следует, что точки пересечения прямых KM и LM с апофемой SN грани ASB являются проекциями точек G и H на эту апофему. Следовательно, так как по условию задачи апофема делится прямыми KM и LM на три равных отрезка, одна из этих точек делит ребро в отношении $1 : 2$, а другая $2 : 1$. Пусть для определенности $SA = SB = 3x$, $SG = x$ и $SH = 2x$. Пусть $\angle ASB = \varphi$.

Применим теорему косинусов к треугольнику ASB :

$$18x^2 - 18x^2 \cos \varphi = a^2, \text{ откуда } \cos \varphi = 1 - \frac{a^2}{18x^2}.$$

Теорема косинусов для треугольника GSH дает

$$x^2 + 4x^2 - 4x^2 \left(1 - \frac{a^2}{18x^2}\right) = b^2, \text{ откуда } x^2 = \frac{9b^2 - 2a^2}{9}.$$

Поэтому $SA = \sqrt{9b^2 - 2a^2}$.

Пусть $SI = h$ – высота пирамиды. $AI = a$, поскольку $ABCDEF$ – правильный шестиугольник. Тогда $h = \sqrt{9b^2 - 3a^2}$.

Отсюда

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCDEF} \cdot h = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3b^2 - a^2}.$$

Пусть O' – центр сферы, $O'K = R$ – ее радиус. Из подобия прямоугольных треугольников SAI и $SO'K$ получаем $R =$

$$= a \frac{SK}{h}.$$

Используя теорему об отрезках касательных, выходящих из одной точки, имеем

$$SK = \frac{SG + SH - GH}{2} = \frac{\sqrt{9b^2 - 2a^2} - b}{2}.$$

Значит, $R = \frac{a(\sqrt{9b^2 - 2a^2} - b)}{2\sqrt{9b^2 - 3a^2}}.$

Подставляя данные задачи $a = 9$ и $b = 3\sqrt{11}$, находим ответ.

Вариант 4

1. $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$. 2. 119.

3. $\left(-\frac{9}{5}; \frac{12}{5}\right)$. *Указание.* Перепишите исходную систему в виде

$$\begin{cases} y \leq -3x - 3, \\ (x+2)^2 + (y+1)^2 \leq 4^2. \end{cases}$$

Поскольку значение функции

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = (x-3)^2 + (y-4)^2$$

равно квадрату расстояния r между точками $(x; y)$ и $(3; 4)$, то на множестве решений системы функция $f(x; y)$ принимает минимальное значение в точке, ближайшей к точке $(3; 4)$ (рис. 13).

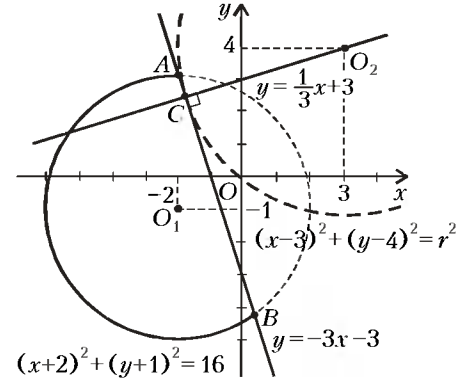


Рис. 13

4. $(4n+1)^2$, где $n \geq 0$ – целое. *Указание.* Приведем исходное уравнение к виду

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(6x+15\sqrt{x})\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}(2x-13\sqrt{x})\right) = 2.$$

Так как значение синуса не превосходит 1, это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}(6x+15\sqrt{x})\right) = 1, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}(2x-13\sqrt{x})\right) = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+15\sqrt{x} = 4k+1, & k \in \mathbb{Z}, \\ 2x-13\sqrt{x} = 4l+1, & l \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (1)$$

Решения системы (1) суть такие значения x ($x \neq 0$), для которых существуют некоторые целые k и l , удовлетворяющие уравнениям системы.

Докажем, что любое такое число x является квадратом целого числа. Вычитая из первого уравнения системы утроенное второе, получаем равенство

$$27\sqrt{x} = 2k - 6l - 1,$$

из которого следует, что $\sqrt{x} = p/q$, где p и q – взаимно простые нечетные натуральные числа. Тогда из второго уравнения системы (1) получим

$$2p^2 = q(13p + (4l+1)q),$$

что невозможно при нечетном $q > 1$.

Итак, $x = m^2$ – квадрат натурального числа.

Рассматривая остатки от деления числа m на 4, приходим к выводу, что система имеет решения в целых числах тогда и только тогда, когда число m равно $4n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$, т.е. $x = (4n+1)^2$, где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

5. $8 + 4\sqrt{6} - 10 \arcsin\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)$.

Пусть в трапеции $ABCD \parallel BC$, $BC = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ (рис. 14). Так как трапеция вписана в окружность, то она равнобокая: $AB = CD$. Пусть M и N – середины оснований трапеции BC и AD соответственно, тогда MN – высота трапеции, $MN = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Центр O описанной около трапеции окружности лежит на

прямой MN . Поскольку

$$MO = \sqrt{OC^2 - MC^2} = \sqrt{3} < MN,$$

точка O лежит внутри трапеции. Тогда

$$NO = MN - MO = \sqrt{2}, \text{ а } AN = ND = \sqrt{OD^2 - ON^2} = \sqrt{3}.$$

Следовательно, $AD > BC$, поэтому $\angle BAD = \angle CDA$ – острые углы, а $\angle ABC = \angle DCB$ – тупые углы.

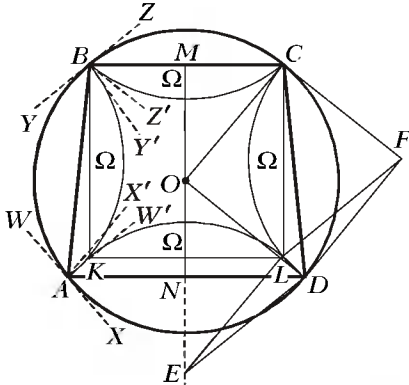


Рис. 14

Дуги AB, BC, CD и AD отражаются внутри трапеции симметрично относительно прямых AB, BC, CD и AD соответственно. Дуги, отраженные внутри трапеции, далее будем называть внутренними. Пусть XW и YZ – касательные, проведенные к окружности в точках A и B соответственно, AW', AX', BY' и

BZ' – лучи, симметричные лучам AW, AX, BY и BZ относительно прямых AB, AD, AB и BC соответственно. (Таким образом, AW' касается внутренней дуги AB в точке A, AX' касается внутренней дуги AD и т.д.)

Пусть E и F – точки, симметричные точке O относительно прямых AD и CD соответственно.

Заметим, что каждый из углов WAB, XAD – это угол между касательной и хордой, поэтому

$$\angle W'AB + \angle X'AD = \angle WAB + \angle XAD = \angle BCD > \angle BAD.$$

Это означает, что внутренние дуги AB и AD пересекаются внутри трапеции. Пусть K – точка их пересечения. Аналогично доказываем, что внутренние дуги CD и AD тоже пересекаются в некоторой точке L .

В то же время

$$\angle Y'BA + \angle Z'BC = \angle YBA + \angle ZBC = \angle ADC > \angle ABC,$$

откуда следует, что внутренние дуги AB и BC не пересекаются внутри трапеции. Аналогично, не пересекаются внутренние дуги BC и CD .

Так как $OC = OD = FC = FD = ED = EL = FL = \sqrt{5}$, то $OCFD$ и $ELFD$ – ромбы, значит, $OC \parallel FD \parallel EL$. Следовательно, $EOCL$ – параллелограмм, $CL = OE = 2ON = 2\sqrt{2}$, $CL \parallel OE$. Отсюда получается, что $BC = CL, BC \perp CL$. Аналогично доказывается, что $BC = BK, BC \perp BK$. Значит, $KBCL$ – квадрат. Таким образом, дуги BC, BK, CL и KL равны, так как это дуги равных окружностей, стягиваемые равными хордами. Дуги AB и BC не пересекаются внутри трапеции, следовательно, дуги BC, BK, CL и KL не пересекаются внутри квадрата $KBCL$.

Пусть Ω – площадь каждого из сегментов, отсекаемых равными хордами BC, BK, CL и KL от равных окружностей. Площадь s сегмента круга радиуса r , дуга которого задается центральным углом α , вычисляется по формуле

$$s = \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin \alpha).$$

В нашем случае $\sin \angle COM = \frac{\sqrt{2}}{5}, \cos \angle COM = \frac{\sqrt{3}}{5}$, значит,

$$\sin \angle BOC = \frac{2\sqrt{6}}{5}. \text{ Поэтому}$$

$$\Omega = \frac{5}{2} \left(\arcsin \left(\frac{2\sqrt{6}}{5} \right) - \frac{2\sqrt{6}}{5} \right).$$

Тогда окончательно получаем, что искомая площадь S фигуры, состоящей из всех точек трапеции, которые не принадлежат ни одному из отраженных внутрь нее сегментов, равна

$$S = BC^2 - 4\Omega = 8 - 10 \arcsin \left(\frac{2\sqrt{6}}{5} \right) + 4\sqrt{6}.$$

6. $(-13 - \sqrt{57}; 8)$. Указание. Пусть

$$a = f(x^2 - 2x - 112), \quad b = f(-2x\sqrt{32 - 2x}),$$

$$c = f(-2x\sqrt{32 - 2x} - 112).$$

Основание степени в знаменателе равно $3c - 2b = c + 2(c - b)$. Поскольку функция $f(x)$ отрицательна, $c < 0$. Разность $c - b < 0$ в силу возрастания $f(x)$, так как

$$-2x\sqrt{32 - 2x} > -2x\sqrt{32 - 2x} - 112.$$

Поэтому знаменатель $(c + 2(c - b))^7$ в исходном неравенстве отрицателен, и следовательно, неравенство равносильно неравенству

$$2a + |a - 3b| < 0,$$

которое равносильно двойному неравенству $2a < a - 3b < -2a$, равносильному системе

$$\begin{cases} a < -3b, \\ a < b. \end{cases}$$

Первое неравенство в системе выполнено вследствие отрицательности $f(x)$. Второе же в силу возрастания функции $f(x)$ равносильно неравенству

$$x^2 - 2x - 112 < -2x\sqrt{32 - 2x},$$

которое приводится к виду

$$(x + \sqrt{32 - 2x})^2 < 114,$$

после чего легко решается.

Вариант 5

- $(2; 3]$.
- $\frac{1 \pm \sqrt{1 + 5\pi n}}{5}, n \in \mathbf{Z}, n \geq 0$.
- $\log_3 2, 2\log_2 3$.
- $7\sqrt{3}$. Указание. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.

$$5. (-\sqrt{85/3}; -\sqrt{5/3}) \cup (\sqrt{5/3}; \sqrt{85/3}).$$

$$6. (13 + 2\sqrt{3})a.$$

Указание. Плоскость сечения, параллельная ребру SM двугранного угла, пересекает его грани по параллельным прямым AB и CD . Эти прямые отсекают на сторонах правильных треугольников (граней правильного тетраэдра) равные отрезки: $SA = MB, SD = MC \Rightarrow AD = BC$, причем $BC \parallel KM$.

$$7. \left(2a^2 + \frac{a}{2}; +\infty \right) \text{ при } a < 0;$$

$$\left(\frac{a^2}{18} + \frac{a}{2}; +\infty \right) \text{ при } a \geq 0.$$

Указание. Выполнив замену $t = \sqrt{2x - a}$, сведите задачу к решению системы

$$\begin{cases} 3t^2 + 5at - 2a^2 > 0, \\ t \geq 0. \end{cases}$$

8. $\frac{mk}{l}$. *Указание.* Пусть $NA \perp OL$, $NB \perp OM$, $NC \perp KM$, $ND \perp LM$; $NA = k$, $NB = m$, $NC = l$, $ND = n$.
 Проведем отрезки NK и NM . Тогда $\Delta NKA \sim \Delta NMD$ (в этих прямоугольных треугольниках $\angle NKA = \angle NML$ как вписанные, опирающиеся на дугу NL).
 Другая пара подобных прямоугольных треугольников имеет те же гипотенузы NK и NM : $\Delta NKC \sim \Delta NMB$ (угол NMB между хордой и касательной равен вписанному углу NKM , опирающемуся на дугу NM).
 Из этих двух подобий следует

$$\frac{k}{n} = \frac{NK}{NM} = \frac{l}{m} \Rightarrow mk = ln.$$

Вариант 6

1. $\pi n - 2, n \in \mathbf{Z}$.
2. $(-\infty; 2) \cup \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}; 3\right)$.
3. $-1; 2/3$.
4. $\frac{a}{2} \sqrt{kl}$.
5. $(-\infty; -2)$.
6. $\frac{80}{3}$.
7. $\frac{3\pi}{2}$ при $a = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$, при других a решений нет.

Указание. Приведите уравнение к виду

$$\cos 2x - \cos 2(x+a) = \sin a - 3.$$

Последнее равенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} \cos 2x = -1, \\ \cos 2(x+a) = 1, \sin a = 1. \end{cases}$$

8. Продолжим прямую MN ($MN \parallel AC$ по условию) до пересечения с окружностями (рис.15), тогда $AEFC$ — прямоугольник ($\angle AEN$ и $\angle MFC$ опираются на диаметры).

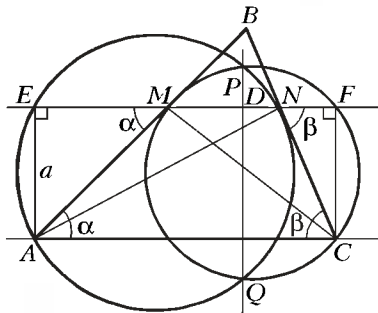


Рис. 15

Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$, $EA = FC = a$. Тогда $\angle EMA = \alpha$, $\angle FNC = \beta$, EN и PQ — пересекающиеся хорды одной окружности, MF и PQ — другой. Следовательно,

$ED \cdot DN = DP \cdot DQ$, $MD \cdot DF = DP \cdot DQ$, откуда получаем, что $ED \cdot DN = MD \cdot DF$. Подставив в эту формулу выражения $ED = EM + MD = a \operatorname{ctg} \alpha + MD$, $DF = DN + NF = DN + a \operatorname{ctg} \beta$, находим $\frac{MD}{DN} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \beta}$. Если $\frac{MD}{DN} = \sqrt{3}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, то $\beta = \frac{\pi}{3}$.

Вариант 7

1. $(0; 1) \cup (1; +\infty)$.
2. 1. *Указание.* Пусть $\angle A = \angle C = 2\alpha$. Тогда по теореме синусов

$$\frac{AD}{\sin \alpha} = \frac{DC}{\sin 2\alpha} = \frac{2 \cos \alpha}{\sin 2\alpha}.$$

3. $\pi n, n \in \mathbf{Z}$. *Указание.* $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 3x$.
4. 2. *Указание.* Левая часть уравнения не больше чем 3, а правая не меньше чем 3.

5. $[100; +\infty)$. *Указание.* Поскольку $|a| \geq a$ при любом a , левая часть не меньше чем $200x$, причем равенство возможно лишь тогда, когда все подмодульные выражения неотрицательны.

6. $[3; +\infty)$. *Указание.* Преобразуем систему к виду

$$\begin{cases} (x-1)(x-2)(x-a) \geq 0, \\ x(x-3)(x-a) \leq 0. \end{cases}$$

При $a \geq 3$ у системы единственное решение $x = a$. При $a < 3$ множества решений обоих неравенств содержат отрезок вида $[b; 3]$, где $b = \max(a, 2)$.

7. 4004001. Подставляя $x = 0, 1, 2, \dots, 2001$ в равенство

$$f(x+1) = f(x) + 2x + 1$$

и учитывая начальное значение $f(0) = 0$, имеем равенства

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, \\ f(2) &= f(1) + 2 \cdot 1 + 1, \\ f(3) &= f(2) + 2 \cdot 2 + 1, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$f(2000) = f(1999) + 2 \cdot 1999 + 1,$$

$$f(2001) = f(2000) + 2 \cdot 2000 + 1,$$

сложив которые, получаем

$$f(2001) = 2(1 + 2 + \dots + 1999 + 2000) + 1 \cdot 2001 = 2001^2.$$

Вариант 8

1. $\{-12\} \cup (7; +\infty)$.
2. $\pi n, \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.
3. $\left[\frac{1}{8}; 1\right) \cup (1; 16] \cup (64; +\infty)$.

4. $3/4$. *Указание.* Пусть t_1 и t_2 — целые числа часов, за которые первый и второй самолеты облетают свои окружности. По условию,

$$\begin{cases} 43 \leq 4t_1 \leq 49, \\ 43 \leq 5t_2 \leq 49, \\ |4t_1 - 5t_2| \geq 2, \end{cases}$$

откуда $t_1 = 12$, $t_2 = 9$, а поскольку скорости самолетов одинаковы, получаем $\frac{r}{R} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{3}{4}$.

5. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$. Медиана BD делит верхнюю сторону EF квадрата пополам (рис.16):

$$\frac{EL}{AD} = \frac{BL}{BD} = \frac{LF}{DC} \Rightarrow EL = FL.$$

Высота LN , опущенная из точки L на сторону AC , проходит через центр O квадрата.

Отрезок DM пересекает отрезок LN в точке O и делит его пополам. Поэтому, как и выше, имеем

$$\frac{BM}{LO} = \frac{MH}{ON} \Rightarrow BM = MH.$$

Таким образом, в треугольнике DMC сторона DC вдвое меньше стороны AC , а опущенная на DC высота MH вдвое меньше высоты

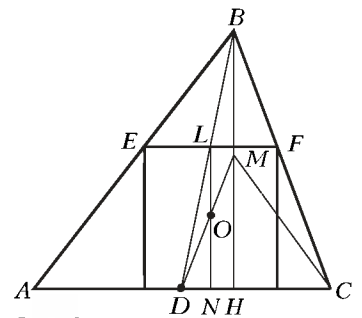


Рис. 16

ВН. Поэтому

$$S_{DMC} = \frac{1}{4} S_{ABC}.$$

6. $-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \pm 1, \pm\sqrt{3}$. *Указание.* Перепишем систему:

$$\begin{cases} \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{6-2a^2}x\right), \\ \cos x = \left(a - \frac{2}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{6-2a^2}x\right). \end{cases}$$

1) Если единственное на $[0; 2\pi]$ решение x не совпадает с $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$, то из первого уравнения последней системы вытекает,

что числа x и $\frac{\pi}{2} - \sqrt{6-2a^2}x$ имеют равные по модулю ненулевые косинусы, и тогда второе уравнение приводит к равенству $a - \frac{2}{3} = \pm 1$, т.е. $a = -\frac{1}{3}$ или $a = \frac{5}{3}$.

Убедитесь, что при $a = -\frac{1}{3}$ уравнение действительно имеет единственное решение на отрезке $[0; 2\pi]$, а при $a = \frac{5}{3}$ такое решение не единственно.

2) Если $\frac{\pi}{2}$ – единственное решение системы на $[0; 2\pi]$, то $a = \pm\sqrt{3}$.

3) Если $x = \frac{3\pi}{2}$ – единственное решение системы на $[0; 2\pi]$, то

$$\begin{aligned} -1 &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{6-2a^2} \frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \sqrt{6-2a^2} \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{6-2a^2} = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3}n, n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{6-2a^2} = \frac{2}{3}, 2 \Leftrightarrow a = \pm\frac{5}{3}, \pm 1. \end{aligned}$$

Осталось проверить найденные значения a .

Вариант 9

1. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbf{Z}$. 2. -1 . 3. $(3; 4]$. 4. $(2\sqrt{3} - 3)/6$.

5. $2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Неравенство приводится к виду

$$(\log_{\pi}(\sin x) - \log_{\pi}(\sin 2x))^2 \geq 0,$$

а последнее неравенство верно на всей области допустимых значений.

6. Нельзя. Возьмем систему координат с началом в угловом дереве и осями, направленными вдоль сторон участка (рис.17). Два других дерева должны располагаться вне круга с центром в O и радиусом 2,5, т.е. на выделенном на рисунке участке. Разница абсцисс этих деревьев получится меньше 2,

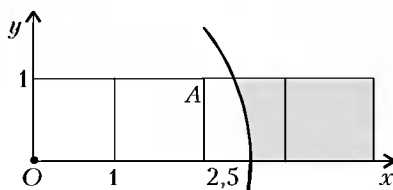


Рис. 17

а разница ординат – не больше 1. Следовательно, расстояние между ними будет меньше $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} < 2,5$, т.е. задание выполнить нельзя.

Вариант 10

1. $(1; 2] \cup (7; 8)$. 2. $\frac{\pi n}{5}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, n, k \in \mathbf{Z}, n, k \geq 0$.

3. $3 \pm \sqrt{5}$.

4. а) $\frac{16}{3}$, центр вне треугольника;

б) $\frac{8\sqrt{5}}{3}$, центр внутри треугольника.

5. $(1; 5); \left(\frac{5}{2}; 2\right)$. *Указание.* Перейдите к переменным $u = \frac{xy}{2}$, $v = 2x + y - xy$.

6. 7 ч; 55 км. Выберем прямоугольную систему координат с центром в точке C . Без уменьшения общности можно считать, что точка A находится на положительной полуоси абсцисс, а точка B – на положительной полуоси ординат. Тогда, поскольку по условию $AC = CB = 275$ (км), через время t (ч) после начала движения координаты первого мотоциклиста суть $(275 - 44t; 0)$, а второго – $(0; 275 - 33t)$. Квадрат расстояния $r(t)$ между этими точками равен

$$\begin{aligned} r^2(t) &= (275 - 44t)^2 + (275 - 33t)^2 = \\ &= 11^2((25 - 4t)^2 + (25 - 3t)^2) = 55^2(t^2 - 14t + 50). \end{aligned}$$

Минимум функции

$$r(t) = 55\sqrt{t^2 - 14t + 50}$$

в силу свойств квадратного трехчлена достигается при $t_0 = 7$ и равен

$$r(t_0) = 55\sqrt{49 - 98 + 50} = 55.$$

7. $\frac{3}{4}$. *Указание.* Так как сфера в точке A касается плоскости ABC , ее диаметр AD перпендикулярен этой плоскости. Сечением сферы плоскостью ABD является окружность с диаметром AD , для которой AB – касательная, а BD – секущая. Из прямоугольного треугольника ABD находим BD , а затем BM . Аналогично находим отрезки CD и CN , а потом и MN из треугольника DMN .

8. $\{3\} \cup [\sqrt{10}; \sqrt{11}]$. Решение данного уравнения – это две пересекающиеся серии

$$\begin{cases} x_1 = \pi n, \\ x_2 = \frac{13}{4}(2\pi n + 1), \end{cases} n \in \mathbf{Z}.$$

Заметим, что расстояние между соседними точками первой серии равно π , а второй – $\frac{13\pi}{2}$. Длина отрезка, указанного в условии задачи,

$$l = (a^2 + 1)\pi - 2a\pi = (a - 1)^2\pi.$$

Всякий отрезок, длина которого $l < 4\pi$, содержит не более четырех корней первой серии и не более одного – второй. Если же $l \geq 6,5\pi$, то отрезок такой длины содержит как минимум шесть корней первой серии и по крайней мере один – второй. Таким образом, ровно шесть различных корней уравнения на данном отрезке могут быть лишь при условии

$$4\pi \leq (a - 1)^2\pi < 6,5\pi \Leftrightarrow 2 \leq |a - 1| < \sqrt{6,5}.$$

Принимая во внимание условие задачи $a \geq 1$, имеем

$$3 \leq a < 1 + \sqrt{6,5}.$$

Если $a = 3$, то отрезок $[6\pi; 10\pi]$ содержит пять корней 6π ,

7π, 8π, 9π, 10π вида x_1 и корень $x_2 = \frac{39}{4}\pi$, т.е. ровно шесть корней.
Пусть $a > 3$. Учитывая неравенство $a < 1 + \sqrt{6,5}$, получаем, что левая граница заданного отрезка удовлетворяет условию

$$6\pi < 2a\pi < 2(1 + \sqrt{6,5})\pi < 8\pi.$$

Тогда для наличия ровно шести корней необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} 6 < 2a \leq 7, \\ 11 \leq a^2 + 1 < 2; \\ 7 < 2a < 2(1 + \sqrt{6,5}), \\ 12 \leq a^2 + 1 < 13, \end{cases}$$

т.е. $\sqrt{10} \leq a < \sqrt{11}$.

Вариант 11

1. $[-\sqrt{10}; -3) \cup (3; \sqrt{10}]$. *Указание.* Докажите, что $0 < \sqrt{31} - \sqrt{21} < 1$.

2. $\pm \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right) + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3. -9. *Указание.* Положим $b = a + d, c = a + 2d$. Выразив минимизируемое выражение через a и d , получим

$$2a^2 - 4b^2 - c^2 + 4bc + 6a = a^2 + 6a = (a + 3)^2 - 9.$$

Последнее выражение достигает минимума, равного -9, при $a = -3$. Осталось показать, что для этого a можно подобрать такое d , что числа $a - c = -2d, c - b = d, 2a = -6$ образует геометрическую прогрессию.

4. $2\sqrt{3}$. *Указание.* Смежные стороны ромба, а значит, и опирающиеся на них треугольники симметричны относительно одной из диагоналей ромба (рис.18). Поэтому четырехугольник ABCD является прямоугольником со сторонами, параллельными диагоналям ромба.

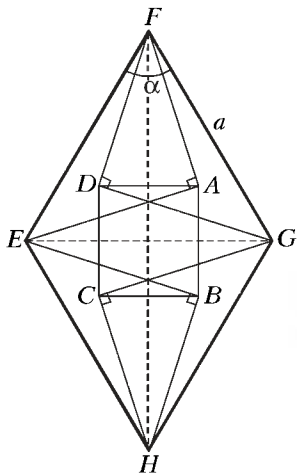


Рис. 18

5. 3. *Указание.* Поскольку $-1 \leq 2^x - 7 \leq 1$, то $x \leq 3$, но тогда $\frac{6\pi}{x} \geq 2\pi$. Однако левая часть уравнения не больше чем 2π , что возможно только при $x = 3$.

6. $\mathbf{Z} \setminus \{-11; -10; \dots; -4; -3\}$.

Указание. Первое неравенство задает на координатной плоскости Oxy круг с центром $(1; -2)$ и радиусом $|k + 5|$, второе - круг с центром $\left(\frac{k}{5}; -\frac{2k}{5}\right)$ и радиусом 1 (оба круга с границей).

Система имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда расстояние между центрами этих кругов не превосходит суммы радиусов, т.е. когда

$$\sqrt{\left(1 - \frac{k}{5}\right)^2 + \left(-2 + \frac{2k}{5}\right)^2} \leq |k + 5| + 1.$$

Осталось решить полученное неравенство.

Вариант 12

1. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

2. $(1; +\infty)$. 3. $19/44$. 4. 50%.

5. $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$. *Указание.* Первые два неравенства задают угол на плоскости Oxy . Прямые $y + ax = -1$ проходят через точку $(0; -1)$. Число a удовлетворяет условию, если прямая $y = -ax - 1$ пересекает обе стороны угла.

Вариант 13

1. $\left[0; \frac{15}{4}\right] \cup [4; +\infty)$.

2. 2 млн. 400 тыс. рублей и 3 млн. 600 тыс. рублей.

3. 36.

4. $(\log_2 49 - 4; \log_2 7)$. *Указание.* Введите переменную $t = \log_2(2^x - 3)$.

5. $\frac{\sqrt{356} - 12}{6}, \frac{\sqrt{164} - 12}{6}$. *Указание.* Уравнение приводится к виду

$$\cos\left(\pi\sqrt{6 - 4x - x^2} - \frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

Отсюда

$$\pi\sqrt{6 - 4x - x^2} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z},$$

т.е.

$$\sqrt{6 - 4x - x^2} = \frac{1}{3} + 2k, \text{ где } k = 0 \text{ или } k = 1.$$

6. $\arccos(6 - \sqrt{33})$. Заметим, что центр O шара, вписанного в правильную пирамиду $SAB CDE F$ с вершиной S , лежит на высоте SH пирамиды, а точка K касания вписанным шаром боковой грани SBC принадлежит апофеме этой грани.

Пусть P и Q - середины противоположных ребер BC и EF основания, T - середина бокового ребра SA , R - радиус вписанного шара, r - радиусы шаров с центрами в серединах ребер, $SH = h$.

Рассмотрим сечение SPQ (рис.19). Поскольку $SP \perp BC, QP \perp BC$, то $\angle SPH$ - плоский угол двугранного угла. Обозначим его величину через α .

Пусть a - длина стороны основания пирамиды, тогда

$PH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Так как $OK \perp SP, SH \perp PQ$, то $\angle KOS = \angle SPH$.

Отсюда $\triangle SKO \sim \triangle SPH$, следовательно,

$$\frac{OK}{SO} = \frac{PH}{SP}, \text{ т.е. } \frac{R}{h - R} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\sqrt{h^2 + \frac{3}{4}a^2}}.$$

Возведение в квадрат в последнем равенстве приводит к соотношению

$$3a^2(h - 2R) = 4R^2h. \tag{1}$$

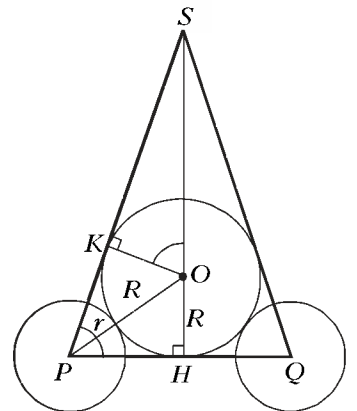


Рис. 19

Из прямоугольного треугольника OPH имеем

$$(R+r)^2 = R^2 + \frac{3}{4}a^2 \Leftrightarrow 4r^2 + 8Rr = 3a^2. \quad (2)$$

Рассмотрим далее диагональное сечение SAD (рис.20). Имея в виду, что $AH = a$, по теореме косинусов для треугольника STO получаем

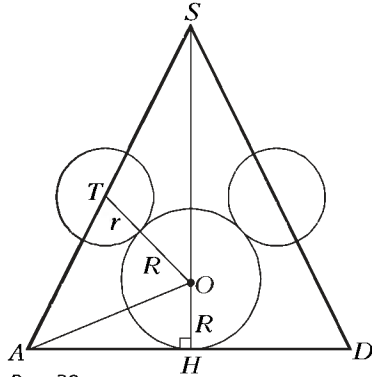


Рис. 20

$$\begin{aligned} (R+r)^2 &= \frac{1}{4}(h^2 + a^2) + \\ &+ (h-R)^2 - h(h-R) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4r^2 + 8Rr &= h^2 + a^2 - \\ &- 4Rh. \quad (3) \end{aligned}$$

Сравнивая (2) и (3), имеем

$$2a^2 = h^2 - 4Rh. \quad (4)$$

Теперь, исключая из (1) и (4) a^2 , получаем

$$3h^2 - 18Rh + 16R^2 = 0.$$

После деления на R^2 и обозначения $t = \frac{h}{R}$, учитывая вытекающее из (4) условие $h > 4R$, приходим к системе

$$\begin{cases} 3t^2 - 18t + 16 = 0, \\ t > 4 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{9 + \sqrt{33}}{3}.$$

Тогда из $\triangle SKO$ (см. рис. 19) имеем

$$\cos \alpha = \frac{OK}{SO} = \frac{R}{h-R} = \frac{1}{t-1} = \frac{3}{6 + \sqrt{33}} = 6 - \sqrt{33}.$$

7. $u = -187$; $v = -819$. Так как $20020 = 364 \cdot 55$, $364 = 2^2 \cdot 7 \cdot 13$, $55 = 5 \cdot 11$, то после деления почленно на 20020 приходим к биквадратному уравнению

$$a^4 + pa^2 - q = 0, \text{ где } p = \frac{u}{5 \cdot 11}, q = \frac{v}{2^2 \cdot 7 \cdot 13}.$$

Пусть $t = a^2$. Биквадратное уравнение имеет четыре различных корня тогда и только тогда, когда корни t_1, t_2 уравнения $t^2 + pt - q = 0$ положительны и различны. В соответствии с теоремой Виета это равносильно системе условий

$$\begin{cases} p < 0, \\ q < 0, \\ D = p^2 + 4q > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u < 0, \\ v < 0, \\ D > 0. \end{cases}$$

Пусть $0 < t_1 < t_2$, тогда корнями исходного уравнения являются $\pm\sqrt{t_1}, \pm\sqrt{t_2}$. В силу условия задачи,

$$\sqrt{t_1} : \sqrt{t_2} = 3:5 \Leftrightarrow 25t_1 = 9t_2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 25(-p - \sqrt{D}) &= 9(-p + \sqrt{D}) \Leftrightarrow -8p = 17\sqrt{D} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 8^2 p^2 &= 17^2 (p^2 + 4q) \Leftrightarrow 9 \cdot 25p^2 = -17^2 \cdot 4q. \end{aligned}$$

В исходных обозначениях получается равенство

$$3^2 \cdot 7 \cdot 13u^2 = 11^2 \cdot 17^2 \cdot (-v), \text{ где } u, v \in \mathbf{Z}, u, v < 0.$$

Следовательно, u делится на 17 и 11, а v делится на 9, 7 и 13. Среди чисел такого вида наибольшими отрицательными являются $u = -17 \cdot 11 = -187$, $v = -9 \cdot 7 \cdot 13 = -819$.

Вариант 14

- $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, k, n \in \mathbf{Z}$. 2. $0; \frac{15}{4}; 4$.
- 17100 руб. и 11400 руб. 4. 27.
- $(\log_3 28 - 3; \log_3 4)$. 6. $\frac{18 + \sqrt{503}}{6}; \frac{18 + \sqrt{335}}{6}$.

Вариант 15

- $3 \pm 5\sqrt{3}/2$. 2. $(-\infty; -8] \cup (12; +\infty)$.
- $2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n, 2\arccos \frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi n, 2\arccos \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$. Указание. Заменой $y = 2\sin x + \cos x$ уравнение приводится к виду $y^2 - 3y + 2 = 0$.
- 3; 4098/61.

Угол $\angle CBE$ в трапеции — острый, поэтому дуга CDE меньше 180° , а значит, для любой точки $X \in \overset{\frown}{CDE}$ будет $CX \leq CE = 10$. Следовательно, точка A лежит на дуге CBE . При этом, поскольку $CB = DE < CE = 10$, точка A должна лежать между точками B и E (рис.21).

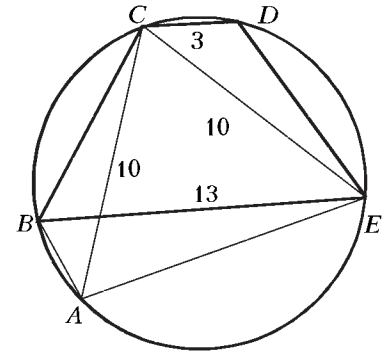


Рис. 21

Пользуясь равенством дуг, стягиваемых равными хордами, получаем $BA = CBA - CB = CDE - DE = CD$. Отсюда $BA = CD = 3$. Пусть $\angle ABE = \angle ACE = \alpha$. По теореме косинусов

$$\begin{aligned} AE^2 &= AB^2 + BE^2 - 2AB \cdot BE \cdot \cos \alpha = \\ &= AC^2 + CE^2 - 2AC \cdot CE \cdot \cos \alpha, \end{aligned}$$

откуда

$$\cos \alpha = \frac{22}{122} = \frac{11}{61} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{60}{61},$$

после чего без труда вычисляется S_{ABCE} .

- \emptyset при $a \leq -\sqrt[4]{\frac{1}{12}}$;
 $\left(\frac{-1 + \sqrt{1 - 12a^4}}{2a}; \frac{-1 - \sqrt{1 - 12a^4}}{2a} \right)$ при $-\sqrt[4]{\frac{1}{12}} < a < 0$;
 $(0; +\infty)$ при $a = 0$;
 $\left(-\infty; \frac{-1 - \sqrt{1 - 12a^4}}{2a} \right) \cup \left(\frac{-1 + \sqrt{1 - 12a^4}}{2a}; +\infty \right)$ при $0 < a \leq \sqrt[4]{\frac{1}{12}}$;
 $(-\infty; +\infty)$ при $a > \sqrt[4]{\frac{1}{12}}$.

Указание. Левая часть неравенства раскладывается на множители: $(x^2 + 2)(ax^2 + x + 3a^3)$.

Вариант 16

- $(-1; 0) \cup \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$. 2. $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.
- $8\frac{3}{4}\%$. 4. $7/8$. 5. $(-2 - 2\sqrt{2}; 0) \cup (0; -2 + 2\sqrt{2})$.

6. $-1; 2/7$. *Указание.* Выполните замену $t = \sqrt[3]{\frac{2}{x}} - 6$.

Вариант 17

1. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right] \cup [3; 2\sqrt{3})$. 2. $\frac{3\pi}{2}, 2\pi, 2\pi - \arccos \frac{2}{5}$.

3. 4 км/ч, 8 км/ч, 12 км/ч.

4. $\left(0; \frac{1}{3}\right) \cup [3; 3^{\sqrt{13}}]$. *Указание.* После замены $t = \log_3 x$ неравенство приводится к виду

$$(1+t)\sqrt[3]{\frac{t-1}{3(1+t)}} \leq 2.$$

5. $\angle BOC = 112,5^\circ$.

6. $\{-1\} \cup \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup \{1\}$. Преобразуем данную систему уравнений:

$$\begin{cases} ax + y = a, \\ ax^3 + y^3 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = a(1-x), \\ a(x^3 - 1) + a^3(1-x)^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = a(1-x), \\ a(x-1)(x^2 + x + 1 - a^2(x-1)^2) = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение последней системы приводит к рассмотрению трех случаев.

а) $a = 0$. Тогда система имеет бесконечно много решений вида $(t; 0)$, где $t \in \mathbf{R}$. Таким образом, значение $a = 0$ не является искомым. б) $x = 1$. Очевидно, система имеет решение $(1; 0)$ при любом a . в) Третий вариант сводится к системе

$$\begin{cases} y = a(1-x), \\ x^2 + x + 1 - a^2(x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = a(1-x), \\ (a^2 - 1)x^2 - (2a^2 + 1)x + a^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Заметим, что $x = 1$ не удовлетворяет второму уравнению ни при каком значении параметра a . Поэтому искомыми являются те и только те значения a , при которых система в) имеет не более одного решения.

У этой системы уравнений при $a^2 = 1$ есть единственное решение $(0; a)$. Если же $a^2 \neq 1$ ($a \neq 0$), то квадратное уравнение (а с ним и система) имеет не более одного решения при условии, что дискриминант

$$D = (2a^2 + 1)^2 - 4(a^2 - 1)^2 = 3(4a^2 - 1) \leq 0,$$

что равносильно $0 < |a| \leq \frac{1}{2}$.

7. $(\pi n; \pi n - 1)$, $n \in \mathbf{Z}$. Преобразуем выражение под радикалом:

$$A = 3 + 2x - 2y + 2xy - x^2 - y^2 = -(x - y - 1)^2 + 4.$$

Отсюда с учетом неотрицательности подкоренного выражения имеем $0 \leq A \leq 4$.

Заметив, что $\cos x \neq 0$, перепишем данное уравнение, переходя к переменной $t = \operatorname{tg} x$:

$$t^2 - (\sqrt{A} - 2)t + 2 - \sqrt{A} = 0.$$

Это уравнение может иметь решения лишь при условии неотрицательности дискриминанта:

$$(\sqrt{A} - 2)^2 - 4(2 - \sqrt{A}) \geq 0, \text{ т.е. } A \geq 4.$$

Сравнивая с полученным ранее ограничением, имеем $A = 4$.

Тогда

$$\begin{cases} t = 0, \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, & n \in \mathbf{Z}, \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, \\ y = \pi n - 1, \end{cases} \quad n \in \mathbf{Z}.$$

ФИЗИКА

Физический факультет

1. На рисунке 22 сплошной линией показано положение сечения цилиндра вертикальной плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра, в тот момент времени t , когда доска, лежащая на нем, образует со столом угол α . Пунктирной линией изображено положение указанного сечения по прошествии небольшого промежутка времени Δt . Считая (как обычно это и делается при решении подобных задач) цилиндр, стол и доску твердыми телами, можно утверждать, что прямая, проходящая через вершину угла и центр сечения цилиндра, является биссектрисой угла α .

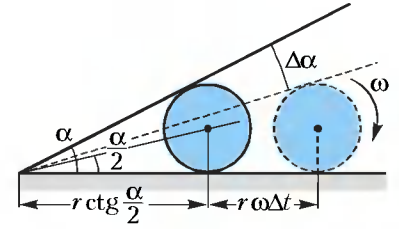


Рис. 22

Поскольку цилиндр катится по столу без проскальзывания с угловой скоростью ω и его ось остается параллельной оси вращения доски, ось цилиндра за промежуток времени Δt переместится на расстояние $\Delta s = r\omega\Delta t$, где r — радиус цилиндра, а доска повернется на угол $\Delta\alpha$. Учитывая, что выбранный промежуток времени Δt достаточно мал, можно считать, что угол $\Delta\alpha$ мал и вращение доски в течение этого промежутка времени неотличимо от равномерного. Поэтому, если искомую скорость вращения доски обозначить Ω , то $\Delta\alpha = \Omega\Delta t$. С другой стороны, из геометрии получим

$$r \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha - \Delta\alpha}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) = r\omega\Delta t.$$

Поскольку $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$, а синус малого угла равен самому углу (измеренному в радианной мере), искомая угловая скорость равна

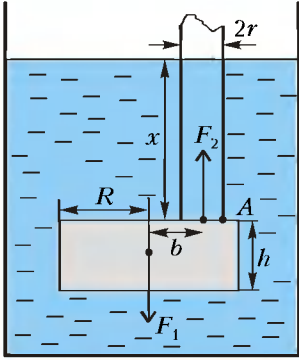
$$\Omega = 2\omega \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

2. Будем решать задачу, полагая, что бочка покоится относительно инерциальной системы отсчета, а подъем диска осуществляется столь медленно, что можно пренебречь силами сопротивления движению диска со стороны воды. Когда диск находился на дне бочки, на него действовали сила тяжести, сила реакции дна и сила Архимеда (из-за шероховатости дна). Считая воду несжимаемой и полагая плотность воды равной $\rho_v = 1 \text{ г/см}^3$, получим, что равнодействующая сил тяжести и гидростатического давления в этом случае должна быть равна $F_1 = \pi R^2 h (\rho - \rho_v) g$, где g — ускорение свободного падения. В силу симметрии диска можно утверждать, что эта сила приложена к центру тяжести диска.

После того как к диску прижали трубку, поршень подняли вверх и диск оторвался от дна бочки, сила реакции дна стала равной нулю, а на участок верхней плоскости диска, ограниченный контуром трубки, стали действовать силы со стороны трубки. Действие же сил гидростатического давления воды на этот участок прекратилось. По условию задачи, вплоть до момента отрыва в трубке под поршнем не должно находиться никакого вещества, поэтому результирующая сил гидростатического давления воды, действующих на диск, когда его

верхняя плоскость оказалась на глубине x , должна была уменьшиться по сравнению с действовавшей на лежавший на дне бочки диск на величину $F_2 = \pi r^2 (\rho_b g x + p_a)$, где p_a – атмосферное давление. Ясно, что сила \vec{F}_2 направлена вертикально вверх и приложена к точке диска, лежащей на его верхней плоскости и совпадающей с осью трубки.

На рисунке 23 показано сечение бочки вертикальной плоскостью, проходящей через центр диска и ось трубки. Здесь же изображены силы, действующие на диск (за исключением сил реакции со стороны стенок трубки) для случая, когда диск уже не касается дна, но еще не отрывается от трубки. При отрыве на диск со стороны трубки может действовать только сила реакции, приложенная в точке A . Запишем условие отрыва диска от трубки в виде



$$rF_2 = (b+r)F_1.$$

Подставляя в это выражение ранее найденные значения сил

Рис. 23

F_1 и F_2 и полагая $p_a = 1$ атм, а $g = 9,8$ м/с², определим искомую глубину отрыва:

$$x = \left(1 + \frac{b}{r}\right) \left(\frac{\rho}{\rho_b} - 1\right) \frac{R^2 h}{r^2} - \frac{p_a}{\rho_b g} \approx 55 \text{ см.}$$

3. В положении равновесия сумма сил натяжения нити, действующих на блок, уравнивает силу тяжести $M\vec{g}$, действующую на блок с прикрепленным к нему грузом. Поскольку нить гладкая, при смещении груза из положения равновесия блок не должен вращаться вокруг своей оси, а силы натяжения нити в точках, лежащих на горизонтальном диаметре блока, должны быть одинаковы. Более того, так как нить невесома, модуль силы натяжения нити при переходе от одной ее точки к другой должен оставаться постоянным.

В силу нерастяжимости нити, отсутствия вращения блока вокруг своей оси и жесткой связи оси блока с грузом можно утверждать, что дополнительные деформации первой (Δx_1) и второй (Δx_2) пружин при смещении груза по вертикали из положения равновесия на величину Δx должны удовлетворять соотношению $\Delta x = (\Delta x_1 + \Delta x_2)/2$, причем $k_1 \Delta x_1 = k_2 \Delta x_2$. Поскольку в задаче спрашивается, при каких амплитудах вертикальные колебания груза могут быть гармоническими, силами сопротивления движению частей системы следует пренебречь. Тогда на основании закона сохранения механической энергии можно утверждать, что приращение потенциальной энергии системы при максимальном смещении груза из равновесного положения должно быть равно кинетической энергии системы в равновесном положении. Так как массой пружин и нити по условию задачи следует пренебречь, а груз и жестко связанный с ним блок движутся поступательно, максимальная кинетическая энергия равна

$$W_{k \max} = \frac{Mv_{\max}^2}{2},$$

где v_{\max} – максимальная скорость груза. При смещении груза вниз от равновесного положения на величину Δx_{\max} приращение потенциальной энергии будет равно

$$\Delta W_{n \max} = -Mg\Delta x_{\max} + \frac{k_1 \left((\Delta x_{1p} + \Delta x_{1 \max})^2 - \Delta x_{1p}^2 \right)}{2} + \frac{k_2 \left((\Delta x_{2p} + \Delta x_{2 \max})^2 - \Delta x_{2p}^2 \right)}{2},$$

где $k_1 \Delta x_{1p} = k_2 \Delta x_{2p} = 0,5Mg$ и $\Delta x_{1 \max} + \Delta x_{2 \max} = 2\Delta x_{\max}$. Учитывая, что при гармонических колебаниях $v_{\max} = \omega \Delta x_{\max}$, из закона сохранения энергии следует, что частота малых вертикальных колебаний груза равна

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)M}}.$$

Наконец, поскольку максимальное ускорение груза, направленное вниз, не может превышать ускорения свободного падения (нить не может толкать блок вниз!) и амплитуда ускорения в ω^2 раз больше амплитуды колебаний, т.е. $\omega^2 \Delta x_{\max} \leq g$, колебания груза могут оставаться гармоническими, если их амплитуда удовлетворяет неравенству

$$\Delta x_{\max} \leq \frac{k_1 + k_2}{4k_1 k_2} Mg.$$

4. По условию задачи, шайба, двигаясь по поверхности ямки, периодически поднимается на одну и ту же высоту. Поэтому нужно считать, что при своем движении шайба не испытывает действия неконсервативных сил, а так как шайба является гладкой, сила реакции со стороны поверхности ямки может быть направлена только к центру ямки по ее радиусу. Учитывая также направление силы тяжести, действующей на шайбу, можно утверждать, что шайба должна двигаться в вертикальной плоскости, проходящей через ось вращения стола и остающейся неподвижной, т.е. движение шайбы должно быть подобно движению грузика математического маятника.

По условию, максимальная высота подъема шайбы $h_{\max} = (1 - \cos \alpha_{\max})R$ много меньше радиуса ямки R . Следовательно, максимальная величина угла, образуемого вертика-

лью и прямой, соединяющей шайбу с центром ямки (рис.24), мала: $\alpha_{\max} \ll 1$ рад, т.е. шайба совершает колебания с малой амплитудой. Тогда зависимость угла α от времени можно представить в виде $\alpha(t) = \alpha_{\max} \cos \omega t$ (где ω – частота колебаний), если считать, что в момент времени $t = 0$ шайба находилась на максимальной высоте. Согласно этому закону движения, шайба должна находиться на высоте h над дном ямки в такие моменты времени τ , кото-

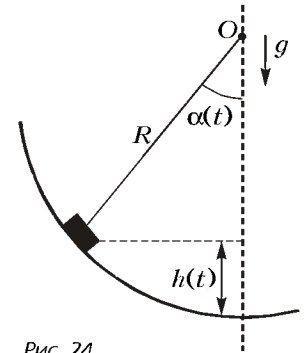


Рис. 24

рые удовлетворяют уравнению $h(\tau) = (1 - \cos \alpha(\tau))R$, или, учитывая малость угла, $h(\tau) = (R\alpha_{\max}^2 \cos^2 \omega \tau)/2$. Поскольку $h(\tau) = h_{\max}/k$, получаем

$$\tau = \pm \frac{1}{\omega} \arccos \sqrt{\frac{1}{k}} + 2\pi N, \text{ где } N \in \mathbf{Z}.$$

Полагая, что при движении шайбы вверх угол α увеличивается, наиболее близкий к моменту времени $t = 0$ момент, когда движущаяся вверх шайба может оказаться на заданной вы-

соте, равен $\tau_1 = -\frac{1}{\omega} \arccos \sqrt{\frac{1}{k}}$. Очевидно, что в следующий раз шайба окажется на той же высоте, двигаясь вниз, т.е. в

момент времени $\tau_2 = \frac{1}{\omega} \arccos \sqrt{\frac{1}{k}}$. Так как за промежуток времени от τ_1 до τ_2 стол совершил n оборотов, период обращения стола должен быть равен $T = 2\tau_2/n$. Учитывая, что частота малых колебаний равна $\omega = \sqrt{g/R}$, находим искомый

период обращения стола:

$$T = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{R}{g}} \arccos \sqrt{\frac{1}{k}} = \frac{\pi}{2n} \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

5. Поскольку цилиндр является гладким и его ось вертикальна, после отпущения поршня и установления в цилиндре термодинамического равновесия давление газа p_k должно компенсировать действие сил тяжести на поршень (по условию задачи, давление вне цилиндра равно нулю): $p_k S = Mg$.

На основании уравнения Клапейрона–Менделеева находим объем, занимаемый газом после установления нового равновесного состояния: $V_k = \nu RT_k / p_k$, где R – универсальная газовая постоянная, а T_k – конечная температура неона. Следовательно, высота, на которой будет находиться поршень в конечном состоянии, больше первоначальной на величину $h = (V_k - V) / S$.

Как известно, неон (как и любой инертный газ) является одноатомным газом. Внутренняя энергия моля идеального одноатомного газа равна $U = 1,5RT$ и не зависит от его объема.

На основании закона сохранения энергии можно записать $1,5\nu R(T_k - T_0) = -Mgh$. Решая это уравнение с учетом составленных ранее соотношений, находим, что температура неона после установления нового равновесного состояния равна

$$T_k = \frac{3T_0}{5} + \frac{2MgV}{5\nu RS}.$$

Из этого выражения следует, что поршень после отпущения не будет двигаться и температура неона не изменится, если в исходном состоянии $MgV = \nu RST_0$. Если же $MgV < \nu RST_0$, температура неона в конечном состоянии должна быть меньше первоначальной, а поршень должен был подняться вверх. В противном случае, конечная температура неона должна быть больше первоначальной. При этом увеличение внутренней энергии неона обусловлено работой над ним со стороны поршня, который в конечном состоянии должен оказаться на высоте, меньшей первоначальной.

6. Согласно приведенному графику температура газа на участке 1–2 повышается. Следовательно, газ на этом участке получает от нагревателя тепло в количестве

$Q_{12} = 11\nu R(T_2 - T_1) / 6$, где ν – количество молей газа. На участках 2–3 и 3–1 газ отдает холодильнику количество теплоты

$$Q_{23} = 1,5\nu R(T_2 - T_3) + 2,5\nu R(T_3 - T_1) = \nu R(1,5T_2 + T_3 - 2,5T_1),$$

где T_3 – температура газа в точке 3.

Полагая, что КПД машины, работающей по указанному циклу, равен КПД цикла, можно утверждать, что

$$\eta = 1 - \frac{Q_{23}}{Q_{12}} = \frac{4T_1 + 2T_2 - 6T_3}{11(T_2 - T_1)}.$$

Учитывая, что $n = T_2 / T_1$, находим

$$T_3 = \frac{4 + 2n - 11(n-1)\eta}{6} T_1.$$

По условию задачи, используемый в качестве рабочего тела газ является идеальным одноатомным. Поскольку на участке 2–3 молярная теплоемкость газа равна $1,5R$, можно утверждать, что на этом участке газ охлаждался изохорически, значит, отношение давлений газа в точках 2 и 3 равно отношению температур газа в этих точках. На участке 3–1 молярная теплоемкость газа равна $2,5R$. Поэтому охлаждение газа на этом участке должно происходить изобарически, т.е. при неизменном давлении, а потому $p_1 = p_3$. Следовательно, искомое отношение давлений равно

$$x = \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2}{p_3} = \frac{T_2}{T_3} = n \frac{T_1}{T_3} = \frac{6n}{4 + 2n - 11(n-1)\eta}.$$

7. Согласно классической теории, электропроводность металлов обусловлена наличием в них свободных электронов, кото-

рые под действием постоянного электрического поля дрейфуют с постоянной скоростью в направлении, противоположном направлению этого поля. Поэтому, если обозначить концентрацию свободных электронов n , величину скорости дрейфа v , модуль заряда электрона e , а площадь поперечного сечения проводника S , то сила тока I , текущего по проводнику, равна $I = envS$.

Как известно, сопротивление однородного проводника длины L и площадью поперечного сечения S равно $R = \rho L / S$, где ρ – удельное сопротивление материала проволоки. Учитывая, что проволоки изготовлены из одного и того же материала с малым температурным коэффициентом, следует считать удельные сопротивления проволок неизменными и одинаковыми.

При параллельном подключении проволок к аккумулятору с ЭДС \mathcal{E} в каждой из них течет ток $I_i = \mathcal{E} / R_i$, или $envS_i = \mathcal{E} S_i / (\rho L_i)$, где v – скорость дрейфа носителей в этом случае. Из этого выражения следует, что обе проволоки имеют одну и ту же длину L .

При последовательном соединении проволок сила тока в проволоках должна быть одинаковой и равной

$I = env_1 S_1 = en(v/k) S_1 = env_2 S_2$, так как скорость дрейфа носителей в первой проволоке во втором случае в k раз меньше, чем в первом случае. С другой стороны, при последовательном соединении должно выполняться соотношение

$$\mathcal{E} = I(R_1 + R_2) = I\rho L(S_1^{-1} + S_2^{-1}) = en\rho L(v_1 + v_2) = en\rho Lv.$$

Следовательно, $v_2 = (k-1)v_1$, а искомое отношение диаметров проволок равно

$$x = \frac{d_1}{d_2} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \sqrt{\frac{v_2}{v_1}} = \sqrt{k-1} = 2.$$

8. На движущиеся в магнитном поле вместе с проволокой свободные носители заряда действует сила Лоренца, равная $F_{Л} = qvB$, где q – заряд носителя, и направленная перпендикулярно скорости носителя и индукции магнитного поля. Под действием этой силы происходит перераспределение зарядов, в результате чего возникает электрическое поле, стремящееся скомпенсировать действие силы Лоренца. При установившемся движении в каждой точке проволоки должно существовать электрическое поле, напряженность которого равна $E = F_{Л} / q = vB$ и направлена против силы Лоренца. Поэтому точки, лежащие в поперечном сечении проволоки, не будут эквипотенциальными. Однако, считая проволоку достаточно тонкой, разностью потенциалов между точками одного и того же поперечного сечения можно пренебречь. Вместе с тем, можно утверждать, что на участке проволоки, находящемся между цилиндрами с радиусами R и r , будет существовать электрическое поле, величина составляющей которого, направленной по радиусу цилиндра, равна

$E(\rho) = v(\rho)B = v\rho B / R$, где ρ – удаление точки провода от оси вращения. На рисунке 25 приведена зависимость величины этой составляющей от ρ . Приращение разности потенциалов между столь близкими точками, находящимися на расстоянии $\Delta\rho$ в направлении действия поля, что напряженность поля $E(\rho)$ между ними можно считать постоянной, равно

$\Delta\phi(\rho, \rho + \Delta\rho) = -E(\rho)\Delta\rho$. Тогда получим, что искомая разность потенциалов должна быть равна

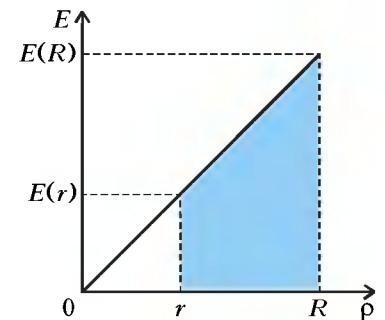


Рис. 25

площади выделенной на рисунке трапеции:

$$\Delta\varphi(r, R) = \frac{E(R) + E(r)}{2}(R - r) = \frac{vB}{2R}(R^2 - r^2),$$

причем потенциал верхнего конца проволоки больше, чем потенциал точки проволоки, прикрепленной к грузу.

9. Поскольку падающий на линзу, параллельно ее главной оптической оси, пучок света является узким, т.е. радиус пучка R много меньше фокусного расстояния F линзы, то после прохождения собирающей линзы все лучи этого пучка должны пройти через главный фокус F , находящийся за линзой. Если же линза рассеивающая, то выходящий из линзы пучок должен быть расходящимся, а продолжения выходящих из линзы лучей должны пересекаться перед линзой в ее главном фокусе. По условию задачи, диаметр r светового пучка на экране, стоящем за линзой, меньше R . Следовательно, используемая линза является собирающей, а экран может находиться либо ближе фокуса (на экран падает сходящийся пучок), либо дальше фокуса (падающий на экран пучок света является расходящимся). По условию задачи, после погружения линзы вместе с экраном в жидкость с показателем преломления n_1 диаметр светового пучка на экране не изменяется, а потому из двух рассмотренных случаев возможен лишь второй случай.

На рисунке 26 показано сечение линзы L и экрана \mathcal{E} плоско-стью, содержащей главную оптическую ось OF линзы.

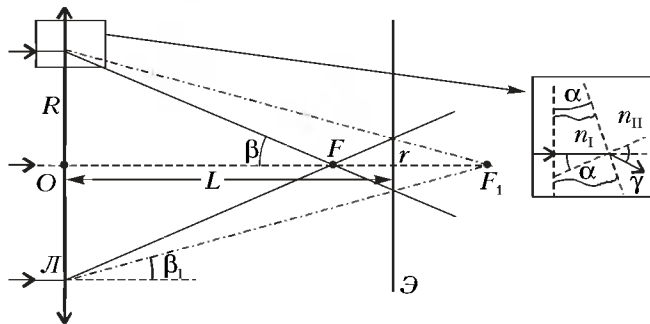


Рис. 26

Сплошными линиями показан ход двух крайних лучей пучка, выходящего из находящейся в воздухе линзы, а пунктиром изображены крайние лучи пучка, выходящего из линзы, погруженной в жидкость (эти лучи должны были бы пересечься в точке F_1 – главном фокусе линзы, находящейся в жидкости). Поскольку $R \ll F < F_1$, углы отклонения крайних лучей пучка после преломления в линзе (β – в случае, когда линза находилась в воздухе, и β_1 – в жидкости) малы.

В квадратной рамке на рисунке 26 изображен столь малый кусочек линзы, что часть его сферической поверхности практически неотличима от соприкасающейся с линзой в данном месте плоскости. Сплошной линией со стрелками показан ход падающего и выходящего из изображенного на рисунке кусочка линзы луча. По условию задачи, пучок падает нормально на плоскую поверхность линзы, поэтому внутри линзы лучи не изменяют своего направления, а испытывают преломление только на сферической поверхности. По закону преломления величины угла падения α и угла преломления γ на плоской границе двух однородных изотропных сред с абсолютными показателями преломления n_1 и n_{11} должны удовлетворять соотношению $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{n_{11}}{n_1}$. Учитывая, что углы отклонения β и β_1 малы, в соответствии с соотношением $\gamma_i = \alpha + \beta_i$, можно записать

$$\beta = (n - 1)\alpha \text{ и } \beta_1 = (n/n_1 - 1)\alpha.$$

Обратившись к рисунку 26 и учитывая последнее замечание, получим

$$R = \beta F = \beta_1 F_1 \text{ и } k^{-1} = r/R = L/F - 1 = 1 - L/F_1,$$

где L – расстояние от линзы до экрана.

Отсюда найдем

$$\frac{\beta}{\beta_1} = \frac{(n-1)n_1}{n-n_1} = \frac{F_1}{F} = \frac{1+k}{k-1},$$

а потому искомый показатель преломления стекла линзы равен

$$n = \frac{2n_1}{1+k+(1-k)n_1}.$$

10. На рисунке 27 схематически показано расположение точечного источника S , экрана \mathcal{E}_1 с отверстиями O_1, O_2 и второго экрана \mathcal{E}_2 . Поскольку источник является точечным и посылает свет на два малых отверстия, в соответствии с принципом Гюйгенса–Френеля следует считать, что эти отверстия являются точечными вторичными когерентными источниками. Поэтому на втором экране должны наблюдаться две накладываются друг на друга интерференционные картины, соответствующие длинам волн λ_1 и λ_2 . Как известно, результат интерференции определяется разностью фаз налагающихся колебаний: при разности фаз, кратной 2π , будет наблюдаться интерференционный максимум, а при разности фаз, кратной нечетному числу π , – интерференционный минимум. В однородной изотропной среде разность фаз налагающихся колебаний однозначно определяется разностью хода приходящих в данную точку лучей. Поскольку отверстия в первом экране расположены симметрично относительно источника S , то вторичные источники O_1 и O_2 следует считать синфазными, а разность хода δ лучей, попадающих от этих источников в точку наблюдения A , как это видно из рисунка 27, равна $\delta = O_2A - O_1A$, где $O_1A = \sqrt{L^2 + (b-d/2)^2}$, $O_2A = \sqrt{L^2 + (b+d/2)^2}$. По условию задачи.

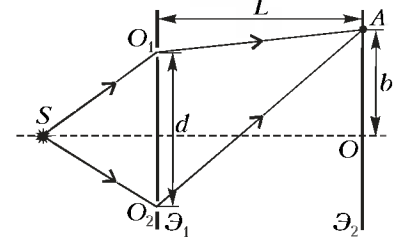


Рис. 27

$L = 70 \text{ см} \gg b = 5 \text{ см}$, поэтому, пользуясь формулой приближенного вычисления $\sqrt{1+\epsilon} \approx 1 + \epsilon/2$, справедливой при условии $\epsilon \ll 1$, разность хода δ с достаточной степенью точности можно вычислить следующим образом:

$$\delta \approx \left(1 + 0,5 \left(\frac{b+d/2}{L} \right)^2 - 1 - 0,5 \left(\frac{b-d/2}{L} \right)^2 \right) L = \frac{bd}{L}.$$

В точке A должен иметь место интерференционный максимум для одной длины волны и интерференционный минимум для другой длины волны, поэтому должно выполняться соотношение

$$\delta = \frac{2n+1}{2}\lambda_1 = n\lambda_2.$$

Отсюда находим порядок интерференционного максимума для второй длины волны:

$$n = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

и искомое расстояние между отверстиями:

$$d \approx \frac{L\lambda_1\lambda_2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)b} \approx 4 \text{ мм}.$$

Факультет вычислительной математики
и кибернетики

- $\Delta l_{\max} = \sqrt{mga/k} / (\sqrt{2} + 1) \approx 4,1 \text{ см.}$
- $v_0 = \sqrt{2\mu gL \left(\frac{M}{m} \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) + 1 - \alpha \right)} = 1 \text{ м/с.}$
- $\alpha = \pi/4 \approx 0,8.$
- $v_{\text{ср}} = \frac{3x_0}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \approx 0,48 \text{ м/с.}$
- $T_2 = T_1 \frac{H}{h} + \frac{MkH(H-h)}{mR} = 487,5 \text{ К.}$
- $\alpha = \frac{3 M_{\text{Ne}} - M_{\text{He}}}{2 M_{\text{Ne}} - 3M_{\text{He}}} = 3.$
- $m = \frac{q^2}{32\pi\epsilon_0 g R^2} \left(\frac{2R}{h} \right)^{3/2}$
- $Q = \frac{E^2 R_1^3 L}{2(R+R_1)(rR+rR_1+RR_1)^2} = 1,14 \text{ Дж.}$
- $l = \frac{d}{2\alpha(n-1)} \approx 50 \text{ см.}$
- $F = \frac{2l_1 l_2 (l_1 + l_2)}{(l_1 - l_2)^2} = 120 \text{ см.}$

Химический факультет

- $N_1 = Nv/(v+u) = 50.$
- $m = \rho a_2^2 (a_2 - a_1) + (m_1 a_2^2 / a_1^2 - m_2) \approx 4,1 \text{ кг.}$
- $\Delta T = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{2N-1} \right) \approx 0,3 \text{ К, где } \alpha = 2 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}.$
- $A = RT(k-1)/k = 1250 \text{ Дж.}$
- $A = 1,5 p_1 V_1 = 300 \text{ Дж.}$
- $m = \frac{p_0 MS}{RT} \frac{p_0 S - Mg}{k} = 11,7 \text{ г.}$
- $q = \epsilon_0 (\epsilon - 1) UV / l^2 = 3,6 \cdot 10^{-8} \text{ Кл.}$
- $r = 3H / \left(2\sqrt{n^2 - 1} \right) \approx 3,4 \text{ м.}$
- $\varphi = \arcsin \left(1 / \sqrt{1 + n^2} \right).$
- $q_{\max} = 4\pi\epsilon_0 R (hc/\lambda - A) / e \approx 2 \cdot 10^{-11} \text{ Кл.}$

Октаэдр из шести углов

(Начало см. на 4-й странице обложки.
Автор головоломки — А. Калинин)

В этой простой, на первый взгляд, головоломке спрятан один секрет — в одиночку, т.е. двумя руками, ее собрать невозможно, даже глядя на картинку с решением. Нужна по крайней мере еще одна рука. Пока вы не вставите шестой уголок, который делает конструкцию жесткой, даже правильно зацепленные элементы будут стараться выскользнуть из ваших рук, заставляя начинать все сначала. Чтобы преодолеть эту трудность, москвичка Ирина Новичко-

ва, автор многих головоломок, предлагает надевать на концы проволок не по одному, а по два шарика с расстоянием между ними, равным диаметру шарика. Такую конструкцию легче удержать в руках, и головоломку можно решать в одиночку.

Еще меньше времени требуется для изготовления головоломки, состоящей из трех согнутых под углом 60° кусочков проволоки, из которых требуется собрать тетраэдр.

Если кому-нибудь из читателей удастся придумать и собрать из уголков головоломки в форме других многогранников, просим написать об этом в редакцию и прислать соответствующие модели.

В заключение два совета по изготовлению: проволоку лучше брать жесткую, диаметром 1–2 мм, углы сгиба для головоломки-октаэдра делать немного больше 90°, а для тетраэдра — немного больше 60°.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Курьер образования
<http://www.courier.com.ru>

Vivos Voco!
<http://vivovoco.nns.ru>
(раздел «Из номера»)

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов,
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.В.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.И.Пацхверия,
Е.А.Силина, П.И.Чернуцкий

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»,
тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховском полиграфическом комбинате
Комитета Российской Федерации по печати
142300 г. Чехов Московской области
Заказ №